TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Tanel Kipper

Vektorväärtustega jadaruumid

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendajad : Eve Oja, prof., füüs.-mat. kand.
Kati Ain, ass., PhD

Tartu 2016

Vektorväärtustega jadaruumid

Bakalaureusetöö

Tanel Kipper

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös vaadeldakse klassikaliste jadaruumide $\ell_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja c_0 üldistustena ruume $\ell_p(X_n), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja $c_0(X_n)$, mille jadad koosnevad Banachi ruumide elementidest. Tõestatakse, et klassikaliste jadaruumide põhilised omadused laienevad ka uuritavatele üldistele jadaruumidele.

Ühtlasi kirjeldatakse ruumide $\ell_p(X_n), 1 \leqslant p < \infty$, ja $c_0(X_n)$ kaasruume ning näidatakse, kuidas saadud tulemustest järelduvad kaasruumide kirjeldused erijuhtudel $\ell_p, 1 \leqslant p < \infty$, ja c_0.

CERCS teaduseriala: P140 Read, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: Vektorruumid, normeeritud ruumid, Banachi ruumid, jadaruumid, kaasruumid.

Vector-valued sequence spaces

Bachelor's thesis

Tanel Kipper

Abstract. The primary objective of this bachelor's thesis is to extend the notions of the classic scalar-valued sequence spaces $\ell_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, and c_0 together with their main properties to the more general cases of sequence spaces $\ell_p(X_n), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, and $c_0(X_n)$, respectively, where the elements of the sequences are from Banach spaces.

Also, the dual spaces of $\ell_p(X_n), 1 \leqslant p < \infty$, and $c_0(X_n)$ are described and proved to agree with the classical cases of $\ell_p, 1 \leqslant p < \infty$, and c_0.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.
Key words: Vector spaces, normed spaces, Banach spaces, sequence spaces, dual spaces.

Sisukord

Sissejuhatus

Loengukursuses „Funktsionaalanalüüs I“ käsitletakse jadaruume ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja c_0. Nende ruumide elementideks on arvjadad. Arvjadade asemel vaadeldakse sageli jadasid, mis koosnevad Banachi ruumi elementidest. Nii tekivad näiteks ruume ℓ_p ja c_0 üldistavad ruumid $\ell_p(X_n)$ ja $c_0(X_n)$, kus $(X_n) = (X_n)_{n=1}^{\infty}$ on etteantud Banachi ruumide jada.

Bakalaureusetöö eesmärgiks on uurida üldiseid jadaruume $\ell_p(X_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja $c_0(X_n)$, nende omadusi ja nende omavahelisi seoseid. Need ruumid ning nende mitmesugused versioonid leiavad üsnagi laialdast kasutamist (vt. nt. monograafia [3, lk. 31–75], hiljutine artikkel [1]). Samas pole kirjandusest leida tõestusi seal kasutatavatele folkloorsetele faktidele. Käesolev bakalaureusetöö püüab seda lünka täita.

Bakalaureusetöö koosneb viiest osast.

Esimeses osas meenutame jadaruumide $\ell_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja c_0 definitsioone ning sõnastame Minkowski võrratuse lõpmatute summade jaoks.

Teises osas defineerime vektorväärtustega jadaruumid $\ell_p(X_n), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja $c_0(X_n)$ ning näitame, et need ruumid on vektorruumid.

Kolmandas osas defineerime normi ruumidel $\ell_p(X_n), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja $c_0(X_n)$ ning näitame, et need ruumid on täielikud normeeritud ruumid, see tähendab Banachi ruumid.

Neljandas osas kirjeldame jadaruumide $\ell_p(X_n), 1 \leqslant p < \infty$, ja $c_0(X_n)$ kaasruume. Osutub, et need kaasruumid saab samastada vektorväärtustega jadaruumidega loomuliku isomeetrilise isomorfismi kaudu.

Viiendas osas vaatleme arvjadade ruumide $\ell_p, 1 \leqslant p < \infty$, ja c_0 kaasruume. Näitame, kuidas nende kaasruumide kirjeldusi saab järeldada neljanda osa teoreemide põhjal.

Käesolevas bakalaureusetöös vaatleme normeeritud ruume ja Banachi ruume üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K}$ on reaalarvude korpus $\mathbb{R}$ või kompleksarvude korpus $\mathbb{C}$.

Töös kasutame järgmisi üldlevinud tähistusi.

Jadade korral kasutame lühendatud tähistust

$$(x_n) := (x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, \dots).$$

Normeeritud ruumist X normeeritud ruumi Y tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite ruumi tähistame $\mathcal{L}(X, Y)$ ning ruumist X ruumi X tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite ruumi $\mathcal{L}(X)$. Ruumi X kaasruumiks nimetame pidevate lineaarsete operaatorite ruumi $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, mida tähistame sümboliga X^*.

1 Arvjadade ruumid ℓ_p ja c_0

Käesolevas osas meenutame järgmisi töös kasutatavaid põhimõisteid: p-summeeruvate jadade ruum ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, tõkestatud jadade ruum ℓ_∞ ning nulliks koonduvate jadade ruum c_0. Lisaks sõnastame meile edaspidi olulise tulemuse – Minkowski võrratuse lõpmatute summade jaoks.

Allolevad ruumid on kõigi arvjadade vektorruumi $\{(x_n)\colon x_n \in \mathbb{K}\}$ alamruumid, seega ka ise vektorruumid.

Definitsioon. Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Arvjadade ruum ℓ_p on hulk

$$\ell_p = \left\{(x_n) : x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\},$$

mille elemente nimetatakse *p-summeeruvateks jadadeks* ja milles on norm defineeritud võrdusega

$$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Definitsioon. Arvjadade ruum ℓ_∞ on hulk

$$\ell_\infty = \left\{(x_n) : x_n \in \mathbb{K}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\},$$

mille elementideks on *tõkestatud jadad* ja milles on norm defineeritud võrdusega

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Definitsioon. Arvjadade ruum c_0 on hulk

$$c_0 = \left\{(x_n) : x_n \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\},$$

mille elementideks on *nulliks koonduvad jadad* ja milles on norm defineeritud võrdusega

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Funktsionaalanalüüsi õpikus [6, lk. 11–12] on tõestatud järgmine võrratus.

Lause 1 (Minkowski võrratus). *Olgu* $1 \leqslant p < \infty$. *Kui* x_n, $y_n \in \mathbb{K}$, $n =$

$1, 2, ..., k$, *siis*

$$\left(\sum_{n=1}^{k}|x_n+y_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{k}|x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{k}|y_n|^p\right)^{1/p}.$$

Minkowski võrratus kehtib ka lõpmatute summade jaoks. Selleks tarvitseb minna piirile protsessis $k \to \infty$. (Allolevas võrratuses (1) kasutame vajadusel kokkuleppeid, et $\infty^{1/p} = \infty$ ja $\infty + \infty = a + \infty = \infty + a = \infty$, kui $a \in \mathbb{R}$.)

