

Per. A-1169
-281



TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOI TOIMETISED
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

ALUSTATUD 1893. a.

VIHİK 281 ВЫПУСК

ОСНОВАНЫ в 1893 г.

МАТЕМААТИКА- JA
МЕННААНИКААЛАСЕИД ТÕИД
ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
И МЕХАНИКЕ

XI



TARTU 1971



TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIIIK 281 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893 г.

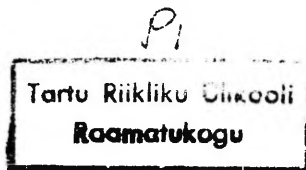
**МАТЕМААТИКА- JA
МЕННААНИКААЛАСЕИД ТÕИД
ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
И МЕХАНИКЕ**

XI

TARTU 1971

Redaktsioonikolleegium:
G. Kangro (esimees), S. Baron (vast. toimetaja), Ü. Lepik, Ü. Lumiste,
E. Reimers (toimetaja), E. Tamme.

Редакционная коллегия:
Г. Кангро (председатель), С. Барон (отв. редактор), Ю. Лепик, Ю. Лумисте,
Э. Реймерс (редактор), Э. Тамме.



69448

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
XI

На русском языке
Резюме на эстонском, английском и немецком языках

Тартуский государственный университет,
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Ответственный редактор С. Барон
Корректоры А. Тоуарт, Э. Оя, Л. Арива, Г. Кондас

Сдано в набор 16/VI 1970 г. Подписано к печати 20/XI 1971 г. Печ. листов 17,0 + 1
вклейка. Учетно-издат. листов 19,5. Тираж 500 экз. Бумага фабрики «Кохила»,
типографская № 2. 60 × 90. 1/16. МВ 07662. Заказ № 4227.

Типография им. X. Хейдеманна, Тарту, ул. Юликооли 17/19 II

Цена 1 руб. 92 коп.

К ПЯТИДЕСЯТИЛЕТИЮ ПРОФ. Ю. ЛЕПИКА

Заведующий кафедрой теоретической механики Тартуского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор Юло Рудольфович Лепик родился 11 июля 1921 года в городе Тарту в семье рабочего.

После окончания гимназии Г. Треффнера в г. Тарту Ю. Лепик поступил в Тартуский университет на физическое отделение естественно-математического факультета, которое окончил в 1948 году.

Вся его научная и педагогическая деятельность связана с кафедрой теоретической механики Тартуского госуниверситета. В 1946—1954 гг. он работал старшим лаборантом, ассистентом и старшим преподавателем. В 1952 году Ю. Лепик защитил кандидатскую диссертацию¹ [4]. В 1954 году он был избран доцентом кафедры, с 1958 года Ю. Лепик — доктор физико-математических наук, а в 1960 году ему было присуждено ученое звание профессора. Заведующим кафедрой теоретической механики он работает с 1959 года.

Основная научная деятельность Ю. Лепика посвящена изучению пластин и оболочек, работающих в упруго-пластической стадии. В его кандидатской диссертации «Устойчивость упруго-пластических пластинок с учетом сжимаемости материала», а также в работах [1—3] изучалось влияние сжимаемости материала на устойчивость упруго-пластических пластинок. В этих работах была использована концепция А. А. Ильюшина, по которой для решения задач устойчивости можно пренебречь изменениями усилий в срединной поверхности пластинки. В работах [9, 10] предложено вариационное уравнение, позволяющее решать задачи устойчивости в точной постановке. На ряде примеров выяснилось, что точность приближенной постановки А. А. Ильюшина вполне приемлема.

В работе [7] рассмотрена задача о цилиндрической форме потери устойчивости прямоугольной пластинки на базе концепции Шенли. Рассмотренная задача натолкнула Ю. Лепика на изучение послекритической стадии упруго-пластических стерж-

¹ Список работ по теории пластин и оболочек Ю. Р. Лепика с 1950 по 1969 год опубликован в [42] и ссылки на работы [1—37] даются по названной статье.

ней. Предлагая в работе [8] новый метод расчета сжатых стержней по концепции Шенли, Ю. Лепик развил результаты Пфлюгера. В работе [20] методом малого параметра показано, что критическая нагрузка по Карману является максимальной нагрузкой, удерживаемой стержнем. Изучению влияния зон вторичных пластических деформаций на послекритическую стадию стержня посвящена статья [16]. В работе [17] предложен эффективный метод для определения наклона касательной к диаграмме нагрузка-прогиб в точке бифуркации для упруго-пластических пластин.

Развивая идеи А. А. Ильюшина, в 1954—1957 гг. Ю. Лепиком [6, 11] были обобщены уравнения гибких пластин Г. Кармана на случай пластических деформаций. Там же предложен метод их интегрирования. Обобщение выделенных уравнений на пластины с начальным прогибом, метод учета остаточных напряжений и прогибов при разгрузке приведены в докторской диссертации [13] и в работе [14]. Наиболее общая форма уравнений Ю. Лепика изложена в работе [29] — там учитываются и неоднородность материала, и влияние термических напряжений. Обобщенные Ю. Лепиком уравнения Кармана являются общепринятыми для изучения больших прогибов упруго-пластических пластин. В совместной работе Ю. Лепика и Э. Саккова [36] изложен один возможный метод исследования послекритической стадии оболочек, потерявших устойчивость за пределом упругости с учетом зон разгрузки и вторичных пластических деформаций.

Ю. Лепиком уделено много внимания вопросам несущей способности пластин и оболочек. Применение модели жестко-пластического тела при кусочно-линейных условиях текучести и ассоциированного закона течения допускает точные и замкнутые решения для ряда важных практических задач. В работах [22, 24, 25] исследованы вопросы несущей способности при малых прогибах неоднородных пластин и оболочек. В работе [24] определена несущая способность круглой пластинки, подвергнутой нейтронному излучению. Интересные результаты получены Ю. Лепиком при расчете жестко-пластических конструкций с большими прогибами. К этому кругу относятся работы [18, 19], а также [30, 31, 33, 34] для конструкций с идеализированным двуслойным сечением. В работах [43, 45] изучены вопросы предельного равновесия кольцевых пластин двуслойного сечения из материала с различными пределами текучести при растяжении и сжатии. В работе [49] развиты результаты Гадоу об определении несущей способности круглых и кольцевых пластин, испытывающих совместно изгиб с растяжением или сжатием. Показано, что поле напряжений может быть определено неединственно. В работе [51] при помощи принципа максимума Понтрягина решена задача минимального веса круглых пластин,

толщина которых ограничена сверху и снизу. Жестко-пластический материал имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии.

В последние годы особое внимание Ю. Лепика привлекли динамические задачи. Первой в этой области явилась работа [23], в которой изучались прогибы движущейся круглой пластинки вместе с жестким сердечником при условии, что ускорение внешнего края пластинки задано. Задача об импульсивном нагружении кольцевой пластины, материал которой чувствителен к скоростям деформирования, решена в работе [35]. В статьях [44, 46, 48] изучено распространение плоских пластических волн высокой амплитуды в толстой пластине. Приложенное к пластине давление с течением времени монотонно убывает. Задача решена в переменных Лагранжа. Предложен метод построения фронтов ударной волны.

Чрезвычайно важны и интересны для специалистов и начинающих свой путь ученого-исследователя обзорные статьи Ю. Лепика [26, 32]. Выступления Ю. Лепика на городском семинаре по теории упругости и пластичности и на спецсеминарах кафедры отличаются изящным изложением материала. Благодаря усилиям и примеру Ю. Лепика, создалась Тартуская школа механиков, известная во всем Советском Союзе. Его ученики работают во всех вузах республики, а также в ряде институтов АН ЭССР. Начиная с 1958 года проф. Лепик руководил 10 аспирантами, из которых до сих пор защитили диссертации 6 человек.

Следует отметить и роль Ю. Лепика при популяризации науки. Он неоднократно выступал с докладами перед разными аудиториями и опубликовал статьи в научно-популярных журналах.

Проф. Лепик известен как отличный педагог-преподаватель. Его лекции по теоретической механике, по теории упругости и пластичности, пластин и оболочек, а также по высшей математике и математической статистике стоят на высоком научном уровне и изящны по изложению. В соавторстве с Л. Роотс им написан первый эстонский учебник [47] по теоретической механике.

Ю. Лепик уделяет много внимания реферированию научных работ для Реферативного журнала по механике и оппонированию диссертаций. Он член ряда республиканских и всесоюзных научных и методических комиссий. Под его руководством проведено в Тарту две всесоюзные летние школы по механике.

Партия и правительство достойно оценили деятельность проф. Ю. Лепика, наградив его медалью «За трудовую доблесть» и памятной медалью юбилея В. И. Ленина.

Л. Роотс, Э. Сакков, К. Соонетс

Труды проф. Ю. Лепика

- 38*. Valitud küsimusi teoreetilisest mehaanikast, I. Tartu, 1961, 38 lk.
- 39*. Valitud küsimusi teoreetilisest mehaanikast, II. Tartu, 1963, 43 lk.
40. Tõenäosuspaberi kasutamise statistilistes arvutustes. Eesti Loodus, 1968, № 10, 629—631.
41. Динамика круглых и кольцевых пластин из жестко-пластического материала, чувствительного к скорости деформирования. Прикл. механика, 1969, 5, № 1, 60—66.
42. Обзор работ по теории пластин и оболочек, выполненных в Тарту за период 1950—1968. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 26—37 (соавт. Э. Иьги).
43. К предельному равновесию пластин, материал которых имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Тр. VII Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин (Днепропетровск, 1969). Москва, 1970, 360—364.
44. On the propagation of plane shock waves in a thick plate. Arch. mech. stosowanej, 1970, 22, № 5, 571—583.
45. Предельное равновесие кольцевых пластин, материал которых имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, 1970, № 1, 65—68.
46. К распространению плоских пластических волн в толстой пластине. Ж. прикл. мех. и техн. физики, 1971, № 1, 100—106.
47. Teoreetiline mehaanika. Tallinn, 1971, 483 lk. (kaasautor L. Roots).
48. Распространение и отражение плоских пластических волн большой амплитуды в толстой пластине. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 234—246.
49. К несущей способности растянуто-изогнутых и сжато-изогнутых круглых пластинок. Изв. АН СССР, Мех. твердого тела (в печати).
50. К определению несущей способности осесимметричных оболочек в случае кусочно-линейных условий пластичности (соавт. Я. Леллеп, в печати).
51. Minimum weight design of circular plates with limited thickness. Int. J. Nonlinear Mech. (в печати).

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППОИДЫ И ИХ ВЫПУКЛЫЕ ПОДСИСТЕМЫ

Е. Габович

Кафедра алгебры и геометрии

В [6] было показано, что частично упорядоченная полугруппа, собственные выпуклые подполугруппы которой одноэлементны, содержит не более двух элементов. В § 1 настоящей работы приводится значительно более короткое доказательство этой теоремы при более широких предположениях. Связь между упорядоченным группоидом и структурой его выпуклых подгруппоидов изучается во втором параграфе. Здесь находятся необходимые и достаточные условия, при выполнении которых в упорядоченном группоиде A структура его выпуклых подгруппоидов конечна, является цепью, дистрибутивна, модулярна или является структурой с дополнениями. Заметим, что понятие упорядоченного группоида естественным образом возникает при рассмотрении группоидов архимедовских классов упорядоченных колец.

В § 3 описаны все упорядоченные полугруппы, каждая подполугруппа которых выпукла.

Как отмечалось в [1], частично упорядоченные группы без нетривиальных выпуклых подгрупп и только они архимедовы. В § 4 настоящей работы аналогичная характеристика найдена для упорядоченных группоидов с нулем без нетривиальных выпуклых подгруппоидов с нулем. Показано, что названный класс группоидов с нулем весьма широк. Приводится его полное описание в случае наличия единицы, делителей нуля, а также в некоторых других случаях.

В §§ 2—4 все рассматриваемые алгебраические системы предполагаются линейно упорядоченными.

Не определяемые ниже понятия можно найти в [5]. Множество целых чисел обозначается через Z , а натуральных — через N . Символ $[a]$ означает моногенный группоид с образующим a , а $v(a)$ слово (элемент) из $[a]$. Используются также следующие обозначения:

$$\begin{aligned} V_a &= \{x \in A \mid \exists v(a), v'(a) \in [a] : v(a) \leq x \leq v'(a)\}, \\ [a, b] &= \{x \in A \mid a \leq x \leq b\}, \\ [a, b) &= \{x \in A \mid a \leq x < b\}, \\ (-\infty, a] &= \{x \in A \mid x \leq a\}. \end{aligned}$$

Аналогично определяются $(a, b]$, (a, b) , $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$. Группоид V_a является выпуклым замыканием моногенного группоида $[a]$.

§ 1. Частично упорядоченные группоиды без нетривиальных выпуклых подгруппоидов

Определение. Группоид называется группоидом с ассоциативными степенями, если любой его элемент порождает ассоциативный подгруппоид.

Теорема 1. Частично упорядоченный группоид A с ассоциативными степенями, не содержащий собственных выпуклых подгруппоидов, одноэлементен.

Доказательство. Для любого $a \in A$ множество

$$V_a = \{x \in A \mid \exists m, n \in N: a^m \leq x \leq a^n\} \quad (1.1)$$

есть выпуклый подгруппоид, так что $A = V_a$. В частности, $A = V_{a^2}$ и для $x = a$ получим, что $a^{2m} \leq a \leq a^{2n}$ для некоторых $m, n \in N$. Поэтому

$$\begin{aligned} a^{2qm-(q-1)} &\leq \dots \leq a^{4m-1} \leq a^{2m} \leq a \leq \\ &\leq a^{2n} \leq a^{4n-1} \leq \dots \leq a^{2pn-(p-1)}, \end{aligned}$$

откуда, положив $p = 2m - 1$ и $q = 2n - 1$, получим для $r = 2pn - (p - 1) = 2qm - (q - 1) > 1$, что $a = a^r$. Итак, $[a]$ конечна и содержит идемпотент e , являющийся, очевидно, выпуклым подгруппоидом, так что $A = \{e\}$.

Теорема доказана.

Следствие (см. [6]). Частично упорядоченная полугруппа без собственных выпуклых подполугрупп одноэлементна.

З а м е ч а н и е. Предположение об ассоциативности степеней в формулировке теоремы 1 существенно, ибо имеются даже бесконечные частично упорядоченные группоиды без собственных выпуклых подгруппоидов.

Действительно, рассмотрим группоид $B = \{a, b, c_1, c_2, c_3, \dots\}$, в котором

$$xy = \begin{cases} c_1, & \text{если } x \in \{a, b\} \quad \text{или } y \in \{a, b\}, \\ a, & \text{если } x = c_i, y = c_j \text{ и } i < j, \\ c_{i+1}, & \text{если } x = y = c_i, \\ b, & \text{если } x = c_i, y = c_j \text{ и } i > j. \end{cases}$$

Упорядочим B частично, положив $a < b$. Покажем, что B не имеет никаких собственных подгруппоидов. Если C — подгруппоид в B , то из $b \in C$ или $a \in C$ следует $c_1 = a^2 = b^2 \in C$. Итак, существует $c_i \in C$. Но тогда $c_{i+1} = c_i^2 \in C$, $a = c_i c_{i+1} \in C$, $b = c_{i+1} c_i \in C$, $c_1 = a^2 \in C$ и для любого $k \in N$ $c_k = (\dots (c_1^2) \dots)^2 \in C$. Следовательно, $C = B$. Неассоциативность степеней легко усмотреть: $(c_i c_i) c_i = c_{i+1} c_i = b$, $c_i (c_i c_i) = c_i c_{i+1} = a$.

Теорема 2. *Неодноэлементный частично упорядоченный группоид A с ассоциативными степенями, собственные выпуклые подгруппоиды которого одноэлементны, двухэлементны, является циклической группой простого порядка или является тривиально упорядоченным идемпотентным группоидом.*

Доказательство. Предположим, что $a \neq a^2$ для некоторого $a \in A$. Пусть сперва выпуклый подгруппоид $V_{a^2} = A$. Тогда, как и в ходе доказательства теоремы 1, получим, что $a^r = a$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$. Поэтому $[a]$ является конечной циклической группой, а потому тривиально упорядоченной и, следовательно, выпуклой подгруппой, так что $A = [a]$. Более того, $[a]$ не содержит отличных от единичной собственных подгрупп (они были бы выпуклыми), т. е. является циклической группой простого порядка.

Если же $V_{a^2} \neq A$, то V_{a^2} одноэлементен, т. е. $a^4 = a^2$. Так как группа $\{a^2, a^3\}$ упорядочена тривиально и является поэтому собственным выпуклым подгруппоидом, то $a^2 = a^3 = e = e^2$. Если $[a] = \{a, e\}$ упорядочен линейно и, для определенности, $a < e$, то множество $(a, e]$ является собственным выпуклым подгруппоидом в A , а потому совпадает с $\{e\}$. Поэтому $[a]$ выпукл в A . Если же a и e несравнимы, то $[a]$ упорядочен тривиально и снова выпукл в A . Итак, в любом случае $A = \{a, e\}$.

Предположим теперь, что $a^2 = a$ для всех $a \in A$. Если A содержит три элемента $a < b < c$, то $[a, b]$ является неодноэлементным собственным выпуклым подгруппоидом. Если найдутся два сравнимых элемента $a < b$, то $A = \{a, b\}$, ибо в противном случае $\{a, b\}$ являлось бы неодноэлементным собственным выпуклым подгруппоидом. Следовательно, A тривиально упорядочен.

Теорема доказана.

Следствие (см. [6]). *Частично упорядоченная полугруппа, собственные выпуклые подполугруппы которой одноэлементны, состоит из одного или двух элементов или является циклической группой простого порядка.*

Действительно, идемпотентная полугруппа, собственные подполугруппы которой одноэлементны, состоит не более чем из двух элементов.

Замечание 1. Предположение об ассоциативности степеней в формулировке теоремы 2 существенно, поскольку существуют даже бесконечные частично упорядоченные группоиды, собственные выпуклые подгруппоиды которых одноэлементны.

Действительно, рассмотрим группоид A , определенный на множестве \mathbb{N} следующим образом:

$$n \circ m = \begin{cases} 2, & \text{если } n > m > 1, \\ n + 1, & \text{если } n = m > 1, \\ 1 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Этот группоид можно нетривиально частично упорядочить, положив $1 < \cdot n$ для любого $n > 1$. Единственным подгруппоидом является $\{1\}$. Других подгруппоидов B группоид A не имеет: из $n \in B$ при $n > 1$ следует $n \cdot n = n + 1 \in B$, $n \cdot (n + 1) = 1 \in B$, $(n + 1) \cdot n = 2 \in B$, $2 \cdot 2 = 3 \in B$, ..., т. е. $B = A$.

З а м е ч а н и е 2. Утверждение, обратное теореме 2, не справедливо ввиду того, что не всякий тривиально упорядоченный идемпотентный группоид A не содержит неоднородных собственных подгруппоидов. Например, если A ассоциативен и состоит хотя бы из трех элементов, то он обладает неоднородными собственными выпуклыми подгруппоидами.

В то же время существуют бесконечные тривиально упорядоченные идемпотентные группоиды, все собственные подгруппоиды которых одноэлементны.

Действительно, рассмотрим группоид A , определенный на множестве Z следующим образом:

$$a \cdot b = \begin{cases} b + 1, & \text{если } a < b, \\ a, & \text{если } a = b, \\ -(a + 1), & \text{если } a > b. \end{cases}$$

Пусть B — его неоднородный подгруппоид, содержащий два элемента a и b , $a < b$. Тогда $a \cdot b = b + 1 \in B$, $a \cdot (b + 1) = b + 2 \in B$, ..., $b + n \in B$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. вместе с любыми двумя целыми числами B содержит и все числа большие большего из них. Пусть теперь $c \in A$, $c < b$. Рассмотрим такое число d , что $d \leq c$, $d < 0$ и $|d| > b + 1$. Тогда $|d| - 1 > b$, $|d| - 1 \in B$ и $(|d| - 1) \cdot b = -|d| = d \in B$. Но из $d \leq c$ и сделанного выше замечания следует теперь, что $c \in B$ и, следовательно, B совпадает с A .

З а м е ч а н и е 3. В случае линейного порядка предположение об ассоциативности степеней в теоремах 1 и 2 можно опустить. Именно, линейно упорядоченный группоид A без собственных выпуклых подгруппоидов одноэлементен, а в случае, если в A собственные выпуклые подгруппоиды одноэлементны, он состоит из одного или двух элементов.

Действительно, в первом случае из $a < a^2$ следовало бы, что $(a, +\infty)$ —, а из $a^2 < a$, что $(-\infty, a)$ — собственный выпуклый подгруппоид. Поэтому $a^2 = a$ и $A = \{a\}$.

Во втором случае утверждение следует из теоремы 1 § 2 при $k = 1$.

§ 2. Упорядоченные группоиды и их выпуклые подгруппоиды

Определение. Элемент a упорядоченного группоида A называется целым, если $a^2 \leq a$, а сам A называется целым, если все его элементы целые.

Дуальным образом определяются понятия дуально целого элемента и дуально целого группоида.

Теорема 1. Упорядоченный группоид A , каждый собственный выпуклый подгруппоид которого состоит не более чем из k элементов ($k \geq 1$), сам содержит не более $2k$ элементов (k конечно).

Доказательство. Если A содержит идемпотент e , не являющийся крайним элементом, т. е. если $a < e < b$ для некоторых $a, b \in A$, то утверждение теоремы очевидно. Действительно, тогда $(-\infty, e]$ и $[e, +\infty)$ содержат каждый не более k элементов, так что A состоит не более чем из $2k - 1$ элемента. Будем поэтому далее предполагать, что A не содержит идемпотентов, не являющихся крайними элементами. Это предположение будем для краткости называть основным. Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Лемма. Любой конечный упорядоченный группоид K содержит идемпотент.

Доказательство. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — все элементы из K . Предположим, что среди них нет идемпотентов. Тогда $a_1 < a^2_1$. Поэтому $a_2 \leq a^2_1 \leq a^2_2$ и $a_2 < a^2_2$. Пусть уже доказано, что $a_i < a^2_i$ для $i = 1, 2, \dots, e - 1$. Покажем, что тогда $a_e < a^2_e$. Действительно, $a_{e-1} < a^2_{e-1}$, так что $a_e \leq a^2_{e-1} \leq a^2_e$ и $a_e \neq a^2_e$. Следовательно, по индукции, $a_n < a^2_n$, что невозможно. Это противоречие и доказывает лемму.

Вернемся к доказательству теоремы. Рассмотрим произвольный неидемпотентный элемент a . Если A содержит более двух элементов, то такой элемент найдется ввиду основного предположения. Пусть, например, $a^2 < a$. Тогда выпуклый подгруппоид $(-\infty, a)$ содержит не более k элементов и по лемме один из них — идемпотент. По основному предположению этот идемпотент e является минимальным элементом в A .

Если A — целый группоид, то он состоит не более чем из $k + 1$ элемента. В противном случае, рассмотрим $k + 2$ его элементов $e < a_1 < a_2 < \dots < a_k < a_{k+1}$. Тогда собственный выпуклый подгруппоид $[e, a_k]$ содержит по крайней мере $k + 1$ элемент, что невозможно.

Если A не является целым группоидом, то рассуждение, проведенное в предыдущем абзаце, показывает, что A содержит не более $k + 1$ целого элемента.

Для произвольного дуального целого элемента рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что A содержит максимальный идемпотент f и не более $k + 1$ дуально целого элемента. Но идемпотенты e и f являются и целыми и дуально целыми, так что A состоит не более чем из $2k$ элементов.

Теорема доказана.

Замечание 1. Оценка числа элементов упорядоченного группоида, приведенная в теореме 1, не может быть улучшена. Так, полугруппа, порожденная элементами a и b , где $a^k = a^{k+1} =$

$= e, b^k = b^{k+1} = f, ab = ba = b$, и упорядоченная неравенствами $e < a^{k-1} < \dots < a^2 < a < b < b^2 < \dots < b^{k-1} < f$, состоит из $2k$ элементов, хотя любая ее собственная выпуклая подполугруппа содержит не более k элементов.

З а м е ч а н и е 2. Для частично упорядоченных группоидов, как показывает пример из замечания к теореме 2 § 1, аналог теоремы 1 не имеет места.

З а м е ч а н и е 3. Упорядоченный группоид, все собственные выпуклые подгруппоиды которого конечны, не обязан быть конечным.

Действительно, в полугруппе с нулевым умножением, построенной на множестве $N \cup \{0\}$, обычным образом упорядоченном, все собственные выпуклые подполугруппы конечны.

Аналогично строится пример упорядоченного группоида континуальной мощности, все собственные выпуклые подгруппоиды которого не более чем счетны.

Обозначим через $V(A)$ множество, которое состоит из всех выпуклых подгруппоидов группоида A и пустого множества. Для элементов множества $V(A)$ будем рассматривать операцию теоретико-множественного пересечения, обозначаемую обычным образом. Определим объединение двух элементов B и C множества $V(A)$ (будем обозначать его через $B \mathbf{U} C$ в отличие от теоретико-множественного объединения $B \cup C$) как наименьший элемент из $V(A)$, содержащий B и C , т. е. как выпуклое замыкание теоретико-множественного объединения $B \cup C$. Легко видеть, что $B \mathbf{U} \emptyset = B, \emptyset \mathbf{U} \emptyset = \emptyset$, а при $B \neq \emptyset \neq C$

$$B \mathbf{U} C = \left(\bigcup_{b \in B, c \in C} [b, c] \right) \cup \left(\bigcup_{b \in B, c \in C} [c, b] \right). \quad (2.1)$$

Ясно, что $V(A)$ является структурой относительно операций \cap и \mathbf{U} .

Теорема 2. Для упорядоченного группоида A эквивалентны следующие условия:

- 1) A конечен;
- 2) структура $V(A)$ конечна;
- 3) $V(A)$ имеет конечную длину.

Доказательство. Импликации 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) очевидны. Покажем, что 3) \Rightarrow 1). Группоид A может содержать только конечное множество элементов со свойством $a \leq a^2$. Действительно, в противном случае для таких элементов из

$$\dots < a_\alpha < \dots < a_\beta < \dots < a_\gamma < \dots$$

следовало бы, что цепочка выпуклых группоидов

$$\dots \supset [a_\alpha, +\infty) \supset \dots \supset [a_\beta, +\infty) \supset \dots \supset [a_\gamma, +\infty) \supset \dots$$

бесконечна, вопреки 3). Аналогично доказывается, что A может содержать лишь конечное число элементов со свойством $a^2 \leq a$. Следовательно, A конечен.

Теорема доказана.

Структура $V(A)$, как мы увидим, вообще говоря, не дистрибутивна и даже не модулярна. Однако, если упорядоченный группоид A содержит идемпотент e , то подструктура $W_e(A)$ структуры $V(A)$, состоящая из всех выпуклых подгруппоидов группоида A , содержащих e , дистрибутивна, ибо в этом случае $B \cup C$ совпадает с $V \cup C$.

Определение. Упорядоченный группоид A называется архимедовым, если для любых его элементов a и b , для которых $a < b$, из $a \leq a^2$ следует существование такого $v(a) \in [a]$, что $b \leq v(a)$, а из $b^2 \leq b$ следует, что $v'(b) \leq a$ для некоторого $v'(b) \in [b]$.

Теорема 3. Для упорядоченного группоида A эквивалентны следующие условия:

- 1) $V(A)$ является цепью;
- 2) A — целый или дуально целый архимедовый группоид.

Доказательство. Импликация 1) \Rightarrow 2). Пусть A — упорядоченный группоид, выпуклые подгруппоиды которого образуют цепь по включению. Если $a < a^2$ и $b^2 < b$ для некоторых $a, b \in A$, то выпуклые группоиды $(a, +\infty)$ и $(-\infty, b)$ при $b < a$ не пересекаются, а при $b > a$ ни один из них не содержится в другом, ибо в этом случае первый из них содержит b , но не содержит a , в то время как второй содержит a , но не содержит b . Поскольку A является цепью, то обе эти ситуации невозможны. Поэтому A — или целый, или дуально целый группоид.

Пусть он, для определенности, целый и пусть $b, c \in A$ таковы, что $b < c$. Тогда выпуклый группоид V_c содержит элемент c , а выпуклый группоид $(-\infty, b)$ его не содержит. Поскольку $V(A)$ — цепь, это значит, что $(-\infty, b] \subset V_c$ и $b \in V_c$. Следовательно, $v(c) \leq b$ для некоторого $v(c) \in [c]$, т. е. A архимедов. Аналогично доказывается архимедовость дуально целого группоида.

