E. LUHT • A. TELGMAA

Matemaatika

TÖÖLISNOORTE KOOLIDELE

VII KLASS

A-2/204

E. LUHT A. TELGMAA

MATEMAATIKA

TÖÖLISNOORTE KOOLIDELE
VII KLASS

2. väljaanne

KIRJASTUS «VALGUS»
TALLINN 1966

51
L82

Kaanekujundus *E. Tali*

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
65616

ARHIIVKOGU

NÄPUNÄITEID ÕPIKU KASUTAJALE.

Kuna paljudel töötavatel noortel (näiteks kaugõppekeskkooli õpilastel) pole alati võimalik kuulata õpetaja selgitusi, siis anname siin matemaatika õppimiseks mõningaid soovitusi.

1. Matemaatika õppimisel olgu alati käepärast paber ja pliiats, et õpitavaid küsimusi (valemite tuletamised, tõestused jm.) peale paari-kolmekordset tähelepanelikku lugemist oma käega läbi proovida.
2. On oluline, et igast õpitud lausest sisuliselt a r u s a a d a k s, aga mitte mehhaaniliselt meelde ei jäetaks. Ka valemite õppimisel tuleb alati vältida nende mehhaanilist päheõppimist. Palju väärtuslikum on teha endale selgeks iga valemi sisu ja jätta meelde vastavate arvutuseeskirjade sõnalised vormid (näiteks silindri ruumala arvutamine, koonuse külgpindala arvutamine jm.).
3. Kõigile küsimustele, mis õpiku tekstis on esitatud lugejale, tuleb kindlasti enne edasiminekut leida vastus, sest vastasel juhul võib edaspidine jääda arusaamatuks. Sageli aitab vastust leida vastavale paragrahvile ja punktile tehtud viide.
4. Erilist tähelepanu tuleb pöörata peatükkidele ja paragrahvidele, kus on antud kordamismaterjal kas selgituste, küsimuste või ülesannete näol. Need on sageli võtmeks järgnevates paragrahvides esitatud materjali mõistmisele.
5. Enne ülesande (eriti tekstülesande) lahendamisele asumist lugeda ülesanne tähelepanelikult läbi, leida andmed, millest alustada lahendamist, ja ühtlasi teha kindlaks need nõudmised ja küsimused, millele tuleb leida vastused.
6. Ülesande lahenduse lõpul tuleb alati k o n t r o l l i d a tehtut, et veenduda lahenduse õigsuses, ja alles siis kirjutada vastus. Jämedat viga võimaldab sageli avastada vastuse ligikaudne hinnang, kas tulemus on kooskõlas tegeliku elu nõuetega.
7. Ülesannete lahendamisel pidada põhiliselt kinni õpikus antud järjekorrast.

Autorid.

6. KLASSI KURSUSE KORDAMINE.

§ 1. TÄHTSAMAID MÕISTEID ALGEBRAST.

1. ALGEBRALINE AVALDIS.

Sageli tähistatakse arvu tähega, kuna see kergendab ülesannete lahendamist ja arvudevaheliste seoste väljendamist lihtsamal kujul. Ka hõlbustab arvu tähistamine tähega paljude arutluste ja uurimiste läbiviimist.

Enamasti kasutatakse arvu tähisena ladina tähti. Antud arve tähistatakse tavaliselt tähestiku alguses olevate tähtedega, näiteks a, b, c, d, ..., otsitavaid arve aga tähestiku lõpus olevate tähtedega, näiteks t, u, v, x, y, z, ...

Arvu tähisena kasutatakse sageli ka suuri tähti. Nii tähistatakse näiteks füüsikas jõudude suurusi tähtedega P ja Q, juhtme takistust tähega R jne. Geomeetrias tähistatakse harilikult pindala tähega S ja ruumala tähega V.

Kui tähtedega või tähtede ja numbritega kirjutatud arvud on omavahel seotud tehetemärkidega, siis niisugust kirjutust nimetatakse **algebraliseks avaldiseks** ehk lihtsalt **avaldiseks.**

Näiteid. a; ax; $3by$; $2a+b$; $3a^2+4b^3$ jne.

Ülesandeid.

1. Kui arvust lahutame arvu enda, siis saame 0. Kirjutada see sümbolite abil. Mis väärtused võivad olla tähel saadud võrduses?
2. Liites arvuga 0, saame arvu enda. Toimida eelmise ülesande eeskujul.
3. Avaldis $10a+b$ tähendab kahekohalist täisarvu, mille numbrid on a ja b. Mis väärtused võivad olla neil tähtedel?
4. Avaldis $100a+10b+c$ tähendab kolmekohalist täisarvu numbritega a, b ja c. Mis väärtused võivad olla tähtedel a, b ja c?
5. Kirjutada arvude a ja b summa. Arvutada see summa, kui

1) $a=256$; $b=744$; 2) $a=\frac{3}{16}$; $b=2\frac{1}{2}$; 3) $a=5{,}4$; $b=3{,}32$.

6. Kirjutada arvude c ja d vahe ning arvutada see, kui

1) $c=2314$; $d=925$; 2) $c=6{,}03$; $d=2{,}7$; 3) $c=5\frac{3}{11}$; $d=2\frac{5}{22}$.

7. Ruudu külg on a m; avaldada ruudu ümbermõõt ja pindala.
8. Kahekohaline arv sisaldab t kümnelist ja u ühelist. Mitu ühelist on selles arvus kokku?
9. Kolmekohalises arvus on a sajalist, b kümnelist, c ühelist. Missuguse avaldisega saab esitada selle arvu üheliste koguarvu?
10. Kirjutada avaldis, mis saadakse, kui korrutises $3ab$ asendada a summaga $x+y$ ja b vahega $x-y$.

2. ÜKSLIIKMED JA HULKLIIKMED.

Algebraliste avaldiste seas on **üksliikmeid** ja **hulkliikmeid.**

Üksliikmeteks nimetatakse avaldisi: 3; a; $\frac{1}{5}b^2$; $-7{,}9bc$; $3ax^3$; $a^3b^2c^3$.

Üksliige on korrutis, mille teguriteks on numbrite ja tähtedega väljendatud arvud ja nende astmed.

Aste on võrdsete tegurite korrutis.

Seega $a \cdot a \cdot a = a^3$, kus a on astendatav (ehk astme alus), 3 on astendaja ja a^3 on aste.

Astendaja näitab, mitu korda on astendatav võetud tegurina.

Üksliikme numbriline tegur kirjutatakse esikohale ja seda tegurit koos üksliikme märgiga nimetatakse **kordajaks.**

Üksliikmete algebralist summat nimetatakse hulkliikmeks.

Nii on avaldis

$3a^2-(-2ab)+(-5ab^2)-(+4a)$ ehk $3a^2+2ab-5ab^2-4a$

hulkliige.

Hulkliikmes esinevate üksliikmete arvu järgi nimetatakse hulkliiget kaksliikmeks, kolmliikmeks jne. Üksliikme, kaksliikme, kolmliikme ja hulkliikme vastavad rahvusvahelised nimetused on **monoom, binoom, trinoom** ja **polünoom.**

Kui hulkliikmes esineb üksliikmeid, mis üksteisest üldse ei erine või erinevad ainult kordajate poolest, siis niisuguseid hulkliikme liikmeid nimetatakse **sarnasteks.**

Hulkliikme sarnaseid liikmeid võib k o o n d a d a, s. t. teha nõutud tehted nende liikmete kordajatega.

Ülesandeid.

11. Kirjutada kordaja abil lühemalt:
1) $ab+ab+ab+ab+ab$;
2) $tu+tu+tu+tu+tu+tu$.

12. Kirjutada astendaja abil lühemalt:
1) $aaakkk$; 2) $rrrss$.

13. Kirjutada lühemalt:
1) $xxxyyy+xxy+xxxyyy+xxxyyy+xxy$;
2) $a+a+ab+ab+aaaa+bbbbb$.

14. Arvutada:
1) $k+k$ ja k^2, kui $k=9$;
2) $l+l+l$ ja l^3, kui $l=5$;
3) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\left(\frac{5}{6}\right)^2$; $(0{,}1)^2$; $(0{,}5)^2$;
4) $2^3 \cdot 5^2$; $7^2 \cdot 3^4 - 2^3$.

15. Kirjutada:
1) arvude x ja y ruutude summa;
2) arvude x ja y summa ruut;
3) arvude a ja b summa ja vahe korrutis;
4) arvude m ja n vahe ruut;
5) arvude m ja n ruutude vahe;
6) arvude c ja d vahe kuup;
7) arvude c ja d summa kuup.

16. Kirjutada mingi täis- ja murdarvuliste kordajatega hulkliige.

17. Kirjutada seitsme teguri korrutis, milles 3 esimest on võrdsed a-ga, ülejäänud b-ga. Kirjutada sama avaldis astendaja kasutamisega.

18. Koondada järgmised hulkliikmed:
1) $19a-8x+5x$;
2) $91a-71b+18b$;
3) $34x-21y+57y$;
4) $5a-7x+5x-3a+2x-a$;
5) $4a-5b+3c-2b-c+a+9b+3a$;
6) $5\frac{1}{4}a-3\frac{1}{2}b+6b-3\frac{1}{2}a+7c-8\frac{1}{2}c$;
7) $\frac{4}{5}a-\frac{7}{2}b+\frac{3}{7}a-\frac{2}{3}b-a$;
8) $7{,}3a-3{,}05b+1{,}49b+6{,}8c-9{,}42c+18{,}9a+1{,}56b$;
9) $9{,}8x-3\frac{1}{6}x-0{,}72y+\frac{3}{5}y-6\frac{1}{12}x+0{,}12y$.

19. Koostada hariutus sarnaste liikmete koondamiseks, nii et tulemus oleks $3a^2-5b$.

§ 2. ÜKS- JA HULKLIIKMETE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

Üksliikmete liitmisel tuleb nad koos märkidega kirjutada üksteise järele ja koondada sarnased liikmed, kui neid on.

Näide. Liita üksliikmed $5a^2$; $-2a^2$ ja $-4a^2$.

Lahendus. $5a^2-2a^2-4a^2=-a^2$.

Üksliikmete lahutamisel tuleb liita nende vastandarvud, s. t. kirjutada üksliikmed vastupidise märgiga vähendatava järele.

Näiteid. 1) Lahutada üksliikmest $5x$ üksliikmed $3x$ ja $5y$.

Lahendus. $5x-3x-5y=2x-5y$.

2) Lahutada üksliikmest $-3a^2b$ üksliikmed $5a^2b$ ja $-8a^2b$.

Lahendus. $-3a^2b-5a^2b+8a^2b=0$.

Hulkliikmete liitmisel on vaja kõik hulkliikme liikmed kirjutada koos nende märkidega üksteise järele ja koondada sarnased liikmed, kui neid on.

Näide. $(5x^2-ax+a^2)+(3x^2+2ax-3a^2)=$
$=5x^2-ax+a^2+3x^2+2ax-3a^2=8x^2+ax-2a^2$.

Hulkliikme lahutamisel mingist algebralisest avaldisest tuleb lahutatava kõik liikmed kirjutada antud avaldise järele vastandmärkidega, s. t. kui sulgude ees on märk «—», siis sulgude avamisel tuleb iga sulgude sees oleva liikme märk muuta vastupidiseks. Kui seejärel leidub sarnaseid liikmeid, siis tuleb need koondada.

Näide. $(13x-11y+10z)-(-15x+10y-15z)=13x-11y+$
$+10z+15x-10y+15z=28x-21y+25z$.

Ülesandeid.

Lihtsustada.

20. $7a+(2a-3b)$

21. $3x+(9y-5x)$

22. $(5x-7a)+4a$

23. $7a-(2a+3b)$

24. $121a-(45b+27a)$

25. $9x-(3x+5y)$

26. $110-(10+x)$

27. $7a-9b+(a+b)$

28. $15a-7b-(7a+5b)$

29. $5a+(3a-2b)+(a+2b)$

30. $(a+b-c)-(a-b+c)$

31. $(8x-5)+(3x-7)-(9x-11)$

32. $12-(5x-6)+(3x+1)-(x+10)$

33. $m-[(a-b)-(c-m)]$

34. $m-[(x-y)-(a-m)]$

35. Koostada ülesanne üksliikmete lahutamiseks nii, et tulemuseks oleks null.

36. Tuua näide sulgude avamiseks, kasutades ümar- ja nurksulgusid.

37. Kirjutada avaldis, mille liikmete märgid oleksid vastupidised hulkliikme $a-3b+2c$ liikmete märkidele.

38. Missugune avaldis on vaja liita avaldisele $a-3b+2c$, et summa oleks null?

39. Täita lünk vastava avaldisega:

$$a-b+4c+\ldots=0;$$
$$2a-3b+\ldots=a+b;$$
$$2a-\ldots+b=a-b.$$

II PEATÜKK.

HULKLIIKME TEGUREIKS LAHUTAMINE.

§ 3. KORDAMINE.

1. ARVU JA ÜKSLIIKME ALGTEGURID.

Varasemast kursusest on teada, et täisarvud jagunevad **algarvudeks** ja **kordarvudeks.**

Algarv on niisugune täisarv, mis on suurem kui 1 ja millel pole teisi tegureid peale arvu 1 ja arvu enda.

Nii on algarvud 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 jne.

Kordarvuks nimetatakse täisarvu, mida saab esitada algarvude korrutisena.

Kui kordarv on kirjutatud algarvude korrutisena, siis öeldakse, et antud arv on **lahutatud algtegureiks.**

Ülaltoodust järeldub, et arv 1 ei kuulu ei algarvude ega ka kordarvude hulka.

Arvude lahutamisel algteguriteks kasutatakse arvude jaguvuse tunnuseid. Tähtsamad neist on:

1) arv jagub 2-ga, kui ta lõpeb paarisnumbriga (24, 126, 3422 jne.);

2) arv jagub 3-ga, kui ta ristsumma (numbrite summa) jagub 3-ga (321, 540, 234, 102 jne.);

3) arv jagub 5-ga, kui ta viimane number on 0 või 5 (10, 150, 175, 235 jne.).

Lahutame algtegureiks näiteks arvu 630.

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7

$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Lahenduskäik on järgmine:

1) jaguvuse tunnuste põhjal on 630 väikseim algtegur 2;

2) pärast 630 jagamist 2-ga saame arvu 315, mille väikseim algtegur on 3;

3) 315 jagamisel 3-ga saame 105, mille väikseim algtegur on jälle 3;

4) arvu 35 väikseim algtegur on 5;

5) viimane jagatis 7 on ise algarv.

Seega on arvu 630 algtegurid 2, 3, 3, 5 ja 7.

Algtegurite leidmist alustame kõige väiksemast algtegurist. Seejärel, kui arv väikseima algteguriga enam ei jagu, leiame jagu-vustunnuseid kasutades proovimise teel järk-järgult suuremad algtegurid.

Arvu lahutamist algtegureiks kasutatakse aritmeetikas murdude taandamisel ja ühenimelisteks teisendamisel.

Tehete sooritamisel algebraliste murdudega tuleb nii arve, üksliikmeid kui ka hulkliikmeid lahutada tegureiks, s. t. esitada korrutise kujul.

Tähelise astendatavaga astmeid ei esitata korrutisena. Kirjutuse lühendamise huvides kasutatakse astet ka võrdsete numbriliste tegurite korral. Nii on üksliikme 56 ab^2x^5 algtegurid küll $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot abbxxxxx$, kuid me kirjutame selle nii:

$$2^3 \cdot 7 \cdot ab^2x^5.$$

Seega

$$56ab^2x^5 = 2^3 \cdot 7 \cdot ab^2x^5.$$

Ülesandeid.

40. 1) Lahutada järgmised arvud ja üksliikmed algtegureiks:
6006; 798; 2990; 2436; 26 798;
$4a^2b^3$; $4214ax^4$; $45xy^2$; $791a^2b^3y^m$.

2) Leida ja kirjutada antud arvude reast välja need arvud, mis jaguvad vastavalt 2-ga, 3-ga, 5-ga, 10-ga:
100, 300, 320, 375, 400, 480, 500, 625, 650, 720, 3003, 17 017, 208 288, 621 125, 1 075 000, 457 281.

3) Kirjutada 3 neljakohalist ja 3 viiekohalist arvu, mis jaguksid nii 3-ga kui ka 9-ga.

4) Tõestada, et vahe $a^3 - a$, kus a on mistahes positiivne täisarv, on mingi arvu 6-kordne.

5) Pioneerid rivistusid jalutuskäiguks 6-kaupa ritta, pärast aga rivistati nad ümber 4-kaupa ritta. Kõik read said täis. Kui palju oli pioneere, kui neid oli vähem kui 90, kuid rohkem kui 80?

2. HULKLIIKME KORRUTAMINE JA JAGAMINE ÜKSLIIKMEGA.

Hulkliikme korrutamisel (jagamisel) üksliikmega korrutatakse (jagatakse) hulkliikme iga liige selle üksliikmega ja tulemused liidetakse.

Selle korrutamis- (jagamis-) tehte asemel öeldakse tavaliselt: a v a d a s u l u d.

Ülesandeid.

41. Avada sulud ja koondada, kui võimalik.

1) $3(a+b)+4(a-b)$
$2(x-2y)+3(x-3y)$
$5(a-b+c)-2(a-b-c)$
$2ab(3a^2-26^3+c)$

2) $5a^2b(5a-4a^2b+3a^3b^2-7a^4b^3)$
$0{,}6(8cz^2+z^3)$
$\frac{1}{2}u^2(6v+2u)$
$10mn\ (\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{5}ng^2)$

N ä i d e. $7ab(3a^2-ab^2-2b^3)=21a^3b-7a^2b^3-14ab^4$.
Niisuguste ülesannete puhul peame meeles, et
võrdsete alustega astmete korrutamisel astendajad liidetakse.

42. Avada sulud.

1) $(5a+5b-5c):5$
$(8a-6b+10c):2$
$(6ax-9bx-15x):3x$
$(8a^2-4ac+12a):4a$
$-5abc:(-5ab)$

N ä i d e $(20a^6x^7+30a^4x^5):5a^3x^4=4a^3x^3+6ax$.

Võrdsete alustega astmete jagamisel jagatava astendajast lahutatakse jagaja astendaja.

2) $-0{,}8ab^7c^{m+1}:(-4b^6c^{m-1})$
$(14y^2-42y):(-7y)$
$(3{,}6x^8-5{,}4x^7):0{,}9x^7$
$(-91p^2q^2):13pq$

43. Koostada kolmliige, mis oleks $2a$ ja mingi kolmliikme korrutis.

44. Koostada hulkliige, mis oleks kaksliikme $a-2b$ ja mingi teise kaksliikme korrutis.

45. Kirjutada puuduvad liikmed.

$2a(\ldots-\ldots)=4a^3+6ab$
$(2a-b)(\ldots+\ldots)=4a^2-\ldots+\ldots-6ab^2$

Tulemused kontrollida.

46. Leida x ja kontrollida saadud võrduse õigsust.
1) $x \cdot 3a = 6a^2b$
2) $(3a+b)x = 12a^4+4a^2b$

§ 4. HULKLIIKME TEGUREIKS LAHUTAMINE ÜHISE TEGURI SULGUDE ETTE TOOMISE VÕTTEGA.

Olgu antud korrutis $30ab\,(b-x)$, millest saame hulkliikme

$$30ab\,(b-x) = 30ab^2-30abx.$$

Lugedes saadud võrdust paremalt vasakule, näeme, et hulkliige $30ab^2-30abx$ on antud korrutise kujul. Saadud tegureid nimetatakse **hulkliikme tegureiks.**

Sageli ongi vaja kujutada hulkliiget korrutisena. Niisugust algebralise summa teisendamist korrutiseks nimetatakse **hulkliikme teguriteks lahutamiseks.**

Seega võime eespool toodud hulkliikme kirjutada tegureiks lahutatuna kujul:

$$30ab^2-30abx = 30ab\,(b-x).$$

Seni vaatlesime hulkliikme leidmist tema tegurite järgi, näiteks

$$(a+b)\,(a^2-b) = a^3-ab+a^2b-b^2.$$

Kuidas peame aga toimima siis, kui meile on antud lahendada vastupidine ülesanne?

Vaatleme hulkliiget

$$ab+ac+ad.$$

Siin on igas liikmes üks ja sama tegur a. Seega jagub hulkliikme iga liige selle teguriga:

$$(ab+ac+ad) : a = b+c+d.$$

Niisugusel juhul öeldakse, et tegur a on hulkliikme kõikide liikmete ühine tegur. Kuna jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutisega, siis

$$ab+ac+ad = a(b+c+d).$$

Nii olemegi antud hulkliikme teisendanud korrutiseks, s. t. lahutanud tegureiks ühise teguri (a) sulgude ette toomise abil.

Hulkliikmes $3a+3b$ on mõlemal liikmel ühine tegur 3, millega hulkliiget jagades saame jagatiseks $a+b$. Seega

$$3a+3b = 3(a+b).$$

Hulkliikmes $8a-12b$ on ühiseks teguriks 4. Seega

$$8a-12b=4(2a-3b).$$

Viimase näite puhul peame silmas pidama, et sulgude ette võetav ühine tegur oleks suurim, sest vastasel korral on sulgudesse jäänud hulkliikmel olemas veel mingi ühine tegur ja teguriteks lahutamine pole seega viidud lõpuni.

Peame meeles järgmise eeskirja hulkliikmete tegureiks lahutamisel ühise teguri sulgude ette toomise võttega.

Kui hulkliikme kõigil liikmeil on ühine tegur, siis saame hulkliiget esitada kahe teguri korrutisena, kus ühine tegur on korrutatud hulkliikmega, mille iga liige on saadud antud hulkliikme liikmete jagamisel selle ühise teguriga (hulkliikme jagamine üksliikmega).

Tulemust kontrollime korrutamise teel.

Näiteid. 1) Lahutada tegureiks hulkliige $12x^2-18x+30$. Selle hulkliikme liikmete ühiseks teguriks on 6. Kui antud hulkliikme iga liikme jagame 6-ga, siis saame tulemuseks $2x^2-3x+5$.

Seega hulkliikme $12x^2-18x+30$ tegureiks on 6 ja $2x^2-3x+5$ ehk lühidalt:

$$12x^2-18x+30=6(2x^2-3x+5).$$

Korrutades kontrollimise eesmärgil 6 ja $2a^2-3x+5$, saame uuesti antud hulkliikme.

2) Lahutada tegureiks hulkliige

$$9a^5x^2-6a^3x^3+15a^2x^5.$$

Selle hulkliikme liikmete ühiseks teguriks on $3a^2x^2$, sest hulkliige jagub selle teguriga. Jagades antud hulkliikme $3a^2x^2$-ga, saame $3a^3-2ax+5x^3$. Seega

$$9a^5x^2-6a^3x^3+15a^2x^5=3a^2x^2(3a^3-2ax+5x^3).$$

Ülesandeid.

47. Lahutada tegureiks.

1) $4\cdot11+9\cdot11$
$73\cdot21+12\cdot21$
$7a+7b$
$nx-px$
$18a-24b$
$20x-30y$

2) $6ax-9bx$
$12a^2-9ab$
$8ax+20x^2$
$18ap-6p^2$
$10ax^2-12a^2x$
$9h^2k^3-15h^3k^2$

3) $-9+63x$
$-21a+35t$
$-15m-15n$
$-8an+12n$
$-a^2+ab$
$-x^3-x^2y$

Järgnevate ülesannete hulgas on neid, kus üks liikmetest on ise ühiseks teguriks. Sel juhul jääb sulgudesse tema asemele kas $+1$ või -1.

Näiteid.

1) $3a+3=3(a+1)$
2) $2ab-a=a(2b-1)$
3) $8x-8=8(x-1)$
4) $25ab-5b^2=5b(5a-b)$

48. Lahutada tegureiks.

1) $6ax-6a$
$ab+b$
$ax-x$
$7x-7$
$5-5y$
a^2-a

2) x^2+x
$3a-6ab$
a^3+a^2
$9x^2+18ax^2$
$3a^2b+3b$

3) $mx-m$
$4x-8$
a^2b^2-ab
$5a^2-10ab$
$12ax^2-10a^2x$
$10ax-15bx$

49. Kirjutada puuduvad liikmed.

$2a(\ldots-\ldots)=-4a^3+6ab$
$7a(\ldots+\ldots)=7ab+7ac$
$5a(\ldots-\ldots)=15ax-20ay$
$x^2(\ldots-\ldots)=x^3+x^2$
$y^3(\ldots-\ldots)=y^3-y^4$

50. Leida tundmatu tegur ja kontrollida saadud võrduse õigsust.

$\ldots 3a=6a^2b$
$4a^2(\ldots+\ldots)=12a^4+4a^2b$
$5a^2p^2(\ldots-\ldots)=15a^3p^2-5a^2p^3$
$7a^2x^3(\ldots+\ldots)=21a^4x^3+14a^2x^3$
$3m^3(\ldots-\ldots)=9m^4-6m^3$

51. Lahutada tegureiks.

1) $ax-bx+cx$
$2ay+3by-cy$
$35ac-49bc+21c^2$
$36ax-54bx-9x$
$6az-9bz+21cz$

2) $54a^3b^2+42a^2b^2-24ab^3$
$57a^2b-76ab^2-19ab$
$42a^2y-35ay^2+7ay$
$-26a^2c^3-39a^3c^2-52a^2c^2$
$-14m^3n+42m^2n^2+84mn^3$

Sulgude ette võetav tegur ei tarvitse olla ainult üksliige, ta võib olla ka hulkliige. Kui sulgude ette võetav tegur on hulkliige, siis tuleb ta paigutada sulgudesse.

Hulkliikme $a(m+n)+b(m+n)$ puhul näeme, et antud hulkliikme liikmete ühiseks teguriks on hulkliige $m+n$ ja me võime tuua selle sulgude ette. Teise teguri leidmiseks jagame jällegi hulkliikme iga liikme ühise teguriga. Saadud jagatis ongi teiseks teguriks. Seega

$$a(m+n)+b(m+n)=(m+n)(a+b).$$

Näiteid.

1) $5a(c+d)+4b(c+d)=(c+d)(5a+4b)$
2) $24a^6b^4(3c^2-4d^2)-36a^4b^5(3c^2-4d^2)=$
$=12a^4b^4(3c^2-4d^2)(2a^2-3b)$

Mõnikord esineb hulkliikme liikmete ühine tegur varjatud kujul.

3) $2(ac-bc)-5(ad-bd)+8(ax-bx)=$
$=2c(a-b)-5d(a-b)+8x(a-b)=$
$=(a-b)(2c-5d+8x)$

Ülesandeid.

52. Leida järgmistes avaldistes ühised tegurid ja kirjutada need välja:

1) $x(a-b)$, $y(a-b)$;
2) $b(c+d)$, $a(c+d)$;
3) $ab(x+y)$, $ac(x+y)$;
4) $a(x-4)$, $b(x-4)$;
5) $6m(p-3)$, $5n(3-p)$;
6) $2x(a-b)$, $3y(b-a)$;
7) $3a(x-y)$, $2(y-x)$;
8) $3x(x-1)$, $(1-x)$.

Viimases neljas ülesandes näeme, et sulgudes olevad tegurid on erinevad. Mille poolest nad erinevad? Lähemal vaatlusel selgub, et need tegurid erinevad märkide poolest. Kuidas aga teisendada avaldisi nii, et sulgudes olevad tegurid ei erineks märkide poolest? Seda on võimalik teha.

Toome 7. harjutuse teise avaldise sulgudes olevast tegurist -1 sulgude ette, siis saame

$$-1(-y+x), \text{ s. o. } -1(x-y).$$

Korrutades viimast veel 2-ga, oleme teisendanud teist avaldist nii, et sulgudes olevad tegurid on mõlemates avaldistes ühesugused:

$$2(y-x)=-2(x-y).$$

Nii teisendame alati, kui antud avaldistes hulkliikmelised tegurid erinevad märkide poolest.

53. Lahutada tegureiks $x(a-b)+y(a-b)$ ja kontrollida tulemuse õigsust, arvutades võrduse mõlemad pooled, kui $a=2$, $b=3$, $x=6$ ja $y=4$.

Lahendus.

$$x(a-b)+y(a-b)=(a-b)(x+y);$$

v. p. $6\cdot(2-3)+4\cdot(2-3)=6\cdot(-1)+4\cdot(-1)=$
$=(-1)\cdot(6+4)=(-1)\cdot 10=-10;$

p. p. $(2-3)\cdot(6+4)=-1\cdot 10=-10.$

Kui ühiseks teguriks on algebralise avaldise üks liidetavaist, siis jääb sulgudesse tema asemele kas $+1$ või -1.

Näiteid.

1) $b(c+d)+(c+d)=(c+d)(b+1)$
2) $xy(a-b)+(a-b)=(a-b)(xy+1)$
3) $3a(x+2)-(x+2)=(x+2)(3a-1)$

Kui pärast ühise teguri sulgude ette toomist jääb sulgudesse hulkliikmete summa või vahe, siis tuleb viimast võimaluse korral koondada.

Näide.

$(5a+2b)(m+3c)-(2a+b)(m+3c)=(m+3c)[(5a+2b)-$
$-(2a+b)]=(m+3c)(5a+2b-2a-b)=(m+3c)(3a+b)$

54. Lahutada tegureiks järgmised hulkliikmed.

1) $a(1+x)-(1+x)$
2) $x(a+b)-(a+b)$
3) $5(x-2y)+a(x-2y)$
4) $3a(x-y)+4b(x-y)$
5) $a(2x-5y)-(2x-5y)$
6) $m(5x-1)-(n+2)(5x-1)$
7) $(3m+n)\cdot(x+y)+5n(x+y)$
8) $3y(x-1)-2b(x-1)+c(x-1)$
9) $m(n-2)+p(n-2)+(2-n)$
10) $x(p-a)+y(a-p)-z(p-a)$

55. Arvutada kõige lühemal teel.

1) $23{,}4\cdot 8+46{,}6\cdot 8$
2) $17{,}9\cdot 15+25{,}1\cdot 15$
3) $21\cdot 3{,}8+6{,}2\cdot 3{,}8+17\cdot 3{,}8$
4) $34\cdot 1{,}78+25\cdot 1{,}78+41\cdot 1{,}78$

§ 5. HULKLIIKME TEGUREIKS LAHUTAMINE RÜHMITAMISE VÕTTEGA.

Olgu meil antud hulkliige

$$ax+ay+2x+2y.$$

Kui seda hulkliiget hakata tegureiks lahutama, siis paneme tähele, et esimesel kahel liikmel on ühiseks teguriks a ja kahel viimasel 2. Rühmitame nüüd hulkliikme liikmed nii, et igas rühmas oleks ühise teguriga liikmed. Saame

$$(ax+ay)+(2x+2y).$$

Kummaski rühmas on võimalik tegureiks lahutamine ühise teguri sulgude ette toomise võttega.

$$(ax+ay)+(2x+2y)=a(x+y)+2(x+y).$$

Nüüd on hulkliikme igal liikmel jällegi ühine tegur. Selleks on $(x+y)$, mille võime omakorda tuua sulgude ette. Nii saame lõpuks:

$$ax+ay+2x+2y=(ax+ay)+(2x+2y)=$$
$$=a(x+y)+2(x+y)=(x+y)(a+2).$$

Niisugust hulkliikme tegureiks lahutamise võtet nimetatakse **rühmitamise võtteks.**

Eespool toodud ülesannet on võimalik lahendada ka teisiti. Me näeme, et esimesel ja kolmandal ning teisel ja neljandal liikmel on samuti ühised tegurid ja seetõttu võib rühmad koostada järgmiselt:

$$(ax+2x)+(ay+2y).$$

Edasi toimime nii nagu varemgi.

$$ax+ay+2x+2y=(ax+2x)+(ay+2y)=$$
$$=x(a+2)+y(a+2)=(a+2)(x+y)$$

N ä i t e i d.

1) $2a(x+y)+x+y=2a(x+y)+(x+y)=$
$=(x+y)(2a+1)$
2) $5a(x+y)-x-y=5a(x+y)-(x+y)=$
$=(x+y)(5a-1)$

Viimase näite eeskujul p e a m e e l e s, e t «—» s u l u e e s m u u d a b m ä r g i d s u l u s e e s.

3) $3ax-4by-4ay+3bx=3ax+3bx-4ay-4by=$
$=(3ax+3bx)-(4ay+4by)=3x(a+b)-4y(a+b)=$
$=(a+b)(3x-4y)$

ehk teisiti:

$$3ax-4by-4ay+3bx=3ax-4ay+3bx-4by=$$
$$=(3ax-4ay)+(3bx-4by)=a(3x-4y)+b(3x-4y)=$$
$$=(3x-4y)(a+b).$$

Nagu näeme, on teisel juhul tulemus sama, ainult et tegurid on vahetatud. Korrutis aga ei olene tegurite järjekorrast. Seega on mõlemad tulemused õiged.

4) $x^3+x^2y-x^2z-xyz=x(x^2+xy-xz-yz)=$
$=x[x(x+y)-z(x+y)]=x(x+y)(x-z)$

ehk

$$x^3+x^2y-x^2z-xyz=(x^3+x^2y)-(x^2z+xyz)=$$
$$=x^2(x+y)-xz(x+y)=(x+y)(x^2-xz)=$$
$$=x(x+y)(x-z).$$

Neljaliikmelist avaldist saab paarikaupa rühmitada siis, kui

1) kõigi liikmete kordajad on positiivsed;
2) kõigi liikmete kordajad on negatiivsed;
3) negatiivsete kordajatega liikmete arv võrdub positiivsete kordajatega liikmete arvuga.

Näiteid.

1) $ax+bx-ma+mb$ ei saa lahutada tegureiks;
2) $ax-bx-ma-mb$ ei saa lahutada tegureiks.

Ülesandeid.

56. Lahutada tegureiks järgmised hulkliikmed.

1) $ax+ay+3x+3y$
2) $5x-5y+ax-ay$
3) $n^2+nz+5n+5z$
4) $3a^2+2ab+6a+4b$
5) $2ax-au+4bx-2bu$
6) $z^2-hz+11z-11h$
7) a^3-3a^2-2a+6
8) $3a^3-7a^2-9a+21$
9) $2x(3p+q)+3p+q$
10) $a(x-y)-x+y$
11) $t^2-at-3t+3a$
12) $16pq-12q-8pr+6r$
13) $2a^2-3bx^2+3ab-2ax^2$
14) $4ax+3xy^2-3ay^2-4x^2$
15) $a(m+n)-bm-bn$
16) $x(x-y)-ax+ay$
17) $m(a+b)-an-bn$
18) $5c(a-b)-ad+bd$
19) $3ax+2by-3ay-2bx$
20) $4a^2x-bx-12a^2y+3by$

57. Koostada hulkliige, mis lahutub tegureiks sulgude ette võtmise ja rühmitamisvõtte abil.

58. Koostada hulkliige, mille tegureiks on kaks võrdset kaksliiget ja $5b^2$.

59. Kirjutada puuduvad liikmed.
a) $k^2+kp-\ldots-\ldots=(k+p)(\ldots-\ldots)$.
Mitu lahendust on?
b) $(x^2+xy+\ldots+\ldots):(\ldots+\ldots)=x+2$.

§ 6. HULKLIIKME TEGUREIKS LAHUTAMINE ABIVALEMITE KASUTAMISE VÕTTEGA.

1. HULKLIIKMETE KORRUTAMINE JA JAGAMINE (KORDAMISEKS).

Hulkliikme korrutamisel hulkliikmega tuleb korrutada ühe hulkliikme iga liige teise hulkliikme iga liikmega ja tulemused liita.

Mõnede hulkliikmete korrutamisel on kasulik rakendada järgmisi abivalemeid.

1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Näiteid.
$(7+2a)(2a-7)=4a^2-49$, mitte aga $49-4a^2$
$(5m^2-3)(3+5m^2)=25m^4-9$, mitte aga $9-25m^4$

2) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

ehk kujul

$(I \pm II)^2 = I^2 \pm 2 \cdot I \cdot II + II^2$, s. o.

kahe arvu summa (vahe) ruut võrdub esimese arvu ruuduga, millele on liidetud (lahutatud) kahekordne esimese ja teise arvu korrutis ning liidetud veel teise arvu ruut.

Nii näiteks

$$(5ax^2 \pm 4x^3)^2 = 25a^2x^4 \pm 2 \cdot 5ax^2 \cdot 4x^3 + 16x^6$$

3) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

Sõnasta see valem!

Ülesandeid.

60. Avaldisse $9x^4 - 6x^2y + \ldots$ kirjutada juurde puuduv liige nii, et moodustuks kahe arvu summa ruut.

61. Kirjutada puuduvad liikmed.

$$(\ldots - 3)^2 = 16x^4 - \ldots + \ldots$$

62. Kaksliikme kuubina saame neliliikme, milles esimene on $27a^3$ ja viimane $8b^6$. Leida see neliliige. Millise kaksliikme kuup see on?

63. Mingi kaksliikme kuubis on teine liige $-12a^3$. Leida see kaksliige. Missugused võimalused siin on?

64. Kasutades abivalemeid, leida peast:

1) 22^2; 41^2; 51^2; 53^2; 104^2; 121^2; 133^2;
2) 18^2; 19^2; 48^2; 69^2; 99^2; 998^2; 145^2;
3) $18 \cdot 22$; $27 \cdot 33$; $101 \cdot 99$; $203 \cdot 197$; $53 \cdot 47$; $1010 \cdot 990$;
4) $37^2 - 23^2$; $28^2 - 12^2$; $96^2 - 56^2$; $823^2 - 73^2$.

Näide. $23^2 = (20+3) = 400 + 120 + 9 = 529$

$37^2 = (40-3)^2 = 1600 - 240 + 9 = 1369$

65. Teostada tehted.

1) $(7x+5)^2$
2) $(3a+2b)^2$
3) $(3a-5)(3a+5)$
4) $(3{,}2a-5b)(3{,}2a+5b)$
5) $(3x-4y)^3$
6) $(2-b)^3$
7) $(x+y)^2-(x-y)^2$
8) $5(3-5a)^2-5(3a-7)(3a+7)$
9) $(2+a)(2-a)(4-a^2)$
10) $(x^2-y^2) : (x-y)$

2. HULKLIIKME TEGUREIKS LAHUTAMINE VALEMI $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ABIL.

Et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, siis ka ümberpöördult

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Siit näeme, et kui hulkliige on kahe arvu ruutude vahe, siis lahutub ta kaheks teguriks, millest üks on nende arvude summa ja teine nende arvude vahe.

Näiteid.

1) $25a^2-1=(5a)^2-1^2=(5a+1)(5a-1)$

2) $25a^2-9b^2=(5a)^2-(3b)^2=(5a+3b)(5a-3b)$

3) $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$

4) $9a^2-\frac{1}{4}=(3a)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=(3a+\frac{1}{2})(3a-\frac{1}{2})$

5) $m^4-n^4=(m^2)^2-(n^2)^2=(m^2+n^2)(m^2-n^2)=$
$=(m^2+n^2)(m+n)(m-n)$

6) $x^2-(x-1)^2=[x+(x-1)][x-(x-1)]=$
$=(x+x-1)(x-x+1)=(2x-1)\cdot 1=2x-1$

7) $16a^2-81b^2=(4a)^2-(9b)^2=(4a+9b)(4a-9b)$

8) $18a^3m^2-50a=2a(9a^2m^2-25)=2a[(3am)^2-5^2]=$
$=2a(3am+5)(3am-5)$

Viimase näite puhul tuleb tuua kõigepealt ühine tegur sulgude ette ja seejärel kasutada abivalemit.

Ülesandeid.

66. Lahutada tegureiks.

1) a^2-1
$9-x^2$
$1-a^2$
b^2-4

2) $16a^2-4x^2$
x^2-64n^2
$81a^2-25x^2$
$49-a^2b^2$

3) $x^2-\frac{9}{25}$
$a^2-0{,}49$
$0{,}16a^2-0{,}09b^2$
$25x^2-0{,}01$

4) $9a^2(2a-1)^2$
$(3a+b)^2-(a-3b)^2$
$(m+n)^2-p^2$
$(2m-1)^2-100n^2$

5) ax^2-ay^2
a^3-ax^2
$\pi R_1^2-\pi R_2^2$
$ax^2-a(x-y)^2$

67. Koostada ja lahutada tegureiks kahe arvu ruutude vahe, kus üks tegureist oleks $7y-2$.

68. Kirjutada puuduvad liikmed.

1) $a^2-\ldots=(\ldots+1)(\ldots-1)$
2) $\ldots-k^6=(2-\ldots)(2+\ldots)$
3) $81x^4-\ldots=(\ldots+4y^2)(\ldots-4y^2)$

69. Kirjutada kahe hulkliikme korrutis nii, et korrutis oleks ruutude vahe.

3. VALEMITE $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ JA $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ KASUTAMINE.

Näiteid.

1) $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

2) $4a^2+12ab+9b^2=(2a)^2+2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2=$
$=(2a+3b)^2$

3) $36m^2-60mn+25n^2=(6m)^2-2\cdot 6m\cdot 5n+(5n)^2=$
$=(6m-5n)^2$

4) $-a^2-8a-16=-(a^2+8a+16)=-[(a)^2+2\cdot a\cdot 4+$
$+4^2]=-(a+4)^2$

5) $3a^2-6a+3=3(a^2-2a+1)=3(a-1)^2$

Neist näidetest selgub, et valemi kasutamisel tuleb kõigepealt leida arvud, mille ruudud on antud ja seejärel kontrollida, kas kolmandaks liikmeks on nende arvude kahekordne korrutis.

Märkus. Kui ühe arvu ruudu ees on plussmärk, teise ees aga miinusmärk, siis kolmliige ei esita summa või vahe ruutu, näiteks $m^2+2mn-n^2$.

Kas võrdus $(a-b)^2=(b-a)^2$ on õige? Miks?

Ülesandeid.

70. Lahutada tegureiks järgmised hulkliikmed.

1) a^2+2a+1
a^2+4a+4
$49+14x+x^2$
$x^2-8x+16$
$a^2-18a+81$

2) $25a^2-30ab+9b^2$
$36x^2+24xy+4y^2$
$4x^2+25b^2-20bx$
$36m^2-60mn+25n^2$
$(a+b)^2-2(a+b)+1$

71. Lahutada järgmised hulkliikmed tegureiks ühise teguri sulgude ette tootmise ja abivalemite abil.

1) $2x^2-4x+2$
$7-28p^2q^2$
$5a^2-10a+5$
$13x^2-78x+117$
$2x^2-16x+32$

2) $50y^2+20y+2$
$av^2-2av+a$
$3b^2-1083$
$245N^2-140N+20$
$16a^2c^2-100b^2d^2$

72. Avaldisse $9x^4-\ldots+\ldots$ kirjutada puuduvad liikmed nii, et tulemuseks oleks kahe arvu vahe ruut. Mitu lahendit on sel ülesandel?

73. Kirjutada puuduvad liikmed.

1) $(\ldots-3)^2=16x^4-\ldots+\ldots$

2) $16x^4+\ldots+\ldots=(\ldots+3)(\ldots+3)$

3) $\ldots -6k^2+k^4=(\ldots -\ldots)^2$
4) $\ldots -6x+\ldots=(\ldots -3)(\ldots -3)$

74. Lahutada tegureiks.

1) $a^2+4ab^2+4b^4$
2) $9m^2-6mn+n^2$
3) $5a^3-20a^2b+20ab^2$
4) $x^2+8x+16$
5) $a^2b^2+14ab+49$
6) $a^2+2+\frac{1}{a^2}$
7) $-a^2-8a-16$
8) $-x^2+10x-25$

75. Leida puuduvad tegurid ja liikmed.

1) $\ldots(x-3)=x^2-6x+9$
2) $5(1+z)\ldots=5+10z+5z^2$
3) $(a^2-6a+\ldots):(a-\ldots)=(\ldots -3)$
4) $(x^2+\ldots+1):(\ldots+1)=(x+\ldots)$

76. Lahendada järgmised ülesanded:

1) $(3x+y)^2-(3x+y)(3x-y)+(3x-y)(3x-y)$;
2) $(a-m)(m+a)-(a^4-2a^2m^2+m^4):(a^2-m^2)+(a-m)^2$;
3) $(x+2)(x+2)-(x-2)^2+(x^4-4):(x^2+2)$.

4. VALEMITE $a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$ KASUTAMINE.

Neid valemeid saab hulkliikme tegureiks lahutamisel kasutada siis, kui hulkliikmes on neli liiget, millest kaks on arvude kuubid (I ja II arvu kuubid), üks on kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis ning üks on kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis.

Näiteid.

1) $a^3+12a^2+48a+64=a^3+3a^2\cdot4+3a\cdot4^2+4^3=$
$=(a+4)^3$

2) $a^3-18a^2+108a-216=a^3-3a^2\cdot6+3a\cdot6^2-6^3=$
$=(a-b)^3$

Ülesandeid.

77. Lahutada tegureiks.

1) x^3+3x^2+3x+1
$a^3-6a^2+12a-8$
$125-75x+15x^2-x^3$
$8a^3+12a^2x+6ax^2+x^3$

2) $125m^3+75m^2+15m+1$
$8-12a+6a^2-a^3$
$a^3+18a^2+108a+216$
$y^3+2y^2+\frac{4}{3}y+\frac{8}{27}$

78. Leida puuduvad tegurid.

1) $(a+b)\cdot(\ldots)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
2) $(\ldots)\cdot(a^2-6a+9)=(a-3)^3$
3) $(a-3)^3:(\ldots)=a^2-6a+9$
4) $(\ldots):(x-3)=x^2-6x+9$
5) $(\ldots):(4n^2-12mn+9m^2)=2n-3m$

§ 7. HULKLIIKME TEGUREIKS LAHUTAMINE MITME VÕTTE ABIL.

Kui hulkliikme tegureiks lahutamisel tuleb kasutada ainult ühte eespool toodud võtet, siis pärast küllaldast harjutamist ei tee see raskusi. Mis aga teha siis, kui hulkliiget ei saa tegureiks lahutada ainult ühe võtte abil, vaid kasutada tuleb isegi kõiki kolme õpitud võtet? Sel juhul toimime järgmises järjekorras:

1) kõigepealt vaatame, kas hulkliikme kõigil liikmeil on ühine tegur; kui on, siis toome selle sulgude ette;
2) seejärel vaatame, kas sulgudes olevat avaldist saab teguriteks lahutada liikmete rühmitamise võttega;
3) abivalemite kasutamise võttega.

Näiteid.

1) $6ax^2-12ax-9bx^2+18bx=$

a) leiame ühise teguri $(3x)$ ja toome selle sulgude ette;
$=3x(2ax-4a-3bx+6b)=$

b) rühmitame sobivalt sulgudes oleva avaldise ja eraldame rühmitatud avaldise esimesest tegurist nurksulgudega;
$=3x[(2ax-4a)-(3bx-6b)]=$

c) võtame nurksulgudes kummastki rühmast vastavad ühised tegurid $(2a$ ja $3b)$ ümarsulgude ette;
$=3x[2a(x-2)-3b(x-2)]=$

d) kummassegi rühma jäänud teine tegur $(x-2)$ võtame ühise tegurina omakorda sulgude ette;
$=3x[(x-2)(2a-3b)]=$

e) mittevajalikud sulud eemaldame;
$=3x(x-2)(2a-3b)$.

Seega,

$6ax^2-12ax-9bx^2+18bx=3x(x-2)(2a-3b)$.

2) $a^2-x^2+2xy-y^2=$

a) kõigil liikmeil pole ühist tegurit, seepärast rühmitame sobivalt;
$=a^2-(x^2-2xy+y^2)=$

b) sulgudes oleva avaldise puhul kasutame abivalemit $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$;
$=a^2-(x-y)^2=$

c) rakendame ruutude vahe valemit $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, kusjuures b^2 asendab avaldist $(x-y)^2$;
$=[a+(x-y)][a-(x-y)]=$

d) anname avaldisele lihtsama kuju (jätame ainult ühed sulud);
$=(a+x-y)(a-x+y)$.

3) $2x^2+4xy+2y^2=$

a) toome ühise teguri (2) sulgude ette;
$=2(x^2+2xy+y^2)=$

b) kasutame abivalemit $(a+b)^2$;
$=2(x+y)^2$.

4) $16(x-y)^2-25(x+y)^2=$

a) kasutame abivalemit a^2-b^2; siin on a^2 asemel $16(x-y)^2$ ja b^2 asemel $25(x+y)^2$;
$=[4(x-y)+5(x+y)][4(x-y)-5(x+y)]=$

b) avame ümarsulud;
$=(4x-4y+5x+5y)(4x-4y-5x-5y)=$

c) koondame ning toome teisest tegurist -1 sulgude ette;
$=(9x+y)(-x-9y)=-(9x+y)(x+9y)$.

Ülesandeid.

79. Lahutada järgmised hulkliikmed teguriteks.

1) $5a^2-5b^2$
x^3-x
a^3b-ab^3
a^3-ax^2
$u^2-1{,}21$

2) $3a^2b^2-3c^4$
$7-28p^2q^2$
$3b^2-1083$
$7a^2b^2-7c^4$
$4f^2-\frac{9}{25}$

3) $2x^2-4x+2$
$13x^2+78x+117$
$145N^2-140N+20$
$11x^2-66x+99$
$12x5y+24x^2y+12x^3y$

4) $(a^2+1)^2-4a^2$
$36a^2-(a^2+9)^2$
$a^2-2ab+b^2-c^2$
$9(2a-x)^2-4(3a-x)^2$
$(4a+3b)^2-16(a-b)^2$

5) $x^2-a^2-2ab-b^2$
$m^3-m^2n-mn^2+n^3$
$xz-yz-x^2+2xy-y^2$
$(a^2+2ab+b^2)c+ab(a+b)$
a^2-b^2-a+b

Küsimusi ja ülesandeid kordamiseks.

80. Missugused arvud on ratsionaalarvud?

81. Kasutades kõiki nelja tehet, koostada ülesanne kahe positiivse ja kahe negatiivse arvuga, nii et vastus oleks -12.

82. Koostada ülesanne positiivsete ja negatiivsete arvude liitmise kohta, nii et summa oleks negatiivne arv.

83. Asendada lüngad ratsionaalarvudega.
1) $\ldots+\ldots+\ldots=-17$
2) $10+\ldots-5=1{,}5$

84. Koostada ülesanne üksliikmete lahutamise'ks, nii et tulemuseks oleks null.

85. Kirjutada avaldis, mille liikmete märgid oleksid vastupidised hulkliikme $a-3b+2c$ liikmete märkidele.

86. Liita ja koondada sarnased liikmed.
a) $(5m^2-5m+3)+(-4m^2-5m-3)$
b) $(10a-6b+5c-4d)+(9a-2b-4c+2d)$

87. Arvutada algebraliste avaldiste väärtused:
a) $2a^3+3a^2-5a+6$, kui $a=2$;
b) $x^3(8xyz^3+x)$, kui $x=10$; $y=0{,}1$; $z=0{,}5$.

88. Koostada kolmliige, mis oleks $2a$ ja mingi kolmliikme korrutis.

89. Tehteid sooritamata leida puuduv tegur.
$(3a+b-c)(x-2y)=(\ldots)\cdot(-3a-b+c)$

90. Missuguseiks tegureiks lahutub kahe arvu summa kuup?

91. Millal kasutame hulkliikme tegureiks lahutamisel rühmitamisvõtet?

92. Missuguses järjekorras kasutame tegureiks lahutamise võtteid?

93. Mitme ruutsentimeetri võrra muutub ruudu pindala, mille külg on a cm, kui tema iga külge suurendada 5 cm võrra?

94. Lahutada tegureiks.
1) a^2-16+b^2-2ab
2) $(3x-2y)^2-(2x-3y)^2$
3) $am^2+2amn+an^2+2bm^4+4bm^3n+2bm^2n^2$
4) $a^2b-a^3-9b+9a$
5) $(5x+4a)^2-(4x+5a)^2$

95. Tõestada võrdus:
$(10a+5)^2=100a(a+1)+25.$
Kasutada seda valemit 5-ga lõppevate kahekohaliste arvude ruutude peast arvutamisel.
Leida 35^2, 45^2, 65^2, 85^2, 95^2.

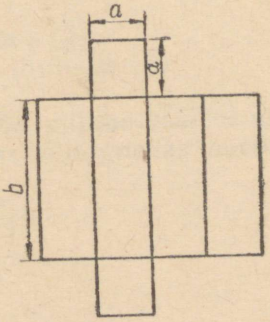
96. Tõestada, et
$(10+a)(10+b)=(10+a+b)\cdot 10+ab$
ja
$(20+a)(20+b)=(20+a+b)\cdot 20+ab.$
Kasutada neid valemeid järgmiste korrutiste leidmisel:
$17\cdot 18$; $12\cdot 14$; $12\cdot 19$; $24\cdot 21$; $23\cdot 22$; $21\cdot 28$; $24\cdot 26$.

97. Koostada joonisel 1 antud mõõtmete järgi prisma täispindala S avaldis ja lahutada saadud avaldis tegureiks.
1) $a=6$ cm, $b=10$ cm;
2) $a=1{,}5$ m, $b=4{,}2$ m.

Kodune kontrolltöö nr. 1.

1. Risttahukakujulise siloaugu sügavus on 1,9 m, pikkus 3,4 m ja laius 3,1 m. Silo täidab 70% augu ruumalast. Mitu kuupmeetrit silo on augus?

2. Nisujahust leiva küpsetamisel saadakse juurdeküpsus, mis moodustab $\frac{1}{4}$ jahu kaalust. Mitu kilogrammi leiba saab a kilogrammist nisujahust?



Joon. 1.

3. Lahutada tegureiks:

90; 144; 625; 1800; 0,081; 0,065;
$4ab^3+8ab^2-12ab$;

$x(a-2)-y(2-a)$;
$a(m+n)-bm-bn$;
$2a^2-3bx^2+3ab-2ax^2$.

4. Kasutades valemeid, arvutada:
$51 \cdot 49$; 203^2; $19{,}7^2$; $6{,}25^2-6{,}23^2$; $100{,}03^2-0{,}03^2$; $(\frac{5}{8})^2-(\frac{1}{2})^2$.

5. Arvutada võimalikult lihtsalt.

$115{,}4 \cdot 10-10{,}4 \cdot 100$ $\quad$ $9\frac{1}{2} \cdot 6-2\frac{1}{4} \cdot 3$

$3{,}7 \cdot 4+5{,}5 \cdot 8$ $\quad$ $1{,}5 \cdot 9+8\frac{1}{2} \cdot 4-1{,}3 \cdot 3+1\frac{1}{2} \cdot 8$

6. Leida avaldiste väärtused võimalikult lihtsalt.
$mn^2+mp-mq$, kui $m=19$; $n=7$; $p=5$ ja $q=4$.
$ab+ac^2-ad$, kui $a=5{,}5$; $b=10$; $c=3$ ja $d=14$.
$5a-5b-5c$, kui $a=2\frac{2}{3}$; $b=8$ ja $c=17\frac{1}{3}$.

7. On antud hulkliige $15xy^2-5x^2y^3$. Missugused on antud hulkliikme jagajad?

8. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a cm ja apoteem $2a$ cm. Avaldada püramiidi täispindala ja arvutada see, kui $a=15$ cm.

III PEATÜKK.

ALGEBRALINE MURD.

§ 8. ALGEBRALISE MURRU MÕISTE.

Algebraliseks murruks nimetatakse kahe algebralise avaldise jagatist.

Jagamismärgi (:) asemel kasutatakse murrujoont. Jagatavat nimetatakse murru lugejaks, jagajat aga murru nimetajaks; lugejat ja nimetajat nimetatakse üldiselt murru liikmeks.

Näiteid algebralistest murdudest:

$$\frac{a}{b};\quad \frac{a+b}{c};\quad \frac{a+b}{c-d};\quad \frac{3x^2-5x+4}{x+3}.$$

Lugejas võivad tähtedel olla mistahes väärtused, kuid nimetajas ei või olla tähtede väärtus niisugune, mis muudab nimetaja nulliks, sest siis pole murrul mõtet. Miks?

Ülesandeid.

98. Kirjutada algebraliste avaldiste jagatis murruna.

1) $a:6$; $5:x$; $(a+b):4$; $9:(m-n)$
2) $(x+y):(x-y)$; $a^2:(a-b)$; $3x:(2x+5y)$
3) $(4m-3n):(m+n)$; $(x^2-2x+1):(5x^2-6x-2)$

99. Teades, et nulliga ei saa jagada, leida, milline väärtus ei või olla murru nimetajas oleval tähel igas alljärgnevas murrus:

1) $\frac{m}{n}$; $\frac{3}{n}$; $\frac{5}{1-x}$; $\frac{a}{x-2}$; $\frac{5}{2+a}$; $\frac{m}{x+3}$;

2) $\frac{5}{x-1}$; $\frac{1}{x+1}$; $\frac{x}{x-6}$; $\frac{x}{2x-8}$;

3) $\frac{x-1}{x+1}$; $\frac{1-x}{2-x}$; $\frac{1}{x-a}$; $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$.

100. Auto sõitis a tunniga m kilomeetrit. Mitu kilomeetrit sõitis auto keskmiselt tunnis?

101. t päevaga künti üles m hektarit põldu. Mitu hektarit põldu künti keskmiselt päevas?
Arvuta, kui $t=10$ ja $m=120$.

102. Ristkülikukujulise põranda värvimine maksis a rubla. Kui kallis tuli keskmiselt ruutmeetri värvimine, kui põranda mõõtmed on p ja q meetrit?

103. Konveieri töötava osa pikkus on l meetrit. Kui kiiresti liigub konveieri lint, mille ühele otsale paigutatud ese jõuab teise otsa t minuti pärast?
Arvutada, kui
1) $l=32{,}4$; $t=3$;
2) $l=24{,}5$; $t=5$.

104. Arvutada avaldise

$$2ab-\frac{a^2-b}{3a}$$

väärtus, kui $a=-4$ ja $b=-14$.

§ 9. MURRU PÕHIOMADUS.

Algebraline murd on aritmeetilise murru üldistus. Kuna algebralise murru liikmetes esinevad tähed tähistavad arve, siis kõik aritmeetiliste murdude kohta käivad omadused ja reeglid kehtivad ka algebraliste murdude puhul.

Iga murdu võib vaadelda jagatisena. Jagatise omadustest teame, et *jagatis ei muutu, kui jagatavat ja jagajat samaaegselt suurendada (vähendada) sama arv korda.*

Eespool märgitud jagatise omadusest järeldub, et *murru väärtus ei muutu, kui lugejat ja nimetajat korrutada (jagada) ühe ja sama nullist erineva arvuga.* (Miks see arv peab nullist erinema?)

Siit tulenebki algebralise murru põhiomadus:

murru väärtus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb};\quad \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$$

Murru lugeja ja nimetaja korrutamist ühe ja sama arvuga nimetatakse **murru laiendamiseks.** Arvu, millega murru laiendamisel lugejat ja nimetajat korrutatakse, nimetatakse **laiendajaks.**

Näiteid.

1) Laiendada murd $\frac{1}{2}$ 3-ga:

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}.$$

2) Laiendada murd $\frac{a}{5}$ 5-ga:

$$\frac{a \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{5a}{25}.$$

3) Laiendada murd $\frac{x+y}{x-y}$ $(x-y)$-ga:

$$\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)(x-y)} = \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}.$$

Ülesandeid.

105. Laiendada.

1) 5-ga murdu $\frac{1}{3}$ 2) 3-ga murdu $\frac{a}{3}$

3-ga „ $\frac{3}{4}$ 4-ga „ $\frac{2x}{7}$

8-ga „ $\frac{7}{8}$ 8-ga „ $\frac{5}{6a}$

3) a-ga murdu $\frac{5}{9}$ 4) $2n$-ga murdu $\frac{12m}{17u}$

c-ga „ $\frac{7}{10}$ $5x$-ga „ $\frac{24xy}{25z}$

$10x$-ga „ $\frac{2}{3}$ $3xy^2$-ga „ $\frac{3a}{4c}$

106. Laiendada

$(a-b)$-ga murdu $\frac{1}{a+b}$; $(m+n)$-ga murdu $\frac{m+n}{m-n}$;

$(3a+1)$-ga „ $\frac{2a+5}{3a-1}$; $(5x+7)$-ga „ $\frac{2x-3}{5x+7}$.

Murdude liitmisel ja lahutamisel on meil sageli vaja murde laiendada teatava nimetajani (ühise nimetajani), mis on ette antud.

Murru laiendamisel etteantud nimetajani tuleb kõigepealt leida laiendaja. Selle saame, kui jagame uue nimetaja antud murru nimetajaga («vana» nimetajaga). Saadud jagatis ongi laiendajaks.

Näiteid.

1) Laiendada murd $\frac{3a}{4b}$ nimetajani $20b$:

$20b : 4b = 5$; $\frac{\overset{5}{\cancel{3a}}}{\cancel{4b}} = \frac{15a}{20b}$.

2) Laiendada murd $\frac{14x}{45y}$ nimetajani $180xy^2$:

$180xy^2 : 45y = 4xy$; $\frac{\overset{4xy}{\cancel{14x}}}{\cancel{45y}} = \frac{56x^2y}{180xy^2}$.

3) Laiendada murd $\frac{2a-b}{a+3b}$ nimetajani $a^2+6ab+9b^2$:

$(a^2+6ab+9b^2) : (a+3b) = (a+3b)^2 : (a+3b) = (a+3b)$;

$\frac{\overbrace{2a-b}^{a+3b}}{a+3b} = \frac{(2a-b)(a+3b)}{(a+3b)(a+3b)} = \frac{2a^2+6ab-ab-3b^2}{a^2+6ab+9b^2} = \frac{2a^2+5ab-3b^2}{a^2+6ab+9b^2}$.

4) Laiendada murd $\frac{a-b}{a+b}$ nimetajani a^2-b^2:

$(a^2-b^2) : (a+b) = (a-b)$;

$\frac{\overbrace{a-b}^{a-b}}{a+b} = \frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$.

Ülesandeid.

107. Laiendada.

1) $\frac{2}{37}$ nimetajani 111

$\frac{5m}{4n}$ „ $24n$

$\frac{a}{b}$ „ $4a^2b^2$

$\frac{a}{n}$ „ bn^2

2) $\frac{3m^2n}{4xy}$ nimetajani $12m^2xy$

$\frac{1}{a+b}$ „ a^2-b^2

$\frac{x+y}{x-y}$ „ $x^2-2xy+y^2$

$\frac{2a+5}{3a-1}$ „ $9a^2-6a+1$

§ 10. MURRU LIIKMETE MÄRKIDE MUUTMINE.

Murdude ühise nimetaja leidmisel võivad tulla ette juhtumid, kus nimetajates olevates avaldistes esinevad küll samad tähed, kuid vastupidiste märkidega, näiteks $(x-y)$ ja $(y-x)$. Et saada mõlemale avaldisele ühesugust kuju, peame ühte neist

avaldistest korrutama -1-ga ja samal ajal korrutama ka murru lugejat -1-ga, s. o. muutma murru liikmete ees olevaid märke.

Murru väärtus ei muutu, kui lugeja ja nimetaja märgid muuta vastupidisteks.

Põhjendada seda!

Näited.

1) $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$;

2) $\frac{-5x}{x-y}=\frac{5x}{-x+y}=\frac{5x}{y-x}$;

3) $\frac{(2-a)\cdot(-1)}{(3-b)\cdot(-1)}=\frac{-2+a}{-3+b}=\frac{a-2}{b-3}$.

Murru väärtus ei muutu, kui murru lugeja või nimetaja ees ja murru ees muuta märk vastupidiseks.

Näiteid.

1) $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{-3a}{5b}=-\frac{3a}{5b}$;

2) $\frac{m^2-n^2}{n-m}=\frac{m^2-n^2}{-(m-n)}=-\frac{m^2-n^2}{m-n}=-(m+n)$;

3) $\frac{a-b}{b-a}=-\frac{a-b}{a-b}=-1$.

Ülesandeid.

108. Kirjutada järgmised murrud miinusmärgita murru ees:

$$-\frac{3}{4};\quad -\frac{a}{2};\quad -\frac{m}{n};\quad -\frac{-3}{m};\quad -\frac{a}{-2}.$$

109. Muuta märgid murru lugejal ja nimetajal:

1) $\frac{1-x}{-x}$; $\frac{-3a^2}{a-b}$; $\frac{1-a}{2-b}$;

2) $\frac{1-m^2}{-m+1}$; $\frac{-a^2-b^2+2ab}{b-a}$.

110. Kirjutada järgmised murrud miinusmärgiga murru ees:

1) $\frac{2}{5}$; $\frac{-x}{2}$; $\frac{a}{b}$; $\frac{5}{-n}$; $\frac{n}{-3}$;

2) $\frac{-3a}{6}$; $\frac{5x^2}{-3}$; $\frac{1-a}{b}$; $\frac{a}{2-x}$; $\frac{m^2-n^2}{n-m}$.

§ 11. MURDUDE TAANDAMINE.

1. ÜKSLIIKMELISTE LUGEJATE JA NIMETAJATEGA MURRUD.

Kui murru lugejas ja nimetajas esinevad ühised tegurid, siis saame murrule anda lihtsama kuju, jagades lugejat ja nimetajat nende ühiste teguritega.

Murru lugeja ja nimetaja jagamist nende ühisteguriga nimetatakse **murru taandamiseks.**

Näiteid.

$$1)\ \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{9}_{3}}=\frac{1}{3};\quad \frac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{24}_{3}}=\frac{2}{3};\quad \frac{\cancel{77}^{7}}{\cancel{121}_{11}}=\frac{7}{11}.$$

$$2)\ \frac{\cancel{48ab}^{4}}{\cancel{60ac}_{5}}=\frac{4b}{5c};\quad \frac{3\cancel{a^2}b}{7\cancel{a^5}b}=\frac{3}{7a};\quad \frac{\cancel{4mnx}^{1}}{\cancel{8mn^2x^2}_{2}}=\frac{1}{2nx}.$$

Ülesandeid.

111. Taandada murrud.

1) $\frac{4}{6}$; $\frac{12}{16}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{28}{42}$; $\frac{18}{48}$; $\frac{24}{36}$; $\frac{20}{35}$;

$\frac{21}{56}$; $\frac{63}{81}$; $\frac{12}{64}$; $\frac{14}{35}$; $\frac{24}{66}$; $\frac{28}{72}$; $\frac{21}{63}$;

$\frac{36}{144}$; $\frac{39}{169}$; $\frac{98}{168}$; $\frac{115}{320}$; $\frac{105}{135}$; $\frac{136}{204}$; $\frac{172}{228}$.

2) $\frac{12a}{8}$; $\frac{20}{15m}$; $\frac{6b}{6}$; $\frac{7a}{-7}$; $\frac{5ab}{a}$; $\frac{-a}{-4ab}$;

$\frac{12}{6a}$; $\frac{6ab}{9b}$; $\frac{15a^2b}{12a^2b^2}$; $\frac{15a^2}{35ab}$; $\frac{24x^3y^3z}{30xy^2z^3}$;

$\frac{16a^2b}{24a}$; $\frac{48a^2c}{64a^3c^2}$; $\frac{44am^3}{88a^2mn^2}$; $\frac{26a^3k^2}{65a^2k^3}$; $\frac{0{,}48uv^4}{0{,}36u^4v^2}$.

3) $\frac{ab\cdot 5ab}{10ab^2\cdot 4b^2}$; $\frac{21x^3\cdot 6y^3}{7xy\cdot 18xy}$; $\frac{39mp^2\cdot 4n^2p}{26mn\cdot 7np}$; $\frac{32u^2\cdot 49v^2}{56uv\cdot 28uv}$;

$\frac{-42mn^4p^3}{28m^2n^2p}$; $\frac{-57c^2d^2l^3}{-95c^3d}$; $\frac{18x^3y^3z^2}{-54x^3y^4z}$; $\frac{-33m^2nx^2}{48mx}$;

$\frac{-85as^2t^3}{-34a^2s^3t^4}$; $\frac{-74np^3q^5}{60np^2q^6}$; $\frac{52kl^2m^7}{-91kl^4m^5}$; $\frac{-105fx^2z^4}{360f^2x^3z^5}$.

2. HULKLIIKMELISTE LUGEJATE JA NIMETAJATEGA MURRUD.

Kui murru lugeja ja nimetaja või üks neist on hulkliikmeline avaldis, siis tulevad need avaldised lahutada algul tegureiks. Kui

lugejas ja nimetajas leidub ühiseid tegureid, siis saame nendega murdu taandada.

Näiteid.

1) Taandada murd $\frac{7a-7b}{8a-8b}$:

$$\frac{7a-7b}{8a-8b}=\frac{7(a-b)}{8(a-b)}=\frac{7}{8}.$$

2) Taandada murd $\frac{a^2+ab}{a^2-ac}$:

$$\frac{a^2+ab}{a^2-ac}=\frac{a(a+b)}{a(a-c)}=\frac{a+b}{a-c};$$

3) $$\frac{3ab+3b}{6b+6ab}=\frac{3b(a+1)}{6b(1+a)}=\frac{3b(a+1)}{6b(a+1)}=\frac{1}{2};$$

Selles näites saime lugejas teguriks $(a+1)$ ja nimetajas $(1+a)$. Summa ei muutu aga liidetavate järjekorra muutmisel ja seepärast võime $(1+a)$ asemel kirjutada ka $(a+1)$.

4) $$\frac{6x^2+8xy}{9xy+12y^2}=\frac{2x(3x+4y)}{3y(3x+4y)}=\frac{2x}{3y};$$

5) $$\frac{x^2-1}{2x+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)}=\frac{x-1}{2};$$

6) $$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b};$$

Näiteis 5 ja 6 kasutasime murru lugeja ja nimetaja teguriteks lahutamiseks abivalemeid.

7) $$\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49}=\frac{x^2+2x+3x+6+2x+6}{(x+7)^2}=$$

$$=\frac{x^2+7x}{(x+7)^2}=\frac{x(x+7)}{(x+7)^2}=\frac{x}{x+7};$$

8) $$\frac{2ab-2b}{8b-8ab}=\frac{2b(a-1)}{8b(1-a)}=\frac{a-1}{4(1-a)}=-\frac{1-a}{4(1-a)}=-\frac{1}{4}.$$

Viimases näites oli vaja murru lugejas ja nimetajas ühise teguri saamiseks muuta märki murru ees. Sel juhul vahetasime lugejas vähendatava ja lahutatava.

9) $$\frac{x^2-y^2-(x+y)z}{x^2-y^2+xz+yz}=\frac{(x^2-y^2)-(x+y)z}{(x^2-y^2)+(x+y)z}=$$

$$=\frac{(x+y)(x-y)-(x+y)z}{(x+y)(x-y)+(x+y)z}=\frac{(x+y)[(x-y)-z]}{(x+y)[(x-y)+z]}=\frac{x-y-z}{x-y+z}.$$

Ülesandeid.

112. Kirjutada kaks algebralist murdu, mis peale taandamist oleksid võrdsed murruga

1) $\frac{2}{3a}$; 2) $\frac{a-4}{3}$.

113. Kirjutada murd, mille lugejas on kahe arvu summa ruut ja nimetajas samade arvude ruutude vahe. Taandada saadud murd.

114. Taandada järgmised murrud:

1) $\frac{7m+14}{7m-21}$; $\frac{ab-ac}{ad+ac}$; $\frac{a^2-a}{ab+a}$; $\frac{2x-2}{2x+2}$;

2) $\frac{ax-bx}{5a-5b}$; $\frac{a-ax}{n-nx}$; $\frac{ra+rt}{au+tu}$; $\frac{am-bm}{bn-an}$;

3) $\frac{a^2b^2}{a^2-2ab+b^2}$; $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$; $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$; $\frac{(x-y)^2}{(y-x)^2}$;

4) $\frac{4x^2-1}{4x+2}$; $\frac{9u^2-16v^2}{6u+8v}$; $\frac{4n^2+25}{16n^4-625}$; $\frac{at^2-2at+a}{t-1}$;

5) $\frac{9p^2-16q^2}{6p+8q}$; $\frac{15a^2-20ab}{21am-28bm}$; $\frac{1-Q^4}{Q^2+1}$; $\frac{u^3-2u^2+u}{2u-2}$.

115. Taandada võimaluse korral murrud:

1) $\frac{x(x-1)^2}{2x^2(x-1)(x+1)}$; $\frac{(nz+1)^3}{n^2z^2-1}$; $\frac{ac+bc-ad-bd}{ac-bc-ad+bd}$;

2) $\frac{ax+x^2}{3bx-cx^2}$; $\frac{m^3n-mn^3}{mn^2-m^2n}$; $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$;

3) $\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}$; $\frac{-p-q}{p^2+2pq+q^2}$; $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$;

4) $\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2-b^2}$; $\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2+2ab+b^2}$; $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$.

116. Lihtsustada murrud ja leida avaldiste arvuline väärtus.

1) $\frac{a^2-4}{a+2}$, kui $a=1{,}4$; $a=2{,}5$;

2) $\frac{a^2x-ax^2}{a-x}$, kui $a=3{,}5$; $x=1{,}12$;

3) $\frac{3a^2-ab}{9a^2-6ab+b^2}$, kui $a=8$; $b=\frac{1}{2}$.

117. Tõestada samasused:

1) $\frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\frac{x+c}{2x+y}$;

2) $\frac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2\cdot y^3} = \frac{x+z}{(1-y)^2}$;

3) $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5} = \frac{1}{3a^2-b^2}$.

Näpunäide. Samasuste tõestamiseks tuleb vasakpoolne murd lahutada tegureiks ja seejärel taandada, kui leidub ühiseid tegureid lugejas ja nimetajas. Tulemuseks peame saama parempoolse murru.

118. Leida avaldise $\frac{(x-y)^3}{x^2-2xy+y^2}$ arvuline väärtus, kui $x=2{,}6$ ja $y=1{,}5$, kahel viisil:
1) asendada tähed nende arvuliste väärtustega ning teha nõutavad tehted;
2) taandada antud murd ja seejärel asendada tähed nende arvuliste väärtustega.
Kumb moodus on lihtsam?

119. (Nuputamiseks!) On teada, et $\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$. Kas on veel niisuguseid murde, milles lugejas ja nimetajas olevad ühesugused numbrid võib lihtsalt maha tõmmata, nii et murru väärtus ei muutu?

§ 12. ALGEBRALISTE MURDUDE TEISENDAMINE ÜHENIMELISTEKS.

Erinimeliste murdude liitmisel ja lahutamisel tuleb leida nende murdude ühine nimetaja, s. o. teisendada antud murrud ühenimelisteks.

Tuletame algul meelde aritmeetiliste murdude[1] teisendamise ühenimelisteks.

Näide. Teisendada ühenimelisteks murrud

$$\frac{3}{14};\ \frac{5}{33} \text{ ja } \frac{7}{30}.$$

Esiteks leiame nende murdude ühise nimetaja. Selleks lahutame kõik nimetajad teguriteks (vt. § 3, p. 1). Saame:

$$14=2\cdot 7;$$
$$33=3\cdot 11;$$
$$30=2\cdot 3\cdot 5.$$

Võtame ühe teguriteks lahutatud nimetaja (tavaliselt selle, millel on kõige enam tegureid) ja korrutame selle teiste nimeta-

[1] Aritmeetilise murru lugeja ja nimetaja ei sisalda tähti.

jate nende teguritega, mis võetud nimetaja tegurite hulgas puuduvad. Saadud korrutis

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 7 = 2310$$

ongi antud murdude ühine nimetaja.