Lause 2. *Olgu* $1 \leqslant p < \infty$. *Kui* x_n, $y_n \in \mathbb{K}$ *iga* $n \in \mathbb{N}$ *korral, siis*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Funktsionaalanalüüsi kursusest on teada, et ruumid ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja c_0 on täielikud normeeritud ruumid – seega Banachi ruumid. Tõestused võib leida näiteks õpikust [6].

2 Vektorväärtustega jadaruumid $\ell_p(X_n)$ ja $c_0(X_n)$ kui vektorruumid

Käesolevas osas defineerime bakalaureusetöö uurimisobjektideks olevad ruumid $\ell_p(X_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja $c_0(X_n)$ ning näitame, et need ruumid on vektorruumid.

Olgu edaspidi $X_1, X_2, ...$ suvalised Banachi ruumid. Jadaruumid $\ell_p(X_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja $c_0(X_n)$ on defineeritud ja nende folkloorseid omadusi on tõestuseta kirjeldatud näiteks raamatutes [2, lk. 35], [4, lk. 56, 271, 306], [5, lk. 439–440, 459, 491] ja [7, lk. 43–44]. Defineerime need mõisted ning samaaegselt anname neile mõistetele eestikeelsed nimetused.

Definitsioon. Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Jadaruum $\ell_p(X_n)$ on hulk

$$\ell_p(X_n) = \{(x_n) : x_n \in X_n, (\|x_n\|) \in \ell_p\},$$

mille elemente nimetame *p-summeeruvateks vektorväärtustega jadadeks.*

Definitsioon. Jadaruum $\ell_\infty(X_n)$ on hulk

$$\ell_\infty(X_n) = \{(x_n) : x_n \in X_n, (\|x_n\|) \in \ell_\infty\},$$

mille elemente nimetame *tõkestatud vektorväärtustega jadadeks.*

Definitsioon. Jadaruum $c_0(X_n)$ on hulk

$$c_0(X_n) = \{(x_n) : x_n \in X_n, (\|x_n\|) \in c_0\},$$

mille elemente nimetame *nulliks koonduvateks vektorväärtustega jadadeks.*

Definitsioon. Ruume $\ell_p(X_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, $\ell_\infty(X_n)$ ja $c_0(X_n)$ nimetame vastavalt *p-summeeruvate vektorväärtustega jadade ruumiks*, *tõkestatud vektorväärtustega jadade ruumiks* ja *nulliks koonduvate vektorväärtustega jadade ruumiks.*

Märkusena lisame, et raamatus [5] on vastavad jadaruumid tähistatud kui $\ell_p((X_n))$, $\ell_\infty((X_n))$ ja $c_0((X_n))$. Raamatus [7] aga vastavalt $\left(\sum_{j=1}^\infty X_j\right)_p$, $\left(\sum_{j=1}^\infty X_j\right)_\infty$ ja $\left(\sum_{j=1}^\infty X_j\right)_0$.

Erijuhul, kui $X_1 = X_2 = \cdots = X$, kus X on Banachi ruum, siis tähistame ülaldefineeritud ruume vastavalt $\ell_p(X)$, $\ell_\infty(X)$ ja $c_0(X)$. Esimeses osas defineeritud ruume saab tähistada üldises kirjaviisis kui $\ell_p = \ell_p(\mathbb{K})$, $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{K})$ ja $c_0 = c_0(\mathbb{K})$.

Banachi ruum on definitsiooni järgi eelkõige ka vektorruum. Tähistame korrutisruumi $X_1 \times X_2 \times \cdots$ edaspidi kui $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Algebra kursusest on teada, et vektorruumide $X_1, X_2, ...$ korrutisruum $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ on samuti vektorruum. Selle korrutisvektorruumi nullelemendiks on jada

$$(0_n) = (0_1, 0_2, ...),$$

kus 0_n on vektorruumi X_n nullelement. Kui $(x_n) = (x_1, x_2, ...)$ ja $(y_n) = (y_1, y_2, ...)$ on korrutisruumi $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ kaks elementi, siis elementide (x_n) ja (y_n) summa defineeritakse koordinaaditi võrdusega

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...).$$

Kui λ on korpuse $\mathbb{K}$ element, siis arvu λ ja vektori (x_n) korrutis defineeritakse võrdusega

$$\lambda(x_n) = (\lambda x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots).$$

Järgnevalt näitame, et ruumid $\ell_p(X_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja $c_0(X_n)$ on vektorruumi $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ alamruumid ning seega ka ise vektorruumid. Selleks näitame, et $(0_n) \in \ell_p(X_n)$ ja $(0_n) \in c_0(X_n)$ ning et eelmainitud ruumid on vektorruumi $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tehete (vektorite liitmine, vektori korrutamine skalaariga) suhtes kinnised.

Norm Banachi ruumi nullelemendist on võrdne nulliga. Seega

$$(\|0_n\|) = (\|0_1\|, \|0_2\|, \dots) = (0, 0, \dots)$$

ning

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|0_n\|^p = 0 < \infty, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|0_n\| = 0 < \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \|0_n\| = 0.$$

Siit järeldame, et $1 \leqslant p \leqslant \infty$ korral $(0_n) \in \ell_p(X_n)$ ja $(0_n) \in c_0(X_n)$.

Jääb veel üle kontrollida ruumide $\ell_p(X_n)$, $\ell_\infty(X_n)$ ja $c_0(X_n)$ kinnisus liitmise ja korpuse elemendiga korrutamise suhtes vektorruumis $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Seda näitame järgneva kolme lemmaga.

Lemma 1. *Olgu* $1 \leqslant p < \infty$. *Ruum* $\ell_p(X_n)$ *on kinnine vektorruumi* $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *tehete suhtes.*

Tõestus. Olgu $(x_n) = (x_1, x_2, ...)$ ja $(y_n) = (y_1, y_2, ...)$ ruumi $\ell_p(X_n)$ suvalised elemendid. Vastavalt ruumi $\ell_p(X_n)$ definitsioonile leiduvad arvud M ja N nii, et $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \leqslant M$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^p \leqslant N$. Seejuures kehtib võrdus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p + \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^p = \sum_{n=1}^{\infty}(\|x_n\|^p + \|y_n\|^p).$$

Näitame, et $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ on ruumi $\ell_p(X_n)$ element. Olgu $k \in \mathbb{N}$. Siis

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \|x_n + y_n\|^p &\leqslant \sum_{n=1}^{k}(\|x_n\| + \|y_n\|)^p \leqslant \sum_{n=1}^{k}(2\max\{\|x_n\|, \|y_n\|\})^p \\
&= 2^p \sum_{n=1}^{k}(\max\{\|x_n\|, \|y_n\|\})^p \leqslant 2^p \sum_{n=1}^{k}(\|x_n\|^p + \|y_n\|^p) \\
&= 2^p \left(\sum_{n=1}^{k} \|x_n\|^p + \sum_{n=1}^{k} \|y_n\|^p\right) \leqslant 2^p(M + N).
\end{aligned}$$

Järelikult $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\|^p < \infty$ ja $(x_n) + (y_n) \in \ell_p(X_n)$.

