TPI

H. Krusberg

Matemaatiline planeerimine

Tallinn

1967

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

Arvutusmatemaatika kateeder

H. Krusberg

MATEMAATILINE PLANEERIMINE

Ülesannete kogu

Tallinn

1967

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра вычислительной математики

Х. Крусберг

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
ПЛАНИРОВАНИЮ

на эстонском языке

Vastutav toimetaja L.Võhandu

Trükkimisele antud 8.VII 67. Paber 60x84/16
Trükipg. 4,5. Tingpg. 4,19 Tiraaž 800
MB-07311.TPI rotaprint, 1967. Tell.328
Hind 13 kop.

E e s s õ n a

Käesolevat ülesannete kogu saavad kasutada TPI insenermajanduse ja majanduse erialade üliõpilased, kes õpivad distsipliine "Matemaatiline planeerimine (programmeerimine)", "Planeerimise matemaatilised meetodid ja uus arvutustehnika", "Matemaatika kasutamine majanduslikes planeerimisülesannetes" ning "Lineaaralgebra ja lineaarplaneerimine (-programmeerimine)". Nende ainete omandamiseks on vajalik mahuka harjutusmaterjali läbitöötamine. Seni ei olnud selleks võimalust sobiva ülesannete kogu puudumise tõttu. Enam-vähem kättesaadav brošüür [22] on liiga kesise sisuga ning raamatu [10] lõpus toodud ülesanded ühekülgsed - ainult põllumajandusega seotud.

Käesolev kogu ei asenda õpikut. Näidete juures toodud lahendusreeglid baseeruvad loengutes esitatud skeemidel. Õpikud annavad siintoodutega võrreldes väliselt küllaltki erinevaid lahendusvõtteid. Kui õpikust on omandatud teistsugune lahendusmeetod, pole mõtet ümber õppida. Kasu asemel võib see esialgu isegi kahju tuua.

Majandusteadlasel on vaja üleskerkivaid probleeme väljendada matemaatiliselt, s.t. koostada mudeleid. Lahendamine, s.t. mudeli optimiseerimine paberi ja pliiatsi abil, on mõeldav ainult mudeli väiksemate mõõtmete korral. Seetõttu ei ole oluline kõigi tekstülesannete lõpuni lahendamine, küll aga vastavate mudelite koostamine.

Ülesanded on pärit mitmesugustest allikatest. Mitmeidki algtekste on metoodilistel kaalutlustel muudetud. Kirjanduse loetelus on toodud üksnes tekstis viidatud raamatud ja artiklid.

Avaldan tänu retsensentidele mat.-füüs.kandidaatidele M.Tammele ja L.Võhandule terve rea asjalike märkuste eest.

Autor.

1. LINEAARSED VÕRRANDISÜSTEEMID

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks on mitmesuguseid meetodeid. Vaatleme siis neist ühte, nn. tundmatute täieliku elimineerimise võtet (vt. [11] I osa lk.15; [4] lk. 80; [16] lk.47). Selleks:

1) ühes võrrandis (juhtvõrrandis) valitakse üks tundmatu (juhttundmatu) ja muudetakse selle kordaja üheks;

2) teistes võrrandites muudetakse juhttundmatu kordajad juhtvõrrandi abil nullideks;

3) võtet korratakse seni, kuni kõik võrrandid on olnud juhtvõrrandiks.

N ä i d e 1-1. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 13x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Olgu juhtvõrrandiks esimene võrrand ja juhttundmatuks x_2 (kordaja on juba 1). Seega juhtvõrrandit ei ole vaja teisendada. Liites ta teisele ning (-1)-kordselt kolmandale, saame süsteemi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 5x_1 \qquad - 4x_3 + 16x_4 = 11 \\ -x_1 \qquad - x_3 - 4x_4 = -1. \end{cases}$$

Seejärel valime juhtvõrrandiks kolmanda ja juhttundmatuks x_1 (süsteemis on ta ümbritsetud rõngaga).

$$\begin{cases} \qquad x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 2 \\ \qquad\quad - 9x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 \qquad + x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

Järgmisel sammul jõuame süsteemini

$$\begin{cases} x_2 + \frac{33}{4}x_3 = -\frac{11}{2} \\ \frac{9}{4}x_3 + x_4 = -\frac{3}{2} \\ x_1 - 8x_3 = 7. \end{cases}$$

Nüüd on kõik võrrandid olnud juhtvõrrandiks, kuid tundmatu x_3 on jäänud kõikidesse võrranditesse. Tähistame selle tähega C (nn. parameeter) ja viime vastavad liikmed võrdusmärgist paremale poole. Siis saame kolmandast, esimesest ja teisest võrrandist süsteemi üldlahendi:

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 8C \\ x_2 = -\frac{11}{2} - \frac{33}{4}C \\ x_3 = C \\ x_4 = -\frac{3}{2} - \frac{9}{4}C. \end{cases}$$

Edasi on vaja leitud avaldiste asendamisega kontrollida lähtesüsteemi, kas avaldised on tõepoolest lahendiks või on juhtunud arvutusvigu (jätame selle töö lugejaile). Konkreetsete parameetri väärtuste puhul (näiteks C = 0; -4; jne.) võime leida süsteemi erilahendid.

Lahendada tundmatute täieliku elimineerimise võtte abil:

1-1. $$\begin{cases} 7x + 8y - 5z = 13 \\ 2x - 4y + 9z = 10 \\ 3x + 16y - 23z = -7. \end{cases}$$

1-2. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

1-3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

1-4. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 7. \end{cases}$$

1-5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

1-6. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 9x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 13 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

1-7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

2. DETERMINANDID JA MAATRIKSID

Planeerimisülesannete hulka kuuluvate tööstusharude vaheliste seoste uurimine nõuab determinantide ja maatriksite tundmist. Nende definitsioone, omadusi ja arvutamiseeskirju võib leida raamatuist [4] lk.8-12, 19, 32, 86; [9] lk.57; [10] lk. 60-62; [16] lk.28-33.

Arvutada determinantide väärtused:

2-1. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$

2-2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$

2-3. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$

2-4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$

2-5. $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$.

Antud on maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Järgmistes ülesannetes teha nõutavad tehted (kui on võimalik):

2-6. $A + B$.
2-7. $B - A$.
2-8. $A + C$.
2-9. $A B$.
2-10. $B A$.
2-11. $A C$.
2-12. $A D$.
2-13. CD.
2-14. $D C$.
2-15. A^{-1}.
2-16. B^{-1}.
2-17. D^{-1}.
2-18. $(A B)^{-1}$.
2-19. $(C D)^{-1}$.

3. TÖÖSTUSHARUDEVAHELISED SEOSED

Antud küsimusega võib tutvuda artikli [1] ja raamatute [3], [11] II osa lk. 94 ja [16] lk.223 abil.

N ä i d e 3-1. Järgmises <u>otsekulude risttabelis</u> on tööstuse, põllumajanduse ja muude majandusharude seosed. Leida nende rahvamajandusharude <u>üldtoodang</u>, kui <u>lõpptoodang</u> (<u>turutoodang</u>) peab igalühel olema 1 ühik.

	T	P	M
T	0,3	0,09	0,08
P	0,08	0,24	0
M	0,07	0,06	0

Siin Leontjevi maatriks

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,09 & -0,08 \\ -0,08 & 0,76 & 0 \\ -0,07 & -0,06 & 1 \end{pmatrix}$$

ja täiskulude maatriks

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,461 & 0,182 & 0,117 \\ 0,153 & 1,334 & 0,012 \\ 0,111 & 0,092 & 1,009 \end{pmatrix}.$$

Selle abil leiame üldtoodangu

$$X = (E - A)^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1,760 \\ 1,499 \\ 1,212 \end{pmatrix}$$

ehk tööstuse üldtoodang peab olema 1,760 ühikut, põllumajandusel 1,499 ühikut ja muudel majandusharudel 1,212 ühikut.

Otsekulude risttabeli abil leiame toodangute jaotuse:

	Üld-toodang	Sisemine tarbimine T	P	M	Lõpp-toodang
T	1,760	0,528	0,135	0,097	1
P	1,499	0,140	0,359	0	1
M	1,212	0,123	0,089	0	1

Ü l e s a n d e d

3-1. Otsekulude risttabelis on autotehase, elektrijaama ja metsamajandi toodangute sisemine tarbimine. Plaani järgi peab autotehase lõpptoodang olema 50 000 ühikut, elektrijaamal 5 000 000 kWh elektrienergiat ja metsamajandil 25 000 m^3 puitu.

	A	E	M
A	0	0	0,01
E	500	0,05	5
M	1	0	0,01

Leida nende majandusharude aastatoodang ja selle jaotus.

3-2. Kombinaadis toodetakse kivisütt, terast ja masinaid. Otsekulude risttabel on siin antud. Lõpptoodang olgu 3 ühikut kivisütt, 2 ühikut terast ja 3 ühikut masinaid. Kui suured

peavad olema tööstusharude üld-
toodangud?

	K	T	M
K	0,1	1,5	0,2
T	0,1	0	0,5
M	0,1	0,3	0,1

4. LINEAARSED VÕRRATUSSÜSTEEMID

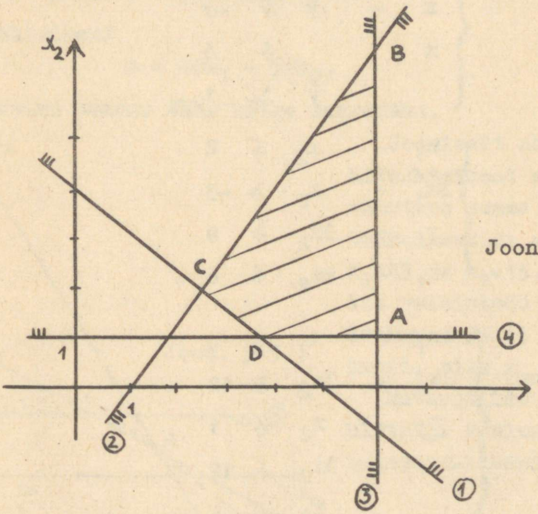
Lineaarsete võrratussüsteemide lahendamist on vaadeldud [11] I osa lk. 23, [16] lk.41, [20] lk.121 ja mujal.

N ä i d e 4-1. Leida süsteemi

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ 4x_1 - 3x_2 \geq 4 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

kõik lahendid.

Kirjutame välja igale võrratusele vastava võrrandi ning joonestame temaga määratud sirge.



Joon. 4-1.

Joonisel 4-1 on sirged nummerdatud järjekorras. Võrratustega määratud pooltasapindade ühiseks osaks on hulknurk ABCD, selle punktide koordinaadid rahuldavad süsteemi. Tippude koordinaadid on A (6; 1), B (6; 6,7), C (2,5; 2) ja D (3,75; 1), millede lineaarne kombinatsioon annab üldlahendi:

$$x_1 = 6\gamma_1 + 6\gamma_2 + 2{,}5\gamma_3 + 3{,}75\gamma_4$$
$$x_2 = \gamma_1 + 6{,}7\gamma_2 + 2\gamma_3 + \gamma_4 ,$$

kus $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$ ja $\sum_{i=1}^{4} \gamma_i = 1.$

Võrratussüsteemi lahendi niisugusel üldisel kujul saab välja kirjutada ainult siis, kui süsteemi lahendid moodustavad kinnise hulknurga (polüeedri).

Järgmised võrratussüsteemid lahendada geomeetriliselt. Vajaduse korral täpsustada leitud hulknurga tippude koordinaate arvutamise teel. Kui võimalik, anda süsteemi üldlahend analüütiliselt.

4-1.
$$\begin{cases} 4x + 9y \geqslant 18 \\ x - y \geqslant -3 \\ x \leqslant 6 \\ y \geqslant 1 . \end{cases}$$

4-2.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ 3x_1 + x_2 \geqslant -3 \\ x_1 + 3x_2 \geqslant 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 6 . \end{cases}$$

4-3.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \geqslant 12 \\ x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ -8x_1 - 3x_2 \leqslant 12 \\ x_2 \leqslant 4 . \end{cases}$$

5. LINEAARPLANEERIMISE ÜLESANNETE GRAAFILINE LAHENDAMINE

Seda küsimust on puudutatud [11] II osa lk.12, [3], [10] lk.28, [20] lk.151, [27].

N ä i d e 5-1. Tootmisjääkidest valmistatakse kantselei- ja raamatukappe. Ühe kantseleikapi valmistamiseks kulub 6 tundi ja läheb vaja 0,25 m^3 puitu; ühe raamatukapi jaoks on vaja 10 tundi ning 0,15 m^3 puitu, lisaks veel 1,5 m^2 klaasi. Eelseisval perioodil võib arvestada 672 töötunniga, 24 m^3 puiduga ja 42 m^2 klaasiga. Ühe kapi müügihind on vastavalt 40 ja 50 rbl. Koostada tootmise plaan, mille puhul rahalise plaani täitmine oleks antud tingimustes kõige suurem.

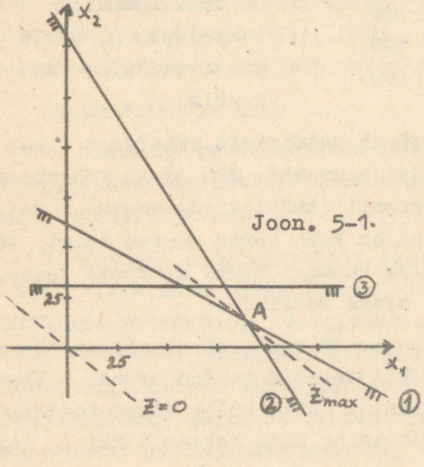
Kui valmistatavate kappide arvud tähistada vastavalt x_1- ja x_2-ga, siis koostame kitsenduste süsteemi

$$\begin{cases} 6x_1 + 10x_2 \leqslant 672 \\ 0,25x_1 + 0,15x_2 \leqslant 24 \\ 1,5x_2 \leqslant 42. \end{cases}$$

ja sihifunktsiooni

$$z = 40x_1 + 50x_2,$$

mille väärtuse tahame teha kõige suuremaks.



