

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Kerttu Inger Kail
Hamiltoni printsiip
Matemaatika
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Jaan Lellep

TARTU 2024

HAMILTONI PRINTSIIP

Bakalaureusetöö

Kerttu Inger Kail

Lühikokkuvõte

Bakalaureusetöös tõestatakse Hamiltoni teoreem variatsioonarvutuse abil. Keskendutakse erinevat tüüpi seostele ja tuletatakse vastavad Lagrange'i võrrandid. Lisaks näidatakse, et mitteholonoomsete süsteemide puhul ei anna Lagrange'i kordajad ehk Lagrange'i I tüüpi võrrandid õigeid liikumisseaduseid.

CERCS teaduseriala: P190 Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika.

Märksõnad: Hamiltoni printsiip, Lagrange'i võrrandid, mitteholonoomsed seosed

HAMILTON'S PRINCIPLE

Bachelor thesis

Kerttu Inger Kail

Abstract

In this bachelor's thesis, we will prove Hamilton's theorem using the calculus of variations. We will focus on various types of constraints and rigorously derive the resulting Lagrange equations. Furthermore, we will demonstrate that for nonholonomic constraints, the Lagrange multipliers may not yield the correct equations of motion.

CERCS research specialisation: P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation,

statistical physics, thermodynamics .

Key Words: Hamilton's principle, Lagrange equations, non-holonomic constraints

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Punkti liikumine	5
2 Variatsioonarvutusest	14
3 Hamiltoni printsiip	19
3.1 Füüsikaliste suuruste variatsioonid	19
3.2 Hamiltoni printsiibi tõestus	26
4 Lagrange'i võrrandid	32
4.1 Euler-Lagrange'i võrrandid	32
4.2 Lagrange'i I ja II tüüpi võrrandid	36
Kokkuvõte	48
Kasutatud kirjandus	49
Lisa 1. Kaks lemmat skalaarkorrutisest	50

Sissejuhatus

Analüütiline mehaanika on teadusharu, mis käsitleb mehhaaniliste süsteemide liikumise seaduspärasusi matemaatiliste meetodite abil. Selle valdkonna ajalugu ulatub tagasi 17. ja 18. sajandisse, kui Isaac Newton ja Gottfried Wilhelm Leibniz panid aluse klassikalisele mehaanikale. 18. sajandil töötas Joseph-Louis Lagrange välja omanimelise mehaanika formalismi, mis lihtsustas paljude mehaaniliste probleemide lahendamist ning mis hiljem Hamiltoni mehaanika näol täiendust sai. Hamiltoni printsiip, sõnastatud William Rowan Hamiltoni poolt, ühendab neid kahte formulatsiooni.

Käesolev bakalaureusetöö koosneb neljast peatükist.

Esimeses peatükis defineeritakse analüütilises mehaanikas kasutatav virtuaalsiirde mõiste ning tuletatakse seeläbi dünaamika üldvõrrand.

Teises peatükis antakse teoreetiline ülevaade töös kasutatavast variatsioonarvutusest.

Kolmandas peatükis tõestatakse üksikasjalikult Hamiltoni printsiip ning laiendatakse seda üldistatud koordinaatide juhule.

Neljas peatükk räägib Lagrange'i võrranditest, selle erijuhtudest ning Lagrange'i kordajate kasutamisest.

Töö on valdavalt referatiivne. Autori panus on materjali ja tõestuste üksikasjalik kirjapanek, loogilises järjekorras esitamine ning erinevate näidete läbi töötamine. Teksti suurem eesmärk on olla sobiv materjal analüütilise mehaanikaga tutvuvale tudengile: pakkuda piisavalt matemaatilist rangust ning konteksti (variatsioonarvutusest ja Lagrange'i võrrandite tuletamise eeldustest), millega keerulisematesse tekstidesse süveneda.

1 Punkti liikumine

Peatüki ülesehitus põhineb allikal (Lepik ja Roots, 1971). Siin tutvustatakse üldisi mõisteid ning jõutakse virtuaalsirde definitsioonini, et selle abil tõestada dünaamika üldvõrrand, mis on Hamiltoni printsiibi tõestuse alus.

Alustame eeldusest, et punktmassi liikumisel on tema koordinaadid määratud pidevate ja üheste ajafunktsioonidega.

Definitsioon 1.1. Punkti $P \in \mathbb{R}^m$ liikumisseaduseks nimetatakse pidevaid ajafunktsioone $\phi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$, mis määravad üheselt punkti $P(x_1, \dots, x_m)$ koordinaadid hetkel t :

$$x_1 = \phi_1(t), \dots, x_m = \phi_m(t) \tag{1.1}$$

Klassikalises mehaanikas eeldatakse üldiselt, et punktide liikumisseadused on lõpmatult diferentseeruvad ehk siledad. Käesolevas töös piisab eeldusest, et funktsioonid (1.1) on lõigus $[t_0, t_1]$ kaks korda pidevalt diferentseeruvad, ehk $\phi_i \in C^2[t_0, t_1], i = 1, \dots, m$.

Definitsioon 1.2. Punkti $P \in \mathbb{R}^m$ liikumisseaduseks vektorkujul nimetatakse võrdust $\vec{r} = \vec{r}(t) := (\phi_1(t), \dots, \phi_m(t))$, kus funktsioonid ϕ_1, \dots, ϕ_m on määratud seostega (1.1).

Definitsioon 1.3. Punktmassi siirdeks $\Delta\vec{r}$ nimetatakse kohavektori muutu liikumisel punktist P punkti P'

$$\Delta\vec{r} := \overrightarrow{PP'}.$$

On ilmne, et olenevalt süsteemist võivad teatud liikumisseadused ning siirded olla võimatud – Kukkuv ese maandub või põrkab maapinnal; õhutakistus piirab liikumise kiirust.

Definitsioon 1.4. Seoseks ehk sidemeks nimetatakse selliseid kinemaatilisi tingimusi, mis kitsendavad vaadeldava objekti liikumist.

Seoseid on erinevaid:

1. Kui seost kirjeldav tingimus on esitatav võrdusena, nimetatakse seost kahepoolseks ehk hoidvaks. Kui seose tingimus on esitatav vaid võrratusena, nimetatakse seost ühepoolseks ehk mitteholdvaks.
2. Seosvõrrandeid, mis ajas ei muutu, nimetatakse statsionaarseteks. Vastasel juhul, aja esinemisel seosvõrrandis, nimetatakse seost mittestatsionaarseks.
3. Kui seosvõrrandis ei esine objekti koordinaatide tuletisi aja järgi, nimetatakse seost holonoomseks. Vastasel juhul on tegemist mitteholonoomse ehk mitteintegreeruva seosega.

Erinevad allikad (Lepik ja Roots, 1971; Goldstein, Poole ja Safko, 2002) defineerivad holonoomset seost ka järgmiselt: kui seosvõrrandis ei esine objekti koordinaatide tuletisi aja järgi $\mathbf{v}\mathbf{\dot{o}i}$ on võimalik seda viia sellisele kujule, kus tuletisi ei esine, siis nimetatakse seost holonoomseks ehk integreeruvaks.

Edaspidi uurime n punktmassiga süsteemis kohavektoritega $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ kahepoolseid seoseid. Sellisel juhul on holonoomsed seosed kujul

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 \quad (1.2)$$

ning mitteholonoomsed seosed kujul (tähistades edaspidi kiirust $\dot{r}_i := \vec{v}_i := \frac{d\vec{r}_i}{dt}$)

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_n, t) = 0. \quad (1.3)$$

Eeldame ka, et funktsioonid f on vähemalt kaks korda pidevalt diferentseeruvad.

Definitsioon 1.5. Punktmassi võimalikuks siirdeks hetkel t nimetatakse sellist lõpmata väikest siiret $d\vec{r} = (dx_1, \dots, dx_n) \in \mathbb{R}^m$, mis on kooskõlas kehtivate seosvõrranditega.

Järgnevad näited on koostatud raamatu (Gantmacher, 1975; lk 12-13) põhjal.