Olgu λ korpuse $\mathbb{K}$ element. Näitame, et ka rida $\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda x_n\|^p$ koondub. Vastavalt normi homogeensuse aksioomile, $\|\lambda x_n\|^p = |\lambda|^p \|x_n\|^p$, mistõttu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda x_n\|^p = |\lambda|^p \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty.$$

Sellega oleme näidanud, et $\lambda(x_n) = (\lambda x_n) \in \ell_p(X_n)$. □

Lemma 2. *Ruum* $\ell_\infty(X_n)$ *on kinnine vektorruumi* $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *tehete suhtes.*

Tõestus. Olgu $(x_n) \in \ell_\infty(X_n)$ ja $(y_n) \in \ell_\infty(X_n)$ suvalised. Vastavalt ruumi $\ell_\infty(X_n)$ definitsioonile $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$ ja $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\| < \infty$. Seega

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n + y_n\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}(\|x_n\| + \|y_n\|) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\| < \infty.$$

See tähendab, et $(x_n) + (y_n) \in \ell_\infty(X_n)$.

Olgu λ korpuse $\mathbb{K}$ suvaline element. On lihtne kontrollida, et $\lambda(x_n) \in \ell_\infty(X_n)$:

$$\sup_n(\|\lambda x_n\|) = \sup_n(|\lambda|\|x_n\|) = |\lambda| \sup_n \|x_n\| < \infty.$$

Sellega oleme näidanud, et $\lambda(x_n) \in \ell_\infty(X_n)$. □

Lemma 3. *Ruum $c_0(X_n)$ on kinnine vektorruumi $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ tehete suhtes.*

Tõestus. Olgu $(x_n) \in c_0(X_n)$ ja $(y_n) \in c_0(X_n)$ suvalised. Jadad (x_n) ja (y_n) koosnevad etteantud Banachi ruumide elementidest, mis koonduvad normi poolest nulliks. Seega leiduvad iga $\varepsilon > 0$ korral $M_1 \in \mathbb{N}$ ja $M_2 \in \mathbb{N}$ nii, et $\|x_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ iga $n > M_1$ korral ja $\|y_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ iga $n > M_2$ korral. Valides $N := \max\{M_1, M_2\}$, saame, et iga $n > N$ korral

$$\|x_n + y_n\| \leqslant \|x_n\| + \|y_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Oleme saanud, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\|x_n + y_n\| < \varepsilon$, kui $n > N$. Seega järeldame, et $(x_n) + (y_n) \in c_0(X_n)$.

Iga $(x_n) \in c_0(X_n)$ korral $0(x_n) = (0_n)$, seega on $0(x_n)$ ruumi $c_0(X_n)$ element. Olgu nüüd λ suvaline korpuse $\mathbb{K}$ nullist erinev element. Näitame, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\|\lambda x_n\| < \varepsilon$, kui $n > N$. Vastavalt ruumi $c_0(X_n)$ definitsioonile leidub arvu $\varepsilon > 0$ korral $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\|x_n\| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$, kui $n > N$. Siis aga vastavalt normi homogeensuse aksioomile

$$\|\lambda x_n\| = |\lambda|\|x_n\| < |\lambda|\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

kui $n > N$. Järelikult $\lambda(x_n) \in c_0(X_n)$. □

Lemmade põhjal järeldame, et ruumid $\ell_p(X_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja $c_0(X_n)$ on vektorruumid. Seejuures on meile edaspidises kasulik järgmine tähelepanek.

Lause 3. *Ruum $c_0(X_n)$ on vektorruumi $\ell_\infty(X_n)$ alamruum.*

Tõestus. Kui $(x_n) \in c_0(X_n)$, see tähendab, et $(\|x_n\|) \in c_0$, siis $\|x_n\| \to 0$, kui $n \to \infty$. Kuna iga koonduv arvjada on tõkestatud, siis $(\|x_n\|) \in \ell_\infty$ ning seega $(x_n) \in \ell_\infty(X_n)$. □

3 Vektorruumid $\ell_p(X_n)$ ja $c_0(X_n)$ kui Banachi ruumid

Käesolevas osas defineerime normid vektorruumidel $\ell_p(X_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja $c_0(X_n)$ ning näitame, et need ruumid on Banachi ruumid.

Igale Banachi ruumi X_n elemendile x_n seab sellessamas ruumis defineeritud norm vastavusse mittenegatiivse reaalarvu $\|x_n\|$. Seega saab igale vektorruumi $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ elemendile $(x_n) = (x_1, x_2, ...)$ vastavusse seada mittenegatiivsetest reaalarvudest koosneva jada $(\|x_n\|) = (\|x_1\|, \|x_2\|, ...)$ ning seejärel kontrollida, kas see jada on ruumi ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, või c_0 element. Kui ta seda mõne eelmainitud ruumi korral on, saame loomulikul viisil defineerida elemendi $(x_n) = (x_1, x_2, ...)$ normi vastavalt kas siis ruumis $\ell_p(X_n)$ või $c_0(X_n)$.

Definitsioon. Olgu $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Vektorruumides $\ell_p(X_n)$ ja $c_0(X_n)$ defineeritakse norm järgmiselt:

$$\|(x_n)\|_p := \big\|(\|x_n\|)\big\|_p. \tag{2}$$

Järgneva kahe lausega näitame, et me defineerisime normi korrektselt ruumides $\ell_p(X_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja $c_0(X_n)$.

Lause 4. *Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Ruum $\ell_p(X_n)$ on normeeritud ruum võrdusega* (2) *defineeritud normi suhtes.*

Tõestus. Olgu $(x_n) \in \ell_p(X_n)$ ja $(y_n) \in \ell_p(X_n)$ suvalised, $(0_1, 0_2, ...)$ vektorruumi $\ell_p(X_n)$ nullelement ning λ korpuse $\mathbb{K}$ suvaline element. Kontrollime normi aksioome.

