

PAUL EDERBERG
TALLINNA LINNA POEGLASTE REAALGÜMNAASIUMI ÕPETAJA

ALGEBRA
ÜLESANNETE
KOGU

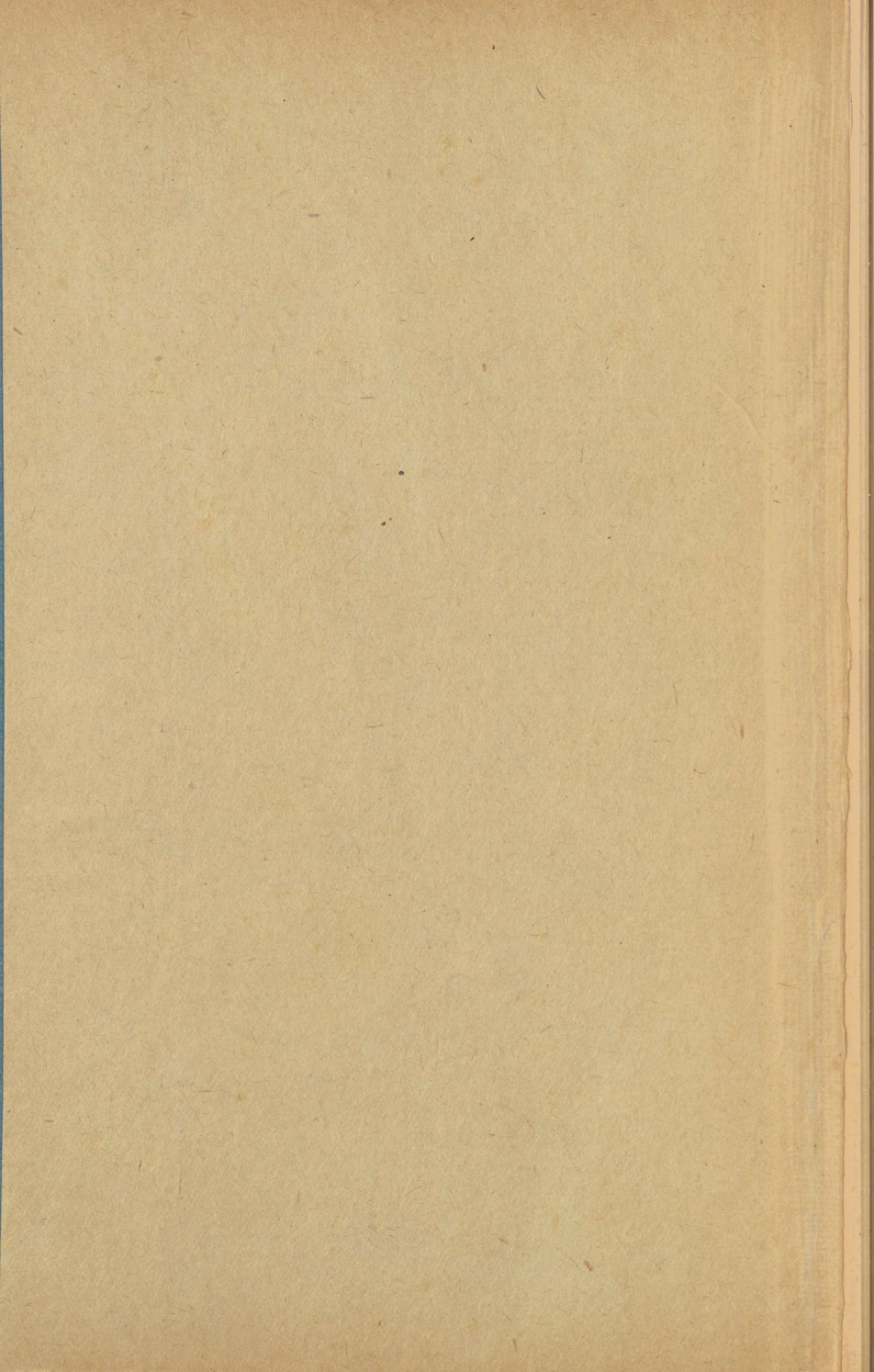
JA KOKKUVÕTLIK KÄSIRAAMAT

III

(KESKKOOLI IV JA V KLASSI JAOKS)

1924

TALLINNA EESTI KIRJASTUS-ÜHISUS



A-6020

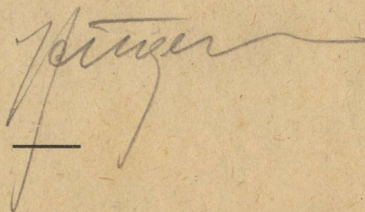
PAUL EDERBERG
TALLINNA LINNA POEGL. REAALGÜMNAASIUMI ÕPETAJA

ALGEBRA ÜLESANNETE KOGU

JA KOKKUVÕTLIK KÄSIRAAMAT

III

(KESKKOOLI IV JA V KLASSI JAOKS)



1924

TALLINNA EESTI KIRJASTUS-ÜHISUS

Varem ilmusid:

**Täis- ning murdavaldused ja esimese astme
võrrandid (I jagu)**

Juured ja ruutvõrrandid (II jagu)

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

Eessõna.

Käesolev vihk on samas mõttes kokku seatud nagu eelmised kaks. Kõige südamlikumat tänu ütlen ametivendadele hra J. Kiivetile, kes metoodilisest küljest kaasa aitas, ja hra E. Gutmannile, kes käsikirjale lõpuliku kuju andis.

Tallinnas, 2. jaanuaril 1924. a.

P. Ederberg.

Sisukord.

§ 1. Logaritmid	5
§ 2. Aritmeetiline ja geomeetriline rida	24
§ 3. Lühendatud tehted	36
§ 4. Arvutuslükat	47
§ 5. Liitprotsendid ja tähtajalised maksud	58
§ 6. Kombinatorika	66
§ 7. Algmõisted tõenäosuse õpetusest	73
§ 8. Algteated kinnitusarvutusest	79
Vastused	93

§ 1. Logaritmid.

Olgu antud suhe:

$$x = a^y.$$

Kui meil eksponendi y -i järgi oli vaja leida aste x , siis nimetasime seda tehet astendamiseks ja funktsiooni a^y , mis võrdub x -ga, — eksponentfunktsiooniks. Ümberpööratud, kui x -i järgi tuleb leida y , nimetatakse tehet logaritmimeks, x — arvuks, y — arvu x -i logaritmiks ja eksponentfunktsioonile $x = a^y$ vastavat pöördfunktsiooni, n. n. logaritmilist funktsiooni, tähendatakse nii: $y = \log_a x$. Logaritmade aluseks a võetakse harilikult arv 10 (**küm-nendlogaritmid**), mispärast logaritmilist funktsiooni tähendame sel puhul lühidalt:

$$y = \log x.$$

A.

Logaritmilise funktsiooni graafiline esitamine ja logaritmade graafiline määramine aluse 10-e juures.

Seks tuleb arvutada funktsioon $x = 10^y$, kus y muutub väärtusest $-\infty$ kuni väärtuseni $+\infty$.

Nii saame:

$$10^0 = 1$$

$$10^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{10} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 1,33$$

$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}} = 1,78$$

$$10^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{10^3} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{1000}}} = 2,37$$

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt[8]{10} = 3,16$$

$$10^{\frac{5}{8}} = \sqrt[4]{10^5} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{100000}}} = 4,22$$

$$10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[8]{10^3} = \sqrt{\sqrt{1000}} = 5,62$$

$$10^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{10^7} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10000000}}} = 7,50$$

$$10^1 = 1$$

.....

$$10^{+\infty} = +\infty$$

ja negatiivsete astmete vallas

$$10^{-\infty} = 0$$

.....

$$10^{-1} = 0,1$$

$$10^{-\frac{7}{8}} = 10^{\frac{1}{8}} : 10^1 = 1,33 : 10 = 0,13$$

$$10^{-\frac{3}{4}} = 10^{\frac{1}{4}} : 10^1 = 1,78 : 10 = 0,18$$

$$10^{-\frac{5}{8}} = 10^{\frac{3}{8}} : 10^1 = 2,37 : 10 = 0,24$$

$$10^{-\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} : 10^1 = 3,16 : 10 = 0,32$$

$$10^{-\frac{3}{8}} = 10^{\frac{5}{8}} : 10^1 = 4,22 : 10 = 0,42$$

$$10^{-\frac{1}{4}} = 10^{\frac{3}{4}} : 10^1 = 5,62 : 10 = 0,56$$

$$10^{-\frac{1}{8}} = 10^{\frac{7}{8}} : 10^1 = 7,50 : 10 = 0,75$$

Niiviisi saame väärtuste tabeli:

x=	0,1	0,13	0,18	0,24	0,32	0,42	0,56	0,75	1	1,33	1,78	2,37	3,16	4,22	5,62	7,50	1
y=	-1	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1

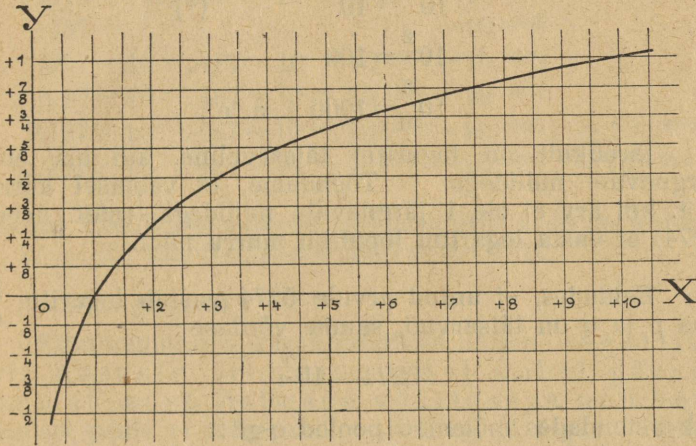
Resultaat on esitatud graafiliselt joonisel nr. 1.

Väärtuste reast ja graafikast jargneb:

Negatiivsetel arvudel logaritmised ei ole; positiivse arvu kasvamisel kasvab ka tema logaritm, kusjuures

arvu 1-e juures astub logaritmi negatiivsest vallas positiivsesse.

Nimetus „logaritm“ on võetud avaldusest: „λόγος ἀριθμός (lógos arithmós)“ = suhte arv, sest y-i väärtused määravad, missuguses suhtes on x-i väärtused.



Joonis 1.

Joonisel nr. 1 esitatud kõver lubab ligikaudu määrata antud arvu logaritmi aluse 10-ne juures. Antud abstsissile vastava kõverjoone punkti ordinaat on otsitav logaritm. Mida suurem on joonis, seda täpsemalt määratakse logaritm.

1. Joon. nr. 1 põhjal leida:

$\log 2$; $\log 3,5$; $\log 4$; $\log 4,5$; $\log 6$; $\log 6,5$; $\log 7$; $\log 8$; $\log 9$.

Logaritmade arvutamise kohta mistahes peenuseni v. nr. 340, lhk. 46.

B.

Ühe ja sama aluse juures võetud logaritmid moodustavad logaritmade süsteemi. Tegelikul tarvitamisel olevad tabelid on aluse 10-ne jaoks kokku seatud.

2. Näita, et logaritmade mistahes süsteemi juures on õige:

$$\log_a 1 = 0 \text{ ja } \log_a a = 1.$$

Paneme tähele järgmised kümnendlogaritmid oma-
dused.

1) On teada:

$$\begin{aligned} 10^0 &= 1 \\ 10^1 &= 10 & (*) \\ 10^2 &= 100 \\ 10^3 &= 1000 \text{ j. n. e.;} \end{aligned}$$

järelikult on logaritmi täisarvuline, kui arv on 1 järgnevate nullidega. — Tõendame, et vastasel korral, s. t. kui arv ei ole 1 järgnevate nullidega, (näit. arvule 5274) ei vasta logaritmi lõpuliku murru näol.

Eeldades, et antud arvule 5274 vastab logaritmi $\frac{p}{q}$, kus p ja q on täisarvud, saame võrduse:

$$5274 = 10^{\frac{p}{q}}$$

ehk astendades mõlemad pooled q -ga:

$$5274^q = 10^p.$$

Paremalt poolel on aste 10^p — arv 1 järgnevate nullidega, pahemalt poolel arv 5274 mistahes täisarvulisel astmel ei võrdu 1-ga järgnevate nullidega, mispärast eeldus on vale.

Üldse seisab logaritmi koos: täisosast (karakteristikust) ja murdosast (mantissist, mis tähendab: jääk, jääkliige). Viimase võtame meie edaspidi harilikult 4-ja kümnendkohaga.

Reast (*) järgneb veel, et

ühekohaga arvu logaritmi on 0 ja 1 vahel,
kahekohaga arvu logaritmi on 1 ja 2 vahel,
kolmekohaga arvu logaritmi on 2 ja 3 vahel jne.,
üldse, täisarvu (ja ka segaarvu) kümnendlogaritmi karakteristik on arvu täisosa numbrite arvust ühe võrra väiksem.

2) Olgu teada, et

$$487 = 10^{2,6875}.$$

Siis on:

$$48700 = 100 \cdot 487 = 10^2 \cdot 10^{2,6875} = 10^{4,6875}$$

$$4870 = 10 \cdot 487 = 10^1 \cdot 10^{2,6875} = 10^{3,6875}$$

$$487 = = 10^{2,6875}$$

$$48,7 = 10^{-1} \cdot 487 = 10^{-1} \cdot 10^{2,6875} = 10^{1,6875}$$

$$4,87 = 10^{-2} \cdot 487 = 10^{-2} \cdot 10^{2,6875} = 10^{0,6875}$$

$$0,487 = 10^{-3} \cdot 487 = 10^{-3} \cdot 10^{2,6875} = 10^{0,6875-1} = 10^{-1,6875}$$

$$0,0487 = 10^{-4} \cdot 487 = 10^{-4} \cdot 10^{2,6875} = 10^{0,6875-2} = 10^{-2,6875}$$

[1,6875; 2,6875 tähendavad, et karakteristik on negatiivne (− 1; − 2), mantiss positiivne (+ 0,6875)].

Sellest järgneb:

Kümnendmurru karakteristikus näitab negatiivsete üksuste arv, mitmendal kohal pärast kommat asub esimene väärtusega number; mantissi peale ei mõju nullid arvu eel ja taga; mantiss oleneb ainult väärtusega numbritest ja nende järjekorrast.

1) ja 2) punkti juhiste põhjal on arusaadav, mispärast logaritmid tabelites leiduvad ainult mantissid.

Leida järgmiste arvude logaritmid:

3.	234	4.	52600	5.	0,324
	406		23		0,0069
	509		8		0,0793
	460		21,8		0,000032
			5,34		

Mis arvudel on järgmised logaritmid:

6.	2,3838	7.	1,9279	8.	1,9294
	2,4150		0,3927		2,9090
	2,9991		0,8082		3,6990
			0,7782		4,3139

Näide 1. Leida log 46,38.

Lahendus:

Arv	Logaritm
log 46,3	= 1,6656
log 46,4	= 1,6665

Vahe 10 sajan- 9 kümnetuhandikku
dikka

1	"	0,9	"
---	---	-----	---

8	"	7,2	"
---	---	-----	---

$$\log 46,38 = 1,6663.$$

Seletus: Arvu 46,38 ei leidu tabelis. Niisugusel puhul võetakse tabelist nende kahe järjestikkuse arvu mantissid, mille vahel asub antud arv. Arvu viimase numbri kasvamisel 1-e võrra (46,3-st 46,4-ni) kasvab logaritmid vahe 9 kümnetuhandikku (loe ka tabelist, mis arvust mis arvuni kasvab „tabeli vahe“ 9 kümnetuhandiku võrra). Arvude vahe ja vastavate logaritmid vahe ligikaudse proportsionaalsuse tõttu võib üleval tähendatud teed käia ja arvu 46,3 logaritmile (=1,6656) 7 kümnetuhandikku juure lisades lugeda:

$$\log 46,38 = 1,6663.$$

Märkus: Funktsiooni 2-le antud väärtusele kolmanda vahelmise väärtuse otsimist (v. näited 1—3) nimetatakse interpoolimiseks.

9. Leida järgmiste arvude logaritmid:

2857	60,79
------	-------

608,4	0,7135
-------	--------

690,8	0,02407
-------	---------

18,43	
-------	--

10. Üles tähendada järgmiste arvude logaritmid (arvude 1000—1099 mantissid on antud tabelis 5-e kohaga).

1,01

1,025

1,04

1,045

11. Leida järgmiste arvude logaritmid, interpoolimist tarvitades arvu viienda koha suhtes.

1,0255
1,0375
1,0845
100,25
0,010605

Märkus: Ka sel puhul, kui tabelist saab mantissi ainult arvu kolme esimese numbri jaoks, tuleb interpoolimisel peale arvu 4-da numbri ka järgmised numbrid arvesse võtta, nii palju kui nad võivad mõjuda mantissi nelja esimese koha peale.

Näide 2: Leida log 17,238.

Lahendus:

$$\begin{array}{r} \log 17,2 = 1,2355 \\ 3 \dots 7,5 \\ 8 \dots 2,0 \\ \hline \end{array}$$

$$\log 17,238 = 1,2365$$

Seletus: Kui arvul oleks 8 neljandal kohal, tuleks mantissile juure 20; 8 on aga kohal, mis 10 korda vähem, sellepärast ka mantissile 10 korda vähem, s. t. 2 juure!

12. Leida järgmiste arvude logaritmid:

156,87 0,19267
1342,4 30,018
49,419 27,006.

Näide 3: Mis arvul on logaritm 1,5745?

Lahendus. Antud logaritmi tabelis et ole, kuid tema on järgmise kahe vahel

$$1,5740 = \log 37,5$$

$$1,5752 = \log 37,6$$

Vahe 12 kümne- 10 sajandikku
 tuhandikku

1 " $\frac{10}{12}$ "

Meil tuleb logaritmile 5 " $\frac{50}{12} \approx 4$ "

1,5740 juure

Nii saame: 1,5745 = log 37,54

13. Mis arvudele vastavad järgmised logaritmid:

3,7654	2,6024
2,5006	1,4827
1,8925	0,0429
0,3249	

Kontrollida vastuste õigeolu, leitud arvudele logaritmisid otsides!

14. Arvutada x 5-e kohaga, kui:

$$\log x = 2,01247$$

$$\log x = 0,01764$$

$$\log x = 0,00253$$

$$\log x = 1,02599$$

C. Tehete sooritamine logaritmade tabelite abil.

I. Kasvatamine.

Näide 4: Kasvatada $42,59 \cdot 6,083$

Lahendus. Esitame tegurid astmetena 10-st. Eksponendid (logaritmid) leiame tabelist. Niiviisi saame:

$$\begin{aligned} 42,59 \cdot 6,083 &= 10^{1,6293} \cdot 10^{0,7841} = \\ &= 10^{1,6293 + 0,7841} = 10^{2,4134} \end{aligned}$$

Eksponendile (logaritmile) 2,4134 vastavat arvu otsides leiame, et kasvatis

$$42,59 \cdot 6,083 = 259,1.$$

Arvude otsekohese kasvatamise asemel mindi siin üle nende arvude logaritmade liitmisele, missugune tehe kergem teostada. On arusaadav, et nimetatud käsitusviis jääb maksvaks logaritmade mistahes aluse juures. Siin paneme eriti tähele juba ülesande lahendamisel eeldatud lauset, et kasvatise logaritm võrdub tegurite logaritmade summaga ($2,4134 = 1,6293 + 0,7841$), mille kirjutus kujul:

$$\log (42,59 \cdot 6,083) = \log 42,59 + \log 6,083$$

on logaritmade praktikas suure tähtsusega.

Arutame selle lause ka üldkujul.

Olgu $a = n^x$, kus $x = \log_n a$

$b = n^y$, „ $y = \log_n b$

$ab = n^{x+y}$, kus $x + y = \log_n (ab)$

Järel. $\log_n (ab) = \log_n a + \log_n b.$

15. Näita, et $\log (abc) = \log a + \log b + \log c.$

Näide 5: Leida kasvatis $2,547 \cdot 3,04 \cdot 0,5419.$

Lahendus: Tehte korraldame edaspidi nii.

Olgu kasvatis tähendatud x -ga:

$$x = 2,547 \cdot 3,04 \cdot 0,5419$$

Siis on:

$$\log x = \begin{cases} \log 2,547 = 0,4060 \\ \log 3,04 = 0,4829 \\ \log 0,5419 = 1,7339 \end{cases}$$

$$= 0,6228$$

$$x = 4,196$$

Leida kasvatised:

16. $5,268 \cdot 37,49$

17. $0,2976 \cdot 1,0293$

18. $21,04 \cdot 32,44 \cdot 0,7652$

19. $0,08651 \cdot 0,9475 \cdot 0,8652$

20. $423,7 \cdot 0,009834$

21. Arvutada $\log 6$, kui on teada $\log 2$ ja $\log 3.$

22. Mitu logaritmi on vaja teada, et nende abil võiks leida kõikide täisarvude logaritmid 1—100.

23. Mitu ha on 56830 tiinu?

(Tarvilised andmed võtta logaritmide tabelist).

24. Mitu tiinu on 82850 ha?

II. Jagamine.

Näide 6: Jagada $583,6 : 4,208.$

Lahendus:

$$583,6 : 4,208 = 10^{2,7661} : 10^{0,6241} = 10^{2,7661 - 0,6241} = 10^{2,1420} = 138,7.$$

Jagamine on muutunud lahutamiseks ja jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmid vahega.

25. Näidata üldkujul, et

$$\log_n \left(\frac{a}{b} \right) = \log_n a - \log_n b$$

Näide 7: Jagada 2,3087 : 0,08541.

Lahendus: Olgu

$$x = \frac{2,3087}{0,08541}$$

Kui soovitakse lahutamisel negatiivse karakteristika mitte tegemist teha, tuleks kohe jagatav ja jagaja 100 korda suurendada. Kuid meie käime seekord teist teed.

$$\log x = \begin{cases} \log 2,3087 = & 0,3634 \\ - \log 0,08541 = & - \bar{2},9316 = 1,0684 \\ & \hline & 1,4318 \\ & x = 27,03 \end{cases}$$

Seletus: 0,3634-st pidi lahutatama $\bar{2},9316$. Siin võib niiviisi kirjutada:

$$\bar{2},9316 = -2 + 0,9316 = \underline{\underline{-1,0684}},$$

millest ka järgneb ülemine kirjutus.

Rutuliseks transformimiseks (= muundamiseks) pane neme tähele niisuguse juhise: kui „-“ võetakse „pealt maha,“ tuleb karakteristik 1-e võrra vähendada ja mantissiks võetakse mantissi täiendus 1-ni.

Jagada:

26. 26,41 : 19,67

27. 0,4975 : 0,08996

28. 0,003652 : 0,05371

29. 8,061 : 0,06634

III. Astendamine.

Näide 8: Arvutada $7,938^3$

Lahendus: Tabelist leiame, et

$$\log 7,938 = 0,8997.$$

$$\text{Sellepärast: } 7,938^3 = (10^{0,8997})^3 = 10^{2,6991}$$

Logaritmile 2,6991 vastab arv 500,1, mispärast
 $7,938^3 = 500,1$.

Astendamise asemele astus kasvatamine, kusjuures
 $0,8997 \cdot 3 = 2,6991$ ehk $\log 500,1 = 3 \log 7,938$ —
 astme logaritm võrdub astmenäitajale kasvatatud aluse
 logaritmiga.

Tõendus üldkujul.

Olgu $a = n^x$, kus $x = \log_n a$.

Siis on $a^p = n^{px}$, kust $px = \log_n (a^p)$

$$\text{Järel. } \log_n (a^p) = p \log_n a.$$

Näide 9: Arvutada $0,05056^3$.

Lahendus: $x = 0,05056^3$.

$$\log x = 3 \log 0,05056 = 3 \cdot 2,7038 = 4,1114$$

$$x = 0,0001292.$$

Arvutada:

$$\mathbf{30.} \quad 31,06^2.$$

$$\mathbf{31.} \quad 9,287^3.$$

$$\mathbf{32.} \quad 0,2524^3.$$

$$\mathbf{33.} \quad 1,111^5.$$

IV. Juurimine.

Näide 10: Arvutada $\sqrt[3]{28,69}$

$$\text{Lahendus: } \sqrt[3]{28,69} = \sqrt[3]{10^{1,4578}} = 10^{\frac{1,4578}{3}} = 10^{0,4859} = 3,061.$$

Juurimine muutus jagamiseks ja juure logaritm võr-
 dub juuritava logaritmile jagatud juurenäitajaga.

$$\log \sqrt[3]{28,69} = \frac{1}{3} \log 28,69.$$

34. Näita, et üldse:

$$\log_n \sqrt[p]{a} = \frac{\log_n a}{p}$$

Näide 11: Arvutada $\sqrt[4]{0,6}$.

$$\text{Lahendus: } x = \sqrt[4]{0,6}$$

$$\log x = \frac{1}{4} \log 0,6 = \frac{1}{4} \cdot \bar{1},7782.$$

$\bar{1},7782$ -ku jagamiseks 4-jaga lisame karakteristikule 3 negatiivset üksust juure, jagatises saame $\bar{1}$; kui mantissile 3 positiivset üksust juure paneme, on

$$3,7782 : 4 = 0,9447.$$

Sellepärast: $\log x = \bar{1},9447$ ja $x = 0,8804$.