Joon. 5-1.

Jooniselt näeme, et sihifunktsiooni suurima väärtuse saame punkti A koordinaatide abil. Siin $x_1=87$ ja $x_2=15$. Seega, kui valmistada 87 kantseleikappi ja 15 raamatukappi, siis $z_{max} = 4230$ rbl.

Materjalide kulu ja ülejäägi küsimused jätame lugejate lahendada.

Lahendada graafiliselt järgmised lineaarplaneerimise ülesanded:

Leida süsteemi

5-1. $$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \end{cases}$$

mittenegatiivne lahend, mille puhul sihifunktsiooni $z = x_1 + 6x_2$ väärtus on suurim.

Lahendada sama probleem

5-2. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geqslant 18 \\ x_2 \leqslant 4 \\ 5x_1 - 3x_2 \leqslant 54 \end{cases}$$

ja $z = 3x_1 + x_2$ vähima väärtuse korral.

Järgmiste ülesannete puhul koostada nende matemaatiline mudel ja seejärel lahendada ülesanne graafiliselt.

5-3. Tsehhis valmistatakse kahte toodet, kasutades järgemööda kolme liiki tööpinke. Tabelis on toodete töötlemiseks vajalikud ajad ning tööpinkide ajafondid.

Tööpingid	Toode A	Toode B	Tööpinkide ajafond
I	2	2	120
II	1	2	100
III	4	-	160

Toote A müümisel saadakse 20 rbl. ja toote B puhul 30 rbl. kasumit. Leida tootmisplaan, mille puhul ettevõtte kasum on suurim.

5-4. Montaažitsehh jõuab valmistada vahetuses kas 100 esimest või 300 teist tüüpi aparaati. TKO jõuab vahetuses läbi vaadata ainult 150 aparaati (tüübist sõltumata). Esimest tüüpi aparaatide müügihind on kaks korda suurem teist tüüpi aparaatide omast. Kui palju kummagi tüübi aparaate toota, et rahalise plaani täitmine oleks suurim?

5-5. Põllu 1 ha külvatav väetis peab sisaldama elemente A, B, C ja D mitte vähem kui tabelis toodud arvud. Väetist saab valmistada kahe lähteaine abil, mille elementidesisaldus on ka tabelis. Esimese lähteaine ühik maksab 5 rbl., teisel 6 rbl.

Kuidas koostada nõuetele vastavat, kuid seejuures võimalikult odavat segu?

Element	Lähteained 1 sisaldavad	Lähteained 2 sisaldavad	1 ha vajadus
A	2	1	6
B	2	4	12
C	-	4	4
D	6	-	9

5-6. Kümnetonnine terasesulam peab sisaldama elementi A mitte vähem kui 18 ühikut, elementi B mitte vähem kui 8 ühikut, kuid elemendi C hulk ei tohi ületada 56 ühikut. Segu koostamiseks on kasutada kahte terasemarki, mille 1 tonni koostis on tabelis. Esimese margi tonn maksab 50 rbl., teisel - 130 rbl. Kuidas saada võimalikult odavat segu?

Element	Teras 1	Teras 2
A	3	2
B	2	-
C	7	3

6. SIMPLEKSMEETOD

Lineaarplaneerimise ülesannete lahendamiseks arvutamise teel kasutatakse kõige rohkem nn. simpleksmeetodit. Järgnev näide on lahendatud skeemi järgi, mis esineb [2] ja [3]. Teistes raamatutes ([10], [11], [12], [16], [20], [24]) toodud arvutuseeskirjad on sellest veidi erinevad.

Lahendamise etapid:

1. Ülesande matemaatilise mudeli koostamine, s.t. ülesande tingimustele vastava kitsenduste süsteemi ja sihifunktsiooni väljakirjutamine.

2. Esimese simplekstabeli koostamine. Selleks teisendada kõik võrratused võrranditeks, vajaduse korral lisada kunstlikke tundmatuid. Miinimumülesande puhul üle minna maksimumülesandele. Sihifunktsioonis viia kõik tundmatuid sisaldavad liikmed vasakule poole võrdusmärki. Kui sihifunktsioonis leidub ühikmaatriksisse kuuluvaid tundmatuid, vabaneda nendest kitsenduste süsteemi võrrandite abil. Kõik kordajad kanda algtabelisse.

3. Simplekskriteeriumi rakendamine: kui algtabeli esimeses reas ei leidu negatiivseid arve, ongi z suurim väärtus leitud ja ülesanne lahendatud; kui aga negatiivseid arve esineb, on võimalik z väärtust suurendada.

4. Viimasel juhul valida juhtveerg esimese rea negatiivse elemendi järgi (üldiselt vabalt), sellega kindlustame z väärtuse suurenemise.

5. Moodustame vabaliikmete ja juhtveeru positiivsete kordajate suhted (Θ_j), nendest vähima järgi määrame juhtrea. Sellega kindlustame vabaliikmete mittenegatiivsuse.

6. Arvutame uue tabeli tundmatute täieliku elimineerimise meetodil ning siirdume tagasi 3. juurde.

N ä i d e 6-1. Lahendada simpleksmeetodil:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 50 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 80 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 30, \end{cases}$$

$z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$ max.

Teisendame:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 50 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 80 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 30 \end{cases}$$

$$z - 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0$$

Arvutus on esitatud tabelis 6-1.

Vastus on tabeli all.

Lahendada simpleksmeetodil:

6-1. Leida süsteemi

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 \leqslant 10 \\ 4x_1 - 2x_3 \leqslant 12 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 7 \end{cases}$$

mittenegatiivne lahend, mille puhul $z = 3x_1 - 2x_2 - x_3$ omandab suurima väärtuse.

Tabel 6-1

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	S	θ_j
z	0	-6	-3	-4				-13	
$\leftarrow x_4$	50	2	-1	2	1			54	25
x_5	80	3	2	-1		1		85	26,..
x_6	30	1	-1	1			1	32	30
z	150		-6	2	3			149	
$\rightarrow x_1$	25	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$			27	
$\leftarrow x_5$	5		$\frac{7}{2}$	-4	$-\frac{3}{2}$	1		4	
x_6	5		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		1	5	
z	$\frac{1110}{7}$			$-\frac{34}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{12}{7}$		$\frac{1091}{7}$	
$\leftarrow x_1$	$\frac{180}{7}$	1		$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$		$\frac{193}{7}$	
$\rightarrow x_2$	$\frac{10}{7}$		1	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$		$\frac{8}{7}$	
x_6	$\frac{40}{7}$			$-\frac{4}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{39}{7}$	
z	450	$\frac{34}{3}$			$\frac{11}{3}$	$\frac{10}{3}$		$\frac{1405}{3}$	
$\rightarrow x_3$	60	$\frac{7}{3}$		1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{193}{3}$	
x_2	70	$\frac{8}{3}$	1		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{224}{3}$	
x_6	40	$\frac{4}{3}$			$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{127}{3}$	

Vastus: $z_{max} = 450$,
kui $x_1 = 0$, $x_2 = 70$, $x_3 = 60$, $x_4 = 0$, $x_5=0$, $x_6 = 40$.

6-2. Sama

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \leqslant 4 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leqslant 3 \end{cases}$$

ja $z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$ max puhul.

6-3. Sama

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6 \end{cases}$$

ja $z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$ max puhul.

6-4. Sama

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 12 \\ x_1 + x_4 \leqslant 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 \leqslant 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 \leqslant 24 \end{cases}$$

ja $z = 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 - 3x_5$ min puhul.

6-5. Lahendada näites 6-1 toodud ülesanne "parema" reegli abil juhtveeru valikuks (vt. [11] II osa, lk.44).

6-6. Lahendada

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_4 \leqslant 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 6 , \end{cases}$$

leides $z = 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4$ suurima väärtuse "hariliku" reegli ja "parema" reegli abil.

6-7. Leida eelmises ülesandes optimaalsele eelnev plaan (vt. [11] II osa, lk.46). Koostada optimaalse ja temale eelneva plaani kõik vahepealsed plaanid.

6-8. Lahendada graafiliselt

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 18 \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \end{cases}$$

leides $z = 2x_1 + 5x_2$ max väärtuse. Koostada duaalne ülesanne ja lahendada see graafiliselt (vt. [3], [11], II osa, lk.50; [16] lk. 103; [20] lk.209).

6-9. Koostada ülesandele nr. 6-1 vastav duaalne ülesanne. Selle vastus leida primaarse ülesande simplekstabeli optimaalsest osast.

6-10. Sama ülesande 6-4 puhul.

N ä i d e 6-2. Lahendada lineaarplaneerimise ülesanne:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 90 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 50 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 80, \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 \quad \min.$$

Teisendame võrratuse võrrandiks:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \phantom{{}+x_5} = 90 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \phantom{{}+x_5} = 50 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 80. \end{cases}$$

Esimesele ja teisele võrrandile peame lisama kunstlikud tundmatud ([2], [3], [10] lk. 90; [11] II osa, lk.55; [16] lk. 89):

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_6 = 90 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_7 = 50 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 80. \end{cases}$$

Teisendame sihifunktsiooni maksimumülesandeks

$$-z = z^{*} = -x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 - Mx_6 - Mx_7 \quad \max.$$

Siin oleme lisanud liikmed kunstlike tundmatutega x_6 ja x_7, et neist kitsenduste süsteemis vabaneda. Kordaja $M > 0$ on väga suur arv. Viime kõik liikmed vasakule poole võrdusmärki:

$$z^{*} + x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 + Mx_6 + Mx_7 = 0.$$

Korrutame esimese ja teise võrrandi (-M)-ga ja liidame sihifunktsioonile:

$$z^{*} + (-3M+1)x_1 + (3M+1)x_2 + (-5M+3)x_3 + (-2M-4)x_4 = -140\ M.$$

Arvutus on esitatud tabelis 6-2.

Vastus: $z^{*}_{max} = -60$ ehk $z_{min} = 60$,

kui $x_1 = 30,\ x_2 = 0,\ x_3 = 10,\ x_4 = 0,\ x_5 = 60.$

6-11. Lahendada:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6, \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \quad \max.$$

6-12. Lahendada:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 20 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 60 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 70, \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \quad \min.$$

Tabel 6-2

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	S	θ_j
z^*	$-140M$	$-3M+1$	$3M+1$	$-5M+3$	$-2M-4$				$-147M+1$	
x_6	90	2	-2	3	3		1		97	30
$\leftarrow x_7$	50	1	-1	2	-1			1	52	25
x_5	80	1	2	-1	1	1			84	
z^*	$-15M-75$	$-\frac{1}{2}M-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}M+\frac{5}{2}$		$-\frac{9}{2}M-\frac{5}{2}$			$\frac{5}{2}M-\frac{3}{2}$	$-17M-77$	
$\leftarrow x_6$	15	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{9}{2}$		1	$-\frac{3}{2}$	19	$\frac{10}{3}$
$\rightarrow x_3$	25	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$	26	
x_5	105	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$	110	210
z^*	$-\frac{200}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{20}{9}$				$M+\frac{5}{9}$	$M-\frac{7}{3}$	$2M-\frac{598}{9}$	
$\leftrightarrows x_4$	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$		1		$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{38}{9}$	30
x_3	$\frac{80}{3}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{5}{9}$	1			$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{253}{9}$	48
x_5	$\frac{310}{3}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{14}{9}$			1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{971}{9}$	$\frac{930}{13}$
z^*	-60		2		2		$M+1$	$M-3$	$2M-58$	
$\rightarrow x_1$	30	1	-1		9		2	-3	38	
x_3	10			1	-5		-1	2	7	
x_5	60		3		-13	1	-3	5	53	

6-13. Lahendada:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 30 \\ -3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leqslant 20 \\ 2x_1 - 3x_3 \geqslant 20 , \end{cases}$$

$$z = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \quad \min.$$

6-14. Lahendada:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 3x_3 \leqslant 8 \\ 4x_1 - 2x_2 \leqslant 5 , \end{cases}$$

$$z = 4x_1 + x_2 + x_3 \quad \max.$$

Seejärel a) leida optimaalsele eelnev plaan; b) koostada duaalne ülesanne ja lahendada see.

6-15. Lahendada:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 \leqslant 6 \\ x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 \leqslant 3 , \end{cases}$$

$z = 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \quad \max$ (vt. [3], [11] II osa, lk.57; [16] lk.141).

6-16. Lahendada a) graafiliselt; b) simpleksmeetodil:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 5 \\ -x_1 + x_2 \geqslant 1 \end{cases}$$

$z = x_1 + 2x_2 \quad \max$ (vt. [3], [11] II osa, lk.64; [20] lk.188).

6-17. Lahendada:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 , \end{cases}$$

$z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \quad \max$ (vt. [3], [11] II osa lk.64; [20] lk.188).

6-18. Lahendada a) graafiliselt ja b) simpleksmeetodil:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geqslant 8 \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 6, \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \ \max$$ (vt. [3], [11] II osa, lk.77; [20] lk.188).

6-19. Lahendada:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \end{cases}$$

leides $z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4$ suurima väärtuse.

Leida ülesande üldvastus (vt. [11] II osa, lk.68).

