Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Randal Annus

Grassmanni algebra ja kommutaatori ternaarsed analoogid

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Viktor Abramov

Tartu 2024

GRASSMANNI ALGEBRA JA KOMMUTAATORI TERNAARSED ANALOOGID

Bakalaureusetöö

Randal Annus

Lühikokkuvõte

Uurime ternaarsete seostega algebrat, mis leiab rakendust Pauli printsiibi ternaarses analoogis. Kutsume antud struktuuri Grassmanni algebra ternaarseks analoogiks. Näitame, et 3 moodustajaga θ^1, θ^2 ja θ^3 erihul on tegemist 29-dimensionaalse vektorruumiga. Tõestame 4-järku monoomide alamruumis kehtivad kommutatsiooni seosed ning anname samaväärse tingimuse elemendi nulliga võrdumiseks. Põhitulemusena tõestame, et rühmal $\mathbb{Z}_3$ põhinev kommutaatori ternaarne üldistus rahuldab Grassmanni algebra ternaarses analoogis Jacobi samasuse ternaarset analoogi.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad: Grassmanni algebra, ternaarne algebra, Lie algebra ternaarne üldistus, Pauli printsiibi ternaarne üldistus.

TERNARY ANALOGUES OF THE GRASSMANN ALGEBRA AND THE COMMUTATOR

Bachelor thesis

Randal Annus

Abstract

We investigate the ternary associative algebra, which finds application in the ternary analogue of Pauli's Principle. We refer to this structure as the ternary analogue of the Grassmann algebra. We demonstrate that with three

generators θ^1, θ^2, and θ^3, we deal with a 29-dimensional vector space. We prove that commutation laws hold in the subspace of 4th-order monomials and provide an equivalent condition for an element being equal to zero. As a main result, we prove that the ternary generalization of the commutator based on the group $\mathbb{Z}_3$ satisfies the ternary analogue of the Jacobi identity in the ternary analogue of the Grassmann algebra.
CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.
Key Words: Grassmann algebra, ternary algebra, ternary extension of Lie algebra, ternary generalization of Pauli's exclusion principle.

Sisukord

Sissejuhatus

Pauli printsiibi järgi ei saa olla kahel identsel fermionil sama kvantolek. Seega on lainefunktsiooni väärtus sama kvantolekuga fermionide korral $\Psi(a, a) = 0$. Kui fermionide kvantolek on superpositsioon kahest kvantolekust $a = \alpha a_1 + \beta a_2$, siis lainefunktsiooni Ψ lineaarsuse ja Pauli printsiibi tõttu $\Psi(a_1, a_2) + \Psi(a_2, a_1) = 0$. Näeme, et Pauli printsiip kehtib juhul, kui laiefunktsioon Ψ on antikommutatiivne. Sellisel juhul kirjeldab kvantolekute käitumist Grassmanni algebra, kus korrutamine on antikommutatiivne.

Kerner pakkus välja [6, 7, 8] Pauli printsiibi üldistuse ternaarsele juhule: kolmel kvargil ei saa olla sama kvantolek. Sellisel juhul on kolme identse kvantoleku lainefunktsioon $\Psi(a, a, a) = 0$. Piisav tingimus ternaarse Pauli printsiibi kehtimiseks on seega

$$\Psi(a_i, a_j, a_k) + \Psi(a_j, a_k, a_i) + \Psi(a_k, a_i, a_j) = 0,$$

kus $a = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$ on kolme kvantoleku superpositsioon ning $i, j, k = 1, 2, 3$. Ternaarset Pauli printsiipi kirjeldavas algebras kehtivad algebra moodustajate $\theta^1, \ldots, \theta^n$ vahel seosed

$$\theta^i\theta^j\theta^k + \theta^j\theta^k\theta^i + \theta^k\theta^i\theta^j = 0, \tag{1}$$

kus $i, j, k = 1, \ldots, n$.

Abramov, Groote ja Lätt uurisid [1] algebrat $\mathcal{R}$, kus lisaks seostele (1) kehtib ka seos

$$\theta^1\theta^1 + \cdots + \theta^n\theta^n = 0,$$

ning näitasid, et juhul $n = 3$ tekib kolmandat järku monoomide poolt moodustatud alamruumis $\mathcal{R}^3$ rühma $SO(3)$ kahekordne taandumatu esitus [5].

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on uurida Grassmanni algebra ternaarse analoogi $\mathcal{R}$ algebralisi omadusi. Esimeses peatükis anname teoreetilise aluse tensorkorrutise ning tensoralgebra konstruktsiooniks. Toome välja ka tensoralgebra olulisemad omadused, mida kasutame edasises töös.

Teises peatükis konstrueerime Grassmanni algebra tensoralgebra faktoralgebrana ning tõestame selle omadusi, ka korrutamise assotsiatiivsus ja antikommutatiivsus. Toome välja ka olulise tulemuse, et n-dimensionaalsest vektorruumist moodustatud Grassmanni algebra dimensioon on 2^n.

Kolmandas peatükis anname Grassmanni algebra ternaarse analoogi $\mathcal{R}$ formaalse definitsiooni. Anname meetodi (koos tõestusega) Grassmanni algebra ternaarse analoogi dimensiooni leidmiseks kasutades sümbolarvutustarkvara *Mathematica*. Leiame, et Grassmanni algebra ternaarse analoogi dimensioon on 29. Veel uurime neljandat järku monoomide alamruumi $\mathcal{R}^4$, leiame selle baasi, tõestame nelja elemendi kommutatsiooniseosed ja anname samaväärse tingimuse elemendi nulliga võrdumiseks.

Töö neljandas peatükis näitame, et Grassmanni algebra ternaarsel analoogil on loomulikul viisil võimalik üldistada algebra kommutaatorit, defineerides rühmal $\mathbb{Z}_3$ põhineva ternaarse q-kommutaatori

$$[\cdot,\cdot,\cdot] : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}, \quad [x,y,z] := xyz + q^2 yzx + qzxy,$$

kus $q = e^{\frac{2\pi}{3} i}$. Tähistame elemendi $x \in \mathcal{R}$ mittekonstantse osa $\sigma(x) : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$. Tõestame käesoleva töö põhitulemuse, milleks on ternaarse kommutaatori Jacobi samasuse analoog.

Teoreem. *Olgu $x, y, u, v, w \in \mathcal{R}$, kehtib samasus*

$$[x,y,[u,v,w]] = [[x,y,\sigma(u)],v,w] + [u,[x,y,\sigma(v)],w] + [u,v,[x,y,\sigma(w)]]. \quad (2)$$

Lie algebrate teooriat on üldistatud n-Lie algebrate teooriaks, kus binaarse Lie sulu (näiteks assotsiatiivse algebra kommutaator) asemel on n-aarne tehe. 3-Lie algebra on vektorruum, millel on antud multilineaarne ternaarne tehe $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]$, mis rahuldab

Filippov-Jacobi samasust

$$[\![x, y, [\![u, v, w]\!]]\!] = [\![[\![x, y, u]\!], v, w]\!] + [\![u, [\![x, y, v]\!], w]\!] + [\![u, v, [\![x, y, w]\!]]\!]. \tag{3}$$

Näeme, et ternaarse q-kommutaatori jacobi samasuse analoog (2) on väga sarnane Filippov-Jacobi samasusele (3).

1 Tensoralgebra

Selles peatükis anname ülevaate vektorruumide tensorkorrutisest ning tensoralgebrast, mida kasutame järgmistes peatükkides Grassmanni algebra ja Grassmanni algebra ternaarse analoogi konstrueerimisel.

1.1 Tensorkorrutis

Käesolevas peatükis eeldame, et kõik vektorruumid on lõplikumõõtmelised. Olgu vektorruumid V_1 ja V_2 üle korpuse $\mathbb{K}$. Vaatame vektorruumi V üle korpuse $\mathbb{K}$, mis on moodustatud kõikvõimalikest korteežide $(x, y) \in V_1 \times V_2$ formaalsetest lineaarkombinatsioonidest. [2]

Olgu

$$\begin{aligned} U = \operatorname{span}\{&(x + \alpha x', y) - (x, y) - \alpha(x', y), \\ &(x, y + \alpha y') - (x, y) - \alpha(x, y') \ : \ x, x' \in V_1; y, y' \in V_2; \alpha \in \mathbb{K}\} \subseteq V. \end{aligned}$$

Tähistame kujutuse

$$\phi : V_1 \times V_2 \to {}^{V}\!/_{U}, \ (x, y) \mapsto [(x, y)],$$

kus $[(x, y)] \in {}^{V}\!/_{U}$ tähistab elemendi $(x, y) \in V$ ekvivalentssi.

Definitsioon 1.1 [2]. *Faktorruumi ${}^{V}\!/_{U}$ kutsutakse vektorruumide V_1 ja V_2 tensorkorrutiseks ning tähistatakse*

$$V_1 \otimes V_2.$$

Vektorite x ja y tensorkorrutiseks nimetatakse nende kujutist kujutuse ϕ suhtes ning tähistatakse

$$x \otimes y := \phi(x, y) \in V_1 \otimes V_2.$$

Tensorkorrutise definitsioonist on selge, et suvaliste $x, x' \in V_1; y, y' \in V_2$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ korral

$$(x + \alpha x') \otimes y = x \otimes y + \alpha(x' \otimes y) \quad \text{ja} \quad x \otimes (y + \alpha y') = x \otimes y + \alpha(x \otimes y').$$

Lause 1.2 [9]. *Olgu vektorruumide V_1 ja V_2 baasid B_1 ja B_2 vastavalt. Tensorkorrutisel $V_1 \otimes V_2$ on baas*

$$\{e \otimes f : e \in B_1, f \in B_2\}.$$

Järeldus 1.3. *Vektorruumide V_1 ja V_2 korral kehtib*

$$\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim V_1 \dim V_2.$$

Lause 1.4. *Olgu vektorruumid V_1, V_2, V_3 üle korpuse $\mathbb{K}$. Leidub isomorfism*

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

nii, et

$$(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$$

iga $x \in V_1, y \in V_2$ ja $z \in V_3$ korral.