Arvutada juured:

$$35. \sqrt{6829}$$

$$38. \sqrt[3]{4463}$$

$$36. \sqrt{49,72}$$

$$39. \sqrt[4]{1000}$$

$$41. \sqrt{0,0010456}$$

$$37. \sqrt{0,07218}$$

$$40. 38,22^{\frac{1}{3}}$$

Punkti C. all (lhk. 12—16) öeldut kokku võttes leiame, et

II järgu	kasvatamise asemele astub liitmine	} I järgu		
tehete: { jagamise			lahutamine	tehted
III järgu	astendamise	} II järgu		
tehete: { juurimise			kasvatamine	tehted
			jagamine	

Arvutamisel logaritmidega väheneb tehte järk ühe võrra. Kasu logaritmidest tehte sooritamisel on silmnähtav. —

Logaritmid avaldused:

$$42. (ab)^3$$

$$48. \left(\frac{a+b}{x-y} \right)^4$$

$$53. \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$43. \sqrt{xy}$$

$$49. \sqrt{\frac{ab}{x-y}}$$

$$54. \sqrt[p]{\frac{a^m}{b^n}}$$

$$44. \frac{1}{x^4}$$

$$50. \sqrt[5]{a^3 b^2}$$

$$55. \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}$$

$$45. \sqrt[5]{a^3}$$

$$51. \frac{a^3 \sqrt{x}}{7by^2}$$

$$46. \frac{a(a+x)}{bc}$$

$$47. \frac{1}{a \sqrt[3]{b-c}}$$

$$52. \frac{a^2 - ab}{ab + b^2}$$

$$56. \sqrt{\frac{6}{\sqrt{15}}}$$

Leida arvud järgmistele logaritmidetele:

57. $\log a - \log b$

58. $3 \log a + 2 \log b$

59. $5 (\log m - \log n)$

60. $\frac{1}{3} \log a + \frac{1}{2} \log b - \frac{1}{4} \log c$

61. $\frac{1}{p} \log a - \frac{1}{q} \log b$

62. $\frac{1}{p} (4 \log a + \frac{1}{2} \log b - \log c)$

63. $\log (a^2 + b^2) - \frac{1}{2} [\log (a + b) + \log (a - b)]$

Näide 12: Arvutada:

$$x = 8,364 \sqrt[3]{\frac{25,49}{0,03472 \cdot 0,8644}}$$

Lahendus:

$$\log x = \log 8,364 + \frac{1}{3} (\log 25,49 - \log 0,03472 - \log 0,8644)$$

$$\begin{array}{r} \log 25,49 = 1,4063 \\ - \log 0,03472 = - 2,5406 = 1,4594 \\ - \log 0,8644 = - 1,9367 = 0,0633 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} S = 2,9290 \\ \frac{1}{3} S = 0,9763 \\ \log 8,364 = 0,9224 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log x = 1,8987 \\ x = 79,2. \end{array}$$

Arvutada:

64. $\sqrt{68900 \cdot 0,325}$

68. $3,4468^{\frac{2}{3}}$

65. $56,74 \sqrt{0,010347}$

69. $0,06084^{\frac{5}{3}}$

66. $\frac{24,387}{36,49 \cdot 0,01886}$

70. $\left(\frac{53}{67}\right)^5$

67. $\frac{\sqrt{0,10474}}{0,6327}$

71. $\left(\begin{matrix} 16 \\ 3 \quad 37 \end{matrix}\right)^7$

72. $\sqrt{\frac{23}{41}}$

73. $\sqrt[3]{12 \frac{1}{19}}$

74. $\frac{(0,008632)^3}{(0,039898)^3}$

75. $\frac{26,499 \sqrt{35}}{826,7}$

76. $\frac{\sqrt[3]{8728}}{\sqrt{1208}}$

77. $\sqrt[5]{28,67 \cdot 0,8135^3}$

78. $\sqrt[4]{0,02867^3 \cdot 3,006^2}$

79. $\frac{10808}{21826} \cdot \left(\frac{0,6437}{0,9025}\right)^3$

80. $\frac{57020}{6,394^2 \sqrt{5,687}}$

81. $\sqrt[4]{0,003856}$

$\sqrt[5]{0,008291}$

82. $\sqrt[5]{-0,008527}$

83. $\frac{\left(3 \frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(4 \frac{7}{15}\right)^4}{\left(5 \frac{7}{8}\right)^5}$

84. $\frac{\sqrt[3]{0,6537}}{\sqrt{285,4}}$

85. $\frac{1}{\sqrt[3]{0,3978^2} \sqrt{0,4519}}$

86. $\sqrt{8,671^2 - 5,064^2}$

87. $\sqrt{0,8355^2 - 0,1998^2}$

88. $\sqrt{\frac{1}{0,02987} - \frac{1}{0,6274}}$

89. $\sqrt[3]{\frac{1}{0,6007} - \frac{1}{4,732}}$

90. $\sqrt{\frac{1}{0,24852^2} - \frac{1}{1,0452^2}}$

Järgmistes avaldustes tuleb esmalt arvutada liidetavad ja siis nad ühendada (katkestatud arvutamine logaritmidega).

91. $3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}}$

92. $\sqrt{1 + \frac{0,7635}{0,4238 \cdot 0,07287}}$

93. $\sqrt{\frac{3,644}{0,4652} - \frac{0,4574}{2,607}}$

94. $\frac{2,461^2 + 3,128^2 - 2,877^2}{2 \cdot 3,128}$

$$95. \sqrt[5]{5323000^{\frac{1}{9}} - 4324^{\frac{1}{6}}}$$

$$96. 2,357^4 - 1,808^3$$

$$\sqrt[3]{0,004653}$$

$$97. \sqrt{\frac{\sqrt{5,0768} - \sqrt{3,458}}{\sqrt{3,458} \cdot 5,0768}}$$

$$98. \sqrt[3]{3,296 \cdot 2487 \cdot 0,06549 - \frac{28,16 \cdot 0,7774}{0,05438}}$$

$$99. \sqrt[3]{2,4878 \cdot 0,05964 \left(1000 - \frac{2,0098}{0,0395 \cdot 0,2174} \right)}$$

Arvutada:

$$100. \sqrt[3]{a^3 + b^3}, \text{ kui } a = 7,624 \text{ ja } b = 3,948.$$

$$101. \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \text{ kui } a = 0,28735 \text{ ja } b = 0,19568.$$

$$102. \sqrt{\frac{p}{q} - \frac{q}{p}}, \text{ kui } p = 0,7088 \text{ ja } q = 0,6382.$$

103. Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ juurte valem

$$\text{on } x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{b}{2a} \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}$$

Arvutada juured, kui $a = 308,9$;

$$b = 249,8;$$

$$c = -196,7.$$

1 Inglise penikoorem = 1,609 km.

1 merepenikoorem = 1,852 km.

1 Inglise nael = 0,4536 kg.

1 Vene nael = 0,4095 kg.

Arvutada:

104. Mitu km. on 8,28 Inglise penikoormas?

105. Mitu merepenikoormat on 38,26 km.?

106. Mitu Inglise penikoormat on ühes merepenikoormas?

107. 12,8 Inglise naela on mitu kg.?

108. Üks Inglise nael võrdub mitme Vene naelaga?

- 109.** Arvutada kolmnurga pind, kui küljed on: $a = 10,28$; $b = 9,86$; $c = 7,42$.
- 110.** Arvutada võrdkülgse kolmnurga pind, kui külg $a = 25,42$ cm.
- 111.** Kui suur on võrdhaarse kolmnurga pind, kui alus $a = 32,45$ ja haar $b = 42,07$?
- 112.** Leida püstküliliku pind, kui üks külg $a = 17,06$ ja diagonaal $d = 20,25$.
- 113.** Arvutada rombi pind, kui külg $a = 6,022$ ja üks rombi diagonaalidest $b = 8,467$.
- 114.** Kui kaugel on tsentrist kõõl $k = 90,4$, kui ringi raadius $r = 46,08$?
- 115.** Täisnurkses kolmnurgas on kateedi $b = 5,87$ projektsioon hüpotenuusile $p = 3,62$. Arvutada hüpotenuus a ja teine kateet c .
- 116.** Arvutada trapeetsi pindala, kui tema alused on: $a = 28,45$; $b = 19,65$ ja haarad: $c = 8,2$; $d = 7,5$.
- 117.** Täisnurkses võrdhaarses kolmnurgas on hüpotenuus $a = 132,4$. Kui pikk on kumbki kateet?
- 118.** Võrdkülgse kolmnurga külje pikkus on $a = 15,68$. Arvutada kolmnurga ümber ja sisse joonestatud ringide raadiused R ja r .
- 119.** Arvutada võrdkülgse kolmnurga sisse ja ümber joonestatud ringide raadiused, kui kolmnurga pind on $S = 31,54$.
- 120.** Leida võrdkülgse kolmnurga pindala, kui ümberjoonestatud ringi raadius on $R = 19,88$.
- 121.** Võrdkülgse kolmnurga külg on $a = 8,206$. Kolmnurga ümber on ring joonestatud ja ringi ümber uuesti võrdkülgne kolmnurk. Leida uue kolmnurga pindala.
- 122.** Võrdkülgse kolmnurga kõrgus on $h = 7,006$. Arvutada kolmnurga ümber ja sisse joonestatud ringide raadiused R ja r .
- 123.** Ringile on tõmmatud puutuja, mille pikkus on $l = 9,293$. Ringi raadius on $r = 5,253$. Kui kaugel on ringist puutuja lähtepunkt?
- 124.** Laev on Kõpu maaninast Hiiumaal $9,2$ merepenikoorma kaugusel (1 merep. = $1,852$ km.) ja tahab otse-

joont sõites nimetatud punktist $2\frac{1}{4}$ merepenikoorma kaugusel mööda saada. Kui suure kiirusega sõitis laev, kui ta Hiiumaalt $2\frac{1}{4}$ tunni pärast mööda jõudis?

Märkus: Nbr. 125—127 on eelharjutused nbr-te 128—131 kohta.

125. Kui kaugele näeb silm merel, kui ta on merepinnast 10 m-i kõrgusel? Maakera raadius = 6370 km.

126. Kui kaugelt on 12-meetrline laevamast nähtav 10-meetrlisel kõrgusel olevale silmale?

127. Kui kõrge on mägi, mida tasase maa peal on 50 km. pealt näha, kui silma kõrgust arvesse ei võeta?

128. Kui kaugele võib näha merel, kui silm asub merepinnast $1\frac{1}{2}$ m. kõrgusel ja kui kiirte murdumine õhus suurendab kauguse geomeetrilist väärtust 7,5% võrra?

129. Laeva laelt on märgutuli, mille kõrgus merepinnast h m., vaatepiiril näha, kui vaateleja silma kõrgus on 5 m. Mitu meremiili on laev tulest eemal, kui kiirte murdumine õhus suurendab kauguse geomeetrilist väärtust 7,5% võrra?

1 meremiil = maa meridiaani kaare minut = = 1,852 km. (NB. 1 ekvaatori minut on meremiilist 3 m. pikem!) Lahendada ülesanne järgmiste tuletornide kohta: a) Kadriorg (Tallinn): ülemine tuli h = 78,6; alumine tuli h = 48,8; b) Naissaar h = 38,7; c) Kihnu h = 28.

130. Tahkona tuletorni tule kõrgus on 42,7 m. 18,62 meremiili kauguselt on tuli horitsondil näha. Kui kõrgel on silm?

131. Ruhnu tuletorni tuli on 21,53 meremiili kauguselt horitsondil näha, kui silm asub merepinnast 5 m. kõrgusel. Kui kõrgel asub Ruhnu märgutuli?

132. Arvutada korrapärase kuusnurga sisse joonestatud ringi raadius, kui kuusnurga külg a = 25,48.

133. Kui suur on korrapärase kuusnurga külg, kui kuusnurga pindala S = 82,47?

134. Arvutada ringi sisse joonestatud korrapärase 8-nurga külg, kui ringi raadius R = 15,24.

135. Ringi raadius r = 8,407. Leida pindala. ($\pi = 3,1416$.)

136. Kui suur on ringi ümbermõõt, kui ringi pindala $S = 243,5$?

137. Ring raadiusega $r = 32,27$ on võrdpindne ruuduga. Kui suur on ruudu külg?

138. Täisnurkse rööptahuka (= täisnurkse paralleel-epipeedi) kolm lähisserva on $a = 60,8$ cm; $b = 40,7$ cm; $c = 43,2$ cm.

Arvutada rööptahuka ruumala.

139. Kui palju kaalub õhk saalis, mille pikkus 16,5 m, laius 12,2 m. ja kõrgus 7,45 m.? Õhu erikaal on 0,001293'

140. Arvutada kuubi serva pikkus, kui ruumala $V = 500$ dm³.

141. Cheopsi püramiidi kõrgus on 137,2 m. ja ruudulise aluse külg 227,5 m. a) Kui palju kaalub püramiid, kui erikaaluks võtta 2,75? b) Kui pika müüri võiks püramiidi massist ehitada, kui müüri laius on 1 m. ja kõrgus 2 m.?

142. Kera raadius $r = 6,8$ cm. Arvutada kera ruumala. ($\pi = 3,1416$.)

143. Gloobuse pind olgu 1 m². Kui suur tuleb seks võtta raadius?

144. Mitu numbrit on arvus 9^{100} ja nimeta esimesed 2 kohta.

145. Mitu numbrit on arvu $1,01^{100}$ täisosas ja nimeta esimesed 3 kohta.

146. Mitmendal kohal on arvu $0,0023^{50}$ esimene väärtusega number ja missugune ta on?

Lahendada eksponent- ja logaritmvõrrandid:

a) ilma logaritmid tabelite tarvitamiseta.

147. $32^x = 2$.

148. $27^{\frac{1}{x}} = 3$

149. $5^{-x} = 1$

150. $0,3^{2x+5} = 0,027$

151. $10^x = 0,00001$

152. $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{625}{16}$

$$153. 7^{2x+3} - 7^{x+1} = 6$$

$$154. 4^{x+1} - 4^{2x-1} = 16$$

$$155. 3^{2x+1} + 3^{2x} + 3^{2x-1} = 351$$

$$156. 9^{3x-2} - 3^{4x+3} = 9^{3x-3} - 3^{4x+1}$$

$$157. x = \frac{\log 81}{\log 3}$$

$$158. 3 \log x = 2 \log 8$$

$$159. \frac{\log (15,5 - x^3)}{\log (2 - x)} = 3$$

$$160. \log (x + 12) + \log (x - 12) - \log 13 = 2$$

$$161. \frac{\log (24 - x^3)}{\log (4 - x)} = 3$$

$$162. \log \sqrt[4]{4x - 3} + \log \sqrt[3]{3x - 16} = 2.$$

b) logaritmidetabelite abil.

$$163. 10^x = 5$$

$$164. 100^x = 0,08234$$

$$165. 10^x = 2,0871^{10}$$

$$166. 9^x = 100$$

$$167. 1,986^x = 100$$

$$168. 3,085^x = 46,278$$

$$169. 138,9^x = 0,00325$$

$$170. 0,4638^x = 1000$$

$$171. 7,168^{5x} = 38,45$$

$$172. 10^x \cdot 100^{2x} \cdot 1000^{3x} = 7$$

$$173. \sqrt[\frac{x}{17}]{15} = \frac{5}{7}$$

$$174. 19^{\frac{x-1}{x+1}} = 29^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$175. \left(\frac{3}{2}\right)^{1-x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{1+x} = 9\frac{1}{4}$$

$$176. 3^{x(x+1)} \cdot 5^{x(x-1)} = 25 \cdot 15^{2x}$$

$$177. \log(5x - 4) + \log(2x + 9) = 1$$

$$178. \text{Leida kõver funktsioonile } y = \log_e x, \text{ kui alus } e = 2,718281828459 \dots$$

(vrld. lhk. 6; siin on y-i väärtused n. n. loomulikud logaritmid).

§ 2. Aritmeetiline ja geomeetriline rida.

Aritmeetiline rida.

Arvude rida $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ nimetatakse aritmeetiliseks, kui iga kahe järjestikkuse arvu vahe on konstantne. Niisugusel puhul peab olema

$$a_1 + d = a_2,$$

$$a_2 + d = a_3$$

.....

$a_{n-1} + d = a_n$, kus vahe d võib olla niihästi positiivne kui negatiivne. Aritmeetilised read oleksid:

$$2; 5; 8; 11; 14; 17; 20$$

$$2; -1; -4; -7; -10; -13; -16$$

Esimene rida on tõusev (tema vahe $d = 3$), teine rida on langev ($d = -3$).

Aritmeetilise rea definitsioonist järgneb otsekohe:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) (*),$$

rea viimane liige võrdub esimese liikmega liidetud kasvatisega, mille teguriteks on vahe ja ühe võrra vähendatud liigete arv.

Valemis (*) esinevad 4 suurust, nii et tema abil võib üht nendest leida, kui teised 3 on teada.

Aritmeetilise rea iga kolme järjestikkuse liikme a_{k-1}, a_k, a_{k+1} kohta on maksev võrdus:

$$a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k \text{ ehk } a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

s. t. rea iga liige on lähisliigete keskväärtus.

179. Nimetada rea 15-es liige, kui esimene liige on 1 ja vahe 6.

180. Leida a_{13} , kui $a_1 = 5$ ja $d = -2$.

181. Leida a_1 , kui $a_{10} = -4,3$ ja $d = -1,5$.

182. Leida d , kui $a_1 = 5$ ja $a_{12} = -6$.

183. Arvude a ja b vahele asetada n arvu, mis nimetatud kahe arvuga moodustaksid aritmeetilise rea. Lahendada üldkujul ja siis võtta $a = 6; 3,5$
 $b = 10; 5,9$
 $n = 9; 7$.

184. Kui funktsioonis $y = a_1 + dx$ (***) anda x -le väärtused $0; 1; 2; \dots (n - 1)$, siis moodustavad y -id aritmeetilise rea. Missugune joon vastab funktsioonile (***)? Joonistada rea liikmed funktsiooni $y = 0,4 + 0,5x$ kohta.

185. Lahendada nbr. 183 graafiliselt.

186. Rea 3-da ja 8-da liikme summa on 17, 13-da ja 20-da summa 83. Nimetada rida.

187. Reas on 16 liiget. Mõlema keskmise liikme kasvatis on 95, 5-da ja 13-da liikme summa 20. Leida vahe ja esimene liige.

188. Reas on n liiget. Esimese ja viimase liikme kasvatis on p , mõlema keskmise liikme kasvatis q . Arvutada a_1 ja d .

$$n = 14; p = 2438; q = 380$$

Aritmeetilise rea liigete summa on:

$$s = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n.$$

Võtame paaride viisi liikmed, mis ühekaugel algusest ja lõpust. Esimese ja viimase liikme summa on $a_1 + a_n$,

$$\text{liikme keskväärtus } \frac{a_1 + a_n}{2},$$

teise paari summa on

$$a_2 + a_{n-2} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n,$$

$$\text{keskväärtus } \frac{a_1 + a_n}{2};$$

kolmanda paari summa

$$a_3 + a_{n-3} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n,$$

$$\text{keskväärtus } \frac{a_1 + a_n}{2};$$

ka järgmiste paaride summa on $a_1 + a_n$, sest iga algusest võetud liige kasvab d võrra, kuna lõpust võetud liige sama võrra väheneb. Seepärast on rea summa s võrdne liikme keskväärtuse ja liigete arvu kasvatisega.

$$s = \frac{(a_1 + a_n) n}{2} (***)$$

Juhis: aritmeetilise rea liigete summa võrdub esimese ja viimase liikme poolsummaga kasvatatud liigete arvuga.

189. Tuleta valem (***) graafiliselt.

190. Missuguse valemi saame aritm. rea summa s jaoks, kui valemisse (***) asetada liikme a_n väärtus valemist (*)?

191. Mitu lööki teeb kell, mis ainult terveid tunde lööb, ööpäeva jooksul?

192. Rea esimene liige on 5, vahe $2\frac{1}{2}$. Leida 18-ne liikme summa.

$$\mathbf{193.} \quad a_1 = -4; \quad -3$$

$$d = 1,5; \quad 2,5$$

$$s = 97,5; \quad 252$$

Leida n ja a_n .

$$\mathbf{194.} \quad a_n = -6,5; \quad -16$$

$$d = 0,5; \quad -1$$

$$s = -66; \quad -130$$

Leida a_1 ja n .

195. Rea esimene liige on -10 , 20-es liige 28. Leida liigete summa 8-dast 15-dani.

196. Jalgrattamees sõitis esimeses tunnis 18 km., igal järgmisel tunnil $\frac{3}{5}$ km. vähem. Mitu km. sõitis tema, kui viimases tunnis tema kiirus oli 15 km.?

197. Aritmeetilise rea 9-as liige on 16, 19-es liige $23\frac{1}{2}$. Leida rea vahe ja esimene liige.

198. Aritmeetilises reas on 50 liiget. Rea summa on $-37\frac{1}{2}$, mõlema keskmise liikme kasvatis $\frac{3}{4}$. Arvutada esimene liige ja vahe.

Klambrites oleva summa, mille jaoks otsitakse valem, tähendame lühidalt s_2 -ga; kolmandas veerus on summa $3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ ja 4-das veerus arv $n + 1$. Järelikult:

$$(n + 1)^3 = 3s_2 + 3 \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1),$$

$$\text{kust } s_2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

207. Samal viisil tuletada valem kuuparvude summa s_3 jaoks.

208. Leida ruutarvude summa 1-est 100-ni.

209. Seesama kuuparvude kohta.

210. Leida ruut- ja kuuparvude summad 10^2 -st kuni 50^2 -ni.

211. Aritmeetilises reas on 8 liiget, millede summa on 100 ja millede ruutude summa 1628. Leida esimene liige ja vahe.

212. Funktsiooni $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ (\square) väärtused moodustavad teise järgu aritmeetilise rea, kui x -le anda tähendused: 0, 1, 2, 3 jne. Rea punktid asuvad paraabolil. — Kui suur on rea summa, kui $x = 0; 1; 2; \dots n$.

213. Funktsioonil (\square) olgu $a_0 = a_2 = 1; a_1 = -4$ Arvutada rea liikmed $x = 0, 1, 2 \dots 10$ jaoks, leitud liigete esimesed ja teised vahed.

214. Kui suur on y -i kasv valemis (\square), kui x kasvab $(x + 1)$ -ni? Kui suur on kasv, kui argument kasvab $(x + 1)$ -st $(x + 2)$ -ni?

215. Leida eelmise ülesande resultaate vahe.

216. Kirjuta funktsioonile

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

vastav kolmanda järgu aritmeetiline rida x -i väärtuste jaoks 1-est 10-ni, kui $a_0 = 2; a_1 = a_3 = -1; a_2 = 3$.

217. Tähenda üles eelmise numbri all leitud rea esimesed, teised jne. vahed. Mitu vahede rida on siin?

218. x -i väärtuste $x, x + 1, x + 2, x + 3$ jaoks leida esimesed, teised jne. vahed. Mitmes vahe on konstantne ja kui suur ta on?

Geomeetiline rida.

Rida a_1, a_2, \dots, a_n nimetatakse geomeetriliseks, kui iga kahe järjestikkuse arvu jagatis on konstantne.

Siin peab olema:

$$a_1 q = a_2^2$$

$$a_2 q = a_3^2$$

...

$$a_{n-1} q = a_n^2;$$

q nimetatakse rea teguriks.

Geomeetrilised read oleksid:

$$2; 6; 18; 54; 162; 486$$

$$2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; \frac{2}{27}; \frac{2}{81}; \frac{2}{243}.$$

Nendest on esimene rida tõusev (tegur $q = 3$), teine langev (tegur $q = \frac{1}{3}$).

(Millal on geom. rida tõusev ja millal langev?)

Geomeetrilise rea definitsioonist järgneb:

$a_n = a_1 q^{n-1}$, rea viimane liige võrdub esimese liikmega kasvatatud rea teguriga astmel, mille näitaja on ühe võrra väiksem rea liikete arvust.