Järgnevate ülesannete puhul koostada kõigepealt nende matemaatiline mudel, mis lahendada kas graafiliselt (kui võimalik) või simpleksmeetodil. Optimaalse plaani valgusel hinnata vahendite kulu ja ülejääke, leida tootmise kitsaskohad. Kasutada ka duaalse ülesande abi.

6-20. Nelja liiki toodangu valmistamiseks läheb vaja kolme limiteeritud toorainet, mida on eraldatud vastavalt 3000, 2400 ja 1800 kg. Tabelis on antud tooraine kulunormid.

Tooraine	Tooted 1	2	3	4
1	0,2	0,25	0,19	0,26
2	0,4	0,5	0,3	0,6
3	0,1	0,13	0,12	0,14

On loota, et toodete realiseerimisel saadakse kasumit vastavalt 60, 40, 70 ja 90 kop. tooteühiku kohta. Kui palju valmistada toodangut, et saadav kasum oleks suurim?

6-21. Kolme liiki detaile töödeldakse järgemööda kolmel erineval tööpingil. Tabelis on antud aeg, mis kulub detaili töötlemiseks igal tööpingil ja tööpinkide kasutuses olev ajafond. Teist detaili vajatakse 5 tükki. Kasumit on

Tööpingid	Detail A	B	C	Ajafond
I	2	4	3	47
II	4	2	3	60
III	3	0	1	30

loota vastavalt 6, 4 ja 3 rbl. Kui palju valmistada mingit detaili antud tingimustes, et üldine kasum oleks suurim?

6-22. Tsehhis valmistatakse seina-, laua- ja laelampe hinnaga vastavalt 2,70, 4,50 ja 8 rbl.tükk. Hulgimüügi kuuplaan on 2880 rbl. eest toodangut. Värvilist metalli kulub lambile vastavalt 50 g, 320 g ja 250 g, selle kuufond on 80 kg. Aega on kasutada 4320 töötundi, sealjuures on vaja aega vastavalt lambi liigile 4, 6,75 ja 16 tundi. Kui palju mingit tüüpi lampe valmistada, et nende kogutoodang oleks arvuliselt suurim?

6-23. Valmistatakse kamajahu ja kahte liiki kohvi, milleks on kuu lõpuni kasutada veel 6 t rukist ja 1 t otra ning küllaldaselt muid koostisosi. Kamajahu peab sisaldama 25% rukist ja 15% otra; kohv A 40% rukist ja 10% otra ning kohv B 65% rukist. Toodangu tonni hinnad on vastavalt 400,600 ja 126,67 rubla, kuuplaanist on veel täitmata 3600 rubla. Kui palju valmistada mainitud tooteid, et rahuldada eespool toodud nõudeid ning sealjuures anda võimalikult palju toodangut (tonnides)?

6-24. Põrandakatteplaate A ja B tuleb valmistada vastavalt 10000 ja 12000 tükki. Uusi defitsiitseid materjale kasutades on nende omahind väiksem ning nende omadused on paremad (kulumiskindlamad). Defitsiitseid materjale on eraldatud 1000 kg ja 2000 kg. Kulunormid kilogrammides tükile on tabelis. Uutest materjalidest valmistatud tooteid läheb vaja vahekorras A : B = 1 : 3. Et defitsiitseid materjale kogu toodangu jaoks ei piisa, kui palju siis valmistada nendest plaate, et nende kogutoodang arvuliselt oleks suurim?

Plaadid	Materjal I	II
A	0,4	0,25
B	0,2	0,50

6-25. Eelmise ülesande variant:

Uued defitsiitsed materjalid on asendatavad, s.t. plaate võib valmistada kas esimesest või teisest materjalist. Vahekord olgu A : B = 3 : 1.

6-26. Tehases toodetakse väetist, mille koostisosad A, B ja C peavad olema vahekorras 2 : 3 : 1. Ettevalmistustsehhis suudetakse töödelda nädalas kas 100 t A-d, 120 t B-d ning 40 t C-d ühe tehnoloogia järgi või 60 t A-d, 105 t B-d ning 30 t C-d teise tehnoloogia järgi või kolmanda tehnoloogia kasutamisel 80 t A-d, 75 t B-d ja 80 t C-d. Kui palju on maksimaalselt võimalik valmistada nädalas väetist, kasutades järgemööda erinevaid tehnoloogiaid? Arvestada, et elektrit kulub nende tehnoloogiate järgi töötamisel vastavalt 580 kWh, 720 kWh ja 500 kWh nädalas ning selle limiit samal perioodil on 600 kWh.

6-27. Metallurgiatsehhis valmistatakse 3 liiki tooteid mitme agregaadi abil. Tabelis on vastavad ajakulud ja ajafondid.

	Tooted			Ajafond
	A	B	C	
Kuumutusahi	3,5	2,8	-	2766
Tõmbepink	0,083	0,083	0,104	624
Valtsimispink	0,067	0,1	0,083	416
Viimistlemispink nr.1	1	-	-	250
- " - nr.2	-	1	-	1250
- " - nr.3	-	-	1	1500

Kasum toote ühikult on vastavalt 35, 25 ja 40 rbl. Leida toodete hulgad, mida antud tingimustes saab valmistada, nii et ettevõtte kasum oleks suurim.

6-28. Keemiatehases valmistatakse kemikaale A ja B kahe operatsiooni abil. Ühe tonni A tootmisel kulub kummagi operatsiooni jaoks 3 tundi, ühe tonni B puhul aga vastavalt 4 ja 5 tundi. Üldse on esimeseks operatsiooniks kasutada 18 ja teiseks 21 tundi. Ühe kilogrammi A müügihind on 3 rubla, ühe kilogrammi B müügihind aga 8 rubla. Ühe ühiku B valmistamisel tekib 3 ühikut kemikaali C, mida saab müüa hinnaga 2 rubla kilogramm. On teada, et seda ei saa realiseerida üle 5 kilogrammi. Ülejääki säilitada ei tohi, vaid tuleb hävitada, milleks kulub 1 rbl. kilogrammi kohta. Kui palju peab tootma kemikaale A ja B, et rahalise plaani täitmine oleks suurim? Anda üldvastus.

6-29. Valmistatakse elektrimootoreid, triikraudu ja elektriahjusid. Aega kulub ühe toote valmistamiseks vastavalt 60, 7 ja 4 tundi. Ühes kuus on võimalik kasutada kuni 10 000 töötundi. Nende artiklite hinnad on vastavalt 70, 8 ja 12 rubla. Elektrimootorite kuuplaan on vähemalt 135 tükki, triikraudu ja elektriahjusid tuleb valmistada vähemalt 1700 rubla eest. Kui palju peab mootoreid, triikraudu ja ahjusid tootma, et kuutoodang oleks rahaliselt suurim?

6-30. Detaile A ja B tuleb töödelda neljal tööpingil. Tabelis on aeg, mis kulub detaili töötlemiseks mingil pingil. Tööpinke saab kasutada vastavalt 45, 100, 300 ja 50 tunni ulatuses. Detaili A müügihind on 6 rbl., detailil B 4 rbl. Detaili A vajatakse vähemalt 22 tükki. Kui palju detaile valmistada, et toodang rahaliselt oleks suurim?

Detail	Tööpink			
	1	2	3	4
A	2	4	3	1
B	0,25	2	1	4

6-31. Kolme detaili võib valmistada kolmel erineval tööpingil ja igaühel kolme erineva tehnoloogia järgi. Tabelis on vastavad ajakulud (tundides):

Tööpink	Detailid								
	1			2			3		
	Tehnoloogiad			Tehnoloogiad			Tehnoloogiad		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0,4	0,8	1,2	0,4	0,2	-	0,4	0,2	-
2	0,4	-	0,2	0,6	0,2	0,4	0,2	1,2	1,6
3	0,4	0,6	0,2	0,8	1,6	2,0	1,4	0,8	0,4

Esimest detaili vajatakse vähemalt 100, kuid mitte üle 200, teist vähemalt 200 ja kolmandat vähemalt 300 tükki. Nende hinnad on vastavalt 25, 20 ja 30 ühikut. Esimesel tööpinkide grupil on tööaeg 236 tundi, teisel 460 ja kolmandal 612 tundi. Millise tehnoloogia järgi valmistada mingit detaili, et hulgimüügi hind oleks suurim?

Märkus: Koostada mudel.

6-32. Tsehhis valmistatakse jalatseid kolme mudeli järgi, kusjuures vahetuse plaan on 90 ühikut esimest, 70 ühikut teist ja 60 ühikut kolmandat mudelit. Kasutada on 780 ühikut masinapargi võimsusest, 850 ühikut materjali ja 740 ühikut elektrienergiat. Vahendite kulu toodetele on toodud tabelis. Jalatsite hinnad on vastavalt 16, 14 ja 12 rbl.

	Jalatsid		
	1	2	3
Masinapark	2	3	4
Materjal	1	4	5
Elektrienergia	3	4	2

Kui palju valmistada mingi mudeli järgi jalatseid, et üleplaaniline toodang rahalises väljenduses oleks suurim?

6-33. Kolme masinaosa töödeldakse järgemööda neljal tööpingil. Tabelis on antud selleks kuluvad ajad. Tööpinke saab kasutada 6400, 5600, 5920 ja 6160 töötunni ulatuses.

Tööpink	Masinaosa 1	2	3
1	4	2	-
2	2	-	2
3	2	1,5	2
4	2	1,5	1

Masinaosade müügihind on 12, 9 ja 20 rubla, kuuplaan 42 400 rubla eest toodangut. Masinaosade omahind on aga 6, 6 ja 24 rubla. Milliseid masinaosi ja kui palju peaks valmistama, et ettevõtte üldine omahind oleks võimalikult väike?

6-34. Raudbetoonitehase kolm tsehhi annavad tehase laiendamiseks detaile omahinnaga vastavalt 40, 30 ja 35 rbl. Detaili laadimine autole võtab aega vastavalt 10, 15 ja 12 min., selleks võib vahetuses kasutada kõige rohkem 6,5 tundi. Detaile on vaja igas vahetuses 30 tk., tsehhide võimsused on aga 25, 20 ja 50 tükki. Kui palju detaile peab iga tsehh oma toodangust andma, et juurdeehituse omahind oleks võimalikult väike.

6-35. Nelja toote valmistamiseks kasutatakse järgemööda kolme tööpinki. Ajakulu igale üksikule tootele ja kasutada olev ajafond on toodud tabelis. Kui palju mingit toodet valmistada, et tööpingid oleksid maksimaalselt koormatud? Anda ülesande üldvastus. Kui palju tooteid valmistada, et toodete hulk arvuliselt oleks suurim?

Toode	Tööpink 1	2	3
A	1	4	1
B	0	4	2
C	5	0	3
D	2	1	4
Ajafond	1200	1040	1120

6-36. Tsehhis on neli metallitöötlemise pinkide gruppi ja kolme masinaosa töödeldakse igaühel neist. Normatiivne ajakulu ning tööpinkide ajafondid on antud tabelis. Iga detaili hind on 5 rubla ja plaan on vähemalt 650 rubla eest toodangut. Kui palju detaile valmistada, et teine tööpinkide grupp oleks võimalikult vähe koormatud (näiteks remonti vajav)?

Tööpink	Detailid 1	2	3	Ajafond
1	-	2	2	200
2	2	1	1	260
3	1	2	2	280
4	2	2	-	280

6-37. Kolme masinaosa töödeldakse järgemööda kolmel metallitöötlemise pingil. Masinaosi tuleb valmistada vahekorras 1 : 2 : 1. Töötlemisele kuluv aeg ja tööpinkide ajafond on antud tabelis. Kui palju valmistada mingit detaili, et nende koguhulk oleks suurim?

Tööpingid	Masinaosad 1	2	3	Ajafond
1	1	2	2	600
2	2	4	-	400
3	2	2	4	800

6-38. Ettevõte valmistab nelja liiki detaile. Monteeritavasse aparaati läheb vaja igaühest üks. Nende töötlemiseks kasutatavad tööpingid on erineva võimsusega. Tabelis on vahetuse jooksul valmistatav detailide arv.

Tööpingid	Detailid 1	2	3	4
1	100	-	160	110
2	150	180	130	120
3	200	160	150	140
4	170	140	100	80

Jaotada detailide tootmine tööpinkide vahel nii, et detaile saadaks võimalikult palju, ja seejuures kompleksselt.

6-39. Detaile tuleb valmistada 50, 30 ja 45 ühikut. Neid võib valmistada ühel kahest tööpingist, milleks võib kasutada kuni 800 või 160 ajaühikut. Ajakulu ühe detaili valmistamiseks on tabelis. Kuidas jaotada detailide tootmine masinate vahel, et a) tööpingid oleksid võimalikult vähe koormatud; b) detailé saaks valmistada võimalikult palju?

	Detailid A	B	C
M_1	4	10	10
M_2	6	8	20

6-40. Kaht detaili võib valmistada viiel tööpingil. Tööpinkide arv ja tootlikkus antud perioodil on tabelis. Kuidas jaotada detailide tootmine tööpinkide vahel, et neid saada võimalikult palju, kui detaili on vaja vahekorras 2 : 1?

Tööpinkide arv	Tootlikkus Detail A	B
20	200	30
12	800	400
160	40	5
36	400	100
8	1200	500

Märkus. Koostada ainult mudel.

