TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Anna Marita Laanemaa

Laplace'i teisenduse kasutamine diferentsiaalvõrrandite lahendamisel

Magistritöö

Juhendaja: professor Arvet Pedas

Tartu 2015

Sisukord

Sissejuhatus

Olgu funktsioon f määratud poollõigus $[0, \infty)$. Funktsiooni f Laplace'i teisenduseks nimetatakse integraalteisendust kujul

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Parameeter s on üldiselt kompleksarv, kuid käesolevas töös (välja arvatud paragrahv 3) eeldame, et s on reaalarv. Lisaks märgime, et selles töös enamasti rakendatakse Laplace'i teisendust tükiti pidevatele ja eksponentsiaalse kasvuga funktsioonidele, mida nimetatakse originaalideks. Laplace'i teisendust (1) märgitakse sageli kujul $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ või $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$.

Teisenduse (1) juured algavad šveitsi matemaatiku ja füüsiku Leonhard Euleri ($1707-1783$) töödest aastatel 1763 ja 1769. Kuid kõnealune teisendus on nimetatud siiski Laplace'i teisenduseks prantsuse matemaatiku, füüsiku ja astronoomi Pierre-Simon Laplace'i ($1749-1827$) auks, kes kasutas seda teisendust esmakordselt oma tõenäosusteooria alases töös aastal 1782 (vt [3], lk $319-331$).

Magistritöö on põhiliselt referatiivse iseloomuga ja tugineb peamiselt raamatutes [2], [4] ja [8] toodud tulemustele. Töö koosneb kümnest paragrahvist ja lisas toodud tabelitest.

Töö esimeses paragrahvis on antud Laplace'i teisenduse definitsioon ja näidatud, et originaalil leidub Laplace'i teisendus. Samuti on leitud mõningate lihtsamate funktsioonide Laplace'i teisendused.

Järgmises paragrahvis on esitatud kaks tähtsamat Laplace'i teisenduse omadust: lineaarsuse ja originaali diferentseerimise omadus. Need on vajalikud lineaarsete konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandite Cauchy ülesannete lahendamiseks Laplace'i teisenduse abil.

Kolmandas paragrahvis on antud üldine valem Laplace'i teisenduse pöördteisenduse leidmiseks.

Neljandas paragrahvis on antud ülevaade klassikalisest meetodist lineaarsete n-järku harilike diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks.

Töö viiendas paragrahvis on lahendatud Laplace'i teisenduse abil kolm konstantsete kordajatega lineaarse diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesannet. Üldine lahenduskäik Cauchy ülesande lahendi y leidmiseks Laplace'i teisenduse abil on järgmine:

1) kõigepealt rakendame Laplace'i teisendust antud diferentsiaalvõrrandile;

2) avaldame saadud seosest funktsiooni Y, kus $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ ja y on lähteülesande otsitav funktsioon;

3) leiame Laplace'i teisenduse pöördteisenduse abil otsitava funktsiooni $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right].$

Et saada ettekujutust Laplace'i teisendusele tugineva meetodi töömahukusest, on näited $5.1-5.3$ lahendatud kahel viisil $-$ kõigepealt klassikalise meetodi abil ja seejärel meetodiga, mis kasutab Laplace'i teisendust.

Kahes järgnevas paragrahvis on esitatud mõned abitulemused, mida kasutatakse käesoleva töö järgnevates osades. Kuuendas paragrahvis on toodud sisse konvolutsiooni mõiste ja leitud funktsioonide konvolutsiooni Laplace'i teisendus. Seitsmendas paragrahvis on defineeritud gamma- ja beetafunktsioon ning vaadeldud mõningaid nende omadusi. Lisaks on esitatud valem, mis seob gammafunktsiooni Laplace'i teisendusega.

Kaheksandas ja üheksandas paragrahvis vaadeldakse kahte võimalust funktsiooni murrulist järku tuletise defineerimiseks. Esmalt on defineeritud Riemann-Liouville'i murruline tuletis. Seejärel on esitatud Caputo tuletise definitsioon. On leitud ka lihtsamate funktsioonide Riemann-Liouville'i ja Caputo murrulised tuletised. Samuti on tõestatud seos Reimann-Liouville'i ja Caputo murruliste tuletiste vahel. Lõpuks on leitud Riemann-Liouville'i integraali ja Caputo tuletise Laplace'i teisendused.

Töö viimases paragrahvis on toodud mõned näited Laplace'i teisenduse rakendamise kohta Caputo murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrandi algväärtusülesande lahendamiseks.

§1 Laplace'i teisenduse mõiste

Olgu funktsioon $f = f(t)$ määratud, kui $t \in [0, \infty)$.

Definitsioon 1.1. *Teisendust kujul*

$$F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.1}$$

mis seab funktsioonile f vastavusse funktsiooni F, nimetatakse funktsiooni f Laplace'i[1] *teisenduseks.*

Parameeter s on üldiselt kompleksarv ja funktsioon f võib omada kompleksseid väärtusi. Käesolevas töös on s enamasti reaalarvuline muutuja ja funktsiooni f väärtused on reaalarvud. Seosega (1.1) antud vastavust funktsioonide f ja F vahel märgitakse sageli kujul $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ (mõnikord ka näiteks $F(s) = \mathcal{L}f(t)$ või $F(s) \risingdotseq f(t)$).

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{\tau\to\infty} \int\limits_0^\tau e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

siis integraal

$$\int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

koondub ja funktsioonil f on olemas Laplace'i teisendus (1.1); vastasel juhul integraal (1.2) hajub ja funktsioonil f ei ole Laplace'i teisendust.

Järgnevalt leiame mõned elementaarfunktsioonide Laplace'i teisendused. Edaspidi hakkame kasutama järgmisi tähistusi: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ja $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Näide 1.2. Leiame funktsiooni $f(t) = c$ ($t \geqslant 0$, $c \in \mathbb{R}$) Laplace'i teisenduse.

Kui $s > 0$, siis

$$\int\limits_0^\infty e^{-st} c\,\mathrm{d}t = c \lim_{\tau\to\infty} \int\limits_0^\tau e^{-st}\,\mathrm{d}t = -c \lim_{\tau\to\infty} \left(\frac{e^{-s\tau}}{s} - \frac{1}{s} \right) = \frac{c}{s}.$$

Seega $s > 0$ korral funktsiooni $f(t) = c$ Laplace'i teisendus avaldub kujul $\mathcal{L}[c](s) = \dfrac{c}{s}$. Kui $s \leqslant 0$, siis ei eksisteeri lõplikku piirväärtust $\lim\limits_{\tau\to\infty} \int\limits_0^\tau e^{-st} c\,\mathrm{d}t$, st integraal (1.2) hajub ja funktsioonil $f(t) = c$ puudub Laplace'i teisendus.

[1] Pierre Simon de Laplace (1749−1827) - prantsuse matemaatik, füüsik, astronoom

Näide 1.3. Leiame funktsiooni $f(t) = e^{\omega t}$ $(t \geqslant 0, \omega \in \mathbb{R})$ Laplace'i teisenduse.
Definitsiooni 1.1 põhjal

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{\omega t}\right](s) &= \int\limits_0^\infty e^{-st}e^{\omega t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty}\int\limits_0^\tau e^{-(s-\omega)t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{e^{-(s-\omega)\tau}}{s-\omega} - \frac{1}{s-\omega}\right) = \frac{1}{s-\omega}, \qquad s > \omega.\end{aligned}$$

Niisiis, funktsiooni $e^{\omega t}$ Laplace'i teisendus $\mathcal{L}\left[e^{\omega t}\right](s) = \dfrac{1}{s-\omega}$ on määratud, kui $s > \omega$.

Näide 1.4. Leiame funktsiooni $f(t) = \sin\omega t$ $(t \geqslant 0,\ \omega \in \mathbb{R})$ Laplace'i teisenduse.

Paneme tähele, et kui $\omega = 0$, siis

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[0](s) = 0.$$

Olgu ω nullist erinev reaalarv ja $s > 0$. Definitsiooni 1.1 põhjal

$$\mathcal{L}\left[\sin\omega t\right](s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

ehk

$$\mathcal{L}[\sin\omega t](s) = \lim_{\tau\to\infty}\int\limits_0^\tau e^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

Integraali

$$\int\limits_0^\tau e^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

ositi integreerides saame

$$\int\limits_0^\tau e^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-s\tau}\cos\omega\tau}{\omega} + \frac{1}{\omega} - \frac{s}{\omega}\int\limits_0^\tau e^{-st}\cos\omega t\,\mathrm{d}t. \tag{1.4}$$

Seega võrduste (1.3) ja (1.4) põhjal

$$\mathcal{L}[\sin\omega t](s) = \frac{1}{\omega} - \frac{s}{\omega}\lim_{\tau\to\infty}\int\limits_0^\tau e^{-st}\cos\omega t\,\mathrm{d}t. \tag{1.5}$$

Integraali

$$\int_0^\tau e^{-st}\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

ositi integreerides saame

$$\int_0^\tau e^{-st}\cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-s\tau}\sin\omega\tau}{\omega} + \frac{s}{\omega}\int_0^\tau e^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t. \tag{1.6}$$

Järelikult võrduste (1.5) ja (1.6) abil

$$\mathcal{L}[\sin\omega t](s) = \frac{1}{\omega} - \frac{s^2}{\omega^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

ehk

$$\mathcal{L}[\sin\omega t](s) = \frac{1}{\omega} - \frac{s^2}{\omega^2}\mathcal{L}[\sin\omega t](s). \tag{1.7}$$

Avaldame seosest (1.7) funktsiooni $\mathcal{L}[\sin\omega t](s)$:

$$\mathcal{L}[\sin\omega t](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \tag{1.8}$$

kus $s > 0$. Seega funktsiooni $f(t) = \sin\omega t$ $(t \geqslant 0,\, \omega \in \mathbb{R})$ Laplace'i teisendus avaldub kujul (1.8), kus $s > 0$.

Analoogiliselt saame, et funktsiooni $f(t) = \cos\omega t$ $(t \geqslant 0,\, \omega \in \mathbb{R})$ Laplace'i teisendus omab kuju

$$\mathcal{L}[\cos\omega t](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \qquad \omega \in \mathbb{R},\ s > 0. \tag{1.9}$$

Näide 1.5. Näitame, et

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \tag{1.10}$$

kus $s > 0$, $t \geqslant 0$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Tõestus. Olgu $n = 1$. Siis definitsiooni 1.1 põhjal

$$\mathcal{L}[t](s) = \int_0^\infty e^{-st}t\,\mathrm{d}t.$$

Ositi integreerides leiame

$$\int_0^\infty e^{-st} t \, \mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty} \left(-\frac{te^{-st}}{s} \Bigg|_0^\tau + \frac{1}{s} \int_0^\tau e^{-st} \, \mathrm{d}t \right).$$

Näite 1.2 abil järeldub siit, et

$$\mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s^2},$$

kus $s > 0$. Järelikult valem (1.10) kehtib $n = 1$ korral.

Eeldame nüüd, et seos (1.10) kehtib $n = k$ puhul. Näitame, et see väide kehtib ka $n = k + 1$ korral. Definitsiooni 1.1 põhjal

$$\mathcal{L}\left[t^{k+1}\right](s) = \int_0^\infty e^{-st} t^{k+1} \, \mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} t^{k+1} \, \mathrm{d}t.$$

Olgu $\mathrm{d}u = e^{-st} \, \mathrm{d}t$ ja $v = t^{k+1}$, siis $u = -\dfrac{e^{-st}}{s}$ ning $\mathrm{d}v = (k+1)t^k \, \mathrm{d}t$. Saame, et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t^{k+1}\right](s) &= \lim_{\tau\to\infty} \left(-\frac{t^{k+1}e^{-st}}{s} \Bigg|_0^\tau + \frac{k+1}{s} \int_0^\tau e^{-st} t^k \, \mathrm{d}t \right) \\
&= -\lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau^{k+1}e^{-s\tau}}{s} + \frac{k+1}{s} \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} t^k \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{k+1}{s} \mathcal{L}\left[t^k\right](s).
\end{aligned}$$

Eelduse põhjal

$$\mathcal{L}\left[t^k\right](s) = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

Järelikult

$$\mathcal{L}\left[t^{k+1}\right](s) = \frac{k+1}{s} \mathcal{L}\left[t^k\right](s) = \frac{k+1}{s} \frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{s^{k+2}}.$$

Seega väide kehtib ka $n = k + 1$ korral ning võrdus (1.10) on tõestatud. □

Et integraal (1.2) koonduks, tuleb üldjuhul funktsioonile f seada teatavad tingimused.