219. Leida rea 2,8; 5,6; 11,2; . . . kümnes liige.

220. Leida rea kuues liige, kui esimene liige on 2 ja tegur on $\frac{2}{3}$.

221. $a_1 = 1.5$; $q = 0.5$. Leida a_7 .

222. Leida geom. rea tegur, kui esimene liige on 7 ja 7-es liige on 79,734375.

Geom. rea iga kolme järjestikkuse liikme a_{k-1} , a_k , a_{k+1} kohta on õige võrdus:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \text{ ehk } a_k = \sqrt{a_{k-1} a_{k+1}},$$

s. t. iga liige on keskmine proportsionaalne tema lähisliikmete suhtes.

223. Geom. rea 4; 9; $20\frac{1}{4}$; $45\frac{9}{16}$; . . . iga kahe liikme vahele asetada niisugune arv, et uus arvude järg moodustaks ka geomeetrilise rea.

224. Seesama ülesanne rea 2; 6; 18; 54; . . . kohta.

Geomeetrilise rea liigete summa olgu:

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (1)$$

Kui võrduse mõlemad pooled kasvatada teguriga q , saame:

$$sq = a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_n q \quad (2)$$

Võtame võrduste (2) ja (1) vahe:

$sq - s = a_n q - a_1$, kust geom. rea summa jaoks saame

$$\text{valemi } s = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

ehk — arvesse võttes, et $a_n = a_1 q^{n-1}$ —

$$s = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

225. Geom. reas on 10 liiget. Paarisliigete summa on a , paaritu liigete summa b . Leida rea esimene liige ja tegur. $a = 2$; $b = 1$.

226. Geom. reas on 8 liiget. 4-ja esimese liikme summa on a , 4-ja viimase summa b . Arvutada rea tegur ja esimene liige.

$$a = 20; b = 1620.$$

227. Geom. reas on 4 liiget. Esimese ja 4-da liikme summa on a , keskmiste liigete summa on b . Leida tegur ja esimene liige. $a = 7\frac{7}{9}$; $b = 6\frac{2}{3}$.

228. Geom. reas on 3 liiget, millede summa on a ja ruutude summa b . Leida tegur ja esimene liige. $a = 7$; $b = 133$.

Leida järgmiste ridade summad:

$$229. 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$$

$$230. a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

$$231. a^{15} - a^{14}b + a^{13}b^2 - \dots - b^{15}$$

$$232. a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + (-1)^{n-1}b^{n-1}$$

$$233. \sqrt[5]{a^4} + \sqrt[5]{a^3b} + \sqrt[5]{a^2b^2} + \dots + \sqrt[5]{b^4}$$

$$234. a + \sqrt[9]{a^8b} + \sqrt[9]{a^7b^2} + \dots + b.$$

235. Mitu liiget on reas, kui

a) $a_1 = 3,2$; $q = -1,5$; $s = -13,3$.

b) $a_1 = -2,5$; $q = -0,8$; $s = -0,82$.

236. Õhu pumba kupli ruumala on k , silindri ruumala s . a) Kui palju on õhku kupli all kannu n käigu järel. b) Mitme käigu järel on hõrendus 0,001?

$$k = 3l; s = 2l; n = 4.$$

237. Keegi jutustab uudise 2-le tuttavale, kumbki tuttavatest 2-le uuele jne. Mitme tunni jooksul saab teate a) 60000-line linn, b) 120000-line linn, kui teate edasiandmine sünnib iga järgneva $\frac{1}{4}$ tunni jooksul?

238. Mitmendast liikmest alates on geom. rea $\frac{3}{4}$; $-\frac{9}{16}$; $\frac{27}{64}$; ... liikmed 0,000001-kust väiksemad?

239. Geomeetrilise rea 3; 6; 12; 24; ... iga kahe liikme vahele asetatakse 3 uut liiget, missugune järg moodustab uue geomeetrilise rea. Leida selle rea tegur.

240. Arvude a ja b vahele tahetakse asetada n arvu, mis ühes a ja b -ga moodustaksid geomeetrilise rea. Leida selle rea tegur q . $a = 5$; $b = 12$; $n = 7$.

241. Kahe tooni vahele õõtsearvudega a ja $2a$ (põhitoon ja oktaav) mahutada 11 tooni, nii et intervallid oleksid võrdsed (tempereeritud heliredel). Kui suur peab olema iga intervall?

242. Taim tarvitab maa-ala 1 m^2 ja toob aastas 1000 seemet. *) Kui iga seeme areneb taimeks, mis aja pärast kataks see taim kogu maapinna ($= 146 \cdot 10^6 \text{ km}^2$)?

243. Bakteri läbimõõt on keskmiselt 1μ , 20-e minuti jooksul jaguneb bakter kaheks. Kui suure aja jooksul saaks ühest bakterist a) terve liiter; b) 1 m^3 ; c) maa-suurune kera ($1,082 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$)?

244. Kui kuningas malemängu leidjale ette pani leiduse eest tasu nõuda, palus viimane 1-se ruudu peale 1 iva panna, teisele 2, kolmandale 4 jne. a) Mitu hl-it teeks see välja, kui lugeda ühes hl-is $1,6 \cdot 10^6$ iva; b) mitme

*) Tubakas annab aastas kuni 360000 seemet.

aasta jooksul saaks nii suure toodangu E. V. territooriumilt, mille põllupind on ümarguselt 10^6 tiinu, kui ühelt tiinult saab 20 hl. c) Mitu 30-vagunilist rongi läheks vaja selle vilja ärasaatmiseks, kui üks hl kaalub 73 kg. ja ühe vaguni kandejõud on 17 t.?

245. Tähed jagatakse heleduse järgi klassidesse, kusjuures iga järgmise klassi („suuruse“) täht on eelmisest $2\frac{1}{2}$ korda tumedam. Palja silmaga võib veel näha 6-da suuruse tähti. a) Kui esimese suuruse tähte kujutada ringina läbimõõduga üks dm., kui suured ringid tuleks määrata järgmistele 5-le tähtede klassidele. b) Mitmenda suuruse täht on esimese suuruse tähest 100 korda tumedam? c) Missugusesse heleduse järku kuuluks päike, kui tema heledus on $5 \cdot 10^{10}$ korda suurem Capella heledusest, kui viimase suurus on 0,2.

246. Hinda arvud 9^9 , $(9^9)^9$, 9^{9^9} ja otsi nende vahekorrad suurte arvudega nagu 2^{64} , päikese ruumala (m^3 -tes), valguse tee aasta jooksul (km-tes).

247. Arvud moodustavad geomeetrilise rea. Missuguse rea moodustavad nende logaritmid?

248. Logaritmid moodustavad esimese järgu aritmeetilise rea. Missuguse rea moodustavad arvud?

Kui b_0 ja b_h tähendavad (keskmisi) baromeetri rõhumisi punktides, millest teine h m. kõrgemal kui esimene, siis on — nagu füüsikas tõendatakse — maksev valem:

$$b_h = b_0 k^h (*),$$

kus $k \approx \frac{7999}{8000}$ (Temperatuuri mõju jäi siin tähelepanemata). Valem näitab, et baromeetri seisud moodustavad langeva geomeetrilise rea, kui kaugused merepinnast tõusvat geomeetrilist rida kujutavad.

Valemist (*) järgneb n. n. kõrguste valem:

$$h = A (\log b_0 - \log b_h),$$

kus tuleb võtta

$$A = \frac{1}{-\log k} = 18400.$$

249. Kui suur on kõrguste vahe, kui keskmine baromeetri rõhumine on võetud punktides 750 ja 720 mm.

250. Leida baromeetri rõhumine a) 100 m., b) 1000 m. kõrgusel merepinnast, kui merepinnal rõhumine on 760 mm.

251. Kui kõrgele peab tõusma a) merepinnast, b) 100 m-i, c) 1000 m-i kõrgusest, et baromeeter langeks 1 mm. võrra?

252. Kui palju langeb baromeeter, kui tõusta 500 m. kõrgusest 1000 m. kõrguseni?

Lõpmatult langev geometriline rida.

Olgu võetud langev geom. rida, näit.

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & \\ 4' & 16' & 64' & 256' & 1024' & \dots \end{array}$$

Arusaadav, et võib reas leida niisugust arvu, mis vabalt valitud õige väikesest arvust vähem oleks; selleks peab ainult võetud liikmes teguri $\frac{3}{4}$ aste vastava kõrguseni tõusma (v. selle kohta ülesanne nr. 238, lhk. 31); teiste sõnadega rea liigete arvu kestval suurenemisel lähenevad liikmed piirväärtusele null, mida matemaatikas niiviisi tähendatakse:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

Võtame langeva geometrilise rea:

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1} (*),$$

mille summa

$$s = a \frac{1 - q^n}{1 - q} (**)$$

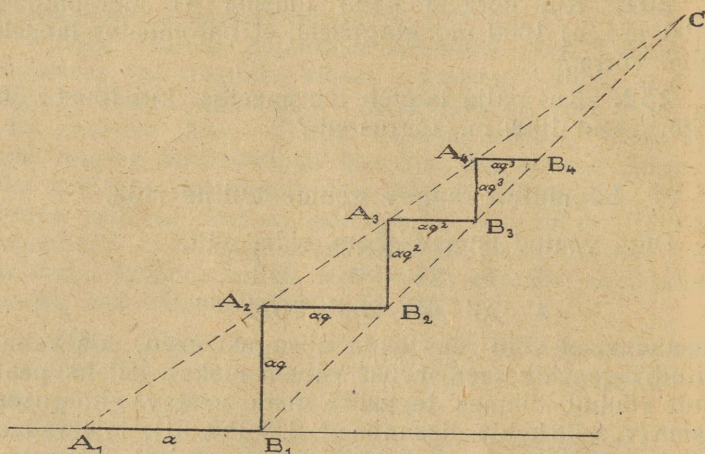
Kui rea (*) liigete arvu piiramata suurendada, s. t. n-le ikka suuremad ja suuremad väärtused anda, kaob q^n valemist (**), nii et lõpmatult langeva geom. rea summa on:

$$s = \frac{a}{1 - q} (***)$$

s. t. esimene liige jagatud ühe ja teguri vahega.

Siin esitatud olenevusi võib graafiliselt niiviisi kujutada. Rea a, aq, aq^2, \dots esitame trepiastmete näol, missuguste kõrgus ja laius võrdub üksikute rea liigetega ($a = A_1 B_1$; $aq = A_2 B_2 = A_2 B_1$; $aq^2 = A_3 B_3 = A_3 B_2$

jne.; joon. nr. 2). Punktid A_1, A_2, A_3, \dots asuvad sirgjoonel, sest täisnurksed kolmnurgad $A_1 B_1 A_2, A_2 B_2 A_3, \dots$ on sarnased. B-joone kallakus horisontaaljoone vastu



Joonis 2.

on 45° , A-joone kohta tang $CA_1B_1 = q$. Geom. rea summa väärtuse annab lõigu A_1C projektsioon horisontaaljoonele. Arusaadav on ka, kui joonte A ja B lõikepunkt on kaugenud lõpmatusesse, s. t. jooned A ja B on paralleelsed ja rea tegur $= 1$, siis ei või rea summa lõplik arv olla. Sedasama tuleb ka ütelda juhuse kohta, kus $q > 1$. Graafikal esitatud juhusel öeldakse, et rida on koonduv, viimasel kahel juhusel, et rida on hajuv.

253. Geomeetrilise rea liigete summa esitada liigete arvu funktsioonina (olgu $a_1 = 1$). Uurida funktsiooni muutuvust, kui $q < 1$ ($q = \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$), $q = 1$, $q > 1$.

Arvutada summad:

$$254. \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$255. \frac{4}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \dots$$

$$256. \quad 5 + \frac{5}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \dots$$

257. Lõpmatult langeva geomeetrilise rea summa kohta antud lauset arvesse võttes leida järgmiste perioodiliste murdude väärtused:

0,444	0,14333
0,2525	0,147575
0,3666	
0,37272	
0,2456456	

Paneme tähele, et valem (***) on maksev ka siis, kui langeva rea tegur on negatiivne, mispärast liikmed on vahelduvate märkidega.

Arvutada ridade summad:

$$258. \quad 6; -1,2; 0,24; \dots$$

$$259. \quad 7; -5,6; 4,48; \dots$$

Arvutada summad:

$$260. \quad \text{a) } 1 + x + x^2 + \dots \text{ ja}$$

$$\text{b) } 1 - x + x^2 + \dots, \text{ kui } x < 1.$$

$$261. \quad \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^3} + \dots, \text{ kui } -2 > x > +2.$$

$$262. \quad a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} + \dots, \text{ kus } b < a.$$

$$263. \quad \text{Arvutada } \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \dots}}}}$$

(Juhatus: iga a esitada temale vastava murdnäitajaga).

264. Lõpmata langeva geomeetrilise rea esimene liige on $\frac{2}{3}$, summa $1\frac{1}{3}$. Nimetada rida.

265. Lõpmata langeva geom. rea summa on $2,4$; tegur $-\frac{2}{3}$. Leida rida.

266. Lõpmata langeva geom. rea summa on 8 , teine liige $1\frac{1}{2}$. Leida esimene liige ja tegur.

267. Võrdkülgse kolmnurga sisse, mille külge a , on joonestatud teine kolmnurk, mille tipud asuvad esimese

kolmnurga külgede keskpunktides. Selle (teise) kolmnurga sisse on samal viisil joonestatud kolmas kolmnurk, kolmandama sisse neljas kolmnurk jne. Kui suur on kõikide kolmnurkade perimeetrite summa?

268. Ringisse, mille raadius r , on joonestatud ruut, ruudu sisse ring, ringi sisse jälle ruut jne. Kui suur on kõikide ringjoonte summa ja kui suur kõikide ruutude perimeetrite summa?

269. Võrdhaarse kolmnurga aluse pikkus on a , haara pikkus b . Kolmnurka joonestatakse ringid niiviisi, et esimene puutub alust ja mõlemat haara, järgmine ring — eelmist ringi ja mõlemat haara jne. kuni tipuni. Leida kõikide ringide raadiuste ja pindade summa.

Arvutada summad:

$$\mathbf{270.} \quad r + 2rq + 3rq^2 + \dots + nrq^{n-1}$$

$$\mathbf{271.} \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1).$$

Arvutada järgmiste lõpmatute $x < 1$ juures koonduvate ridade summad:

$$\mathbf{272.} \quad x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

$$\mathbf{273.} \quad x + 4x^2 + 7x^3 + 10x^4 + \dots$$

$$\mathbf{274.} \quad 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$$

275. Moodustada geomeetrilise rea:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots$$

esimene, teine ja kolmas vahede rida. Mis võib nende põhjal ütelda n -se vahede rea kohta?

$$a = 2; q = 3; n = 4.$$

§ 3. Lühendatud tehted.

Märkus. Selles §-is esinevad arvud on mõeldud täpsetena kuni viimase kümnendkoha üksuseni, näit. arv 23,46 on täpne kuni ühe sajandikuni, arv 4,087 kuni ühe tuhandikuni. Niisuguste arvudega on meil tegemist niihästi puhtmatemaatilistel arutustel (irratsionaalarvud $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$ ja transsendentsed arvud $\log 5$, $\sin 20^\circ$ jne; nad võetakse harilikult peenelt kuni viimase kümnendkoha $\frac{1}{2}$ üksuseni) kui ka tehetel mõõtmisest saadud

arvudega. Viimaste täpsust määravad nende väärtusega numbrid, sest komma asend ja kümnendkohtade arv oleb võetud üksusest, näit. 3,58 mm.; 0,358 cm.; 0,00358 m. on samased ja igaühel on 3 väärtusega numbrit.

I. Lühendatud kasvatamine.

Näide I. Kasvatada 8,4658725 · 32,675616 täpselt kuni 0,1.

Kasvatamine:

Kasvatatav	8,46 58725			
Kasvataja	6165 76,23			
I osakasvatis	25 39 74	täpne kuni	3	tuhandikuni
II	1 69 30	" "	2	"
III	50 76	" "	6	"
IV	5 88	" "	7	"
V	40	" "	5	"
			6+1	"
Kogu kasvatis	276,608	täpne kuni	30	tuhandikuni
Otsitav vastus:	276,6.			

Seletus: Resultaat otsitakse täpselt kuni 0,1. Kasvataja ühede numbril kirjutame sel puhul kasvatatava tuhandikkude alla, s. t. niisugusesse kohta, mis otsitavast viimasest kohast 2 märki paremale poole. Teised kasvataja numbrid kirjutame ühtedele juure, kuid pöördud järjes. Kasvatades kasvataja üksikud numbrid kasvatatavaga, jäetakse tähelepanemata kasvatatava numbrid, mis võetud kasvataja numbrist paremale poole. Osakasvatiste kõige parempoolsemad numbrid tulevad üksteise alla: nad on kõik tuhandikud [kümnentuhandikud (kasvatatavas; neid on 8) × kümned (kasvatajas 3) = tuhandikud (24); tuhandikud (5) × ühed (2) = tuhandikud (10); sajandikud (6) × kümnendikud (6) = tuhandikud jne.] Sellepärast on ka kogukasvatises 276,608 eraldatud paremalt poolt kolm kohta.

Uurime arvu 276,608 täpsust. Selleks tuleb tähele panna, missugused kasvatised välja jäid osakasvatistest. Need on:

1) Kasvatatavast 725 kümnemiljondikku (mis on < 1 kümnentuhandik) × kasvatajast 3 kümmelist; üldse

vähem kui 3 tuhandikku, nagu ka kasvatamise korraldusest näha.

2) Kasvatatavast 8725 kümnemiljondikku (mis on < 1 tuhandik) \times kasvatajast 3 ühelist — kokku < 2 tuhandikku.

Seesama arutus käib ka:

3)—5) kolme järgmise kasvataja numbri kohta, nii et punktide 1)—5) põhjal on kogukasvatis

$$3 + 2 + 6 + 7 + 5 = 23 \text{ tuhandikku}$$

õigest kasvatisest vähem.

Siia tuleb juure lisada:

6) kasvatatav (< 1 kümneline) \times 6,16 kümnetuhandikku (mis vähem kui $6 + 1 = 7$ kümnetuhandikku) — kokku < 7 tuhandikku.

Arv 276,608 võib järelikult õigest resultaadist kuni 30 tuhandikuni vähem olla. Otsitavaks vastuseks peame lugema arvu 276,6.

Näide 2: Kasvatada 2,349675 \cdot 2,839329 täpselt kuni 0,01.

2,349 675
923 938,2

4 699 2	täpne kuni 2	kümnetuhandikuni	
1 879 2	"	"	8
70 2	"	"	3
20 7	"	"	9
6	"	"	3
		+ (2 + 1)	"

6,669 9 täpne kuni 28 kümnetuhandikuni

Siin tuleb vastuseks lugeda 6,67.

Näide 3: Leida kasvatis 7,16583 \cdot 1,23117 täpselt kuni 0,01.

7,16 583
711 32,1

7 16 5	t. k.	1	tuhand.
1 43 2	" "	2	"
21 3	" "	3	"
7	" "	1	"
		+ (1 + 1)	"

8,81 7 t. k. 9 tuhand.

Siin oli võimalik kasvataja ühelised kasvatatava tuhandikkude alla kirjutada, s. t. niisugusesse kohta, mis nõutavast peenusest (0,01) ainult üks koht paremale poole, — seepärast võimalik, et kasvatisse täpsuse kriteerium (kasvatajast nende numbrite summa, milledega kasvatatakse, + esimene heidetav number, + 1) andis ainult 9. Resultaat on 8,82.

Arvutada nimetatud peenuseni :

- 276.** 23,46752 · 18,24618 (kuni 0,1)
277. 8,62376 · 7,65338 (kuni 0,01)
278. 4,316 · 3,102 (k. 0,01)
279. 1,6742 · 2,1203 (k. 0,01)
280. 2,342 · 1,657 (k. 0,1)
281. 76,2085 · 18,39076 (t. k. 1-ni)
282. 8,03654 · 72,61137 (k. 0,1)
283. 25,30827 · 4,183523 (k. 0,01)
284. 2,3841576 · 12,1085126 (k. 0,01)
285. 0,080314 · 0,261573 (k. 0,0001)
286. e^2 kuni 0,0001 (e väärtuse kohta v. nr. 178, lk. 24)
287. e^3 „ 0,01
288. π^2 „ 0,0001
289. π^3 „ 0,01

Leida järgmised kasvatised võimalikult suure peenusega (pane seks tähele, et tegelikult kasvatamiseks võetakse kasvatatavast ja kasvatajast ühepalju kohti).

- 290.** 6,327 · 4,86157
291. 2,0865 · 3,165
292. 0,8727 · 0,32114

II. Lühendatud jagamine.

A.

Enne kui jagamisele asuda, paneme järgmist tähele.

Jagatav olgu märgitud tähega A, jagaja tähega B, jagaja täisosaga olgu b. Kui õige jagatise $\frac{A}{B}$ asemel võtta

$\frac{A}{b}$, on jagatise kasv

$$\frac{A}{b} - \frac{A}{B} = \frac{A(B-b)}{Bb} < \frac{A}{B} : b,$$

s. t. vähem kui õige jagatis, jagatud jagaja täisosaga.

Näit. kui vaja jagada $41,857 : 5,473$ ja selle asemel jagada $41,857 : 5$, on jagamisel tehtud viga vähem kui $\frac{1}{3}$ otsitavast jagatisest.

B.

Näide 4: Jagada $5137,492869 : 62,8357416$ täpselt kuni 0,01.

a) Kõige esmalt otsitakse, mitu numbrit tuleb jagatisesse. Kui jagajas komma 1 koht paremale poole nihutada, s. t. jagajat suurendada 10 korda, saame arvu, mis jagatavast väiksem; kui nihutada 2 kohta paremale poole, siis arvu, mis jagatavast suurem; seepärast on jagatise täisosas 2 kohta ja ühes nõutavate 2-e kümnendkohaga on jagatise numbrite arv 4.

b) Jagatavas ja jagajas nihutatakse komma nii mitu kohta paremale poole, et jagaja täisosas saaks arv, mis seekord 4-jast nelja nulliga (= 40000) suurem oleks, s. t. suurem oleks kui jagatise numbrite arv ühes sama palju nullidega. Nii viisi tuleks jagada:

$$5137492,869 : 62835,7416$$

c) α) Võtame terve jagaja asemel tema täisosa 62835.

	513749	62835	Punkti A) põhjal on selle läbi tekkinud jagatise juurekasv vähem kui murdarv $\frac{A/B}{b}$, mille lugeja
	502680	$81,76$	
I jääk	11069	6283	(=täpne jagatis $\frac{A}{B}$) on vähem kui 10^2 ja nimetaja suurem kui $4 \cdot 10^4$; seepärast on jagaja täisosa võtmisel tehtud viga vähem kui $\frac{10^2}{4 \cdot 10^4} = \frac{1}{400}$.
II jääk	4786	4396	
III jääk	390	372	
IV jääk	18		

β) Nüüd tuleks jagada $110692,869$ (I jääk): $62835,7416$ ehk $11069,2869 : 6283,57416$.

Kui siin võtta jagajaks 6283 (5-est tõmbame kirjutuses kriipsu läbi), leiame, et sellega tehtud viga on vähem kui $\frac{10}{4000} = \frac{1}{400}$, sest jagatis on vähem kui 10 ja jagaja > 4000 .

γ) Samal viisil edasi arutades leiame, et jagatise iga uue numbri võtmisel meie suurendame jagatist $< \frac{1}{400}$ -u võrra, järelikult kõigi 4-ja numbri kohta $< 0,01$ võrra.

δ) Teisest küljest jäi 4-jas jääk 0,182. . . jagamata 62,8. . . -ga, misläbi jagatis vähenes $< 0,01$ -u võrra, nii et jagatis on igatahes täpne kuni 0,01-ni.

C.

Eelmist arutust kokku võttes leiame järgmise juhise lühendatud jagamise jaoks.

1) Määratakse kindlaks jagatise numbrite arv n .

2) Jagaja pahemast servast eraldatakse arv, mis suurem oleks kui n ühes n nulliga.

3) Jagatavaks võetakse jagatava pahemast servast kõige väiksem osa, mis eelmise, punkti 2) all määratud jagajast suurem oleks.

4) Pärast igaüht jagatise leitud numbrit tõmmatakse jagaja paremast servast üks number maha.

Näide 5: Jagada $2,409573 : 5,43917$ täpselt kuni 0,001.

24095	5439
21756	0,443
2339	
2172	
167	
162	
5	

Resultaat on 1-e ja 0,1 vahel. See pärast on jagatises 3 numbrit ja jagaja pahempoolne osa, mis 3000-st suurem, on 5439; tarvisminev jagatava osa on 24085.

Resultaat on 0,443 — õige kuni 0,001-ni.

Näide 6: Jagada $18,433183 : 6,827434$ täpselt kuni 0,0001.