Tõestus. Tähistame vektorruumide V_1, V_2 ja V_3 baasivektorid vastavalt e_i, f_j ja g_k, kus i, j ja k kuuluvad lõplikesse indeksite hulkadesse I, J ja K. Olgu lineaarkujutus $\psi : (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ üheselt määratud baasivektorite kujutistega:

$$\psi((e_i \otimes f_j) \otimes g_k) = e_i \otimes (f_j \otimes g_k), \quad i \in I, j \in J, k \in K.$$

Näitame ψ sürjektiivsust. Olgu $x \otimes (y \otimes z) \in V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$. Tähistame vektorite

x, y, z koordinaadid x_i, y_j, z_k, kus $i \in I, j \in J$ ja $k \in K$. Leiame

$$\begin{aligned}
\psi((x \otimes y) \otimes z) = \psi\left(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_i y_j z_k (e_i \otimes f_j) \otimes g_k\right) = \\
= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_i y_j z_k \psi((e_i \otimes f_j) \otimes g_k) = \\
= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_i y_j z_k (e_i \otimes (f_j \otimes g_k)) = x \otimes (y \otimes z).
\end{aligned}$$

Näitame ψ injektiivsust. Olgu lisaks elemendile $x \otimes (y \otimes z)$ veel $(a \otimes b) \otimes c \in (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ selline, et

$$\psi((x \otimes y) \otimes z) = \psi((a \otimes b) \otimes c).$$

Tähistame vektorite a, b ja c koordinaadid a_i, b_j, c_k. Lineaarkujutuse ψ definitsioonist järeldub, et

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_i y_j z_k (e_i \otimes (f_j \otimes g_k)) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} a_i b_j c_k (e_i \otimes (f_j \otimes g_k)).$$

Lause 1.2 tõttu $x_i y_j z_k = a_i b_j c_k$ iga $i \in I, j \in J$ ja $k \in K$ korral. Järelikult

$$\begin{aligned}
(x \otimes y) \otimes z &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_i y_j z_k ((e_i \otimes f_j) \otimes g_k) \\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} a_i b_j c_k ((e_i \otimes f_j) \otimes g_k) = (a \otimes b) \otimes c.
\end{aligned}$$

■

Lause 1.4 väidab, et vektorruumide tensorkorrutis on assotsiatiivne isomorfismi täpsuseni. Edaspidi samastame

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong: V_1 \otimes V_2 \otimes V_3.$$

Sarnaselt samastame lõpliku arvu vektorruumide tensorkorrutised.

Lause 1.5. *Olgu vektorruum V üle korpuse $\mathbb{K}$. Järgmised ruumid on isomorfsed:*

$$\mathbb{K} \otimes V \cong V \cong V \otimes \mathbb{K}.$$

Isomorfismideks sobivad kujutused

$$\mathbb{K} \otimes V \to V, \lambda \otimes v \mapsto \lambda v \quad \textit{ja} \quad V \otimes \mathbb{K} \to V, v \otimes \lambda \mapsto \lambda v.$$

Tõestus. Näitame, et

$$\psi : \mathbb{K} \otimes V \to V, \lambda \otimes v \mapsto \lambda v$$

on vektorruumide isomorfism. Juht $V \otimes \mathbb{K} \cong V$ on analoogiline.

Olgu $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ja $\lambda \otimes x, \mu \otimes y \in \mathbb{K} \otimes V$. Tensorkorrutise definitsiooni 1.1 järgi

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha(\lambda \otimes x) + \beta(\mu \otimes y)) &= \psi(\alpha\lambda(1 \otimes x) + \beta\mu(1 \otimes y)) = \\
&= \psi(1 \otimes \alpha\lambda x + 1 \otimes \beta\mu y) = \\
&= \psi(1 \otimes (\alpha\lambda x + \beta\mu y)) = \\
&= \alpha\lambda x + \beta\mu y = \\
&= \alpha\psi(\lambda \otimes x) + \beta\psi(\mu \otimes y),
\end{aligned}$$

kus 1 tähistab korpuse $\mathbb{K}$ ühikelementi. Seega on ψ lineaarkujutus.

Sürjektiivsus on ilmne, $v \in V$ originaaliks sobib $1 \otimes v \in \mathbb{K} \otimes V$. Injekttiivsuse näitamiseks olgu $\lambda \otimes x, \mu \otimes y \in \mathbb{K} \otimes V$ sellised, et $\psi(\lambda \otimes x) = \psi(\mu \otimes y)$. Järelikult $\lambda x = \mu y$ ning $1 \otimes \lambda x = 1 \otimes \mu y$. Tensorkorrutise definitsiooni 1.1 järgi $\lambda \otimes x = \mu \otimes y$.

∎

1.2 Tensoralgebra

Käesolevas alapeatükis anname vektorruumide tensorkorrutisele assotsiatiivse algebra struktuuri, mida kasutame järgmistes peatükkides Grassmanni algebra ja Grassmanni algebra ternaarse analoogi konstrueerimisel.

Definitsioon 1.6 [2]. *Hulka A nimetatakse algebraks (üle korpuse $\mathbb{K}$), kui*

1. *$(A, +, \alpha\cdot)$ on vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\alpha\cdot$ tähistab korrutamist suvalise skalaariga $\alpha \in \mathbb{K}$, ja*
2. *on antud bilineaarne kujutus $\cdot : A \times A \to A$, st iga $x, y, z \in A$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ korral*

$$(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z) \quad \textit{ja} \quad x \cdot (\alpha y + \beta z) = \alpha(x \cdot y) + \beta(x \cdot z).$$

Kujutust $\cdot$ nimetatakse algebra korrutamiseks. Algebrat nimetatakse assotsiatiivseks, kui tema korrutamine $\cdot$ on assotsiatiivne. Algebra on ühikuga algebra, kui korrutamisel $\cdot$ leidub ühikelement.

Definitsioon 1.7 [2]. *Algebra A (kahepoolseks) ideaaliks nimetatakse hulka $I \subset A$, kui*

1. *hulk I on algebra A alamruum ja*
2. *iga $a \in A, x \in I$ korral $ax, xa \in I$.*

Iga hulga $S \subseteq A$ korral tähistame minimaalset hulka S sisaldavat ideaali $\langle S \rangle$, st

$$\langle S \rangle := \bigcap_i I_i, I_i \text{ on ideaal ning } S \subseteq I_i.$$

Faktorhulgal ${}^{A}/_{I}$ saame defineerida loomulikul viisil algebra tehted. Kui algebra A on assotsiatiivne, siis on ka faktoralgebra ${}^{A}/_{I}$ assotsiatiivne. Kui algebra A on ühikuga 1, siis ka faktoralgebra ${}^{A}/{}_{I}$ on ühikuga ning ühikuks on $[1] \in {}^{A}/{}_{I}$, mida tähistame samuti sümboliga 1. [2]

Nüüd konstrueerime tensoralgebra. Olgu vektorruum V üle korpuse $\mathbb{K}$. Tähistame iga $m \in \mathbb{N}$ korral

$$T^m V := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{m \text{ korda}}$$

ning

$$T^0 V := \mathbb{K},$$

kus vaatame korpust $\mathbb{K}$ vektorruumina üle iseenda.

Vaatame iga $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral kujutust

$$\psi_{ij} : T^i V \otimes T^j V \to T^{i+j} V. \tag{4}$$

Kui $i, j > 0$, siis olgu ψ_{ij} lauses 1.4 ja sellele järgnevas arutelus defineeritud isomorfism. Kui $i = 0$ või $j = 0$, siis olgu ψ_{ij} lauses 1.5 defineeritud isomorfism.

Definitsioon 1.8 [2]. *Otsesummat*

$$TV := \bigoplus_{m=0}^{\infty} T^m V$$

nimetatakse tensoralgebraks koos korrutamisega

$$\otimes : TV \times TV \to TV, \left(\sum_i x_i, \sum_j y_j \right) \mapsto \sum_i \sum_j \psi_{ij}(x_i \otimes y_j),$$

kus $x_i \in T^i V$ *ja* $y_j \in T^j V$. *Korrutamist* $\otimes$ *nimetatakse samuti tensorkorrutiseks.*

Edaspidi samastame ruumid $T^m V, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ isomorfsete ruumi TV alamruumidega.

Lause 1.9. *Tensoralgebra on assotsiatiivne ühikuga algebra.*

Tõestus. On selge, et tensoralgebra TV on vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$.