Nüüd laiendame antud murdusid nende ühise nimetajani (vt. § 9). Selleks leiame iga murru jaoks sobiva laiendusteguri, s. o. arvu, millega tuleb vastava murru nimetajat ja lugejat korrutada.

Selleks tuleb leitud ühine nimetaja 2310 jagada iga murru nimetajaga:

$$2310 : 14 = 165;$$
$$2310 : 33 = 70;$$
$$2310 : 30 = 77.$$

Saadud jagatised ongi vastavate murdude laiendustegurid. Nüüd teisendame antud murrud ühenimelisteks:

$$\frac{\overbrace{3}^{165}}{14} = \frac{495}{2310}; \quad \frac{\overbrace{5}^{70}}{33} = \frac{350}{2310}; \quad \frac{\overbrace{7}^{77}}{30} = \frac{539}{2310}.$$

Ka algebraliste murdude ühine nimetaja saadakse ühe murru nimetaja korrutamisel teiste murdude nimetajate nende teguritega, mis võetud nimetajas puuduvad.

Algebraliste murdude teisendamine ühenimelisteks toimub sama põhimõtte järgi mis aritmeetiliste murdude korralgi.

Näiteid.

1) Teisendada murrud $\frac{3a}{40m^2n^3p}$ ja $\frac{5b}{84mnq^2}$ ühenimelisteks.

a) Lahutame nimetajad teguriteks:
$40m^2n^3p = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot m^2n^3p = 2^3 \cdot 5 \cdot m^2n^3p;$
$84mnq^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot mnq^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot mnq^2.$

b) Kirjutame välja ühe teguriteks lahutatud nimetaja ja korrutame seda teise nimetaja nende teguritega, mis esimeses puuduvad. Siis saame antud murdude ühise nimetaja:
$2^3 \cdot 5 \cdot m^2n^3p \cdot 3 \cdot 7 \cdot q^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot m^2n^3pq^2 =$
$= 840m^2n^3pq^2.$

c) Leiame laiendajad:
$840m^2n^3pq^2 : 40m^2n^3p = 21q^2;$
$840m^2n^3pq^2 : 84mnq^2 = 10mn^2p.$

d) Teisendame murrud ühenimelisteks:

$$\frac{\overbrace{3a}^{21q^2}}{40m^2n^3p} = \frac{63aq^2}{840m^2n^3pq^2}$$

$$\frac{\overbrace{5b}^{10mn^2p}}{84mnq^2} = \frac{50bmn^2p}{840m^2n^3pq^2}.$$

2) Teisendada ühenimelisteks murrud

$$\frac{5mn}{18a^2b};\quad \frac{7p}{54a^2b^2x};\quad \frac{2}{9ab^2}.$$

a) Lahutame nimetajad teguriteks:
$18a^2b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a^2b = 2 \cdot 3^2 \cdot a^2b;$
$54a^2b^2x = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a^2b^2x = 2 \cdot 3^3 \cdot a^2b^2x;$
$9ab^2 = 3 \cdot 3 \cdot ab^2 = 3^2 \cdot ab^2.$

b) Leiame ühise nimetaja:
$2 \cdot 3^2 \cdot a^2b \cdot 3 \cdot bx = 2 \cdot 3^3 \cdot a^2b^2x = 54a^2b^2x.$

c) Leiame laiendustegurid:
$54a^2b^2x : 18a^2b = 3bx;$
$54a^2b^2x : 54a^2b^2x = 1;$
$54a^2b^2x : 9ab^2 = 6ax.$

d) Teisendame murrud ühenimelisteks:

$$\frac{\overbrace{5mn}^{3bx}}{18a^2b} = \frac{15bmnx}{54a^2b^2x};$$

$$\frac{\overbrace{7p}^{1}}{54a^2b^2x} = \frac{7p}{54a^2b^2x};$$

$$\frac{\overbrace{2}^{6ax}}{9ab^2} = \frac{12ax}{54a^2b^2x}.$$

Viimases näites oli ühe antud murru nimetaja antud murdude ühiseks nimetajaks, sest see nimetaja jagus kõigi nimetajatega.

3) Teisendada ühenimelisteks murrud $\frac{m}{3a^2}$ ja $\frac{a}{5b}$.

Antud murdude nimetajatel pole ühiseid tegureid. Seepärast on nende murdude ühiseks nimetajaks antud nimetajate korrutis:

$$3a^2 \cdot 5b = 15a^2b.$$

Leiame laiendustegurid:

$15a^2b : 3a^2 = 5b;$
$15a^2b : 5b = 3a^2.$

Teisendame murrud ühenimelisteks:

$$\frac{\overbrace{m}^{5b}}{3a^2} = \frac{5bm}{15a^2b};\quad \frac{a}{\underbrace{5b}_{3a^2}} = \frac{3a^3}{15a^2b}.$$

4) Teisendada ühenimelisteks murrud

$$\frac{x}{a-b};\quad \frac{y}{a+b};\quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

Esimese ja teise murru nimetajad ei lahutu teguriteks. Kolmanda murru nimetaja tegurid on $(a+b)(a-b)$. Seega ongi see nimetaja ühiseks nimetajaks, sest ta jagub kõigi teiste nimetajatega. Saame:

$$\frac{x}{a-b}=\frac{ax+bx}{a^2-b^2};$$

$$\frac{y}{a+b}=\frac{ay-by}{a^2-b^2};$$

$$\frac{z}{a^2-b^2}=\frac{z}{a^2-b^2}.$$

5) Teisendada ühenimelisteks murrud

$$\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2};\quad \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

a) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

b) Ühine nimetaja on $(a+b)^2(a-b)$.

c) Laiendustegurid on vastavalt $(a-b)$ ja $(a+b)$.

d) Ühenimelised murrud on:

$$\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)^2(a-b)}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2(a-b)};$$

$$\frac{2ab}{a^2-b^2}=\frac{2ab(a+b)}{(a-b)(a+b)(a+b)}=\frac{2ab(a+b)}{(a-b)(a+b)^2}.$$

6) Teisendada ühenimelisteks murrud

$$\frac{a}{a+b};\quad \frac{a}{a-b}.$$

Kuna nimetajad on ühiste teguriteta, siis on ühiseks nimetajaks antud nimetajate korrutis $(a+b)(a-b)$. Ühenimelised murrud on:

$$\frac{a}{a+b}=\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2-ab}{a^2-b^2};$$

$$\frac{a}{a-b}=\frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}.$$

7) Teisendada ühenimelisteks murrud

$$\frac{4n^2+x}{4n^2x-4n^2};\quad \frac{x}{6n(x^2+2x+1)};\quad \frac{2n+1}{20nx^2-20n}.$$

a) $4n^2x-4n^2=4n^2(x-1)=2^2n^2(x-1)$;
$6n(x^2+2x+1)=6n(x+1)^2=2\cdot 3(x+1)^2$;
$20nx^2-20n=20n(x^2-1)=2^2\cdot 5n(x-1)(x+1)$.

b) Ühine nimetaja on:
$2^2n^2(x-1)\cdot 3\cdot(x+1)^2\cdot 5=2^2\cdot 3\cdot 5n^2(x-1)(x+1)^2=$
$=60n^2(x-1)(x+1)^2$.

c) Laiendustegurid on:

$$\frac{60n^2(x-1)(x+1)^2}{4n^2x-4n^2}=\frac{60n^2(x-1)(x+1)^2}{4n^2(x-1)}=15(x+1)^2;$$

$$\frac{60n^2(x-1)(x+1)^2}{60n(x^2+2x+1)}=\frac{60n^2(x-1)(x+1)^2}{6(x+1)^2}=10n^2(x-1);$$

$$\frac{60n^2(x-1)(x+1)^2}{20nx^2-20n}=\frac{60n^2(x-1)(x+1)^2}{20n(x-1)(x+1)}=3n(x+1).$$

d) Ühenimelised murrud on:

$$\frac{\overbrace{15(x+1)^2}}{4n^2+x}=\frac{15(x+1)^2(4n^2+x)}{60n^2(x-1)(x+1)^2};$$

$$\frac{\overbrace{10n^2(x-1)}}{x}=\frac{10n^2x(x-1)}{60n^2(x-1)(x+1)^2};$$

$$\frac{\overbrace{3n(x+1)}}{2n+1}=\frac{3n(x+1)(2n+1)}{60n^2(x-1)(x+1)^2}.$$

Toodud näiteist selgub, et algebraliste murdude ühenimelisteks teisendamine toimub järgmise eeskirja järgi:

1) *antud murdude nimetajad lahutatakse teguriteks (kui see on võimalik);*

2) *leitakse murdudę ühine nimetaja, milleks korrutatakse ühe murru nimetaja teiste murdude nimetajate nende teguritega, mis võetud nimetajas puuduvad;*

3) *leitakse murdude laiendustegurid, milleks jagatakse ühine nimetaja iga murru nimetajaga; saadud jagatised on vastavate murdude laiendustegurid;*

4) *laiendatakse iga murdu vastava laiendusteguriga.*

Küsimusi ja ülesandeid.

120. 1) Missuguseid murde nimetatakse isenimelisteks? ühenimelisteks?
2) Mis on murdude ühiseks nimetajaks, kui nende murdude nimetajad on ühisteguriteta?
3) Mis on murdude ühiseks nimetajaks, kui ühe antud murru nimetaja jagub kõigi teiste murdude nimetajatega?
4) Mis on isenimeliste murdude ühine nimetaja?
Iga küsimuse kohta tuua näiteid.

121. Alljärgnevalt on antud mõnede murdude nimetajad (lugejad puuduvad). Leida nende murdude ühised nimetajad.

1) 8; 12
12; 15
21; 14
3; 5; 11
5; 12; 18
7; 10; 21

2) 12; 18; 96; 144
14; 20; 28; 30
504; 686; 1890;
$2a$; 8
$12x$; 16
$15a$; $3b$

3) $8abc$; bcd
$8xyz$; $32xz$
a^2; $7a$
$18a^2b$; $54a^2$
$45a^2b$; $18b^2$
ab^2; a^3b

4) 5; $5a-5x$
12; $12a+5b$
m; m^2+m
$4a+4n$; $5a-5n$
a^3-aR^2; $6a-6R$
Ny; N^2-N

5) $(b-7)^2$; b^2-7b; $5b$
ax; a^2+ax; $ax+x^2$
$3x^2-48$; $3x-12$; $(x+4)^2$
$(x-3)^2$; x^2-9; $5x-15$
$3(n^2-1)$; $(n-1)(n^2+1)$; n^3
$2(x-1)^2$; $7(x+1)^2$; $14(x^2-1)$

122. Teisendada ühenimelisteks.

1) $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{7}$ ja $\frac{4}{15}$; $\frac{2}{7}$ ja $\frac{5}{8}$; $\frac{3}{5}$ ja $\frac{7}{15}$

2) $\frac{3}{a}$ ja $\frac{4}{b}$; $\frac{2}{a}$ ja $\frac{3}{b}$; $\frac{7x}{4a^2}$ ja $\frac{2}{3b^2}$; $\frac{2a^2}{x}$ ja $\frac{4x}{a^2}$

3) $\frac{2m}{3a^3}$; $\frac{n}{12a^2b}$ ja $\frac{5n}{18ab^2}$; $\frac{p}{4m^2n}$; $\frac{3p^2}{2mn^3}$ ja $\frac{5}{14m^3n^2}$; $\frac{2p}{3m^2}$; $\frac{5p^2}{6m^2n^2}$ ja $3mn$; $\frac{4}{a^2}$; $\frac{5}{a}$ ja $\frac{1}{a^3}$

4) $\frac{3y}{5a^2b}$; $\frac{2x}{ab}$ ja $\frac{2}{15a^2b^2}$; $\frac{4}{27xy}$; $\frac{5}{18xy}$ ja $\frac{6}{9xy^2}$; $\frac{7x}{10a}$; $\frac{5x}{4a}$ ja $\frac{8x}{5a}$; $\frac{5x}{mn}$; $\frac{3y}{mp}$ ja $\frac{4z}{np}$

5) $\frac{5x}{ab}$; $\frac{2y}{3a^2b}$ ja $\frac{3}{6a^2b^2}$; $\frac{7b}{12ac^2}$; $\frac{5a}{6b^2c}$ ja $\frac{11c}{18a^2b}$; $\frac{3b}{a^2b}$; $\frac{6a}{a^2b^2}$ ja $\frac{5a}{a^2b}$; $\frac{2x}{x^2y}$; $\frac{3x}{xy}$ ja $\frac{8x}{yz^2}$

123. Teisendada ühenimelisteks.

1) $\frac{m}{m-n}$ ja $\frac{n}{m+n}$

2) $\frac{a+b}{a-b}$ ja $\frac{a-b}{a+b}$

3) $\frac{2ab}{a^2b^2}$ ja $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$

4) $\frac{b}{a(a+b)}$, $\frac{a}{b(a-b)}$ ja $\frac{ab}{a^2b^2}$

5) $\frac{c+d}{d(c-d)}$, $\frac{c-d}{d(c+d)}$ ja $\frac{cd}{c^2-d^2}$

6) $\frac{x+y}{2x-2y}$ ja $\frac{x-y}{3x+3y}$

7) $\frac{2}{x^2-2x+1}$, $\frac{3a}{x-1}$ ja $\frac{1}{x-1}$

8) $\frac{a-b}{b}$, $\frac{2a}{a-b}$ ja $\frac{1}{a^2-b^2}$

§ 13. MURDUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

Et jagada kahe arvu summat kolmanda arvuga, selleks jagame iga liidetava selle arvuga ja liidame tulemused:

$$\frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Samuti toimime ka vahe puhul:

$$\frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}.$$

Lugedes nüüd kaht viimast võrdust paremalt vasakule, saame

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$$

ja

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}.$$

Saadud võrduste vasakud pooled on ühenimelised murrud. Nende võrduste järgi võime öelda, et

1) **ühenimeliste murdude liitmiseks liidetakse nende lugejad ja tulemus jagatakse nimetajaga;**
2) **ühenimeliste murdude lahutamiseks lahutatakse esimese murru lugejast teise murru lugeja ja tulemus jagatakse nimetajaga.**

Näiteid.

1) $\frac{3}{5a} + \frac{4}{5a} + \frac{2}{5a} = \frac{3+4+2}{5a} = \frac{9}{5a}$;

2) $\frac{2a}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2a+a}{3} = \frac{3a}{3} = a$;

3) $\frac{7b}{4} - \frac{3b}{4} = \frac{7b-3b}{4} = \frac{4b}{4} = b$;

4) $\frac{3a}{4}+\frac{5a}{4}-\frac{7a}{4}=\frac{3a+5a-7a}{4}=\frac{a}{4}$;

5) $\frac{16x-3}{7}-\frac{2x-3}{7}=\frac{16x-3-(2x-3)}{7}=\frac{16x-3-2x+3}{7}=\frac{14x}{7}=2x$;

6) $\frac{4}{p+1}+\frac{3}{p+1}=\frac{4+3}{p+1}=\frac{7}{p+1}$;

7) $\frac{2a+3b}{a-b}-\frac{a+4b}{a-b}=\frac{2a+3b-(a+4b)}{a-b}=\frac{2a+3b-a-4b}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}=1$.

Kui liidetavad ja lahutatavad murrud on isenimelised, siis tuleb nad enne teisendada ühenimelisteks (vt. § 12) ja seejärel sooritada liitmine ja lahutamine. Pärast seda koondada lugejas sarnased liikmed ja taandada murd, kui see osutub võimalikuks.

Näiteid.

1) $\frac{3b}{5a^2}+\frac{5a}{6b^2}-\frac{4}{15ab}=$

a) Ühiseks nimetajaks on $30a^2b^2$ ja laiendajateks:

$30a^2b^2 : 5a^2 = 6b^2$;
$30a^2b^2 : 6b^2 = 5a^2$;
$30a^2b^2 : 15ab = 2ab$.

$=\frac{\overbrace{3b}^{6b^2}}{5a^2}+\frac{\overbrace{5a}^{5a^2}}{6a^2}-\frac{\overbrace{4}^{2ab}}{15ab}=$

b) Laiendame iga murdu leitud laiendajaga:

$=\frac{18b^3}{30a^2b^2}+\frac{25a^3}{30a^2b^2}-\frac{8ab}{30a^2b^2}=$

c) Liidame lugejad:

$=\frac{18b^3+25a^3-8ab}{30a^2b^2}=$

$=\frac{25a^3+18b^3-8ab}{30a^2b^2}$.

2) Leida summa

$$\frac{2a+b}{2ab}-\frac{a+b}{b^2}+\frac{a}{b^2}.$$

a) Ühine nimetaja on $2ab^2$. Laiendame antud murrud sobivate laiendajatega ja liidame lugejad ühisel murrujoonel.

$$\frac{2a+b}{2ab}-\frac{a+b}{b^2}+\frac{a}{b^2}=\frac{b(2a+b)-2a(a+b)+2a^2}{2ab^2}=$$

b) Avame lugejas sulud ja koondame sarnased liikmed. Taandame.

$$=\frac{2ab+b^2-2a^2-2ab+2a^2}{2ab^2}=\frac{b^2}{2ab^2}=\frac{1}{2a}.$$

3) $$\frac{15m+4n}{12}-\frac{3n-8m}{9}=\frac{3(15m+4n)-4(3n-8m)}{36}=$$

$$=\frac{45m+12n-12n+32m}{36}=\frac{77m}{36}.$$

4) $$2a+\frac{b^3}{5c^2}=\frac{2a}{1}+\frac{b^3}{5c^2}=\frac{10ac^2+b^3}{5c^2}.$$

Tähelepanu!

Hoiduda vea eest, mis sageli esineb murdude lahutamisel:

$$\frac{a}{n}-\frac{b-c}{n}=\frac{a-(b-c)}{n}=\frac{a-b+c}{n}$$ **õige!**

$$\frac{a}{n}-\frac{b-c}{n}=\frac{a-b-c}{n}$$ **vale!**

5) $$\frac{1}{2(a-b)}-\frac{a+b}{4(a^2-b^2)}=\frac{2a+2b-(a+b)}{4(a^2-b^2)}=$$

$$=\frac{2a+2b-a-b}{4(a^2-b^2)}=\frac{a+b}{4(a+b)(a-b)}=\frac{1}{4(a-b)}.$$

6) $$x-\frac{x^2}{x-1}-\frac{x}{x+1}=$$

$$=\frac{x(x+1)(x-1)-x^2(x+1)-x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x(x^2-1)-x^2(x+1)-x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^3-x-x^3-x^2-x^2+x}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{-2x^2}{x^2-1}=\frac{2x^2}{1-x^2}.$$

7) $$\frac{a}{a-1}-\frac{2a}{1-a}-\frac{3a^2+a-2}{a^2-1}=$$

$$=\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-1}-\frac{3a^2+a-2}{(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{a^2+a+2a^2+2a-3a^2-a+2}{a^2-1}=\frac{2a+2}{a^2-1}=\frac{2(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{2}{a-1}.$$

8) $\frac{n}{n^2-1}+\frac{n^2+n-1}{n^3-n^2+n-1}+\frac{n^2-n-1}{n^3+n^2+n+1}-\frac{2n^3}{n^4-1}=$

$=\frac{n}{(n+1)(n-1)}+\frac{n^2+n-1}{n^2(n-1)+(n-1)}+\frac{n^2-n-1}{n^2(n+1)+(n+1)}-$

$-\frac{2n^3}{(n^2+1)(n^2-1)}=\frac{\overbrace{n^2+1}}{n}{(n+1)(n-1)}+\frac{\overbrace{n+1}}{n^2+n-1}{(n-1)(n^2+1)}+$

$+\frac{\overbrace{n-1}}{n^2-n-1}{(n+1)(n^2+1)}-\frac{\overbrace{1}}{2n^3}{(n^2+1)(n+1)(n-1)}=$

$=\frac{n^3+n+n^3+n^2-n+n^2+n-1+n^3-n^2-n-n^2+n+1-2n^3}{(n+1)(n-1)(n^2+1)}=$

$=\frac{n^3+n}{(n+1)(n-1)(n^2+1)}=\frac{n(n^2+1)}{(n^2-1)(n^2+1)}=\frac{n}{n^2-1}.$

Ülesandeid.

124. Teostada tehted.

1) $\frac{2}{15}+\frac{1}{15}+\frac{7}{15}$

$\frac{5}{18}+\frac{11}{18}-\frac{7}{18}$

$\frac{4}{9}-\frac{5}{9}+\frac{4}{9}$

$\frac{3}{10}-\frac{9}{10}+\frac{1}{10}$

$\frac{3}{28}+\frac{9}{28}-\frac{5}{28}$

2) $\frac{5x}{2a}+\frac{7x}{2a}-\frac{10x}{2a}$

$\frac{11a+9b}{12}-\frac{7a+6b}{12}+\frac{2a+3b}{12}$

$\frac{24x-6y}{7}-\frac{10x-48y}{7}$

$\frac{4a}{a+b}+\frac{4b}{a+b}$

$\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{a-b}$

3) $\frac{am}{2m+2n}+\frac{an}{2m+2n}$

$\frac{p}{p-q}-\frac{q}{p-q}$

$\frac{bc}{b-d}-\frac{cd}{b-d}$

$\frac{a^2u^2}{a^2-u^2}-\frac{u^4}{a^2u^2}$

$\frac{4acx}{2x-1}-\frac{2ac}{2x-1}$

4) $\frac{a-b}{a-2}-\frac{a-1}{2-a}$

$\frac{5}{2x-2}+\frac{3}{4-4x}$

$\frac{5}{x-3}+\frac{x-1}{6-2x}$

$\frac{x-3}{x+5}-\frac{x-2}{5-x}$

$\frac{2a}{2a-1}+\frac{1}{2a-4a^2}$

125. Teostada tehted.

1) $\frac{x}{7}+\frac{5x}{21}-\frac{9x}{14}$

$\frac{n}{9}-\frac{m}{3}+1$

$\frac{a}{5}-\frac{b}{4}-\frac{a}{20}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

2) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}$

$\frac{x}{2x-c}+\frac{c}{2x}$

$\frac{1}{1-c}-\frac{1}{c+1}$

$\frac{x-y}{x+3y}-\frac{x+y}{3y}$

$\frac{m-2n}{m}-\frac{m+2n}{m-2n}$

3) $\frac{a}{a^2-1}-\frac{1}{a+1}$

$\frac{5-3x}{x^2-9}+\frac{5}{x^2-3x}$

$a+\frac{a}{a-1}-\frac{a^2}{a+1}$

$\frac{x^2}{2y}+\frac{x^3-xy^2}{x^2+xy}-x$

$\frac{4x}{1-x^2}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x+x^2}$

4) $\frac{2m-11}{3m-5}-\frac{4m+15}{m+7}+1$

$\frac{2u^2}{2u-1}+\frac{3n^2-4}{3n+5}-2u$

$\frac{8m}{5m-3n}-\frac{3n}{3n-5m}$

$\frac{5a}{3a-2b}+\frac{2b}{2b-3a}$

126. Lihtsustada järgmised avaldised.

1) $\frac{(a+b)^2}{ap+aq-bp-bq}-\frac{a-b}{p+q}$

$\frac{4x}{(2x-n)^2}-\frac{2n}{4x^2-n^2}-\frac{2}{2x+n}$

$\frac{2}{2a+3}+\frac{3}{3-2a}+\frac{2a+15}{4a^2-9}$

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b-2a}-\frac{2a-3b}{4a^2-b^2}$

2) $1+\frac{a}{1-d}$

$1+n+\frac{n^2}{1-n}$

$x-3+\frac{7}{x+3}$

$\frac{x^2-x-6}{x^2-4}-2-\frac{x-1}{2-x}$

127. Kauba brutokaal on $\frac{a}{b}$ kg ja netokaal $\frac{1}{3b}$ kg. Kui suur on taarakaal?

128. Ujuja ujub seisvas vees kiirusega u meetrit sekundis. Jõevoolu kiirus on v meetrit sekundis. Kui palju aega kulub ujujal k meetri ujumiseks vastuvoolu rohkem kui sama vahemaa ujumiseks pärivoolu?
Kui palju aega kulub ujujal k meetri edasi-tagasi ujumiseks?

129. Murdude lahutamisel saadi vahe $\frac{3a}{3-a}$. Leida lahutatav, kui vähendatav on $\frac{5-4a}{9-a^2}$.

130. Leida x.

1) $\frac{a-b}{5a+5b} - x = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; 2) $\frac{3k-1}{1-3k} + x = \frac{2k-7}{7}$.

131. Koostada murdude liitmise ja lahutamise ülesanded nii, et saaksime järgmised vastused:

1) $\frac{a+b}{2}$; 2) $\frac{m+n}{a}$; 3) $\frac{a}{b+c}$;

4) $\frac{a-b}{c}$; 5) $\frac{ab+cd}{b+c}$; 6) $\frac{m}{a-b}$.

132. Ühelt hektarilt saadakse 30 t suhkrupeeti, mis sisaldab 14% suhkrut. Mitmele hektarile tuleb külvata suhkrupeeti, et saada 100 t suhkrut?

133. Hoone kütmiseks varuti m tonni sütt. Sellest tagavarast kulutati ära n tonni. Mitu kilogrammi võib kulutada keskmiselt päevas, et ülejäänud söest jätkuks t päevaks?
Arvutada, kui $m=15$; $n=3$ ja $t=60$.
Lahendus anda enne arvutamist üldkujul.

Kodune kontrolltöö nr. 2.

1. Leida algebralise avaldise

$$2a^3+3ab+b^2$$

arvuline väärtus, kui $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{2}{3}$.

2. Toatemperatuur on $t°$. Samal ajal on välistemperatuur $t_1°$. Mitme kraadi võrra on toatemperatuur suurem kui välistemperatuur?
Arvutada, kui $t=17°$ ja $t_1=10°$;
$t=15°$ ja $t_1=20°$.

3. On antud kaks arvu m ja n. Koostada nende arvude ruutude summa ja vahe kahekordne korrutis.

4. Võrdhaarse kolmnurga haar on kaks korda pikem tema alusest. Kolmnurga ümbermõõt on 45 cm. Leida kolmnurga küljed.

5. Ristküliku üks külg on $3m+2n$, teine aga $m-n$ võrra pikem esimesest. Leida ristküliku ümbermõõt.

6. Lihtsustada avaldis:

$$(2a+5b)(5a-3b)\cdot 4-3(a+2b)(a-2b).$$

7. Lahutada tegureiks:
   a) $am^2-2am+an^2+2bm^4+4bm^3n+2bm^2n^2$;
   b) $a^2b-a^3-9b+9a$.

8. Trapetsi alused on a ja b ning kõrgus h. Millega võrdub trapetsi pindala? Kirjutada trapetsi pindala valem. Leida valemist trapetsi kõrgus.

9. Arvutada korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala, kui püramiidi põhiserv on 14 cm ja kõrgus 18 cm.

10. Rööpküliku külgede pikkused on $\frac{a-b}{m}$ cm ja $\frac{2a-b}{m}$ cm.

    Leida rööpküliku ümbermõõt.

11. Lihtsustada:
    a) $\frac{2a}{3x^4y^2}+\frac{4b}{9x^3y^3}-\frac{c}{15x^2y}$
    b) $\frac{3x}{4a^2b}+\frac{5x}{2ab^2}-\frac{7}{6a^2b}$
    c) $2a-\frac{a-b}{5}-\frac{2a+b}{2}$
    d) $\frac{75+12a^2}{25-4a^2}+\frac{5+2a}{2a-5}-\frac{5-2a}{2a+5}$
    e) $\frac{1}{6x-4y}-\frac{1}{6x+4y}-\frac{3x}{4y^2-9x^2}$

§ 14. MURDUDE KORRUTAMINE JA ASTENDAMINE.

1. ÜKSLIIKMETE KORRUTAMINE (KORDAMISEKS).

Kui on vaja leida korrutis $a^m\cdot a^n$, siis tähendab see seda, et

$$a^m\cdot a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\ldots a}_{m\text{ tegurit}}\cdot\underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n\text{ tegurit}}=\underbrace{a\cdot a\ldots a}_{(m+n)\text{ tegurit}}$$

Seda kirjutust saab esitada lühemalt nii:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

mida võib sõnastada järgmiselt:

võrdsete alustega astmete korrutamisel astendajad liidetakse.

Üksliikmete korrutamisel kordajad korrutatakse ja ühesuguste täheliste tegurite astendajad liidetakse.

Ülesandeid.

134. Korrutada.

1) $x^2 \cdot x^3$
$a \cdot a^3$
$b^2 \cdot b$
$2^m \cdot 2$
$a^2 \cdot a^{n-2}$

2) $2a \cdot 5b$
$6x \cdot 7y$
$9m \cdot 7p$
$5x \cdot 18y$
$2x \cdot 0{,}5y \cdot 3$

3) $3ax \cdot 2bx \cdot cx$
$3pq \cdot q$
$a^2v^3 \cdot a^3v$
$(-3a) \cdot (-4b^2) \cdot (-a)$
$(+x)(-3b)(-2c)$

4) $3a^2bc \cdot (-5a^3b)$
$4m^2 \cdot (-2m^4)$
$0{,}3x^2 \cdot (-\frac{1}{3}x)$
$(-0{,}4y^2) \cdot 5y^2$
$(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}x) \cdot \frac{2}{3}z$

2. MURDUDE KORRUTAMINE.

Et korrutada murdu murruga, selleks korrutame lugeja lugejaga ja nimetaja nimetajaga ning jagame esimese tulemuse teisega.

Näide.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Üldkujul:

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}$$

Täisarvu korrutamisel murruga või murru korrutamisel täisarvuga vaatleme antud täisarvu kui murdu, mille nimetaja on üks.

Näide.

$$8 \cdot \frac{3}{4} = \frac{8}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6.$$

Üldkujul:

$$\boxed{m \cdot \frac{a}{b} = \frac{m}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ma}{b}}$$

Segaarvude korrutamisel tuleb nad muuta enne liigmurdudeks.

Näide.

$$2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{2} = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{6} = 8\frac{1}{6}.$$

Kui osutub võimalikuks, tuleb enne korrutamist taandada.

Näide.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{2}.$$

Kui täisarvulisel kordajal ja nimetajal on ühiseid tegureid, siis võib enne korrutamist kordajat ja nimetajat jagada ühise teguriga.

Näide.

$$8 \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6.$$

Kuna algebralise murru liikmetes olevad tähed tähistavad arve, siis on samad reeglid maksvad ka algebraliste murdude korrutamisel.

Näiteid.

1) $\left(-\frac{3ax}{10by}\right)\left(-\frac{15y}{4x}\right) = \frac{(-3ax) \cdot (-15y)}{10by \cdot 4x} = \frac{9a}{8b}$;

2) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2a+1}{2a-1} \cdot \frac{1}{4a^2-1} \cdot (4a^2-4a+1) =$

$= \frac{(2a+1)(4a^2-4a+1)}{3(2a-1)(4a^2-1)} = \frac{(2a+1)(2a-1)^2}{3(2a-1)(2a+1)(2a-1)} = \frac{1}{3}$;

TRÜ Raamatukogu

3) $(4-a^2)\cdot\frac{3a}{2+a}=\frac{(4-a^2)\cdot 3a}{2+a}=$

$=\frac{(2+a)(2-a)\cdot 3a}{2+a}=3a(2-a)=6a-3a^2;$

4) $\frac{x^2-4u^2}{x+u}\cdot\frac{x^2-u^2}{x+2u}=\frac{(x^2-4u^2)(x^2-u^2)}{(x+u)(x+2u)}=$

$=\frac{(x+2u)(x-2u)(x+u)(x-u)}{(x+u)(x+2u)}=(x-2u)(x-u)=$

$=x^2-xu-2xu+2u^2=x^2-3xu+2u^2.$

Ülesandeid.

135. 1) $20\cdot\frac{5}{12}$ $6\cdot\frac{3}{9}$ $\frac{7}{16}\cdot 12$ $\frac{2}{5}\cdot 10$ $\frac{1}{3}\cdot 6$

2) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}$ $1\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}$ $2\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{5}$ $\frac{5}{9}\cdot\frac{27}{55}$

3) $\frac{a}{7}\cdot 7$ $\frac{ab}{10}\cdot 10$ $3\cdot\frac{2x}{9}$ $a\cdot\frac{xy}{a}$ $4a\cdot\frac{1}{2}$

4) $4\cdot\frac{7}{8^x}$ $3h\cdot 7\frac{5}{6}$ $\frac{2}{3}c\cdot 7d$ $8k\cdot 1\frac{1}{2}$ $5\frac{1}{4}p\cdot 14$

5) $\frac{c}{u^2}\cdot 2u$ $\frac{h}{ab}\cdot a$ $\frac{4e}{f^2g}\cdot efg$ $7m\cdot\frac{5}{u^2}$ $20c\cdot\frac{4ab}{5c}$

6) $\frac{2N^2}{pq^2}\cdot Np^2q^3$ $9hx^2\cdot\frac{a}{hx^2}$ $4a^2u^3\cdot\frac{3b}{8a^3u^4}$ $\frac{8ax}{5by}\cdot\frac{3ay}{4bx}$ $\frac{2ab}{7cd}\cdot\frac{5cx}{6by}$

136. Korrutada.

1) $(-15m^3p)\cdot\frac{3x}{10m^2p}$ $(-4at)\cdot\left(\frac{-5a^2u}{8t^2}\right)$ $\left(-3\frac{qw}{r}\right)\cdot qwr$ $\left(-\frac{k}{a}\right)\cdot\frac{a^2}{5k^3}$ $\frac{h}{5u^2}\cdot\left(-\frac{15u^3}{16u^3}\right)$

2) $\frac{-4a}{9b^2c^2}\cdot 45a^2bc^3$ $-42x^2y^2\cdot\frac{3m}{14x^3y^2}$ $\frac{-a^2x^3}{13}\cdot\frac{52c}{-ax}$ $\frac{-2a^2}{3b^2}\cdot\left(-\frac{5a^2b^2}{8c}\right)$ $\frac{5a}{16b^2}\cdot(-32ab^2c)$

3) $(2x+2a)\cdot\frac{c}{x+a}$

$(2a-b)\cdot\frac{1}{b-2a}$

$\frac{x+7u}{x-7u}\cdot(x^2-49u^2)$

$\frac{a}{a-b}\cdot\frac{a^2-b^2}{4ab}$

$\frac{4ax-4x}{a+1}\cdot\frac{1}{4(a-1)}$

4) $\frac{x^2-1}{4}\cdot\frac{12}{x-1}$

$\frac{2}{3(z+2)}\cdot\frac{z^2-4}{8}$

$\frac{u^2-4v^2}{8u}\cdot\frac{12u^2}{2u-4v}$

$\frac{9-z^2}{3z}\cdot\frac{z}{3+z}$

$\frac{4r^2+8r}{3r+9}\cdot\frac{15r+45}{14r^2+28r}$

137. Lihtsustada avaldised.

1) $\frac{4a+4}{a^2+6a+9}\cdot\frac{7a+21}{a^2-1}$

2) $\frac{-ab+ac}{cd-bd}\cdot\frac{ab-ac}{bd+cd}$

3) $\frac{x^2+4x+4}{14a}\cdot\frac{16b}{x^2-4}$

4) $\frac{ab-ab}{bc+cd}\cdot\frac{ab+ad}{bc-cd}$

5) $\frac{a}{a-b}\cdot\left(-\frac{b-a}{c}\right)$

6) $\frac{a^2+4a+4}{3a+6}\cdot\frac{6a-12}{a^2-4}$

Kodune kontrolltöö nr. 3.

1. Arvutada.

$$\frac{\left(20-31\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{7}\right):2\frac{1}{5}}{\left(6+1:\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{15}{28}}$$

2. Millist arvu tuleb vähendada 30% võrra, et saada tulemuseks 150?

3. Mitu protsenti on $\frac{1}{4}$ arvust $\frac{1}{2}$?

4. Kui suur on täisnurkse kolmnurga teine teravnurk, kui üks neist on 60°; 42°; 37°; 45°?

5. Mitu kuupmeetrit liiva mahutab korrapärase viisnurkse prisma kujuline laste liivakast, mille külg on 2,5 m ja kõrgus 20 cm? (Liiva erikaal on 1,5.)

6. Lihtsustada avaldis
$(2a^2-a+1)(3a+1)-(a^2-3a-1)(a-1)$
ja arvutada selle väärtus, kui $a=-4$.

7. Rosinate kaal on 32% nende valmistamiseks võetud viinamarjade kaalust. Kui palju tuleb võtta viinamarju, et saada 5 kg rosinaid?

8. Lahutada tegureiks:
x^4+3x^3+x+3.

9. Teostada tehted.

a) $\frac{2a-2}{1-x^2}+\frac{a}{x^2-x}+\frac{1-a}{x^2+x}$

b) $\frac{3}{(3x-1)(3x+2)}-\frac{5}{(9x+6)(x-1)}-\frac{2}{(3x-3)(1-3x)}$

c) $\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2+1}{2x+1}\right)\cdot\left(\frac{3+x}{2-x}-1\right)$

d) $\left(x+1+\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$

Näpunäide. Viimases kahes harjutuses sooritada esmalt tehted sulgudes.

3. ÜKSLIIKMETE ASTENDAMINE (KORDAMISEKS).

Näiteid.

1) $(10^2)^3=10^6$; 2) $(x^3)^2=x^6$; 3) $(u^3)^5=u^{15}$.

Üldiselt:

$$\boxed{(a^m)^n=a^{mn}}$$

Astme astendamisel korrutatakse astendajad.
Korrutise astendamisel astendatakse iga tegur eraldi.

$$\boxed{(ab)^n=a^nb^n}$$

Sama eeskirja järgi saame astendada ka üksliiget. Miks?

Näide.

$(3ab^2c^3)^4=3^4\cdot a^4\cdot(b^2)^4\cdot(c^3)^4=81a^4b^8c^{12}$.

Astendamisel tuleb silmas pidada veel järgmisi märkide reegleid:

1) *positiivse arvu aste on positiivne*;
2) *negatiivse arvu paarisarvulise astendajaga aste on positiivne*;
3) *negatiivse arvu paarituarvulise astendajaga aste on negatiivne.*

Ülesandeid.

138. Astendada:

1) $(2^2)^3$, $(1^5)^4$, $(-3)^3$, $(-5)^2$, $(-1^2)^3$, $-(-2)^3$

2) $(a^3)^4$, $(2a)^2$, $(0{,}2k)^3$, $(2z^3)^5$, $(2a^2b)^3$, $-(2z)^3$

3) $(3p^2q^3)^4$, $(-10z^2)^3$, $(7a^2x^5)^2$, $(-\frac{1}{2}m^5n^2)^2$, $v(-3y^2z)^3$, $(-4x^5y)^5$

4. MURRU ASTENDAMINE.

Näiteid.

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$;

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b\cdot b} = \frac{a^4}{b^4}$.

Toodud näiteist võime kokku võtta, et

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Murru aste on võrdne lugeja ja nimetaja astmete jagatisega.

Teisiti: murru astendamisel astendatakse murru lugeja ja nimetaja eraldi ning tulemused jagatakse.

Näiteid.

1) $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 = a^2+2\cdot a\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = a^2+a+\frac{1}{4}$

(kasutasime summa ruudu valemit).
Sama ülesande võime lahendada ka nii:

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2a+1}{2}\right) = \frac{4a^2+4a+1}{4} = a^2+a+\frac{1}{4}.$$

2) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}n\right)^3 = \left(\frac{1}{2}a\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}a\right)^2\cdot\frac{2}{3}n + 3\cdot\left(\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{2}{3}n\right)^2 -$

$$-\left(\frac{2}{3}n\right)^3 = \frac{1}{8}a^3 - 3\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{2}{3}n + \frac{3}{2}a\cdot\frac{4}{9}n^2 - \frac{8}{27}n^3 =$$

$$= \frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}a^2n + \frac{2}{3}an^2 - \frac{8}{27}n^3.$$

Teisiti:

$$\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}n\right)^3=\left(\frac{3a-4n}{6}\right)^3=$$

$$=\frac{(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot 4n+3\cdot(3a)\cdot(4n)^2-(4n)^3}{6^3}=$$

$$=\frac{27a^3-108a^2n+144an^2-64n^3}{216}.$$

Ülesandeid.

139. Astendada.

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ 2) $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 3) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^3$

$\left(\frac{-4}{7}\right)^2$ $\left(\frac{b}{3}\right)^2$ $\left(\frac{-3a^2}{46^3}\right)^3$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ $\left(\frac{2x}{9}\right)^2$ $\left(\frac{2ab^3}{5c^2d^2}\right)^3$

$\left(2\frac{1}{2}\right)^3$ $\left(-\frac{a}{2}\right)^2$ $\left(\frac{-aq^2}{2c^2d}\right)^5$

$(0{,}02)^3$ $\left(\frac{-a}{2}\right)^3$ $\left(\frac{0{,}1ab}{7c^2}\right)^3$

140. Astendada.

1) $\left(\frac{a}{2}-2\right)^2$ 4) $\left(\frac{a}{4}-1\right)^3$

2) $\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{2}\right)^2$ 5) $\left(2+\frac{a}{2}\right)^3$

3) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{4}b\right)^2$ 6) $\left(m+\frac{3}{4}\right)^2$

§ 15. MURDUDE JAGAMINE.

1. ÜKSLIIKMETE JAGAMINE (KORDAMISEKS).

Näide.

$$a^5:a^2=\frac{a^5}{a^2}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a}=a^3.$$

Seega

$a^5:a^2=a^{5-2}=a^3$

ehk üldkujul

$$\boxed{a^m:a^n=a^{m-n},\ \text{kui}\ m>n.}$$

Võrdsete alustega astmete jagamisel jagatava astendajast lahutatakse jagaja astendaja.

Näiteid.

1) $36ab : 9 = 4ab$;

2) $16c^3d^2u : 32c^3du = \frac{16c^3d^3u}{32c^3du} = \frac{1}{2}d$;

3) $\frac{-72a^4h^5}{55a^3h} = \frac{-72}{55}a^{4-3} \cdot h^{5-1} = -\frac{72}{55}ah^4$.

Üksliikme jagamisel üksliikmega jagatakse kordajad ning seejärel jagatavas ja jagajas esinevad tähelised tegurid.

Kui mingi täht esineb ainult jagatavas, siis jagatises see täht esineb sama astendajaga.

Kui mingi tähe astendajad jagatavas ja jagajas on võrdsed, siis seda tähte jagatises ei esine (näide 2).

Ülesandeid.

141. Jagada.

1) $2a : \frac{1}{2}$	2) $ab : a$	3) $25h^2k^3l : 10hk^2$
$39a : 13$	$ab : b$	$-14a^6b^5x : (-7a^5b^2)$
$54xy : 18$	$xy : y$	$-11a^2b^nc : 2a^2b^n$
$\frac{1}{2}a : 2$	$28f^2 : 14f$	$-\frac{-28u^2}{42u}$
$6b : \frac{2}{3}$	$0 : 19k$	$\frac{10c^2v}{5c^2v}$
$30ax : 5a$	$11a^2b^2z : 66ab^2$	$\frac{0}{4d^2a}$

2. MURDUDE JAGAMINE.

Kui kahe arvu korrutis on võrdne 1-ga, siis need arvud on teineteise pöördarvud.

Näiteid.

1) 2 ja $\frac{1}{2}$ on teineteise pöördarvud, sest $2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$;

2) $\frac{3}{4}$ ja $\frac{4}{3}$ on teineteise pöördarvud, sest $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 3} = 1$;

3) $\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$ on teineteise pöördarvud, sest $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Murru jagamisel murruga korrutatakse esimene murd teise murru pöördarvuga.

Näide.

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 4} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}.$$

Üldiselt:

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}$$

Täisarvu jagamisel murruga ja murru jagamisel täisarvuga vaatleme antud täisarvu kui murdu, mille nimetaja on üks.

Näiteid.

1) $21 : \frac{3}{7} = \frac{21}{1} : \frac{3}{7} = \frac{21}{1} \cdot \frac{7}{3} = \frac{21 \cdot 7}{1 \cdot 3} = 49.$

Üldiselt:

$$a : \frac{m}{n} = \frac{a}{1} : \frac{m}{n} = \frac{a}{1} \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{m}$$

2) $\frac{3}{5} : 5 = \frac{3}{5} : \frac{5}{1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 5} = \frac{3}{25}.$

Üldiselt:

$$\frac{m}{n} : a = \frac{m}{n} : \frac{a}{1} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{m}{an}$$

Segaarvude jagamisel tuleb nad harilikult muuta liigmurdudeks.

Kui murru liikmeteks on hulkliikmed, siis lahutame need teguriteks (kui see võimalik on). See on vajalik murdude taandamiseks.

Näiteid.

1) $8a^2b : \frac{11a^3b^2}{8cd} = 8a^2b \cdot \frac{8cd}{11a^3b^2} = \frac{8a^2b \cdot 8cd}{11a^3b^2} = \frac{64cd}{11ab};$

2) $\frac{-18a^3}{-25b^3} : \left(-\frac{9a^2}{5b^2}\right) = \frac{18a^3}{25b^3} \cdot \left(-\frac{5b^2}{9a^2}\right) = -\frac{18a^3 \cdot 5b^2}{25b^3 \cdot 9a^2} = \frac{-2a}{5b};$

3) $\dfrac{a+\dfrac{bx}{c}}{\dfrac{1}{cx}} = \dfrac{\dfrac{ac+bx}{c}}{\dfrac{1}{cx}} = \dfrac{ac+bx}{c} : \dfrac{1}{cx} = \dfrac{ac+bx}{c} \cdot \dfrac{cx}{1} =$

$$= \frac{(ac+bx) \cdot cx}{c} = acx + bx^2;$$

4) $\dfrac{3a+2}{2} : (9a^2-4) = \dfrac{3a+2}{2 \cdot (9a^2-4)} = \dfrac{3a+2}{2(3a+2)(3a-2)} =$

$$= \frac{1}{2(3a-2)};$$

5) $(a+x)^2 : \dfrac{2a+2x}{6} = (a+x)^2 \cdot \dfrac{6}{2a+2x} =$

$$= \frac{(a+x)^2 \cdot 6}{2(a+x)} = 3(a+x);$$

6) $\dfrac{a^2-4}{x} : \dfrac{a+2}{x^2-x} = \dfrac{a^2-4}{x} \cdot \dfrac{x^2-x}{a+2} = \dfrac{(a^2-4)(x^2-x)}{x(a+2)} =$

$$= \frac{(a+2)(a-2)x(x-1)}{x(a+2)} = (a-2)(x-1).$$

Ülesandeid.

142. Jagada.

1) $\dfrac{2}{3} : 5$ 2) $\dfrac{21}{32} : \dfrac{35}{44}$ 3) $\dfrac{3}{16} : 0{,}27$

$\dfrac{15}{16} : 10$ $\dfrac{34}{57} : \dfrac{51}{76}$ $6\dfrac{1}{4} : \dfrac{5}{8}$

$28 : \dfrac{7}{5}$ $\dfrac{27}{55} : \dfrac{3}{22}$ $5\dfrac{8}{5} : 1\dfrac{9}{16}$

$18 : \dfrac{30}{91}$ $\dfrac{24}{65} : \dfrac{12}{91}$ $4\dfrac{2}{7} : 3\dfrac{3}{14}$

$\dfrac{6}{7} : 11$ $\dfrac{15}{16} : \dfrac{26}{40}$ $2\dfrac{1}{24} : 3\dfrac{1}{16}$

143. Jagada.

1) $\dfrac{2x}{5} : 4$ 2) $3x : \dfrac{3}{4}$ 3) $\dfrac{6x^2}{y^2} : \dfrac{12x}{y}$

$\dfrac{b^2}{a} : 3a$ $5m : 2\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{-ax}{c}\right) : \dfrac{2}{3x^2}$

$\left(\frac{-2a^3}{n}\right) : a^2$ $\quad x^2 : \frac{-ax}{y}$ $\quad \frac{3a^2b}{2c^2} : \frac{6ab}{2c^2}$

$\left(\frac{15m^4}{8q}\right) : (-5m^2)$ $\quad 8m : \left(-\frac{16mn}{3p}\right)$ $\quad \left(-\frac{14xy}{9z^2}\right) : \frac{21x^2}{2c^2}$

$\frac{16b}{m^2} : (-4b^3)$ $\quad -12a : \frac{8a^2}{5b}$ $\quad \frac{135a^4b^3}{c^4} : \frac{105a^3b^3}{c^3}$

144. Lihtsustada avaldised.

1) $\frac{a-b}{3a} : \frac{2(a-b)}{6a}$

$\frac{xy}{x^2-y^2} : \frac{x}{x+y}$

$\frac{a^2-x^2}{ax} : \frac{a+x}{a^2x^2}$

2) $\frac{x^2-ax}{4a} : \frac{x}{8a^2}$

$\frac{2(m-1)}{(a-1)x} : \frac{3(1-m)}{(a+1)x}$

$\frac{5a(m-z)}{3mz} : \frac{10(z-m)}{9mz}$

3) $\frac{(m+n)^2}{4m-4n} : \frac{6m+6n}{m-n}$

$\frac{p^2+pq}{rx+sx} : \frac{p^3+p^2q}{rx^3+qx^3}$

$\frac{105e^2}{fg-1} : \frac{84ef}{1-fg}$

4) $\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right) : \left(\frac{a}{b}-1\right)$

$\left(\frac{a}{b}+1\right) : \frac{1}{a^2-b^2}$

$\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2\right) : \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

145. Lihtsustada.

1) $\dfrac{\frac{1}{8}}{1-\frac{3}{8}}$

$\dfrac{\frac{8}{5}-1}{2-\frac{3}{5}}$

$\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{2}{9}}{\frac{16}{9}-\frac{1}{3}}$

$\dfrac{2-\frac{3}{7}}{\frac{5}{7}+4}$

$\dfrac{\frac{5}{12}-\frac{3}{8}}{\frac{17}{12}+\frac{7}{8}}$

2) $\dfrac{\frac{u}{v}+2}{\frac{3u}{v}-2}$

$\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$

$\dfrac{\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{b}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$

$\dfrac{a-\frac{x^2}{a}}{x-\frac{a^2}{x}}$

$\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}$

3) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}$

$\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$

$\dfrac{1+\frac{1}{m-1}}{1-\frac{1}{m+1}}$

$\dfrac{1-\frac{1}{a+1}}{1+\frac{1}{a-1}}$

$\dfrac{1+\frac{2}{x-2}}{1-\frac{2}{x+2}}$

146. Tõestada võrdus

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}}=\frac{a}{b}$$

ja teha arvutused, kui a) $a=5$, $b=12$; b) $a=6$, $b=11$.

Näide.
Lihtsustada avaldis

$$\frac{3}{5x}-\frac{3}{x+y}\left(\frac{x+y}{5x}-x-y\right).$$

Lahendus.

$$\frac{3}{5x}-\frac{3}{x+y}\left(\frac{x+y}{5x}-x-y\right)=\frac{3}{5x}-\frac{3}{x+y}\cdot\frac{x+y-5x^2-5xy}{5x}=$$

$$=\frac{3}{5x}-\frac{3}{x+y}\cdot\frac{(x+y)-5x(x+y)}{5x}=\frac{3}{5x}-\frac{3}{x+y}\cdot\frac{(x+y)(1-5x)}{5x}=$$

$$=\frac{3}{5x}-\frac{3\cdot(x+y)(1-5x)}{(x+y)\cdot 5x}=\frac{3-3\cdot(1-5x)}{5x}=\frac{3-3+15x}{5x}=\frac{15x}{5x}=3.$$

Sama näite teine lahendusviis (kui kasutame kohe üksliikme korrutamist hulkliikmega).

$$\frac{3}{5x}-\frac{3}{x+y}\left(\frac{x+y}{5x}-x-y\right)=\frac{3}{5x}-\frac{3}{x+y}\left[\frac{x+y}{5x}-(x+y)\right]=$$

$$=\frac{3}{5x}-\frac{3(x+y)}{(x+y)\cdot 5x}+\frac{3(x+y)}{x+y}=\frac{3}{5x}-\frac{3}{5x}+3=3.$$

147. Lihtsustada.

1) $\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2:\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2$

2) $\frac{2am+m^2}{4a^2-m^2}:\left(\frac{2a}{2a-m}-1\right)$

3) $\left[\frac{a^2+ax}{2x}:(a^2-x^2)\right]\cdot\left[\frac{(a+x)^2}{4ax}-1\right]$

4) $\left(2-p+\frac{2p^2}{2+p}\right):\frac{4a^2+ap^2}{p^2x-4x}$

5) $\left(2+\frac{2m^2}{2+m}-m\right):\frac{4n^2+n^2m^2}{m^2x-4x}$

148. Leida y.

$$\left(\frac{2a}{a-2}-\frac{2a}{6-3a}-\frac{3a}{a^2-4}\right):y=\frac{a-4}{a-2}$$

Kodune kontrolltöö nr. 4.

1. Arvutada.

a) $\left[0{,}4+8\cdot\left(5-0{,}5\cdot\frac{3}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}\right]\cdot\left[1\frac{7}{8}\cdot 8-\right.$

$\left.-(8{,}9-2{,}6):\frac{2}{3}\right]$

b) $\dfrac{\left(2{,}5+3\frac{1}{3}+5{,}75\right)\cdot 3\frac{3}{7}}{18-9{,}5:\frac{133}{248}}+\dfrac{12\frac{1}{2}\cdot 4{,}6+2{,}2}{8{,}25:1\frac{3}{8}}$

2. Lihtsustada.

a) $\dfrac{5-20x^2}{3-27y^2}:\dfrac{(2x-1)^2}{3y+1}\cdot\dfrac{3-9y}{1+2y}$

b) $\left[\dfrac{(2-x)^2}{ax}+1\right]:\left[\dfrac{(a+x)^3}{3ax}-a-x\right]$

3. Lihtsustada ja arvutada avaldise

$$\frac{1}{2a+4}-\frac{2}{a^2+4a+4}-\frac{a-2}{2(a+2)^2}+\frac{2}{a+1}$$

väärtus, kui $a=1$.

4. Kolmnurga pindala $S=\frac{a\cdot h}{2}$. Avaldada sellest valemist kolmnurga kõrgus.

Üldiseks kordamiseks.

149. Mis toimub murru väärtusega, kui

1) lugejat suurendada 3 korda?
2) nimetajat suurendada 3 korda?
3) lugejat ja nimetajat mõlemat suurendada 4 korda?
4) nimetajat vähendada 2 korda?
5) lugejat suurendada 5 korda ja nimetajat vähendada 5 korda?
6) lugejat vähendada 2 korda ja nimetajat suurendada 2 korda?

150. Millel põhjeneb murru taandamine?

151. Kuidas muutub murru väärtus, kui

1) lugeja ja nimetaja ees muuta märgid vastupidisteks?
2) murru ees ja nimetaja ees muuta märgid vastupidisteks?

152. Missugused järgmistest võrdustest on õiged, missugused valed?

1) $\frac{2a-b}{b-2a}=-1$; 2) $\frac{3a}{2a-b}=\frac{3a}{2a+b}$; 3) $\frac{a-b}{(c-d)^2}=\frac{b-a}{(d-c)^2}$.

153. Missugused järgmistest murdudest on taandatud valesti? Selgitada viga.

1) $\frac{cx+dx}{ca+ad}=\frac{x}{a}$

2) $\frac{am+b}{cm+d}=\frac{a+b}{c+d}$

3) $\frac{ax^2}{bx^2+c}=\frac{a}{b+c}$

4) $\frac{4x^2+y}{4x^2}=1+y$

5) $\frac{8x^2+4}{2x^2+1}=4$

6) $\frac{2a^2}{3a^3}=\frac{2a}{3a}$

7) $\frac{3a^3}{6a^4}=2a$

8) $\frac{am+bn}{cm+dn}=\frac{a+b}{c+d}$

154. Lihtsustada avaldised.

1) $\frac{18ax^2+24aby}{24abx-18ay^2}$

2) $-\frac{10a^2bx^2+2a^2b^3}{2ab^4+10ab^2x^2}$

3) $\frac{(a+b)^2-(b+x)^2}{(a-b)^2-(b-c)^2}$

4) $\frac{81a^4-b^4}{(9a^2+b^2)(9a^2-6ab+b^2)}$

5) $\frac{3b}{a^2-2ab}+\frac{2a}{ab-2b^2}-\frac{3b-4a}{a^2+4b^2-4ab}$

6) $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2-b^2}$

155. Maja veevärgi kraan annab torustiku korrasolekul q liitrit vett minutis. Torude osalisel ummistumisel langeb minutiline veeand 5 liitri võrra. Mitme minuti võrra kasvab sel puhul vanni täitumise aeg, kui vanni maht on v liitrit? Kuidas avaldub aja kasv, kui veeandmine kahaneks minutis mitte 5, vaid d liitri võrra?

156. Sooritada tehted järgmiste murdudega.

1) $\frac{1}{x^2+x}-\frac{1}{x^2-x}+\frac{2}{x^2-1}$

2) $\frac{x^2-x^2}{x+2y}\cdot\frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2}\cdot\frac{x+y}{x-2y}$

3) $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)-1$

4) $\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right):\frac{x+y}{x-y}$

5) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{a+b}{a-b}\right)$

6) $\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2-2\cdot\frac{a+b}{a-b}+1\right]:\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2-2\cdot\frac{a-b}{a+b}+2\right]$

7) $\left[\frac{m^2-n^2}{m^2+2mn+n^2}+\frac{2}{mn}:\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{m-n}$

8) $\frac{b^3-b}{(1+ab)^2-(a+b)^2}$

9) $\left[\frac{(a-x)^2}{ax}+1\right]:\left[\frac{(a+x)^3}{3ax}-a-x\right]$

10) $1-\frac{b-1}{a}-\frac{b}{a^2}$

157. Kuidas korrutatakse hulkliiget hulkliikmega?

158. Millega on võrdne

1) kahe arvu summa ruut?
2) kahe arvu vahe ruut?
3) kahe arvu summa ja vahe korrutis?
4) kahe arvu summa kuup?
5) kahe arvu vahe kuup?

159. Missugused järgnevatest võrdustest on õiged ja missugused valed? Milles on viga?

1) $a+b=b+a$
$a-b=b-a$
$-(b-a)=a-b$
$(a+b)^2=(b+a)^2$
$(a-b)^2=(b-a)^2$

2) $(a+b)^3=(b+a)^2$
$(a-b)^3=(b-a)^3$
$(a-b)^3=-(b-a)^3$
$(a-b)^2=-(b-a)^2$
$(a+b)(a-b)=(b+a)(b-a)$

160. Leida.

1) $(2m^2+3n)^2$
$(4m-0{,}5n^2)^2$
$(1+0{,}01p)^3$
$(2a^2-b^2)^3$
$\left(\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{7}b\right)\left(\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{7}b\right)$

2) $(-2a+b)(-2a-b)$
$(x+7)(x+3)$
$(x-5)(x+2)$
$(x-4)(x-6)$

161. Arvutada valemite abil:

1)	2)	3)	4)
$23\cdot17$	26^2-14^2	62^2	18^2
$34\cdot26$	98^2-52^2	71^2	37^2
$42\cdot58$	35^2-25^2	102^2	68^2
$64\cdot76$	77^2-47^2	121^2	89^2
$86\cdot94$	509^2-91^2	104^2	99^2
$103\cdot97$	197^2-3^2	111^2	998^2

162. Kuidas korrutada ühe ja sama arvu astmeid? astendada korrutist? Tuua näiteid.

163. Lihtsustada avaldis

$$\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$$

ja leida selle arvuline väärtus, kui $a=35{,}4$; $b=-48{,}6$ ja $c=29{,}6$.

164. Korruta peast.

1)	2)	3)
$72\cdot78$	$36\cdot34$	$49\cdot41$
$56\cdot54$	$23\cdot27$	$48\cdot42$
$71\cdot79$	$88\cdot82$	$94\cdot96$
$13\cdot17$	$22\cdot28$	$77\cdot73$
$57\cdot53$	$24\cdot26$	$38\cdot32$

N ä p u n ä i d e. Kuna kõikides korrutistes on tegurite üheliste summa võrdne kümnega, siis saab kasutada valemit
$(10a+b)(10a+c)=100a^2+10a(b+c)+bc=$
$=100\cdot a(a+1)+bc$.

Näide. $83 \cdot 87 = (10 \cdot 8+3)(10 \cdot 8+7) =$
$= 100 \cdot 8 \cdot 9 + 3 \cdot 7 = 7221.$

Sõnastada saadud valem.

165. Teostada tehted.

1) $\left[\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\right):(x+y)+x\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\right]:\frac{1+x}{y}$

2) $\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{a^2+2ab+b^2}+\frac{2}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]:\frac{a-b}{a^3b^3}$

3) $\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)$

4) $\left(\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+2ab+b^2}\right):\frac{b^2+4ab-a^2}{a^2-b^2}$

5) $\left(\frac{1}{1-a}-1\right):\left(a-\frac{1-2a^2}{1-a}+1\right)$

166. Arvutada korrapärase kuusnurkse püramiidi ruumala, kui püramiidi põhiserv on 2,6 dm ja kõrgus 3,6 dm.

167. Kui palju kaalub korrapärase nelinurkse prisma kujuline heinavirn, mille kõrgus on 3,5 m ja laius 2,4 m, kui 1 m^3 heina kaalub 65 kg?

168. Kolmnurga ümbermõõt on 1,71 m ja küljed suhtuvad nagu 4 : 6 : 9. Kui pikad on kolmnurga küljed?

169. Mitme protsendi võrra suureneb murd, kui tema nimetaja väheneb 50% võrra?

170. Metsatööliste brigaad raius jaanuaris 500 m^3 küttepuid. Veebruaris raius sama brigaad 15% rohkem küttepuid kui jaanuaris. Mitu kuupmeetrit küttepuid raius brigaad veebruaris?

171. Linnas oli aasta lõpuks 78 000 elanikku. Leida linna elanike arv aasta alguses, teades, et elanike juurdekasv aasta jooksul oli 4%.

172. Kahe arvu summa on 83,4 ja nende vahe 15,8. Mitu protsenti on nende arvude summa suurem kui vahe?

IV PEATÜKK.

SIRGETE LÕIKUMINE JA PARALLEELSUS. MATEMAATILISED LAUSED.

§ 16. DEFINITSIOON.

Iga lugeja teab, milliseid esemeid, asutusi ja kujundeid mõeldakse, kui öeldakse: raamat, kool, kolhoos, trapets, rööpkülik. See tähendab, et lugeja tunneb raamatu, kooli, kolhoosi, trapetsi ja rööpküliku mõisteid. Isik, kes ei ole õppinud vajalikus ulatuses matemaatikat, ei saa aru lausest «Õpilaste arv töölisnoorte koolis on 35% suurem kui eelmisel õppeaastal,» sest ta ei tunne protsendi mõistet.

Kõnelemisel ja mõtlemisel on väga oluline tunda iga mõistet, mida kasutatakse. Mõiste mittetundmine viib vigadele.

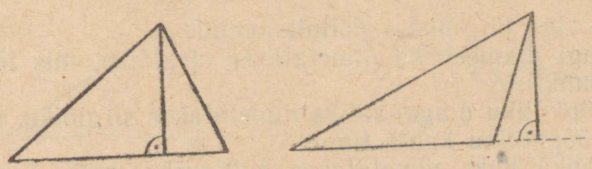
Lauset, mis selgitab mingit uut mõistet, nimetatakse definitsiooniks. Mõistele definitsiooni andmine on selle mõiste defineerimine.

Definitsioon annab täpse vastuse küsimusele «Mida nimetatakse...?» Enne küsimärki pandud punktide asemele tuleb siin alati panna vastava mõiste nimetus. Näiteks, defineerides kolmnurga kõrgust, peame esitama täpse vastuse küsimusele «Mida nimetatakse kolmnurga kõrguseks?» Vastus, s. o. kolmnurga kõrguse definitsioon on järgmine:

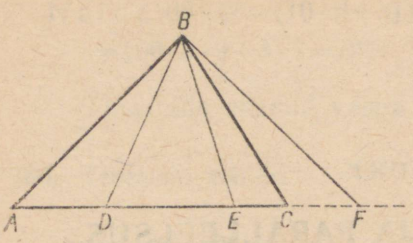
kolmnurga kõrguseks nimetatakse kolmnurga tipust vastaskülje või selle pikendusele ehitatud ristlõiku (joon. 2).

Uue mõiste defineerimisel tuleb juhinduda järgmistest põhinõuetest.

1. Definitsioon peab olema täpne, ta peab andma ainult need olulised tunnused, mille põhjal me saame uut mõistet teistest eraldada. Esitatud tunnuseid ei tohi olla liiga vähe ega ka liiga palju.



Joon. 2



Joon. 3.

Kui näiteks kolmnurga kõrguse definitsioonis asendada sõna «ristlõik» sõnaga «sirglõik», siis saame ebaõige definitsiooni. Tõepoolest, sirglõigud *BD*, *BE*, *BF* (joon. 3) täidavad siis küll definitsiooni tingimusi, kuid ükski nendest ei ole kolmnurga *ABC* kõrguseks. Seega ühe tunnuse «ristseis» kõrvaldamine viis ebaõigele definitsioonile.

Liigsete tunnuste andmine on aga tarbetu. Näiteks definitsioonis «Ruut on ristkülik, millel on kõik küljed võrdsed ja kõik nurgad võrdsed», on tarbetu rõhutada, et nurgad on võrdsed. Miks?

2. Uue mõiste defineerimisel tuleb alati toetuda tuntud mõistele ehk teisiti öeldes, uus mõiste tuleb alati defineerida tuntud mõistete kaudu. Näiteks kolmnurga kõrguse definitsioonis kasutasime tuntud mõisteid: ristlõik, kolmnurga tipp, vastaskülg. Paljudele lugejatele ei ütle aga midagi näiteks definitsioon «Kolmnurga välisnurgaks nimetatakse sisenurga kõrvunurka», sest siin on uut mõistet «kolmnurga välisnurka» defineeritud tundmatu mõiste «kõrvunurk» kaudu. Sellisel definitsioonil on mõte alles siis, kui kõrvunurk ise on defineeritud.

Küsimusi ja ülesandeid.

173. Defineerida järgmised mõisted:
sirglõik, kiir, nurk, teravnurk, nürinurk, nurgapoolitaja, lõigu keskristsirge, kolmnurga mediaan.

174. Defineerida järgmised mõisted:
võrdhaarne kolmnurk, teravnurkne kolmnurk, nürinurkne kolmnurk, täisnurkne kolmnurk, korrapärane hulknurk.

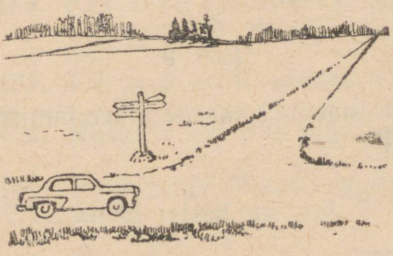
175. Defineerida järgmised mõisted:
algarv, kordarv, paarisarv, paaritu arv.

176. Leida viga järgmistes definitsioonides:
a) ringi diameetriks nimetatakse sirglõiku, mis läbib ringi keskpunkti;
b) rööpküliku diagonaaliks nimetatakse sirglõiku, mis ühendab rööpküliku kahte tippu;
c) rööpkülikuks nimetatakse hulknurka, mille vastasküljed on paralleelsed.

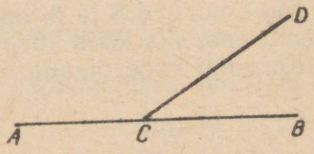
§ 17. KÕRVUNURGAD. TIPPNURGAD.

1. Joonisel 4 näeme sirget peateed, millelt hargneb sirge kõrvaltee. Kujutame skemaatiliselt peateed sirgega AB. Hargnemispunkti (teeristi) tähistame tähega C. Kõrvalteed saab kujutada siis kiirega CD (joon. 5). Näeme, et kõrvaltee moodustab peateega kaks nurka: $\angle ACD$ ja $\angle BCD$. Nendel nurkadel on üks ühine haar CD, kuid teised haarad CA ja CB moodustavad sirgjoone. Selliseid nurki nimetataksegi k õ r v u n u r k a d e k s.

Kaht nurka nimetatakse kõrvunurkadeks, kui neil on üks ühine haar ja teised haarad moodustavad sirgjoone.



Joon. 4



Joon. 5

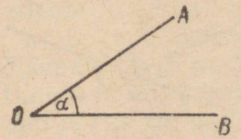
Kuna kõrvunurkade ühed haarad moodustavad sirgjoone, siis järelikult

kõrvunurkade summa on sirgnurk (180°).

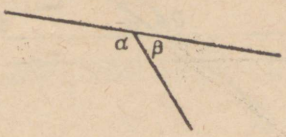
M ä r k u s. Seni oleme nurki tähistanud kolme suure tähega, kusjuures tähekolmiku ette kirjutatakse veel nurga sümbol $\angle$. Sageli tähistatakse nurki väikeste kreeka tähtedega: α (alfa), β (beeta), γ (gamma), δ (delta) ... Vastav täht märgitakse sel juhul nurga tipu juurde haarade vahele (joon. 6). Sõnalises tekstis sel juhul nurga sümbolit ei kasutata.

Tähistades nüüd kõrvunurki tähtedega α ja β (joon. 7), võime kirjutada

$$\alpha+\beta=180°.$$



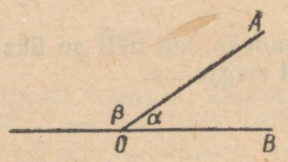
Joon. 6



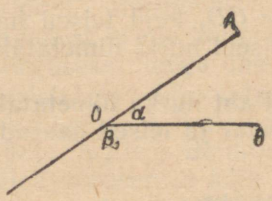
Joon. 7

2. Kõrvunurga definitsiooni järgi on lihtne antud nurgale α (joon. 6) joonestada tema kõrvunrka. Selleks pikendame nurga haara OB üle nurga tipu O (joon. 8). Tekkinud nurk β ongi α kõrvunurgaks. Miks?

Nurga α kõrvunurga saame ka sel juhul, kui pikendame selle nurga teist haara OA üle tipu O (joon. 9). Tekkinud nurk β_1 (loe: beeta üks) on samuti α kõrvunurgaks. Miks?



Joon. 8



Joon. 9

Kuna nurgad β ja β_1 on saadud erinevate haarade pikendamise tulemusena, siis tekib küsimus, kas $\beta = \beta_1$.

Kõrvunurkade omaduse tõttu

$$\beta = 180° - \alpha$$

ja samal põhjusel

$$\beta_1 = 180° - \alpha$$

Kui aga kaks suurust (β ja β_1) on mõlemad võrdsed ühe ja sama kolmandaga ($180° - \alpha$), siis on nad võrdsed ka omavahel. Seepärast

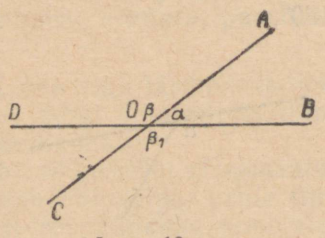
$$\beta = \beta_1.$$

Ülal pikendasime nurga α haarasid üle nurga tipu erinevatel joonistel (joon. 8 ja 9). Teeme seda nüüd ühel ja samal joonisel (joon. 10). Nüüd asetsevad nurga α mõlemad kõrvunurgad β ja β_1 nii, et ühe nurga haarad (näiteks OD ja OA) on teise nurga haarade (OB ja OC) pikendusteks. Sellised nurgad kannavad t i p p - n u r k a d e nime.

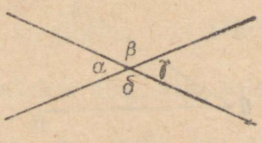
Kaht nurka nimetatakse tippnurkadeks, kui ühe nurga haarad on teise nurga haarade pikendusteks.

Ülaltoodu põhjal selgub ka tippnurkade omadus:

tippnurgad on võrdsed.



Joon. 10



Joon. 11

Kas joonisel 10 leidub peale β ja β_1 veel tippnurki? Mitu tippnurkade paari tekib kahe sirge lõikumisel?

Küsimusi ja ülesandeid.

177. Milliseid tuntud mõisteid kasutati kõrvunurkade ja tippnurkade defineerimisel?

178. Millised kõrvunurkade ja tippnurkade paarid on kujutatud joonisel 11?

179. Kus võib kohata kõrvunurki ja tippnurki igapäevases elus: klassis, korteris, töökohal, maastikul?

180. Kas kaks kõrvunurka võivad olla samaaegselt teravnurgad, nürinurgad? Miks?

181. Kui suur on täisnurga kõrvunurk?

182. Nurk on 25°. Kui suur on tema kõrvunurk?

183. Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest üks nurk on 10°. Leida teised nurgad.

184. Nurga suurus on α kraadi. Avaldada tema kõrvunurk.

185. Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest ühe nurga suurus on β kraadi. Avaldada teised nurgad.

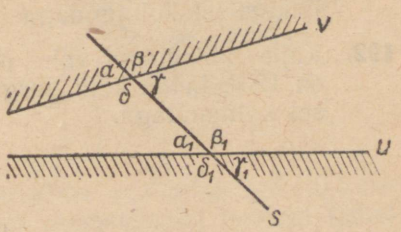
186. Nurk δ muutub 10° võrra suuremaks. Kuidas muutub tema kõrvunurk? Miks?

197. Nurk γ muutub 25° võrra väiksemaks, kuidas muutub tema kõrvunurk? Miks?

§ 18. KAHE SIRGE LÕIKAMINE KOLMANDA SIRGEGA.

Joonisel 12 on kujutatud kaks sirget u ja v, mida on lõigatud kolmanda sirgega s. Nimetame sirgeid u ja v lõigatavateks sirgeteks ja sirget s lõikajaks. Joonise osa, mis on sirgetest u ja v väljaspool, on viirutatud.

Vaatleme kaheksat tekkinud nurka: α, β, γ, δ ühise tipuga ühes lõikepunktis ja α_1, β_1, γ_1, δ_1 ühise tipuga teises lõikepunktis. Neist neli nurka (α, β, γ_1, δ_1) on **välised nurgad** ja neli nurka (α_1, β_1, γ, δ) on **seesmised nur-**



Joon. 12

gad. Kuna selliselt tekkinud nurki on edaspidi vaja kasutada paarikaupa, siis anname mõnele nurgapaarile kindla nimetuse.

Kaht seesmist nurka, mis asetsevad ühel pool lõikajat, nimetatakse **lähisnurkadeks** (α_1 ja δ; β_1 ja γ).

Kaht seesmist nurka, mis asetsevad teine teisel pool lõikajat ja mille lõikajal olevad haarad on vastassuunalised, nimetatakse **põiknurkadeks** (α_1 ja γ; β_1 ja δ).

Kaht ühel pool lõikajat asetsevat nurka, millest üks on seesmine ja teine väline ja mille haarad lõikajal on samasuunalised, nimetatakse **kaasnurkadeks** (α ja α_1; β ja β_1; δ ja δ_1; γ ja γ_1).

Lähis-, põik- ja kaasnurkade kohta saab lahendada mitmesuguseid ülesandeid.

Näide. Kahe põiknurga β_1 ja δ (joon. 12) vahe on 7°, kusjuures väiksem nurk $\delta = 140°$. Arvutada kõik ülejäänud nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega.

Lahendus. Et $\beta_1 - \delta = 7°$ ja $\delta = 140°$, siis $\beta_1 = 147°$. Kõrvunurkade omaduse tõttu $\alpha_1 = 180° - \beta_1 = 180° - 147° = 33°$ ja $\gamma = 180° - \delta = 180° - 140° = 40°$.