184331	68274
136548	2,6(10)00
47783	
40962	
6821	
6820	
1	

Kolmandale kohale tuleb jagamisel 10 (siin klambritesse pandud).

Vastuseks peab lugema 2,7000 ja ta on täpselt resultaadist suurem, sest esimese kahe koha (2,6) otsimisel jagasime meie jagatavat arvuga, mis täpselt jagajast väiksem [v. p. B, c), α) ja β)], mispärast numbrid nimetatud kohtadel ei või suuremad olla

kui 2 ja 6. Seepärast on 2,7000 — liiaga resultaati ja seepärast võivad kolmandal kohal olevale 10-le järgneda 4-dal ja 5-dal kohal ainult nullid.

Leida jagatise nimetatud täpsusega.

- 293.** 9,876382 : 4,965437 (kuni 0,01)
294. 0,802406 : 6,10574 (k. 0,0001)
295. 349,5747 : 43,5043 (k. 0,01)
296. 80,6524 : 73,4982 (k. 0,001)
297. 0,79322 : 0,91041 (k. 0,001)
298. 1,25006 : 0,93005 (k. 0,01)
299. 243,815763 : 82,351964 (k. 0,01)
300. 314,281617 : 81,345962 (k. 0,01)
301. 53,08241 : 182,46793 (k. 0,001)
302. 494,281111 : 0,57358999 (k. 0,001)
303. 49,73081 : 361,49527 (k. 0,0001)
304. 231,1728 : 53,7621 (k. 0,001)
305. 47,58041 : 8,34762 (k. 0,001)

Leida järgmised jagatise võimalikult suure peenusega:

- 306.** 7,1163 : 2,8864
307. 427,43 : 51,086
308. 8,76085 : 450,63

Jagada :

- 309.** 3 : 25,87. . .
310. 5 : 6,012. . .
311. 1 : e (täpselt kuni 0,00001)
312. 1 : π (t. k. 0,0001)

III. Lühendatud liitmine.

Olgu A, B ja C arvude täpsed väärtused; a, b ja c nende ligikaudsed väärtused, kord kõik puudusega, teine kord kõik liiaga; α , β ja γ ligikaudsete väärtuste vead.

Niiviisi on: $A = a \pm \alpha$

$B = b \pm \beta$

$C = c \pm \gamma$ (nagu öeldud, on mõeldud kõik märgid kord „+“-dena, teine kord „-“-tena).

$$\text{Kokku: } A + B + C = (a + b + c) \pm (\alpha + \beta + \gamma)$$

Harilikult on ühed liidetavad liiaga, teised puudusega, seepärast ei ole summa viga suurem kui liidetavate vigade summa.

Näide 7: Liita: $5,2476 + 2,712 + 15,19 + 3,034$.

5,2476
2,712
15,19
3,034
26,17

Kümnetuhandikke ja tuhandikke ei või siin liita, sest kõikide liidetavate suhtes ei ole neid kohti teada. Sel põhjusel võib summa 26,17 erineda õigest summast kuni 4-ja sajandikuni ja vastuseks peame lugema 26,2, mis arv on täpne kuni 0,1.

Vastus: 26,2

Liita:

313. $23,42 + 70,53 + 84,29$

314. $2,8761 + 15,736 + 2,8143$

315. $56,72 + 9,374 + 123,4$

IV. Lühendatud lahutamine.

a) Nagu liitmise juures, olgu ka siin $A = a \pm \alpha$ ja $B = b \pm \beta$, kus $+\alpha$ ja $+\beta$; $-\alpha$ ja $-\beta$ ühte kuuluvad; siis on:

$$A - B = (a \pm \alpha) - (b \pm \beta) = (a - b) \pm (\alpha - \beta),$$

s. t. kui vähendatav ja lahutatav on mõlemad kas puudusega või liiaga võetud, võrdub vahe viga vahe liigete vigade vahega.

b) Kui ühte kuuluvad $+\alpha$ ja $-\beta$; $-\alpha$ ja $+\beta$, on $A - B = (a \pm \alpha) - (b \mp \beta) = (a - b) \pm (\alpha + \beta)$, s. t. kui üks liigetest on võetud puudusega ja teine liiaga, võrdub vahe viga vähendatava ja lahutatava vigade summaga.

Üldiselt võib ütelda (kas arvud on võetud puudusega või liiaga, ei ole harilikult teada!), et vahe viga ei ole suurem kui vahe liigete vigade summa.

Näide 8: Lahutada 2,305-st 1,8234.

2,305
- 1,8234
0,482

Vähendatava kümnetuhandikke ei ole teada, mispärast kümnetuhandikud langevad resultaadist välja. Vastuseks tuleb lugeda arv 0,482, mis täpne kuni 0,001 (millest järeldada seda täpsust?)

Lahutada:

316. $11,2305 - 0,9871$

317. $63,2 - 1,934$

318. $0,8671 - 0,79276$

Arvutada:

319. $169,04 + 34,121 - 150,793$

320. $263,48 - 103,6 + 22,31$

321. $36,789 - 3,908 - 15,39$

322. $189,735 - 29,76 - 89,067$

323. Püstküliku moodsud on $b = 38,276 \dots$ ja $h = 7,381 \dots$ Arvutada pind nii täpselt kui võimalik.

324. Leida radiaalmõõdus 1° -lise kaare pikkus täpsusega kuni 10^{-8} .

325. Seesama $1'$ ja $1''$ jaoks.

Märkus: Järjestikkuste täisarvude kasvatist loomulikust arvureast:

1. 2. 3. 4. \dots $(n-1)$ n

tähendatakse matemaatikas lühidalt nii: $n!$

326. Arvutada: a) $2!$, b) $3!$, c) $4!$, d) $5!$, e) $6!$, f) $7!$, g) $8!$

Arvutada järgmised avaldused üldkujul ja siis võttes $n = 5$.

327. $n(n-1)!$

328. $n(n+1)(n-1)!$

329. $\frac{(n-1)!}{n-1}$

330. $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

331. $\frac{n!}{4!}$

332. $\frac{9!}{5! 3!}$

333. $\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$

334. $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$

335. $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$

336. Valemite:

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned} \right\} (*)$$

põhjal leida sinus ja cosinus 10° , 20° ja 30° jaoks 4-ja kümnendkoha peenuseni. [Valemites (*) tuleb x -i all mõista

10°, 20°, 30°-le vastavat kaare pikkust radiaalüksustes.]

337. Kui kaugelt vaadates on 1 mm. näha 1"-lise nurga all? (Arvutada täpselt kuni 1 m).

Juhatus: x (millimeetrit) =

$$= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \right)'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \left(\frac{1}{2} \right)''}{\sin \left(\frac{1}{2} \right)''}$$

338. Kõrgemas matemaatikas näidatakse, et arvu n antud loomuliku logaritmi $\log_e n$ järgi võib leida arvu $(n + 1)$ loomuliku logaritmi $\log_e (n + 1)$ valemi põhjal:

$$\log_e (n + 1) = \log_e n + 2 \left[\frac{1}{2n + 1} + \frac{1}{3(2n + 1)^3} + \frac{1}{5(2n + 1)^5} + \dots \right]$$

(e kohta v. nr. 178)

Leida selle valemi abil arvude 1, 2, 3, . . . 10 loomulikud logaritmid.

Kui arvu kümnendlogaritm on x ja loomulik logaritm y , siis on:

$$10^x = e^y$$

Logaritmides e järgi saame:

$$x \log_e 10 = y, \text{ kust } x = y \cdot \frac{1}{\log_e 10} (**)$$

Arvu $\frac{1}{\log_e 10}$ nimetatakse kümnendlogaritmade mooduliks

(moodulus tähendab ladina keeles: mõõt). Tähenname teda edaspidi lühidalt M_{10} .

339. Arvutada

$$M_{10} = \frac{1}{\log_e 10} (***)$$

Juhis: otsitav kümnendlogaritm võrdub [valemi (***) põhjal] loomulikule logaritmile kasvatatud kümnendlogaritmade mooduliga.

340. Näidata, et kümnendlogaritmide kohta on õige valem :

$$\log_{10} (n + 1) = \log_{10} n + 2 M_{10} \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right] (**)$$

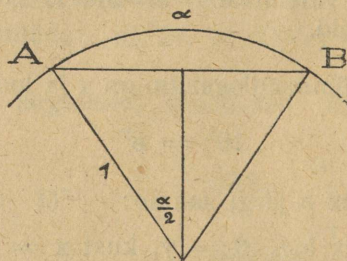
ja tema abil arvutada logaritme.

341. Valemi (***) põhjal leida arv, millest alates on (4-jakohaga) tabeli vahe vähem kui 0,0009; 0,0008; 0,0004 ja võrrelda resultaadid tabeliga.

342. Valemi (***) aluseks võttes näidata, et loomulikude logaritmide moodul M_e kümnendlogaritmide suhtes on $\frac{1}{M_{10}}$

Lisa:

Kaare ja vastava kõõlu pikkuste vahe maakeral ($R = 6370$ km.). Esialgu olgu mõõtmise



Joonis 3.

üksuseks võetud raadius; siis on kaare ja kõõlu pikkuste vahe (joon. nr. 3) $\alpha - 2\sin \frac{\alpha}{2}$ ja kui arvesse võtta valemi (*) sin'e jaoks —

$$\begin{aligned} \alpha - 2 \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{(\alpha/2)^3}{3!} + \frac{(\alpha/2)^5}{5!} - \dots \right] &= \\ = \frac{2 \left[\frac{\alpha}{2} \right]^3}{3!} - \frac{2 \left[\frac{\alpha}{2} \right]^5}{5!} + \dots &= \frac{\alpha^3}{24} - \frac{\alpha^5}{1920} + \frac{\alpha^7}{322560} - \dots \quad (\square) \end{aligned}$$

Otsime nimetatud vahe 1° -i kohta maakeral. Nagu teada, on 1° -le vastav kaar $\alpha = 0,01745$ raadiusest, seepärast leitud avalduse (\square) esimene liige

$$\frac{\alpha^3}{24} \text{ raad.} = \frac{\alpha^3}{24} \cdot 6370 \text{ km.} = 1,41 \text{ m.},$$

teine liige $\frac{\alpha^5}{1920} \cdot 6370 \text{ km.} = 0,005368 \text{ mm.};$ väike!

Arvesse tuleb võtta ainult esimene liige $\frac{\alpha^3}{24}$ ja resultaadiks tuleb lugeda 1,41 m. Maakera kraadi pikkus on $0,01745 \cdot 6370 \text{ km.} = 111,1 \text{ km.};$ nii et siin kaare ja kõõlu vahe 1,41 m. ei ole kuigi suur, kuid kaare suurenemisel kasvab vahe ruttu, proportsionaalselt kaare 3-da astmega.

343. Mitu kraadi suur peab olema kaar, et liige $\frac{\alpha^5}{1920}$ kasvaks a) 1 mm.; b) 1 m-i suuruseni?

344. Arvutada (logaritmid abil!) kaare ja kõõlu vahe a) $1'$, b) 5° , c) 10° kohta.

345. Kui suur on käsitatud vahe maakera 10 km. kohta?

§ 4. Arvutuslükat.

Arvutuslükat (normaalne pikkus 25 cm.) seisab koos kolmest osast:

1) varvast. Teda moodustavad ülemine ja alumine skaala. Varva sees käib:

2) keel, mille mõlemal küljel asuvad skaalad. Eesküljel on kaks skaalat, millest ülemine on samane varva ülemise skaalaga ja alumine — varva alumise skaalaga. Arvutuslükatit tarvitatakse keele numbrite nii hästi peripidises kui pöördud asendis (vrld. skeemid nbr. 4 ja 5) mitnesuguste algebraliste ülesannete lahendamisel. 3-ekordne skaala keele tagaküljel on trigonomeetri-liste ülesannete lahendamiseks.

3) Ruudulise klaasi peale kriipsutatud näitaja.

Arvutuslükati skaaladele on asetatud logaritmidelle vastavad pikkused, kuid numbrid tähendavad nimetatud loga-

ritmide kohta käivate arvude väärtusi. Seepärast, et $x = \xi^2$ juures on $\log x = 2 \log \xi$ (loe: ksil), on logaritmid jaoks võetud lõigud alumisel varva skaalal 2 korda pike-mad kui ülemisel, mispärast on võimalik — näitaja abil varva ülemise ja alumise skaala andmeid teineteisega võrreldes — kahega astendamist ja juurimist hõlpsasti täide saata.

Näide 1: Arvutada $0,00278^2$.

On teada, et $0,00278 = (2,78 \cdot 10^{-3})^2 = 2,78^2 \cdot 10^{-6}$.

Arvutuslükati abil leiame

$$2,78^2 = 7,73, \text{ nii et}$$

$$0,00278^2 = 0,00000773.$$

Näide 2: Arvutada $\sqrt{0,298}$.

$$\sqrt{0,298} = \sqrt{29,8 \cdot 10^{-2}} = 10^{-1} \cdot \sqrt{29,8}$$

Arvutuslükati abil saame $\sqrt{29,8} = 5,46$;

seepärast on $\sqrt{0,298} = 0,546$.

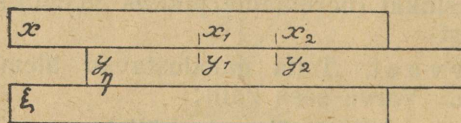
Need kaks näidet õpetavad, et arvutuslükati kõrval on paberi ja pliitsi tarvitamine suure tähtsusega.

Harjutused: Arvutada:

346. $0,237^2$; $0,0865^2$.

347. $\sqrt{0,081}$; $\sqrt{0,00623}$

Arvutuslükati 1-ne asend (keeleskaala on otse; joon. nbr. 4).



Joonis 4.

A.

Olgu keel varvast pisut välja tõmmatud ja tähendagu x_1 , y_1 ja x_2 , y_2 kaks teineteise vastas seisvat kriipsude paari x- ja y-skaalal. On kerge tähele panna, et

$$\log x_1 - \log y_1 = \text{const.} = \log x_2 - \log y_2,$$

millest järgneb $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \dots (1)$; mispärast on võimalik arvutuslükati abil kolmlause-ülesandeid lahendada.

Näide 3: 27 merepenikoormat võrduvad 50 km-ga.
(Vrdl. №№ 104—106.)

Mitu km. on 1, 10, 15 merepenikoormas?

Asetades 50 varva ülemisel skaalal keele ülemise skaala 27-e vastu, leiame varva ülemisel skaalal keele numbrite 1, 10 ja 15 vastas otsitavad km-id 1,85; 18,5 ja 27,8.

Harjutused:

348. 13 Inglise (inch; = Vene) tolli võrduvad 33-e cm-ga. Mitu cm. on 1 jalas = 12 tolli?

349. 17 Pariisi tolli (p = pouce) võrduvad 46 cm-ga. Mitu cm. on

a) 1 Pariisi jalas = 12 Pariisi tolli?

b) 1 toise'is = 6 Pariisi jalga?

Valemi (1) põhjal võib ka arvused kasvatada ja jagada.

Näide 4: Jagada 4,1: 2,3.

Kui proportsioonis $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ lugeda $x_1 = 4,1$; $y_1 = 2,3$ ja $y_2 = 1$, on x_2 -i väärtus otsitav resultaat. Talitades nagu 3-da näite juures leiame, et

$$4,1 : 2,3 = 1,78.$$

350. Jagada arvutuslükati abil:

$$3,95 : 1,9; \quad 28,5 : 6,4;$$

$$6,8 : 4,5; \quad 7,8 : 1,61.$$

Näide 5: Kasvatada 3,48 · 2,15.

Võttes seekord a) proportsiooni keskmiste liigetena $y_1 = 3,48$ ja $x_2 = 2,15$ ja b) $y_2 = 1$ leiame, et x_1 -i väärtus 7,48 on otsitav kasvatis.

351. Kasvatada: 4,2 · 7,6; 1,86 · 2,09; 3,14 · 27,8.

Märkus: 4-da ja 5-da näitega antud kasvatamisviisi võib ka järeldada reeglist, et kasvatamisel ja jagamisel tuleb logaritmid vastavalt liita või lahutada.

Näide 6: Leida kasvatatud, kus üks tegur on kõigil ühesugune:

$$2,3 \cdot 3,4$$

$$2,3 \cdot 4,75$$

$$2,3 \cdot 14,2$$

$$2,3 \cdot 35,5.$$

Olgu kasvatised tähendatud vastavalt x_1, x_2, x_3, x_4 ; sellest järgneb, et

$$2,3 = \frac{x_1}{3,4} = \frac{x_2}{4,75} = \frac{x_3}{14,2} = \frac{x_4}{35,5} \text{ ehk ümberpöördult:}$$

$$\frac{1}{2,3} = \frac{3,4}{x_1} = \frac{4,75}{x_2} = \frac{14,2}{x_3} = \frac{35,5}{x_4},$$

nii et otsitava nelja kasvatise pärast peame ühele joonele asetama 1 ja 2,3 ja varva skaala numbrite 3,4; 4,75; 14,2; 35,5 all leiame otsitavad kasvatised 7,82; 10,92; 32,7 ja 81,6.

Kasvatada:

$$352. \quad 4,35 \cdot 1,26; 4,35 \cdot 1,74; 4,35 \cdot 2,65.$$

$$353. \quad 7,8 \cdot 3,57; 7,8 \cdot 4,36; 7,8 \cdot 5,7.$$

Näide 7: Kasvatada $3,35 \cdot 54$

Käies 4-da ja 5-da näite järgi leiaksime, et keel on nii kaugele välja lükatud, et pole võimalik leida kasvatist. Sellepärast võtame 54-ja asemel 5,4. Kasvatis $3,35 \cdot 5,4$ on — arvutuslükati abil — 18,1, nii et otsitavaks resultaadiks peame lugema 181.

Näide 8: Leida kasvatis $0,184 \cdot 26,5$.

Seni lugesime arvutuslükati skaalad alatavateks ühest, kuid alguseks võib võtta mistahes kümnendkoha: 0,1; 0,01; 0,001, niisamuti võib võtta alguseks 10, 100 jne., sest vahe kahe logaritmi vahel ei muutu, kui vastavad arvud 10, 100, 1000 jne. korda suurendada või vähendada, näit.

$$\frac{2}{5} = \frac{0,2}{0,5} = \frac{20}{50} \text{ ja } \log 2 - \log 5 = \log 0,2 - \log 0,5 = \\ = \log 20 - \log 50.$$

Võetud varva ja keele skaaladest peame oma ülesandes ühe lugema alatavaks 0,1-st, siis leidub hõlpsasti resultaadina 4,87.

354. Kuidas tuleks arutada, kui 6-das näites lugeda skaala, millelt võetakse 54, ulatavaks 10-st 1000-ni?

355. Kasvatada:

$$\begin{array}{lll} 38 \cdot 7,1; & 3,35 \cdot 0,82; & 0,063 \cdot 0,48. \\ 5,38 \cdot 64; & 0,42 \cdot 0,76; & \\ 0,69 \cdot 7,8; & 0,36 \cdot 0,057; & \end{array}$$

356. Jagada: 4,5 : 6,8; 0,61 : 7,8; 0,066 : 0,384.
2,78 : 5,53; 0,305 : 1,055;

B.

Seepärast, et

$\frac{x}{y} = \text{const.}$ ja $y = \eta^2$, on ka $\frac{x}{\eta^2} = \text{const.}$, missugust omadust võib mõnikord vaatluste tasandamiseks tarvitada.

Näide 9: Kahe suuruse x ja η (loe : eeta) jaoks on leitud vaatlustest väärtused:

$$x = 0,427; 0,654; 1,28; 2,05;$$

$$\eta = 1,095; 1,356; 1,894; 2,402.$$

Kui võib arvata, et x ja η on seotud valemiga $x = c\eta^2$, ja kui sel põhjal kõrvuti asetada x -i ja η väärtused, siis leitakse valemis esineva proportsionaalsuse koeffitsiendi c jaoks tähendus 0,356, missuguse arvu viimane koht on kahtlane kahe üksuse võrra.

Arvutuslükati 2-ne asend (keele numbrid on ümber pöördud: v. joon. nbr. 5).

x	x_1	x_2
η	η_1	η_2
ξ		

Joonis 5.

Seda arvutuslükati asendit tähele pannes on kerge otsustada, et

$$\log x_1 + \log y_1 = \log x_2 + \log y_2 \text{ ehk}$$

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = \text{const.} \quad (2)$$

ja selle asendi abil võib ka arvusid kasvatada ja jagada.

357. Seletada, mispärast on

1) $\xi\eta = \text{const.}$, 2) $\xi^2 y = \text{const.}$; 3) $x\eta^2 = \text{const.}$

Näide 10: Kasvatada 21,4 · 3,58.

Asetades ühele joonele x -skaalal 21,4 ja y -skaalal 3,58 leiame, et y -skaala 1-e vastas asub x -skaalal arv 76,6, mis on otsitav kasvatis.

358. Samal viisil kasvatada:

$$59,4 \cdot 5,23; \quad 0,239 \cdot 0,826;$$

$$3,68 \cdot 43,2; \quad 0,0187 \cdot 0,818.$$

$$20,1 \cdot 17,9;$$

$$0,67 \cdot 8,4;$$

4*

Näide 11: Jagada: 6,74 : 29,7.

Asetades esimese nendest arvudest, s. t. 6,74, ühele joonele teise skaala 1-ga (seekord tuleb teise skaala paremat otsa lugeda 1-eks, sest jagatis on 1-est vähem!) leiame, et 29,7-ga asub ühel joonel 0,227 — ülesande vastus.

359. Jagada samal viisil:

$$32,4 : 8,93;$$

$$11,6 : 13,4;$$

$$115 : 96;$$

$$0,147 : 1,03.$$

Näide 12: Jagada:

$$5,78 : 0,96$$

$$5,78 : 1,34$$

$$5,78 : 19,7 \text{ (jagatav on kõigil ü a samal)}$$

Kui jagatised tähendada märkidega x_1, x_2, x_3 , võime kirjutada:

$$5,78 : 1 = 0,96 \quad x_1 = 1,34 \quad x_2 = 19,7 \quad x_3,$$

millest näha, kui vastu asetada varva ja keele skaaladel 5,78 ja 1, siis on 0,96-u vastasrõhke (üks skaala tuleb lugeda ulatavaks 0,1-st 10-ni!) $x_1 = 6$; samuti leitakse, et $x_2 = 4,3$ ja $x_3 = 0,294$.

$$\text{Jagada: } \mathbf{360.} \quad 4,34 : 0,49; \quad \mathbf{361.} \quad 13,2 : 0,84;$$

$$4,34 : 2,91; \quad 13,2 : 7,58;$$

$$4,34 : 7,08. \quad 13,2 : 16,84.$$

Kuupvõrrandi lahendamine, kui puudub liige ruutastmel.

Näide*13: Lahendada võrrand: $z^3 - 6,61z - 2,46 = 0$.

Võrrandi kirjutame järgmisel kujul:

$$z^2 - \frac{2,46}{z} = 6,61 \cdot \dots (3)$$

Keele paremal otsal asuva 1-e viime ühendusesse arvuga 2,46 alumisel varva skaalal, nii et selles asendis on kasvatis $\xi\eta$, mis alati konstantne, 2,46.

Kui vabalt võtta ξ -skaalal $z = 2$, siis leiame x -skaalal $z^2 = 4$ ja sellepärast, et $\xi\eta = 2,46$, on η -skaala järgi $\frac{2,46}{z} = 1,23$.

Võrrandi (3) pahem pool on $4 - 1,23 = 2,77$, mis palju vähem kui 6,61.

Katsume nüüd $z = 3!$ x-skaalal leiame $z^2 = 9$.

Jagatise $\frac{2,46}{z}$ leidmiseks peame keele paremale poole lük-
kama, et tema pahempoolne 1 ξ -skaalal võetud arvu
2,46 kohale asetada. Seda seepärast, et meil tarvis ξ -skaalal
võtta arv, mis suurem kui 2,42; niisugustele arvudele
puuduvad keelel vastasarvud; teisest küljest on jagatis
 $\frac{2,46}{z}$ vähem kui 1 ja η -skaala tuleb lugeda ulatavaks 0,1

kuni 1-ni. Niiviisi saame η -skaalalt murru $\frac{2,46}{z}$ jaoks
0,82; seepärast on võrrandi (3) pahema poole väärtus
 $9 - 0,82 = 8,18$ — rohkem kui 6,61.

Võttes $z = 2,5$, loeme x-skaalalt $z^2 = 6,25$ ja η -skaa-
lalt $\frac{2,46}{z} = 0,984$.

$z^2 - \frac{2,46}{z}$ on $6,25 - 0,984 = 5,266$. Vähe!

Juur on 2,5 ja 3-e vahel! Niiviisi edasi katsudes leiame,
et z-i väärtus on 2,74.