Samasuse aksioom kehtib, kuna

$$\begin{aligned}
\|(x_n)\|_p = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \big\|(\|x_n\|)\big\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{1/p} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x_n\| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \quad x_n = 0_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad (x_n) = (0_1, 0_2, ...).
\end{aligned}$$

Homogeensuse aksioomi kehtivuse näitame järgnevalt:

$$\|\lambda(x_n)\|_p = \|(\lambda x_n)\|_p = \big\|(\|\lambda x_n\|)\big\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda x_n\|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|\lambda| \|x_n\|)^p\right)^{1/p}$$
$$= |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \|(x_n)\|_p.$$

Kolmnurga aksioomi kehtivuse näitamiseks kasutame esimeses osas sõnastatud Minkowski võrratust (1) lõpmatute summade jaoks. Lemma 1 põhjal teame, et allolevad read koonduvad. Saame, et

$$\|(x_n) + (y_n)\|_p = \|(x_n + y_n)\|_p = \big\|(\|x_n + y_n\|)\big\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\|^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\|x_n\| + \|y_n\||^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^p\right)^{1/p}$$
$$= \|(x_n)\|_p + \|y_n\|_p.$$

Oleme ruumis $\ell_p(X_n)$ normi korrektselt defineeritud. □

Lause 5. *Vektorruumid $\ell_\infty(X_n)$ ja $c_0(X_n)$ on normeeritud ruumid võrdusega* (2) *defineeritud normi suhtes.*

Tõestus. Märgime, et $c_0(X_n)$ on vektorruumi $\ell_\infty(X_n)$ alamruum (vt. lause 3) ja normi definitsioon ruumis $c_0(X_n)$ ühtib normi definitsiooniga ruumis $\ell_\infty(X_n)$. Seega piisab, kui tõestame antud juhul lause ainult ruumi $\ell_\infty(X_n)$ jaoks.

Olgu $(x_n) = (x_1, x_2, ...)$ ja $(y_n) = (y_1, y_2, ...)$ vektorruumi $\ell_\infty(X_n)$ kaks suvalist elementi, $(0_1, 0_2, ...)$ vektorruumi $\ell_\infty(X_n)$ nullelement ning λ korpuse $\mathbb{K}$ suvaline element. Kontrollime normi aksioome.

Kehtib samasuse aksioom:

$$\begin{aligned} \|(x_n)\|_\infty = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \big\|(\|x_n\|)\big\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \|x_n\| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad x_n = 0_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \quad (x_n) = (0_1, 0_2, ...). \end{aligned}$$

Homogeensuse aksioomi korrektsuse saame järgmiselt:

$$\begin{aligned}\|\lambda(x_n)\|_\infty &= \|(\lambda x_n)\|_\infty = \|(\|\lambda x_n\|)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda x_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\lambda|\|x_n\|) \\ &= |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = |\lambda|\|(x_n)\|_\infty.\end{aligned}$$

Kehtib ka kolmnurga aksioom:

$$\begin{aligned}\|(x_n)+(y_n)\|_\infty &= \|(x_n+y_n)\|_\infty = \|(\|x_n+y_n\|)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n+y_n\| \\ &\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}(\|x_n\|+\|y_n\|) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\| \\ &= \|(x_n)\| + \|(y_n)\|_\infty.\end{aligned}$$

Oleme ruumides $\ell_\infty(X_n)$ ja $c_0(X_n)$ defineerinud normi korrektselt. □

Veendusime, et ruumid $\ell_p(X_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ja $c_0(X_n)$ on meie poolt defineeritud normi suhtes normeeritud ruumid. Järgnevate teoreemidega näitame, et vaadeldavad ruumid on täielikud normeeritud ruumid.

Teoreem 1. *Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Normeeritud ruum $\ell_p(X_n)$ on Banachi ruum.*

Tõestus. Teoreemi tõestuseks piisab ruumi $\ell_p(X_n)$ täielikkuse näitamisest. Olgu $\big((x_n^k)_{n=1}^\infty\big)_{k=1}^\infty = \big((x_n^1),(x_n^2),\dots\big)$ Cauchy jada ruumis $\ell_p(X_n)$, kus $(x_n^k) = (x_1^k, x_2^k, ...) \in \ell_p(X_n)$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Jaotame täielikkuse tõestuse kolmeks etapiks.

Esimeses etapis näitame, et leidub piirelement, milleks Cauchy jada $((x_n^k))_{k=1}^\infty$ koordinaaditi koondub. Cauchy jada definitsiooni põhjal leidub iga $\varepsilon > 0$ korral $N \in \mathbb{N}$ nii, et iga fikseeritud $i \in \mathbb{N}$ korral

$$\|x_i^k - x_i^l\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n^k - x_n^l\|^p\right)^{1/p} = \|(x_n^k)-(x_n^l)\|_p \leqslant \varepsilon, \tag{3}$$

kui $k, l > N$. Seega saame, et jada $(x_n^k)_{k=1}^\infty$ on iga $n \in \mathbb{N}$ korral Cauchy jada ruumis X_n. Kuna iga naturaalarvulise n korral on X_n Banachi ruum, siis leidub $x_n \in X_n$ nii, et $x_n^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_n$ ruumis X_n. Seega oleme näidanud, et jada $((x_n^k))_{k=1}^\infty$ koondub koordinaaditi jadaks $(x_n)_{n=1}^\infty = (x_1, x_2, ...)$, kusjuures $x_n \in X_n$ iga naturaalarvulise n korral.

Teises etapis näitame, et $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on ruumi $\ell_p(X_n)$ element. Võrratusest (3) järeldame, et iga naturaalarvulise m korral

$$\left(\sum_{n=1}^{m}\|x_n^k - x_n^l\|^p\right)^{1/p} \leqslant \|(x_n^k) - (x_n^l)\|_p \leqslant \varepsilon,$$

kui $k, l > N$. Fikseerime $k > N$. Kui nüüd $l \to \infty$, siis iga $m \in \mathbb{N}$ korral kehtib võrratus

$$\left(\sum_{n=1}^{m}\|x_n^k - x_n\|^p\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Viimane võrratus kehtib iga naturaalarvulise m korral. Seega võime minna piirile protsessis $m \to \infty$ ning võrratus jääb kehtima:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^k - x_n\|^p\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon, \tag{5}$$

kusjuures $k > N$. Vastavalt Minkowski võrratusele (vt. lause 1), saame iga $m \in \mathbb{N}$ korral võrratusest (4), et

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{m}\|x_n\|^p\right)^{1/p} &\leqslant \left(\sum_{n=1}^{m}\|x_n - x_n^k\|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{m}\|x_n^k\|^p\right)^{1/p}\\ &\leqslant \varepsilon + \left(\sum_{n=1}^{m}\|x_n^k\|^p\right)^{1/p} < \infty.\end{aligned}$$

Seega $\left(\sum_{n=1}^{m}\|x_n\|^p\right)^{1/p} < \infty$ ja me oleme näidanud, et (x_n) on ruumi $\ell_p(X_n)$ element.