Tippnurkade omaduse tõttu $\beta = \delta = 140°$; $\alpha = \gamma = 40°$; $\delta_1 = \beta_1 = 147°$ ja $\gamma_1 = \alpha_1 = 33°$.

Vastus. $\beta_1 = 147°$; $\alpha_1 = 33°$; $\gamma_1 = 33°$; $\delta_1 = 147°$; $\gamma = 40°$; $\alpha = 40°$; $\beta = 140°$.

Küsimusi ja ülesandeid.

188. Plaanistati uudismaa tükk, kus kaks sirget kraavi u ja v on lõigatud sirge magistraalkraaviga s (joon. 12). Nurkade mõõtmisel saadi: $\delta = 135°$; $\alpha_1 = 40°$. Kas on vaja kraavide plaanile kandmiseks mõõta veel teisi nurki? Miks?

189. Arvutada eelmise ülesande andmeil nurgad α, β, γ, β_1, γ_1, δ_1 (joon. 12).

190. Ühe paari põiknurkade summa on 187°, kusjuures üks nurk sellest paarist on 94°. Arvutada kõik nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega.

191. Kahe kaasnurga summa on 144°, kusjuures üks nendest nurkadest on 54°. Arvutada kõik nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikumisel kolmandaga.

192. Kahe lähisnurga vahe on 40°, kusjuures suurem lähisnurk on 120°. Leida kõik nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmandaga.

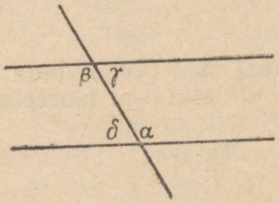
§ 19. LAUSETE ÕIGSUSE PÕHJENDAMINE LOOGILISE ARUTLUSE TEEL. TEOREEM.

1. Vaatleme järgmisi lauseid, millest mõned on oma sisu poolest õiged, s. t. nad vastavad tegelikkusele, mõned on aga valed, s. t. tegelikkusele mittevastavad.

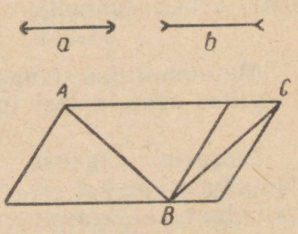
1) Meie klassis õpib 18 õpilast.
2) Meie klassis õpivad ainult töötavad noored.
3) Nõukogudemaal ei ole tööpuudust.
4) Vask ei juhi elektrit.
5) Kui arvu viimane number on 4, siis see arv jagub 4-ga.
6) Kõrvunurkade summa on 180°.
7) Kahe paaritu arvu summa on paaritu arv.
8) Kui üks paar põiknurki on võrdsed, siis on ka teine paar põiknurki võrdsed.

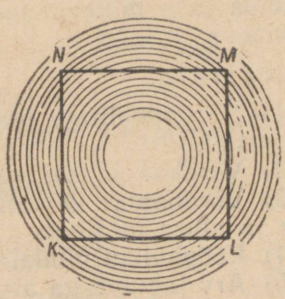
Millised esitatud lausetest on lugeja arvates õiged, millised valed? Miks?

2. Igapäevases elus (kõnes, vestlustes, vaidlustes, kirjasõnas) on oluline osata oma lausete õigsust põhjendada. Sageli on lausete põhjendamine lihtne. Näiteks saab eespool toodud lause 1 õigsust kontrollida õpilaste otsese loendamise teel. Samuti saab ka lauset 2 otseselt kontrollida.



Joon. 13





Joon. 14

Paljudel juhtudel ei ole lause õigsuse põhjendamine nii lihtne. Vaatleme lauset 8 (joon. 13). Matemaatilises lühikirjas: kui $\alpha=\beta$, siis $\delta=\gamma$. Kuidas kontrollida selle lause õigsust? Võib-olla silma järgi? Seda ei tohi lubada. Põhjus selgub joonise 14 vaatlemisel. Kas $a=b$? Kas $AB=BC$? Kas kujundi $KLMN$ küljed on sirglõigud?

Kas ei võiks lause 8 õigsust kontrollida mõõtmise teel (näiteks malliga)? Ka mõõtmine ei saa anda ammendavat vastust kahel põhjusel. Esiteks, mõõtmine on alati ebatäpne. Seepärast ei saa

mõõtmise teel otsustada, kas tõepoolest $\delta = \gamma$. Teiseks (ka siis kui mõõtmine oleks täpne), me võime mõõta ühe, kahe, kolme,..., kümne jne. mingi konkreetse arvu jooniste juures. Kui lause osutub kõigil neil juhtudel õigeks, siis ei tohi teha ikkagi üldist järeldust, et lause on alati õige (mistahes α ja β korral). See oleks samasugune viga, mille võib teha inimene, kes võtab täis puuviljakorvist kinnisilmi 10 pirni ja siis kostab: see korv sisaldab ainult pirne.

Lause õigsust saab sageli põhjendada loogilise arutluse teel, s. t. mõtlemise abil järelduste tegemisega. Sel juhul näidatakse, et antud lause on varem põhjendatud lausete ehk varem tuntud tõdede loogiliseks järelduseks. Lausete põhjendamine loogilise arutluse teel on võimalik seetõttu, et on olemas selliseid lauseid, mille vahel valitsevad kindlad loogilised seosed.

Olgu antud näiteks kolm lauset.

1. Kõik meie klassi õpilased töötavad põllutööriistade tehases.
2. Jüri Leht on meie klassi õpilane.
3. Jüri Leht töötab põllutööriistade tehases.

Siin on 3. lause kahe esimese lause loogiliseks järelduseks.

Eriti selgesti ilmnevad loogilised seosed matemaatilise sisuga lausete vahel (s. o. selliste lausete vahel, mis väljendavad arvude, geomeetriliste kujundite või teiste matemaatiliste mõistete omadusi ja nendevahelisi seoseid).

Matemaatilise sisuga lauset, mille õigsust saab põhjendada loogilise arutelu teel tuntud tõdede abil, nimetatakse teoreemiks.

Teoreemi õigsuse põhjendamist nimetatakse teoreemi tõestamiseks.

Eelnevate klasside matemaatika kursuses oleme õppinud tundma juba mitmeid teoreeme.

Näiteid.

1) Nurgapoolitaja iga punkt asub nurga haaradest võrdsetel kaugustel.

2) Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed.

3) Võrdhaarse kolmnurga kõrgus on ühtlasi tipunurga poolitaja ja aluse mediaan.

4) Rööpküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega.

5) Arv jagub 2-ga ainult siis, kui tema viimane number jagub 2-ga.

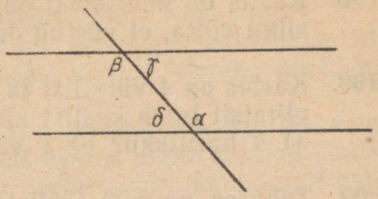
3. Alates käesolevast õppeaastast kasutame teoreemide õigsuse põhjendamiseks sageli loogilist järeldamist.

Näide 1. Tõestame eespool sõnastatud lause 8: kui üks

paar põiknurki on võrdsed, siis on ka teine paar põiknurki võrdsed (joon. 15).

Kõrvunurkade omaduse tõttu võime kirjutada

$$\gamma = 180° - \beta$$
$$\delta = 180° - \alpha$$



Joon. 15

Et $\alpha = \beta$ (see on antud), siis on õige ka: $180° - \beta = 180° - \alpha$ (sest kui võrdsetest suurustest lahutame võrdsed suurused, siis saame võrdsed suurused).

Nüüd näeme, et võrdustes $\gamma = 180° - \beta$ ja $\delta = 180° - \alpha$ on võrduste paremad pooled võrdsed. Siis peavad olema võrdsed ka vasakud pooled, s. o. $\gamma = \delta$. Seda oligi vaja tõestada.

Näide 2. Tõestada teoreem: kui ühe paari lähisnurkade summa on 180°, siis põiknurgad on võrdsed.

Antud. $\alpha + \gamma = 180°$ (joon. 15).

Tõestada. $\beta = \alpha$; $\delta = \gamma$.

Tõestus. Et $\alpha + \gamma = 180°$, siis $\gamma = 180° - \alpha$. Kõrvunurkade omaduse tõttu $\beta = 180° - \gamma = 180° - (180° - \alpha) = 180° - 180° + \alpha = \alpha$, s. o. $\beta = \alpha$. Lugeja ülesandeks jääb näidata, et $\delta = \gamma$.

Küsimusi ja ülesandeid.

193. Milliseid järeldusi saab teha järgmistest lausete paaridest?

1° a) Kõik meie klassi õpilased on tehases ratsionaliseerijad.
b) Olev K. on meie klassi õpilane.

2° a) Nurgapoolitaja iga punkt on nurga haaradest võrdsetel kaugustel.
b) Punkt M asetseb nurgapoolitajal.

3° a) Kui arvu ristsumma jagub kolmega, siis arv jagub kolmega.
b) Arvu 369 ristsumma jagub kolmega.

194. On teada, et $a = c$ ja $b = c$. Mis siit järeldub?

195. On teada, et $a = b$ ja $b = c$. Mis siit järeldub?

196. On teada, et $a + b = a + c$. Mis siit järeldub?

197. Kastis on 10 õuna. Mitu õuna peab võtma kinnisilmi sellest kastist, et väita: see kast sisaldab ainult «valgeid klaare»?

198. Kastis on kaht sorti õunu. Vähemalt mitu õuna tuleb kinnisilmi võtta, et võetud õunte hulgas oleks kaks ühest sordist?

199. Karbis on 4 värvilist ja 10 harilikku pliiatsit. Vähemalt mitu pliiatsit tuleb kastist kinnisilmi võtta, et nende hulgas oleks a) 4 harilikku? b) 1 värviline?

200. Tehases on 500 töölist. Millised järgnevatest lausetest on õiged?
a) mõni tehase tööline on sündinud juulikuus;
b) mõned töölised on sündinud samal aastal;
c) mõned töölised on sündinud samal kuupäeval;
d) kõik töölised on ühevanused.

201. Üks kõrvunurkadest on 60°. Kui suure nurga moodustavad nende kõrvunurkade poolitajad?

202. Üks kõrvunurkadest on 85°. Kui suure nurga moodustavad nende kõrvunurkade poolitajad?

203. Millise oletuse võiks püstitada ülesannete 201 ja 202 lahenduse tulemusena. Sõnastada vastav lause ja tõestada see.

204. Tõestada, et võrdsetel nurkadel on võrdsed kõrvunurgad.

205. Tõestada, et lõigu keskristsirge iga punkt asetseb lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel.
Näpunäide. Kasutada kolmnurkade võrdsust.

206. Tõestada, et nurgapoolitaja iga punkt asetseb nurga haaradest võrdsetel kaugustel.

207. Tõestada, et kui üks paar kaasnurki on võrdsed, siis on ka teistes kaas- ja põiknurkade paarides vastavalt võrdsed nurgad.

§ 20. TEOREEMI KOOSTIS.

Iga teoreem koosneb kahest osast — *eeldusest* ja *väitest*. Teoreemi eeldus näitab, mis on vaadeldava mõiste kohta teada. Teoreemi väide aga ütleb, mida saab eeldusest järeldada, s. t. väide näitab, mida on vaja tõestada.

Nii on eelmise paragrahvi näites 1 vaadeldud teoreemis eelduseks, et üks paar põiknurki (α ja β) on võrdsed; väiteks on, et ka teine paar põiknurki on võrdsed. Sama paragrahvi näites 2 vaa-

deldud teoreemis on eelduseks, et ühe paari lähisnurkade summa on 180°; väiteks on, et põiknurgad on võrdsed.

Teoreemis «Kõrvunurkade summa on 180°» on eelduseks, et need nurgad on kõrvunurgad; väiteks on, et nende nurkade summa on 180°.

Kerge on eraldada teoreemi eeldust ja väidet siis, kui teoreem on sõnastatud nn. «kui-siis» vormis, kus eeldus algab sõnaga «kui» ja väide algab sõnaga «siis». Sellises vormis ongi sõnastatud eelmise paragrahvi mõlemad näited. «Kui-siis» vormis on võimalik sõnastada iga teoreemi.

Näiteid.

1) Viiega lõppev arv jagub viiega.
Sama «kui-siis» vormis: k u i arv lõpeb viiega, s i i s ta jagub viiega.

2) Kõrvunurkade summa on 180°.
Sama «kui-siis» vormis: k u i nurgad on kõrvunurgad, s i i s on nende summa 180°.

3) Tippnurgad on võrdsed.
Sama «kui-siis» vormis: k u i nurgad on tippnurgad, s i i s nad on võrdsed.

Ülesandeid.

208. Leida eeldus ja väide järgmistes teoreemides.
a) Kui arvu viimane number on 2, siis see arv jagub kahega.
b) Kui murru lugejat ja nimetajat korrutada sama arvuga, siis murru väärtus ei muutu.
c) Kui ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega, siis on kolmnurgad võrdsed.

209. Leida eeldus ja väide järgmistes teoreemides ja sõnastada nad «kui-siis» vormis.
a) Paarisnumbriga lõppev arv jagub 2-ga.
b) Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed.
c) Rombi diagonaalid on risti.
d) Lõigu keskristsirge iga punkt on lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel.
e) Korrapärase hulknurga pindala võrdub apoteemi ja ümbermõõdu poole korrutisega.

210. Alljärgnevas tabelis on vasakpoolses veerus teoreemide eeldused ja parempoolses veerus teoreemide väited, kuid teises järjekorras kui eeldused. Leida sobivad eeldus-väite paarid ja sõnastada vastavad teoreemid.

Eeldus	Väide
a) Arv lõpeb nulliga.	a) Arv jagub 9-ga.
b) Mitmekohalise arvu viimane number on 5.	b) Kolmnurgad on võrdsed.
c) Korrutise üks tegur jagub mingi arvuga.	c) Arv jagub 10-ga.
d) Arvu ristsumma jagub 9-ga.	d) Sirge kõik punktid on nurga haaradest võrdsetel kaugustel.
e) Sirge poolitab nurga.	e) Arv on kordarv.
f) Kolmnurga üks külg ja selle lähisnurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga ühe külje ja selle lähisnurkadega.	f) Suurema külje vastas on suurem nurk.
g) Kujund on kolmnurk.	g) Murd suureneb sama arv korda.
h) Murru lugeja suureneb mingi arv korda.	h) Korrutis jagub selle arvuga.

§ 21. AKSIOOM.

Teoreemi tõestamisel toetume tuntud tõdedele. Näiteks tippnurkade omaduse tõestamiseks (§ 17, p. 2) kasutasime järgmisi tuntud tõdesid.

a) Kõrvunurkade summa on 180°.

b) Kaks suurust, mis on võrdsed ühe ja sama kolmandaga, on võrdsed omavahel.

c) Kui võrdsetest suurustest lahutame võrdsed suurused, siis saame võrdsed suurused.

Tõed, mida me mingi teoreemi tõestamisel kasutame, on ise varem põhjendatud. Nende põhjendamisel on omakorda vaja varemtuntud tõdesid jne. Nõnda saame lausete ahela. Kuidas põhjendada selles ahelas olevat «esimest lauset»? Vastuse sellele küsimusele saame, kui loeme mõned laused õigeteks ilma põhjendamata.

Lauseid, mis loetakse õigeteks ilma põhjendamata, nimetatakse **põhitõdedeks** ehk **aksioomideks.**

Käesolevas õpikus kasutame aksioomidena näiteks järgmisi lauseid.

1) Läbi kahe erineva punkti saab ehitada ainult ühe sirge.

2) Sirglõigu pikkus on lühim kaugus kahe punkti vahel.

3) Kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis.

4) Kui kaks suurust on võrdsed ühe ja sama kolmandaga, siis nad on võrdsed omavahel.

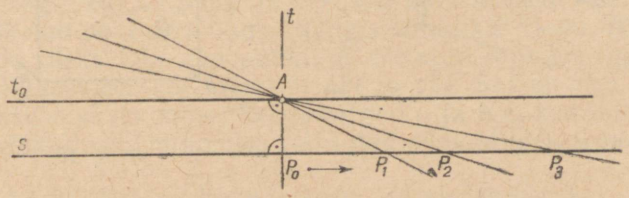
5) Kui võrdsetele suurustele liita võrdsed suurused, siis saame võrdsed suurused.

6) Kui võrdsetest suurustest lahutame võrdsed suurused, siis saame võrdsed suurused.

Definitsioon, teoreem ja aksioom kannavad ühist nimetust — **matemaatilised laused.**

§ 22. PARALLEELSETE SIRGETE DEFINITSIOON. PARALLEELSUSE AKSIOOM.

1. Joonisel 16 on kujutatud sirge s ja punkt A väljaspool seda sirget. Läbi punkti A on ehitatud antud sirgele s ristsirge t. Sirgete s ja t lõikepunkt on P_0. Kujutleme sirget t pöörlevana ümber punkti A vastupidi kellaosuti liikumise suunale. Siis lõikepunkt P_0 liigub mööda sirget s paremale, läbides asendid P_1, P_2, P_3 jne. Sirge t saavutab lõpuks asendi t_0, kus $t_0 \perp AP_0$. Sellises asendis sirge t_0 ei lõika sirget s. Tõepoolest, kui nad lõikuksid mingis kauges punktis (mida ei ole joonisel märgitud), siis oleks sellest punktist ehitatud lõigule AP_0 kaks ristsirget (t_0 ja s). See ei ole aga võimalik.



Joon. 16

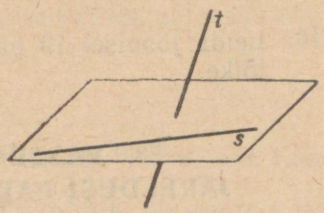
Selliseid sirgeid, nagu joonisel 15 on sirged t_0 ja s, nimetatakse **paralleelseteks.** Kirjas märgitakse seda lühidalt nii: $t_0 \parallel s$ (loe: sirged t_0 ja s on paralleelsed ehk sirge t_0 on paralleelne sirgega s).

Kaht sirget, mis asetsevad ühel ja samal tasapinnal [1] ning ei lõiku, nimetatakse paralleelseteks sirgeteks.

Kui palju on selliseid sirgeid, mis läbivad väljaspool sirget s asetsevat punkti A ja on paralleelsed sirgega s? Vastuse annab paralleelsuse aksioom:

punkti, mis asetseb väljaspool antud sirget, läbib ainult üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

2. Juhime lugeja tähelepanu paralleelsete sirgete definitsioonis märgitud tingimustele, et sirged peavad asetsema ühel ja samal tasapinnal. Joonis 17 näitab, et kui nimetatud tingimus ei ole täidetud (sirged s ja t ei asetse ühel ja samal tasapinnal), siis võivad sirged mitte lõikuda, kuid nad siiski ei ole paralleelsed. Joonisel 17 kujutatud sirgeid s ja t nimetatakse **kiivsirgeteks.**

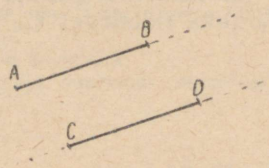


Joon. 17

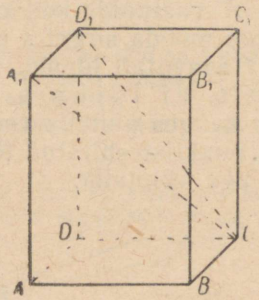
[1] Tasapind on näiteks tasase laua pind, akna klaasi pind jm.

3. Paralleelseid sirgeid kohtame oma ümbruses sageli. Näiteks raudteeröödad sirgjoonelisel teelõigul, jooksuradade eraldusjooned staadionil, toa põranda vastasservad jm.

Märkus. Kuna sirgjoont kujutleme alati lõpmata pikana, siis täpsemalt öeldes kohtame oma ümbruses ainult paralleelseid sirglõike, s. o. niisuguseid sirglõike, mis asetsevad paralleelsetel sirgetel (joon. 18). $AB \parallel CD$.



Joon. 18



Joon. 19

Küsimusi ja ülesandeid.

211. Nimetada paralleelseid sirglõike oma ümbrusest: töökohal, koolis, maastikul jm.

212. Mitu paari paralleelseid servi on risttahukal?

213. Mitu paari paralleelseid külgi on ristkülikul, rööpkülikul, trapetsil?

214. Milline viga on definitsioonis «Kaht sirget nimetatakse paralleelseteks, kui nad ei lõiku»?

215. Leida viga lauses «Kaks sirget tasapinnal on kas paralleelsed või ristuvad».

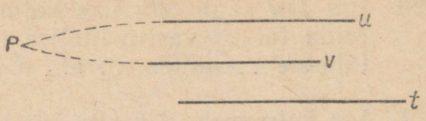
216. Leida joonisel 19 paralleelseid, lõikuvaid ja kiivseid sirglõike.

§ 23. VASTUVÄITELINE TÕESTUSVIIS. JÄRELDUSI PARALLEELSUSE AKSIOOMIST.

Edaspidi õppimisele tulevate teoreemide tõestamisel kasutame sageli vastuväitelist tõestusviisi. Selle tõestusviisi olemus selgub järgmistest näidetest.

Näide 1. (I järeldus paralleelsuse aksioomist.)

Kui kaks sirget on paralleelsed ühe ja sama kolmanda sirgega, siis nad on paralleelsed ka omavahel (joon. 20).



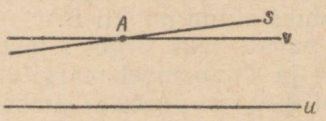
Joon. 20

Eeldus. $u \parallel t$, $v \parallel t$.
Väide. $u \parallel v$.

Tõestus. Vastuväitelise tõestusviisi korral oletame väitele vastupidist; antud juhul oletame, et sirged u ja v ei ole paralleelsed. Millised võimalused siis järele jäävad? Kahel sirgel saab tasapinnal olla ainult üks kahest võimalikust asendist: nad on kas paralleelsed või lõikuvad. Kolmandat võimalust ei ole. Seega, kui sirged u ja v ei ole paralleelsed (oletuse kohaselt), siis nad peaksid lõikuma mingis punktis P (joon. 20). Sellisel juhul aga oleks läbi ühe punkti P ehitatud antud sirgele t kaks paralleeli, sest eelduse kohaselt $u \parallel t$ ja $v \parallel t$. See on aga vastuolus paralleelsuse aksioomiga. Seega sirged u ja v ei saa lõikuda. Kolmanda võimaluse puudumise tõttu nad peavad olema paralleelsed.

Näide 2. (II järeldus paralleelsuse aksioomist.)
Kui sirge lõikab ühte kahest paralleelsest sirgest, siis lõikab ta ka teist (joon. 21).

Eeldus. $u \parallel v$, sirged s ja v lõikuvad.
Väide. Sirged s ja u lõikuvad.



Joon. 21

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et sirged s ja u ei lõiku. Sel juhul oleksid nad paralleelsed (kolmandat võimalust ei ole). Siis aga oleks ühest ja samast punktist A ehitatud sirgele u kaks paralleeli s ja v, mis on paralleelsuse aktsioomi tõttu võimatu. Kuna sirged s ja u ei saa olla paralleelsed, siis nad peavad lõikuma.

Vastuväitelise tõestusviisi korral oletatakse alati väitele vastupidist ja näidatakse, et see ei ole õige. Antud väide peab siis õige olema.

Küsimusi ja ülesandeid.

217. Ka paragrahvis 22 kasutasime vastuväitelist tõestusviisi. Kus?

218. Kahe sirglõigu a ja b kohta on teada, et a ei ole suurem kui b ja et a ei ole väiksem kui b. Järeldus?

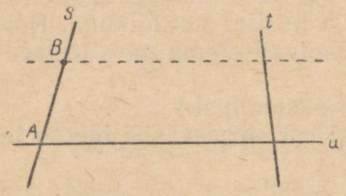
219. Kahe sirglõigu a ja b kohta on teada, et $a \neq b$. Mida tuleks vastuväitelise tõestusviisi korral näidata, kui tahame veenduda, et $a > b$?

220. Iga arv saab olla üks kolmest: positiivne, negatiivne, null. Mida tuleks vastuväitelise tõestusviisi korral näidata, kui tahame veenduda, et arv a on positiivne?

221. Iga kolmnurk võib olla üks kolmest: teravnurkne, täisnurkne, nürinurkne. Mida tuleks vastuväitelise tõestusviisi korral näidata, kui tahame veenduda, et mingi kolmnurk on täisnurkne?

§ 24. SIRGETE PARALLEELSUSE I TUNNUS.

1. Lähtume järgmisest ülesandest. Joonisel 22 kujutavad sirged s ja u sirgeid maanteid. Sirge t kujutagu näiteks jõge. Teede ja jõe vahelisel maa-alal on eraldatud karjakopliks maatükk, mille laius mööda teed s on antud (sirglõik AB joonisel 22) ja mille üks äär peab olema paralleelne teega u. Karjakoppel on vaja tarastada. Kuidas märkida maastikul suund, mis lähtub punktist B ja mis on paralleelne teega u?

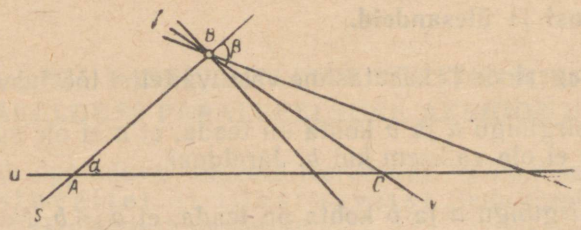


Joon. 22

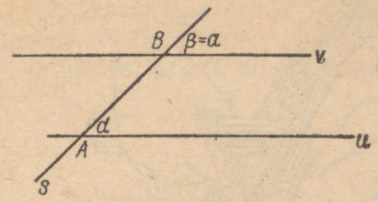
Matemaatika seisukohalt tähendab selle ülesande lahendamine sirge ehitamist, mis oleks paralleelne antud sirgega u ja mis läbiks antud punkti B.

2. Ehitame läbi punkti B (joon. 23) vabalt kaks sirget s ja v, mis lõikavad antud sirget u punktides A ja C. Joonisel märgitud nurgad α ja β on siis kaasnurgad. Kui sirge v pöördub ümber punkti B, siis nurk β muutub vastavalt pöördumissuunale kas suuremaks või väiksemaks. Sirge v teatava asendi korral on $\beta = \alpha$ (joon. 24).

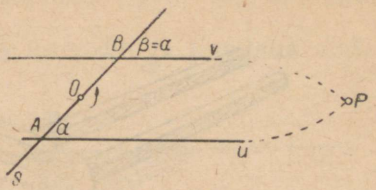
Näitame, et sel korral ongi $u \parallel v$.



Joon. 23



Joon. 24



Joon. 25

Teoreem (paralleelsuse I tunnus).

Kui kahe sirge lõikumisel kolmanda sirgega tekivad võrdsed, kaasnurgad, siis need kaks sirget on paralleelsed.

Eeldus. α ja β on kaasnurgad, $\alpha = \beta$ (joon. 24).

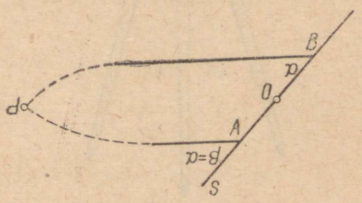
Väide. $u \parallel v$.

Tõestus. Näitame, et sirged u ja v ei saa lõikuda.

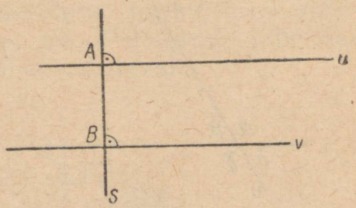
Kui sirged u ja v lõikuksid paremal pool sirget s mingis punktis P, siis tekiks olukord, mis on kujutatud joonisel 25.

Kujutleme, et joonis 25 on kääridega mööda sirget s katki lõigatud ja et joonise parem pool on pööratud ümber lõigu AB keskpunkti O täpselt 180° võrra. Kuhu satub siis punkt A? punkt B? Millisesse asendisse satub siis nurk α? nurk β? Kuhu langeb siis lõik AP? lõik BP? Tekkinud olukord on kujutatud joonisel 26.

Nüüd selgub, et kui sirged u ja v lõikuksid paremal pool sirget s, siis nad peavad lõikuma ka vasakul pool sirget s, s. o. kaks



Joon. 26

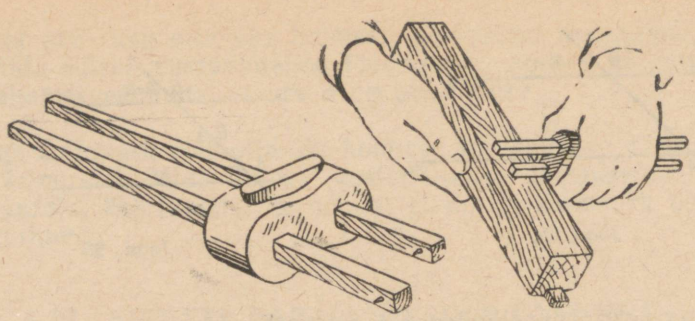


Joon. 27

sirget u ja v lõikuksid kahes erinevas punktis. See on aga võimatu. Seega sirged u ja v ei saa lõikuda paremal pool sirget s. Samal viisil saaks näidata, et nad ei saa lõikuda ka vasakul pool sirget s. Kuna sirgete u ja v asendi suhtes tasapinnal mingit kolmandat võimalust ei ole, siis nad peavad olema paralleelsed, s. o. $u \parallel v$.

Kuidas saab tõestatud teoreemist järeldada, et ühe ja sama sirge s ristsirged u ja v on paralleelsed (joon. 27)?

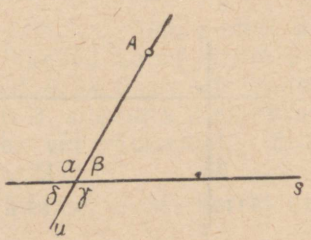
Paralleelsete sirgete vahelist ristlõiku AB nimetatakse nende sirgete vaheliseks kauguseks. See kaugus on antud sirgete



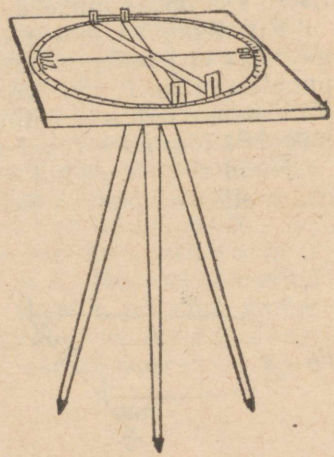
Joon. 28

vahel igal pool ühesugune. Sellel põhineb ka joonisel 28 näidatud riista — r ö ö b i t s a — kasutamine.

3. Paralleelsuse I tunnus võimaldabki ehitada antud sirgega paralleelset sirget, mis läbib antud sirgest väljaspool asetseva punkti.



Joon. 29



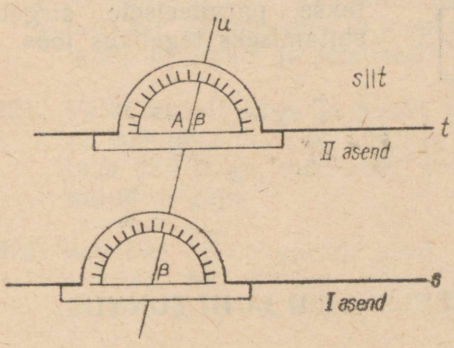
Joon. 30

Joonistame läbi punkti A (joon. 29) vabalt sirge u, mis lõikab sirget s. Tekivad nurgad α, β, γ, δ. Paralleelse sirge ehitamiseks läbi punkti A tuleb ehitada ühe tekkinud nurgaga võrdne kaasnurk, mille tipp on punktis A. Seda saab teha mitmel viisil.

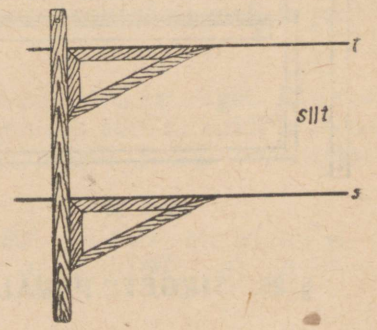
1° Mõõdame nurgamõõdu riistaga (joonestamisel kasutatakse selleks m a l l i, maastikul aga a s t r o l a a b i, joon. 30) ühe nurga, näiteks β ja ehitame punkti A juurde temaga võrdse kaasnurga (joon. 31). $s \parallel t$.

2° Samal tunnusel põhineb ka rööplüke (joon. 32), millega lugeja on juba varem tutvunud.

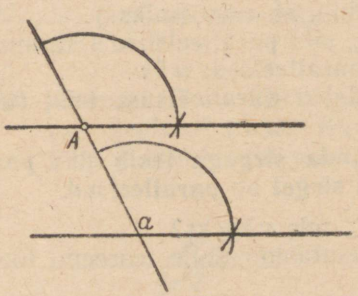
3° Paralleelset sirget saab ehitada ka sirkli ja joonlaua abil.



Joon. 31



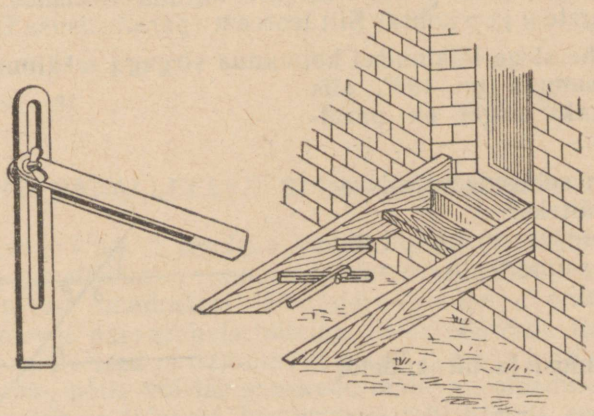
Joon. 32



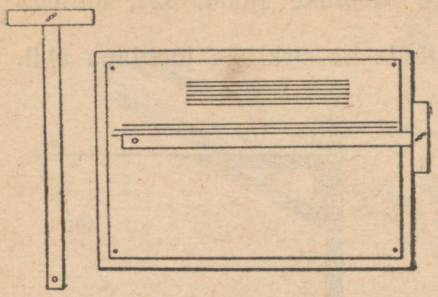
Joon. 33

Selleks on vaja osata ehitada sirkli ja joonlaua abil antud nurgale võrdset nurka (nurga ülekandmine). Küsimust selgitab joonis 33.

Millist ülalvaadeldud kolmest võttest saab kasutada käesoleva paragrahvi alguses antud ülesande lahendamisel? Kuidas?



Joon. 34



Joon. 35

Joonisel 34 ja 35 on kaks vahendit — *miiu* ja *rööpjoonlaud* —, mida kasutatakse paralleelsete sirgete ehitamiseks tegelikus töös.

§ 25. SIRGETE PARALLEELSUSE II JA III TUNNUS.

1. Joonisel 36 on kaks sirget u ja v lõigatud kolmanda sirgega t nii, et üks paar põiknurki, näiteks α ja β on võrdsed, s. o. $\alpha=\beta$.

Kuna ka $\gamma=\beta$ (miks?), siis järeldub, et $\alpha=\gamma$ (miks?).

Et nurgad α ja γ on kaasnurgad, siis paralleelsuse I tunnuse põhjal peavad sirged u ja v olema paralleelsed: $u \parallel v$.

Siit saame teoreemi, mis väljendabki paralleelsuse teist tunnust:

kui kahe sirge lõikumisel kolmanda sirgega tekib üks paar võrdseid põiknurki, siis need kaks sirget on paralleelsed.

Mis on selles teoreemis eelduseks, mis väiteks?

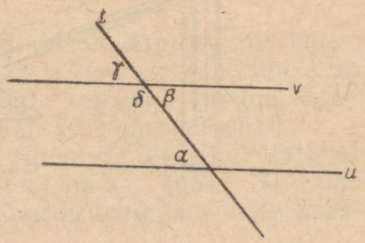
Milliseid varem tuntud tõdesid kasutasime selle teoreemi tõestamisel?

2. Joonisel 36 on antud $\alpha+\delta=180°$. Mis sellest järeldub α ja β kohta (vt. § 19, p. 3)? Mis järeldub paralleelsuse II tunnuse põhjal sirgete u ja v kohta? Siit teoreem (paralleelsuse III tunnus):

kui kahe sirge lõikumisel kolmanda sirgega tekkinud lähisnurkade summa on 180°, siis need kaks sirget on paralleelsed.

Mis on selles teoreemis eelduseks? väiteks?

Milliseid varem tuntud tõdesid kasutasime selle teoreemi tõestamisel?



Joon. 36

Küsimusi ja ülesandeid.

222. Kuidas mõõta paralleelidevahelist kaugust, kui kasutada

on: a) mall ja mõõtejoonlaud? b) joonestuskolmnurk ja mõõtejoonlaud? c) sirkel ja mõõtejoonlaud?

223. Kuidas selgitada, kas antud sirged on paralleelsed, kui kasutada on: a) joonlaud ja joonestuskolmnurk? b) mall ja joonlaud? c) sirkel ja joonlaud?

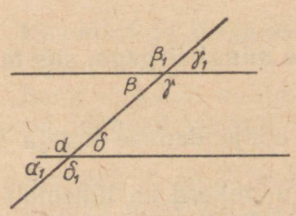
224. Võtta vabalt sirge ja punkt väljaspool seda sirget. Ehitada a) rööplükke abil, b) malli ja joonlaua abil, c) sirkli ja joonlaua abil sirge, mis läbib antud punkti ja on paralleelne antud sirgega.

225. Joonisel 37 on antud: $\alpha+\beta=180°$. Näidata, et: a) $\alpha+\gamma_1=180°$; b) $\beta+\delta_1=180°$; c) $\alpha_1+\beta_1=180°$; d) $\delta+\beta_1=180°$; e) $\gamma+\alpha_1=180°$.

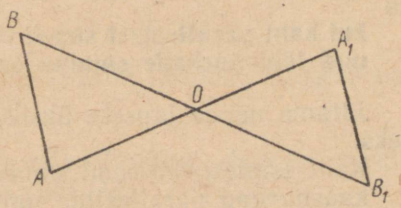
226. Joonisel 37 on antud: $\delta_1=\beta_1$. Näidata, et: a) $\gamma=\alpha$; b) $\beta=\delta$; c) $\alpha_1=\gamma_1$; d) $\gamma=\delta_1$; e) $\beta=\alpha_1$; f) $\beta_1=\alpha$.

227. Joonisel 38 on antud: $BO=B_1O$; $AO=A_1O$. Tõestada, et $AB \parallel A_1B_1$.

228. Joonisel 37 $\alpha=130°$, $\beta_1=125°$. Kas sirged u ja v on sel juhul paralleelsed? Miks? Kuidas tuleb muuta nurka β_1, et sirged u ja v muutuksid paralleelseteks?



Joon. 37



Joon. 38

§ 26. KAHE PARALLEELSE SIRGE LÕIKAMINE SIRGEGA.

1. Eelmärkus. Käesoleva peatüki paragrahvides 24 ja 25 käsitlesime paralleelsuse tunnuseid, kus kaas-, põik-, ja lähisnurkade teatavatest omadustest järeldus sirgete paralleelsus. Käesolevas paragrahvis toimime ümberpöördult. Eeldame, et sirged on paralleelsed ja näitame, et paralleelsusest järelduvad kaas-, põik- või lähisnurkade teatavad omadused.

Siin õppimisele tulevaid teoreeme ei tohi pidada eespool õpitud paralleelsuse tunnuste endastmõistetavateks järeldusteks. Sel

juhul võime teha samasuguse loogikavea, mille teeme siis, kui ütleme, et lausest «Kui noor õpib töölisnoorte koolis, siis ta töötab» järeldub lause «Kui noor töötab, siis ta õpib töölisnoorte koolis».

2. Teoreem.

Kui kaht paralleelset sirget lõigata mingi sirgega, siis tekivad võrdsed kaasnurgad.

Eeldus. $u \parallel v$, sirged u ja v on lõigatud sirgega t (joon. 39).
Väide. $\alpha = \beta$.
Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $\alpha \neq \beta$. Siis oleks võimalik läbi punkti B ehitada mingi sirge s nii, et punkti B juurde tekiks α-ga võrdne nurk γ. Et α ja γ on nüüd võrdsed kaasnurgad, siis paralleelsuse I tunnuse põhjal peaks $s \parallel u$. Eelduse põhjal on ka $v \parallel u$. Seega oleks läbi punkti B ehitatud sirgele u kaks paralleeli, mis on aga paralleelsuse aksioomi põhjal võimatu. Järelikult α ja β ei saa olla erinevad. Kuna kolmandat võimalust ei ole, siis $\alpha = \beta$. Seda oligi vaja näidata.

3. Kuna kaasnurkade võrdsusest järeldub põiknurkade võrdsus ja samuti see, et lähisnurkade summa on sel juhul 180°, siis on ilmselt õiged veel järgmised teoreemid:

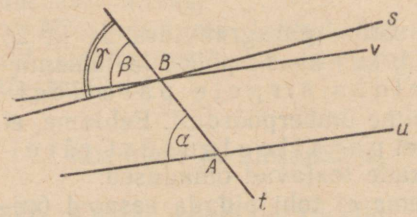
kui kaht paralleelset sirget lõigatakse mingi sirgega, siis tekivad võrdsed põiknurgad

ja

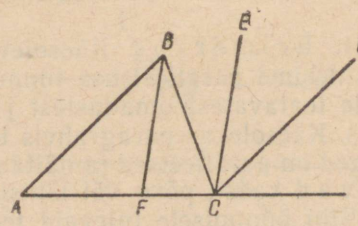
kui kaht paralleelset sirget lõigatakse mingi sirgega, siis tekkinud lähisnurkade summa on 180°.

Jätame nende lausete üksikasjaliku põhjendamise lugeja hooleks.

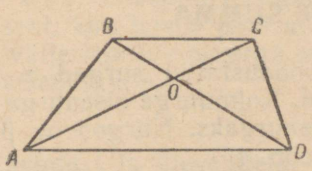
Kaht esimest teoreemi sõnastatakse mõnikord ka lühemalt:
kaasnurgad paralleelide juures on võrdsed;
põiknurgad paralleelide juures on võrdsed.



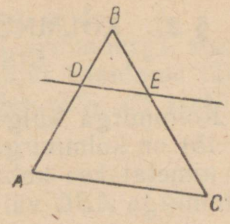
Joon. 39



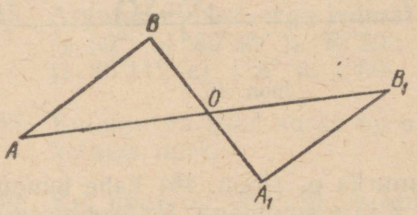
Joon. 40



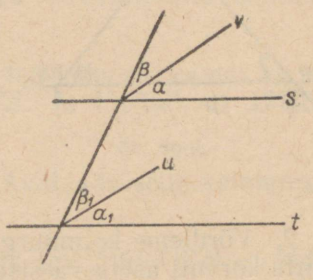
Joon. 41



Joon. 42



Joon. 43



Joon. 44

Küsimusi ja ülesandeid.

229. Joonisel 40 on antud $BF \parallel EC$, $AB \parallel CD$. Millised nurgad on sel joonisel võrdsed? Miks?

230. Joonisel 41 on $BC \parallel AD$. Leida sellel joonisel võrdseid nurki. Kuidas nimetatakse nelinurka $ABCD$?

231. Joonisel 42 on $DE \parallel AC$. Tõestada, et kolmnurga ABC nurgad on võrdsed kolmnurga DBE vastavate nurkadega.

232. Kui suur on rööpküliku sisenurkade summa?

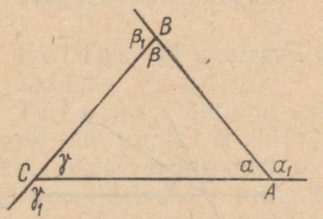
233. Joonisel 43 on $AB = A_1B_1$, $AB \parallel A_1B_1$. Tõestada, et $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$.

234. Joonisel 44 on $s \parallel t$, $\alpha = \beta$; $\alpha_1 = \beta_1$. Tõestada, et $u \parallel v$.

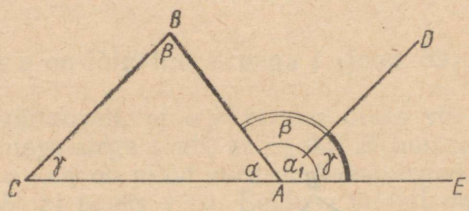
235. Nurkadest, mis tekivad kahe paralleelse sirge lõikumisel sirgega, on üks nurk a) 45°; b) 100°; c) 90°; d) 87°30′. Leida kõik ülejäänud nurgad.

§ 27. KOLMNURGA VÄLISNURK. KOLMNURGA SISENURKADE SUMMA.

1. Kolmnurga külgede poolt moodustatud nurgad α, β ja γ (joon. 45) on kolmnurga **sisenurgad.** Kolmnurga sisenurga kõrvunurka nimetatakse kolmnurga **välisnurgaks.** Nurgad α_1, β_1 ja γ_1 on kolmnurga ABC välisnurgad (joon. 45).



Joon. 45



Joon. 46

2. Võrdleme kolmnurga välisnurka α_1 (joon. 46) kahe temaga mitte kõrvuti asetseva sisenurga β ja γ summaga. Selleks ehitame punktist A sirge AD paralleelselt kolmnurga küljega CB: $AD \parallel CB$. Kolmnurga välisnurk α_1 jaotub sel teel kaheks nurgaks: $\angle BAD$ ja $\angle DAE$. Paralleelide juures olevate põiknurkade omaduse tõttu (§ 26, p. 3) võime kirjutada: $\angle BAD = \beta$. Paralleelide juures olevate kaasnurkade omaduse tõttu (samas): $\angle DAE = \gamma$. Seega $\alpha_1 = \beta + \gamma$, s. t.

kolmnurga välisnurk võrdub kahe temaga mitte kõrvuti asetseva sisenurga summaga.

3. Kõrvunurkade omaduse tõttu $\alpha + \alpha_1 = 180°$. Et aga $\alpha_1 = \beta + \gamma$, siis $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, s. t.

kolmnurga sisenurkade summa on 180°.

4. Ülesanne. Kolmnurga kaks sisenurka α ja β (joon. 45) on võrdsed vastavalt 47°-ga ja 68°40′-ga. Arvutada selle kolmnurga kolmas sisenurk γ ja kõik välisnurgad α_1, β_1, γ_1.

Lahendus. Kolmnurga sisenurkade summa omaduse tõttu $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (47° + 68°40′) = 180° - 115°40′ = 64°20′$.

Kolmnurga välisnurga omaduse tõttu

$$\alpha_1 = \beta + \gamma = 68°40′ + 64°20′ = 133°;$$
$$\beta_1 = \alpha + \gamma = 47° + 64°20′ = 111°20′;$$
$$\gamma_1 = \alpha + \beta = 47° + 68°40′ = 115°40′.$$

Vastus. Kolmas sisenurk on 64°20′; välisnurgad on 133°; 111°20′ ja 115°40′.

Kuidas kolmnurga välisnurki saaks teisiti leida?

Märkus. Edaspidi kasutame väljendit «kolmnurga sisenurk» ainult seal, kus teisiti pole arusaadav. Mujal kasutame lühiduse mõttes väljendit «kolmnurga nurk», mõeldes selle all alati kolmnurga sisenurka.

Küsimusi ja ülesandeid.

236. Kas ühes ja samas kolmnurgas saab olla korraga kaks nürinurka? kaks täisnurka? täisnurk ja nürinurk? Põhjendada.

237. Kui suur on täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa? Põhjendada.

238. Arvutada kolmnurga kolmas nurk, kui kaks nurka on: a) 90° ja 50°; b) 80°30′ ja 70°30′; c) 25°25′ ja 110°35′; d) 127°32′ ja 35°11′; e) 178° ja 1°50′.

239. Kolmnurga kaks nurka on α ja β. Avaldada selle kolmnurga kolmas nurk.

240. Kui suur on võrdkülgse kolmnurga iga nurk? Põhjendada.

241. Kui suured on võrdhaarse täisnurkse kolmnurga alusnurgad? Põhjendada.

242. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 38°36′. Leida kolmnurga alusnurgad.

243. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on δ. Avaldada selle kolmnurga tipunurk.

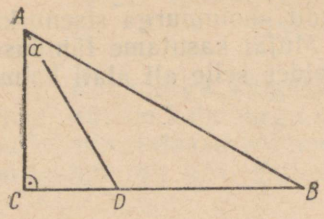
244. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 27°15′. Kui suur on teine teravnurk?

245. Täisnurkse kolmnurga teravnurk on α. Avaldada teine teravnurk.

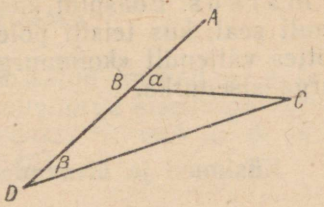
246. Täisnurkse kolmnurga ABC teravnurk $\alpha = 52°$ on poolitatud (joon. 47). Leida tekkinud nürinurkse kolmnurga ADB kõik nurgad.

247. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on teisest 10° võrra suurem. Leida need teravnurgad.

248. Joonisel 48 on antud: $BC = BD$. Tõestada, et $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Kuidas selle ülesande põhjal ehitada antud nurgast kaks korda väiksemat nurka?



Joon. 47



Joon. 48

249. Kui suured nurgad tekivad võrdkülgse kolmnurga kahe nurga poolitaja lõikumisel?

250. Kas on võimalik mingit kolmnurka tükeldada kaheks teravnurkseks kolmnurgaks? kaheks nürinurkseks kolmnurgaks? kaheks täisnurkseks kolmnurgaks?

251. Joonisel 49 on antud: $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 60°$, $\angle ACB = 50°$, $\angle EDC = 25°$. Arvutada sellel joonisel olevad ülejäänud 9 nurka, mis on sirgnurgast väiksemad.

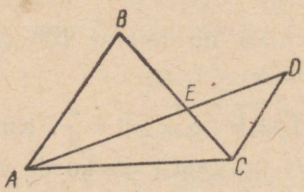
252. Leida viga lauses «Kolmnurga välisnurk võrdub kahe sisenurga summaga».

253. Kolmnurga kaks nurka on 50° ja 70°. Leida selle kolmnurga välisnurgad.

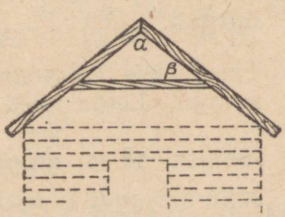
254. Kolmnurga kaks välisnurka on 87° ja 103°. Leida selle kolmnurga sisenurgad.

255. Maja sarikate vaheline nurk α on 100° (joon. 50). Arvutada sarika ja penni vaheline nurk β.

256. Sarika ja penni vaheline nurk on 45°. Arvutada sarikate vaheline nurk.



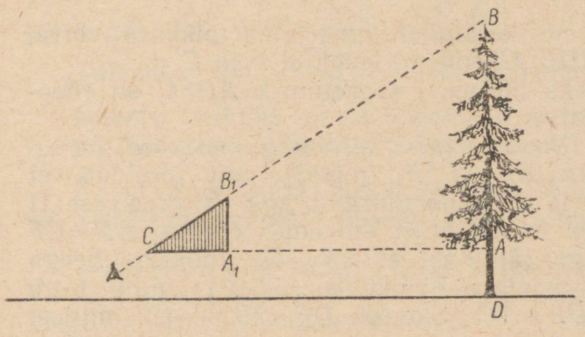
Joon. 49



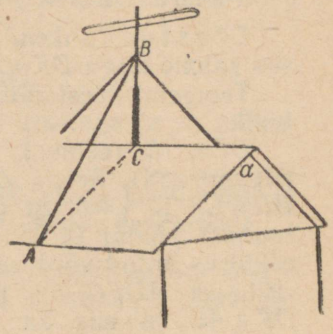
Joon. 50

257. Puu kõrguse AB mõõtmiseks (joon. 51) saab kasutada võrdhaarset täisnurkset kolmnurka A_1B_1C: hoides kolmnurka vertikaalselt, liigutakse puu sihis nii kaugele, et mööda hüpotenuusi CB_1 sihtides on näha puu ladva tipp B. Kui kõrge on puu, kui AC on 8,9 m ja $AD=1{,}7$ m?

258. Televiisori antenni üks kinnitustraat on kinnitatud katuse räästasse risti räästa servaga (joon. 52). Kui suure nurga moodustab kinnitustraat antenni mastiga BC, kui katuse sarikate vaheline nurk $\alpha=120°$ ja $\angle BAC=20°$? (40°)



Joon. 51



Joon. 52

259. Kolmnurga üks nurk on teisest 20° võrra suurem. Arvutada need nurgad, kui kolmas nurk on 60°. (70°, 50°)

260. Kolmnurga üks nurk on teisest 30° võrra väiksem. Arvutada need nurgad, kui kolmas nurk on 110°. (50°, 20°)

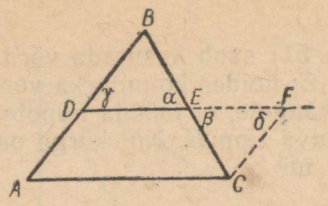
§ 28. KOLMNURGA KESKLÕIK. TRAPETSI KESKLÕIK.

1. Jaotame kolmnurga kaks külge, näiteks AB ja BC (joon. 53) pooleks punktides D ja E. Neid punkte ühendav sirglõik DE on **kolmnurga kesklõik.**

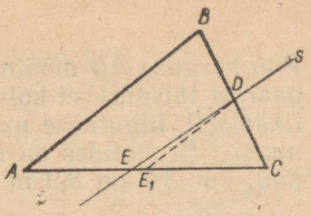
Kolmnurga kesklõiguks nimetatakse sirglõiku, mis ühendab kolmnurga kahe külje keskpunkte.

Kolmnurga kesklõigu omadust väljendab järgmine teoreem:

kolmnurga kesklõik on paralleelne kolmnurga ühe küljega ja on sellest küljest kaks korda lühem.



Joon. 53



Joon. 54

Eeldus. $AD=BD$, $CE=BE$ (joon. 53).

Väide. $DE \parallel AC$, $DE=\frac{AC}{2}$.

Tõestus. Pikendame kesklõiku tema oma pikkuse võrra, siis saame lõigu $DF=2DE$. Ühendame punktid F ja C.

Teoreemi tõestamiseks näitame, et nelinurk $ADFC$ on rööpkülik.

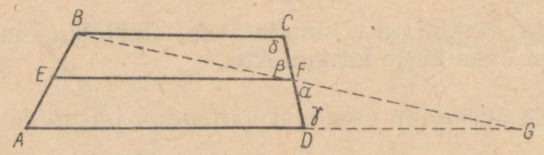
$BE=CE$ (eeldus), $DE=EF$ (sest nii on joonestatud), $\alpha=\beta$ (tippnurgad). Seega $\triangle BDE=\triangle CFE$ (miks?). Siit järeldub, et $BD=CF$ ja $\gamma=\delta$. Et γ ja δ on põiknurgad, siis paralleelsuse II tunnuse põhjal (§ 25, p. 1) $AD \parallel CF$. Võrreldes võrdust $BD=CF$ eelduses antud võrdusega, järeldub, et $CF=AD$ (miks?). Seega nelinurk $ADFC$ on tõepoolest rööpkülik (miks?), mille tõttu $DF \parallel AC$ ja siis ka $DE \parallel AC$. Samuti $DF=2DE=AC$, millest $DE=\frac{AC}{2}$.

Järeldus. **Sirge, mis on paralleelne kolmnurga ühe küljega ja poolitab teise külje, poolitab ka kolmanda** (joon. 54).

Eeldus. $BD=CD$, $s \parallel AB$.

Väide. $AE=CE$.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $AE \neq CE$ ja näitame, et see ei saa olla õige. Tõepoolest, sel juhul saaks leida AC keskpunkti E_1, mis ei langeks punkti E. Kolmnurga ABC kesklõiguks oleks siis DE_1, mis eelmise teoreemi põhjal oleks paralleelne küljega AB. Nüüd aga oleks punktist D ehitatud ühele ja samale sirglõigule AB kaks paralleeli s (eelduse põhjal) ja DE_1. See on võimatu. Järelikult peavad punktid E ja E_1 ühte langema ja seega $AE=CE$.



Joon. 55

2. Ühendame sirglõiguga trapetsi haarade keskpunktid E ja F (joon. 55). Seda sirglõiku nimetatakse **trapetsi kesklõiguks.**

Trapetsi kesklõigu omaduse selgitamiseks ühendame punktid B ja F sirglõiguga ja pikendame seda kuni lõikumiseni aluse AD pikendusega punktis G. Vaatleme kolmnurki $\triangle BCF$ ja $\triangle GDF$. Nendes kolmnurkades $\alpha=\beta$ (miks?), $\delta=\gamma$ (miks?), $DF=CF$ (miks?). Seega $\triangle BCF=\triangle GDF$ (miks?), mille tõttu $BC=DG$ ja $BF=GF$.

Nüüd vaatleme kolmnurka ABG. Kahest viimasest võrdusest esimese tõttu $AG=AD+BC$; teise võrduse tõttu aga punkt F on külje BG keskpunkt. Seepärast on trapetsi kesklõik EF ka kolmnurga ABG kesklõiguks. Kolmnurga kesklõigu omaduse tõttu: 1° $EF \parallel AG$, millest ka $EF \parallel AD$ ja trapetsi aluste paralleelsuse tõttu $EF \parallel BC$; 2° $EF=\frac{AG}{2}=\frac{AD+BC}{2}$.

Tulemuse sõnastame järgmise teoreemina:

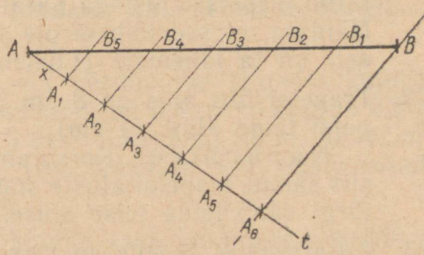
trapetsi kesklõik on paralleelne trapetsi alustega ja ta pikkus võrdub aluste pikkuste poolsummaga.

Järeldus. **Sirge, mis läbib trapetsi ühe haara keskpunkti ja on paralleelne trapetsi alusega, läbib ka teise haara keskpunkti.**

Tõestus on analoogiline eelmise teoreemi järelduse tõestusega.

3. Eelmise kahe teoreemi järeldusi saab kasutada antud sirglõigu jaotamisel võrdseteks osadeks.

Olgu vaja antud sirglõik AB (joon. 56) jaotada kuueks võrdseks osaks. Ehitame vabalt lõigu ühest otspunktist lähtuva kiire t. Valime vabalt mingi lõigu x ja kanname selle ehitatud kiirele, lähtudes alguspunktist, järjestikku 6 korda. Selle tulemusel tekivad kiirel t punktid A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Läbi punktide A_6 *ja* B ehitame sirge. Nüüd ehitame (näiteks rööplükke abil) sirgele A_6B paralleelsed sirged, mis läbivad kiirel t olevaid punkte A_5, A_4, ..., A_1. Need paralleelid, lõikudes lõiguga AB punktides B_1, B_2, ..., B_5, jaotavadki lõigu AB kuueks võrdseks osaks.



Joon. 56

Selle üksikasjalik põhjendamine jääb lugeja ülesandeks.

Küsimusi ja ülesandeid.

261. Anda trapetsi kesklõigu definitsioon.

262. Mitu kesklõiku on kolmnurgal? trapetsil?

263. Kas võib ütelda, et kolmnurga kesklõik on ühe külje keskpunkti kaugus teisest küljest? Miks?

264. Kolmnurga külg on 4,5 cm. Kui pikk on selle küljega paralleelne kesklõik?

265. Kolmnurga küljed on 5,2 cm; 8,6 cm ja 4,4 cm. Selle kolmnurga külgede keskpunktid on uue kolmnurga tippudeks. Leida uue kolmnurga ümbermõõt. (9,1 cm)

266. Võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt on 42 cm. Kui pikk on selle kolmnurga kesklõik?

267. Võrdkülgse kolmnurga külg on a. Avaldada selle kolmnurga kesklõikudest moodustatud kolmnurga ümbermõõt. ($1{,}5a$)

268. Kui suure osa kolmnurga ümbermõõdust moodustab selle kolmnurga kesklõikudest moodustatud kolmnurga ümbermõõt?

269. Kui suure osa kolmnurga pindalast moodustab selle kolmnurga kesklõikudest moodustatud kolmnurga pindala? $\left(\frac{1}{4}\right)$

270. Leida trapetsi kesklõik, kui trapetsi alused on a) 8 cm ja 6 cm; b) 5 cm ja 0,18 m; c) 3,7 cm ja 0,12 dm; d) $3\frac{4}{5}$ cm ja $1\frac{2}{3}$ dm; e) $2\frac{3}{4}$ dm ja 38 dm.

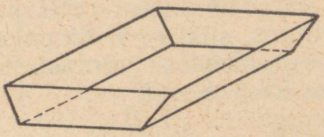
271. Trapetsi alused on 3,6 m ja 4,8 m. Trapetsi sisse on joonestatud trapetsi alustega paralleelne lõik, mille pikkus on 4 m. Näidata, et see lõik ei ole trapetsi kesklõik. Kummale alusele on ta lähemal? (Lühemale alusele.)

272. Trapetsi üks alus on 8 cm ja kesklõik 6 cm. Arvutada trapetsi teine alus. (4 cm)

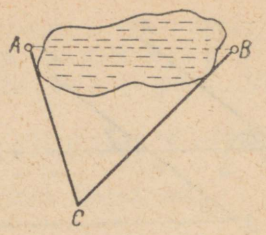
Näpunäide. Korrutame kesklõigu pikkuse kahega, siis saame trapetsi aluste summa. Aluste summa ja ühe aluse järgi saab leida teise aluse.

273. Alljärgnevas tabelis on trapetsi alused tähistatud tähtedega a ja b ning kesklõik tähega k. Täita tabel.

a	b	k	a	b	k
6,8 m	4,2 m		$1\frac{5}{6}$ m	$3\frac{2}{3}$ m	
1,3 m		15 dm	0,78 dm		$4\frac{1}{5}$ cm
	3,2 m	26 dm	0,85 cm		0,092 dm



Joon. 57



Joon. 58

274. Tõestada, et kolmnurga kesklõik poolitab kolmnurga kõrguse, mis on ehitatud kesklõiguga paralleelsele küljele.

275. Kuidas trapetsi kesklõik jaotab trapetsi diagonaalid? kõrguse?

276. Jaotada vabalt võetud sirglõik 5-ks, 6-ks, 8-ks võrdseks osaks.

277. Trapetsi ümbermõõt on 38 cm ja haarade pikkuste summa on 18 cm. Kui pikk on trapetsi kesklõik? (10 cm)

278. Võrdhaarse trapetsi ümbermõõt on $14\frac{5}{6}$ m ja haara pikkus on $2\frac{1}{3}$ m. Kui pikk on trapetsi kesklõik? $\left(5\frac{1}{12}\text{ m}\right)$

279. Kuidas arvutada trapetsi pindala, kui on teada kõrgus ja kesklõik?

280. Kartulivedamise kasti ots on võrdhaarse trapetsi kujuline (joon. 57). Selle trapetsi kesklõik on 0,6 m ja kõrgus 0,3 m. Arvutada kasti ruumala, kui kasti pikkus on 1,9 m. (0,342 m^3)

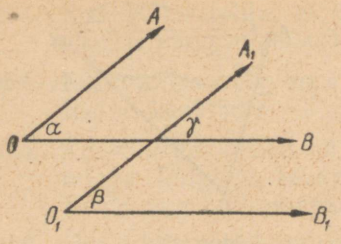
Näpunäide. Kastile võib vaadata kui püstprismale, mille põhjaks on kasti ots.

281. Selgitada joonise 58 abil, kuidas saab kolmnurga kesklõigu omaduse abil määrata kahe punkti vahelist kaugust, kui ühest punktist teise ei pääse, kuid mõlemad punktid eraldi võetuna on ligipääsetavad.

§ 29. VASTAVALT PARALLEELSETE JA RISTUVATE HAARADEGA NURGAD.

1. Joonisel 59 on kujutatud kaks nurka α ja β, mille haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised:

$$OA \parallel O_1A_1, \quad OB \parallel O_1B_1.$$



Joon. 59

Tähistame lõikuvate haarade OB ja O_1A_1 vahel oleva nurga tähega γ. Kuna α ja γ on kaasnurgad paralleelide juures, siis $\alpha=\gamma$. Samal põhjusel $\beta=\gamma$. Nendest võrdustest järeldub, et $\alpha=\beta$. Seega

vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad on võrdsed.

Viimast teoreemi võib sõnastada ka teisiti:

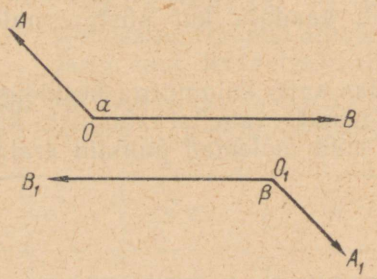
nurga suurus ei muutu, kui nurk liigub nii, et ta haarad jäävad algasendis olevate haaradega vastavalt paralleelseteks ja samasuunalisteks ehk

nurga suurus ei muutu paralleellükkel.

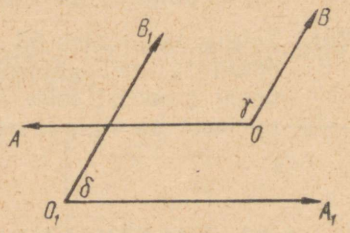
2. Joonised 60 ja 61 kujutavad veel kaht võimalikku asendit, mis võivad esineda kahe vastavalt paralleelsete haaradega nurkade korral: joonisel 60 on kujutatud vastavalt paralleelsete ja vastassuunaliste haaradega nurgad α ja β; joonisel 61 on aga kujutatud nurgad γ ja δ, mille üks haarade paar (O_1B_1 ja OB) on paralleelsed ja vastassuunalised, teine haarade paar (OA ja O_1A_1) on paralleelsed ja vastassuunalised.

Lugeja ülesandeks on tõestada, et joonisel 60 $\alpha=\beta$; joonisel 61 $\gamma+\delta=180°$ ja sõnastada vastavad teoreemid.

N ä p u n ä i d e. Joonisel 60 pikendada ühe nurga haarasid üle nurga tipu. Joonisel 61 tähistada γ lähisnurk näiteks tähega γ_1 ja



Joon. 60



Joon. 61

võrrelda seda nurgaga δ; kasutada paralleelide juures olevate lähisnurkade omadust (§ 26, p. 3).

3. Joonisel 62 on kujutatud teravnurk α ja mingi punkt O_1. Valime punkti O_1 ühe uue teravnurga β tipuks. Nurga β ehitame

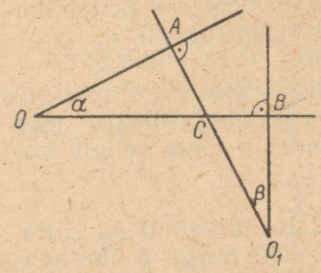
aga nõnda, et tema üks haar oleks risti nurga α ühe haaraga ja teine haar oleks risti nurga α teise haaraga. Nurgad α ja β on siis vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Võrdleme nurki α ja β.

Et täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa on 90° (miks?), siis $\angle ACO = 90° - \alpha$ ja samal põhjusel $\angle BCO_1 = 90° - \beta$. Nurgad ACO ja BCO_1 kui tippnurgad on võrdsed. Seepärast

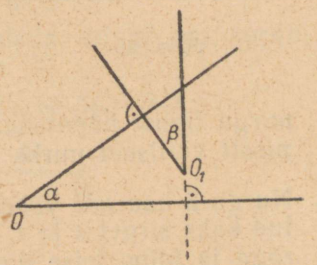
$$90° - \alpha = 90° - \beta,$$

millest $\alpha = \beta$, s. t.

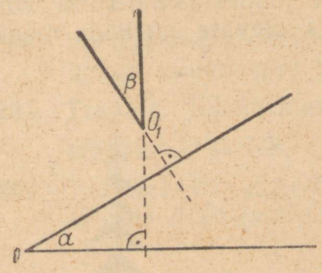
vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad on võrdsed.



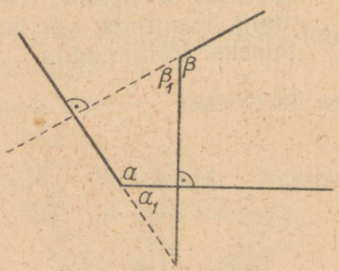
Joon. 62



Joon. 63



Joon. 64



Joon. 65

Märkus. Punkt O_1 võib asetseda väga erinevates kohtades (joon. 63 ja 64). Neil juhtudel võib tõestuseks kanda nurga β paralleellükke abil sellisesse asendisse nagu joonisel 62.

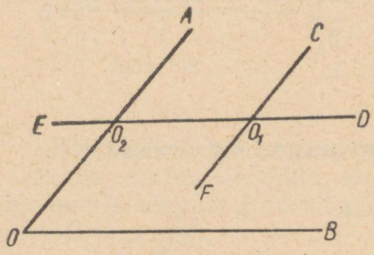
Joonise 65 abil saab näidata, et ka siis, kui nurgad α ja β on mõlemad vastavalt ristuvate haaradega nürinurgad, on $\alpha = \beta$.

Näpunäide. Võrrelda α ja β kõrvunurki α_1 ja β_1, mis mõlemad on teravnurgad.

Küsimusi ja ülesandeid.

282. Leida vastavalt paralleelsete haaradega nurki joonisel 66, kui $AO \parallel FC$, $ED \parallel OB$.

283. $\angle AOB = 43°$ (joon. 66). Leida kõik joonisel olevad nurgad.



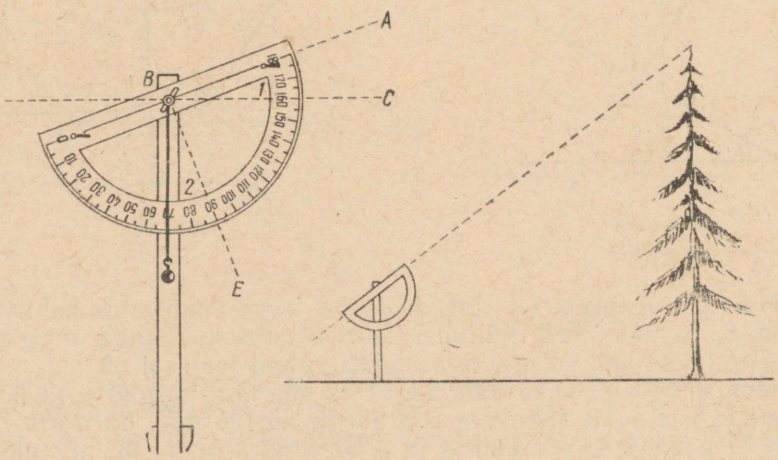
Joon. 66

284. Nurga α haarade vahel on punkt A. Läbi punkti A on ehitatud kaks sirget s ja t, millest üks on paralleelne nurga α ühe haaraga ja teine teise haaraga. Arvutada nurgad, mis tekivad sirgete s ja t lõikumisel, kui $\alpha = 27°32'$.

285. Täisnurkses kolmnurgas on ehitatud kõrgus täisnurga tipust hüpotenuusile. Teha joonis ja leida sellelt jooniselt võrdseid nurki. Põhjendada.

286. Nurga β haarade vahel on punkt B. Läbi punkti B on ehitatud kaks sirget s ja t, millest üks on risti nurga β ühe haaraga ja teine teise haaraga. Arvutada nurgad, mis tekivad sirgete s ja t lõikumisel, kui $\beta = 56°32'$.

287. Joonisel 67 näeme, kuidas tavalist joonestusmalli on võimalik kasutada vertikaaltasapinnas olevate nurkade mõõtmiseks. Põhjendada.



Joon. 67

Üldiseks kordamiseks.

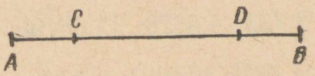
288. Defineerida järgmised mõisted:
a) kõrvunurgad; b) tippnurgad; c) kolmnurga välisnurk; d) paralleelsed sirged; e) kolmnurga kesklõik; f) trapetsi kesklõik.

289. Milliseid lauseid nimetatakse teoreemideks? aksioomideks?

290. Miks ei või teoreemi õigsuse üle otsustada silma järgi või mõõtmisvahenditega mõõtmise teel?

291. Määrata eeldus ja väide järgmistes teoreemides:
a) kui ühe täisnurkse kolmnurga kaatetid on vastavalt võrdsed teise täisnurkse kolmnurga kaatetitega, siis need kolmnurgad on võrdsed;
b) kui korrutise üks tegur jagub antud arvuga, siis ka korrutis jagub selle arvuga;
c) kui murru nimetajat suurendada mingi arv korda, siis murd väheneb sama arv korda.

292. Joonisel 68 on $AD=BC$. Tõestada, et $AC=BD$.



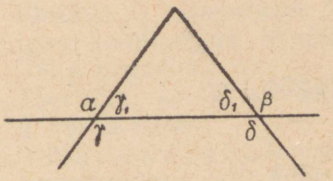
Joon. 68

293. Joonisel 69 $\alpha=\beta$. Millised nurgad on joonisel veel võrdsed? Miks?

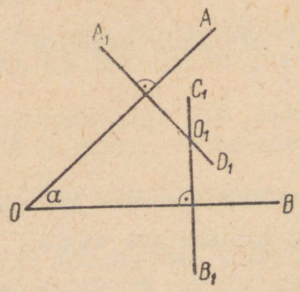
294. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on α. Avaldada selle kolmnurga alusnurgad ja kõik välisnurgad.

295. Trapetsi lühem alus on a ja pikem alus $\frac{3a}{2}$. Avaldada selle trapetsi kesklõik.

296. Joonisel 70 $\angle AOB=\alpha$, $B_1C_1 \perp OB$, $A_1D_1 \perp OA$. Avaldada sirgete A_1D_1 ja B_1C_1 lõikumisel tekkinud nurgad.



Joon. 69



Joon. 70

297. Ruudu diagonaalide lõikepunkt asetseb ruudu külgedest 6 cm kaugusel. Arvutada selle ruudu pindala ja ümbermõõt.

298. Kolmnurga kaks külge on 18 cm ja 22 cm. Lühemale küljele ehitatud kõrgus on 15 cm. Arvutada pikemale küljele ehitatud kõrgus. $\left(12\frac{3}{11}\text{ cm}\right)$

299. Millistest järkudest koosnevad järgmised arvud: 12; 35; 127; 678; 1306; 10 678; 1,2; 3,47; 12,45; 13,758; 357,9625; 0,0056; 0,4007; 100,4005?

300. Milline arv on üheliste järgu ühikuks? kümneliste järgu ühikuks? sajaliste järgu ühikuks? kümnendike järgu ühikuks? sajandike järgu ühikuks? tuhandike järgu ühikuks?

301. Ümardada
a) kümnelisteni: 37, 63, 89, 121, 325, 789, 1301, 203;
b) sajalisteni: 135, 423, 567, 899, 905, 1302, 10 005;
c) kümnendikeni: 1,56; 3,72; 10,63; 17,895; 16,92; 0,978; 5,02; 7,98;
d) sajandikeni: 3,783; 4,5678; 12,56795; 13,455; 9,803; 7,897.