Импликация 2) \Rightarrow 1). Пусть A — целый архимедовый группоид, а B и C — два его выпуклых подгруппоида. Если C содержит такой элемент c_0 , что $c_0 > b$ при любом $b \in B$, то, ввиду архимедовости для некоторого $v(c_0) \in [c_0]$, будет $v(c_0) \leq b < c_0$, т. е. $b \in C$ и $B \subset C$. Аналогично, $B \subset C$, если $b_0 > c$ для всех $c \in C$ при некотором $b_0 \in B$. Если же для любого $b \in B$ найдется $c_b \in C$, для которого $b < c_b$ и для любого $c \in C$ найдется $b_c \in B$ такой, что $c < b_c$, то аналогично показывается, что $B \subset C$ и $C \subset B$, т. е. что $B = C$. Итак, $V(A)$ — цепь.

Если A — дуально целый архимедовый группоид, то проводятся аналогичные рассуждения.

Теорема доказана.

Теорема 4. Если структура $V(A)$ выпуклых подгруппоидов упорядоченного группоида A модулярна, то она и дистрибутивна. Структура $V(A)$ модулярна тогда и только тогда, когда A удовлетворяет одному из следующих двух условий:

1) A — целый или дуально целый и $A = A^*_1 \cup A^*_2$, $A^*_1 \cap A^*_2 = \emptyset$, для некоторых его выпуклых архимедовских подгруппоидов A^*_1 и A^*_2 ;

2) в A существуют такие выпуклые подгруппоиды A_1 и A_2 , что $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ состоит не более чем из одного элемента, A_1 дуально целый, а A_2 — целый, оба они архимедовы и $a_1 < a_2$ для любых $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $a_1 \neq a_2$.

Доказательство. Пусть $V(A)$ — модулярная структура. Покажем, что тогда A удовлетворяет одному из условий 1) или 2).

Ниже в ходе доказательства этого утверждения мы неоднократно будем строить такие выпуклые подгруппоиды B , C и D группоида A , что

$$B \subset D, B \neq D, C \cap D = \emptyset \text{ и } D \subset B \cup C.$$

Для таких группоидов

$$B \mathbf{U} (C \cap D) = B \mathbf{U} \emptyset = B \neq D = (B \mathbf{U} C) \cap D$$

вопреки модулярности структуры $V(A)$. Такое противоречие мы будем называть стандартным.

Группоид A содержит не более двух идемпотентов. Действительно, если e, f и g — три идемпотента, причем $e < f < g$, то, положив $B = \{e\}$, $D = [e, f]$ и $C = \{g\}$, получим стандартное противоречие.

Рассмотрим множества

$$A'_1 = \{x \mid x \leq x^2, x \in A\}, \quad A'_2 = \{y \mid y \geq y^2, y \in A\}$$

и множество E всех идемпотентов из A . Ясно, что $A'_1 \cap A'_2 = E$. Покажем, что

$$a_1 < a_2 \text{ для любых } a_1 \in A'_1 \setminus E, a_2 \in A'_2. \quad (2.2)$$

Действительно, $a_1 \neq a_2$ и если бы было $a_2 < a_1$, то имели бы место неравенства $a_2^2 < a_2 < a_1 < a_1^2$ (a_1 — не идемпотент). Тогда, положив $B = [a_2^2, +\infty)$, $D = [a_1, +\infty)$ и $C = (-\infty, a_2]$, мы получили бы стандартное противоречие. Аналогично доказывается, что

$$a_1 < a_2 \text{ для любых } a_1 \in A'_1, a_2 \in A'_2 \setminus E. \quad (2.3)$$

Если E состоит из двух элементов e и f , $e < f$, то положим $A_1 = (-\infty, e] = A'_1 \setminus \{f\}$ и $A_2 = [f, +\infty) = A'_2 \setminus \{f\}$. Если E одноэлементно, то обозначим $A_1 = A'_1 = (-\infty, e]$, $A_2 = A'_2 = [e, +\infty)$, где $e \in E$. Наконец, если E пусто, то обозначим $A_1 = A'_1$, $A_2 = A'_2$.

В первых двух случаях очевидно, что A_1 и A_2 — подгруппоиды в A . Покажем, что это так и в третьем случае. Рассмотрим, например, A_1 . Если $a, b \in A_1$, $a < b$, то $ab \leq b^2$. Но из $b \leq b^2$ следует, что $b^2 \leq b^2 b^2$, и потому $ab \in A_1$ ввиду следующей из (2.2) выпуклости A_1 .

Ясно, что $A = A_1 \cup A_2$, что группоид A_1 дуально цел, а A_2 цел, что $A_1 \cap A_2$ состоит не более чем из одного элемента и что из условий (2.2) и (2.3) следует, что

$$a_1 < a_2 \text{ для любых } a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_1 \neq a_2.$$

Рассмотрим произвольный целый упорядоченный группоид. Будем говорить, что его элементы a и b лежат в одном архимедовском классе, если $v(d) \leq c$ для некоторого $v(d) \in [d]$, где $c = \min(a, b)$, $d = \max(a, b)$.

В дуально целом группоиде архимедовские классы определяются дуальным образом. Следующее утверждение справедливо в любом целом группоиде, а его дуальный аналог — в любом дуально целом группоиде.

Лемма. *В целом группоиде отношение принадлежности к одному архимедовскому классу является отношением эквивалентности, а сами архимедовские классы являются выпуклыми группоидами.*

Доказательство. Отношение принадлежности одному архимедовскому классу рефлексивно и симметрично. Покажем его транзитивность. Пусть a лежит в одном архимедовском классе с b , а b с c .

Если $a \leq b \leq c$ и слова $v(x)$ и $u(x)$ таковы, что $v(b) \leq a$ и $u(c) \leq b$, то $w(c) = v[u(c)] \leq a$. Если же $a \leq b$, но $c \leq b$, то $v(a) \leq v(b)$, $v(c) \leq v(b)$ для любого слова $v(x)$. При $a \leq c$ и $v(x)$ таком, что $v(b) \leq a$, получим поэтому, что $v(c) \leq v(b) \leq a$, а при $c \leq a$ и $v(x)$ таком, что $v(b) \leq c$, получим, что $v(a) \leq v(b) \leq c$.

Пусть $b \leq a$. Если $c \leq b$, то $c \leq a$ и из $v(a) \leq b$ и $u(b) \leq c$ следует, что $w(a) = u[v(a)] \leq u(b) \leq c$. Если же $b \leq c$ и $v(a) \leq b$, $u(c) \leq b$, то $u(c) \leq b \leq a$ при $a \leq c$ и $v(a) \leq b \leq c$ при $c \leq a$. Итак, a и c обязательно лежат в одном архимедовском классе.

Пусть A — целый группоид, B — его архимедовский класс и $c, d \in B$. Из $c < x < d$ для некоторого $x \in A$ следует $v(d) \leq c$ для некоторого $v(d) \in [d]$ и, следовательно, $v(x) \leq v(d) \leq c$, т. е. $x \in B$ и B выпукл. Далее, из $c < d$ следует $c^2 \leq cd \leq d^2$. Но элемент и его квадрат лежат в одном архимедовском классе, так что $c^2, d^2 \in B$ и $cd \in B$ ввиду выпуклости B .

Лемма доказана. Отметим, что в [8] аналогичное утверждение доказано для упорядоченных полугрупп.

Продолжим доказательство теоремы.

Архимедовскими классами группоида A будем считать архимедовские классы группоидов A_1 и A_2 .

Если идемпотент $e \in A_1 \cap A_2$ образует в A_1 отдельный архимедовский класс, а в A_2 входит в больший архимедовский класс, то не будем считать, что $\{e\}$ образует в A отдельный архимедовский класс. Аналогичное соглашение нужно сделать в ситуации, когда A_1 и A_2 поменялись ролями. При этих соглашениях в A может быть только два архимедовских класса, имеющих непустое пересечение.

Покажем, что A состоит не более чем из двух архимедовских классов. Действительно, если B', C' и D' — три архимедов-

ских класс, $c < d < b$ для некоторых $b \in B'$, $c \in C'$, $d \in D'$ и $C' \cap D' = \emptyset$, то, положив

$$C = C', \quad B = B' \quad \text{и}$$

$$D = \{x \mid \exists b' \in B, d' \in D' : d' \leq x \leq b', x \in A\} = D' \cup B',$$

получим стандартное противоречие. Если $D' \cap B' = \emptyset$, то стандартное противоречие получим при $C = B'$, $B = C'$ и $D = C' \cup D'$.

Если A состоит из одного архимедовского класса, то A удовлетворяет условию 1) при $A_1 = A$, $A_2 = \emptyset$ или $A_2 = A$, $A_1 = \emptyset$. Если в A два архимедовских класса, причем оба они содержатся, например, в A_1 , то опять-таки выполнено условие 1), причем A^*_1 — один, а A^*_2 — другой архимедовский класс. И, наконец, если один из архимедовских классов содержится в A_1 , а другой в A_2 , то выполнено условие 2). Таким образом, из модулярности структуры $V(A)$ следует, что A удовлетворяет одному из условий 1) или 2).

Если выполнено одно из условий 1) или 2), то $B \cup C = B \cup C$ для любых выпуклых подгруппоидов B и C из A . Поэтому $V(A)$ является подструктурой структуры всех подмножеств множества A , и, следовательно, она дистрибутивна.

Теорема доказана.

Теорема 5. Структура выпуклых подгруппоидов неоднородного упорядоченного группоида A является структурой с дополнениями тогда и только тогда, когда A является объединением непересекающихся целого архимедового группоида $A_1 \neq \emptyset$ и дуально целого архимедового группоида $A_2 \neq \emptyset$, причем $a_1 < a_2$ для любых $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$.

Доказательство. Подгруппоид B группоида A назовем левым, если из $b \in B$, $a < b$ следует, что $a \in B$. Дуальным образом определяются правые подгруппоиды. Из этих определений следует, что левые и правые подгруппоиды выпуклы.

Необходимость. Пусть B — собственный выпуклый подгруппоид неоднородного упорядоченного группоида A , структура выпуклых подгруппоидов которого является структурой с дополнениями. Покажем, что B — или левый, или правый подгруппоид.

Пусть C — дополнение к B и, для определенности, $b_0 < c_0$ для некоторых $b_0 \in B$, $c_0 \in C$. Если B — не левый, то для некоторого $a \in A$ будет $a < b$ для всех $b \in B$. Но тогда $B \cup C$ не содержит a и не совпадает с A (см. (2.1)), что невозможно. Аналогично, B — правый, если $b_0 > c_0$ для некоторых $b_0 \in B$, $c_0 \in C$.

Все собственные левые, также как и все собственные правые подгруппоиды образуют по включению цепь. Объединение всех собственных левых подгруппоидов обозначим через A_1 , а объединение всех собственных правых подгруппоидов — через A_2 .

Эти подгруппоиды выпуклы в A . Покажем, что их пересечение пусто.

Предположим, что $x \in A_1 \cap A_2$. Тогда $x \in A_1$ и найдется собственный левый подгруппоид L , так что $x \in L$. Собственность L означает, что для некоторого $c \in A$ и для всех $a \in L$ выполняется условие $a < c$. Аналогично находятся такой собственный правый подгруппоид R , что $x \in R$, и такой элемент b , что $b < a$ для любого $a \in R$. Поэтому $x \in L \cap R$ и $b < a < c$ для любого $a \in L \cap R$. Это значит, что собственный выпуклый подгруппоид $L \cap R$ не является ни левым, ни правым, вопреки доказанному выше. Полученное противоречие показывает, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Покажем, далее, что каждый элемент $a \in A$ содержится в некотором левом или правом собственном подгруппоиде группоида A .

Действительно, если $a^2 < a$, то a не может быть максимальным элементом в A , ибо левый подгруппоид $(-\infty, a)$ не имел бы в таком случае дополнения: его теоретико-множественное дополнение состояло бы только из a и не являлось бы группоидом. Поэтому левый подгруппоид $(-\infty, a]$, содержащий a , является собственным. Если $a^2 > a$, то аналогичным образом строится содержащий его правый подгруппоид. Если же $a^2 = a$, то a сам образует собственный выпуклый подгруппоид. Если a — минимальный элемент в A , то это левый, а если максимальный, то правый подгруппоид. Но идемпотент e может входить в A только в качестве крайнего элемента, ибо в противном случае выпуклый подгруппоид $\{e\}$ не может иметь дополнения, являющегося выпуклым подгруппоидом в A .

Итак, $A = A_1 \cup A_2$, ибо каждый элемент $a \in A$ входит или в A_1 , или в A_2 . При этом A_1 содержит все целые элементы, кроме идемпотента f , являющегося максимальным элементом в A (если такой элемент в A существует), а для A_2 справедливо дуальное утверждение. Ввиду того, что A_1 и A_2 не пересекаются, это значит, что A_1 — целый, а A_2 — дуально целый группоид. Из определения этих группоидов следует также, что $a_1 < a_2$ для любых $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$.

Докажем, наконец, что A_1 архимедов.

Пусть $a < b$, $a, b \in A_1$. Если бы было $a < v(b)$ для любого $v(b) \in [b]$, то для любого элемента x собственного выпуклого подгруппоида V_b (см. (1.1)) было бы $a < x$, т. е. V_b был бы правым и, следовательно, $V_b \subset A_1 \cap A_2$, что невозможно. Поэтому $v(b) \leq a$ для некоторого $v(b) \in [b]$.

Аналогично доказывается архимедовость группоида A_2 .

Достаточность. Пусть $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ и $a_1 < a_2$ для любых $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, причем A_1 — целый, а A_2 — дуально целый архимедовы подгруппоиды в A . Пусть B — собственный выпуклый подгруппоид в A .

Если $B \subset A_1$, то из архимедовости целого группоида A_1 и

выпуклости подгруппоида B следует, что B — левый подгруппоид в A_1 . Действительно, если $b \in B$ и $a < b$, то $v(b) \leq a$ для некоторого $v(b) \in [b]$ и $a \in B$. Аналогично, если $B \subset A_2$, то B — правый подгруппоид. В первом случае дополнением к B может служить A_2 , а во втором может служить A_1 .

Если же $B \cap A_1 \neq \emptyset \neq B \cap A_2$, то $B = A$. Действительно, пусть $b_1 \in B \cap A_1$, а $b_2 \in B \cap A_2$, так что $b_1 < b_2$. Рассмотрим $a \in A_1$. Если $b_1 \leq a$, то $b_1 \leq a \leq b_2$ и $a \in B$. Если же $a < b_1$, то ввиду архимедовости целого группоида A для некоторого $v(b_1) \in [b_1]$ будет $v(b_1) \leq a$. Но из $v(b_1) \leq a \leq b_1$ следует, что $a \in B$. Итак, $A_1 \subset B$ и, аналогично, $A_2 \subset B$, т. е. $B = A$. Поэтому B обладает дополнением \emptyset . Теорема доказана.

Следствие. Если структура выпуклых подгруппоидов неодноэлементного упорядоченного группоида A является структурной с единственными дополнениями, то A — двухэлементная полугруппа.

Действительно, поскольку любой левый подгруппоид является дополнением для любого правого подгруппоида, то A_1 — единственный левый, а A_2 — единственный правый подгруппоид в A . Из этого следует, что и A_1 и A_2 одноэлементны, ибо, например, из $a \in A_2$, $a^2 < a$, следовало бы, что в A , кроме A_1 , имеется левый подгруппоид $(-\infty, a^2]$. Итак, A — двухэлементный идемпотентный группоид, а следовательно, и полугруппа.

§ 3. Упорядоченные полугруппы, все подполугруппы которых выпуклы

Класс полугрупп, названный в заглавии параграфа, является в некотором смысле дуальным классу упорядоченных полугрупп, рассмотренному в работе [6]. Напомним, что мы изучаем здесь только случай линейной упорядоченности.

Примером полугруппы интересующего нас класса является следующая, состоящая из восьми элементов, полугруппа S . Она упорядочивается неравенствами

$$a < a^2 < e < x < y < c < b^2 < b, \quad (3.1)$$

а ее таблица Кэли имеет следующий вид:

	a	a^2	e	x	y	c	b^2	b
a	a^2	e	e	x	x	x	x	x
a^2	e	e	e	x	x	x	x	x
e	e	e	e	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x
y	y	y	y	y	y	y	y	y
c	y	y	y	y	y	c	c	c
b^2	y	y	y	y	y	c	c	c
b	y	y	y	y	y	c	c	b^2

Полностью этот класс полугрупп описывает приводимая ниже теорема.

Теорема 1. Упорядоченная полугруппа, всякая подполугруппа которой является выпуклой, o -изоморфна или дуально изоморфна одной из следующих упорядоченных полугрупп:

- 1) Полугруппа S .
- 2) Полугруппа, получающаяся из S путем отождествления x и y , или e и x , или y и s , или путем одновременного отождествления нескольких из этих пар элементов.
- 3) Полугруппа, мультипликативно дуальная одной из полугрупп 1) или 2) — ее таблица Кэли получается из таблицы (3.2) предварительно транспонированной.
- 4) Полугруппа, являющаяся подполугруппой одной из полугрупп, описанных в пунктах 1)–3).

Доказательство. Пусть A — упорядоченная полугруппа, все подполугруппы которой выпуклы. Тогда A периодична и, более того, любая ее моногенная подполугруппа не более чем трехэлементна. Действительно, если $a \in A$ — не идемпотент, то из выпуклости моногенной подполугруппы, порожденной элементом a^2 , а также из того, что при любой упорядоченности элемент a^3 расположен между элементами a^2 и a^4 , следует, что или $a^3 = a^2$, или $a^3 = a^4$. В первом случае $[a]$ двух-, а во втором трехэлементна.

Из доказанного, в частности, следует, что A обладает идемпотентами. Как известно (см. [7]), множество E всех идемпотентов образует в A подполугруппу. Всякая идемпотентная полугруппа является коммутативной связкой матричных полугрупп (см., например, [4]). Это в работе [7] показал, что в упорядоченной полугруппе идемпотентов каждая компонента этой связки является лево- или правосингулярной полугруппой. Но в таких полугруппах любые два элемента образуют подполугруппу, которая в нашем случае должна быть выпуклой. Поэтому такая компонента не может содержать трех различных элементов (иначе крайние из этих трех элементов образовывали бы невыпуклую подполугруппу), т. е. она одно- или двухэлементна.

Ввиду конечности всех матричных компонент полугруппы E из любых двух ее компонент K_1 и K_2 , для которых $K_1 K_2 \subset K_1$, можно выбрать по одному элементу так, что эти два элемента образуют в A абелеву подполугруппу B_{12} . Действительно, как показал Сэто [7], умножение элементов из различных компонент полностью определяется упорядоченностью элементов полугруппы. Именно, если произведение лежит в правосингулярной (левосингулярной) компоненте, то оно равно тому из элементов этой компоненты, который расположен ближе всего в смысле упорядоченности к правому (левому) сомножителю. Поэтому для построения B_{12} выберем в K_2 произвольный элемент, а в K_1 элемент, ближайший к элементу из K_2 в смысле упорядоченности.

Покажем, что в A не может найтись третья компонента K_3 , для которой было бы $K_1 K_3 \subset K_1$, $K_2 K_3 \subset K_2$. Предположим, что

такие три компоненты найдутся. Пусть B_{23} построена из элементов $c \in K_3$ и $b \in K_2$. Построим B_{12} из элемента b и некоторого элемента a из K_1 . Тогда полугруппу B_{13} можно составить из элементов a и c . Напомним, что все эти подполугруппы должны в нашем случае быть выпуклыми.

Из описания всех способов упорядочения абелевой идемпотентной полугруппы, полученного Сэто [7], следует, что для элементов a , b и c возможны лишь следующие два взаимных расположения

$$a < b < c, \quad a < c < b, \quad (3.3)$$

а также дуальные им. Но первое из неравенств (3.3), также как и дуальное ему, противоречит тому, что a и c образуют выпуклую полугруппу B_{13} . Второе же из неравенств (3.3), также как и дуальное ему неравенство, противоречит выпуклости B_{12} . Полученное противоречие и показывает, что K_3 с описанными выше свойствами не существует.

Из всего сказанного выше относительно E следует, что если E состоит хотя бы из двух компонент, то полуструктура, ассоциированная с фактор-полугруппой полугруппы E по ее разбиению на матричные компоненты, совпадает с одной из следующих:

$$\{K_1, K_2, K_3\}, \{K_1, K_2\} \quad (K_1 < K_2, K_2 \cap K_3 = K_1) \quad (3.4)$$

В этом случае ни одна из верхних компонент не может быть двухэлементной. В противном случае ее минимальный или же ее максимальный элемент вместе со всеми элементами остальных компонент образовывал бы подполугруппу, не являющуюся выпуклой. Поэтому вся E не более чем четырехэлементна и является выпуклой подполугруппой одной из двух полугрупп, которые мы будем обозначать через E_1 и E_2 , соответствующих первой из полуструктур (3.4). Для получения таблицы Кэли полугрупп E_1 и E_2 нужно рассмотреть соответственно часть таблицы (3.2) или часть ее транспонированной таблицы, которая соответствует элементам e , x , y и c .

Вернемся к рассмотрению полугруппы A . Предположим сначала, что ее подполугруппа идемпотентов совпадает с E_1 . Кроме элементов из E_1 полугруппа A может содержать элементы только одной моногенной полугруппы с нулем e и одной моногенной полугруппы с нулем c . Каждая из этих полугрупп, как мы видели в начале доказательства, содержит не более трех элементов, так что вся A должна содержать не более восьми элементов. Если элементы из E_1 упорядочены неравенствами $e < x < y < c$, то эти восемь элементов удовлетворяют неравенствам (3.1). Если же для элементов из E_1 задана дуальная упорядоченность, то и эти восемь элементов удовлетворяют неравенствам, дуальным неравенствам (3.1).

Пусть обе моногенные полугруппы, о которых шла речь в предыдущем абзаце, трехэлементны и пусть они суть $S_e =$

$= \{a, a^2, e\}$ и $S_c = \{b, b^2, c\}$. На стр. 194 заметки [2] в ходе доказательства теоремы 3 показано, что $S_e S_c = ec = x$ и $S_c S_e = ce = y$. Там же показано, что $x S_e = xe = x$, $S_e x = ex = x$, $S_e x = cx = y$ и $x S_c = xc = x$. Записав аналогичные равенства для умножения наших моногенных полугрупп на y , мы и получим таблицу (3.2).

Аналогичные рассуждения в случае, когда подполугруппа идемпотентов полугруппы A совпадает с E_2 , приводят к транспонированной таблице таблицы (3.2).

При замене S_e и S_c их выпуклыми подполугруппами, а E_1 и E_2 другими возможными в нашем случае идемпотентными полугруппами, проделанные рассуждения приведут к полугруппам, α -изоморфным полугруппам 2) — 4).

С другой стороны, непосредственная проверка показывает, что в любой из полугрупп 1) — 4) всякая подполугруппа выпукла. Теорема доказана.

§ 4. Упорядоченные группоиды с нулем без нетривиальных выпуклых подгруппоидов с нулем

Нетривиальными будем считать подгруппоиды группоида A , отличные от A и нулевого подгруппоида.

Теорема 1. *Упорядоченный группоид A с нулем 0 , состоящий не менее чем из трех элементов, тогда и только тогда не содержит нетривиальных выпуклых подгруппоидов с 0 , когда 0 является максимальным (или минимальным) элементом в A , а $A \setminus \{0\}$ целым (соответственно, дуально целым) архимедовым подгруппоидом в A .*

Доказательство. Если группоид A принадлежит классу группоидов, указанному в заглавии настоящего параграфа, то нуль должен быть его минимальным или максимальным элементом, ибо в противном случае элементы, лежащие по одну сторону от нуля (включая нуль), образовывали бы нетривиальный выпуклый подгруппоид с нулем. Будем сначала предполагать, что нуль является минимальным элементом в A .

Для произвольного элемента $a \in A$, $a \neq 0$ рассмотрим множество

$$A_a = \{x \in A \mid \exists v(a) \in [a] : x \leq v(a)\},$$

содержащее нуль и a . Кроме того, A_a — выпуклый подгруппоид: из $x \leq c \leq y$, $x \in A_a$, $y \in A_a$ следует, что $x \leq v(a)$, $y \leq u(a)$ для некоторых $v(a)$, $u(a) \in [a]$, откуда $xy \leq v(a)u(a)$ и $c \leq u(a)$, т. е. $xy, c \in A_a$. Поэтому $A_a = A$.

Покажем, что A — дуально целый группоид. Отметим сперва, что из $a^2 < a$ следует неравенство $v(a) < a$ для любого $v(a) \in [a]$ (это доказывается индукцией по числу вхождений буквы a в слово $v(a)$). Если для некоторого $a \in A$, $a \neq 0$ было бы $a^2 < a$, то ввиду только что сказанного A_{a^2} не содержал бы эле-

мента a . Но $A_{a^2} \neq A$ возможно лишь при $a^2 = 0$. С другой стороны, $A_a = A$; так что a являлся бы максимальным элементом в A . Поскольку A содержит не менее трех элементов, то найдется $b \in A$, для которого $0 < b < a$, так что $b^2 \leq a^2 = 0$ и $b^2 = 0$. Но $A_b = A$, так что $a \leq v(b)$ для некоторого $v(b) \in [b]$. Ясно, что $v(b) \neq b$, а потому $v(b) = 0$ ввиду $b^2 = 0$. Однако, неравенство $a \leq 0$ невозможно. Полученное противоречие показывает, что A — дуально целый группоид.

Покажем, что $A \setminus \{0\}$ является архимедовым подгруппоидом в A . Действительно, из $0 < a \leq b$ следует $0 < a \leq a^2 \leq ab$ (a -дуально цел), т. е. $A \setminus \{0\}$ — подгруппоид в A . Далее, $A_a = A$, так что $b \leq v(a)$ для некоторого $v(a) \in [a]$, т. е. A архимедов.

Аналогично доказывается, что если 0 — максимальный элемент, то $A \setminus \{0\}$ целый архимедовый подгруппоид.

Наоборот, пусть A — упорядоченный группоид с нулем в качестве минимального элемента и $A \setminus \{0\}$ — дуально целый архимедов подгруппоид в A . Пусть B — ненулевой выпуклый подгруппоид с нулем в A . Если $b \in B$ и $b \neq 0$, то ввиду архимедовости для любого $a \in A$ найдется $v(b) \in [b]$, так что $a \leq v(b)$ и, следовательно, $a \in B$, $B = A$. В дуальном случае аналогично доказывается, что A не содержит нетривиальных выпуклых подгруппоидов с нулем.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Упорядоченный группоид с нулем, состоящий из двух элементов, не может содержать нетривиальных подгруппоидов с нулем. В то же время, например, группоид A с нулевым умножением, состоящий из элементов 0 и a , $0 < a$, не удовлетворяет утверждению теоремы о том, что $A \setminus \{0\} = \{a\}$ является подгруппоидом.

Определение. Группоид с нулем 0 называется *правым нильгруппоидом*, если для любого его элемента x существует такое натуральное число $n \in \mathbb{N}$, что $\dots((x^2 \cdot x)x) \dots x = 0$ (в левой части этого равенства n сомножителей).

Аналогично определяется *левый нильгруппоид*. В случае ассоциативности степеней эти понятия совпадают — тогда мы говорим просто о *нильгруппоиде*.

Группоид называется *альтернативным*, если его подгруппоид, порожденный любыми двумя его элементами, ассоциативен.

Ясно, что альтернативный группоид является группоидом с ассоциативными степенями.

Лемма 1. Если упорядоченный группоид A с нулем 0 без нетривиальных выпуклых подгруппоидов с 0 содержит идемпотент $e \neq 0$, то $A \setminus \{0\}$ — подгруппоид, в котором $v(a) = e$ для любого a при некотором $v(a) \in [a]$.

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, если A содержит два элемента. Пусть, далее, A состоит по крайней мере из трех элементов. По теореме 1 нуль является максималь-

ным или минимальным элементом в A . Пусть он, для определенности, минимален. Покажем, что тогда идемпотент e является максимальным элементом в A . Рассмотрим выпуклый подгруппоид $(-\infty, e]$. Он содержит 0 и $e \neq 0$, так что $A = (-\infty, e] = [0, e]$.

Ввиду теоремы 1 и нашего предположения о минимальности нуля $A \setminus \{0\}$ — дуально целый архимедовый подгруппоид. Поэтому для любого $a \in A \setminus \{0\}$ найдется такое $v(a) \in [a]$, что $e \leq v(a)$. Но ввиду максимальной e это означает, что $v(a) = e$.

Лемма доказана.

Следствие 1. Если группоид A из леммы 1 — с ассоциативными степенями, то $A \setminus \{0\}$ — нильгруппоид с нулем e .