Näitame tensoralgebra korrutamise $\otimes$ bilineaarsust. Olgu $x, y, z \in TV$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, siis

$$x = \sum_i x_i, \; y = \sum_j y_j \quad \text{ja} \quad z = \sum_k z_k$$

mingite $x_i \in T^i V, y_j \in T^j V$ ja $z_k \in T^k V$ korral. Defineerime $s_i \coloneqq \alpha x_i + \beta y_i \in T^i V$, kui x_i ja y_i on mõlemad defineeritud. Kui ainult x_i (y_i) on defineeritud, siis tähistame $s_i \coloneqq \alpha x_i$ $(s_i \coloneqq \beta y_i) \in T^i V$. Kasutades tensorkorrutise definitsiooni 1.8 ja kujutuse ψ_{ij} lineaarsust (4), arvutame

$$\begin{aligned}
(\alpha x + \beta y) \otimes z &= \left(\alpha \sum_i x_i + \beta \sum_j y_j \right) \otimes \sum_k z_k = \\
&= \left(\sum_i \alpha x_i + \sum_j \beta y_j \right) \otimes \sum_k z_k = \\
&= \left(\sum_m s_m \right) \otimes \left(\sum_k z_k \right) = \\
&= \sum_m \sum_k \psi_{mk}(s_m \otimes z_k) = \\
&= \sum_i \sum_k \alpha \psi_{ik}(x_i \otimes z_k) + \sum_j \sum_k \beta \psi_{jk}(y_j \otimes z_k) = \\
&= \alpha \sum_i \sum_k \psi_{ik}(x_i \otimes z_k) + \beta \sum_j \sum_k \psi_{jk}(y_j \otimes z_k) = \\
&= \alpha(x \otimes z) + \beta(y \otimes z).
\end{aligned}$$

Analoogiliselt näitame lineaarsust teise argumendi suhtes.

Algebra korrutamise $\otimes$ assotsiatiivsus järeldub asjaolust, et

$$\psi_{i+j,k}(\psi_{ij}(x_i \otimes y_j) \otimes z_k) = \psi_{i,j+k}(x_i \otimes \psi_{jk}(y_j \otimes z_k)) \in T^{i+j+k} W$$

iga $i, j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja $x_i \in T^i V, y_j \in T^j V, z_k \in T^k V$ korral.

Tensoralgebra ühikelemendiks on korpuse $\mathbb{K}$ ühikelement $1 \in T^0V = \mathbb{K}$, sest

$$\psi_{0,i}(1 \otimes x_i) = \psi_{i,0}(x_i \otimes 1) = x_i$$

iga $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja $x_i \in T^iV$ korral.

$\blacksquare$

2 Grassmanni algebra

Selles peatükis defineerime Grassmanni algebra ning toome välja mõned selle omadused. Peatükis 3 näitame analoogseid omadusi Grassmanni algebra ternaarse analoogi jaoks.

2.1 Grassmanni algebra struktuur

Olgu lõplikumõõtmeline vektorruum $V \neq 0$ üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Tähistame vektorruumi V kaasruumi $W := V^*$.

Grassmanni algebra leiab rakendust pinnateoorias, kus diferentsiaalvormid moodustavad Grassmanni algebra. Diferentsiaalvormid on konstrueeritud pinna puutujaruumi kaasruumi abil. Seetõttu defineerime Grassmanni algebra just kaasruumi W jaoks. Algebra seisukohalt saab Grassmanni algebra defineerida ka vektorruumi V enda jaoks.

Nüüd konstrueerime Grassmanni algebra tensoralgebra TW faktoralgebrana.

Olgu

$$I = \langle x \otimes y + y \otimes x \ : \ x, y \in W \rangle \,. \tag{5}$$

Definitsioon 2.1 [9]. *Faktoralgebrat $\bigwedge W := {}^{TW}/_{I}$ kutsutakse Grassmanni algebraks. Grassmanni algebra korrutustehet tähistatakse sümboliga $\wedge$ ning kutsutakse väliskorrutiseks.*

2.2 Grassmanni algebra omadused

Toome välja mõned Grassmanni algebra olulisemad omadused. Peatükis 3 uurime nende omaduste analooge Grassmanni algebra ternaarse analoogi jaoks.

Lause 2.2. *Väliskorrutis $\wedge$ on assotsiatiivne.*

Tõestus. Väide järeldub tensorkorrutise assotsiatiivsusest. ■

Lause 2.3. *Kui $x, y \in W$, siis väliskorrutis on antikommutatiivne, st*

$$x \wedge y = -y \wedge x.$$

Tõestus. Antikommutatiivsus järeldub vahetult ideaali I konstruktsioonist (5), sest iga $x, y \in W$ korral $x \otimes y + y \otimes x \in I$ ning seega $x \wedge y + y \wedge x = 0$. ■

Järeldus 2.4. *Kui $x \in W$, siis $x \wedge x = 0$.*

Olgu kanooniline kujutus $\pi : TW \to \bigwedge W, x \mapsto [x]$. Tähistame iga $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral

$$\bigwedge^m W := \pi\left(T^m W\right).$$

On selge, et $\bigwedge W = \sum_{m=0}^{\infty} \bigwedge^m W$ ning $\bigwedge^i W \cap \bigwedge^j W = \{0\}$, kui $i \neq j$.

Tuleb välja, et Grassmanni algebra on lõplikumõõtmeline. Tähistame $n := \dim W \in \mathbb{N}$

Lause 2.5 [9]. *Kui $m > n$, siis $\bigwedge^m W = 0$ ning, kui $1 \leq m \leq n$, siis*

$$\dim \bigwedge^m W = \binom{n}{m}.$$

Järeldus 2.6. *Grassmanni algebra $\bigwedge W$ dimensioon on 2^n.*

Tõestus. Kuna Grassmanni algebra $\bigwedge W$ on oma alamruumide $\bigwedge^m W$ sisemine otsesumma ning iga $m > n$ korral $\bigwedge^m W = 0$, siis

$$\dim \bigwedge W = \dim \sum_{m=0}^{\infty} \bigwedge^m W = \dim \sum_{m=0}^{n} \bigwedge^m W = \sum_{m=0}^{n} \dim \bigwedge^m W = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n.$$

■

3 Grassmanni algebra ternaarne analoog

Selles peatükis defineerime Grasmanni algebra ternaarse analoogi. Põhjalikumalt uurime erijuhtu, kus Grassmanni algebra ternaarne analoog on konstrueeritud 3-mõõtmelisest vektorruumist. Leiame selle dimensiooni vektorruumina ning tõestame olulisemad omadused.

3.1 Grassmanni algebra ternaarse analoogi struktuur

Olgu lõplikumõõtmeline vektorruum $V \neq 0$ üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ning tema kaasruum W. Tähistame $n \coloneqq \dim W$ ning fikseerime vektorruumi W baasi $\theta^1, \ldots, \theta^n$.

Vaatame tensoralgebra TW ideaali

$$\begin{aligned} J = \langle &\theta^1 \otimes \theta^1 + \cdots + \theta^n \otimes \theta^n, \\ &\theta^i \otimes \theta^j \otimes \theta^k + \theta^j \otimes \theta^k \otimes \theta^i + \theta^k \otimes \theta^i \otimes \theta^j \ : \ i, j, k = 1, \ldots, n\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

Definitsioon 3.1. *Faktoralgebrat $\mathcal{R} \coloneqq {}^{TW}\!/_{J}$ kutsume Grassmanni algebra ternaarseks analoogiks. Algebra $\mathcal{R}$ korrutamistehet tähistame sümboliga $\cdot$, mille jätame ka tihtipeale kirjutamata.*

Nimetus „Grassmanni algebra ternaarne analoog“ on õigustatud, sest kolme baasivektori tsükliliste permutatsioonide summa on 0 (ternaarne seos). Samas on lause 2.3 järgi Grassmanni algebras suvalise kahe ruumi W vektori tsükliliste permutatsioonide summa 0. Kui Grassmanni algebras on järelduse 2.4 järgi ruumi W baasielementide ruut 0, siis ternaarses analoogis kehtib sarnane omadus: vektorruumi W baasielementide ruutude summa on 0.

Grassmanni algebra on konstruktsiooni (5) järgi invariantne rühmma $GL(n)$ teisenduste suhtes. See tähendab, et Grassmanni algebra definitsioonis kasutatud (5) ideaal J ei sõltu baasi valikust. Grassmanni algebra ternaarse analoogi korral kitsendame seda invariantsust rühmale $O(n)$, st ideaal J ei muutu ortogonaalsete teisenduste korral.

3.2 Grassmanni algebra ternaarse analoogi omadused

Lause 3.2. *Algebra $\mathcal{R}$ korrutamine $\cdot$ on assotsiatiivne.*

Tõestus. Väide järeldub tensorkorrutise assotsiatiivsusest. ∎

Lause 3.3. *Kehtib*

$$\theta^1\theta^1 + \cdots + \theta^n\theta^n = 0$$

ning iga $i, j, k = 1, \ldots, n$ korral

$$\theta^i\theta^j\theta^k + \theta^j\theta^k\theta^i + \theta^k\theta^i\theta^j = 0.$$

Tõestus. Tulemused järelduvad vahetult Grassmanni algebra ternaarse analoogi definitsioonist 3.1. ∎

Järeldus 3.4. *Iga $i = 1, \ldots, n$ korral kehtib*

$$\theta^i\theta^i\theta^i = 0.$$

Oma artiklis [1] uurisid Abramov, Groote ja Lätt erijuhtu $n = \dim W = 3, \mathbb{K} = \mathbb{C}$ ning näitasid, et siis tekib kolmandat järku korrutiste alamruumis (edaspidi tähistame $\mathcal{R}^3$) rühma $SO(3)$ kahekordne taandumatu esitus [5]. Sellel põhjusel vaatame edaspidi ainult juhtu $n = 3, \mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Lause 3.5. *Kui $i, j, k = 1, 2, 3$ on paarikaupa erinevad, siis kehtivad järgmised võrdused*

$$\theta^i\theta^i\theta^j = -\theta^k\theta^k\theta^j, \quad \theta^i\theta^j\theta^i = -\theta^k\theta^j\theta^k \quad \text{ja} \quad \theta^j\theta^i\theta^i = -\theta^j\theta^k\theta^k.$$

Tõestus. Lause 3.3 järgi

$$\theta^i\theta^i\theta^j = (-\theta^j\theta^j - \theta^k\theta^k)\theta^j = -\theta^j\theta^j\theta^j - \theta^k\theta^k\theta^j = -\theta^k\theta^k\theta^j.$$

Võrdust $\theta^j\theta^i\theta^i = -\theta^j\theta^k\theta^k$ näitame analoogiliselt. Arvutame

$$\theta^i\theta^j\theta^i = -\theta^i\theta^i\theta^j - \theta^j\theta^i\theta^i = \theta^k\theta^k\theta^j + \theta^j\theta^k\theta^k = \theta^k\theta^k\theta^j - \theta^k\theta^j\theta^k - \theta^k\theta^k\theta^j = -\theta^k\theta^j\theta^k.$$

■

3.3 Grassmanni algebra dimensioon

Käesolevas alapeatükis anname meetodi Grassmanni algebra $\mathcal{R}$ dimensiooni leidmiseks. Meenutame algebra $\mathcal{R}$ ja ideaali J definitsioone (3.1) ja (6).