Olgu n punktiga süsteemil kohavektorid

$$\vec{r}_i = (x_1^i, \dots, x_m^i) \quad i = 1, \dots, n$$

ning vastavad võimalikud siirded

$$d\vec{r}_i = (dx_1^i, \dots, dx_m^i) \quad i = 1, \dots, n.$$

Näide 1.6. On näha, et kui punktide liikumist piirab holonoomne seos (1.2), siis sellest, et $df = 0$, saab kuju

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_1^i} dx_1^i + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m^i} dx_m^i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0.$$

Kui tegemist on statsionaarse seosega, on sama võrrand kujul

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_1^i} dx_1^i + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m^i} dx_m^i \right) = 0. \quad (1.4)$$

Näide 1.7. Kui seos on kiiruste suhtes lineaarne

$$g(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t) = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \dot{\vec{r}}_i + a_0 = 0, \quad (1.5)$$

kus kordajad \vec{a}_i on vektorfunktsioonid ajast ning koordinaatidest

$$\vec{a}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = (a_1^i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t), \dots, a_m^i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)),$$

siis korrutades (1.5) lõpmata väikse ajamuuduga dt , saame jällegi kitsenduse võimalikele siiretele $d\vec{r}_i$

$$\sum_{i=1}^n \vec{a}_i d\vec{r}_i + a_0 dt = 0$$

Statsionaarse seose puhul kehtib seega

$$\sum_{i=1}^n \vec{a}_i d\vec{r}_i = 0. \quad (1.6)$$

Avades skalaarkorrutise, kehtib koordinaatkujul

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_j^i dx_j^i \right) = 0.$$

Definitsioon 1.8. Punktmasside virtuaalsiireteks hetkel t nimetatakse selliseid lõpmata väikseid siirdeid $\delta\vec{r}_i = (\delta x_1, \dots, \delta x_m)$, $i = 1, \dots, n$, mis rahuldavad vastavate seoste olemasolul võrrandeid (1.4) ja (1.6).

Teisisõnu, virtuaalsiire on selline lõpmata väike siire, mis on kooskõlas kehtivate seosvõrranditega, kui lugeda need statsionaarseteks.

On lihtne näha, et statsionaarsete seoste korral tähistavad virtuaalsiire ja võimalik siire sama mõistet ning tegelik siire on üks virtuaalsetest. Mittestatsionaarsete seoste korral samas tegelik siire ei pruugi olla üks virtuaalsetest.

Definitsioon 1.9. Punktmasside süsteem on vaba, kui seosed puuduvad.

Kui vabas süsteemis on n punktmassi massidega m_1, \dots, m_n , kiirendustega $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ning vastavatele punktidele mõjuvate resultantjõududega $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$, siis Newtoni II seaduse põhjal kehtib

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Tuleb mainida, et iga punktmasside süsteemi võib lugeda vabaks, kui rakendada seostest vabastatavuse printsiipi: eemaldatakse seosed ja asendatakse seoste mõju punktmasside liikumisele vastavate reaktsioonjõududega \vec{R}_i , $i = 1, \dots, n$. Sellisel

juhul saame Newtoni II seaduse kujul

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = m_i \vec{a}_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Seosest vabastatavuse printsiip on aksiomaatiline, seda loetakse otseseks järelduseks Newtoni seadustest.

Järgmine näide, koos lahendusideega on pärit raamatust (Papastavridis, 2014, lk 398)

Näide 1.10. Liikugu punktmass, massiga m , jõu $\vec{F} = (F_1, \dots, F_m)$ mõjul koha-vektoriga $\vec{r}(t) = (x_1, \dots, x_m)$. Lisaks kehtigu kaks korda pidevalt diferentseeruv holonoomne seos kujul

$$f(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.7)$$

Avaldame seosele vastava reaktsioonjõu \vec{R} .

Seosest (1.7) järeldub $\frac{df}{dt} = 0$, mistõttu

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i = 0.$$

Kasutame võrrandit

$$m \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \ddot{\vec{r}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \vec{F} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \vec{R}, \quad (1.8)$$

mis on vektoriga $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$ läbi korrutatud Newtoni II seadus. Võtame selleks veel korra aja järgi tuletise:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^m \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{d\dot{x}_i}{dt} \right) = 0.$$

Diferentseerime vastavaid funktsioone, arvestades liitfunktsioonidega,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} \frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=1}^m \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \frac{dx_j}{dt} \right) \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} \ddot{x}_i \right) = 0.$$

Avame sulud

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} \dot{x}_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_i} \dot{x}_i + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \dot{x}_j \dot{x}_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \ddot{x}_i = 0.$$

Teist järku osatuletiste pidevusest $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t}$. Koondame vastavad liikmed ning avaldame nüüd kiirendust sisaldava summa

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \ddot{x}_i = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_i} \dot{x}_i - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \dot{x}_j \dot{x}_i.$$

Asendades selle tulemuse valemisse (1.8), saame

$$\begin{aligned} m \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_i} \dot{x}_i - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \dot{x}_j \dot{x}_i \right) \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \vec{F} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \vec{R}, \end{aligned}$$

kust

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \vec{R} = -m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_i} \dot{x}_i + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \dot{x}_j \dot{x}_i \right) \\ - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \vec{F}. \end{aligned}$$

On selge, et holonoomse seose $f = f(\vec{r}, t)$ puhul võime eeldada, et

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \neq \vec{0}.$$

Seega skalaarkorrutise omaduste põhjal (vt Lisa 1 Lemma 2) on reaktsioonjõu \vec{R}

avaldis kujul

$$\vec{R} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \lambda + \vec{T},$$

milles

$$\lambda = \frac{-m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_i} \dot{x}_i + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \dot{x}_j \dot{x}_i \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \vec{F}}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}.$$

ning \vec{T} on suvaline vektoriga $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$ risti olev vektor.

Teoreem 1.11. Iga punktmassi korral kehtib

$$\left(\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i \right) \delta \vec{r}_i = 0.$$

Tõestus. Iga punktmassi korral kehtib Newtoni II seaduse põhjal

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = m_i \vec{a}_i.$$

Anneme punktile virtuaalsiirde $\delta \vec{r}_i$ ning korrutame sellega läbi:

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = m_i \vec{a}_i \delta \vec{r}_i.$$

Järelikult

$$\left(\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i \right) \delta \vec{r}_i = 0.$$

□

Järeldus 1.11.1 (Dünaamika üldvõrrand). Punktmasside m_i , $i = 1, \dots, n$ ning neile vastavate resultantjõudude \vec{F}_i , kiirenduste \vec{a}_i ja virtuaalsiirete $\delta \vec{r}_i$, $i = 1, \dots, n$

korral

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.9)$$

Definitsioon 1.12. Öeldakse, et seos on ideaalne, kui selle seose reaktsioonjõud $\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_n$ on risti punktmasside süsteemi mistahes virtuaalsiirdega, seega igal hetkel t kehtib

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0.$$

Järeldus 1.12.1. *Ideaalsete seoste korral kehtib üldisemalt*

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.10)$$

Praktikas saab olenemata seostest kasutada dünaamika üldvõrrandit kujul (1.10), muutes jõudude kompositsiooni.

Näide 1.13. Kui seos $f(\vec{r}, t) = 0$ ei ole ideaalne, siis saab jaotada reaktsioonjõu \vec{R} kaheks:

$$\vec{R} = \vec{R}_\nabla + \vec{F}_H,$$

kus vastavalt

- \vec{R}_∇ on vektorfunktsiooniga $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$ paralleelne, ehk $\lambda = \lambda(t)$ korral $\vec{R}_\nabla = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$
- \vec{F}_H on vektorfunktsiooniga $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$ risti.

Nüüd defineerides uue jõu resultantvektori $\vec{F}_K = \vec{F}_i + \vec{F}_H$ ning arvestades ainult reaktsioonjõuga \vec{R}_∇ , saame

$$\vec{R}_\nabla \delta \vec{r} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \delta \vec{r} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \delta x_m \right).$$

Virtuaalsiirde definitsioonist, ehk seosest (1.4)

$$\vec{R}_\nabla \delta\vec{r}_i = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Niisiis saab lugeda seosed ideaalseteks ning kasutada dünaamika üldvõrrandit kujul

$$\left(\vec{F}_K - \vec{a}_i\right) \delta\vec{r}_i = 0.$$

Sellist lähenemist saab kasutada näiteks hõõrdumisega ülesannete korral, kus reaktsioonjõuks loetakse tasapinna normaalisuunalist toereaktsiooni ning jõudude resultantvektorisse liidetakse puutetasandiga paralleelne ning liikumisega vastassuunaline hõõrdejõud.

Näide 1.14. Näitest 1.10 seos $f = f(\vec{r}, t)$, vastava reaktsioonijõuga

$$\vec{R} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_m} \right) + \vec{T},$$

on ideaalne, kui $\vec{T} = 0$.

2 Variatsioonarvutusest

Peatükk on koostatud raamatute (Lellep, 2013) ja (Pii, 1966) põhjal.

Selles peatükis esitatakse mõned lihtsamad variatsioonarvutuse laused ja mõisted, mida läheb järgmise peatüki põhiteoreemi tõestuses ning selle järeldustes vaja.

Definitsioon 2.1. Olgu B ja Y Banachi ruumid ning $X \subseteq B$ lahtine hulk. Funktsiooni $J : X \rightarrow Y$ nõrgaks variatsiooniks ehk Gâteaux diferentsiaaliks punktis $\vec{r} \in X$ mööda teed $\vec{h} \in X$ nimetatakse piirväärtust kujul

$$\delta J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\vec{r} + \varepsilon \vec{h}(t)) - J(\vec{r})}{\varepsilon}. \quad (2.1)$$

Õeldakse, et funktsioon on nõrgalt diferentseeruv, kui selline piirväärtus eksisteerib.