(Märkus: Teised võrrandi juured on — 0,38 ja
— 2,36.)

Lahendada kuupvõrrandid:

$$362. \quad z^3 - 7,5z - 3,35 = 0.$$

$$363. \quad z^3 - 6,86z - 2,42 = 0.$$

$$364. \quad z^3 - 9,73z - 2,93 = 0.$$

Sarnasel viisil lahendada ruutvõrrandid:

$$365. \quad z^2 - 0,82z - 9,07 = 0.$$

$$366. \quad z^2 - 0,75z - 17,46 = 0.$$

$$367. \quad z^2 - 6,12z + 7,43 = 0.$$

Näide 14: Leida kuupjuur arvust 4,5 võimalikult
suure täpsusega.

Lahendus: Tähendame $\sqrt[3]{4,5} = z$; sellest järgneb
 $z^3 - 4,5 = 0$ ehk $z^2 - \frac{4,5}{z} = 0$.

Viimasest võrrandist selgub, et lahendamise käik on sama nagu 13-dal näitel, seepärast olgu siin tabelisse tähendatud ainult üksikute katsete saadused.

z	$z^2 - \frac{4,5}{z}$	z	$z^2 - \frac{4,5}{z}$
1,5	$2,25 - 3 = -0,75$	1,7	$2,89 - 2,65 = 0,24$
1,6	$2,56 - 2,81 = -0,25$		
1,65	$2,72 - 2,73 = -0,01$	1,66	$2,75 - 2,71 = 0,04$

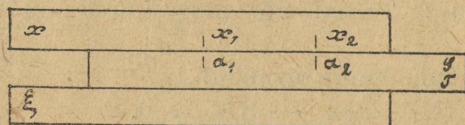
Kolmandaks juureks 4,5-est tuleb lugeda 1,65.

Leida kolmas juur arvudest:

368. 5,8. **370.** 43,5.

369. 2,62. **371.** 21,8.

Arvutuslükati 3-as asend [S(sinus)- ja T(tangens)-skaala on ülespoole pöördud; joon. nr. 6].



Joonis 6.

Varva ülemine skaala tuleb lugeda ulatavaks 0,01-st 1-ni. Kui keel on osalt välja tõmmatud, on õige võrdus:

$\log x_1 - \log \sin \alpha_1 = \log x_2 - \log \sin \alpha_2$,
millest järgneb:

$$\frac{x_1}{\sin \alpha_1} = \frac{x_2}{\sin \alpha_2}$$

Kui $\alpha_2 = 90^\circ$, on $x_1 = x_2 \sin \alpha_1$.

Näide 15: Lahendada kolmnurk, kui külg $x_1 = 23,5$, nurk $\alpha_2 = 62^\circ$ ja nurk $\alpha_3 = 48^\circ$.

Lahendus: $\alpha_1 = 180^\circ - (\alpha_2 + \alpha_3)$ ehk $\alpha_1 = 70^\circ$.
Arvutuslükati abil leiame, et proportsioonis

$$\frac{23,5}{\sin 70^\circ} = \frac{x_2}{\sin 62^\circ} \text{ on } x_2 = 22,2.$$

Samal viisil leiame proportsioonist

$$\frac{23,5}{\sin 70^\circ} = \frac{x_3}{\sin 48^\circ}, \text{ et } x_3 = 18,6.$$

Arvutuslükati abil lahendada kaldnurkne kolmnurk, kui:

372. $x_1 = 24,3; \alpha_2 = 61^\circ; \alpha_3 = 57^\circ;$

373. $x_1 = 4,85; \alpha_2 = 13^\circ,3; \alpha_3 = 18^\circ,6;$

374. $x_1 = 18,4; \alpha_2 = 31^\circ,5; \alpha_3 = 43^\circ$ ja võrrelda
resultaat aritmeetiliselt leitud resultaadiga!

Arvutuslükati abil lahendada täisnurkne kolmnurk, kui:

375. $x_1 = 4,85; \alpha_1 = 38^\circ,5; \alpha_2 = 90^\circ;$

376. $x_1 = 1,86; \alpha_2 = 90^\circ; \alpha_3 = 29^\circ,6;$

377. $x_1 = 1,64; x_2 = 2,35; \alpha_2 = 90^\circ$ ja võrrelda
resultaat aritmeetiliselt leitud resultaadiga!

Näide 16: Lahendada kolmnurk, kui:

$$x_1 = 15, x_2 = 18 \text{ ja } \alpha_3 = 82^\circ.$$

Otsitakse niisugust keele asendit, et antud külgede vastas oleksid kaks nurka, mille summa α_3 -ga võrduks 180° -le. Need nurgad on seekord $\alpha_1 = 43^\circ$ ja $\alpha_2 = 55^\circ$, x_3 on umbes 21,8.

Näide 17: Lahendada kolmnurk, kui:

$$x_1 = 25,6, x_2 = 13 \text{ ja } \alpha_3 = 36^\circ,5.$$

Niisugust asendit siin ei leidu, et $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ$, kuid seekord leiame asendi, kus $\alpha_2 + \alpha_3$ võrdub nurgaga x_1 -i vastas; viimast nurka peame lugema $(180^\circ - \alpha_1)$ -ks, et kõik vastaks sinus-lausele:

$$\frac{x_1}{\sin (180^\circ - \alpha_1)} = \frac{x_2}{\sin \alpha_2} = \frac{x_3}{\sin \alpha_3}.$$

Otsitavad suurused on $\alpha_1 = 116^\circ,5, \alpha_2 = 27^\circ, x_3 = 17.$

Lahendada kaldnurksed kolmnurgad, kui:

378. $x_1 = 6,3$; $x_2 = 5,8$ ja $\alpha_3 = 52^\circ,4$.

379. $x_1 = 17,2$; $x_2 = 10,2$ ja $\alpha_3 = 23^\circ$.

380. $x_1 = 22,7$; $x_2 = 19,8$ ja $\alpha_3 = 3^\circ,2$.

Kui nurk on väiksem kui $35'$, võib vastavalt arvutuslükati täpsusele sinus'e asemel raadiaalmõõduga mõõdetud kaare pikkus võtta.

Tangensskaala pikkuse üksus on kaks korda suurem sinusskaala pikkuse üksusest, vastavalt varva alumisele skaalale, missugune tuleb seekord võtta 0,1-st kuni 1-ni.

Tangensid nurkade jaoks, mis alla 6° , puuduvad arvutuslükatil; nende asemel võib võtta ilma suurema veata vastavad sinused ülemiselt keele skaalalt.

Arvutuslükati 4-jas asend (Trigonomeetiline skaala on ümber pööratud).

Tangensskaalal on logaritmid ainult kuni 45° ; 4-jas asend võimaldab nende otsimist 45° -st 90° -ni järgmisel põhjusel.

Trigonomeetriast on teada, et:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \varphi) \operatorname{ctg}(45^\circ + \varphi) = 1 \quad (*);$$

$$\operatorname{kuid} \operatorname{ctg}(45^\circ + \varphi) = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi),$$

sellepärast võib võrdust (*) kirjutada nii:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \varphi) \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) = 1,$$

millest järgneb:

$$\log \operatorname{tang}(45^\circ + \varphi) + \log \operatorname{tang}(45^\circ - \varphi) = 0.$$

Viimane valem õpetab, et nende nurkade tangensite logaritmid, mis teineteist 90° -ni täiendavad, näit. 40° ja 50° , 35° ja 55° jne. on sümmeetrilised punkti 0 ($= \log \operatorname{tang} 45^\circ$) kohta, üks logaritm on positiivne, teine negatiivne. See-pärast tuleb neljandas asendis lugeda tangensskaalal 45° , 40° , 35° jne. asemel 45° , 50° , 55° jne., alumisel varva skaalal 1—10.

Suuruste ja nende logaritmid loomulikud väärtused arvutuslükatil.

Märkus: Kõik, mis seni öeldud arvutuslükatist, on õige mistahes aluse juures. Mis edasi järgneb, käib aluse 10 kohta.

Keskmine skaala keelel sinus- ja tangensskaala vahel on mõõdupuu.

Seepärast, et $\log_{10} 10 = 1$, on varva alumise skaala pikkus 1 ja arvutuslükati 4-das asendis määrab keskmine keele skaala kümnendlogaritme alumisel varva skaalal asuvatele arvudele.

Olgu tähendatud 1-ga mõõduüksus (harilikult 25 cm.), olgu z — võetud pikkus keskmisel keele skaalal ja ξ tema vastas seisev number alumisel varva skaalal. Siis on — kui keel on täitsa varva sees —

$$lz_1 - 1 \log_{10} \xi_1 = 0$$

ja — kui keel on osalt välja tõmmatud —

$$lz_1 - 1 \log_{10} \xi_1 = \text{const.} = lz_2 - 1 \log_{10} \xi_2$$

$$\text{ehk } z_1 - \log_{10} \xi_1 = z_2 - \log_{10} \xi_2$$

$$z_1 - z_2 = \log \frac{\xi_1}{\xi_2} \quad (**)$$

$$\text{Kui võtta } z_2 = 0, \text{ on } z_1 = \log \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

Näide 18: Kui suur on $\log \frac{3,72}{1,58}$?

Asetades 0 mõõdupuul 1,58 vastu varva alumisel skaalal, leiame mõõdupuul 3,72-u vastas $z_1 = 0,372$.

381. Kas 18-dat näidet ei saa ka valemi (**) põhjal lahendada?

Leida logaritmid:

$$382. \log \frac{7,26}{5,16}$$

$$384. \log 11,2$$

$$386. \log \frac{43,8}{8,22}$$

$$383. \log \frac{3,28}{6,85}$$

$$385. \log \frac{6,53}{13,46}$$

Keele alumisel küljel asuvate skaalade tarvitamine arvutuslükati 1-ses asendis.

Näide 19: Leida nurk α , kui $\sin \alpha = \frac{5}{8}$.

Meie võtame tarvitada ülemise varva ja keele skaala ja loeme viimase numbrid 0,01 — 1. Nendel seame teineteise vastu 8 ja 5; siis on varva ülemise skaala parempoolse 1-e vastas 0,625. Varva skaala 1-e all alumisel

varva küljel on väljalõigus kriips, mis võimaldab sinuskaalalt lugeda $\alpha = 38^{\circ},7$.

Leida α , kui:

$$387. \sin \alpha = \frac{3}{7}. \quad 388. \sin \alpha = \frac{4}{9}. \quad 389. \sin \alpha = \frac{5}{12}.$$

Sarnasel viisil otsitakse alumistel skaaladel tangensi väärtustele vastavad nurgad.

Näide 20: Leida log 2,84.

Pahempoolne 1 keele alumisel skaalal viiakse ühendusesse arvuga 2,84 alumisel varva skaalal. Tagaküljel näitab mõõdupuu, et keel on 0,453 üksuse võrra varvast välja tõmmatud, missugune arv on ka arvu 2,84-ku logaritm.

390. Arvutada:

$$\begin{aligned} \log 1,67 \\ \log 3,56 \\ \log 82,5 \\ \log 0,478. \end{aligned}$$

§ 5. Liitprotsendid ja tähtajalised maksud.

Ülesanne 1:

Kapital a marka kannab kasu aastas $p\%$. Kui suureks kasvab kapital t aasta jooksul, kui iga aasta lõpul eelmise aasta intressid kapitalile juure lisatakse.

Lahendus: Iga mark kasvab aasta lõpuks $1 + \frac{p}{100}$ margaks, mispärast on alguskapital muutunud esimese aasta lõpuks $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ ehk aq margaks, kui protsentegur $1 + \frac{p}{100}$ tähendada lühidalt q -ga.

Teise aasta jooksul kasvab 1 mk. jällegi $1 + \frac{p}{100} = q$ margaks, teise aasta alguskapital aq marka — aq^2 margaks. Niiviisi edasi arutades leiame, et t aasta pärast on kogunenud kapital

$$k = aq^t.$$

391. a) Kui suureks kasvab kapital 2800 mk. 10 aastat 4-ja liitprotsendi peal olles?

b) Kui suur on vahe eelmisega, kui kapital oleks ainult liht protsente kannud?

392. Kui suureks kasvab kapital 3000 mk. 5 aastat a) 3⁰/₀, b) 4⁰/₀, c) 5⁰/₀ peal olles?

393. Kui suur peab olema alguskapital, et 15-e aasta pärast 100000 marka saada, kui maksetakse a) 3¹⁰/₀, b) 4⁰/₀.

394. 4000 marka muutusid 8-a aasta jooksul 5370 margaks. Mitu protsenti kandis kapital?

395. Mitme aasta pärast on 2425 marka muutunud 3158 margaks, kui maksetakse 4¹⁰/₀?

396. Kui suure aja jooksul kasvab kapital a) 2-e kordseks, b) 3-e c) 4-ja- d) 10-nekordseks, kui arvatakse 3,5⁰/₀?

397. Mis on kasulikum, kas anda kapital hoiule 10-eks aastaks 3⁰/₀-ga või 3-eks aastaks 10⁰/₀-ga?

398. Metsa puumass arvatakse 50000 m³-ks. Aastakasv on 1,1⁰/₀. Kui suureks kasvab metsa mass 10-e aasta jooksul?

399. Linna elanikkude arv on 18570, aastakasv 4,2⁰/₀. Kui suurt elanikkude arvu võib oodata 5-e aasta pärast?

400. Kui 10000 marka laenata 4⁰/₀-ga ja edasi laenata 4¹⁰/₀-ga, siis võib selle juures kui palju teenida a) 5-e, b) 10-e aasta jooksul?

401. Teatud summa pandi hoiule 15-eks aastaks, kusjuures oodati 5⁰/₀, kuid selgus, et maksetakse ainult 4⁰/₀. Mitmenda osa peab esialgsele summale juure lisama, et soovivat kapitali koguda?

402. Pandi kasvama 4650 mk. Kui palju maksetakse välja 4 aasta 10 kuu pärast, kui arvatakse 3¹⁰/₀?

403. Kapital, mis kandis $p = 4\%$, oli teatud ajaks $k = 19280$ margaks kasvanud. Kui suur oli kapital a) 1 aasta, b) 2 a., c) 5 aastat tagasi?

404. Keegi oli kohustatud maksma:

a) 80000 mk.; $p = 4\%$; tähtajaga 1. jaan. 1924

b) 60000 mk.; $p = 3\frac{10}{0}\%$; tähtajaga 1. jaan. 1923

c) 100000 mk.; $p = 4\frac{10}{0}\%$; tähtajaga 1. jaan. 1925.

Kui suured olid need summad 1. jaanuaril 1922?

405. Kapitali väärtuse arvutamist tähtpäeval enne lõputermiini nimetatakse tema diskontimiseks. — Diskontida k mk. t aastat enne tähtaega, kui arvatakse $p\%$

$$\left(1 + \frac{p}{100} = q\right). k = 8800; t = 3; p = 5.$$

406. Näita, et kapital a marka t aasta jooksul p aastaprotsendi peal olles kasvab:

a) kui protsentraha iga kuu tagant kapitalile juure lisatakse, summaks

$$a \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 12}\right)^{12t};$$

b) kui iga $\frac{1}{n}$ aasta tagant,

$$a \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt} \text{ margaks.}$$

Arvutada need summad, kui $a = 1000$; $p = 4$; $t = 10$.

Avaldust $a \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt}$ võib muuta niisuguseks:

$$a \left[\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}} \right]^{\frac{pt}{100}}.$$

Kõrgemas matemaatikas näidatakse, et avaldus nurgelistes klambrites läheneb arvule e („loomulikkude“ logaritmid alusele), kui n piiramata kasvab; järelikult on kapital sel puhul t aasta pärast:

$$ae \frac{pt}{100}.$$

407. Kui suureks kasvavad 1000 mk. 10 aasta jooksul 4% peal olles, kui protsentraha kapitalile juure lisatakse a) iga aasta, b) iga poole aasta, c) $\frac{1}{4}$ aasta, d) iga kuu tagant; e) pidevalt juure lisatakse.

408. Mitu protsenti tuleb arvutada aasta kohta, kui

a) iga poole aasta tagant võetakse $2,5\%$?

b) iga veerandaasta tagant võetakse $1,25\%$?

409. Metsa puumass kasvas 10-e aasta jooksul 50000 m^3 -st 55780 m^3 -ni. Kui kõrgeks tuleb lugeda metsa loomuliku kasvu protsenti? (Vrdl. nbr. 398, kus kasv võeti aasta kohta, nagu seda lõpuarvel tehakse.)

410. 5-e aasta jooksul kasvas linna elanikkude arv 18570-st 22810-ni. Arvutada „loomuliku“ kasvu protsent (vrld. nbr. 399).

411. Graafiliselt esitada funktsioonid:

$$y = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x;$$

$$y = a \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 2}\right)^{2x};$$

$$y = ae^{\frac{px}{100}}, \text{ kui } a = 1; 2$$

$$p = 3; 4.$$

Ülesanne 2: t aasta jooksul pannakse iga aasta algul kasvama a marka. Kui suur summa kogub t aasta lõpuks? [Protsenttegur olgu ka siin $q = 1 + \frac{p}{100}$.]

Lahendus:

I aasta algul kasvama pandud summa
muutub t aasta lõpuks aq^t margaks,
II aasta algul pandud summa
muutub t aasta lõpuks aq^{t-1} margaks,
III aasta algul pandud summa
muutub t aasta lõpuks aq^{t-2} margaks,
.....
eelviimase aasta algul pandud summa
muutub t aasta lõpuks aq^2 margaks,
viimase aasta algul pandud summa
muutub t aasta lõpuks aq margaks.

Kokku (kui eraldada ühine tegur aq):

$$aq (q^{t-1} + q^{t-2} + \dots + q + 1).$$

Klambrites on geom. rida, — tõusev rida, kui lõpust alguse poole lugeda. Sellepärast saadakse otsitava kapitalina:

$$k = aq \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

412. Iga aasta algul pannakse hoiule 2500 marka. Kui suur summa kogub 10-ne aasta jooksul, kui hoiukassa maksab $4\frac{1}{2}\%$?

[Võrdsete aegade tagant kassasse maksetavat summat (siin 2500 mk.) nimetatakse *preemiaks*.]

413. Kui suur peab olema aastapreemia, et 15-ne aasta pärast saaks välja võtta 67980 mk. (Arvatakse 5⁰/₀.)

414. Mitme aasta pärast maksetakse välja 41080 mk., kui aastapreemia on 5000 mk. ja arvatakse 4⁰/₀?

415. Mitme aasta pärast maksetakse välja 65790 mk., kui aastapreemia on 4500 mk. ja arvatakse 3⁰/₀?

416. Näita, et t aasta pärast kogub kapital:

$$b \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1},$$

kui iga aasta lõpul kasvama panna b marka.

417. Kui aastakohustustest iga kord 1000 marka võlgu jääda, kui suur on siis võlg 6-e aasta pärast, kui arvatakse 3⁰/₀?

418. Esialgsetele 2000 margale lisatakse iga aasta 300 mk. juure. Kui palju on koos 10-ne aasta pärast? (Arvatakse 5⁰/₀.)

419. 60000 marka tahetakse 5-e aasta peale ära jaotada. Kui palju tuleb maksta iga aasta lõpul, kui arvatakse 3¹/₂⁰/₀?

420. Maja eest nõutakse 10-ne aasta jooksul iga aasta 50000 marka. Kui suur on maja väärtus, kui arvatakse 4⁰/₀?

421. Kui suured on keskmised aasta kulud maja korrashoidmiseks, kui iga aasta tarvitatakse selleks 2000 marka ja iga 5-e aasta järel suurema paranduse jaoks 10000 marka? (4⁰/₀.)

422. Kui iga n aasta tagant pannakse hoiule t korda a marka, siis kogub summa:

$$a) \text{ kui maksta aasta algul: } aq^n \cdot \frac{q^{nt} - 1}{q^n - 1},$$

$$b) \text{ kui maksta aasta lõpul: } a \cdot \frac{q^{nt} - 1}{q^n - 1}.$$

423. Hoiukassasse, kus arvatakse 4⁰/₀, maksetakse aasta algul iga 3-e aasta tagant 10000 mk. Kui suur on kapital 12-ne aasta pärast?

424. Pandi hoiule aasta lõpul iga 2-e aasta tagant 3500 marka. Kui suureks kasvab kapital 10-ne aasta jooksul, kui kassa maksab 5⁰/₀?

Ülesanne 3: Pannakse kasvama a marka. Sellest summast võetakse iga aasta tagant b marka, kuid esimest korda r aastat pärast hoiule panemist. Kui palju on veel hoiul t aasta pärast? ($t > r$.)

Lahendus: r aasta pärast on hoiule pandud summa kasvanud aq^r margaks, millest võetakse b marka. $(r+1)$ -e aasta pärast on kassas $(aq^r - b)q$ ehk $aq^{r+1} - bq$ marka, millest jälle võetakse b marka. Nii on $(r+2)$ -e aasta pärast saada $(aq^{r+1} - bq - b)q$ ehk $aq^{r+2} - bq^2 - bq$ marka, $(r+3)$ -e aasta pärast $aq^{r+3} - bq^3 - bq^2 - bq$ marka, t aasta pärast on kassasse jäänud kapital $k = aq^t - bq^{t-r} - bq^{t-r-1} - bq^{t-r-2} - \dots - bq - b$ ehk $k = aq^t - b(q^{t-r} + q^{t-r-1} + q^{t-r-2} + \dots + q + 1)$. Klambrites on geom. rida. Sellepärast:

$$k = aq^t - b \frac{q^{t-r+1} - 1}{q - 1} \quad (*)$$

Erijuhused:

1) Kui nimetatud summa võetakse pangast esimest korda juba aasta pärast, siis on $r = 1$ ja valemist (*) saadakse:

$$k = aq^t - b \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

Harjutus.

425. Pandi hoiule 50000 marka, missugusest summast võeti iga aasta tagant 4000 marka välja. Kui palju on hoiukassast saada 12-e aasta pärast? ($3\frac{1}{2}\%$.)

2) 426. Kui palju tuleb maksta kassasse, et 11 aastat hiljem võiks 20-e aasta jooksul sealt iga aasta võtta 1000 marka? Kassa maksab 5% .

[Kassa poolt võrdsete aegade järele maksetavat summat (siin 1000 mk.) nimetatakse rendiks.]

Juhatus: Valemis (*) tuleb võtta $k = 0$, nii et

$$a = \frac{b(q^{t-r+1} - 1)}{q^t(q - 1)}.$$

3) 427. Eelmine ülesanne, kuid tingimusega, et rendi maksmine algaks aasta pärast.

Juhatus: Seekord tuleb võtta $k = 0$ ja $r = 1$.

Nii on:

$$a = \frac{b(q^t - 1)}{q^t(q - 1)}.$$

Harjutused:

428. 50000 marga eest soovitakse saada 12-e aasta jooksul esimest korda aasta pärast maksetavat renti. Arvatakse $3\frac{1}{2}\%$. Kui suur on rent?

429. Kui suure aja jooksul võib kustutada 80000 marka, kui iga aasta maksetakse 5000 marka. Esimene maks tasutakse aasta pärast ja arvatakse 5% .

430. Metsa puumass on 50000 m³ suur, aastakasv $1,1\%$. Kui palju on metsa järel 10 aasta pärast, kui iga aasta raiutakse 600 m³?

431. Metsa puumass on 50000 m³, aastakasv $1,1\%$. Kui palju tohib iga aasta raiuda, et 18 aasta pärast oleks metsa 60000 m³?

432. 12000-margalist renti, mida 10 aastat maksetakse, soovitakse muuta 12-aastaliseks rendiks. Arvatakse 3% . Kui suur on uus rent?

433. Kellelgi on õigus saada 12000 mk. renti aastas 20-e aasta jooksul. Kui suure ühekordse maksuga võiks teda kohe rahuldada? ($3\frac{1}{2}\%$.)

Laenude kustutamise kava.

Suuremate laenude juures annab laenuvõtja võlakirju välja (n. n. obligatsioone) teatud summade, näit. 1000-e marga, 5000-de marga väärtuses, missugused kustutatakse nendele määratud tähtajal.

Näide: 5-miljonilise laenu üle antakse välja 4% -lisi obligatsioone à 1000, 5000 ja 10000 mk. Võlg kustutatakse 10-e aasta jooksul. 10000-margalisi obligatsioone on ette nähtud vähemalt 5 korda vähem kui 1000-de ja 5000-demargalisi kokku. Kui suur on iga aasta kustutatav summa ja missuguse kava järgi tuleks kustutamine ette võtta?

Lahendus: Aastamaks b järgneb võrrandist:

$$5000000 \cdot 1,04^{10} = b \frac{1,04^{10} - 1}{0,04}$$

7-me kohaga logaritmidega saame:

$$\begin{aligned} \log 200000 &= 5,3010300 \\ 10 \log 1,04 &= 0,1703333 \\ - \log (1,04^{10} - 1) &= 0,3185381 \\ \log a &= 5,7899014 \\ a &= 616455. \end{aligned}$$

Kustutamise kava oleks seepärast järgmine.