Действительно, в этом случае $a^n = e$ для любого $a \in A \setminus \{0\}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, моногенная полугруппа, порожденная a , конечна, $a^n = a^{n+1}$ и $ae = ea = a^{n+1} = a^n = e$, т. е. e — нуль группоида $A \setminus \{0\}$.

Следствие 2. Если идемпотент e из леммы 1 является правой единицей в $A \setminus \{0\}$, то A состоит только из 0 и e .

Действительно, пусть $a \in A \setminus \{0\}$. По лемме $v(a) = e$ для некоторого $v(a) \in [a]$. Предположим, для определенности, что $a \leq a^2$. Индукцией по числу вхождений буквы a в слово $v(a)$ можно тогда показать, что $a \leq v(a)$. Поэтому $a \leq a^2 \leq a \cdot v(a) = a \cdot e = a$, т. е. $a^2 = a$ и $e = v(a) = a$.

Теорема 2. Для ненулевого упорядоченного группоида A с минимальным нулем 0 без нетривиальных содержащих 0 выпуклых подгруппоидов эквивалентны следующие условия:

- I A — целый группоид без единицы;
- II A — ненулевой правый нильгруппоид;
- III A — альтернативный группоид с делителями нуля;
- IV A — двухэлементная нильполугруппа.

Доказательство. Импликация IV \Rightarrow III очевидна.

Пусть A — ненулевой правый нильгруппоид. Если в этом правом нильгруппоиде найдется элемент a , для которого $a^2 \geq a$, то

$$a \leq a^2 \leq a^2 \cdot a \leq (a^2 \cdot a) \cdot a \leq \dots \leq (\dots (a^2 \cdot a) \cdot a) \dots) a = 0$$

и $a = 0$. Итак, A — целый группоид. Но единственным идемпотентом правого нильгруппоида является его нуль, который не может быть правой единицей в ненулевом группоиде. Следовательно, II \Rightarrow I.

Если выполнено условие I, то A не может быть идемпотентным, ибо в этом случае ввиду леммы 1 он содержал бы не более одного, а поскольку он по условию теоремы — ненулевой, в точности один идемпотент, отличный от нуля. Но тогда этот идемпотент являлся бы единицей группоида A , вопреки условию I.

Если $a \in A$, $0 \neq a \neq a^2$, то выпуклый подгруппоид $(-\infty, a)$ содержит 0 , но не содержит a . Поэтому он отличен от A и, сле-

довательно, является нулевым, так что, в частности, $a^2 = 0$. Однако, множество

$$X = \{x \in A \mid x^2 = 0\},$$

содержащее нуль, является выпуклым подгруппоидом и поскольку $a \in X$, то $X = A$. Но в полугруппе с нулевым умножением, которой, таким образом, является A , любое подмножество $(-\infty, a)$ является содержащим нуль выпуклым подгруппоидом и, следовательно, A двухэлементен. Итак, нами показано, что $I \Rightarrow IV$.

Перейдем к доказательству импликации $III \Rightarrow II$.

Если x и y — делители нуля альтернативного группоида A , причем $x \leq y$ и $a \in A$, то возможны три различных взаимных расположения этих трех элементов. Покажем, что при каждом из них $a^2 = 0$.

Если $a \leq x$, то $a \leq x \leq y$ влечет $a^2 \leq x^2 \leq xy = 0$ и $a^2 = 0$.

Если $x < a \leq y$, то поскольку в A выполнено условие ассоциативности степеней, из теоремы I следует, что существует $l \in N$, для которого $a \leq x^l$. Но из неравенств $a \leq y$ и $a \leq x^l$ следует, что $a^2 \leq x^l y = 0$, так что $a^2 = 0$.

Если $x \leq y < a$, то как и в предыдущем абзаце, найдется такое $l \in N$, что $a \leq x^l$, и, аналогично, такое $m \in N$, что $a \leq y^m$. Поэтому $a^2 \leq x^l y^m = 0$ и $a^2 = 0$.

Итак, A — ненулевая нильполугруппа: $x \in A$, $x \neq 0$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Свободные группоиды многообразий всех группоидов с нулем, абелевых группоидов с нулем, полугрупп с нулем и абелевых полугрупп с нулем, а также все их подполугруппоиды, содержащие нуль и все их 0-эпиморфные образы упорядочиваемы так, чтобы у них не было нетривиальных выпуклых подгруппоидов с нулем.*

Доказательство. Свободный группоид A любого из названных в формулировке теоремы многообразий можно упорядочить, определив отношение порядка в два этапа. На первом этапе элементы сравниваются по длине (количеству свободных образующих в их записи), причем элементы меньшей длины считаются меньшими при этом порядке. Этим заведомо гарантируется выполнение условия архимедовости и дуальная целостность A . Нуль считается элементом длины 0, т. е. минимальным элементом в A .

На втором этапе строится лексикографическая или какая-нибудь другая упорядоченность элементов одинаковой длины, гарантирующая выполнение условия монотонности умножения. Ниже такая упорядоченность будет построена для свободных группоидов всех четырех интересующих нас многообразий. Будем обозначать рассматриваемое многообразие через \mathfrak{A} , его свободный группоид через A , а множество свободных образующих — через X . Мы ограничимся только определениями, детальная про-

верка выполнения условия монотонности предоставляется читателю.

Пусть сначала \mathfrak{M} — многообразие всех группоидов с нулем. Элемент $a \in A$ является словом от образующих из X , в котором при помощи скобок показан порядок выполнения умножения. Все слово a тоже помещено в скобки.

Заменим каждую пару скобок в a символом $x_0 \notin X$, который будем писать вместо правой скобки. По такой бесскобочной записи легко восстановить первоначальную запись элемента a . Если обозначить символом «*» операцию приписывания, то умножение в A задается по правилу

$$ab = a * bx_0. \quad (4.1)$$

Определим теперь порядок на множестве элементов одинаковой длины (такие элементы содержат и одинаковое количество букв из алфавита $X \cup \{x_0\}$). С этой целью упорядочим линейно множество $X \cup \{x_0\}$. Будем считать, что

$$a = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n} < b = x_{\beta_1} x_{\beta_2} \dots x_{\beta_n}, \quad (4.2)$$

где $x_{\alpha_i}, x_{\beta_i} \in X \cup \{x_0\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, если

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \quad x_{\alpha_k} < x_{\beta_k} \quad (4.3)$$

в $X \cup \{x_0\}$.

Пусть теперь \mathfrak{M} — многообразие абелевых группоидов с нулем. Упорядоченность элементов одинаковой длины будем в этом случае строить индуктивно.

Упорядочив произвольно множество X , положим

$$ab < cd, \text{ если } a \leq c, b \leq d \text{ или } a \leq d, b \leq c \quad (4.4)$$

для $a, b, c, d \in X$. Этим для элементов длины два задается, вообще говоря, частичная упорядоченность. Продолжим ее произвольным образом до линейной.

Предположим, что для слов, длина которых меньше n , линейная упорядоченность уже определена (напомним, что слова разной длины сравниваются по длине). Пусть $u = ab$ и $v = cd$ — слова длины n (множители a и b для такого слова u однозначно определены). Множество всех слов такой длины сначала упорядочим частично по правилу (4.4), а затем продолжим возникший частичный порядок произвольным образом до линейного.

Если \mathfrak{M} — многообразие всех полугрупп с нулем, то определим (4.2), где $x_{\alpha_i}, x_{\beta_i} \in X$, $i = 1, 2, \dots, n$, если выполнены условия (4.3), причем последнее неравенство выполняется в X , которое предполагается заранее линейно упорядоченным.

Наконец, если \mathfrak{M} — многообразие абелевых полугрупп с нулем и X как-то упорядочено, то положим

$$x_{\alpha_1}^{i_1} x_{\alpha_2}^{i_2} \dots x_{\alpha_n}^{i_n} < x_{\alpha_1}^{j_1} x_{\alpha_2}^{j_2} \dots x_{\alpha_n}^{j_n},$$

где $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n} \in X$ $i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_n \in N \cup \{0\}$ и

$$x_{\alpha_1} < x_{\alpha_2} < \dots < x_{\alpha_n} \text{ в } X,$$

если при $\sum_{e=1}^n i_e = \sum_{e=1}^n j_e$ выполняются условия

$$i_1 = j_1, \dots, i_{k-1} = j_{k-1}, i_k < j_k.$$

Поскольку в каждом из четырех разобранных случаев A превращен в дуально целый архимедовый группоид, то таков же и любой его o -эпиморфный образ B , а также любой его подгруппоид C . Поэтому B и C тоже не содержат собственных выпуклых подгруппоидов с нулем.

Теорема доказана.

Литература

1. Габович Е. Я., Частично упорядоченные группы, лишенные нетривиальных выпуклых подгрупп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 289—293.
2. Габович Е. Я., Три теоремы о линейно упорядоченных периодических полугруппах. Матем. заметки, 1969, 6, № 2, 187—196.
3. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре. Москва, 1962.
4. Ляпин Е. С., Полугруппы. Москва, 1960.
5. Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва, 1965.
6. Хион Я. В., О частично упорядоченных полугруппах, в которых собственные выпуклые подполугруппы не пересекаются. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1963, 27, 67—74.
7. Saitô, T., Ordered idempotent semigroups. J. Math. Soc. Japan. 1962, 4, 150—169.
8. Saitô, T., The archimedean property in an ordered semigroup. J. Austral. Math. Soc., 1968, 8, 547—556.

Поступило
31 III 1970

JÄRJESTATUD GRUPOIDID NING NENDE KUMERAD ALAMSÜSTEEMID

J. Gabovits

Resümee

Uuritakse osaliselt järjestatud grupoide kumerate alamgruroidideta ning seost lineaarselt järjestatud grupoidi ning tema kumerate alamgruroidide struktuuri vahel. Leitakse kõik lineaarselt järjestatud poolrühmad, mille iga alampoolrühm on kumer. Kirjeldatakse nulliga lineaarselt järjestatud grupoide, mis ei oma nullist erinevaid kumeraid nulliga alamgrupoide.

ORDERED GROUPOIDS AND THEIR CONVEX SUBSYSTEMS

J. Gabovich

Summary

The partially ordered groupoids without convex subgroupoids and the connections between ordered groupoid and the lattice of its convex subgroupoids are studied. Ordered semigroups in which every subgroup is convex are described. Ordered groupoids with zero without convex subgroupoids with zero are examined.

ДВЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УПОРЯДОЧИВАЕМЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ

О. Иванова

Кафедра алгебры и геометрии

Статья посвящена двум вопросам из теории линейно упорядоченных систем. Первый из них — вопрос об упорядочиваемости свободного объединения, второй вопрос — является ли каждая линейно упорядоченная алгебра O -эпиморфным образом свободной алгебры данного многообразия при некотором линейном упорядочении последней.

Вопрос об упорядочиваемости свободного объединения групп был решен А. А. Виноградовым в [1]. Джонсон в [6] усилил этот результат, доказав, что свободное объединение упорядоченных полугрупп с сокращением в многообразии полугрупп с единицей упорядочиваемо. С другой стороны, Е. Я. Габович в [2] отмечает, что свободное объединение полугрупп с идемпотентами всегда неупорядочиваемо, а также, что свободное объединение упорядоченных полугрупп в многообразии n -нильпотентных полугрупп (при $n > 2$) не всегда упорядочиваемо. Нетрудно построить примеры линейно упорядоченных колец, свободное объединение которых неупорядочиваемо (см. замечание 2).

Второй вопрос для групп также решен положительно — это хорошо известная теорема Ивасавы—Неймана (см., например, [5]). Автором, совместно с Е. Я. Габовичем и Г. И. Рубановичем [3], было установлено, что не всякая линейно упорядоченная полугруппа есть O -эпиморфный образ некоторой свободной полугруппы при каком-либо ее упорядочении. В работе автора [4], опираясь на указанный выше результат, доказано, что не всякое линейно упорядоченное кольцо является O -эпиморфным образом свободного кольца при некотором его упорядочении. Таким образом, замечен некоторый параллелизм в решении этих двух вопросов.

В настоящей статье в теоремах 1 и 2 и в замечании 2 полностью решаются оба вопроса для абсолютно свободного многообразия универсальных алгебр, т. е. для многообразий универсальных алгебр, задаваемых пустым множеством тождеств. Наметившийся параллелизм в одном из случаев нарушается. Дока-

зательства носят конструктивный характер и позволяют непосредственно построить искомый порядок в свободном произведении (теорема 1) или в свободной алгебре и искомый O -эпиморфизм (теорема 2).

Определение 1. Пусть G — универсальная алгебра с системой операций Ω . Алгебра G называется линейно упорядоченной, если множество G линейно упорядочено и для любых

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in G, \quad \omega \in \Omega$$

из неравенств

$$a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$$

следует неравенство

$$a_1 \dots a_n \omega \leq b_1 \dots b_n \omega.$$

Заметим, что это определение не совпадает с известными определениями для некоторых классов универсальных алгебр. Так упорядоченные кольца не будут упорядоченными в смысле определения 1.

Определение 2. Эпиморфизм φ называется O -эпиморфизмом, если он сохраняет порядок, т. е. из $x \leq y$ следует

$$x\varphi \leq y\varphi.$$

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, под упорядоченностью будем понимать линейную упорядоченность.

Теорема 1. В абсолютно свободном многообразии Ω -алгебр без нульварных операций свободное объединение упорядоченных универсальных алгебр может быть упорядочено с сохранением порядка свободных слагаемых.

Доказательство. Пусть A_α , $\alpha \in I$, — упорядоченные Ω -алгебры, Ω не содержит нульварных операций и $A = \Sigma^* A_\alpha$ — свободное объединение своих подалгебр A_α . Зафиксируем некоторые линейные порядки в множествах I и Ω .

Будем, как обычно, считать элементы из A_α словами ранга 1, элементы вида $a_1 \dots a_n \omega$, где $\omega \in \Omega$, словами ранга 2, если не все a_i ($i = 1, \dots, n$) принадлежат одному свободному слагаемому, и, вообще, при $k > 2$ словами ранга k будем считать результат применения некоторой операции из Ω к словам ранга меньшего k , хотя бы одно из которых имеет ранг $k - 1$. Таким образом, ранг каждого элемента однозначно определен.

Для каждого свободного слагаемого A_α рассмотрим множество A'_α , состоящее из всех слов ранга, не меньшего двух, в записи которых встречается хотя бы один элемент из A_α и не встречается ни одного элемента из A_ν при $\nu > \alpha$ в смысле упорядоченности в I . Назовем множество A'_α шлейфом слагаемого A_α . Если I обладает первым элементом, то шлейф первого слагаемого пуст. Все остальные шлейфы непусты.

Поскольку Ω не содержит нульварных операций, алгебра A разобьется на непересекающиеся подмножества A_α и A'_α , причем

$$A = \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in I} A'_\alpha \right) \quad (1)$$

Упорядочим совокупность компонент разложения (1), положив

$$A'_\alpha < A_\alpha < A'_\beta < A_\beta \quad (2)$$

для любых $\alpha, \beta \in I, \alpha < \beta$. Продолжим этот порядок до частичного порядка на множестве A , положив $a < b$, если компонента разложения (1), содержащая элемент a , меньше, в смысле (2), компоненты, содержащей b .

Продолжим этот частичный порядок до линейного, упорядочив между собой элементы каждой из компонент разложения (1). Элементы множеств A_α линейно упорядочим, сохранив порядки, заданные в них как в упорядоченных алгебрах. Линейный порядок внутри шлейфов будем вводить единообразным способом одновременно во всех A'_α индуктивно (индукцией по рангу слов).

При упорядочении слов ранга, не превосходящего двух, будем исходить из того, что совокупность $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ слов ранга 1 уже упорядочена линейно в силу сказанного выше. Для слов

$$s = a_1 \dots a_m \omega_1 \quad \text{и} \quad t = b_1 \dots b_n \omega_2 \quad (3)$$

ранга 2 из фиксированного шлейфа A'_α будем считать, что $s > t$, если выполнено одно из следующих двух условий:

- 1) $\omega_1 > \omega_2$ в смысле упорядоченности, фиксированной в Ω ;
- 2) $\omega_1 = \omega_2$ и $a_1 = b_1, \dots, a_{i-1} = b_{i-1}$, но $a_i > b_i$ в силу упорядоченности, определенной для слов ранга 1.

Построенное отношение линейно, антирефлексивно и транзитивно, т. е. является линейным порядком на подмножестве слов ранга 2 из A'_α . Продолжим его до линейного порядка на множестве слов ранга 1 и 2 при помощи соглашения (2).

Пусть для слов ранга, не превосходящего $k-1$, построен линейный порядок и пусть в (3) элементы $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ являются словами ранга, не превосходящего $k-1$, а сами слова s и t имеют ранг, не превосходящий k . Введем линейный порядок во множестве слов шлейфа A'_α , ранг которых не превосходит k , положив $s > t$, если выполняется условие 1) или в силу упорядоченности для слов ранга $\leq k-1$ выполняется условие 2).

Антирефлексивность построенного отношения очевидна. Покажем, что оно транзитивно. Пусть $s, t, u \in A'_\alpha, s < t, t < u$ и пусть ω_1, ω_2 и ω_3 — символы операций, стоящих в конце этих слов. Поскольку Ω упорядочено, то в случаях $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3, \omega_1 < \omega_2 = \omega_3$ и $\omega_1 = \omega_2 < \omega_3$ будет $\omega_1 < \omega_3$, так что $s < u$ ввиду правила 1). В случае же, когда $\omega_1 = \omega_3 = \omega_2$ оба неравенства $s < t$ и $t < u$ выполняются ввиду правила 2). Если при этом s и t — слова (3), а слово u имеет вид

$$u = c_1 \dots c_m \omega, \quad m = n, \quad \omega = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3,$$

то это означает, что

$$\begin{aligned} a_1 = b_1, \dots, a_{i-1} = b_{i-1}, & \quad a_i < b_i, \\ b_1 = c_1, \dots, b_{j-1} = c_{j-1}, & \quad b_j < c_j. \end{aligned}$$

В этом случае

$$a_1 = c_1, \dots, a_{\rho-1} = c_{\rho-1}, \quad a_\rho < c_\rho$$

и $s < u$ по правилу 2), где $\rho = \min \{i, j\}$.

Итак, все A'_α линейно упорядочены и построение линейного порядка в A закончено.

Покажем, что построенный в A линейный порядок превращает A в упорядоченную универсальную алгебру. Пусть

$$u_1 \leq v_1, \dots, u_n \leq v_n, \quad (4)$$

и

$$u = u_1 \dots u_n \omega, \quad v = v_1 \dots v_n \omega.$$

1°. Если $u \in A_\alpha$ и $v \in A_\beta$ при некоторых $\alpha, \beta \in I$, то $u_1, \dots, u_n \in A_\alpha, v_1, \dots, v_n \in A_\beta$. При этом, если $\alpha \neq \beta$, то из (4) ясно, что $\alpha < \beta$, так как $u < v$. Если же $\alpha = \beta$, то $u \leq v$ в силу условия упорядоченности алгебры A_α .

2°. Если $u \in A'_\alpha, v \in A_\beta$ и $\alpha \leq \beta$, то $u < v$ ввиду (2). Если же $\alpha > \beta$, то $v_1, \dots, v_n \in A_\beta$ ввиду $v \in A_\beta$, а в записи по крайней мере одного из u_i входит некоторый элемент из A_α , т. е. u_i либо принадлежит A_α , либо A'_α , и ввиду $\alpha > \beta$ и (2) неравенство $v_i \geq u_i$ невозможно.

3°. Если $u \in A_\alpha, v \in A'_\beta$ и $\alpha < \beta$, то $u < v$ ввиду (2). Если же $\beta \leq \alpha$, то $u_1, \dots, u_n \in A_\alpha$, поскольку $u \in A_\alpha$, и совокупность неравенств (4) невозможна.

4°. Последним из возможных является случай, когда $u \in A'_\alpha, v \in A'_\beta$. Если $\alpha = \beta$, то, учитывая правило 2), имеем $v \geq u$. Если $\alpha < \beta$, то $u < v$ ввиду (2). Неравенство $\alpha > \beta$ невозможно, как и в двух предыдущих пунктах оно противоречило бы (4).

Теорема доказана.

Следствие. Свободное объединение упорядоченных группоидов упорядочиваемо с сохранением порядка слагаемых.

Замечание 1. Свободное объединение в многообразии группоидов с нулем, вообще говоря, неупорядочиваемо.

Действительно, свободное объединение двух неоднородных группоидов с нулевым умножением (и потому упорядочиваемых) не может быть упорядочено, ибо из равенства нулю квадратов всех элементов из свободных слагаемых в упорядоченном группоиде следовало бы равенство нулю всех вообще произведений.

Замечание 2. Аналогично строятся примеры неупорядочиваемых свободных объединений для многих других многообразий универсальных алгебр с нульварными операциями, в частности для многообразий ассоциативных колец и ассоциативных линейных алгебр над полем.

Теорема 2. Всякая упорядоченная Ω -алгебра A является O -эпиморфным образом абсолютно свободной Ω -алгебры (Ω -алгебры слов) при некотором упорядочении последней.

Доказательство. Пусть A — упорядоченная Ω -алгебра и пусть 0_v — ее элемент, отмечаемый нульварной операцией $v \in \Omega_0 \subseteq \Omega$. Пусть X^* некоторая система образующих в A , не содержащая ни одного нуля.

Обозначим Ω -алгебру слов с множеством образующих U^* , мощностю которого равна мощностю X^* , через F . Взаимно-однозначное отображение $\varphi: U^* \rightarrow X^*$ продолжим до эпиморфизма $F \rightarrow A$, который также обозначим символом φ .

Пусть $Y = \Omega_0 \cup U^*$. Определим для $y, y' \in Y$, что $y < y'$ тогда и только тогда, когда $y\varphi < y'\varphi$. При этом определении возникает частичная, вообще говоря, упорядоченность в множестве нульварных операций Ω_0 . Продолжим ее произвольным образом до упорядоченности на всем множестве Ω_0 , а затем и во всем Ω .

Определим в F следующее отношение порядка для слов (индуктивно индукцией по рангу слова). Элементы из Y между собой уже упорядочены. Пусть линейный порядок уже введен в множестве слов, ранг которых не превосходит $k-1$. Для слов $u, v \in F$

$$u = u_1 \dots u_m \omega_1, \quad v = v_1 \dots v_n \omega_2, \quad (5)$$

ранг которых не превосходит k , положим $u < v$, если выполняется одно из условий:

1) $u\varphi < v\varphi$,

2) $u\varphi = v\varphi, \omega_1 < \omega_2$,

3) $u\varphi = v\varphi, \omega_1 = \omega_2, u_i = v_i, \dots, u_{i-1} = v_{i-1}, v_i < v_i$,

в смысле упорядоченности, определенной в множестве слов ранга, не превосходящего $k-1$.

Антирефлексивность и линейность определенного отношения очевидна. Покажем его транзитивность.

Пусть для слов ранга, не превосходящего $k-1$, транзитивность определенного отношения уже доказана. Покажем, что это отношение является транзитивным и на множестве слов, ранг которых не превосходит числа k . Если хотя бы одно из слов t, u и v , для которых

$$t < u, \quad u < v \quad (6)$$

имеет ранг один, то неравенство

$$t < v \quad (7)$$

очевидным образом выполняется. Пусть поэтому,

$$t = t_1 \dots t_i \omega_0,$$

u и v — слова вида (5).

Каждое из неравенств (6) имеет место ввиду выполнения одного из условий 1)–3). Все девять возможных при этом случаев могут быть занумерованы при помощи пар (p, q) , где $p, q = 1), 2), 3)$. Убедиться в справедливости (7) в каждом из этих девяти случаев не представляет особого труда. Отметим лишь, что случай (3), 3) рассматривается аналогично разобранным в теореме 1 доказательству транзитивности построен-

ного там отношения, а также что в случае (p, q) справедливость неравенства (3) устанавливается на основе условия r определения порядка, где r — наименьшее из чисел p и q .

Покажем, что определенное на F отношение линейного порядка превращает F в упорядоченную Ω -алгебру, т. е. докажем монотонность операций из Ω .

Пусть в (5) имеет место $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ (так что $m = n$), и

$$u_1 \leq v_1, \dots, u_n \leq v_n. \quad (8)$$

Ввиду определения порядка в F , исходя из порядка в A , условие (8) влечет

$$u_1\varphi \leq v_1\varphi, \dots, u_n\varphi \leq v_n\varphi. \quad (9)$$

Поскольку A является упорядоченной Ω -алгеброй, то из (9) следует, что

$$(u_1 \dots u_n \omega)\varphi = (u_1\varphi) \dots (u_n\varphi)\omega \leq (v_1\varphi) \dots (v_n\varphi)\omega = (v_1 \dots v_n \omega)\varphi. \quad (10)$$

Если в (10) реализуется строгое неравенство, то

$$u_1 \dots u_n \omega < v_1 \dots v_n \omega \quad (11)$$

ввиду правила 1). Если же в (10) мы имеем дело с равенством, но слова

$$u = u_1 \dots u_n \omega, \quad v = v_1 \dots v_n \omega$$

различны, то хотя бы одно из неравенств (8) строгое и (11) будет выполняться ввиду правила 3).

Из самого определения порядка по правилам 1)–3) ясно, что φ является O -эпиморфизмом.

Теорема доказана.

Литература

1. Виноградов А. А., О свободном произведении упорядоченных групп. Матем. сб., 1949, 26, 163—168.
2. Габович Е. Я., Упорядоченные периодические полугруппы. Успехи матем. наук, 1968, 23, № 1, 225—226.
3. Габович Е. Я., Иванова О. А., Рубанович Г. И., Упорядоченные полугруппы, не являющиеся O -эпиморфными образами упорядоченных свободных полугрупп. Сиб. матем. ж., 1970, 11, 2, 470—472.
4. Иванова О. А., Линейно упорядоченные кольца, не являющиеся O -эпиморфными образами упорядоченных свободных колец. Матем. заметки. 1971, 9, № 6, 693—697.
5. Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва, 1965.
6. Johnson R. E., Free products of ordered semigroups. Proc. Amer. Math. Soc., 1968, 19, 697—700.

Поступило
6 I 1970

KAKS TEOREEMI JÄRJESTATAVATEST UNIVERSAALSETEST ALGEBRATEST

O. Ivanova

Resümee

Tõestatakse, et järjestatavate universaalsete algebrate A_α vaba korrutis on järjestatav ning et iga A_α on absoluutselt vaba universaalse algebra O -epimorfne kujund.

TWO THEOREMS ABOUT ORDERABLE UNIVERSAL ALGEBRAS

O. Iwanowa

Summary

Theorem 1. *In variety of all universal algebras without O -ary operations the free product A of orderable universal algebras A_α can be so ordered that all A_α have in A their old orderings.*

Theorem 2. *Every ordered universal algebra is an O -epimorphic image of absolutely free universal algebra A by some ordering of A .*

УПОРЯДОЧЕННЫЕ УНАРНЫЕ АЛГЕБРЫ

Г. Рубанович

Кружок СНО при кафедре алгебры и геометрии

Понятие упорядоченной унарной алгебры естественным образом возникает при изучении упорядоченных полугрупп. Так, например, мы получим упорядоченную унарную алгебру, если в упорядоченной полугруппе определим унарную операцию, как отображение $x \rightarrow x^2$.

Можно надеяться, что описание строения упорядоченных унарных алгебр окажется полезным при изучении упорядоченных полугрупп.

В настоящей работе полностью описываются все линейные порядки произвольной унарной алгебры и дается способ построения таких порядков. Кроме того, для произвольной унарной алгебры подсчитывается кардинальное число ее различных линейных порядков. В частности, доказываем существование унарных алгебр, а также группоидов со счетным множеством линейных порядков.

§ 1. Основные понятия

Унарной алгеброй называется множество с одной унарной операцией. Пусть A — унарная алгебра с операцией (\prime) . Она называется *линейно упорядоченной*, если на множестве A задан линейный порядок, для которого из $a < b$ следует $a' \leq b'$ для любых a и b из A .

Обозначим $a^0 = a$, $a^1 = a'$, ..., $a^n = (a^{n-1})'$. Положим $\alpha(a, b)$, если найдутся такие m и n , что $a^m = b^n$. Следовательно, α есть конгруэнция, а α -классы являются подалгебрами; они называются (связными) *компонентами* унарной алгебры A . Очевидно, что любая компонента C удовлетворяет одному и только одному из следующих условий:

1. C не содержит элемента a , для которого найдется такое $n > 0$, что $a^n = a$;
2. C содержит такой элемент a , что $a' = a$;
3. C содержит элемент a , для которого найдется такое $n > 1$, что $a^n = a$, и не содержит элемента b , для которого $b' = b$.