6-41. Ühele hektarile külvatav väetis peab sisaldama vähemalt 6 kg komponenti A ja vähemalt 12 kg komponenti B. Väetise valmistamiseks on kasutada kolme lähteainet, mille hinnad on vastavalt 2, 3 ja 2,5 rbl. tsentner ja mis sisaldavad komponenti A vastavalt 2, 1 ja 3 kilogrammi tsentneri kohta ning komponenti B vastavalt 3, 4 ja 2 kilogrammi tsentneri kohta. Esimest lähteainet on tagavaraks ainult 3,5 ts. Kuidas koostada nõuetele vastavat, kuid võimalikult odavat väetisesegu?

6-42. Segu peab sisaldama 30% seatina, 30% tsinki ja 40% inglistina. Selle valmistamiseks on kasutada valmissegusid, mille koostis protsentides ja ühiku hind on toodud tabelis:

	A	B	C	D	E	F	G	H	J
Pb	10	10	40	60	30	30	30	50	20
Zn	10	30	50	30	30	40	20	40	30
Sn	80	60	10	10	40	30	50	10	50
Hind	4,10	4,30	5,80	6,00	7,60	7,50	7,30	6,90	7,30

Kuidas saada võimalikult odavat segu? Sulatamis- ja segamiskulusid ei arvesta.

6-43. Nelja bensiinimargi valmistamiseks on kasutada kolme naftasaadust, mille tagavarad on 1 600 t, 1 300 t ja 800 t. Tabelis on antud nii naftasaadusi kui ka valmistatavaid bensiinimarke iseloomustavad andmed.

	Naftasaadus			Bensiinimark			
	1	2	3	1	2	3	4
Oktaanarv	95	80	106	82	100	87	92
Viskoossus	40	25	60	30	45	35	42,5
Tolmusisaldus	0,4	0,8	0,05	0,55	0,44	0,51	0,62

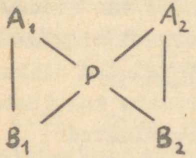
Riikliku standardi järgi ei tohi bensiinimargi oktaanarv olla väiksem tabelis antud arvust, kuid viskoossus ja tolmusisaldus ei tohi ületada tabeli arvu. Loodetav kasum bensiini realiseerimisel on vastavalt 1,5, 3, 2,20 ja 2,40 rbl/t. Kui palju tuleks valmistada igat bensiinimarki, et kasum oleks suurim?

Juhend: (vt. [2] lk.33). Lihtsuse mõttes eeldame, et bensiinimarkide omadused segamisel on määratud naftasaaduste vastavate omaduste kaalutud keskmistena. Kui x_{ij}-ga tähistame naftasaaduse j koguse, mis läheb bensiinimargi i valmistamiseks, siis esimese bensiinimargi esimese omaduse saame järgmiselt:

$$\frac{95x_{11} + 80x_{12} + 106x_{13}}{x_{11} + x_{12} + x_{13}} \geqslant 82.$$

Vaata ka [3].

6-44. Naftapuuraukudest A_1 ja A_2 saadav toornafta töödeldakse ümber vabrikutes B_1 ja B_2. Kulud 1 ühiku nafta tootmisel on A_1-s 5 ja A_2-s 4 ühikut. Eelarve järgi ei tohi tootmiskulud kokku ületada 100 ühikut. Plaani järgi peab B_1 valmistama vähemalt 30 ühikut ja B_2 vähemalt 32 ühikut valmissaadusi. Kuna puuraukudest saadava toornafta omadused ja töötlemisvabrikute tehnoloogiad on erinevad, siis on ka valmissaaduste kogused erinevad ja nimelt: ühest ühikust puuraugu A_1 naftast saab valmistada tehases B_1 3 ühikut ja tehases B_2 4 ühikut bensiini; ühest ühikust puuraugu A_2 naftast vastavalt 5 ja 3 ühikut. A_1-st saab toornaftat transportida otse vabrikusse B_1 ja A_2-st vabrikusse B_2, kuna A_1-st B_2-te ning A_2-st B_1-te minevad kogused läbivad sõlmjaama P (vt.joonis), mille läbilaskevõime on 10 ühikut.



Transpordikulud on tabelis:

	B_1	B_2
A_1	2	3
A_2	4	3

Leida puuraukude A_1 ja A_2 toodanguplaan, mille puhul tootmis- ja transpordikulu summa oleks vähim.

6-45. Varrastest, mille pikkus on 80 cm, tuleb valmistada 20 cm, 25 cm ja 30 cm pikkusi polte vastavalt 1200, 2250 ja 960 tükki. Lõigata võib vähemalt seitsmel viisil. Tabelis on seejuures saadav poltide arv ja tekkivad jäägid:

	Lõikamisviisid						
	1	2	3	4	5	6	7
20	4	-	1	1	-	1	2
25	-	3	-	1	2	2	-
30	-	-	2	1	1	-	1
Jäägid	-	5	-	5	-	10	10

Mitmest vardast valmistada polte antud lõikamisviisidel, et jääkide koguhulk oleks vähim?

6-46. Plekitahvlitest mõõtmetega 4 x 12 on vaja valmistada kaht tüüpi detaile 90 aparaadi jaoks. Ühele aparaadile on vaja 2 detaili tüübist A ja 10 detaili tüübist B. On välja töötatud 4 võimalust detailide stantsimiseks. Tabelis on antud detailide arvud, mis seejuures saadakse. Mitmest plekitahvlist valmistada detaile iga stantsitempliga, et jäätmete koguhulk oleks vähim?

Stantsitempli tüüp	Detailide arv		Tekkiv jääk
	A	B	
1	4	-	12
2	3	4	5
3	1	9	3
4	-	12	-

6-47. Tabeli viimases veerus on antud organismi vajadused kolme liiki vitamiinide järele. Tabeli põhiosa kirjeldab viit tüüpi tablettide vitamiinisisaldust ja nende hindu. Milliseid tablette ja kui palju tarvitada, et organismi vitamiinivajadused oleksid vähimate kulutustega rahuldatud?

Vitamiinid	Tabletid					Vajadus
	1	2	3	4	5	
1	5	2	3	2	1	100
2	3	5	2	1	-	80
3	1	3	2	6	-	120
Hind	40	50	35	40	7	

6-48. Katsemajandis tehti kindlaks, et loomade kaaluiive tõuseb tunduvalt, kui nende päevases toiduratsioonis on mikroelemente A, B ja C vähemalt 4, 2 ja 0,6 ühikut. Neid mikroelemente võivad loomad saada kolmest toiduainest, mille ühe ühiku koostis on näha tabelis. Toiduainete ühiku hinnad on vastavalt 3, 4 ja 2. Milliste toiduainetega saab loomade vajadusi kõige odavamini rahuldada?

Element	Toiduained		
	1	2	3
A	0,5	0,6	0,4
B	0,2	0,1	0,3
C	0,08	0,07	0,09

Märkus: Arvutamist hõlbustab [16] lk.168 olev juhend või duaalse ülesande lahendamine (primaarse asemel).

6-49. Tehas sai tellimuse jaanuaris 150 ja veebruaris 225 agregaadile. Normaalselt töötades suudab tehas valmistada ühe kuu jooksul 160 agregaati. Ületunnitöödega saab toota ühes kuus veel 30 agregaati, kuid omahind suureneb selle tõttu 20 rbl. agregaadilt. Ühe agregaadi laos hoidmine kuu vältel toob endaga kaasa 3 rbl. kulusid. Koostada tootmise plaan, mille puhul lisakulud oleksid võimalikult väikesed.

6-50. Ühiselamu komandant peab homme hommikuks muretsema 40 ja ülehomme hommikuks 70 puhast käterätikut. Täna õhtul korjab ta ära 20 musta käterätikut, homme 40 ja ülehomme 70. Rätik maksab ostes 80 kopikat. Musta käterätiku võib aga 15 kopika eest lasta pesumajas öö jooksul järgmiseks hommikuks puhtaks pesta. Mitu käterätikut peab komandant ostma, mitu täna pessu andma ja mitu homme, et rahuldada vajadused minimaalsete kuludega?

Märkus: Kaks viimast ülesannet on lahendatavad lihtsa loogilise aruteluga. Sellele vaatamata koostada matemaatilised mudelid.

6-51. Kolme toote valmistamiseks kasutatakse kolme defitsiitset materjali. Neid on eraldatud 30, 40 ja 90 ühikut, kulunormid on tabelis. Toodete omahinnad on 3, 6 ja 9 ühikut ja realiseerimisel on loota kasumit 6, 15 ja 3 ühikut. Leida tootmisplaan, mille puhul oleks kasum suurim ja omahind vähim.

Materjal	Tooted A	B	C
1	4	2	3
II	5	2	5
III	15	8	5

7. PARAMEETRILINE PLANEERIMINE

Parameetrilist planeerimist on käsitletud raamatuis [11] II osa, [16] ja mujal.

Ülesanded

Järgmistes ülesannetes leida vastused parameetri iga väärtuste vahemiku kohta.

7-1.
$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5 \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 - x_6 = 3 \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \end{cases}$$
$$z = x_1 + x_2 + \lambda x_3 + 2\lambda x_4 \quad \min.$$

7-2.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 \leq 15 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 2, \end{cases}$$
$$z = 3\lambda x_1 + (-1 + 2\lambda)x_2 + (2+3\lambda)x_3 + 4x_4 \quad \max.$$

7-3.
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 + \mu \\ -x_1 + x_4 = 2 + \mu \\ 2x_1 - 5x_2 + x_5 = 2 + 3\mu, \end{cases}$$
$$z = x_1 + x_2 + x_3 \quad \min.$$

7-4.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 1 - 2\mu \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 20 + \mu \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 5 + 3\mu, \end{cases}$$
$$z = 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 \quad \max.$$

7-5. (Vt. ülesanne 6-34.) Raudbetoonitehase kolm tsehhi annavad oma tehase laiendamiseks kolme liiki detaile. Esimest liiki detaili omahind sõltub viimistluse astmest ja on 20, 25, 35, 40, 45 või 50 rbl. Teist ja kolmandat liiki detailide omahinnad on vastavalt 30 ja 35 rbl. Detaili laadimine autole võtab aega vastavalt 10, 15 ja 12 min., selleks võib vahetuses kasutada kõige rohkem 6,5 tundi. Detaile on vaja igas vahetuses 30 tk., tsehhide võimsused on aga 25, 20 ja 50 tükki (olenemata viimistluse astmest). Kui palju detaile peab iga tsehh oma toodangust andma, et juurdeehituse omahind oleks võimalikult väike? Ülesanne lahendada esimest liiki detaili iga võimaliku omahinna puhul.

7-6. (Vt. ülesanne 6-30.) Detaile A ja B tuleb töödelda järgemööda neljal eri tööpingil. Tabelis on aeg, mis kulub detaili töötlemisele mingil pingil. Kuna esimest tööpinki kasutatakse ka muude toodete valmistamisel, siis eri perioodidel saab teda kasutada kas 90, 92, 96, 100, 110, 120, 130 või 150 töötunni ulatuses. Ülejäänud tööpinke saab kasutada vastavalt 45, 300 ja 50 tunni ulatuses. Detaili A müügihind on 6 rbl., detailil B 4 rbl. Detaili A vajatakse igal perioodil vähemalt 22 tükki. Kui palju detaile valmistada, et toodang rahaliselt oleks suurim? Ülesanne lahendada esimese tööpingi iga võimaliku tööaja puhul.

	Tööpink			
Detail	1	2	3	4
A	4	2	3	1
B	2	0,25	1	4

8. TÄISARVULINE PLANEERIMINE

Lineaarse planeerimise ülesande optimaalne lahend on tihti murdarvuline. Mõnikord on aga ülesande sisu järgi vaja leida täisarvudes väljenduvat lahendit. Selle saavutamiseks on välja töötatud mitmeid meetodeid, näiteks [18] lk.102.

N ä i d e 8-1. Lahendada lineaarplaneerimise ülesanne

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 30 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 10, \end{cases}$$

$$z = 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 \quad \max$$ täisarvudes.

Viies viimases võrduses kõik liikmed vasakule poole võrdusmärki ning vabanedes esimese ja kolmanda võrrandi abil liikmetest x_4 ja x_6-ga, saame:

$$z - 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 10.$$

Tabelist 8-1 leiame vastuse:

$$z_{max} = \frac{280}{3} = 93\frac{1}{3}, \text{ kui}$$

$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$, $x_4 = \frac{170}{3} = 56\frac{2}{3}$,

$x_5 = 0$, $x_6 = 0$.

T a b e l 8-1

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	10	−2	2	−5			
x_4	20	3	2	−3	1		
← x_5	30	1	−1	2		1	
x_6	10	2	2	−1			1
z	85	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			$\frac{5}{2}$	
x_4	65	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$		1	$\frac{3}{2}$	
→ x_3	15	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$	
← x_6	25	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$			$\frac{1}{2}$	1
z	$\frac{280}{3}$	$\frac{4}{3}$				$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_4	$\frac{170}{3}$	$\frac{11}{3}$			1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{70}{3}$	$\frac{4}{3}$		1		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
→ x_2	$\frac{50}{3}$	$\frac{5}{3}$	1			$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Kuna see lahend ei ole täisarvuline, siis püstitame <u>lisatingimuse</u>

$$x_1 + x_5 + x_6 \geqslant 1$$

(sest vastuses $x_1 = x_5 = x_6 = 0$ ja tahame vähemalt ühe neist muuta positiivseks, täisarvuliseks)

ehk $x_1 + x_5 + x_6 - x_7 + x_8 = 1$,

kus x_8 on kunstlik tundmatu.