Laen: 5000000 mk.; $p = 4\%$. Aastamaks: 616455 mk.; $t = 8$ a.

A	B	C	D	$E =$ $= C - D$	$F = C -$ $- D + \text{in-}$ tressid	G	H		
Aastad	Intrissid	Kustuta- misele minev osa + F	Tagasi- ostu- hind			Võlg aasta lõpul	10000 mk.	5000 mk.	1000 mk.
1	200000	416455	416000	455	473	4584000	18	36	56
2	183360	433095 + 473 433568	433000	568	591	4151000	18	39	58
3	166040	450415 + 591 451006	451000	6	6	3700000	18	43	56
4	148000	468455 + 6 468461	468000	461	479	3232000	20	41	63
5	129280	487175 + 479 487654	487000	654	680	2745000	20	45	62
6	109800	506655 + 680 507335	507000	335	348	2238000	22	44	67
7	89520	526935 + 348 527283	527000	283	294	1711000	22	48	67
8	68440	548015 + 294 548309	548000	309	321	1163000	22	52	68
9	46520	569935 + 321 570256	570000	256	266	593000	24	51	75
10	23720	592735 + 266 593001	593000	1		—	25	53	78
			5000000				209	452	650

Intressid esimese aasta eest moodustavad summa 200000 mk. (veerg B). Käepärast on 616455 mk., nii et tagasi maksta võiks laenatud summast 416455 mk. (veerg C); kuid tegelikult kustutatakse laenud obligatsioonide viisi, mispärast esimesest aastast tuleb üle kanda lisaks teisel aastal kustutamisele minevale osale 455 mk. + intressid = ümarguselt 473 mk. (veerg F) (Mispärast nii?) — Sel viisil edasi arutades saame tabelis antud kustutamise kava. Viimane vahe 1 mk. (veerg E) oleneb arvutuste ebatäpsusest. Veerus H tähendatud obligatsioonide arv:

209 à 10000 mk.

452 à 5000 mk.

650 à 1000 mk.

vastab ülesande nõuetele.

Harjutused:

434. Seada kustutamise kava, kui on laenatud $1\frac{1}{2}$ miljonit ja see summa kustutatakse 6-e aasta jooksul 4⁰/₀-ga. Obligatsioonid on à 10000 mk., 5000 mk. ja 3000 mk.

(Juhatus: aastasumma $b = 286143$ mk.)

435. 3 miljonit kustutatakse 5⁰/₀-i juures 7-e aasta jooksul. Obligatsioonid olgu 20000-de, 10000-de ja 5000-de marga väärtuses. Seada kustutamise kava.

(Juhatus: aastasumma $b = 518460$ mk.)

§ 6. Kombinatorika.

Eelharjutus. Olgu antud 4 suurust (elementi): a, b, c, d.

Ühendleme elemente 3-e kaupa niiviisi, et rühmad elementide poolest isekeskis lahku läheksid. Niisuguseid ühendlusi nimetatakse kombinatsioonideks. Neljast elemendist kolme kaupa võetud kombinatsioonide arv on 4: abc, abd, acd, bcd.

Järele katsudes leiame, et iga siin esineva kombinatsiooni elemente võib 6-el viisil ümber asendada, nii

et ühendluste koguarv on 24. Ühendlused ise on järgmised:

abc	abd	acd	bcd
acb	adb	adc	bdc
bac	bad	cad	cbd
bca	bda	cda	cdb
cab	dab	dac	dbc
cba	dba	dca	dcb

436. Moodustada 5-est elemendist; a, b, c, d, e ühendlused 3-e kaupa.

Ühendlusi, mis erinevad üksteisest elementide suhtes, nimetatakse **kombinatsioonideks**; mis ainult elementide järjekorra poolest, — **permutatsioonideks** (=vahetlusteks); niihästi kombinatsioone kui permutatsioone nimetatakse ühise nimega **variatsioonideks**.

Harjutusest järgneb, et 4-jast elemendist 3-e kaupa võetud variatsioonide arv võrdub permutatsioonide arvuga kolmest elemendist kasvatatud kombinatsioonide arvuga 4-jast elemendist 3-e kaupa.

Seda võrdust tähendame nii:

$$V_4^3 = P_3 \cdot K_4^3.$$

$$\text{Üldse: } V_n^m = P_m \cdot K_n^m.$$

Otsime nüüd üldavalduse variatsioonide jaoks, siis permutatsioonide kohta. Kombinatsioonide valem on variatsioonide ja permutatsioonide avalduste jagatis.

Olgu antud n elementi: a, b, c, k, l.

Kahe kaupa võetud variatsioonide arvu võime leida, kui igale elemendile kõik teised (n — 1) elementi üksikult juure kirjutame järgmise skeemi järgi:

	Variatsioo- nide arv	
ab, ac, ad, ak, al	n — 1	}
ba, bc, bd, bk, bl	n — 1	
ca, cb, cd, ck, cl	n — 1	
.	
la, lb, lc, li, lk	n — 1	

$$V_n^2 = n(n - 1).$$

Kolme kaupa võetud variatsioonide arvu leiame, kui igale eelmises skeemis tähendatud variatsioonile teised (n — 2) elementi üksikult juure kirjutame.

	Variatsioo- nide arv	
abc, abd, abe, abk, abl	$n-2$	}
acb, acd, ace, ack, acl	$n-2$	
adb, adc, ade, adk, adl	$n-2$	
.		
lka, lkb, lkc, lkh, lki	$n-2$	

$$V_n^3 = n(n-1)(n-2)$$

Niiviisi edasi arutades leiame, et

$$V_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \cdot \cdot (n-m+1).$$

437. Kui suur on 5-est elemendist kolme kaupa võetud variatsioonide arv?

438. Kui suur on 6-est elemendist 4-ja kaupa võetud variatsioonide arv?

439. Mitu 3-evärvilist lippu võib moodustada 6-est värvist (valge, must, sinine, punane, roheline, kollane)?

440. Mitu arvu võib üldse kirjutada numbrite 1, 2, 3, 4, 5 abil, kui iga number tohib esineda ainult üks kord?

441. Mitu isesugust signaali võib anda 4-javärvilise, kõrvustikku asetatud laternaga?

Variatsioonide valemis on muidugi $m < n$. Kui aga m muutub n -iks, siis nimetame ühendlusi permutatsioonideks, mispärast permutatsioonide valem on:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \cdot \cdot 2 \cdot 1.$$

Täisarvude kasvatist 1-est n -ni tähendatakse lühidalt $n!$ (v. lk. 44, nbrd 326—335); seepärast:

$$P_n = n!$$

442. Mitu permutatsiooni võib moodustada 7-est elemendist?

443. Mitmel viisil võib asetada 10 õpilast?

444. Mitu 4-ja kohaga arvu võib moodustada numbritest: 2, 5, 6, 9?

445. Mitu permutatsiooni võib moodustada elementidest a, b, c, d, e, f, et esimesel kahel kohal oleks ab?

446. Mitu 4-ja kohaga arvu võib moodustada numbritest: 0, 1, 2, 8?

Nagu juba enne tähendatud, saame kombinatsioonide valemi, kui variatsioonide ja permutatsioonide valemid jagame, s. t.

$$K_n^m = \frac{V_n^m}{P_m} \text{ ehk}$$

$$K_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$$

Viimast murdu $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}$ tähendatakse lühidalt märgiga $\binom{n}{m}$ ja loetakse: „n m-i peal“.

447. Mitu kombinatsiooni võib moodustada 10-est elemendist, kui elemente 4-ja kaupa rühma võtta?

448. 15-st sõdurist on vahiposti jaoks vaja 4 meest. Mitmel viisil võib neid valida?

449. Mitu korda kõlavad klaasid, kui kõik 15 sellis olevat isikut üksteisega klaasid kokku löövad?

450. Kui suur on 12-est elemendist a) 8-a kaupa, b) 4-ja kaupa võetud kombinatsioonide arv?

451. Kui suur on 15-est elemendist a) 9-a kaupa, b) 6-e kaupa võetud kombinatsioonide arv?

452. Nbr. 450 ja 451 kohta võib näidata, et üldse

$$K_n^m = K_n^{n-m} \text{ ehk } \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m},$$

sest iga kombinatsiooni eraldatud m elemendi juures moodustavad ülejäänud n - m elementi iseritta kuuluva kombinatsiooni. — Tõenda ka selle lause õigeolu, võrreldes avalduste $\binom{n}{m}$ ja $\binom{n}{n-m}$ murru kujul esitatud kirjutused.

453. Tõenda, et

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}, \text{ esitades seks } \binom{n}{m} \text{ ja } \binom{n}{m+1}$$

murru kujul.

454. Kui suur on kõikide kombinatsioonide arv 5-est elemendist?

455. Käepärast on kaalupommid: 1 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 50 g, 100 g. Mitmel viisil võib neid ühendleda mõõtmiseks?

456. Mitu segu võib valmistada 7-mest spektrumi värvist?

457. Rahvusvaheline laevastik tarvitab 27 isesugust lippu. Mitu kombinatsiooni võib moodustada 2—5 kaupa?

458. Mitu jagajat on arvu: a) 42; b) 210; c) 5005?

459. Mitu ühist jagajat on arvu: a) 330 ja 390; b) 6930 ja 10010?

460. Mitu arvu võib kirjutada numbritega 1, 2, 3, 4, 5, kui iga number tohib esineda samas arvus ainult üks kord ja suurem number ei tohi seista väiksemast eelpool?

461. Mitmes punktis lõikuvad $n=8$ sirget, kui 3 punkti ei asu ühel sirgel?

462. $n=8$ punkti määravad mitu sirget?

463. Mitut sirget mööda lõikuvad $n=8$ tasapinda?

464. Ühes punktis lõikuvat n sirget määravad mitu tasapinda?

465. Mitmes punktis lõikuvad $n=8$ sirget, kui $p=3$ sirget lõikuvad ühes punktis?

466. $n=8$ punkti määravad mitu sirget, kui $p=4$ punkti asuvad ühel sirgel?

467. Mitu diagonaali on n -nurgas?

468. $n=10$ punkti määravad mitu kolmnurka?

469. Mitu ringjoont võib tõmmata läbi $n=10$ punkti?

470. Mitu tasapinda lähevad läbi $n=10$ punkti ruumis?

471. $n=7$ punkti tasapinnal määravad mitu nelinurka?

Ühendlused kordumistega.

Seni panime tähele ainult niisuguseid ühendlusi, kus üksikus ühendluses esineb iga element ainult üks kord. Urime nüüd, missugused on valemid, kui ühendlustes võivad elemendid korduda.

Variatsioonid:

Seekord $Vk_n^2 = n^2$ (k olgu siin kordumise märgiks), sest seekord võib igaühelt n elemendist n elemendiga

ühendleda. Igäüht leitud variatsioonidest järgimööda n elemendiga ühendledes saame $Vk_n^3 = n^3$. Üldse:

$$Vk_n^m = n^m.$$

472. Kui suur on 5-est elemendist kordumistega 4-ja kaupa võetud variatsioonide arv?

473. Elementide arv on 3, variatsioonide arv kordumistega 81. Mitme kaupa on ühendletud elemendid?

474. $Vk_n^5 : Vk_n^3 = 225$. Leida n .

475. Mitu juhust on olemas viskamisel a) 2-e, b) 3-e täringiga?

476. Morse tähestikus kujutatakse tähti ühendledes punkte ja kriipse. Mitu isesugust märki on võimalik, kui punkte ja kriipse ühendleda mitte rohkem kui 4-ja kaupa?

Permutatsioonid:

Näide. Antud on 5 elementi: a, b, c, d, e, millest 3 elementi: c, d, e on isekeskis võrdsed. Leida permutatsioonide arv.

Lahendus: Otsitav permutatsioonide arv olgu x . Kui võtta mistahes permutatsiooni ja nimetatud 3 ühesugust elementi isesugusteks muuta, siis võib need kolm elementi omavahel $3!$ viisil ümber asendada, nii et üks permutatsioon muutuks $3! = 6$ -eks. Kõikide permutatsioonide kohta oleks see $3!x$. Teisestküljest on aga permutatsioonide kogu arv, kui kõik elemendid isesugused, $5!$ Seepärast on:

$$3!x = 5! \quad \text{ja} \quad x = \frac{5!}{3!}$$

Üldse, kui n elemendist on s ühesugust, siis on permutatsioonide arv

$$P_{n(s)} = \frac{n!}{s!}$$

ja kui peale selle on n -i hulgas t ühesugust elementi teist liiki, siis

$$P_{n(s,t)} = \frac{n!}{s!t!}$$

477. Mitu permutatsiooni võib moodustada 10-est elemendist, kui nende hulgas on 5 ühesugust elementi?

478. Mitu permutatsiooni võib moodustada 12-est elemendist, kui nende hulgas on 5 ühesugust elementi üht liiki ja 6 ühesugust teist liiki?

479. Mitu 4-ja kohaga arvu võib moodustada numbri-
ritest:

a) 2; 2; 7; 8.

b) 1; 5; 5; 5.

c) 3; 3; 8; 8.

480. Mitu 5-e kohaga arvu võib moodustada numbri-
ritest: 0; 0; 1; 2; 3?

481. Mitmel viisil võib asetada ritta 5 ühemarga-
list, 3 kolmemargalist ja 2 viiemargalist raha?

Kombinatsioonid.

Näide: Leida kordumistega 3-e kaupa võetud kombinatsioonid 4-jast elemendist.

Lahendus: Asja selgitamiseks olgu seekord elemendid tähendatud numbritega: 1, 2, 3, 4. Võimalikud kombinatsioonid on järgmised (numbrid on nendes korraldatud loomulikus järjes):

111	133	234
112	134	244
113	144	333
114	222	334
122	223	344
123	224	444.
124	233	

Suurendame kõigis ühendlustes teine element 1-
ja 3-as 2-e võrra; meie saame:

123	145	246
124	146	256
125	156	345
126	234	346
134	235	356
135	236	456.
136	245	

Kordumised on kadunud ja juure on tulnud $3 - 1 = 2$ uut elementi. Järelikult:

$$Kk_4^3 = K_6^3 \text{ ja}$$

$$\text{üldse: } Kk_n^m = \binom{n+m-1}{m}.$$

482. Kui suutr on 5-est elemendist kordumistega 3-e kaupa võetud kombinatsioonide arv?

483. Seesama, 8-ast elemendist 5-e kaupa võetud?

484. Leida 5-est elemendist kõikide kordumistega võetud kombinatsioonide arv.

485. Arvutada elementide arv, kui kordumistega 3-e kaupa võetud kombinatsioonide arv suhtub kordumistega sama kaupa võetud kombinatsioonide arvesse, nagu 6 : 11.

486. Mitu elementi läheb vaja, et 3-e kaupa neid võttes kordumistega 220 kombinatsiooni saaks?

487. Mitu arvu võib kirjutada numbritega 1, 2, 3, kui iga number tohib esineda arvus kõige rohkem 2 korda ja suurem number ei tohi seista väiksemast eel-pool?

488. Mitu juhust on olemas viskamisel 3-e täringiga, kui igal täringil peab ilmuma isesugune silmade arv?

489. 4-ja täringiga visates on mitu juhust olemas, et 2-el täringil esineb ühesugune silmade arv?

§ 7. Algmõisted tõenäosuse õpetusest.

Nähtuse esileilmumise matemaatiliseks tõenäosuseks (t) nimetatakse murdu, mille lugejaks on sellele nähtusele soodsate (n) — ja nimetajaks kõikide ühtlasvõimalikkude juhuste arv (N), s. t.

$$t = \frac{n}{N}.$$

Näide 1: Kui suur on tõenäosus, et kahe täringiga korraga visates arvu 9 saada?

Lahendus: Igaüks ühe täringi 6-est numbrist võib esile tulla igaühega teise täringi 6-est numbrist, nii et ühtlasvõimalikkude juhuste arv on $6^2 = 36$. Soodsad juhused on 3 — 6; 4 — 5; 5 — 4; 6 — 3; järelikult on otsitav tõenäosus $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Eelmisest selgub, et nähtuse mitteilmumise tõenäosus t_v (vastastõenäosus) on

$$t_v = \frac{N - n}{N} = 1 - \frac{n}{N} = 1 - t.$$

Kui	$\frac{n}{N} = 1$,	siis öeldakse, et sündmus on kindel.
"	$\frac{n}{N} > \frac{1}{2}$,	" " " " " tõenäone.
"	$\frac{n}{N} = \frac{1}{2}$,	" " " " " kahtlane.
"	$\frac{n}{N} < \frac{1}{2}$,	" " " " " tõenäotu.
"	$\frac{n}{N} = 0$,	" " " " " võimatu.

490. Kui suur on tõenäosus täringiga a) arvu „viis“ visata, b) paarisarvu visata?

491. Kui suur on tõenäosus, et kahe täringiga korraga visates arvu 6 saaks?

492. Kui tõenäone on kord kahe täringiga visates summat 8 mitte saada?

493. Kastis on musti ja valgeid kuule, nendest valgeid 12-e võrra rohkem kui musti. Tõenäosus valget kuuli võtta on $\frac{3}{5}$. Kui palju oli valgeid kuule?

494. Leida — kahe täringiga visates — tõenäosus summad 2, 3 jne. kuni 12-ni saada iga üksiku juhuse jaoks. Leitud väärtused graafiliselt esitada ja seletada, mispärast asuvad nemad sümmeetriliselt?

495. Kui tõenäone on kahe täringiga korraga visates arvud a) „kaks“ ja „viis“ saada? b) 2 ühesugust arvu saada?

496. Kui tõenäone on ühe täringiga kord visates ei viit ega kuut saada?

Tihti tuleb võimalikkude ja soodsate juhuuste arv ühendlusõpetuse põhjal leida.

Näide 2: Kastis on 4 valget, 5 musta ja 6 punast kuuli. Võetakse sealt kolm kuuli. Kui suur on tõenäosus, et kõik kolm kuuli on punased?

Lahendus: Antud 15 kuuli võib $\binom{15}{3} = 455$ viisil ühendleda, nii et võimalikkude juhuuste arv on 455. Punaseid kuule võib kombineerida $\binom{6}{3} = 20$ viisil; järelikult on soodsate juhuuste arv 20 ja otsitav tõenäosus $\frac{4}{91}$.

497. Kastis on 4 valget ja 6 musta kuuli. Võetakse sealt 2 kuuli. Kui suur on tõenäosus, et mõlemad kuulid on mustad?

498. 35-e loosi seas on 15 võitu. Kui korraga tõmmata 2 loosi, kui suur on tõenäosus, et mõlemad on võidud?

499. Kastis on 5 valget, 6 musta ja 7 punast kuuli. Kui sealt võtta 3 kuuli, kui suur on tõenäosus, et kõik 3 kuuli on a) valged, b) mustad, c) punased, d) ise karva?

500. 30-e loosi seas on 12 võitu. Tõmmatakse 2 loosi. Kui tõenäone on saada 1-e võidu ja 1-e tühja numברי?

501. 10-est sõdurist määratakse liisu kaudu vahiposti 4 sõdurit. Kui suur on tõenäosus iga üksiku sõduri kohta, et liisk tema peale langeb?

502. Kui tõenäone on kolme täringiga visates summat a) 9, b) 10 saada?

503. Kastist, kus 4 valget ja 7 musta kuuli, võetakse 5 kuuli. Kui suur on tõenäosus, et a) 2 kuuli on valged ja 3 mustad; b) 3 kuuli on valged ja 2 mustad?

Lause: Tõenäosus, et ilmub üks mitmest (näit. kolmest), üksteisest olenematust nähtusest (täieline tõenäosus ehk tõenäosus: „k a s — v õ i“), võrdub üksikute nähtuste tõenäosuste summaga.

Tõendus: Olgu N kõikide võimalikkude juhuste arv ja n_1, n_2, n_3 — vastavalt esimesele, teisele ja kolmandale nähtusele soodsate juhuste arvud; siis on esileilmumise tõenäosused:

üksikute nähtuste suhtes $t_1 = \frac{n_1}{N}$, $t_2 = \frac{n_2}{N}$ ja $t_3 = \frac{n_3}{N}$ ning kõigist kolmest ükskõik missuguse nähtuse esileilmumise tõenäosus

$$T = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{N}.$$

Sellest järgneb, et

$$T = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{N} \text{ on}$$

$$\frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N} = t_1 + t_2 + t_3,$$

millega lause on tõendatud.

Näide 3: Kastis on 4 valget, 5 musta ja 6 punast kuuli. Võetakse sealt 3 kuuli. Kui suur on tõenäosus, et võetud 3 kuuli on ühesugust karva?

Näide 2 õpetab, et tõenäosus kolme punase kuuli ilmumiseks on $\frac{4}{91}$; samal viisil võib leida, et kolme valge kuuli ilmumiseks on ta $\frac{4}{455}$ ja kolme musta kuuli suhtes $\frac{2}{91}$. Otsitav tõenäosus on seepärast

$$\frac{4}{91} + \frac{4}{455} + \frac{2}{91} = \frac{34}{455}.$$

504. Kastis on 4 valget ja 6 musta kuuli. Võetakse sealt 2 kuuli. Kui suur on tõenäosus, et mõlemad võetud kuulid on ühte värvi?

505. Kui suur on tõenäosus, et 2-he täringiga visates 6 või 9 saada?

506. Kui tõenäone on 3-e täringiga korruga visates a) 2 ühesugust ja 3-da isesuguse arvu saada? b) vähemalt 2 ühesugust arvu saada?

507. Kui tõenäone on kahe täringiga korruga visates rohkem kui 6 punkti saada?

La use. Tõenäosus, et esile ilmuvad mitu (näit. kolm) ükssteisest olenematut nähtust (liittõenäosus ehk tõenäosus: „nii hästi — kui“), võrdub üksikute nähtuste ilmumise tõenäosuste kasvatisega.

Tõendus: Olgu N_1 ja n_1 , N_2 ja n_2 , N_3 ja n_3 vastavalt esimese, teise ja kolmanda nähtuse esile ilmumise võimalikkude ja soodsate juhuste arvud, siis on kõikide võimalikkude juhuste arv $N_1 N_2 N_3$, sest igaüks ühe nähtuse võimalikkudest juhustest võib koos ilmuda igaühega teise nähtuse võimalikkudest juhustest. Samal põhjusel on kõikide soodsate juhuste arv $n_1 n_2 n_3$ ja otsitav tõenäosus

$$T = \frac{n_1 n_2 n_3}{N_1 N_2 N_3} = \frac{n_1}{N_1} \cdot \frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_3}{N_3} = t_1 \cdot t_2 \cdot t_3.$$

Näide 4: Ühes kastis on 6 valget ja 4 musta kuuli, teises 4 valget ja 5 musta, kolmandas 3 valget ja 8 musta kuuli. Igast kastist võetakse üks kuul. Kui suur on tõenäosus, et kõik kolm kuuli on valged?

Lahendus: Tõenäosus esimesest kastist valget kuuli võtta on $\frac{6}{10}$, teisest võtta $\frac{4}{9}$ ja kolmandast $\frac{3}{11}$. Selle tõenäosus, et kõik kuulid on valged, on

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{11} = \frac{4}{55}.$$

Näide 5: Kaks mängijat otsustasid, et terve sissemaksu saab nendest see, kes esimesena võidab enne mängu juba mahatehtud partiide arvu, kuid mingisugusel põhjusel pidid nemad mängu lõpetama, kui esimesel mängijal puudus võiduni üks partii ja teisel kaks. Kuidas peavad nad mängupandud summa omavahel jagama?

Lahendus: Mängu jätkamisel saaks teine mängija sissemaksu alles siis, kui tema võidaks nii hästi järgmise partii, mille tõenäosus $\frac{1}{2}$, kui ka ülejärgmise partii, mille tõenäosus samuti $\frac{1}{2}$. Järelikult on tõenäosus, et mängu jätkamisel teine võidaks — teoreemi põhjal liit tõenäosusest — $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; et esimene võidaks $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Tähen-dab, summa jagamisel saab esimene 3 korda rohkem kui teine.

Järeldus: Tõenäosus, et nähtus kordub järgimööda n korda, on

$$T = t^n.$$

508. Kui suur on tõenäosus, et metallraha langeb viskamisel 4 korda ühe ja sama külje peale?

509. Kui suur on tõenäosus, et 2-he täringiga korraka visates 3 korda järgimööda arvu 6 saaksime? (Vrdl. ülesanne nr. 491).