Definitsioon 1.6. *Öeldakse, et funktsioon f on eksponentsiaalse kasvuga σ poollõigus $[0, \infty)$, kui leiduvad konstandid $M > 0$ ja σ nii, et iga $t > 0$ korral*

$$|f(t)| \leqslant Me^{\sigma t}.$$

Definitsioon 1.7. *Arvude σ alumist raja σ_0 nimetatakse funktsiooni f kasvu näitajaks.*

Definitsioon 1.8. *Öeldakse, et funktsioon f on tükiti pidev lõigus $[a, b]$, kui leidub lõplik jaotus osalõikudeks punktidega $a = \kappa_1 < \kappa_2 < \cdots < \kappa_n = b$ $(n \in \mathbb{N})$ nii, et igas vahemikus (κ_i, κ_{i+1}) on funktsioon f pidev ja punktid $\kappa_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}$, on funktsiooni f I liiki katkevuspunktideks*[2].

Öeldakse, et funktsioon f on tükiti pidev poollõigus $[0, \infty)$, kui ta on iga $N > 0$ korral tükiti pidev lõigus $[0, N]$.

Definitsioon 1.9. *Funktsiooni f nimetatakse originaaliks, kui see rahuldab järgmisi tingimusi:*

1. *funktsioon f on pidev või tükiti pidev koos teatud järku tuletistega poollõigus $[0, \infty)$;*

2. *funktsioon f on eksponentsiaalse kasvuga σ poollõigus $[0, \infty)$.*

Definitsioon 1.10. *Seosega* (1.1) *määratud funktsiooni F nimetatakse originaali f kujutiseks.*

Osutub, et iga originaali f jaoks eksisteerib kujutis F. See järeldub järgmisest teoreemist.

Teoreem 1.11. *Kui funktsioon f on originaal ja $s > \sigma$, kus σ on funktsiooni f eksponentsiaalne kasv, siis integraal* (1.2) *koondub absoluutselt.*

Tõestus. Olgu funktsioon f originaal ning $s > \sigma$. Siis iga $\tau > 0$ korral

$$\begin{aligned}\int_0^\tau |e^{-st} f(t)|\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^\tau e^{-st}|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\tau e^{-st} M e^{\sigma t}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant M \int_0^\tau e^{-(s-\sigma)t}\,\mathrm{d}t = -M\left(\frac{e^{-(s-\sigma)\tau}}{s-\sigma} - \frac{1}{s-\sigma}\right)\end{aligned}$$

[2] see tähendab, et leiduvad lõplikud ühepoolsed piirväärtused $\lim\limits_{t\to\kappa_i+} f(t) = f(\kappa_i+)$ ja $\lim\limits_{t\to\kappa_i-} f(t) = f(\kappa_i-),\ i = 1, \ldots, n$. Määramispiirkonna otspunktidelt κ_1 ja κ_n saab nõuda üheainsa ühepoolse piirväärtuse olemasolu.

ja seega

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau |e^{-st}f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-st}|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{s-\sigma}.$$

ehk

$$\int_0^\infty \left|e^{-st}f(t)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{s-\sigma}. \tag{1.11}$$

Järelikult integraal (1.2) koondub absoluutselt. □

Näide 1.12. Leida funktsiooni

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{kui} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1, & \text{kui} \quad t > 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Laplace'i teisendus.

Paneme tähele, et funktsiooni (1.12) eksponentsiaalne kasv $\sigma = 0$. Seega teoreemi 1.11 põhjal leidub funktsioonil (1.12) Laplace'i teisendus, kui $s > 0$. Originaali (1.12) korral

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-st}t\,\mathrm{d}t + \lim_{\tau\to\infty}\int_1^\tau e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Ositi integreerimise abil saame, et iga $s \neq 0$ korral

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-st}t\,\mathrm{d}t &= -\frac{te^{-st}}{s}\bigg|_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\bigg|_0^1 = \frac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^2}.\end{aligned}$$

Kui $s > 0$, siis

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_1^\tau e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty}\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_1^\tau = \lim_{\tau\to\infty}\frac{e^{-s\tau}}{-s} + \frac{e^{-s}}{s} = \frac{e^{-s}}{s}.$$

Järelikult

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s^2},$$

kus $s > 0$.

Järgnev teoreem annab tarviliku tingimuse, et funktsioon F saaks olla originaali f kujutiseks.

Teoreem 1.13. *Kui funktsioon f on originaal ja $s > \sigma$, kus σ on funktsiooni f eksponentsiaalne kasv, siis*

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0.$$

Tõestus. Olgu funktsioon f originaal, $s > \sigma$ ja $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$. Siis võrratuse (1.11) põhjal teame, et

$$|F(s)| \leqslant \int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{s-\sigma}, \qquad s > \sigma.$$

Seega

$$\lim_{s\to\infty} |F(s)| = 0,$$

mille põhjal

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f](s) = \lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

$\square$

§2 Laplace'i teisenduse omadused

Järgnevalt esitame kaks Laplace'i teisenduse omadust (vt [6]), mis on edaspidi vajalikud.

Lause 2.1 (**Lineaarsus**). *Kui funktsioonidel f_1 ja f_2 leidub Laplace'i teisendus vastavalt $s > \sigma_1$ ja $s > \sigma_2$ korral, kus $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$, siis funktsioonil $f_1 + f_2$ leidub Laplace'i teisendus $s > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ korral ja*

$$\mathcal{L}\left[c_1 f_1 + c_2 f_2\right](s) = c_1 \mathcal{L}\left[f_1\right](s) + c_2 \mathcal{L}\left[f_2\right](s),$$

kus c_1 ja c_2 on konstandid.

Näide 2.2. Näitame, et funktsioonil

$$f(t) = \cosh \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}, \quad t \geqslant 0,\ \omega \in \mathbb{R},$$

leidub Laplace'i teisendus kujul $\mathcal{L}[f](s) = \dfrac{s}{s^2 - \omega^2}$, kus $s > |\omega|$.

Kuna lause 2.1 põhjal

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right](s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{\omega t}\right](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-\omega t}\right](s),$$

siis näite 1.3 abil saame tulemuseks

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{s}{s^2 - \omega^2}, \quad s > |\omega|.$$

Analoogiliselt saame, et kui $t \geqslant 0$ ja $\omega \in \mathbb{R}$, siis

$$\mathcal{L}[\sinh \omega t](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right](s) = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}, \quad s > |\omega|. \tag{2.1}$$

Lause 2.3 (**Originaali diferentseerimine**). *Olgu $n \in \mathbb{N}$. Kui funktsioonid f, f', …, $f^{(n-1)}$ on pidevad poollõigus $[0, \infty)$ ja eksponentsiaalse kasvuga σ ning $f^{(n)}$ on tükiti pidev poollõigus $[0, \infty)$, siis $s > \sigma$ korral*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0). \tag{2.2}$$

§3 Laplace'i teisenduse pöördteisendus

Olgu funktsioon f originaal ja $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$, kus parameeter s on kompleksarv.

Definitsioon 3.1. *Teisendust $\mathcal{L}^{-1}$, mille abil saame leida originaali f, teades kujutist F, nimetatakse Laplace'i teisenduse pöördteisenduseks.*

Laplace'i teisenduse pöördteisendus esitub Riemanni[3]-Mellini[4] valemiga (vt [4], lk 188)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)\,\mathrm{d}s = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}, \tag{3.1}$$

milles $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ ja $\mathcal{R}e\ s = x > \sigma_0$, kus σ_0 on funktsiooni f kasvu näitaja. Võrduse (3.1) vasakul poolel olevat integraali mõistetakse Cauchy[5] peaväärtusena, st

$$\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)\,\mathrm{d}s = \lim_{\tau\to\infty}\int\limits_{x-i\tau}^{x+i\tau} e^{st}F(s)\,\mathrm{d}s$$

ja integreerimine toimub mööda imaginaarteljega paralleelset sirget. Rõhutame, et võrduse (3.1) paremal poolel saame funktsiooni f, kui see on pidev punktis t ning ühepoolsete piirväärtuste

$$f(t+) = \lim_{\tau\to t+} f(\tau)$$

ja

$$f(t-) = \lim_{\tau\to t-} f(\tau)$$

aritmeetilise keskmise, kui punkt t on funktsiooni f esimest liiki katkevuspunkt.

Riemanni-Mellini valemist järeldub, et kui kahel originaalil f_1 ja f_2 on ühesugune kujutis $F(s)$, siis pidevuspunktides on nad võrdsed, kuna avalduvad kujutise $F(s)$ kaudu ühesuguse valemiga. See tähendab, et piirdudes vaid poollõigus $[0,\infty)$ pidevate funktsioonidega f, siis pöördteisendus $\mathcal{L}^{-1}$ on üheselt defineeritud. Märgime, et pidevate originaalide korral on Laplace'i teisenduse $\mathcal{L}$ pöördteisendus $\mathcal{L}^{-1}$ lineaarne.

Fakt, et on olemas ühene vastavus pidevate funktsioonide ja nende Laplace'i teisenduste vahel, võimaldab koostada Laplace'i teisenduste ja pöördteisenduste tabeli [vt Lisa]. Selle tabeli teises veerus on vastavalt esimese veeru kujutised,

[3] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826−1866) - saksa matemaatik
[4] Robert Hjalmar Mellin (1854−1933) - soome matemaatik
[5] Augustin Louis Cauchy (1789−1857) - prantsuse matemaatik

mis on leitud käesoleva töö erinevate näidete ja omaduste abil. Viimastele on viidatud tabeli kolmandas veerus. Esimeses veerus on teise veeru pöördkujutised ehk originaalid, mille saamiseks vahetult Riemanni-Mellini valemit ei kasutata. Selliselt koostatud tabelit kasutamegi käesolevas töös, et leida kujutisele vastavat originaali. Analoogilisi ja mahukamaid tabeleid võib leida Laplace'i teisendust käsitlevatest raamatutest (vt näiteks [8], lk 209−218).

Näide 3.2. Leida kujutisele

$$F(s) = \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+16}, \qquad s > 0,$$

vastav originaal $f = f(t)$ $(t \geqslant 0)$.

Pöördteisenduse lineaarsuse abil saame

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+16}\right] \\ &= 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] - 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+16}\right]. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et näidete 1.3 ja 1.4 põhjal

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2t}$$

ja

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+16}\right] = \sin 4t.$$

Seega antud funktsioonile F vastav originaal f on kujul

$$f(t) = 5e^{-2t} - 3\sin 4t, \qquad t \geqslant 0.$$

§4 Lineaarsed n-järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

Vaatleme lineaarset konstantsete kordajatega n-järku harilikku diferentsiaalvõrrandit

$$b_n y^{(n)}(t) + b_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 y'(t) + b_0 y(t) = f(t) \quad (t \geqslant 0), \tag{4.1}$$

kus $y = y(t)$ $(t \geqslant 0)$ on otsitav funktsioon. Eeldame, et vabaliige f on pidev, kui $t \geqslant 0$ ja $b_0, \ldots, b_n$ on mingid reaalarvud, $b_n \neq 0$. Olgu vaja leida võrrandi (4.1) lahend $y = y(t)$, mis rahuldab algtingimusi

$$y^{(k)}(0) = y_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{4.2}$$

kus $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ on etteantud reaalarvulised konstandid.

Osutub (vt [7], lk 246), et kui funktsioon f on pidev poollõigus $[0, \infty)$, siis võrrandi (4.1) lahendid on määratud ja n korda pidevalt diferentseeruvad poollõigus $[0, \infty)$ ning mistahes etteantud arvude $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ korral leidub võrrandil (4.1) üks ja ainult üks lahend $y = y(t)$ $(t \geqslant 0)$, mis rahuldab tingimusi (4.2).

Võrrandi (4.1) võime lahendada järgmiselt (vt [7], lk 301−303). Kõigepealt leiame vastava homogeense võrrandi

$$b_n y^{(n)}(t) + b_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 y'(t) + b_0 y(t) = 0 \quad (t \geqslant 0) \tag{4.3}$$

lahendite fundamentaalsüsteemi $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$[6] ning kirjutame välja selle võrrandi üldlahendi kujul

$$y_h(t) = C_1 y_1(t) + \cdots + C_n y_n(t),$$

kus $C_1, \ldots, C_n$ on suvalised konstandid. Seejärel leiame mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (4.1) ühe konkreetse lahendi $y_* = y_*(t)$. Siis võrrandi (4.1) üldlahendiks on

$$y(t) = y_h(t) + y_*(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(t) + y_*(t),$$

kus $C_1, \ldots, C_n$ on suvalised konstandid. Võrrandi (4.1) mistahes lahend on saadav üldlahendist konstantide fikseerimise teel[7].