Definitsioonist on näha, et funktsiooni J nõrk variatsioon sõltub nii punktist \vec{r} kui ka teest \vec{h} .

Lause 2.2. Kui funktsioon $J = J(\vec{r})$ on pidev ning nõrgalt diferentseeruv, siis kehtib seos

$$\delta J(\vec{r}, \vec{h}) = \left. \frac{\partial J(\vec{r} + \varepsilon \vec{h})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (2.2)$$

Tõestus. Definitsioonist (2.1)

$$\begin{aligned} \delta J &= \lim_{\Delta \varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\vec{r} + \Delta \varepsilon \vec{h}) - J(\vec{r})}{\Delta \varepsilon} \\ &= \lim_{\Delta \varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\vec{r} + (0 + \Delta \varepsilon) \vec{h}) - J(\vec{r} + 0 \vec{h})}{\Delta \varepsilon}. \end{aligned}$$

Arvestades funktsiooni J pidevusega ning asendades $0 = \varepsilon$, saame nõrga variatsiooni kujul

$$\delta J = \lim_{\Delta \varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\vec{r} + (\varepsilon + \Delta \varepsilon) \vec{h}) \Big|_{\varepsilon=0} - J(\vec{r} + \varepsilon \vec{h}) \Big|_{\varepsilon=0}}{\Delta \varepsilon}.$$

Võime leida piirväärtuse ning seejärel rakendada tingimust $\varepsilon = 0$:

$$\delta J = \left(\lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\vec{r} + (\varepsilon + \Delta\varepsilon)\vec{h}) - J(\vec{r} + \varepsilon\vec{h})}{\Delta\varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Järelikult eksisteerib osatuletis punktis $\vec{r} + \varepsilon\vec{h}$ muutuja ε järgi ning

$$\delta J = \frac{\partial J(\vec{r} + \varepsilon\vec{h})}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

□

Olgu $\vec{r} = \vec{r}(t)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv, seega $\vec{r} \in C_m^2[t_0, t_1]$. Käesolevas töös uuritakse järgnevate funktsioonide nõrkasid variatsioone:

- 1) vektorfunktsioonid $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r})$;
- 2) funktsionaalid ehk reaalsete väärtustega funktsioonid $J = J(\vec{r})$;
- 3) kolme muutuja funktsioonid $F = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$;
- 4) mitme muutuja funktsioonid ja funktsionaalid kujul

$$J = J(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t),$$

tähistatud lühemalt, kui

$$J = J(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t),$$

kus $\vec{x} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ ning $\vec{r}_i \in C_m^2[t_0, t_1]$, $i = 1, \dots, n$.

Kõigi funktsioonide korral oletame teatud määral siledust. Üldistavalt võime eeldada, et need on oma argumentide suhtes kaks korda pidevalt diferentseeruvad. Nõrga variatsiooni definitsioonist järelduvad järgnevad üldised omadused.

Lause 2.3 (Nõrga variatsiooni omadused). Olgu funktsioonid J_1, J_2 hulgal X pidevad ja nõrgalt diferentseeruvad ning vektorfunktsioonid $\vec{r}(t), \vec{h}(t) \in X$ pidevalt diferentseeruvad. Kehtivad järgmised omadused:

1. $\delta\vec{r} = \vec{h}$
2. $\delta\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d(\delta\vec{r})}{dt}$
3. $\delta(J_1 + J_2) = \delta J_1 + \delta J_2$

Lause 2.4. Pidevalt diferentseeruva funktsiooni $F = F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ korral, kus $\vec{x} = (x_1(t), \dots, x_N(t))$, leitakse variatsiooni järgnevalt:

$$\delta F = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right). \quad (2.3)$$

Tõestus. Olgu $\vec{h} = (h_1(t), \dots, h_N(t))$ suvaline pidevalt diferentseeruv vektorfunktsioon, kus funktsioonid h_1, \dots, h_N on sõltumatud. Leiame funktsiooni F variatsiooni valemiga (2.2):

$$\delta F(\vec{x}, \vec{h}) = \left. \frac{\partial F(\vec{x} + \varepsilon\vec{h}, \frac{d}{dt}(\vec{x} + \varepsilon\vec{h}), t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial F(\vec{x} + \varepsilon\vec{h}, \dot{\vec{x}} + \varepsilon\dot{\vec{h}}, t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Osatuletise ahelreeglit võrdub funktsiooni F variatsioon summaga

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F(\vec{x} + \varepsilon\vec{h}, \dot{\vec{x}} + \varepsilon\dot{\vec{h}}, t)}{\partial(x_i + \varepsilon h_i)} \frac{\partial(x_i + \varepsilon h_i)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F(\vec{x} + \varepsilon\vec{h}, \dot{\vec{x}} + \varepsilon\dot{\vec{h}}, t)}{\partial(\dot{x}_i + \varepsilon \dot{h}_i)} \frac{\partial(\dot{x}_i + \varepsilon \dot{h}_i)}{\partial \varepsilon} \right) \Bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Ilmselt

$$\frac{\partial(x_i + \varepsilon h_i)}{\partial \varepsilon} = h_i = \delta x_i \quad \text{ja} \quad \frac{\partial(\dot{x}_i + \varepsilon \dot{h}_i)}{\partial \varepsilon} = \dot{h}_i = \delta \dot{x}_i.$$

Eelpool leitud seoste põhjal seega

$$\delta F(\vec{x}, \vec{h}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}, \dot{\vec{x}} + \varepsilon \dot{\vec{h}}, t)}{\partial(x_i + \varepsilon h_i)} \delta x_i + \frac{\partial F(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}, \dot{\vec{x}} + \varepsilon \dot{\vec{h}}, t)}{\partial(\dot{x}_i + \varepsilon \dot{h}_i)} \delta \dot{x}_i \right) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Viies tingimuse $\varepsilon = 0$ summamärgi alla, saamegi

$$\delta F(\vec{x}, \vec{h}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right).$$

□

Definitsioon 2.5. Olgu $\vec{x} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$, kus $\vec{r}_i \in C_m^2[t_0, t_1]$, $i = 1, \dots, n$.

Lagrange'i funktsionaaliks nimetatakse funktsionaali kujul

$$J(\vec{x}) = \int_{t_0}^{t_1} F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt,$$

kus F on antud funktsioon, mis on oma argumentide suhtes kaks korda pidevalt diferentseeruv.

Olgu arv N selline, et $N = nm$. Tähistame (peamiselt lugevuse parandamiseks)

vektori \vec{r}_i koordinaadi kohal j ümber $x_j^i \rightarrow x_{(i-1)m+j}$, ehk

$$\vec{r}_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_m^1) \rightarrow \vec{r}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$\vec{r}_2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2) \rightarrow \vec{r}_2 = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{2m})$$

.....

$$\vec{r}_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n) \rightarrow \vec{r}_n = (x_{N-m+1}, x_{N-m+2}, \dots, x_N).$$

Teoreem 2.6. Lagrange'i funktsionaali nõrk variatsioon avaldub kujul

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) dt \quad (2.4)$$

Tõestus. Leiame nõrga variatsiooni mööda teed $\vec{h} = (h_1, \dots, h_N)$. Valemi (2.2) järgi

$$\delta J = \left. \frac{\partial J(\vec{x} + \varepsilon \vec{h})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} F\left(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}, \frac{d}{dt}(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}), t\right) dt \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Et $F = F(\vec{x})$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv oma argumentide suhtes ja seega on ka $J = J(\vec{x})$ pidev, siis võime minna osatuletisega integraali alla:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left. \frac{\partial F\left(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}, \frac{d}{dt}(\vec{x} + \varepsilon \vec{h}), t\right)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} dt.$$

Integraalilune avaldis on võrdne funktsiooni F variatsiooniga. Lähtudes valemist (2.3), saame

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) dt.$$

□

Lõpetuseks, kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 2.7 (Funktsionaali ekstreemumi tarvilik tingimus). *Kui nõrgalt diferentseeruv funktsionaal J saavutab punktis $\vec{x}_0 = (r_1^0, \dots, r_n^0)$ ekstreemumi, siis tema nõrk variatsioon selles punktis võrdub nulliga, st $\delta J(\vec{x}_0, \vec{h}) = 0$.*

3 Hamiltoni printsiip

Peatüki eesmärk on uurida punktmassi liikumisseadust $\vec{r} = \vec{r}(t)$, mis viib punktist $\vec{r}(t_0) = \overrightarrow{OP_0}$ punkti $\vec{r}(t_1) = \overrightarrow{OP_1}$. Selleks vaatleme samu algtingimusi täitvat lähedast trajektoori $\vec{r} + \varepsilon \delta \vec{r}$, kus variatsioon $\delta \vec{r}$ tähistab ühtlasi virtuaalsiiret, kui see on kooskõlas kehtivate seostega.