Sihifunktsioonis

$$z + \frac{4}{3}x_1 + \frac{8}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6 + Mx_8 = \frac{280}{3}$$

vabaneme eelmise võrrandi abil liikmest x_8-ga:

$$z + (-M + \tfrac{4}{3})x_1 + (-M + \tfrac{8}{3})x_5 + (-M + \tfrac{1}{3})x_6 + Mx_7 = -M + \frac{280}{3}.$$

Ülejäänud tingimused võtame tabelist 8-1:

$$\begin{cases} \frac{11}{3}x_1 + x_4 + \frac{4}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6 = \frac{170}{3} \\ \frac{4}{3}x_1 + x_3 + \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6 = \frac{70}{3} \\ \frac{5}{3}x_1 + x_2 + \quad + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{5}x_6 = \frac{50}{3}. \end{cases}$$

Arvutus on tabelis 8-2. Et selle teine osa annab soovitud tulemuse, siis ei ole tabeli kõiki lahtreid välja arvutatud. Niisiis

$$z_{max\ täis.} = 93, \quad \text{kui } x_1 = 0, \quad x_3 = 23, \quad x_5 = 0,$$
$$x_2 = 16, \quad x_4 = 57, \quad x_6 = 1.$$

Sedatulemustei ole saadud eelmiste murdarvude hariliku ümardamisega.

Alati ei saa vastust kätte nii lihtsalt, vaid seda võtet tuleb rakendada korduvalt. Kui praegu viimane tulemus ei oleks olnud täisarvuline, siis peaksime võtma tingimuse

$$x_1 + x_5 + x_7 \geqslant 1$$

ja edasi arvutama eelmisega analoogiliselt.

Tabel 8-2

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
z	$-M+\frac{280}{3}$	$-M+\frac{4}{3}$				$-M+\frac{8}{3}$	$-M+\frac{1}{3}$	M	
4	$\frac{170}{3}$	$\frac{11}{3}$			1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$		
3	$\frac{70}{3}$	$\frac{4}{3}$		1		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		
2	$\frac{50}{3}$	$\frac{5}{3}$	1			$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		
← 8	1	1				1	1	−1	1
z	93	1	0	0	0	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
4	57								
3	23								
2	16								
→ 6	1	1				1	1	−1	

Ü l e s a n d e d

Leida järgmiste ülesannete täisarvulised lahendid:

8-1.
$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 \leqslant 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leqslant 13 \\ 4x_2 + x_3 \leqslant 11, \end{cases}$$
$$z = x_1 + 5x_2 + 4x_3 \quad \max.$$

8-2.
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 16 \\ x_1 + 5x_2 \leqslant 10, \end{cases}$$
$$z = 2x_1 + x_2 \quad \max.$$

8-3.
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 \leqslant 2 \\ 2x_1 - 5x_2 \leqslant 2, \end{cases}$$
$$z = x_1 + x_2 + x_3 \quad \min.$$

8-4. Nelja liiki masinaosade valmistamiseks kasutatakse kahte limiteeritud materjali. Materjalide kulunormid ja fond vahetuses ning realiseerimisel saadav kasum on tabelis. Igat masinaosa valmistatakse eri tööpingil ning tööpinke on kokku 15. Igal tööpingil jõutakse vahetuses valmistada ainult üks masinaosa. Kui palju valmistada antud tingimustes masinaosi, et saadav kasum oleks suurim?

Materjal	Masinaosad 1	2	3	4	Fond
1	7	5	2	3	120
2	2	5	15	10	100

9. TRANSPORDIÜLESANNE

Kuigi transpordiülesanne on lineaarplaneerimise ülesanne ja selle lahendamiseks võib kasutada simpleksmeetodit, on ülesande spetsiifikat arvestades välja töötatud omad lahendusvõtted: [3], [5], [10], [11] II osa, [13], [16], [20], [24], [27]. Neid võtteid koos modifikatsioonidega on palju ja peaaegu igas viidatud artiklis või raamatus on need esitatud omamoodi. Ei tule mõelda, et siia kuuluvad ainult transpordiga seotud ülesanded. Vaadeldav lahendusvõte sobib ka mitmete muude probleemide puhul.

N ä i d e 9-1. Kolme tehase päevane toodang on vastavalt 450, 470 ja 490 ühikut kaupa. Homseks on tellimused esitanud kolm tarbijat vastavalt 300, 340 ja 360 ühikule. Ühiku veokulud on tabelis. Millisest tehasest rahuldada mingi tarbija nõudmisi ja kui suures koguses, et üldised veokulud oleksid vähimad?

Tehas	T a r b i j a 1	2	3
1	3	4	5
2	4	2	1
3	4	5	1

1. Algtabeli koostamine. Paigutame andmed tabelisse 9-1. Tabeli esimesse veergu kirjutame tehaste võimsused (ladude tagavarad), esimesse ritta tarbijate nõudmised. Kuna transpordiülesannet saab lahendada ainult võimsuste ja tarbimise võrduse puhul, siis on lisatud

410 ühiku suurune fiktiivne tarbija. Veokulud kirjutame vastavate lahtrite ülemistesse pooltesse. Et fiktiivse tarbija juurde vedu ei toimu, on vastavad veokulud nullid.

T a b e l 9-1

Ladu \ Tarbija	300	340	360	f.410
450	3	4	5	0
470	4	2	1	0
490	4	5	1	0

2. Algplaani koostamine. Üks võimalikest variantidest kauba laialivedamiseks on tabelis 9-2.

T a b e l 9-2

L \ T	300	340	360	f.410	
450	3 / 300	4 / 150	5	0	- 4
470	4	2 / 110	1 / 360	0	- 2
490	4	5 / 80	1	0 / 410	- 5
	1		1	5	2 480

Vedu mingil marsruudil on esile tõstetud rõngaga, millega on ümbritsetud vastav veokulu. Ülesande lahendamiseks peab rõngaste arv olema täpselt m + n - 1, kus m on tootjate (ladude) arv ja n on tarbijate arv (praegu 3 + 4 - 1 = 6). Antud vedude variandi puhul on üldised veokulud 2 480 ühikut.

3. Edasi tuleb hinnata paigutuse headust. Selleks liidame (lahutame) veokulude ridadele ja veergudele sobivaid arve nii, et rõngastes olevad arvud muutuksid nullideks. Vajalikud arvud on tabelis 9-2 paremal ja all. Sooritades nõutud tehted, saame tabeli 9-3.

T a b e l 9-3

0 / 300	0 / 150	2	1
3	0 / 110	0 / 360	3
0	0 / 80	-3	0 / 410

4. Kuna diagonaali peal on negatiivne arv, ei ole vaadeldav paigutus optimaalne. Saab leida uue variandi, nii et üldised veokulud vähenevad. Selleks ümbritseme negatiivse arvu rõngaga (rõngaid on nüüd lubatust rohkem!) ja moodustame kinnise murdjoone, alustades negatiivse arvuga rõngast ja liikudes vaheldumisi horisontaalselt ning vertikaalselt ja pöörates ainult rõngaste kohal (vt. tabel 9-4).

T a b e l 9-4

0 / 300	0 / 150	2	1	
3	0 / 190 ~~110~~	0 / 280 ~~360~~	3	
0	0 / 0 ~~80~~	-3 / 80	0 / 410	3
			-3	

Kuna paarisarvulistest lahtritest IV-s on vähim kaubakogus, siis paigutame selle järjekorras ümber (tab. 9-4). Üleliigse rõnga likvideerime lahtrist IV, kuhu jäi kaubakogus 0.

5. Edasi kordame juba tuttavaid võtteid: muudame rõngas olevad arvud nullideks jne. (vt. tabelid 9-5 ja 9-6).

T a b e l 9-5

0 / 300	0 VI / 0 ~~150~~	2	-2 / I 150	2
3	0 V / 340 ~~190~~	0 IV / 130 ~~280~~	0	
3	3	0 III / 230 ~~80~~	0 II / 260 ~~410~~	
-2				

T a b e l 9-6

0 / 300	2	4	0 / 150
1	0 / 340	0 / 130	0
1	3	0 / 230	0 / 260

Kuna tabeli 9-6 diagonaalide peal ei ole negatiivseid arve, siis on see plaan optimaalne ja võime koostada vastuse (tabel 9-7).

T a b e l 9-7

	300	340	360	f.410
450	3 / 300	4	5	0 / 150
470	4	2 / 340	1 / 130	0
490	4	5	1 / 230	0 / 260
				1 940

Esimene ja kolmas tehas ei saa oma toodangut homme täielikult realiseerida, vaid peavad 150- ja 260-ühikulised kogused paigutama lattu. Üldised veokulud on 1940 ühikut.

Vastus tabelis 9-7 ei ole aga ainuke võimalik. Sellest annab tunnistust diagonaalide peal olev ilma rõngata null optimaalses tabelis 9-6. Ümbritseme selle rõngaga ja paigutame kaubakogused juba tuttava reegli järgi ümber (tabel 9-8).

T a b e l 9-8

0 / 300	2	4	0 / 150
1	0 / 340	0 II / 0 ~~130~~	0 I / 130
1	3	0 III / 360 ~~230~~	0 IV / 130 ~~260~~

Saadud nn. <u>alternatiivne</u> vastus on tabelis 9-9.

T a b e l 9-9

	300	340	360	f.410
450	3 / 300	4	5	0 / 150
470	4	2 / 340	1	0 / 130
490	4	5	1 / 360	0 / 130
				1 940

Alternatiivse vastuse korral võime arvestada mitte esinevaid tingimusi, nagu ühendusteede olukord vms. Võib-olla on parem vastus tabelis 9-9, kuna siin jääb ladudesse enam-vähem võrdne kogus kaupa ning vedada tuleb igast laost ainult ühele tarbijale.

N ä i d e 9-2. Lahendada järgmiste andmetega transpordiülesanne:

L \ T	400	200	300	300
300	2	5	9	3
600	8	3	5	8
200	7	3	1	5
100	1	9	7	2

Vedude esimene variant on tabelis 9-10.

T a b e l 9-10

	400	200	300	300
300	2 / 300	5	9	3
600	8	3 / 200	5 / 100	8 / 300
200	7	3	1 / 200	5
100	1 / 100	9	7	2

Kuna praegu on rõngaid nõutavast arvust (4 + 4 - 1) vähem, siis on tegemist nn. <u>kõdunud ülesandega</u>. Et jätkata arvutamist, peame ühe rõnga kolmandasse ritta juurde panema, kuna kolmanda lao tühjakssaamisega kaasnes vaadeldava tarbija täielik rahuldamine. Rõngast ei tohi panna selles reas olevate veokulude 3 või 5 ümber, sest rõngad asetsevad siis ristküliku tippudes ja üldiselt ei ole sel juhul võimalik rõngastes olevaid arve nullideks muuta. Tabeli 9-11 abil koostame tabeli 9-12.

Tabel 9-11

	400	200	300	300	
300	2 / 300	5	9	3	1
600	8	3 / 200	5 / 100	8 / 300	-8
200	7	3	1 / 200	5	-4
100	1 / 100	9	7	2	2
	-3	5	3		

Tabel 9-12

0 / 300	11	13	4	-3
-3 / I	0 / 200	IV 0 / 100	0 / 300	
0 / II	4	0 / III 200	1	
0 / 100	16	12	4	-3
3				

Viimases tabelis on paarisarvulistest lahtritest II-s vähim kaubakogus ja nimelt 0. Järelikult ümberpaigutamine langeb praegu ära.

Tabel 9-13

0 / 300	8	10	1
0	0 / 200	0 / 100	0 / 300
	4	0 / 200	1
0 / 100	13	9	1

Tabel 9-13 on optimaalne. Vastus on sisuliselt juba algtabelis 9-10, sest nullist erinevate kaubakoguste ümberpaiknemist ei ole olnud.

Lahendada järgmised t r a n s p o r d i ü l e s a n d e d:

9-1.

L \ T	250	300	200
250	3	5	6
250	6	6	11
250	10	6	14

9-2.

L \ T	150	120	80	50
100	3	5	7	11
130	1	4	6	3
170	5	8	12	7

9-3.

L \ T	100	100	60
100	82	64	100
150	65	75	130
50	90	83	120

9-4. Kuus tarbijat on esitanud oma nõudmised kolme martäänahju toodangule. Esimesele tarbijale ei sobi teise ja neljandale kolmanda martäänahju toodang. Kuidas jaotada tootjate saadusi tarbijate vahel minimaalsete veokuludega?

L \ T	42	30	25	30	23	20
85	49	80	61	48	85	30
47	X	31	5	15	20	32
38	10	25	8	X	37	10

9-5. Kontrollstendil on 200 termopaari, 50 manomeetrit, 50 akseleromeetrit (kiirenduse mõõtja) ja 40 dünamomeetrit. Registreerimisaparaatidest on olemas 200 fotoaparaati, 150 ostsillograafi, 56 isekirjutajat ja 50 muud indikaatorit. Milline mõõteriist ühendada mingi registreerimisaparaadiga, nii et montažile kuluv üldaeg oleks vähim ja kui üksikute ühenduste tegemiseks kulub aega:

	Termo-paar	Mano-meeter	Akselero-meeter	Dünamo-meeter
Fotoaparaat	1	3	X	1
Ostsillogr.	0,5	0,5	0,5	0,5
Isekirjutaja	2	2	10	2
Indikaator	1,5	1,5	1,5	1,5

Lahendada transpordiülesanne:

9-6.

L \ T	200	150	150	100
150	10	16	8	12
300	4	15	7	9
100	6	14	11	8

Täiendav tingimus: teise tarbija vajadused tuleb täielikult rahuldada.

Selle nõude realiseerimiseks jätame tabeli viimases reas vastava lahtri täitmata (vt. ka [11] II osa, lk.112).

f.50	0		0	0

Lahendada ülesanne ka ilma täiendava tingimuseta.