Homogeense diferentsiaalvõrrandi (4.3) lahendite fundamentaalsüsteemi leidmisel võime toimida järgmiselt (vt [7], lk 319):

[6]Öeldakse, et n-järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (4.3) n lineaarselt sõltumatut lahendit $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ moodustavad selle võrrandi lahendite fundamentaalsüsteemi.

[7]Järgnevas nimetame sellist meetodit võrrandi (4.1) lahendamiseks klassikaliseks.

1. koostame karakteristliku võrrandi

$$b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 = 0$$

ja leiame selle lahenditena karakteristlikud väärtused λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$; need võivad olla nii reaalsed kui komplekssed (mis reaalsete kordajate $b_0, b_1, \ldots, b_n$ korral esinevad alati paarikaupa kaaskompleksidena) ning nende hulgas võib olla kordseid, st omavahel võrdseid;

2. karakteristlike väärtuste iseloomule vastavalt kirjutame välja võrrandi (4.3) lineaarselt sõltumatud erilahendid (lahendite fundamentaalsüsteemi) ja nende lineaarse kombinatsioonina ka võrrandi (4.3) üldlahendi; võrrandi (4.3) lahendite fundamentaalsüsteemi väljakirjutamisel lähtume sellest, et

   (a) igale reaalsele ühekordsele karakteristlikule väärtusele λ_j vastab erilahend kujul $e^{\lambda_j t}$;

   (b) igale m-kordsele $(m \leqslant n)$ reaalsele karakteristlikule väärtusele λ_j vastab m erilahendit kujul

   $$e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda_j t};$$

   (c) igale komplekssete karakteristlike väärtuste $\lambda_j = \alpha + i\beta$ ja $\lambda_k = \overline{\lambda_j} = \alpha - i\beta$ paarile vastab kaks reaalset erilahendit kujul $e^{\alpha t}\cos\beta t$ ja $e^{\alpha t}\sin\beta t$;

   (d) igale m-kordsele kompleksele karakteristlikule väärtusele $\lambda_j = \alpha + i\beta$ ja temaga paaris olevale m-kordsele karakteristlikule väärtusele $\lambda_k = \overline{\lambda_j} = \alpha - i\beta$ $(2m \leqslant n)$ vastab $2m$ reaalset erilahendit kujul

   $$e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots, t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$

   $$e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots, t^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Kui on leitud homogeense võrrandi (4.3) lahendite fundamentaalsüsteem $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$, siis mittehomogeense võrrandi (4.1) erilahendi y_* saame leida konstantide varieerimise meetodil (vt [7], lk 269−280).

§5 Diferentsiaalvõrrandite lahendamine Laplace'i teisenduse abil

Vaatleme lineaarset konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandit

$$b_n y^{(n)}(t) + b_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 y'(t) + b_0 y(t) = f(t), \tag{5.1}$$

kus $t \geqslant 0, n \in \mathbb{N}$, $b_0, \ldots, b_n$ on mingid reaalarvud ja y on otsitav funktsioon.

Otsime vaadeldava võrrandi lahendit algtingimustel

$$y^{(k)}(0) = y_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{5.2}$$

kus y_k on etteantud reaalarvud.

Eeldame, et funktsioon f on pidev poollõigus $[0, \infty)$. Tähistame funktsioonide f ja y Laplace'i teisendused järgmiselt:

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s), \quad \mathcal{L}[y](s) = Y(s).$$

Kasutades lauset 2.3 ning arvestades algtingimusi (5.2) saame, et

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}\left[y'\right](s) & = & sY(s) - y_0, \\ \mathcal{L}\left[y''\right](s) & = & s^2 Y(s) - s y_0 - y_1, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \mathcal{L}\left[y^{(n)}\right](s) & = & s^n Y(s) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y_k. \end{array}$$

Rakendades võrrandile (5.1) Laplace'i teisendust (arvestades teisenduse lineaarsust), saame kujutise suhtes võrrandi

$$b_n \left(s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y_k \right) + \cdots + b_1 (sY(s) - y_0) + b_0 Y(s) = F(s)$$

ehk

$$b_n s^n Y(s) + b_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + b_1 s Y(s) + b_0 Y(s) = F(s) + Q(s), \tag{5.3}$$

kus

$$Q(s) = b_n \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y_k + b_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-k-1} y_k + \cdots + b_1 y_0.$$

Võrrandist (5.3) leiame otsitava funktsiooni kujutise:

$$Y(s) = \frac{F(s) + Q(s)}{L(s)}, \tag{5.4}$$

kus

$$L(s) = b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \neq 0.$$

Kujutise (5.4) järgi leiame originaali. Selleks kasutame Laplace'i teisenduse pöördteisenduse lineaarsust ja teisenduste tabelit (vt Lisa; [4], lk 219−224; [8], lk 209−218).

Näide 5.1. Leida võrrandi

$$y'' + 3y' - 4y = 0 \tag{5.5}$$

lahend $y = y(t)$ $(t \geqslant 0)$, mis rahuldab algtingimusi

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{5.6}$$

Meetod 1: Tugineme paragrahvis 4 toodud klassikalisele lahendusskeemile. Et leida võrrandile (5.5) kaks lineaarselt sõltumatut lahendit, moodustame võrrandile (5.5) vastava karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0. \tag{5.7}$$

Võrrandi (5.7) juurteks on $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = -4$ ning võrrandi (5.5) lahendite fundamentaalsüsteemiks kujuneb $y_1 = e^t$ ja $y_2 = e^{-4t}$. Järelikult võrrandi (5.5) üldlahend on kujul

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-4t},$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid. Kuna võrrandi (5.5) lahend $y = y(t)$ peab rahuldama algtingimusi (5.6), siis

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 + 4C_2 = 0. \end{cases}$$

Järelikult $C_1 = \dfrac{4}{5}$ ja $C_2 = \dfrac{1}{5}$ ning Cauchy ülesande {(5.5), (5.6)} lahendiks on

$$y = \frac{4}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{-4t}, \qquad t \geqslant 0.$$

Meetod 2: Kasutame ülesande {(5.5), (5.6)} lahendamiseks Laplace'i teisendust. Laplace'i teisenduse ja lause 2.1 rakendamisel diferentsiaalvõrrandile (5.5) saame, et

$$\mathcal{L}[y''](s) + 3\mathcal{L}[y'](s) - 4\mathcal{L}[y](s) = 0. \tag{5.8}$$

Kasutades lauset 2.3, leiame seosest (5.8), et

$$s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y'(0) + 3s\mathcal{L}[y](s) - 3y(0) - 4\mathcal{L}[y](s) = 0$$

ehk

$$(s^2 + 3s - 4)Y(s) - (s + 3)y(0) - y'(0) = 0, \tag{5.9}$$

kus $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$. Arvestades algtingimusi (5.6), saame kujutise

$$Y(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s - 4}, \tag{5.10}$$

kus $s \notin \{-4, 1\}$. Lahutame võrduse (5.10) paremal oleva murru osamurdudeks, st

$$Y(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s - 4} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s + 4} = \frac{A(s + 4) + B(s - 1)}{(s - 1)(s + 4)},$$

kus A ja B on otsitavad konstandid. Kuna iga s korral, välja arvatud kui $s = 1$ või $s = -4$, peab kehtima

$$s + 3 = A(s + 4) + B(s - 1) = (A + B)s + 4A - B,$$

siis $A + B = 1$ ja $4A - B = 3$, mistõttu $A = \dfrac{4}{5}$ ning $B = \dfrac{1}{5}$. Asendades need väärtused saame, et

$$Y(s) = \frac{4}{5}\frac{1}{s - 1} + \frac{1}{5}\frac{1}{s + 4}.$$

Kui $s > 1$, siis kasutades Laplace'i teisenduse pöördteisenduse lineaarsust ja näidet 1.3, näeme, et Cauchy ülesande $\{(5.5), (5.6)\}$ lahendiks on

$$y = \frac{4}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{-4t}, \qquad t \geqslant 0,$$

milleni jõudsime ka meetodi 1 abil.

Näide 5.2. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(5)} - y' = 0 \tag{5.11}$$

lahend $y = y(t)$ $(t \geqslant 0)$, mis rahuldab algtingimusi

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y^{(4)}(0) = 1. \tag{5.12}$$

<u>Meetod 1</u>: Diferentsiaalvõrrandi (5.11) karakteristliku võrrandi $\lambda^5 - \lambda = 0$ juurteks on $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = i$ ja $\lambda_5 = -i$. Seega võrrandi (5.11) lineaarselt sõltumatuteks lahenditeks on $y_1 = 1, y_2 = e^t, y_3 = e^{-t}, y_4 = \cos t$ ja $y_5 = \sin t$ ning üldlahendiks kujuneb

$$y = C_1 + C_2e^t + C_3e^{-t} + C_4 \cos t + C_5 \sin t,$$

kus C_1, C_2, C_3, C_4 ja C_5 on mingid konstandid. Võttes arvesse algtingimused (5.12), saame

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0, \\ C_2 - C_3 + C_5 = 0, \\ C_2 + C_3 - C_4 = 0, \\ C_2 - C_3 - C_5 = 0, \\ C_2 + C_3 + C_4 = 1. \end{cases}$$

Seega $C_1 = -1, C_2 = C_3 = \dfrac{1}{4}, C_4 = \dfrac{1}{2}, C_5 = 0$ ja algtingimustega ülesande $\{(5.11), (5.12)\}$ lahendiks on

$$y = -1 + \frac{e^t + e^{-t}}{4} + \frac{1}{2}\cos t$$

ehk

$$y = \frac{\cosh t + \cos t}{2} - 1, \qquad t \geqslant 0.$$

<u>Meetod 2</u>: Rakendades Laplace'i teisendust ja lauset 2.1 võrrandile (5.11), saame

$$\mathcal{L}\left[y^{(5)}\right](s) - \mathcal{L}\left[y'\right](s) = 0. \tag{5.13}$$

Lause 2.3 kohaselt saab võrrand (5.13) kuju

$$s^5\mathcal{L}[y](s) - s^4y(0) - s^3y'(0) - s^2y''(0) - sy'''(0) - y^{(4)}(0) - s\mathcal{L}[y](s) + y(0) = 0$$

ehk

$$(s^5 - s)Y(s) - (s^4 - 1)y(0) - s^3y'(0) - s^2y''(0) - sy'''(0) - y^{(4)}(0) = 0, \tag{5.14}$$

kus $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$. Arvestades algtingimusi (5.12), avaldame võrrandist (5.14) kujutise $Y(s)$. Seega

$$Y(s) = \frac{1}{s^5 - s}, \tag{5.15}$$

kus $s \notin \{-1, 0, 1\}$. Teisendame seose (5.15) paremal oleva murru osamurdude summaks, st

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 - 1} + \frac{Ds + E}{s^2 + 1} \\ &= \frac{A(s^4 - 1) + (Bs + C)(s^3 + s) + (Ds + E)(s^3 - s)}{s(s^2 - 1)(s^2 + 1)}, \end{aligned}$$

kus iga parameetri $s \notin \{-1, 0, 1\}$ korral kehtib võrdus

$$A(s^4 - 1) + (Bs + C)(s^3 + s) + (Ds + E)(s^3 - s) = 1$$

ehk

$$(A+B+D)s^4+(C+E)s^3+(B-D)s^2+(C-E)s-A=1,$$

kus A, B, C, D ja E on mingid konstandid. Kuna

$$A+B+D=0, \quad C+E=0, \quad B-D=0, \quad C-E=0 \quad \text{ja} \quad -A=1,$$

siis $A=-1$, $C=E=0$ ja $B=D=\dfrac{1}{2}$. Seega

$$Y(s)=-\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2-1}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}.$$