3.1 Füüsikaliste suuruste variatsioonid

Selles alapeatükis leiame mõningate hiljem kasutusele tulevate füüsikaliste suuruste variatsioonid ning kuju üldkoordinaatides. Põhjalikumalt on käsitletud kirjanduses (Goldstein, Poole ja Safko, 2002), esitame nendest vaid antud töö jaoks vajaliku.

Olgu süsteemis n punktmassi koordinaatidega $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_n = \vec{r}_n(t)$ ja massidega m_1, \dots, m_n .

Lause 3.1. *Kiiruse variatsiooni saab leida järgnevast seosest:*

$$\delta \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_i \quad (3.1)$$

Tõestus. Tõestuseks märgime, et $\vec{v} := \dot{\vec{r}}(t)$, seega lause (2.3) põhjal

$$\delta \vec{v}_i = \delta \dot{\vec{r}}_i = \delta \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_i.$$

□

Lause 3.2 (Kineetilise energia variatsioon). *Punktmasside süsteemi kineetilise energia variatsiooni saab leida järgnevast seosest:*

$$\delta T = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \dot{\vec{r}}_i$$

Tõestus. Iga $i = 1, \dots, n$ korral on punktmassi kineetiline energia hetkel t

$$T_i := \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2},$$

kus $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_m(t))$ on punktmassi m_i kiirus.

Punktmasside süsteemi kineetiline energia on summa

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2}.$$

Meenutades, et summa variatsioon on variatsioonide summa (lause 2.3), siis

$$\delta T = \sum_{i=1}^n \delta T_i.$$

Kuna $T_i = T_i(\vec{r}_i)$, siis lausest (2.3)

$$\delta T_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial T_i}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} \left(\frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} \right) \delta \dot{x}_j.$$

Tõstame konstandi $\frac{m_i}{2}$ ette ning võtame osatuletise eelmises võrduses. Siis saame

$$\delta T_i = \frac{m_i}{2} \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\vec{v}_i^2)}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j = m_i \vec{v}_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j.$$

Saadud summa kujutabki endast kiiruse variatsiooni $\delta \dot{\vec{r}}_i$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j &= (1, 0, \dots, 0) \delta \dot{x}_1 + (0, 1, \dots, 0) \delta \dot{x}_2 + \dots + (0, 0, \dots, 1) \delta \dot{x}_m \\ &= (\delta \dot{x}_1, \delta \dot{x}_2, \dots, \delta \dot{x}_m) = \delta \dot{\vec{r}}_i. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes,

$$\delta T = \sum_{i=1}^n \delta T_i = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i.$$

□

Süsteemi asendi kirjeldamiseks võib kasutada lisaks ristkoordinaatidele ka muid parameetreid, mis kirjeldavad süsteemi paiknemist. Olgu punktmasside süsteemi kõik võimalikud asendid kirjeldatud hulga Q punktidega $\vec{q} = (q_1, \dots, q_s)$. Koordinaate q_1, \dots, q_s nimetatakse üldistatud koordinaatideks. On loomulik eeldada, et kui eukleidilises ruumis kirjeldab süsteemi asendit vektor

$$\vec{x} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n),$$

(kus $\vec{r}_i = (x_1^i, \dots, x_m^i)$, $i = 1, \dots, n$ on n punkti asukoht ruumis \mathbb{R}^m), siis leidub üksühene sile funktsioon $\vec{\phi}$ nii, et

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{q}, t) \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Definitsioon 3.3. Süsteemi vabadusastmeks nimetatakse asendi üheseks määramiseks vajalike sõltumatute koordinaatide arvu.

Tasandil määravad n punktmassiga vaba süsteemi asendi $2n$ koordinaati, ruumis $3n$ koordinaati. Kui süsteem pole vaba, vaid on kitsendatud kahepoolsete holo- noomsete seostega

$$f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad (3.3)$$

siis võime üldistust kaotamata eeldada, et seosed on lineaarselt sõltumatud ning määravad järelikult $nm - l$ koordinaati. Ülejäänud parameetrid on teistest sõltuvad ning leitavad seostest (3.3). Üldiselt proovimegi q_1, \dots, q_s valida sellised, et s oleks süsteemi vabadusaste, see tähendab $s = nm - l$, siis on koordinaadid sõltumatud.

Leiame nüüd ruumis Q punktmasside süsteemi liikumisseadused $\vec{q} = \vec{q}(t)$. Eeldame, et sellised funktsioonid $\vec{q} = \vec{q}(t)$ leiduvad ning et need on kaks korda pidevalt diferentseeruvad.

Lause 3.4. Olgu punktmasside süsteemi liikumine ruumis \mathbb{R}^m antud funktsiooniga $\vec{x} = \vec{x}(t) = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ ning ruumis Q ehk üldistatud koordinaatides $\vec{q} = \vec{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_s(t))$. Kehtivad järgmised seosed:

$$1. \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$2. \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$3. \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j, \text{ kus } Q_j := \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Tõestus. 1. Olgu variatsioon $\delta \vec{r}_i$ suvaline ning $\delta q_1, \dots, \delta q_s$ vastavad üldistatud koordinaatide muudud, teisisõnu

$$\vec{r}_i + \varepsilon \delta \vec{r}_i = \vec{\phi}_i(q_1 + \varepsilon \delta q_1, \dots, q_s + \varepsilon \delta q_s, t).$$

Valemi (2.2) järgi iga $i = 1, \dots, n$ korral

$$\delta \vec{r}_i = \left. \frac{\partial \vec{\phi}_i(q_1 + \varepsilon \delta q_1, \dots, q_s + \varepsilon \delta q_s, t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Analoogselt valemi (2.3) tõestusele, kasutame osatuletise ahelreeglit:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vec{\phi}_i(q_1 + \varepsilon \delta q_1, \dots, q_s + \varepsilon \delta q_s, t)}{\partial \varepsilon} = \\ & = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{\phi}_i(q_1 + \varepsilon \delta q_1, \dots, q_s + \varepsilon \delta q_s, t)}{\partial (q_j + \varepsilon \delta q_j)} \frac{\partial (q_j + \varepsilon \delta q_j)}{\partial \varepsilon}. \end{aligned}$$

Pannes tähele, et $\frac{\partial(q_j + \varepsilon \delta q_j)}{\partial \varepsilon} = \delta q_j$, saame lühemalt

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{\phi}_i(q_1 + \varepsilon \delta q_1, \dots, q_s + \varepsilon \delta q_s, t)}{\partial (q_j + \varepsilon \delta q_j)} \delta q_j \Big|_{\varepsilon=0}$$

Niisiis, minnes tingimusega $\varepsilon = 0$ summa märgi alla, avaldub \vec{r}_i variatsioon kujul

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{\phi}_i(q_1, \dots, q_s, t)}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

2. Diferentseerides valemeid (3.2) aja järgi, saame iga $i = 1, \dots, n$ korral

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{\phi}_i(q_1, \dots, q_s, t)}{dt}.$$

Kuna $\vec{r}_i = \vec{\phi}_i(q_1(t), \dots, q_s(t), t)$ on muutuja t suhtes liitfunktsioon, siis

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \vec{\phi}_i(q_1, \dots, q_s, t)}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} \right) + \frac{\partial \vec{\phi}_i(q_1, \dots, q_s, t)}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

3. Esimese punkti kohaselt $\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$. Seda arvesse võttes, saame

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Vahetades summeerimise järjekorda, leiame, et

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j,$$

$$\text{kus } Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

□

Virtuaalsiretel $\delta \vec{r}_i$ tehtud tööd ehk summat $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i$ nimetatakse virtuaaltööks. Kirjanduses tähistatakse virtuaaltööd sümboliga δA . Käesolevas töös on sellist tähistust teadlikult vältitud, et eristada vajadusel virtuaaltööd töö variatsioonist.

Teoreem 3.5. (Goldstein, Poole ja Safko, 2002, lk 25) Kineetiline energia avaldub üldistatud koordinaatides kujul

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^s M_j \dot{q}_j + M_0,$$

kus funktsioonid M_0, M_j ja M_{jk} on määratavad seostest

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2; \\ M_j &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}; \\ M_{jk} &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Tõestus. Kiiruse kuju üldistatud koordinaatides on juba teada lausest (3.4), seega saame alustada järgmiselt:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2.$$

Siin sulgude sees olevat avaldist ruutu tõstes, saame kineetilise energia

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left(\sum_{j,k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \right).$$

Nüüd on jäänud veel mõningased teisendused summa märkidega. Esiteks, teeme

sulud lahti:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \sum_{j,k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^s \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2. \end{aligned}$$

Teiseks, muudame summa võtmise järjekorda ning toome võimalusel kordajad ette:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j,k=1}^s \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= \sum_{j,k=1}^s \dot{q}_j \dot{q}_k \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2. \end{aligned}$$

Tähistades M_0, M_j, M_{jk} nagu oli (3.4), teisendub avaldis kujule

$$T = \frac{1}{2} \sum M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum M_j \dot{q}_j + M_0.$$

□

Järeldus 3.5.1. Süsteemi kineetilise energia saab esitada kujul

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

kus T_2 on üldistatud kiiruste suhtes homogeenne ruutfunktsioon, T_1 üldistatud kiiruste suhtes homogeenne lineaarfunktsioon ning liige T_0 ei sõltu üldistatud kiirustest.