302. Leida arv, millest 60% võrdub avaldise

$$14{,}7-6{,}3:2\frac{1}{3}$$

väärtusega.

303. Töölisnoorte kooli 7. klassi 18-st õpilasest on 7 õpilast kommunistliku töö eesrindlased. Mitu protsenti klassi õpilastest on kommunistliku töö eesrindlased?

304. Tehase 70-st 8-klassilist haridust mitteomavast noortöölisest on juba 30% asunud õppima töölisnoorte koolides. Mitu noort on asunud õppima?

305. Arvutada avaldise

$$\frac{a^2+a:\frac{3}{4}}{(a-b)^2}$$

väärtus, kui $a=0{,}75$ ja $b=0{,}25$. (6,25)

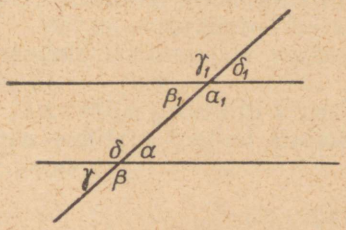
306. Lihtsustada avaldis

$$\frac{a^3}{a^2+4a+4}:\left(a-\frac{2a}{a+2}\right)$$

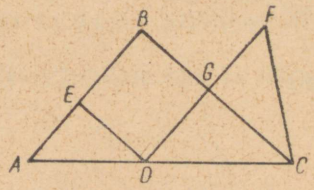
ja arvutada selle avaldise väärtus, kui $a=2$; 3; $-2\frac{1}{3}$; $-0{,}5$; 0,75. Millist väärtust ei tohi a selles avaldises omada? Miks?

Kodune kontrolltöö nr. 5.

1. Kahe kaasnurga summa on 156°, kusjuures üks nendest nurkadest on 52°. Arvutada kõik nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikumisel kolmandaga.
2. Leida eeldus ja väide järgmistes teoreemides:
   a) kui murru lugejat suurendada mingi arv korda, siis murd suureneb sama arv korda;
   b) vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad on võrdsed.
3. Joonisel 71 $\alpha=\beta_1$. Tõestada, et
   a) $\alpha+\alpha_1=180°$; b) $\alpha=\delta_1$; c) $\beta+\delta_1=180°$.



Joon. 71



Joon. 72

4. Joonisel 72 $ED \parallel BC$, $DF \parallel AB$, $\angle BAC=50°$, $\angle ABC=80°$, $\angle BCF=30°$. Arvutada $\angle BED$, $\angle ADE$, $\angle CDF$, $\angle DFC$ ja $\angle EDC$.
5. Kolmnurga küljed on $7\frac{2}{5}$ cm, $8\frac{6}{7}$ cm ja 11,2 cm. Arvutada selle kolmnurga kesklõikudest moodustatud kolmnurga ümbermõõt.
6. Trapetsi üks alus on 12,5 cm ja teine alus on sellest 80%. Arvutada trapetsi kesklõik ja pindala, kui trapetsi kõrgus on 7,1 cm.
7. Ehitada 3 täisnurkset kolmnurka teravnurgaga 30°. Mõõta igas kolmnurgas hüpotenuus ja 30°-se nurga vastaskaatet. Teha järeldus.
8. Tõestada, et 30°-se nurga vastaskaatet on hüpotenuusist 2 korda lühem.
   Näpunäide. Joonestada vabalt täisnurkne kolmnurk teravnurgaga 30°. Täiendada saadud kolmnurk võrdkülgseks kolmnurgaks.

9. Rööpküliku külgede keskpunktid on järjestikku ühendatud sirglõikudega. Tõestada, et: a) tekkinud nelinurk on rööpkülik; b) selle nelinurga ümbermõõt on võrdne antud rööpküliku diagonaalide summaga.

10. Kolmnurga üks nurk on 80°; teine nurk on sellest $\frac{4}{5}$. Arvutada selle kolmnurga kõik välisnurgad.

V PEATÜKK.

ARVUTAMINE LIGIKAUDSETE ARVUDEGA. ARVUTUSLÜKATI.

§ 30. TÄPSED JA LIGIKAUDSED ARVUD.

1. Arvutustöös tuleb kasutada nii täpseid kui ka ligikaudseid arve.

Mitu õpilast on teie klassis? Mitu teie klassi õpilast õpib ainult hindele hea ja väga hea? Mitu teie klassi õpilast on omandanud oma töökohal kommunistliku töö lööklase nimetuse?

Pärast vastavate õpilaste loendamist võib lugeja anda nendele küsimustele vastuse täpsete arvudega (näiteks 21, 4, 3).

2. Mitu protsenti klassi õpilastest õpivad hindele hea ja väga hea (näiteks toodud andmete põhjal)?

Saame

$$\frac{4}{21} = 0{,}190476\ldots = 19{,}0476\ldots\ \%$$

Näeme, et tekib lõpmatu kümnendmurd. Nõutavat vastust ei saa anda ühegi lõpliku kümnendmurru abil täpse arvuna, vaid ainult ligikaudse arvuna (näiteks 19%; 19,05%). Näitest selgub, et ligikaudne arv võib tekkida arvutamise tulemusel (olgugi et andmed on täpsed).

Kui kaugel on koolimaja kodust? Mitu elanikku on selles linnas? Kui palju suureneb kolhoosi toodang aastatel 1960—1970?

Ka sellistele küsimustele vastatakse tavaliselt ligikaudsete arvudega, kusjuures vastuse ligikaudsust sageli rõhutatakse vastavate sõnadega. Näiteks: umbes 800 m; ligikaudu 2 korda.

§ 31. ARVUDE ÜMARDAMINE. LIGIKAUDSE ARVU TÜVENUMBRID.

1. Lugeja on eelmistest klassidest juba tuttav arvude ümardamisega, mille puhul antud arvus säilitatakse kas üks või enam numbrit alates vasakult; ülejäänud kõrvaldatakse, kusjuures täisarvu ümardamisel kõrvaldatud numbrid asendatakse nullidega.

Kui esimene kõrvaldatav number on 5 või enam, siis viimast säilinud numbrit suurendatakse ühe võrra. Kui esimene kõrvaldatav number on väiksem kui 5, siis viimane säilinud number jääb muutmata.

2. Arvu asendamisel ümardatud arvuga teeme teatava vea — **ümardamisvea.** Seda viga on võimalik arvutada, kui on teada täpne arv ja ümardatud arv.

Näiteid.

1) $3252{,}5 \approx 3000$ (ümardatud tuhandelisteni; ümardamisviga $3252{,}5 - 3000 = 252{,}5$).
2) $27{,}573 \approx 27{,}6$ (ümardatud kümnendikeni; ümardamisviga $27{,}6 - 27{,}573 = 0{,}027$).

Kõik ümardatud arvud on ligikaudsed.

3. Kui on antud ainult ümardatud arv (igapäevases elus antakse mitmesugused arvulised andmed enamasti ümardatud kujul), siis ei saa ütelda, kui suur on ümardamisviga. Alati on aga võimalik ütelda, millist arvu antud arvu ümardamisviga ei ületa, s. t. on võimalik näidata antud arvu **ümardamisvea ülemmäära.** Ümardamisvea ülemmäära suurus oleneb sellest, millise järguni on arv ümardatud (ümardatud arvu viimasest järgust). See selgub järgmisest tabelist.

Jrk. nr.	Täpne arv	Ümardatud arv	Ümardamisviga	Ümardatud arvu viimane järk	Viimase järgu ühik	Viimase järgu pool ühikut
1	2	3	4	5	6	7
1.	137	140*	3	kümnelised	10	$0{,}5 \cdot 10 = 5$
2.	251	300	49	sajalised	100	$0{,}5 \cdot 100 = 50$
3.	10 472	10 000	472	tuhandelised	1000	$0{,}5 \cdot 1000 = 500$
4.	50,4	50	0,4	ühelised	1	$0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$
5.	3 004	3 000	4	kümnelised	10	$0{,}5 \cdot 10 = 5$
6.	37,5	38	0,5	ühelised	1	$0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$
7.	52,48	52,5	0,02	kümnendikud	0,1	$0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$
8.	42,04	42,0	0,04	kümnendikud	0,1	$0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$
9.	0,6998	0,700	0,0002	tuhandikud	0,001	$0{,}5 \cdot 0{,}001 = 0{,}0005$
10.	1,797	1,80	0,003	sajandikud	0,01	$0{,}5 \cdot 0{,}01 = 0{,}005$
11.	1,797	1,8	0,003	kümnendikud	0,1	$0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$
12.	0,015	0,02	0,005	sajandikud	0,01	$0{,}5 \cdot 0{,}01 = 0{,}005$

* Sümbol 0 näitab, et null on kirjutatud kõrvaldatud järkude asemele.

Võrdleme iga näite puhul ümardamisviga (4. veerg) ümardatud arvu viimase järgu poole ühikuga (7. veerg). Selgub, et ümardamisviga ei ole kunagi suurem kui viimase järgu pool ühikut.

Sellepärast öeldaksegi, et

ümardamisvea ülemmääraks on ümardatud arvu viimase järgu pool ühikut.

Näide 1. Olgu antud kümnelisteni ümardatud arv 150. Selle arvu viimaseks järguks on kümnelised, viimase järgu ühik on 10. Ümardamisvea ülemmääraks on pool sellest ühikust, seega 5. See tähendab, et antud arv on saadud ühe sellise arvu (tähistame seda tähega x) ümardamisel, mis jääb kahe tõkke $150-5=145$ ja $150+5=155$ vahele. Nüüd saame x avaldada ümardamisvea ülemmäära kaudu:

$$x=150(\pm 5)$$ (loe: 150 pluss-miinus 5),

mida võib kirjutada ka tõkete abil

$$145<x<155,$$

s. t. täpne arv x on suurem kui 145 (mõnel juhul võib olla ka sellega võrdne), aga väiksem kui 155.

Näide 2. Leida ümardatud arvu 13,6 ümardamisvea ülemmäär ja avaldada selle kaudu täpne arv x.

Viimaseks järguks on kümnendikud, viimase järgu ühik on 0,1. Ümardamisvea ülemmääraks on 0,05. Seega $x=13{,}6(\pm 0{,}05)$.

Näide 3. Lahendada eelmine näide, kui ümardatud arv on 13,60.

Viimaseks järguks on sajandikud; viimase järgu ühik on 0,01; pool sellest on 0,005.

Saame:

$$x=13{,}60(\pm 0{,}005).$$

Tabeli näidetest 10 ja 11 ning kahest viimasest toodud näitest selgub, et ümardatud kümnendmurru lõpus olevat nulli ei tohi kustutada; samuti ei tohi sinna ka nulli juurde kirjutada (nagu seda võib teha täpsete kümnendmurdude korral; näiteks $0{,}2=0{,}20=0{,}200=0{,}2000$ jne.).

Ümardatud kümnendmurru lõpust nulli kustutamine (juurdekirjutamine) suurendab (vähendab) ümardamisvea ülemmäära 10 korda.

4. Tabeli näidetest 1—5 selgub, et nullil võib ümardatud täisarvu lõpus olla kahesugune tähendus. Ühel juhul näitab null teatavate järkude puudumist antud arvus (näidetes 3, 4 ja 5 näitavad allakriipsutamata nullid vastavalt tuhandeliste, üheliste ning kümneliste ja sajaliste puudumist). Teisel juhul asendab null ümardamisel kõrvaldatud numbreid (näidetes 1, 2, 3 ja 5 asendavad allakriipsutatud nullid vastavalt kõrvaldatud numbreid või nende rühmi: 7, 51, 472, 4). Esimesel juhul öeldakse, et null on antud arvu tüvenumber; teisel juhul mittetüvenumber.

Ligikaudse täisarvu tüvenumbriteks nimetatakse kõiki numbreid selle arvu kirjutuses, välja arvatud arvu lõpus olevad nullid (lõpunullid), mis asendavad kõrvaldatud numbreid.

Näiteid.

1) 1207 — neli tüvenumbrit: 1—2—0—7;
2) 32 — kaks tüvenumbrit: 3—2;
3) 101 — kolm tüvenumbrit: 1—0—1;
4) 120 — kaks tüvenumbrit: 1—2;
5) 3200 — kolm tüvenumbrit: 3—2—0;
6) 5000 — üks tüvenumber: 5;
7) 5000 — kaks tüvenumbrit: 5—0;
8) 5000 — kolm tüvenumbrit: 5—0—0.

Lugeja ülesandeks jääb leida antud arvude ümardamisvea ülemmäärad. (0,5; 0,5; 0,5; 5; 5; 500; 50; 5)

5. Et vältida nulli kui mittetüvenumbri erilist tähistusviisi, teeme ligikaudsete täisarvude edaspidise kirjutusviisi kohta järgmise kokkuleppe:

kui ei ole teada, millise arvu ümardamisel on antud ligikaudne nullidega lõppev täisarv saadud, siis loeme kõik lõpunullid mittetüvenumbriteks.

Näiteid.

1) 1200 — kaks tüvenumbrit: 1—2;
2) 3000 — üks tüvenumber: 3;
3) 1270 — kolm tüvenumbrit: 1—2—7.

Kui suured on nende arvude ümardamisvea ülemmäärad? (50; 500; 5)

6. **Ligikaudse kümnendmurru tüvenumbriteks nimetatakse kõiki numbreid selle arvu kirjutuses, välja arvatud arvu alguses olevad nullid (avanullid). Null kümnendmurru lõpus on alati tüvenumber.**

Näiteid.

1) 2,307 — neli tüvenumbrit: 2—3—0—7;
2) 15,60 — neli tüvenumbrit: 1—5—6—0;
3) 0,0027 — kaks tüvenumbrit: 2—7;
4) 0,0300 — kolm tüvenumbrit: 3—0—0.

Kui suured on nende arvude ümardamisvea ülemmäärad? (0,0005; 0,005; 0,00005; 0,00005)

7. Jämedat arvutusviga saab sageli leida peast arvutustulemuse (vastuse) ligikaudse hinnangu teel. Selleks on vaja osata arve ümardada jämedalt ühe tüvenumbriga arvudeks, s. t. ümardada arvud kõige kõrgema järguni.

Näiteid.

1) $1327 \approx 1000$; $3{,}47 \approx 3$; $15{,}69 \approx 20$; $52{,}375 \approx 50$; $2{,}279 \approx 0{,}3$; $0{,}0151 \approx 0{,}02$; $1{,}06 \approx 1$; $0{,}57 \approx 0{,}6$.

2) Kas võib olla õige järgmine arvutus?

$$\frac{15,7 \cdot 1,39}{2,79} = 15,38.$$

Ümardame andmed ühe tüvenumbriga arvudeks:

$$\frac{15,7 \cdot 1,39}{2,79} \approx \frac{20 \cdot 1}{3} \approx 7.$$

Ligikaudne hinnang ütleb, et antud vastus ei saa olla õige. Ta peab olema 7 lähedane arv («midagi 7 ringis»).
Milline on õige vastus?

3) On teada, et sulgudes antud vastustes on kõik tüvenumbrid õiged, kuid koma on kustutatud. Määrata koma asukoht.
   a) $12,5 \cdot 3,02 = (3775)$;
   b) $\frac{4,4616}{0,78} + 3,1 = (882)$.

Tehes arvutused ümardatud kujul, saame
   a) $12,5 \cdot 3,02 \approx 10 \cdot 3 = 30$;
   b) $\frac{4,4616}{0,78} + 3,1 \approx \frac{4}{0,8} + 3 = \frac{40}{8} + 3 = 8$.

Ligikaudne hinnang ütleb, et esimene vastus on «midagi 30 ringis», teine «midagi 8 ringis». Järelikult on õiged vastused 37,75 ja 8,82.

Küsimusi ja ülesandeid.

307. Ümardada järgmised arvud. Milline on ümardamisviga? Mitu tüvenumbrit on ümardatud arvus? Millised?
   a) kümnelisteni: 52, 37, 102, 304, 1 203, 1 004;
   b) sajalisteni: 1 603, 2 049, 13 042, 2 987, 59 987;
   c) kümnendikeni: 13,06; 13,04; 12,007; 502,96; 4,978;
   d) ühelisteni: 12,73; 120,4; 1 300,289; 189,95;
   e) sajandikeni: 3,567; 0,203; 0,02056; 5,398; 12,4551.

308. Mitu tüvenumbrit on järgmistes ümardatud arvudes? Leida nende arvude ümardamisvea ülemmäärad.
   a) 32, 27, 324, 108, 1 032, 3, 10 001, 5 072;
   b) 320, 5 200, 60 200, 1 000, 10, 100, 300 2 890;
   c) 0,5; 0,503; 0,0037; 0,00370; 0,0320; 0,1000; 0,0001;
   d) 5,43; 16,72; 103,4; 102,0; 3,00; 15,050.

309. Leida järgmiste arvude ümardamisvea ülemmäärad ja avaldada täpsed arvud nende kaudu (vt. näiteid 1, 2 ja 3; § 31, p. 3).
   a) 12, 25, 37, 102, 156, 412, 1 273, 10 372, 5, 6, 7;
   b) 120, 320, 5 200, 480, 500, 3 000, 12 800;

c) 3,7; 3,72; 15,60; 4,00; 10,0; 167,050; 1 300,50;
d) 0,2; 0,25; 0,047; 0,0020; 0,420; 0,003; 0,00540.

310. Järgmiste ümardatud arvude põhjal teha kindlaks, milliste tõkete vahel asetsevad täpsed arvud.
a) 31, 57, 28, 102, 307, 1 256, 5 002, 10 378;
b) 10, 50, 100, 320, 1 200, 5 670, 42 000, 120 000;
c) 3,2; 10,00; 152,06; 16,0; 17,80; 16,000; 4,89; 19,756;
d) 0,27; 0,056; 0,520; 0,1; 0,10; 0,100; 0,00470.

311. Ümardada ühe tüvenumbrini.
a) 27, 32, 123, 567, 12 030, 1 787, 12, 16;
b) 37,5; 12,8; 56,76; 19,37; 2,73; 5,678;
c) 0,37; 0,0562; 0,0279; 0,21; 0,369.

312. Sulgudes on antud ülesannete vastuste õiged tüvenumbrid. Määrata koma asukoht.
a) $16{,}73+5{,}927=(22657)$
b) $29{,}472-0{,}21=(29262)$
c) $3{,}7\cdot 5{,}6+11{,}2=(3192)$
d) $\frac{16{,}9}{3{,}2}+4{,}7\cdot 2{,}5=(1703)$
e) $\frac{16{,}3\cdot 4{,}2}{7{,}5}-\frac{13{,}4}{2{,}7}=(416)$
f) $\frac{16{,}7\cdot 2{,}8}{0{,}3\cdot 19{,}8}=(788)$
g) $\frac{0{,}59\cdot 12{,}7}{15{,}3\cdot 0{,}98}=(500)$

§ 32. LIGIKAUDSETE ARVUDE TEKKIMINE SUURUSTE MÕÕTMISEL.

1. Olgu vaja mõõta toa põranda pikkust (tähistame seda tähega x) mõõdulindi abil, millel kõige lühem kriipsuvahe on 1 cm.

Algul tehakse kindlaks, kui palju täismeetreid mahub mõõdetavale pikkusele. Oletame, et 4 m on vähe, aga 5 m on palju; sümbolites:

$$4\text{ m}<x<5\text{ m}.$$

Siit võime kirjutada, et $x\approx 4$ m või $x\approx 5$ m. Kummalgi juhul ei ületa viga üht meetrit, s. t. mõõdetud on täpsusega 1 m. Loeme mitu täisdetsimeetrit mahub üle 4 m olevale jäägile. Oletame, et 7 dm on vähe, aga 8 dm on palju; lühidalt:

$$4{,}7\text{ m}<x<4{,}8\text{ m},$$

s. t. põranda pikkus on mõõdetud täpsusega 1 dm. Nüüd loeme, mitu täissentimeetrit mahub üle 4,7 olevale jäägile. Kui näiteks 3 cm on vähe, aga 4 cm on palju, siis võime kirjutada:

$$4{,}83\ \text{m} < x < 4{,}84\ \text{m},$$

s. t. põranda pikkus on mõõdetud täpsusega 1 cm. Kuna tegelikus elus ei ole sellisel mõõtmisel suuremat täpsust vaja, siis edaspidine ühikute peenestamine lõpetatakse; *silma järgi* otsustatakse, kas viimane jääk on poolest sentimeetrist väiksem või suurem (võrdne). Esimesel juhul jääb jääk arvestamata ja seega $x \approx 4{,}83$ m; teisel juhul loeme jäägi täissentimeetriks ja $x \approx 4{,}84$ m. Kummalgi juhul ei ületa mõõtmisviga 0,5 cm.

2. Nii näeme, et mõõtühiku järjestikuse peenestamise teel toimub *järkjärguline lähenemine* mõõdetava pikkuse täpsele väärtusele. Peenestamine lõpetatakse, kui on saavutatud *vajalik täpsus*.

Teatav hinnang tuleb anda enamasti *silma järgi*. Ka sel juhul, kui mõõdetava pikkuse üks otspunkt langeb mõõdulindi mõne kriipsuga kohakuti (näiteks 4,5), ei saa ütelda, et mõõdetav pikkus on *täpselt* 4,5 m, sest ikka on võimalikud silmale nähtamatud mõõdulindi nihked, mõõdulindi lookavajumine jne.

Kirjeldatud mõttekäik esineb ka teiste suuruste mõõtmisel. Kuidas toimub näiteks kaalumine?

Kõik mõõtmise teel saadud arvud on ligikaudsed.

3. Mõõtmisel saadud arve kirjutatakse nii, et mõõtmisviga ei ületaks arvu viimase järgu poolt ühikut (nii nagu ümardamiselgi).

Näiteid.

1) Kui inimese kaal $P \approx 72{,}3$ kG, siis mõõtmisviga ei ületa 0,05 kG, s. t. $P = 72{,}3$ kG ($\pm 0{,}05$ kG) ehk $72{,}25\ \text{kG} < P < 72{,}35$ kG.

2) Kui kuullaagri läbimõõt $d \approx 4{,}00$ cm, siis mõõtmisviga ei ületa 0,005 cm.

3) Kui kolhoosi maisipõllu pikkus on 200 m, siis mõõtmisviga ei ületa 50 m (!).

Viimasest näitest selgub, et ligikaudsete täisarvude kirjutusviisi kohta tehtud kokkulepet (§ 31, p. 5) ei saa alati üle kanda mõõtmisel saadud arvude kohta (üldiselt kõigi arvude kohta, mis on seotud tegelikus elus esinevate praktiliste küsimustega). Vastasel juhul muutub mõõtmisvea ülemmäär lubamatult suureks. Kõigil sellistel juhtudel tuleb arvestada ülesande sisu ja seda, et mõõtmise täpsus oleneb alati sellest, mida mõõdetakse.

Näiteid.

1) Linnadevahelised kaugused väljendatakse tavaliselt täiskilomeetrites, nii et kilomeetri murdosad (kümnendikud, sajandi-

kud jne.) kõrvaldatakse ümardamise teel. Kui kahe linna vaheliseks kauguseks on mõõtmisel saadud näiteks 500 km, siis selles arvus olevad nullid näitavad kümneliste ja üheliste puudumist ja nad tuleb seega lugeda tüvenumbriteks (§ 31, p. 4). Antud arv on seega kolme tüvenumbriga arv, milles viga ei ületa 0,5 km. Vähem tüvenumbreid võib olla selles arvus ainult siis, kui ta on saadud linnadevahelise kauguse ligikaudse hinnangu teel; tavaliselt rõhutatakse selle arvu ligikaudsust sel juhul veel sõnadega «ligikaudu», «umbes».

2) Kolhoosi maatükkide pindala arvutamiseks vajalike pikkuste mõõtmisel võetakse arvesse ainult täismeetrid.

3) Riidekanga mõõtmisel poes arvestatakse täissentimeetreid.

4) Korteri pindala arvutamiseks vajalike pikkuste mõõtmisel võetakse arvesse täissentimeetrid.

5) Joonestamisel sirglõikude pikkuste mõõtmisel võetakse tavaliselt arvesse täismillimeetrid.

6) Peente detailide (näiteks kuullaagrite) valmistamisel arvestatakse ka millimeetri kümnendikke, sajandikke ja veelgi väiksemaid pikkusi.

7) Letikauba (näiteks suhkru) kaalumisel arvestatakse ainult täisgramme.

8) Ravimite kaalumisel apteegis arvestatakse grammi sajandikke ja ka tuhandikke.

9) Aja mõõtmisel spordivõistlustel võetakse arvesse sekundi kümnendikud; ajaloos aga aastad, aastakümned, sageli ainult aastasajad ja -tuhanded.

10) Kolhoosi teravilja hektarisaagi arvestamisel võetakse tavaliselt arvesse ainult täistsentnerid.

Kui mõõtmisel saadud arvu murdosa[1] viimased numbrid on nullid, siis jäetakse need igapäevases elus sageli kirjutamata. Oskamatult toimides võib see tekitada arvutamisel suuri vigu.

Näiteid.

1) Oletame, et koridori pikkuse mõõtmisel mahtus üks meeter sellele pikkusele parajasti 5 korda. Tulemuseks kirjutati: koridori pikkus on 5 m. Sellise kirjutusviisi puhul on mõõtmisvea ülemmääraks 0,5 m! See on vastuolus tegeliku mõõtmise täpsusega (vt. p. 3, näide 4). Kuna sellisel mõõtmisel võetakse tavaliselt arvesse veel täissentimeetrid, siis tuleks kirjutada: 5,00 m. Seega tuleks antud arv lugeda kolme tüvenumbriga arvuks (olgugi et lõpunulle ei ole välja kirjutatud).

2) Perenaine ostis poest 3 kG jahu. Mitme tüvenumbriga arvuks tuleks antud arv lugeda?

Kuna sellisel kaalumisel võetakse arvesse ka grammid, s. o. kilogrammi tuhandikud, siis tuleb siinjuures mõelda arvu 3,000 kG — seega 4 tüvenumbriga arvu.

---

[1] Arvu murdosa moodustavad peale koma olevad numbrid.

3) Ülikonna jaoks osteti 3,2 m riiet. Mitme tüvenumbriga arvuks tuleks antud arv lugeda?

Et riidekanga mõõtmisel võetakse arvesse ka sentimeetrid, s. o. meetri sajandikud, siis tuleb siin mõelda arvu 3,20 m, seega kolme tüvenumbriga arvu.

Kõigisse igapäevases elus esinevatesse ligikaudsetesse arvulistesse andmetesse tuleb mõelda nii palju tüvenumbreid, et see oleks kooskõlas mõõtmise vajaliku täpsusega ja igapäevase elu nõuetega (vaatamata sellele, kas tüvenumbrid on välja kirjutatud või mitte).

Kui mõõtmise vajalik täpsus ei ole teada, siis tuleb juhinduda ligikaudsete arvude tüvenumbrite määramise eeskirjast (§ 31, p. 4, 5 ja 6).

4. Kui ligikaudse täisarvu lõpunullid ei ole tüvenumbrid, siis suuremate arvude puhul neid nulle sageli ei kirjutatagi, vaid arvu vastav järk kirjutatakse välja sõnades.

N ä i d e. Teravilja aastane toodang viiakse seitseaastaku lõpuks 180 miljoni tonnini (180 miljonit — kolme tüvenumbriga arv).

Küsimusi ja ülesandeid.

313. Põhjendada, miks on mõõtmisel saadud arvud alati ligikaudsed.

314. Mis vahe on kahe kirjutuse vahel: a) temperatuur on 37°; b) temperatuur on 37,0°?

315. Mis vahe on kirjutuste vahel: a) toa põranda pikkus on 4,0 m; b) toa põranda pikkus on 4,00 m; c) toa põranda pikkus on 4 m?

316. Leida mõõtmisvea ülemmäär.

a) 6 kG; 12 kG; 57 kG; 8,9 kG; 10,0 kG; 6,35 kG; 5,6 T; 19 T; 3,7 G; 12,42 G; 80 mG; 900 kG.

b) 37 m; 13 m; 8 cm; 129 mm; 14,8 m; 5,68 m; 29 km; 16,8 km; 3,4 mm; 200 m; 4,58 km; 0,02 m.

c) 8 s; 10,2 s; 3,5 min; 27 min; 13 s; 9,9 s.

d) $3{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $15{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $16\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$; $37{,}60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

e) 19,8 m^2; 16,7 cm^2; 0,09 km^2; 8 mm^2; 5,0 dm^2.

f) 19,8 ha; 20,4 ha; 9 ha; 5,0 ha; 52 ha; 0,15 ha.

g) 8,7 a; 0,98 a; 6,00 a; 52,4 a; 19,5 a; 32 a.

317. Millise täpsusega mõõdetakse tegelikus elus järgmisi suurusi:

a) aknaklaasi pikkust ja laiust?

b) inimese keha kaalu?

c) imiku vanust?
d) täiskasvanu vanust (näiteks arstlikul läbivaatusel)?
e) auto liikumise kiirust (kiirusemõõtja näidu järgi)?

318. Mitme tüvenumbriga arvudeks tuleks lugeda järgmised andmed?
a) Kolhoosi nisupõllu mõõtmed on 200 m×150 m; 100 m×170 m; 120 m×230 m.
b) Poest osteti 3 m; 3,3 m; 2,9 m; 3,25 m; 5,20 m riiet.
c) Põranda mõõtmed on 3 m×4 m; 3,5 m×3,9 m; 5,20 m×4,04 m.
d) Tallinn—Pärnu vaheline kaugus on ligikaudu 130 km.
e) Põllult, mille suurus on 4,7 ha, saadi 82 ts; 78 ts; 80 ts; 90 ts; 100 ts teri.
f) Poest osteti 5 kG; 5,2 kG; 6,5 kG; 2,75 kG jahu.
g) Õpilane ostis 200 G; 150 G; 300 G; 250 G kompvekke.
h) Põllumajandusliku toodangu aastane juurdekasv moodustab aastatel 1959—1965 keskmiselt 8 protsenti.
i) Tööstuse kogutoodangu maht suureneb 1965. aastal 1958. aastaga võrreldes umbes 80 protsenti.

319. Mis on viga järgmistes andmetes?
a) Kahe linna vaheline kaugus on 137,251 km; 342,00 km; 318,1 km; 675,489 km.
b) Tara pikkus on 52,75 m; 116,920 m; 87,00 m.
c) Rongi kaal on 2875,42 T; 3057,6 T.
d) Koolimaja koridori pikkus on 20,475 m; 15,690 m; 25,492 m.

§ 33. KRÕLOVI[1] REEGEL.

Suurema täpsuse saavutamiseks mõõdetakse vajalikku suurust mõnikord mitu korda ja leitakse üksikute mõõtmistulemuste *aritmeetiline keskmine*, s. t. üksikud mõõtmistulemused liidetakse ja saadud summa jagatakse mõõtmiste arvuga.

Näide. Oletame, et ühte ja sama pikkust mõõdeti 5 korda ja saadi järgmised tulemused: 57,39 m; 57,41 m; 57,37 m; 57,42 m; 57,41 m. Aritmeetiline keskmine on

$$\frac{57{,}39+57{,}41+57{,}37+57{,}42+57{,}41}{5}=57{,}398 \text{ m}.$$

Võrreldes aritmeetilist keskmist üksikute mõõtmistulemustega, näeme, et kümneliste ja üheliste numbrid (5 ja 7) on kõigis ühe-

[1] A. N. Krõlov (1863—1945) — nõukogude laevaehitaja, matemaatik. Sotsialistliku töö kangelane.

sugused; need on kindlasti õiged numbrid ja lõppvastuses tuleb need säilitada. Madalamates järkudes on aga märgatavad erinevused. Millised nendest lõppvastuses säilitada?

Krõlovi reegel. **Ligikaudne arv ümardatakse nii, et viga võiks esineda ainult selle arvu viimases tüvenumbris.**

Krõlovi reegli kohaselt tuleb viimane aritmeetiline keskmine ümardada kümnendikeni: 57,4 m.

Märkus. Krõlovi reegli järgi ümardatud arvu viimast tüvenumbrit nimetatakse ka kahtlaseks numbriks (mitteusaldatavaks numbriks). Kõik kõrvaldatavad numbrid on aga mõttetud numbrid.

Näide. Rahvaloendusel laekus linna elanike arvu kohta 47 329 sedelit. Kuidas ümardada seda arvu?

Inimeste sündimise, suremise ja liikuvuse tagajärjel on üheliste, kümneliste ja ka sajaliste numbrid alalises muutumises; need on mõttetud numbrid. Seepärast on see arv kindlasti ligikaudne. Et tuhandeliste numbris ei saa olla olulisi muutusi (kui ei ole erilisi katastroofilisi sündmusi), siis ümardatakse tulemus Krõlovi reegli kohaselt tuhandelisteni: 47 000 elanikku.

Toodud näitest selgub muuhulgas, et kaloendamisel saadud arvud võivad olla ligikaudsed; eriti siis, kui loendatavaid esemeid on palju, kui nad paiknevad korrapäratult, on liikumises jne.

Küsimusi ja ülesandeid.

320. Ühe ja sama pikkuse korduval mõõtmisel saadi:
a) 132,56 m; 132,54 m; 132,57 m; 132,54 m;
b) 3,47 m; 3,45 m; 3,46 m; 3,45 m; 3,46 m.
Leida mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine ja ümardada see Krõlovi reegli kohaselt.

321. Raamatu leheküljel olevate tähtede korduval loendamisel saadi järgmised arvud:
a) 1 487; 1 493; 1 489;
b) 1 643; 1 641; 1 637.
Leida loendamistulemuste aritmeetiline keskmine ja ümardada see Krõlovi reegli kohaselt.

322. Kuidas ümardada järgmisi rahvaloendusel saadud arve: 37 439, 892 345, 3 642?

323. Millised järgmistest andmetest on täpsed, millised ligikaudsed arvud?
a) Klassis õpib 27 õpilast.
b) Külas elab 47 inimest.
c) Muuseumi külastas aasta jooksul 32 000 inimest.
d) Kauplus müüs päevas 300 m villast kangast.

e) Inimene hingab minutis keskmiselt 16 korda.
f) Tööline saab kuus 102,47 rbl. palka.
g) Seitseaastaku jooksul annab tööstus põllumajandusele 400 000 kombaini.
h) Seitseaastaku lõpuks toodetakse villa 1,7 korda rohkem kui 1958. aastal.

§ 34. LIGIKAUDSETE ARVUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

1. Näiteid. 1) Olgu vaja liita kolm ligikaudset täisarvu 3 200, 13 780 ja 391. Leiame nende summa tavalises korras.

3 200
+13 780
391
17 371
17 400

Selgitus. Ligikaudse täisarvu lõpus olevad nullid asendavad kõrvaldatud numbreid; milliseid, see ei ole teada. Seepärast on summa 17 371 üheliste ja kümneliste numbrid (1 ja 7) täiesti mõttetud numbrid ja nad kuuluvad Krõlovi reegli järgi kõrvaldamisele ümardamise teel. Lõpptulemuse 17 400 kirjutame esialgselt saadud summa alla.

2) Leida ligikaudsete arvude 43,247 ja 15,6 vahe.

43,247
−15,6**
27,647
27,6

Selgitus. Laiendame antud arvud ühenimelisteks — tuhandikeni. (Täpsete arvude puhul tehakse seda mõttes nullide juurdekirjutamise teel.) Ligikaudsete arvude puhul ei ole teada, millised numbrid järgnevad antud arvu viimasele tüvenumbrile — tähistame neid tärnikestega. Nüüd selgub, et vahe (27,647) tuhandike ja sajandike numbrid (7 ja 4) on mõttetud. Miks? Krõlovi reegli järgi tuleb nad kõrvaldada ümardamise teel. Saame 27,6.

Samasuguse aruteluga saame veel

3) 1875**
−342,56
1532,44
1532

4) 32,750
+7,09*
16,2**
56,040
56,0

5) 630**
+28,56
658,56
660

Kokkuvõtte saamiseks teeme tabeli, nimetades liidetavaid, vähendatavat ja lahutatavat lühidalt tehte komponentideks.

Näited	Järk, milles on viimane tüvenumber			
	1. komponendis	2. komponendis	3. komponendis	Summas (vahes)
3 200+13 780+391	sajalised	kümnelised	ühelised	sajalised
43,247−15,6	tuhandikud	kümnendikud	—	kümnendikud
1 875−342,56	ühelised	sajandikud	—	ühelised
32,750+7,09+16,2	tuhandikud	sajandikud	kümnendikud	kümnendikud
630+28,56	kümnelised	sajandikud	—	kümnelised

Milline komponent on igas näites kõige väiksema täpsusega? kõige suurema täpsusega?

Võrreldes viimase tüvenumbri asukohta summas (vahes) ja üksikutes komponentides, tuleme järeldusele:

ligikaudsete arvude summa ja vahe tuleb ümardada nii, et tulemuse viimane tüvenumber oleks samas järgus, kus ta on kõige väiksema täpsusega komponendis.

Teisiti öeldes: ligikaudsete arvude summas või vahes ei saa olla madalamaid järke kui kõige väiksema täpsusega komponendis.

2. Kui komponendid on erinevate täpsustega, siis tehakse oskamatul arvutamisel tarbetut tööd.

Näiteid.

1)
$$\begin{array}{r} 15{,}2 \\ +3{,}43629 \\ \hline 6{,}246 \\ \hline 24{,}88229 \\ \hline 24{,}9 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 1800 \\ -672{,}35 \\ \hline 1127{,}65 \\ \hline 1100 \end{array}$$

Et reegli kohaselt tuleb esimene vastus ümardada kümnendikeni ja teine sajalisteni, siis ei ole arvutamisel vaja arvestada kõiki nendest madalamaid järke. Töö kergendamiseks toetume järgmisele reeglile:

kui tehete komponendid on erinevate täpsustega, siis võib ümardada suurema täpsusega komponendid enne arvutamist nii, et nende viimane tüvenumber oleks üks järk madalamal kui kõige väiksema täpsusega komponendis.

Näidete 1 ja 2 puhul saame

$$\begin{array}{r} 15{,}2 \\ +3{,}44 \\ \hline 6{,}25 \\ \hline 24{,}89 \\ \hline 24{,}9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1800 \\ -670 \\ \hline 1130 \\ \hline 1100 \end{array}$$

Mõlemal juhul saime samad tulemused, mis arvutamisel ilma eelneva ümardamiseta.

Arvutamise eel ümardatud arvude viimast numbrit nimetatakse ka **varunumbriks** (esimeses näites 4 ja 5; teises näites 7).

3. Kui üks või mõni komponent on täpne arv, siis tulemuse ümardamisel arvestatakse ainult ligikaudseid komponente, s. t.

tulemus ümardatakse nii, et viimane tüvenumber oleks samas järgus, kus kõige väiksema täpsusega ligikaudses komponendis.

Näiteid. (Täpsed arvud on jämedas kirjas.)

1)
$$\begin{array}{r} 3{,}7 \\ +\ 15{,}6745 \\ \quad 0{,}82 \\ \quad\ 7 \\ \hline \quad 27{,}1945 \\ \hline \quad 27{,}19 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 56{,}893 \\ -5{,}7 \\ \hline 51{,}193 \end{array}$$

Küsimusi ja ülesandeid.

Eelmärkus. Ülesannete lahendamisel juhindume edaspidi järgmisest kokkuleppest. Kõigis igapäevase elu küsimustega seotud rakenduslikes tekstülesannetes olevad arvulised andmed loeme ligikaudseteks (kui teisiti ei ole öeldud või kui nad ülesande sisu kohaselt ei ole täpsed). Kõigil teistel juhtudel loeme ülesande andmed ligikaudseteks ainult siis, kui seda on eraldi rõhutatud.

324. Arvutamata teha kindlaks, millise järguni tuleb ümardada järgmised ligikaudsete arvude summad.

a) $3{,}8+5{,}67$
b) $30+5{,}7+9{,}25$
c) $2500+320+75$
d) $0{,}0456+27{,}89+42{,}0$
e) $2{,}72+3{,}47+5{,}62+4{,}976$
f) $0{,}425+5{,}2+6{,}0$
g) $0.00285+5{,}234$
h) $327+250+32{,}67$

325. Arvutamata teha kindlaks, millise järguni tuleb ümardada järgmised ligikaudsete arvude vahed.

a) $6{,}75-2{,}8$
b) $0{,}295-0{,}2$
c) $1500-37$
d) $320-6{,}72$
e) $13{,}9756-2{,}47$
f) $19{,}295-11$

326. Teostada tehted ligikaudsete arvudega, ümardades tulemused summa ja vahe ümardamisreegli kohaselt.

a) $3{,}27+4{,}2+0{,}1$
b) $28{,}756+0{,}98+2{,}89$
c) $1600+560+8{,}7$
d) $328+27+15{,}9$
e) $19{,}89-2{,}7$
f) $256-11{,}35$
g) $34{,}567-0{,}02$
h) $0{,}5982-0{,}39$

327. Teostada tehted ligikaudsete arvudega, ümardades suurema täpsusega komponendid eelnevalt nii, et neis jääks üks varunumber.

a) 2,7567+3,8
b) 16,87+9,7+5,679+0,0001
c) 0,789+52+4,79
d) 620+5,97+11,2+3
e) 19,567−0,5
f) 250−11,782
g) 16,787−15
h) 0,9756—0,23

328. Teostada tehted.

a) 3+2,75+3,8
b) 25,7+11,2+8,95
c) 30+25+11,2+30
d) 19,75−0,289
e) 250−11,00
f) 13,50−2,7

329. Teha ülesannetes *324* ja *325* näidatud tehted.

330. Ristkülikukujulise põllutüki pikkuseks saadi mõõtmisel 230 m ja laiuseks 117 m. Leida maatüki ümbermõõt (694 m; vt. § 32, p. 3).

331. Ristkülikukujulise põllutüki pikkuseks on umbes 200 m ja laiuseks 170 m. Leida põllutüki ümbermõõt. (700 m)

332. Rein, Jüri ja Jaan mõõtsid nelinurgakujulise õueaia ümbermõõtu. Rein ja Jüri mõõtsid kahte külge mõõdulindiga ja said nende pikkusteks 30 m ja 37,6 m. Jaan mõõtis samal ajal ülejäänud kahte külge mõõtesirkli abil ja sai nende pikkusteks 29 m ja 37 m. Rein kirjutas oma vihikusse, et aia pikkus on 130 m. Jüri kirjutas 134 m ja Jaan kirjutas 133,6 m. Kes kirjutas tulemuse kõige otstarbekamalt? Miks? (Jüri)

333. Kolhoosi metsalangil oli 7 200 puud. Aasta jooksul saeti maha 880 puud. Mitu puud jäi veel metsalangile? (6 300 puud)

334. Polt kaalub 15,8 G, mutter 4,67 G ja seib 1,34 G. Kui palju kaaluvad need detailid kokku?

335. Joonestada vabalt kolmnurk, mõõta selle küljed ja arvutada ümbermõõt.

336. Teisendada harilikud murrud kümnendmurdudeks kahe kohaga peale koma ja leida summa (vahe).

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{2}{9}+\frac{5}{12}$
b) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+3\frac{5}{12}$
c) $3\frac{5}{6}-2\frac{2}{3}$
d) $13\frac{4}{7}-3\frac{1}{14}$

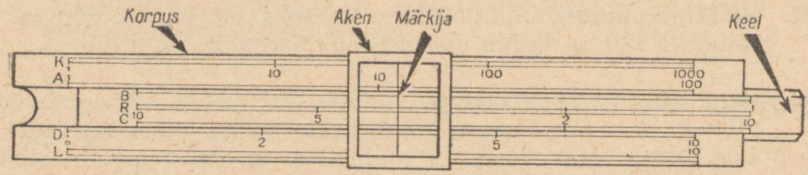
Arvutuse kontrolliks sooritada tehted harilike murdudega ja teisendada siis tulemus kümnendmurruks.

§ 35. ARVUTUSLÜKATI JA SELLE PÕHISKAALAD.

Eelmärkus. Kõiki arvutuslükatiga seotud küsimusi tuleb õppida nii, et lükati oleks käes. Lugejal tuleb kõik õpikus esitatud näited ise läbi lahendada.

1. Arvutustöö kergendamiseks kasutatakse tänapäeval mitmesuguseid arvutustöö mehhaniseerimise vahendeid. Üks lihtsam nendest on näiteks arvelaud, millega ka lugeja on juba varem tuttav. Keerulisemate arvutuste tegemiseks kasutatakse mitmesuguseid elektri abil töötavaid arvutusmasinaid, millest võimsamad võivad teha tuhandeid tehteid sekundis.

Ligikaudsetes arvutustes, kus ei vajata enam kui kolme tüvenumbriga arve, kasutatakse väga palju **arvutuslükatit.** Arvutuslükatiga saab lahendada väga mitmesuguseid ülesandeid, millest käesolevas õpikus vaatleme võrde lahendamist, kahe arvu korrutise ja jagatise arvutamist.

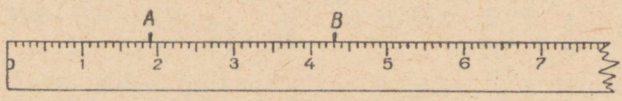


Joon. 73

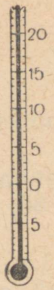
2. Arvutuslükatil (ehk lihtsalt lükatil) on kolm põhiosa: **korpus, keel** ja korpusel liuglev **aken** (joon. 73). Viimasele on arvude märkimiseks kantud peenike kriips — **märkija.**

Lükati esiküljel on mitu skaalat (tavaliselt on neid seitse), mida tähistatakse tähtedega *K*, *A*, *B*, *R* (mõnikord *P*), *C*, *D*, *L* (joon. 73).

Skaalasid kohtame igapäevases elus mitmesuguste mõõteriistade juures. Skaaladega on varustatud näiteks tavaline mõõtejoonlaud (joon. 74), termomeeter (joon. 75), ampermeeter (joon. 76) jm. Skaala kriipsule vastab teatav arv. Skaala kahele mingile kriipsule vastavate arvude vahe on selle kriipsuvahe arvuline väärtus. Näiteks on kriipsuvahe *AB* (joon. 74) arvuline väärtus 4,3 − 1,9 = 2,4. Joonistel 74, 75 ja 76 kujutatud skaalad on üht-



Joon. 74



Joon. 75



Joon. 76



Joon. 77

l a s e d s k a a l a d, sest nendel kõigil on võrdse pikkusega kriipsuvahed ühesuguse arvulise väärtusega.

Millised on nende skaalade kõige väiksemate kriipsuvahede arvulised väärtused?

Peale ühtlaste skaalade on olemas k a e b a ü h t l a s i s k a a l a s i d. Sellisteks on näiteks joonisel 77 kujutatud voltmeetri skaala, samuti mensuuri skaala (joon. 78).

Ebaühtlastel skaaladel on ühesuguse arvulise väärtusega kriipsuvahed erinevate pikkustega.

3. Eespool nimetatud ülesannete lahendamiseks tutvume lükatil ainult kahe skaalaga — l ü k a t i p õ h i s k a a l a d e g a; üks nendest on lükati keelel ja on tähistatud tähega *C*, teine on lükati korpusel ja on tähistatud tähega *D* (joon. 73). Edaspidi nimetame neid lühidalt *C*-skaalaks ja *D*-skaalaks. Need skaalad on ühesugused.

Põhiskaala esimene kriips on tähistatud arvuga 1 ja viimane arvuga 10 (mõne lükati puhul ka 1). Kogu skaala on jaotatud jämedamas trükis kirjutatud arvudega 2, 3, 4, . . ., 7, 8, 9 üheksaks osaks (vahemikuks), kusjuures iga vahemik on isesuguse pikkusega. Lükati põhiskaala on seega ebaühtlane skaala.



Joon. 78

Vahemik 1-st 2-ni on jaotatud peenemas trükis kirjutatud arvudega 1,1; 1,2; 1,3; . . .; 1,8; 1,9 kümneks osaks. (Mõnedel lükati tüüpidel on sinna kirjutatud arvud 1, 2, 3, . . ., 8, 9. Sel juhul tuleb neile vaadata kui kümnendike numbritele.) Iga saadud vahemik on jaotatud omakorda kümneks osaks. Seega vahemikus 1-st 2-ni on iga kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus 0,01. Joonis 79 näitab arvude märkimist skaala vaadeldud vahemikul.

Lugeja ülesandeks on selgitada, milline on kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus vahemikus 2-st 3-ni, 3-st 4-ni, . . ., 9-st 10-ni.

Selgub, et kõige väiksema kriipsuvahe arvulise väärtuse järgi võib kogu skaala jaotada kolme ossa:

a) vahemikus 1-st 2-ni : 0,01;
b) vahemikus 2-st 4-ni : 0,02;
c) vahemikus 4-st 10-ni : 0,05.

Arvude märkimist kahel viimasel osal näitavad joonised 80 ja 81.

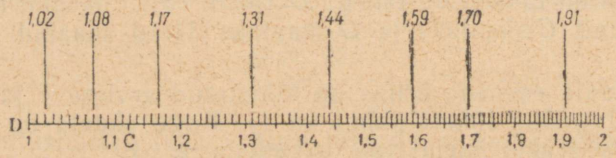
Kui arvule vastavat kriipsu ei ole skaalal, siis tuleb anda hinnang silma järgi (näiteks 2,63; 2,77; 3,33; 3,59 joonisel 80; 6,02; 6,58; 7,37; 8,38 joonisel 81).

Kui arv ei kuulu vahemikku 1-st 10-ni (näiteks 13,1; 131; 0,0304; 7 370), siis nihutatakse mõttes selles arvus koma nii, et arv kuuluks sellesse vahemikku ja ta märgitakse samal viisil, nagu eespool kirjeldatud. Seega samal kohal, kus märgitakse näiteks arvu 1,31 (joon. 79), märgitakse ka arvud 13,1; 131; 1 310; ...; 0,131; 0,0131; ...

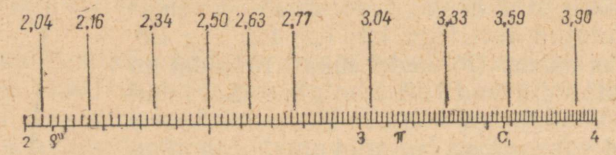
Lükati skaala üks ja sama kriips tähistab kõiki ühesuguste tüvenumbritega arve.

Teisiti öeldes: lükatil arvestatakse ainult arvu tüvenumbreid komale ja ava- ning lõpunullidele tähelepanu pööramata.

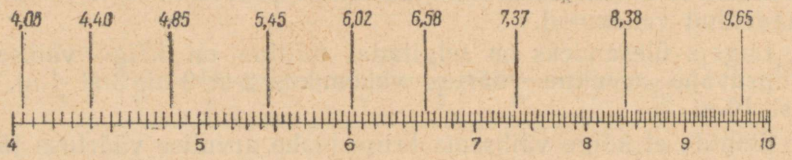
Milliseid arve võiksid joonistel 79, 80 ja 81 märgitud kriipsud veel tähistada?



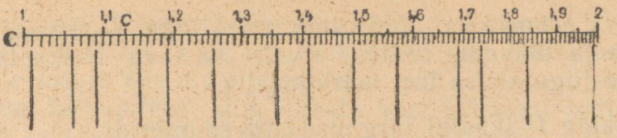
Joon. 79



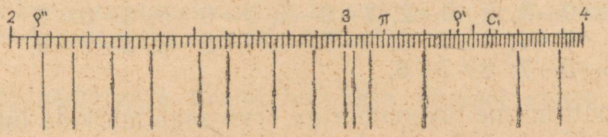
Joon. 80



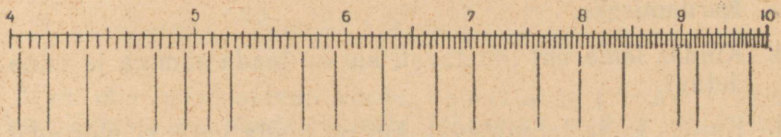
Joon. 81



Joon. 82



Joon. 83



Joon. 84

Küsimusi ja ülesandeid.

337. Milliste tüvenumbritega arvud on märgitud joonistel 82, 83 ja 84?

338. Märkida *D*-skaalal arvud:
a) 1; 2; 3; 6; 8; 9; 10;
b) 1,5; 2,5; 3,5; 4,5; 5,5; 6,5; 7,5; 8,5; 9,5;
c) 1,1; 2,1; 3,1; 4,1; 5,1; 6,1; 7,1; 8,1; 9,1;
d) 1,2; 3,2; 3,4; 3,6; 4,4; 4,8; 5,8; 6,7; 8,9;
e) 1,23; 2,16; 3,28; 3,32; 3,12; 3,82; 3,98; 2,14; 2,32;
f) 1,32; 1,47; 1,98; 4,15; 5,25; 6,75; 8,15; 7,55; 9,85;
g) 1,05; 1,02; 1,07; 2,02; 2,04; 3,08; 4,05; 5,05; 9,05;
h) 1,11; 2,03; 2,17; 3,18; 4,37; 5,68; 6,73; 6,54; 7,82; 9,67.

339. Märkida *C*-skaalal arvud:
a) 0,21; 0,32; 0,56; 0,78; 0,92; 0,47; 0,59;
b) 0,0212; 0,00318; 0,565; 0,0478; 0,568; 0,00975;
c) 11,3; 21,7; 32,5; 43,5; 56,7; 28,4; 19,8; 98,5;
d) 138; 262; 755; 425; 675; 872; 533; 756.

340. Seada kohakuti järgmised arvupaarid (valides esimese arvu *D*-skaalalt):
a) 2 ja 4; 5,6 ja 7,8; 3,2 ja 1,6; 8,7 ja 5,2;
b) 1,05 ja 2,32; 1,27 ja 3,43; 1,89 ja 1,32; 3,05 ja 5,05;
c) 11,4 ja 30,5; 12,7 ja 20,2; 0,705 ja 0,315; 0,0812 ja 516.

Näpunäide. Märgime märkijaga *D*-skaalal esimese arvu ja lükkame teisele arvule vastava *C*-skaala kriipsu keele liigutamise teel märkija alla.

341. Märkida *D*-skaalal järgmised tüvenumbrid:
a) 1—2; 2—3; 5—6; 6—2; 4—1; 9—5; 7—9; 9—9;
b) 1—3—2; 2—3—4; 3—5—6; 5—4—5; 6—7—5; 8—6—5;
c) 1—0—9; 2—0—2; 7—0—5; 9—0—5; 6—0—7;
d) 1—0—4; 2—0—3; 3—0—4; 7—5—6; 8—7—9; 3—5—7; 8—7—6.

342. Ülimalt mitme tüvenumbriga arvu saab märkida lükatil? Mis teha siis, kui tüvenumbreid on rohkem?

Kordamiseks.

343. Kuidas leida üht liidetavat, kui on teada summa ja teine liidetav?

344. Kuidas leida lahutatavat, kui on teada vahe ja vähendatav?

345. Kuidas leida vähendatavat, kui on teada vahe ja lahutatav?

346. Kuidas leida ühte tegurit, kui on teada korrutis ja teine tegur?

347. Kuidas leida jagatavat, kui on teada jagatis ja jagaja?

348. Kuidas leida jagaja, kui on teada jagatis ja jagatav?

349. Leida x.

a) $x+4{,}9=6{,}8$ d) $7x=21$

b) $x-7{,}8=3{,}2$ e) $\frac{x}{5}=3{,}2$

c) $5{,}6-x=2{,}7$ f) $\frac{8}{x}=4$

350. Milles seisneb murru põhiomadus?

§ 36. VÕRRE. VÕRDE LAHENDAMINE.

Eelmärkus. Lepime kokku tähistada edaspidi lükati skaaladele märgitavaid arve järgmiselt. Kirjutame skaala tähise (*C* või *D*) ja selle järele vastava arvu. Nii näiteks tähistab sümbol *D*-0,475 *D*-skaala arvu 0,475; sümbol *C*-5,6 *C*-skaala arvu 5,6 jne.

1. Lükkame lükati keele mingisse asendisse, näiteks nii, et *C*-1 ja *D*-2 satuvad kohakuti. Nüüd näeme, et kohakuti on veel sattunud näiteks järgmised arvupaarid: *C*-2 ja *D*-4; *C*-3 ja *D*-6; *C*-4 ja *D*-8; *C*-1,5 ja *D*-3; *C*-1,9 ja *D*-3,8; *C*-2,5 ja *D*-5 jne.

Kui suur on kohakuti olevate arvude jagatis ehk suhe (võttes jagatava *C*-skaalalt ja jagaja *D*-skaalalt, s. o. vaadates skaalade-vahelisele pilule kui murrujoonele)?

Lugeja ülesandeks jääb lükata veel kohakuti näiteks *C*-1 ja *D*-3; *C*-8 ja *D*-4; *C*-10 ja *D*-8.

Kui suur on iga kord kõigi kohakuti olevate arvude suhe?

Nendest näidetest selgub lükati põhiskaalade omadus:

lükati keele mistahes asendi korral on C- ja D-skaalade kohakuti olevate arvude suhted võrdsed.

2. Võrdusmärgiga ühendatud kaks võrdset suhet moodustavad **võrde.**

Näiteid võrrete kohta:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8};\quad \frac{2{,}5}{5}=\frac{10}{20};\quad \frac{3{,}7}{1{,}2}=\frac{37}{12};\quad \frac{5}{0{,}35}=\frac{1}{0{,}07}.$$

Arve, mis moodustavad võrde, nimetatakse võrde liikmeteks. Tähistades võrde liikmeid tähtedega *a*, *b*, *c* ja *d*, saame võrde üldkuju:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{ehk} \quad a:b=c:d$$

(siseliikmed: *b*, *c*; välisliikmed: *a*, *d*)

Tähed *a* ja *d* tähistavad võrde **välisliikmeid,** *b* ja *c* **siseliikmeid.**

Kui suur on igas eespool toodud võrdes siseliikmete korrutis? välisliikmete korrutis?

Siit selgub **võrde põhiomadus:**

võrde välisliikmete korrutis võrdub siseliikmete korrutisega.

Kui $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, siis $ad=bc$.

3. Võrdes on neli liiget. Kui nendest ükskõik millised kolm liiget on antud, siis saab tundmatut neljandat liiget alati leida. Võrde tundmatu liikme leidmine on võrde lahendamine. Võrde lahendamisel kasutame võrde põhiomadust.

Näiteid. (Võrde tundmatut liiget tähistame tähega *x*.)

1) $\frac{5}{6}=\frac{x}{18}$.

Võrde põhiomaduse põhjal $6x = 5 \cdot 18$. Et tegur võrdub korrutise ja teise teguri jagatisega, siis

$$x = \frac{5 \cdot 18}{6} = 15.$$

2) $\frac{7}{8} = \frac{3{,}5}{x}$.

Võrde põhiomaduse põhjal $7x = 8 \cdot 3{,}5$, millest

$$x = \frac{8 \cdot 3{,}5}{7} = 4.$$

3) $\frac{x}{2{,}8} = \frac{4{,}5}{0{,}6}$.

$0{,}6x = 2{,}8 \cdot 4{,}5$; $x = \frac{2{,}8 \cdot 4{,}5}{0{,}6} = 21.$

4) $\frac{7{,}9}{x} = \frac{3{,}7}{9{,}1}$.

$3{,}7x = 7{,}9 \cdot 9{,}1$; $x = \frac{7{,}9 \cdot 9{,}1}{3{,}7} = 19{,}405\ldots$

Näeme, et võrde kirjalikul (tavaliselt ka peast) lahendamisel tuleb alati sooritada üks korrutamise ja üks jagamise tehe: *siseliikme arvutamisel tuleb välisliikmete korrutis jagada antud siseliikmega (näited* 1 *ja* 4); *välisliikme arvutamisel tuleb siseliikmete korrutis jagada antud välisliikmega (näited* 2 *ja* 3).

4. Võrde tundmatu liikme ligikaudset väärtust (kolme tüvenumbriga) saab kergesti leida arvutuslükati abil.

Näiteid.

1) $\frac{8}{4} = \frac{5{,}2}{x}$.

Ülesande lahendamiseks lükkame kohakuti *C*-8 ja *D*-4. Et ainult kohakuti olevate arvude suhted on võrdsed, siis peab otsitav x olema *D*-skaalal *C*-5,2 kohal; x tüvenumbrite lugemiseks viime märkija *C*-5,2 kohale (kusjuures jälgime, et keel ei liiguks). Märkija alt *D*-skaalalt loeme x nii mitu tüvenumbrit kui võimalik (üldreeglina kolm), antud juhul 2—6—0. Koma asukoha määramiseks teeme ligikaudse hinnangu, mis antud näite puhul on väga lihtne: esimese suhte väärtus on 2; teise suhte väärtus saab olla 2 siis, kui $x = 2{,}60$.

2) $\frac{58{,}5}{3{,}24} = \frac{x}{2{,}52}$.

Lükkame kohakuti *C*-58,5 ja *D*-3,24; x tüvenumbrid 4—5—5 leiame *C*-skaalalt *D*-2,52 kohalt. Koma asukoha määrame ligikaudse hinnangu teel:

$$\frac{58{,}5}{3{,}24} \approx \frac{60}{3} = 20,$$

s. t. 58,5 on 3,24-st ligikaudu 20 korda suurem; siis peab ka x olema 2,52-st ligikaudu sama arv korda suurem. See on siis, kui $x=45{,}5$.

Märkus. Ligikaudset hinnangut koma asukoha määramiseks võib teha ka antud võrde peast lahendamisel, kui andmed on ümardatud ühe tüvenumbrini. Viimase näite korral:

$$x \approx \frac{3 \cdot 60}{3} = 60,$$

s. t. x on «midagi 60 ringis».

3) $\frac{16{,}8}{x} = \frac{6{,}2}{3{,}1}$.

Lükanud kohakuti C-6,2 ja D-3,1, näeme, et keele sellise asendi korral ei saagi D-skaalalt C-16,8 kohalt lugeda x tüvenumbreid (x läheb skaalalt välja). Nüüd viime märkija C-10 kohale. Seal on kohakuti arvud 10 ja 5. Lükati põhiskaala omaduse (vt. p. 1) ja murru põhiomaduse põhjal võime kirjutada:

$$\frac{16{,}8}{x} = \frac{6{,}2}{3{,}1} = \frac{10}{5} = \frac{1}{0{,}5}.$$

Võtame sellest võrdsete suhete reast esimese ja viimase ning moodustame abivõrde

$$\frac{16{,}8}{x} = \frac{1}{0{,}5}.$$

Lahendame antud võrde asemel selle abivõrde. Selleks jätame märkija paigale ja lükkame lükati keele oma pikkuse võrra (keele pikkuse all mõtleme C-skaala alg- ja lõppkriipsude vahelist kaugust) paremale, s. o. teostame keele ülekande paremale. Nüüd ongi sattunud kohakuti C-1 ja D-0,5. D-skaalalt C-16,8 kohalt loeme x tüvenumbrid 8—4—0. Ligikaudne hinnang ütleb, et $x=8{,}40$.

4) $\frac{x}{13{,}5} = \frac{18{,}6}{46{,}5}$.

Lükanud kohakuti C-18,6 ja D-46,5, selgub, et x läheb jälle skaalalt välja. Nüüd teostame keele ülekande vasakule ja leiame C-skaalalt D-13,5 kohalt x tüvenumbrid 5—4—0.

Tegeliku arvutustöö juures abivõrret kunagi välja ei kirjutata ja teda ei arvestata, vaid toimitakse reegli järgi:

kui keele esialgse asendi korral võrde otsitav liige läheb skaalalt välja, siis tehakse keele ülekanne vastavalt vajadusele kas vasakule või paremale. Keele uue asendi korral leitakse võrde otsitava liikme tüvenumbrid.

5. Kui võrde antud liikmed on ligikaudsed arvud, siis tuleb võrde lahendamisel seda arvestada.

Näide. Võrde

$$\frac{x}{6{,}8} = \frac{3{,}17}{2{,}5}$$

lahendamisel saame, et $x=8{,}6224$ (lükati abil saaksime $x=8{,}62$). Kui võrde antud liikmed on ligikaudsed, siis on vaja osata vastust õigesti ümardada. Kuidas? Selleks tuleb tunda ligikaudsete arvude korrutamise ja jagamise eeskirju, millega tutvume järgmises paragrahvis.

Küsimusi ja ülesandeid.

351. Leida iga järgneva võrde siseliikmete korrutis ja välisliikmete korrutis:

$$\frac{3}{7}=\frac{9}{21};\quad \frac{4}{5}=\frac{12}{15};\quad \frac{32}{7{,}5}=\frac{48}{11{,}4};\quad \frac{31{,}5}{4{,}7}=\frac{5{,}1}{0{,}76};$$

$$1\frac{2}{3}:3\frac{4}{5}=25:57;\quad 3\frac{8}{9}:1\frac{2}{3}=7\frac{2}{3}:3\frac{2}{7}.$$

352. Lahendada peast järgmised võrded:

$$\frac{3}{4}=\frac{x}{8};\quad \frac{4}{5}=\frac{12}{x};\quad \frac{2}{3}=\frac{x}{9};\quad \frac{x}{7}=\frac{5}{35};$$

$$\frac{9}{x}=\frac{3}{1};\quad \frac{7}{12}=\frac{x}{6};\quad \frac{5}{7}=\frac{x}{5};\quad \frac{3}{2}=\frac{4}{x}.$$

353. Anda ligikaudne hinnang järgmistele jagatistele:
$20:4{,}1$; $30{,}1:29{,}1$; $40{,}2:8{,}1$; $32{,}4:7{,}95$; $45{,}2:9{,}1$; $105{,}7:20{,}4$; $0{,}75:0{,}3$; $0{,}32:0{,}81$; $1{,}5:0{,}7$; $3{,}2:4{,}1$.

354. Anda ligikaudne hinnang arvule x järgmistes võrretes:

$$\frac{4{,}99}{1{,}01}=\frac{x}{5};\quad \frac{7{,}02}{1{,}1}=\frac{35}{x};\quad \frac{8{,}1}{4{,}1}=\frac{x}{2{,}2};\quad \frac{x}{3{,}5}=\frac{10{,}5}{2{,}1};$$

$$\frac{19{,}2}{9{,}5}=\frac{x}{2};\quad \frac{3{,}7}{x}=\frac{21{,}3}{7{,}2};\quad \frac{0{,}75}{0{,}8}=\frac{x}{7};\quad \frac{x}{0{,}79}=\frac{8}{0{,}9}.$$

355. Järgmistes harjutustes on sulgudes antud x tüvenumbrid. Määrata koma asukoht.

$$\frac{10}{5}=\frac{16}{x};\ (8-0-0);\quad \frac{106}{5}=\frac{x}{10};\ (2-1-2);$$

$$\frac{63}{2{,}1}=\frac{3}{x};\ (1-0-0);$$

$$\frac{182}{6{,}1}=\frac{x}{9{,}05};\ (2-7-0);\quad \frac{89}{4{,}2}=\frac{x}{2{,}22};\ (4-7-5);$$

$$\frac{3{,}5}{1{,}7}=\frac{9{,}15}{x};\ (4-4-5);$$

$$\frac{5{,}1}{6{,}2}=\frac{72}{x};\ (8-7-5);\quad \frac{32}{9{,}3}=\frac{x}{7{,}15};\ (2-4-6);$$

$$\frac{4{,}5}{2{,}25}=\frac{x}{0{,}6};\ (1-2-0).$$

356. Lahendada lükati abil järgmised võrded:

a) $\frac{14,5}{2,1}=\frac{x}{4,2}$; $\frac{24}{3,1}=\frac{6,35}{x}$; $\frac{4,1}{2,96}=\frac{x}{10,3}$; $\frac{x}{6,75}=\frac{4,22}{3,29}$;

b) $\frac{9,3}{3,34}=\frac{x}{7,05}$; $\frac{7,85}{25,3}=\frac{15,2}{x}$; $\frac{8x}{31,3}=\frac{6,58}{14,4}$; $\frac{0,875}{x}=\frac{9,15}{6,78}$;

c) $\frac{11,2}{8,3}=\frac{x}{3,18}$; $\frac{22,5}{7,74}=\frac{60,5}{x}$; $\frac{x}{0,17}=\frac{26}{7,2}$; $\frac{0,56}{x}=\frac{2,87}{9,47}$.

(29,0; 8,20; 14,4; 8,65; 19,6; 49,0; 14,3; 0,118; 4,29; 20,8; 0,614; 1,85)

357. Lahendada lükati abil järgmised võrded:

$\frac{4,7}{4,9}=\frac{x}{3}$; $\frac{x}{5,65}=\frac{12,1}{10,6}$; $\frac{3,75}{x}=\frac{18,9}{9,2}$; $\frac{6,5}{13}=\frac{x}{4,9}$;

$\frac{16,2}{8}=\frac{x}{3,56}$; $\frac{32,5}{8,1}=\frac{x}{1,45}$; $\frac{4,82}{2,1}=\frac{3,78}{x}$; $\frac{3,2}{2,8}=\frac{4,2}{x}$;

$\frac{x}{7}=\frac{3,7}{4,86}$; $\frac{4,56}{x}=\frac{3,78}{5,65}$; $\frac{3,7}{0,6}=\frac{x}{2,4}$; $\frac{0,792}{0,67}=\frac{x}{0,5}$.

(2,88; 6,45; 1,82; 2,45; 7,20; 5,82; 1,65; 3,68; 5,33; 6,82; 14,8; 0,591)

358. Lahendada lükati abil ülesandes 354 antud võrded.

§ 37. LIGIKAUDSETE ARVUDE KORRUTAMINE JA JAGAMINE. KAHE ARVU KORRUTISE JA JAGATISE LEIDMINE LÜKATI ABIL.

1. 1) Vaatame järgmist ülesannet.

Asfalteeritud sirge tee laius on 5,7 m ja pikkus 152,4 m. Leida asfalteeritud tee pindala.

Selgitus. Kuna mõõtmisel on võetud arvesse ainult meetri kümnendikud (detsimeetrid), siis sentimeetrite arv ei ole meil teada. Tähistame need tundmatud numbrid tärnidega. Korrutame tavalisel viisil, arvestades, et kui korrutame tundmatu numbri (*) mistahes numbriga, saame ikka tundmatu numbri. Liites kõik osakorrutised, selgub, et tulemuses 868,68 ei ole üheliste, kümnendike ja sajandike numbrid usaldusväärsed. Krõlovi reegli järgi tuleb tulemus ümardada kümnelisteni. Saame 870 m².

```
 152,4*
×  5,7*
-------
 *****
10668*
 7620*
-------
868,68**
-------
 870 m²
```

Samasuguse arutlusega saame veel:

2)
$$\begin{array}{r} 325,* \\ \times 23,* \\ \hline **** \\ 975* \\ 650* \\ \hline 7475,** \\ \hline 7500 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 1,57* \\ \times 2,16* \\ \hline **** \\ 942* \\ 157* \\ 314* \\ \hline 339,12** \\ \hline 339 \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} 2,143* \\ \times 0,451* \\ \hline ***** \\ 2143* \\ 10715* \\ 8572* \\ \hline 0,966493** \\ \hline 0,966 \end{array}$$

Kokkuvõtte saamiseks teeme tabeli.

Näide	Tüvenumbrite arv		
	1. teguris	2. teguris	Korrutises
152,4 · 5,7	4	2	2
325 · 23	3	2	2
1,57 · 2,16	3	3	3
2,143 · 0,451	4	3	3

Võrreldes tüvenumbrite arvu iga näite korral korrutises ja kummaski teguris, näeme, et korrutises on niisama palju tüvenumbreid kui vähima tüvenumbrite arvuga teguris.

Saab näidata, et samasugune reegel maksab ka ligikaudsete arvude jagamisel. Nii saame näiteks:

$$491 : 63{,}4 = 7{,}7444 \ldots \approx 7{,}74;$$
$$28{,}56 : 0{,}32 = 89{,}25 \approx 89;$$
$$0{,}235 : 1{,}568 = 0{,}14987 \ldots \approx 0{,}150.$$

Sõnastame ligikaudsete arvude korrutamise ja jagamise kohta ühise reegli (nimetades tegureid, jagatavat ja jagajat lihtsalt komponentideks):

ligikaudsete arvude korrutis ja jagatis tuleb ümardada nii, et temas oleks niisama palju tüvenumbreid kui vähima tüvenumbrite arvuga komponendis.

Kuidas ümardada eelmise paragrahvi lõpul antud ülesande vastus?

2. Mõnikord saab ligikaudsete arvude korrutamisel ja jagamisel tööd lihtsustada. See selgub järgnevast näitest.

$$\begin{array}{r} 1{,}753 \\ \times 24 \\ \hline 7012 \\ 3506 \\ \hline 42{,}072 \\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}75 \\ \times 24 \\ \hline 700 \\ 350 \\ \hline 42{,}00 \\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}8 \\ \times 24 \\ \hline 72 \\ 36 \\ \hline 43{,}2 \\ \hline 43 \end{array}$$

Mis selgub tulemuste võrdlemisel?

Lugeja ülesandeks jääb võrrelda jagatisi 275,3 : 4,3; 275 : 4,3; 280 : 4,3.

Suurema tüvenumbrite arvuga komponendi võib enne arvutamist ümardada nii, et temas oleks üks tüvenumber rohkem (varunumber) kui vähima tüvenumbrite arvuga komponendis.

3. Kui üks komponent on täpne arv, siis tulemuse ümardamisel tuleb arvestada ainult ligikaudset komponenti, s. t.

tulemus tuleb ümardada nii, et temas oleks niisama palju tüvenumbreid kui vähima tüvenumbrite arvuga ligikaudses komponendis.

Näited.

1) 32,56
×2,8
26048
6512
91,168
91,17

2) 0,8 : 0,33 =
=80 : 33 = 2,42 ... ≈2,4
66
140
132
80
66
14

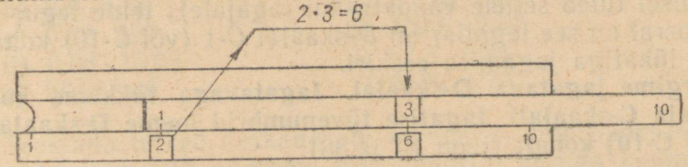
4. Kahe arvu korrutist ja jagatist on kerge arvutada lükati abil. Vaatame esiteks kahe täpse arvu korrutamist.

Näiteid.

1) Leida lükatilt korrutis 2 · 3. Tähistanud korrutise tähega x, saame $2 \cdot 3 = x$ ehk $2 \cdot 3 = x \cdot 1$. Viimasest võrdusest saab moodustada võrde, kui võtame ühel pool olevad tegurid (näiteks 2 ja 3) võrde siseliikmeteks ja teisel pool olevad tegurid välisliikmeteks. Antud juhul saame

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{x}.$$

Selle võrde lahendamine annabki otsitava korrutise. Selleks lükkame kohakuti C-1 ja D-2 ning D-skaalalt C-3 kohalt saame x tüvenumbrid 6–0–0. Ilmselt $x = 6{,}00$ (joon. 85).



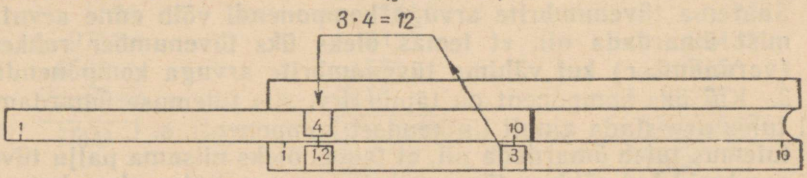
Joon. 85

2) Leida lükatilt korrutis 3 · 4.