Olgu kanooniline kujutus $\pi : TW \to \mathcal{R}, x \mapsto [x]$. Tähistame iga $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral

$$\mathcal{R}^m := \pi\left(T^m W\right).$$

On selge, et $\mathcal{R} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{R}^m$ ning $\mathcal{R}^i \cap \mathcal{R}^j = \{0\}$, kui $i \neq j$.

Tähistame iga $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral

$$J_m := J \cap T^m W. \tag{7}$$

Lemma 3.6. *Iga $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral on alamruum $\mathcal{R}^m$ vektorruumina isomorfne faktorruumiga ${}^{T^m W}/_{J_m}$.*

Tõestus. Kuna $J \subseteq TW$ ja $T^m W \subseteq TW$ on alamruumid, siis ka J_m on ruumi TW alamruum ning leidub faktorruum ${}^{T^m W}/_{J_m}$.

Tähistame selle tõestuse raames iga elemendi $x \in T^m W$ korral tema ekvivalentsiklassi ruumis ${}^{T^m W}/_{J_m}$ sümboliga $[x]_{J_m}$ ning ekvivalentsiklassi ruumis $\mathcal{R}^m$ sümboliga

$[x]_J = \pi(x)$. Olgu

$$\rho : {}^{T^mW}/_{J_m} \to \mathcal{R}^m, [x]_{J_m} \mapsto [x]_J.$$

Kujutus ρ on korrektselt defineeritud, sest $J_m \subseteq J$, ning seega iga $y \in [x]_{J_m}$ korral $[y]_J = [x]_J$. Kujutuse ρ lineaarsus järeldub faktorruumi tehete definitsioonist. Lineaarkujutus ρ on sürjektiivne, sest $[x]_J$ originaaliks on $[x]_{J_m}$. Näitame injektiivsust. Olgu $x, y \in T^mW$ sellised, et $[x]_J = [y]_J$. See tähendab, et $x - y \in J$. Kuna T^mW on kinnine lahutamise suhtes, siis $x - y \in T^mW$ ja J_m definitsiooni (7) järgi $x - y \in J_m$. Seega $[x]_{J_m} = [y]_{J_m}$. ∎

Lause 3.7. *Iga $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral*

$$\dim \mathcal{R}^m = 3^m - \dim J_m.$$

Tõestus. Järelduse 1.3 ja lemma 3.6 järgi

$$\dim \mathcal{R}^m = \dim {}^{T^mW}/_{J_m} = \dim T^mW - \dim J_m = 3^m - \dim J_m.$$

∎

Leiame nüüd $\dim J_m$. Selleks konstrueerime lõpliku hulga $\mathcal{C}_m$ nii, et $\operatorname{span} \mathcal{C}_m = J_m$. Kasutades maatriksarvutust on siis võimalik leida $\dim \operatorname{span} \mathcal{C}_m = \dim J_m$. Tähistame iga $m \geq 2$ korral

$$\mathcal{A}_m := \{\theta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \theta^{i_k} \otimes (\theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2 + \theta^3 \otimes \theta^3) \otimes \theta^{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes \theta^{i_{m-2}} \ : \\ i_1, \ldots, i_{m-2} = 1, 2, 3; 0 \leq k \leq m-2\} \subset T^mW$$

ning iga $m \geq 3$ korral

$$\mathcal{B}_m := \{\theta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \theta^{i_k} \otimes (\theta^i \otimes \theta^j \otimes \theta^k + \theta^j \otimes \theta^k \otimes \theta^i + \theta^k \otimes \theta^i \otimes \theta^j) \otimes \theta^{i_{k+1}} \otimes \ldots \otimes \theta^{i_{m-3}} \ : \\ i, j, k, i_1, \ldots, i_{m-3} = 1, 2, 3; 0 \leq k \leq m-3\} \subset T^mW.$$

Kui $k = 0$ või $k = 2$ ($k = 3$), siis peame silmas, et hulkade $\mathcal{A}_m$ ja $\mathcal{B}_m$ definitsioonides sulgudes olevat elementi on tensorkorrutatud ainult ühelt poolt.

Tähistame $\mathcal{B}_2 \coloneqq \emptyset$. Olgu iga $m \geq 2$ korral

$$\mathcal{C}_m \coloneqq \mathcal{A}_m \cup \mathcal{B}_m.$$

Lause 3.8. *Iga $m \geq 2$ korral*

$$J_m = \operatorname{span} \mathcal{C}_m.$$

Tõestus. Fikseerime $m \geq 2$.

On selge, et $\mathcal{A}_m \subseteq T^m W$. Ideaali J definitsiooni (6) järgi

$$\theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2 + \theta^3 \otimes \theta^3 \in J.$$

Kuna ideaal J on vasakult ja paremalt TW elementidega korrutamise suhtes kinnine, siis $\mathcal{A}_m \subseteq J$ ning $\mathcal{A}_m \subseteq T^m W \cap J = J_m$. Analoogselt ka $\mathcal{B}_m \subseteq J_m$ ning seega $\mathcal{C}_m = \mathcal{A}_m \cup \mathcal{B}_m \subseteq J_m$. Kuna J_m on vektorruum, siis $\operatorname{span} \mathcal{C}_m \subseteq J_m$.

Näitame, et $\mathcal{C} \coloneqq \sum_{j=2}^{\infty} \operatorname{span} \mathcal{C}_j$ on tensoralgebra TW ideaal. On selge, et $\mathcal{C}$ on algebra TW alamruum. Näeme, et suvaliste $\alpha \in \mathbb{C}; i = 1, 2, 3; j \geq 2$ ja $c \in \operatorname{span} \mathcal{C}_j$ korral, kehtivad hulga $\mathcal{C}_j$ definitsiooni järgi järgmised sisalduvused:

$$\alpha \otimes c \in \operatorname{span} \mathcal{C}_j,$$
$$c \otimes \alpha \in \operatorname{span} \mathcal{C}_j,$$
$$\theta^i \otimes c \in \operatorname{span} \mathcal{C}_{j+1} \quad \text{ja}$$
$$c \otimes \theta^i \in \operatorname{span} \mathcal{C}_{j+1}.$$

Seega ka iga $x \in TW$ korral $x \otimes c \in \mathcal{C}$ ja $c \otimes x \in \mathcal{C}$. Näitasime, et $\mathcal{C}$ on tensoralgebra TW ideaal.

Kuna hulga $\mathcal{C}$ konstruktsiooni järgi $\theta^1 \otimes \theta^1 + \cdots + \theta^n \otimes \theta^n \in \mathcal{C}$ ja $\theta^i \otimes \theta^j \otimes \theta^k + \theta^j \otimes \theta^k \otimes \theta^i + \theta^k \otimes \theta^i \otimes \theta^j \in \mathcal{C}$ iga $i, j, k = 1, \ldots, n$ korral, siis ideaali J definitsiooni (6) järgi $J \subseteq \mathcal{C}$. Seega

$$J_m = J \cap T^m W \subseteq \mathcal{C} \cap T^m W = \sum_{i=2}^{\infty} (\operatorname{span} \mathcal{C}_i \cap T^m W) =$$
$$= \operatorname{span} \mathcal{C}_m + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq m}}^{\infty} \{0\} = \operatorname{span} \mathcal{C}_m$$

Kokkuvõttes $J_m = \operatorname{span} \mathcal{C}_m$.

$\blacksquare$

Olgu $m \geq 2$. Ruumi J_m dimensiooni leidmiseks leiame, kui palju on lineaarselt sõltumatuid vektoreid hulgas $\mathcal{C}_m$. Lause 1.2 järgi on ruumi $T^m W$ baas moodustatud kõikvõimalikest tensorkorrutistest $\theta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \theta^{i_m}; i_1, \ldots, i_m = 1, 2, 3$. Moodustame hulga $\mathcal{C}_m$ vektorite koordinaatidest maatriksi $M_m \in \operatorname{Mat}_{|C_m|, 3^m}(\mathbb{C})$ read. Lineaarselt sõltumatute vektorite arvu leidmiseks hulgas $\mathcal{C}_m$ arvutame $\operatorname{rank} M_m$.