510. Kui suur on tõenäosus, et a) kahe, b) kolme täringiga visates summat 9 ja siis 10 saaksime?

511. Nõus on 3 valget ja 6 musta kuuli. Võetakse sealt kuul välja ja pannakse siis jälle tagasi. Kui suur on tõenäosus a) 3 korda järgimööda valget kuuli võtta? b) 6 korda järgimööda musta kuuli võtta?

512. Kombineeritud juhused kahe sündmuse suhtes.

Olgu t_1 nähtuse A ilmumise tõenäosus, t_2 — tõenäosus nähtuse B suhtes, siis on tõenäosus, et

A ei ilmu	$1 - t_1$
B ei ilmu	$1 - t_2$
A ilmub, kuid B mitte	$t_1 (1 - t_2)$
A ei ilmu, kuid ilmub B	$(1 - t_1) t_2$
Ilmub ainult A või B	$t_1 (1 - t_2) + (1 - t_1) t_2$
A ja B ilmuvad mõlemad	$t_1 t_2$

A ja B mõlemad korraga ei ilmu,
teiste sõnadega, et kõige rohkem

üks nendest ilmub $\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1 - t_1 t_2$

Ei ilmu ei A ega B $\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1 - t_1) (1 - t_2)$

Ilmuvad A, või B, või mõlemad
korraga, teiste sõnadega, et

vähemalt üks nendest ilmub $\cdot 1 - (1 - t_1) (1 - t_2)$.

Järele mõtelda, mispärast nii!

Eelmisest järgneb, et tõenäosus selleks, et n nähtu-
sest vähemalt üks ilmub, on

$$1 - (1 - t_1) (1 - t_2) (1 - t_3) \cdot \cdot \cdot (1 - t_n);$$

järelikult tõenäosus, et n katse juures nähtus vähemalt
üks kord sünnib:

$$1 - (1 - t)^n.$$

513. Kas on tõenäone 1-he täringiga 4 korda visa-
tes arvu 5 saada?

Näide 6: Mitu korda peab viskama kaht täringit,
et tõenäosus selleks, et arvu 6 saaksime, saaks suure-
maks kui $\frac{1}{2}$?

Lahendus:

$$t = \frac{5}{36} \text{ (v. nr. 491); järelikult } 1 - \left(1 - \frac{5}{36}\right)^n > \frac{1}{2},$$

kust saame:

$$\left(\frac{31}{36}\right)^n < \frac{1}{2}; n > \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{31}{36}}; n > \frac{0,3010}{0,0649}; n = 5.$$

Täringit peab viskama 5 korda.

514. Mitu korda peab viskama kaht täringit, et
arvu 8-a saamise tõenäosus kasvaks üle $\frac{1}{2}$?

515. Kui suur on tõenäosus ühe täringiga kaks
korda visates „viis“ saada: a) ainult üks kord, b) vähe-
malt üks kord, c) mõlemat korda?

516. Tahetakse 2 täringiga 2 korda visates esimest korda 8 ja teist korda 9 saada. Kui tõenäolik on, et a) mõlemad heited õnnestavad, b) vähemalt üks heide õnnestab, c) et ainult üks heide, d) et ainult esimene õnnestab, e) et kumbki ei õnnesta?

517. Pall läbimõõduga 5 cm. visatakse vastu ruudulist traatvõrku, mille silmade laius 7 cm. Kui suur on tõenäosus, et pall võrgust läbi lendab? — (Traadi paksust arvesse ei võeta ja viskamisel ei sihitata.)

518. 5-emargaline raha—tema läbimõõt on 23 mm.—langeb malelauale, mille ruutude küljed on 35 mm. pikad. Kui tõenäone on, et raha langeb kahe ruudu piirile? (Ka siin ei sihitata.)

519. Kastis on 5 valget ja 4 musta kuuli. Kui suur on tõenäosus, 3 korda järgimööda kuuli võttes, 2 esimest korda valge ja 3-mas kord musta kuuli võtta, kui võetud kuuli tagasi ei panda?

520. 15-e loosi seas on 6 võitu. Kuivõrd tõenäone on 4 korda järgimööda loosi võttes mistahes järjekorras 2 võitu ja 2 tühja numbrit võtta, kui võetud loosi tagasi ei panda?

§ 8. Algteated kinnitusarvutusest.

Näited surevustabeli seletamiseks.

Näide 1: Kui suur ühekordne maks kinnituseltsile on seks vaja, et 100000 sündinutest a) 1-e aasta pärast, b) 50-e aasta pärast igaühele 1 mark kindlustada?

Lahendus: Tabelile vastavalt elavad 100000 sündinutest aasta pärast ainult 83640. Need saavad 83640 mk. Kui intresse lugeda $3\frac{1}{2}\%$, nagu kinnituseltsid harilikult teevad, leiame otsitava kapitali (tema märk olgu D_1) võrrandist:

$$D_1 \cdot 1,035 = 83640.$$

Surevustabel [3 $\frac{1}{2}$ 0/0]

Märkus. Tabelit võib ainult skeemina tarvitada. Meie olude kohta käivat surevustabelit ei ole veel olemas (september 1924. a.)

Vanadus x	Elavate arv l_x	Elavate diskonditud arv	Elavate diskonditud arvude summa	Vanadus x	l_x	D_x	N_x
		$D_x = \frac{l_x}{1,035^x}$	$N_x = D_{100} + D_{99} + \dots + D_x$				
0	100000	100000	1721306				
1	83640	80812	1621306	36	54302	15738	266343
2	78262	73058	1540494	37	53574	15002	250605
3	75484	68082	1467436	38	52846	14298	235603
4	73684	64211	1399354	39	52104	13621	221305
5	72371	60934	1335143	40	51349	12969	207684
6	71387	58073	1274209	41	50589	12345	194715
7	70615	55503	1216136	42	49822	11747	182370
8	69968	53135	1160633	43	49052	11174	170623
9	69433	50945	1107498	44	48275	10625	159449
10	68985	48905	1056553	45	47491	10099	148824
11	68598	46986	1007648	46	46703	9596,0	138725,4
12	68250	45167	960662	47	45907	9113,4	129129,4
13	67927	43433	915495	48	45098	8650,1	120016,0
14	67605	41765	872062	49	44279	8205,8	111365,9
15	67260	40147	830297	50	43438	7777,7	103160,1
16	66854	38555	790150	51	42568	7364,2	95382,4
17	66369	36981	751595	52	41666	6964,4	88018,2
18	65824	35437	714614	53	40728	6577,4	81053,8
19	65225	33927	679177	54	39751	6202,5	74476,4
20	64589	32460	645250	55	38737	5839,9	68273,9
21	63930	31043	612790	56	37687	5489,5	62434,0
22	63267	29682	581747	57	36603	5151,3	56944,5
23	62602	28377	552065	58	35488	4825,5	51793,2
24	61946	27130	523688	59	34340	4511,5	46967,7
25	61305	25941	496558	60	33160	4209,1	42456,2
26	60675	24806	470617	61	31942	3917,4	38247,1
27	60053	23722	445811	62	30689	3636,5	34329,7
28	59438	22685	422089	63	29398	3365,7	30693,2
29	58825	21692	399404	64	28075	3105,5	27327,5
30	58210	20739	377712	65	26720	2855,7	24222,0
31	57587	19823	356973	66	25324	2615,0	21366,3
32	56954	18942	337150	67	23895	2384,0	18751,3
33	56309	18094	318208	68	22438	2162,9	16367,3
34	55652	17279	300114	69	20950	1951,2	14204,4
35	54978	16492	282835	70	19446	1749,9	12253,2

Vanadus x	Elavate arv l_x	Elavate diskonditud arv $D_x = \frac{l_x}{1,035^x}$	Elavate diskonditud arvude summa $N_x = D_{100} + D_{99} + \dots + D_x$	Vanadus x	l_x	D_x	N_x
71	17928	1558,7	10503,3	86	2173	112,77	461,64
72	16414	1378,8	8944,6	87	1838	92,158	348,871
73	14919	1210,9	7565,8	88	1549	75,041	256,713
74	13460	1055,5	6354,9	89	1290	60,381	181,672
75	12038	912,07	5299,40	90	1072	48,480	121,291
76	10682	781,96	4387,33	91	725	31,679	72,811
77	9387	663,93	3605,37	92	464	19,589	41,132
78	8159	557,56	2941,44	93	276	11,258	21,543
79	7015	463,17	2383,88	94	150	5,912	10,285
80	5981	381,54	1920,71	95	72	2,742	4,373
81	5056	311,63	1539,17	96	30	1,104	1,631
82	4259	253,63	1227,54	97	11	0,391	0,527
83	3583	206,16	973,91	98	3	0,103	0,136
84	3029	168,39	767,75	99	1	0,033	0,033
85	2564	137,72	599,36	100	0	—	—

b) 50-e aasta pärast elavad tabeli järgi 43438 isikut. Nemad saavad 43438 mk. Kinnitusseltsile maksetav summa on seepärast:

$$D_{50} = \frac{43438}{1,035^{50}}; D_{50} = 7777,7.$$

Arvud 80812 ($= D_1$) ja 7777,7 ($= D_{50}$) leiame tabeli 3-das veerus märgi D_x all.

Näide 2: Kui suur summa läheb tarvis, et 100000 sündinule aastast k alates elu lõpuni aastamaksu (renti) 1 mk. kindlustada?

Lahendus: Kui 100000-st on elus k aasta pärast l_k isikut, tuleb maksta nendele sel tähtpäeval l_k mk., millele vastab algussumma $D_k = \frac{l_k}{1,035^k}$, $(k+1)$ -e aasta pärast D_{k+1} mk., $(k+2)$ -e aasta pärast D_{k+2} jne. kuni 100-da aastani, kus $D_{100} = 0$.

Summa $D_k + D_{k+1} + \dots + D_{99} + D_{100}$ tähendatakse lühidalt N_k ; vastav arv on leida tabeli 4-das veerus.

Järeldus: $N_x - N_{x+1} = D_x$ (Mispärast?)

521. Kui suur on elamistöenäosus 0, 1, 2 jne. eluaastal? Leida need arvud ja valmistada nende jaoks graafika, kus abstsisside üksuseks on 1 aasta = 1 mm. ja ordinaatide üksuseks 10 cm.

Kinnitusarvutamise juures tuleb arvesse võtta:

1) Kas kinnitatav maksab ühekordse summa või aastate jooksul. Viimane juhul on harilik ja aastamaksu nimetatakse **preemiaks**.

2) Kinnituselt maksab kas ühekordse kinnitussumma (= kapital) või aastate jooksul, missugusel puhul aastamaksu nimetatakse **rendiks**.

Märkus 1: Eelduseks surevustabelite rakendamisel on Jakob Bernoulli 1680. a. tõendatud n. n. suurte arvude seadus, mille põhjal võime ütelda, et vaatlustest saadud andmete rida (näit. meil elavate isikute arvu kahanemine iga aastaga tabelis antud määral) võib oodata — samade olude juures — ainult siis, kui nimetatud järg leiti suure juhuste arvu põhjal (meil 100000 isiku kohta) ja rakendatakse ka suure isikute arvu kohta (selles §-is on kõikide arutuste juures võetud aluseks ka sündinute arv 100000) ning seda täpsemalt võib oodata rea kordumist, mida suurem oli kumbki — niihästi vaadeldud juhuste arv kui andmete arv, mille kohta see rida rakendatakse.

Märkus 2: Oma kursuses arutame 2-esuguseid kinnitamise juhuseid: elamiskinnitust ja suremiskinnitust. Kinnituseltsid rajavad omi arvutamisi kinnitusliigile ebasoodsale juhtumusele, mis elamiskinnitamise suhtes esineb siis, kui kinnitatud isik kaua elab, suremiskinnitamise juures — kui vara sureb. Kinnituseltsid tarvitavad kummalgi puhul isesuguseid tabelid, kuid meie selle vahe juures kauem ei peata ja käime kogu aeg ühe tabeli järgi.

Harjutused:

522. Kui suur summa on tarvis, et 100000 sündinule 40-daks eluaastaks à 100 marka kindlustada?

523. Kui suur summa läheb tarvis, et 100000 sündinule 50-dast eluaastast alates renti 1000 marka kindlustada?

524. Kui suur peab olema maks kinnitusseltsile, et ühele praegu sündinud lapsele 40-dast aastast alates renti 100000 marka kindlustada?

Elamiskinnitus.

Eelharjutused.

Näide 3: Elamis-kapitalkinnitus ühekordse maksu kaudu.

Kui suur summa x tuleb maksta kinnitusseltsile, et 2-aastasele lapsele võimaldada 18-daks eluaastaks kapitali $k = 10000$ mk. saamist? ($q = 1,035$).

Lahendus: Tabeli põhjal on oodata, et $l_2 = 78262$ lapsest saavad 18-aaastaseks $l_{18} = 65824$ last. Kui kinnitatakse l_2 last, on nende eest maksta xl_2 mk., missugune summa kasvab maksmise tähtajaks xl_2q^{16} margaks. Kinnitusselts peab sel tähtajal maksma kl_{18} marka. Seepärast on:

$$x l_2 q^{16} = k l_{18}.$$

Jagame mõlemad pooled q^{18} -ga:

$$x \frac{l_2}{q^2} = k \frac{l_{18}}{q^{18}} \text{ ehk}$$

$$x D_2 = k D_{18}, \text{ kust } x = k \frac{D_{18}}{D_2}.$$

525. Kui suur summa tuleb maksta a) 25-dal, b) 30-dal eluaastal, et 55-dal eluaastal kinnitusselts maksaks välja 50000 marka?

526. Kui palju tuleb maksta 1-aaastase lapse eest, et temale 20-daks eluaastaks 50000 marka kindlustada?

527. Lahendada eelmine ülesanne, kuid tingimusega, et raha panka maksetakse $3^{1/2\%}$ -di juures.

528. 2-aaastase lapse eest maksetakse kinnitusseltsile 2000 marka.

1) Kui suure summa võib tema 20-dal eluaastal saada? 2) Kui ta kinnitusseltsi poolt tasutud summa panka paneb, mis maksab $3^{1/2\%}$, siis võib tema sealt 4-ja aasta jooksul iga poole aasta algul kui suure summa välja võtta?

529. Lahendada eelmine ülesanne tingimusel, et 2000 mk. kohe alguses panka maksetakse.

Näide 4: Kui suur summa p tuleks maksta kinnitusseltsile algkooli astumise puhul, 8-dal eluaastal, ja keskkooli astumisel, 14-dal eluaastal, et õppimiseks ülikoolis maksetaks 20-dast kuni 23-da aastani iga aasta $r = 42000$ marka?

Lahendus: 8-dal eluaastal maksavad kinnitusseltsile l_8 isikut pl_8 marka, 14-dal aastal l_{14} isikut pl_{14} mk. Kinnitusselts maksab 20-dal aastal rl_{20} mk., 21-sel rl_{21} , 22-sel rl_{22} , 23-dal rl_{23} marka. Et võimalik oleks nimetatud maksumused võrrelda, peame arvutama nendest protsentraha ühe ja sama tähtajani, olgu 23-da aastani. Seepärast tuleb lugeda kinnitusseltsile maksetud summa $p(l_8 q^{15} + l_{14} q^9)$ margaks, ja seltsi poolt maksetud summad nii suurteks: $r l_{20} q^3, r l_{21} q^2, r l_{22} q, r l_{23}$, sest ühe tegeliku maksuga on kinnitusselts kaotanud ka protsentraha järgnevate aastate eest, meil 3-e, 2-e, 1-e, 0 aasta eest.

Nii saame võrrandi:

$$p(l_8 q^{15} + l_{14} q^9) = r(l_{20} q^3 + l_{21} q^2 + l_{22} q + l_{23}).$$

Jagame mõlemad võrrandi pooled avaldusega q^{23} . Saame

$$p\left(\frac{l_8}{q^8} + \frac{l_{14}}{q^{14}}\right) = r\left(\frac{l_{20}}{q^{20}} + \frac{l_{21}}{q^{21}} + \frac{l_{22}}{q^{22}} + \frac{l_{23}}{q^{23}}\right) \text{ ehk}$$

$$p(D_8 + D_{14}) = r(N_{20} - N_{24}).$$

Asetades siia märkidele vastavad arvud, saame: $p = 53800$ mk.

Üldjuhul:

Näide 5: Rendi kindlustus preemiamaksude kaudu.

30-aastane isik tahab endale kindlustada kuni 45-da eluaastani maksetavate preemiatega p temale 55-dast aastast maksetavat renti r . Kui suur peab olema preemia p ?

l_{30} isikut maksavad kinnitusseltsile esimesel aastal pl_{30} mk., järgmisel maksuaastal l_{31} isikut pl_{31} mk. jne. kuni 45-da eluaastani, millal maksetakse pl_{45} mk. Kinnitusselts maksab: 55-dal eluaastal rl_{55} mk., järgmisel aastal rl_{56} mk. jne. kuni 100-da aastani, kus kedagi enam elus ei ole. 100-daks eluaastaks peavad ühelt poolt preemiad ja teiselt poolt rendimaksud ühes nende kohta käiva protsenträhaga võrdsed olema, mispärast saame võrduse:

$$p l_{30} q^{70} + p l_{31} q^{69} + \dots + p l_{45} q^{55} =$$

$$= r(l_{55} q^{45} + l_{56} q^{44} + \dots + l_{100}) \quad [1]$$

Jagades mõlemad pooled avaldusega q^{100} (diskontides sündimisajaks) saame:

$$p \left(\frac{l_{30}}{q^{30}} + \frac{l_{31}}{q^{31}} + \dots + \frac{l_{45}}{q^{45}} \right) =$$

$$= r \left(\frac{l_{55}}{q^{55}} + \frac{l_{56}}{q^{56}} + \dots + \frac{l_{100}}{q^{100}} \right) \quad [2]$$

$$p (D_{30} + D_{31} + \dots + D_{45}) = r (D_{55} + D_{56} + \dots + D_{100})$$

$$p (N_{30} - N_{46}) = r N_{55},$$

$$\text{kust } p = r \cdot \frac{N_{55}}{N_{30} - N_{46}}.$$

530. Kui tahetakse kindlustada 50-dast eluaastast 50000-margalist renti, siis tuleb maksta 25-dast 49-da aastani kui suurt preemiat?

531. 1000-margaliste aastapreemiatega 35-dast 50-da aastani võib kindlustada 51-st eluaastast alates kui suurt renti?

5-da näite andmed aluseks võttes järeldada valemist [1] ehk valemist [2]:

532. Kui maksetakse renti r ainult 55-dast aastast 75-dani, siis on preemia suurus $p = r \cdot \frac{N_{55} - N_{76}}{N_{30} - N_{46}}$.

533. Kui tahetakse rendi r asemel kinnitada endale 55-daks eluaastaks kapital k , siis on preemia suurus

$$p = k \cdot \frac{D_{55}}{N_{30} - N_{46}}.$$

534. Kui suur preemia tuleb maksta a) 33-dast, b) 40-dast aastast a) 12 aastat, b) 10 aastat, et 60-st aastast 80-ni renti 48000 mk. saaks?

535. Kui suurt kapitali võib kindlustada 57-daks aastaks, kui 35-st 48-da aastani maksta aastas 1200 marka?

536. Ülesanne nbr. 526 lahendada 10-ne aasta-preemia kaudu.

537. Kui palju tuleb iga aasta pankka maksta 1-sest kuni 10-da aastani, et 20-daks aastaks koguks kapital 50000 mk. Pank maksab $3\frac{1}{2}\%$.

538. Kas näidet 4 võib ka järeldada näitest 5?

539. 53-aastane isik tahab ühekordse maksuga m kindlustada renti r , mille väljamaks algaks kohe. Näidata,

$$\text{et maks } m = r \cdot \frac{N_{53}}{D_{53}}$$

(Juhatus: tuletada valemist [1] ehk [2], lhk. 84—85.)

540. Kui suur peab olema sissemaks, et a) 50-e, b) 56-aaastalises vanaduses kindlustada renti 36000 mk., mille väljamaks algaks kohe?

541. Isa jättis oma varanduse pojale päranduseks tingimusega, et tema maksaks 61-aastasele sugulasele eluaegset renti 24000 mk. aastas. Poeg tahab sellest kohustusest vabaneda ühekordse maksuga. Kui palju peab tema maksma?

542. 60-aaastane isik päris 40000 mk., missuguse raha tema tarvitab omale kohe algava eluaegse rendi kindlustamiseks. Leida rendi suurus.

543. Kui suure ühekordse maksuga m võib endale kindlustada 40-dal eluaastal 30000-margalist renti, mille väljamaks algaks 55-aastases vanaduses? Näite 5 (lhk. 84) põhjal seleta, et

$$m = 30000 \cdot \frac{N_{55}}{D_{40}}$$

544. 50-aastane isik päris 40000 mk., missuguse summa tema võttis omale 60-st aastast algava rendi kindlustamiseks. Leida rendi suurus.

Märkus I: Kui kinnitatava isiku (viimase) maksu ja kinnitusseltsi (esimese) maksu vahel on aega üle 1-e aasta (kus olid meil niisugused juhused?), siis kõneldakse lühendatud preemiade maksmisest ehk edasi-
lükatud rendist.

Märkus II: Arusaadav, et iga kinnituse juures peavad kinnitatava ja kinnitusseltsi saavutused võrdsed olema. Sel alusel arvutatud preemiat — nagu ta siin igal pool esineb — nimetatakse nettopreemiaks. Tegelikult peavad aga kinnitusseltsid ülalpidamiskulude katmiseks ja „reservide“ kindlustamiseks suurema preemia võtma (bruttopreemia; umbes 20% nettopreemiast suurem).

Suremiskinnitus.

Näide 6: Suremiskinnitus ühekordse maksu kaudu. 35-aastane isik tahab ühekordse maksuga m oma surma puhuks perekonnale kapitali k mk. kindlustada. Kui suur peab olema maks m ?

Lahendus: Kui maksjaid on l_{35} , siis kasvab nende poolt tasutud summa ml_{35} sajandaks aastaks $ml_{35}q^{65}$ margaks. Raha maksetakse välja põhimõtteliselt aasta lõpul (selle eest, et kohe maksta, võetakse preemia pealt väike lisamaks). Esimese kinnitusaasta jooksul surevad $l_{35} - l_{36}$ isikut, nende pärijatele tuleb maksta $k(l_{35} - l_{36})$ mk., missugune kapital 100-daks aastaks kasvab summaks $k(l_{35} - l_{36})q^{64}$ mk., järgmise aasta summa on $k(l_{36} - l_{37})q^{63}$ mk., viimasel aastal surevad $l_{99} - l_{100}$ isikut. Meie saame võrrandi:

$$ml_{35}q^{65} = k[(l_{35} - l_{36})q^{64} + (l_{36} - l_{37})q^{63} + \dots + (l_{99} - l_{100})].$$

Jagades avaldusega q^{100} , leiame:

$$m \frac{l_{35}}{q^{35}} = k \left[\frac{l_{35}}{q^{36}} - \frac{l_{36}}{q^{36}} + \frac{l_{36}}{q^{37}} - \frac{l_{37}}{q^{37}} + \dots + \frac{l_{99}}{q^{100}} - \frac{l_{100}}{q^{100}} \right].$$

Kui 1) positiivsetele liigetele liige $\frac{l_{100}}{q^{101}}$ juure lisada, mis lubatav, sest $l_{100} = 0$; 2) positiivsed ja negatiivsed liikmed eraldi rühmitada ja positiivsetest liigetest tegur $\frac{1}{q}$ klambrite ette võtta, siis saame:

$$m \frac{l_{35}}{q^{35}} = k \left[\frac{1}{q} \left(\frac{l_{35}}{q^{35}} + \frac{l_{36}}{q^{36}} + \dots + \frac{l_{99}}{q^{99}} + \frac{l_{100}}{q^{100}} \right) - \left(\frac{l_{36}}{q^{36}} + \frac{l_{37}}{q^{37}} + \dots + \frac{l_{100}}{q^{100}} \right) \right]$$

$$\text{ehk } mD_{35} = k \left(\frac{1}{q} N_{35} - N_{36} \right),$$

$$\text{kust otsitav } m = k \cdot \frac{\frac{1}{q} N_{35} - N_{36}}{D_{35}}$$

545. Kui suure maksuga võib 45-dal eluaastal kindlustada surma-puhuks 12000 marka?

546. Kui 38-dal aastal maksta 7000 marka, siis maksetakse välja surma puhul kui palju?

Näide 7: Suremiskinnitus preemiate kaudu.

40-aastane isik kinnitab ennast preemiamaksudega p tingimusega, et kinnituskapital k maksetakse seltsi poolt **temale** 60-dal eluaastal, tema surma puhul aga kohe tema omastele. Kui suur peab olema preemia p ?