Teinud eelmise näitega analoogilise arutelu, saame võrde

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{x}.$$

Lükanud kohakuti *C*-1 ja *D*-3, näeme, et on vaja teha keele ülekanne. Pärast keele ülekannet saame *D*-skaalalt *C*-4 kohalt *x* tüvenumbrid 1—2—0. $x=12{,}0$ (joon. 86).



Joon. 86

Leida toodud näidete eeskujul veel korrutised 2 · 4; 3 · 6; 5 · 3. Näidetest selgub, et kahe arvu korrutise leidmiseks **märgime D-skaalal ühe teguri; selle teguriga lükkame kohakuti C-1 (või C-10). C-skaalal märgime teise teguri. Märkija all D-skaalal on otsitava korrutise tüvenumbrid.**

Mitme tüvenumbriga tegurite korral määrame koma asukoha tulemuses ligikaudse hinnangu teel, ümardades tegurid ühe tüvenumbrini.

N ä i d e. Korrutise 13,2 · 5,2 leidmisel saame tema tüvenumbriteks 6—8—6. Ligikaudne hinnang $13{,}2 \cdot 5{,}2 \approx 10 \cdot 5 = 50$ ütleb, et tulemus on 68,6.

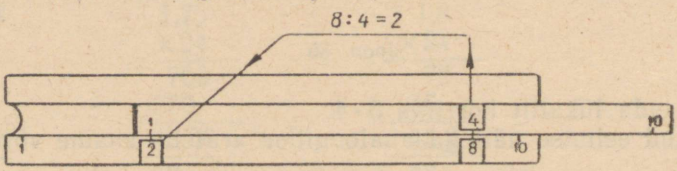
Kui andmed on l i g i k a u d s e d, siis tuleb toimida ligikaudsete arvude korrutise ümardamise eeskirja järgi.

N ä i d e. Ligikaudsete arvude 3,75 ja 4,7 korrutamisel saame korrutise tüvenumbriteks 1—7—6, millest pärast ümardamist kahe tüvenumbrini saame 1—8. Ligikaudse hinnangu (4 · 5) järgi anname vastuseks 18.

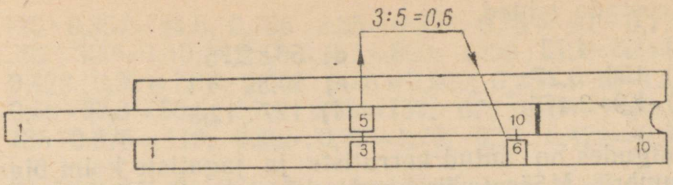
5. Vaatleme täpsete arvude jagamist.

Jagamine on korrutamise pöördtehe, s. t. korrutise ja ühe teguri järgi teise teguri leidmine. Lükatiga korrutamisel (joon. 85 ja 86) jääb korrutis (jagamisel tuleb sellele vaadata kui jagatavale) *D*-skaalale. *C*-skaalal on korrutisega kohakuti üks tegur (jagamisel tuleb sellele vaadata kui jagajale); teine tegur (jagamise korral on see jagatis) on *D*-skaalal *C*-1 (või *C*-10) kohal. Siit selgub lükatiga jagamise eeskiri.

Märgime jagatava D-skaalal. Jagatavaga lükkame kohakuti jagaja C-skaalalt. Jagatise tüvenumbrid loeme D-skaalalt C-1 (või C-10) kohalt (joon. 87 ja 88).



Joon. 87



Joon. 88

N ä i d e. Leida jagatis 57,8 : 6,7.

Märgime *D*-skaalal 57,8. Sellega lükkame kohakuti *C*-6,7. *D*-skaalal *C*-10 kohalt loeme jagatise tüvenumbriteks 8—6—3. Ligikaudne hinnang ühe tüvenumbrini ümardatud andmetega (60 : 7) ütleb, et tulemus on 8,63.

Kui andmed on ligikaudsed, siis tuleb toimida ligikaudsete arvude jagatise ümardamisreegli kohaselt.

Küsimusi ja ülesandeid.

359. Arvutamata teha kindlaks mitme tüvenumbrini tuleb ümardada järgmised ligikaudsete arvude korrutised ja jagatised.

a) 3,8 · 5,27
b) 0,23 · 52,49
c) 12,1 · 0,3
d) 0,0325 · 12,894
e) 2780 · 0,0025
f) 42,7 : 15
g) 0,495 : 0,37
h) 327 : 3,25
i) 0,0349 : 0,9
j) 2700 : 0,98

360. Teostada tehted ligikaudsete arvudega, ümardades tulemuse korrutise ja jagatise ümardamisreegli kohaselt.

a) 5,6 · 2,7
b) 3,2 · 4,56
c) 0,89 · 427
d) 0,08 · 15,62
e) 28 · 35,49
f) 19,7 : 5,6
g) 0,498 : 0,32
h) 159,5 : 2,47
i) 67,5 : 0,24
j) 6500 : 273

361. Teostada tehted ligikaudsete arvudega, ümardades eelnevalt (kus võimalik) suurema tüvenumbrite arvuga komponendid nii, et neis jääks üks varunumber.

a) 0,9568 · 5,9
b) 4,95184 · 18,9
c) 6,79 · 2,5
d) 0,05 · 4,97
e) 0,027 · 5,63
f) 19,4 : 0,32
g) 27,352 : 19,2
h) 1,75 : 2,3
i) 0,75 : 0,2739
j) 675 : 32

362. Teostada tehted.

a) $1{,}3 \cdot 4{,}75$
b) $156 \cdot 0{,}27$
c) $1{,}9 \cdot 3{,}475$
d) $56 : 2{,}75$
e) $19{,}89 : 4{,}1$
f) $127 : 12{,}3$

363. Sulgudes on antud korrutiste ja jagatiste kolm õiget tüvenumbrit. Määrata ligikaudse hinnangu teel koma asukoht.

a) $3{,}7 \cdot 5{,}6 = (207)$
$3{,}95 \cdot 16{,}8 = (664)$
$321 \cdot 1{,}47 = (472)$
$45{,}7 \cdot 0{,}891 = (407)$
$0{,}372 \cdot 0{,}92 = (342)$

b) $4{,}9 \cdot 3{,}8 = (186)$
$12{,}9 \cdot 11{,}2 = (144)$
$139 \cdot 3{,}98 = (553)$
$3{,}56 \cdot 0{,}37 = (132)$
$0{,}167 \cdot 0{,}935 = (156)$

c) $2{,}65 \cdot 13{,}4 = (355)$
$8{,}78 \cdot 9{,}47 = (831)$
$67{,}4 \cdot 52{,}3 = (352)$
$0{,}875 \cdot 0{,}48 = (420)$
$0{,}038 \cdot 0{,}571 = (217)$

d) $4{,}37 : 2{,}1 = (208)$
$367 : 12{,}7 = (289)$
$3{,}75 : 8{,}05 = (466)$
$2{,}56 : 45{,}5 = (563)$
$0{,}375 : 0{,}32 = (117)$

e) $9{,}31 : 3{,}95 = (236)$
$67{,}5 : 19{,}8 = (341)$
$2{,}45 : 7{,}53 = (325)$
$5{,}62 : 0{,}51 = (110)$
$0{,}875 : 2{,}31 = (379)$

f) $18{,}4 : 5{,}67 = (325)$
$72{,}5 : 2{,}5 = (290)$
$1{,}47 : 8{,}6 = (171)$
$12{,}7 : 0{,}87 = (146)$
$0{,}75 : 0{,}565 = (133)$

364. Kontrollida lükati abil järgmised korrutised ja jagatised.

a) $1{,}2 \cdot 1{,}3 = 1{,}56$
$3{,}2 \cdot 1{,}56 = 4{,}99$
$3{,}47 \cdot 5{,}66 = 19{,}6$
$0{,}532 \cdot 0{,}4 = 0{,}213$

b) $2{,}5 \cdot 3{,}4 = 8{,}50$
$7{,}81 \cdot 1{,}62 = 12{,}7$
$0{,}47 \cdot 56{,}5 = 26{,}6$
$0{,}37 \cdot 0{,}47 = 0{,}174$

c) $3{,}1 \cdot 1{,}5 = 4{,}65$
$32{,}4 \cdot 2{,}8 = 90{,}7$
$8{,}75 \cdot 0{,}69 = 6{,}04$
$0{,}051 \cdot 0{,}8 = 0{,}0408$

d) $4{,}2 \cdot 5{,}6 = 23{,}5$
$1{,}87 \cdot 2{,}56 = 4{,}79$
$0{,}42 \cdot 0{,}97 = 0{,}407$
$0{,}12 \cdot 0{,}3 = 0{,}0360$

e) $4{,}2 : 2{,}1 = 2{,}00$
$4{,}5 : 2{,}2 = 2{,}04$
$47{,}5 : 16{,}2 = 2{,}93$
$2{,}8 : 3{,}4 = 0{,}824$

f) $6{,}8 : 3{,}4 = 2{,}00$
$3{,}24 : 3 = 1{,}08$
$7{,}85 : 5{,}6 = 1{,}40$
$3{,}47 : 6{,}72 = 0{,}517$

g) $3{,}2 : 0{,}52 = 6{,}16$
$0{,}395 : 2{,}15 = 0{,}184$
$9{,}7 : 3{,}2 = 3{,}03$
$3{,}2 : 1{,}2 = 2{,}67$

h) $2{,}71 : 0{,}435 = 6{,}24$
$1350 : 0{,}375 = 3600$
$6{,}3 : 3 = 2{,}10$
$5{,}65 : 4{,}2 = 1{,}35$

i) $125 \cdot 0{,}357 = 44{,}6$; $0{,}756 : 2{,}35 = 0{,}322$; $0{,}95 \cdot 0{,}81 = 0{,}770$;
$357 : 300 = 1{,}19$; $1950 \cdot 0{,}457 = 890$; $1300 : 3250 = 0{,}400$;
$0{,}472 : 0{,}32 = 1{,}47$; $0{,}056 : 0{,}28 = 0{,}200$; $0{,}25 \cdot 47{,}9 = 12{,}0$;
$0{,}58 \cdot 87{,}3 = 50{,}6$; $57{,}9 : 0{,}38 = 152$; $675 : 0{,}47 = 1440$;
$136 \cdot 0{,}875 = 119$; $0{,}565 : 0{,}32 = 1{,}76$; $0{,}27 : 0{,}472 = 0{,}572$.

365. Kontrollida lükati abil järgmised ligikaudsete arvude korrutised ja jagatised.

a) $3{,}2 \cdot 4{,}1 \approx 13$; $3{,}4 \cdot 1{,}5 \approx 5{,}1$; $12{,}3 \cdot 4{,}7 \approx 58$;
$3{,}0 \cdot 1{,}50 \approx 4{,}5$; $4{,}70 \cdot 2{,}00 \approx 9{,}40$; $0{,}3 \cdot 12{,}5 \approx 4$;
$0{,}30 \cdot 12{,}5 \approx 3{,}8$; $0{,}300 \cdot 12{,}5 \approx 3{,}75$; $3{,}2 \cdot 4{,}73 \approx 15$;
$1{,}1 \cdot 10{,}6 \approx 12$; $120 \cdot 0{,}52 \approx 62$; $130 \cdot 57 \approx 7400$.

b) $5{,}1 : 4{,}1 \approx 1{,}2$; $8{,}95 : 7{,}5 \approx 1{,}2$; $4{,}22 : 2{,}0 \approx 2{,}1$;
$8{,}91 : 5{,}1 \approx 1{,}7$; $2{,}35 : 1{,}2 \approx 2{,}0$; $13{,}2 : 1{,}4 \approx 9{,}4$;
$15{,}6 : 5{,}1 \approx 3{,}1$; $5{,}1 : 10{,}4 \approx 0{,}49$; $11{,}2 : 20{,}1 \approx 0{,}558$;
$16{,}2 : 0{,}3 \approx 50$; $176 : 0{.}85 \approx 210$; $935 : 0{,}76 \approx 1200$.

c) $0{,}52 \cdot 17{,}1 \approx 8{,}9$; $0{,}67 : 0{,}21 \approx 3{,}2$; $1350 : 0{,}72 \approx 1900$;
$120 \cdot 56 \approx 6700$; $0{,}58 \cdot 6760 \approx 3900$; $0{,}82 : 0{,}47 \approx 1{,}7$;
$0{,}6 \cdot 87 \approx 50$; $0{,}8 : 3{,}25 \approx 0{,}2$; $0{,}80 : 3{,}25 \approx 0{,}25$.

366. Leida lükati abil järgmised korrutised ja jagatised.
$3{,}7 \cdot 5{,}6$; $2{,}8 \cdot 9{,}76$; $15{,}2 \cdot 4{,}7$; $16{,}8 : 3{,}76$; $19{,}2 \cdot 5$; $37{,}3 : 7$;
$7 \cdot 29{,}9$; $15{,}2 \cdot 25$; $19{,}1 : 37{,}4$; $2{,}8 : 6{,}74$; $0{,}72 \cdot 17{,}5$; $3{,}87 : 0{,}47$;
$0{,}92 : 0{,}6$; $0{,}78 \cdot 0{,}57$; $0{,}3 : 0{,}45$; $128 : 0{,}47$; $156 \cdot 13{,}4$; $173 \cdot 0{,}457$;
$0{,}052 \cdot 679$; $1320 : 98$.

367. Leida lükati abil järgmised ligikaudsete arvude korrutised ja jagatised.
$4{,}7 \cdot 2{,}87$; $16{,}2 : 3{,}7$; $120 : 6{,}2$; $16{,}9 \cdot 0{,}91$; $15{,}6 : 0{,}82$; $19{,}2 \cdot 1{,}2$;
$376 : 120$; $15{,}8 \cdot 21$; $3670 : 1200$; $6{,}05 : 0{,}32$; $0{,}97 \cdot 257$; $32{,}7 : 0{,}6$;
$18{,}9 : 0{,}72$; $0{,}756 : 0{,}60$; $10{,}2 \cdot 5{,}2$; $4{,}07 \cdot 0{,}49$; $562 \cdot 8{,}9$;
$19{,}2 \cdot 5{,}97$; $0{,}10 \cdot 3{,}72$; $5{,}62 : 0{,}30$.

368. Leida:
67% 57-st; 89% 123-st; 10,2% 27-st; 67% 11-st; 32% 32-st;
8% 13-st; 4% 139-st; 5,2% 79-st.
Näide. 28% 69,7-st on $0{,}28 \cdot 69{,}7 = 19{,}5$.

369. Leida arv, millest:
32% on 21; 47% on 52; 27% on 15,7;
56,7% on 19,6; 67,2% on 87,5; 37,4% on 137;
8,2% on 27,3; 3% on 19,4; 1,5% on 8,7.
Näide. Arv, millest 29% on 47,6, on $47{,}6 : 0{,}29 = 164$.

370. Mitu protsenti on:
12,8 35-st; 11,2 16-st; 3,47 9,8-st; 6,5 27,8-st; 98 120-st;
372 465-st; 3,2 67,8-st; 1,5 49-st; 0,73 2,47-st?

Näide. 17,5 on 56,8-st $\frac{17,5}{56,8}=0,308=30,8\%$.

Märkus. Järgmised tekstülesanded lahendada lükati abil.

371. Arvutada toa põranda pindala, kui põranda laius on 4,87 m ja pikkus 3,78 m. (18,4 m^2)

372. Ühe ruutmeetri põranda värvimiseks kulub 0,14 kG värvi. Palju värvi kulub, kui põranda pindala on 19,5 m^2? (2,7 kG)

373. Kui palju nisu saadakse 15 ha suuruselt põllult, kui keskmine hektarisaak on 18,5 ts? (280 ts)

374. Traktorist kündis ühel päeval 6,7 ha põldu. Järgmisel päeval kündis ta 25% rohkem. Mitu hektarit kündis traktorist järgmisel päeval rohkem? (1,7 ha)

375. Abruka saare pindala on 10,6 km^2 ja Vilsandi saare pindala 8,9 km^2. Mitu korda on Abruka saare pindala suurem Vilsandi saare pindalast? (1,2 korda)

376. Kartulipõllul on 7 kuhja, igaühes 13 tonni kartuleid. Mitu tonni kartuleid on põllul?

377. Võrdkülgse kolmnurga külje pikkus on ligikaudu 4,3 cm. Arvutada kolmnurga ümbermõõt. (13 cm)

378. Põllult, mille pindala on 85 ha, saadi 1430 tonni kartuleid. Palju kartuleid saadi keskmiselt igalt hektarilt? (17 tonni)

379. Kolhoos varus 180 ha suuruse põllu väetamiseks 46,5 tonni superfosfaati. Kui palju superfosfaati arvestatakse iga hektari kohta? (260 kG)

380. Klassi ruumala on 235 m^3. Põranda pindala on 66 m^2. Kui kõrge on klass? (3,6 m)

381. Klassi ruumala on 242 m^3. Klassis õpib 27 õpilast. Mitu kuupmeetrit õhku tuleb iga õpilase kohta? (8,96 m^3)

382. 12,7 m pikkune nöör tuleb jaotada kolmeks võrdseks tükiks. Kui pikk on iga tükk? (4,23 m)

383. 17 ühesugust kuullaagri kuuli kaaluvad 19,8 G. Kui palju kaalub üks kuul? (1,16 G)

§ 38. LIGIKAUDSETE ANDMETEGA MITME TEHTEGA ÜLESANDED.

Eespool vaadeldud ülesanded olid kõik ühe tehtega ülesanded.

Mitme tehtega ülesandes on ühe tehte tulemus lähteandmeks teisele tehtele; teise tehte tulemus võib olla omakorda lähteandmeks kolmandale tehtele jne., kuni jõuame viimase tehteni, mille tulemus annab ülesande vastuse. Kuidas ümardada vahepealsete tehete tulemusi, s. o. neid tulemusi, mis on lähteandmeteks järgmistele tehetele?

N ä i d e. Arvutada ligikaudsete andmetega avaldise

$$x = 10{,}6 \cdot 8{,}2 + 2{,}523 \cdot 1{,}52 - 1{,}34$$

väärtus.

Lahendame selle ülesande kolmel viisil.

E s i m e n e l a h e n d u s. Jätame vahepealsete tehete tulemused ümardamata, s. t. arvutame nagu täpsete arvudega.

1. tehe
10,6
× 8,2
212
848
86,92

2. tehe
2,523
×1.52
5046
12615
2523
3,83496

3. tehe
3,83496
+86,92
90,75496

4. tehe
90,75496
−1,34
89,41496

$x = 89{,}41496$

T e i n e l a h e n d u s. Ümardame kõigi vahepealsete tehete tulemused vastavalt tehete tulemuste ümardamisreeglitele.

1. tehte tulemus on siis 87.
2. tehte tulemus on 3,83.

3. tehe[1]
3,8
+87
90,8
91

4. tehe
91
−1,3
89,7
90

$x \approx 90.$

Ümardades ka eelmise lahenduse tulemuse ühelisteni, saame 89. Tulemused on seega erinevad. Seepärast tuleb teine lahendus käik lugeda ebaõigeks.

K o l m a s l a h e n d u s. Ümardame kõigi vahepealsete tehete tulemused nii, et neis jääks üks number rohkem (varunumber),

kui seda nõuavad tehete tulemuste ümardamisreeglid. Varunumbrit ei loeta tüvenumbriks ja lõpptulemusest ta kustutatakse ümardamise teel. Kirjalikul arvutamisel tähistame varunumbrit kriipsukesega.

1. tehte tulemus 86,9.
2. tehte tulemus 3,835.

3. tehe [1]

$$\begin{array}{r} 3{,}835 \\ +\,86{,}9 \\ \hline 90{,}735 \\ \hline 90{,}7 \end{array}$$

4. tehe

$$\begin{array}{r} 90{,}7 \\ -\,1{,}34 \\ \hline 89{,}36 \\ \hline 89 \end{array}$$

$x \approx 89$.

Saime sama tulemuse mis esimese lahenduse korral pärast ühelisteni ümardamist, kuid palju väiksema töökuluga. Siit reegel: **kui ligikaudsete andmetega ülesandes on mitu tehet, siis vahepealsete tehete tulemused ümardatakse nii, et neis jääks üks number rohkem kui nõuavad tehete tulemuste ümardamise reeglid; lõpptulemusest kustutatakse varunumber ümardamise teel.**

Näide. Viljasalve pikkus on 8,75 m ja laius 4,3 m. Vilja sügavus salves on 1,6 m. Mitu tsentnerit vilja on salves, kui on teada, et 1 ts vilja võtab enda alla 0,13 m^3?

Lahendus (lükatiga).

Salve põhja pindala: $8{,}75 \cdot 4{,}3 = 37{,}6\ m^2$;

Vilja ruumala: $37{,}6 \cdot 1{,}6 = 60{,}2\ m^3$;

Vilja kaal tsentnerites: $60{,}2 : 0{,}13 = 463\ ts \approx 460\ ts$.

Vastus. Salves on 460 ts vilja.

Märkus. Edaspidi kasutame kõigi ülesannete lahendamisel, kus võimalik, lükatit; see on siis, kui kahe arvu korrutises või jagatises ei ole vaja enam kui kolm tüvenumbrit.

Küsimusi ja ülesandeid.

384. Teostada tehted ligikaudsete arvudega.

a) $3{,}7 \cdot (16{,}8+4{,}79)+15{,}9 : (3{,}7-1{,}23)$
b) $15{,}7 \cdot (8{,}9-1{,}2 \cdot 2{,}75)-(3{,}5 \cdot 7{,}85+0{,}47) : 7{,}8$
c) $(18{,}7-3{,}789) \cdot 0{,}98+8{,}3 \cdot 1{,}95$
d) $0{,}75+0{,}2-0{,}88 \cdot (17{,}8-0{,}45)+17{,}8$
e) $4{,}05 : (19{,}5-17{,}56)+0{,}251 \cdot (25{,}72-24{,}31)$

(86; 84; 31; 3; 2,44)

385. Leida järgmiste avaldiste ligikaudne väärtus, teisendades harilikud murrud kümnendmurdudeks sajandikeni.

[1] 3. ja 4. tehtes on suurema täpsusega andmed eelnevalt ümardatud (vt. § 34, p. 2).

a) $\frac{\left(3{,}25-1\frac{4}{7}\right)\cdot 3\frac{1}{3}}{4\frac{5}{6}-2\frac{1}{4}}$ b) $5\frac{3}{4}\cdot\frac{5\frac{6}{7}+3\cdot 2\frac{7}{8}}{6{,}57-2:5\frac{1}{10}}$

(2,17; 13)

386. Vaja on värvida kolm tuba mõõtmetega 3,2 m×4,7 m; 5,6 m×4,3 m ja 2,9 m×3,2 m. Mitu kilogrammi värvi kulub nende tubade värvimiseks, kui 1 m^2 katmiseks arvestada 0,17 kG värvi? (8,2 kG)

387. Kui palju kaalub ruudukujuline klaasplaat, mille serva pikkus on 72,0 cm ja paksus 2,5 mm? Klaasi erikaal on 2,6. (3,4 kG)

388. Risttahuka ruumala on ligikaudu 87,8 cm^3 ja tema kaks serva ligikaudu 3,2 cm ja 4,8 cm. Arvutada kolmas serv. (5,7 cm)

389. Trapetsi alused on ligikaudu 43,7 m ja 38,9 m. Arvutada trapetsi kesklõik.

390. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on ligikaudu 12,9 cm ja kõrgus 17,0 cm. Arvutada püramiidi ruumala.

391. 1963. a. oktoobripühade eel oli Tartu tööstusettevõtetes 1 245 ratsionaliseerijat, s. o. ligi 8% rohkem kui eelmisel aastal. Mitu ratsionaliseerijat oli Tartu tööstusettevõtetes eelmisel aastal? (1 150)

392. Tootmisvalitsuse piirkonna kolhoosid ja sovhoosid müüsid riigile 5 270 tonni teravilja, sellest 512 tonni üle plaani. Mitme protsendi võrra ületati plaani? (10,7%)

393. 1958. a. sulatati NSV Liidus 55 miljonit tonni terast; 1965. aastaks suureneb terase toodang 65,3% võrra. Palju terast toodetakse 1965. a.? (91 milj. tonni)

394. Plekist kuubikujuline anum, mille serva pikkus on 3,4 cm, on täidetud ääreni veega. Kui palju vett jääb anumasse, kui sinna lasta rauast kuup serva pikkusega 2,6 cm. Kui palju muutub rauast kuup vees kergemaks? (22 cm^3; 18 G)

395. Kui palju plekki on vaja kinnise kuubikujulise anuma valmistamiseks, mille serva pikkus on 2,7 dm. Jootekuludeks arvestada 5% vajalikust materjalist. Kui suur on selle anuma ruumala? (46 dm^2; 20 l)

396. Tapeedirulli pikkus on 12 m ja laius 50 cm. Mitu rulli tapeeti on vaja osta toa tapeetimiseks, kui toa põranda mõõtmed on 6,10 m×4,10 m ja kui tapeetida tahetakse 2,70 m kõrguseni. Akende ja uste pindala on $\frac{1}{5}$ seinte pindalast. (8 rulli)

397. Anum koos veega kaalub 57,8 kG. Kui sellest nõust kallata ära $\frac{3}{4}$ kogu veest, siis kaalub nõu koos järelejäänud veega 17,6 kG. Kui palju kaalub tühi nõu? (4,2 kG)

398. Rööpkülikukujuline plekitükk kaalub 750 G. Plekitüki pikemate servade pikkus on 3,0 dm ja nende servade vaheline kaugus on 2,2 dm. Kui paks on see plekk, kui materjali erikaal on 7,8? (1,5 mm)

399. Kui palju kaalub üks ruutmeeter 1 mm paksust vaskplekki (erikaal 8,9)? Kui palju kaalub rööpkülikukujuline tükk sedasama plekki, kui rööpküliku alus on 56 cm ja kõrgus 72 cm? (8,9 kG; 3,6 kG)

400. Terade niiskuse määramiseks võeti 50,0 grammi raskune terade proov ja kuivatati see. Pärast kuivatamist kaalus proov 41,5 G. Mitu protsenti sisaldasid terad niiskust? (17%)

401. Kontrollimisel tehti kindlaks, et terad sisaldavad 16% niiskust. 1,8 ts terade esmakordsel kuivatamisel väheneb terade kaal 18 kG võrra. Mitu protsenti niiskust jäi veel teradesse pärast esmakordset kuivatamist? (7%)

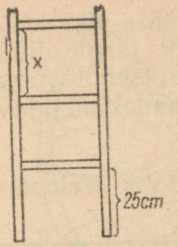
402. 1962. a. jooksul suurenes elanikkonna hoiuste summa Eesti NSV-s 7 miljoni rubla võrra ja see moodustas aasta lõpuks 84 miljonit rubla. Mitme protsendi võrra suurenes hoiuste summa aasta jooksul?

403. Ühes nisupeas olevad terad kaaluvad ligikaudu 5 G. Milline on kahju, kui kolhoosis on 35 ha nisu ja kui koristamisel variseb iga ruutmeetri kohta ainult 1 nisupea? (2 tonni)

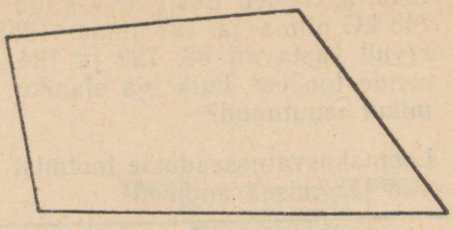
404. 2,8 meetri pikkusel redelil (joon. 89) on 8 pulka. Alumine pulk on redeli otsast 25 cm, ülemine 15 cm kaugusel. Kui suur on iga pulga vahe, kui pulga läbimõõt on 4,0 cm? (30 cm)

405. Joonisel 90 on kujutatud maatüki plaan mõõdus 1 : 1 000. Teha vajalikud mõõtmised ja arvutada maatüki pindala.

Näpunäide. Jaotada antud nelinurk diagonaalide abil kaheks kolmnurgaks.



Joon. 89



Joon. 90

Üldiseks kordamiseks.

406. Tuua näiteid ligikaudsetest arvudest; täpsetest arvudest.

407. Millised numbrid on ligikaudse täisarvu tüvenumbrid?

408. Millised numbrid on ligikaudse kümnendmurru tüvenumbrid?

409. Mis on aritmeetiline keskmine? Kuidas rakendatakse aritmeetilist keskmist mõõtmisel?

410. Kuidas ümardatakse ligikaudsete arvude summat? vahet? korrutist? jagatist?

411. Kuidas lahendatakse ligikaudsete arvudega ülesandeid mitmele tehtele?

412. Teostada tehted ligikaudsete arvudega.

a) $3{,}72+16{,}8$
b) $17{,}37+0{,}526$
c) $19{,}63-0{,}7$
d) $19{,}75+0{,}429-0{,}78$
e) $15{,}1-0{,}987+15{,}2$
f) $19{,}3 \cdot 2{,}75$
g) $374 : 19{,}2$
h) $(15{,}07-2{,}000) \cdot 11{,}3$

413. Kui palju vaske on vaja 37,5 kG pronksi valmistamiseks, kui pronksis on 77% vaske? Kui palju pronksi saab valmistada 57 kG vasest? (29 kG; 73 kG)

414. Kolmnurga alus on ligikaudu 10,8 cm ja kõrgus 9,7 cm. Arvutada kolmnurga pindala.

415. Rööpküliku alus on ligikaudu 17,5 cm ja kõrgus 11,2 cm. Arvutada rööpküliku pindala.

416. Tehas, ületades aastaplaani 6% võrra, andis toodangut 16 miljoni rubla väärtuses. Milline oli planeeritud toodangu väärtus?

417. 1940. a. toodeti Eesti NSV-s iga elaniku kohta 68,5 kG liha, 743 kG piima ja 127 muna. 1963. a. plaani järgi olid need arvud vastavalt 88, 722 ja 194. Mitme protsendi võrra oli nende toodete hulk iga elaniku kohta vaadeldud ajavahemikul muutunud?

418. Loomakasvatussaaduste tootmist Eesti NSV-s iseloomustavad järgmised andmed.

Toodangu liik	1940	1945	1953	1958	1962
Liha tapakaalus (tuhanded tonnid)	72,1	30,4	54,4	77,5	99,0
Piima (tuhanded tonnid)	782	393	553	734	807
Munad (milj. tükki)	134	31,4	151	188	233

Väljendada iga toodanguliigi kasv (kahanemine) protsentides ajavahemikul 1940—1945, 1945—1953, 1953—1958, 1958—1962, 1940—1962.

419. NSV Liidus toodeti ja toodetakse 1 minuti jooksul:

Toodangu liik	1940. a.	1961. a.	1965. a.
Rauamaak (tonnides)	57,2	226	295
Kivisüsi (tonnides)	318	976	1150
Nafta (tonnides)	59,2	318	445

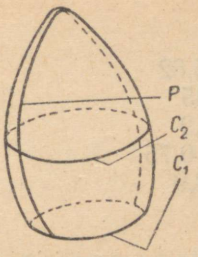
Väljendada iga toodanguliigi kasv ühe minuti kohta protsentides ajavahemikul 1940—1961, 1961—1965, 1940—1965.

420. Arvutada raudtala kaal, kui tala ruudukujulise ristlõike serv on 7,6 cm ja pikkus 1,31 m. Raua erikaal on 7,8.

421. Heinakuhja (joon. 91) ruumala ligikaudseks määramiseks mõõdetakse kuhja põhja ümbermõõt C_1 ja kuhja kõige jämedama koha ümbermõõt C_2 ning leitakse nende aritmeetiline keskmine C. Siis visatakse nöör üle kuhja ja mõõdetakse nööri pikkus P (üleviske pikkus). Kuhja ruumala V arvutatakse valemist

$$V \approx \left(\frac{P}{25} - \frac{C}{83}\right) \cdot C^2.$$

Arvutada kuhja ruumala ja kaal, kui $P = 12{,}5$ m, $C_1 = 13$ m, $C_2 = 15$ m ja kui 1 m³ heinu kaalub 55 kG. (3,6 tonni)



Joon. 91



Joon. 92

422. Kraavi ristlõige on võrdhaarse trapetsi kujuline (joon. 92). Kraavi laius põhjast on 0,8 m, veepinnalt mõõdetuna aga 1,4 m. Mitu kuupmeetrit vett on 145 m pikkuses kraavis, kui vee sügavus on 0,75 m? (120 m^3)

423. Mitu kuupmeetrit pinnast peab ekskavaator 2,2 m sügavuse ja 240 m pikkuse magistraalkraavi kaevamisel välja tõstma, kui kraavi laius põhjast on 1,3 m ja maapinnalt 3,2 m? (1200 m^3)

424. Raudteetammi muldkeha laius alt on 5,3 m, ülalt aga 3,0 m. Mitu kuupmeetrit mulda on 75 m pikkuses muldkehas, mille kõrgus on 1,2 m? (370 m^3)

425. Leida järgmiste avaldiste täpne väärtus:

a) $\dfrac{5{,}6+3\frac{2}{5}}{4\frac{1}{2}-2{,}7} : 4\frac{5}{6}$; b) $\dfrac{3\frac{2}{3}\cdot 5\frac{3}{5}-4{,}6}{1{,}25+3{,}4\cdot 1\frac{4}{5}} \cdot 4\frac{1}{3}$.

426. Lihtsustada avaldised ja arvutada nende väärtused.

a) $\dfrac{ab+b^2}{a^2-b^2} : \dfrac{a+b}{a-b}$, kui $a \approx 3{,}82$; $b \approx -1{,}3$.

b) $\dfrac{a}{a-b} - \dfrac{2a}{2-a} - \dfrac{3a^2+a-10}{a^2-4}$, kui $a \approx 1{,}73$.

c) $\dfrac{2}{a+b} + \dfrac{3}{a-b} + \dfrac{4a-10b}{a^2-b^2}$, kui $a \approx 3{,}2$; $b \approx 1{,}789$.

Kodune kontrolltöö nr. 6.

1. Leida järgmiste ümardatud arvude ümardamisvea ülemmäär: 1266; 37; 250; 400; 15 000; 6,7; 19,83; 0,52; 16,0; 17,850; 0,0500.
2. Ümardada ühe tüvenumbrini: 38; 137; 293; 1568; 37,5; 3,87; 16,398; 0,32; 0,0675.

3. Teostada tehted ligikaudsete arvudega.

a) $3{,}27+5{,}675$
$0{,}87+11{,}3$
$250+32+47{,}85$
$125+320-4{,}7$
$9{,}75-(2{,}3+4{,}7893)$

b) $3{,}27 \cdot 5{,}62$
$4{,}75 \cdot 45$
$375 : 8{,}9$
$16{,}87 : 0{,}75$
$19{,}8 : 0{,}9$

c) $11{,}25 \cdot (3{,}79-1{,}2347)$

$$\frac{0{,}75 : (11{,}2+4{,}796)}{2{,}77} \qquad \frac{2.3 : (16{,}8-14{,}756)}{1{,}2 \cdot 4{,}3-2{,}3 \cdot 1{,}7}$$

4. Lahendada võrded:

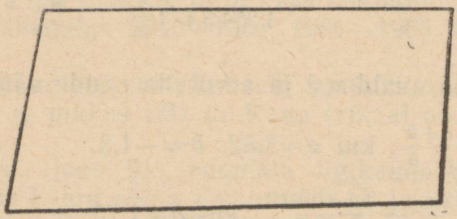
$$\frac{6{,}75}{x}=\frac{3{,}27}{5{,}6}; \quad \frac{19.3}{3{,}7}=\frac{x}{4{,}75}; \quad \frac{16{,}8}{0{,}93}=\frac{3{,}75}{x};$$

$$\frac{0.87}{0{,}95}=\frac{x}{1{,}37}; \quad \frac{0.93}{1{,}37}=\frac{4{,}2}{x}; \quad \frac{8{,}9}{x}=\frac{0{,}75}{6{,}5}.$$

5. Mõõtmisel saadi, et toa põranda mõõtmed on 5 m×4 m. Mitu kilogrammi värvi on vaja selle põranda värvimiseks, kui ühe ruutmeetri kohta kulub 170 G värvi?

6. Joonisel 93 on kujutatud aiamaa plaan mõõdus 1 : 1000. Teha vajalikud mõõtmised ja arvutada aiamaa pindala.

Sellest aiamaast 60% kuulub viljapuude alla; ülejäänud maa kuulub juurvilja alla. Mitu aari maad on viljapuude all, mitu juurvilja all?



Joon. 93

VI PEATÜKK.

RINGJOON, SILINDER, KOONUS, KERA.

§ 39. RINGJOON JA TEMAGA SEOSES OLEVAID MÕISTEID.

1. Joonisel 94 on antud sirglõik OA. Pöörame seda lõiku joonise tasapinnas ümber ühe otspunkti O. Punkti A kaugus punktist O jääb siis muutumatuks ja seepärast jõuab punkt A pärast täispöörde sooritamist algasendisse tagasi. Punkt A joonestas tasapinnalise kinnise kõverjoone — **ringjoone.**

2. **Ringjooneks nimetatakse tasapinnalist kinnist kõverjoont, mille kõik punktid on ühest kindlast punktist — ringjoone keskpunktist — võrdsetel kaugustel.**

Tasapinna osa, mis on piiratud ringjoonega, nimetatakse **ringiks.**

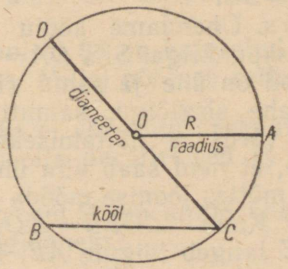
Sirglõiku, mis ühendab ringjoone mistahes punkti ringi keskpunktiga, nimetatakse ringi **raadiuseks.** (Tähistatakse tähega R või r.)

Sirglõiku, mis ühendab ringjoone kaht punkti, nimetatakse **kõõluks** (BC joonisel 94).

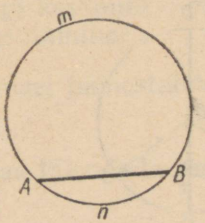
Keskpunkti läbivat kõõlu CD nimetatakse **diameetriks.** (Tähistatakse tähega D või d.)

Diameeter on raadiusest kaks korda pikem, s. o.

$$d=2R.$$



Joon. 94



Joon. 95

Diameeter jaotab ringi kaheks võrdseks poolringiks, s. t. kui murrame ringi mööda diameetrit kokku, siis mõlemad poolringid ühtivad.

3. Kõõlu otspunktid A ja B (joon. 95) jaotavad ringjoone kaheks kaareks AnB ja AmB. Sümbolites $\overset{\frown}{AnB}$ ja $\overset{\frown}{AmB}$. Üks nendest ($\overset{\frown}{AmB}$) on suurem kui poolringjoon, teine ($\overset{\frown}{AnB}$) aga väiksem.

Millal on mõlemad kaared võrdsed?

Märkus. Kui ülesande sisust on arusaadav, millist kaart mõeldakse, siis märgitakse kaart ainult tema otspunkte tähistavate tähtede abil ($\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{MN}$ jne.).

Kordamiseks.

427. Mis on lõigu keskristsirge?

428. Kuidas ehitada sirkli ja joonlauaga antud lõigule keskristsirget?

429. Milline omadus on lõigu keskristsirge punktidel?

430. Kuidas ehitada sirkli ja joonlauaga sirget, mis oleks risti antud sirgega ja mis läbiks punkti väljaspool antud sirget? punkti antud sirgel?

431. Kus asetsevad punktid, mis on antud lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel?

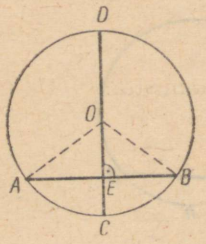
§ 40. KÕÕL JA TEMAGA RISTUV DIAMEETER.

1. Joonisel 96 on antud kõõl AB ja temaga ristuv diameeter CD. Tõestame teoreemi:

kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu ja selle kõõlu otspunkte ühendavad kaared.

Eeldus. $CD \perp AB$.

Väide. $AE=BE$, $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

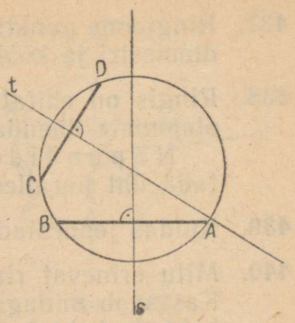


Joon. 96

Tõestus. Ühendame kõõlu otspunktid ringi keskpunktiga. Siis $OA=OB$, sest nad mõlemad on ühe ja sama ringi raadiusteks. Kahe sirglõigu, samuti aga ka kahe kaare võrdsuse näitamiseks piisab, kui näitame, et neid saab viia ühtimisele. Murramegi mõttes joonise mööda diameetrit kokku. Kuna $\angle OEB=\angle OEA=90°$, siis lõik BE langeb lõigule AE. Et $OB=OA$, siis peab punkt B langema punktile A. Seega lõigud BE ja AE ühtivad,

mille tõttu nad ongi võrdsed. Punktide B ja A ühtivuse tõttu on ka $BD=AD$ ja $BC=AC$.

2. Kuna kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu, siis võib öelda, et kõõluga ristuv diameeter asub kõõlu keskristsirgel. Siit järeldub ka, et

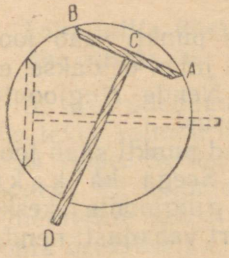


Joon. 97

kõõlu keskristsirge läbib ringi keskpunkti.

Viimast lauset saab kasutada ringi keskpunkti leidmiseks (kui näiteks ringi keskpunkt on kustunud). Selleks ehitame antud ringis vabalt kaks mitteparalleelset kõõlu AB ja CD (joon. 97). Ehitame ühe kõõlu AB keskristsirge s. Ringjoone keskpunkt peab asetsema sellel sirgel. Ehitame teise kõõlu CD keskristsirge t. Ringi keskpunkt peab asetsema ka sellel sirgel. Kuna ringi keskpunkt peab asetsema mõlemal sirgel korraga, siis on ainuke võimalus, et ta asetseb nende sirgete lõikepunktis.

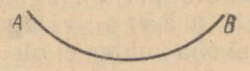
Küsimusi ja ülesandeid.



Joon. 98

432. Leida viga definitsioonis:

a) ringjooneks nimetatakse kinnist kõverjoont, mille kõik punktid on ühest kindlast punktist — ringi keskpunktist — võrdsetel kaugustel.



Joon. 99

b) diameeter on pikim kõõl, mis läbib keskpunkti.

433. Joonisel 98 on kujutatud vahend ringi keskpunkti määramiseks. Millel põhineb selle vahendi kasutamine?

434. Miks ei või ringi keskpunkti määramisel joonestatavad kõõlud olla paralleelsed (§ 40, p. 2)?

435. Joonisel 99 on antud kaar AB. Kuidas täiendada seda kaart ringjooneks?

436. Kuidas poolitada joonisel 99 olevat kaart?

437. Ringjoone punktist on ehitatud diameeter ja kõõl. Leida nurk diameetri ja kõõlu vahel, kui kõõl on võrdne raadiusega.

438. Ringis on ehitatud kaks diameetrit. Tõestada, et diameetri otspunkte ühendavad kõõlud on paralleelsed.

Näpunäide. Vaadelda tekkinud kolmnurki ja kasutada üht paralleelsuse tunnust.

439. Kuidas joonestada ringjoont, mis läbiks kaht antud punkti?

440. Mitu erinevat ringjoont saab joonestada läbi kahe punkti? Kas saab midagi öelda nende ringjoonte keskpunktide asukohtade kohta?

Lahendada sama ülesanne ühe antud punkti korral.

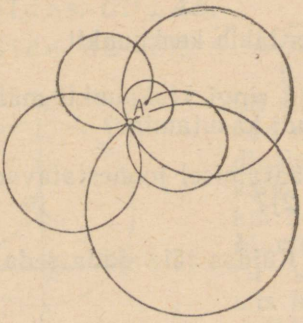
441. Ringi sees on antud keskpunktist erinev punkt A. Kuidas ehitada kõõlu, mis läbiks antud punkti ja poolituks selles punktis?

442. Kuidas ehitada ringjoont, mis läbiks kaht antud punkti ja mille keskpunkt asetseks antud sirgel?

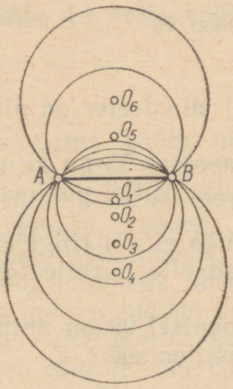
§ 41. RINGJOONE MÄÄRAMINE. KOLMNURGA ÜMBERRINGJOON.

1. Ülesandes 440 selgus, et läbi ühe antud punkti saab joonestada lõpmata palju ringjooni (joon. 100). Sel juhul öeldakse, et üks punkt ei määra ringjoont. Nende ringjoonte keskpunktide suhtes ei ilmne mingit seaduspärasust.

Samas ülesandes selgus, et ka läbi kahe antud punkti saab joonestada lõpmata palju ringjooni (joon. 101). Seega ka kaks punkti ei määra ringjoont. Nende ringjoonte keskpunktide asukoha suhtes ei ole aga enam nii suurt vabadust; nende

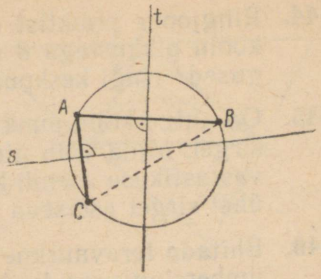


Joon. 100



Joon. 101

ringide keskpunktid asetsevad lõigu AB keskristsirgel.



Joon. 102

2. Vaatleme ringjoone ehitamist läbi kolme antud punkti, mis ei asetse ühel sirgel (joon. 102). Et ringjoon peab läbima kõiki kolme punkti A, B ja C, siis selle ringjoone keskpunkt peab asetsema nendest punktidest võrdsetel kaugustel. Leiame selle keskpunkti.

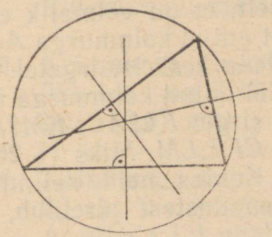
Ühendanud omavahel punktid A ja B ning A ja C (või B ja C), ehitame lõigu AC keskristsirge s. Et lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel olevad punktid asetsevad selle lõigu keskristsirgel, siis peab otsitav keskpunkt asetsema sirgel s. Samal põhjusel peab otsitav keskpunkt asetsema ka lõigu AB keskristsirgel t. Sirgete s ja t lõikepunkt O, mis asetseb korraga mõlemal keskristsirgel, ongi kõigist antud punktidest võrdsetel kaugustel, s. o. $AO=BO=CO$. Seega on punkt O keskpunktiks punkte A, B ja C läbivale ringjoonele. Et igal lõigul saab olla ainult üks keskristsirge, siis on olemas ka ainult üks punkt, mis asetseb kolmest antud punktist võrdsetel kaugustel. Järelikult:

kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti määravad alati ainult ühe ringjoone.

3. Kui ühendame omavahel veel punktid B ja C sirglõiguga, siis tekib kolmnurk ABC. Saadud ringjoon läbib selle kolmnurga kõiki tippe. Sellist ringjoont nimetatakse **kolmnurga ümberringjooneks.** Et kolmnurga ABC küljed on nüüd ringi kõõludeks, siis nimetatakse sellist kolmnurka **kõõlkolmnurgaks.** Kõõlkolmnurga kohta öeldakse ka, et ta on joonestatud ringjoone sisse.

Sirgetele s ja t (joon. 102) võib nüüd vaadata kui kolmnurga kahe külje AC ja AB keskristsirgetele. Kuna punkt O asetseb punktidest B ja C võrdsetel kaugustel, siis peab ta asetsema ka lõigu (kolmnurga külje) BC keskristsirgel. Miks?

Siit teoreem:
kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad kõik ühes punktis; see punkt on kolmnurga ümberringjoone keskpunktiks (joon. 103).


Joon. 103

Küsimusi ja ülesandeid.

443. Defineerida mõisted:
a) kolmnurga ümberringjoon;
b) kõõlkolmnurk.

444. Ringjoone punktist on ehitatud kaks teineteisega ristuvat kõõlu pikkustega 8 cm ja 12 cm. Leida nende kõõlude kaugused[1] ringi keskpunktist. (6 cm; 4 cm)

445. On antud kolm punkti A, B ja C, mis asetsevad ühel ja samal sirgel. Mida võib ütelda lõikude AB, BC, AC keskristsirgete vastastikuse asendi kohta? Kuidas siit järeldub, et läbi kolme ühel sirgel asetseva punkti ei saa ehitada ringjoont?

446. Ehitada teravnurkne kolmnurk ABC ja leida selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt.

447. Ehitada täisnurkne kolmnurk ja leida selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt.

448. Ehitada nürinurkne kolmnurk ja leida selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt.

449. Millise järelduse võiks teha kolme viimase ülesande lahenduse põhjal kolmnurga ümberringjoone keskpunkti asukoha kohta olenevalt kolmnurga kujust?

450. Tõestada, et täisnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt asetseb hüpotenuusil ja jaotab selle pooleks.

Näpunäide. Kasutada kolmnurga kesklõigu ja kõõlu keskristsirge omadust.

§ 42. KOLMNURGA KÕRGUSTE LÕIKUMINE.

Joonisel 104 on antud kolmnurk ABC oma kolme kõrgusega AD, BE, CF.

Millise oletuse võib selle joonise põhjal püstitada kolmnurga kõrguste lõikumise kohta?

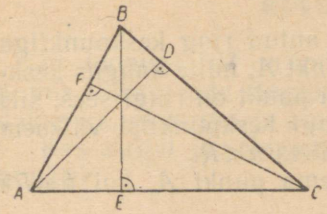
Tõestame teoreemi:

kolmnurga kõrgused lõikuvad kõik ühes punktis.

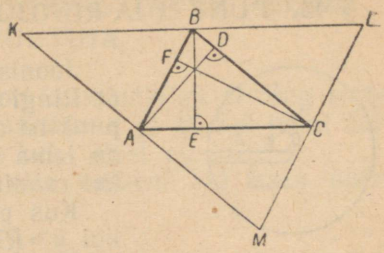
Tõestamisel toetume eelmises paragrahvis käsitletud teoreemile, mille kohaselt kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad kõik ühes ja samas punktis. Näitame nimelt, et on võimalik ehitada teine kolmnurk KLM (joon. 105) nii, et antud kolmnurga ABC kõrgused asetsevad kolmnurga KLM külgede keskristsirgetel.

Kolmnurk KLM on saadud sel teel, et läbi antud kolmnurga iga tipu on ehitatud vastasküljega paralleelne sirge: $KL \parallel AC$, $KM \parallel BC$ ja $LM \parallel AB$. Siis on ka $BE \perp KL$, $AD \perp KM$, $CF \perp LM$. Miks (§ 26)? Vaatleme nelinurki $AKBC$ ja $ABCM$. Kuidas neid nelinurki nimetatakse? Miks? Nende nelinurkade omadustest järeldub, et

[1] Kõõlu kaugus ringjoone keskpunktist on keskpunktist kõõlule ehitatud ristlõigu pikkus.



Joon. 104



Joon. 105

$AK=BC$ ja $AM=BC$, millest $AK=AM$. Miks? Seega punkt A on lõigu KM keskpunkt, mille tõttu kolmnurga ABC kõrgus AD asetseb kolmnurga KLM külje KM keskristsirgel.

Samal viisil saab näidata, et punkt B on lõigu KL keskpunkt ja punkt C lõigu LM keskpunkt.

Milliste nelinurga paaride vaatlusest see järeldub?

Seetõttu on ka antud kolmnurga ABC teised kõrgused BE ja CF kolmnurga KLM külgede keskristsirgetel. Mida sellest saab järeldada antud kolmnurga kõrguste lõikumise kohta?

Küsimusi ja ülesandeid.

451. Defineerida kolmnurga kõrgus.

452. Kuidas arvutatakse kolmnurga pindala?

453. Ehitada teravnurkne, täisnurkne ja nürinurkne kolmnurk ning nende kolmnurkade kõik kõrgused. Mida võib järeldada kolmnurga kõrguste lõikepunkti asukoha kohta olenevalt kolmnurga kujust?

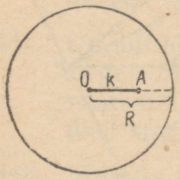
454. Kolmnurgakujulise maatüki ühe külje pikkuseks saadi mõõtmisel 46 m. Selle külje kauguseks vastastipust saadi 42 m. Kui suur on maatüki pindala aarides? (9,7 a)

455. Kolmnurga pindala on ligikaudu 34,8 cm^2. Selle kolmnurga üks külg on 7,20 cm. Arvutada sellele küljele ehitatud kõrgus. (9,67 cm)

456. Kolmnurga kahe külje pikkused on ligikaudu 3,2 dm ja 26 cm. Neist pikemale küljele ehitatud kõrgus on 2,8 dm. Arvutada lühemale küljele ehitatud kõrgus. (3,4 dm)

Näpunäide. Leida enne pindala ja lahendada siis eelmise ülesande eeskujul.

§ 43. PUNKTI JA RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEND.



Joon. 106

Joonisel 106 on antud ring keskpunktiga O. Ringi sees on punkt A, mille kaugus keskpunktist olgu k. Kui punkt on ringi sees, siis on tema kaugus ringi keskpunktist väiksem kui raadius. Sümbolites $k<R$.

Kus peab asetsema punkt A, kui $k=R$? kui $k>R$?

Punkti ja ringjoone vastastikuse asendi suhtes on seega kolm võimalust:

punkt asetseb ringi sees, kui $k<R$;
punkt asetseb ringjoonel, kui $k=R$;
punkt asetseb ringist väljaspool, kui $k>R$.

Küsimusi ja ülesandeid.

457. Ringi raadius on 8 cm. Otsustada punkti asukoha üle, kui tema kaugus ringi keskpunktist on: 0,2 cm; 0,9 dm; 3 cm; 8 cm; 0,082 m.

458. a) On antud ring raadiusega 12 cm ja väljaspool ringi olev punkt, mille kaugus ringjoone lähimast punktist on 6 cm. Arvutada selle punkti kaugus ringjoone kaugeimast punktist. (30 cm)

b) On antud ring raadiusega $3\frac{4}{5}$ m ja seespool ringi olev punkt, mille kaugus ringjoone kaugeimast punktist on $4\frac{1}{2}$ m. Arvutada selle punkti kaugus ringjoone lähimast punktist. (3,1 m)

459. Punkti kõige suurem kaugus ringjoonest on 3,2 dm ja kõige väiksem kaugus 6 cm. Arvutada ringi raadius. Mitu lahendit on ülesandel?

Kordamiseks.

460. Mis on nurgapoolitaja?

461. Kuidas poolitada sirkli ja joonlaua abil antud nurka?

462. Milline omadus on nurgapoolitaja punktidel?

463. Kus asetsevad punktid, mis on nurga haaradest võrdsetel kaugustel?

§ 44. SIRGE JA RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEND. RINGJOONE PUUTUJA.

1. Joonisel 107 on antud ringjoon keskpunktiga O ning sirge s, mis lõikab seda ringjoont kahes punktis A ja B. Sel juhul öeldakse ka, et sirgel ja ringjoonel on kaks ühist punkti.

Kas sirgel ja ringjoonel saab olla rohkem kui kaks ühist punkti?

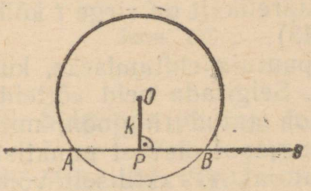
Sirget, millel on ringjoonega kaks ühist punkti, nimetatakse ringjoone lõikajaks.

2. Tähistame lõikaja kauguse keskpunktist tähega k. Kujutleme, et lõikaja eemaldub keskpunktist, jäädes oma algasendiga paralleelseks (joon. 108).

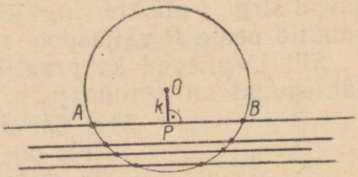
Kuidas muutub k suurenedes punktide A ja B vaheline kaugus, s. o. kõõlu AB pikkus?

Kui sirge s kaugus keskpunktist saab võrdseks raadiusega ($k=R$), siis punktid A ja B langevad kokku punktis P (joon. 109) ja seega on nüüd sirgel s ja ringjoonel ainult üks ühine punkt P.

Sirget, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt, nimetatakse ringjoone puutujaks (sirge s joonisel 109).



Joon. 107



Joon. 108

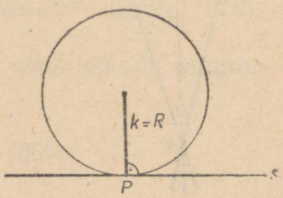
Ringjoone ja puutuja ühist punkti nimetatakse **puutepunktiks** (punkt P joonisel 109).

Puutuja tekkimise viisist (lõikaja eemaldumine keskpunktist) selgub, et

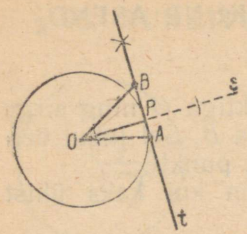
puutuja on risti puutepunktist lähtuva raadiusega,

s. o. $R \perp s$ (joon. 109).

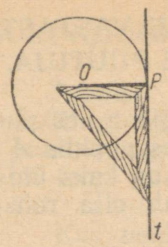
3. Kui sirge s veelgi eemaldub ringi keskpunktist, s. o. kui $k>R$, siis ei ole sirgel ja ringjoonel enam



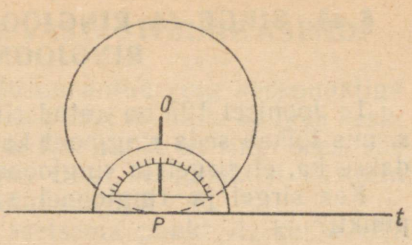
Joon. 109



Joon. 110



Joon. 111



Joon. 112

ühtegi ühist punkti. Seega on sirge ja ringjoone vastastikuse asendi suhtes kolm võimalust:

sirgel ja ringjoonel on kaks ühist punkti, kui $k<R$;

sirgel ja ringjoonel on üks ühine punkt, kui $k=R$;

sirgel ja ringjoonel ei ole ühtegi ühist punkti, kui $k>R$.

4. Ülesanne. Joonestada antud ringjoonele sirkli ja joonlaua abil puutuja, kui puutepunkt P on antud (joon. 110).

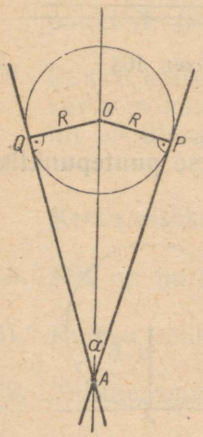
Lahendus. Ehitame raadiuse OP ja pikendame seda üle puutepunkti, saame kiire s. Ehitame sellele kiirele ristsirge t läbi punkti P. Sirge t ongi nõutav puutuja, sest tal ei ole ringjoonega rohkem ühiseid punkte kui üks (P). Tõepoolest, kuna $R \perp t$, siis on raadius lühem kõikidest teistest lõikudest (OA, OB), mis ühendavad sirge t punkte ringi keskpunktiga. Järelikult on sirge t kõik punktid peale P väljaspool ringjoont (§ 43).

Siit järgnevad ka praktilised võtted puutuja ehitamiseks, kui puutepunkt on antud (joon. 111 ja 112). Selgitada neid võtteid.

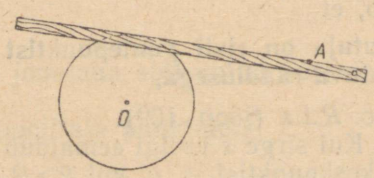
5. Joonisel 113 on antud ringjoon, millele on väljaspool ringjoont olevast punktist A ehitatud kaks puutujat. (Praktiliselt võib seda teha joonlaua abil silma järgi, joon. 114.)

Ringi keskpunkt O asetseb nurga α haaradest võrdsetel kaugustel ($OP=OQ=R$). Seepärast asetseb ringi keskpunkt nurga α poolitajal. Teisiti öeldes:

puutujatevahelise nurga poolitaja läbib ringi keskpunkti.



Joon. 113



Joon. 114

Jooniselt 113 selgub, et

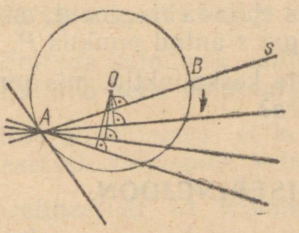
$$\triangle AOQ = \triangle AOP \text{ (miks?)}.$$

Sellest järeldub, et

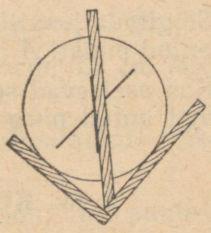
puutujate lõikepunkti ja puutepunktide vahelised puutujate lõigud on võrdsed $(AP = AQ)$.

Küsimusi ja ülesandeid.

464. Kuidas asetseb sirge ringi suhtes, kui ringi diameeter on 8,8 cm ja kui sirge kaugus ringi keskpunktist on 4,1 cm; 3,8 cm; 4,4 cm; $5\frac{3}{5}$ cm; $4\frac{3}{4}$ cm?



Joon. 115



Joon. 116

465. Selgitada puutuja tekkimist joonis 115 abil.

466. Mida võib öelda võrdsete raadiustega ringjoonte keskpunktide asukoha kohta, kui kõik ringjooned puudutavad ühte ja sama sirget?

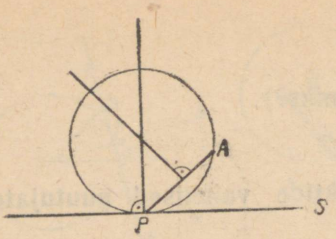
467. Joonisel 116 on kujutatud vahend ringi kustunud keskpunkti määramiseks. Millel põhjeneb selle vahendiga töötamine?

468. Ringjoone puutujate vaheline nurk $\alpha = 38°$ (joon. 113). Arvutada $\angle POQ$. (142°)

Näpunäide. Kasutada kolmnurga sisenurkade summa omadust.

469. $\angle POQ = 120°$ (joon. 113). Arvutada α. (60°)

470. Diameetri otspunktid on puutujast 8,2 cm ja 5,8 cm kaugusel. Arvutada ringi diameeter. (14 cm)



Joon. 117

471. Väljaspool ringjoont asetsevast punktist on joonestatud ringjoonele kaks teineteisega ristuvat puutujat. Arvutada puutujate lõikude pikkused, kui ringi raadius on 8,2 cm.

472. AB ja AC on ringjoone puutujate lõigud; $\angle BAC = 60°$; $AB + AC = 12$ m. Arvutada punktide B ja C vaheline kaugus. (6 m)

473. On antud sirge ja punkt väljaspool seda. Ehitada ringjoon, mille keskpunkt oleks antud sirgel ja mis läbiks antud punkti. Ringi raadiuseks võtta 2 cm. Kas ülesanne lahendub alati?

474. Ehitada antud keskpunktiga ringjoon, mis puudutab antud sirget.

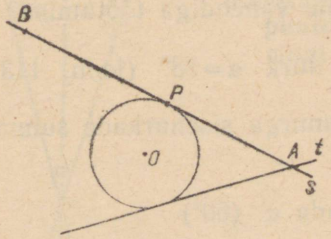
475. Selgitada joonis 117 abil, kuidas ehitada ringjoont, mis läbib antud punkti A ja puudutab sirget s antud punktis P.

476. Kus asetsevad selliste ringjoonte keskpunktid, mis puudutavad antud nurga mõlemat haara?

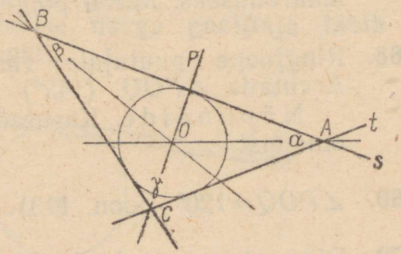
§ 45. KOLMNURGA SISERINGJOON.

1. Ehitame mingi ringjoone ja sellele kaks puutujat s ja t, mis lõikuvad punktis A (joon. 118). Võtame ühel puutujal (näiteks puutujal s) punkti B nii, et punktid A ja B jäävad teine teisele poole puutepunkti P. Ehitame punktist B antud ringjoonele veel kolmanda puutuja, mis lõikab puutujat t punktis C (joon. 119). Selle tulemusena tekkis kolmnurk ABC, mille kõik küljed on antud ringjoonele puutujateks. Sellist kolmnurka nimetatakse **puutujakolmnurgaks.**

Antud ringjoone kohta aga öeldakse, et ta on ehitatud kolmnurga sisse ja teda nimetatakse **kolmnurga siseringjooneks.**



Joon. 118



Joon. 119

2. Eelmises punktis tehtud arutelu puhul oli ringjoon enne antud. Selle ringjoone ümber ehitasime puutujakolmnurga. Kuidas toimida aga siis, kui kolmnurk on antud ja on vaja ehitada selle kolmnurga siseringjoont?

Selleks on vaja teada kolmnurga siseringjoone keskpunkti O asukohta.

Eelmise paragrahvi p. 5 põhjal võime öelda, et punkt O peab asetsema korraga kolmnurga nurkade α, β ja γ poolitajatel. Siit saame:

kolmnurga sisenurkade poolitajad lõikuvad kõik ühes punktis; see punkt on kolmnurga siseringjoone keskpunktiks.

Märkus. Ülesannetes, mis on seotud kolmnurga sisse ja ümber joonistatud ringjoontega, tähistatakse tavaliselt siseringjoone raadiust tähega r ja ümberringjoone raadiust tähega R.

Küsimusi ja ülesandeid.

477. Ehitada vabalt mingi kolmnurk ja selle siseringjoon.

478. Ehitada kolmnurk, mille küljed on 2,6 cm; 3,2 cm ja 5,1 cm. Ehitada selle kolmnurga siseringjoon.

479. Kas on võimalik, et kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunkt asetseb väljaspool kolmnurka?

480. Defineerida a) kolmnurga siseringjoon; b) puutujakolmnurk.

481. Millise kolmnurga korral langevad kolmnurga kõrguste lõikepunkt, külgede keskristsirgete lõikepunkt ja nurgapoolitajate lõikepunkt kokku? Miks?

482. Tõestada, et võrdhaarse kolmnurga siseringjoone ja ümberringjoone keskpunktid asetsevad selle kolmnurga tipunurgast ehitatud kõrgusel.

Kordamiseks.

483. Mis on nurk?

484. Mis on kesknurk?

485. Mis on nurgakraad? kaarekraad?

486. Mis on nürinurk? teravnurk? täisnurk? sirgnurk?

487. Joonestada ring raadiusega 2 cm. Ehitada selles ringis malli abil kesknurk 38°.

488. Kuidas mõista väljendit «Kesknurka mõõdab talle vastav kaar»?

489. Väljendada kraadides järgmised ringjoone osad:
$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}$; 0,3; 0,2; 0,25.
(180°; 72°; 60°; ...)

490. Millise osa ringjoonest moodustavad järgmised kaared?
30°; 120°; 72°; 90°; 180°; 270°; 50°; 36°.
$\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}; \ldots\right)$

491. Missugune on kolmnurga välisnurga omadus?

§ 46. PIIRDENURK. THALESE TEOREEM.

1. Võtame ringjoonel mingi punkti A ja ehitame sellest punktist kaks kõõlu AB ja AC (joon. 120).

Nurka, mille moodustavad kaks ühest punktist lähtuvat kõõlu, nimetatakse piirdenurgaks ($\angle BAC$, joon. 120).

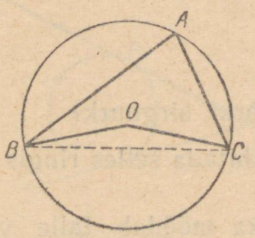
Piirdenurga haarade vahel asetseva kaare (samuti kõõlu) BC ja piirdenurga vastastikuse asendi kohta öeldakse, et
piirdenurk BAC toetub kaarele (kõõlule) BC.
Ehitame veel samale kaarele toetuva kesknurga BOC.
Mõõta malli abil nurkade BAC ja BOC suurused ja võrrelda neid! Millise oletuse võib selle mõõtmise tulemusena püstitada?

2. Tõestame teoreemi:

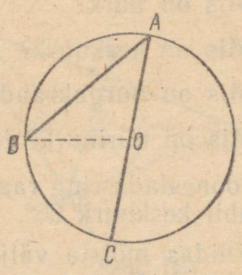
piirdenurk on samale kaarele toetuvast kesknurgast kaks korda väiksem.

Sümbolites: $\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2}$ (joon. 120).

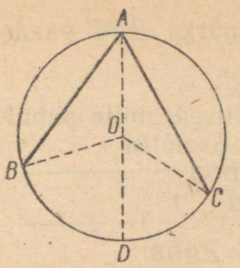
Tõestuseks vaatame eraldi kolme võimalikku juhtumit:
1) ringjoone keskpunkt asetseb piirdenurga ühel haaral (joon. 121);



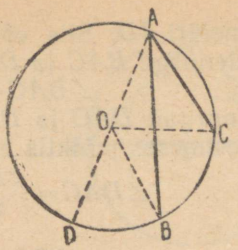
Joon. 120



Joon. 121



Joon. 122



Joon. 123

2) ringjoone keskpunkt asetseb piirdenurga haarade vahel (joon. 122);
3) ringjoone keskpunkt asetseb väljaspool piirdenurka (joon. 123).

1) Kesknurk BOC on kolmnurga ABO välisnurgaks. Seepärast

$$\angle BOC = \angle ABO + \angle BAC.$$

Et kolmnurk BAO on võrdhaarne (BO ja AO on võrdsed kui ühe ja sama ringi raadiused), siis

$$\angle ABO = \angle BAC,$$

mille tõttu

$$\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC,$$

millest

$$\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2}.$$

Seda oligi tarvis tõestada.

2) Jaotame antud piirdenurga BAC diameetriga AD kaheks piirdenurgaks:

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC.$$

Mõlema saadud piirdenurga BAD ja DAC puhul on täidetud eelmises punktis esitatud tingimus: ringjoone keskpunkt asetseb piirdenurga ühel haaral AD. Seepärast, toetudes eelmises punktis tõestatule, saame

$$\angle BAD = \frac{\angle BOD}{2}, \quad \angle DAC = \frac{\angle DOC}{2},$$

millest järeldub, et

$$\angle BAC = \frac{\angle BOD}{2} + \frac{\angle DOC}{2} = \frac{\angle BOD + \angle DOC}{2}.$$

Viimase murru lugejas olev summa on aga kesknurk BOC. Seega saame, nagu eelmiseski punktis

$$\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2}.$$

3) Ehitame (nagu eelmiselgi juhul) antud piirdenurga tipust A

ringi diameetri AD. Siis võime antud piirdenurka BAC vaadelda kahe piirdenurga BAC ja DAB vahena, s. o.

$$\angle BAC = \angle DAC - \angle DAB.$$

Piirdenurgad DAC ja DAB on jällegi sellised, mille puhul on täidetud esimeses punktis esitatud tingimus. Seetõttu

$$\angle DAC = \frac{\angle DOC}{2}, \quad \angle DAB = \frac{\angle DOB}{2},$$

millest

$$\angle BAC = \frac{\angle DOC}{2} - \frac{\angle DOB}{2} = \frac{\angle DOC - \angle DOB}{2}.$$

Viimase murru lugejas olev kesknurkade vahe on aga kesknurk BOC. Seega saame jällegi

$$\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2},$$

millega on teoreem täielikult tõestatud.

Märkus. Kuna kaar sisaldab niisama palju kaarekraade kui sellele kaarele toetuv kesknurk nurgakraade, siis öeldakse sageli, et *piirdenurka mõõdab pool sellest kaarest, millele ta toetub.*

Järeldused.

1) **Ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on kõik võrdsed** (joon. 124).

Tõepoolest,

$$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = \angle AFB = \angle AGB,$$

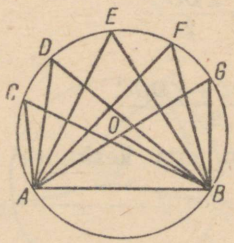
sest kõik need nurgad on ühest ja samast kesknurgast AOB kaks korda väiksemad.

Seega, kui punkt (näiteks C) liigub ringjoonel ühel pool antud kõõlu, siis antud kõõl paistab sellest liikuvast punktist kogu aeg ühe ja sama nurga all.

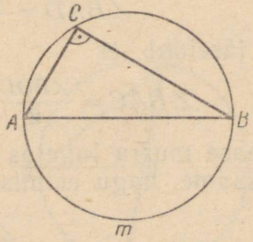
2) Thalese[1] teoreem.

Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

Tõepoolest, kui piirdenurk toetub diameetrile, siis ta toetub ka kaarele AmB (joon. 125), mis moodustab poole ringjoonest. Et aga pool ringjoonest on 180°, siis $\angle ACB = 90°$.

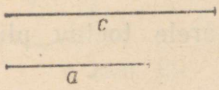


Joon. 124

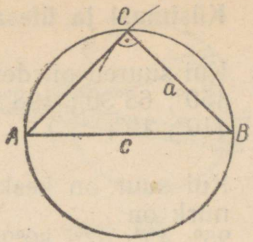


Joon. 125

[1] Thales (624—545 a. e. m. a.) — Vana-Kreeka õpetlane-matemaatik.



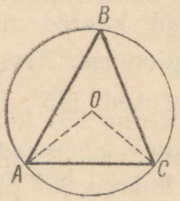
Joon. 126



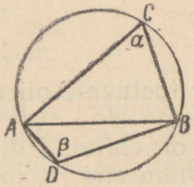
Joon. 127

3. Ülesanne. Ehitada täisnurkne kolmnurk, kui on antud hüpotenuus c ja üks kaatet a (joon. 126).

Lahendus. Ehitame ringjoone, mille diameetriks on antud hüpotenuus, s. o. $AB=c$ (joon. 127). Võtame sirklisse antud kaateti a ja kanname selle kõõluna diameetri ühest otspunktist joonisele. Saame ringjoonel kolmanda punkti C. Kolmnurk ABC ongi nõutav kolmnurk. Miks?



Joon. 128



Joon. 129

4. Ülesanne. Kolmnurga ABC (joon. 128) ümberringjoone keskpunkt O asetseb kolmnurga sees; $\angle OCA=37°39'$. Leida $\angle B$.

Lahendus. Ühendame ringi keskpunkti O kolmnurga tippudega A ja C. Kolmnurk AOC on võrdhaarne. Miks? Seepärast ka $\angle OAC=37°39'$ ja $\angle AOC=180°-(\angle OAC+\angle OCA)=180°-75°18'=104°42'$. Piirdenurga omaduse tõttu

$$\angle B=\frac{\angle AOC}{2}=\frac{104°42'}{2}=52°21'.$$

Vastus. $\angle B=52°21'$.

5. Ülesanne. Millises seoses on kaks piirdenurka α ja β, kui kaared, millele nad toetuvad, täiendavad teineteist ringjooneni (joon. 129)?

Lahendus. Andmete kohaselt

$$\overset{\frown}{ACB}+\overset{\frown}{ADB}=360°, \quad \text{millest} \quad \frac{\overset{\frown}{ACB}}{2}+\frac{\overset{\frown}{ADB}}{2}=180°$$

ja piirdenurga omaduse tõttu

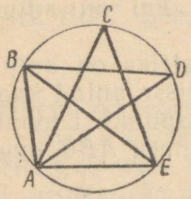
$$\beta+\alpha=180°.$$

Vastus. Nurgad α ja β täiendavad teineteist sirgnurgani.