Olgu $s>1$. Näidete 1.2 ja 2.2 ning seose (1.9) põhjal on Cauchy ülesande $\{(5.11), (5.12)\}$ lahendiks

$$y(t)=\frac{\cosh t+\cos t}{2}-1, \qquad t \geqslant 0.$$

Näide 5.3. Leida mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y'''-y'=3(2-t^2) \tag{5.16}$$

lahend $y=y(t)$ $(t \geqslant 0)$, mis rahuldab algtingimusi

$$y(0)=y'(0)=y''(0)=1. \tag{5.17}$$

Meetod 1: Võrrandi $y'''-y'=0$ karakteristlik võrrand on $\lambda^3-\lambda=0$, mille lahenditeks on $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ ja $\lambda_3=-1$. Seega võrrandi $y'''-y'=0$ lahendite fundamentaalsüsteemiks on $y_1=1$, $y_2=e^t$ ja $y_3=e^{-t}$, mistõttu võrrandile (5.16) vastava homogeense võrrandi üldlahendiks saame

$$y_h=C_1+C_2e^t+C_3e^{-t},$$

kus C_1, C_2 ja C_3 on konstandid. Nüüd leiame võrrandi (5.16) ühe erilahendi

$$y_*(t)=C_1(t)+C_2(t)e^t+C_3(t)e^{-t}, \tag{5.18}$$

kus C_1, C_2 ja C_3 on tundmatud funktsioonid. Konstantide varieerimise meetodil saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} C_1'(t) + C_2'(t)e^t + C_3'(t)e^{-t} = 0, \\ C_2'(t)e^t - C_3'(t)e^{-t} = 0, \\ C_2'(t)e^t + C_3'(t)e^{-t} = 3(2-t^2). \end{cases}$$

Viimase süsteemi lahendiks on

$$C_1'(t) = 3t^2 - 6, \qquad C_2'(t) = \frac{3}{2}e^{-t}(2 - t^2), \qquad C_3'(t) = \frac{3}{2}e^{t}(2 - t^2).$$

Järelikult

$$C_1(t) = t^3 - 6t, \qquad C_2(t) = \frac{3}{2}te^{-t}(t + 2), \qquad C_3(t) = \frac{3}{2}te^{t}(2 - t).$$

Asendades need funktsioonid avaldisse (5.18), saame võrrandi (5.16) erilahendiks

$$y_*(t) = t^3 - 6t + \frac{3}{2}te^{-t}(t + 2)e^{t} + \frac{3}{2}te^{t}(2 - t)e^{-t}$$

ehk

$$y_*(t) = t^3.$$

Kuna võrrandi (5.16) üldlahend on kujul

$$y(t) = y_h(t) + y_*(t) = C_1 + C_2e^{t} + C_3e^{-t} + t^3,$$

siis arvestades algtingimusi (5.17), saame

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1, \\ \phantom{C_1 + {}} C_2 - C_3 = 1, \\ \phantom{C_1 + {}} C_2 + C_3 = 1. \end{cases}$$

Seega $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 0$ ja Cauchy ülesande {(5.16), (5.17)} lahendiks

$$y(t) = e^{t} + t^3, \qquad t \geqslant 0.$$

<u>Meetod 2</u>: Rakendades Laplace'i teisendust võrrandile (5.16) ja kasutades lauset 2.1 saame, et

$$\mathcal{L}\left[y'''\right](s) - \mathcal{L}\left[y'\right](s) = 6\mathcal{L}[1](s) - 3\mathcal{L}\left[t^2\right](s). \tag{5.19}$$

Järgnevalt kasutame lauset 2.3, näideid 1.2 ja 1.5 ning võrrand (5.19) saab kuju

$$s^3\mathcal{L}[y](s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) - s\mathcal{L}[y](s) + y(0) = \frac{6}{s} - \frac{6}{s^3}$$

ehk

$$(s^3 - s)Y(s) - (s^2 - 1)y(0) - sy'(0) - y''(0) = \frac{6}{s} - \frac{6}{s^3}, \tag{5.20}$$

kus $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$. Kuna võrrandi (5.20) lahendi jaoks kehtivad algtingimused (5.17), siis

$$(s^3 - s)Y(s) = \frac{6}{s} - \frac{6}{s^3} + s^2 + s$$

ehk

$$Y(s) = \frac{6s^2 - 6 + s^5 + s^4}{s^3(s^3 - s)} = \frac{6(s^2-1)}{s^4(s^2-1)} + \frac{s^4(s+1)}{s^4(s^2-1)},$$

kus $s \notin \{-1, 0, 1\}$. Seega

$$Y(s) = \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s-1} \tag{5.21}$$

ning kui $s > 1$, siis näidete 1.5 ja 1.3 põhjal saame Cauchy ülesande {(5.16), (5.17)} lahendiks

$$y(t) = t^3 + e^t, \qquad t \geqslant 0.$$

Märgime, et diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesande lahendamisel klassikalise meetodiga leitakse tavaliselt kõigepealt võrrandi üldlahend ja siis määratakse suvalised integreerimiskonstandid nii, et lahend rahuldaks algtingimusi. Konstantide määramine nõuab aga teatava lineaarse võrrandisüsteemi lahendamist, mis kolmest suurema järguga süsteemi korral on küllaltki aeganõudev ülesanne. Näidete 5.1−5.3 lahenduskäikudest selgub, et Laplace'i teisendusele tugineva meetodi korral arvestatakse algtingimusi juba lahenduskäigu algfaasis. Kui algtingimused on nullid, siis on Laplace'i teisenduse rakendamine eriti lihtne. Märgime veel, et kui klassikalisel meetodil mittehomogeenne lineaarne võrrand lahendati kahes osas (kõigepealt leiti vastava homogeense võrrandi üldlahend ja seejärel mittehomogeense võrrandi mingi erilahend), siis Laplace'i teisenduse abil saame võrrandi lahendi leida ilma ülesannet osaülesanneteks lahutamata.

Teiselt poolt paneme tähele, et Laplace'i teisenduse meetodil saadud kujutisele vastava originaali leidmine ei pruugi isegi suhteliselt lihtsa funktsiooni korral olla kerge ülesanne. Näiteks kujutise

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^3+1)}, \qquad s > \frac{1}{2}, \tag{5.22}$$

osamurdudeks lahutamisel tuleb esmalt leida kolm osamurdu, mille korral saame, et

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{-\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}}{s^2 - s + 1}. \tag{5.23}$$

Seejärel tuleb osamurdu

$$\frac{-\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}}{s^2 - s + 1}$$

veel teisendada ning seos (5.23) võtab kuju

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} - \frac{2}{3}\frac{s - \frac{1}{2}}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Alles nüüd saame leida kujutisele (5.22) vastava originaali, kasutades Laplace'i teisenduse pöördeteisendust funktsioonidele

$$\frac{1}{s}, \qquad \frac{1}{s+1}, \qquad \frac{s-\dfrac{1}{2}}{\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}.$$

Lisaks, kui rakendada Laplace'i teisendust lineaarsele diferentsiaalvõrrandile, mille kordajad ei ole konstandid (näiteks on kas astmefunktsioonid või polünoomid), siis saadakse kujutise suhtes üldiselt diferentsiaalvõrrand, mille kordajad ei ole konstandid (vt nt [3], lk 132−135). Sellisel juhul Laplace'i teisendusele tuginev meetod ei ole enamasti rakendatav.

§6 Konvolutsioon. Boreli teoreem

Selles paragrahvis tutvume konvolutsiooniga ja Boreli[8] teoreemiga.

Definitsioon 6.1. *Kahe funktsiooni f ja g konvolutsiooniks nimetatakse integraali*

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \geqslant 0. \tag{6.1}$$

Funktsioonide f ja g konvolutsiooni tähistatakse $f(t) * g(t)$ või $f * g$.

Näide 6.2. Kui $f(t) = e^t$ ja $g(t) = t$ $(t \geqslant 0)$, siis definitsiooni 6.1 abil

$$f(t) * g(t) = \int_0^t e^\tau (t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = te^\tau \Big|_0^t - (\tau e^\tau - e^\tau)\Big|_0^t = e^t - t - 1.$$

Osutub, et funktsioonide konvolutsioon on kommutatiivne:

$$f * g = g * f.$$

Tõepoolest, tehes konvolutsiooni $f * g$ defineerivas integraalis muutuja vahetuse $t - \tau = u$, saame

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t g(u)f(t-u)\,\mathrm{d}u = g(t) * f(t).$$

Esitame ilma tõestuseta veel mõned konvolutsiooni omadused (vt [4], lk 184−185).

1. Assotsiatiivsus: $(f * g) * h = f * (g * h)$.
2. Distributiivsus: $f * (g + h) = f * g + f * h$.
3. Kui funktsiooni f ja g on pidevad lõigus $[0, \infty)$, siis nende konvolutsioon $f * g$ on samuti pidev samas lõigus.
4. Originaalide f ja g konvolutsioon $f * g$ on samuti originaal.

Teoreem 6.3 (Boreli teoreem). *Olgu $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ $(s > \sigma_1)$ ja $\mathcal{L}[g(t)](s) = G(s)$ $(s > \sigma_2)$, kus $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$. Siis*

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)](s) = F(s)G(s), \quad s > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}. \tag{6.2}$$

[8]Félix Édouard Justin Émile Borel (1871−1956) - prantsuse matemaatik

Tõestus. Definitsioonide 1.1 ja 6.1 põhjal

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)*g(t)](s) &= \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right](s)\\
&= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^\infty f(\tau)\left(\int_\tau^\infty e^{-st}g(t-\tau)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Tehes viimases integraalis muutuja vahetuse $u = t-\tau$, saame

$$\mathcal{L}[f(t)*g(t)](s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau \int_0^\infty e^{-su}g(u)\,\mathrm{d}u = F(s)G(s).$$

□

Näide 6.4. Leida funktsioonile

$$F(s) = \frac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}, \qquad \omega\in\mathbb{R},\ s>0, \tag{6.3}$$

vastav originaal $f = f(t)\,(t \geqslant 0)$.

Olgu $t \geqslant 0$, $\omega\in\mathbb{R}$, $s>0$ ja $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$. Teoreemi 6.3 põhjal

$$\mathcal{L}[f(t)*f(t)](s) = [F(s)]^2, \quad s>\sigma,$$

kus σ on funktsiooni f eksponentsiaalne kasv. Näite 1.4 põhjal

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad s>0, \omega\in\mathbb{R}.$$

Seega võime kirjutada, et

$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \mathcal{L}[\sin(\omega t)*\sin(\omega t)](s), \quad s>0,\omega\in\mathbb{R}. \tag{6.4}$$

Rakendades valemile (6.4) Laplace'i teisenduse pöördteisendust, saame

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \sin(\omega t)*\sin(\omega t)$$

ehk

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sin(\omega t)*\sin(\omega t).$$

Definitsiooni 6.1 abil

$$f(t) = \sin(\omega t) * \sin(\omega t) = \int_0^t \sin(\omega\tau)\sin\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^t \sin(\omega\tau)\sin\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t \sin(\omega\tau)\left[\sin\omega t\cos\omega\tau - \cos\omega t\sin\omega\tau)\right]\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\sin^3\omega t}{2\omega} - \cos\omega t\int_0^t \frac{1-\cos 2\omega\tau}{2}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t).
\end{aligned}$$

Seega kujutisele (6.3) vastab originaal

$$f(t) = \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t), \qquad t \geqslant 0,\ \omega \in \mathbb{R}.$$

Näide 6.5. Olgu funktsioon g pidev poollõigus $[0,\infty)$. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + 4y = g(t) \tag{6.5}$$

lahend $y = y(t)$ $(t \geqslant 0)$, mis rahuldab algtingimusi

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = -1. \tag{6.6}$$

Rakendades Laplace'i teisendust võrrandile (6.5) ja kasutades Laplace'i teisenduse lineaarsust saame, et

$$\mathcal{L}[y''](s) + 4\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[g(t)](s), \qquad s > 0. \tag{6.7}$$

Olgu $\mathcal{L}[g(t)](s) = G(s)$. Lauset 2.3 abil saame võrrandi (6.7) esitada kujul

$$s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}[y](s) = G(s)$$

ehk

$$(s^2+4)Y(s) - sy(0) - y'(0) = G(s), \tag{6.8}$$

kus $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$. Kuna kehtivad algtingimused (6.6), siis saame seosest (6.8) leida

$$Y(s) = \frac{3s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4}$$

ehk

$$Y(s) = 3\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{(s^2+4)} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s^2+4)}G(s). \tag{6.9}$$

Seoste (1.9) ja (1.8) abil leiame, et

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \cos 2t$$

ja

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] = \sin 2t.$$

Teoreemi 6.3 põhjal

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s^2+4)}G(s)\right] = \sin 2t * g(t).$$

Seega Cauchy ülesande {(6.5), (6.6)} lahendi saame esitada kujul

$$y(t) = 3\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \geqslant 0,$$

kus $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]$.

§7 Gammafunktsioon

Euleri[9] integraalide all mõeldakse päratuid integraale kujul

$$\Gamma(a) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} \, \mathrm{d}t \quad (a > 0) \tag{7.1}$$

ja

$$B(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \, \mathrm{d}t \quad (a > 0,\ b > 0), \tag{7.2}$$

mida nimetatakse vastavalt (Euleri) gammafunktsiooniks ja beetafunktsiooniks.