В зависимости от выполнения одного из условий 1, 2 или 3 компоненту будем называть соответственно *компонентой 1-го, 2-го или 3-го типа*.

Лемма. Унарная алгебра A , включающая компоненты 3-го типа, не упорядочиваема.

Доказательство. Пусть на A задан линейный порядок $<$ и A включает компоненту 3-го типа, т. е. A содержит элемент a , для которого $a^n = a$, где $n > 1$. Так как $a' \neq a$, то должно быть $a' < a$ или $a < a'$. Если $a' < a$, то имеем $a^2 \leq a'$,, $a^n \leq a^{n-1}$, $a^n = a$, откуда $a \leq a^{n-1} \leq \dots \leq a' < a$, что невозможно. Аналогично получим противоречие, если $a < a'$. Лемма доказана.

Заметим, что из результатов § 2 и § 3 будет следовать, что любую унарную алгебру, состоящую из компонент 1-го и 2-го типов, можно линейно упорядочить.

Пусть $a \in A$. Если множество $\{x | x' = a\}$ содержит более одного элемента, то оно называется *элементарным классом*. Частичный порядок на A назовем *элементарным*, если на каждом элементарном классе он индуцирует некоторый линейный порядок, а любые два элемента из A , не лежащие в одном элементарном классе, несравнимы. Унарная алгебра без элементарных классов обладает только одним тривиальным элементарным порядком.

Если B — произвольное множество, α — произвольное кардинальное число, A — унарная алгебра, то через $\varphi(B)$, $\psi(\alpha)$ и $\chi(A)$ будем обозначать мощность множества всех линейных порядков соответственно множества B , произвольного множества мощности α и унарной алгебры A .

Если множество индексов пусто, будем считать

$$\prod_{\xi} \varphi(B_{\xi}) = 1.$$

Тогда мощность множества всех элементарных порядков на A есть

$$\prod_{\xi} \varphi(X_{\xi}),$$

где $\{X_{\xi}\}$ — множество всех элементарных классов A .

Заметим, что $\psi(\alpha)$ равно $\alpha!$ для конечного α и равно 2^{α} для бесконечного α .

§ 2. Компоненты первого типа

В этом параграфе A — унарная алгебра, состоящая из одной компоненты 1-го типа. Для любого элемента $a \in A$ из $a^m = a^n$ следует $m = n$. Пусть x, y — произвольные элементы из A , тогда найдутся такие m и n , что $x^m = y^n$. Если для некоторых p и q также имеет место $x^p = y^q$, то $x^{m+q} = y^{n+q} = x^{n+p}$, откуда $m + q = n + p$ или $m - n = p - q$. Таким образом разность

$m - n$ однозначно соответствует каждой паре (x, y) . Эту разность назовем *высотой* элемента x относительно y и обозначим $h_y(x)$.

Лемма 2.1. Для любых x и y из A имеет место $h_y(x') = h_y(x) - 1$.

Доказательство. Пусть $x^m = y^n$, тогда $(x')^{m-1} = y^n$ и $h_y(x') = (m-1) - n = (m-n) - 1 = h_y(x) - 1$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Для любых x, y и a из A имеет место $h_y(x) = h_a(x) - h_a(y)$.

Доказательство. Пусть $x^{m+h_a(x)} = a^m$, $y^{n+h_a(y)} = a^n$, тогда $a^{m+n} = x^{m+n+h_a(x)} = y^{m+n+h_a(y)}$,

т. е.

$$h_y(x) = m + n + h_a(x) - (m + n + h_a(y)) = h_a(x) - h_a(y).$$

Лемма доказана.

Из леммы 2.2 видно, что из $h_a(x) = h_a(y)$ (соответственно $h_a(x) < h_a(y)$) следует $h_b(x) = h_b(y)$ (соответственно $h_b(x) < h_b(y)$) для любых x, y, a и b из A . Это позволяет писать $h(x) = h(y)$ и $h(x) < h(y)$, не упоминая элемент, относительно которого порядки рассматриваются.

Линейный порядок $<$ на A называется *прямым (обратным)*, если $x' < x$ (соответственно $x < x'$) для всех x из A .

Лемма 2.3. Любой линейный порядок на A является прямым или обратным.

Доказательство. Пусть на A существует порядок $<$, такой что $a' < a$, но $b < b'$ для некоторых a, b из A , а m и n таковы, что $a^m = b^n$. Применив к обеим частям неравенств $a' < a$ и $b < b'$ операцию (\cdot) соответственно m и n раз, получим $a^m > a^{m+1} = b^{n+1} > b^n$, вопреки равенству $a^m = b^n$. Лемма доказана.

Каждому прямому порядку взаимно-однозначно соответствует дуальный ему обратный порядок, что позволяет нам изучать в дальнейшем только прямые порядки.

Лемма 2.4. Если на A задан линейный порядок $<$, то из $h(x) < h(y)$ следует $x < y$ для любых x, y из A .

Доказательство. Ввиду леммы 2.2 неравенство $h(x) < h(y)$ равносильно неравенству $h_y(x) < 0$. Последнее означает, что $x^{n-r} = y^n$ для некоторых положительных n и r . Если $x \geq y$, то $x^{n-r} \geq y^{n-r} > y^{n-r+1} > \dots > y^n$ и $x^{n-r} > y^n$, что невозможно. Лемма доказана.

Заметим, что для любых элементов x, y из одного элементарного класса $h(x) = h(y)$.

Теорема 2.1. Каждый элементарный порядок на компоненте 1-го типа можно однозначно продолжить до ее прямого линейного порядка.

Доказательство. Пусть $<$ — элементарный порядок на A . Докажем возможность продолжения $<$ до линейного по-

рядка. Пусть a и b — различные элементы, для которых $h(a) = h(b)$. Тогда $h_a(b) = h(b) - h(a) = 0$. Следовательно, из $a^m = b^n$ вытекает $m = n$. Рассмотрим минимальное q такое, что $a^q = b^q$, и обозначим функцию $q - 1$ от a и b через $p(a, b)$. Очевидно, $a^{p(a,b)} \neq b^{p(a,b)}$ и эти два элемента лежат в одном элементарном классе. Заметим также, что для элементов a, b из одного элементарного класса $p(a, b) = 0$.

Положим $a <_1 b$ для произвольных a и b из A , если 1) $h(a) < h(b)$ или 2) $h(a) = h(b)$, но $a^{p(a,b)} < b^{p(a,b)}$. Тогда на любом элементарном классе отношения $<$ и $<_1$ совпадают. Докажем, что $<_1$ есть линейный порядок на A .

Докажем транзитивность отношения $<_1$. Пусть $a <_1 b$ и $b <_1 c$. Если хотя бы одно из этих неравенств выполнено ввиду условия 1), то и $a <_1 c$ будет выполняться ввиду 1). Пусть оба неравенства выполнены ввиду условия 2), т. е. $h(a) = h(b) = h(c)$, $a^{p(a,b)} < b^{p(a,b)}$ и $b^{p(b,c)} < c^{p(b,c)}$.

Если $p(a, b) = p(b, c)$, то $a^{p(a,b)} < b^{p(a,b)} < c^{p(a,b)}$ и все три элемента лежат в одном элементарном классе. Отсюда видно, что $p(a, c) = p(a, b)$, откуда следует, что $a <_1 c$.

Если $p(a, b) > p(b, c)$, то $c^{p(a,b)} = b^{p(a,b)} > a^{p(a,b)}$. Применив ('), получим $c^{p(a,b)+1} = a^{p(a,b)+1}$, значит, $p(a, c) = p(a, b)$, $c^{p(a,c)} > a^{p(a,c)}$ и $a <_1 c$. Аналогично рассматривается случай $p(a, b) < p(b, c)$.

Докажем монотонность отношения $<_1$. Если $h(a) < h(b)$, то, ввиду леммы 2.1, находим, что $h(a') < h(b')$, т. е. $a' <_1 b'$. Если $h(a) = h(b)$, то при $a' \neq b'$ имеем $p(a', b') = p(a, b) - 1$, что влечет $a' <_1 b'$.

Итак, $<_1$ является линейным порядком. Докажем единственность продолжения $<$ до линейного порядка. Пусть $<_2$ — некоторый линейный порядок, являющийся продолжением $<$, и пусть $a <_2 b$. Если $h(a) < h(b)$, то ввиду леммы 2.4 имеем $a <_1 b$. Если $h(a) = h(b)$, то ввиду монотонности отношения $<_2$ имеем $a^{p(a,b)} <_2 b^{p(a,b)}$. Но эти элементы лежат в одном элементарном классе, значит, $a^{p(a,b)} < b^{p(a,b)}$, т. е. $a <_1 b$. Итак, во всех случаях $a <_2 b$ влечет $a <_1 b$, что и доказывает однозначность продолжения элементарного порядка до линейного. Теорема доказана.

Каждый линейный порядок на A индуцирует некоторый элементарный порядок, который, в свою очередь, по теореме 1 продолжается до линейного. В силу однозначности этого продолжения полученный порядок совпадает с первоначальным, т. е. любой линейный порядок на A можно получить, как продолжение некоторого элементарного порядка. Эффективный метод построения такого продолжения дан в доказательстве теоремы 1.1.

Таким образом, для построения всевозможных линейных порядков на компоненте 1-го типа следует:

1. Некоторым образом упорядочить линейно каждый элементарный класс компоненты;

2. Полученный элементарный порядок указанным выше способом продолжить до линейного;

3. Каждому полученному так порядку сопоставить дуальный (так как мы рассматриваем лишь прямые порядки).

Ввиду этого имеют место следующие утверждения.

Следствие 2.1. Любую компоненту 1-го типа можно линейно упорядочить по крайней мере двумя способами.

Следствие 2.2. Если $\{X_\xi\}$ — множество всех элементарных классов компоненты A , то $\chi(A) = 2 \prod_{\xi} \varphi(X_\xi)$.

Следствие 2.3. Кардинальное число $\chi(A)$ может принимать все бесконечные значения вида 2^α и конечные значения вида $2 \cdot n_1! n_2! \dots n_k!$ и только такие (вне зависимости от принятия обобщенной гипотезы континуума или ее отрицания).

§ 3. Компоненты второго типа

Пусть A — унарная алгебра, состоящая из одной компоненты 2-го типа. Элемент x , для которого $x' = x$ определен однозначно, ибо из $y' = y$ следует при некоторых m и n $x = x' = x^m = y^n = y' = y$. В данном параграфе элемент с таким свойством будем обозначать через a .

Элементарный класс, для элементов x которого $x' = a$, называется *атомарным*; его элементы, отличные от a , называются атомами и обозначаются b_ξ . Множество всех элементов x из A , для которых $x^p = b_\xi$ при некотором $p \geq 0$, называется ветвью атома b_ξ и обозначается $|b_\xi|$.

Лемма 3.1. Множество $A \setminus \{a\}$ есть объединение попарно непересекающихся ветвей.

Доказательство. I. Пусть $x \in A$, $x \neq a$ и n — наименьшее число, для которого $a = x^n$, $n > 0$, так как $x \neq a$. Элемент x^{n-1} является атомом, т. е. x принадлежит некоторой ветви.

II. Пусть x принадлежит двум ветвям, т. е. $x^m = b_1$ и $x^n = b_2$ для некоторых m и n . Если, например, $m < n$, то $b_2 = x^n = (x^m)^{n-m} = (b_1)^{n-m} = a$, что невозможно. Итак, $m = n$ и $b_1 = b_2$. Лемма доказана.

Пусть A линейно упорядочена. Ветвь $|b_\xi|$, каждый элемент которой больше (меньше) a , называется *положительной* (отрицательной) ветвью.

Лемма 3.2. Если b — атом и $b > a$, то ветвь $|b|$ положительна и $x' < x$ для любого $x \in |b|$.

Доказательство. Пусть $b > a$, но $x < a$ для некоторого $x \in |b|$. Тогда ввиду монотонности $b = x^n \leq a$. Полученное противоречие доказывает положительность $|b|$.

Пусть $x \in |b|$ и $x^n = b$. Из $x' \geq x$ следовало бы $x^{n+1} \geq x^n$, т. е. $a \geq b$, вопреки положительности $|b|$. Лемма доказана.

Рассуждения, дуальные проделанным, доказывают утверждение, дуальное лемме 3.2.

Теорема 3.1. *Каждый элементарный порядок на компоненте 2-го типа можно однозначно продолжить до линейного порядка.*

Доказательство. Пусть $<$ — элементарный порядок на A — компоненте 2-го типа. Обозначим

$$A^* = \bigcup_{b_{\xi} > a} |b_{\xi}|, \quad A_* = \bigcup_{b_{\xi} < a} |b_{\xi}|.$$

Возьмем две счетные последовательности $\{s_i\}$ и $\{t_i\}$ символов, не использованных для обозначения элементов из A , где $i \geq 0$. На множестве $B^* = A^* \cup \{s_0, s_1, s_2, \dots\}$ определим унарную операцию (*) следующим образом:

$$x^* = \begin{cases} s_{n+1}, & \text{если } x = s_n; \\ s_0, & \text{если } x = b_{\xi} \text{ при некотором } \xi; \\ x', & \text{если } x \in A^* \setminus \bigcup |b_{\xi}|. \end{cases}$$

Аналогично определим операцию на множестве $B_* = A_* \cup \{t_0, t_1, \dots\}$. Таким образом B^* (как и B_*) превращено в унарную алгебру, состоящую из одной компоненты 1-го типа. Порядок $<$ индуцирует на B^* и B_* некоторые элементарные порядки, ввиду теоремы 2.1 однозначно продолжимые до прямого линейного порядка $<_1$ на B^* и обратного линейного порядка $<_2$ на B_* . Определим теперь на A бинарное отношение $<_0$, считая, что $x <_0 y$ в следующих пяти случаях: 1) $x \in A^*$, $y \in A^*$; 2) $x = a$, $y \in A^*$; 3) $x \in A_*$, $y = a$; 4) $x, y \in A^*$ и $x <_1 y$; 5) $x, y \in A_*$ и $x <_2 y$.

Непосредственная проверка показывает, что отношение $<_0$ является линейным порядком на A . Докажем, что $<_0$ — единственное продолжение порядка $<$ до линейного. Для этого покажем, что во всех пяти возможных случаях из $x <_0 y$ следует $x <_3 y$, где $<_3$ — другое продолжение $<$ до линейного порядка на A .

В случаях 1)–3) неравенство $x <_3 y$ следует из определения множеств A^* и A_* и первой части леммы 3.2 (с учетом дуальной леммы). Пусть $x <_0 y$ ввиду пункта 4). Порядки $<$ и $<_3$ индуцируют на B^* один и тот же элементарный порядок. Следовательно, порядок $<_1$ совпадает с $<_3$ на A^* , т. е. $x <_3 y$. Аналогично рассматривается случай 5). Теорема доказана.

Каждый линейный порядок на A индуцирует некоторый элементарный порядок, который по теореме 3.1 можно продолжить до линейного. В силу однозначности этого продолжения полученный порядок совпадает с первоначальным, т. е. любой линейный порядок на A можно получить, как продолжение некоторого элементарного порядка.

Из сказанного выше вытекают следующие утверждения.

Следствие 3.1. *Пусть $\{X_{\xi}\}$ — множество всех элементарных классов компоненты A , тогда $\chi(A) = \Pi \Phi(X_{\xi})$.*

Следствие 3.2. *Любая компонента 2-го типа упорядочивается линейно.*

Следствие 3.3. Кардинальное число $\chi(A)$ может принимать все бесконечные значения вида 2^α и конечные значения вида $n_1!n_2! \dots n_k!$ и только такие.

Следствие 3.4. Любую унарную алгебру, состоящую из компонент 1-го и 2-го типов, можно линейно упорядочить.

Доказательство. Пусть унарная алгебра A состоит из компонент 1-го и 2-го типов и $\{A_\xi\}$ есть множество всех ее компонент. Упорядочим линейно множество всех индексов $\{\xi\}$. Далее, упорядочим линейно каждую компоненту в отдельности. Это возможно ввиду следствий 3.2 и 2.2., для элементов же x и y из разных компонент A_ξ и A_η считаем $x < y$, если $\xi < \eta$. Полученный таким образом порядок на A является линейным.

§ 4. Произвольные упорядоченные унарные алгебры

В этом параграфе A — произвольная линейно упорядоченная унарная алгебра и $<$ — линейный порядок на ней. Если X и Y — подмножества в A и имеет место $x < y$ для всех x из X и всех y из Y , то будем писать $X < Y$. Пусть X и Y — произвольные подмножества в A . Если выполняется $X < Y$ или $Y < X$, то множество X называется *выпуклым относительно Y* ; в противном случае оно называется *невыпуклым относительно Y* .

Лемма 4.1. Компонента 2-го типа B из A выпукла относительно любой другой компоненты из A .

Доказательство. Пусть $b_1, b_2 \in B$, $d_1, d_2 \in D$, причем $b_1 < d_1$, но $d_2 < b_2$, где B — компонента 2-го типа, а D — некоторая отличная от B компонента. Пусть $a = a' \in B$, а m и n таковы, что $d^m_1 = d^n_2$. Выберем m и n настолько большими, что $b^m_1 = b^n_2 = a$, тогда $a = b^m_1 \leq d^m_1 = d^n_2 < b^n_2 = a$. Это противоречие доказывает лемму.

Лемма 4.2. Если B — прямо, а D — обратно упорядоченные компоненты 1-го типа, то B и D выпуклы относительно друг друга.

Доказательство. Пусть $b_1, b_2 \in B$ и $d_1, d_2 \in D$, причем $b_1 < d_1$, но $d_2 < b_2$, а m, n, p и q таковы, что $b^m_1 = b^n_2$ и $d^p_1 = d^q_2$, тогда $b^{m+p}_1 = b^{n+p}_2 > d^{n+p}_2 = d^{n+q}_1$. Если $\min(m+p, n+q) = k$, то $b^{m+p}_1 \leq b^k_1 < d^k_1 \leq d^{n+q}_1$, что невозможно.

Лемма 4.3. Отношение относительной невыпуклости на множестве всех компонент 1-го типа является отношением эквивалентности.

Доказательство. Обозначим данное отношение через α ; оно рефлексивно и симметрично. Докажем его транзитивность. Пусть $B \alpha \sim C$ и $C \alpha \sim D$, т. е. $b < c$, $b_1 > c_1$, $c_2 < d$ и $c_3 > d_1$ для некоторых $b, b_1 \in B$, $c, c_1, c_2, c_3 \in C$ и $d, d_1 \in D$. Пусть $c^m = c_2^n$ и $c_1^p = c_3^q$, тогда $b^m < c^m = c_2^n < d^n$ и $b_1^p > c_1^p = c_3^q > d_1^q$. Следовательно, $B \alpha \sim D$. Лемма доказана.

Объединение всех компонент одного α -класса (см. доказательство леммы 4.3) называется *сплетением*. В силу леммы 4.2 все компоненты из одного сплетения упорядочены одинаковым образом — прямо или обратно. В соответствии с этим сплетение будем называть *прямо* или *обратно* упорядоченным.

Лемма 4.4. *Каждое сплетение выпукло.*

Доказательство. Пусть $a_1 < b < a_2$ для некоторых элементов $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ и $b \in B$, где A_1 и A_2 — компоненты из сплетения U , а B — компонента из сплетения V . Если $U \neq V$, то $A_1 < B < A_2$, вопреки определению сплетения. Лемма доказана.

Будем говорить, что объединение

$$\bigcup_{\xi} A_{\xi}$$

одинаково (прямо или обратно) упорядоченных компонент 1-го типа упорядочено сплошным образом, если A_{ξ} невыпукла относительно A_{η} для любых различных ξ и η .

Очевидно, что любое сплетение упорядочено сплошным образом и что порядок, дуальный к сплошному, является сплошным. Это позволяет в дальнейшем рассматривать лишь прямые сплошные порядки.

Пусть B — компонента 1-го типа. Из свойств функции h следует, что отношение $x \sim y$, означающее $h(x) = h(y)$, является отношением эквивалентности на B . Будем называть α -классы *классами* данной компоненты.

Фиксируем произвольный класс H_0 и для некоторого его элемента h_0 рассмотрим множество $H_n = \{x | x \in B, h_{h_0}(x) = n\}$.

Это множество не зависит от выбора h_0 из H_0 . Если $H_n \neq \emptyset$, то оно является классом компоненты B ; любой класс совпадает с одним из множеств H_k при некотором целом k , т. е. имеет место

$$B = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} H_k.$$

Если H — класс и $x \in H$, то класс, содержащий x' , обозначим H' . Если $x \in H_n$, то $x^k \in H_{n-k}$, в частности, $H'_n = H_{n-1}$. В прямо упорядоченной компоненте из $m > n$ следует $H_m > H_n$ (см. лемму 2.4).

Лемма 4.5. *Класс компоненты 1-го типа — выпуклое подмножество в A .*

Доказательство. Пусть H — произвольный класс компоненты 1-го типа B и $h < x < h_1$, где $h, h_1 \in H$ и $x \in A$. Из определения класса видно, что найдется m , для которого $h^m = h^m_1$, значит, $h^m = x^m$, откуда $x \in H$. Лемма доказана.

Лемма 4.6. *Для того, чтобы объединение*

$$C = \bigcup_{\xi \in I} A_{\xi}$$

прямо упорядоченных компонент 1-го типа было упорядочено

сплошным образом, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух различных компонент A_ξ и A_η , $\xi, \eta \in I$, нашлись такие классы $H \subset A_\xi$ и $H^* \subset A_\eta$, что $H > H^* > H'$.

Доказательство. Достаточность следует из определения сплошного порядка, докажем необходимость. Пусть A_ξ и A_η — различные компоненты из C , которое упорядочено сплошным образом. Тогда найдутся такие $b, b_1 \in A_\xi$ и $d \in A_\eta$, что $b < d < b_1$. Обозначим классы, содержащие b и d , соответственно через H_0 и H^* и пусть элемент b_1 содержится в классе H_n . Поскольку $b_1 > b$, то $n > 0$. При прямом порядке $H_0 < H_1 < \dots < H_n$, а ввиду леммы 4.5 выполняется $H_0 < H^* < H_n$, и, следовательно, найдется такое i , что $H_{i+1} > H^* > H_i = (H_{i+1})'$, что и требовалось доказать.

Пусть дано семейство $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$ компонент 1-го типа, где I — множество индексов. Зафиксируем произвольный индекс $\theta \in I$ и в каждой компоненте A_ξ , $\xi \in I$, зафиксируем произвольно класс H^ξ_θ . Под H^ξ_n будем всегда понимать класс из A_ξ .

Пусть $<$ — линейный порядок на множестве I , при котором θ — максимальный элемент; через γ обозначим отображение из I в множество целых чисел, и пусть $\gamma(\theta) = 0$. Далее, пусть $<_0$ — частичный порядок на C , индуцирующий на каждой A_ξ прямой линейный порядок, причем элементы различных компонент несравнимы.

Для каждой тройки $(<_0, <, \gamma)$ назовем бинарное отношение $<$ на C , порожденным этой тройкой, если $<$ совпадает с $<_0$ на каждой компоненте A_ξ , $\xi \in I$, а $H^\xi_m < H^\eta_n$ для классов H^ξ_m, H^η_n , $\xi \neq \eta$, если $\gamma(\eta) - \gamma(\xi) < n - m$ или $\gamma(\eta) - \gamma(\xi) = n - m$ и $\xi < \eta$.

Теорема 4.1. *Между множествами всевозможных троек вида $(<_0, <, \gamma)$ и всех сплошных порядков на C существует взаимно-однозначное соответствие, при котором сплошной порядок на C , соответствующий данной тройке, является отношением, порожденным этой тройкой.*

Доказательство. Докажем, что отношение $<$, порожденное тройкой $(<_0, <, \gamma)$, является линейным порядком на C . Для этого покажем сперва транзитивность данного отношения.

Пусть $a < b$ и $b < c$, $a \in H^\xi_m$, $b \in H^\eta_n$, $c \in H^k_k$, причем не все индексы ξ, η и ζ равны между собой. Рассмотрим следующие два случая.

Пусть $\xi = \eta \neq \zeta$ (аналогично рассматривается случай $\xi \neq \eta = \zeta$). Из $a < b$ следует $m \leq n$, а из $b < c$ по определению отношения $<$ следует $\gamma(\zeta) - \gamma(\eta) \leq k - n$. Поэтому $\gamma(\zeta) - \gamma(\xi) \leq k - m$ и $a < c$ следует из определения порядка $<$.

Если же $\xi \neq \eta \neq \zeta$, то $\gamma(\eta) - \gamma(\xi) \leq n - m$ и $\gamma(\zeta) - \gamma(\eta) \leq k - n$, откуда $\gamma(\zeta) - \gamma(\xi) \leq k - m$. Равенство здесь возможно лишь при $\xi < \eta$ и $\eta < \zeta$. Но тогда $\xi < \zeta$ и $a < c$. При строгом

же неравенстве и $\xi \neq \zeta$ имеем $a < c$ по определению, а при $\xi = \zeta$ имеем $k - m > 0$, $k > m$ и снова $a < c$.

Итак, порядок $<$ транзитивен, докажем его монотонность. Пусть $a \in H^{\xi}_m$, $b \in H^{\eta}_n$ и $a < b$. При $\xi = \eta$ монотонность имеет место; при $\xi \neq \eta$ имеем $a' \in H^{\xi}_{m-1}$, $b' \in H^{\eta}_{n-1}$ и $a' < b'$ ввиду $(n-1) - (m-1) = n - m$ и по определению порядка $<$.

Таким образом, отношение $<$ является линейным порядком унарной алгебры S . Пользуясь леммой 4.6, докажем, что $<$ — сплошной порядок.

Пусть $\xi \neq \eta$ и класс H^{ξ}_m непуст. Найдется n , при котором класс H^{η}_n непуст и $\gamma(\eta) - \gamma(\xi) > n - m$. Классы H^{ξ}_{m-s} при $s > 0$ также непусты и $n - m < n - (m-1) < n - (m-2) < \dots$, значит, среди чисел $m, m-1, m-2, \dots$ найдутся такие три числа $k, k-1$ и $k-2$, что

$$\begin{aligned} \gamma(\eta) - \gamma(\xi) > n - k, \quad \gamma(\eta) - \gamma(\xi) = n - (k-1) \quad \text{и} \\ \gamma(\eta) - \gamma(\xi) < n - (k-2). \end{aligned} \quad (1)$$

Если $\xi < \eta$, то из первых двух соотношений (1) и определения порядка $<$ следует, что $H^{\xi}_k > H^{\eta}_n > H^{\xi}_{k-1}$, если же $\eta < \xi$, то, аналогично, $H^{\xi}_{k-1} > H^{\eta}_n > H^{\xi}_{k-2}$. Следовательно, по лемме 4.6, порядок $<$ является на S сплошным.

Итак, каждой тройке вида $(<_0, <, \gamma)$ соответствует некоторый сплошной порядок. Покажем, что любой сплошной порядок на S порожден некоторой тройкой (рассматриваются лишь прямые порядки!).

Пусть на S задан сплошной порядок $<$. Частичный порядок $<_0$ определим, положив $a <_0 b$, если $a < b$ и $a, b \in A_{\xi}$.

Определим функцию γ . Положим $\gamma(\theta) = 0$. Если же $\xi \neq \theta$, то ввиду леммы 4.6 найдутся такие классы H^{θ}_m и H^{ξ}_n , что $H^{\theta}_m > H^{\xi}_n > H^{\theta}_{m-1}$. Положим $\gamma(\xi) = n - m$. Докажем однозначность γ . Пусть еще $H^{\theta}_p > H^{\xi}_q > H^{\theta}_{p-1}$ и, для определенности, $p \leq m$. Классы $H^{\xi}_{n-(m-p)}$ и $H^{\theta}_{m-1-(m-p)}$ непусты, откуда следует $H^{\theta}_p = H^{\theta}_{m-(m-p)} > H^{\xi}_{n-(m-p)} > H^{\theta}_{m-1-(m-p)} = H^{\theta}_{p-1}$, т. е.

$$H^{\theta}_p > H^{\xi}_{n-m+p} > H^{\theta}_{p-1}.$$

Поэтому $n - m + p = q$ и $n - m = q - p$, т. е. разность $n - m$ зависит только от индекса ξ .