9-7. Neljalt raielangilt veetakse palke kolme raudteejaama. Päevas suudetakse palke välja vedada 600, 800, 500 ja 150 ühikut. Homseks on loota vaguneid 650, 600 ja 300 ühiku laadimiseks. Kaugused lankidelt raudteejaamadesse on tabelis (kolmandalt langilt ei pääse esimesse jaama). Kuna väljaveoga on kiire, siis tuleb fiktiivse tarbija kogus 500 ühikut viia mingisse raudteejaama tagavaraks. Kuidas lahendada probleem vähimate veokauguste puhul?

Lank \ Jaam	1	2	3
1	10	8	9
2	5	4	7
3	X	6	12
4	4	12	3

J u h e n d: Et palke tuleb vedada fiktiivse tarbija juurde (üldiselt viimases järjekorras), võtame veokaugusteks suured positiivsed arvud M.

9-8. Viis tööülesannet tuleb anda viiele täitjale. Kuna igal täitjal kulub töö tegemiseks aega erinevalt, siis leida selline jaotus, et summaarne aeg oleks vähim.

Tööülesande nr.	Täitja nr. 1	2	3	4	5
1	5	4	3	6	4
2	3	9	8	8	6
3	2	4	4	2	7
4	6	8	2	4	3
5	5	7	3	2	4

9-9. Tehase kolm sama artiklit valmistavat tsehhi asuvad eri paikades. Toodete omahinnad on vastavalt 160, 1[illegible]5 ja 163 rbl., müügihind 210 rbl. Tsehhide võimsused vahetuses on 20, 15 ja 20 ühikut.

Homseks on kolm tarbijat esitanud oma nõudmised vastavalt 15, 25 ja 25 ühikule. Ühe kaubaühiku veokulud on kõrvalolevas tabelis. Millisest tsehhist rahuldada mingi tarbija nõudmised, et tehase kasum oleks suurim ja lepingu järgi müügihind on franko sihtjaam?

Tsehh	Tarbija 1	2	3
1	22	28	34
2	25	39	81
3	23	27	29

Märkusi: 1. Kasumi all tuleb praegu mõista suurust [müügihind - (omahind + veokulud)] .

2. Transpordiülesande arvutusskeem on harilikult kohaldatud miinimumülesande jaoks. Et lahendada antud maksimumülesanne, peame lahendamisel kasumi hinded (lineaarplaneerimise ülesande sihifunktsiooni kordajad) varustama vastasmärgiga (positiivse asemel negatiivne).

9-10. Tehasesse suunatakse tööle kolme eriala spetsialiste, vastavalt 30, 35 ja 40 inimest. On olemas viis töökohta, kuhu on vaja 25, 25, 20, 15 ja 20 inimest. Kui spetsialisti eriala vastab täielikult töökohale, siis märgime selle "hindega" 2, kui mõnele töökohale asudes on vaja ennast veel täiendada, siis vastab sellele "hinne" 1, kui eriala ei vasta üldse töökohale, märgime "hindeks" 0. Antud juhul olgu hinded järgmised:

Spetsialistid	T ö ö k o h a d				
	25	25	20	15	20
30	0	1	2	0	1
35	2	0	0	2	1
40	0	1	1	0	2

Jaotada spetsialistid töökohtadele nii, et eriala vastavus oleks võimalikult hea. Analüüsida vastust.

N ä i d e 9-3. Kiiresti riknevate kaupade vedamisel, sõjaolukorras ja muudel taolistel juhtudel ei saa alati nõuda kulude minimaalsust. Siin on tingimuseks kaupade võimalikult kiire toimetamine sihtkohta igal üksikul juhul. Lihtsuse mõttes eeldame vajalike veokite olemasolu ([12], [18]).

Järgmistest ladudest on vaja tarbijatele viia kaup, kusjuures on teada teeloleku aeg (tundides, päevades vm.).

L \ T	200	150	50	250
150	6	10	11	12
150	8	10	12	15
200	4	3	6	7
150	2	4	5	10

Teeme mingi jaotuse (tabel 9-14).

T a b e l 9-14

	200	150	50	250
150	6	10	11 50	12 100
150	8	10	12	15 150
200	4 50	3 150	6	7
150	2 150	4	5	10

Selle põhjal kauba laialiviimiseks läheb vaja kuni 15 ajaühikut. Moodustame kinnise murdjoone ja paigutame kaupa ümber (tabel 9-15).

T a b e l 9-15

6	10	11 50	12 100
8	10 150	12	15 0 ~~150~~
4 50	3 0 ~~150~~	6	7 150
2 150	4	5	10

Ümber kirjutades jätame arvestamata lahtri 15 ajaühikuga, samuti lahtri ilma rõngata 12 ajaühikuga kui kõige suuremaid arve sisaldavad (tabel 9-16).

T a b e l 9-16

6	10	11 50	12 100
8	10 150		
4 50	3	6	7 150
2 150	4	5	10

Teeme järgmise ümberpaigutuse (tabel 9-17):

T a b e l 9-17

6 50	10	11 50	12 50 ~~100~~
8	10 150		
4 0 ~~50~~	3	6	7 100 ~~150~~
2 150	4	5	10

Jätkame (tabelid 9-18 ... 9-20).

T a b e l 9-18

6 100 ~~50~~	10	11 50	12 0 ~~50~~
8	10 150		
4	3	6	7 200
2 100 ~~150~~	4	5	10 50

T a b e l 9-19

6 150 ~~100~~	10	11 0 ~~50~~	
8	10 150		
4	3	6	7 200
2 50 ~~100~~	4	5 50	10 50

T a b e l 9-20

6 150			
8	10 150		
4	3	6	7 200
2 50	4	5 50	10 50

Rohkem ümberpaigutusi ei õnnestu enam teha. Selle järgi on kaup laiali veetud ülimalt 10 ajaühikuga.

Järgmised ülesanded lahendada näites 9-3 esitatud meetodil:

9-11.

L \ T	32	57	32	15
48	5	8	24	30
48	8	10	20	32
40	17	28	35	40

9-12.

L \ T	42	50	25	30	23
85	79	110	91	78	115
47	18	31	45	28	50
38	30	55	33	27	67

9-13.

L \ T	100	200	250
150	6	4	8
200	5	2	4
200	8	4	4

Kauba vedamisel esineb tahes-tahtmata autodel ja muudel veokitel tühisõite. Ka neid on võimalik vähendada. Vastav lahendusvõte on esitatud juhendis [8] . Järgnev näide on sealt pärit.

N ä i d e 9-4. Liivakarjäärist (A_1) on vaja vedada liiva raudbetoonitehasele (B_1) 30 koormat, ehitusele (B_2) 32 koormat ja sadamasse (B_3) 32 koormat, kokku 94 koormat; raudteejaamast (A_2) 100 koormat kivisütt baasi (B_4), sadamast (A_3) killustikku teedevalitsusele (B_5) 70 koormat ja tehasest (A_4) vanarauda utiililattu (B_6) 38 koormat. Kaugused on juuresolevas tabelis.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	10	5	5	9	10	4
A_2	2	6	8	5	1	7
A_3	10	4	0	4	7	9
A_4	5	5	6	2	2	10

Koormaid on vaja vedada 1990 km ulatuses ja isekallutajate edasi-tagasi "pendeldamisel" oleks ka tühisõite sama arv kilomeetreid. Transpordiülesande lahendusskeemi abil võime leida minimaalse tühisõidu kilomeetrite arvu. Tabelis 9-21 on optimaalne vastus, mille järgi tühisõitusid tuleb te-

T a b e l 9-21

T / L	B_1 30	B_2 32	B_3 32	B_4 100	B_5 70	B_6 38
A_1 94	10	5 / 32	5	9 / 24	10	4 / 38
A_2 100	2 / 30	6	8	5	1 / 70	7
A_3 70	10	4	0 / 32	4 / 38	7	9
A_4 38	5	5	6	2 / 38	2	10

ha ainult 886 km. Kuidas autod peavad sõitma? Selleks kirjutame lähteandmetest välja veosevajadused ja tabelist 9-21 tühisõitude teed:

Veosevajadused (koormate arvud):		Tühisõit (reiside arvud)	
A_1 B_1	- 30,	B_2 A_1	- 32,
A_1 B_2	- 32,	B_4 A_1	- 24,
A_1 B_3	- 32,	B_6 A_1	- 38,
A_2 B_4	- 100,	B_1 A_2	- 30,
A_3 B_5	- 70,	B_5 A_2	- 70,
A_4 B_6	- 38.	B_3 A_3	- 32,
		B_4 A_3	- 38,
		B_4 A_4	- 38.

A u t o d e sõidumarsruudid:

1) $A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_1$ 32 reisi,
2) $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_4 \rightarrow A_1$ 24 reisi,
3) $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_4 \rightarrow A_4 \rightarrow B_6 \rightarrow A_1$ 6 reisi,
4) $A_1 \rightarrow B_3 \rightarrow A_3 \rightarrow B_5 \rightarrow A_2 \rightarrow B_4 \rightarrow A_4 \rightarrow B_6 \rightarrow A_1$ 32 reisi,
5) $A_2 \rightarrow B_4 \rightarrow A_3 \rightarrow B_5 \rightarrow A_2$ 38 reisi.

Kui autod liiguvad sellistel marsruutidel, on kogu kaup veetud ja tühisõite tehtud kõige vähem.

9-14. Leida näites 9-4 olev teine, alternatiivne võimalus veomarsruutide koostamiseks.

9-15. Kaupa on vaja vedada järgmistel liinidel:

A_1B_1 - 50 , A_1B_2 - 50 , A_2B_3 - 75, A_2B_5 - 75, A_3B_4 - 75 , A_3B_6 - 50 ja A_4B_6 - 75 koormat.

K a u g u s t e t a b e l:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	6	8	11	7	5	9
A_2	17	20	6	5	12	15
A_3	12	9	9	13	5	4
A_4	5	5	23	17	12	10

Koostada veomarsruudid vähima summaarse tühisõidu kilomeetrite arvuga.

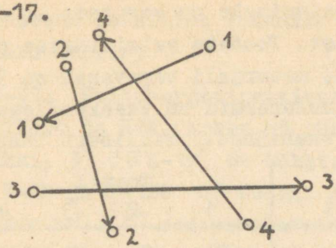
9-16. Sama probleem järgmiste andmetega:

A_1 B_1 - 400, A_3 B_2 - 500,
A_1 B_3 - 200, A_4 B_2 - 100,
A_2 B_1 - 250, A_4 B_3 - 250,
A_2 B_4 - 300, A_4 B_5 - 250.
A_2 B_5 - 250,

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	8	12	9	2
A_2	5	4	3	7	6
A_3	2	6	7	12	1
A_4	4	12	9	3	2

Järgmised ülesanded võib lahendada kas samal põhimõttel või kasutada artiklis [5] olevat meetodit (kauba saatjate ja saajate arv on võrdne).

9-17. Joonisel kujutatud liinidel on vaja vedada kaupa vastavalt 100, 50, 100 ja 100 koorma ulatuses.

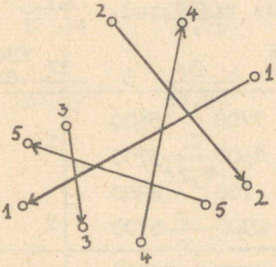


Teepikkused iga liini lõpust teiste alguseni on tabelis.

	1	2	3	4
1	7	2	3	7
2	6	4	5	4
3	5	9	13	4
4	6	3	7	8

Leida veomarsruudid, mille puhul tühisõidu kilomeetrite arv on vähim.

9-18. Sama probleem on ka selles ülesandes. On vaja vedada 1.liinil 100 koormat, 2. - 100, 3. - 50, 4. - 150 ja 5. - 200 koormat kaupa.



Kauguste tabel:

	1	2	3	4	5
1	11	8	4	7	8
2	2	8	8	4	3
3	7	7	4	3	4
4	5	3	6	8	7
5	11	6	4	8	9

Järgnevaid ülesandeid võib lahendada simpleksmeetodi abil. Kuna tegemist on nn. jaotusülesannetega, saab kasutada ka transpordiülesande lahendusmeetodeid, näit. [13], lk.137, [27], lk. 46.

9-19. Nelja toote valmistamiseks on kasutada kolme materjali, mis asendavad üksteist. Toodete valmistamise plaan on 200, 100, 160 ja 50 ühikut, materjali tagavarad on 300, 540 ja 500 ühikut. Materjali kulunormid on vasakpoolses tabelis, parempoolses on toodete omahinnad. Millisest lähteai-

	Tooted				Tooted			
Materjal	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2,4	3,0	3,0	3,6	78	120	78	117
2	3,6	4,5	4,5	5,4	66	90	72	90
3	4,0	5,0	5,0	6,0	54	81	69	45

nest valmistada mingit toodet, et üldine omahind oleks vähim?

9-20. Neljal tööpinkide grupil on vaja valmistada viit liiki detaile. Tabelis on ühe tööpingi tootlikkus kuu jooksul, tööpinkide arv ja detailide vajadused.

Tööpink	Detailid 1	2	3	4	5	Tööpinkide arv
1	900	1100	2200	1700	5500	15
2	X	1000	1400	1500	5700	19
3	X	500	X	700	2900	25
4	1600	1500	2800	2300	8100	10
Tootmisplaan	25000	12000	18000	9000	20000	

Järgnevas on antud iga tööpingi ekspluateerimise kulud ühe kuu jooksul ning detailide hinnad.