Lause 3.9. *Iga $m \geq 2$ korral*

$$\dim \mathcal{R}^m = 3^m - \operatorname{rank} M_m.$$

Kuna $J_0 = J_1 = \{0\}$, siis $\dim \mathcal{R}^0 = 1$ ja $\dim \mathcal{R}^1 = 3$. Kuna M_2 on üherealine nullmaatriksist erinev maatriks, siis $\operatorname{rank} M_2 = 1$ ning $\dim \mathcal{R}^2 = 9 - 1 = 8$. Kasutades sümbolarvutustarkvara *Mathematica*, leiame maatriksite M_3, M_4 ja M_5 astakud (vt Lisa 1). Kokkuvõttes lause 3.9 järgi

$$\dim \mathcal{R}^0 = 1,\ \dim \mathcal{R}^1 = 3,\ \dim \mathcal{R}^2 = 9 - 1 = 8,\ \dim \mathcal{R}^3 = 27 - 17 = 10,$$
$$\dim \mathcal{R}^4 = 81 - 74 = 7 \quad \text{ja} \quad \dim \mathcal{R}^5 = 243 - 243 = 0.$$

Kuna $\mathcal{R}^5 = \{0\}$, siis ka iga $m > 5$ korral $\mathcal{R}^m = \{0\}$. Seega

$$\dim \mathcal{R} = 1 + 3 + 8 + 10 + 7 = 29.$$

3.4 Ruumide $\mathcal{R}^m$ baasid

Selles alapeatükis toome välja alamruumide $\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2$ ja $\mathcal{R}^3$ baasid ning teoreemis 3.10 leiame ruumi $\mathcal{R}^4$ baasi.

On selge, et ruumi $\mathcal{R}^1$ baasiks sobib

$$\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$$

ning ruumi $\mathcal{R}^2$ baasiks sobib

$$\{\theta^1\theta^1, \theta^1\theta^2, \theta^1\theta^3, \theta^2\theta^1, \theta^2\theta^2, \theta^2\theta^3, \theta^3\theta^1, \theta^3\theta^2\}.$$

Abramov, Groote ja Lätt näitasid [1], et ruumi $\mathcal{R}^3$ baasiks sobib

$$\{\theta^1\theta^2\theta^2, \theta^2\theta^3\theta^3, \theta^3\theta^1\theta^1, \theta^1\theta^2\theta^3, \theta^3\theta^2\theta^1, \theta^2\theta^2\theta^1, \theta^3\theta^3\theta^2, \theta^1\theta^1\theta^3, \theta^1\theta^3\theta^2, \theta^2\theta^1\theta^3\}.$$

Teoreem 3.10. *Ruumi $\mathcal{R}^4$ baasiks sobib*

$$\{\theta^1\theta^1\theta^2\theta^1, \theta^2\theta^2\theta^3\theta^2, \theta^3\theta^3\theta^1\theta^3, \theta^2\theta^2\theta^1\theta^2, \theta^3\theta^3\theta^2\theta^3, \theta^1\theta^1\theta^3\theta^1, \theta^1\theta^2\theta^1\theta^2\}.$$

Tõestus. Tähistame

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \coloneqq \{&\theta^1 \otimes \theta^1 \otimes \theta^2 \otimes \theta^1, \theta^2 \otimes \theta^2 \otimes \theta^3 \otimes \theta^2, \theta^3 \otimes \theta^3 \otimes \theta^1 \otimes \theta^3, \theta^2 \otimes \theta^2 \otimes \theta^1 \otimes \theta^2,\\ &\theta^3 \otimes \theta^3 \otimes \theta^2 \otimes \theta^3, \theta^1 \otimes \theta^1 \otimes \theta^3 \otimes \theta^1, \theta^1 \otimes \theta^2 \otimes \theta^1 \otimes \theta^2\}.\end{aligned}$$

Laiendame lauses 3.9 kasutatud maatriksit M_4 lisades iga $f \in \mathcal{F}$ kohta rea, mis koosneb vektori f koordinaatidest baasi 1.2 järgi. Tähistame saadud maatriksi M_4'.

Kasutades sümbolarvutustarkvara *Mathematica*, leiame (vt Lisa 1), et $\operatorname{rank} M_4' = 81$. Järelikult maatriksi M_4' konstruktsiooni järgi $\dim \operatorname{span}(\mathcal{C}_4 \cup \mathcal{F}) = \operatorname{rank} M_4' = 81$. Kuna järelduse 1.3 järgi $\dim T^4W = 81$, siis $\operatorname{span}(\mathcal{C}_4 \cup \mathcal{F}) = T^4W$.

Lause 3.8 järgi

$$T^4W = \operatorname{span}(\mathcal{C}_4 \cup \mathcal{F}) = \operatorname{span} \mathcal{C}_4 + \operatorname{span} \mathcal{F} = J_4 + \operatorname{span} \mathcal{F}. \tag{8}$$

Olgu vektorruumi J_4 baas $\{j_1, \ldots, j_{74}\}$ ning tähistame hulga $\mathcal{F}$ elemendid $f_1, \ldots, f_7$. Siis võrduse (8) tõttu leiduvad iga $x \in T^4W$ korral skalaarid $\alpha_1, \ldots, \alpha_{74}, \beta_1, \ldots, \beta_7 \in \mathbb{C}$ nii, et

$$x = \sum_{i=1}^{74} \alpha_i j_i + \sum_{k=1}^{7} \beta_k f_k.$$

Uurime elemendi x ekvivalentsiklassi $[x]$ ruumis ${}^{T^4W}/_{J_4} \cong \mathcal{R}^4$. Kuna $\sum_{i=1}^{74} \alpha_i j_i \in J_4$, siis

$$\begin{aligned}[x] &= \left[\sum_{i=1}^{74} \alpha_i j_i + \sum_{k=1}^{7} \beta_k f_k\right] = \left[\sum_{i=1}^{74} \alpha_i j_i\right] + \left[\sum_{k=1}^{7} \beta_k f_k\right] = \\ &= J_4 + \sum_{k=1}^{7} \beta_k [f_k] = \sum_{k=1}^{7} \beta_k [f_k].\end{aligned}$$

Seega $\operatorname{span}\{[f_1], \ldots, [f_7]\} = {}^{T^4W}/_{J_4}$. Kuna $\dim {}^{T^4W}/_{J_4} = 7$, siis $\{[f_1], \ldots, [f_7]\}$ on ruumi ${}^{T^4W}/_{J_4}$ baas. Teoreem 3.10 järeldub lemma 3.6 tõestuses kasutatud isomorfismi ρ konstruktsioonist. ■

3.5 Tähtsad seosed ruumis $\mathcal{R}^4$

Käesolevas alapeatükis uurime põhjalikumalt ruumi $\mathcal{R}^4$ ning selles kehtivaid seoseid.

Lemma 3.11. *Iga $i, j, k = 1, 2, 3$ korral*

$$\theta^i \theta^j \theta^j \theta^k = 0. \tag{9}$$

Tõestus. Kui $i = j$ või $k = j$, siis järeldub võrdus (9) vahetult järeldusest 3.4. Olgu nüüd $i \neq j$ ja $k \neq j$.

Kui $i \neq k$, siis lause 3.5 järgi $\theta^i\theta^j\theta^j\theta^k = -\theta^i\theta^k\theta^k\theta^k = 0$.

Tõestame juhu $i = k$ erijuhu $i = 1, j = 2$, ülejäänud juhtude tõestus on analoogiline. Ühelt poolt

$$\theta^1\theta^2\theta^2\theta^1 = -\theta^1\theta^1\theta^2\theta^2 - \theta^1\theta^2\theta^1\theta^2 = \theta^2\theta^1\theta^1\theta^2 + \theta^1\theta^2\theta^1\theta^2 - \theta^1\theta^2\theta^1\theta^2 = \theta^2\theta^1\theta^1\theta^2.$$

Teiselt poolt

$$\begin{aligned}\theta^1\theta^2\theta^2\theta^1 &= -\theta^1\theta^2\theta^1\theta^2 - \theta^1\theta^1\theta^2\theta^2 = \theta^3\theta^2\theta^3\theta^2 + \theta^3\theta^3\theta^2\theta^2 = \\ &= -\theta^3\theta^1\theta^3\theta^1 - \theta^3\theta^3\theta^1\theta^1 = \theta^2\theta^1\theta^2\theta^1 + \theta^2\theta^2\theta^1\theta^1 = \\ &= \theta^2\theta^1\theta^2\theta^1 - \theta^2\theta^1\theta^1\theta^2 - \theta^2\theta^1\theta^2\theta^1 = -\theta^2\theta^1\theta^1\theta^2.\end{aligned}$$

Seega $\theta^1\theta^2\theta^2\theta^1 = 0$. ■

Teoreem 3.12. *Iga $i, j, k, l = 1, 2, 3$ korral*

$$\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l = -\theta^i\theta^k\theta^j\theta^l \tag{10}$$

ja

$$\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l = \theta^l\theta^j\theta^k\theta^i. \tag{11}$$

Tõestus. Lemma 3.11 tõttu piisab võrduste (10) ja (11) tõestuseks vaadata ainult juhte $j \neq k$. Kasutades lauseid 3.3, 3.5 ja lemmat 3.11 näitame, et võrdused (10) ja (11) kehtivad erijuhul $j = 1$ ja $k = 2$, ülejäänud juhud on analoogilised.