Kolmandas etapis veendume, et meie vaadeldav Cauchy jada $\big((x_n^k)_{n=1}^{\infty}\big)_{k=1}^{\infty}$ koondub normi järgi jadaks (x_n) ruumis $\ell_p(X_n)$. Selle veendumuse saame võrratusest (5), mis ütleb, et

$$\|(x_n^k) - (x_n)\|_p \leqslant \varepsilon,$$

kui $k > N$. Seega leiab aset koondumine $\|(x_n^k) - (x_n)\|_p \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. □

Teoreem 2. *Normeeritud ruum $\ell_\infty(X_n)$ on Banachi ruum.*

Tõestus. Teoreemi tõestuseks piisab ruumi $\ell_\infty(X_n)$ täielikkuse näitamisest. Olgu $\big((x_n^k)_{n=1}^{\infty}\big)_{k=1}^{\infty} = \big((x_n^1), (x_n^2), \dots\big)$ Cauchy jada ruumis $\ell_\infty(X_n)$, kus $(x_n^k) =$

$(x_1^k, x_2^k, ...) \in \ell_\infty(X_n)$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Cauchy jada definitsiooni põhjal leidub iga $\varepsilon > 0$ korral $N \in \mathbb{N}$ nii, et iga fikseeritud $i \in \mathbb{N}$ korral

$$\|x_i^k - x_i^l\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^k - x_n^l\| = \|(x_n^k) - (x_n^l)\|_\infty \leqslant \varepsilon, \tag{6}$$

kui $k, l > N$. Seega saame, et jada $(x_n^k)_{k=1}^\infty$ on iga $n \in \mathbb{N}$ korral Cauchy jada ruumis X_n. Kuna X_n on Banachi ruum, siis iga Cauchy jada koondub selles ruumis. Järelikult leidub iga natuaalarvulise n korral $x_n \in X_n$ nii, et leiab aset koondumine $x_n^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_n$ ruumis X_n. Seega oleme näidanud, et jada $((x_n^k))_{k=1}^\infty$ koondub koordinaaditi jadaks $(x_n)_{n=1}^\infty = (x_1, x_2, ...)$, kusjuures $x_n \in X_n$ iga naturaalarvulise n korral.

Näitame, et jada (x_n) on ruumi $\ell_\infty(X_n)$ element. Kuna võrratus (6) kehtib iga $k, l > N$ korral, siis iga fikseeritud $i \in \mathbb{N}$ korral kehtib võrratus

$$\|x_i^k - x_i\| = \lim_{l\to\infty} \|x_i^k - x_i^l\| \leqslant \varepsilon.$$

Saame, et $\|x_i^k - x_i\| \leqslant \varepsilon$ iga naturaalarvulise i korral ning seega

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^k - x_n\| \leqslant \varepsilon.$$

Teisisõnu, $\|(x_n^k) - (x_n)\|_\infty \leqslant \varepsilon$ alati, kui $k > N$. Jada (x_n^k) on aga ruumi $\ell_\infty(X_n)$ element ning seetõttu fikseeritud $k > N$ korral

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \leqslant \|(x_n) - (x_n^k)\|_\infty + \|(x_n^k)\|_\infty \leqslant \varepsilon + \|(x_n^k)\|_\infty < \infty.$$

Seega oleme saanud, et jada (x_n) on ruumi $\ell_\infty(X_n)$ element.

Kuna, nagu nägime, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub naturaalarv N nii, et

$$\|(x_n^k) - (x_n)\|_\infty \leqslant \varepsilon,$$

kui $k > N$, siis leiab aset koondumine $\|(x_n^k) - (x_n)\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Sellega oleme näidanud, et Cauchy jada $\big((x_n^k)_{n=1}^\infty\big)_{k=1}^\infty$ koondub jadaks (x_n) ruumis $\ell_\infty(X_n)$. $\square$

Normeeritud ruumi $c_0(X_n)$ täielikkuse näitamiseks tõestame kõigepealt järgmise teoreemi.

Teoreem 3. *Normeeritud ruum $c_0(X_n)$ on Banachi ruumi $\ell_\infty(X_n)$ kinnine alamruum.*

Tõestus. Lause 3 põhjal teame, et $c_0(X_n)$ on vektorruumi $\ell_\infty(X_n)$ alamruum.

Funktsionaalanalüüsi kursusest teame (vt. nt. [6, lk. 24]), et normeeritud ruumi alamhulk on kinnine parajasi siis, kui iga tema elementidest moodustatud koonduva jada piirelement kuulub sellesse hulka. Olgu $\big((x_n^k)_{n=1}^\infty\big)_{k=1}^\infty = ((x_n^1), (x_n^2), ...)$ jada ruumis $c_0(X_n)$, kus $(x_n^k) = (x_1^k, x_2^k, ...) \in c_0(X_n)$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Eeldame, et see jada koondub ruumis $\ell_\infty(X_n)$, see tähendab, et leidub element $(x_n) = (x_1, x_2, ...)$ ruumis $\ell_\infty(X)$, milleks jada $((x_n^k))_{k=1}^\infty$ koondub. Järgnevas näitame, et $(x_n) \in c_0(X_n)$, teisisõnu $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Valime vabalt $\varepsilon > 0$. Koondumise $(x_n^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x_n)$ tõttu leidub $N_1 \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\|x_n^k - x_n\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^k - x_n\| = \|(x_n^k) - (x_n)\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

kui $k > N_1$. Fikseerime $k > N_1$. Kuna $(x_n^k)_{n=1}^\infty$ on normi poolest nulliks koonduv jada, siis leidub $N_2 \in \mathbb{N}$ nii, et $\|x_n^k\| < \frac{\varepsilon}{2}$, kui $n > N_2$. Seega, kui $n > N_2$, siis

$$\|x_n\| \leqslant \|x_n - x_n^k\| + \|x_n^k\| < \varepsilon.$$

See tähendab, et jada (x_n) koondub normi poolest nulliks, mistõttu on jada (x_n) ruumi $c_0(X_n)$ element.

Oleme saanud, et ruum $c_0(X_n)$ on ruumi $\ell_\infty(X_n)$ kinnine alamruum. □

Õpikus [6, lk. 86] on lause, mis ütleb, et Banachi ruumi vektoralamruum on täielik parajasti siis, kui ta on kinnine. Seega saame viimasest teoreemist alloleva järelduse.

Järeldus 1. *Normeeritud ruum $c_0(X_n)$ on Banachi ruum.*

4 Vektorväärtustega jadaruumide kaasruumid

Käesolevas osas kirjeldame jadaruumide $\ell_p(X_n), 1 \leqslant p < \infty$, ja $c_0(X_n)$ kaasruume.

Meenutame, et kui X on normeeritud ruum üle korpuse $\mathbb{K}$, siis lineaarseks funktsionaaliks ruumil X nimetatakse lineaarset operaatorit $f : X \to \mathbb{K}$. Pidevate lineaarsete funktsionaalide ruumi $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ nimetatakse ruumi X kaasruumiks ning tähistatakse X^*. Kaasruum X^* on Banachi ruum (vt. nt. [6, lk. 124]). Seejuures on funktsionaali $f \in X^*$ norm defineeritud kui

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \tag{7}$$

(vt. nt. [6, lk. 159]).

Järgnevas defineerime mõiste, mille abil saame kirjeldada vektorväärtustega jadaruumide kaasruume.