Tööpink	Detailid 1	2	3	4	5
1	1700	1600	1700	1500	1000
2	X	1500	1600	1400	900
3	X	1000	X	900	600
4	1800	2100	1800	1600	1000
Hind	13	14	7	6	2

Jaotada detailide tootmine tööpinkide vahel nii, et kasum oleks suurim.

9-21. Ehitusorganisatsioonil on kraanasid tüüpidest 1) МБТК-80 ja МСК, kokku 85 tükki, 2) БКСМ5-5 ja БКСМ5-10 120 tükki, 3) СБК-1у 64 tükki; 4) СБК-1 140 tükki ning 5) СБК-1М ja Т-128 85 tükki. Eeloleval aastal on vaja teha töid (tuh.m^3): 1) monteeritavatest detailidest 5-korruseliste elamute püstitamisel 9750, 2) tellistest elamute juures 2500, 3) koolimajade ehitamisel 1620, 4) haiglate ehitamisel 800 ja 5) muudel objektidel 4000 ulatuses. Tabelis on murru lugejasse kirjutatud ühe kraana aastane jõudlus (tuh. m^3), nimetajasse tema ekspluatatsioonikulud aastas (tuh.rbl.)

Kraana	Ehitus 1	2	3	4	5
1	$\frac{75}{16,38}$	$\frac{60}{14,75}$	$\frac{72}{14,75}$	$\frac{40}{11,45}$	$\frac{40}{11,45}$
2	$\frac{52}{20,07}$	$\frac{45}{17,09}$	$\frac{54}{17,09}$	$\frac{40}{14,1}$	$\frac{40}{14,1}$
3	X	$\frac{30}{11,71}$	$\frac{30}{11,71}$	$\frac{25}{9,67}$	$\frac{30}{9,67}$
4	X	$\frac{25}{9,67}$	X	X	$\frac{25}{9,67}$
5	X	$\frac{25}{13,85}$	X	X	$\frac{25}{11,52}$

Leida selline kraanade paigutus objektidele, et ekspluateerimiskulud oleksid vähimad.

N ä i d e 9-5. Kolm toorainebaasi, võimsusega 100, 150 ja 250 ühikut, varustavad kahte töötlemisettevõtet võimsustega 200 ja 300 ühikut. Toodang läheb neljale tarbijale, kelle vajadused on 50, 100, 200 ja 150 ühikut. On teada kaugused üksikute punktide vahel.

Tooraine-baas	Ümbertöötamine 1	Ümbertöötamine 2	Ümbertöötamine	Tarbija 1	Tarbija 2	Tarbija 3	Tarbija 4
1	17	27	1	46	41	53	18
2	22	22	2	61	16	43	58
3	18	48					

Kuidas suunata toorainet ja valmissaadusi, et veokulud oleksid vähimad?

V.A. Maš [21] soovitab ülesannet lahendada järgmiselt. Töötlemisettevõtteid tuleb vaadelda kord "tarbijana", kord "tootjana" (vt.tabel 9-22). Kaugused sama ettevõtte puhul on nullid. Et vältida tooraine otsest sattumist tarbijale ja valmistoodangu viimist teise samalaadsesse ettevõttesse, jätame vastavad lahtrid kas vaatluse alt välja või võtame kaugusteks suured arvud M > 0.

Tabel 9-22

		Ümbertöötamine 200	Ümbertöötamine 300	Tarbijad 50	Tarbijad 100	Tarbijad 200	Tarbijad 150
Tooraine	100	17	27	×	×	×	×
Tooraine	150	22	22	×	×	×	×
Tooraine	250	18	48	×	×	×	×
Ümbertöötamine	200	0	×	46	41	53	18
Ümbertöötamine	300	×	0	61	16	43	58

T a b e l 9-23

	200	300	50	100	200	150
100	17	27 100	X	X	X	X
150	22	22 150	X	X	X	X
250	18 200	48 50	X	X	X	X
200	0	X	46 50	41	53	18 150
300	X	0	61	16 100	43 200	58

Tabel 9-23 sisaldab vastuse:

tooraine suundub 1 baasist 2 ettevõttesse (100 ühikut),
2 -"- 2 -"- (150 -"-),
3 -"- 1 -"- (200 -"-),
3 -"- 2 -"- (50 -"-);

valmistoodang suundub 1 ettevõttest 1 tarbijale (50 ühikut),
1 - " - 4 - " - (150 - " -),
2 - " - 2 - " - (100 - " -),
2 - " - 3 - " - (200 - " -).

Veokulud on kokku 27200 (12000 + 15200) ühikut.

Järgmised ülesanded lahendada eelmise näite eeskujul.

9-22. Toorainebaaside võimsused: 1 - 100, 2 - 140, 3 - 80 ja 4 - 20 ühikut.

Töötlemisettevõtete võimsused: 1 - 160, 2 - 150 ja 3 - 130 ühikut.

Tarbijate vajadused: 1 - 40, 2 - 80, 3 - 100, 4 - 60, 5 - 140 ja 6 - 120 ühikut.

Kaugused:

Tooraine	Ümbertöötamine 1	2	3
1	2	4	3
2	3	3	2
3	1	5	2
4	2	4	1

Ümbertöötamine	Tarbijad 1	2	3	4	5	6
1	1	3	1	3	5	2
2	4	1	4	3	6	7
3	5	3	5	6	4	3

9-23. Põllukive purustatakse killustikuks, mida kasutatakse asfaltteede pindamiseks. Kive saab 5 kohast 20-, 30-, 25-, 20- ja 15-ühikulistes kogustes. Kivipurustamismasinad asuvad kahes kohas ja nende võimsused on 40 ning 70 ühikut. Magistraalteed vajavad killustikku 10, 15, 15, 10, 10, 25, 5, 10 ja 10 ühikut.

Kaugused:

Põllud	Masinad 1	2
1	6	8
2	4	0
3	0	2
4	10	3
5	4	10

Masinad	Magistraalteed 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	11	0	12	17	15	6	10	12	10
2	12	25	6	0	10	8	13	7	18

9-24. Punktides i_1 ja i_2 toodetakse toorainet kuni 500 ning 1000 ühikut, ühiku tootmiskulud mõlemas kohas on 60 rbl. See viiakse tehastesse k_1 ja k_2 ümbertöötamisele. Veokulud $i_1 \to k_2$ on 60 rbl., $i_1 \to k_2$ 120 rbl., $i_2 \to k_1$ 180 rbl. ja $i_2 \to k_2$ 60 rbl. ühikult. Tehased valmistavad kahte toodet. Valmistoodangu plaan on tehasel k_1 vähemalt 600 ühikut sordist A, kuid üle 800 ühiku ta valmistada ei suuda; sordist B saab valmistada kuni 2000 ühikut. Tehas k_2 võib valmistada kuni 700 ühikut sordist A ja 1600 ühikut sordist B. Ühest tooraine ühikust saab valmistada kas kaks ühikut toodet A või neli ühikut toodet B. Ühe ühiku A valmistamine maksab tehases k_1 90 rbl. ja tehases k_2 60 rbl.; toote B ühiku kohta on kulud mõlemas vabrikus 15 rbl. Valmistoodangu ühiku veokulud tehastest tarbijatele j_1 ja j_2 (olenemata sordist):

Tehas \ Tarbija	j_1	j_2
k_1	30	50
k_2	60	70

Tarbija j_1 vajab kaupa 1500 ühikut sordist A, millest 1000 ühikut võib asendada 2000 ühikuga sordist B; j_2 soovib 1200 ühikut sordist A, kusjuures 900 ühiku asemel võib saada 1800 ühikut sordist B.

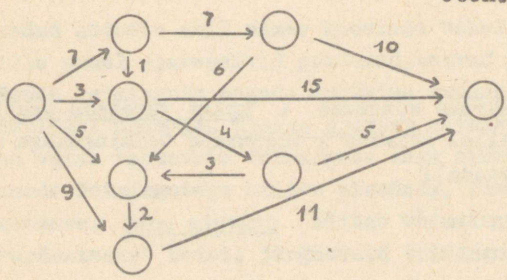
Koostada tootmise ja vedamise kompleksplaan, mille puhul üldkulud oleksid vähimad.

10. VÕRKPLANEERIMINE

Kirjandusest, mis käsitleb võrkplaneerimist, mainiksime artikleid [7] ja [23] ning raamatut [19], kus vaadeldakse lahendusvõtteid, kuna brošüürides [17] ja [25] on konkreetseid näiteid tootmisest. Brošüüris [26] on samuti mitmeid näiteid ja harjutusülesandeid. Võrkplaneerimise rakendamiseks ehitustel on välja antud juhendid [15].

N ä i d e 10-1. Teatud tööde kompleks on kujutatud võrgu abil (joon. 10-1).

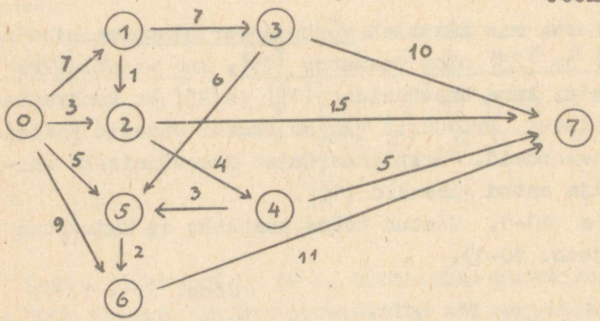
Joon. 10 - 1.



Alustame sündmuste numereerimisega. Kuigi seda võib teha vabas järjekorras, alates lähtesündmusest ja lõpetades eesmärksündmusega, on soovitatav kasutada järgnevas kirjeldatud järjestuseeskirja, sest selle abil avastatakse kinnised tsüklid võrkskeemil (mida ei tohi olla) ja iga toiming (töö, tegevus) algab väiksema numbriga sõlmest ning lõpeb suurema numbriga sõlmes.

Lähtesündmuse, s.t. sündmuse, millele ei eelne ühtegi toimingut, tähistame 0-ga. Kustutame selle koos väljuvate nooltega. Sündmuse, mis omab nüüd ainult väljuvaid toiminguid, tähistame 1-ga. Kustutame tema koos väljuvate kiirtega ja määrame sõlme 2 jne. Võib juhtuda, et korraga saab numbri panna mitmele sõlmele. Sel juhul numereerime vabalt. Nii võivad antud juhul 2 ja 3 vahetada asukohad. Meie numereeritud võrkskeem on joonisel 10-2.

Joon. 10-2



Seejärel määrame sündmuse i <u>kõige varasema saabumise</u> aja t_i^o (aeg, millal sõlmest i väljuvate toimingutega saab kõige varem alustada):

$$t_1^o = 7,$$

$$t_2^o = \max(3;\ 7+1) = 8,$$

$$t_3^o = 7 + 7 = 14,$$

$$t_4^o = 12,$$

$t_5^o = \max(5; 9; 20; 17) = 20,$
$t_6^o = \max(9; 22) = 22,$
$t_7^o = \max(14 + 10; 8 + 15; 12 + 5; 22 + 11) = 33.$

Edasi määrame kindlaks sündmuse j <u>kõige hilisema lubatava saabumise momendi</u> t_j^1. Alustame lõpust:

$t_7^1 = 33$ (üldaeg),

$t_6^1 = 33 - 11 = 22,$

$t_5^1 = 22 - 2 = 20,$

$t_4^1 = \min(33 - 5; 20 - 3) = 17,$

$t_3^1 = \min(33 - 10; 20 - 16) = 14,$

$t_2^1 = \min(27; 13; 19) = 13,$

$t_1^1 = \min(7; 12) = 7.$

Saadud andmete abil saame koostada tabeli 10-1. Toimingud, mille puhul ajareservid puuduvad, asuvad <u>kriitilisel teel</u>. Nende toimingute aegade muutmine muudab otsekohe kogu töödekompleksi üldaega. <u>Üldine ajavaru</u> näitab, kui suures ulatuses võime vastavate toimingute aega suurendada või kui palju nende toimingutega hiljem alustada, ilma kriitilist teed muutmata. <u>Vaba ajavaru</u> näitab võimalust toiminguga "manööverdamiseks" teisi, järgnevaid toiminguid muutmata.

Nüüd on võimalus terve tööde kompleksi läbitöötamiseks, et vähendada koguaega $t_n^o = t_n^1$.