$$\theta^1\theta^1\theta^2\theta^1 = -\theta^1\theta^2\theta^1\theta^1 - \theta^1\theta^1\theta^1\theta^2 = -\theta^1\theta^2\theta^1\theta^1$$

$$\theta^1\theta^1\theta^2\theta^2 = -\theta^1\theta^2\theta^2\theta^1 - \theta^1\theta^2\theta^1\theta^2 = -\theta^1\theta^2\theta^1\theta^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta^3\theta^2\theta^3\theta^2 = -\theta^3\theta^1\theta^3\theta^1 = \theta^2\theta^1\theta^2\theta^1 \\
\theta^1\theta^1\theta^2\theta^3 &= -\theta^3\theta^3\theta^2\theta^3 = \theta^3\theta^2\theta^3\theta^3 + \theta^3\theta^3\theta^3\theta^2 = \theta^3\theta^2\theta^3\theta^3 = -\theta^1\theta^2\theta^1\theta^3 \\
&= -\theta^3\theta^3\theta^2\theta^3 = \theta^3\theta^1\theta^2\theta^1 \\
\theta^2\theta^1\theta^2\theta^1 &= -\theta^2\theta^2\theta^1\theta^1 - \theta^2\theta^1\theta^1\theta^2 = -\theta^2\theta^2\theta^1\theta^1 \\
&= \theta^2\theta^2\theta^3\theta^3 = -\theta^1\theta^1\theta^3\theta^3 = \theta^1\theta^1\theta^2\theta^2 \\
\theta^2\theta^1\theta^2\theta^2 &= -\theta^2\theta^2\theta^1\theta^2 - \theta^2\theta^2\theta^2\theta^1 = -\theta^2\theta^2\theta^1\theta^2 \\
\theta^2\theta^1\theta^2\theta^3 &= -\theta^1\theta^2\theta^2\theta^3 - \theta^2\theta^2\theta^1\theta^3 = -\theta^2\theta^2\theta^1\theta^3 \\
&= \theta^3\theta^3\theta^1\theta^3 = -\theta^1\theta^3\theta^3\theta^3 - \theta^3\theta^1\theta^3\theta^3 = -\theta^3\theta^1\theta^3\theta^3 = \theta^3\theta^1\theta^2\theta^2 \\
\theta^3\theta^1\theta^2\theta^1 &= -\theta^3\theta^2\theta^1\theta^1 - \theta^3\theta^1\theta^1\theta^2 = -\theta^3\theta^2\theta^1\theta^1 \\
&= \theta^3\theta^2\theta^3\theta^3 = -\theta^3\theta^3\theta^2\theta^3 - \theta^3\theta^3\theta^3\theta^2 = -\theta^3\theta^3\theta^2\theta^3 = \theta^1\theta^1\theta^2\theta^3 \\
\theta^3\theta^1\theta^2\theta^2 &= -\theta^3\theta^2\theta^1\theta^2 - \theta^3\theta^2\theta^2\theta^1 = -\theta^3\theta^2\theta^1\theta^2 \\
&= -\theta^3\theta^1\theta^3\theta^3 = \theta^2\theta^1\theta^2\theta^3 \\
\theta^3\theta^1\theta^2\theta^3 &= -\theta^3\theta^2\theta^3\theta^1 - \theta^3\theta^3\theta^1\theta^2 = \theta^1\theta^2\theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2\theta^1\theta^2 = \\
&= -\theta^1\theta^1\theta^2\theta^1 - \theta^2\theta^1\theta^1\theta^1 - \theta^1\theta^2\theta^2\theta^2 - \theta^2\theta^1\theta^2\theta^2 = \\
&= -\theta^1\theta^1\theta^2\theta^1 - \theta^2\theta^1\theta^2\theta^2 = \theta^3\theta^3\theta^2\theta^1 - \theta^2\theta^1\theta^2\theta^2 = \\
&= -\theta^3\theta^2\theta^1\theta^3 - \theta^3\theta^1\theta^3\theta^2 - \theta^2\theta^1\theta^2\theta^2 = \\
&= -\theta^3\theta^2\theta^1\theta^3 + \theta^2\theta^1\theta^2\theta^2 - \theta^2\theta^1\theta^2\theta^2 = -\theta^3\theta^2\theta^1\theta^3
\end{aligned}
$$

■

Järeldus 3.13. *Iga $i, j, k, l = 1, 2, 3$ korral*

$$\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l = -\theta^l\theta^k\theta^j\theta^i.$$

Teoreem 3.14. *Iga $i, j, k, l = 1, 2, 3$ korral $\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l = 0$ parajasti siis, kui $j = k$.*

Tõestus. Piisavus on tõestatud lemmas 3.11. Kasutades teoreemi 3.12, lauseid 3.3, 3.5 ja lemmat 3.11 on lihtne näidata, et kõik elemendid kujul $\theta^i\theta^1\theta^2\theta^j; i, j = 1, 2, 3$

esituvad baasielementide mittetriviaalse lineaarkombinatsioonina:

$$\theta^1\theta^1\theta^2\theta^1 = \theta^1\theta^1\theta^2\theta^1, \quad \theta^1\theta^1\theta^2\theta^2 = -\theta^1\theta^2\theta^1\theta^2, \quad \theta^1\theta^1\theta^2\theta^3 = -\theta^3\theta^3\theta^2\theta^3,$$
$$\theta^2\theta^1\theta^2\theta^1 = -\theta^1\theta^2\theta^1\theta^2, \quad \theta^2\theta^1\theta^2\theta^2 = -\theta^2\theta^2\theta^1\theta^2, \quad \theta^2\theta^1\theta^2\theta^3 = \theta^3\theta^3\theta^1\theta^3,$$
$$\theta^3\theta^1\theta^2\theta^1 = -\theta^3\theta^3\theta^2\theta^3, \quad \theta^3\theta^1\theta^2\theta^2 = \theta^3\theta^3\theta^1\theta^3, \quad \theta^3\theta^1\theta^2\theta^3 = \theta^2\theta^2\theta^1\theta^2 - \theta^1\theta^1\theta^2\theta^1.$$

Seega $\theta^i\theta^1\theta^2\theta^j \neq 0$, kui $i, j = 1, 2, 3$. Ülejäänud juhte saab näidata analoogiliselt.

■

4 Kommutaatori ternaarne analoog

Iga assotsiatiivse algebra on võimalik teha Lie algebraks defineerides binaarse kommutaatori $[x, y] := xy - yx$. Tekib küsimus, kas Grassmanni algebra ternaarsel analoogil saab üldistada binaarse kommutaatori mõistet ternaarsele kommutaatorile, millel on sarnased omadused. Osutub, et selline üldistus on võimalik ning käesolevas peatükis käsitleme seda konstruktsiooni.

Definitsioon 4.1 [3]. *Algebrat A nimetatakse Lie algebraks, kui tema korrutamine $[\cdot, \cdot]$ rahuldab iga $x, y, z \in A$ korral tingimusi*

1. $[x, x] = 0$,
2. $[x, y] = -[y, x]$,
3. $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$.

Viimast samasust kutsutakse Jacobi samasuseks.

Definitsioon 4.2. *Olgu assotsiatiivne algebra A ning kujutus $[\cdot, \cdot] : A \times A \to A$ valemiga*

$$[x, y] = xy - yx, \qquad x, y \in A.$$

Kujutust $[\cdot, \cdot]$ kutsutakse algebra A binaarseks kommutaatoriks ehk kommutaatoriks.

On lihtne veenduda, et binaarne kommutaator on bilineaarne ning rahuldab kõiki tingimusi Lie algebra definitsioonis 4.1.

Uurime kommutaatori üldistust ternaarsele juhule, mis põhineb rühmal $\mathbb{Z}_3$. Teame, et k-astme ühejuured on korrutamise suhtes isomorfsed rühmaga $\mathbb{Z}_k$. Binaarse kommutaatori kordajad on 2-järku ühejuured: 1 ja -1. Üldistame kommutaatori ternaarseks kommutaatoriks, kus kordajad on 3-järku ühejuured. Tähistame $q := e^{\frac{2\pi}{3} i} = \sqrt[3]{1} \in \mathbb{C}$.

Definitsioon 4.3. *Defineerime kujutuse* $[\cdot,\cdot,\cdot] : \mathcal{R}\times\mathcal{R}\times\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ *valemiga*

$$[x, y, z] \coloneqq xyz + q^2 yzx + qzxy, \qquad x, y, z \in \mathcal{R}.$$

Nimetame kujutust $[\cdot,\cdot,\cdot]$ *algebra* $\mathcal{R}$ *ternaarseks q-kommutaatoriks.*

Edasises kasutame ka ühejuurte omadust $1 + q + q^2 = 0$. Lihtne on veenduda, et ternaarsel q-kommutaatoril on binaarse kommutaatoriga sarnaseid omadusi. Sõnastame need omadused järgmises lauses.

Lause 4.4. *Suvaliste* $x, y, z, u \in \mathcal{R}$ *ja* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *korral kehtivad ternaarsel q-kommutaatoril järgnevad omadused:*

$$\begin{aligned}
&[x, x, x] = 0,\\
&[0, x, y] = [x, 0, y] = [x, y, 0] = 0,\\
&[x, y, z] = q[y, z, x] = q^2[z, x, y],\\
&[\alpha x + \beta y, z, u] = \alpha[x, z, u] + \beta[y, z, u],\\
&[x, \alpha y + \beta z, u] = \alpha[x, y, u] + \beta[x, z, u],\\
&[x, y, \alpha z + \beta u] = \alpha[x, y, z] + \beta[x, y, u].
\end{aligned}$$

Lisaks kehtivad ternaarse q-kommutaatori korral veel samasused, millel puuduvad binaarsed analoogid.