Järeldus 3.5.2. Statsionaarsete seoste korral $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$, $i = 1, \dots, n$ ning süsteemi kineetilise energia T saab arvutada seosest

$$T = \frac{1}{2} \sum M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (3.5)$$

$$\text{kus } M_{jk} = \sum m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}.$$

3.2 Hamiltoni printsiibi tõestus

Alapeatükis tõestatakse töö põhiteoreem Hamiltoni printsiip n punktmassiga süsteemi jaoks esmalt liikumisseadustel $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ ja üldistatud koordinaatides q_1, \dots, q_s ning seejärel tuuakse eraldi välja konservatiivsete jõudude juht.

*It just stood there and did nothing, of course,
A harmless and still wooden horse.
But the minimal action
Was just a distraction;
The plan involved no use of force.*

David Morin (Morin, 2008)

Uurime jällegi punktmasside süsteemi liikumist, kus $\vec{x} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ aja $t \in [t_0, t_1]$ jooksul, kus vektorfunktsioonid $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_n = \vec{r}_n(t)$ on punktide liikumisseadused. Kui liikumisseaduste lõpmata väiksed variatsioonid $\delta \vec{r}_1, \dots, \delta \vec{r}_n$ on sellised, mis on kooskõlas sellel hetkel kehtivate seostega, siis kehtivad võrrandid (1.4) ning variatsiooni võib mõista punktmassi virtuaalsiirdena.

Kehtigu iga sellise võimaliku liikumise korral $\vec{x}(t_0) = A$ ning $\vec{x}(t_1) = B$. Paneme kohe tähele, et kohavektorite variatsioon hetkel t_0 ja t_1 võrdub nulliga:

$$A = \vec{x}(t_0) = (\vec{r}_1(t_0), \dots, \vec{r}_n(t_0)),$$

samas

$$((\vec{r}_1 + \delta \vec{r}_1)(t_0), \dots, (\vec{r}_n + \delta \vec{r}_n)(t_0)) = \vec{x}(t_0) = A.$$

Sama kehtib ka ajahetkel t_1 , järelikult iga $i = 1, \dots, n$ korral

$$\delta \vec{r}_i(t_0) = \delta \vec{r}_i(t_1) = 0 \tag{3.6}$$

Järgnevas eeldame, et kui süsteemi liikumist piiravad mitteideaalsed reaktsioonjõud \vec{R}_i , $i = 1, \dots, n$, siis need sisalduvad jõu resultantvektoris \vec{F}_i , $i = 1, \dots, n$. Hamiltoni printsiibi tõestusidee on Teoreetilise mehaanika õpikust (Lepik ja Roots, 1971).

Teoreem 3.6 (Hamiltoni printsiip). *Kõikidest kinemaatiliselt võimalikest süsteemi liikumistest punktist $\vec{x}(t_0) = A$ punkti $\vec{x}(t_1) = B$ toimub tegelikult selline, mille korral on täidetud tingimus*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \delta T \right) dt = 0. \quad (3.7)$$

Tõestus. Olgu n punktiga süsteemi kohavektor $\vec{x}(t) = (\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_n(t))$ ning olgu $\delta \vec{x} = (\delta \vec{r}_1, \dots, \delta \vec{r}_n)$ võimalikud virtuaalsiirded.

Alustame dünaamika üldvõrrandist. Olgu \vec{F}_i ja \vec{a}_i vastavalt i -nda punkti jõuvektor ning kiirendus, järelikult kehtib võrdus

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \delta \vec{r}_i = 0, \quad t \in [t_0, t_1]$$

Paneme tähele, et

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) = \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i + \dot{\vec{r}}_i \dot{\delta \vec{r}}_i,$$

ehk

$$\vec{a}_i \delta \vec{r}_i = \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) - \dot{\vec{r}}_i \dot{\delta \vec{r}}_i.$$

Eelnevat dünaamika üldvõrrandisse asendades, saame

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) - \dot{\vec{r}}_i \dot{\delta \vec{r}}_i \right) = 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Sulge avades tekivad kolm summat, millest viimane on lause (3.2) põhjal võrdne

kineetilise energia variatsiooniga δT :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \dot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) + \delta T \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

Kuna eelnev kehtib iga $t \in [t_0, t_1]$ korral, siis võime integreerida rajades t_0, t_1 , mistõttu

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) + \delta T \right) dt \quad (3.8)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i \right) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt. \quad (3.9)$$

On jäänud veel näidata, et keskmine nendest integraalidest võrdub nulliga. Selleks tõstame diferentseerimisoperaatori summa ette:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i \right) dt.$$

Integraali all on diferentsiaal, järelikult

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} d \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Kasutades märkust (3.6), saame $\delta \vec{r}_i(t_0) = \delta \vec{r}_i(t_1) = 0$ ning

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

Seega oleme (3.8) põhjal saanud

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \delta T \right) dt = 0$$

□

Järeldus 3.6.1 (Hamiltoni printsiip üldistatud koordinaatides). *Üldistatud koordinaatides kehtib*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j + \delta T \right) dt = 0.$$

Definitsioon 3.7. Jõudu \vec{F} nimetatakse konservatiivseks, kui leidub selline funktsioon $V = V(\vec{r})$, et

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial V}{\partial x_m} \right). \quad (3.10)$$

Suurust $V = V(\vec{r}(t))$ nimetatakse punktmassi potentsiaalseks energiaks.

Tegelikkuses võib potentsiaalne energia sõltuda ka punktmassi kiirusest või ajast, näiteks elektromagnetväljas Lorentzi jõu mõjul liikuvale laetud osakesel $V = V(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$.

Paneme tähele, et konservatiivse jõu poolt tehtud töö sõltub ainult alg- ja lõpppunktist. Tõepoolest, liikudes konservatiivse jõu mõjul punktist $\vec{r}(t_0) = \overrightarrow{OP_0}$ punkti $\vec{r}(t_1) = \overrightarrow{OP_1}$ mööda trajektoori kaart $\widehat{P_0P_1}$, saab töö leida järgnevalt:

$$A = \int_{\widehat{P_0P_1}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\widehat{P_0P_1}} \left(-\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial V}{\partial x_m} \right) d\vec{r}$$

Osutub, et integraali all on diferentsiaal $-dV$. Tõepoolest, kuna joonintegraali väärtus ei sõltu integreerimisteest, siis on integraali all täisdiferentsiaal, st

$$A = \int_{V_0}^{V_1} -dV = -V_1 + V_0 = V(P_0) - V(P_1).$$

Seega sõltub tehtud töö $A = A(\vec{r})$ ainult alg- ja lõppasendist.

Arvestades variatsiooniga $\delta\vec{r}$, leiame nüüd töö variatsiooni.

Konservatiivsete jõudude korral

$$\delta A = \left. \frac{\partial A(\vec{r} + \varepsilon\vec{h})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial (-V(\vec{r} + \varepsilon\vec{h}) + V(\vec{r}))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = - \left. \frac{\partial V(\vec{r} + \varepsilon\vec{h})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0},$$

mis ühelt poolt on negatiivne potentsiaali variatsioon $-\delta V$.

Teisalt, valemist (2.2)

$$\delta A = -\delta V = \sum_{i=1}^m -\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i = -\vec{F} \delta \vec{r},$$

ehk konservatiivsete jõudude korral on töö variatsioon võrdne virtuaaltööga.

Kehtigu jätkuvalt (3.10) ning olgu potentsiaal suvaline ajast sõltuv funktsioon $V = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$. Saame üldisematel tingimustel n masspunkti korral koordinaatides q_1, \dots, q_s

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial V}{\partial x_1^i}, \dots, -\frac{\partial V}{\partial x_m^i} \right) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

millest

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial V}{\partial x_1^i} \frac{\partial x_1^i}{\partial q_j} - \dots - \frac{\partial V}{\partial x_m^i} \frac{\partial x_m^i}{\partial q_j} \right) \\ &= -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Järelikult ka $\sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = -\delta V$.

Definitsioon 3.8. Lagranžiaaniks nimetatakse funktsiooni $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$

$$L := T - V,$$

kus $T = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ on süsteemi kineetiline energia ja $V = V(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ potentsiaalne energia.

Eelnevast järeldub Hamiltoni printsiibi erijuht konservatiivsete jõudude korral.

Järeldus 3.8.1. *Holoonoomse punktmasside süsteemi ja konservatiivsete jõudude korral*

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0.$$

Tõestus.