Küsimusi ja ülesandeid.

492. Kui suured piirdenurgad toetuvad kaartele 20°; 38°; 56°; 90°; 150°; 68°30′; 198°20′?
(10°; 19°; ...)

493. Kui suur on kesknurk, kui samale kaarele toetuv piirdenurk on
25°; 42°; 67°; 80°22′; 90°37′; 120°; 179°?
(50°; 84°; ...)



Joon. 130

494. Millised piirdenurgad on kujutatud joonisel 130? Millised nendest on võrdsed? (Joonisel on üldse 14 piirdenurka; nende hulgas on 4 paari võrdseid nurki.)

495. Ringis on ehitatud diameeter ja temaga paralleelne kõõl. Kõõlu ja diameetri vahel olevad kaared moodustavad kokku $\frac{1}{4}$ ringjoonest. Arvutada antud kõõlule toetuvate piirdenurkade suurused. (45°; 135°)

496. Ringis on ehitatud diameeter ja kõõl, mis ei lõiku diameetriga. Diameetri ja kõõlu vahel on kaared 30° ja 70°. Leida antud kõõlule toetuvad piirdenurgad.
(40°; 140°)

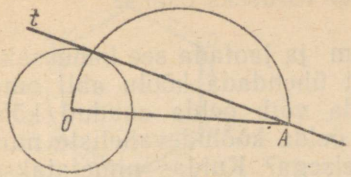
497. Ringjoonel olevast punktist A on ehitatud kaks kõõlu AM ja AN. Neist esimene toetub kaarele 38° ja teine kaarele 172°. Leida $\angle MAN$. (75°)

498. Piirdenurk $MAN=80°$, kusjuures kõõl AM toetub kaarele 48°30′. Kui suurele kaarele toetub kõõl AN? (151°30′)

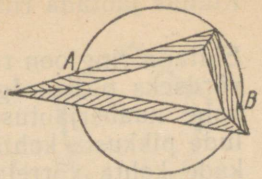
499. Piirdenurk ja kesknurk toetuvad ühele ja samale kaarele, kusjuures piirdenurk on kesknurgast 28° võrra väiksem. Leida mõlemad nurgad. (28°; 56°)

500. Piirdenurk ja kesknurk toetuvad ühele ja samale kaarele, kusjuures kesknurk on piirdenurgast α võrra suurem. Leida mõlemad nurgad. (α; 2α)

501. Kolmnurga ABC ümber on ehitatud ringjoon, mille keskpunkt O asetseb kolmnurga sees. Leida $\angle OAC$, kui a) $\angle B=$ $=50°$; b) $\angle B=68°$. (40°; 22°)



Joon. 131



Joon. 132

502. Võrdhaarse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt O asetseb kolmnurga sees. Ringi raadius OA moodustab alusega AC nurga $OAC = 20°38'$. Leida $\angle BAC$. (55°19′)

503. Lahendada eelmine ülesanne juhul, kui ringi keskpunkt asetseb väljaspool kolmnurka. (34°41′)

504. Joonestada täisnurkne kolmnurk, kui hüpotenuus ja kaatet on vastavalt

a) 3 cm; 2 cm;
b) 4,2 cm; 2,8 cm;
c) 5,1 cm; 4,5 cm.

505. Jooniselt 131 on näha, kuidas sirkli ja joonlauaga on võimalik ringjoonele ehitada puutujat, mis läbib väljaspool ringjoont olevat punkti A. Selgitada, kuidas see toimub.

506. Joonis 132 näitab, kuidas on võimalik ringi diameetrit määrata ainult joonestuskolmnurga abil. Anda põhjendus.

Kuidas saaks joonestuskolmnurga abil määrata ringjoone keskpunkti?

507. Millist joont mööda tuleks liikuda, et antud lõik paistaks kogu aeg täisnurga all?

508. Kuidas saaks näidata, toetudes Thalese teoreemile, et nelinurk, mille diagonaalid on võrdsed ja poolitavad teineteist, on ristkülik?

509. Ristküliku diagonaal moodustab küljega nurga 12°35′. Leida kaared, milleks ristküliku tipud jaotavad tema ümber joonestatud ringjoone. (25°10′; 25°10′; 154°50′; 154°50′)

Kordamiseks.

510. Kuidas jaotada ringjoont kaheks, neljaks, kaheksaks võrdseks osaks (kaareks)?

511. Kuidas jaotada ringjoont kuueks võrdseks osaks?

512. Kuidas jaotada ringjoont kolmeks võrdseks osaks?

513. Ehitada ringjoon raadiusega 3 cm ja jaotada see kaheksaks võrdseks osaks. Iga jaotuspunkt ühendada kõõlu abil oma kahe naaberjaotuspunktiga. Mida võib öelda saadud kõõlude pikkuste kohta? Mida võib öelda kõõludevaheliste nurkade kohta võrreldes neid üksteisega? Kuidas nimetatakse seda kõõludega piiratud kujundit?

514. Mis on korrapärase hulknurga apoteem?

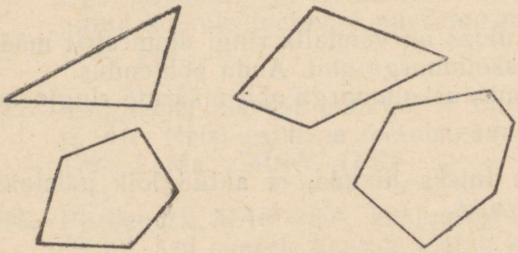
515. Kuidas arvutatakse korrapärase hulknurga ümbermõõtu? pindala?

§ 47. RINGJOON JA KORRAPÄRANE HULKNURK.

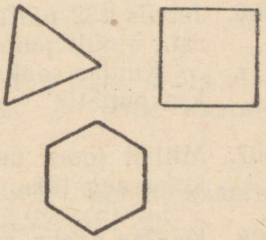
1. Kolmnurgad, nelinurgad, viisnurgad, kuusnurgad jne. kannavad ühist nimetust — **hulknurgad** (joon. 133).

Kui hulknurga kõik küljed on võrdsed ja kõik sisenurgad on võrdsed, siis nimetatakse hulknurka korrapäraseks.

Joonisel 134 on kujutatud korrapärane kolmnurk, nelinurk ja kuusnurk.



Joon. 133

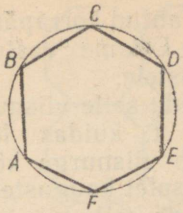


Joon. 134

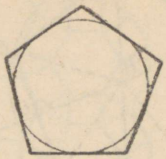
2. Kui ringjoon jaotada võrdseteks osadeks (enam kui kaheks) ja iga jaotuspunkt ühendada oma kahe naaberjaotuspunktiga kõõlu abil, siis tekib korrapärane hulknurk. (Joonisel 135 on saadud sel teel korrapärane kuusnurk.)

Et sellise hulknurga külgedeks on kõõlud, siis nimetatakse teda ka **korrapäraseks kõõlhulknurgaks.** Antud ringjoont nimetatakse selle **hulknurga ümberringjooneks.**

3. Korrapärast hulknurka võib saada veel teiselgi viisil. Nimelt jaotame ringjoone enam kui kaheks võrdseks osaks ja ehitame



Joon. 135



Joon. 136

igast jaotuspunktist ringjoonele puutuja (joon. 136). Puutujate lõikudest moodustatud hulknurk ongi korrapärane hulknurk — **korrapärane puutujahulknurk.**

Antud ringjoont nimetatakse sel juhul **hulknurga siseringjooneks.**

Võttes kokku punktid 2 ja 3, võime ütelda, et nii ringi sisse kui ka ringi ümber saab ehitada korrapäraseid hulknurki.

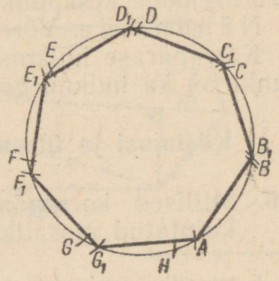
Märkus. Kui ringjoont ei saa jaotada sirkli ja joonlaua abil võrdseteks osadeks nii lihtsalt nagu näiteks korrapärase kuusnurga või nelinurga ehitamisel (paljudel juhtudel ei ole see ülesanne täpselt üldse lahendatav), siis võib seda teha proovimise teel. Jaotame näiteks ringjoone seitsmeks võrdseks osaks (joon. 137). Selleks võtame sirklisse mingi lõigu (muidugi lühema kui raadiuse) ja proovime, mitu korda seda saab paigutada kõõluna ringjoonele alates mingist punktist A. Saame järjestikku punktid A, B, C, D, E, F, G, H. Selgub, et sirklisse oli võetud liiga lühike lõik, kuna tekkis jääk kaare HA näol. Selle jäägi jaotame silma järgi 7-ks võrdseks osaks ja pikendame silma järgi kaart AB ühe osa võrra; saame kaare AB_1. Võtame sirklisse kõõlu AB_1 ja proovime uuesti. Selle tulemusena saame punktid A, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1. Nagu selgub, viis teine proovimine juba eesmärgile ja seega saame ehitada korrapärase seitsenurga $AB_1C_1D_1E_1F_1G_1$.

Kui punkt H oleks sattunud esimesel proovimisel punktist A paremale, siis oleks tulnud sirkli haarade vahet vastavalt lühendada.

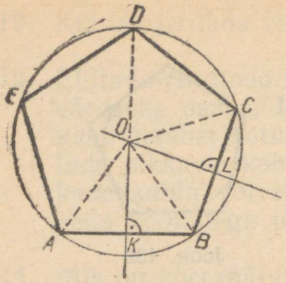
4. Punktides 2 ja 3 oli ringjoon enne antud; selle ringjoone sisse ja ümber ehitasime korrapärase hulknurga.

Püstitame nüüd vastupidise ülesande.

On antud hulknurk. Kuidas ehitada selle hulknurga ümber- ja siseringjoont?



Joon. 137



Joon. 138

Joonisel 138 on antud korrapärane viisnurk $ABCDE$. Leiame vastused järgmistele küsimustele.

1) Kuidas ehitada selle viisnurga ümberringjoont, s. t. kuidas leida punkti, mis asetseb viisnurga kõikidest tippudest võrdsetel kaugustel?

2) Kuidas ehitada selle viisnurga siseringjoont, s. t. kuidas leida punkti, mis asetseb viisnurga kõikidest külgedest võrdsetel kaugustel?

Vaatleme esimest küsimust.

Võtame antud hulknurga kolm järjestikust tippu, näiteks A, B ja C. Läbi nende punktide saab alati ehitada ringjoone (§ 41, p. 2). Selle ringjoone keskpunktiks on hulknurga külgede AB ja BC keskristsirgete lõikepunkt O. Seega

$$OA = OB = OC.$$

Näitame, et hulknurga kõik ülejäänud tipud asetsevad punktist O niisama kaugel kui tipud A, B ja C. Tõestame näiteks, et

$$OD = OA.$$

Selleks kujutleme, et joonis on kokku murtud mööda sirget OL. Siis BL ühtib LC-ga, sest täisnurgad punkt L juures on võrdsed ja $BL = LC$; CD ühtib BA-ga, sest $\angle BCD = \angle ABC$ ja $BA = CD$. Seetõttu ongi $OA = OD$. Samuti saaks näidata, et punkt E on punktist O samal kaugusel.

Arutlus on tehtud korrapärase viisnurga kohta. Täpselt samuti võiks arutleda mistahes korrapärase hulknurga puhul. Seepärast võime öelda:

korrapärase hulknurga ümber saab alati joonestada ringjoone; selle ringjoone keskpunktiks on hulknurga külgede keskristsirgete lõikepunkt.

5. Lugeja ülesandeks jääb näidata, et seesama punkt O on ka hulknurga külgedest võrdsetel kaugustel, s. t. ta on hulknurga siseringjoone keskpunktiks.

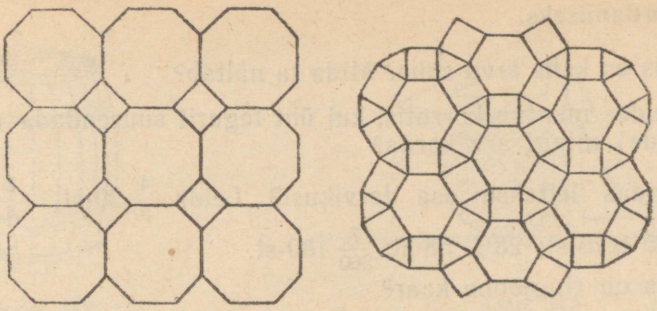
N ä p u n ä i d e. Võrrelda kolmnurki OKB, OLB, ...

Korrapärase hulknurga ümber- ja siseringjoone ühine keskpunkt on ka hulknurga keskpunktiks.

Küsimusi ja ülesandeid.

516. Millised korrapärased hulknurgad esinevad joonisel 139 kujutatud mosaiikides[1]?

[1] mosaiik — erinevatest värvilistest klaasi-, kivi-, puu- jne. tükikestest kokkupandud pilt.



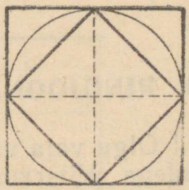
Joon. 139

517. Leida hulknurki (korrapäraseid ja mittekorrapäraseid) oma lähemas ümbruses (klassis, töökohal, kodus jm.).

518. Jaotada ringjoon, mille raadius on 3,0 cm, proovimise teel 5 võrdseks osaks. Teostada vajalikud mõõtmised ja arvutada saadud viisnurga ümbermõõt ja pindala. (18 cm; 21 cm^2)

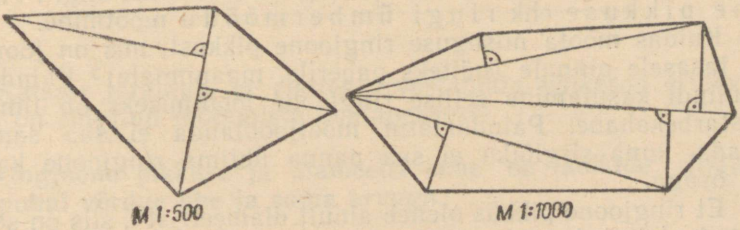
519. Mitu protsenti moodustab kõõlruudu pindala sama ringi ümber ehitatud puutujaruudu pindalast? Lahendada kahel viisil: 1) mõõtmise teel ja 2) ruutude otsese võrdlemise teel (joon. 140). (50%)

520. Ruudukujulise metlahhplaadi[1] külje pikkus on 10,0 cm. Mitu sellist plaati on vaja vannitoa põranda katmiseks, kui põranda mõõtmed on: a) 2,1 m×2,9 m; b) 1,8 m×2,7 m ja kui materjali kadu põranda katmisel on 4%? (610 tk; 510 tk)



Joon. 140

521. Teostada vajalikud mõõtmised ja arvutada joonisel 141 kujutatud hulknurkade pindalad aarides.



Joon. 141

[1] metlahhplaat — peenendatud savist põletatud plaat.

Kordamiseks.

522. Mis on kahe arvu suhe? Mida ta näitab?

523. Kuidas muutub korrutis, kui üht tegurit suurendada (vähendada) mingi arv korda?

524. Kuidas leitakse osa tervikust? Leida $\frac{4}{5}$ 20-st; $\frac{3}{4}$ 32-st; 0,85 0,75-st; 28% 58-st; $\frac{7}{360}$ 180-st.

525. Mis on ringjoone kaar?

526. Mis on kesknurk?

527. Mis on nurgakraad? kaarekraad?

528. Kui suure osa moodustab 3 9-st; 4 28-st; 7 56-st; 5 6-st; 3 4-st?

529. Kui suure osa täispöördest moodustab nurk 180°; 90°; 270°; 60°; 30°; 45°; 120°; 50°; 59°; 123°?

530. Mis on võrde põhiomaduseks?

531. Avaldada x järgmistest võrretest:

$$\frac{3}{4}=\frac{5}{x} \quad \frac{x}{3}=\frac{4}{6} \quad \frac{a}{b}=\frac{x}{c} \quad \frac{ab}{c}=\frac{dx}{m} \quad \frac{a}{mx}=\frac{n}{b}.$$

532. Leida x.

$$2x=6;\ 3x+5=14;\ 5=3x.$$

§ 48. RINGJOONE PIKKUSE MÕÕTMINE JA ARVUTAMINE.

1. Olgu vaja varustada ümmargune puuanum (tünn, joon. 142) vitsadega. Vitsraua muretsemiseks on vaja teada vajaliku vitsraua pikkust. Seda pikkust saab otseselt mõõta näiteks painduva mõõdulindi või nööri abil. Et tünni järgi painutatud mõõdulindil või nööril on ringjoone kuju, siis niisugune mõõtmine ongi *ringjoone pikkuse* ehk *ringi ümbermõõdu* mõõtmine.

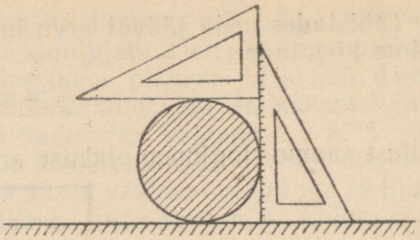
2. Kuidas mõõta niisuguse ringjoone pikkust, mis on joonestatud tasasele pinnale (näiteks paberile, maapinnale)? Painduva mõõdulindi kasutamine sellise ringjoone mõõtmiseks on ilmselt ebaotstarbekohane. Paindumatut mõõtjoonlauda ei saa samuti kasutada, kuna sirglõiku ei saa panna ühtima ringjoone kaare ühegi osaga.

3. Et ringjoone pikkus oleneb ainult diameetrist [1], siis on sellisel juhul otstarbekohane mõõta ringjoone diameeter ja selle põh-

[1] Võrdsete diameetritega ringjooned on võrdsed (neid saab panna ühtima); erinevate diameetritega ringjooned on erinevad.



Joon. 142



Joon. 143

jal arvutada ringjoone pikkus. Vajaliku arvutuseeskirja saamiseks jätame lugeja ülesandeks mõõta mõne (näiteks viie) ümmarguse eseme (pudeli põhja, konservipurgi, tindipoti jm.) ümbermõõt C ja läbimõõt d. Ümbermõõdu mõõtmiseks on soovitatav kasutada peenikest niiti, mille tõmbame pingule ümber mõõdetava eseme. Pärast mõõdame millimeeterjaotusega mõõtejoonlaual mõõdetava eseme ümbermõõtu kujutava niidi pikkuse. Läbimõõtu võib mõõta tavalise millimeeterjaotusega mõõtejoonlauaga proovimise teel. Parema täpsuse saavutamiseks on soovitatav kasutada võtet, mis on kujutatud joonisel 143.

Arvutame iga eseme ümbermõõdu ja läbimõõdu suhte kolme tüvenumbriga. Tulemused kanname järgmisse tabelisse.

Katse jrk. nr.	C	d	$\frac{C}{d}$
1.			
2.			
3.			

Katsest järeldub, et (jättes arvestamata väikesed erinevused, mis on tingitud mõõtmiste ebatäpsusest)

ringjoone pikkuse ja diameetri suhe on kõikide ringjoonte puhul võrdne ühe ja sama arvuga

ehk

iga ringjoone pikkus on selle ringjoone diameetrist üks ja sama arv korda suurem.

Tähistades seda jäävat arvu kreeka keele tähega π (loe: pii), võime kirjutada

$$\frac{c}{d} = \pi,$$

millest saame ringjoone pikkuse arvutamise valemid

$$\boxed{c = \pi d}$$

ehk

$$\boxed{c = 2\pi R}$$

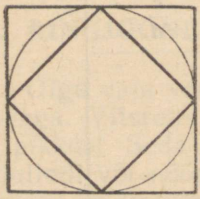
sest $d = 2R$ (R on ringjoone raadius).

Tulemusest näeme, et ringjoone pikkuse arvutamiseks on vaja teada π arvulist väärtust.

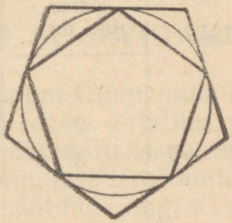
4. Tehtud katse lubab ainult oletada, et π arvuline väärtus on 3,1 ja 3,2 vahel. Mõõtmisvigadest tingituna pole π arvulise väärtuse kohta midagi täpsemat võimalik öelda. Põhimõtteliselt on aga π arvulist väärtust võimalik ka arvutada ja seejuures mistahes vajaliku täpsusega.

See toimub järgmiselt.

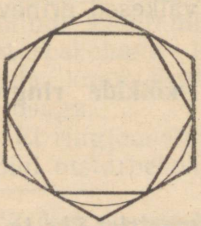
Olgu antud mingi ringjoon diameetriga näiteks 5 cm. Selle ringjoone sisse ja ümber olgu ehitatud korrapärased hulknurgad (joonisel 144, 145, 146 ja 147 on need külgede arvud vastavalt 4, 5, 6 ja 8). Korrapärase kõõlhulknurga ümbermõõdule q võib



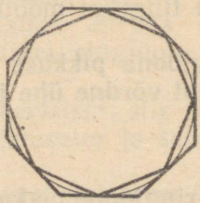
Joon. 144



Joon. 145



Joon. 146



Joon. 147

vaadata kui ringjoone pikkuse C ligikaudsele väärtusele puuduga; korrapärase puutujahulknurga ümbermõõdule p võib vaadata kui sama ringjoone pikkuse ligikaudsele väärtusele liiaga. Seejuures tehtud viga on mõlemal juhul seda väiksem, mida suurem on hulknurga külgede arv n. Arvutades kõõl- ja puutujahulknurkade ümbermõõtude ja ringi diameetri suhted, saame π ligikaudsed väärtused vastavalt puuduga ja liiaga. Tehtud viga on samuti seda väiksem, mida suurem on hulknurkade külgede arv n.

Korrapäraste kõõl- ja puutujahulknurkade ümbermõõte on võimalik otseselt mõõta, kuid neid on võimalik ka arvutada (seda õpitakse vanemates klassides). Seega on võimalik arvutada ka π ligikaudseid väärtusi puuduga ja liiaga (π tõkkeid). Alljärgnevas tabelis on esitatud arvutustulemused, kui $n=4$, 5, 6, 8, 10, 20, 40 ($d=5$ cm). Tabeli esimese nelja rea andmeid võib lugeja ligikaudselt kontrollida mõõtmise teel joonistelt 144, 145, 146 ja 147.

n	q	p	$\frac{q}{d}<\pi<\frac{p}{d}$		$\frac{p}{d}-\frac{q}{d}$
4	14,14	20,00	2,828	4,000	1,172
5	14,69	18,16	2,938	3,632	0,694
6	15,00	17,32	3 000	3,464	0,464
8	15 31	16,57	3,062	3,314	0,252
10	15,45	16,25	3,090	3,250	0,160
20	15,64	15,84	3,128	3,168	0,040
40	15,70	15,74	3,140	3,148	0,008

Tabeli viimases veerus on π tõkete vahed. Tabelist näeme, et kui hulknurga külgede arv suureneb, siis π tõkked lähenevad järkjärgult teineteisele, s. t. nende tõkete vahe muutub ikka väiksemaks ja väiksemaks. Seega ringjoone pikkuse ja diameetri suhet π on võimalik arvutada mistahes vajaliku täpsusega. Näiteks on π ligikaudseks väärtuseks kaheksa kohaga peale koma 3,14159265. Tegelikus arvutustöös kasutatakse π ligikaudse väärtusena enamasti arvu 3,14.

5. Ringjoone pikkuse ja diameetri suhte π arvutamisel on pikk ajalugu. Juba 2000 a. enne meie ajaarvamist tundsid vanad egiptlased π ligikaudse väärtusena murdu 3,160... Sageli kasutati jämeda lähendina ka arvu 3.

Tähelepanuväärsele tulemusele jõudis III sajandil e. m. a. Vana-Kreeka teadusemees Arhimedes, kes korrapäraste kõõl- ja puutujahulknurkade ümbermõõtude kaudu (ülalpool kasutasimegi seda võtet) leidis π jaoks tõkked

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}.$$

Avaldades need tõkked kümnendmurdudena, saame

$$3{,}1408\ldots<\pi<3{,}1428\ldots,$$

millest näeme, et kahe kohaga peale koma võime kirjutada

$$\pi=3{,}14$$

Hiljem on π väärtusi arvutatud korduvalt mitmekümne ja isegi mitmesaja kümnendkohaga[1] (näiteks 35 kümnendkohaga 1596. a., 810 kümnendkohaga 1874. a.). Loomulikult puudub sellistel arvutustel praktiline tähtsus. Enamasti on selliseid arvutusi põhjustanud omamoodi «rekordi» tagaajamine, kuid ka lootus, et π kümnendkohtade saamisel ilmneb teatav seaduspärasus. 1766. a. tõestas saksa matemaatik J. H. Lambert, et mingit seaduspärasust ei saagi olla. Arv π avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna.

6. Ringjoone pikkuse valem $C=\pi d$ seob omavahel kolme suurust C, π ja d; neist kahe suuruse C ja d arvulised väärtused olenevad alati antud ülesande tingimustest. Sel juhul öeldakse, et C ja d on **muutuvad suurused** (nendel on erinevates ülesannetes erinevad väärtused). Kui üks nendest suurustest on antud, siis teine on alati arvutatav.

Kui näiteks mõõtmisel saadi, et ringikujulise lillepeenra läbimõõt on 4,7 m, siis peenra ümbermõõt

$$C=\pi d=3{,}14\cdot 4{,}7\approx 15 \text{ m}.$$

Kui aga näiteks ringikujulise tiigi ümbermõõduks saadi 270 m, siis tiigi läbimõõt on arvutatav. Selleks avaldame valemist $C=\pi d$ diameetri d. Saame

$$d=\frac{c}{\pi}=\frac{270}{3{,}14}\approx 86 \text{ m}.$$

Küsimusi ja ülesandeid.

Eelmärkus. Kui π ligikaudse väärtusena kasutatakse arvu 3,14, siis ei tohi ringjoone pikkuse (edaspidi ka ringi pindala) arvutamisel lõppvastuses anda enam kui kolm tüvenumbrit (kuigi diameeter on antud täpse arvuna). Miks?

533. Tuua näiteid igapäevasest elust, kus on vaja osata arvutada ringjoone pikkust.

534. Mitu korda on ringjoone pikkus diameetrist suurem?

535. Kui suure osa moodustab ringi diameeter ringjoone pikkusest? Väljendada tulemus protsentides. (31,8%)

536. Kuidas saaks leida kasvava puutüve läbimõõtu, kui mõõduriistana on kasutada painduv mõõdulint?

537. Kremli kella suure osuti pikkus on 3,3 m ja väikese osuti pikkus 3,0 m. Mitu korda on suure osuti otsa poolt ööpäevas läbitud tee pikem väikese osuti otsa poolt läbitud teest sama ajavahemiku jooksul? (13 korda)

[1] Varasemate arvutuste kontrolliks on elektronarvutusmasina abil arvutatud π väärtuses üle 2000 kümnendkoha.

538. Täita järgmine ligikaudsete andmetega tabel.

R(m)	3,0				3,9	5,6				
d(m)		4,28		60,5			8,8			17,3
C(m)			12,5					3,14	62,0	

539. Maakera teeb ühe täistiiru ümber Päikese ligikaudu 365 ööpäevaga. Kui pika tee läbib Maa maailmaruumis ühe ööpäevaga, kui tema keskmine kaugus Päikesest on ligikaudu 150 000 000 km? ($\approx$2 600 000 km)

540. Kuidas muutub ringjoone pikkus, kui ringi diameeter suureneb (väheneb) mingi arv korda?

541. Kosmoselaev «Vostok-2», millel lendas nõukogude kosmonaut G. Titov, liikus ümber Maa keskmiselt 220 km kaugusel Maa pinnast. Kui pika tee läbis kosmoselaev ühe täistiiruga, kui Maa raadius on 6 370 km? Kosmoselaeva tee lugeda ringjoonekujuliseks. (41 400 km)

§ 49. RINGJOONE PIKKUSE TABEL.

1. Ringjoone pikkuse leidmise hõlbustamiseks on koostatud ringjoone pikkuse tabelid. Nende tabelite abil saab leida diameetri järgi ringjoone pikkust ja vastupidi, ringjoone pikkuse järgi diameetrit. Käesolevas õpikus kasutame kolmekohalisi tabeleid, s. t. et tabelis antud diameetri väärtused ja vastavad ringjoonte pikkused on antud kolme tüvenumbriga.

Tutvume selle tabeli ehitusega (vt. lisa).

Tabelis olevad arvud on paigutatud 11-sse veergu, mis on pealkirjastatud: *d*, 0, 1, ..., 8, 9. Edaspidi tähistame neid veerge lühidalt sümbolitega *v*-*d*, *v*-0, *v*-1, ..., *v*-8, *v*-9. Vaadates vasakult paremale, on tabeli arvud paigutatud ridadesse, mis algavad veergu *v*-*d* kuuluvate arvudega 1,0; 1,1; 1,2; ...; 9,8; 9,9; 10,0. Tähistame neid ridu lühidalt sümbolitega *r*-1,0; *r*-1,1; *r*-1,2; ...; *r*-9,8; *r*-9,9; *r*-10,0.

2. Ringjoone pikkuse leidmine diameetri järgi.

Olgu $d=3{,}76$ m. Leida C.

Antud diameetri kahe esimese numbri (s. o. 3 ja 7) järgi leiame tabeli rea *r*-3,7 ja kolmanda numbri (s. o. 6) järgi veeru *v*-6.

Rea r-3,7 ja veeru v-6 ristumiskohal olev arv ongi otsitav ringjoone pikkus. Antud juhul $C=11{,}8$ m.

Nii saame veel:

kui $d=4{,}29$ m, siis $C=13{,}5$ m;
kui $d=7{,}01$ cm, siis $C=22{,}0$ cm;
kui $d=5{,}00$ dm, siis $C=15{,}7$ dm;
kui $d=8{,}40$ mm, siis $C=26{,}4$ mm.

Kui antud diameetri väärtus ei kuulu vahemikku 1-st 10-ni (näiteks $d=0{,}567$ cm; $d=27{,}8$ m; $d=2{,}78$ dm), siis nihutame diameetri väärtuses koma (s. t. kas suurendame või vähendame diameetrit vastavalt 10, 100, 1 000 jne. korda) nii, et diameetri väärtus pärast koma nihutamist kuuluks vahemikku 1-st 10-ni. Diameetri uue väärtuse järgi leiame ringjoone pikkuse, nii nagu ülal kirjeldatud. Nüüd tuleb aga arvestada seda, et kui me diameetrit kas suurendame või vähendame 10, 100, ... korda, siis ka ringjoone pikkus vastavalt suureneb või väheneb 10, 100, ... korda.

Näide. $d=0{,}567$ cm. Leida C.

Suurendame selle diameetri väärtust 10 korda. Saadud arvu 5,67 järgi leiame tabelist ringjoone pikkuse 17,8 cm. Kuna diameetrit suurendasime 10 korda, siis on leitud ringjoone pikkus otsitavast ringjoone pikkusest C 10 korda suurem. Seepärast on otsitav ringjoone pikkus $C=1{,}78$ cm.

Nii saame veel:

kui $d=27{,}8$ m, siis $C=87{,}3$ m;
kui $d=27{,}8$ dm, siis $C=873$ dm;
kui $d=0{,}0562$ km, siis $C=0{,}177$ km.

Kui antud diameetri väärtuses on enam kui kolm tüvenumbrit, siis tuleb enne tabeli kasutamist diameetri väärtus ümardada kolme tüvenumbriga arvuks.

Näide. $d=87{,}578$ m. Leida C.

Pärast ümardamist saame diameetri väärtuseks 87,6 m, mille järgi leiame tabelist $C=275$ m.

3. Ringi diameetri leidmine ringjoone pikkuse järgi.

Olgu $C=9{,}27$ m. Leida d.

Diameetri leidmiseks teeme kindlaks, millises reas ja millises veerus on antud arv 9,27. Tabelist näeme, et arv 9,27 kuulub ritta r-2,9 ja veergu v-5. Seega otsitav diameeter $d=2{,}95$ m.

Tabelist näeme, et ringjoone pikkuse üks ja sama väärtus võib esineda korraga mitmes veerus. Näiteks ringjoone pikkus $C=12{,}4$ esineb samaaegselt veergudes v-4, v-5 ja v-6. Sel juhul võib võtta vastava diameetri väärtuseks ükskõik millise kolmest arvust: 3,94; 3,95; 3,96. Ühtsuse mõttes lepime kokku, et sel juhul valime nende seast alati paarisnumbriga lõppeva arvu. Kui selliseid arve on mitu, siis valime nende seast suurima. Antud näite puhul $d=3{,}96$ pikkusühikut.

Kui antud ringjoone pikkust ei esine tabelis, näiteks $C = 4{,}47$ m, siis teeme kindlaks, millise kahe tabelis esineva naaberarvu vahel asetseb antud arv. Antud näite korral

$$4{,}46 < 4{,}47 < 4{,}49.$$

Ringi diameetri leiame selle arvu järgi, mis on antud arvule kõige lähemal (antud juhul 4,46). Saame $d = 1{,}42$ m.

Kui antud ringjoone pikkus erineb kahest tabelis olevast naaberarvust ühepalju, nagu näiteks $c = 3{,}22$ cm korral:

$$3{,}20 < 3{,}22 < 3{,}24,$$

siis valime diameetri selle arvu järgi, mille puhul diameetri väärtus tuleks paarisarv. Antud juhul $d = 1{,}02$ cm.

Tabelis olevad ringjoone pikkuse väärtused kuuluvad vahemikku 3,14-st 31,4-ni. Kui ringjoone pikkuse antud väärtus ei kuulu sellesse vahemikku (näiteks $c = 42{,}1$ m), siis suurendame või vähendame (vastavalt vajadusele) antud arvu 10, 100, 1000 jne. korda, nii et ringjoone pikkuse uus väärtus kuuluks vahemikku 3,14-st 31,4-ni. Edasine mõttekäik on samasugune kui ringjoone pikkuse leidmisel diameetri järgi.

Antud näite korral $d = 13{,}4$ m.

Edaspidi kasutame ringjoone pikkuse ja diameetri arvutamisel ikka ringjoone pikkuse tabelit.

Ülesandeid.

542. Leida ringjoone pikkus, kui diameeter on:
a) 1,11 dm; 2,37 dm; 3,20 cm; 5,00 m; 6,01 m;
b) 11,1 dm; 37,4 cm; 50,0 m; 238 cm; 16,9 m;
c) 0,256 m; 0,789 cm; 0,601 km; 0,0505 km; 0,0087 m;
d) 3,758 dm; 48,566 m; 0,7899 cm; 5,6789 km; 397,5 cm.
Tulemused esitada tabeli kujul

d	1,11 dm	...
C	3,49 dm	...

543. Leida ringjoone diameeter, kui ringjoone pikkus on:
a) 6,06 m; 9,21 cm; 8,14 dm; 13,1 mm; 22,8 m;
b) 3,84 cm; 3,66 m; 7,78 dm; 9,34 mm; 29,7 m;
c) 2,13 cm; 2,34 m; 3,09 cm; 313 m; 280 dm;
d) 0,305 m; 0,457 km; 0,0679 m; 0,057 cm; 0,987 m.
Tulemused esitada tabeli kujul.

544. Ratta läbimõõt on 28 tolli[1]. Kui pikal teel teeb ratas 700 ringi? (1 560 m)

[1] Tavakohaselt väljendatakse liiklusvahendite kummide mõõtmed tollides. 1 toll $\approx$ 2,54 cm.

545. Ruudukujulisest plekitükist, mille serva pikkus on 6,7 cm, lõigatakse välja maksimaalse diameetriga ring. Mitu protsenti moodustab saadud ringi ümbermõõt ruudu ümbermõõdust? (78,5%)

546. Kaevu võlli diameeter on 15 cm. Ämbri jõudmiseks kaevu põhja peab võll tegema 12 pööret. Kui sügav on kaev? (Eeldusel, et trossi keerud võllil on üksteise kõrval.) (5,7 m)

547. Maakera teeb ühe täispöörde ümber telje ligikaudu 24 tunniga. Kui pika kaare läbib Maa ekvaatori punkt ühes tunnis, kui Maa raadius on ligikaudu 6 400 km? (1 700 km)

548. Jalgratta vedaval ketirattal on 40 hammast ja veetaval ketirattal 16 hammast. Mitu korda peab jalgrattur kummagi jalaga suruma pedaalile, et läbida ilma vabajooksuta 1 km, kui jalgratta ratta läbimõõt on 28 tolli? (179 korda)

Näpunäide. Hammasrataste hammaste arvude järgi arvutada, mitu ringi teeb jalgratta ratas, kui vedav ketiratas teeb ühe ringi.

549. a) On antud kaks ringjoont raadiustega 11,2 cm ja 16,7 cm. Leida raadius kolmandale ringjoonele, mille pikkus võrdub antud ringjoonte pikkuste summaga. (27,9 cm)

b) On antud kaks ringjoont raadiustega R_1 ja R_2. Leida raadius kolmandale ringjoonele, mille pikkus võrdub antud ringjoonte pikkuste summaga.

550. a) Ringikujulise lillepeenra läbimõõt on 3,4 m. Mitu silikaatkivi on vaja selle peenra ääristamiseks, kui kivi pikkus on 25 cm? (43 kivi)

b) Staadion on vaja ümbritseda ringjoonekujulise 2 m kõrguse püstlaudadest läbipaistmatu taraga. Mitu tihumeetrit[1] lauamaterjali on vaja varuda, kui tarastatava maa-ala läbimõõt on 160 m ja laua paksus 2,0 cm? Kas ehitatav tara saab olla täpselt ringjoonekujuline? Miks? (21 tihumeetrit. Ei saa)

551. Mitu meetrit vitsrauda tuleb varuda nelja vankriratta rautamiseks, kui esimese ratta läbimõõt on 62 cm, tagumise ratta oma aga 78 cm. Keevitusel tekkivateks kadudeks arvestada 3% kogu materjali hulgast. (9,1 m)

[1] 1 tihumeeter on 1 m^3 puitu (ilma õhuvahedeta).

§ 50. KAARE PIKKUS.

Kaare pikkuse arvutamise juurde viib näiteks järgmine ülesanne.

Maantee kurv on ringjoone kaare kujuline raadiusega 75 m ja vastava kesknurgaga 60°. Arvutada kurvi pikkus AB (joon. 148).

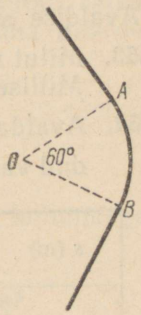
Kaare AB pikkuse leidmiseks arutleme järgmiselt. Terve ringjoone pikkus

$$C=\pi d$$

sisaldab 360 kaarekraadi. Et vaadeldav kaar sisaldab 60 kaarekraadi, siis selle kaare pikkus on ringjoone pikkusest $\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$.

Seega kaare pikkuse leidmiseks antud juhul on vaja arvutada ringjoone pikkus ja leida sellest $\frac{1}{6}$. Tähistades kaare pikkuse tähega s, saame

$$s=\frac{\pi d}{6}=\frac{\pi \cdot 150}{6}=78{,}4 \text{ m}.$$



Joon. 148

Kui otsitavas kaares sisalduvate kaarekraadide arv on mingi teine arv (näiteks 50°; 37° jne.), siis kaare pikkuse leidmine toimub ikka samasuguse mõttekäiguga. Kui kaar sisaldab üldiselt α kraadi, siis selle kaare pikkus on $\frac{\alpha}{360}$ terve ringjoone pikkusest πd, s .t.

$$s=\frac{\alpha}{360}\cdot \pi d$$

ehk

$$\boxed{S=\frac{\pi d\alpha}{360}}$$

Et $d=2R$, siis saame kaare pikkuse valemile veel teise kuju (kuidas?).

$$\boxed{S=\frac{\pi R\alpha}{180}}$$

Küsimusi ja ülesandeid.

552. Täita järgmine tabel.

α	90°	30°	45°	270°	10°	39°	47°30′	187°
d (cm)	3,2	15,6	4,8	20,0	5,01	7,10	0,87	0,567
s (cm)								

Näide. Kui $\alpha=29°$ ja $d=4{,}92$ cm, siis

$$s=\frac{\pi d\alpha}{360}=\frac{15{,}5\cdot 29}{360}=1{,}25 \text{ cm}.$$

(Avaldise πd väärtus 15,5 on leitud ringjoone pikkuse tabelist.)

553. Mitut muutuvat suurust seob omavahel kaare pikkuse valem? Milliseid? (3)

554. Avaldada kaare pikkuse arvutamise valemist d ja täita saadud valemi abil järgmine tabel. $\left(d=\frac{360s}{\pi\alpha}\right)$

s (m)	2,87	4,05	1,37	0,52	0,0675	10
α	90°	127°	86°	8°	5°30′	295°
d (m)						

Näide. Kui $s=3{,}56$ m ja $\alpha=47°$, siis

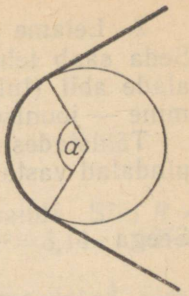
$$d=\frac{360s}{\pi\alpha}=\frac{360\cdot 3\,56}{3{,}14\cdot 47}=8{,}69 \text{ m}.$$

555. Avaldada kaare pikkuse arvutamise valemist α ja täita saadud valemi abil järgmine ligikaudsete andmetega tabel. $\left(\alpha=\frac{360s}{\pi d}\right)$

s (dm)	3,47	5,48	0,78	1,48	5,80	16,7
d (dm)	2,30	1,38	0,60	0,98	3,48	4,82
α						

Näide. Kui $s=3{,}95$ dm ja $d=2{,}23$ dm, siis

$$\alpha=\frac{360s}{\pi d}=\frac{360\cdot 3{,}95}{7{,}01}=203°.$$



Joon. 149

556. Kaar, mis sisaldab 50°, on võrdne sellise ringjoone pikkusega, mille raadius on 0,50 m. Leida kaare raadius. (3,6 m)

557. Ringjoone kõõl võrdub raadiusega. Leida vastava kaare ja raadiuse suhe.
$\left(\frac{\pi}{3}\approx 1{,}05\right)$

558. Mitu kraadi sisaldab kaar, mille pikkus on võrdne raadiusega? (57,3°)

559. Rihmaratta ümbermõõt on 720 mm. Rihm puudutab ratast 300 mm pikkusega kaart mööda. Arvutada rihma haardenurk α (joon. 149). (150°)

Kordamiseks.

560. Nimetada pindala ühikuid.

561. Kuidas arvutatakse ruudu, ristküliku, rööpküliku, kolmnurga, trapetsi pindala?

562. Mis on korrapärase puutujahulknurga apoteemiks?

563. Joonestada kolm ringi igaüks raadiusega 3 cm. Esimese ringi sisse ja ümber ehitada korrapärased kolmnurgad; teise ringi sisse ja ümber korrapärased nelinurgad; kolmanda ringi sisse ja ümber korrapärased kuusnurgad. Teha vajalikud mõõtmised ja arvutada kõigi hulknurkade pindalad.

564. Kuidas muutub antud raadiusega ringi korral korrapärase kõõlhulknurga pindala, kui hulknurga külgede arv suureneb? Korrapärase puutujahulknurga pindala?

§ 51. RINGI PINDALA.

1. Ülesanne. Toa põrand kavatsetakse värvida kahevärviliseks, nii et põranda keskel olev ringikujuline osa on üht värvi ja ülejäänud osa teist värvi. Kui palju värvi tuleb muretseda ringikujulise osa värvimiseks, kui ringi läbimõõt on 3,80 m ja iga ruutmeetri katmiseks kulub 190 G värvi?

Värvikoguse kindlaksmääramiseks on vaja osata arvutada ringi pindala.

2. Leiame tõkked, mille vahel asetseb ringi pindala väärtus. Seda saab teha korrapäraste kõõl- ja puutujahulknurkade pindalade abil (tuletada siinjuures meelde ringjoone pikkuse arvutamine — joonised 144, 145, 146 ja 147).

Tähistades ringi pindala tähega S, kõõl- ja puutujahulknurkade pindalad vastavalt tähtedega Q ja P, võime kirjutada:

$$Q<S<P.$$

Seega

$$S\approx Q=\frac{1}{2}hq \text{ (puuduga)},$$

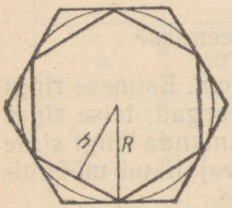
kus h on kõõlhulknurga apoteem ja q kõõlhulknurga ümbermõõt (joon. 150).

Samuti võime kirjutada

$$S\approx P=\frac{1}{2}pR \text{ (liiaga)},$$

kus R on ringi raadius (vt. ül. 561) ja p on puutujahulknurga ümbermõõt (joon. 150). Vaatleme lähemalt saadud ligikaudsetest võrdustest teist

$$S\approx\frac{1}{2}pR.$$



Joon. 150

Selle valemi kasutamisel tehtav viga on seda väiksem, mida suurem on puutujahulknurga külgede arv. Seda viga võib teha kuitahes väikeseks — selleks tuleb ainult puutujahulknurga külgede arv valida küllalt suur. See tähendab, et

puutujahulknurga külgede arvu suurenemisel läheneb hulknurga pindala järk-järgult ringi pindala täpsele väärtusele.

Et samal ajal toimub ka puutujahulknurga ümbermõõdu p järkjärguline lähenemine ringi ümbermõõdu täpsele väärtusele C, siis saamegi, et

ringi pindala võrdub ringi ümbermõõdu ja raadiuse poole korrutisega.

Sümbolites:

$$S=\frac{1}{2}CR.$$

Et $C=2\pi R$, siis saame ringi pindala arvutamise valemi kõige sagedamini kasutatava kuju:

$$\boxed{S=\pi R^2}$$

Võttes $R = \frac{d}{2}$, saame

$$S = \frac{1}{4}\pi d^2$$

Lahendame nüüd paragrahvi algul antud ülesande. Siin $R = 1{,}90$ m ja värvitava pinna pindala on $S = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot 1{,}90^2 = 3{,}14 \cdot 3{,}61 = 11{,}3$ m^2.

Vajalik värvi hulk $M = 11{,}3 \cdot 0{,}19 \approx 2{,}2$ kg (ümardatud ülespoole).

Küsimusi ja ülesandeid.

565. Arvutada ringi pindala, kui
a) ringi raadius on 3,2 cm; 5,62 dm; 7,80 m; 0,75 dm; 0,487 m.
b) ringi diameeter on 4,8 dm; 5,86 cm; 8,79 m; 0,490 dm; 20,8 mm.

566. Mitu korda on ringi pindala suurem sellise ruudu pindalast, mille külg võrdub ringi raadiusega?

567. Mitu protsenti on raadiusele ehitatud ruudu pindala ringi pindalast? (31,8%)

568. Mitme protsendi võrra on ruudu pindala suurem selle ruudu sisse ehitatud ringi pindalast? (27,4%)

569. Kontrollida vabalt valitud arvuliste näidete abil, mitu korda suureneb (väheneb) ringi pindala, kui
a) raadius suureneb (väheneb) mingi arv korda?
b) diameeter suureneb (väheneb) mingi arv korda?

570. Mitu korda suureneb (väheneb) ringi pindala, kui
a) raadius suureneb (väheneb) k korda?
b) diameeter suureneb (väheneb) k korda? (k tähistab mistahes antud arvu)

§ 52. RINGI PINDALA TABEL.

1. Ringi pindala määramist kergendab ringi pindala tabel (vt. õpiku lisa), mis võimaldab leida ringi pindala antud diameetri järgi ja ringi pindala järgi diameetrit. Selle tabeli ehitus ja kasutamine on analoogilised ringjoone pikkuse tabeli ehituse ja kasutamisega (§ 49).

Näiteks, kui $d=1{,}64$ m, siis rea r-1,6 ja veeru v-4 ristumiskohalt leiame $S=2{,}11$ m^2.

Tabeli abil saame veel:

kui $d=2{,}05$ cm, siis $S=3{,}30$ cm^2;

kui $r=2{,}32$ m, siis $S=16{,}9$ m^2 (enne tabeli kasutamist tuleb leida diameeter);

kui $S=21{,}6$ mm^2, siis $d=5{,}24$ mm;

kui $S=12{,}8$ dm^2, siis $d=40{,}4$ dm.

2. Erinevus ringjoone pikkuse tabeli kasutamisega tekib siis, kui diameetri antud väärtus ei kuulu vahemikku 1-st 10-ni (näiteks $d=16{,}5$ m; $d=0{,}789$ dm), ja ka siis, kui ringi pindala antud väärtus ei kuulu vahemikku 0,785-st 78,5-ni (näiteks $S=93{,}5$ m^2; $S=0{,}642$ dm^2).

Sellisel juhul tuleb arvestada seda, et

kui diameetrit suurendada (vähendada) 10, 100, ... *korda, siis ringi pindala suureneb (väheneb) vastavalt* $10^2=100$, $100^2=10\,000$, ... *korda* (vt. ül. 569).

Näiteks, kui $d=16{,}5$ m, siis leiame 10 korda väiksema diameetri (1,65) järgi ringi pindala 2,14 ja peame meeles, et leitud pindala on nõutavast pindalast 100 korda väiksem. Otsitav pindala on seega 214 m^2.

Nii saame veel:

kui $d=0{,}789$ dm, siis $S=0{,}489$ dm^2 (leitud $d=7{,}89$ järgi ja vähendatud 100 korda);

kui $d=308$ mm, siis $S=74\,500$ mm^2 (leitud $d=3{,}08$ järgi ja suurendatud 10 000 korda);

kui $d=0{,}0987$ km, siis $S=0{,}00765$ km^2 (leitud $d=9{,}87$ järgi ja vähendatud 10 000 korda).

Kui näiteks $S=93{,}5$ m^2, siis leiame 100 korda (mitte 10 korda!) väiksema pindala (0,935) järgi diameetri väärtuse 1,09 ja peame meeles, et see on nõutavast 10 korda (mitte 100 korda!) väiksem. Otsitav diameeter on seega 10,9 m.

Nii saame veel:

kui $S=0{,}642$ dm^2, siis $d=0{,}904$ dm (leitud $S=64{,}2$ järgi ja vähendatud 10 korda);

kui $S=0{,}0578$ km^2, siis $d=0{,}271$ km (leitud $S=5{,}78$ järgi ja vähendatud 10 korda);

kui $S=9692$ m^2, siis $d=111$ m (leitud $S=0{,}97$ järgi ja suurendatud 100 korda).

Edaspidi kasutame vastavate ülesannete lahendamisel alati ringi pindala tabeleid.

Ülesandeid.

571. Leida ringi pindala, kui diameeter on:

a) 1,75 m; 1,02 m; 3,78 cm; 5,0 mm; 8,9 dm; 7,87 km;

b) 0,563 m; 0,105 dm; 0,127 km; 0,0050 m; 0,342 dm; 0,0956 m;

c) 11,7 m; 15,69 dm; 28,4 cm; 89,7 m; 157 mm; 378 mm.

572. Leida ringi diameeter, kui pindala on:
a) 25,7 m^2; 38,2 cm^2; 65,0 mm^2; 70,0 dm^2; 0,987 km^2; 0810 mm^2;
b) 0,678 km^2; 0,482 dm^2; 0,771 cm^2; 0,0563 m^2; 0,025 m^2; 0,00787 m^2;
c) 82,7 mm^2; 97,0 dm^2; 100,0 m^2; 257 mm^2; 988 dm^2; 1959 cm^2.

573. 1) Ringi pindala on 12,6 m^2. Leida ringi ümbermõõt. (12,6 m)
2) On antud ringid raadiustega 11,2 cm ja 16,7 cm. Leida raadius kolmandale ringile, mille pindala võrdub antud ringide pindalade summaga. Võrrelda seda ülesannet ülesandega 549. (20,1 cm)

574. Leida traadi ristlõike pindala, kui traadi läbimõõt on 5 mm. (19,6 mm^2)

575. Ruudukujulisest plekitükist lõigati välja maksimaalse diameetriga ring, mille pindala on 177 cm^2. Leida esialgse plekitüki mõõtmed. Mitu protsenti materjali läks lõikamisel kaduma? (15,0 cm×15,0 cm; 21,3%)

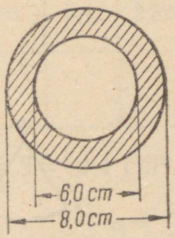
576. Puu ümbermõõt on 1,8 m. Leida selle puu ristlõike pindala. (0,26 m^2)

577. a) Rõnga sisemine diameeter on 6,0 cm ja väline 8,0 cm (joon. 151). Arvutada rõnga pindala. (22,0 cm^2)
b) Rõnga väline diameeter on 10,0 cm ja rõnga pindala on 50,2 cm^2. Leida rõnga sisemine diameeter. (6,0 cm)

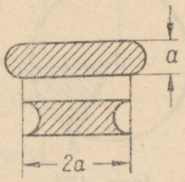
578. Aurumasina silindris rõhub aur kolvi igale ruutsentimeetrile jõuga 6,5 kG. Leida, millise jõuga mõjub aur kolvile, kui kolvi diameeter on 360 mm. (6600 kG)

579. Ümmarguse lillepeenra läbimõõt on 4,0 m. Peenar on ümbritsetud teerajaga, mille laius on 1,0 m. Kui palju liiva on vaja tee katmiseks, kui iga ruutmeetri katmiseks arvestada 20 dm^3 liiva? Liiva erikaal on 1,6. (500 kG)

580. Arvutada joonisel 152 olevate kujundite ümbermõõdud ja pindalad, kui $a=3{,}2$ cm.
Mitme protsendi võrra on alumise kujundi pindala väik-



Joon. 151



Joon. 152

sem ülemise kujundi pindalast? Mitme protsendi võrra on ülemise kujundi pindala suurem alumise kujundi pindalast? (22,9 cm; 28,5 cm²; 12,5 cm²; 56,2%; 128%)

581. Täita järgmine ligikaudsete andmetega tabel.

d(m)	2,0					18,8		
R(m)		1,8			0,68			
C(m)			3,82					0,782
S(m²)				12,8			20,6	

§ 53. RINGI SEKTOR. SEKTORI PINDALA.

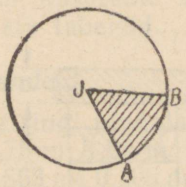
1. **Ringi osa, mis on piiratud kahe raadiusega ja ringjoone kaarega, nimetatakse ringi sektoriks** (joon. 153).

Sektorit piiravat kaart AB nimetatakse lühidalt **sektori kaareks,** sektorit piiravat raadiust OA või OB aga **sektori raadiuseks.** Kesknurka AOB nimetatakse **sektori nurgaks.** Sektorit tähistatakse kolme tähega, millest kaks tähistavad sektori kaare otspunkte ja üks ringi keskpunkti. Joonisel viirutatud osa on seega sektor AOB.

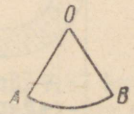
Märkus. Sektori definitsioonist järeldub, et kaks raadiust jaotavad ringi kaheks sektoriks. Joonisel 153 on üks nendest viirutatud, teine viirutamata; mõlemaid tuleks aga tähistada ühe ja sama tähisega AOB. Arusaamatuste vältimiseks tõstetakse vaadeldav sektor joonisel eriti esile (erivärv, viirutamine, tugevamad piirjooned) või joonestatakse ta täiesti iseseisva kujundina (joon. 154).

2. Jätame lugeja ülesandeks tuletada sektori pindala valem

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{630}$$



Joon. 153



Joon. 154

kus α tähistab sektori nurga suurust kraadides. Sektori pindala valemi tuletamine on analoogiline kaare pikkuse valemi tuletamisega (§ 50). Olgu seejuures abiks järgmised küsimused.

a) Millise kujundi moodustab sektor, mille nurk on 360°?

b) Kui suure osa ringi pindalast moodustab sektori pindala, kui sektori nurk on 180°; 90°; 60°; 1°; 10°; 45°; 7°; 59°; α°?

Küsimusi ja ülesandeid.

582. Täita järgmine tabel.

R(m)	2			3,7	0,68			16,1		3,47
d(m)		3	12,4			22,4	0,88		0,568	
α	60°	30°	90°	270°	120°	10°	39°	56°30′	195°	48°
S(m²)										

Näide. Kui $R=3{,}47$ m ja $\alpha=48°$, siis $d=6{,}94$ m ja

$$S=\frac{\pi R^2\alpha}{360}=\frac{37{,}8\cdot 48}{360}=5{,}04\ \text{m}^2.$$

(Lugejas oleva avaldise πR^2 väärtus 37,8 on leitud ringi pindala tabelist.)

583. Mitut muutuvat suurust seob sektori pindala valem? Milliseid? (3)

584. Avaldada sektori pindala valemist α ja täita saadud valemi abil järgmine ligikaudsete andmetega tabel.

$\left(\alpha=\frac{360\,S}{\pi R^2}\right)$

S(cm²)	6,28	12,3	4,8	0,56	86,3	4,92	0,472	12,4	6,72
R(cm)	300	5,4	2,32	0,67	8,72	1,32	1,41	4,2	2,56
α									

Näide. Kui $S=12{,}4$ cm² ja $R=4{,}2$ cm, siis

$$\alpha=\frac{360\,S}{\pi R^2}=\frac{360\cdot 12\,4}{55{,}4}\approx 81°.$$

(Avaldise πR^2 väärtus 55,4 on leitud ringi pindala tabelist, kui $d=8{,}4$ cm.)

Märkus. Kui sektori pindala valemis on antud α ja S, siis on võimalik arvutada R. Selle ülesande lahendamine osutub aga võimalikuks alles 8. klassis õpitavate teadmiste põhjal.

585. Kui suure nurga omab sektor, mille pindala on ringi pindalast 85%. (306°)

Näpunäide. Asendada ülesandes 584 saadud valemis S avaldisega $0{,}85\pi R^2$. ($85\% = 0{,}85$)

586. a) Maailma rahvastikust kuulub mongoliidsesse rassi ligikaudu 36%, europiidsesse rassi 47%, negroidsesse rassi 6% ja segarassidesse 11% kogu maailma rahvastikust. Kui kujutada kogu maailma rahvastikku (100%) terve ringina, kui suure nurgaga sektorid vastavad siis igale rassile? Teha vastav joonis, s. o. valmistada maailma rahvastiku rassilise jaotuse **sektordiagramm.**

b) Kütuse põlemisel auto mootori silindrites tekkinud energia jaguneb järgmiselt: 30% läheb auto liikumapanemiseks; 30% läheb kaduma jahutusseadmete kaudu; 5% läheb kaduma mitmesuguste sisemiste takistuste (hõõrdumine) ületamiseks; 35% läheb kaduma heitegaaside kaudu. Ehitada auto mootori energiajaotuse sektordiagramm.

587. Anda suusõnaline selgitus järgmistele teisendustele:

$$S=\frac{\pi R^2\alpha}{360}=\frac{\pi R\alpha\cdot R}{180\cdot 2}=\frac{\pi R\alpha}{180}\cdot\frac{R}{2}=s\cdot\frac{R}{2},$$

s. o. *sektori pindala võrdub sektori kaare pikkuse ja raadiuse poole korrutisega.*

588. a) Leida sektori pindala, kui sektori kaar on 3,82 cm ja raadius 5,82 cm. (11,1 cm^2)

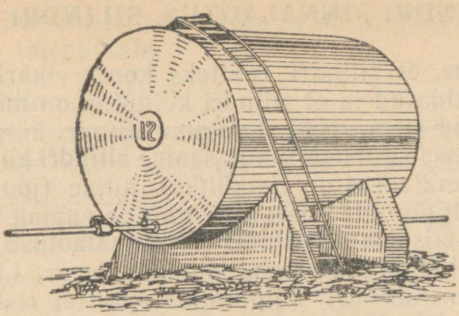
Näpunäide. Kasutada ülesandes 587 saadud valemit.

b) Sektori pindala on 28,3 cm^2, sektori raadius 4,8 cm. Arvutada sektori kaare pikkus. (11,8 cm)

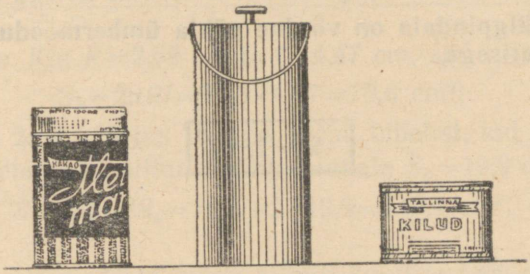
§ 54. SILINDER.

1. Joonisel 155 ja 156 on kujutatud mitu igapäevases elus sageli esinevat eset: tsisternid mootorikütuse hoidmiseks, kakaopurk, piimanõu, konservipurk.

Matemaatikas nimetatakse kõiki sellise kujuga esemeid (vaa-



Joon. 155



Joon. 156

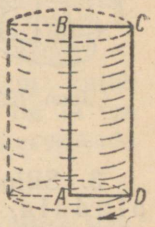
tamata nende värvile, materjalile, kaalule ja muudele omadustele) **silindrilisteks kehadeks** ehk lihtsalt **silindriteks.**

Silinder on piiratud **silindri külgpinnaga** ja kahe ringiga, mida nimetatakse **silindri põhjadeks.** Silindri külgpind on kõverpind.

2. Kujutleme ristkülikut *ABCD* (olgu see valmistatud näiteks peenest traadist) pöörlevana ümber ühe külje, näiteks *AB* (joon. 157). Külg *CD* tekitab siis silindri külgpinna. Seda külge nimetatakse **silindri moodustajaks.** Silindri põhjad tekivad külgede *BC* ja *AD* pöörlemisel. Need küljed on ühtlasi **silindri põhjade raadiused.** Silindri põhjade raadiused on võrdsed. Külg *AB*, mille ümber toimub ristküliku pöörlemine, on **silindri telg.** Silindri telg on ka **silindri kõrguseks.** Silindri kõrgus ja moodustaja on võrdsed.

Et silinder tekib ristküliku p ö ö r l e m i s e l, siis öeldakse ka, et silinder on **pöördkeha.**

Silindri skemaatilist kujutamist näitab joonis 158.



Joon. 157



Joon. 158

§ 55. SILINDRI PINNALAOTUS. SILINDRI PINDALA.

1. Kujutleme, et silindri (näiteks konservikarbi) põhjad on külgpinnast eraldatud ja et silindri külgpind on mööda moodustajat lahti lõigatud (joon. 159). Laotame silindri külgpinna tasapinnale (näiteks tasasele lauale), siis saame **silindri külgpinnalaotuse.** Silindri külgpinnalaotus on ristkülikukujuline (joon. 160).

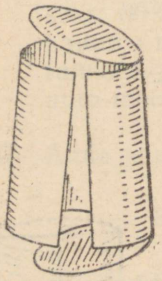
Kui koos külgpinnalaotusega paigutada samale tasapinnale ka silindri põhjad, siis saame **silindri täispinnalaotuse** (joon. 161).

2. Silindri külgpinnalaotuse pindala on silindri külgpindala. Kuna silindri külgpinnalaotus on ristkülikukujuline, siis on selle pindala lihtne arvutada. Joonisel 160 näeme, et külgpinnalaotust kujutava ristküliku aluse AD pikkus on võrdne silindri põhja ümbermõõduga $2\pi R$; selle ristküliku kõrgus on aga võrdne silindri moodustajaga, mida tähistame tähega l. Seega

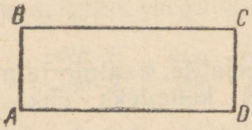
silindri külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja moodustaja korrutisega.

Sümbolites:

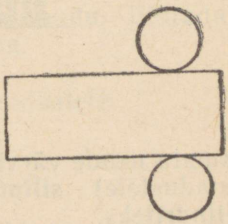
$$S_k = 2\pi Rl$$



Joon. 159



Joon. 160



Joon. 161

3. Silindri täispinnalaotuse pindala on silindri täispindala, mille arvutamiseks tuleb külgpindalale liita kahe võrdse ringi pindala, s. o.

$$S_t = 2\pi Rl + 2\pi R^2,$$

millest

$$S_t = 2\pi R\,(l + R)$$

Küsimusi ja ülesandeid.

589. Leida silindrikujulisi kehi oma lähemast ümbrusest.

590. Koostada ülesanne, kus on vaja osata arvutada silindri külgpindala ja täispindala.

591. Täita järgmine tabel.

R(cm)	3,0	3,7	3,1	2,52	0,28	0,323	127	3,15	1,03	16,1
l(cm)	9,5	12,3	8,2	4,47	0,87	1,37	292	2,17	0,89	0,37
S_k(cm²)										
S_t(cm²)										

N ä i d e. Kui $R=2{,}52$ cm ja $l=4{,}47$ cm, siis

$$S_k=2\pi Rl=15{,}8\cdot 4{,}47=70{,}6 \text{ cm}^2;$$

(Avaldise $2\pi R$ väärtus 15,8 on leitud tabelist, kui $d=5{,}04$. Tabelist leiame ka silindri põhja pindala $S_p=19{,}9$ cm².)

$$S_t=S_k+2S_p=70{,}6+2\cdot 19{,}9=110{,}4 \text{ cm}^2.$$

592. a) Kui palju plekki kulub silindrikujulise kaaneta piimanõu valmistamiseks, kui nõu läbimõõt on 2,50 dm ja kõrgus 5,00 dm? Pleki kulu valtsimisel mitte arvestada. (45 dm²; vastus on ümardatud ülespoole)

b) Lahendada eelmine ülesanne tingimusel, et pleki valtsimiseks kulub 5% kogu vajalikust materjalist. (47 dm²)

593. Mitu tahvlit plekki mõõtmetega 140 cm×70 cm kulub vihmaveetoru valmistamiseks, kui toru diameeter on 14 cm ja pikkus 6,1 m? Valtsimiseks ja lülide jätkamiseks arvestada pleki kulu 8%. (3 tahvlit)

594. Kui palju alumiiniumvärvi kulub kütuse silindrikujulise tsisterni katmiseks, kui tsisterni läbimõõt on 1,4 m ja pikkus 2,7 m? Värvi kulu iga ruutmeetri katmiseks arvestada 0,15 kG. (2,3 kG)

595. Mitu muutuvat suurust on seotud silindri külgpindala valemis? (3)

596. Avaldada silindri külgpindala valemist l. Arvutada silindri moodustaja, kui a) $S_k=16{,}8$ m² ja $R=1{,}20$ m;

b) $S_k=3{,}56$ dm ja $R=0{,}58$ dm. (2,23 m; 0,978 dm)

597. Avaldada silindri külgpindala valemist R.

598. Arvutada silindri raadius, kui a) $S_k = 32{,}7$ m^2 ja $l = 2{,}82$ m;

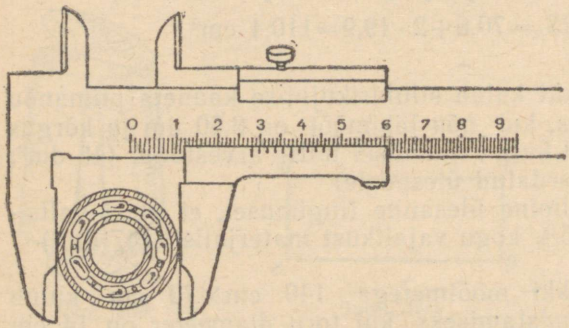
b) $S_k = 0{,}456$ m^2 ja $l = 0{,}12$ m. (1,85 m; 0,606 m)

599. a) Silindri moodustaja on 4,67 dm. Silindri diameeter on moodustajast 27% võrra väiksem. Leida silindri külgpindala. (50,0 dm^2)

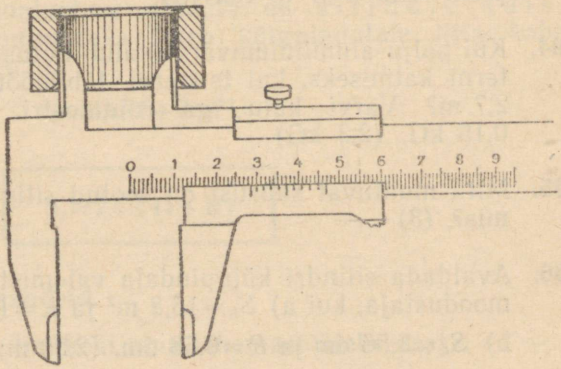
b) Silindri põhja raadius on 2,7 m, kusjuures raadius on silindri kõrgusest 51%. Leida silindri külgpindala. (89,7 m^2)

600. Teostada vajalikud mõõtmised mõne silindrikujulise keha (näiteks konservipurk) juures ja arvutada selle keha külg- ja täispindala.

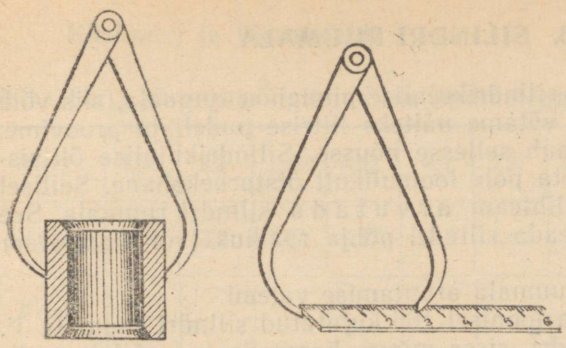
Märkus. Silindrikujuliste kehade läbimõõdu (välise ja sisemise) mõõtmiseks kasutatakse nihkkaliibrit (joon. 162 ja 163), välis- ja sisetastrit (joon. 164 ja 165); jämedamal mõõtmisel ka tavalist mõõtjoonlauda.



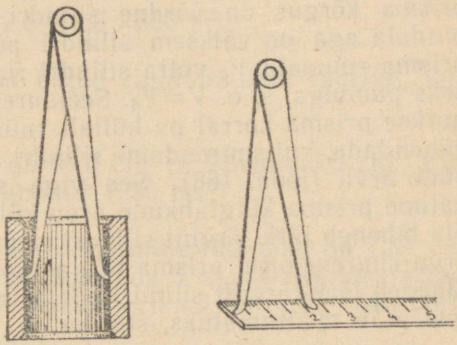
Joon. 162



Joon. 163



Joon. 164



Joon. 165

Kordamiseks.

601. Leida oma lähemast ümbrusest kehi, mis omavad püstprisma kuju.

602. Millised kujundid on püstprisma külgtahkudeks? põhjadeks?

603. Millised kujundid on korrapärase prisma põhjadeks?

604. Kuidas arvutatakse püstprisma külgpindala? ruumala?

605. Arvutada püstprisma ruumala, kui prisma kõrgus on 5 cm ja põhja pindala: a) 6 cm^2; b) 8 cm^2; c) 12 cm^2; d) $13\frac{4}{5}$ cm^2; e) 20 cm^2.

606. Kuidas muutub püstprisma ruumala, kui prisma kõrgus ei muutu, aga põhja pindala suureneb?

607. Millele läheneb ringi sisse ehitatud korrapärase hulknurga pindala, kui hulknurga külgede arvu järk-järgult suurendada?

§ 56. SILINDRI RUUMALA.

Kui tahame mõõta silindrikujulise piimanõu ruumala, siis võib seda teha sel teel, et võtame näiteks liitrise pudeli ja proovime, mitu liitrit piima mahub sellesse nõusse. Silindrikujulise õlitsisterni ruumala nii mõõta pole loomulikult otstarbekohane. Sellisel juhul on märgatavalt lihtsam arvutada silindri ruumala. See on võimalik, kui on teada silindri põhja raadius (või diameeter) ja silindri kõrgus.

Tuletame silindri ruumala arvutamise valemi.

Olgu vaja arvutada joonisel 166 kujutatud silindri ruumala V. Joonestame selle silindri sisse mingi korrapärase, näiteks nelinurkse prisma (joon. 167). Selle prisma ruumala V_4 oskame arvutada. Selleks tuleb prisma põhja pindala korrutada kõrgusega. Et prisma kõrgus on võrdne silindri kõrgusega H, prisma põhja pindala aga on väiksem silindri põhja pindalast S_p, siis võime prisma ruumala V_4 võtta silindri ruumala V ligikaudseks väärtuseks puuduga, s. o. $V \approx V_4$. Seejuures teeme teatava vea, mis nelinurkse prisma korral on küllalt suur. Seda viga saab järk-järgult vähendada, kui suurendame silindri sisse ehitatud prisma külgtahkude arvu (joon. 168). See viga saab kuitahes väikeseks, kui valime prisma külgtahkude arvu küllalt suure, s. o. prisma ruumala läheneb järk-järgult silindri ruumalale. Et prisma külgtahkude arvu suurenemisel prisma põhja (korrapärase hulknurga) pindala läheneb järk-järgult silindri põhja (ringi) pindalale (§ 51) ja kõrgus jääb muutumatuks, siis ka

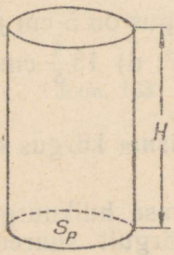
silindri ruumala on võrdne põhja pindala ja silindri kõrguse korrutisega, s. o.

$$V = S_p H$$

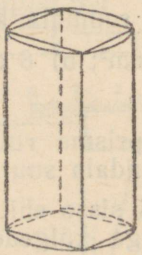
ehk

$$\boxed{V = \pi R^2 H}$$

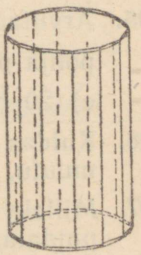
kus R on silindri põhja raadius ja H silindri kõrgus.



Joon. 166



Joon. 167



Joon. 168

Küsimusi ja ülesandeid.

608. Täita järgmine ligikaudsete andmetega tabel.

R (m)	1,00	2,3	1,45	5,62	4,1	0,97	1,25	0,285	37,1	128
H (m)	1,00	3,2	2,67	2,37	12,5	1,42	0,67	0,432	56,2	112
V (m^3)										

N ä i d e. Kui $R=4{,}1$ ja $H=12{,}5$, siis

$$V=\pi R^2H=52{,}8\cdot 12{,}5\approx 660\ m^3.$$

(Avaldise πR^2 väärtus on leitud ringi pindala tabelist, kui $d=8{,}2$ m.)

609. Konservikarbi läbimõõt on 10,0 cm ja kõrgus 5,0 cm. Kui suur on konservikarbi ruumala? (390 cm^3)

610. Mõõtmisel selgus, et raudtoru sisemine läbimõõt on 1,54 cm ja väline läbimõõt 2,00 cm. Arvutada 5 m pikkuse toru seina ruumala ja toru kaal, kui raua erikaal on 7,8. (640 cm^3; 5,0 kG)

611. Kütuse tsistern, mille läbimõõt on 1,40 m ja pikkus 3,25 m, on täidetud bensiiniga (erikaal 0,70). Kui palju kaalub see bensiin? (3,5 tonni)

612. Mitu liitrit piima mahutab silindrikujuline piimanõu, mille kõrgus on 60 cm ja läbimõõt 20 cm? (18,8 l)

613. Mitu tihumeetrit puitu sisaldab silindrikujuline palk, mille läbimõõt on 43 cm ja pikkus 3,8 m? (0,55 tihumeetrit)

614. Vasktraadi läbimõõt on 2 mm. Kui palju kaalub 100 m seda traati (vase erikaal 8,9)? (2,8 kG)

615. Kui raske on 4,00 m pikkune terasvõll, mille läbimõõt on 12,0 cm (terase erikaal 7,8)?

616. Ristkülik mõõtmetega 5 cm×7 cm pöörleb a) ümber väiksema külje; b) ümber suurema külje. Leida kummalgi juhul tekkiva silindri täispindala ja ruumala. [a) 528 cm^2, 770 cm^3; b) 377 cm^2, 550 cm^3]

617. Ristküliku küljed on m ja n. Ristkülik pöörleb a) ümber külje, mille pikkus on m; b) ümber külje, mille pikkus on n. Näidata, et kummalgi juhul tekkinud silindri külgpindalad on võrdsed.