Lause 4.5. *Suvaliste* $x, y, z \in \mathcal{R}$ *ja* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *korral kehtivad ternaarsel q-kommutaatoril järgnevad omadused:*

$$\begin{aligned}
&[\alpha, x, y] = -\alpha q[x, y],\\
&[x, \alpha, y] = \alpha[x, y],\\
&[x, y, \alpha] = -\alpha q^2[x, y],\\
&[\alpha, \beta, x] = [\alpha, x, \beta] = [x, \alpha, \beta] = 0.
\end{aligned}$$

Tõestus. Uuritavad võrdused järelduvad vahetult faktist, et algebra ühikelement 1 kommuteerub kõigi algebra elementidega ning iga $\alpha \in \mathbb{C}$ korral $\alpha = \alpha \cdot 1 \in \mathcal{R}^0$. Viimase võrduse näitamiseks kasutame samasust $1 + q + q^2 = 0$. ■

Veel on teada järgmine ternaarset q-kommutaatorit ja binaarset kommutaatorit siduv lause.

Lause 4.6 [1]. *Suvaliste $x, u, v, w \in \mathcal{R}$ korral*

$$[x, [u, v, w]] = [[x, u], v, w] + [u, [x, v], w] + [u, v, [x, w]].$$

Tekib küsimus, kas ternaarsel q-kommutaatoril leidub analoog Jacobi samasusele. Sellele küsimusele vastamiseks defineerime esmalt algebra $\mathcal{R}$ elemendi mittekonstantse osa.

Definitsioon 4.7. *Olgu iga $x \in \mathcal{R} \backslash \mathbb{C}$ korral $x_i \in \mathcal{R}^i, x_i \neq 0$ sellised, et $x = \sum_i x_i$. Defineerime elemendi x mittekonstantse osa*

$$\sigma(x) := \sum_{i \geq 1} x_i \in \mathcal{R}.$$

Kui $x \in \mathbb{C}$, siis defineerime $\sigma(x) = 0 \in \mathcal{R}$.

Lause 4.8. *Mittekonstantne osa on lineaarne, st iga $x, y \in \mathcal{R}$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ korral*

$$\sigma(\alpha x + \beta y) = \alpha\sigma(x) + \beta\sigma(y).$$

Tõestus. Olgu $x_i, y_i \in \mathcal{R}_i$ sellised, et $x = \sum_i x_i$ ja $y = \sum_i y_i$. Defineerime $s_m := \alpha x_m + \beta y_m$, kui x_m ja y_m mõlemad on defineeritud. Kui ainult x_m (ainult y_m) on defineeritud, siis olgu $s_m \coloneqq \alpha x_m$ ($s_m \coloneqq \beta y_m$). Leiame

$$\sigma\left(\alpha x+\beta y\right)=\sigma\left(\sum_i \alpha x_i+\sum_j \beta y_j\right)=\sigma\left(\sum_m s_m\right)=$$
$$=\sum_{m\geq 1} s_m=\sum_{i\geq 1}\alpha x_i+\sum_{j\geq 1}\beta y_j=\alpha\sigma\left(x\right)+\beta\sigma\left(y\right),$$

kus tühja hulga elementide summat loeme nulliks. ■

Oleme valmis sõnastama ternaarse q-kommutaatori analoogi Jacobi samasusele.

Teoreem 4.9. *Olgu $x, y, u, v, w \in \mathcal{R}$, kehtib samasus*

$$[x,y,[u,v,w]]=[[x,y,\sigma\left(u\right)],v,w]+[u,[x,y,\sigma\left(v\right)],w]+[u,v,[x,y,\sigma\left(w\right)]]. \quad (12)$$

Tõestus. Näitame, et võrdus (12) kehtib juhul, kui x, y, u, v ja w esituvad elementide $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ korrutisena või on skalaarid. Lubame ka ühe elemendi korrutisi. Üldine juht järeldub siis ternaarse q-kommutaatori multi-lineaarsusest ja mittekonstantse osa lineaarsusest.

Märkame, et võrdus (12) kehtib triviaalselt, kui $xyuvw \in \mathcal{R}^m$, kus $m \geq 5$. Sellisel juhul

$$\begin{aligned}[x,y,[u,v,w]]&=[x,y,uvw+q^2vwu+qwuv]=\\&=xy(uvw+q^2vwu+qwuv)+q^2y(uvw+q^2vwu+qwuv)x+\\&+q(uvw+q^2vwu+qwuv)xy\in\mathcal{R}^m=\{0\}.\end{aligned}$$

Analoogiliselt ka

$$[[x,y,\sigma\left(u\right)],v,w]=0,\quad [u,[x,y,\sigma\left(v\right)],w]=0\quad \text{ja}\quad [u,v,[x,y,\sigma\left(w\right)]]=0,$$

sest, üldisust kitsendamata, kui $u \in \mathbb{C}$, siis $\sigma\left(u\right)=0$ ning $[[x,y,0],v,w]=0$. Kui $u \notin \mathbb{C}$, siis $\sigma\left(u\right)=u$.

Seega edaspidi vaatame ainult juhte, kus $xyuvw \in \mathcal{R}^m, m < 5$. See ka tähendab, et vähemalt üks elementidest x, y, u, v või w on skalaar.

1. Vaatame juhtu, kus $x \in \mathbb{C}$ ning $y, u, v, w \in \mathcal{R}^1$, juht $y \in \mathbb{C}$ on analoogiline. Ühelt poolt lausete 4.5 ja 4.6 järgi

$$[x, y, [u, v, w]] = -xq[y, [u, v, w]] = -xq([[y, u], v, w] + [u, [y, v], w] + [u, v, [y, w]]).$$

Teiselt poolt

$$\begin{aligned}
&[[x, y, \sigma(u)], v, w] + [u, [x, y, \sigma(v)], w] + [u, v, [x, y, \sigma(w)]] = \\
=&[[x, y, u], v, w] + [u, [x, y, v], w] + [u, v, [x, y, w]] = \\
=&[-xq[y, u], v, w] + [u, -xq[y, v], w] + [u, v, -xq[y, w]] = \\
=&-xq([[y, u], v, w] + [u, [y, v], w] + [u, v, [y, w]]).
\end{aligned}$$

2. Vaatame nüüd juhtu, kus $u \in \mathbb{C}$ ning $x, y, v, w \in \mathcal{R}^1$, juhud $v \in \mathbb{C}$ ja $w \in \mathbb{C}$ on analoogilised. Ühelt poolt

$$\begin{aligned}
[x, y, [u, v, w]] = [x, y, -uq[v, w]] &= -uq[x, y, [v, w]] = -uq[x, y, vw - wv] = \\
&= -uq(xy(vw - wv) + q^2y(vw - wv)x + q(vw - wv)xy) = \\
&= -uq(xyvw - xywv + q^2yvwx - q^2ywvx + qvwxy - qwvxy).
\end{aligned}$$

Teiselt poolt

$$\begin{aligned}
&[[x, y, \sigma(u)], v, w] + [u, [x, y, \sigma(v)], w] + [u, v, [x, y, \sigma(w)]] = \\
=&[[x, y, 0], v, w] + [u, [x, y, v], w] + [u, v, [x, y, w]] = \\
=&-uq([[x, y, v], w] + [v, [x, y, w]]) = \\
=&-uq([xyv + q^2yvx + qvxy, w] + [v, xyw + q^2ywx + qwxy]) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -uq((xyv + q^2yvx + qvxy)w - w(xyv + q^2yvx + qvxy) + \\
&\quad + v(xyw + q^2ywx + qwxy) - (xyw + q^2ywx + qwxy)v) = \\
&= -uq(xyvw + q^2yvxw + qvxyw - wxyv - q^2wyvx - qwvxy + \\
&\quad + vxyw + q^2vywx + qvwxy - xywv - q^2ywxv - qwxyv) = \\
&= -uq(xyvw + q^2yvxw + (1+q)vxyw - (1+q)wxyv - q^2wyvx - \\
&\quad - qwvxy + q^2vywx + qvwxy - xywv - q^2ywxv) = \\
&= -uq(xyvw + q^2yvxw - q^2vxyw + q^2wxyv - q^2wyvx - \\
&\quad - qwvxy + q^2vywx + qvwxy - xywv - q^2ywxv) = \\
&= -uq(xyvw - xywv + qvwxy - qwvxy + \\
&\quad + q^2(yvxw - vxyw + wxyv - wyvx + vywx - ywxv)).
\end{aligned}
$$

Seega piisab võrduse (12) kehtimiseks näidata, et

$$
yvwx - ywvx = yvxw - vxyw + wxyv - wyvx + vywx - ywxv. \tag{13}
$$

Teoreemi 3.12 järgi $-vxyw + wxyv = 0$. Lause 3.3 järgi

$$
yvxw = -yxwv - ywvx \quad \text{ja} \quad -wyvx = yvwx + vwyx.
$$

Teoreemi 3.12 järgi $-yxwv - ywxv = 0$ ning $vwyx + vywx = 0$, millest järeldubki võrdus (13).

3. Vaatame nüüd juhte, kus vähemalt kaks elementidest x, y, u, v ja w on skalaarid. Kui $x, y \in \mathbb{C}$, siis on valemis (12) lause 4.5 järgi kõik ternaarsed q-kommutaatorid 0.