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j + \delta T \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} (-\delta V + \delta T) dt.$$

Variatsiooni omadustest ning süsteemi holoonoomsusest

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \delta (T - V) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt. \quad (3.11)$$

□

Seda järeldust holoonoomse ja konservatiivse süsteemi kohta nimetatakse samuti Hamiltoni printsiibiks. Kusjuures just süsteemi holoonoomsus lubab võrduste ja da (3.11), sest integraali all varieeritakse kohavektoreid tegelikust liikumisest virtuaalnihke abil, aga paremal pool on varieerimisel kõik geomeetriliselt võimalikud liikumised. (Ray, 1966)

Kehtib ka üldisem järeldus, kus potentsiaal $V = V(\vec{q}, t)$ ning $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$. Sellisel juhul jääb (3.11) kehtima, kuigi süsteem pole enam rangelt võttes konservatiivne.

4 Lagrange'i võrrandid

Peatüki põhieesmärk on siduda seosvõrrandid Hamiltoni printsiibiga, et selle läbi Lagrange'i võrrandid ning nende järelused tuletada.

4.1 Euler-Lagrange'i võrrandid

Esitame alapeatükis kaks tähtsat tulemust, millel edaspidine töö põhineb. Need on variatsioonarvutuse põhilemma ning Euler-Lagrange'i võrrandid. Mõlemad tõesused on mugavdatud kirjandusest (Piir, 1966, Lellep, 2013).

Teoreem 4.1 (Variatsioonarvutuse põhilemma). *Olgu funktsioon $\vec{\varphi} = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ pidev lõigul $[t_0, t_1]$. Kui funktsionaal*

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{\varphi}(t) \vec{h}(t) dt = 0$$

iga funktsiooni $\vec{h} = (h_1(t), \dots, h_m(t))$ korral, mis on pidevalt diferentseeruv ja täidab algtingimusi $\vec{h}(t_0) = \vec{h}(t_1) = 0$, siis

$$\vec{\varphi}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leidub punkt $T \in (t_0, t_1)$ nii, et $\vec{\varphi} \neq 0$. Konkreetseuse mõttes oletame, et $\varphi_k(T) > 0$.

Funktsiooni $\varphi_k(t)$ pidevuse tõttu leidub punkti T selline ε -ümbrus, et kui $t \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$, siis $\varphi(t) > 0$.

Olgu

$$h_1(t) = \dots = h_{k-1}(t) = h_{k+1}(t) = \dots = h_m(t) = 0$$

ning valime $h_k(t)$ järgmiselt:

$$h_k(t) = \begin{cases} (t - (T - \varepsilon))^2((T + \varepsilon) - t)^2, & \text{kui } t \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon) \\ 0, & \text{kui } t \notin (T - \varepsilon, T + \varepsilon) \end{cases}$$

Funktsioon $h_k(t)$ on pidev, sest

$$\lim_{t \rightarrow T - \varepsilon} h_k(t) = \lim_{t \rightarrow T + \varepsilon} h_k(t) = 0.$$

Kontrollime põgusalt ka tuletise pidevust. Kui $t \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$, siis

$$\begin{aligned} h'_k(t) &= [(t - (T - \varepsilon))^2((T + \varepsilon) - t)^2]' \\ &= 2(t - (T - \varepsilon))((T + \varepsilon) - t)^2 + (t - (T - \varepsilon))^2 2((T + \varepsilon) - t)(-1) \\ &= 2(t - (T - \varepsilon))((T + \varepsilon) - t)(T + \varepsilon - t - t + T - \varepsilon). \end{aligned}$$

Seegi on pidev, sest

$$\lim_{t \rightarrow T - \varepsilon} h'_k(t) = \lim_{t \rightarrow T + \varepsilon} h'_k(t) = 0.$$

Samas täidab selliselt defineeritud $\vec{h}(t)$ algtingimusi $\vec{h}(t_0) = \vec{h}(t_1) = 0$. Järelikult, oleme valinud sobiva funktsiooni $\vec{h}(t)$ ning

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{\varphi}(t) \vec{h}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_k(t) h_k(t) dt.$$

Võtame eraldi integraalid rajades $(t_0, T - \varepsilon)$, $(T - \varepsilon, T + \varepsilon)$ ning $(T + \varepsilon, t_1)$.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{T - \varepsilon} \varphi_k(t) h_k(t) dt + \int_{T - \varepsilon}^{T + \varepsilon} \varphi_k(t) h_k(t) dt + \int_{T + \varepsilon}^{t_1} \varphi_k(t) h_k(t) dt \\ &= 0 + \int_{T - \varepsilon}^{T + \varepsilon} \varphi_k(t) h_k(t) dt + 0 = \int_{T - \varepsilon}^{T + \varepsilon} \varphi_k(t) (t - (T - \varepsilon))^2 ((T + \varepsilon) - t)^2 dt. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes, et integraalialused funktsioonid on vahemikus $(T - \varepsilon, T + \varepsilon)$ positiivsed, siis on eelnev positiivne. Oleme saanud vastuolu $0 > 0$.

Järelikult

$$\vec{\varphi}(t) = 0, \quad \forall t \in (t_0, t_1).$$

Samas ei saa lõigu otspunktides olla ainukesed nullist erinevad väärtused – funktsiooni $\vec{\varphi}(t)$ pidevusest järeldub

$$\vec{\varphi}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \vec{\varphi}(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t_1).$$

Kokkuvõttes

$$\vec{\varphi}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

□

Teoreem 4.2 (Euler-Lagrange'i võrrandid). *Kui Lagrange'i funktsionaali variatsioon $\delta J = 0$, siis kehtivad võrrandid*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \in [t_0, t_1]$$

Tõestus. Olgu

$$0 = \delta J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) dt, \quad (4.1)$$

Uurime eraldi integraali

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i dt = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i dt,$$

kasutades selleks ositi integreerimise valemit

$$\int_{t_0}^{t_1} u dv = uv \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} v du,$$

kus

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}; & dv &= \delta \dot{x}_i dt = \frac{d}{dt} (\delta x_i) dt; \\ du &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) dt; & v &= \delta x_i. \end{aligned}$$

Eelnev võtab kuju

$$0 = \sum_{i=1}^m \left[\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta x_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) dt \right].$$

Variatsioon on rajades $\delta x_i(t_0) = \delta x_i(t_1) = 0$, järelikult viimane võrdus saab kuju

$$0 = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \delta x_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) dt.$$

Asendades selle algsesse (4.1), osutub et

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) \delta x_i dt.$$

Et δx_i on sõltumatud ning $\delta x_i(t_0) = \delta x_i(t_1)$, siis järelduse (4.1) järgi, saame iga $i = 1, \dots, n$ korral

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

□

Siit järeldub esimene süsteemi dünaamikat kirjeldav Lagrange'i võrrand.

Järeldus 4.2.1. Potentsiaalset $V = V(\vec{q}, t)$ saadud jõudude ja sõltumatute koordi-

naatide q_1, \dots, q_s korral kehtib iga $j = 1, \dots, s$ korral holonoomses süsteemis

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

4.2 Lagrange'i I ja II tüüpi võrrandid

Alapeatüki tulemused on pärit raamatust (Greenwood, 1997). Kõik tõestused järelduvad otse Hamiltoni printsiibist ning eelmise alapeatüki tulemustest.

Teoreem 4.3 (Lagrange'i II tüüpi võrrandid). *Holonoomsete ja statsionaarsete seostega süsteemis, sõltumatute q_1, \dots, q_s korral iga $q_i, i = 1, \dots, s$ korral*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, s.$$

Tõestus. Üldistatud koordinaatides oli Hamiltoni printsiip kujul

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j + \delta T \right) dt.$$

Et statsionaarsete seoste korral (3.5) põhjal $T = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$, siis

$$\delta T = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right).$$

Saame

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \right) dt,$$

millest tõstes summamärgi integraali ette

$$0 = \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^{t_1} \left(Q_j \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt.$$

Sarnaselt teoreemiga (4.2), uurime esmalt viimast liidetavat ning integreerime selle

ositi

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j) dt.$$

Siin

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, & dv &= \frac{d}{dt} (\delta q_j) dt, \\ du &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) dt, & v &= \delta q_j. \end{aligned}$$

Seega

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt = \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta q_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) dt.$$

Et $\delta \vec{r}(t_0) = \delta \vec{r}(t_1) = 0$, siis ka $\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0$ $j = 1, \dots, s$.

Järelikult saame integraali kujul

$$0 = \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^{t_1} \left(Q_j \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j - \delta q_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) dt,$$

millest järeldub, et

$$0 = \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^{t_1} \left(Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) \delta q_j dt.$$

Märgime, et δq_j , $j = 1, \dots, s$ on sõltumatud, ehk süsteem on seostest vabastatud ning seoste reaktsioonjõud on arvatud Q_j , $j = 1, \dots, s$ sisse.