Для построения порядка $<$ определим прежде всего $\xi < \theta$ для всех ξ не равных θ . Пусть $\theta \neq \xi \neq \eta \neq \theta$. Пусть s таково, что $H^{\xi}_{\gamma(\xi)-s} \neq \emptyset \neq H^{\eta}_{\gamma(\eta)-s}$, где γ — определенное выше отображение. Ввиду выпуклости классов $H^{\xi}_{\gamma(\xi)-s} > H^{\eta}_{\gamma(\eta)-s}$ или $H^{\xi}_{\gamma(\xi)-s} < H^{\eta}_{\gamma(\eta)-s}$, причем выполненное неравенство не зависит от выбора s . Определим поэтому $\eta < \xi$ или $\xi < \eta$ при выполнении, соответственно, 1-го или 2-го из этих неравенств.

Для доказательства линейности $<$ достаточно доказать его транзитивность. Пусть $\xi < \eta$ и $\eta < \zeta$, $\xi, \eta, \zeta \in I$. Ввиду $\xi < \eta$ и $\eta < \zeta$ имеем $\xi \neq \theta \neq \eta$. Если $\zeta = \theta$, то $\xi < \zeta$. Предположим, что и $\zeta \neq \theta$. Тогда $H^{\xi}_{\gamma(\xi)-s} < H^{\eta}_{\gamma(\eta)-s}$, $H^{\eta}_{\gamma(\eta)-p} < H^{\zeta}_{\gamma(\zeta)-p}$, и можно

считать, что $s > 0$, $p > 0$. Поэтому $H^{\xi}_{\gamma(\xi)-s-p} < H^{\eta}_{\gamma(\eta)-s-p} < < H^{\xi}_{\gamma(\xi)-s-p}$, откуда $\xi < \eta$.

Обозначим через $<_1$ сплошной порядок, порожденный построенной выше тройкой $(<_0, <, \gamma)$ и докажем, что он совпадает с порядком $<$. Предположим, что $x <_1 y$ для $x \in H^{\xi}_m$ и $y \in H^{\eta}_n$. Если $\xi = \eta$, то это означает $x <_0 y$ и $x < y$. Пусть далее $\xi \neq \eta$.

Пусть сначала $\gamma(\eta) - \gamma(\xi) < n - m$. По определению γ , найдутся такие классы H^{θ}_p , H^{ξ}_s и H^{θ}_q , H^{η}_r , что $H^{\theta}_p \geq H^{\xi}_s > H^{\theta}_{p-1}$ и $H^{\theta}_q \geq H^{\eta}_r > H^{\theta}_{q-1}$, причем $\gamma(\xi) = s - p$ и $\gamma(\eta) = r - q$. Все эти неравенства и равенства справедливы и при $\xi = \theta$ или $\eta = \theta$. Условие $\gamma(\eta) - \gamma(\xi) < n - m$ запишем в виде $r - q - (s - p) < n - m$, откуда $r + p + m - s - q + 1 \leq n$. Взяв настолько большое t , что все рассматриваемые ниже классы будут непусты, получим

$$H^{\xi}_{m-t} = H^{\xi}_{s+(m-s)-t} \leq H^{\theta}_{p+(m-s)-t} = H^{\theta}_{q-1+(p+m-s-q+1)-t} < < H^{\eta}_{r+(p+m-s+q+1)-t} \leq H^{\eta}_{n-t},$$

откуда $H^{\xi}_m < H^{\eta}_n$ и $x < y$.

Пусть теперь $\gamma(\eta) - \gamma(\xi) = n - m$ и $\xi < \eta$. Тогда $\xi \neq \theta$. Если $\eta = \theta$, то $\gamma(\xi) = m - n$ и $H^{\theta}_n > H^{\xi}_m > H^{\theta}_{n-1}$, т. е. $H^{\eta}_n > H^{\xi}_m$ и $x < y$. Если же $\eta \neq \theta$, то $\xi < \eta$ означает $H^{\xi}_{\gamma(\xi)-s} < H^{\eta}_{\gamma(\eta)-s}$. Ввиду произвольности числа s положим $s = \gamma(\xi) - m$. Тогда $H^{\xi}_m < H^{\eta}_n$ и $x < y$.

Итак, сплошной порядок $<$ порожден тройкой $(<_0, <, \gamma)$. Для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что различным тройкам соответствуют различные порядки.

Пусть две тройки $(<_0, <, \gamma)$ и $(<_1, <_1, \gamma')$ порождают один порядок $<$. Частичные порядки $<_0$ и $<_1$ совпадают, так как порядок $<$ есть продолжение каждого из них.

Если $\gamma \neq \gamma'$ и $\xi \in I$ таков, что, например, $\gamma(\xi) > \gamma'(\xi)$, то рассмотрим непустые классы H^{θ}_m и H^{ξ}_n , для которых $\gamma(\xi) - \gamma(\theta) \geq n - m > \gamma'(\xi) - \gamma'(\theta)$ (такой выбор возможен ввиду равенств $\gamma(\theta) = \gamma'(\theta) = 0$). Из этих неравенств следует, с одной стороны, $H^{\xi}_n < H^{\theta}_m$, а с другой — $H^{\theta}_m < H^{\xi}_n$ (заметим, что $\xi < \theta$). Полученное противоречие показывает, что $\gamma = \gamma'$.

Пусть порядки $<$ и $<_1$ различны, т. е. $\xi < \eta$ и $\eta <_1 \xi$ для некоторых $\xi, \eta \in I$. Так выбрав непустые классы H^{ξ}_m и H^{η}_n , что $n - m = \gamma(\eta) - \gamma(\xi)$, получим $H^{\xi}_m < H^{\eta}_n$ ввиду $\xi < \eta$ и $H^{\eta}_n < H^{\xi}_m$ ввиду $\eta <_1 \xi$. Таким образом, порядки $<$ и $<_1$ совпадают. Теорема доказана.

Пусть A — произвольная упорядочиваемая унарная алгебра и $\{A_{\xi}\}_{\xi \in I}$ и $\{B_{\eta}\}_{\eta \in J}$ — множества всех ее компонент соответственно 1-го и 2-го типов. Из полученных ранее результатов вытекает следующая (основная) теорема.

Теорема 4.2. *Произвольный линейный порядок на A можно получить следующим образом: надо*

1) множество I разбить на подмножества I_ν , $\nu \in K$, и обозначить $U_\nu = \bigcup_{\xi \in I_\nu} A_\xi$;

2) каждую подалгебру U_ν упорядочить сплошным образом прямо или обратно (см. теорему 2.1 и теорему 4.1);

3) упорядочить линейно каждую компоненту 2-го типа в отдельности (см. теорему 3.1);

4) упорядочить линейно множество $R = \{U_\nu\}_{\nu \in K} \cup \{B_\eta\}_{\eta \in J}$;

5) для $a \in C_\alpha$, $b \in C_\beta$, где $C_\alpha, C_\beta \in R$, положить $a < b$, если $C_\alpha = C_\beta$ и $a < b$ в C_α или если $C_\alpha < C_\beta$ в R .

§ 5. О числе линейных порядков унарной алгебры

В этом параграфе используются свойства действий с кардинальными числами (см., например, [1]). Будем обозначать через $|M|$ мощность множества M . Через ω обозначим мощность счетного множества.

Напомним, что $\varphi(B)$, $\psi(\alpha)$ и $\chi(A)$ обозначают соответственно мощность множества линейных порядков множества B , множества мощности α и унарной алгебры A .

Пусть $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$ — семейство компонент 1-го типа, $|I| = \varepsilon$.

В теореме 4.1 было доказано, что любой сплошной прямой порядок взаимно-однозначно определяется тройкой вида $(<_0, <, \gamma)$. Если $\{X_\nu\}_{\nu \in K}$ есть множество элементарных классов всех компонент из $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$, то кардинальное число всевозможных частичных порядков $<_0$ есть

$$\prod_{\nu \in K} \varphi(X_\nu).$$

Так как при любом порядке $<$ элемент θ является максимальным и при любом отображении γ имеет место $\gamma(\theta) = 0$, то число различных $<$ есть $\psi(\varepsilon - 1)$, а число различных γ есть $\omega^{(\varepsilon - 1)}$, где $\varepsilon - 1 = \varepsilon$ для бесконечного ε . Учитывая, что каждому прямо упорядоченному сплетению соответствует обратно упорядоченное, получим, что число всех сплошных порядков на $\bigcup_{\xi \in I} A_\xi$ есть

$$2 \cdot \prod_{\nu \in K} \varphi(X_\nu) \cdot \psi(\varepsilon - 1) \cdot \omega^{(\varepsilon - 1)} = 2 \cdot \prod_{\xi \in I} \frac{1}{2} \chi(A_\xi) \cdot \psi(\varepsilon - 1) \cdot \omega^{(\varepsilon - 1)}. \quad (2)$$

Пусть A — произвольная унарная алгебра, а α и β — мощности множеств $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$ и $\{B_\eta\}_{\eta \in J}$ всех компонент соответственно 1-го и 2-го типов. Далее введем обозначения:

$$\chi_\xi = \frac{1}{2} \chi(A_\xi), \quad \chi_\eta = \chi(B_\eta), \quad \prod_{\xi \in I} \chi_\xi \cdot \prod_{\eta \in J} \chi_\eta = \Pi.$$

Имеем $\chi(A) = \Pi \cdot \psi(\beta)$ при $\alpha = 0$ и $\chi(A) = 2\Pi \cdot \psi(\beta + 1)$ при $\alpha = 1$. Для $\alpha \geq 2$ имеет место следующая

Теорема 5.1. *Мощность множества всех линейных порядков унарной алгебры A выражается формулой*

$$\chi(A) = \max(\Pi, \omega^{\max(\alpha, \beta)}) \quad (3)$$

Доказательство. Заметим, что при подсчете числа всех порядков мы будем пользоваться методом построения произвольного порядка, указанным в основной теореме. Рассмотрим два возможных случая.

I. Пусть a — конечно. Разобьем множество $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$ некоторым образом на i подмножеств \mathfrak{A}_j , $1 \leq j \leq i \leq a$, и пусть $k_j = |\mathfrak{A}_j| \geq 1$. Тогда $\sum_{j=1}^i k_j = a$. Объединение всех компонент из фиксированного \mathfrak{A}_j можно упорядочить сплошным образом $2(k_j - 1)! \omega^{k_j - 1} \prod_{A_v \in \mathfrak{A}_j} \frac{1}{2} \chi(A_v)$ способами (см. (2)). Перемножив подобные выражения для всех j , получим, что для данного разбиения множества $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$ одновременно превратить все $\bigcup_{A_v \in \mathfrak{A}_j} A_v$ в сплетения можно

$$\pi_1 = \prod_{j=1}^i \left[2(k_j - 1)! \omega^{k_j - 1} \cdot \prod_{A_v \in \mathfrak{A}_j} \frac{1}{2} \chi(A_v) \right]$$

способами. Но $\pi_1 = 2^i \omega^{a-i} \cdot \prod_{\xi \in I} \chi_\xi \cdot \prod_{j=1}^i (k_j - 1)!$, заметим, что π_1 зависит от разбиения множества $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$. Общее число всех линейных порядков на A при данном разбиении есть

$$\pi_2 = \pi_1 \psi(\beta + i) \prod_{\eta \in J} \chi_\eta.$$

Теперь ясно, что $\chi(A) = \sum \pi_2$, где суммирование производится по всем возможным разбиениям множества $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$. Так как a конечно, то слагаемых в этой сумме конечное число, некоторые же слагаемые явно бесконечны; а именно, при $i < a$ имеем $\omega^{a-i} = \omega$, следовательно, бесконечны и соответствующие π_1 и π_2 . Поэтому рассматриваемая сумма равна большему из слагаемых. Обозначим его через π . Рассмотрев выражения для π_2 и π_1 , увидим, что $\pi = \Pi \omega \psi(\beta + i)$. Если β конечно, то $\pi = \Pi \omega$, если же бесконечно, то $\psi(\beta + i) = 2^\beta = \omega^\beta$ и $\pi = \Pi \omega^\beta$, т. е. в обоих случаях имеет место (3).

II. Пусть a — бесконечно. Рассмотрим некоторое разбиение множества $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$ на i подмножеств \mathfrak{A}_v , где i — некоторое кардинальное число $1 \leq i \leq a$ и $a_v = |\mathfrak{A}_v|$, $\sum_v a_v = a$. Пусть f — мощность множества конечных a_v и $a' = \sum_{a_v \geq \omega} a_v$. Аналогично

первой части доказательства убедимся, что все $\bigcup_{A_t \in \mathfrak{A}_v} A_t$ можно одновременно превратить в сплетения π_3 способами, где

$$\begin{aligned} \pi_3 &= \prod_v \left[2\psi(\alpha_v - 1) \omega^{\alpha_v - 1} \prod_{A_t \in \mathfrak{A}_v} \frac{1}{2} \chi(A_t) \right] = \\ &= 2^i \omega^{\sum(\alpha_v - 1)} \prod_{\xi \in I} \chi_\xi \cdot \prod_{\alpha_v \geq \omega} 2^{\alpha_v} \cdot \prod_{\alpha_v < \omega} (\alpha_v - 1)! = \\ &= \prod_{\xi \in I} \chi_\xi \cdot [2^i 2^{\alpha'} \omega^{\alpha - i} \prod_{\alpha_v < \omega} (\alpha_v - 1)!]. \end{aligned}$$

Убедимся в том, что каждый из четырех сомножителей произведения Φ , стоящего в квадратных скобках в последнем выражении, не больше 2^α . Для 2^i и $2^{\alpha'}$ это следует из $i \leq \alpha$ и $\alpha' \leq \alpha$; $\omega^{\alpha - i} \leq \omega^\alpha = 2^\alpha$. Далее, $\prod (\alpha_v - 1)!$ конечно, если f конечно, и не превышает 2^f , если f бесконечно. Но $2^f \leq 2^\alpha$. Итак, $\pi_3 = \Phi \prod_{\xi \in I} \chi_\xi$, где $\Phi \leq 2^\alpha$.

Аналогично первой части доказательства имеем

$$\chi(A) = \sum [\pi_3 \psi(\beta + i) \prod_{\eta \in J} \chi_\eta],$$

где суммирование производится по всем разбиениям множества $\{A_\xi\}_{\xi \in I}$, причем число таких разбиений есть 2^α .

Если β конечно, то $\psi(\beta + i) \leq 2^\alpha$ и

$$\chi(A) = \prod_{\xi \in I} \chi_\xi \cdot \prod_{\eta \in J} \chi_\eta \cdot \sum [\Phi \psi(\beta + i)] = \prod 2^\alpha,$$

так как последняя сумма равна 2^α , как сумма 2^α слагаемых, каждое из которых не превосходит 2^α (см. [1], стр. 110). Если же β бесконечно, то $\psi(\beta + i) = 2^{\beta 2^i}$, где $2^i \leq 2^\alpha$ и $\chi(A) = \prod 2^{\beta 2^i} \sum (\Phi 2^i)$, причем, аналогично сказанному выше, $\sum (2^{\beta 2^i}) = 2^\alpha$. В обоих случаях $\chi(A) = \prod 2^{\alpha 2^\beta}$, что можно записать в виде (3). Теорема доказана.

Рассмотрим формулу (3) и выражения для $\chi(A)$ при $\alpha < 2$. Из (3) вытекает следующее следствие.

Следствие 5.1. *Следующее число $\chi(A)$ может принимать все конечные значения вида $n_1! n_2! \dots n_k!$, значение ω и все бесконечные значения вида 2^α и только такие.*

Заметим, что этот результат не зависит от принятия обобщенной гипотезы континуума или ее отрицания.

Вопрос о существовании групп со счетным множеством линейных порядков является известной нерешенной проблемой (см. [3], стр. 306, проблема 18). Аналогичную проблему для группоидов легко решить, используя следствие 5.1.

Следствие 5.2. *Существуют группоиды со счетным множеством линейных порядков.*

Доказательство. Пусть на множестве A задана такая

унарная операция (\prime) , что полученная унарная алгебра имеет счетное множество линейных порядков. Определим на A бинарную операцию (\circ) , считая $x \circ y = x'$. При этом некоторое отношение на A является линейным порядком на полученном группоиде тогда и только тогда, когда оно является линейным порядком на унарной алгебре A , что и доказывает следствие.

Утверждение, аналогичное следствию 5.2, было доказано Е. Я. Габовичем в [2] для нильпотентных полугрупп. Заметим, что группоиды, рассмотренные здесь, не являются полугруппами.

Литература

1. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций. Москва—Ленинград, 1948.
2. Габович Е. Я., О мощности множества упорядочений полугруппы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 3—7.
3. Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва, 1965.

Поступило
6 IV 1970

JÄRJESTATUD UNAARSED ALGEBRAD

G. Rubanovitš

Resümee

Käesolevas töös kirjeldatakse kõikvõimalikud lineaarsed järjestused suvalises unaarse algebras ja antakse meetod nende järjestuse leidmiseks. Peale selle leitakse suvalise unaarse algebra kõikvõimalike lineaarsete järjestuste hulga võimsus. Muuhulgas tõestatakse, et leiduvad unaarsed algebrad, aga ka grupoidid, millel on loenduv arv lineaarseid järjestusi.

ORDERED UNARY ALGEBRAS

G. Rubanovitch

Summary

In the present paper the lineary ordered unary algebras with one unary operation (\prime) are investigated.

Let us denote $a^0 = a$, $a^{n+1} = (a^n)'$ for every $n \geq 2$. It is proved that any unary algebra is orderable if and only if it does not contain such an element a for with $a' \neq a$, $a^n = a$ where $n \geq 2$.

For an arbitrary ordered unary algebra all possible orders are entirely described and the method of their construction is given. Furthermore for every unary algebra the number of its different linear orders is obtained. It appears that the set of all possible values of this number consists of 1) all finite numbers of the form $n_1! n_2! \dots n_k!$; 2) cardinal number \aleph_0 ; 3) all infinite numbers of the form 2^α .

This result does not depend on the assumption of the generalized continuum hypotheses.

The results are used to prove that it exists a groupoid with enumerable set of linear orders.

ОБ ОТСУТСТВИИ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ В НЕКОТОРЫХ ПОЛУГРУППОВЫХ КОЛЬЦАХ

У. Кальюлайд

Кафедра алгебры и геометрии

Задача выяснения свойств полугруппы, индуцированных ее полугрупповым кольцом (с коэффициентами в кольце из данного класса) приводит, в частности, к интересному вопросу: какие свойства полугруппы равносильны отсутствию делителей нуля в ее полугрупповом кольце? В классе абелевых полугрупп задача решена Б. Банашевским [4]: в случае, когда коэффициенты берутся из кольца без делителей нуля, для этого необходимо и достаточно, чтобы полугруппа была бы Я-полугруппой, в которой выполняется закон сокращения. Другое доказательство этого же факта дано Джильмером в [7].

С другой стороны, А. И. Мальцевым [2] найдено важное обобщение понятия нильпотентности для полугрупп. В частности, класс нильпотентных в смысле Мальцева полугрупп содержит абелевы полугруппы, а в случае групп получается обычное понятие нильпотентной группы. Рассуждения работы [2] и стимулировали «поднятие» результатов Банашевского на класс локально нильпотентных полугрупп.

Пункты 1—4 содержат краткое изложение необходимых для дальнейшего понятий и рассуждений в нужной для нас форме. Доказательству чистоты группы дробей для нильпотентной полугруппы Капланского посвящен пункт 5. В пункте 7 показано, что критерий Банашевского отсутствия делителей нуля в полугрупповом кольце абелевой полугруппы можно перенести на полугрупповые кольца локально нильпотентных полугрупп.

1. Начнем с нескольких основных определений.

Пусть $x, y, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — произвольные переменные. Полагаем $X_0 = x, Y_0 = y$, и далее индуктивно определяем

$$X_{n+1} = X_n u_{n+1} Y_n, \quad Y_{n+1} = Y_n u_{n+1} X_n.$$

Согласно Мальцеву [2], полугруппа S , элементы которой удовлетворяют тождеству $X_n = Y_n$, называется n -ступенно нильпотентной. В случае, когда S является группой, получим обычное

понятие n -ступенной нильпотентности группы ([2], теорема 1). Полугруппа, у которой нильпотентны все конечнопорожденные подполугруппы, называется *локально нильпотентной*. Везде в данной работе нильпотентность будет пониматься в смысле А. И. Мальцева. Класс локально нильпотентных полугрупп обозначим через \mathfrak{L} .

Говорят, что в полугруппе S выполняется закон сокращения, если для любых ее элементов a, b, x каждое из равенств $ax = bx$ и $xa = xb$ влечет $a = b$. Наличие сокращения в полугруппе является необходимым условием вложимости ее в группу. Класс полугрупп с сокращением будем обозначать через \mathfrak{C} .

2. Полугруппа S с сокращением называется (*правой*) *полугруппой Орэ*, если для каждой пары ее элементов a, b существуют такие ее элементы a' и b' , что $ab' = ba'$. В работе [2] показано, что нильпотентная полугруппа с сокращением является полугруппой Орэ и, следовательно, вложима в группу.

Более точно, А. И. Мальцевым доказано ([2], теорема 2), что n -ступенно нильпотентная полугруппа с сокращением S вложима в n -степенно нильпотентную группу G_S правых частных для S . В дальнейшем нам будут нужны некоторые простые свойства этой группы G_S . Напомним, что группа G_S называется *группой (правых) частных для полугруппы S* , если выполнены условия

(i) S — подполугруппа группы G_S ,
(ii) каждый элемент группы G_S имеет вид ab^{-1} ; $a, b \in S$.
Орэ показал, что любая полугруппа с сокращением и с общими правыми кратными для каждой пары своих элементов имеет группу правых частных, и эта группа определена однозначно с точностью до изоморфизма полугруппой S .

3. Полугруппа S называется *\mathcal{U} -полугруппой*, если для любых двух ее конечных подмножеств F и H существует такая пара элементов $a \in F, b \in H$, что из $ab = xy$, где $x \in F, y \in H$, всегда следует $x = a, y = b$.

Полугруппа S называется *линейно упорядоченной*, если для ее элементов задана линейная упорядоченность, которая двусторонне стабильна относительно операции полугруппы S , т. е. из $a \leq b$ следует $ax \leq bx$ и $xa \leq xb$ для всех $x \in S$.

Лемма 1 (см. [4]). *Линейно упорядочиваемые полугруппы с сокращением являются \mathcal{U} -полугруппами.*

Доказательство. Пусть S — линейно упорядочиваемая полугруппа с сокращением. В такой полугруппе из $a > b$ при всяком $c \in S$ следуют соотношения $ac > bc$ и $ca > cb$. Пусть $F = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $H = \{b_1, \dots, b_m\}$ — любые два (непустых) конечных подмножества в полугруппе S . Переобозначив, если нужно, элементы, можно считать $a_1 < \dots < a_n$ и $b_1 < \dots < b_m$. Полагая теперь $a = a_n$ и $b = b_m$, из $ab = xy$, где $x \in F, y \in H$, ввиду выбора порядка в F и H , немед-

ленно получим $x = a_n, y = b_m$, т. е. $S \in \mathbb{U}$. Обозначив класс линейно упорядочиваемых полугрупп через \mathfrak{D} , видим, что верна импликация $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{D} \subset \mathbb{U}$.

С другой стороны, примеры показывают, что \mathbb{U} не содержится в $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}$ (см. [9], пример 6.2).

4. Полугрупповое кольцо для полугруппы S над кольцом с единицей A определяется как кольцо AS , мультипликативная полугруппа которой содержит S в качестве подполугруппы, и которое является таким A -бимодулем, что

- (i) $\lambda s = s\lambda$ для всех $s \in S, \lambda \in A$,
- (ii) $\lambda(st) = (\lambda s)t = s(\lambda t)$ для всех $s, t \in S, \lambda \in A$,
- (iii) S является A -базисом для AS .

Будем говорить, что полугруппа S является *полугруппой Капланского*, если из отсутствия делителей нуля в кольце коэффициентов A следует их отсутствие и в кольце AS . В полугруппе Капланского, очевидно, выполняется закон сокращения. Класс полугрупп Капланского обозначим¹ через \mathfrak{K} .

Лемма 2 (см. [4]). *Любая \mathbb{U} -полугруппа является полугруппой Капланского.*

Доказательство. Пусть $S \in \mathbb{U}$ и A — кольцо без делителей нуля. Возьмем любые ненулевые элементы $f, g \in AS$,

$$f = \sum_1^n \lambda_i a_i, \quad g = \sum_1^m \lambda'_j b_j.$$

Полагаем $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. В силу $S \in \mathbb{U}$ существует элемент $x \in S$ с единственным представлением $x = a_{i_0} b_{j_0}$, где $a_{i_0} \in A, b_{j_0} \in B$. Но тогда в выражении для $f \cdot g$ слагаемое $\lambda_i \lambda'_j a_i b_j$ не может сократиться ни с каким $\lambda_i \lambda'_j a_i b_j$, и поэтому $fg \neq 0$. В силу произвольности выбора кольца A , а также ненулевых $f, g \in AS$, приведенное рассуждение показывает, что $S \in \mathfrak{K}$. Импликация $\mathbb{U} \subset \mathfrak{K}$ тем самым доказана. Из нее, в частности, следует, что $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{D} \subset \mathfrak{K}$.

Лемма 3. *В полугруппе Капланского все моногенные подполугруппы, кроме, быть может, одной, являются бесконечными.*

Действительно, если некоторый $s \in S$ является идемпотентом, то в силу $S \in \mathfrak{C}$ этот элемент s будет единицей полугруппы S . Поэтому полугруппа Капланского не содержит более одного идемпотента, который обозначим через e . Покажем, что полугруппа S не имеет отличных от e элементов конечного порядка. Действительно, если для некоторого $e \neq t \in S$ имеет место $t = t^{n+1}$ при $n \geq 1$, то возьмем наименьшее такое n для данного t . Так как из $t = t^{n+1}$ следует равенство $t^n = t^{2n}$, то, в силу сказанного выше, $t^n = e$. Следовательно, имеем

$$0 = e - t^n = (e - t)(e + t + t^2 + \dots + t^{n-1}). \quad (1)$$

¹ В работе [4] такие полугруппы называются NZ -полугруппами, а в работе [9] называются ID -полугруппами.

В силу $S \in \mathfrak{R}$ один из множителей в (1) должен быть равен нулю. Соотношение $e + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = 0$ не может иметь места, так как в силу выбора n все степени элемента t в этой сумме разные. Следовательно, $e - t = 0$, т. е. $t = e$, что противоречиво. Если же для некоторых $g \in S$ и $m' > 1$ мы имели бы $g^{m'} = g^{m'+n}$, то пусть m выбрано минимальное среди таких m' . Так как $m > 1$, то в кольце AS имеем $g(g^{m-1} - g^{m-1+n}) = 0$, откуда $g^{m-1} = g^{m-1+n}$, что противоречит выбору m . Утверждение доказано.

Предложение 1. *Всякая n -ступенно нильпотентная полугруппа Капланского вложима в n -ступенно нильпотентную группу без кручения.*

Доказательство. Пусть S является n -ступенно нильпотентной полугруппой Капланского. В силу теоремы Мальцева (см. пункт 2) полугруппа S изоморфно вкладывается в n -ступенно нильпотентную группу дробей G_S . Остается доказать, что группа G_S не имеет кручения.

Покажем сначала, что центр Z группы G_S является группой без кручения. С этой целью заметим, что если $ab^{-1} \in Z$, то в полугруппе S элементы a и b коммутируют друг с другом. Действительно, в силу $ab^{-1} \in Z$ имеем $(ab^{-1})b = b(ab^{-1})$, т. е. $a = bab^{-1}$, откуда $ab = ba$. Но тогда для этой пары элементов $ab^m = b^ma$ верно при всяком натуральном m , откуда имеем $z^m = (ab^{-1})^m = a^mb^{-m}$. Поэтому соотношению $1 = z^m$ равносильно $a^m = b^m$.

Допустим теперь, что некоторый неединичный элемент $z = ab^{-1} \in Z$ имеет конечный порядок m . Тогда m является минимальным положительным числом таким, что $a^m = b^m$. Так как элементы a и b перестановочны, то из этого последнего равенства следует соотношение

$$0 = a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}) \quad (2)$$

в кольце AS (кольцо A не имеет делителей нуля). Но $a - b \neq 0$ и $S \in \mathfrak{R}$; поэтому из (2) вытекает соотношение

$$a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1} = 0. \quad (3)$$

Но полугруппа S является A -базисом для модуля AS , и поэтому (3) не может иметь места, если в его левой части все слагаемые разные. Итак, для некоторых $m > i, j \geq i$ должны быть

$$a^{m-i}b^{i-1} = a^{m-j}b^{j-1}. \quad (4)$$

Однако $S \in \mathfrak{C}$. Поэтому из (4) получим равенство $a^{j-i} = b^{j-i}$, где $0 < j - i < m$, которое противоречит выбору m . Это противоречие показывает, что все элементы подгруппы Z должны иметь бесконечный порядок.