Definitsioon. Olgu X ja Y Banachi ruumid. Lineaarset sürjektsiooni $T : X \to Y$ nimetatakse *isomeetriliseks isomorfismiks*, kui

$$\|Tx\| = \|x\| \tag{8}$$

iga $x \in X$ korral.

Märkusena lisame, et isomeetriline isomorfism on bijektsioon. Tõepoolest, kasutades kujutuse T lineaarsust saame, et kui $x, y \in X$ korral $Tx = Ty$, siis $\|x - y\| = \|T(x - y)\| = \|Tx - Ty\| = 0$. Seega on isomeetriline isomorfism lisaks eeldatavale sürjektiivsusele ka injektsioon ning seega bijektsioon. Teisisõnu, isomeetriline isomorfism on lineaarne bijektiivne kujutus, mis säilitab vastavuses olevate elementide normid.

Olgu $X_1, X_2, ...$ Banachi ruumid. Teises osas defineeritud jadaruumi $\ell_\infty(X_n)$ elementideks on jadad (x_n), kus x_n on Banachi ruumi X_n element. Kuna Banachi ruumi X_n kaasruum X_n^* on samuti Banchi ruum, siis, vastavalt kolmandas osas tõestatule, on $\ell_\infty(X_n^*)$ Banachi ruum. Osutub, et Banachi ruumi $\ell_1(X_n)$ kaasruum $\ell_1(X_n)^*$ on kirjeldatav ruumina $\ell_\infty(X_n^*)$ loomuliku isomeetrilise isomorfismi kaudu.

Teoreem 4. *Kujutus* $T : \ell_\infty(X_n^*) \to \ell_1(X_n)^*$, *kus*

$$(T(f_n))((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n), \quad (f_n) \in \ell_\infty(X_n^*), \quad (x_n) \in \ell_1(X_n), \tag{9}$$

on isomeetriline isomorfism ruumide $\ell_\infty(X_n^*)$ *ja* $\ell_1(X_n)^*$ *vahel.*

Tõestus. Näitame kõigepealt, et kujutus T omab mõtet. Kuna $(f_n) \in \ell_\infty(X_n^*)$, siis $\|(f_n)\|_\infty = \sup_n \|f_n\| < \infty$. Kuna $(x_n) \in \ell_1(X_n)$, siis $\|(x_n)\|_1 = \sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$. Seega saame, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|\|x_n\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \|f_n\|_\infty \|(x_n)\|_1,$$

mistõttu $\sum_{n=1}^\infty |f_n(x_n)| < \infty$ ning kujutust T defineeriv rida koondub. Ühtlasi kehtib hinnang

$$|(T(f_n))((x_n))| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n) \right| \leqslant \|(f_n)\|_\infty \|(x_n)\|_1. \tag{10}$$

Fikseerime vabalt $(f_n) \in \ell_\infty(X_n^*)$. Võrdusega (9) on defineeritud funktsionaal

$$T(f_n) : \ell_1(X_n) \to \mathbb{K}.$$

Võrdusest (9) on selge, et kujutus $T(f_n)$ on lineaarne funktsionaal. Tõepoolest, $(x_n), (y_n) \in \ell_1(X_n)$ korral

$$\begin{aligned}(T(f_n))((x_n) + (y_n)) = (T(f_n))((x_n + y_n)) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n + y_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y_n) = (T(f_n))((x_n)) + (T(f_n))((y_n)).\end{aligned}$$

Ning $\lambda \in \mathbb{K}$ korral

$$\begin{aligned}(T(f_n))(\lambda(x_n)) = (T(f_n))((\lambda x_n)) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda x_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n) \\ &= \lambda(T(f_n))((x_n)).\end{aligned}$$

Seega on $T(f_n)$ lineaarne.

Tingimus (10) tagab, et $T(f_n) \in \ell_1(X_n)^*$ ja

$$\|T(f_n)\| \leqslant \|(f_n)\|_\infty, \quad (f_n) \in \ell_\infty(X_n^*). \tag{11}$$

Niisiis, võrdusega (9) on meil defineeritud kujutus

$$T : \ell_\infty(X_n^*) \to \ell_1(X_n)^*.$$

Näitame, et kujutus T on lineaarne, sürjektiivne ning, et kehtib võrdus (8).

Kujutuse T lineaarsuse saame kontrollida vahetult. Kui $(f_n), (g_n) \in \ell_\infty(X_n^*)$, siis vastavalt sellele, et f_n ja g_n on vektorruumi X_n^* elemendid iga naturaalarvulise n korral, saame

$$\begin{aligned}(T((f_n) + (g_n)))((x_n)) = (T(f_n + g_n))((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n + g_n)(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x_n) = (T(f_n))((x_n)) + (T(g_n))((x_n)) \\ = (T(f_n) + T(g_n))((x_n)), \quad (x_n) \in \ell_1(X_n).\end{aligned}$$

Olgu λ korpuse $\mathbb{K}$ suvaline element. Siis

$$\begin{aligned}(T(\lambda(f_n)))((x_n)) = (T(\lambda f_n))((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda f_n)(x_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n) \\ = (\lambda T(f_n))((x_n)), \quad (x_n) \in \ell_1(X_n).\end{aligned}$$

Seega on T lineaarne kujutus.

Näitame, et T on sürjektiivne. Olgu $g \in \ell_1(X_n)^*$.

Fikseerime $n \in \mathbb{N}$. Olgu $z \in X_n$ suvaline element. Defineerime funktsionaali

$$f_n : X_n \to \mathbb{K}$$

võrdusega

$$f_n(z) = g(\hat{z}_n), \quad z \in X_n,$$

kus

$$\hat{z}_n = (0_1, ..., 0_{n-1}, z, 0_{n+1}, ...) \in \ell_1(X_n).$$

Näitame, et f_n on lineaarne. Olgu $y, z \in X_n$. Funktsionaal g on lineaarne ning $\ell_1(X_n)$ on vektorruum. Sellest järeldame, et

$$\begin{aligned} f_n(y+z) = g((0_1, ..., 0_{n-1}, y+z, 0_{n+1}, ...)) &= g((0_1, ..., 0_{n-1}, y, 0_{n+1}, ...)) \\ + g((0_1, ..., 0_{n-1}, z, 0_{n+1}, ...)) &= f_n(y) + f_n(z). \end{aligned}$$

Olgu $\lambda \in \mathbb{K}$ suvaline. Siis

$$\begin{aligned} f_n(\lambda z) &= g((0_1, ..., 0_{n-1}, \lambda z, 0_{n+1}, ...)) = g(\lambda(0_1, ..., 0_{n-1}, z, 0_{n+1}, ...)) \\ &= \lambda g((0_1, ..., 0_{n-1}, z, 0_{n+1}, ...)) = \lambda f_n(z). \end{aligned}$$