Järelikult saame kasutada teoreemi (4.1), et saada võrrandeid

$$Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad j = 1, \dots, s,$$

kust saame soovitu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, s.$$

□

Tõestuskäigust on näha, miks Lagrange'i võrranditest otsest järeldust mittehologoomsele süsteemile teha ei saa. Kui seos on kujul

$$\sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j + a_0 = 0,$$

siis on δq_j , $j = 1, \dots, s$ sõltuvad:

$$\sum_{j=1}^s a_j \delta q_j = 0.$$

Olgu süsteem holonoomne aga $Q_j \neq -\frac{\partial V}{\partial q_j}$, vaid olgu

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q'_j, \quad (4.2)$$

kus Q'_j on mittekonservatiivsed jõud.

Järeldus 4.3.1. Kui $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q'_j$, siis holonoomses süsteemis sõltumatute q_j korral

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j \quad j = 1, \dots, s.$$

Järeldus 4.3.2. Kui Q_i on kujul

$$Q_i = \frac{dt}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

siis

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad j = 1, \dots, s.$$

Teoreem 4.4. *Holonoomse seose $f(\vec{q}, t) = 0$ korral, võttes*

$$\Lambda(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda, \dot{\lambda}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \lambda f(\vec{q}, t), \quad (4.3)$$

kehtib

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Lambda dt = 0. \quad (4.4)$$

Tõestus. Tõestuse idee on sarnane (Piir, 1966, lk 46-48. Lellep, 2013, lk 35-38).

Teame, et $\sum_{j=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_j} \delta q_j = 0$. Suvalise $\lambda = \lambda(t)$ korral

$$0 = \lambda \sum_{j=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} \delta q_j, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Järelikult

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^s \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$$

Samas kehtib Hamiltoni printsiip kujul

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^s \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt = 0.$$

Leiame viimase kahe integraali vahe

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^s \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^s \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} \delta q_j dt \\ &= \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt. \end{aligned}$$

Hetkel ei ole δq_j sõltumatud, mille tõttu siit Lagrange'i võrrandeid järeldada ei saa. Tõestuse lõpule viimiseks oletame üldistust kaotamata, et $\frac{\partial f}{\partial q_1} \neq 0$. Fikseerime nüüd sellise $\lambda(t)$, et iga $t \in [t_0, t_1]$ korral

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0. \quad (4.5)$$

Sellisel juhul saame

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) \delta q_1 dt + \sum_{j=2}^s \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt, \end{aligned}$$

kus esimene nendest integraalidest on võrdne nulliga.

Kokkuvõttes

$$0 = \sum_{j=2}^s \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt \quad (4.6)$$

Siin on q_j , $j = 2, \dots, s$ sõltumatud, järelikult

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad j = 2, \dots, s.$$

Samas varem (4.5) kehtis sama $j = 1$ korral.

Saime

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad j = 1, \dots, s.$$

Tõstes osatuletised q_j järgi ühte ning arvestades, et $\frac{\partial(\lambda f)}{\partial \dot{q}_j} = 0$, tuleneb

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial q_j} = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad j = 1, \dots, s.$$

Järelikult kehtib suvaliste δq_j korral

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial q_j} \delta q_j dt. \end{aligned}$$

Esimest integraali ositi integreerides, saame

$$0 = \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial q_j} \delta q_j dt$$

ehk

$$0 = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial q_j} \delta q_j \right) dt. \quad (4.7)$$

Nüüd uurides tundmatuid $\lambda(t)$, $\dot{\lambda}(t)$, näeme, et

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{\lambda}} \right) - \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \lambda} = f = 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Neid omakorda integreerides, saame

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{\lambda}} \right) \delta \lambda dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \lambda} \delta \lambda dt = 0.$$

Integreerime esimest integraali jälle ositi

$$\begin{aligned} dv &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{\lambda}} \right) dt; & u &= \delta \lambda; \\ v &= \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{\lambda}}; & du &= \delta \dot{\lambda}; \end{aligned}$$

Seega

$$\frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{\lambda}} \delta \lambda \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{\lambda}} \delta \dot{\lambda} dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \lambda} \delta \lambda dt = 0.$$

Siin näeme $\frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{\lambda}} = 0$, mille tõttu

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{\lambda}} \delta \dot{\lambda} + \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \lambda} \delta \lambda \right) dt = 0$$

Tähistades $\Lambda(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda, \dot{\lambda}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \lambda f(\vec{q}, t)$ ning lisades eelmise integraali võrrandile (4.7), saamegi iga $j = 1, \dots, s$ korral

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{\lambda}} \delta \dot{\lambda} + \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial(L + \lambda f)}{\partial q_j} \delta q_j \right) dt = 0.$$

Teisisõnu

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Lambda dt = 0. \quad (4.8)$$

□

Teoreem 4.5. Üldisel juhul, see tähendab teatud mitteholonoomsete seoste korral,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Lambda dt \neq 0. \quad (4.9)$$

Tõestus. Vaatame võrduse vastunäitena seost kujul

$$f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j + a_0, \quad (4.10)$$

kus $a_j = a_j(\vec{q}, t)$, $j = 0, \dots, s$. Esimeses peatükis näitasime (1.6), et sellise seose korral täidab virtuaalsiire $\delta\vec{q} = (q_1, \dots, q_s)$ tingimust $\sum_{j=1}^s a_j \delta q_j = 0$. Et see kehtib iga $t \in [t_0, t_1]$ korral, siis ka suvalise pideva kordajaga $\lambda(t)$

$$\lambda \sum_{j=1}^s a_j \delta q_j = \sum_{j=1}^s \lambda a_j \delta q_j = 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Eeldades, et λ on pidev lõigus $[t_0, t_1]$, võime integreerida

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^s \lambda a_j \delta q_j dt = 0.$$

Samas, kehtib Hamiltoni printsiip kujul

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^s \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt = 0,$$

kus δq_j on sõltuvad. Jätkame sarnaselt eelmisele teoreemile, lahutades omavahel

viimased integraalid

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^s \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^s \lambda a_j \delta q_j dt \\ &= \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda a_j \right) \delta q_j dt. \end{aligned}$$

Üldistust kaotamata võime eeldada, et kordaja $a_1(\vec{q}, t)$ on nullist erinev. Tõepoolest, kui $a_1(\vec{q}, t) = \dots = a_s(\vec{q}, t) = 0$, siis on tegu holonoomse seosega. Sellisel juhul leiame sellise $\lambda(t)$, et

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} - \lambda a_1 = 0. \quad (4.11)$$

Lagranžiaan on kaks korda pidevalt diferentseeruv, seega kehtib eeldus, et $\lambda(t)$ on pidev.

Saame

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda a_j \right) \delta q_j dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} - \lambda a_1 \right) \delta q_1 dt + \sum_{j=2}^s \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda a_j \right) \delta q_j dt, \end{aligned}$$

kus esimene nendest integraalidest on võrdne nulliga ning järelikult

$$\sum_{j=2}^s \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda a_j \right) \delta q_j dt = 0.$$

Niisiis δq_j , $j = 2, \dots, s$ sõltumatusesest ning võrrandist (4.11), saame Lagrange'i võrrandid

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \lambda a_j, \quad j = 1, \dots, s.$$

Edasi näitame, et kui $\Lambda(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \mu, \dot{\mu}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \mu f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$, siis

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \neq -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\mu f)}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial(\mu f)}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s,$$

ehk tõstes ühele poole

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L + \mu f)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(L + \mu f)}{\partial q_j} \neq 0, \quad j = 1, \dots, s,$$

mis tõestab soovitu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_j} \neq 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

Leiame selleks järgmised tuletised arvestades, et $\mu = \mu(t)$ ning $f = \sum_{i=1}^s a_i \dot{q}_i + a_0$

- $\frac{\partial(\mu f)}{\partial q_i} = \mu \frac{\partial f}{\partial q_j} = \mu \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^s a_i \dot{q}_i + a_0 \right) = \mu \left(\sum_{i=1}^s \frac{\partial a_i}{\partial q_j} \dot{q}_i + \frac{\partial a_0}{\partial q_j} \right);$
- $\frac{\partial(\mu f)}{\partial \dot{q}_j} = \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} = \mu \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^s a_i \dot{q}_i + a_0 \right) = \mu a_j,$

seega

- $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\mu f)}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} (\mu a_j) = \frac{d\mu}{dt} a_j + \mu \frac{da_j}{dt} = \dot{\mu} a_j + \mu \left(\sum_{i=1}^s \frac{\partial a_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial a_j}{\partial t} \right).$

Järelikult

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\mu f)}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial(\mu f)}{\partial q_j} = -\dot{\mu} a_j - \mu \left(\sum_{i=1}^s \frac{\partial a_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial a_j}{\partial t} \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^s \frac{\partial a_i}{\partial q_j} \dot{q}_i + \frac{\partial a_0}{\partial q_j} \right).$$