4. Olgu nüüd $u, v \in \mathbb{C}$ (juhud $u, w \in \mathbb{C}$ ja $v, w \in \mathbb{C}$ on analoogilised). Kuna $\sigma(u) = \sigma(v) = 0$, siis

$$
[[x, y, \sigma(u)], v, w] = 0 \quad \text{ja} \quad [u, [x, y, \sigma(v)], w] = 0.
$$

Lause 4.5 järgi

$$[u, v, [x, y, \sigma(w)]] = 0 \quad \text{ja} \quad [x, y, [u, v, w]] = 0.$$

5. Olgu $x, u \in \mathbb{C}$ ning $y, v, w \in \mathcal{R}^1$, ülejäänud kahe skalaariga juhud on analoogsed. Ühelt poolt

$$[x, y, [u, v, w]] = q^2 xu[y, [v, w]].$$

Arvestame, et $\sigma(u) = 0$, et saada teiselt poolt

$$\begin{aligned}&[[x, y, \sigma(u)], v, w] + [u, [x, y, \sigma(v)], w] + [u, v, [x, y, \sigma(w)]] = \\ =&q^2 xu([[y, v], w] + [v, [y, w]]).\end{aligned}$$

Seega taandub võrdus (12) binaarse kommutaatori Jacobi samasusele.

6. Kui vähemalt kolm elementi x, y, u, v või w on skalaarid, siis sarnaselt alamjuhule (4) kehtib võrdus (12). ■

Teoreem 4.9 näitab, Grassmanni algebra ternaarses analoogis on võimalik üldistada binaarne kommutaator loomulikul viisil ternaarsele q-kommutaatorile.

3-Lie algebrate teoorias vaadatakse vektorruume L, millel on antud ternaarne tehe $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!] : L \times L \times L \to L$, mis rahuldab Filippov-Jacobi samasust

$$[\![x, y, [\![u, v, w]\!]]\!] = [\![[\![x, y, u]\!], v, w]\!] + [\![u, [\![x, y, v]\!], w]\!] + [\![u, v, [\![x, y, w]\!]]\!].$$

Näeme, et ternaarse q-kommutaatori Jacobi samasuse analoog (12) on väga sarnane Filippov-Jacobi samasusele. [4]

Kokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös uurisime Grassmanni algebra ternaarse analoogi $\mathcal{R}$ algebralisi omadusi. Esiteks andsime formaalse definitsiooni tensoralgebrale ning konstrueerisime Grassmanni algebra ja tema ternaarse analoogi tensoralgebra faktoralgebrana.

Näitasime, et erijuhul $\dim W = 3, \mathbb{K} = \mathbb{C}$ on Grassmanni algebra ternaarne analoog 29-dimensionaalne vektorruum. Leidsime neljandat järku monoomide poolt tekitatud alamruumi $\mathcal{R}^4$ baasi. Teoreemis 3.12 tõestasime ruumis $\mathcal{R}^4$ kehtivad kommutatsiooni seosed ning teoreemis 3.14 tõestasime tarviliku ja piisava tingimuse elemendi nulliga võrdumiseks.

Töö põhitulemusena tõestasime teoreemis 4.9, et algebral $\mathcal{R}$ on võimalik binaarset kommutaatorit üldistada ternaarsele q-kommutaatorile, mis rahuldab Jacobi samasuse ternaarset analoogi. Antud samasus on väga sarnane 3-Lie algebrate teoorias kehtivale Filippov-Jacobi samasusele.

Kasutatud allikad

[1] V. Abramov, S. Groote ja P. Lätt. „Algebra with ternary cyclic relations, representations and quark model“. *Proceedings of the estonian academy of sciences* 72 (2023), lk. 61–76.

[2] N. Bourbaki. *Algebra I*. Springer Science & Business Media, 1998.

[3] N. Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras*. Springer Science & Business Media, 1975.

[4] V. T. Filippov. „n-Lie algebras“. *Siberian Mathematical Journal* 26.6 (1985), lk. 879–891.

[5] I.M. Gelfand, R.A. Minlos ja Z.Y. Shapiro. *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications*. Dover Publications, 2018.

[6] R. Kerner. „Ternary generalization of Pauli's principle and the Z6-graded algebras“. *Physics of Atomic Nuclei* 80 (2017), lk. 529–541.

[7] R. Kerner. „The Quantum Nature of Lorentz Invariance“. *Universe* 5 (2018), lk. 1.

[8] R. Kerner. „Z3-graded algebras and the cubic root of the supersymmetry translations“. *Journal of Mathematical Physics* 33 (1992), lk. 403–411.

[9] S. Lang. *Algebra*. Springer, 2002.

Lisa 1. *Mathematica* kood

Anname *Mathematica* koodi maatriksite M_3, M_4 ja M_5 astakute arvutamiseks. Tähistame θ^i sümboliga $a[i]$ ning elementide $\theta^{i_1}, \ldots, \theta^{i_m}$ tensorkorrutist tähistame $a[i_1, \ldots, i_m]$.

In[1]:=
```
n = 3;
(* Defineerime hulgad A_3, B_3 ja C_3. *)
Ar = Flatten[Table[a[1, 1, i] + a[2, 2, i] + a[3, 3, i] == 0, {i, n}]];
Al = Flatten[Table[a[j, 1, 1] + a[j, 2, 2] + a[j, 3, 3] == 0, {j, n}]];
A3 = Join[Ar, Al];
B3 = Flatten[Table[a[i, j, k] + a[j, k, i] + a[k, i, j] == 0, {i, n},
        {j, n}, {k, n}]];
C3 = Join[A3, B3];

(* Defineerime ruumi T^3W baasi baas3
ning defineerime maatriksi M_3.*)
baas3 = Flatten[Array[a, {n, n, n}]];
{b, M3} = CoefficientArrays[C3, baas3];

(* Arvutame maatriksi M3 astaku ning ruumi R^3 dimensiooni. *)
rankM3 = MatrixRank[M3];
Print["rank(M3)=", rankM3];
Print["dim(R3)=", n^3 - rankM3];
```

Out[1]=
```
rank(M3)=17
dim(R3)=10
```

In[2]:=
```
(* Kordame sarnaseid arvutusi ruumi R^4 jaoks.*)
Arl = Flatten[Table[a[j, 1, 1, i] + a[j, 2, 2, i] + a[j, 3, 3, i], {i, n}, {j, n}]];
Arr = Flatten[Table[a[1, 1, i, j] + a[2, 2, i, j] + a[3, 3, i, j], {i, n}, {j, n}]];
all = Flatten[Table[a[i, j, 1, 1] + a[i, j, 2, 2] + a[i, j, 3, 3], {i, n}, {j, n}]];
A4 = Join[Arl, Arr, all];

Bl = Flatten[Table[a[i, j, k, l] + a[j, k, i, l] + a[k, i, j, l], {i, n}, {j, n},
        {k, n}, {l, n}]];
Br = Flatten[Table[a[l, i, j, k] + a[l, j, k, i] + a[l, k, i, j], {i, n}, {j, n},
        {k, n}, {l, n}]];
B4 = Join[Bl, Br];

C4 = Join[A4, B4];
baas4 = Flatten[Array[a, {n, n, n, n}]];
{b, M4} = CoefficientArrays[C4, baas4];

rankM4 = MatrixRank[M4];
Print["rank(M4)=", rankM4];
Print["dim(R4)=", n^4 - rankM4];
```

Out[2]=
```
rank(M4)=74
dim(R4)=7
```

In[3]:=
```
(* Kordame sarnaseid arvutusi ruumi R^5 jaoks.*)
Arrr = Flatten[Table[a[1, 1, i, l, m] + a[2, 2, i, l, m] + a[3, 3, i, l, m], {i, n},
        {l, n}, {m, n}]];
Arll = Flatten[Table[a[l, m, 1, 1, i] + a[l, m, 2, 2, i] + a[l, m, 3, 3, i], {i, n},
        {l, n}, {m, n}]];
Arrl = Flatten[Table[a[l, 1, 1, i, m] + a[l, 2, 2, i, m] + a[l, 3, 3, i, m], {i, n},
        {l, n}, {m, n}]];
Alll = Flatten[Table[a[l, m, i, 1, 1] + a[l, m, i, 2, 2] + a[l, m, i, 3, 3], {i, n},
        {l, n}, {m, n}]];
A5 = Join[Arrr, Arll, Arrl, Alll];

Brr = Flatten[Table[a[i, j, k, l, m] + a[j, k, i, l, m] + a[k, i, j, l, m], {i, n},
        {j, n}, {k, n}, {l, n}, {m, n}]];
Bll = Flatten[Table[a[l, m, i, j, k] + a[l, m, j, k, i] + a[l, m, k, i, j], {i, n},
        {j, n}, {k, n}, {l, n}, {m, n}]];
Brl = Flatten[Table[a[l, i, j, k, m] + a[l, j, k, i, m] + a[l, k, i, j, m], {i, n},
        {j, n}, {k, n}, {l, n}, {m, n}]];
B5 = Join[Brr, Bll, Brl];

C5 = Join[A5, B5];
baas5 = Flatten[Array[a, {n, n, n, n, n}]];
{b, M5} = CoefficientArrays[C5, baas5];

rankM5 = MatrixRank[M5];
Print["rank(M5)=", rankM5];
Print["dim(R5)=", n^5 - rankM5];
```

Out[3]=
```
rank(M5)=243
dim(R5)=0
```

Anname *Mathematica* koodi maatriksi M_4' astaku arvutamiseks.

In[4]:=
```
F = {a[1, 1, 2, 1], a[2, 2, 3, 2], a[3, 3, 1, 3], a[2, 2, 1, 2], a[3, 3, 2, 3],
        a[1, 1, 3, 1], a[1, 2, 1, 2]};
C4' = Join[C4, F];
{b, M4'} = CoefficientArrays[C4', baas4];

rankM4' = MatrixRank[M4'];
Print["rank(M4')=", rankM4'];
```

Out[4]=
```
rank(M4')=81
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Randal Annus,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Grassmanni algebra ja kommutaatori ternaarsed analoogid", mille juhendaja on prof. Viktor Abramov, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaaloman-di ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Randal Annus

07.05.2024