Järelikult on funktsionaal f_n lineaarne. Funktsionaal f_n on ka tõkestatud:

$$|f_n(z)| = |g(\hat{z}_n)| \leqslant \|g\| \|\hat{z}_n\|_1 = \|g\| \|z\|, \quad z \in X_n.$$

Seega $f_n \in X_n^*$ ja $\|f_n\| \leqslant \|g\|$. Viimane võrratus kehtib iga naturaalarvu n korral. Seetõttu $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| \leqslant \|g\|$. Oleme saanud, et $(f_n) \in \ell_\infty(X_n^*)$ ja

$$\|(f_n)\|_\infty \leqslant \|g\|.$$

Tõestame, et $T(f_n) = g$, see tähendab, et $(T(f_n))((x_n)) = g((x_n))$ iga $(x_n) \in \ell_1(X_n)$ korral. Tähistame $(x_n) \in \ell_1(X_n)$ korral

$$\hat{x}_n = (0_1, ..., 0_{n-1}, x_n, 0_{n+1}, ...).$$

Siis $\hat{x}_n \in \ell_1(X_n)$. Näitame, et

$$(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n$$

ruumis $\ell_1(X_n)$. Selleks paneme tähele, et

$$\left\| (x_n) - \sum_{n=1}^{k} \hat{x}_n \right\|_1 = \|(0_1, ..., 0_k, x_{k+1}, x_{k+2}, ...)\|_1 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \|x_n\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0,$$

sest $(x_n) \in \ell_1(X_n)$.

Kujutise T definitsiooni põhjal kehtib ühelt poolt võrdus (9):

$$(T(f_n))((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n).$$

Teisalt, arvestades funktsionaali g lineaarsust ja pidevust, saame, et

$$g((x_n)) = g\left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g(\hat{x}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n).$$

Järelikult $(T(f_n))((x_n)) = g((x_n))$ ja seega on T sürjektiivne.

Kuna $\|(f_n)\|_\infty \leqslant \|g\|$ ja $T(f_n) = g$, siis

$$\|(f_n)\|_\infty \leqslant \|T(f_n)\|, \quad (f_n) \in \ell_\infty(X_n).$$

Arvestades võrratust (11), saame, et

$$\|T(f_n)\| = \|(f_n)\|_\infty, \quad (f_n) \in \ell_\infty(X_n).$$

Oleme näidanud, et kujutus T on isomeetriline isomorfism. $\square$

Analoogiliselt saab tõestada järgmised teoreemid.

Teoreem 5. *Kujutus* $T : \ell_1(X_n^*) \to c_0(X_n)^*$, *kus*

$$(T(f_n))((x_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} f_n(x_n), \quad (f_n) \in \ell_1(X_n^*), \quad (x_n) \in c_0(X_n),$$

on isomeetriline isomorfism ruumide $\ell_1(X_n^*)$ *ja* $c_0(X_n)^*$ *vahel.*

Teoreem 6. *Olgu* $1 < q < \infty$ *ning* $p = q/(q-1)$. *Kujutus* $T : \ell_q(X_n^*) \to \ell_p(X_n)^*$, *kus*

$$(T(f_n))((x_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} f_n(x_n), \quad (f_n) \in \ell_q(X_n^*), \quad (x_n) \in \ell_p(X_n),$$

on isomeetriline isomorfism ruumide $\ell_q(X_n^*)$ *ja* $\ell_p(X_n)^*$ *vahel.*

Teoreemide 4–6 sisu märgitakse lühidalt järgmiste võrdustega:

$$\ell_\infty(X_n^*) = \ell_1(X_n)^*, \quad \ell_1(X_n^*) = c_0(X_n)^*, \quad \ell_q(X_n^*) = \ell_p(X_n)^*. \tag{12}$$

Antud võrdused tähendavad, et ruumid on omavahel samastatavad teatud tüüpi loomuliku isomeetrilise isomorfismi kaudu. Näiteks teoreemis 4 on võrdus antud tingimusega (9), mis samastab omavahel funktsionaali $g = T(f_n) \in \ell_1(X_n)^*$ ja jada $(f_n) \in \ell_\infty(X_n^*)$.

Märgime, et teoreemide 4–6 näol on tegemist folkloorsete tulemustega, mis on sõnastatud näiteks raamatutes [2, lk. 35–36], [4, lk. 56], [5, lk. 191], [7, lk. 43–44]. Teoreemide 4–6 tõestusi ei õnnestunud aga kirjandusest leida.

5 Jadaruumide ℓ_p ja c_0 kaasruumide kirjeldused

Käesolevas osas sõnastame tulemused, mis kirjeldavad ruumide $\ell_p = \ell_p(\mathbb{K}), 1 \leqslant p < \infty$, ja $c_0 = c_0(\mathbb{K})$ kaasruume. Näitame, et need tulemused järelduvad vahetult teoreemidest 4–6.

Sõnastame funktsionaalanalüüsi kursusest tuntud teoreemid jadaruumide $\ell_p = \ell_p(\mathbb{K}), 1 \leqslant p < \infty$, ning $c_0 = c_0(\mathbb{K})$ kaasruumide jaoks. Need teoreemid on ära toodud näiteks õpikus [6, lk. 161–163].

Teoreem 7. *Kujutus* $U : \ell_\infty \to \ell_1^*$, *kus*

$$(U(a_n))((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad (a_n) \in \ell_\infty, \quad (x_n) \in \ell_1, \tag{13}$$

on isomeetriline isomorfism ruumide ℓ_∞ *ja* ℓ_1^* *vahel.*

Märkusena lisame, et õpikus [6] on ruum ℓ_∞ tähistatud ruumina m.

Teoreem 8. *Kujutus* $U : \ell_1 \to c_0^*$, *kus*

$$(U(a_n))((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad (a_n) \in \ell_1, \quad (x_n) \in c_0, \tag{14}$$

on isomeetriline isomorfism ruumide ℓ_1 *ja* c_0^* *vahel.*

Teoreem 9. *Olgu* $1 < q < \infty$. *Olgu* $p = q/(q-1)$. *Kujutus* $U : \ell_q \to \ell_p^*$, *kus*

$$(U(a_n))((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad (a_n) \in \ell_q, \quad (x_n) \in \ell_p, \tag{15}$$

on isomeetriline isomorfism ruumide ℓ_q *ja* ℓ_p^* *vahel.*

Näitame, et need teoreemid järelduvad hõlpsasti neljanda osa teoreemidest.

Teame, et korpus $\mathbb{K}$ on Banachi ruum, milles arvu x norm on defineeritud kui tema moodul, see tähendab

$$\|x\| = |x|.$$

Järgneva lausega kirjeldame ruumi $\mathbb{K}$ kaasruumi $\mathbb{K}^*$.

Lause 6. *Kujutus* $s : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^*$, *kus*

$$(sa)(x) = ax, \quad a \in \mathbb{K}, \quad x \in \mathbb{K}, \tag{16}$$

on isomeetriline isomorfism ruumide $\mathbb{K}$ ja $\mathbb{K}^*$ vahel.