Teisendame, rühmitades liikmed ümber

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\mu f)}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial(\mu f)}{\partial q_j} = -\dot{\mu} a_j + \mu \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \mu \left(\frac{\partial a_0}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial t} \right)$$

On ilmne, et üldiselt

$$\lambda a_j \neq -\dot{\mu} a_j + \mu \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \mu \left(\frac{\partial a_0}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial t} \right),$$

järelikult ka

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_j} \neq 0 \quad j = 1, \dots, s$$

ning

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Lambda dt \neq 0.$$

□

Juhul, kui kehtib

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial a_j}{\partial q_i}, & i, j &= 1, \dots, s \\ \frac{\partial a_0}{\partial q_j} &= \frac{\partial a_j}{\partial t}, & j &= 1, \dots, s, \end{aligned}$$

siis võime võtta $\lambda = -\dot{\mu}$ ning ülejäänud summad on võrdsed nulliga. Sellisel juhul

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\mu G)}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial(\mu G)}{\partial q_i} = -\dot{\mu} a_i = \lambda a_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Veel enam, kasutades teadmisi mitme muutuja analüüsist (Pöldvere, 2021), paneme tähele, et kui vastavad osatuletised on võrdsed, siis leidub selline funktsioon $f = f(q_1, \dots, q_s, t)$, mille korral

$$df = a_1 dq_1 + \dots + a_s dq_s + a_0 dt,$$

ehk

$$G(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^s a_j d\dot{q}_j + a_0 = 0.$$

Kokkuvõttes järeldame, et sellisel juhul on seos G integreeritav ning esitatav kujul $f = \text{const}$. Mitteholonoomseid seoseid, mida on võimalik üle viia holonoomsele kujule nimetatakse semiholonoomseteks.

Näide 4.6. Näitame, et seos

$$G(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) = (t\dot{q}_2 + q_2) q_1 \cos q_2 t + \dot{q}_1 \sin q_2 t + 4 = 0$$

on semiholonoomne. Selleks viime esmalt seose kujule (4.10) ning avaldame vastavalt \dot{q}_1 ja \dot{q}_2 kordajad $a_1(q_1, q_2, t)$ ja $a_2(q_1, q_2, t)$ ning vabaliikme $a_0(q_1, q_2, t)$.

$$f = \dot{q}_1 \sin(q_2 t) + \dot{q}_2 t q_1 \cos(q_2 t) + q_2 q_1 \cos(q_2 t) + 4 = 0,$$

järelikult

$$a_1 = \sin(q_2 t); \quad a_2 = t q_1 \cos(q_2 t); \quad a_0 = q_2 q_1 \cos(q_2 t) + 4.$$

Arvutame vajalikud osatuletised

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial q_2} &= t \cos(q_2 t); & \frac{\partial a_1}{\partial t} &= q_2 \cos(q_2 t); & \frac{\partial a_2}{\partial t} &= q_1 (\cos(q_2 t) - t q_2 \sin(q_2 t)); \\ \frac{\partial a_2}{\partial q_1} &= t \cos(q_2 t); & \frac{\partial a_0}{\partial q_1} &= q_2 \cos(q_2 t); & \frac{\partial a_0}{\partial q_2} &= q_1 (\cos(q_2 t) - t q_2 \sin(q_2 t)). \end{aligned}$$

Näeme, et vajalikud osatuletised on võrdsed. Seos semiholonoomne, sest leidub selline funktsioon $G(q_1, q_2, t)$, et $dG = f$.

Antud juhul

$$G = q_1 \sin(q_2 t) + 4t = \text{const}.$$

Kokkuvõte

Töös anti teoreetiline ülevaade punktmasside süsteemi seosvõrranditega piiratud liikumisest. Variatsioonarvutuse abil tõestati põhitulemusena Hamiltoni printsiip ning kirjutati detailselt lahti eri tüüpi Lagrange'i võrrandite kehtimise tingimused. Lisaks näidati, et mitteholonoomsete süsteemide puhul ei anna Lagrange'i kordajad ehk Lagrange'i I tüüpi võrrandid õigeid liikumisseaduseid.

Käesolev töö käsitles lõpliku arvu punktmassidega süsteeme, seega saab tööd edasi arendada, üldistades tulemusi pidevale süsteemile. Lisaks on võimalik tuua sisse Rayleigh dissipatsiooni funktsioon, mis lubaks uurida süsteeme, milles on hõõrdjõud võrdeline kiirusega.

Kasutatud kirjandus

- Gantmacher, F. (1975). *Lectures in Analytical Mechanics*. 2. väljaanne. Moskva: Mir Publishers.
- Goldstein, H., C.P. Poole ja J.L. Safko (2002). *Classical Mechanics*. 3. väljaanne. Addison-Wesley.
- Greenwood, D. T. (1997). *Classical Dynamics*. 2. väljaanne. Mineola, New York: Dover Publications.
- Lellep, J. (2013). *Süsteemide optimeerimine*. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- Lepik, Ü. ja L. Roots (1971). *Teoreetiline mehaanika*. Tallinn: Kirjastus Valgus.
- Morin, David (2008). “The Lagrangian method”. Teoses: *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 218–280.
- Papastavridis, J. G. (2014). *Analytical Mechanics. A Comprehensive Treatise on the Dynamics of Constrained Systems*. World Scientific.
- Piir, J. (1966). *Matemaatilise füüsika meetodid I. Variatsioonarvutus*. Tartu: Tartu Riiklik Ülikool.
- Pöldvere, M. (2021). *Mitme muutuja matemaatiline analüüs. Loengukonspekt*. Tartu Ülikool. URL: https://courses.ms.ut.ee/LTMS.00.023/2023_fall/uploads/Main/MMFMA--2021sygis-21-12-30.pdf.
- Ray, J. R. (1966). “Erratum: Nonholonomic Constraints”. *American Journal of Physics* 34.12, lk. 1202. URL: <https://www.deepdyve.com/lp/american-association-of-physics-teachers/erratum-nonholonomic-constraints-am-j-phys-34-406-1966-ekgJcxFgHm>.

Lisa 1. Kaks lemmat skalaarkorrutistest

Lemma 1. *Järgmised võrdused on samaväärsed:*

$$(i) \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle;$$

$$(ii) \vec{b} = \vec{c} + \vec{t}, \text{ kus } \vec{t} \text{ on vektoriga } \vec{c} \text{ risti.}$$

Tõestus.

$(i \Rightarrow ii)$ Kehtigu (i) ning olgu $\vec{t} := \vec{a} - \vec{b}$. Teisendame seda kasutades skalaarkorrutise omadusi.

Kui

$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle,$$

siis

$$0 = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle -\vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{t}, \vec{c} \rangle$$

Järelikult on vektorid \vec{t} ja \vec{c} risti ning

$$\vec{a} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{b} = \vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b} + \vec{t}.$$

$(ii \Rightarrow i)$ Kehtigu (ii) . Järelikult

$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} + \vec{t}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{t}, \vec{c} \rangle,$$

kus vektorid \vec{t} ja \vec{c} on risti. Seega $\langle \vec{t}, \vec{c} \rangle = 0$, millest $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

□

Lemma 2. *Eeldusel $\vec{a} \neq 0$ on järgmised võrdused on samaväärsed:*

$$(i) \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = A;$$

$$(ii) \vec{b} = \vec{a} \frac{A}{|\vec{a}|^2} + \vec{t}, \text{ kus } \vec{t} \text{ on vektoriga } \vec{a} \text{ risti.}$$

Tõestus.

$(i \Rightarrow ii)$ Kehtigu (i) . Teisendame seda kasutades skalaarkorrutise omadusi:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = A = A \cdot 1 = A \frac{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}{|\vec{a}|^2} = \frac{A}{|\vec{a}|^2} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \frac{A}{|\vec{a}|^2} \rangle.$$

Lemmast (1) $\vec{b} = \vec{a} \frac{A}{|\vec{a}|^2} + \vec{t}$, kus \vec{t} on vektoriga \vec{a} risti.

$(ii \Rightarrow i)$ Kehtigu (ii) . Järelikult

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \frac{A}{|\vec{a}|^2} + \vec{t} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \frac{A}{|\vec{a}|^2} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{t} \rangle = \frac{A}{|\vec{a}|^2} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{t} \rangle,$$

kus vektorid \vec{a} ja \vec{t} on risti, ehk $\langle \vec{a}, \vec{t} \rangle = 0$, millest

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{A}{|\vec{a}|^2} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{t} \rangle = \frac{A}{|\vec{a}|^2} |\vec{a}|^2 + 0 = A.$$

□

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Kerttu Inger Kail

1. Annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose Hamiltoni printsiip, mille juhendaja on Jaan Lellep, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Kerttu Inger Kail

15.05.2024