Osutub, et gammafunktsiooni määramispiirkond on vahemikus $(0, \infty)$ ja beetafunktsiooni määramispiirkonnaks on $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Selles veendumiseks näitame kõigepealt, et integraal (7.2) koondub, kui $a > 0,\ b > 0$.

Tõepoolest, kui $a \geqslant 1$ ja $b \geqslant 1$, siis on tegemist tavalise Riemanni integraaliga. Juhul $a < 1$ on integreeritav funktsioon tõkestamata punkti 0 ümbruses, juhul $b < 1$ aga punkti 1 ümbruses. Seetõttu vaatleme eraldi integraale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a-1}(1-t)^{b-1} \, \mathrm{d}t \tag{7.3}$$

ja

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \, \mathrm{d}t. \tag{7.4}$$

Et

$$\lim_{t \to 0} (1-t)^{b-1} = 1,$$

siis integraal (7.3) koondub (suvalise b korral) parajasti siis, kui koondub integraal

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a-1} \, \mathrm{d}t = \left. \frac{t^a}{a} \right|_0^{\frac{1}{2}},$$

st kui $a > 0$. Analoogiliselt, seose

$$\lim_{t \to 1} t^{a-1} = 1$$

[9]Leonhard Euler (1707−1783) - šveitsi matemaatik

tõttu integraal (7.4) koondub (suvalise a korral) parajasti siis, kui koondub integraal

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{(1-t)^b}{b}\bigg|_{\frac{1}{2}}^{1},$$

st kui $b > 0$. Tähendab, beetafunktsioon $B(a,b)$ koondub parajasti siis, kui $a > 0$ ja $b > 0$.

Gammafunktsiooni määramispiirkonna selgitamiseks vaatleme eraldi integraale

$$\int_0^1 e^{-t}t^{a-1}\,\mathrm{d}t \tag{7.5}$$

ja

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{a-1}\,\mathrm{d}t. \tag{7.6}$$

Kuna $e^{-t} \leqslant 1$ $(t \geqslant 0)$, siis

$$0 \leqslant e^{-t}t^{a-1} \leqslant t^{a-1}, \quad (t \in (0,1],\ a > 0).$$

Seega

$$\begin{aligned} 0 \ &\leqslant \ \int_0^1 e^{-t}t^{a-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{a-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to 0^+}\int_\tau^1 t^{a-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \ \lim_{\tau\to 0^+}\frac{t^a}{a}\bigg|_{t=\tau}^{1} = \lim_{\tau\to 0^+}\left(\frac{1}{a} - \frac{\tau^a}{a}\right) \end{aligned}$$

Järelikult integraal (7.5) koondub parajasti siis, kui $a > 0$. Et iga a korral

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{a+1} = 0,$$

siis leidub parameetrist a sõltuv konstant M_a, nii et iga $t \geqslant 1$ korral

$$e^{-t}t^{a+1} \leqslant M_a$$

ehk

$$e^{-t}t^{a-1} \leqslant \frac{M_a}{t^2}. \tag{7.7}$$

Kuna integraal

$$M_a \int\limits_1^\infty t^{-2}\,\mathrm{d}t$$

koondub, siis võrratuse (7.7) põhjal koondub integraal (7.6). Tähendab, gammafunktsioon $\Gamma(a)$ on määratud, kui $a > 0$.

Olgu $a > 0$. Ositi integreerides saame

$$\Gamma(a+1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^a\,\mathrm{d}t = -e^{-t}t^a\Big|_0^\infty + a\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\,\mathrm{d}t = a\Gamma(a).$$

Seega kehtib seos

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad a > 0. \tag{7.8}$$

Valemit (7.8) korduvalt rakendades jõuame gammafunktsiooni taandamisvalemini

$$\Gamma(a+1) = a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)\Gamma(a-n+1), \quad a > n-1,\, n \in \mathbb{N}. \tag{7.9}$$

Pidades silmas, et

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

ja võttes $a = n$ saame valemi (7.9) abil

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{7.10}$$

Rakendades seost (7.10) valemis (1.10) saame, et

$$\mathcal{L}\left[t^n\right](s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, \tag{7.11}$$

kus $s > 0$, $t \geqslant 0$ ja $n \in \mathbb{N}_0$.

Osutub, et valemit (7.11) annab üldistada ka juhule, kus n on arvust -1 suurem reaalarv. Olgu $f(t) = t^\nu$ $(\nu > -1)$. Siis tema Laplace'i teisendus avaldub kujul

$$\mathcal{L}\left[t^\nu\right](s) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}, \qquad s > 0. \tag{7.12}$$

Tõepoolest,

$$\mathcal{L}\left[t^\nu\right](s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}t^\nu\,\mathrm{d}t.$$

Tehes muutuja vahetuse $x = st$ $(s > 0)$, saame

$$\mathcal{L}[t^\nu](s) = \int\limits_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^\nu \frac{1}{s}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s^{\nu+1}} \int\limits_0^\infty x^\nu e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Gammafunktsiooni (7.1) põhjal saamegi seose (7.12).

Paneme tähele, et kui $\nu > 0$, siis funktsioon $f(t) = t^\nu$ on originaal. Kui $-1 < \nu < 0$, siis funktsioon t^ν ei ole originaal, sest funktsiooni t^ν väärtus läheneb lõpmatusele, kui $t \to 0$. Kuid eelnevalt nägime, et integraal

$$\int\limits_0^\infty e^{-st} t^\nu\,\mathrm{d}t$$

koondub, kui $\nu > -1$ ja $s > 0$. Seega funktsioon $f(t) = t^\nu$ $(-1 < \nu < 0)$ on üldistatud originaal[10] (vt [3], lk 19−20; [4], lk 176).

Järgnevalt näitame, et

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a > 0,\ b > 0. \tag{7.13}$$

Olgu $t \geqslant 0$, $a > 0$ ja $b > 0$. Boreli teoreemi 6.3 ja valemi (7.12) põhjal

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[t^{a-1} * t^{b-1}\right](s) &= \frac{\Gamma(a)}{s^a}\frac{\Gamma(b)}{s^b} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{s^{a+b}} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\frac{\Gamma(a+b)}{s^{a+b}}, \qquad s > 0. \end{aligned}$$

Laplace'i teisenduse pöördteisenduse abil saame siit, et

$$t^{a-1} * t^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(a+b)}{s^{a+b}}\right], \qquad s > 0. \tag{7.14}$$

Definitsiooni 6.1 ja valemi (7.12) põhjal saame seose (7.14) kirjutada kujul

$$\int\limits_0^t \tau^{a-1}(t-\tau)^{b-1}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} t^{a+b-1}, \qquad t \geqslant 0. \tag{7.15}$$

[10]Üldistatud originaaliks nimetatakse funktsiooni f, mille korral leidub niisugune reaalarv σ, et koondub integraal

$$\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t} \mid f(t) \mid \,\mathrm{d}t.$$

Kuna

$$B(a,b) = \int_0^1 \tau^{a-1}(1-\tau)^{b-1}\,\mathrm{d}\tau \quad (a>0,\ b>0),$$

siis võttes valemis (7.15) muutuja $t=1$, jõuame valemini (7.13).

Näide 7.1. Tuginedes valemile (7.13) näitame, et

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{7.16}$$

Olgu $a>0,\ b>0$. Valemi (7.13) ja beetafunktsiooni (7.2) põhjal

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 \tau^{a-1}(1-\tau)^{b-1}\,\mathrm{d}\tau. \tag{7.17}$$

Tehes võrduses (7.17) muutuja vahetuse $\tau = \sin^2\theta$, saame

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2a-1}(\cos\theta)^{2b-1}\,\mathrm{d}\theta. \tag{7.18}$$

Olgu $a=b=\dfrac{1}{2}$. Siis valemi (7.18) abil

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \pi.$$

Järelikult

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Näide 7.2. Olgu $\nu = -\dfrac{1}{2}$. Siis seoste (7.12) ja (7.16) abil leiame, et

$$\mathcal{L}\left[t^{-\frac{1}{2}}\right](s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s>0.$$

Lõpuks märgime, et valemi (7.8) abil saame gammafunktsiooni määramispiirkonda laiendada juhule $a \in (-n, -n+1)$, kus $n \in \mathbb{N}$.

Tõepoolest, valemist (7.8) järeldub $a > 0$ korral, et

$$\Gamma(a) := \frac{\Gamma(a+1)}{a}. \tag{7.19}$$

Valemit (7.19) võime käsitleda gammafunktsiooni $\Gamma(a)$ definitsioonina $a \in (-1, 0)$ korral.

Analoogiliselt saame $a > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral valemi (7.8) abil

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\Gamma(a+n-1) = \cdots = (a+n-1)\cdots(a+1)a\Gamma(a).$$

Seega saame defineerida

$$\Gamma(a) := \frac{\Gamma(a+n)}{(a+n-1)\cdots(a+1)a},$$

kus $-n < a < -n+1,\ n \in \mathbb{N}$.

§8 Riemann-Liouville'i murruline tuletis

Olgu D operaator, mis seab lõigus $[a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a < b)$ diferentseeruvale funktsioonile f vastavusse tema tuletise f' :

$$(Df)(t) = f'(t), \quad t \in [a,b].$$

Olgu J_a operaator, mis teisendab lõigus $[a,b]$ integreeruva funktsiooni f funktsiooniks, mis on määratud valemiga

$$(J_a f)(t) = \int_a^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in [a,b].$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral hakkame kasutama sümboleid D^n ja J_a^n, et tähistada operaatorite D ja J_a n-kordset rakendamist:

$$\begin{array}{rclrcl} D^1 & = & D, & J_a^1 & = & J_a, \\ D^n & = & DD^{n-1}, & J_a^n & = & J_a J_a^{n-1}. \end{array}$$

Defineerime $D^0 = I$ ja $J_a^0 = I$, kus I on ühikoperaator.

Järgneva lause tõestuse võib leida raamatust [5], lk 367.

Lause 8.1. *Olgu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon ja olgu $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, kus*

$$F(t) = \int_a^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in [a,b].$$

Siis funktsioon F on diferentseeruv ja

$$F' = f.$$

Olgu funktsioon f pidev lõigus $[a,b]$. Siis lause 8.1 põhjal

$$DJ_a f = f$$

ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$D^n J_a^n f = D^{n-1} D J_a J_a^{n-1} f = D^{n-1} I J_a^{n-1} f = D^{n-1} J_a^{n-1} f. \tag{8.1}$$

Analoogiliselt jätkates saame, et

$$D^n J_a^n f = f, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{8.2}$$

st operaator D^n on operaatori J_a^n vasakpoolne pöördoperaator.

Olgu $n \in \mathbb{N}_0$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tähistame lõigus $[a,b]$ n korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulga sümboliga $C^n[a,b]$. Olgu $C^0[a,b] = C[a,b]$.

Lause 8.2. *Olgu* $m, n \in \mathbb{N},\ m > n$ *ja* $f \in C^n[a,b]$. *Siis*

$$(D^n f)(t) = \left(D^m J_a^{m-n} f\right)(t), \quad t \in [a,b].$$

Tõestus. Olgu $m, n \in \mathbb{N},\ m > n$ ja $f \in C^n[a,b]$. Siis valemi (8.2) põhjal

$$f(t) = \left(D^{m-n} J_a^{m-n} f\right)(t), \qquad t \in [a,b].$$

Seega

$$(D^n f)(t) = \left(D^n D^{m-n} J_a^{m-n} f\right)(t) = \left(D^m J_a^{m-n} f\right)(t), \quad t \in [a,b].$$

□

Lause 8.3. *Olgu* f *lõigus* $[a,b]$ *integreeruv funktsioon. Siis iga* $n \in \mathbb{N}$ *korral kehtib Cauchy valem*

$$(J_a^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t \in [a,b].$$

Tõestus. Vt [7], lk 221−224. □

Definitsioon 8.4. *Olgu* $\alpha > 0$. *Operaatorit* ${}_{RL}J_a^\alpha$, *mis on hulgal* $C[a,b]$ *defineeritud võrdusega*

$$\left({}_{RL}J_a^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t \in [a,b], \tag{8.3}$$

nimetatakse Riemann-Liouville'i[11] α*-järku integraaloperaatoriks. Funktsiooni* ${}_{RL}J_a^\alpha f$ *nimetatakse funktsiooni* f *Riemann-Liouville'i* α*-järku integraaliks.*

Järgnevas defineerime ${}_{RL}J_a^0 = I$, kus I on ühikoperaator.