Тот факт, что группа дробей G_S является группой без кручения, следует теперь немедленно из такого рассуждения (см.,

например, [1]). В нильпотентной группе периодические элементы образуют нормальный делитель, а в силу известной теоремы Ф. Холла, всякий нетривиальный нормальный делитель в нильпотентной группе имеет с центром группы нетривиальное пересечение. Предложение доказано.

6. Полугруппу S назовем \mathfrak{N} -полугруппой, если для всякого натурального числа m и элементов $a, b \in S$ из соотношения $a^m = b^m$ следует $a = b$.

Предложение 2. *Всякая n -ступенно нильпотентная \mathfrak{N} -полугруппа с законом сокращения вложима в n -ступенно нильпотентную группу без кручения.*

Доказательство первой части этого предложения совпадает с доказательством предложения 1: и здесь получим, что $1 = z^m = (ab^{-1})^m$ равносильно соотношению $a^m = b^m$. Поэтому, если некоторый неединичный элемент $z = ab^{-1} \in Z$ имеет конечный порядок m , то имеет место равенство $a^m = b^m$, откуда в силу $S \in \mathfrak{N}$ следовало бы $a = b$, т. е. $z = 1$, что противоречиво. Таким образом, центр группы G_S кручения не имеет. Конец доказательства является дословным повторением рассуждений из последнего абзаца в доказательстве предложения 1.

Теорема Мальцева ([2], теорема 2) и доказанные здесь предложения 1 и 2 указывают на общий (возможно, интересный) вопрос. Рассмотрим такие свойства \mathfrak{F} для полугрупп Орэ S , которые имеют смысл и для групп дробей G_S . Выяснить набор интересных свойств \mathfrak{F} , которые с полугруппы S переносятся на группу дробей G_S . Таковы, например, абелевость и нильпотентность данной ступени. Тот же вопрос возникает и для полугрупп Орэ из данного класса; примером служит чистота в классе нильпотентных \mathfrak{N} - или \mathfrak{R} -полугрупп.

7. Нашей целью является доказательство для класса локально нильпотентных полугрупп цепочки импликаций

$$\mathfrak{D} \cap \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D} \cap \mathfrak{C}.$$

В силу лемм 1 и 2 достаточно показать, что $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{N}$ и

$$\mathfrak{C} \cap \mathfrak{N} \cap \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}.$$

Пусть S — любая полугруппа из класса $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}$, a, b — разные элементы из S , и пусть для некоторого натурального числа m имеет место $a^m = b^m$. Рассмотрим в S подполугруппу T , порожденную элементами a и b . Полугруппа T является нильпотентной полугруппой Капланского, и поэтому ее можно вложить в нильпотентную группу без кручения G_T . Но нильпотентная группа без кручения является \mathfrak{N} -группой. Поэтому, имея вложение $T \rightarrow G_T$, из соотношения $a^m = b^m$ следует $a = b$. Этим, очевидно, доказано, что S является \mathfrak{N} -полугруппой.

Теперь, пусть S — любая полугруппа из класса $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{N} \cap \mathfrak{C}$, и пусть T — любая ее конечнопорожденная подполугруппа; она будет \mathfrak{N} -полугруппой, в которой выполняется закон сокращения.

В силу предложения 2 полугруппа T вкладывается в нильпотентную группу без кручения G_T . По известной теореме, G_T будет \mathfrak{D} -группой. В силу вложения $T \rightarrow G_T$ полугруппу T можно линейно упорядочить. Следовательно, полугруппа S является \mathfrak{D} -полугруппой.² Этим наше утверждение полностью доказано.

В частности доказано, что для линейной упорядочиваемости локально нильпотентной полугруппы с сокращением необходимо и достаточно, чтобы извлечение корней в ней было бы однозначным. Для групп соответствующий факт общеизвестен.

8. Б. Банашевский в работе [4] выделил среди \mathfrak{N} -полугрупп подкласс \mathfrak{E} -полугрупп. По определению, полугруппа S содержится в классе \mathfrak{E} , если каждое ее непустое конечное подмножество F содержит такой элемент a , что для всякого натурального числа k из равенства $a^k = f_1 f_2 \dots f_k$, где $f_i \in F$, всегда следует, что $f_1 = f_2 = \dots = f_k = a$.

Примерами \mathfrak{E} -полугрупп являются линейно упорядочиваемые полугруппы с сокращением. Действительно, пусть $F \subset S$ — любое непустое конечное множество. При $|F| = 1$ наше утверждение тривиально. Поэтому считаем $|F| \geq 2$, $F = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$, причем f_0 — наименьший элемент в F . Импликацию $f_0^k = f_1 f_2 \dots f_k \Rightarrow f_0 = f_1 = \dots = f_k$ будем доказывать индукцией по k . Для $k = 1$ утверждение верно. Пусть $k > 1$ и $f_0^k = f_1 f_2 \dots f_k$. Допустим, что $f_0 \neq f_1$. Тогда $f_0 < f_1$, откуда $f_0^k = f_0 \cdot f_0^{k-1} < f_1 \cdot f_0^{k-1} < f_1 f_2 \dots f_k$, что противоречиво. Следовательно, $f_0 = f_1$. Но тогда из $f_0^k = f_1 f_2 \dots f_k$ следует $f_0^{k-1} = f_2 \dots f_k$, откуда в силу индуктивного предположения имеем равенства $f_0 = f_2 = \dots = f_k$. Утверждение доказано.

В классе абелевых полугрупп Б. Банашевскому [4] удалось избежать введения упорядоченности при доказательстве включений

$$\mathfrak{C} \cap \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{C} \cap \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{U}, \quad (5)$$

а тем самым и при доказательстве включений

$$\mathfrak{C} \cap \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{C} \cap \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{C} \cap \mathfrak{N}.$$

Оказывается, цепочка (5) верна и в классе локально нильпотентных полугрупп. Действительно, для класса таких полугрупп имеем включения

$$\mathfrak{C} \cap \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C} \cap \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{C} \cap \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{U}.$$

Видимо, интересно и в классе локально нильпотентных полугрупп найти для (5) доказательство, не использующее возможность линейно упорядочить полугруппу S , так как с точки зрения дальнейших целей использование упорядочиваемости S является недостатком нашего доказательства.

² Это следует из факта, что для \mathfrak{D} -полугрупп верна локальная теорема (см. [3], теорема 2.4.3.)

9. Доказанные в предыдущих пунктах факты сформулируем в качестве теоремы.

Теорема. Для локально нильпотентной полугруппы S следующие свойства равносильны:

- (i) S — полугруппа Капланского,
- (ii) S есть \mathcal{U} -полугруппа,
- (iii) S есть \mathcal{N} -полугруппа с сокращением,
- (iv) S есть \mathcal{E} -полугруппа с сокращением,
- (v) S есть \mathcal{D} -полугруппа с сокращением.

Согласно пункту 4, группа G называется группой Капланского, если из отсутствия делителей нуля в кольце коэффициентов Λ следует их отсутствие и в групповом кольце ΛG . Давно поставлена интересная задача выяснения хороших (необходимых и) достаточных условий для группы (из данного класса), чтобы она была бы группой Капланского, (см. [8]). Например, доказательство включения $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{U}$ для групп означало бы решение известной проблемы И. Капланского в классе \mathcal{N} -групп. Априори неясно также, верна ли более слабая гипотеза $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{U}$? Результаты Б. Банашевского для абелевых полугрупп, а также доказанная здесь теорема для локально нильпотентных полугрупп указывают на возможности распространения этой задачи на некоторые классы полугрупп.

10. В заключение несколько замечаний о группах Капланского.

В работе [9] отмечено, что класс групп Капланского замкнут относительно расширений. Любопытно, что группы Капланского образуют корадикальный класс.

Предложение 3. Если некоторая группа G аппроксимируема группами Капланского, то она сама также будет группой Капланского.

Доказательство. Пусть G — группа с указанными в предложении свойствами и Λ — любое кольцо с единицей и без делителей нуля. Покажем, что групповое кольцо ΛG не содержит делителей нуля.

Допустим, что наше утверждение неверно. Тогда существуют ненулевые элементы x и y группового кольца ΛG , такие, что $x \cdot y = 0$. Пусть

$$x = \sum_{k=1}^m a_k g_k, \quad y = \sum_{j=m+1}^n a_j g_j; \quad a_1, \dots, a_n \in \Lambda; \quad g_1, \dots, g_n \in G.$$

По предположению, для каждого элемента g_i , $i = 1, \dots, n$, существует не содержащая этого элемента инвариантная в G подгруппа N_i , такая, что факторгруппа G/N_i является группой Капланского.

Рассмотрим прямое произведение факторгрупп $G/N_1, \dots, G/N_n$, которое обозначим M . Группа M является группой Капланского, так как класс таких групп замкнут относительно

конечных прямых произведений (см. [9]). Пусть $N = N_1 \cap \dots \cap N_n$. Имеется известное вложение τ группы G/N в прямое произведение M , задаваемое формулой $\tau(gN) = (gN_1, \dots, gN_n)$. Но так как свойство быть группой Капланского наследуется на подгруппы, из существования гомоморфизма τ следует, что группа G/N является группой Капланского.

В силу того, что ни один из элементов g_1, \dots, g_n не содержится в подгруппе N , классы смежности g_1N, \dots, g_nN попарно различны. Поэтому при продолжении естественного гомоморфизма $\sigma: G \rightarrow G/N$ до гомоморфизма групповых колец $\varepsilon: \Lambda G \rightarrow \Lambda G/N$ имеем соотношения

$$\varepsilon x = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varepsilon(g_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_k (g_k N) \neq 0, \quad (6)$$

$$\varepsilon y = \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \varepsilon(g_j) = \sum_{j=m+1}^n \alpha_j (g_j N) \neq 0, \quad (7)$$

$$\varepsilon x \cdot \varepsilon y = \varepsilon(x \cdot y) = \varepsilon(0) = 0. \quad (8)$$

Однако соотношения (6)–(8) одновременно выполняться не могут, так как G/N является группой Капланского. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Пусть ω — непустое множество простых чисел. Согласно [5], группа называется \mathfrak{D}_ω -группой, если в ней извлечение p -тых корней, где $p \in \omega$, не только возможно, но и единственно. Там же вводится важное понятие «свободной \mathfrak{D}_ω -группы», доказываются их существование и принадлежность к классу \mathfrak{R} -групп. Г. Баумслагом (см. [6]) высказана гипотеза, что свободные \mathfrak{D}_ω -группы являются резидуально нильпотентными группами без кручения.

Следствие. *Если верна гипотеза Г. Баумслага, то свободные \mathfrak{D}_ω -группы являются группами Капланского.*

Действительно, так как нильпотентная группа без кручения является группой Капланского, то утверждение вытекает из предложения 3 и гипотезы Баумслага.

В связи с этим (условным) следствием было бы интересно выяснить, упорядочиваемы ли свободные \mathfrak{D}_ω -группы.

Автор приносит глубокую благодарность Б. И. Плоткину за постоянную помощь в работе. Автор благодарен также Я. В. Хиуну за помощь при оформлении этой работы.

Примечание при корректуре. После того, когда статья была сдана в печать, автору стало известно о работе [10], в которой гипотеза Баумслага доказана для свободных метабелевых \mathfrak{D}_ω -групп.

Литература

1. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, т. 2. Новосибирск, 1969.
2. Мальцев А. И., Нильпотентные полугруппы. Уч. зап. Ивановского пед. ин-та, 1953, 4, 107—111.
3. Робинсон А., Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. Москва, 1967.
4. Banaschewski, B., On proving the absence of zero-divisors for semigroup rings. Canad. Math. Bull., 1961, 4, 225—231.
5. Baumslag, G., Some aspects of groups with unique roots. Acta Math., 1960, 104, 217—303.
6. Chandler, B., The representation of a generalized free product in an associative ring. Communs. Pure and Appl. Math., 1968, 21, 271—288.
7. Gilmer, R., A note on semigroup rings. Amer. Math. Monthly, 1969, 76, 36—37.
8. Kaplansky, I., «Problems in the theory of rings» revisited. Amer. Math. Monthly, 1970, 77, 445—454.
9. Rudin, W., Schneider, H., Idempotents in group rings. Duke Math. J., 1964, 31, 585—602.
10. Ledlie, J., Representations of free metabelian D_π -groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 153, 307—346.

Поступило
2 VII 1971

NULLITEGURITE PUUDUMISEST MÖNINGAIS POOLRÜHMARINGIDES

U. Kaljulaid

Resümee

Tõestatakse, et A. Maltsevi mõttes lokaalselt nilpotentse poolrühma S ja nulliteguriteta ühikuga ringi A jaoks on poolrühmaring AS nulliteguriteta parajasti siis, kui S on taanduvusega ja seosest $x^n = y^n$, kus $x, y \in S$, järeldub $x = y$.

ON THE ABSENCE OF ZERO-DIVISORS IN SOME SEMIGROUP RINGS

U. Kaljulaid

Summary

It has been shown in this paper that for a locally nilpotent (in the sense of A. Malcev) semigroup S and for a ring A without zero-divisors, the semigroup-ring AS has no zero-divisors iff S is a cancellation semigroup with unique roots.

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ ИДЕАЛЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ГРУППОВОГО КОЛЬЦА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

У. Кальюлайд



Кафедра алгебры и геометрии

В групповом кольце ZG конечной группы¹ G с коэффициентами из кольца целых чисел Z выделяется *фундаментальный идеал* $\Delta = \Delta(G)$, т. е. множество всевозможных конечных сумм вида $\sum n_i \gamma_i$, $n_i \in Z$, $\gamma_i \in G$, где $\sum n_i = 0$. Индуктивно определяются степени идеала Δ , т. е. $\Delta^\lambda = \Delta^{\lambda-1} \cdot \Delta$ для неперелыного λ и $\Delta^\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} \Delta^\alpha$ для предельного числа λ . Пусть ω — первое бесконечное порядковое число. В работе вычислен базис для Δ^ω в случае нильпотентной группы G и показано, что имеет место соотношение $\Delta^{\omega+1} = \Delta^\omega$. Далее, при каждом натуральном n указана конечная группа G , такая что $\Delta^{\omega+n-1} \neq \Delta^{\omega+n}$. Приводятся также примеры как конечных групп, так и групп G без кручения, λ -й член, $\lambda > \omega$, нижнего центрального ряда которых, т. е. G_λ , не содержится в λ -ой «обобщенной размерной подгруппе» $G \cap (1 + \Delta^\lambda)$.

1. Рассмотрим в кольце ZG ряд

$$ZG \supset \Delta \supset \Delta^2 \supset \dots \supset \Delta^\lambda \supset \Delta^{\lambda+1} \supset \dots \quad (1)$$

Пусть $\tau = \tau(G)$ — *индекс стабилизации ряда* (1), т. е. τ является первым порядковым числом, таким, что $\Delta^\tau = \Delta^{\tau+1} = \dots$. Свойства ряда (1), в частности, вычисление его индекса стабилизации, представляют интерес в связи с изучением многообразий в представлениях групп.

По известному результату К. Грюнберга ([4], теорема В), в кольце ZG для конечной группы G имеет место соотношение $\Delta^\omega = 0$ в точности тогда, когда группа G примарна. Возникает задача описания Δ^ω для непримарных групп G .

Пусть Σ_G — *нильпотентный корадикал* в группе G , т. е. пересечение всех тех инвариантных в G подгрупп, факторгруппы по которым нильпотентны. Тогда для групп G , совпадающих со своим нильпотентным корадикалом Σ_G , индекс стабилизации

¹ За исключением случаев, оговариваемых особо, слово «группа» ниже используется в смысле «конечная группа».

ряда (1) равен единице. Если же $\Sigma_\Gamma \neq \Gamma$, то $\tau(\Gamma) \geq \omega$. Далее, имеет место следующая

Теорема 1. Для конечной нильпотентной группы Γ при всяком натуральном n имеет место соотношение

$$\Delta^n \neq \Delta^\omega = \Delta^{\omega+1} = \dots$$

Найти базис Δ^ω иногда помогает рассуждение, основанное на исследовании свойств проективного предела L для системы конечных групп (Δ/Δ^i) , где морфизмами являются естественные отображения $\Delta/\Delta^j \rightarrow \Delta/\Delta^i$, $i \leq j$. В силу изоморфизма Z -модулей L и Δ/Δ^ω , нахождение базиса Δ^ω связано с вычислением предела L как Z -модуля.

Пусть $^2 \Gamma = \prod \Gamma_p$ — примарное разложение группы Γ . Обозначим через Δ_p фундаментальный идеал в групповом кольце $Z\Gamma_p$. Многократное применение предложения 3.25 работы [6] приводит к Z -изоморфизмам

$$\Delta/\Delta^n \xrightarrow{\Theta_n} \sum \Delta_p/\Delta^n_p \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Если учесть, что изоморфизмы Θ_n перестановочны с морфизмами проективных систем (Δ/Δ^i) и $(\sum \Delta_p/\Delta^i_p)$, то операция взятия проективного предела системы перестановочна с (конечными) прямыми суммами систем; если же учесть и теорему Грюнберга (см. пункт 1), то приходим к Z -изоморфизмам

$$\begin{aligned} L = \Delta/\Delta^\omega &= \lim (\Delta/\Delta^i) \cong \lim (\sum \Delta_p/\Delta^i_p) = \\ &= \sum \lim \Delta_p/\Delta^i_p = \sum \Delta_p/\Delta^\omega_p = \sum \Delta_p. \end{aligned}$$

Следовательно, N и $\sum \Delta_p$ изоморфны как Z -модули. Далее, доказано, что Z -базис для Δ^ω состоит из всевозможных произведений $\prod_{(i)} (t_i - 1)$, куда множителей $(t_i - 1)$ входит не меньше двух, и элементы t_i берутся из различных компонент Γ_{p_i} группы Γ . Найденный базис позволяет исследовать многие свойства Δ^ω , в частности, показать, что $\tau(\Gamma) = \omega$. Другими средствами этот факт доказан в работе [7]. Отметим также, что утверждение теоремы верно и для более общих колец коэффициентов вместо Z .

2. Пусть K — кольцо и Γ — произвольная группа. Если задано представление группы Γ автоморфизмами некоторого K -модуля G , то говорят, что задана пара (G, Γ) , (см. [1]). Взаимный коммутант $[G, \Gamma]$ для пары (G, Γ) определяется как подмодуль в G , порожденный всевозможными элементами вида $[g, \gamma] = -g + g \circ \gamma$, $g \in G$, $\gamma \in \Gamma$. Исходя из $[G, \Gamma]$, можно ин-

² Если индексы при прямом произведении Π (при прямой сумме Σ) не обозначены, то прямое произведение (соответственно прямая сумма) берется по всем $p \in \pi(\Gamma)$, где $\pi(\Gamma)$ — множество всех простых чисел, входящих в горядки элементов группы Γ .

дуктивно определить подмодули $[G, G, \lambda]$ для всех порядковых чисел λ . Получим *нижний G -стабильный ряд* в G ,

$$G \supset G_1 \supset \dots \supset G_\lambda \supset G_{\lambda+1} \supset \dots, \quad \text{где } G_\lambda = [G, G, \lambda]. \quad (2)$$

Регулярное представление группы G относительно ZG приводит к паре (ZG, G) , ряд (2) для которой совпадает с рядом (1), т. е. $(ZG)_\lambda = \Delta^\lambda$ для всех λ .

Теперь, пусть пара (G, G) точна, и пусть $G_\mu = 0$ для некоторого порядкового числа μ . Обозначим через $\beta = \beta(G, G)$ первое такое μ и будем говорить, что *группа G допускает точное G -стабильное представление типа $\beta^*(G, G)$* .

Приведем некоторые дополнительные свойства одного класса групп, введенного Б. Хартли в работе [5]. Этот класс групп определяется следующим образом.

Пусть S — множество всех простых чисел, $\varrho \subset S$, и ϱ' — дополнение к ϱ в S . Рассмотрим в конечной группе G подгруппу $\tau_2(G) = \bigcap G_{\varrho'}$, где пересечение берется по всем $\varrho \subset S$, где $|\varrho| = 2$, а $G_{\varrho'}$ — подгруппа, порожденная всеми ϱ' — элементами в G . Далее, пусть $\mathfrak{N}^{(2)}$ — класс конечных групп, являющихся расширениями абелевых групп с помощью нильпотентных и имеющих единичную подгруппу $\tau_2(G)$. Б. Хартли доказал следующую интересную теорему.

Всякая $\mathfrak{N}^{(2)}$ -группа G допускает точное стабильное представление типа $(\omega + n)^*$ в некоторой конечнопорожденной абелевой группе G , (см. [5], теорема 2).

Из этого результата Хартли вытекает

Предложение. *Для нильпотентных групп G из класса $\mathfrak{N}^{(2)}$ имеет место неравенство $\tau(G) \geq \omega + 1$, а $(\omega + n)$ -й член нижнего центрального ряда для такой группы G не содержится в подгруппе $G \cap (1 + \Delta^{\omega+n})$.*

Любопытно отметить, что существуют и группы без кручения, для которых соотношение $G_\lambda \subset D_\lambda$ верно не всегда. Для этого рассмотрим пример из книги [1], стр. 470—471, слабо стабильной группы автоморфизмов G , не обладающей центральной системой даже при абелевой области действия G . Возникает пара (G, G) . Эта пара точна, группа G кручения не имеет и допускает точное G -стабильное представление в модуле G типа $(\omega + 1)^*$. Поэтому $\tau(G) \geq \omega + 1$, откуда следует, что $\Delta^{\omega+1} \neq \Delta^\omega \neq 0$. Для $(\omega + 1)$ -го члена нижнего центрального ряда группы G имеет место соотношение $G_{\omega+1} \not\subset (1 + \Delta^{\omega+1}) \cap G$. В то же время хорошо известно, что члены G_n нижнего центрального ряда произвольной группы G содержатся в соответствующей размерной подгруппе $G \cap (1 + \Delta^n)$ при всяком конечном n (см. [3], предложение 17).

3. Пусть даны две пары (A, P) и (B, Q) . Рассмотрим прямое произведение этих пар, т. е. пару $(G, T) = (A + B, P \times Q)$, где группа $T = P \times Q$ в $G = A + B$ действует покомпонентно.

Далее, пусть Φ — аддитивная группа линейных отображений из B в A . Определяя действие группы T в Φ формулой

$$\forall b \in B, \quad \varphi \in \Phi, \quad \sigma_1 \in P, \quad \sigma_2 \in Q, \\ b(\varphi * \sigma_1 \sigma_2) = ((b \circ \sigma_1^{-1})\varphi) \circ \sigma_2$$

приходим к паре (Φ, T) . Отвечающее этой паре полупрямое произведение обозначим через Γ . Полагая

$\forall a \in A, \quad b \in B, \quad \varphi \in \Phi, \quad a \circ \varphi = a, \quad b \circ \varphi = b + b\varphi,$
получим пару (G, Φ) . Если действие группы Γ в G определить формулой

$$\forall g \in G, \quad \gamma \in \Gamma, \quad \varphi \in \Phi, \quad \sigma \in T, \quad g \circ \gamma = (g \circ \varphi) \circ \sigma,$$

то возникает пара (G, Γ) , которая называется *треугольным произведением данных пар* и обозначается $(A, P) \nabla (B, Q)$ (см. [2]). Возможность использования конструкции треугольного произведения пар для исследования стабилизации ряда (1) указана Б. И. Плоткиным.

Пусть n — любое натуральное число. Далее, пусть $P^{(n)}$ — унитарная группа $(n \times n)$ -матриц над полем Z_p , пусть $A^{(n)}$ — некоторое n -мерное линейное пространство над Z_p , Q — конечная q -группа ($q \neq p$, p, q — простые числа), и B — базисная подгруппа сплетения $B_0 \rtimes Q$, где через B_0 обозначена бесконечная циклическая группа. Отметим, что всякий элемент $b \in B$ имеет однозначную запись вида

$$b = \prod_{\sigma \in Q} \sigma^{-1} b_\sigma \sigma, \quad \text{где } b_\sigma \in B_0.$$

Естественным образом возникают пары $(A^{(n)}, P^{(n)})$ и (B, Q) . Пусть $(G^{(n)}, \Gamma^{(n)}) = (A^{(n)}, P^{(n)}) \nabla (B, Q)$. Группа $\Gamma^{(n)}$ конечна, и она допускает точное $\Gamma^{(n)}$ -стабильное представление типа $(\omega + n)^*$ в модуле $G^{(n)} = A^{(n)} + B$. Оказывается, что имеет место равенство $[G^{(n)}, \Gamma^{(n)}; \omega] = A^{(n)}$. Отсюда выводится

Теорема 2. При всяком натуральном n существуют конечные группы $\Gamma^{(n)}$, такие, что $\tau(\Gamma^{(n)}) \geq \omega + n$.

Полные доказательства изложенных здесь фактов будут опубликованы в отдельной работе.

Автор глубоко благодарен профессору Б. И. Плоткину за предложенную тему и ценные указания. За помощь при оформлении этой работы автор благодарен доценту Я. Хиону.

Литература

1. Плоткин Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва, 1966.
2. Плоткин Б. И., Треугольные произведения пар. Труды алгебраического семинара, Рига, 1971.
3. Connell, I., On the groupring. Canad. J. Math., 1963, 15, 650—685.

4. Gruenberg, K. W., The residual nilpotence of certain presentations of finite groups. Arch. Math., 1962, 13, 408—417.
5. Hartley, B., Locally finite groups embeddable in stability groups. J. of Algebra, 1966, 3, 187—205.
6. Passi, I. B. S., Polynomial maps on groups. J. of Algebra, 1968, 9, 121—151.
7. Smith, P. F., On the intersection theorem. Proc. London Math. Soc. 1970, 21, 385—398.

Поступило
17 X 1971

FUNDAMENTAALSEST IDEEAALIST LÖPLIKU RÜHMA TÄISARVULISTE KOEFIITSIENTIDEGA RÜHMARINGIS

U. Kaljulaid

Resümee

Olgu ω esimene lõpmatu ordinaalarv. Kehtib teoreem: iga naturaalarvu n korral leidub selline lõplik rühm Γ , et tema täisarvuliste koefitsientidega rühmaringis $Z\Gamma$ fundamentaalse ideaali Δ astmed $\Delta^{\omega+n-1}$ ja $\Delta^{\omega+n}$ on erinevad.

ON THE AUGMENTATION IDEAL OF THE INTEGRAL GROUPING FOR FINITE GROUPS

U. Kaljulaid

Summary

Let ω be the first infinite ordinal. The following is true: For every natural n there exists a finite group Γ the powers $\Delta^{\omega+n-1}$ and $\Delta^{\omega+n}$ of the augmentation ideal Δ in the integral grouping $Z\Gamma$ are not equal.

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ m НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЯХ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И С НЕСОВПАДАЮЩИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ)

Х. Кильп

Кафедра алгебры и геометрии

§ 1. Введение

В настоящей работе системы S^1_{m2} , указанные в заглавии, изучаются методом Картана. При $m = 3$ такие системы рассматривались А. М. Васильевым [2]. В настоящей работе даются обобщения результатов статьи [2] на случай произвольного m , а также рассматривается ряд других задач (§§ 6, 7, 8). §§ 2, 3 подготовительные, в § 4 даются условия существования у системы промежуточного интеграла. В § 5 содержатся необходимые и достаточные признаки систем, приводящихся к линейным. В § 6 изучается вопрос существования у системы решений с постоянным двойным отношением характеристических корней, в § 7 рассматриваются аффинные связности с абсолютным параллелизмом направлений, присоединяемые к триткани, заданной общими дифференциальными уравнениями. Результаты § 7 используются в § 8 для исследования вопроса существования у системы решений с тройкой характеристик, образующих шестиугольную триткань. В § 9 рассматриваются вопросы, связанные с законами сохранения и обобщенными функциями тока, а также связь последних с промежуточными интегралами.

Моей работой над этой темой руководил проф. А. М. Васильев. Я выражаю ему глубокую благодарность за постоянное внимание и поддержку.