Tõestus. Olgu $a \in \mathbb{K}$. Vaatleme funktsionaali $sa : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Näitame, et sa on lineaarne. Olgu $x, y \in \mathbb{K}$. Siis

$$(sa)(x + y) = a(x + y) = ax + ay = (sa)(x) + (sa)(y).$$

Olgu $\lambda \in \mathbb{K}$. Siis

$$(sa)(\lambda x) = a\lambda x = \lambda ax = \lambda(sa)(x).$$

Oleme näidanud, et kujutus sa on lineaarne. Kuna

$$|(sa)(x)| = |ax| = |a||x|, \quad x \in \mathbb{K},$$

siis $sa \in \mathbb{K}^*$. Seega defineerib võrdus (16) kujutuse

$$s : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^*.$$

Olgu $g \in \mathbb{K}^*$. Leiame $a \in \mathbb{K}$ nii, et $g = sa$, see tähendab

$$g(x) = (sa)(x) = ax, \quad x \in \mathbb{K}.$$

Kui nüüd $a := g(1)$, siis

$$g(x) = g(1)x = ax, \quad x \in \mathbb{K}.$$

Seega leidub iga $g \in \mathbb{K}^*$ korral $a = g(1) \in \mathbb{K}$ nii, et $g = sa \in \mathbb{K}^*$, mistõttu kujutus s on sürjektsioon.

Kujutuse s lineaarsus on vahetult kontrollitav. Kui $a, b \in \mathbb{K}$ on suvalised, Siis

$$(s(a + b))(x) = (a + b)x = ax + bx = (sa)(x) + (sb)(x).$$

Kui $\lambda \in \mathbb{K}$ on suvaline, siis

$$(s(\lambda a))(x) = (\lambda a)x = \lambda ax = (\lambda s(a))(x).$$

Seega on s lineaarne kujutus.

Vastavalt funktsionaali normi definitsioonile (7) kehtib suvalise $a \in \mathbb{K}$ korral:

$$\|sa\| = \sup_{|x|\leqslant 1} |(sa)(x)| = \sup_{|x|\leqslant 1} |ax| = |a|.$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et s on isomeetriline isomorfism. $\square$

Teoreemi 7 tõestus. Kuna $\mathbb{K}$ on Banachi ruum, siis teoreemi 4 võrdusega (9) on defineeritud isomeetriline isomorfism $T : \ell_\infty(\mathbb{K}^*) \to \ell_1(\mathbb{K})^*$.

Defineerime kujutuse $S : \ell_\infty(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^* \times \ldots$ võrdusega $S(a_n) = (sa_n)$, kus s on lause 6 võrdusega (16) defineeritud isomeetriline isomorfism. Näitame, et kujutuse S väärtused kuuluvad ruumi $\ell_\infty(\mathbb{K}^*)$ ning, et $S : \ell_\infty(\mathbb{K}) \to \ell_\infty(\mathbb{K}^*)$ on isomeetriline isomorfism.

Olgu $(a_n) \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ suvaline. Kuna s on isomeetria, siis

$$\|S(a_n)\|_\infty = \|(sa_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|sa_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \|(a_n)\|_\infty < \infty.$$

Järelikult $S(a_n) \in \ell_\infty(\mathbb{K}^*)$. Ühtlasi näeme, et kujutus S on isomeetria.

Näitame kujutuse S lineaarsust. Olgu antud jadad $(a_n), (b_n) \in \ell_\infty(\mathbb{K})$. Vastavalt isomeetrilise isomorfismi s lineaarsusele

$$\begin{aligned} S((a_n) + (b_n)) &= S(a_n + b_n) = (s(a_n + b_n)) = (sa_n + sb_n) = (sa_n) + (sb_n) \\ &= S(a_n) + S(b_n). \end{aligned}$$

Kui $\lambda \in \mathbb{K}$ on suvaline, siis

$$S(\lambda(a_n)) = S(\lambda a_n) = (s(\lambda a_n)) = (\lambda s a_n) = \lambda(sa_n) = \lambda S(a_n).$$

Seega on ka kujutus S lineaarne.

Olgu $(g_n) \in \ell_\infty(\mathbb{K}^*)$ suvaline. Kuna isomeetriline isomorfism s on sürjektsioon, siis leidub iga naturaalarvulise n korral a_n nii, et $g_n = sa_n$. Kuna $|a_n| = \|sa_n\|$, siis

$$\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|sa_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\| = \|(g_n)\|_\infty < \infty.$$

Järelikult $(a_n) \in \ell_\infty(\mathbb{K})$. Jadade (g_n) ja (sa_n) võrdumisest saame

$$S(a_n) = (sa_n) = (g_n).$$

Seega leidub iga jada $(g_n) \in \ell_\infty(\mathbb{K}^*)$ korral jada $(a_n) \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ nii, et $S(a_n) = (g_n)$, niisiis on kujutus S sürjektsioon.

Oleme saanud, et kujutus S on isomeetriline isomorfism.

On selge, et kahe isomeetrilise isomorfismi kompositsioon on ka ise isomeetriline isomorfism. Defineerime kujutuse U isomeetriliste isomorfismide T ja S kompositsioonina, see tähendab

$$U = T \circ S.$$

Niiviisi oleme saanud isomeetrilise isomorfismi $U : \ell_\infty(\mathbb{K}) \to \ell_1(\mathbb{K})^*$, mis iga $(a_n) \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ ja $(x_n) \in \ell_1(\mathbb{K})$ korral rahuldab tingimust (13):

$$\begin{aligned}(U(a_n))((x_n)) &= ((T \circ S)(a_n))((x_n)) = (T(S(a_n)))((x_n)) = (T(sa_n))((x_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(sa_n)(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad (a_n) \in \ell_\infty(\mathbb{K}), \quad (x_n) \in \ell_1(\mathbb{K}).\end{aligned}$$

□

Kasutades sarnast arutluskäiku, näeme, et teoreemidest 5 ja 6 järelduvad lause 6 abil vastavalt teoreemid 8 ja 9. Teoreemide 7–9 sisu märgitakse lühidalt järgmiste võrdustega:

$$\ell_1^* = \ell_\infty, \quad c_0^* = \ell_1, \quad \ell_p^* = \ell_q,$$

kusjuures võrdus tähendab loomulikku isomeetrilist isomorfismi vaadeldavate ruumide vahel.

Kirjandus

[1] K. Ain, E. Oja, *On (p,r)-null sequences and their relatives*, Math. Nachr. **288** (2015), 1569–1580.

[2] M. M. Day, *Normed Linear Spaces*, Third edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[3] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 474, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[4] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 8, vol. 451, Springer-Verlag, New York, 2001.

[5] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998.

[6] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[7] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 382, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Tanel Kipper,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Vektorväärtustega jadaruumid“,

mille juhendajad on Eve Oja ja Kati Ain,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **12.05.2016**