Seose (7.10) tõttu ${}_{RL}J_a^\alpha = J_a^\alpha$, kui $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

Märgime, et iga $f \in C[a,b]$ korral ${}_{RL}J_a^\alpha f \in C[a,b]$, kui $\alpha \geqslant 0$ (vt [1], lk 11−16).

[11]Joseph Liouville (1809−1882) - prantsuse matemaatik

Lause 8.5. *Olgu* $\alpha, \beta \geqslant 0$ *ja* $f \in C[a,b]$. *Siis*

$$\left({}_{RL}J_a^{\alpha}\left({}_{RL}J_a^{\beta}f\right)\right)(t) = \left({}_{RL}J_a^{\alpha+\beta}f\right)(t), \quad t \in [a,b]. \tag{8.4}$$

Tõestus. Kui $\alpha = 0$ või $\beta = 0$, siis väide (8.4) kehtib. Olgu $\alpha, \beta > 0$ ja $f \in C[a,b]$. Definitsiooni 8.4 põhjal

$$\left({}_{RL}J_a^{\alpha}\left({}_{RL}J_a^{\beta}f\right)\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}\int_a^x (x-\tau)^{\beta-1}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}x. \tag{8.5}$$

Muudame võrduse (8.5) paremal poolel olevas integraalis integreerimise järjekorda. Siis

$$\begin{aligned}\left({}_{RL}J_a^{\alpha}\left({}_{RL}J_a^{\beta}f\right)\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_\tau^t (t-x)^{\alpha-1}(x-\tau)^{\beta-1}f(\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)\int_\tau^t (t-x)^{\alpha-1}(x-\tau)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Teeme muutujavahetuse $x = \tau + s(t-\tau)$, siis $\mathrm{d}x = (t-\tau)\,\mathrm{d}s$ ning

$$\begin{aligned}\left({}_{RL}J_a^{\alpha}\left({}_{RL}J_a^{\beta}f\right)\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)\int_0^1 \left[(t-\tau)(1-s)\right]^{\alpha-1}s^{\beta-1}(t-\tau)^{\beta}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Beetafunktsiooni (7.2) ja seose (7.13) abil jõuame seoseni (8.4):

$$\begin{aligned}\left({}_{RL}J_a^{\alpha}\left({}_{RL}J_a^{\beta}f\right)\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \left({}_{RL}J_a^{\alpha+\beta}f\right)(t), \qquad t \in [a,b].\end{aligned}$$

□

Edaspidi tähistame sümboliga $\lceil\alpha\rceil$ vähima täisarvu, mis on suurem või võrdne arvuga $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definitsioon 8.6. *Olgu $\alpha > 0$ ja $m := \lceil\alpha\rceil$. Olgu funktsioon $f \in C[a,b]$ selline, et ${}_{RL}J_a^{m-\alpha} f \in C^m[a,b]$. Siis operaatorit ${}_{RL}D_a^\alpha$, mis on defineeritud valemiga*

$$\left({}_{RL}D_a^\alpha f\right)(t) = \left(D^m\, {}_{RL}J_a^{m-\alpha} f\right)(t) \quad (t \in [a,b])$$

nimetatakse Riemann-Liouville'i α-järku diferentsiaaloperaatoriks. Funktsiooni ${}_{RL}D_a^\alpha f$ nimetatakse funktsiooni f Riemann-Liouville'i α-järku tuletiseks.

Järgnevas defineerime ${}_{RL}D_a^0 = I$, kus I on ühikoperaator.

Paneme tähele, et kui $\alpha \in \mathbb{N}$, siis $m = \lceil\alpha\rceil = \alpha$ ja

$$\begin{aligned}\left({}_{RL}D_a^\alpha f\right)(t) &= \left(D^m\, {}_{RL}J_a^{m-\alpha} f\right)(t) = \left(D^m\, {}_{RL}J_a^{m-m} f\right)(t) \\ &= \left(D^m\, {}_{RL}J_a^0 f\right)(t) = \left(D^m I f\right)(t) \\ &= \left(D^m f\right)(t), \quad t \in [a,b].\end{aligned}$$

Teiste sõnadega, $\alpha = m \in \mathbb{N}$ korral operaator ${}_{RL}D_a^m$ ühtib tavalise m-järku diferentsiaaloperaatoriga D^m.

Lause 8.7. *Olgu $\alpha \geqslant 0, a, b \in \mathbb{R}, f \in C[a,b]$. Siis*

$$\left({}_{RL}D_a^\alpha \left({}_{RL}J_a^\alpha f\right)\right)(t) = f(t), \quad t \in [a,b].$$

Tõestus. Olgu $\alpha \geqslant 0, m := \lceil\alpha\rceil, a, b \in \mathbb{R}, f \in C[a,b]$. Siis definitsiooni 8.6 põhjal

$$\left({}_{RL}D_a^\alpha \left({}_{RL}J_a^\alpha f\right)\right)(t) = \left(D^m\, {}_{RL}J_a^{m-\alpha} \left({}_{RL}J_a^\alpha f\right)\right)(t), \quad t \in [a,b].$$

Lause 8.5 ja seose (8.2) abil

$$\begin{aligned}\left({}_{RL}D_a^\alpha \left({}_{RL}J_a^\alpha f\right)\right)(t) &= \left(D^m\, {}_{RL}J_a^{m-\alpha} \left({}_{RL}J_a^\alpha f\right)\right)(t) \\ &= \left(D^m\, {}_{RL}J_a^m f\right)(t) \\ &= (If)(t) = f(t), \quad t \in [a,b].\end{aligned}$$

□

Lause 8.8. *Olgu $\alpha, \beta \geqslant 0, a, b \in \mathbb{R}$. Kui $\phi \in C[a,b]$ ja $f = {}_{RL}J_a^{\alpha+\beta}\phi$, siis*

$$\left({}_{RL}D_a^\alpha \left({}_{RL}D_a^\beta f\right)\right)(t) = \left({}_{RL}D_a^{\alpha+\beta} f\right)(t), \quad t \in [a,b]. \tag{8.6}$$

Tõestus. Kui $\alpha = 0$ või $\beta = 0$, siis väide (8.6) kehtib. Olgu $\alpha, \beta > 0$ ja $m := \lceil \alpha \rceil$ ning $n := \lceil \beta \rceil$. Kui $\phi \in C[a,b]$ ja $f = {}_{RL}J_a^{\alpha+\beta}\phi$, siis definitsiooni 8.6 põhjal

$$\begin{aligned}\left({}_{RL}D_a^{\alpha}\left({}_{RL}D_a^{\beta}f\right)\right)(t) &= \left({}_{RL}D_a^{\alpha}\left({}_{RL}D_a^{\beta}\,{}_{RL}J_a^{\alpha+\beta}\phi\right)\right)(t) \\ &= \left(D^m\,{}_{RL}J_a^{m-\alpha}\left(D^n\,{}_{RL}J_a^{n-\beta}\,{}_{RL}J_a^{\alpha+\beta}\phi\right)\right)(t), \quad t \in [a,b].\end{aligned}$$

Lausete 8.5 ja 8.7 ning seose (8.2) alusel

$$\begin{aligned}\left(D^m\,{}_{RL}J_a^{m-\alpha}\left(D^n\,{}_{RL}J_a^{n-\beta}\,{}_{RL}J_a^{\alpha+\beta}\phi\right)\right)(t) &= \left(D^m\,{}_{RL}J_a^{m-\alpha}\left(D^n\,{}_{RL}J_a^{n+\alpha}\phi\right)\right)(t) \\ &= \left(D^m\,{}_{RL}J_a^{m-\alpha}\left(D^n\,{}_{RL}J_a^{n}\,{}_{RL}J_a^{\alpha}\phi\right)\right)(t) \\ &= \left(D^m\,{}_{RL}J_a^{m-\alpha}\left(D^n J_a^{n}\,{}_{RL}J_a^{\alpha}\phi\right)\right)(t) \\ &= \left(D^m\,{}_{RL}J_a^{m-\alpha}\,{}_{RL}J_a^{\alpha}\phi\right)(t) \\ &= \left(D^m\,{}_{RL}J_a^{m}\phi\right)(t) \\ &= \left(D^m J_a^{m}\phi\right)(t) \\ &= \phi(t), \quad t \in [a,b].\end{aligned}$$

Seega

$$\left({}_{RL}D_a^{\alpha}\left({}_{RL}D_a^{\beta}f\right)\right)(t) = \phi(t), \quad t \in [a,b].$$

Kuna

$$f = {}_{RL}J_a^{\alpha+\beta}\phi,$$

siis

$${}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f = \phi.$$

Järelikult

$$\left({}_{RL}D_a^{\alpha}\left({}_{RL}D_a^{\beta}f\right)\right)(t) = \left({}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f\right)(t), \quad t \in [a,b].$$

□

Paragrahvi lõpetuseks vaatleme mõningaid näiteid Riemann-Liouville'i murrulise tuletise leidmise kohta.

Näide 8.9. Olgu $a, b \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ ja $m := \lceil \alpha \rceil$. Olgu $f(t) = c$, kui $t \in [a,b]$ ja c on mingi konstant. Siis

$$\left({}_{RL}D_a^{\alpha}f\right)(t) = \begin{cases} 0 & \text{, kui } \alpha \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{c(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} & \text{, kui } \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases} \tag{8.7}$$

Tõepoolest, kui $\alpha = m \in \mathbb{N}$, siis ${}_{RL}D_a^m = D^m$ ja seega

$$({}_{RL}D_a^m f)(t) = (D^m f)(t) = 0, \qquad t \in [a,b].$$

Kui $\alpha \notin \mathbb{N}$, siis definitsioonidest 8.6 ja 8.4 järeldub, et

$$\begin{aligned}
({}_{RL}D_a^{\alpha} f)(t) &= (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} f)(t) \\
&= D^m \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} c \, \mathrm{d}\tau \right) \\
&= \frac{c}{\Gamma(m-\alpha)(m-\alpha)} D^m \left(\left(-(t-\tau)^{m-\alpha} \right) \Bigg|_{\tau=a}^{\tau=t} \right) \\
&= \frac{c}{\Gamma(m-\alpha)(m-\alpha)} D^m \left[(t-a)^{m-\alpha} \right], \qquad t \in [a,b].
\end{aligned}$$

Kuna

$$\begin{aligned}
D^m \left[(t-a)^{m-\alpha} \right] &= (m-\alpha)(m-\alpha-1)\cdots(m-\alpha-(m-1))(t-a)^{m-\alpha-m} \\
&= (m-\alpha)(m-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)(t-a)^{-\alpha} \quad (t \in [a,b])
\end{aligned}$$

ja valemi (7.8) alusel

$$\begin{aligned}
\Gamma(m-\alpha) &= (m-\alpha-1)\Gamma(m-\alpha-1) = \cdots = \\
&= (m-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha),
\end{aligned}$$

siis

$$({}_{RL}D_a^{\alpha} f)(t) = \frac{c(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \qquad t \in [a,b].$$

Näide 8.10. Olgu $a, b \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ ja $m := \lceil \alpha \rceil$. Leida funktsiooni

$$f(t) = (t-a)^p \qquad (p \geqslant 0, \ t \in [a,b]) \tag{8.8}$$

Riemann-Liouville'i α-järku tuletis.

Vaatleme vaid juhtu, kus $\alpha \notin \mathbb{N}$. Kui $\alpha = m \in \mathbb{N}$, siis Riemann-Liouville'i diferentsiaaloperaator ${}_{RL}D_a^m$ ühtib tavalise diferentsiaaloperaatoriga D^m.

Riemann-Liouville'i α-järku integraali definitsiooni alusel

$$\begin{aligned}
({}_{RL}J_a^{m-\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} (\tau-a)^p \, \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{(t-a)^{m-\alpha+p}}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_a^t \frac{(t-\tau)^{m-\alpha-1}}{(t-a)^{m-\alpha}} \frac{(\tau-a)^p}{(t-a)^p} \, \mathrm{d}\tau, \quad t \in [a,b]
\end{aligned}$$

Tehes muutujavahetuse

$$s = \frac{\tau - a}{t - a},$$

saame

$$\begin{aligned}
({}_{RL}J_a^{m-\alpha} f)(t) &= \frac{(t-a)^{m-\alpha+p}}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{m-\alpha-1}}{(t-a)} s^p (t-a)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{(t-a)^{m-\alpha+p}}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_0^1 (1-s)^{m-\alpha-1} s^p\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Beetafunktsiooni definitsiooni ja võrduse (7.13) põhjal

$$\int\limits_0^1 (1-s)^{m-\alpha-1} s^p\,\mathrm{d}s = B(p+1, m-\alpha) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m-\alpha+p+1)},$$

kus $p > -1$ ja $m > \alpha$. Järelikult, kui $f(t) = (t-a)^p$ ($t \in [a,b]$, $p \geqslant 0$), siis

$$({}_{RL}J_a^{m-\alpha} f)(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m-\alpha+p+1)}(t-a)^{m-\alpha+p}, \tag{8.9}$$

kus $\alpha > 0$ ja $m := \lceil \alpha \rceil$.