§ 2. Структурные уравнения

1. На аналитическом многообразии M_{m+2} независимых переменных x, y и зависимых переменных u^α с главными формами $\omega^\lambda, \omega^\alpha$, для которых по общей схеме исследования имеем (см. [2])

$$\omega^p = u^p q du^q \quad (1)$$

$$(\lambda = 1, 2; \alpha = 3, 4, \dots, m+2; p, q = 1, 2, \dots, m+2),$$

где $u^p q$ — независимые переменные, удовлетворяющие единственному условию $\det \|u^p q\| \neq 0$, рассматриваются квазилинейные системы S^1_{m+2}

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta}(x, y, u^\beta) \frac{\partial u^\beta}{\partial y} + f^\alpha(x, y, u^\beta),$$

приводимые при наличии m различных характеристик к нормальному виду (см. [3], гл. V, § 2)

$$l^\beta_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x} = \lambda^\beta l^\beta_\gamma \frac{\partial u^\gamma}{\partial y} + l^\beta_\alpha f^\alpha, \quad (A)$$

где λ^α — характеристические корни, т. е. корни характеристического уравнения $\det (\|h_{\alpha\beta}\| - \lambda E) = 0$, а $l^\alpha = (l^{\alpha_1}, \dots, l^{\alpha_m})$ — соответствующие собственные векторы, т. е. $\sum_{\beta} l^{\alpha_\beta} h_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha l^{\alpha_\gamma}$. Характеристические кривые на интегральных многообразиях при этом задаются дифференциальными уравнениями $dy + \lambda^\alpha dx = 0$. Система остается квазилинейной при преобразованиях переменных следующего вида

$$U^\alpha = U^\alpha(x, y, u^\beta), \quad X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y),$$

где U^α, X, Y — произвольные аналитические функции своих аргументов. Поскольку независимые переменные преобразуются лишь между собой, многообразие M_{m+2} расслаивается на m -мерные слои, определяемые равенствами $\omega^\lambda = 0$, с базой M_2 , являющейся пространством независимых переменных x, y . Значит,

$$d\omega^\lambda = \omega^\lambda_\mu \wedge \omega^\mu \quad (B)$$

и

$$\omega^\lambda = u^{\lambda_1} dx + u^{\lambda_2} dy, \quad (2_1)$$

где $D = \det \|u^{\lambda_\mu}\| \neq 0$. Кроме того, можно указать величины p^α и h^α так, чтобы

$$\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1 = p^\alpha (dy + h^\alpha(x, y, u^\beta) dx). \quad (2_2)$$

2. На интегральных многообразиях

$$du^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial u^\alpha}{\partial y} dy. \quad (3)$$

В пространстве дифференциалов dx, dy, du^α переходим к новому базису $\omega^1, \omega^2, \omega^{\alpha'}$, так чтобы равенство (3) перешло в $\omega^{\alpha'} = 0$, т. е. примем

$$\omega^{\alpha'} = u^{\alpha_\beta} l^{\alpha_\beta} \{du^\beta - u^{\beta_1} dx - u^{\beta_2} dy\}. \quad (4)$$

В последнем равенстве

$$u^{\beta_1} = \frac{\partial u^\beta}{\partial x}; \quad u^{\beta_2} = \frac{\partial u^\beta}{\partial y} \quad (5)$$

на интегральных многообразиях и u^{α_β} — новые переменные, удовлетворяющиеся единственному условию $\det \|u^{\alpha_\beta}\| \neq 0$. Значит, интегральные многообразия выделяются зависимостями $\omega^{\alpha'} = 0$ с учетом (5) и (A). Внесем соотношения (5) и (A) в

выражения форм $\omega^{\alpha'}$; после некоторых преобразований, учитывающих определение собственных векторов, будем иметь:

$$\omega^{\alpha'} = u^{\alpha\beta} l^{\alpha\beta} \{ du^{\beta} - f^{\beta} dx \} - u^{\alpha\beta} l^{\alpha\beta} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial y} (dy + \lambda^{\alpha} dx). \quad (6)$$

Поскольку

$$dy + \lambda^{\alpha} dx = D^{-1} [(u^1_1 + u^2_2) (\omega^2 + \lambda^{\alpha} \omega^1) - (u^2_1 + \lambda^{\alpha} u^1_1) \omega^1 - (u^2_2 + \lambda^{\alpha} u^1_2) \omega^2],$$

внесем это выражение $dy + \lambda^{\alpha} dx$ в предыдущее и, обозначив

$$D^{-1} u^{\alpha\beta} l^{\alpha\beta} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial y} (u^1_1 + u^2_2) \text{ через } \mu^{\alpha}, \text{ а выражение, получаемое}$$

справа, без $\mu^{\alpha} (\omega^2 + \lambda^{\alpha} \omega^1)$, через $u^{\alpha}_{\alpha} \omega^{\alpha}$, в базисе дифференциалов ω^{α} , ω^1 , ω^2 приходим к соотношениям

$$\omega^{\alpha'} = u^{\alpha}_{\alpha} \omega^{\alpha} - \mu^{\alpha} (\omega^2 + \lambda^{\alpha} \omega^1),$$

т. е. в главных формах ω^1 , ω^2 , ω^{α} интегральные многообразия выделяются соотношениями

$$\omega^{\alpha} = \rho^{\alpha} (\omega^2 + \lambda^{\alpha} \omega^1), \quad (7)$$

или, что то же самое,

$$\Omega^{\alpha} = \omega^{\alpha} \wedge (\omega^2 + \lambda^{\alpha} \omega^1) = 0. \quad (C)$$

3. То, что каждое из $\Omega^{\alpha} = 0$ задает уравнение системы со своим характеристическим корнем λ^{α} , требует, чтобы

$$d\Omega^{\alpha} = \Theta^{\alpha} \wedge \Omega^{\alpha} + \Phi^{\alpha},$$

где Θ^{α} выражаются через двухиндексные формы, а Φ^{α} только через главные, которые после приведения подобных членов и разложения по лемме Картана дают структурные уравнения

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\alpha} \wedge \omega^{\alpha} + \omega^{\alpha}_0 \wedge (\omega^2 + \lambda^{\alpha} \omega^1) + a^{\alpha}_{\gamma 1} \omega^{\gamma} \wedge \omega^1 + a^{\alpha}_{\gamma \beta} \omega^{\gamma} \wedge \omega^{\beta}, \quad (D)$$

где $\gamma, \beta \neq \alpha$, и

$$\begin{aligned} d\lambda^{\alpha} + \lambda^{\alpha} (\omega^1_1 - \omega^2_2) - (\lambda^{\alpha})^2 \omega^1_2 + \omega^2_1 = \\ = \lambda^{\alpha}_1 \omega^1 + \lambda^{\alpha}_0 (\omega^2 + \lambda^{\alpha} \omega^1) + \lambda^{\alpha}_{\beta} \omega^{\beta}. \end{aligned} \quad (E)$$

Из (E) видно, что $\lambda^{\alpha} - \lambda^{\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) являются относительными инвариантами, которые у нас отличны от нуля. Введем обозначения

$$\omega^{2\alpha} = \omega^2 + \lambda^{\alpha} \omega^1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= (\omega^1_1 - \lambda^{\alpha} \omega^1_2) \wedge \omega^1 + \omega^1_2 \wedge \omega^{2\alpha}, \\ d\omega^{2\alpha} &= (\omega^2_2 + \lambda^{\alpha} \omega^1_2 - \lambda^{\alpha}_0 \omega^1) \wedge \omega^{2\alpha} + \lambda^{\alpha}_{\beta} \omega^{\beta} \wedge \omega^1. \end{aligned}$$

Продолжив уравнения (B), (D), (E), находим дифференциальные уравнения для двухиндексных форм и коэффициентов в (E):

$$d\omega^{\mu}_{\eta} = \omega^{\mu}_{\lambda} \wedge \omega^{\lambda}_{\eta} + \omega^{\mu}_{\eta\lambda} \wedge \omega^{\lambda}, \quad (F)$$

$$\begin{aligned}
& d\lambda^{\alpha_1} + \lambda^{\alpha_1}(2\omega^1_1 - \omega^2_2 - 3\lambda^{\alpha}\omega^1_2) + (\lambda^{\beta} - \lambda^{\alpha})\lambda^{\alpha}\omega^{\beta}_0 + \lambda^{\alpha}\omega^2_{12} - \\
& - (\lambda^{\alpha})^3\omega^1_{22} + (\lambda^{\alpha})^2(\omega^1_{12} - \omega^2_{22}) - \\
& - \omega^2_{11} - \lambda^{\alpha}(\omega^1_{11} - \omega^2_{21}) + (\lambda^{\alpha})^2\omega^1_{21} = \\
& = -0,5[(\lambda^{\alpha_0})^2\omega^{2\alpha} + (\lambda^{\alpha_0}\lambda^{\alpha_{\beta}} + \lambda^{\alpha_{\gamma}}\lambda^{\alpha_{\beta_1}})\omega^{\beta}] + \\
& + \lambda^{\alpha_{11}}\omega^1 + \lambda^{\alpha_{10}}\omega^{2\alpha} + \lambda^{\alpha_{1\beta}}\omega^{\beta},
\end{aligned} \tag{G1}$$

$$\begin{aligned}
& d\lambda^{\alpha_0} + \lambda^{\alpha_0}(\omega^1_1 - \lambda^{\alpha}\omega^1_2) + \lambda^{\alpha_{\beta}}\omega^{\beta}_0 + \lambda^{\alpha_1}\omega^1_2 + \\
& + \lambda^{\alpha}(\omega^2_{22} - \omega^1_{12}) - (\lambda^{\alpha})^2\omega^1_{22} - \omega^2_{12} = \\
& = 0,5(\lambda^{\alpha_0})^2\omega^1 + \lambda^{\alpha_{00}}\omega^{2\alpha} + \lambda^{\alpha_{0\beta}}\omega^{\beta} + \lambda^{\alpha_{01}}\omega^1,
\end{aligned} \tag{G2}$$

$$\begin{aligned}
& d\lambda^{\alpha_{\beta}} + \lambda^{\alpha_{\beta}}(\omega^{\beta}_0 + \omega^1_1 - \omega^2_2 - 2\lambda^{\alpha}\omega^1_2) = \\
& = 0,5(\lambda^{\alpha_0}\lambda^{\alpha_{\beta}} + \lambda^{\alpha_{\gamma}}\lambda^{\alpha_{\beta_1}})\omega^1 + 0,5\lambda^{\alpha_{\gamma}}\lambda^{\alpha_{\delta\beta}}\omega^{\delta} + \\
& + \lambda^{\alpha_{\beta\beta}}\omega^{\beta} + \lambda^{\alpha_{\beta_0}}\omega^{2\alpha} + \lambda^{\alpha_{\beta_1}}\omega^1 + \lambda^{\alpha_{\beta\gamma}}\omega^{\gamma};
\end{aligned}$$

и в (D):

$$\begin{aligned}
& da^{\alpha_{\gamma_1}} + a^{\alpha_{\gamma_1}}(\omega^{\gamma}_0 - \omega^{\alpha}_0 + \omega^1_1 - \lambda^{\gamma}\omega^1_2) - \\
& - \lambda^{\alpha_{\gamma_0}}\omega^{\alpha}_0 + (a^{\alpha_{\gamma\beta}} - a^{\alpha_{\beta\gamma}})\lambda^{\beta}\omega^{\beta}_0 = \dots, \\
& da^{\alpha_{\beta\gamma}} + a^{\alpha_{\beta\gamma}}(\omega^{\beta}_0 + \omega^{\gamma}_0 - \omega^{\alpha}_0) = \dots,
\end{aligned} \tag{H}$$

$$d\omega^{\alpha}_0 = \omega^{\alpha_0}\Lambda\omega^{2\alpha} + \omega^{\alpha_{\alpha}}\Lambda\omega^{\alpha} + \dots,$$

$$d\omega^{\alpha_0} = (\omega^{\alpha}_0 - \omega^2_2 - \lambda^{\alpha}\omega^1_2)\Lambda\omega^{\alpha}_0 + \omega^{\alpha_{00}}\Lambda\omega^{2\alpha} + \omega^{\alpha_{0\alpha}}\Lambda\omega^{\alpha} + \dots,$$

где невыписанные члены линейно выражаются через ω^p , $\omega^p \Lambda \omega^q$. Отсюда видно, что $\lambda^{\alpha_{\beta}}$ и $a^{\alpha_{\beta\gamma}}$ являются относительными инвариантами, а двойное отношение любых характеристических корней

$$\frac{\lambda^{\alpha} - \lambda^{\beta}}{\lambda^{\delta} - \lambda^{\beta}} : \frac{\lambda^{\alpha} - \lambda^{\gamma}}{\lambda^{\delta} - \lambda^{\gamma}}$$

— абсолютным инвариантом.

Обратно, при выполнении соотношений (B), (D), (E) будем иметь и (2₂), подстановка которого в (C) приводит к квазилинейной системе.

§ 3. Строение касательного пространства $T_u(M_{m+2})$

1. Теперь в каждой точке u многообразия M_{m+2} в соответствующем касательном пространстве $T_u(M_{m+2})$ выделяется семейство реперов, инфинитезимальные преобразования которых имеют вид

$$de_1 = -\omega^1_1 e_1 - \omega^2_1 e_2 - \lambda^{\alpha}\omega^{\alpha}_0 e_{\alpha},$$

$$de_2 = -\omega^1_2 e_1 - \omega^2_2 e_2 - \omega^{\alpha}_0 e_{\alpha},$$

$$de_{\alpha} = -\omega^{\alpha}_0 e_{\alpha}.$$

2. Система $S^1_{m_2}$ задает в каждом $T_u(M_{m+2})$ инвариантное m -параметрическое семейство двумерных плоскостей $[e_1, e_2]$, определяемых уравнениями (7). Подвижной репер в $T_u(M_{m+2})$ является частично канонизированным. Каждый из векторов $e_1 - \lambda^{\alpha}e_2$ пробегает m -плоскость $\omega^{\alpha} = 0$, $\omega^{2\alpha} = 0$, векторы e_{α} зафиксированы по направлению. Можно было бы зафиксировать и векторы e_1, e_2 в результате канонизации за счет форм $\omega^1_2, \omega^2_1, \omega^1_1 - \omega^2_2$ по соотношениям (E). Тогда три из λ^{α} получили бы фиксированные значения. В целях сохранения симметрии рассуждений мы этого не делаем.

3. Рассмотрим вопрос о системах Пфаффа в многообразии M_{m+2} , ассоциированных с нашей системой дифференциальных уравнений. Поскольку система p уравнений Пфаффа в $(m+2)$ -мерном многообразии определяется заданием в каждом касательном пространстве $(m-p+2)$ -мерного линейного подпространства, то поставленный вопрос решается нахождением инвариантных в $T_u(M_{m+2})$ подпространств. В каждой точке заданы m инвариантных m -мерных подпространств, определяющие m систем Пфаффа

$$S_{\alpha 2\alpha} : \omega^\alpha = 0, \omega^{2\alpha} = 0;$$

$S_{\alpha 2\alpha}$ есть ось пучка подпространств, определяемых α -ым уравнением системы (С).

Имеется m инвариантные $(m+1)$ -мерные подпространства, образующие пучок, α -ому подпространству которого принадлежит указанная выше ось $S_{\alpha 2\alpha}$, соответствующие уравнения Пфаффа:

$$S_{2\alpha} : \omega^{2\alpha} = 0;$$

m -мерная ось предыдущего пучка определяет систему

$$S_{12} : \omega^1 = 0, \omega^2 = 0.$$

Инвариантными являются также любые подпространства пересечения этих основных:

$(m-1)$ -мерные, определяющие системы

$$S_\alpha : \omega^1 = 0, \omega^2 = 0, \omega^\alpha = 0,$$

$(m-2)$ -мерные, определяющие системы

$$S_{\alpha\beta} : \omega^1 = 0, \omega^2 = 0, \omega^\alpha = 0, \omega^\beta = 0,$$

и т. д., одномерные, определяющие системы

$$S_{(\alpha)} : \omega^1 = 0, \omega^2 = 0, \omega^\beta = 0, \beta = 3, 4, \dots, m+2, \beta \neq \alpha.$$

4. Для определения произвола в существовании решения системы (С), или что то же, системы (7), продолжением которой является система $\Delta v^\alpha \wedge \omega^{2\alpha} = 0$, в обозначениях [5] (более подробно аналогичные рассуждения см. п. 2 § 7) будем иметь $s_2 = 0$, $q = s_1 = Q = m$. Наиболее общий интегральный элемент определяется формулами $\Delta v^\alpha = \xi^\alpha \omega^{2\alpha}$, откуда $N = m$. Значит, $Q = N$, т. е. система (С) инволютивна и решение существует с произволом m функций одного аргумента.

Параметры ξ^α из системы $\Delta v^\alpha = \xi^\alpha \omega^{2\alpha}$ не определяются, если $P_\alpha \omega^{2\alpha} = 0$. Выделяются характеристические направления, определенные соотношениями $\omega^{2\alpha} = 0$ на интегральных многообразиях, т. е. векторами $e_1 - \lambda^\alpha e_2$.

§ 4. Промежуточные интегралы

1. Из структурных уравнений (В), (D) видно, что системы S_{12} , $S_{(\alpha)}$ являются вполне интегрируемыми. Обращение в нуль $a^\alpha_{\beta\gamma}$ при фиксированном α дает полную интегрируемость системы S_α и т. д., обращение в нуль $a^\alpha_{\beta\gamma}$ при фиксированных

β и γ дает полную интегрируемость системы $S_{(\beta\gamma)}$, а в случае $a^{\alpha\beta\gamma} = 0$ при любых α, β, γ , где у нас $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, все системы $S_\alpha, S_{\alpha\beta}, \dots, S_{(\alpha)}$ вполне интегрируемы. Их решения принадлежат $(m-1)$ -мерным поверхностям — решениям системы S_β . Эти рассуждения дают, что в случае $a^{\alpha\beta\gamma} = 0$ за искомые функции системы $S^1_{m_2}$ естественно взять интегралы систем S_α , не являющиеся интегралами системы S_{1_2} .

2. Рассмотрим уравнение $S_{2\alpha}: \omega^{2\alpha} = 0$. Характеристическая система такого уравнения состоит из уравнений

$$\lambda^{\alpha\beta}\omega^\beta = 0, \quad \lambda^{\alpha\beta}\omega^1 = 0, \quad \omega^{2\alpha} = 0.$$

Если для данного λ^α все $\lambda^{\alpha\beta} = 0$, уравнение $S_{2\alpha}$ вполне интегрируемо. Рассмотрим проекцию M_{m+2} на M_2 . В $T(M_2)$ будем иметь

$$de_1 = -\omega^1 e_1 - \omega^2 e_2, \quad de_2 = -\omega^1 e_1 - \omega^2 e_2,$$

причем

$$d(e_1 - \lambda^\alpha e_2) = -(\omega^1 - \lambda^\alpha \omega^2)(e_1 - \lambda^\alpha e_2) - \lambda^{\alpha\beta} \omega^\beta e_2.$$

Отсюда видно, что при $\lambda^{\alpha\beta} = 0$ семейство характеристик, отвечающих λ^α , из всех интегральных многообразий системы $S^1_{m_2}$ проектируется в одно и то же однопараметрическое семейство линий на плоскости независимых переменных M_2 .

3. Если

$$a^{\alpha\gamma 1} = 0, \quad a^{\alpha\gamma\beta} = 0, \quad \lambda^{\alpha\beta} = 0, \quad (8)$$

то система $S^1_{\alpha 2\alpha}$ вполне интегрируема. В этом случае α -ое уравнение нашей системы (С)

$$\omega^\alpha \Lambda(\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1) = 0$$

имеет очевидное общее решение: одна из характеристических переменных системы $S_{\alpha 2\alpha}$ является произвольной функцией от другой. Подстановка этой зависимости в оставшиеся уравнения системы приведет к системе $m-1$ уравнений первого порядка с $m-1$ искомыми функциями. Таким образом, условия (8) означают существование у системы $S^1_{m_2}$ промежуточного интеграла.

Если

$$\begin{aligned} a^{\alpha\gamma 1} = 0, & \quad a^{\alpha\gamma\delta} = 0, & \quad \lambda^{\alpha\delta} = 0, \\ a^{\beta\gamma 1} = 0, & \quad a^{\beta\gamma\delta} = 0, & \quad \lambda^{\beta\delta} = 0, \end{aligned}$$

то системы $S_{\alpha 2\alpha}$ и $S_{\beta 2\beta}$ имеют общую характеристическую систему из четырех уравнений. В этом случае два уравнения системы (С)

$$\omega^\alpha \Lambda(\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1) = 0, \quad \omega^\beta \Lambda(\omega^2 + \lambda^\beta \omega^1) = 0$$

являются в характеристических переменных системой двух уравнений в частных производных первого порядка с двумя искомыми функциями. Подставив решение этой системы в оставшиеся, получим систему из $m-2$ уравнений первого порядка с $m-2$ искомыми функциями и т. д. Аналогичные рассуждения верны, если в (8) индекс α принимает произвольные k значения $a_i, i = 1, 2, \dots, k$ среди возможных. Итак, верна

Теорема 1. При выполнении условий

$$a^{\alpha_i}_{\beta_j 1} = 0, \quad a^{\alpha_i}_{\beta_j \gamma_j} = 0, \quad \lambda^{\alpha_i}_{\beta_j} = 0 \quad (9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, k; j = k + 1, \dots, m)$$

а) характеристические системы систем $S_{\alpha 2\alpha}$ являются подсистемами системы из $k+2$ уравнений $\omega^\alpha = 0, \omega^1 = 0, \omega^2 = 0$;

б) подсистема $\omega^\alpha \wedge \omega^{2\alpha} = 0$ системы (С) является в предыдущих характеристических переменных системой k уравнений в частных производных первого порядка с k искомыми функциями;

в) подстановка решения этой системы в оставшиеся уравнения системы S^1_{m2} дает систему $m - k$ уравнений первого порядка с $m - k$ искомыми функциями.

Если выполнены условия теоремы 1, будем говорить, что у системы существует промежуточный k -интеграл.

Следствие. Если у системы S^1_{m2} имеются промежуточные k -интеграл и l -интеграл, так чтобы индексы α_i и α_j , где $i = 1, 2, \dots, k$ и $j = 1, 2, \dots, l$ пробегают при этом n одинаковых значений $\alpha_h, h = 1, 2, \dots, n$, то у системы существует промежуточный n -интеграл.

Доказательство. Предположения означают выполнения равенств

$$a^{\alpha_i}_{\beta_I 1} = 0, \quad a^{\alpha_i}_{\beta_I \gamma_I} = 0, \quad \lambda^{\alpha_i}_{\beta_I} = 0 \quad (I = k + 1, \dots, m),$$

$$a^{\alpha_j}_{\beta_J 1} = 0, \quad a^{\alpha_j}_{\beta_J \gamma_J} = 0, \quad \lambda^{\alpha_j}_{\beta_J} = 0 \quad (J = l + 1, \dots, m).$$

Эти равенства содержат и соотношения

$$a^{\alpha_h}_{\beta_H 1} = 0, \quad a^{\alpha_h}_{\beta_H \gamma_H} = 0, \quad \lambda^{\alpha_h}_{\beta_H} = 0, \quad (H = n + 1, \dots, m),$$

т. е. подсистема $\omega^{\alpha_h} \wedge \omega^{2\alpha_h} = 0$ дает промежуточный n -интеграл.

§ 5. Подкласс линейных систем

1. Рассмотрим случай

$$a^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0, \quad \lambda^{\alpha}_{\beta} = 0.$$

Тогда $a^{\alpha}_{\beta 1}$ становятся относительными инвариантами

$$\begin{aligned} da^{\alpha}_{\gamma 1} + a^{\alpha}_{\gamma 1}(\omega^\gamma + \omega^1 - \omega^\alpha - \lambda^\gamma \omega^1) = \\ = a^{\alpha}_{\gamma 11} \omega^1 + a^{\alpha}_{\gamma 10}(\omega^2 + \lambda^\delta \omega^1) + a^{\alpha}_{\gamma 1\delta} \omega^\delta. \end{aligned} \quad (10)$$

Продолжив последние уравнения, получим

$$\begin{aligned}
da^{\alpha_{\gamma 10}} + a^{\alpha_{\gamma 10}}(\omega^{\gamma_{\gamma}} + 2\omega^1 - \omega^{\alpha_{\alpha}} - \lambda^{\gamma}\omega^1_2) + \\
+ a^{\alpha_{\gamma 10}}\omega^{\delta_0} + a^{\alpha_{\gamma 1}}(\delta^{\gamma_{\delta}} - \delta^{\alpha_{\delta}})\omega^{\delta_{\delta 0}} = \dots, \\
da^{\alpha_{\gamma 11}} + a^{\alpha_{\gamma 11}}(\omega^{\gamma_{\gamma}} - \omega^{\alpha_{\alpha}} + \omega^1 + \omega^2 - (\lambda^{\alpha} - \lambda^{\gamma})\omega^1_2) + \\
+ a^{\alpha_{\gamma 10}}\omega^{\delta_0} + a^{\alpha_{\gamma 1}}(\delta^{\gamma_{\delta}} - \delta^{\alpha_{\delta}})\omega^{\delta_{\delta 0}} = \dots, \\
da^{\alpha_{\gamma 1\beta}} + a^{\alpha_{\gamma 1\beta}}(\omega^{\gamma_{\gamma}} + \omega^{\beta_{\beta}} - \omega^{\alpha_{\alpha}} + \omega^1 - \lambda^{\gamma}\omega_2) + \\
+ a^{\alpha_{\gamma 1}}(\delta^{\gamma_{\beta}} - \delta^{\alpha_{\beta}})\omega^{\beta_{\beta\beta}} = \dots
\end{aligned} \tag{11}$$

Отсюда видно, что при $\beta \neq \alpha, \gamma$ (а у нас $\alpha \neq \gamma$, т. е. при $\alpha \neq \beta = \gamma$) величины $a^{\alpha_{\gamma 1\beta}}$ являются относительными инвариантами. Продолжим уравнения (11) и посчитаем

$$\begin{aligned}
d(a^{\alpha_{\gamma 1}}a^{\beta_{\delta 1\eta}} - a^{\beta_{\delta 1}}a^{\alpha_{\gamma 1\eta}}) &= [\omega^{\gamma_{\gamma}} + \omega^{\delta_{\delta}} + \omega^{\eta_{\eta}} - \omega^{\alpha_{\alpha}} - \omega^{\beta_{\beta}} + 2\omega^1 - \\
&\quad - (\lambda^{\gamma} + \lambda^{\delta})\omega^1_2] \cdot (a^{\alpha_{\gamma 1}}a^{\beta_{\delta 1\eta}} - a^{\beta_{\delta 1}}a^{\alpha_{\gamma 1\eta}}) + \dots, \\
d(a^{\alpha_{\beta 11\gamma}}a^{\alpha_{\beta 1}} - a^{\alpha_{\beta 11}}a^{\alpha_{\beta 1\gamma}}) &= [\omega^{\gamma_{\gamma}} + 2\omega^{\beta_{\beta}} - 2\omega^{\alpha_{\alpha}} + 3\omega^1 - \\
&\quad - (2\lambda^{\beta} + \lambda^{\gamma})\omega^1_2] \cdot (a^{\alpha_{\beta 11\gamma}}a^{\alpha_{\beta 1}} - \\
&\quad - a^{\alpha_{\beta 11}}a^{\alpha_{\beta 1\gamma}}) + \dots, \\
d(a^{\alpha_{\beta 1\lambda\gamma}}a^{\alpha_{\beta 1}} - a^{\alpha_{\beta 1\lambda}}a^{\alpha_{\beta 1\gamma}}) &= [\omega^{\gamma_{\gamma}} + 2\omega^{\beta_{\beta}} - 2\omega^{\alpha_{\alpha}} + \omega - \\
&\quad - (2\lambda^{\beta} + \lambda^{\gamma})\omega^1_2] \cdot (a^{\alpha_{\beta 1\lambda\gamma}}a^{\alpha_{\beta 1}} - a^{\alpha_{\beta 1\lambda}}a^{\alpha_{\beta 1\gamma}}),
\end{aligned}$$

где $\omega = 3\omega^1$ при $\lambda = 1$ и $\omega = 2\omega^1 + \omega^2$ при $\lambda = 0$; через $a^{\alpha_{\beta 1\lambda\gamma}}$ обозначены коэффициенты при ω^{γ} в разложении $da^{\alpha_{\beta 1\lambda}}$. Значит, величины

$$a^{\alpha_{\gamma 1}}a^{\alpha_{\delta 1\eta}} - a^{\beta_{\delta 1}}a^{\alpha_{\gamma 1\eta}}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
a^{\alpha_{\beta 11\gamma}}a^{\alpha_{\beta 1}} - a^{\alpha_{\beta 11}}a^{\alpha_{\beta 1\gamma}}, \\
a^{\alpha_{\beta 1\lambda\gamma}}a^{\alpha_{\beta 1}} - a^{\alpha_{\beta 1\lambda}}a^{\alpha_{\beta 1\gamma}}
\end{aligned} \tag{13}$$

являются относительными инвариантами.