Lahendus: Kui oletada, et ka seekord on oma elu kinnitanud l_{40} isikut, siis moodustavad nende maksud 100-daks eluaastaks summa:

$$p(l_{40}q^{60} + l_{41}q^{59} + \dots + l_{59}q^{41}).$$

Kinnitusseltsi maksud on esimesel maksuaastal $k(l_{40} - l_{41})$ marka, millega ühes tuleb seltsi kontost maha kustutada intressid sellest summast järgnevate aastate eest, kogusummas $k(l_{40} - l_{41})q^{59}$ marka; teise aasta summa on $k(l_{41} - l_{42})q^{58}$ jne.; 60-dal eluaastal $k(l_{59} - l_{60})q^{40}$ mk. 60-dal aastal tuleb ka maksta elavatele l_{60} isikule kl_{60} mk. ja nende kohta arvata $kl_{60}q^{40}$ mk. Niiviisi saame võrrandi:

$$\begin{aligned} p(l_{40}q^{60} + l_{41}q^{59} + \dots + l_{59}q^{41}) &= \\ = k[(l_{40} - l_{41})q^{59} + \dots + (l_{59} - l_{60})q^{40} + l_{60}q^{40}]. \end{aligned}$$

Kui paremal poolel avada klambrid; arvesse võtta, et 2 viimast liiget koonduvad, ja peale selle mõlemad võrrandi pooled jagada astmega q^{100} , siis saame:

$$p\left(\frac{l_{40}}{q^{40}} + \frac{l_{41}}{q^{41}} + \dots + \frac{l_{59}}{q^{59}}\right) = k\left(\frac{l_{40}}{q^{40} \cdot q} - \frac{l_{41}}{q^{41}} + \dots + \frac{l_{59}}{q^{59} \cdot q}\right).$$

Paremal poolel ühendame eraldi positiivsed ja negatiivsed liikmed; nii saame:

$$\begin{aligned} p\left(\frac{l_{40}}{q^{40}} + \frac{l_{41}}{q^{41}} + \dots + \frac{l_{59}}{q^{59}}\right) &= \\ = k\left[\frac{1}{q}\left(\frac{l_{40}}{q^{40}} + \frac{l_{41}}{q^{41}} + \dots + \frac{l_{59}}{q^{59}}\right) - \left(\frac{l_{41}}{q^{41}} + \dots + \frac{l_{59}}{q^{59}}\right)\right] \\ p(N_{40} - N_{60}) &= k\left[\frac{1}{q}(N_{40} - N_{60}) - (N_{41} - N_{60})\right], \end{aligned}$$

kust leitakse otsitav p .

547. Näidata, toetades näidete 6 ja 7 peale, et suremiskapitali k võib vanaduses x omandada aastapreemiatega, mille suurus

$$k \frac{1}{q} \frac{N_x - N_{x+1}}{N_x} \quad (*).$$

548. Näidata, et valemi (*) võib transformida valemiks

$$k \left(\frac{D_x}{N_x} - \frac{q-1}{q} \right).$$

549. Kui suure kapitali maksab selts välja surma puhul, kui 25-dast aastast 50-dani iga aasta 500 marka maksta?

550. Näidata, et suremiskapitali k võib omandada 40-dast aastast kuni 50-da aastase vanaduseni preemia-tega, mille suurus

$$k \frac{{}^1_q N_{40} - N_{41}}{N_{40} - N_{51}}.$$

551. Kas näitest 7 võib järeldada näidet 6?

552. Kui suurte preemiatega võib a) 40-dal, b) 48-dal eluaastal kindlustada suremise puhuks 20000 marka?

553. a) 42-aastane, b) 46-aastane isik kinnitab oma elu tingimusega, et kinnituskapital a) 30000 mk., b) 25000 mk. maksetakse tema surma puhul, kuid kõige hiljem 28 aasta pärast. Kui suur peab olema preemia?

554. 38-aastane isik kinnitas oma elu 40000 marga eest eluaegsete preemiatega. Tema suri 63 a. vana. Mis-sugune vahe on kinnituskapitali ja selle summa vahel, mille pärijad saaksid, kui aastapreemia suurused sum-mad oleksid panka pandud, kus 4% maksetakse?

Preemiareserv.

Seni võtsime meie arvesse valemite seadmisel kogumaksud: ühest küljest kinnitatava, teisest küljest kin-nitusseltsi omad, missugused summad pidid olema võrd-sed (vrld. peavalemid näidete 5, 6 ja 7 juures). Kuid igal ajal seda võrdust ei ole. Vahe teatud ajaks kinni-tusseltsile maksetud ja seltsi poolt väljamaksetud sum-made vahel, kui summad on diskonditud nimetatud mo-mendiks, — nimetatakse preemiareserviks, teiste sõna-dega preemiareserv on kapital, mille eest võib teatud momendil osta või müüa kinnituse.

Näide 8: 35-aastane isik kinnitas oma elu $k = 100000$ marga eest preemiamaksude kaudu. Kui suur on preemiareserv 10-ne aasta pärast?

Lahendus: Preemia suurus on (nbr. 547):

$$p = k \cdot \frac{\frac{1}{q}N_{35} - N_{36}}{N_{35}} \text{ mk.} \quad (\alpha).$$

10-ne aasta jooksul on sisse maksetud:

$$\begin{aligned} & pl_{35}q^{10} + pl_{36}q^9 + \dots + pl_{44}q = \\ & = p \left(\frac{l_{35}}{q^{35}} + \frac{l_{36}}{q^{36}} + \dots + \frac{l_{44}}{q^{44}} \right) q^{45} = p (N_{35} - N_{45}) q^{45} \end{aligned}$$

ja välja maksetud:

$$\begin{aligned} & k(l_{35} - l_{36})q^9 + k(l_{36} - l_{37})q^8 + \dots + k(l_{44} - l_{45}) = \\ & = k \left(\frac{N_{35} - N_{45}}{q} - N_{36} + N_{46} \right) q^{45}. \end{aligned}$$

Preemiareserv on leitud avalduste vahe ja ühe kinnitatud isiku kohta on ta:

$$\frac{q^{45}}{l_{45}} \left[p(N_{35} - N_{45}) - k \left(\frac{N_{35} - N_{45}}{q} - N_{36} + N_{46} \right) \right].$$

Viimase avalduse lihtsustamiseks asendame siia p jaoks leitud avalduse (α); peale selle paneme tähele, et §-i al-guses antud definitsioonist järgneb, et

$$\frac{l_{45}}{q^{45}} = D_{45} = N_{45} - N_{46},$$

mispärast

$$\frac{q^{45}}{l_{45}} = \frac{1}{N_{45} - N_{46}}.$$

Niiviisi saame, kui sarnased liikmed ka ühendame:

$$\frac{k}{N_{45} - N_{46}} \left(\frac{N_{36} N_{45}}{N_{35}} - N_{46} \right)$$

ehk kui kõik liikmed lugejas ja nimetajas jagada N_{45} -ga:

$$k \left(\frac{N_{36}}{N_{35}} - \frac{N_{46}}{N_{45}} \right) : \left(1 - \frac{N_{46}}{N_{45}} \right) \quad (\beta).$$

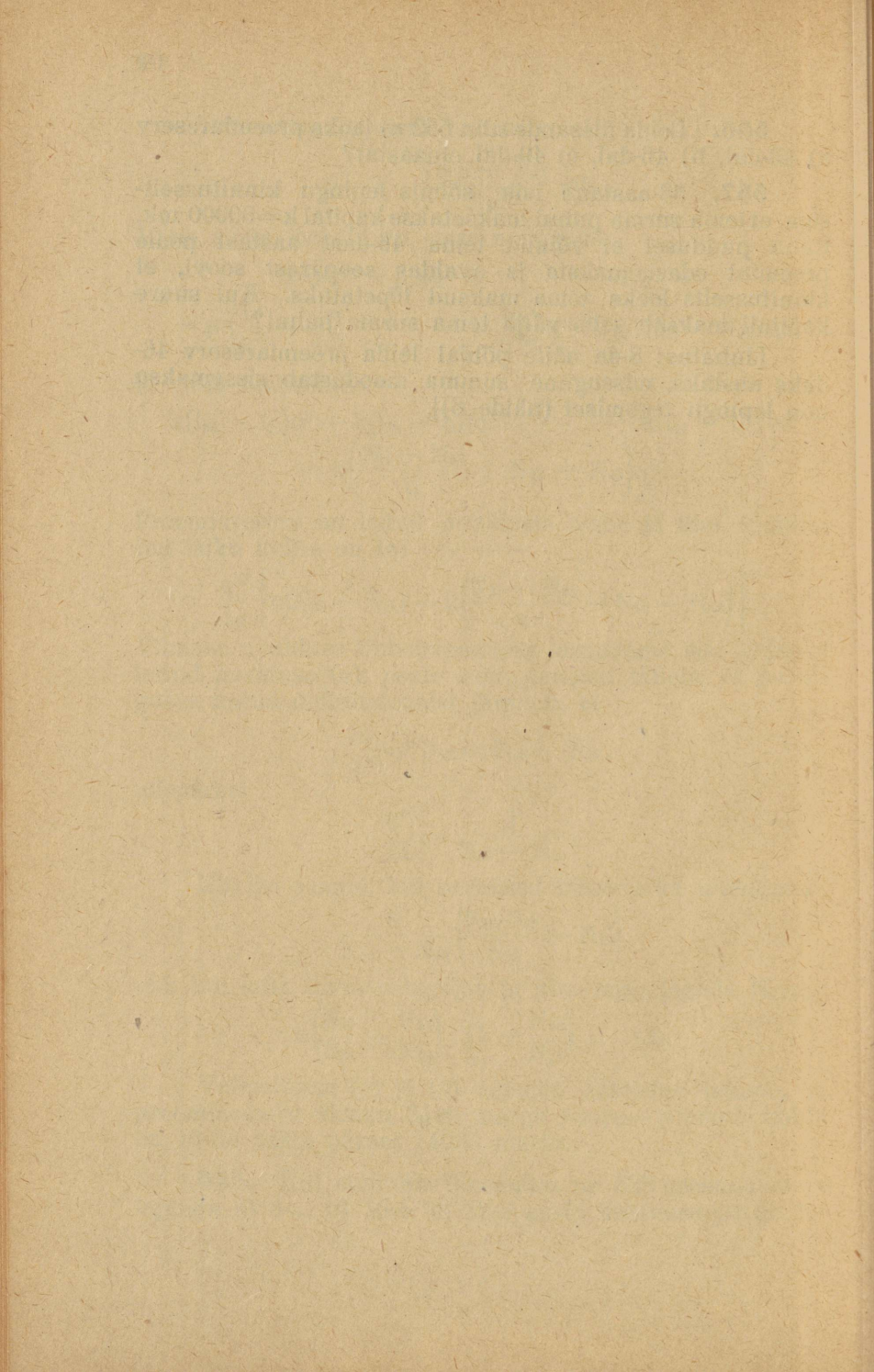
Valemitesse (α) ja (β) arvusid asetades leiame, et preemiareserv üksiku 2449 marga suuruse preemia kohta on 10-ne aasta pärast 14068 marka.

555. Kui suur on ülesandes nr. 528 preemiareserv lepingu a) 8-a, b) 10-e, c) 12-e aasta kestvuse pärast?

556. Leida ülesande nbr. 552 a) jaoks preemiaresev a) 43-dal, b) 46-dal, c) 49-dal eluaastal?

557. 33-aastane isik sõlmis lepingu kinnitusseltsiga, et tema surma puhul maksetakse kapital $k=80000$ mk. Raha puudusel ei võinud tema 46-dast aastast peale preemiat edasi maksta ja avaldas seepärast soovi, et kinnitusselts loeks tema maksud lõpetatuks. Kui suure kapitali maksab selts välja tema surma puhul?

[Juhatus: 8-da näite põhjal leida preemiaresev 46-daks aastaks, missugune summa moodustab sissemaksu uue lepingu tegemisel (näide 6)].



Vastused.

§ 1.

16. 197,5.
17. 0,3063.
20. 4,167.
23. 62070 ha.
24. 75830 tiinu.
26. 1,343.
28. 0,06799.
30. 964,7.
32. 0,01608.
33. 1,693.
35. 82,63.
37. 0,2687.
38. 16,46.
41. 0,03234.
64. 149,6.
65. 5,772.
66. 35,43.
67. 0,5116.
68. 2,282.
69. 0,009411.
70. 0,3098.
71. 5613.
72. 0,749.
73. 2,292.
74. 0,010123.
75. 0,1896.
76. 0,5924.
77. 1,729.
78. 0,1208.
79. 0,1797.
80. 584,8.
81. 0,6498.
82. — 0,3856.
83. 2,017.

84. 2,227.
85. 2,11.
86. 7,038.
87. 0,8112.
88. 5,646.
89. 1,133.
90. 3,908.
91. 3,174.
92. 5,071.
93. 2,767.
94. 1,209.
95. 1,246.
96. 365,8.
97. 1,537.
98. 11,58.
99. 10,66.
100. 7,962.
101. 2,931.
102. 0,4585.
103. $x_1 = 0,4902$;
 $x_2 = -1,299$.
104. 13,32 km.
105. 20,66 merep.
106. 1,151 Ingl. p.
107. 5,806 kg.
108. 1,108 Vene naela.
109. 34,68.
110. 279,8 cm².
111. 629,8.
112. 186,1.
113. 36,26.
114. 8,963.
115. 7,493.
116. 155,8.
117. 93,62.

118. $R = 9,053$;
 $r = \frac{R}{2}$.
119. $R = 4,927$.
120. 51,65.
121. 116,6.
122. $R = \frac{2}{3} h$;
 $r = \frac{1}{3} h$.
123. 5,422.
124. 3,95 merepenik.
125. 7,98 km.
126. 23,65 km.
127. 196,2 m.
128. 4,7 km.
129. a) 23 merem.; 19,1 merem.; b) 17,5; c) 15,6.
130. 6 m.
131. 66,5 m.
132. 22,07.
133. 5,634.
134. 11,66.
135. 222.
136. 55,32.
137. 57,2.
138. 106,9 dm³.
139. 193,9 kg.
140. 7,937 dm.
141. a) 6509 miljoni kg.;
 b) ligi 1183,5 km.
142. 1317 cm³.
143. 28,21 cm.
144. 96 numbrit; esimesed kohad : 26.
145. Täisosas 1 number;
 esimesed kohad : 2,70.
146. 132-el kümendkohal on 1.
147. 0,2.
148. 3.

149. 0.
150. — 1.
152. — 4.
153. — 1.
154. $1\frac{1}{2}$.
155. 2.
156. $3\frac{1}{2}$.
157. 4.
158. 4.
159. — $\frac{1}{2}$.
160. 38.
161. $2 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$.
162. 32.
164. — 0,5422.
165. 3,195.
168. 3,404.
169. — 1,161.
170. — 8,991.
171. 0,3706.
172. 0,0604.
173. 0,372.
174. — 29,82.
175. $\pm 4,42$.
176. $x_1 = 2,639$.
 $x_2 = -0,4504$.
177. $x_1 = 0,982$.
 $x_2 = -4,682$.

§ 2.

181. 9,2.
182. — 1.
183. $\frac{b-a}{n+1}$.
186. —5; —2; +1; 4; 7; ...
187. $a_1 = 6$; $d = \frac{1}{2}$.
188. $a_1 = 4$; $d = 7$.
190. $s = [2a_1 + d(n-1)] \frac{n}{2}$.

192. $472\frac{1}{2}$.
193. $n = 15; 16$.
 $a_n = 17; 34,5$.
194. $a_1 = -10; -4$.
 $n = 8; 13$.
195. 88.
196. 99 km.
197. $a_1 = 10; d = \frac{3}{4}$.
198. $a_1 = -7; d = \frac{1}{4}$.
199. $\frac{n(n+1)}{2}$.
200. $n(n+1)$.
201. n^2 .
202. 494550.
203. 49495500.
204. 3.
205. $2k + 1$.
207. $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = s_1^2$.
211. $a_1 = 2; d = 3$.
213. Teine vahe on alati 2.
215. $2a_2$.
218. Kolmas vahe $= 6a_3$.
219. 1433,6.
221. $\frac{3}{128} = 0,0234375$.
222. 1,5.
225. $\frac{1}{341}; 2$.
226. 3; $\frac{1}{2}$.
227. $\frac{2}{3}; 6$.
228. $-1\frac{1}{2}; 4$.
230. $\frac{a^n - b^n}{a - b}$.
231. $\frac{a^{16} - b^{16}}{a + b}$.
232. $\frac{a^n + (-1)^{n-1} b^n}{a + b}$.
233. $\frac{a - b}{\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}}$
234. $\frac{a\sqrt[9]{a} - b\sqrt[9]{b}}{\sqrt[9]{a} - \sqrt[9]{b}}$
235. a) 6; b) 4 liiget.
236. a) 0,3888 l.
237. a) $3\frac{3}{4}$ tundi; b) 4 tundi.
238. 49-dast.
239. $\sqrt[4]{2}$.
240. $\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$.
241. $\sqrt[12]{2} = 1,059$.
242. Ligi 6 aastat.
244. a) $11,53 \cdot 10^{12}$ hl.;
c) $16,5 \cdot 10^8$ rongi.
245. b) 5; c) $-26,7$.
250. a) 750,6 mm.
b) 670,6 mm.
251. a) 10,48 m.;
b) 10,12 m.
252. 43,3 mm.
254. 1.
255. $1\frac{7}{9}$.
258. 5.
262. $\frac{a^2}{a + b}$.
263. a.
264. $\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \dots$
265. $4; -2\frac{2}{3}; 1\frac{7}{9}; \dots$
266. 6 ja $\frac{1}{4}$ või 2 ja $\frac{3}{4}$.
267. 6a.
268. a) $r(1 + \sqrt{2})$;
b) $2r(1 + \sqrt{2})$.

269. $r_2 = r_1 \cdot \frac{2b - a}{2b + a}$;
 raadiuste summa =
 $= \frac{1}{4} \sqrt{4b^2 - a^2}$;
 pindade summa =
 $= \frac{\pi a (4b^2 - a^2)}{32b}$.
270. $\frac{r}{(q-1)^2} \left[nq^n(q-1) - \right.$
 $\left. - q^n + 1 \right] -$
271. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
272. $\frac{x}{(1-x)^2}$.
273. $\frac{x + 2x^2}{(1-x)^2}$.
274. $\frac{1+x}{(1-x)^2}$.
275. n-se rea esimene liige on $a(q-1)^n$.

§ 3.

276. 428,2.
 277. 66.
 278. 13,39.
 279. 3,55.
 280. 3,9.
 281. 1401.
 282. 583,5.
 283. 105,88.
 284. 28,87.
 285. 0,0210.
 286. 7,3891.
 287. 20,09.
 288. 9,8696.
 289. 31,01.
 290. 30,8.
291. 6,6.
 292. 0,2802.
 293. 1,99.
 294. 0,1314.
 295. 8,037.
 296. 1,097.
 297. 0,871.
 298. 1,34.
 299. 2,96.
 300. 3,86.
 301. 0,290.
 302. 861,732.
 303. 0,1375.
 304. 4,300.
 305. 5,700.
 306. 2,46.
 307. 8,36.
 308. 0,01944.
 309. 0,11.
 310. 0,831.
 311. 0,36788.
 312. 0,3183.
 313. 178,2.
 314. 21,43.
 317. 61,3.
 319. 52,37.
 323. 283.
 324. 0,01745325.
 325. 0,000 290 89 ja
 0,000 004 85.
 332. 504.
 335. $\frac{n+1}{(n+2)!}$
 337. 206 m.
 338. $\log_e 10 = 2,302585093$.
 339. 0,43429448.
 341. Vahe 0,0009 — 0,0008
 on arvust 483 arvuni
 543.
 343. a) $2^0,845$;
 b) $11^0,32$.

344. a) $6,529 \mu$
 345. $1,028 \text{ mm.}$

§ 4.

349. b) $1,949 \text{ m.}$
 362. $2,94; - 0,46; - 2,48.$
 363. $2,78; - 0,36; - 2,42.$
 364. $3,26; - 0,3; - 2,96.$
 365. $3,45; - 2,63.$
 366. $4,57; - 3,82.$
 367. $1,67; 4,45.$
 368. $1,8.$
 369. $1,38.$
 370. $3,52.$
 371. $2,79.$

§ 5.

391. a) 4144 mk.
 393. a) 59690 mk.
 394. $3\frac{3}{4}\%$
 395. 6 a.
 396 a) $20,15 \text{ a.}$
 397. Kasulikum esimesel
 juhusel.
 398. $55780 \text{ m}^3.$
 399. $22811.$
 400. a) $298 \text{ mk.};$
 b) 728 mk.
 401. $15,4^0\%$
 402. 5492 mk.
 403. a) 18540 mk.
 404. a) 73965 mk.
 405. $kq^{-t}.$
 407. a) $1480 \text{ mk.};$ c) 1489
 $\text{mk.};$ e) 1492 mk.
 408. a) $5,6^0\%$
 409. $1,094.$
 410. $4,1^0\%$
 412. 32105 mk.
 413. 3000 mk.
 414. 7 a.

415. 12 a.
 417. 6467 mk.
 418. 7032 mk.
 419. 12840 mk.
 420. 421600 mk.
 421. 3847 mk.
 423. 54090 mk.
 424. 21480 mk.
 425. 17150 mk.
 426. 7649 mk.
 427. 12460 mk.
 428. 5175 mk.
 429. 33 aastat.
 430. $49500 \text{ m}^3.$
 431. $44,5 \text{ m}^3.$
 432. 10286 mk.
 433. 176600 mk.

§ 6.

437. $60.$
 440. $325.$
 441. $64.$
 445. $24.$
 446. $18.$
 447. $210.$
 448. $1365.$
 449. $105.$
 454. $31.$
 455. $127.$
 456. $120.$
 457. $11556.$
 458. a) $6.$
 459. a) $7.$
 460. $31.$
 461. $\binom{n}{2}.$
 464. $\binom{n}{2}.$
 465. $\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1.$

466. $\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1.$

467. $\frac{n(n-3)}{2}.$

468. $\binom{n}{3}.$

469. $\binom{n}{3}.$

471. $\binom{n}{4}.$

473. 4.

474. 15.

475. a) 36.

476. 30.

478. 5544.

479. b) 4.

480. 36.

481. 2520.

482. 35.

483. 792.

484. 251.

485. 10.

486. 10.

487. 83.

488. 20.

489. 60.

§ 7.

491. $\frac{5}{36}.$

492. $\frac{31}{36}.$

493. 36.

495. $\frac{1}{18}.$

496. $\frac{2}{3}.$

497. $\frac{1}{3}.$

498. $\frac{3}{17}.$

499. a) $\frac{5}{408}$; b) $\frac{5}{204}$; c) $\frac{35}{816}$;

d) $\frac{35}{126}.$

500. $\frac{72}{145}.$

501. $\frac{3}{5}.$

502. a) $\frac{25}{216}$; b) $\frac{1}{8}.$

503. a) $\frac{5}{11}.$

504. $\frac{7}{15}.$

505. $\frac{1}{4}.$

506. a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{1}{9}.$

507. $\frac{7}{12}.$

509. $\frac{125}{46656}.$

510. a) $\frac{1}{108}$; b) $\frac{25}{1728}.$

513. Tõenäosus on $\frac{671}{1296}.$

516. a) $\frac{5}{324}$; b) $\frac{19}{81}$; c) $\frac{319}{324}$;

d) $\frac{10}{81}$; e) $\frac{62}{81}.$

517. $\frac{4}{49}.$

518. $\frac{1081}{1225}.$

519. $\frac{10}{63}.$

520. $\frac{36}{91}.$

§ 8.

524. 207684 mk.

525. a) 11256 mk.;

b) 14080 mk.

526. 20083 mk.

527. 26008 mk.

528. 1) 4501 mk.

2) 596,8 mk.

529. 492,6 mk.

530. 13111 mk.

531. 1965 mk.

534. b) 173133 mk.

535. 39944 mk.

536. 2645 mk.

537. 3021 mk.
 540. a) 477489 mk.
 541. 234323 mk.
 545. 6020 mk.
 546. 15809 mk.
 552. a) 573 mk.
 553. a) 1057 mk.
 554. 9527 mk.

557. Selts maksab

$$\begin{aligned}
 & k \left(\frac{N_{34}}{N_{33}} - \frac{N_{47}}{N_{46}} \right) D_{46} \\
 & \frac{\left(1 - \frac{N_{47}}{N_{46}} \right) \left(\frac{1}{q} N_{46} - N_{47} \right)}{\left(1 - \frac{N_{47}}{N_{46}} \right) \left(\frac{1}{q} N_{46} - N_{47} \right)} = \\
 & = k \left(\frac{N_{34}}{N_{33}} - \frac{N_{47}}{N_{46}} \right) : \left(\frac{1}{q} - \frac{N_{47}}{N_{46}} \right).
 \end{aligned}$$