618. Mitu muutuvat suurust on omavahel seotud silindri ruumala valemis $V=S_pH$? Avaldada sellest valemist a) põhja pindala S_p; b) kõrgus H.

619. Silindri ruumala on 57,9 cm^3 ja kõrgus 8,9 cm. Leida silindri põhja pindala. (6,51 cm^2)

620. Silindri ruumala on 128 dm^3 ja põhja pindala 12,3 dm^2. Leida silindri kõrgus. (10,4 dm)

621. Silindrikujulises nõus, mille põhja läbimõõt on 2,82 dm, on 12 l vett. Kui sügav on vesi selles nõus? (1,9 dm)

622. Kera vasktraati (⌀ 2 mm, erikaal 8,9) kaalub 15,6 kG. Kui pikk on see traat? (560 m)

623. Klaaspurgi sisemine läbimõõt on 12 cm ja kõrgus 18 cm. Mitu liitrit keedist mahub sellesse purki?

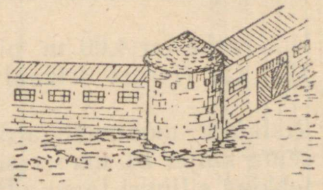
624. Ristkülikukujulisest plekitükist mõõtmetega 12 cm×18 cm keerati kokku silindri külgpind nii, et silindri kõrguseks jäi ristküliku suurem külg. 1 cm laiune riba kulus valtsimiseks. Kui suure raadiusega ring tuleb võtta selle silindri põhja valmistamiseks, kui valtsimiseks kulub 0,5 cm laiune rõngas? Kui suur on selle silindri ruumala? (2,3 cm; 170 cm^3)

§ 57. KOONUS.

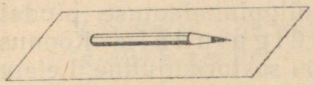
1. Vaatleme joonisel 169 kujutatud liivakuhja, joonisel 170 kujutatud torni katust, joonisel 171 kujutatud pliiatsi masinaga teritatud otsa. Kõiki sellise kujuga esemeid nimetatakse matemaatikas **koonilisteks kehadeks** ehk lihtsalt **koonusteks**. Koonuse ske-



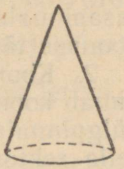
Joon. 169



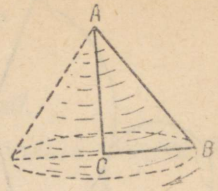
Joon. 170



Joon. 171



Joon. 172



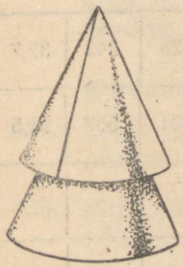
Joon. 173

maatilist kujutamist näitab joonis 172. Koonus on piiratud **koonuse külgpinnaga** ja ühe ringiga. Seda ringi nimetatakse **koonuse põhjaks.** Koonuse külgpind on kõverpind.

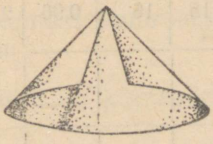
2. Kui täisnurkne kolmnurk ABC pöörleb ümber ühe kaateti, näiteks AC (joon. 173), siis kolmnurga hüpotenuus AB tekitab koonuse külgpinna. Hüpotenuusi AB nimetatakse siis **koonuse moodustajaks.** Koonuse põhi tekib kaateti BC pöörlemisel. Kaatet BC on siis koonuse **põhja raadiuseks.** Kaatet AC, mille ümber kolmnurk pöörleb, on **koonuse telg.** Koonuse telg on ühtlasi ka **koonuse kõrgus.** Kolmnurga tipp A on ka **koonuse tipp.** Koonus on **pöördkeha.**

§ 58. KOONUSE PINNALAOTUS. KOONUSE PINDALA.

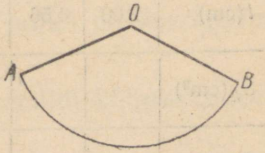
1. Võtame koonuse (näiteks plekist või puust) ja sobiva suurusega paberilehe. Paigutame koonuse küljeli paberilehele ja keerame paberilehe tihedalt ümber koonuse külgpinna, nii et leht kataks tervet koonuse külgpinda ühekordselt. Võtame koonuse sellest paberilehest välja (joon. 174) ja laotame saadud paberilehe tasapinnale, näiteks tasasele lauale (joon. 175 ja 176). Nii saame



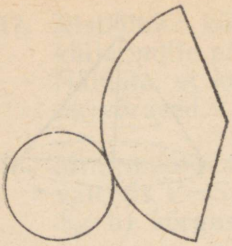
Joon. 174



Joon. 175



Joon. 176



Joon. 177

koonuse **külgpinnalaotuse.** Kui paigutame koos koonuse külgpinnalaotusega samale tasapinnale ka koonuse põhja, siis saame koonuse **täispinnalaotuse** (joon. 177).

2. Koonuse külgpinnalaotuse pindala annab koonuse k ü l g p i n d a l a. Koonuse külgpinnalaotus on sektorikujuline. Leiame selle sektori pindala (vt. ül. 587). Selle sektori kaar $s=\overset{\frown}{AB}$ (joon. 176) on võrdne koonuse põhja ümbermõõduga, s. o. $s=2\pi R$, kus R on koonuse põhja raadius. Sektori raadius OA on aga võrdne koonuse moodustajaga l. Seega koonuse külgpindala

$$S_k=\frac{s\cdot l}{2}=\frac{2\pi R\cdot l}{2},$$

millest

$$\boxed{S_k=\pi Rl}$$

Koonuse külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja moodustaja poole korrutisega.

3. Koonuse täispinnalaotuse pindala on koonuse t ä i s p i n d a l a. Selle arvutamiseks tuleb külgpindalale liita põhja pindala, s. o.

$$S_t=\pi Rl+\pi R^2$$

ehk

$$\boxed{S=\pi R(l+R)}$$

Küsimusi ja ülesandeid.

625. Leida koonilisi kehi oma lähemast ümbrusest.

626. Täita järgmine ligikaudsete andmetega tabel.

R(cm)	1,00	3,28	6,78	5,01	12,1	0,47	0,582	128	342	32,7
l(cm)	2,00	4,56	8,02	9,15	16	0,96	2,75	251	567	91,5
S_k(cm²)										
S_t(cm²)										

N ä i d e. Kui $R=12{,}1$ cm ja $l=16$ cm, siis

$S_k=\pi Rl=3{,}14\cdot 12{,}1\cdot 16=608\approx 610$ cm^2;

$S_t=\pi Rl+\pi R^2=608+460=1\,068\approx 1\,070$ cm^2.

(Avaldise πR^2 väärtus on leitud ringi pindala tabelist, kui $d=24{,}2$ cm.)

627. a) Mitu ruutmeetrit plekki kulub koonusekujulise katuse katmiseks, kui vastava koonuse moodustaja on 3,5 m ja põhja läbimõõt 4,8 m? Kulusid valtsimisel mitte arvestada. (27 m^2 — ümardatud ülespoole)

b) Lahendada eelmine ülesanne, kui andmed on vastavalt 3,3 m ja 4,2 m. Valtsimiseks kulub 10% materjalist. (24 m^2)

628. Mitu muutuvat suurust on omavahel seotud koonuse külgpindala valemis?

629. Avaldada koonuse külgpindala valemist a) raadius R; b) moodustaja l.

630. Koonuse külgpindala on 13,8 m^2 ja moodustaja on 2,3 m. Leida koonuse põhja raadius. (1,91 m)

631. Koonuse külgpindala on 23,4 cm^2 ja moodustaja on 4,80 cm. Leida koonuse põhja ümbermõõt ja pindala. (9,74 cm; 7,55 cm^2)

632. Koonuse külgpindala on 56,7 dm^2 ja põhja raadius 3,82 cm. Leida koonuse moodustaja. (4,73 cm)

633. Koonuse põhja pindala on 14,7 dm^2 ja külgpindala 22,3 dm^2. Arvutada koonuse moodustaja. (3,29 dm)

634. Plekist sektor nurgaga 150° ja raadiusega 15,6 cm keeratakse koonusekujuliseks lehtriks. Leida selle koonuse põhja raadius. (6,50 cm)

Kordamiseks.

635. Leida oma lähemast ümbrusest kehi, millel on korrapärase püramiidi kuju.

636. Millised kujundid on korrapärase püramiidi külgtahkudeks? põhjaks?

637. Kuidas arvutatakse korrapärase püramiidi pindala? ruumala?

638. Arvutada korrapärase püramiidi ruumala, kui püramiidi kõrgus on 12 cm ja põhja pindala a) 5 cm^2; b) 7 cm^2; c) 15 cm^2; d) 25 cm^2.

639. Kuidas muutub korrapärase püramiidi ruumala, kui püramiidi kõrgus ei muutu, põhja pindala aga suureneb?

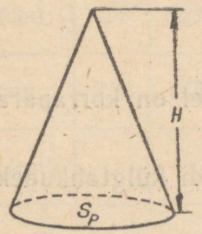
§ 59. KOONUSE RUUMALA.

1. Kui tahame teada saada, kui palju kartuleid on näiteks koonusekujulises kuhjas, siis on vaja osata leida kuhja (koonuse) ruumala. Koonuse ruumala on võimalik arvutada, kui on teada koonuse põhja raadius ja koonuse kõrgus. Koonuse ruumala valemi tuletamisel kasutame sama mõttekäiku, mida me kasutasime silindri ruumala valemi tuletamisel (§ 56).

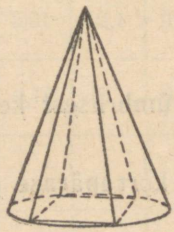
2. Olgu vaja leida joonisel 178 kujutatud koonuse ruumala V. Joonestame selle koonuse sisse korrapärase nelinurkse püramiidi (joon. 179). Selle püramiidi ruumala V_4 arvutamiseks tuleb püramiidi põhja pindala korrutada ühe kolmandiku kõrgusega. Püramiidi ruumala V_4 võime lugeda ligikaudu võrdseks koonuse ruumalaga, s. o. $V \approx V_4$ (puuduga). Muidugi teeme seejuures märgatava vea. Kuidas on võimalik seda viga vähendada (vt. joon. 180)? Kas seda viga saab teha kuitahes väikeseks? Millele läheneb järk-järgult püramiidi põhja pindala, kui püramiidi külgtahkude arvu järjest suurendada? Kas seejuures muutub püramiidi kõrgus? Millele läheneb järk-järgult püramiidi ruumala, kui püramiidi külgtahkude arvu järjest suurendada? Mis siit järgneb koonuse ruumala arvutamise kohta?

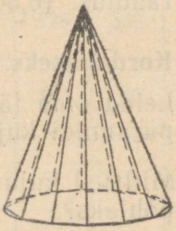
Koonuse ruumala on võrdne koonuse põhja pindala ja koonuse kõrguse kolmandiku korrutisega, s. o.

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot H$$



Joon. 178


Joon. 179


Joon. 180

ehk

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

kus R on koonuse põhja raadius ja H koonuse kõrgus.

Küsimusi ja ülesandeid.

640. Täita järgmine ligikaudsete andmetega tabel.

R (cm)	1,00	2,8	4,57	6,17	0,78	8,7	0,567	87,1	34	128
H (cm)	3,00	3,62	3,12	9,01	1,12	0,96	0,43	102	27	254
V (cm^3)										

Näide. Kui $R=0{,}78$ cm ja $H=1{,}12$ cm, siis

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\cdot 1{,}91 \cdot 1{,}12 = 0{,}713 \approx 0{,}71 \text{ cm}^3.$$

(Avaldise πR^2 väärtus 1,91 on leitud ringi pindala tabelist, kui $d=1{,}56$ cm.)

641. Mitu kuupmeetrit liiva on koonusekujulises kuhjas, mille põhja ümbermõõt on 5,2 m ja kõrgus 1,3 m? (0,94 m^3)

642. Kui palju kaalub koonusekujulises kuhjas olev liiv (erikaal 1,4), kui kuhja ümbermõõt on 12,8 m ja kõrgus 1,8 m? (11 tonni)

643. Mitu hobusekoormat kartuleid saab koonusekujulisest kuhjast, mille põhja ümbermõõt on 9,8 m ja kõrgus 1,3 m? Üks hektoliiter kartuleid kaalub keskmiselt 72 kG. Hobusekoorma raskuseks arvestada 300 kG. (8 koormat)

644. Koonusekujulises telgis, mille põhja raadius on 2,0 m ja kõrgus 3,1 m, elas 5 inimest. Mitu kuupmeetrit õhku tuli iga inimese kohta?

645. Kivikillustiku koonusekujulise põhja ümbermõõt on 25 m ja kõrgus 4 m. Hinnata, mitu meetrit 6 m laiust asfaltteed saab sellega katta, kui 100 m^2 katmiseks kulub 3,5 tonni killustikku. Üks kuupmeeter killustikku kaalub 1,8 tonni. (500—600 m)

646. Mitu muutuvat suurust on omavahel seotud koonuse ruumala valemis $V = \frac{1}{3} S_p H$?

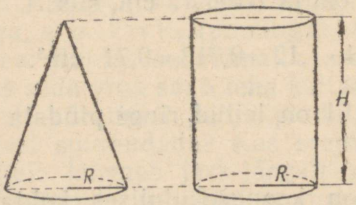
647. Avaldada eelmises ülesandes antud valemist a) põhja pindala S_p; b) koonuse kõrgus H.

648. Koonuse ruumala on 23,7 m³ ja kõrgus 2,7 m. Leida koonuse põhja pindala. (26,4 m²)

649. Koonuse ruumala on 32,5 m³ ja põhja pindala 24,3 m². Leida koonuse kõrgus. (4,02 m)

650. 1,2 m kõrgusest koonusekujulisest liivakuhjast sai 3,5-tonnise kandejõuga auto 6 tervet koormat. Millise läbimõõduga ringi kattis liivakuhi (erikaal 1,4)? (6,9 m)

651. Kui suure osa moodustab koonuse ruumala niisuguse silindri ruumalast, mille põhja raadius on võrdne koonuse põhja raadiusega ja kõrgus koonuse kõrgusega (joon. 181)?



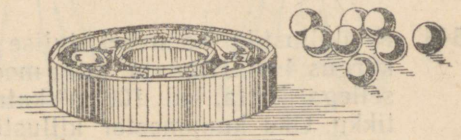
Joon. 181

§ 60. KERA.

1. Kera on igapäevases elus sageli esinev keha. Jalgpall, õhupall, kuullaagri kuulid (joon. 182), gloobus (joon. 183) jne. on kõik **kerakujulised kehad** ehk lihtsalt **kerad.**

Kera on piiratud **kerapinna** ehk **sfääriga.** Kerapind on kõverpind.

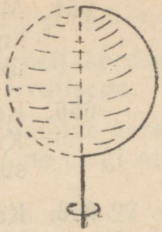
2. Kera on **pöördkeha.** Tõepoolest, kui kujutleda poolringi pöörlevana ümber diameetri (joon. 184), siis ringjoone kaar tekitab kera pinna. Tekkinud keha on seega kera. Pöörleva ringi keskpunkt on ühtlasi ka **kera keskpunktiks** (punkt O joonisel 185).



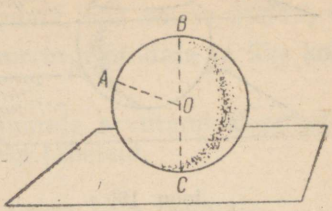
Joon. 182



Joon. 183



Joon. 184



Joon. 185

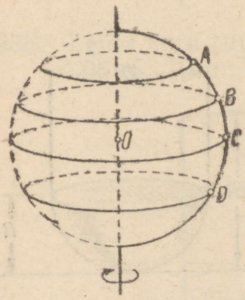
Kera pinna kõik punktid on kera keskpunktist võrdsetel kaugustel. Miks? Sirglõiku, mis ühendab kera keskpunkti kerapinna mingi punktiga, nimetatakse **kera raadiuseks** (*OA* joonisel 185). Sirglõik, mis ühendab kerapinna kahte punkti ja mis läbib kera keskpunkti, on **kera diameeter** (*BC* joonisel 185). Kera diameeter on raadiusest kaks korda pikem.

3. Kui poolring pöörleb ümber diameetri, siis ringjoone kaare punktid, näiteks *A*, *B*, *C*, *D* (joon. 186) tekitavad ringjooni — paralleelringjooni. Üks ringjoon (mille tekitab punkt *C*) nende seast on suurim. Seda ringjoont nimetatakse **kera suurringjooneks,** vastavat ringi aga **kera suurringiks.** Kera suurring läbib kera keskpunkti. Ta jaotab kera kaheks võrdseks **poolkeraks** (joon. 187). Kera suurringi raadius on võrdne kera raadiusega.

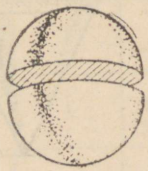
Küsimusi ja ülesandeid.

652. Leia kerakujulisi kehi oma lähemast ümbrusest.

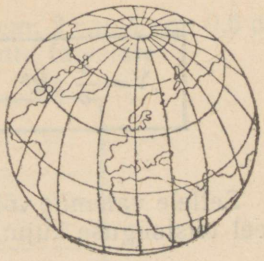
653. Joonisel 188 on kujutatud gloobus, millele on märgitud meridiaanid (pikkusjooned) ja paralleelid (laiusjooned). Milliseid jooni gloobuse kui kera suhtes kujutavad endast meridiaanid? Milline paralleel on kera suurringjooneks? Milliseid maakera punkte läbivad kõik meridiaanid? Milline punkt on kõikide meridiaanringide keskpunktiks?



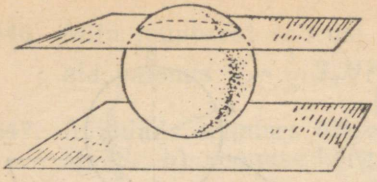
Joon. 186



Joon. 187



Joon. 188



Joon. 189

654. Maakera raadius on 6371 km. Leida Maa ekvaatori ümbermõõt. (40 000 km)

655. Kera läbimõõt on 13,2 cm. Kui suur on selle kera suurringi pindala?

656. Kas kerapinnale on võimalik üheski suunas joonestada sirgeid? Aga silindri ja koonuse külgpinnale?

657. Milline kujund tekib lõikepinnana, kui kera lõigata tasapinnaga (näiteks, kui saagida puust kera kaheks osaks, joon. 189)?

Kuidas muutub selle lõikepinna pindala, kui lõikav tasapind läheneb kera keskpunktile? eemaldub kera keskpunktist? Millal on lõikepinna pindala maksimaalne? minimaalne?

§ 61. KERA RUUMALA.

Teeme järgmise katse. Võtame tühja (näiteks plekist või plastmassist) poolkera ja sellise tühja koonuse, mille põhja raadius on võrdne poolkera raadiusega ja mille kõrgus on võrdne poolkera diameetriga (joon. 120). Paneme koonuse ääreni vett täis ja valame selle siis poolkerasse. Selgub, et poolkera saab parajasti vett täis. Seega on see poolkera ja koonus võrdse ruumalaga. Terve kera ruumala on järelikult koonuse ruumalast kaks korda suurem. Et koonuse ruumala on

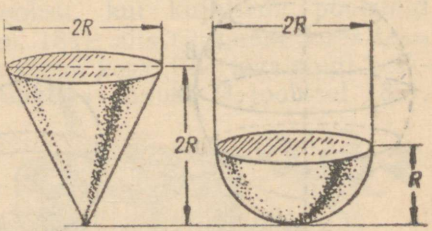
$$\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2R = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

siis saame pärast viimase avaldise kahega korrutamist kera ruumala arvutamise valemi:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Sellele valemile võib anda veel teistsuguse kuju:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \cdot \frac{R}{3}.$$



Joon. 190

Kuna πR^2 annab kera suurringi pindala, siis võime ütelda, et **kera ruumala võrdub neljakordse suurringi pindala ja ühe kolmandiku raadiuse korrutisega.**

Viimase valemi kasutamine kera ruumala arvutamisel on otstarbekas siis, kui kasutame ringi pindala tabeleid.

Näide. Kera raadius on 3,27 cm. Leida kera ruumala.
Lahendus. Leiame kera diameetri 6,54 cm järgi kera suurringi pindala 33,6 cm².

$$V=4\pi R^2 \cdot \frac{R}{3}=4 \cdot 33{,}6 \cdot \frac{3{,}27}{3}=4 \cdot 33{,}6 \cdot 1{,}09=$$

$$=146{,}496 \text{ cm}^3 \approx 146 \text{ cm}^3.$$

Vastus. Kera ruumala on 146 cm³.

Kui me kera ruumala arvutamisel ei kasuta tabeleid, siis on arvutuse lihtsustamiseks otstarbekas teada, et $\frac{4}{3}\pi \approx 4{,}19$. Sel juhul saame kera ruumala arvutamiseks ligikaudse valemi

$$V \approx 4{,}19R^3$$

Sęe valem ei võimalda kera ruumala arvutada kunagi täpsemalt kui kolme tüvenumbriga. Miks?

Näide. Kera raadius on 5 cm. Leida kera ruumala.
Lahendus. $V=4{,}19R^3=4{,}19 \cdot 125=523{,}75 \approx 524$ cm³.
Vastus. Kera ruumala on 524 cm³.
Viimase valemi kasutamine on otstarbekas siis, kui raadius väljendub arvuna, mida on kerge tõsta kuupi.

Ülesandeid.

658. Leida kera ruumala, kui raadius on 1 cm; 2 cm; 4 cm; 0,6 dm; 0,05 m; 10 m; 1,2 dm. Arvutused paiguta tabelisse.

R	1	2	...
R^3	1	8	...
$V=4{,}19R^3$	4,19	...	...

659. Leida kera ruumala, kui raadius on 1,25 cm; 2,3 cm; 3,2 m; 4,56 dm; 6,72 mm; 12,4 cm; 28,6 m; 0,47 m; 0,568 mm; 0,327 m. Arvutused paiguta tabelisse.

R	1,25	2,3	...
$\frac{R}{3}$	0,4167	...	...
πR^2	4,91	...	...
$4\pi R^2$	19,64	...	...
$V=4\pi R^2 \cdot \frac{R}{3}$	8,18	...	...

Märkus. Et ringi pindala tabeli kasutamise tõttu saab vastuses anda ülimalt 3 tüvenumbrit, siis säilitame vahepealsetes tehetes ($\frac{R}{3}$ ja $4\pi R^2$ arvutamisel) ühe varunumbri (§ 38).

660. Avaldada kera ruumala diameetri kaudu ($V=\frac{\pi d^3}{6}$). Kasutada seda valemit kera ruumala arvutamisel, kui diameeter on 1,0 dm; 2,0 cm; 3,0 cm; 1,2 m; 3,2 m; 0,41 m; 5,1 mm. Arvutused paiguta sobivasse tabelisse.

661. Kui palju kaalub tammepuust kera raadiusega 5,0 cm, kui tammepuu erikaal on 0,80? (420 G)

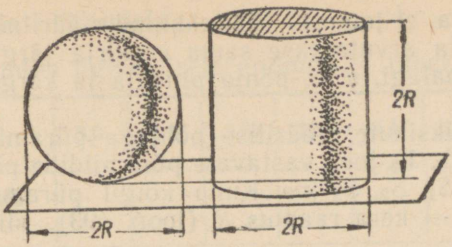
662. Arvutada teraskuuli kaal, kui kuuli läbimõõt on 10,0 mm ja terase erikaal on 7,8. (4,1 G)

663. Arvutada seest õõnsa kerakujulise klaaskuuli raskus, kui kuuli väline läbimõõt on 18,0 cm ja seina paksus on 1,0 cm. Klaasi erikaal on 2,6. (2,4 kG)

664. Seest õõnes kerakujuline raudkuul kaalub 3,72 kG. Kuuli väline läbimõõt on 10,0 cm. Arvutada kuuli seesmine ruumala, kui raua erikaal on 7,8. (47 cm^3)

665. Raudkuul läbimõõduga 3,0 cm lastakse silindrikujulises klaasnõus olevasse vette. Kui palju tõuseb veepind selles nõus, kui nõu läbimõõt on 4,0 cm? Kui palju muutub kuul vees kergemaks? (1,1 cm; 14 G)

666. Mitu liitrit vett mahutab 82-sentimeetrise läbimõõduga poolkerakujuline pada?



Joon. 191

667. Mitu protsenti on kera ruumala sellise silindri ruumalast, mille põhja diameeter ja kõrgus on mõlemad võrdsed kera diameetriga (joon. 191)? (66,7%)

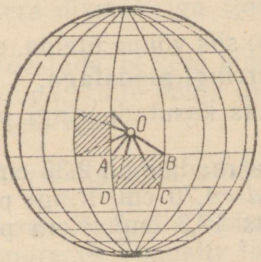
668. Mitu protsenti on kera ruumala sellise kuubi ruumalast, mille serva pikkus on võrdne kera diameetriga?

§ 62. KERA PINDALA.

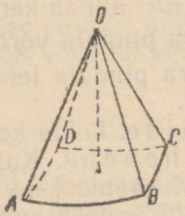
Kerapind on kõverpind, mida ei saa laotada tasapinnale. Sellepärast ei saa kera pindala arvutamiseks kasutada moodust, mida kasutasime silindri ja koonuse pindala arvutamiseks (§§ 55 ja 58). Kera pindala valemi tuletamisel toetume kera ruumala valemile. Jaotame kerapinna meridiaanide ja paralleelide abil osadeks — *sfäärilisteks nelinurkadeks* ja *kolmnurkadeks* (joon. 192).

Iga sellise nelinurga ja kolmnurga tipud ühendame raadiuste abil kera keskpunktiga *O*. Joonisel 192 on seda tehtud kahe (viirutatud) nelinurga korral.

Selle tulemusel jaotub kogu kera suureks hulgaks püramiide meenutavateks kehadeks — *sfäärilise põhjaga püramiidideks*. Üks niisugune püramiid on suurendatud kujul esitatud joonisel 193. Kogu kera ruumala on võrdne üksikute sfäärilise põhjaga püramiidide ruumalade summaga.



Joon. 192



Joon. 193

Saab näidata, et joonisel 192 tekkinud sfäärilise põhjaga püramiidide ruumala arvutatakse sama eeskirja järgi nagu tavalise püramiidi ruumalagi, s. o. põhja pindala ja kõrguse kolmandiku korrutisega.

Tähistame üksikute sfäärilise põhjaga püramiidide ruumalad tähtedega V_1, V_2, V_3 jne., vastavate püramiidide põhjade pindalad aga tähtedega S_1, S_2, S_3 jne. Kuna kõigil püramiididel on ühesugune kõrgus — kera raadius R (joon. 193), siis võime kirjutada, et

$$V_1=\frac{1}{3}S_1R;\quad V_2=\frac{1}{3}S_2R;\quad V_3=\frac{1}{3}S_3R \text{ jne.}$$

Liites ruumalad V_1, V_2, V_3 jne., saame kera ruumala V, s. o.

$$V=\frac{1}{3}S_1R+\frac{1}{3}S_2R+\frac{1}{3}S_3R+\ldots=\frac{R}{3}(S_1+S_2+S_3+\ldots).$$

Sulgudes olev summa $S_1+S_2+S_3+\ldots$ annab terve kera pindala S. Seega

$$V=\frac{R}{3}\cdot S,$$

s. o. *kera ruumala võrdub kera pindala ja raadiuse kolmandiku korrutisega*

Eelmises paragrahvis leidsime, et kera ruumala $V=4\pi R^2\cdot\frac{R}{3}$. Seega peab kehtima võrdus

$$4\pi R^2\cdot\frac{R}{3}=\frac{R}{3}\cdot S,$$

millest kera pindala

$$S=\frac{4\pi R^2\cdot\frac{R}{3}}{\frac{R}{3}}$$

ehk

$$\boxed{S=4\pi R^2}$$

Et πR^2 annab kera suurringi pindala, siis võime ütelda, et **kera pindala võrdub neljakordse suurringi pindalaga.**

Kera pindala leidmisel on otstarbekas kasutada ringi pindala tabelit.

Näide. Leida kera pindala, kui kera raadius on 2,35 cm.

Lahendus. Kui $R=2{,}35$ cm, siis $d=4{,}70$ cm. Ringi pindala tabelist saame kera suurringi pindalaks 17,3 cm². Kera pindala $S=4\cdot 17{,}3=69{,}2$ cm².

Vastus. Kera pindala on 69,2 cm².

Küsimusi ja ülesandeid.

669. Täita järgmine ligikaudsete andmetega tabel.

Kera raadius (cm)	3,0	4,2	5,67	12,4	0,47	0,965	0,10	127
Suurringi pindala (cm^2)								
Kera pindala (cm^2)								

670. Leida kera pindala, kui suurringi ümbermõõt on 3,86 cm; 4,52 cm; 0,613 m; 12,4 mm; 266 cm.

671. Leida poolkera täispindala, kui kera raadius on 5 cm; 3,2 cm; 48 m.

672. Kui palju värvi kulub poolkerakujulise katusekupli värvimiseks, kui kera läbimõõt on 5,2 m ja iga ruutmeetri katmiseks kulub 0,20 kG värvi? (8,5 kG)

673. Kui palju on vaja kangast, et valmistada õhupalli kest, mille läbimõõt on 14,5 m? Õmblusteks arvestada 4% materjalist. (690 m^2)

674. On antud kuup servaga 3 cm ja kera diameetriga 3 cm. Kumma keha pindala on suurem? Mitme protsendi võrra on ühe keha pindala teise omast suurem? (Kuubi; 91% võrra)

675. Avaldada kera pindala diameetri kaudu.

676. On antud kuup servaga a ja kera diameetriga a. Mitu protsenti moodustab kera pindala kuubi pindalast? (52,4%)

677. Mitu protsenti moodustab kera pindala sellise silindri täispindalast, mille diameeter ja kõrgus on mõlemad võrdsed kera diameetriga (joon. 191)? (66,7%)

678. Tõestada, et kera pindala on võrdne sellise silindri külgpindalaga, mille põhja diameeter ja kõrgus on võrdsed kera diameetriga.

679. Arvutada Maa pindala ruutkilomeetrites.

680. Laste õhupalli läbimõõt on 15,0 cm. Õhu juurdepuhumisel suurenes õhupalli läbimõõt 20% võrra. Mitme protsendi võrra suurenes õhupalli pindala? (44%)

Üldiseks kordamiseks.

681. Kuidas leida ringi kustunud keskpunkti?

682. Kuidas leida kolmnurga ümberringjoone keskpunkti? siseringjoone keskpunkti?

683. Mis on piirdenurk? Sõnasta piirdenurga omadus?

684. Kuidas kasutatakse Thalese teoreemi täisnurkse kolmnurga ehitamiseks?

685. Piirdenurk $MAN = 70°$, kusjuures kõõl AM toetub kaarele $48°30'$. Kui suurele kaarele toetub kõõl AN?

686. Kaar raadiusega 12 cm ja nurgaga 270° on keeratud koonuseks. Kui suur on selle koonuse põhja raadius? Leida selle koonuse täispindala.

687. Kaar, mis sisaldab 67°, on võrdne sellise ringjoone pikkusega, mille raadius on 1,2 m. Leida kaare raadius.

688. Kui suure nurga moodustavad täisnurkse kolmnurga teravnurkade poolitajad?

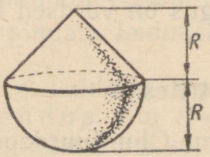
689. Ehitada antud raadiusega ringjoon, mis läbiks kaht antud punkti.

690. Ringjoone ühest punktist on ehitatud kaks raadiusega võrdset kõõlu. Leida nende kõõlude vaheline nurk.

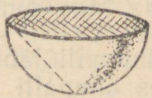
691. Koonuse külgpindala on 42,5 cm² ja moodustaja 4,2 cm. Leida selle koonuse külgpinnalaotust kujutava sektori nurk.

692. Leida joonisel 194 kujutatud keha pindala ja ruumala, kui $R = 2{,}50$ cm.

693. Arvutada koonuse ja poolkera vahelise osa ruumala (joon. 195), kui kera diameeter on 5,6 dm.



Joon. 194

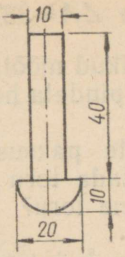


Joon. 195

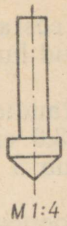
694. Joonisel 196 on kujutatud vaskneet. Leida selle needi kaal (vase erikaal 8,9). Mõõtmed on antud millimeetrites.

695. Teostada joonisel vajalikud mõõtmised ja arvutada detaili ruumala (joon. 197).

696. Rauast (erikaal 7,8) silindrikujulise keha läbimõõt on 5,6 cm ja kõrgus 11,2 cm. See keha kaalub 1,8 kG. Kas see keha on seest tühi või täis?



Joon. 196



Joon. 197

697. Vasest (erikaal 8,9) silindrikujulise keha läbimõõt on 7,8 cm ja kõrgus 13,4 cm. See keha kaalub 4,4 kG. Arvutada keha sees oleva õõnsuse ruumala. (150 cm^3)

698. Teostada tehted.

a) $(5a^2+0{,}1)^2$
b) $(3a+b)\cdot(3a-b)\cdot(9a^2+b^2)$
c) $(5m+3)\cdot(25m^2-15m+9)$
d) $(a+b)^2\cdot(a-b)^2$

699. Lihtsustada avaldis

$$\frac{(x+y)\cdot 0{,}2}{x^2-y^2}+\frac{0{,}3}{x-y}$$

ja arvutada selle väärtus, kui $x=\frac{1}{3}$ ja $y=\frac{2}{3}$.

Kodune kontrolltöö nr. 7.

1. Sirkli ja joonlaua abil ehitada ringjoon, mis läbib kaht antud punkti A ja B, nii et punkti A tõmmatud raadius moodustaks kõõluga AB nurga 60°.

2. Ringi sisse on ehitatud täisnurkne kolmnurk, mille üks kaatet võrdub ringi raadiusega. Arvutada selle kolmnurga teravnurgad.

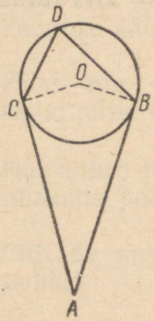
3. Ehitada kolmnurk ABC nii, et $\angle A=50°$ ja $\angle B=70°$. Määrata selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt O. Arvutada nurgad ACB, AOC, OCA ja OAB.

4. Joonisel 198 on $\angle A = 38°$. Arvutada $\angle BDC$.

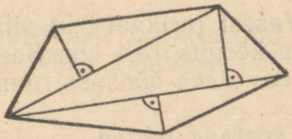
5. Teostada vajalikud mõõtmised ja arvutada joonisel 199 kujutatud hulknurga pindala hektarites.

6. Raudtoru seinte paksus on 6,0 mm ja väline ümbermõõt 23,0 cm. Arvutada toru seesmine ümbermõõt. Kui palju kaalub 5 m pikkune toru?

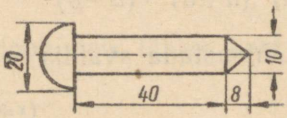
7. Joonisel 200 on kujutatud koonilise otsaga polt. Arvutada selle poldi täispindala, ruumala ja kaal, kui materjali erikaal on 7,8. Mõõtmed on antud millimeetrites.



Joon. 198



Joon. 199



Joon. 200

VII PEATÜKK.

ÜHE TUNDMATUGA LINEAARSED VÕRRANDID.

§ 63. SAMASUS JA VÕRRAND.

Varemõpitust teame, et kaks arvu või avaldist on võrdsed, kui nende vahe on null. Nii näiteks $7=7$, sest $7-7=0$; $2a=2a$, sest $2a-2a=0$.

Kirjutust, mis väljendab kahe arvu või avaldise võrdsust, nimetatakse **võrduseks.**

Näiteid.

1) $2+3=5$
2) $2\cdot(3+7)=2\cdot 3+2\cdot 7$
3) $a+a=2a$
4) $a(b+c)=ab+ac$
5) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
6) $x+5=22$
7) $5y=30$
8) $m-3=17$

Numbriliste avaldiste korral on lihtne otsustada, kas meil on tegemist võrdustega või mitte. Selleks arvutame võrduse mõlema poole väärtused, mis võrduse olemasolu puhul peavad olema võrdsed. Kui aga avaldistes esinevad tähed, siis võime võrduse olemasolu kindlaks teha proovimise teel, s. t. anname avaldistes esinevatele tähtedele mõlemal pool võrdusmärki mingid arvulised väärtused ja vaatame siis, kas võrdus jääb kehtima.

Võrdsuse olemasolu puhul esineb kaks võimalust:

1) võrdus jääb kehtima tähtede asendamisel mistahes arvuliste väärtustega (arvudega);

2) võrdus jääb kehtima tähtede asendamisel ainult kindlate arvudega.

Nii võib näidetes 3, 4 ja 5 anda tähtedele mistahes arvulisi väärtusi, ilma et see võrduste kehtivust muudaks. Näites 6 on aga võrdus kehtiv ainult siis, kui $x=17$, ja näites 7 siis, kui $y=6$.

Kui võrdus jääb kehtima temas sisalduvate tähtede mistahes väärtuste puhul, siis nimetatakse seda võrdust samasuseks.

Samasuseks nimetatakse ka võrdust, mis ei sisalda tähti (näide 1 ja 2).

Kui soovitakse eriti rõhutada, et tegemist on samasusega, siis kasutatakse sümbolit $\equiv$. Nii tuleks eriti näidete 3, 4 ja 5 puhul kirjutada

$$a+a \equiv 2a;$$
$$a(b+c) \equiv ab+ac;$$
$$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2.$$

Käesolevas õpikus kirjutame aga ka edaspidi samasuste puhul hariliku võrdusmärgi $=$.

Näidete 6 ja 7 korral nimetatakse võrdusi **võrranditeks. Seega võrdust, mis jääb kehtima temas sisalduvate tähtede (tundmatute) teatud kindlate väärtuste puhul, nimetatakse võrrandiks.**

Ülesandeid.

700. Kontrollida, missugused järgmistest võrdustest on samasused, missugused võrrandid.

1) $3+a=a+3$
2) $3(a+b)=3a+3b$
3) $2x=x+x$
4) $xy=xy$
5) $(3+a)^2-(3-a)^2=12a$
6) $4(x-1)=0$
7) $4z=20$
8) $3+k=10$
9) $8+c=12$
10) $\frac{e}{2}=4$
11) $2a^2-3a=3a$
12) $5x+8=x$

701. Leida, missuguse a väärtuse puhul on õige võrdus

$$10-a=7.$$

702. Leida, missuguse x väärtuse puhul avaldis $2x-1$ võrdub 4-ga.

703. Kontrollida proovimise teel, kas järgmised võrdused on samasused:
1) $(3+a)^2-(3-a)^2-12a$; 2) $(1-a)^2-(a-1)^2=0$.

704. Kontrollida proovimise teel, kas järgmised võrdused on võrrandid:

1) $3x+1=7$
2) $20-2x=4$
3) $x-1=20-2x$
4) $3x-2=x+6$

705. Koostada iga järgneva lause põhjal võrdus ja otsustada, kas saadud võrdus on samasus või võrrand:
1) arv $7a$ on $4a$ võrra suurem kui $3a$;
2) arv x on 5 võrra väiksem kui 14;
3) arv x on 6 korda väiksem kui 30;
4) arvude a ja 3 jagatis võrdub poolega nende arvude summast;

5) arvude x ja 1 summa ruut on $2x$ võrra suurem samade arvude ruutude summast.

706. Tõestada, et järgmised võrdused on samasused.

1) $2(3a-4b)-(5a+15b)-3(2b-5a)=16a-29b$
2) $a^2-5a+6+(a^2+a-30)-2(a^2-7a+13)=10a-50$
3) $[9(x-1)-5(3x-1)-2(-3x-2)]\cdot(x^2-3)=0$
4) $5a^2\cdot 3(a+1)(a-1)=2a^2+3$
5) $10(m^2-15)-12(m-4)(m+4)=42-2m^2$
6) $(m^2+2mn+n^2)(m^2-2mn+n^2)=(m^2-n^2)^2$

Näpunäide. Samasuse tõestamiseks tuleb näidata, et võrduse ühest poolest saab teisenduste teel teise poole.

§ 64. VÕRRANDI LAHENDID. VÕRRANDITE LIIGID.

1. Võrrandis esinevat tähte nimetatakse **tundmatuks.** Tundmatu arvulise väärtuse leidmist nimetatakse võrrandi lahendamiseks, kusjuures tundmatu arvulist väärtust nimetatakse siis võrrandi lahendiks.

Allpool vaatleme mõningaid võrrandeid.

1) Olgu antud võrrand $3x=6$. Kui selles x asendada arvuga 3, siis saame mittevõrdsed võrrandi pooled: $3\cdot 3\neq 6$. Kui aga x väärtuseks võtta 2, siis $3\cdot 2=6$. Seega on siin arv 2 antud võrrandi lahendiks. Miks?

2) Proovimise teel veendume, et võrrandi $x^2+x=12$ lahenditeks on 3 ja -4.

3) Samuti võime proovimise teel veenduda, et võrrandi $x(x^2-1)=0$ lahenditeks on kolm arvu: 0, -1, $+1$.

4) Võrrandi $(x^2-4)(x^2-4)(x^2-9)=0$ lahenditeks on neli arvu: -2, $+2$, -3, $+3$.

5) Võrrandi $0\cdot x=0$ lahendeid on lõpmata palju, sest mistahes arvu korrutis 0-ga on ikka 0.

6) Mis on aga võrrandi $\frac{5}{x}=0$ lahendiks? Selgub, et sellel võrrandil ei ole lahendeid, sest ei leidu arvu, millega viit jagades saaksime 0 (s. t. ei leidu arvu, mille korrutis nulliga oleks 5).

Tundmatu arvuline väärtus saab ainult siis olla võrrandi lahendiks, kui selle väärtuse asetamisel võrrandisse tundmatu asemele antud võrrandi pooled osutuvad võrdseteks. Sel juhul ütleme, et see väärtus rahuldab võrrandit ja on seega võrrandi lahendiks.

Toodud näidetest võime teha järelduse, et **võrrandil võib olla üks, kaks või enam lahendit; samuti võib võrrandil ka lahend puududa.**

Ülesandeid.

707. 1) Arvutada kaksliikme $2x+4$ väärtused antud x väärtuste korral ja kirjutada tulemused tabelisse.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$2x+4$									

2) Missuguse x väärtuse puhul on kaksliikme väärtus 0; 6; -2?

708. Missuguse x väärtuse puhul on kaksliikme $3x+5$ väärtus -4; 8; 0; -1?

709. Missuguste x väärtuste puhul on kaksliikmete $2x+1$ ja $x+5$ väärtused võrdsed?

710. Leida proovimise teel järgmiste võrrandite lahendid.

1) $\frac{4,8}{18+x}=0,24$ 2) $\frac{1}{5-x}=\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{x}=\frac{1}{5}$

4) $x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{2}$ 5) $x^2-9=3+x$ 6) $x^2-x-20=0$

711. Missuguste x väärtuste korral ei ole mõtet järgmistel võrdustel ja miks?

1) $4=\frac{1}{x-2}$ 3) $\frac{1}{x+3}=6$

2) $\frac{5}{x-3}=1$ 4) $\frac{8}{x}=\frac{5}{6}$

712. Missugused lahendid on võrrandeil:

$x^2=-4$; $x^2+1=0$; $\frac{1}{x}=0$; $\frac{0,5}{x}=0$?

Põhjendada vastust!

2. Võrrandid liigitatakse neis esinevate tundmatute arvu järgi ühe tundmatuga võrrandeiks, kahe tundmatuga võrrandeiks jne. Missuguste tähtedega märgitakse tavaliselt tundmatuid?

Näiteid.

1) $14x-9=5x$ — ühe tundmatuga võrrand;
2) $2x+3y=4a$ — kahe tundmatuga võrrand;
3) $x^2+y^2=2z$ — kolme tundmatuga võrrand.

Kui võrrandis pärast lihtsustamist esineb tundmatu ainult esimeses astmes, siis nimetatakse seda võrrandit esimese astme võrrandiks ehk lineaarvõrrandiks.

Käesolevas õpikus vaatleme ainult ühe tundmatuga esimese astme võrrandeid.

Ülesandeid.

713. Otsustada, missugused alljärgnevaist võrrandeist on lineaarvõrrandid, missugused mitte.

1) $8x-3=5x+6$
2) $x^2+12x=-35$
3) $x^2-9=7$
4) $x+3=8$
5) $3x+5=5$
6) $3x+a=5x-b$
7) $2x=2-2a$
8) $x^3-3x=0$
9) $x^2-4x=45$
10) $5(x-1)-2(x-2)=8$

§ 65. VÕRRANDI PÕHIOMADUSED.

Vaatleme alljärgnevaid võrrandeid ja leiame nende lahendid, kasutades võrduse mõistet (vt. § 63).

1) $x+9=12$.

Et siin on tegemist võrdusega, siis võrduse mõlema poole vahe on null. Seega

$$x+9-12=0.$$

Pärast koondamist saame

$$x-3=0.$$

Kuna kahe arvu vahe on null, siis on need arvud võrdsed. Seega

$$x=3.$$

Analoogiliselt saame:

2) $y-16=20;$
$y-16-20=0;$
$y-36=0;$
$y=36.$

3) $3x-5=2x-3;$
$(3x-5)-(2x-3)=0;$
$3x-5-2x+3=0;$
$x-2=0;$
$x=2.$

Näidetest selgub, et

võrrandi mõlemale poolele (mõlemast poolest) võib liita (lahutada) ühe ja sama arvu.

Seega,

võrrandi iga liikme võib viia võrrandi ühelt poolelt teisele, muutes selle liikme märgi vastupidiseks.

Niisugust võrrandi liikmete omadust nimetatakse võrrandi esimeseks põhiomaduseks.

Näide. Lahendada võrrand $7x-19=6x+31$.

Teisendame võrrandit nii, et tundmatud liikmed oleksid võrrandi vasakul poolel ja vabaliikmed paremal:

$$7x-6x=31+19.$$

Koondades sarnased liikmed, saame

$$x=50.$$

Lahenduse kirjutame lühidalt nii:

$$7x-19=6x+31;$$
$$7x-6x=31+19;$$
$$x=50.$$

Konrollime, kas leitud x väärtus on võrrandi lahendiks, s. t. kas $x=50$ rahuldab antud võrrandit. Selleks asendame algvõrrandis x tema väärtusega ja vaatame, kas võrrandi mõlemad pooled on võrdsed.

Kontroll. v. p. $7 \cdot 50-19=350-19=331;$
p. p. $6 \cdot 50+31=300+31=331;$
$331=331.$

Vastus. $x=50$.

Võrrandi esimesest põhiomadusest saame teha järelduse:

kui võrrandi kummalgi poolel on võrdsed liikmed, siis võime need liikmed ära jätta.

Näide. $x+11x=48+11x;$
$x=48$, sest $x+11x-11x=48$.

Kontroll. v. p. $48+11 \cdot 48=48+528=576;$
p. p. $48+11 \cdot 48=48+528=576;$
$576=576.$

Vastus. $x=48$.

Võrduse omadusest teame, et kui $a=b$, siis $b=a$. Selle põhjal võime öelda, et

võrrandi pooli võib vahetada liikmete märke muutmata.

Näited. 1) $48=x;$ $x=48.$ 2) $16=4x;$ $4x=16.$ 3) $12=x+7;$ $x+7=12.$

Leiame nüüd alljärgnevaist võrrandeist tehete komponentide vaheliste seoste põhjal lahendid.

1) $5x=50;$
$x=50:5=10.$

2) $-3x=9;$
$x=9:(-3)=-3.$

3) $\frac{1}{8}x=2;$
$x=2 \cdot 8=16.$

4) $\frac{1}{16} \cdot x=8;$
$x=8 \cdot 16=128.$

Põhjendada lahendite leidmist!

Näeme, et esimeses näites jagasime võrrandi pooli 5-ga, teises 3-ga. Kolmandas näites aga korrutasime võrrandi pooli 8-ga, neljandas 16-ga.

Siit saame võrrandi teise põhiomaduse:

võrrandi pooli võib korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Miks ei või võrrandi pooli korrutada või jagada nulliga?

Võrrandi pooltega teostatav korrutamine või jagamine märgitakse harilikult võrrandi järele püstkriipsu taha, näiteks

$$3(x+5)=30\,|:3.$$

Näiteid võrrandite lahendamise kohta:

1) $7x=49;\ |:7$
$x=7.$

2) $3y=\frac{1}{3};\ |\cdot 3$
$9y=1;\ |:9$
$y=\frac{1}{9}.$

3) $\frac{3x}{4}=6;\ |\cdot 4$
$3x=24;\ |:3$
$x=8.$

4) $\frac{3z}{5}=15;\ |\cdot 5$
$3z=75;\ |:3$
$z=25.$

Eespool toodud näidetest selgub, et ühe tundmatuga lineaarvõrrandis on pärast lihtsustamist ainult kaks liiget: tundmatuga liige e. lineaarliige ja tundmatut mittesisaldav liige e. vabaliige. Niisuguse võrrandi üldkuju on:

$$ax=b,$$
lineaarliige vabaliige

kusjuures a ei või olla võrdne nulliga. Miks? Mitu lahendit on ühe tundmatuga lineaarvõrrandil?

Kui lineaarvõrrand ei ole antud kujus $ax=b$, siis tuleb ta enne lihtsustada.

Näide.

$$7(x-3)+3(x-5)=2(3x+2);$$
$$7x-21+3x-15=6x+4;$$
$$7x+3x-6x=4+21+15;$$
$$4x=40;\ |:4$$
$$x=10.$$

Kontroll. v. p. $7 \cdot (10-3)+3 \cdot (10-5) =$
$=7 \cdot 7+3 \cdot 5=49+15=64;$
p. p. $2 \cdot (3 \cdot 10+2)=2 \cdot 32=64;$
$64=64.$

Vastus. Võrrandi lahend $x=10$.

Märkus. *Võrrandi lahendit tuleb kontrollida alati algvõrrandi kaudu.*

Ülesandeid.

714. Koostada ühe tundmatuga esimese astme võrrand, mille lahendiks oleks arv: 4; -3; $\frac{1}{2}$; $-0{,}2$.
Koostamisel kasutada võrrandi mõlemat põhiomadust.

715. Lahendada järgmised võrrandid põhiomaduste põhjal, kusjuures näidata, missugust põhiomadust tuleb kasutada.

1) $x+2=5$
2) $3x-1=8$
3) $10x-3=x+3$
4) $5-6z=9z-5$
5) $19-x=100-10x$
6) $5y-9=7y-13$
7) $11y-4=5y+8$
8) $20-2z=z-1$
9) $x-7+8x=9x-3-4x$
10) $11x+42-2x=100-9x-22$
11) $17{,}2=2x$
12) $6{,}6=3x$
13) $3y=-2{,}1$
14) $\frac{y}{4}=3$
15) $0{,}8x=3{,}2$
16) $\frac{u}{6}=7$
17) $\frac{2z}{5}=0$
18) $5=\frac{v}{8}$
19) $\frac{3}{4}x=6$
20) $\frac{3v}{2}=1{,}5$

716. Lahendada võrrandid.

1) $2x+1{,}4=8{,}1$
2) $10{,}24-0{,}2x=4{,}8$
3) $3{,}5 : 0{,}5x=0{,}7$
4) $8{,}6x : 4{,}8=3\frac{2}{3}$
5) $1\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}$
6) $2\frac{3}{4}-x=1\frac{1}{3}$

717. Arvule 20 liideti arv y ja saadi 54. Millega võrdub y?

Kodune kontrolltöö nr. 8.

1. Arvutada.

$$3{,}7+1{,}5\cdot\left(2{,}652:1{,}3-1\frac{17}{30}+\frac{3}{50}\right).$$

2. Linnas on 36 000 elanikku. Leida selle linna elanike arv aasta pärast, kui elanike iga-aastane juurdekasv on 4%.

3. 1962. a. 1. juulil oli Nõukogude Liidus elanikke 221 465 000, sellest linlasi 113 375 000. Mitu protsenti oli linlasi Nõukogude Liidus 1. juulil 1962. a.?

4. Arvutada algebralise avaldise

$$\frac{(a-b)^2}{ab^2}$$

väärtus, kui $a=2{,}5$ ja $b=0{,}25$.

5. Kirjutada valem toa ruumala V arvutamiseks, kui toa pikkus on a meetrit, laius b meetrit ja kõrgus c meetrit.

6. Kooli jäi kevadel a õpilast. Sügisel võeti kooli juurde b õpilast. Mitu õpilast on koolis?

7. Kasutades arvu 10 astmeid, kirjutada lühidalt järgmised arvud: 4 000; 90 000; 5 000 000; 300 000.

8. Missuguse x väärtuse puhul avaldis $2x-1$ võrdub 4-ga?

9. Näidata arvutamise teel, et võrdus

$$6+\frac{2a}{2-a}+\frac{4}{a-2}=4$$

on õige, kui $a=1$.

10. Lahendada järgmised võrrandid võrrandi põhiomaduste põhjal.

1) $6x-2=10$
2) $11-3x=5$
3) $5-x=-12$
4) $-15{,}4+x=0$
5) $0{,}12+0{,}8x=-0{,}08$
6) $0{,}6x-4=-2{,}8$
7) $15y-9y-2=10$
8) $3p+p-7=5$

§ 66. ÜHE TUNDMATUGA ESIMESE ASTME VÕRRANDI KOOSTAMINE JA LAHENDAMINE.

1. TÄISARVULISTE KORDAJATEGA VÕRRANDITE LAHENDAMINE.

Eelmises paragrahvis käsitletud võrrandid olid lihtsa kujuga. Kui aga võrrandeis esinevad sulud ja liikmete arv on suurem, siis lahendame neid järgmiselt.

Näide. Lahendada võrrand

$$4(x+2)+3(x-1)=5(3-x)+2.$$

Lahendus. Avame sulud:

$$4x+8+3x-3=15-5x+2.$$

Viime tundmatut sisaldavad liikmed ühele poolele ja vabaliikmed teisele poolele:

$$4x+3x+5x=15+2-8+3.$$

Koondame sarnased liikmed:

$$12x=12.$$

Jagame võrrandi pooled 12-ga:

$$12x=12\cdot|:12$$

Saame

$$x=1.$$

Kontroll. v. p. $4\cdot(1+2)+3\cdot(1-1)=4\cdot3+3\cdot0=12$;
p. p. $5\cdot(3-1)+2=5\cdot2+2=10+2=12$;
$12=12$.

Vastus. $x=1$.

Seega lahendame lineaarseid võrrandeid järgmise üldplaani järgi:

1) *avame sulud (kui neid on);*
2) *viime tundmatut sisaldavad liikmed võrrandi ühele poolele ja vabaliikmed teisele poolele;*
3) *koondame sarnased liikmed;*
4) *jagame võrrandi mõlemad pooled tundmatu liikme kordajaga;*
5) *kontrollime leitud lahendit;*
6) *kirjutame välja vastuse.*

Ülesandeid.

718. Lahendada võrrandid.

1) $14(x-2)-5(2x-3)=5-3(2x-4)$
2) $16-3(4-5x)=6(3x-4)-2(5x-8)$
3) $5x-7=-0{,}2x+3{,}4$
4) $0{,}12-2{,}5x=-0{,}8$
5) $4{,}8x-0{,}5=4{,}2\cdot(-3{,}5)$

719. Lahendada võrrandid.

1) $8(x+3)=48$
2) $6(x-3)+2(x+2)=10$
3) $3(2x-1)-5(x-3)+6(3x-4)=83$
4) $0{,}2x+0{,}5x+5(5x-1)-2{,}7x=6{,}5$
5) $0{,}6(x-0{,}6)+0{,}8(x-0{,}4)-1=0$
6) $7(2x-5)-[5(7x-2)-2(5x-7)]=-72$
7) $2x+2\{-[-x-3(x-3)]\}=2$

Näpunäide. Kõigepealt avada loogelised sulud, siis nurksulud ja viimaks ümarsulud.

8) $4x(x-1)-(2x+5)(2x-5)=1$
9) $2(2x+1)^2-8(x+1)(x-1)=34$
10) $(x+3)^2-(x-2)^2=95$

720. Koostada võrrand, mille lahendiks on 5. Koostamisel kasutada võrrandi põhiomadusi ja sulgudesse võtmist.

721. Lahendada alljärgnevad võrrandid selle tähe suhtes, mis on tundmatuna näidatud:

1) $S=ab$, lahendada a suhtes;
2) $V=\frac{1}{3}QH$, lahendada Q suhtes;
3) $at=V_t-V_0$, lahendada V_0 suhtes.

2. LINEAARVÕRRANDITE KOOSTAMINE.

Algebra keeleks on võrrandid. Võrrandite abil saab võrdlemisi lihtsalt lahendada ülesandeid, mida aritmeetilisel teel on raske lahendada. Võrrandi lahendamine on sageli väga lihtne, kuid võrrandi koostamine ülesande andmete järgi teeb juba enam raskusi. Kogu raskus seisneb selles, kuidas koostada võrrandit, mille lahend annaks otsitava vastuse. Üldist eeskirja võrrandite koostamiseks pole võimalik anda, sest ülesannete tingimused võivad olla väga mitmesugused. Võrrandi koostamise kunst nõuab tegelikult «igapäevasest keelest algebra keelde tõlkimise» oskust. Kuidas aga teostub see «tõlkimine», seda selgitame näidetega.

Näide 1. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 48 cm; haar on 3 cm võrra lühem alusest. Leida aluse pikkus.

Lahendus. Enamikel juhtudel tähistatakse tundmatuna just see suurus, mida ülesandes nõutakse. Seega tähistame aluse pikkuse x-ga.

Leiame nüüd ülesande andmete ja tundmatu x vahelised seosed.

Ülesandes on öeldud, et haar on alusest 3 cm võrra lühem, s. t.

et haara pikkus on $x-3$ cm. Kolmnurga ümbermõõt on kolme külje pikkuste summa:

$$x+(x-3)+(x-3) \text{ ehk } x+2\cdot(x-3),$$

sest kolmnurk on võrdhaarne.

Kuna kolmnurga ümbermõõt on ülesandes antud (48 cm), siis saame võrrandi

$$x+2(x-3)=48.$$

Järgmiseks sammuks on võrrandi lahendamine.

$$\begin{aligned} x+2x-6&=48;\\ x+2x&=48+6;\\ 3x&=54;\\ x&=18. \end{aligned}$$

Leitud lahendit tuleb kontrollida ülesande teksti põhjal, mitte aga koostatud võrrandi järgi, sest võrrand võib olla vigaselt koostatud (kuigi õigesti lahendatud) ja niisugusel juhul võrrandit rahuldava tundmatu väärtus ei ole vastuseks ülesande küsimusele.

Kontroll. Kui aluse pikkus on 18 cm, siis peab haara pikkus olema 15 cm. Kolmnurga ümbermõõt on sel juhul $18+15+15=48$ cm, mis oli ka ülesandes antud. Seega leitud tundmatu väärtus on vastuseks ülesande küsimusele.

Vastus. Võrdhaarse kolmnurga alus on 18 cm.

Näide 2. Isa, poja ja tütre vanus on kokku 47 aastat. Isa on pojast 5 korda vanem, tütar on pojast 2 aastat noorem. Kui vana on poeg?

Lahendus. 1) Tundmatu tähistamine.

Olgu poja vanus x aastat.

2) Andmete ja tundmatu vaheliste seoste leidmine.

Tütar on siis $x-2$ aastat vana ja isa $5x$ aastat vana.

3) Võrrandi koostamine.

Kuna isa, poja ja tütre vanus on kokku 47 aastat, siis

$$x+(x-2)+5x=47.$$

4) Võrrandi lahendamine.

$$\begin{aligned} x+(x-2)+5x&=47;\\ x+x-2+5x&=47;\\ x+x+5x&=47+2;\\ 7x&=49;\ |:7\\ x&=7. \end{aligned}$$

Kontroll. Kui poeg on 7-aastane, siis tütar peab olema $7-2=5$ aastat vana ja isa $5\cdot7=35$ aastat vana. Kokku on nende vanus $7+5+35=47$ aastat (nagu ülesandes antud).

Vastus. Poeg on 7-aastane.

Näide 3. Klass sai üld- ja lihtvihikuid 80 tükki. Üldvihik maksab 3 kopikat ja lihtvihik 2 kopikat. Kui palju saadi kumbagi liiki vihikuid, kui kõik vihikud kokku maksid 1 rubla 72 kopikat?

Lahendus. 1) Tundmatu valik ja tähistamine.
Olgu üldvihikute arv x.
2) Andmete ja tundmatu vaheliste seoste leidmine.
Lihtvihikute arv on $80-x$. Üldvihikute eest tuleb maksta $3x$ kopikat ja lihtvihikute eest $2 \cdot (80-x)$ kopikat.
3) Võrrandi koostamine.

$$3x+2(80-x)=172.$$

4) Võrrandi lahendamine.

$$3x+2(80-x)=172;$$
$$3x+160-2x=172;$$
$$3x-2x=172-160;$$
$$x=12 \text{ (üldvihikuid)};$$
$$80-12=68 \text{ (lihtvihikuid)}.$$

Kontroll. Üldvihikute eest tuleb maksta $3 \cdot 12=36$ kopikat; lihtvihikute eest tuleb maksta $2 \cdot 68=136$ kopikat; $36+136=172$ kopikat.
Vastus. Üldvihikuid osteti 12 ja lihtvihikuid 68.
Edaspidi jätame ülesannete lahendamisel ära üksikute lahendusetappide nimetused ja kirjutame selgituse pidevas lausestuses.
Näide 4. Moskva M. V. Lomonossovi nimelise ülikooli hoone on 3 korda kõrgem Kremli kõige kõrgemast hoonest — Ivan Suure tornist. Leida kummagi hoone kõrgus, teades, et Ivan Suure torn on 160 m võrra madalam ülikooli hoonest.
Lahendus. Olgu ülikooli hoone kõrgus x m, siis Ivan Suure torn on $x-160$ m. Kuna meil on teada, et ülikooli hoone on Ivan Suure tornist 3 korda kõrgem, siis saame koostada võrrandi:

$$3 \cdot (x-160)=x.$$

Lahendame saadud võrrandi.

$$3x-480=x;$$
$$3x-x=480;$$
$$2x=480; \mid :2$$
$$x=240.$$

Kontroll. Kui ülikooli hoone kõrgus on 240 m, siis Ivan Suure torn on $240-160=80$ m kõrge. Et aga $3 \cdot 80=240$, siis leitud kõrgused ongi vastuseks ülesande küsimusele.
Vastus. M. V. Lomonossovi nimelise ülikooli hoone kõrgus on 240 m ja Ivan Suure torni kõrgus 80 m.

Ülesandeid.

722. Lahendada võrrandi abil järgmised ülesanded.
1) Arvuga x liideti 21 ning saadi 68. Millega võrdub x?
2) Missugune arv tuleb liita arvuga 10, et saada 3?
3) Missugune arv tuleb liita arvuga $-7,4$, et saada 7,4?
4) Arvust y lahutati 8 ja saadi 15. Leida y.
5) Mingi arvuga liideti 180 ja saadi 150. Leida see arv.
6) Missugust arvu tuleb korrutada 3,8-ga, et saada 4,18?

7) Kahe arvu summa on 83,4 ja nende vahe 15,8. Leida need arvud.
8) Kahe järjestikuse positiivse paaritu arvu ruutude vahe on 32. Leida need arvud.

723. Üks kõrvunurkadest on 5 korda suurem teisest. Leida kummagi nurga suurus kraadides.

724. Võrdhaarses kolmnurgas on alusnurk tipunurgast 24° võrra väiksem. Arvutada selle kolmnurga kõik sisenurgad.

725. Ruudu külge suurendati 3 cm võrra, mistõttu ruudu pindala suurenes 39 cm^2 võrra. Leida saadud ruudu külg.

726. Trapetsi üks alus on 10,2 cm ja kesklõik 11,6 cm. Arvutada trapetsi teine alus.

727. Kolmnurga üks nurk on teisest 18° võrra suurem ja kolmas teisest 30° võrra väiksem. Leida kolmnurga kõik nurgad.

728. Kolmel riiulil on kokku 66 raamatut, alumisel riiulil on kolm korda ja keskmisel kaks korda rohkem kui ülemisel. Mitu raamatut on igal riiulil? (33; 22; 11)

729. Kuu peal kaalub inimene 6 korda vähem kui Maal. Kui palju kaaluks Kuu peal inimene, kes Maal kaalub 50 kG rohkem kui Kuu peal? (10 kG)

730. Mõelda mingi arv, korrutada see 2-ga, liita korrutisega 30, saadud arv jagada 2-ga, tulemusest lahutada mõeldud arv ja siis saab vastuseks 15. Leida mõeldud arv.
Selgitada, miks mistahes arvu puhul vastuseks on alati 15.

731. Ristküliku pikkus on kaks korda suurem tema laiusest. Kui ristküliku laiust suurendada 3 m võrra, siis ta pindala suureneb 24 ruutmeetri võrra. Leida ristküliku pikkus ja laius.

732. Ühes paagis on bensiini kaks korda rohkem kui teises. Kui esimesest paagist kallata teise 25 l bensiini, siis on kummaski paagis ühepalju. Mitu liitrit bensiini on kummaski paagis? (100 l; 50 l)

733. Kolhoos varus heina 120 päevaks, arvestusega kulutada iga päev 500 kilogrammi heina. Mitmeks päevaks jätkub sellest tagavarast, kui igapäevast kulutust vähendada 20 kilogrammi võrra? (125 päeva)

734. Ühes laos on 185 t ja teises 237 t sütt. Esimesest laost hakati iga päev välja andma 15 t ja teisest 18 t sütt. Mitme päeva

pärast jääb teise lattu sütt $1\frac{1}{2}$ korda rohkem kui esimesse? (9 päeva pärast)

735. Ühe kooli õpilased kogusid 13 rbl. ning ostsid kino- ja teatripileteid, kokku 55 piletit. Mitu piletit osteti kumbagi liiki, kui teatripilet maksis 35 kopikat ja kinopilet 10 kopikat?

736. Ühel kaalukausil on 3 ühesugust seebitükki ja 100-grammine kaaluviht. Teisel kausil tasakaalustab neid 1-kilogrammine kaaluviht. Kui palju kaalub iga seebitükk? (0,3 kG)

737. Ühes koolis on 327 õpilast, teises koolis 237 õpilast. Kui palju õpilasi on vaja üle viia teisest koolist esimesse, et esimeses koolis oleks 2 korda rohkem õpilasi kui teises koolis? (49 õpilast)

738. Kolmnurgas on üks nurk teisest 20° võrra suurem, kolmas aga 10° võrra väiksem esimesest. Leida kolmnurga nurgad. (70°; 60°; 50°)

739. Kolmnurga üks nurk on teisest 10° võrra väiksem. Arvutada need nurgad ja kolmnurga kõik välisnurgad, kui kolmnurga kolmas nurk on 48°.

740. Kolmnurga üks nurk on teisest 40° võrra väiksem. Kolmas nurk moodustab esimesest $\frac{4}{5}$. Arvutada selle kolmnurga kõik sise- ja välisnurgad.

741. Kaheteljeline veoauto kaalub kaks korda rohkem kui sõiduauto «Pobeda» ja 6,4 t võrra vähem kui roomiktraktor. Kui palju kaalub veoauto, sõiduauto «Pobeda» ja roomiktraktor, kui nende kogukaal on 13,15 t? (2,7 t; 1,35 t; 9,1 t)

742. 525-rublane summa maksti välja viie- ja kümnerublalistes, kusjuures mõlemaid anti ühepalju. Mitu kümnerublalist ja mitu viierublalist anti? (35)

743. Võrdsete ruumaladega vase- ja rauatükk kaaluvad kokku 751,1 G. Leida nende ruumalad, kui raua erikaal on 7,8 ja vase erikaal 8,9. (45 cm^3)

744. Lõik pikkusega 20 cm on jaotatud kaheks lõiguks ja kumbki neist on võetud ruudu küljeks. Leida nende lõikude pikkus, kui saadud ruutude pindalade vahe on 40 cm^2.

Näide. Süvendi kaevamiseks rakendati tööle kaks ekskavaatorit. Esimene ekskavaator, kaevates tunnis 40 m³ rohkem pinnast kui teine, töötas 16 tundi, teine aga 24 tundi, kusjuures nad kaevasid kokku 8 640 m³ pinnast. Mitu kuupmeetrit pinnast kaevas kumbki ekskavaator tunnis?

Lahendus. Olgu I ekskavaatori 1 tunni jooksul tehtud töö x m³.

	Tööhulk 1 tunnis (m³)	Aeg (h)	Kogu tööhulk (m³)
I ekskavaator	x	16	$16x$
II ekskavaator	$x+40$	24	$24(x+40)$

Saame võrrandi:

$$16x+24(x+40)=8\,640;$$
$$16x+24x+960=8\,640;$$
$$16x+24x=8\,640-960;$$
$$40x=7\,680; \mid :40$$
$$x=192.$$

Kontroll. $16\cdot 192=3\,072$ m³; $192+40=232$ m³; $24\cdot 232=5\,568$ m³; $3\,072+5\,568=8\,640$ m³.

Vastus. I tunnis kaevas I ekskavaator 192 m³ pinnast ja II ekskavaator 232 m³.

Märkus. Tabeli kuju võib kasutada näiteks niisuguste ülesannete lahendamiseks, kus on tegemist:

a) kaubahulga, hinna ja maksumusega;
b) tööliste hulga, 1 töölise kohta määratud tööhulga ja kogu töö hulgaga;
c) teepikkuse, aja ja kiirusega.

Ülesandeid.

745. 21 rubla eest osteti kaht sorti riiet. Üks maksis 80 kopikat meeter, teine 60 kopikat, kusjuures esimest sorti riiet osteti kolm korda rohkem kui teist. Mitu meetrit osteti kumbagi sorti riiet? (21 m; 7 m)

746. Auriku liikumise kiirus mööda jõge pärivoolu on 18 km tunnis ja vastuvoolu 14 km tunnis. Leida jõe voolu kiirus ja auriku kiirus.

Näpunäide. Auriku liikumise kiirus pärivoolu = auriku omakiirus + voolu kiirus; auriku liikumise kiirus vastuvoolu = auriku omakiirus − voolu kiirus.

747. Kahest linnast, mille vahemaa on 350 kilomeetrit, väljusid üheaegselt teineteisele vastu kaks rongi. Ühe rongi kiirus on 30 km tunnis, teise kiirus aga 10 km võrra tunnis suurem. Mitme tunni pärast rongid kohtuvad? (5 t. pärast)

3. MURRULISTE KORDAJATEGA VÕRRANDITE LAHENDAMINE.

Kui võrrandis esineb harilikke murde, siis alustame võrrandi lahendamist murdude kaotamisega. Selleks korrutame võrrandi mõlemad pooled murdude ühise nimetajaga, s. t. korrutame selle ühise nimetajaga võrrandi i g a l i i k m e.

N ä i d e. Lahendada võrrand

$$1-\frac{2u-5}{6}=\frac{3-u}{4}.$$

1) Murru kaotamiseks korrutame võrrandi iga liikme 12-ga:

$$1-\frac{2u-5}{6}=\frac{3-u}{4}\ |\cdot 12.$$

2) Taandame:

$$12\cdot 1-\frac{12\cdot(2u-5)}{6}=\frac{12\cdot(3-u)}{4};$$

$$12-2\cdot(2u-5)=3\cdot(3-u).$$

3) Avame sulud:

$$12-4u+10=9-3u.$$

4) Kanname tundmatud liikmed vasakule ja vabaliikmed paremale poolele:

$$-4u+3u=9-12-10.$$

5) Koondame sarnased liikmed ja jagame võrrandi pooled (-1)-ga:

$$-u=-13;\ |\ :(-1)$$
$$u=13.$$

6) K o n t r o l l. v. p. $\overset{6}{\smile}\ 1-\frac{2\cdot 13-5}{6}=\frac{6-26+5}{6}=-\frac{15}{6}=$

$$=-2\frac{3}{6}=-2\frac{1}{2};$$

$$\text{p. p.}\ \frac{3-13}{4}=-\frac{10}{4}=-2\frac{1}{2};$$

$$-2\frac{1}{2}=-2\frac{1}{2}.$$

7) V a s t u s. $u=13$.

Märkus. Edaspidi pole vaja kirjalikult võrrandi kõiki liikmeid korrutada ühise nimetajaga ja siis taandada, vaid võib kohe määrata igale liikmele laiendaja. See väldib ülearust kirjutamist.

Ülesandeid.

748. Lahendada võrrandid.

1) $x-7=\frac{3x+13}{20}$

2) $7+\frac{x}{3}=13$

3) $x+\frac{11-x}{3}=\frac{20-x}{2}$

4) $\frac{x+17}{5}-\frac{3x-7}{4}=-2$

5) $\frac{3x}{4}-\frac{x}{2}=1$

6) $\frac{1{,}8-8x}{1{,}2}-\frac{1{,}3-3x}{2}=\frac{5x-0{,}4}{0{,}3}$

7) $\frac{4t+33}{21}=\frac{17+1}{4}$

8) $\frac{2(2-3x)}{0{,}01}-2{,}5=\frac{0{,}02-2x}{0{,}02}-7{,}5$

9) $\frac{3y+12}{4}=2-\frac{5y-7}{13}$

10) $\frac{3(1{,}2-x)}{10}-\frac{5+7x}{4}=$

$=x+\frac{9x+0{,}2}{20}-\frac{-4(13x-0{,}6)}{5}$

749. Lahendada võrrandid.

1) $x+\frac{2x-7}{2}-\frac{3x+1}{5}=5-\frac{x+6}{2}$

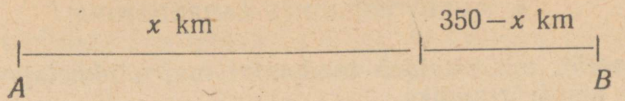
2) $\frac{2x-5}{6}+\frac{x+2}{4}=\frac{5-2x}{3}-\frac{6-7x}{4}-x$

3) $\frac{x-4}{5}+\frac{3x-2}{10}=\frac{2x+1}{3}-7$

4) $\frac{4x}{3}-17+\frac{3x-17}{4}=\frac{x+5}{2}$

Näide. Linnast A linna B väljus kaubarong kiirusega $20\frac{\text{km}}{\text{h}}$. 8 tunni pärast väljub linnast B linna A rong kiirusega $30\frac{\text{km}}{\text{h}}$. AB vaheline kaugus on 350 km. Kui kaugel linnast A rongid kohtuvad?

Lahendus. Tähistame I rongi poolt sõidetud tee pikkuse kilomeetrites x-ga.



	Tee pikkus (km)	Kiirus $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	Aeg (h)
I rong	x	20	$\frac{x}{20}$
II rong	$350-x$	30	$\frac{350-x}{30}$

$$\frac{x}{20}-8=\frac{350-x}{30};\ |\cdot 60$$

$$3x-8\cdot 60=2\cdot(350-x);$$

$$3x-480=700-2x;$$

$$3x+2x=700+480;$$

$$5x=1\,180;\ |:5$$

$$x=236.$$

Kontroll. $\frac{236}{20}=11{,}8$ t; $350-236=114$ km; $\frac{114}{30}=3{,}8$ t; $11{,}8-3{,}8=8$ t.