T a b e l 10-1

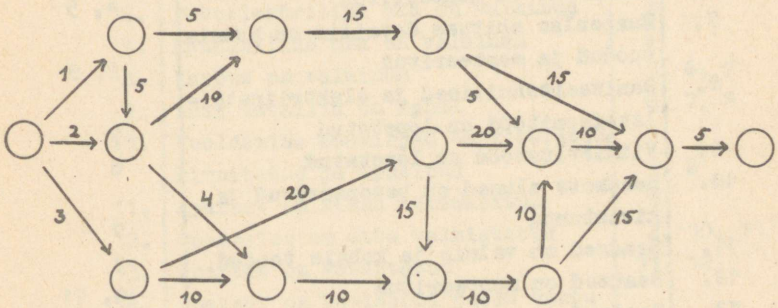
Toi-ming	Aja-kulu	Toimingu alustamise aeg		Toimingu lõpetamise aeg		Üldine ajavaru	Vaba ajavaru
		varasem	hilisem	varasem	hilisem		
	a_{ij}	t_i^o	$t_j^1-a_{ij}$	$t_i^o+a_{ij}$	t_j^1	$t_j^1-t_i^o-a_{ij}$	$t_j^o-t_i^o-a_{ij}$
0; 1	7	0	0	7	7	0	0
0; 2	3	0	10	3	13	10	5
0; 5	5	0	15	5	20	15	15
0; 6	9	0	13	9	22	13	13
1; 2	1	7	12	8	13	5	0
1; 3	7	7	7	14	14	0	0
2; 4	4	8	13	12	17	5	0
2; 5	1	8	19	9	20	11	11
3; 5	6	14	14	20	20	0	0
3; 7	10	14	23	24	33	9	9
4; 5	3	12	17	15	20	5	5
4; 7	5	12	28	17	33	16	16
5; 6	2	20	20	22	22	0	0
6; 7	11	22	22	33	33	0	0

Ü l e s a n d e d

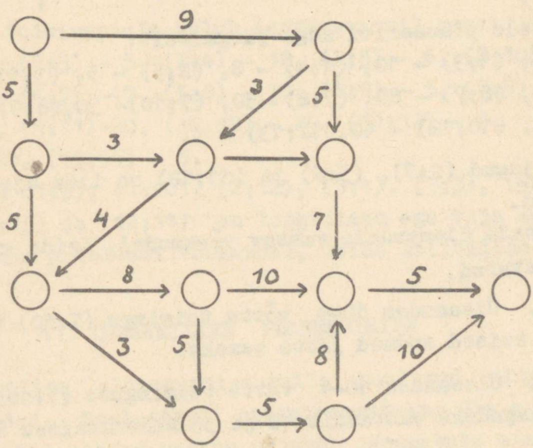
10-1. Näites 10-1 esitatud projekti analüüsimisel selgus, et toiminguteks (0; 5), (0; 6), (2; 5) ja (4; 7) võib eraldada planeeritust vähem vahendeid, mistõttu nendele kulub aega vastavalt 10, 8, 7, 5 ja 12 ajaühikut (näiteks nädalat). Vabanevaid vahendeid võib paigutada toimingute (0; 1), (1; 3), (3; 5) ja (6; 7) läbiviimiseks, mistõttu nendele kulub aega vastavalt 5, 5 , 5 ja 7 ajaühikut. Leida kriitiline tee ja teistele toimingutele vastavad ajavarud.

Järgmistes võrkskeemides leida kriitiline tee ning arvutada ajavarud:

10-2.



10-3.



10-4. Tehasehoone ehitamise kohta koostati järgmine plaan:

Sündmus	S i s u	Eelnev sündmus
1.	Projekt on kinnitatud	
2.	Ehitusmaterjalid on tellitud	1
3.	Seadmed on tellitud	1
4.	Vundamendi süvis on valmis	1
5.	Vundamendi plokid on kohale toodud	2
6.	Vundament on monteeritud	4, 5
7.	Maapealse ehituse detailid on kohale toodud ja monteeritud	2, 6
8.	Sanitaartehnilised ja elektriinstallatsioonitööd on lõpetatud	7
9.	Viimistlustööd on lõpetatud	8
10.	Seadmete alused on betoneeritud ja kivistunud	7
11.	Seadmed on valmis ja kohale toodud	3
12.	Seadmed on monteeritud	10, 11
13.	Seadmed on proovitud	12
14.	Objekt on ekspluatatsiooni antud	9, 13

Toimingutele planeeriti aega järgmiselt: (1;2) - 5, (1;3) - 10, (1;4) - 8, (2;5) - 5, (3;11) - 100, (4;6) -20, (6;7) - 80, (7;8) - 50, (7;10)- 30,(8;9) - 40 , (9;14) - 5, (10;12) - 40,(12;13) - 5.

Toimingud (2;7), (5;6) ja (11;12) on ilma ajata loogilised seosed.

Koostada ülesandele vastav võrkmudel. Leida kriitiline tee ja ajavarud.

10-5. Ülesandes 10-4 võtta toimingu (7;10) täitmise ajaks 40, teised andmed jätta samaks.

10-6. Ülesandes 10-4 võtta toimingute (7;10) ja (8;9) täitmise aegadeks vastavalt 40 ja 35 ühikut, teised andmed jätta samaks.

10-7. Aparaadi ehitamise plaan kavandati järgmiste etappidena:

Sündmus	S i s u	Eelnev sündmus
1.	Skeem on kinnitatud	
2.	Tehniline dokumentatsioon on valmis	1
3.	Fotoelektriline osa on tellitud	1, 2
4.	Mehaaniline osa on tellitud	2, 3
5.	Korpus on tellitud	2, 3, 4
6.	Fotoelektriline osa on valminud	3
7.	Mehaaniline osa on valminud	4
8.	Korpus on valminud	5, 6, 7
9.	Kõik detailid on kohal	6, 7, 8
10.	Hooldamise eeskirjad on koostatud, kinnitatud ja trükitud	1, 2
11.	Aparaat on kokku monteeritud	9
12.	Operaator on ette valmistatud	2, 10, 11
13.	Aparaat on katsetatud	11, 12
14.	Aparaat on komisjoni poolt vastu võetud	12, 13

Üksikutele toimingutele kulub (arvatavasti) aega: (1;2) - 20, (2;3) - 5, (2;4) - 12, (2;5) - 6, (2;10) - 20, (3;6) - 50, (4;7) -47, (5;8) - 30, (6;9) - 5, (7;9) - 3, (8;9) - 3, (9;11)-20, (10;12) - 20, (11;12) - 8, (11;13) - 20, (13;14) - 5.

Seosed (1;3), (1;10), (2;12), (3;4), (3;5), (4;5), (6;8), (7;8), (12;13) ja (12;14) on loogilised ega vaja aega.

Koostada probleemi võrkmudel, leida kriitiline tee ning ajavarud.

11. DÜNAAMILINE PLANEERIMINE

Dünaamilise planeerimise alla kuuluvad mitmeetapilised ülesanded. Igal etapil optimiseeritakse üks osa ülesandest, kusjuures saadud vastus mõjutab järgnevate etappide lähteandmeid. Kirjandusest mainiksime artiklit [6] ja raamatuid

[13] ning [14].

Ü l e s a n d e d

Lahendada tabelmeetodil.

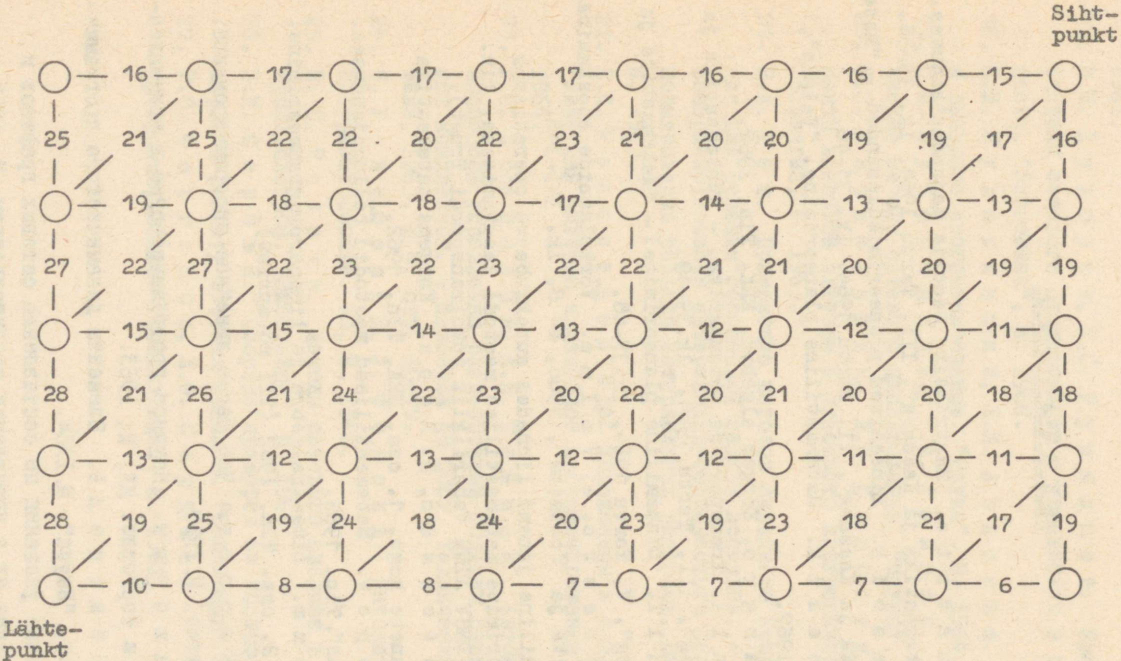
13-1. Üks tööline võib jälgida mitme kudumisautomaadi tööd. Kolme töölise toodang vahetuses, olenevalt automaatide arvust, on tabelis. Üldse on automaate 7.

	Kudumisautomaatide arv							
Tööline	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	7	13	19	22	30	35	40
B	0	6	11	16	20	25	29	34
C	0	7	12	17	22	29	34	39

Mitme automaadiga peaks iga tööline töötama, et toodang oleks suurim?

Ühel päeval selgus, et üks automaatidest vajab remonti. Mitme automaadiga peab iga tööline nüüd töötama, et toodang oleks suurim?

13-2. Reisijaid veetakse üle kiirevoolulise jõe mootorpaadiga. Tabelis 13-1 on antud kütusekulu igast sõlmpunktist edasisõitmisel. Millist teed mööda sõites on kütusekulu vähim?


Siht-
punkt
16 17 17 17 16 16 15
25 21 25 22 22 20 22 23 21 20 20 19 19 17 16
19 18 18 17 14 13 13
27 22 27 22 23 22 23 22 22 21 21 20 20 19 19
15 15 14 13 12 12 11
28 21 26 21 24 22 23 20 22 20 21 20 20 18 18
13 12 13 12 12 11 11
28 19 25 19 24 18 24 20 23 19 23 18 21 17 19
10 8 8 7 7 7 6
Lähte-
punkt

Tabel 13-1

K I R J A N D U S

1. Ü. E n n u s t e. Maatriksite teooria majandusteaduses. - "Matemaatika ja Kaasaeg", III, Tartu 1964, lk. 33-38.
2. Ü. K a a s i k. Lineaarsed planeerimisülesanded.- "Matemaatika ja Kaasaeg", II, Tartu 1964, lk. 31-46.
3. Ü. K a a s i k. Matemaatiline planeerimine. "Valgus", Tln. 1967.
4. G. K a n g r o. Kõrgem algebra. ERK, Tln. 1962.
5. I. K u l l. Transport ja matemaatika. - "Matemaatika ja Kaasaeg", III, Tartu 1964, lk.39-49.
6. I. K u l l. Dünaamiline planeerimine.- "Matemaatika ja Kaasaeg", V, Tartu 1964, lk.37-48.
7. U. M e r e s t e, A. V a l m a. Võrkplaanide koostamine. "Tehnika ja Tootmine", 1966, № 8, lk. 345-348.
8. Metoodiline juhend linnades autokaubaveo operatiivse planeerimise matemaatilise meetodi kasutamiseks. Tln. 1962 (ENSV ATMM Vabariiklik Autotranspordi Trust).
9. I. P e t e r s e n, H. R o o s. Kõrgema matemaatika ülesannete kogu. 1. osa. ERK, Tln. 1962.
10. I. P o p o v. Matemaatilised meetodid põllumajanduses. "Valgus", Tln. 1966.
11. M. T a m m. Lineaaralgebra ja lineaarprogrammeerimine. 1. ja 2. osa. Tln. 1962 (TPI rotaprint).
12. А.С. Б а р с о в. Что такое линейное программирование. Физматгиз, М.1959.
13. А. В а ж о н ь и. Научное программирование в промышленности и торговле. ИЛ, М. 1963.
14. Е.С. В е н т ц е л ь. Элементы динамического программирования. "Наука", М.1964.
15. Временные указания по составлению сетевых графиков и применение их в управлении строительством. М. 1964. (Гос. комитет по делам строительства СССР).

16. С. Гасс. Линейное программирование. Физматгиз, М. 1961.
17. В.И. Дудорин, В.С. Румянцев. Применение системы сетевого планирования и управления в промышленности. "Экономика", М. 1966.
18. С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. Линейное и выпуклое программирование. "Наука", М. 1964.
19. С.И. Зуховицкий, И.А. Радчик. Математические методы сетевого планирования. "Наука", М. 1965.
20. Ф.И. Карпелевич, Л.Е. Садовский. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. Физматгиз, М. 1963.
21. В.А. Маш. Применение методов линейного программирования для решения обобщенной задачи поставок. - Вопросы совершенствования материально-технического снабжения и нормирования расхода материальных ресурсов. Экономиздат, М. 1963.
22. Е.К. Мелентьев и др. Упражнения и задачи по курсу "Линейная алгебра и линейное программирование". Куйбышев 1964.
23. Г.С. Поспелов, А.Н. Тейман. Автоматизация процессов управления разработками больших систем или сложных комплексов. - Известия АН СССР, Техническая кибернетика, 1963, № 4, стр. 60-79.
24. Н. Рейнфельд, У. Фогель. Математическое программирование. ИЛ, М. 1960.
25. В. С. Рексин. Методы сетевого анализа в управлении производством. "Экономика", М. 1966.
26. З.И. Серова. Сборник примеров по построению, проверке и расчету сетевых моделей. "Экономика", М. 1966.
27. Р.О. Фергюсон, Л.Ф. Сарджент. Линейное программирование. Госстатиздат, М. 1962.

Käsikirja toimetamise ajal on ilmunud veel:

U. M e r e s t e. Võrkanalüüs majandusettevõtete juhtimises. "Eesti Raamat", Tln. 1967.

J. R e i m a n d. Lineaarne planeerimine. - Kogumik: B. Hanko jt. Täiendavaid teemasid koolimatemaatikale. "Valgus", Tln. 1967, lk. 58 - 132.

S I S U K O R D

Hind 13 kop.