Kui $\alpha - p \in \mathbb{N}$, siis $m > \alpha > p$ ja $m - (\alpha - p) \in \{1, \ldots, m-1\}$. Seetõttu

$$\begin{aligned}
(D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} f)(t) &= D^m \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m-\alpha+p+1)}(t-a)^{m-\alpha+p} \right) \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m-\alpha+p+1)} D^m((t-a)^{m-\alpha+p}) = 0.
\end{aligned}$$

Kui $\alpha - p \notin \mathbb{N}$, siis

$$D^m \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(m-\alpha+p+1)}(t-a)^{m-\alpha+p} \right) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(-\alpha+p+1)}(t-a)^{-\alpha+p}.$$

Seega funktsiooni (8.8) Riemann-Liouville'i α-järku tuletis avaldub järgmiselt:

$$({}_{RL}D_a^{\alpha} f)(t) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \alpha - p \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha}, & \text{kui } \alpha - p \notin \mathbb{N}. \end{cases} \tag{8.10}$$

Näide 8.11. Olgu $f(t) = c$ ja $t \in [0, b]$. Siis valemite (7.16) ja (8.7) põhjal

$$\left({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}} f\right)(t) = \frac{ct^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{c}{\sqrt{t\pi}}.$$

ja

$$\left({}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}} f\right)(t) = \frac{ct^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(1 - \frac{3}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\frac{ct^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right)} = -\frac{c}{2\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}.$$

Näide 8.12. Olgu $f(t) = t$ ja $t \in [0, b]$. Siis valemite (7.16) ja (8.10) põhjal

$$\left({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}} f\right)(t) = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1 + 1 - \frac{1}{2}\right)} t^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

ja

$$\left({}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}} f\right)(t) = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1 + 1 - \frac{3}{2}\right)} t^{1-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{t\pi}}.$$

Näide 8.13. Olgu $f(t) = t^2$ ja $t \in [0, b]$. Siis valemite (7.16) ja (8.10) abil

$$\left({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}} f\right)(t) = \frac{\Gamma(1+2)}{\Gamma\left(2 + 1 - \frac{1}{2}\right)} t^{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$$

ja

$$\left({}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}} f\right)(t) = \frac{\Gamma(1+2)}{\Gamma\left(2 + 1 - \frac{3}{2}\right)} t^{2-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

§9 Caputo murruline tuletis

Olgu $\alpha > 0,\ m := \lceil \alpha \rceil,\ a, b \in \mathbb{R},\ f \in C^{m-1}[a,b]$. Tähistame $(m-1)$-järku Taylori[12] polünoomi funktsioonist f sümboliga $T_{m-1}[f;a]$:

$$(T_{m-1}[f;a])(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k. \tag{9.1}$$

Definitsioon 9.1. *Olgu $\alpha > 0, m := \lceil \alpha \rceil, a, b \in \mathbb{R}$. Olgu funktsioon $f \in C^{m-1}[a,b]$ selline, et ${}_{RL}J_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f;a]) \in C^m[a,b]$. Siis operaatorit ${}_C D_a^\alpha$, mis on defineeritud võrdusega*

$$({}_C D_a^\alpha f)(t) = ({}_{RL}D_a^\alpha (f - T_{m-1}[f;a]))(t) \qquad (t \in [a,b])$$

nimetatakse Caputo[13] α-järku diferentsiaaloperaatoriks. Funktsiooni ${}_C D_a^\alpha f$ nimetatakse funktsiooni f Caputo α-järku tuletiseks.

Järgnevas defineerime ${}_C D_a^0 = I$, kus I on ühikoperaator.

Paneme tähele, et kui $\alpha = m \in \mathbb{N}$, siis operaator ${}_C D_a^m$ ühtib tavalise m-järku diferentsiaaloperaatoriga D^m. Tõepoolest, sellisel juhul

$$\begin{aligned}
({}_C D_a^\alpha f)(t) &= ({}_{RL}D_a^\alpha (f - T_{\alpha-1}[f;a]))(t) \\
&= ({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) - ({}_{RL}D_a^\alpha (T_{m-1}[f;a]))(t) \\
&= (D^m f)(t) - D^m (T_{m-1}[f;a])(t) \\
&= (D^m f)(t), \qquad t \in [a,b],
\end{aligned}$$

sest m-järku tuletis $(m-1)$-järku polünoomist on null.

Lause 9.2. *Olgu $\alpha \geqslant 0, m := \lceil \alpha \rceil, a, b \in \mathbb{R}, f \in C^m[a,b]$. Siis*

$$({}_{RL}D_a^\alpha (f - T_{m-1}[f;a]))(t) = ({}_{RL}J_a^{m-\alpha} D^m f)(t), \qquad t \in [a,b].$$

Tõestus. Kui $\alpha \in \mathbb{N}$, siis on väide triviaalne. Tõestame lause juhul, kui $\alpha \notin \mathbb{N}$. Siis

$$\begin{aligned}
({}_{RL}D_a^\alpha (f - T_{m-1}[f;a]))(t) &= (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f;a]))(t) \\
&= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} (f(\tau) - T_{m-1}[f;a](\tau))\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

---

[12]Brook Taylor (1685−1731) - inglise matemaatik, filosoof

[13]Michele Caputo (sünd. 1927) - itaalia matemaatik, geofüüsik

Ositi integreerides saame

$$\int_a^t \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}(f(\tau)-T_{m-1}[f;a](\tau))(t-\tau)^{m-\alpha-1}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)}\left[(f(\tau)-T_{m-1}[f;a](\tau))(t-\tau)^{m-\alpha}\right]\Bigg|_{\tau=a}^{\tau=t}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)}\int_a^t \left(D(f(\tau)-T_{m-1}[f;a])(\tau)\right)(t-\tau)^{m-\alpha}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)}\int_a^t \left(D(f(\tau)-T_{m-1}[f;a])(\tau)\right)(t-\tau)^{m-\alpha}\,\mathrm{d}\tau.$$

Seega

$$_{RL}J_a^{m-\alpha}(f-T_{m-1}[f;a]) = {}_{RL}J_a^{m-\alpha+1}D(f-T_{m-1}[f;a]).$$

Kui integreerida avaldist $_{RL}J_a^{m-\alpha}(f-T_{m-1}[f;a])$ ositi m korda, siis

$$\begin{aligned}
({}_{RL}J_a^{m-\alpha}(f-T_{m-1}[f;a]))(t) &= ({}_{RL}J_a^{2m-\alpha}D^m(f-T_{m-1}[f;a]))(t)\\
&= ({}_{RL}J_a^{m}\,{}_{RL}J_a^{m-\alpha}D^m(f-T_{m-1}[f;a]))(t)\\
&= (J_a^{m}\,{}_{RL}J_a^{m-\alpha}D^m f)(t),
\end{aligned}$$

kus $t \in [a,b]$. Järelikult

$$\begin{aligned}
({}_{RL}D_a^{\alpha}(f-T_{m-1}[f;a]))(t) &= (D^m\,{}_{RL}J_a^{m-\alpha}(f-T_{m-1}[f;a]))(t)\\
&= (D^m J_a^m\,{}_{RL}J_a^{m-\alpha}D^m f)(t)\\
&= ({}_{RL}J_a^{m-\alpha}D^m f)(t), \qquad t \in [a,b].
\end{aligned}$$

□

Näide 9.3. Olgu $a, b \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ ja $m := \lceil \alpha \rceil$. Olgu $f(t) = c$, kui $t \in [a,b]$ ja c on mingi konstant. Siis definitsiooni 9.1 ja lause 9.2 põhjal saame

$$\begin{aligned}
({}_{C}D_a^{\alpha}f)(t) &= ({}_{RL}J_a^{m-\alpha}D^m f)(t)\\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}c^{(m)}\,\mathrm{d}\tau = 0.
\end{aligned}$$

Märkus 9.4. *Paneme tähele, et näites* 8.9 *saadud Riemann-Liouville'i murruline tuletis võrdub nulliga siis ja ainult siis, kui* $c = 0$. *Samas Caputo* α*-järku tuletis konstantsest funktsioonist on alati võrdne nulliga.*

Näide 9.5. Olgu $a, b \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, m := \lceil \alpha \rceil, p \geqslant 0$. Kui $f(t) = (t-a)^p$, kus $t \in [a, b]$, siis

$$({}_C D_a^\alpha f)(t) = \begin{cases} 0 & \text{, kui } p \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}, \\ \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha} & \text{, kui } p \geqslant m. \end{cases} \tag{9.2}$$

Tõepoolest, kui $p \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, siis $(D^m f)(t) = 0$ ja

$$({}_C D_a^\alpha f)(t) = ({}_{RL} J_a^{m-\alpha} D^m f)(t) = 0, \qquad t \in [a, b].$$

Paneme tähele, et võrduse (7.8) põhjal

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)(p-2) \cdot \ldots \cdot (p-(m-1))\Gamma(p-m+1), \quad p > m-1.$$

Seega

$$\begin{aligned} (D^m f)(t) &= p(p-1) \cdot \ldots \cdot (p-(m-1))(t-a)^{p-m} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m+1)}(t-a)^{p-m}, \end{aligned} \tag{9.3}$$

kus $p > m-1$. Valemi (8.9) (asendades p suurusega $p-m$) alusel, saame

$$\begin{aligned} {}_{RL} J_a^{m-\alpha}(t-a)^{p-m} &= \frac{\Gamma(p-m+1)}{\Gamma(m-\alpha+p-m+1)}(t-a)^{m-\alpha+p-m} \\ &= \frac{\Gamma(p-m+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha}, \quad p-m \geqslant 0. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Siis (vt (9.3) ja (9.4))

$$\begin{aligned} ({}_C D_a^\alpha f)(t) &= ({}_{RL} J_a^{m-\alpha} D^m f)(t) \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m+1)} \frac{\Gamma(p-m+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha}, \qquad t \in [a, b],\ p \geqslant m. \end{aligned}$$

Näide 9.6. Olgu $f(t) = t$ ja $t \in [0, b]$. Siis valemi (9.2) alusel

$$\left({}_C D_0^{\frac{1}{2}} f\right)(t) = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1+1-\dfrac{1}{2}\right)} t^{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

ja

$$\left({}_C D_0^{\frac{3}{2}} f\right)(t) = 0,$$

sest $m = \left\lceil \dfrac{3}{2} \right\rceil = 2$ ja $p = 1 \in \{0, m-1\} = \{0, 1\}$.

Näide 9.7. Olgu $f(t) = t^2$ ja $t \in [0, b]$. Siis valemi (9.2) abil

$$\left({}_C D_0^{\frac{1}{2}} f\right)(t) = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma\left(2+1-\dfrac{1}{2}\right)} t^{2-\frac{1}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$$

ja

$$\left({}_C D_0^{\frac{3}{2}} f\right)(t) = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma\left(2+1-\dfrac{3}{2}\right)} t^{2-\frac{3}{2}} = 4\sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

Osutub, et Riemann-Liouville'i diferentsiaaloperaatori ja Caputo diferentsiaaloperaatori vahelist seost saab iseloomustada järgmise lausega.