Vastus. Rongid kohtuvad linnast A 236 km kaugusel.

Ülesandeid.

750. Aurik sõitis mööda jõge linnast A linna B, mille vahemaa on 252 km. Aurikul kulus linnast B linna A pärivoolu sõiduks 18 tundi ja tema kiirus seisvas vees oli $16\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Leida jõe voolu kiirus. $\left(2\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$

751. Ekskursandid üürisid 3 tunniks paadi ja sõitsid mööda jõge pärivoolu alla. Mitme kilomeetri kaugusele võivad nad minna sadamast, et jõuda 3 tunni pärast tagasi, kui on teada, et paadi kiirus seisvas vees on $7{,}5\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja jõe voolu kiirus $2{,}5\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Võrrandit, mis sisaldab tundmatut murru nimetajas, nimetatakse murdvõrrandiks.

Lahendame võrrandi

$$\frac{1}{x-2}=1.$$

Selles võrrandis on tundmatu murru nimetajas. Võrrandit lahendamata võime öelda, et tema lahendiks ei või olla arv 2, sest siis muutub nimetaja nulliks ja võrrand kaotab mõtte.

Võrrandi lahendiks ei saa olla arv, mille puhul tundmatut sisaldav murru nimetaja võrdub nulliga.

Lahendades võrrandi, saame

$$\frac{1}{x-2}=1;\ |\cdot(x-2).$$

Võrrandi mõlemaid pooli võime korrutada $(x-2)$-ga, kuna $x-2\neq 0$.

$$1=x-2;$$
$$x=3.$$

Kontrollimisel selgub, et $x=3$ rahuldab võrrandit ja on seega antud võrrandi lahendiks.

Võrrandi

$$\frac{4-x}{x-2}=6+\frac{2}{x-2}$$

lahendamisel teame samuti juba ette, et $x=2$ ei saa olla võrrandi lahendiks. Miks?

Lahendamisel saame:

$$\frac{4-x}{x-2}=6+\frac{2}{x-2};\quad |\cdot(x-2) \qquad \text{(I)}$$

$$4-x=6\cdot(x-2)+2; \qquad \text{(II)}$$
$$4-x=6x-12+2;$$
$$4+12-2=6x+x;$$
$$14=7x;$$
$$x=2.$$

Saime lahendiks arvu, mis ei võinud olla antud võrrandi lahendiks. Kontrollimine näitab, et $x=2$ ei rahulda küll algvõrrandit (I), kuid rahuldab võrrandit (II) ja kõiki järgnevaid võrrandeid.

Antud võrrandil aga lahendeid ei ole. See selgub, kui tundmatut sisaldavad liikmed viime vasakule poolele ja liidame seal murrud:

$$\frac{4-x}{x-2}-\frac{2}{x-2}=6;$$

$$\frac{4-2-2}{x-2}=6;$$

$$\frac{2-x}{x-2}=6;$$

$$\frac{x-2}{x-2}=-6.$$

Siin x mistahes väärtuse puhul võrrandi vasak pool on alati 1 ja parem pool -6.

Arvu, mis ei rahulda algvõrrandit, kuid rahuldab algvõrrandi teisendamisel saadud võrrandit, nimetatakse antud võrrandi **võõrlahendiks.**

Seega peame veel kord meeles, et

võrrandi lahendit tuleb kontrollida alati algvõrrandi kaudu.

Kui tundmatu esineb murru nimetajas, siis võrrandi lahendi kontrollimisel asendame kõigepealt nimetajaks oleva tundmatu leitud arvuga. Kui sel juhul mõni nimetaja muutub nulliks, siis see arv ei ole võrrandi lahendiks. Juhul kui nimetajatest ükski ei muutu nulliks, siis leitud arv võib olla võrrandi lahendiks, mida lõplikult peab näitama lahendi kontroll.

Näiteid.

1) Lahendada võrrand

$$\frac{x-7}{x-2}=3.$$

Lahendus.

$$\frac{x-7}{x-2}=3;\ |\cdot(x-2)$$

$$x-7=3(x-2);$$

$$x-7=3x-6;$$

$$-7+6=3x-x;$$

$$-1=2x;$$

$$x=-\frac{1}{2}.$$

Kontroll. a) Asendame algvõrrandi nimetajas $x=-\frac{1}{2}$, siis saame nimetajas $-2\frac{1}{2}$. Seega $x=-\frac{1}{2}$ võib olla lahendiks.

b) Asendame algvõrrandis $x\left(-\frac{1}{2}\right)$-ga, siis saame

$$\frac{-\frac{1}{2}-7}{-\frac{1}{2}-2}=\frac{-7\frac{1}{2}}{-2\frac{1}{2}}=\frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{2}}=3;$$

$$3=3.$$

Vastus. $x=-\frac{1}{2}$.

2) Lahendada võrrand

$$\frac{3}{4x-20}+\frac{15}{50-2x^2}+\frac{7}{6x+30}=0.$$

Lahendus.

a) Lahutame nimetajad teguriteks:

$$\frac{3}{4(x-5)}+\frac{15}{2(25-x^2)}+\frac{7}{6(x+5)}=0.$$

b) Leiame ühise nimetaja ja korrutame sellega võrrandi liikmed:

$$\frac{3}{4(x-5)}-\frac{15}{2(x-5)(x+5)}+\frac{7}{6(x+5)}=0. \mid \cdot 12(x-5)(x+5)$$

c) Pärast taandamist saame:

$$9(x+5)-90+14(x-5)=0.$$

d) Avame sulud:

$$9x+45-90+14x-70=0.$$

e) Koondame sarnased liikmed ja viime vabaliikmed üle paremale poolele; leiame x:

$$23x=115; \mid :23$$

$$x=5.$$

Kontroll. Arvutame murdude nimetajad, kui $x=5$. Esimese murru nimetaja on

$$4\cdot 5-20=0.$$

Teisi nimetajaid polegi enam vaja arvutada, sest on selge, et $x=5$ ei sobi lahendiks.

Vastus. Antud võrrandil ei ole lahendeid.

Ülesandeid.

752. Näidata, milles seisneb järgmise võrrandi lahendamisel tehtud viga.
On antud võrrand $6x-15=10x-25$. Kui toome võrrandi kummalgi poolel ühise teguri sulgude ette, saame $3(2x-5)=5(2x-5)$. Jagame võrrandi mõlemad pooled ühe ja sama avaldisega $2x-5$. Saame $3=5$!
Miks ei tohtinud võrrandi mõlemaid pooli jagada avaldisega $2x-5$?

753. Näidata, et järgmistes harjutustes võrrandite vabastamine murdudest toob sisse võõrlahendid.

1) $\frac{1}{x-2}+3=\frac{3-x}{x-2}$
2) $5+\frac{1}{x-4}=\frac{5-x}{x-4}$
3) $\frac{1}{x-5}+6=\frac{6-x}{x-5}$
4) $\frac{8-x}{x-7}=8+\frac{1}{x-7}$

754. Lahendada võrrandid.

1) $\frac{3t-1}{3t+1}=2-\frac{t-3}{t+3}$
2) $\frac{3x-5}{x-1}-\frac{2x-5}{x-2}=1$
3) $2-\frac{3u}{3u-2}=\frac{2u-9}{2u-5}$
4) $\frac{9x-7}{3x-2}-\frac{4x-5}{2x-3}=1$
5) $\frac{8}{3t-3}-\frac{2+t}{t-1}=\frac{5}{2-2t}-\frac{5}{18}$
6) $\frac{14}{3z-12}-\frac{2+z}{z-4}=\frac{3}{8-2z}-\frac{5}{6}$
7) $\frac{y+5}{3x-6}-\frac{1}{2}=\frac{2y-3}{2y-4}$
8) $\frac{10}{3}-\frac{7u+2}{6u+18}=2+\frac{3u-1}{4u+12}$

755. Lahendada võrrandid.

1) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}$
2) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}$
3) $\frac{t^2-3}{1-t^2}+\frac{t+1}{t-1}=\frac{4}{1+t}$
4) $\frac{y^2+17}{y^2-1}=\frac{y-2}{y+1}-\frac{5}{1-y}$

756. Lahendada võrrandi abil järgmised ülesanded.

1) Missugune arv on vaja liita murru $\frac{2}{5}$ lugeja ja nimetajaga, et saada murd $\frac{3}{7}$?
2) Murru lugeja on 4 võrra väiksem nimetajast. Kui suurendada lugejat ja nimetajat 1 võrra, siis saame $\frac{1}{2}$. Leida murd.

Näpunäide. Tähistada nimetaja x-ga.

3) Murru nimetaja on 2 võrra suurem lugejast. Kui murru lugejat vähendada 3 korda ja nimetajale liita 3, siis saame $\frac{1}{8}$. Leida murd.

4) Missugune arv on vaja liita murru $\frac{2}{5}$ lugeja ja nimetajaga, et saada murd $\frac{5}{14}$?

5) Mingi arv jagati 7,5-ga ja saadi 4,4. Leida see arv.

6) Arv 13,5 jagati arvuga x ja saadi 0,5. Leida x.

757. Vankri esiratas tegi teatud vahemaal 15 pööret rohkem kui tagaratas. Esiratta ümbermõõt on 2,5 m, tagaratta ümbermõõt aga 4 m. Mitu pööret tegi kumbki ratas ja missuguse vahemaa läbis vanker? (40 p.; 25 p.; 100 m)

758. Ühel ja samal vahemaal teeb veduri veoratas 240 pööret, vaguni ratas aga, mille ümbermõõt on 3,2 m võrra väiksem veduri ratta ümbermõõdust, teeb 560 pööret. Leida kummagi ratta ümbermõõt.

759. Moskva kõrghoonete lifti tõusukiirus on kaks korda suurem kui tavaliste hoonete lifti tõusukiirus, mistõttu 20-ndale korrusele tõusmiseks, s. o. 81 m kõrgusele, kulub ainult 5 sek. rohkem kui tavalises hoones 8-ndale korrusele tõusmiseks, s. o. 33 m kõrgusele. Leida kummagi lifti kiirus. $\left(8\frac{\text{m}}{\text{sek}};\ 1{,}5\frac{\text{m}}{\text{sek}}\right)$

5. TÄHELISTE KORDAJATEGA VÕRRANDID.

Võrrandis võib esineda peale tundmatut tähistava tähe veel muid tähti. Need tähed tähistavad tuntud arve, kuigi pole öeldud, missugused need arvud on. Tähtede abil kirjutatud antud arve nimetatakse **tähelisteks kordajateks** ehk **parameetriteks.**

Tähelise kordaja all võib mõelda mistahes arvu, kuid mitte niisugust, mille puhul võrrandis või selle lahendis mõni nimetaja muutub nulliks.

Nii näiteks võrrandis

$$\frac{z}{b}-z=b$$

b tähendab mistahes arvu peale arvu 0. Miks b ei tohi olla 0? Lahendame selle võrrandi:

$$\frac{z}{b}-z=b;\ |\cdot b$$

$$z-bz=b^2.$$

Viime tundmatu sulgude taha (või võtame sulgude ette).

$$(1-b)z=b^2;$$

$$z=\frac{b^2}{1-b}.$$

Lahendusest näeme, et b ei või olla võrdne ka veel 1-ga.

Näiteid.

1) Lahendada võrrand

$$ax-cx=a^2-c^2.$$

Lahendus.

$$(a-c)x=a^2-c^2;$$

$$x=\frac{a^2-c^2}{a-c};$$

$$x=a+c.$$

Siin ei tohi $a-c$ olla null, s. t. a ei tohi olla võrdne c-ga.

2) Lahendada võrrand

$$\frac{a-x}{b}+\frac{b-x}{a}=2.$$

Selles võrrandis ei tohi a ja b olla võrdsed nulliga (miks?).

Lahendus.

$$\frac{a-x}{b}+\frac{b-x}{a}=2;\ |\cdot ab$$

$$a(a-x)+b(b-x)=2ab;$$

$$a^2-ax+b^2-bx=2ab;$$

$$-ax-bx=2ab-a^2-b^2;\ |\cdot(-1)$$

$$ax+bx=a^2-2ab+b^2;$$

$$(a+b)x=(a-b)^2$$

$x=\frac{(a-b)^2}{a+b}$, kus $a+b\neq 0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

Ülesandeid.

760. Lahendada võrrandid.

1) $(a^2-1)x=a^2$
2) $(a-2)x=a^2-3$
3) $(p^2-q^2)x=(p+q)^2$

761. Võrrandist $a+bx=4-3(a-x)$ avaldada x arvude a ja b kaudu.

762. Trapetsi pindala $q=\frac{1}{2}(a+b)h$, kus a ja b on alused ning h on kõrgus. Avaldada h suuruste q, a ja b kaudu.

763. Lahendada x suhtes järgmised võrrandid.

1) $a+bx=c$
2) $a(x-c)=b(x+d)$
3) $\frac{x}{a}-x=b$
4) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$

764. Lahendada x suhtes järgmised võrrandid.

1) $\frac{a}{x}-1=\frac{b}{x}-9$
2) $\frac{x}{a}-\frac{a}{2x}=\frac{2x+a}{2a}-\frac{a}{x}$
3) $\frac{a+b}{x}-c=d-\frac{a-b}{x}$
4) $\frac{a+b}{x}+\frac{a}{b}=-1$
5) $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}$
6) $\frac{a}{a-x}=\frac{b}{b-x}$
7) $\frac{x}{a}-\frac{a+b}{x}=\frac{x-a}{a}$
8) $\frac{x+a}{a}-\frac{x}{x-a}=\frac{x-a}{a}$
9) $\frac{a+b}{x-a}-\frac{a-b}{x+a}=0$
10) $\frac{a-b}{x-a}-\frac{a+b}{x-b}=0$
11) $\frac{x+m}{x-n}+\frac{x+n}{x-m}=2$
12) $\frac{3}{x-a}-\frac{2}{x+a}=\frac{3x-7a}{x^2-a^2}$
13) $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=2$
14) $\frac{x+a}{x-a}+\frac{m+a}{m-a}=2$
15) $\frac{n+x}{d+x}=\frac{n}{d}+\frac{1}{6}$
16) $\frac{x-s}{2x+t}-\frac{3x+t}{6x-s}=0$
17) $\frac{5-a}{4b-x}-\frac{5+a}{4b+x}=0$
18) $\frac{a-2x}{6x-b}-\frac{a-x}{3x-b}=0$
19) $\frac{x+a}{2}-\frac{2}{x+a}=\frac{x-a}{2}$
20) $\frac{a}{x}-\frac{b}{cx}=\frac{d}{cx}-\frac{b-a}{c}$

765. Lahendada alljärgnevad võrrandid näidatud tähe suhtes:

1) $S=\frac{1}{2}ah-a$ suhtes;

2) $V=abc-c$ suhtes;

3) $s=vt-v$ suhtes;

4) $e=\frac{P}{V}-V$ suhtes;

5) $c=2\pi r-\pi$ suhtes.

Pärast lahendi leidmist uurida, missuguste parameetri väärtuste korral on lahendil mõte. Mis valemid need on?

766. Kahes elevaatoris oli kokku p tonni teri. Esimesest elevaatorist võeti iga päev a tonni teri, teisest b tonni. t päeva pärast jäi mõlemasse elevaatorisse teri ühepalju. Mitu tonni teri oli algul kummaski elevaatoris? $\left[\frac{p+t(a-b)}{2};\ \frac{p-t(a-b)}{2}\right]$

767. Sidemees pidi viima rapordi punktist A punkti B. Kogu tee sinna ja tagasi läbis ta t tunniga, kusjuures punktist A punkti B sõitis ta kiirusega $v\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja tagasi kiirusega $v_1\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Leida punktide A ja B vaheline kaugus.

768. m rubla eest osteti b kilogrammi kahte sorti kohvi, mille hind on a rbl. ja b rbl. kilogramm. Mitu kilogrammi kohvi osteti kummastki sordist? $\left(\frac{m-bd}{a-b}\text{ kG};\ \frac{ad-m}{a-b}\text{ kG}\right)$

Kordamisküsimusi ja -ülesandeid.

769. Arvutada.

$$3{,}7+1{,}5\cdot\left(2{,}652:1{,}3-1\frac{17}{30}+\frac{3}{50}\right)\cdot\left[19{,}21-\left(4{,}26-\frac{5}{24}:\frac{25}{24}\right)\right]$$

770. 1955. a. sulatati NSV Liidus 55 miljonit tonni terast. 1965. a. on ette nähtud sulatada terast 65,3% rohkem kui 1955. aastal. Kui palju terast peab sulatama 1965. a.?

771. Lihtsustada avaldis.

$$1-\frac{8}{a^2-4}\cdot\left[\left(1-\frac{a^2+4}{4a}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

772. Mis on samasus?

773. Mida nimetatakse võrrandiks?

774. Mille järgi liigitatakse võrrandeid?

775. Mis on võrrandi lahendid?

776. Missugused on võrrandi põhiomadused?

777. Kuidas toimub võrrandite lahendamine?

778. Lahendada võrrand

$$a+3x=2-a(x-7)$$

ja koostada x-väärtuste tabel a kõigi paarituarvuliste väärtuste puhul -5-st 3-ni.

779. Lahendada võrrandid.

1) $\frac{6x+5}{2}-\left(2x+\frac{2x+1}{2}\right)=\frac{10x+3}{4}$

2) $\frac{0{,}01-x}{0{,}02}-2\frac{1}{2}=\frac{2-3x}{0{,}01}$

3) $\frac{7}{2x-5}=\frac{9}{6x^2-15x}-\frac{4}{3x}$

4) $\frac{x}{c}+\frac{x}{d-c}=\frac{c}{c+d}$

780. Missuguse a väärtuse korral on võrrandi $5+5x=2a+3$ lahend võrdne 3-ga?

781. Leida m võrrandist

$$\frac{m}{m+3c}-\frac{m}{m-3c}=\frac{c^2}{9c^2-m^2}.$$

782. Mis tingimusel tekib võõrlahend?

783. Lahendada võrrandid ja kontrollida.

1) $\frac{6}{x-1}=2$

2) $\frac{1-x}{x-1}=3$

3) $\frac{2x}{x-1}=5$

4) $\frac{0{,}5x+2}{3-0{,}25x}=2$

784. Lahendada järgmised ülesanded võrrandi abil.

1) Missugust arvu peab suurendama 3,78 võrra, et saada 47,35?
2) Missugust arvu peab korrutama 5,4-ga, et saada 36,18?
3) Kahe kaasnurga summa on 144°, kusjuures üks on teisest 24° võrra väiksem. Arvutada kõik nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikumisel kolmanda sirgega.
4) Võrdhaarse kolmnurga alusnurk moodustab tipunurgast 70%. Leida kolmnurga nurgad.

Näpunäide. Kui tipunurk on x, siis alusnurk on $0{,}7x$.

5) Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on teisest 25% võrra suurem. Leida need teravnurgad.

785. Esimesel sõidul kulutas auto 25% paagis olevast bensiinist, teisel sõidul 20% jäägist. Pärast seda jäi paaki bensiini 2 l rohkem, kui oli ära kulutatud. Mitu liitrit bensiini oli esialgu paagis? (20 l)

786. Niitjate brigaad niitis esimesel päeval pool aasa ja veel 2 ha, teisel päeval 25% ülejäänud osast ja viimased 6 ha. Leida aasa suurus.

787. Metsaraiujate brigaad varus kolme päevaga 184 kuupmeetrit küttepuid, kusjuures esimesel päeval ületas brigaad päevanormi 14 kuupmeetri võrra, teisel päeval ei täitnud brigaad plaani kahe kuupmeetri võrra, kolmandal päeval aga ületas päevanormi 16 kuupmeetri võrra. Mitu kuupmeetrit küttepuid pidi brigaad varuma plaani järgi iga päev? (52 m^3)

788. Kell on 3. Mitme minuti pärast tunni- ja minutiosuti kattuvad?

789. Leida, kui raske peab olema kuuselaud, et tema üleslükkejõud vees oleks 5 kG, kui on teada, et võetud puu erikaal on $0{,}5\frac{G}{cm^3}$.

790. Küsimusele, mitu õpilast käib tema koolis, olevat Pütagoras[1] vastanud: «Pool õpilastest õpib matemaatikat, neljandik — muusikat, seitsmendik viibib vaikuses ja peale selle on veel kolm naist.» Mitu õpilast oli Pütagorasel?

791. Muistendi järgi otsustas tšehhi rahva valitsejanna Libuše abielluda selle kosilasega, kes lahendab järgmise ülesande: «Mitu ploomi oli korvis, millest ta andis esimesele kosilasele pooled ja veel ühe, teisele pooled ülejäägist ja veel ühe,

[1] Kreeka matemaatik, filosoof ja astronoom (u. 580—500 e. m. a.)

kolmandale pooled uuest jäägist ja veel 3 ploomi; pärast seda ei jäänud korvi enam midagi?»

792. Antiikaja kuulsa matemaatiku Diophantose[2] hauasambal on järgmine pealkiri:

«Teekäija! Siia on maetud Diophantose põrm ning arvud võivad jutustada, kui pikk oli tema eluiga. Kuuendik sellest kujutas ilusat lapsepõlve. Möödus kaheteistkümnendik tema elust ja tema lõug kattus udemetega. Seitsmendiku oma elust oli Diophantos abielus lastetuna. Möödus viis aastat; teda õnnistati esimese poja sünniga, kellele saatus andis elu, ilusa ja helge, mis oli poole lühem kui ta isal. Ja sügavas mures lõppes vanakese maine saatus. Ta elas veel neli aastat pärast poja kaotamist. Ütle, kui vana oli Diophantos, kui ta suri.»

Peale ülesandes esitatud küsimuse leida veel, millal Diophantos abiellus, millal ta sai isaks ja millal kaotas poja.

793. Koer jookseb hobusele järele. Selle ajaga, kui koer teeb 6 hüpet, teeb hobune ainult 5. Koer läbib 4 hüppega sama vahemaa, mille hobune 7 hüppega. Hobune oli jooksnud 5,5 km, kui koer hakkas talle järele jooksma. Missuguse vahemaa jõuab hobune veel joosta, kui koer talle järele jõuab?

Kodune kontrolltöö nr. 9.

1. Leida avaldise

$$\left(a-\frac{3+k^2}{a}\right):\left(\frac{k+2}{3a}-1\right)$$

arvuline väärtus, kui $a=0{,}5$ ja $k=-1$.

2. Lihtsustada.

1) $1-\frac{8}{a^2-4}-\left[\left(1-\frac{a^2+4}{4a}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\right]$

2) $\left(\frac{a^2+1}{2a-1}-\frac{a}{2}\right):\frac{2+a}{1-2a}$

3. Lahendada võrrandid.

1) $\frac{1{,}8-8x}{1{,}2}-\frac{1{,}3-3x}{2}=\frac{5x-0{,}4}{0{,}3}$

[2] Diophantos Aleksandriast, kreeka matemaatik IV—III s. e. m. a.

2) $\frac{9x-7}{3x-2}-\frac{4x-5}{2x-3}=1$

3) $\frac{c+x}{cx}-\frac{1}{c}=\frac{c}{c+x}$

4. Reisirongi tender koos vee ja küttega kaalub 122,8 t. Tender mahutab vett 33 t rohkem kui kütet, ise kaalub aga 35,8 t rohkem kui küte. Leida eraldi vee, kütte ja tendri enda kaal. (51 t; 18 t; 53,8 t)

5. Rong läbib linnade *A* ja *B* vahemaa 10 tunni 40 minutiga. Kui rong sõidaks ühes tunnis 10 km vähem, siis saabuks ta linna *B* 2 tundi 8 minutit hiljem. Leida linnade vahemaa ja rongi kiirus. $\left(640\text{ km};\ 60\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$

6. Nõu petrooleumiga kaalus *p* kilogrammi. Pärast seda, kui nõust valati pool petrooleumi ära, kaalus ta *q* kilogrammi. Leida tühja nõu kaal.

§ 67. VÕRDE LAHENDAMINE. VÕRDELINE JAOTAMINE.

1. VÕRDE LAHENDAMINE.

Me käsitlesime võrret ja tema põhiomadusi paragrahvis 36. Mida nimetatakse võrdeks? Nimetada võrde põhiomadus? Kuidas leitakse võrde tundmatut välisliiget? Siseliiget?

Allpool vaatleme veel paari näidet võrde tundmatu liikme leidmise kohta.

Näiteid.

1) Leida võrdes $\frac{18}{10}=\frac{9}{x}$ tundmatu välisliige.

Lahendus. Võrde põhiomaduse põhjal saame

$$18\cdot x=9\cdot 10,$$

millest

$$x=\frac{90}{18}=5.$$

Kontroll. $\frac{18}{10}=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$; $\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$;

$$1\frac{4}{5}=1\frac{4}{5}.$$

Vastus. Antud võrde välisliige $x=5$.

2) Lahendada võrre $\frac{3}{x}=\frac{7}{2}$.

Lahendus. $7\cdot x=3\cdot 2$;

$$x=\frac{6}{7}.$$

Kontroll. $\frac{3}{6}=\frac{3\cdot 7}{6}=\frac{21}{6}=3\frac{3}{6}=3\frac{1}{2}$;

$$\frac{7}{2}=3\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}.$$

Vastus. $x=\frac{6}{7}$.

Märkus. Lihtsamate võrrete puhul kontrollida peast.

Ülesandeid.

794. Arvutada x.

1) $\frac{15}{x}=\frac{3}{5}$

2) $\frac{21}{5}=\frac{x}{10}$

3) $\frac{x}{2{,}8}=\frac{7{,}5}{2{,}5}$

4) $\frac{4x}{3{,}6}=\frac{8}{0{,}5}$

5) $\frac{6}{4}=\frac{0{,}7x}{4{,}2}$

6) $\frac{a}{x}=\frac{b}{c}$

795. Leida järgmistest võrretest x.

1) $\frac{a-b}{x}=\frac{b-a}{c-2b}$

2) $\frac{x}{b-c}=\frac{a-b}{2b-c}$

3) $\frac{2a^2b}{a+b}=\frac{x}{a^2-b^2}$

4) $\frac{29(a-b)}{x}=\frac{551(a^2-b^2)}{19(a+b)}$

2. VÕRRANDI LAHENDAMINE VÕRDE ABIL.

Võrrandeid, millel on võrde kuju, saame kõige lihtsamalt lahendada võrde põhiomaduse põhjal.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	$\frac{2x-3}{5}=\frac{x+8}{3}$
$ad=bc$	$3(2x-3)=5(x+8)$

Näiteid. 1) $\frac{5x-4}{2}=\frac{16x+1}{7}$;

$$7(5x-4)=2(16x+1);$$
$$35x-28=32x+2;$$
$$35x-32x=2+28;$$
$$3x=30;\ |:3$$
$$x=10.$$

Kontroll. v. p. $\frac{5\cdot 10-4}{2}=\frac{50-4}{2}=\frac{46}{2}=23;$

p. p. $\frac{16\cdot 10+1}{7}=\frac{160+1}{7}=\frac{161}{7}=23;$

$$23=23.$$

Vastus. $x=10$.

2) $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1}$;

$$2(x-1)=x+1;$$
$$2x-2=x+1;$$
$$2x-x=1+2;$$
$$x=3.$$

Kontroll. v. p. $\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$;

p. p. $\frac{2}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$;

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Vastus. $x=3$.

3) Traktoristil kulus 2,5 ha suuruse põllu seemendamiseks 3 tundi 12 minutit. Kui palju aega kulub samasuguse tempo juures 6,8 ha suuruse põllu seemendamiseks?

Lahendus. Oletame, et II põllu seemendamiseks kulub x tundi, siis ühe hektari seemendamiseks kulub $\frac{x}{6,8}$ tundi. Teisendanud 3 tundi 12 minutit tundideks, saame teiselt poolt, et I põllu ühe hektari seemendamiseks kulub $\frac{3,2}{2,5}$ tundi.

Kuna külvi tempo on mõlemal juhul sama, siis saame võrrandi:

$$\frac{x}{6{,}8}=\frac{3{,}2}{2{,}5},$$

millest

$$2{,}5x=6{,}8\cdot 3{,}2;$$
$$2{,}5x=21{,}76;$$
$$x=\frac{21{,}76}{2{,}5}\approx 8{,}7.$$

Kontroll. $\frac{8{,}7}{6{,}8}\approx 1{,}28;$ $\frac{3{,}2}{2{,}5}\approx 1{,}28.$

Vastus. 6,8 ha suuruse põllu seemendamiseks kulub 8,7 tundi ehk 8 tundi ja 42 minutit.

Märkus. Jälgida, et võrrandi mõlemal poolel oleks üks ja sama suurus samasugustes mõõtühikutes.

Ülesandeid.

796. Lahendada järgmised võrrandid võrde abil.

1) $\frac{3x+1}{7}=\frac{7x-27}{9}$

2) $\frac{x+18}{8}=\frac{61-23x}{6}$

3) $\frac{16}{3x-4}=\frac{22}{2x+3}$

4) $\frac{5-z}{8}=\frac{18-5z}{12}$

5) $\frac{1-9y}{5}=\frac{19+3y}{8}$

6) $\frac{3}{y-2}=\frac{2}{y-3}$

7) $\frac{z+1}{z-1}=\frac{z-5}{z-3}$

8) $\frac{a-x}{b}=\frac{x+b}{a}$

9) $\frac{a^2-b^2}{ax-b}=\frac{a+b}{x}$

10) $\frac{a^2+b^2}{x+a}=\frac{2ab}{x+b}$

797. Lahendada järgmised ülesanded võrde abil.

1) Kui pika tee sõidab auto 10 tunniga, kui 6 tunniga sõidab ta 330 km?
2) Brigaad, milles on 12 müürseppa, teenib päevas 52,8 rubla. Kui palju töötasu saab päevas brigaad, milles on 10 müürseppa?
3) 15 metsatöölist töötasid päevas üles 42 m^3 küttepuid. Kui palju küttepuid töötavad päevas üles 20 metsatöölist?
4) 46 cm^3 jääd kaalub 41,4 G. Leida 20 G jää ruumala.
5) 400 G lahust sisaldab 25 G soola. Kui palju soola sisaldab 250 G seda lahust?

798. 0,45 m^3 liiva kaalub 855 kG. Kui palju kaalub 15 m^3 liiva?

799. 10 l vett annab külmudes 11 l jääd. Mitu liitrit vett on tarvis 200 l jää saamiseks?

800. 30 m^2 suuruse põranda värvimiseks kulus 3,2 kG ookrit. Kui palju ookrit on tarvis põranda värvimiseks, kui põranda mõõtmed on 6,3 m ja 4,5 m? (3,024 kG)

801. Kaks poissi, kes kaaluvad vastavalt 30 kG ja 50 kG, seisavad üle palgi pandud laua otstel. Missuguses punktis peab laud toetuma palgile, et poisid oleksid tasakaalus, kui laua pikkus on 4 m? (2,5 m; 1,5 m)

802. Kahepoolsele kangile on riputatud kaks koormust: üks 30 cm kaugusel toetuspunktist, teine 50 cm kaugusel toetuspunktist. Kui palju kaalub kumbki koormus, kui rõhumine toetuspunktis on 40 kG ja kang on tasakaalus? (25 kG; 15 kG)

803. Männipuust valmistatud mudel kaalub 20 kG. Kui palju kaalub malmist valatud samasugune detail, kui malmi erikaal on 7,25 $\frac{G}{cm^3}$ ja männipuu erikaal 0,5 $\frac{G}{cm^3}$? (290 kG)

3. VÕRDELINE JAOTAMINE.

Lahendame järgmised ülesanded.

1) Plekknõude jootmiseks kasutatakse seatina ja inglistina sulamit vahekorras 1 : 2. Kui palju seatina ja kui palju inglistina sisaldab 120 G jootetina?

Lahendus. 120 G jootetina jaoks on vaja võtta üks kaaluosa seatina ja kaks kaaluosa inglistina. Selle märkimiseks kasutatakse kirjutusviisi 1 : 2. Seega jootetina kaal tuleb jaotada $1+2=3$ võrdseks osaks.

Tähistame ühe kaaluosa tähega x, siis seatina tuleks võtta x G ja inglistina $2x$ G. Kokku oleks siis jootetina $(x+2x)$ G. Kuna ülesandes oli antud jootetina kogus 120 G, siis saame võrrandi:

$$x+2x=120,$$

millest

$$3x=120$$

ja

$$x=\frac{120}{3}=40 \text{ G}.$$

Tähendab, seatina tuleks võtta 40 G ja inglistina $2 \cdot 40=80$ G.

Kontroll. $40+80=120$ G.

Vastus. Seatina on vaja võtta 40 G ja inglistina 80 G.

2) Mendelejevi kitt, mis ei karda lahjendatud happeid, koosneb linaõlist, meevahast, rauahapendist ja kampolist kaaluvahekorras 1 : 15 : 24 : 60. Kui palju on tarvis neid aineid 2 kG kiti saamiseks?

Lahendus. Siin on antud üks kaaluosa linaõli, 15 kaaluosa meevaha, 24 kaaluosa rauahapendit ja 60 kaaluosa kampolit. Seega kiti kaal (2 kG) tuleb jaotada $1+15+24+60=100$ võrdseks kaaluosaks. Kui tähistada üks kaaluosa x-ga, siis linaõli tuleb võtta x kG, meevaha $15x$ kG, rauahapendit $24x$ kG ja kampolit $60x$ kG.

Saame võrrandi

$$x+15x+24x+60x=2,$$

millest

$$100x=2$$

ja

$$x=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}\text{ kG}$$

ehk

$$x=20\text{ G}.$$

Kontroll. $20+15\cdot 20+24\cdot 20+60\cdot 20=20+300+$
$+480+1\,200=2\,000\text{ G}=2\text{ kG}.$

Vastus. Linaõli tuleb võtta 20 G, meevaha 300 G, rauahapendit 480 G ja kampolit 1 kG 200 G.

3) Jaotada arv 2400 kaheks liidetavaks nii, et saadud liidetavad suhtuvad nagu 5 : 7.

Lahendus. Kui tähistada üks osa x-ga, siis arvus 2400 on üks liidetav $5x$ ja teine liidetav $7x$. Saame võrrandi

$$5x+7x=2400,$$

millest

$$12x=2400$$

ja

$$x=\frac{2400}{12}=200.$$

Kontroll. $5\cdot 200+7\cdot 200=1000+1400=2400.$

Vastus. Üks liidetav on 1 000 ja teine liidetav 1 400.

Käsitletud näidetes läbiviidud jaotamist nimetatakse *võrdeliseks jaotamiseks*.

Eelneva põhjal võime öelda:

et jaotada mingi arv võrdeliselt antud arvudega, tuleb see arv jagada antud arvude summaga ja saadud jagatis korrutada iga antud arvuga.

Ülesandeid.

804. Valgevask on vase ja plii sulam. Kui palju vaske ja kui palju pliid sisaldab 270 G valgevaske, kui plii hulk moodustab 50% vase hulgast.
Näpunäide. Leida enne, mitu korda on vaske rohkem kui pliid. Siis saame kätte suhtearvud.

805. Puude lupjamiseks valmistatav segu sisaldab lupja, rukkijahu ja õlilakki suhtes 3 : 2 : 2. Kui palju tuleb võtta iga nimetatud ainet 2,8 kG segu valmistamiseks? (1,2 kG; 0,8 kG; 0,8 kG)

806. Pronksi valmistamiseks võetakse 17 osa vaske, 2 osa tsinki ja üks osa pliid. Kui palju tuleb võtta iga nimetatud metalli 200 kG pronksi valmistamiseks?

807. Jaotada arv 1 815 kolmeks liidetavaks nii, et saadud osad suhtuksid nagu 9 : 11 : 13.

808. Jaotada arv 360 kaheks liidetavaks, mis suhtuksid nagu $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$.

809. Klaasiliimi võib valmistada linaõlist, kampolist, vahast ja kirjalakist, võttes neid aineid vahekorras 2 : 15 : 3 : 4. Kui palju on tarvis neid aineid 744 G klaasiliimi valmistamiseks? (62 G; 465 G; 93 G; 124 G)

Kodune kontrolltöö nr. 10.

1. Arvutada.

$$5{,}25 : 0{,}05 - \left(2{,}5 + \frac{2}{33}\right) \cdot 7\,\frac{1}{2} + 1{,}25$$

2. Lihtsustada.

$$-\frac{x^2}{x+y} - \left(\frac{x^2}{x+y} - \frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right) : \left(\frac{x^2}{x^2-y^2} + \frac{x}{y-x}\right)$$

3. Lahendada võrrandid.

1) $5(x-4)+24=50-5(x-2)+4$

2) $\frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} = \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6}$

3) $\frac{51}{2x+3} - \frac{23x+26}{4x^2-9} = \frac{22}{2x-3}$

4) $\frac{4}{n+2}-\frac{4}{a-n}=\frac{2(3n+2a)}{n^2-a^2}$ (lahendada n suhtes).

4. Kahe paralleelse sirge lõikumisel kolmanda sirgega tekivad lähisnurgad, millest üks on teisest 26° võrra suurem. Leida need lähisnurgad.

5. Ajalehe «Noorte Hääl» tellimishind 6 kuu eest on 3 rubla. Kui palju tuleb maksta tellimisel 8 kuu eest?

6. Jaotada arv 44 osadeks, mis suhtuksid nagu 0,5 : 0,75 : 1,5.

7. Portselan koosneb valgest savist, liivast ja kipsist suhtes 25 : 2 : 1. Kui palju tuleb võtta iga nimetatud ainet 1,4 kG portselanisegu valmistamiseks? (1,25 kG; 0,1 kG; 0,05 kG)

Üldiseks kordamiseks.

810. Arvutada.

1) $\frac{3+4{,}2:0{,}1}{\left(1:0{,}3-2\frac{1}{2}\right)\cdot 0{,}3125}$

2) $\frac{(18{,}305:7-0{,}38:4)\cdot(6{,}35+4{,}65)}{28{,}08:6+7{,}38:9}$

811. Õunad kaotavad kuivatamisel 84% oma kaalust. Mitu kilogrammi tuleb võtta värskeid õunu, et saada 16 kG kuivatatud õunu?

812. Maa esimese kunstliku kaaslase suurim kaugus Maast oli 900 km. Mitu protsenti on see kaugus Maa raadiusest? (Maa raadius on 6370 km.)

813. Turist sõitis rongiga 38% oma teekonnast, laevaga 44% sellest ja ülejäänud 35 km käis jalgsi. Kui pikk oli kogu teekond?

814. Arvutada korrapärase kuusnurkse püramiidi ruumala, kui püramiidi põhiserv on 2,6 dm ja kõrgus 3,6 dm.

815. Leida algebralise avaldise

$$2a^3+3ab+b^2$$

arvuline väärtus, kui $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{2}{3}$.

816. Lihtsustada avaldised.

1) $\frac{b^3-b}{(1+ab)^2-(a+b)^2}$

2) $\frac{4a^2+8ab+4b^2}{2a^2-2b^2}$

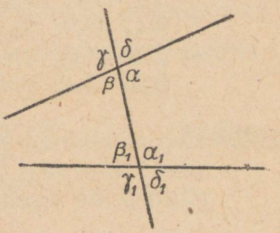
3) $\frac{(a+b)-c^2}{a+b+c}$

817. Leida nurk, mis moodustab oma kõrvunurgast: a) $\frac{1}{4}$; b) 50%; c) 75%.

818. Kaks sirget lõikuvad. Üks tekkinud nurkadest on: a) 35°; b) 100°; c) 137°17′. Leida kõik ülejäänud nurgad.

819. Joonisel 201 on $\beta+\alpha_1=156°$ ja $\alpha_1=98°$. Leida kõik ülejäänud nurgad.

820. Kahe paralleelse sirge lõikumisel sirgega tekkinud põiknurkadest on üks: a) 35°; b) 19°; c) 150°30′. Leida kõik ülejäänud nurgad.



Joon. 201

821. Kahe paralleelse sirge lõikumisel sirgega tekkinud lähisnurkadest on: a) üks teisest 35° võrra suurem; b) üks teisest 75%. Leida kõik ülejäänud nurgad.

822. Nurga $\alpha=56°$ haarade vahel on punkt *M*. Läbi selle punkti on ehitatud nurga haaradega paralleelsed sirged. Leida kõigi tekkinud nurkade suurused.

823. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk moodustab teisest $\frac{2}{3}$. Leida need nurgad.

824. Kolmnurga kesklõik on ligikaudu 5,67 cm. Kesklõiguga paralleelsele küljele ehitatud kõrgus on 8,2 cm. Arvutada kolmnurga pindala.

825. Trapetsi alused on ligikaudu 6,87 cm ja 12,342 cm. Leida trapetsi kesklõik.

826. Teostada tehted ligikaudsete arvudega.

a) 5,67+14,85−17,4289

b) 5200−630+47

c) $(0{,}478 \cdot 5{,}3 - 1{,}75) : 3{,}2$

d) $6{,}75 \cdot (18{,}5 - 4{,}32)$

e) $\frac{(3{,}25 - 1{,}2) \cdot 3{,}27}{12{,}75 - 9{,}2}$

f) $\frac{130(580 - 10 \cdot 27)}{27 + 32}$

827. Arvutada lükati abil.

a) Andmed on täpsed.
3,7 · 5,8; 9,8 · 5,65; 6,79 · 11,3; 0,35 · 28,3;
19,5 · 8,73; 15,6 · 0,98; 51,2 · 4,87; 0,87 · 0,565;
3,75 : 1,3; 4,82 : 3,7; 7,82 : 8,79; 13,2 : 27;
0,75 : 0,2; 0,382 : 1,3; 16,8 : 0,567; 128 : 0,931.

b) Andmed on ligikaudsed.
3,2 · 5,4; 17,3 · 2,87; 3,2 · 4,56; 0,87 · 32,7;
3,47 · 2,9; 15,9 · 27,5; 0,23 · 19,8; 3,27 · 0,032;
3,47 : 2,5; 31,4 : 8,7; 19,8 : 23; 87 : 137;
0,47 : 5,2; 6,87 : 0,47; 1,2 : 0,873; 0,756 : 0,45.

828. 10,0 m pikkust ja 7,0 m laiust hoonet ümbritseb asfalteeritud riba laiusega 1,5 m. Arvutada, kui suur pindala on asfalteeritud (riba sisemine äär on vastu maja vundamenti). (60 m^2)

829. Rööpkülikukujulise põllutüki pikemad küljed on 55 m pikkused ja nendevaheline kaugus on 37 m. Arvutada põllutüki pindala hektarites. (0,20 ha)

830. Torni katusel on korrapärase nelinurkse püramiidi kuju. Arvutada katusealuse ruumala, kui katuse kõrgus on 4,8 m ja põhiserv 3,2 m. (16 m^3)

831. Eesti NSV-s oli 1959. a. 1 197 000 elanikku, sellest 56% elas linnades. Mitu elanikku elas linnades?

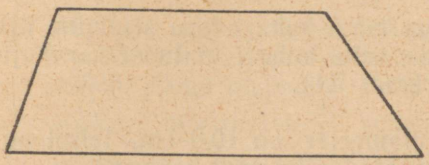
832. 1959. a. teostatud rahvaloenduse andmeil oli NSV Liidus 208 827 000 elanikku, mis moodustas 7,3% kogu maakera elanikkonnast. Leida maakera elanike arv sel ajal.

833. Joonisel 202 on kujutatud põllutüki plaan. Teha vajalikud mõõtmised ja arvutada, mitu tsentnerit teravilja saab sellelt põllult, kui arvestada hektarisaagiks 21 tsentnerit.

834. Kelgu kaal on 8,2 kG, koorma kaal 23,7 kG. Millist jõudu tuleb rakendada kelgu ühtlaseks vedamiseks mööda lund, kui hõõrdetegur on 0,03? (1 kG)

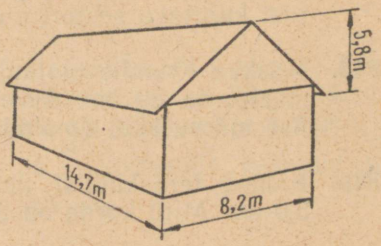
835. Arvutada maja katusealuse ruumala joonisel 203 toodud andmete kohaselt.

836. Tõestada, et ühe ja sama diameetri otspunktidest ehitatud puutujad on paralleelsed.



M 1:2000

Joon. 202



Joon. 203

837. Ringi sees oleva punkti vähim ja suurim kaugus ringjoonest on vastavalt 3,2 cm ja $4\frac{3}{4}$ cm. Arvutada ringjoone raadius.

838. Kui suur on piirdenurk, mis toetub kaarele: a) $\frac{1}{4}$ ringjoonest; b) $\frac{1}{8}$ ringjoonest; c) 40% ringjoonest.

839. Võrdhaarse holmnurga tipunurk on 58°. Kolmnurga haarale kui diameetrile on ehitatud poolringjoon, mis kolmnurga alusega lõikumisel jaotub kaheks kaareks. Mitu kraadi sisaldavad need kaared? (122°, 58°)

840. Võrdkülgse kolmnurga küljele kui diameetrile on ehitatud poolringjoon, mis lõikub kahe teise küljega. Tõestada, et poolringjoon jaotub kolmeks võrdseks kaareks.

841. Kaevanduse tõstukimasina trumli läbimõõt on 6,00 m. Tõstuki trossi diameeter on 37 mm. Määrata mähitud osa laius trumlil, kui tõstuk tõuseb 492 m sügavusest šahtist. (97 cm)

842. Sõiduauto «Moskvitš-407» klaasipuhastaja teeb ühe täisvõnke sel ajal, kui mootori väntvõll teeb 52,9 pööret. Kolmanda käiguga sõites teevad auto tagumised rattad (läbimõõt 0,66 m) ühe täispöörde ajal, mil mootori väntvõll teeb 4,71 pööret. Leida auto liikumise kiirus, kui klaasipuhastaja teeb ühes minutis 50 täisvõnget. $\left(70\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$

843. Silindrikujulise katla diameeter on 10,0 dm ja pikkus 2,5 m. Mitu ruutmeetrit lehtterast on vaja sellise katla valmistamiseks, kui keevitustele arvestada 2,5% silindri täispindalast? (9,7 m^2)

844. Plekksepal on vaja valmistada koonus põhja raadiusega 5,0 cm ja moodustajaga 12,0 cm. Kui suur on külgpinnalaotust kujutava sektori nurk? (150°)

845. Moskva Kremlis alalhoitava tsaar-kahuri toru sisemine diameeter on 89 cm. Arvutada selle kahuri malmist kerakujulise mürsu kaal (malmi erikaal 7,1).

846. Kahest teraskuulist ühe diameeter on 10,0 cm, teisel aga 5,0 cm. Mitu korda on teine kuul esimesest kergem?

847. Tünni ruumala arvutatakse ligikaudse valemi järgi

$$V=0{,}785h\cdot\left(\frac{D+d}{2}\right)^2,$$

kus D on tünni kõige jämedama koha diameeter, d — tünni põhja diameeter ja h — tünni kõrgus.

848. Arvutada tünni ruumala, kui $d=34$ cm, $D=42$ cm ja $h=56$ cm. (63 l)

849. Lahendada võrrandid.

1) $\frac{50-4x}{5}=\frac{2x+6}{13}$

2) $9-\frac{2+3x}{7}=11-\frac{20-3x}{2}$

3) $\frac{9}{2x+8}+\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{2x-2}$

4) $\frac{x}{m-n}-\frac{5m}{m+n}=\frac{2nx}{m^2-n^2}$

850. Ristkülikukujulise põllu pikkus on 10 m võrra suurem tema laiusest. Mitme ruutmeetri võrra suureneb põllu pindala, kui põllu pikkust vähendada ja laiust suurendada 5 m võrra? (25 m²)

851. Ekskursioonist osavõtjate rühm, külastades Üleliidulist Rahvamajanduse Saavutuste Näitust, ostis õpilastele 10 korda rohkem pileteid kui täiskasvanutele ja maksis kõigi piletite eest 5,2 rbl. Mitu piletit osteti täiskasvanutele ja mitu õpilastele, kui täiskasvanute pilet maksab 30 kopikat ja õpilaste pilet 10 kopikat? (4; 40)

852. 155-meetrisele vahemaale paigaldati 25 veevärgitoru. Osa neist oli 5 m, osa 8 m pikad. Mitu 5-meetrist ja mitu 8-meetrist toru paigaldati? (15; 10)

853. Moskva metroo Gorki jaama nelja eskalaatori kogupikkus on 280 m. Väikseim nendest eskalaatoritest on 24 m võrra lühem kõige pikemast. Kõige pikemale järgneva eskalaatori pikkus moodustab $\frac{6}{7}$ suurima ja $\frac{9}{8}$ kolmanda eskalaatori pikkusest. Leida iga eskalaatori pikkus.

854. Noored naturalistid kasvatasid kooli õppe-katseaias viljapuude istikuid. 25% nendest istikutest andis kool kolhoosile, $\frac{1}{3}$ lastekodule, ülejäänud 250 istikut kasutas kool aga oma aia jaoks. Mitu istikut kasvatasid noored naturalistid kooli õppe-katseaias? (600)

855. Ühelt hektarilt saadakse 30 t suhkrupeete, mis sisaldavad 14% suhkrut. Mitmele hektarile tuleb külvata suhkrupeeti, et saada 100 t suhkrut? (238 ha)

856. Saraatovi ja Moskva vahelise gaasijuhtme pikkus ning Moskva-nimelise kanali pikkused suhtuvad nagu 25:4. Leida kummagi pikkus, kui gaasijuhe on kanalist 672 km võrra pikem. (800 km; 128 km)

857. Elektrimootori rihmaratta läbimõõt on 150 mm. Rihmaratas teeb minutis 960 pööret. Kui palju tuleb vähendada ratta läbimõõtu, et elektrimootori pöörete arvu suurendamisel 1 200 pöördeni minutis veorihma liikumise kiirus jääks samaks?

858. Traktori tagaratas, mille ümbermõõt on m sentimeetrit, teeb teatud vahemaal n pööret. Mitu pööret teeb selle traktori esiratas samal vahemaal, kui tema ümbermõõt on a sentimeetri võrra lühem?

859. Kahest linnast, mille vahemaa on m kilomeetrit, väljuvad üheaegselt ühes ja samas suunas kaks rongi. Esimene rong sõidab kiirusega $a\frac{\text{km}}{\text{h}}$; rong, mis liigub esimese järel, sõidab kiirusega $b\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mitme tunni pärast jõuab teine rong esimesele järele, kui $b>a$? $\left(\frac{m}{b-a}\right)$

SISUKORD.

Näpunäiteid õpiku kasutajale 3

I peatükk.

6. KLASSI KURSUSE KORDAMINE.

§ 1. Tähtsamaid mõisteid algebrast 5
§ 2. Üks- ja hulkliikmete liitmine ja lahutamine 8

II peatükk.

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE.

§ 3. Kordamine 10
§ 4. Hulkliikme tegureiks lahutamine ühise teguri sulgude ette toomise võttega 13
§ 5. Hulkliikme tegureiks lahutamine rühmitamise võttega 17
§ 6. Hulkliikme tegureiks lahutamine abivalemite kasutamise võttega . 19
§ 7. Hulkliikme tegureiks lahutamine mitme võtte abil 24

III peatükk.

ALGEBRALINE MURD.

§ 8. Algebralise murru mõiste 29
§ 9. Murru põhiomadus 30
§ 10. Murru liikmete märkide muutmine 32
§ 11. Murdude taandamine 34
§ 12. Algebraliste murdude teisendamine ühenimelisteks 37
§ 13. Murdude liitmine ja lahutamine 43
§ 14. Murdude korrutamine ja astendamine 49
§ 15. Murdude jagamine 56

IV peatükk.

SIRGETE LÕIKUMINE JA PARALLEELSUS. MATEMAATILISED LAUSED.

§ 16. Definitsioon 67
§ 17. Kõrvunurgad. Tippnurgad 69
§ 18. Kahe sirge lõikamine kolmanda sirgega 71

§ 19. Lausete õigsuse põhjendamine loogilise arutluse teel. Teoreem . . 73
§ 20. Teoreemi koostis 76
§ 21. Aksioom 78
§ 22. Paralleelsete sirgete definitsioon. Paralleelsuse aksioom . . . 79
§ 23. Vastuväiteline tõestusviis. Järeldusi paralleelsuse aksioomist . . 80
§ 24. Sirgete paralleelsuse I tunnus 82
§ 25. Sirgete paralleelsuse II ja III tunnus 86
§ 26. Kahe paralleelse sirge lõikamine sirgega 87
§ 27. Kolmnurga välisnurk. Kolmnurga sisenurkade summa 90
§ 28. Kolmnurga kesklõik. Trapetsi kesklõik 93
§ 29. Vastavalt paralleelsete ja ristuvate haaradega nurgad 97

V peatükk.

ARVUTAMINE LIGIKAUDSETE ARVUDEGA, ARVUTUSLÜKATI.

§ 30. Täpsed ja ligikaudsed arvud 105
§ 31. Arvude ümardamine. Ligikaudse arvu tüvenumbrid 105
§ 32. Ligikaudsete arvude tekkimine suuruste mõõtmisel 110
§ 33. Krõlovi reegel 114
§ 34. Ligikaudsete arvude liitmine ja lahutamine 116
§ 35. Arvutuslükati ja selle põhiskaalad 120
§ 36. Võrre. Võrde lahendamine 124
§ 37. Ligikaudsete arvude korrutamine ja jagamine. Kahe arvu korrutise ja jagatise leidmine lükati abil 129
§ 38. Ligikaudsete andmetega mitme tehtega ülesanded 137

VI peatükk.

RINGJOON, SILINDER, KOONUS, KERA.

§ 39. Ringjoon ja temaga seoses olevaid mõisteid 145
§ 40. Kõõl ja temaga ristuv diameeter 146
§ 41. Ringjoone määramine. Kolmnurga ümberringjoon 148
§ 42. Kolmnurga kõrguste lõikumine 150
§ 43. Punkti ja ringjoone vastastikune asend 152
§ 44. Sirge ja ringjoone vastastikune asend. Ringjoone puutuja . . . 153
§ 45. Kolmnurga siseringjoon 156
§ 46. Piirdenurk. Thalese teoreem 158
§ 47. Ringjoon ja korrapärane hulknurk 164
§ 48. Ringjoone pikkuse mõõtmine ja arvutamine 168
§ 49. Ringjoone pikkuse tabel 173
§ 50. Kaare pikkus 177
§ 51. Ringi pindala 179

§ 52. Ringi pindala tabel 181
§ 53. Ringi sektor. Sektori pindala 184
§ 54. Silinder 186
§ 55. Silindri pinnalaotus. Silindri pindala 188
§ 56. Silindri ruumala 192
§ 57. Koonus 194
§ 58. Koonuse pinnalaotus. Koonuse pindala 195
§ 59. Koonuse ruumala 198
§ 60. Kera 200
§ 61. Kera ruumala 202
§ 62. Kera pindala 205

VII peatükk.

ÜHE TUNDMATUGA LINEAARSED VÕRRANDID.

§ 63. Samasus ja võrrand 211
§ 64. Võrrandi lahendid. Võrrandite liigid 213
§ 65. Võrrandi põhiomadused 215
§ 66. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandi koostamine ja lahendamine 220
§ 67. Võrde lahendamine. Võrdeline jaotamine 241

Лухт Эрих Петрович
Тельгмаа Аксель Эдуардович
МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШКОЛ
РАБОЧЕЙ МОЛОДЕЖИ
VII класса
На эстонском языке
Обложка Э. Тали
Издательство «Валгус»
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

Toimetaja K. Kallaste
Kunstiline toimetaja H. Keigo
Tehniline toimetaja I. Vahtre
Korrektorid M. Pohlak ja M. Saks

Ladumisele antud 3. IX 1965. Trükkimisele antud 14. X 1965. Paber 60×90, 1/16. Trükipoognaid 16 + 1 lisa. Arvestuspoognaid 13,11. Trükiarv 3000. Tellimise nr. 6707.

Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. I
Hind 34 kop.

6—5

RINGI PINDALA

(d — läbimõõt)

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	23,8	23,8	23,9	24,0	24,1	24,2	24,3	24,4	24,5	24,5
5,6	24,6	24,7	24,8	24,9	25,0	25,1	25,2	25,2	25,3	25,4
5,7	25,5	25,6	25,7	25,8	25,9	26,0	26,1	26,2	26,2	26,3
5,8	26,4	26,5	26,6	26,7	26,8	26,9	27,0	27,1	27,2	27,2
5,9	27,3	27,4	27,5	27,6	27,7	27,8	27,9	28,0	28,1	28,2
6,0	28,3	28,4	28,5	28,6	28,7	28,7	28,8	28,9	29,0	29,1
6,1	29,2	29,3	29,4	29,5	29,6	29,7	29,8	29,9	30,0	30,1
6,2	30,2	30,3	30,4	30,5	30,6	30,7	30,8	30,9	31,0	31,1
6,3	31,2	31,3	31,4	31,5	31,6	31,7	31,8	31,9	32,0	32,1
6,4	32,2	32,3	32,4	32,5	32,6	32,7	32,8	32,9	33,0	33,1
6,5	33,2	33,3	33,4	33,5	33,6	33,7	33,8	33,9	34,0	34,1
6,6	34,2	34,3	34,4	34,5	34,6	34,7	34,8	34,9	35,0	35,2
6,7	35,3	35,4	35,5	35,6	35,7	35,8	35,9	36,0	36,1	36,2
6,8	36,3	36,4	36,5	36,6	36,7	36,9	37,0	37,1	37,2	37,3
6,9	37,4	37,5	37,6	37,7	37,8	37,9	38,0	38,2	38,3	38,4
7,0	38,5	38,6	38,7	38,8	38,9	39,0	39,2	39,3	39,4	39,5
7,1	39,6	39,7	39,8	39,9	40,0	40,2	40,3	40,4	40,5	40,6
7,2	40,7	40,8	40,9	41,1	41,2	41,3	41,4	41,5	41,6	41,7
7,3	41,9	42,0	42,1	42,2	42,3	42,4	42,5	42,7	42,8	42,9
7,4	43,0	43,1	43,2	43,4	43,5	43,6	43,7	43,8	43,9	44,1
7,5	44,2	44,3	44,4	44,5	44,6	44,8	44,9	45,0	45,1	45,2
7,6	45,4	45,5	45,6	45,7	45,8	46,0	46,1	46,2	46,3	46,4
7,7	46,6	46,7	46,8	46,9	47,1	47,2	47,3	47,4	47,5	47,7
7,8	47,8	47,9	48,0	48,2	48,3	48,4	48,5	48,6	48,8	48,9
7,9	49,0	49,1	49,3	49,4	49,5	49,6	49,8	49,9	50,0	50,1
8,0	50,3	50,4	50,5	50,6	50,8	50,9	51,0	51,1	51,3	51,4
8,1	51,5	51,7	51,8	51,9	52,0	52,2	52,3	52,4	52,5	52,7
8,2	52,8	52,9	53,1	53,2	53,3	53,5	53,6	53,7	53,8	54,0
8,3	54,1	54,2	54,4	54,5	54,6	54,8	54,9	55,0	55,2	55,3
8,4	55,4	55,6	55,7	55,8	55,9	56,1	56,2	56,3	56,5	56,6
8,5	56,7	56,9	57,0	57,1	57,3	57,4	57,5	57,7	57,8	57,9
8,6	58,1	58,2	58,4	58,5	58,6	58,8	58,9	59,0	59,2	59,3
8,7	59,4	59,6	59,7	59,9	60,0	60,1	60,3	60,4	60,5	60,7
8,8	60,8	61,0	61,1	61,2	61,4	61,5	61,6	61,8	61,9	62,1
8,9	62,2	62,3	62,5	62,6	62,8	62,9	63,1	63,2	63,3	63,5
9,0	63,6	63,8	63,9	64,0	64,2	64,3	64,5	64,6	64,8	64,9
9,1	65,0	65,2	65,3	65,5	65,6	65,8	65,9	66,0	66,2	66,3
9,2	66,5	66,6	66,8	66,9	67,1	67,2	67,3	67,5	67,6	67,8
9,3	67,9	68,1	68,2	68,4	68,5	68,7	68,8	69,0	69,1	69,2
9,4	69,4	69,5	69,7	69,8	70,0	70,1	70,3	70,4	70,6	70,7
9,5	70,9	71,0	71,2	71,3	71,5	71,6	71,8	71,9	72,1	72,2
9,6	72,4	72,5	72,7	72,8	73,0	73,1	73,3	73,4	73,6	73,7
9,7	73,9	74,1	74,2	74,4	74,5	74,7	74,8	75,0	75,1	75,3
9,8	75,4	75,6	75,7	75,9	76,0	76,2	76,4	76,5	76,7	76,8
9,9	77,0	77,1	77,3	77,4	77,6	77,8	77,9	78,1	78,2	78,4
10,0	78,5									

A-27204 ARH

LISA

RINGJOONE PIKKUS

(*d* — läbimõõt)

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	3,14	3,17	3,20	3,24	3,27	3,30	3,33	3,36	3,39	3,42
1,1	3,46	3,49	3,52	3,55	3,58	3,61	3,64	3,68	3,71	3,74
1,2	3,77	3,80	3,83	3,86	3,90	3,93	3,96	3,99	4,02	4,05
1,3	4,08	4,12	4,15	4,18	4,21	4,24	4,27	4,30	4,34	4,37
1,4	4,40	4,43	4,46	4,49	4,52	4,56	4,59	4,62	4,65	4,68
1,5	4,71	4,74	4,78	4,81	4,84	4,87	4,90	4,93	4,96	5,00
1,6	5,03	5,06	5,09	5,12	5,15	5,18	5,22	5,25	5,28	5,31
1,7	5,34	5,37	5,40	5,43	5,47	5,50	5,53	5,56	5,59	5,62
1,8	5,65	5,69	5,72	5,75	5,78	5,81	5,84	5,87	5,91	5,94
1,9	5,97	6,00	6,03	6,06	6,09	6,13	6,16	6,19	6,22	6,25
2,0	6,28	6,31	6,35	6,38	6,41	6,44	6,47	6,50	6,53	6,57
2,1	6,60	6,63	6,66	6,69	6,72	6,75	6,79	6,82	6,85	6,88
2,2	6,91	6,94	6,97	7,01	7,04	7,07	7,10	7,13	7,16	7,19
2,3	7,23	7,26	7,29	7,32	7,35	7,38	7,41	7,45	7,48	7,51
2,4	7,54	7,57	7,60	7,63	7,67	7,70	7,73	7,76	7,79	7,82
2,5	7,85	7,89	7,92	7,95	7,98	8,01	8,04	8,07	8,11	8,14
2,6	8,17	8,20	8,23	8,26	8,29	8,33	8,36	8,39	8,42	8,45
2,7	8,48	8,51	8,55	8,58	8,61	8,64	8,67	8,70	8,73	8,77
2,8	8,80	8,83	8,86	8,89	8,92	8,95	8,98	9,02	9,05	9,08
2,9	9,11	9,14	9,17	9,20	9,24	9,27	9,30	9,33	9,36	9,89
3,0	9,42	9,46	9,49	9,52	9,55	9,58	9,61	9,64	9,68	9,71
3,1	9,74	9,77	9,80	9,83	9,86	9,90	9,93	9,96	9,99	10,0
3,2	10,1	10,1	10,1	10,1	10,2	10,2	10,2	10,3	10,3	10,3
3,3	10,4	10,4	10,4	10,5	10,5	10,5	10,6	10,6	10,6	10,6
3,4	10,7	10,7	10,7	10,8	10,8	10,8	10,9	10,9	10,9	11,0
3,5	11,0	11,0	11,1	11,1	11,1	11,2	11,2	11,2	11,2	11,3
3,6	11,3	11,3	11,4	11,4	11,4	11,5	11,5	11,5	11,6	11,6
3,7	11,6	11,7	11,7	11,7	11,7	11,8	11,8	11,8	11,9	11,9
3,8	11,9	12,0	12,0	12,0	12,1	12,1	12,1	12,2	12,2	12,2
3,9	12,3	12,3	12,3	12,3	12,4	12,4	12,4	12,5	12,5	12,5
4,0	12,6	12,6	12,6	12,7	12,7	12,7	12,8	12,8	12,8	12,8
4,1	12,9	12,9	12,9	13,0	13,0	13,0	13,1	13,1	13,1	13,2
4,2	13,2	13,2	13,3	13,3	13,3	13,4	13,4	13,4	13,4	13,5
4,3	13,5	13,5	13,6	13,6	13,6	13,7	13,7	13,7	13,8	13,8
4,4	13,8	13,9	13,9	13,9	13,9	14,0	14,0	14,0	14,1	14,1
4,5	14,1	14,2	14,2	14,2	14,3	14,3	14,3	14,4	14,4	14,4
4,6	14,5	14,5	14,5	14,5	14,6	14,6	14,6	14,7	14,7	14,7
4,7	14,8	14,8	14,8	14,9	14,9	14,9	15,0	15,0	15,0	15,0
4,8	15,1	15,1	15,1	15,2	15,2	15,2	15,3	15,3	15,3	15,4
4,9	15,4	15,4	15,5	15,5	15,5	15,6	15,6	15,6	15,6	15,7
5,0	15,7	15,7	15,8	15,8	15,8	15,9	15,9	15,9	16,0	16,0
5,1	16,0	16,1	16,1	16,1	16,1	16,2	16,2	16,2	16,3	16,3
5,2	16,3	16,4	16,4	16,4	16,5	16,5	16,5	16,6	16,6	16,6
5,3	16,7	16,7	16,7	16,7	16,8	16,8	16,8	16,9	16,9	16,9
5,4	17,0	17,0	17,0	17,1	17,1	17,1	17,2	17,2	17,2	17,2

ARHIIVKOGU

RINGJOONE PIKKUS

(*d* — läbimõõt)

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	17,3	17,3	17,3	17,4	17,4	17,4	17,5	17,5	17,5	17,6
5,6	17,6	17,6	17,7	17,7	17,7	17,7	17,8	17,8	17,8	17,9
5,7	17,9	17,9	18,0	18,0	18,0	18,1	18,1	18,1	18,2	18,2
5,8	18,2	18,3	18,3	18,3	18,3	18,4	18,4	18,4	18,5	18,5
5,9	18,5	18,6	18,6	18,6	18,7	18,7	18,7	18,8	18,8	18,8
6,0	18,8	18,9	18,9	18,9	19,0	19,0	19,0	19,1	19,1	19,1
6,1	19,2	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4
6,2	19,5	19,5	19,5	19,6	19,6	19,6	19,7	19,7	19,7	19,8
6,3	19,8	19,8	19,9	19,9	19,9	19,9	20,0	20,0	20,0	20,1
6.4	20,1	20,1	20,2	20,2	20,2	20,3	20,3	20,3	20,4	20,4
6,5	20,4	20,5	20,5	20,5	20,5	20,6	20,6	20,6	20,7	20,7
6,6	20,7	20,8	20,8	20,8	20,9	20,9	20,9	21,0	21,0	21,0
6,7	21,0	21,1	21,1	21,1	21,2	21,2	21,2	21,3	21,3	21,3
6,8	21,4	21,4	21,4	21,5	21,5	21,5	21,6	21,6	21,6	21,6
6,9	21,7	21,7	21,7	21,8	21,8	21,8	21,9	21,9	21,9	22,0
7,0	22,0	22,0	22,1	22,1	22,1	22,1	22,2	22,2	22,2	22,3
7,1	22,3	22,3	22,4	22,4	22,4	22,5	22,5	22,5	22,6	22,6
7,2	22,6	22,7	22,7	22,7	22,7	22,8	22,8	22,8	22,9	22,9
7,3	22,9	23,0	23,0	23,0	23,1	23,1	23,1	23,2	23,2	23,2
7,4	23,2	23,3	23,3	23,3	23,4	23,4	23,4	23,5	23,5	23,5
7,5	23,6	23,6	23,6	23,7	23,7	23,7	23,8	23,8	23,8	23,8
7,6	23,9	23,9	23,9	24,0	24,0	24,0	24,1	24,1	24,1	24,2
7,7	24,2	24,2	24,3	24,3	24,3	24,3	24,4	24,4	24,4	24,5
7,8	24,5	24,5	24,6	24,6	24,6	24,7	24,7	24,7	24,8	24,8
7,9	24,8	24,8	24,9	24,9	24,9	25,0	25,0	25,0	25,1	25,1
8,0	25,1	25,2	25,2	25,2	25,3	25,3	25,3	25,4	25,4	25,4
8,1	25,4	25,5	25,5	25,5	25,6	25,6	25,6	25,7	25,7	25,7
8,2	25,8	25,8	25,8	25,9	25,9	25,9	25,9	26,0	26,0	26,0
8,3	26,1	26,1	26,1	26,2	26,2	26,2	26,3	26,3	26,3	26,4
8,4	26,4	26,4	26,5	26,5	26,5	26,5	26,6	26,6	26,6	26,7
8,5	26,7	26,7	26,8	26,8	26,8	26,9	26,9	26,9	27,0	27,0
8,6	27,0	27,0	27,1	27,1	27,1	27,2	27,2	27,2	27,3	27,3
8,7	27,3	27,4	27,4	27,4	27,5	27,5	27,5	27,6	27,6	27,6
8,8	27,6	27,7	27,7	27,7	27,8	27,8	27,8	27,9	27,9	27,9
8,9	28,0	28,0	28,0	28,1	28,1	28,1	28,1	28,2	28.2	28.2
9,0	28,3	28,3	28,3	28,4	28,4	28,4	28,5	28,5	28,5	28,6
9,1	28,6	28,6	28,7	28,7	28,7	28,7	28,8	28,8	28,8	28,9
9,2	28,9	28,9	29,0	29,0	29,0	29,1	29,1	29,1	29,2	29,2
9,3	29,2	29,2	29,3	29,3	29,3	29,4	29,4	29,4	29,5	29,5
9,4	29,5	29,6	29,6	29,6	29,7	29,7	29,7	29,8	29,8	29.8
9,5	29,8	29,9	29,9	29,9	30,0	30,0	30,0	30,1	30,1	30,1
9,6	30,2	30,2	30,2	30,3	30,3	30,3	30,3	30,4	30,4	30,4
9,7	30,5	30,5	30,5	30,6	30,6	30,6	30,7	30,7	30,7	30,8
9,8	30,8	30,8	30,9	30,9	30,9	30,9	31,0	31,0	31,0	31,1
9,9	31,1	31,1	31,2	31,2	31,2	31,3	31,3	31,3	31,4	31,4
10 0	31.4									

RINGI PINDALA

(d — läbimõõt)

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,79	0,80	0,82	0,83	0,85	0,87	0,88	0,90	0,92	0,93
1,1	0,95	0,97	0,99	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,09	1,11
1,2	1,13	1,15	1,17	1,19	1,21	1,23	1,25	1,27	1,29	1,31
1,3	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,50	1,52
1,4	1,54	1,56	1,58	1,61	1,63	1,65	1,67	1,70	1,72	1,74
1,5	1,77	1,79	1,81	1,84	1,86	1,89	1,91	1,94	1,96	1,99
1,6	2,01	2,04	2,06	2,09	2,11	2,14	2,16	2,19	2,22	2,24
1,7	2,27	2,30	2,32	2,35	2,38	2,40	2,43	2,46	2,49	2,52
1,8	2,54	2,57	2,60	2,63	2,66	2,69	2,72	2,75	2,78	2,81
1,9	2,84	2,87	2,90	2,93	2,96	2,99	3,02	3,05	3,08	3,11
2,0	3,14	3,17	3,20	3,24	3,27	3,30	3,33	3,37	3,40	3,43
2,1	3,46	3,50	3,53	3,56	3,60	3,63	3,66	3,70	3,73	3,77
2,2	3,80	3,84	3,87	3,91	3,94	3,98	4,01	4,05	4,08	4,12
2,3	4,15	4,19	4,23	4,26	4,30	4,34	4,37	4,41	4,45	4,49
2,4	4,52	4,56	4,60	4,64	4,68	4,71	4,75	4,79	4,83	4,87
2,5	4,91	4,95	4,99	5,03	5,07	5,11	5,15	5,19	5,23	5,27
2,6	5,31	5,35	5,39	5,43	5,47	5,52	5,56	5,60	5,64	5,68
2,7	5,73	5,77	5,81	5,85	5,90	5,94	5,98	6,03	6,07	6,11
2,8	6,16	6,20	6,23	6,29	6,33	6,38	6,42	6,47	6,51	6,56
2,9	6,61	6,65	6,70	6,74	6,79	6,83	6,88	6,93	6,97	7,02
3,0	7,07	7,12	7,16	7,21	7,26	7,31	7,35	7,40	7,45	7,50
3,1	7,55	7,60	7,65	7,69	7,74	7,79	7,84	7,89	7,94	7,99
3,2	8,04	8,09	8,14	8,19	8,24	8,30	8,35	8,40	8,45	8,50
3,3	8,55	8,60	8,66	8,71	8,76	8,81	8,87	8,92	8,97	9,03
3,4	9,08	9,13	9,19	9,24	9,29	9,35	9,40	9,46	9,51	9,57
3,5	9,62	9,68	9,73	9,79	9,84	9,90	9,95	10,0	10,1	10,1
3,6	10,2	10,2	10,3	10,3	10,4	10,5	10,5	10,6	10,6	10,7
3,7	10,8	10,8	10,9	10,9	11,0	11,0	11,1	11,2	11,2	11,3
3,8	11,3	11,4	11,5	11,5	11,6	11,6	11,7	11,8	11,8	11,9
3,9	11,9	12,0	12,1	12,1	12,2	12,3	12,3	12,4	12,4	12,5
4,0	12,6	12,6	12,7	12,8	12,8	12,9	12,9	13,0	13,1	13,1
4,1	13,2	13,3	13,3	13,4	13,5	13,5	13,6	13,7	13,7	13,8
4,2	13,9	13,9	14,0	14,1	14,1	14,2	14,3	14,3	14,4	14,5
4,3	14,5	14,6	14,7	14,7	14,8	14,9	14,9	15,0	15,1	15,1
4,4	15,2	15,3	15,3	15,4	15,5	15,6	15,6	15,7	15,8	15,8
4,5	15,9	16,0	16,0	16,1	16,2	16,3	16,3	16,4	16,5	16,5
4,6	16,6	16,7	16,8	16,8	16,9	17,0	17,1	17,1	17,2	17,3
4,7	17,3	17,4	17,5	17,6	17,6	17,7	17,8	17,9	17,9	18,0
4,8	18,1	18,2	18,2	18,3	18,4	18,5	18,5	18,6	18,7	18,8
4,9	18,9	18,9	19,0	19,1	19,2	19,2	19,3	19,4	19,5	19,6
5,0	19,6	19,7	19,8	19,9	19,9	20,0	20,1	20,2	20,3	20,3
5,1	20,4	20,5	20,6	20,7	20,8	20,8	20,9	21,0	21,1	21,2
5,2	21,2	21,3	21,4	21,5	21,6	21,7	21,7	21,8	21,9	22,0
5,3	22,1	22,3	22,2	22,3	22,4	22,5	22,6	22,6	22,7	22,8
5,4	22,9	23,0	23,1	23,2	23,2	23,3	23,4	23,5	23,6	23,7

34 kop.

A-27204

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00429327 2