Lause 9.8. *Olgu $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, m := \lceil \alpha \rceil, a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ja f selline lõigus $[a, b]$ määratud funktsioon, et tal leiduvad Caputo ja Riemann-Liouville'i α-järku tuletised $({}_C D_a^\alpha f)(t)$ ja $({}_{RL} D_a^\alpha f)(t)$, kus $t \in [a, b]$. Siis*

$$({}_C D_a^\alpha f)(t) = ({}_{RL} D_a^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha}.$$

Tõestus. Olgu $t \in [a, b]$. Definitsiooni 9.1 põhjal

$$\begin{aligned}
({}_C D_a^\alpha f)(t) &= ({}_{RL} D_a^\alpha (f - T_{m-1}[f; a]))(t) \\
&= ({}_{RL} D_a^\alpha f)(t) - {}_{RL} D_a^\alpha (T_{m-1}[f; a])(t) \\
&= ({}_{RL} D_a^\alpha f)(t) - {}_{RL} D_a^\alpha \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) \\
&= ({}_{RL} D_a^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \left({}_{RL} D_a^\alpha (t-a)^k\right)
\end{aligned}$$

Valemi (8.10) alusel

$$({}_{RL}D_a^\alpha)(t-a)^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Seega

$$\begin{aligned}
({}_{C}D_a^\alpha f)(t) &= ({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left({}_{RL}D_a^\alpha (t-a)^k\right) \\
&= ({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} \\
&= ({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha}.
\end{aligned}$$

□

Järeldus 9.9. *Lause* 9.8 *eeldustel*

$${}_{C}D_a^\alpha f = {}_{RL}D_a^\alpha f$$

parajasti siis, kui iga $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ *korral*

$$f^{(k)}(a) = 0.$$

Lause 9.10. *Olgu* $\alpha > 0$ *ja* $m := \lceil \alpha \rceil$. *Olgu funktsioon* f m *korda pidevalt diferentseeruv poollõigus* $[0, \infty)$ *ja funktsioonid* $f, f', \ldots, f^{(m-1)}$ *eksponentsiaalse kasvuga* σ. *Kui* $s > \max\{0, \sigma\}$, *siis*

$$\mathcal{L}[{}_{RL}J_0^\alpha f](s) = \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[f](s) \tag{9.5}$$

ja

$$\mathcal{L}[{}_{C}D_0^\alpha f](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=1}^{m} s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0). \tag{9.6}$$

Tõestus. Laplace'i teiseduse lineaarsuse ja seose (7.12) põhjal

$$\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{s^\alpha}, \quad s > 0, \tag{9.7}$$

kus

$$g(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Paneme tähele, et

$$({}_{RL}J_0^{\alpha} f)(t) = f(t) * g(t).$$

Seega Boreli teoreemi 6.3 ja seose (9.7) abil saame

$$\mathcal{L}[{}_{RL}J_0^{\alpha} f](s) = \mathcal{L}[g](s) \cdot \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s^{\alpha}} \mathcal{L}[f](s), \qquad s > \max\{0, \sigma\}.$$

Lause 9.2 ja definitsiooni 9.1 alusel

$$ {}_{C}D_a^{\alpha} f = ({}_{RL}J_a^{m-\alpha} D^m f). \tag{9.8}$$

Võrduste (9.8) ja (9.5) ning lause 2.3 abil jõuame seoseni (9.6):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}_{C}D_0^{\alpha} f](s) &= \mathcal{L}[{}_{RL}J_0^{m-\alpha} D^m f](s) = \frac{1}{s^{m-\alpha}} \mathcal{L}[D^m f](s) \\
&= s^{\alpha-m} \left(s^m \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=1}^{m} s^{m-k} f^{(k-1)}(0) \right) \\
&= s^{\alpha} \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=1}^{m} s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0), \qquad s > \max\{0, \sigma\}.
\end{aligned}$$

□

§10 Murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamine Laplace'i teisenduse abil

Selles paragrahvis lahendame mõned murrulist järku tuletistega diferentsiaalvõrrandid Laplace'i teisenduse abil.

Näide 10.1. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$ {}_C D_0^{\frac{1}{2}} y = -y + t^2 + \frac{2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}} \tag{10.1} $$

lahend $y = y(t)$ $(t \geqslant 0)$, mis rahuldab algtingimust

$$ y(0) = 0. \tag{10.2} $$

<u>Lahendus</u>: Rakendades võrrandile (10.1) Laplace'i teisendust. Arvestades viimase lineaarsust, saame

$$ \mathcal{L}\left[{}_C D_0^{\frac{1}{2}} y\right](s) + \mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}\left[t^2\right](s) + \frac{2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \mathcal{L}\left[t^{\frac{3}{2}}\right](s). \tag{10.3} $$

Lause 9.10 ja valemi (7.12) kohaselt saab võrrand (10.3) kuju

$$ s^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}[y](s) - s^{-\frac{1}{2}} y(0) + \mathcal{L}[y](s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}} $$

ehk

$$ \left(s^{\frac{1}{2}} + 1\right) Y(s) = s^{-\frac{1}{2}} y(0) + \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^{\frac{5}{2}}}, \tag{10.4} $$

kus $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ ja $s > 0$. Arvestades algtingimust (10.2), avaldame võrrandist (10.4) kujutise $Y(s)$. Seega

$$ \left(s^{\frac{1}{2}} + 1\right) Y(s) = \frac{2}{s^3} \left(s^{\frac{1}{2}} + 1\right) $$

ehk

$$ Y(s) = \frac{2}{s^3} \tag{10.5} $$

Näite 1.5 põhjal on Cauchy ülesande $\{(10.1), (10.2)\}$ lahendiks

$$ y(t) = t^2, \qquad t \geqslant 0. $$

Näide 10.2. Olgu $\alpha \in (0,1]$. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$ {}_C D_0^\alpha y + y = \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + t^2 - t \tag{10.6}$$

lahend $y = y(t)$ $(t \geqslant 0)$, mis rahuldab algtingimust

$$y(0) = 0. \tag{10.7}$$

Lahendus: Rakendades võrrandile (10.6) Laplace'i teisendust, saame

$$\mathcal{L}\left[{}_C D_0^\alpha y\right](s) + \mathcal{L}[y](s) = \frac{2\mathcal{L}\left[t^{2-\alpha}\right](s)}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{\mathcal{L}\left[t^{1-\alpha}\right](s)}{\Gamma(2-\alpha)} + \mathcal{L}\left[t^2\right](s) - \mathcal{L}[t](s). \tag{10.8}$$

Lause 9.10 ja valemi (7.12) kohaselt saab võrrand (10.8) kuju

$$s^\alpha \mathcal{L}[y](s) - s^{\alpha-1}y(0) + \mathcal{L}[y](s) = \frac{2}{s^{3-\alpha}} - \frac{1}{s^{2-\alpha}} + \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}$$

ehk

$$(s^\alpha + 1)\, Y(s) = \frac{2}{s^{3-\alpha}} - \frac{1}{s^{2-\alpha}} + \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} + s^{\alpha-1}y(0), \tag{10.9}$$

kus $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ ja $s > 0$. Arvestades algtingimust (10.7), avaldame võrrandist (10.9) kujutise $Y(s)$. Seega

$$(s^\alpha + 1)\, Y(s) = 2\frac{s^\alpha + 1}{s^3} - \frac{s^\alpha + 1}{s^2},$$

ehk

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} \tag{10.10}$$

Kasutades Laplace'i teisenduse pöördteisenduse lineaarsust, saame näite 1.5 abil Cauchy ülesande {(10.6), (10.7)} lahendiks

$$y(t) = t^2 - t, \qquad t \geqslant 0.$$

Näide 10.3. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + {}_C D_0^{\frac{3}{2}} y + y = 1 + t \tag{10.11}$$

lahend $y = y(t)$ $(t \geqslant 0)$, mis rahuldab algtingimusi

$$y(0) = y'(0) = 1. \tag{10.12}$$

Lahendus: Laplace'i teisendust abil saame

$$\mathcal{L}[y''](s) + \mathcal{L}\left[{}_C D_0^{\frac{3}{2}} y\right](s) + \mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[1](s) + \mathcal{L}[t](s). \tag{10.13}$$

Lause 9.10 kohaselt saab võrrand (10.13) kuju

$$s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y'(0) + s^{\frac{3}{2}}\mathcal{L}[y](s) - s^{\frac{1}{2}}y(0) - s^{-\frac{1}{2}}y'(0) + \mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

ehk

$$\left(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1\right)Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \left(s + s^{\frac{1}{2}}\right)y(0) + \left(s^{-\frac{1}{2}} + 1\right)y'(0), \tag{10.14}$$

kus $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ ja $s > 0$. Arvestades algtingimusi (10.12), avaldame võrrandist (10.14) kujutise $Y(s)$. Seega

$$\left(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1\right)Y(s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)\left(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1\right)$$

ehk

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \tag{10.15}$$

Kaustades pöördteisenduse lineaarsust ning näidet 1.5, saame Cauchy ülesande {(10.11), (10.12)} lahendiks

$$y(t) = 1 + t, \qquad t \geqslant 0.$$

Using the Laplace transform to solve differential equations

Anna Marita Laanemaa

Summary

Let f be a function on $[0, \infty)$. The Laplace transform of a function f is defined by

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \tag{1}$$

whenever the integral in (1) converges. Often the Laplace transform (1) is denoted by $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$. In general the parameter s can be a complex number but in this thesis, we mainly assume that s is a real number. In addition we generally deal with piecewise continuous functions f of exponential order.

In the first four sections, the definition of Laplace transform and analyses of it are given. Also some properties of the Laplace transform are presented.

The central part of our work is the fifth section, where several initial value problems are solved with the classical method and with the Laplace transform method. The strategy of the latter method is to transform the Cauchy problems of linear differential equations with constant coefficients into simple algebra problems with easily obtained solutions. Then the inverse Laplace transform is applied to retrieve the solutions of the original problems.

In order to introduce the concept of fractional (of a non-integer order) derivative of a function, we need some information about the gamma function and the connection between the Laplace transform and the gamma function. Those questions are considered in the sixth and the seventh sections.

The next two sections provide approaches of Riemann-Liouville's and Caputo's to fractional derivatives. Some important properties of Riemann-Liouville differential and integral operators are given. In the latter one, the connection between Riemann-Liouville's and Caputo's fractional differential operators is explored. Finally, the Laplace transforms to Riemann-Liouville fractional integrals and Caputo fractional derivatives are provided.

In the final section, some initial value problems, which include fractional differential equations with Caputo derivatives, are solved.

Kirjandus

[1] H. Brunner, P. J. von der Houwen, *The numerical solution of Volterra equations (CWI Monograph 3)*, North-Holland, 1986.

[2] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differentisl Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[3] A. Jõgi, *Integraalteisendused*, TTÜ Kirjastus, Tallinn, 2003.

[4] E. Jürimäe, *Kompleksmuutuja funktsioonide teooria lühikursus*, Valgus, Tallinn, 1983.

[5] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs I. Teine, parandatud ja täiendatud trükk*, Valgus, Tallinn, 1982.

[6] A. M. Laanemaa, *Diferentsiaalvõrrandite lahendamine Laplace'i teisenduse abil (bakalaureusetöö)*, Tartu, 2011.

[7] A. Pedas, G. Vainikko, *Harilikud diferentsiaalvõrrandid: teooria, näiteid, ülesandeid*, TÜ Kirjastus, Tartu, 2011.

[8] J. L. Schiff, *The Laplace transform: theory and applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.

Lisa

Laplace'i teisenduse ja pöördteisenduse tabel

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f](s)$	Viide
c	$\frac{c}{s}$	Näide 1.2
$e^{\omega t}$	$\frac{1}{s-\omega}$	Näide 1.3
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	Näide 1.4
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	Seos (1.9)
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	Näide 1.5
$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1\mathcal{L}[f_1](s) + c_2\mathcal{L}[f_2](s)$	Lause 2.1
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	Näide 2.2
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	Seos (2.1)
$f^{(n)}(t)$	$s^n\mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$	Lause 2.3
$f(t) * g(t)$	$F(s)G(s)$	Teoreem 6.3
t^ν	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}$	Seos (7.12)
$({}_{RL}J_0^\alpha f)(t)$	$\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[f](s)$	Lause 9.10
$({}_{C}D_0^\alpha f)(t)$	$s^\alpha\mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=1}^{m} s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0)$	Lause 9.10

Riemann-Liouville'i tuletise tabel

$f = f(t)$	$({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}} f)(t)$	$({}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}} f)(t)$	Viide tuletise leidmisele
c	$\frac{c}{\sqrt{t\pi}}$	$-\frac{c}{2\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}}$	Näide 8.11
t	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{t\pi}}$	Näide 8.12
t^2	$\frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$	$4\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	Näide 8.13

Caputo tuletise tabel

$f = f(t)$	$({}_{C}D_0^{\frac{1}{2}} f)(t)$	$({}_{C}D_0^{\frac{3}{2}} f)(t)$	Viide tuletise leidmisele
c	0	0	Näide 9.3
t	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	0	Näide 9.6
t^2	$\frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$	$4\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	Näide 9.7

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Anna Marita Laanemaa,
(sünnikuupäev: 16.12.1989)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Laplace'i teisenduse kasutamine diferentsiaalvõrrandite lahendamisel", mille juhendaja on prof. Arvet Pedas,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 03.06.2015