Теорема 2. *Для того, чтобы система $S^1_{m_2}$ становилась линейной при некотором выборе независимых и независимых переменных, необходимо и достаточно, чтобы относительные инварианты $\lambda^{\alpha_{\beta}}$, $a^{\alpha_{\beta\gamma}}$, $a^{\alpha_{\beta 1\gamma}}$, (12) и (13), причем в (13) положено $\gamma \neq \alpha, \beta$, обращались в нуль.*

Доказательство. Выберем переменные $x, y, u^3, u^4, \dots, u^{m+2}$ следующим образом. Во-первых, формы ω^1, ω^2 имеют вид (2₁). Во-вторых, так как $\lambda^{\alpha_{\beta}} = 0$, то характеристики для данного α образуют однопараметрическое семейство (см. п. 2, § 4), т. е. должно быть

$$\omega^2 + \lambda^{\alpha}\omega^1 = p^{\alpha}(dy + h^{\alpha}(x, y)dx).$$

В-третьих, поскольку системы $S_{\alpha}, S_{2\alpha}$ вполне интегрируемы, то, обозначив через u^{α} интеграл системы S_{α} , независимый от x, y (см. п. 1, § 4), уравнения (С) пишутся в виде

$$(du^{\alpha} - f^{\alpha}dx) \wedge (dy + h^{\alpha}dx) = 0,$$

так что формы ω^{α} примут вид

$$\omega^{\alpha} = m^{\alpha}(du^{\alpha} - p^{\alpha}(dy + h^{\alpha}dx) - f^{\alpha}dx), \tag{14}$$

где f^{α} — определенные функции от x, y и u^{β} . Сами уравнения $S^1_{m_2}$ запишутся в виде

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x} - h^\alpha(x, y) \frac{\partial u^\alpha}{\partial y} = f^\alpha(x, y, u^\beta),$$

что получится, если в уравнения (С) подставить соотношения (3) и в полученном тождестве, в силу независимости dx и dy на интегральных многообразиях, коэффициенты при $dx \wedge dy$ приравнять нулю, а затем исключить v^α . Сравнивая (14) с (В), (D) и (10), получим, что теперь

$$\begin{aligned} a^{\alpha\beta 1} &= -\frac{p^\alpha m^\alpha}{D} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta}, & a^{\alpha\beta 1\gamma} &= -\frac{p^\alpha m^\alpha}{D} \frac{m^\gamma}{m^\beta m^\gamma} \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}, \\ \omega^\alpha_\alpha &= \frac{dm^\alpha}{m^\alpha} + \frac{p^\alpha}{D} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\alpha} \omega^1 - \frac{b}{D} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^2} (\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1) + \\ &+ u^{\alpha\alpha} \omega^\alpha + u^{\alpha 0} \omega^{2\alpha}, & (15) \\ \omega^\alpha_0 &= -m^\alpha \left\{ \frac{\partial v^\alpha}{p^\alpha} + \left\{ \frac{p^\alpha (bh^\alpha - a)}{D^2} \left(v^\alpha \frac{\partial h^\alpha}{\partial y} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial y} - \right. \right. \right. \\ &- \frac{1}{D} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} \left[\frac{v^\beta (b(\lambda^\beta - \lambda^\alpha) + p^\alpha)}{p^\beta} + \frac{b}{D} (p^\beta - b(\lambda^\beta - \lambda^\alpha) + \right. \\ &\left. \left. \left. + p^\alpha) f^\beta \right\} \omega^1 - \frac{b}{D m^\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} \omega^\beta + u^{\alpha 0\alpha} \omega^\alpha + u^{\alpha 00} \omega^{2\alpha} \right. \end{aligned}$$

Значит, предположение теоремы $a^{\alpha\beta 1\gamma} = 0$ дает, что $\partial^2 f^\alpha / \partial u^\beta \partial u^\gamma = 0$, т. е.

$$f^\alpha = \sum_\beta f^{\alpha\beta}(x, y, u^\alpha) \quad (\beta \neq \alpha). \quad (16)$$

Инварианты (12) равняются

$$\frac{p^\alpha p^\beta}{D^2} \frac{m^\alpha m^\beta}{m^\gamma m^\delta m^\eta} \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\gamma} \frac{\partial^2 f^\beta}{\partial u^\delta \partial u^\eta} - \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\delta} \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial u^\gamma \partial u^\eta} \right). \quad (17)$$

Равенство нулю инвариантов $a^{\alpha\beta 1\gamma}$ и (17) налагает на систему условия, которые можно получить, если интегрировать систему, полученную приравниванием нулю инвариантов (17) при условии (16). Если все $a^{\alpha\beta 1}$ отличны от нуля, ее общее решение имеет вид

$$f^\alpha_\beta = A_{\alpha\beta}(x, y) \frac{\partial F_\alpha}{\partial u^\alpha} F_\beta,$$

где $F_\alpha = F_\alpha(x, y, u^\alpha)$ — произвольные функции. Если проделать замену переменных $U^\alpha = F_\alpha(x, y, u^\alpha)$, то система $S^1_{m_2}$ приводится в этих новых переменных к виду

$$f^\alpha = A_{\alpha\beta} u^\beta + A_{\alpha\gamma} u^\gamma + f^\alpha_\alpha(x, y, u^\alpha) \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma).$$

Если некоторые из $a^{\alpha\beta 1}$ равны нулю, то и соответствующие $A_{\alpha\beta}$ равны нулю.

Нам осталось еще наложить на систему условия, получаемые в результате приравнивания нулю инвариантов (13). Для того, во-первых, находим выражения форм $\omega^\alpha_{\alpha\alpha}$, $\omega^\alpha_{\alpha 0}$, которые получаются при продолжении выражений ω^α_α из (15) в результате сравнения с (H):

$$\omega^{\alpha\alpha\alpha} = -\frac{p^\alpha}{Dm^\alpha} \frac{\partial^2 f^\alpha}{(\partial u^\alpha)^2} \omega^1 + du^{\alpha\alpha\alpha},$$

$$\omega^{\alpha\alpha 0} = \left\{ K \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\alpha} - \frac{p^\alpha}{D} \left[-\frac{b}{D} \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial u^\alpha \partial x} + \frac{a}{D} \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial u^\alpha \partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{v^\beta}{p^\beta} - f^\beta \frac{b}{D} \right) \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right] \right\} \omega^1 + \frac{p^\alpha}{D} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\alpha} \omega^1_2 + du^{\alpha\alpha 0},$$

где K — определенная функция от x, y . Найдя выражения инвариантов $a^{\alpha\beta 1\lambda}$, $a^{\alpha\beta 1\lambda\gamma}$, посчитаем инварианты (13):

$$a^{\alpha\beta 11\beta} a^{\alpha\beta 1} - a^{\alpha\beta 11\alpha} a^{\alpha\beta 1\beta} = \frac{(p^\alpha)^3}{D^3} \cdot \frac{(m^\alpha)^2}{(m^\beta)^2} \cdot \frac{\partial^2 f^\beta}{(\partial u^\beta)^2} \cdot \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} \right)^2,$$

$$a^{\alpha\beta 10\beta} a^{\alpha\beta 1} - a^{\alpha\beta 10\alpha} a^{\alpha\beta 1\beta} = -\frac{bp^\alpha}{D^3} \cdot \frac{(m^\alpha)^3}{(m^\beta)^3} \cdot \frac{\partial^2 f^\beta}{(\partial u^\beta)^2} \cdot \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} \right)^2,$$

$$a^{\alpha\beta 11\alpha} a^{\alpha\beta 1} - a^{\alpha\beta 11\alpha} a^{\alpha\beta 1\alpha} = \frac{(p^\alpha)^3}{D^3} \cdot \frac{m^\alpha}{(m^\beta)^3} \cdot \frac{\partial^2 f^\alpha}{(\partial u^\alpha)^2} \cdot \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} \right)^2,$$

$$a^{\alpha\beta 10\alpha} a^{\alpha\beta 1} - a^{\alpha\beta 10\alpha} a^{\alpha\beta 1\alpha} = -\frac{bp^\alpha}{D} \cdot \frac{m^\alpha}{(m^\beta)^2} \cdot \frac{\partial^2 f^\alpha}{(\partial u^\alpha)^2} \cdot \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} \right)^2.$$

Отсюда видно, что инварианты (13) пропорциональны вторым производным от f^α , так как $\partial f^\alpha / \partial u^\alpha = \partial f^\alpha_\alpha / \partial u^\alpha$. Если отличны от нуля более чем $m/2$ или ровно $m/2$ инвариантов $a^{\alpha\beta 1}$, имеющие все индексы α , то обращение в нуль инвариантов (13) обращает в нуль все $\partial f^\alpha_\alpha / \partial u^\alpha$ и утверждение теоремы доказано. Но если же отличных от нуля инвариантов $a^{\alpha\beta 1}$ меньше чем $m/2$, то найдется такая $\alpha = \alpha_0$, что $a^{\alpha_0\beta 1} = 0$ при всех β (в случае, если $2m > 5$), тогда значит, $\partial f^{\alpha_0}_\alpha / \partial u^\beta = 0$ при всех β , т. е. $A^{\alpha_0}_\beta = 0$, $f^{\alpha_0}_\alpha = f^{\alpha_0}_\alpha(x, y, u^{\alpha_0})$. Если за новые переменные u^{α_0} взять интеграл уравнения

$$\frac{\partial u^{\alpha_0}}{\partial x} - h^{\alpha_0} \frac{\partial u^{\alpha_0}}{\partial y} = f^{\alpha_0}_{\alpha_0}(x, y, u^{\alpha_0}),$$

то α_0 -ое уравнение системы приводится к линейному виду

$$\frac{\partial U^{\alpha_0}}{\partial x} - H^{\alpha_0} \frac{\partial U^{\alpha_0}}{\partial y} = 0.$$

Обратно, запишем линейную систему

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x} - h^\alpha(x, y) \frac{\partial u^\alpha}{\partial y} = A^{\alpha\beta}(x, y) u^\beta + f^\alpha_\alpha(x, y).$$

Введем обозначения

$$\omega^\alpha = m^\alpha [du^\alpha - (dy + h^\alpha(x, y) dx)] \frac{\partial u^\alpha}{\partial y} - (A^{\alpha\beta} u^\beta + f^\alpha_\alpha dx).$$

Далее надо найти структурные уравнения для ω^α и т. д. Но даже из первой половины доказательства легко уследить, что нужные инварианты для линейной системы действительно обращаются в нуль.

§ 6. Геометрия двойного отношения некоторой четверки характеристических корней

1. Рассмотрим некоторое λ^α , например, λ^6 , которое образует постоянное двойное отношение с тремя заданными, например, с $\lambda^3, \lambda^4, \lambda^5$:

$$\Lambda(\lambda^6, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5) \equiv \frac{\lambda^6 - \lambda^3}{\lambda^4 - \lambda^3} : \frac{\lambda^6 - \lambda^5}{\lambda^4 - \lambda^5} = c.$$

Вводим индексы $\varrho, \tau, \pi = 3, 4, 5, 6$. Находим дифференциальное продолжение равенства $\Lambda(\lambda^6, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5) = c$:

$$F_1\omega^1 + F_0\omega^2 + F_\alpha\omega^\alpha = 0. \quad (18)$$

2. Поставим вопрос существования интегральных многообразий системы S^1_{m2} , допускающих постоянное двойное отношение некоторых четырех характеристических корней, например, $\lambda^6, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5$, т. е. интегральных многообразий системы (С), к которой присоединена функциональная зависимость

$$F(u^\alpha, x, y) \equiv \Lambda(\lambda^6, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5) - c = 0,$$

из которой в результате дифференцирования получилось соотношение (18), которое на интегральных многообразиях системы переходит в $F_1\omega^1 + F_0\omega^2 + F_\alpha\nu^\alpha\omega^{2\alpha} = 0$, откуда в силу независимости форм ω^1, ω^2 на интегральных многообразиях, будем иметь

$$F_0 + F_\alpha\nu^\alpha = 0, \quad F_1 + F_\alpha\lambda^\alpha\nu^\alpha = 0,$$

где

$$F_0 = \sum_{\rho} \lambda^{\rho_0} \prod (\lambda^\tau - \lambda^\pi), \quad F_1 = \sum_{\rho} \lambda^{\rho_1} \prod (\lambda^\tau - \lambda^\pi),$$

$$F_\alpha = \sum_{\rho} \lambda^{\rho_\alpha} \prod (\lambda^\tau - \lambda^\pi),$$

и

$$\Lambda_\alpha = \lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_0}\lambda^\alpha,$$

где $\tau \neq \pi \neq \varrho, \tau < \pi$. Система (С) с (18)

$$\omega^\alpha \wedge \omega^{2\alpha} = 0, \quad F_1\omega^1 + F_0\omega^2 + F_\alpha\omega^\alpha = 0 \quad (19)$$

имеет наиболее общий интегральный элемент

$$\omega^\alpha = \nu^\alpha\omega^{2\alpha}, \quad F_0 + F_\alpha\nu^\alpha = 0, \quad F_1 + F_\alpha\nu^\alpha\lambda^\alpha = 0. \quad (20)$$

У нас количество независимых переменных равно двум, значит, у системы имеется два характера s_1 и s_2 , причем оказывается, что $s_2 = 0$. Пусть $\lambda^{\rho_{\alpha_i}} = 0$, т. е. $F_{\alpha_i} = 0, i = 1, 2, \dots, k, 1 \leq k < m$, и $\lambda^{\rho_{\beta_j}} \neq 0, j = k+1, \dots, m$, тогда $F_{\alpha_j} = 0$. Случаи $\lambda^{\rho_\alpha} \neq 0$ и $\lambda^{\rho_\alpha} = 0$ рассмотрим отдельно. Изучим вопрос инволютивности (см. [5]). Тогда q — число новых форм в ковариантах и s_1 — число независимых ковариантов равны $m-1$, причем по одному соотношению налагается лишь на ту часть из форм и квадратичных соотношений, которые имеют индекс $\alpha = \alpha_j$. Из (20) следует, что $N = m-2$, значит, $Q - N = 1$. Система неинволютивна, и надо будет рассматривать продолжения системы (19), т. е. систему (19), (20) с системой ковариантов (19) и

$$\Delta v^\alpha \wedge \omega^{2\alpha} = 0, \quad F_\alpha \Delta v^\alpha = 0, \quad F_\alpha \lambda^\alpha \Delta v^\alpha = 0, \quad (21)$$

где

$$\Delta v^\alpha = dv^\alpha + v^\alpha (\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1 - \omega^\alpha) - \omega^{\alpha_0} + t^\alpha \omega^1.$$

Здесь t^α — функции от $u^1, u^2, u^\alpha, v^\alpha$. Введение величин Δv^α привело коварианты к однородному виду. Наиболее общий интегральный элемент определяется формулами (20), и

$$\begin{aligned} \Delta v^\alpha &= v^{\alpha_1} \omega^{2\alpha}, \quad F_\alpha v^{\alpha_1} = 0, \quad F_\alpha \lambda^{\alpha_j} v^{\alpha_j} = 0, \\ F_{\alpha_j} (\lambda^{\alpha_j})^2 v^{\alpha_j} &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

откуда $Q = 2m - (1 + 2) = 2m - 3, N = 2m - (2 + 3) = 2m - 5$, значит, $Q - N = 2$, причем два новых соотношения в (21) и три в (22) налагались на Δv^{α_j} , коварианты $\Delta v^{\alpha_j} \wedge \omega^{2\alpha_j}$ и параметры v^{α_j} . При продолжении рассматривается система (19), (20), (22) с системой ковариантов (19), (21) и

$$\begin{aligned} \Delta v^{\alpha_1} \wedge \omega^{2\alpha} &= 0, \quad F_{\alpha_j} \Delta v^{\alpha_j} = 0, \quad F_{\alpha_j} \lambda^{\alpha_j} \Delta v^{\alpha_j} = 0, \\ F_{\alpha_j} (\lambda^{\alpha_j})^2 \Delta v^{\alpha_j} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Соотношения (23) опять приведены к однородному виду. Наиболее общий интегральный элемент определяется соотношениями (20), (22) и

$$\begin{aligned} \Delta v^{\alpha_1} &= v^{\alpha_2} \omega^{2\alpha}, \quad F_{\alpha_j} v^{\alpha_j} = 0, \quad F_{\alpha_j} \lambda^{\alpha_j} v^{\alpha_j} = 0, \\ F_{\alpha_j} (\lambda^{\alpha_j})^2 v^{\alpha_j} &= 0, \quad F_{\alpha_j} (\lambda^{\alpha_j})^3 v^{\alpha_j} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $q = s_1 = Q = 3m - (1 + 2 + 3), N = 3m - (2 + 3 + 4)$, т. е. $Q - N = 3$. Новые зависимости налагались лишь на Δv^{α_j} , коварианты с α_j и параметры v^{α_j} . Система неинволютивна.

Из приведенных рассуждений видно, что количество налагаемых соотношений (которые всегда касаются лишь индексов $\alpha = \alpha_j$) возрастает в более быстром темпе, чем количество присоединяемых новых форм, ковариантов и параметров. На r -ом шагу будем иметь

$$\begin{aligned} q &= s_1 = Q = rm - (1 + 2 + \dots + r) = rm - r(r+1)/2, \\ N &= rm - (2 + 3 + \dots + r + 1) = rm - (r+1)(r+2)/2, \\ Q - N &= r. \end{aligned}$$

Индекс α_j пробегает $m - k$ значений. Поскольку $r(m - k)$ параметров $v^j, v^1, \dots, v^{\alpha_{r-1}}$ в силах удовлетворить лишь такому же количеству соотношений, на r -ом шагу, где r определяется из равенства $r(m - k) = (r+1)(r+2)/2$, лишаемся произвола в выборе этих параметров. Параметры $v^{\alpha_i}, v^{\alpha_1}, \dots, v^{\alpha_{r-1}}$ остаются произвольными.

Дальнейшие продолжения могут приводить к новым уравнениям на нижние производные; коварианты тогда уже не приводимы к однородному виду. Решения, на которых $\Lambda(\lambda^6, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5) = c$, существуют с произволом не более k функций одного аргумента.

Если $\lambda^{\rho_\alpha} \neq 0$, то к аналогичной ситуации приходим на $(m-1)$ -ом шагу, причем $s_1 = Q = N = 0$; решение существует с произволом не более $m(m-1)/2$ постоянных.

В случае $\lambda^{\rho_\alpha} = 0$ на первом продолжении будем иметь $q = s_1 = Q = N = m$ и решение существует с произволом не более m функций одного аргумента. Тем самым верна

Теорема 3. *Интегральные многообразия системы S^1_{m2} , допускающие постоянное двойное отношение $\Lambda(\lambda^6, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5) = c$, существуют со следующим произволом:*

- 1) при $\lambda^{\rho_\alpha} = 0$ не более m функций одного аргумента;
- 2) при $\lambda^{\rho_{\alpha_i}} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) не более k функций одного аргумента;
- 3) при $\lambda^{\alpha_\alpha} \neq 0$ не более $m(m-1)/2$ произвольных постоянных.

Аналогичные рассуждения верны при произвольном λ^{ρ_1} , где $\rho_1 = 6, \dots, m$. Пусть s из λ^{ρ_1} образуют постоянные двойные отношения с $\lambda^3, \lambda^4, \lambda^5$:

$$\Lambda^{\rho_1}(\lambda^{\rho_1}, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5) = c^{\rho_1} \quad (\rho_1 = 1, 2, \dots, s). \quad (26)$$

Следствие. *Интегральные многообразия системы S^1_{m2} , допускающие s постоянных двойных отношений (26), существуют со следующим произволом:*

- 1) при $\lambda^{\rho_{1\alpha}} = 0$ не более m функций одного аргумента;
- 2) при $\lambda^{\rho_{1\alpha_i}} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) не более k функций одного аргумента;
- 3) при $\lambda^{\rho_{1\alpha}} = 0$ не более $m(m-1)/2$ произвольных постоянных.

Примечание. То, что решения не всегда существуют (даже в случае $\lambda^{\rho_\alpha} = 0$) видно на примере линейных систем: характеристики проектируются на плоскость x, y в однопараметрические семейства кривых, и двойные отношения любых четырех касательных к ним могут оказаться переменными (зависеть от x, y).

§ 7. Аффинная связность с абсолютным параллелизмом направлений, присоединенная к триткани

1. На двумерном аналитическом многообразии M_2 действует бесконечная группа, определенная уравнениями (B) , (F) и т. д. Формы связности ищутся в виде

$$\theta^{\lambda_\mu} = \omega^{\lambda_\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\eta} \omega^\eta, \quad (27)$$

так чтобы

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^\lambda_\mu &= \tilde{\partial}^\lambda_\eta \wedge \tilde{\omega}^\eta_\mu + R^\lambda_{\mu\nu\eta} \omega^\nu \wedge \omega^\eta, \\ d\omega^\lambda &= \partial^\lambda_\mu \wedge \omega^\mu. \end{aligned}$$

Здесь $\Gamma^\lambda_{\mu\eta}$ — объект связности, а $R^\lambda_{\mu\nu\eta}$ — тензор кривизны, знание которых достаточно для определения связности. При связности без кручения объект связности симметричен

$$\Gamma^\lambda_{\mu\eta} = \Gamma^\lambda_{\eta\mu}. \quad (28)$$

Известно, что к любой триткани на двумерном многообразии M_2 присоединяется некоторая аффинная связность (см. [2], стр. 36). Находим эту связность в общем виде, когда триткань $\omega^2 + \lambda^{\rho'}\omega^1 = 0$ задана на M_2 уравнениями (E) при $\alpha = \rho'$, где ρ' принимает некоторые три из возможных значений α , например, 3, 4, 5 и $\lambda^{\rho'} = 0$, далее (G_1) , (G_2) и т. д. (при отсутствии в них ω^α).

2. Оказывается возможным построить связность без кручения с абсолютным параллелизмом направлений. Для определения объекта такой связности надо требовать существования в пространстве M_2 трех полей абсолютно параллельных направлений, определенных векторами $e_1 - \lambda^{\rho'}e_2$, причем известно, что тогда M_2 будет допускать ∞^1 таких полей, определенных векторами $e_1 - \lambda e_2$, где λ образует постоянное двойное отношение с $\lambda^3, \lambda^4, \lambda^5$ (см. [4], §§ 49, 89). Определится связность, допускающая параллелизм не только по геодезическим $\omega^2 + \lambda^{\rho'}\omega^1 = 0$, но и по любому $\omega^2 + \lambda\omega^1 = 0$ при λ с указанным свойством.

3. Получим теперь соотношения для определения объекта такой связности. Для того, чтобы произвольный вектор $\xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$, заданный в каждой точке M_2 , образовал параллельное поле, необходимо и достаточно выполнение условий

$$(d\xi^1 - \xi^\lambda \partial^\lambda_\lambda) \xi^2 - (d\xi^2 - \xi^\lambda \tilde{\partial}^\lambda_\lambda) \xi^1 = 0,$$

что для выбранных векторов $e_1 - \lambda^{\rho'}e_2$ дает

$$d\lambda^{\rho'} + \lambda^{\rho'} (\partial^1_1 - \tilde{\partial}^2_2) - (\lambda^{\rho'})^2 \tilde{\partial}^1_2 + \tilde{\partial}^2_1 = 0.$$

Подставив всюду (27) и сравнив полученное с (E) по ω^1 и ω^2 , будем иметь

$$-\lambda^{\rho'}\lambda^{\rho'_0} - \lambda^{\rho'_1} = \lambda^{\rho'} (\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_2) - (\lambda^{\rho'})^2 \Gamma^1_1 + \Gamma^2_{11}, \quad (29)$$

$$-\lambda^{\rho'_0} = \lambda^{\rho'} (\Gamma^1_1 - \Gamma^2_{22}) - (\lambda^{\rho'})^2 \Gamma^1_{22} + \Gamma^2_2,$$

где в силу (28) введены обозначения

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_1, \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_2.$$

Для определения шести величин $\Gamma^\lambda_{\mu\eta}$ имеем шесть линейных неоднородных соотношений. Так как главный определитель этой системы есть произведение степеней $\lambda^{\rho'} - \lambda^{\tau'}$, $\rho' \neq \tau'$, причем у нас $\lambda^{\rho'} - \lambda^{\tau'} \neq 0$ при $\rho' \neq \tau'$, то из (29) связность определится. Введем обозначение

$$\chi = (\lambda^3 - \lambda^4) (\lambda^4 - \lambda^5) (\lambda^5 - \lambda^3).$$

Находим объект связности

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{\chi} [A^3 \lambda^4 \lambda^5 (\lambda^4 - \lambda^5) + A^4 \lambda^5 \lambda^3 (\lambda^5 - \lambda^3) + A^5 \lambda^3 \lambda^4 (\lambda^3 - \lambda^4)], \\
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{\chi} [A^3 \lambda^4 (\lambda^4 - \lambda^5) + A^4 \lambda^5 (\lambda^5 - \lambda^3) + A^5 \lambda^3 (\lambda^3 - \lambda^4)], \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{\chi} [\lambda^3 \lambda^4 \lambda^5 (\lambda^4 - \lambda^5) + \lambda^4 \lambda^5 \lambda^3 (\lambda^5 - \lambda^3) + \lambda^5 \lambda^3 \lambda^4 (\lambda^3 - \lambda^4)], \\
\Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{\chi} [\lambda^3 \lambda^4 (\lambda^4 - \lambda^5) + \lambda^4 \lambda^5 (\lambda^5 - \lambda^3) + \lambda^5 \lambda^3 (\lambda^3 - \lambda^4)], \\
\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^2 - \frac{1}{\chi} [A^3 ((\lambda^4)^2 - (\lambda^5)^2) + A^4 ((\lambda^5)^2 - (\lambda^3)^2) + \\
&\quad + A^5 ((\lambda^3)^2 - (\lambda^4)^2)], \\
\Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{11}^1 + \frac{1}{\chi} [\lambda^3 ((\lambda^4)^2 - (\lambda^5)^2) + \lambda^4 ((\lambda^5)^2 - (\lambda^3)^2) + \\
&\quad + \lambda^5 ((\lambda^3)^2 - (\lambda^4)^2)].
\end{aligned}
\tag{30}$$

4. Находим тензор кривизны

$$R^{\lambda}_{\eta 12} = \partial_1 \Gamma^{\lambda}_{\nu 2} - \partial_2 \Gamma^{\lambda}_{1\eta} - \Gamma^{\lambda}_{1\mu} \Gamma^{\mu}_{2\eta} + \Gamma^{\lambda}_{2\mu} \Gamma^{\mu}_{1\eta} \tag{31}$$

такой связности. Будем иметь

$$\begin{aligned}
R^{1}_{112} &= \partial_1 \Gamma^1_{11} - \partial_2 \Gamma^1_{11} + A, & R^{2}_{212} &= \partial_1 \Gamma^2_{22} - \partial_2 \Gamma^2_{22} - A, \\
R^{2}_{112} &= \partial_1 \Gamma^2_{11} - \partial_2 \Gamma^2_{11} + B, & R^{1}_{212} &= \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^1_{22} + C,
\end{aligned}
\tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \Gamma^1_{22} \Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{11} \Gamma^2_{22}, & B &= \Gamma^2_{22} (\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{22}) - \Gamma^2_{11} (\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{22}), \\
C &= \Gamma^1_{11} (\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{22}) - \Gamma^1_{22} (\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{22}).
\end{aligned}
\tag{33}$$

Для определения объекта связности мы имели систему (29). Берем в нем из уравнений первой группы частный дифференциал ∂_2 , а из уравнений второй группы — ∂_1 и вычитаем результаты при одинаковых ρ' . Будем иметь

$$\begin{aligned}
& -A \rho'_{12} + \lambda \rho'_{01} - \lambda \rho'_0 [(\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{22}) - 2\lambda \rho' \Gamma^1_{11}] + \\
& + A \rho'_1 [(\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{22}) - 2\lambda \rho' \Gamma^1_{22}] = \\
& = \lambda \rho' [(\partial_2 \Gamma^1_{11} - \partial_1 \Gamma^1_{11}) - (\partial_2 \Gamma^2_{22} - \partial_1 \Gamma^2_{22})] + \\
& + (\lambda \rho')^2 (-\partial_2 \Gamma^1_{11} + \partial_1 \Gamma^1_{22}) + \partial_2 \Gamma^2_{11} - \partial_1 \Gamma^2_{22}.
\end{aligned}$$

Так как $-A \rho'_{12} + \lambda \rho'_{01} = 0$, то подставляя сюда $A \rho'_1$, $\lambda \rho'_0$ из (29) и учитывая (31), (32), (33), будем иметь

$$\lambda \rho' (-R^{1}_{112} + R^{2}_{212}) + (\lambda \rho')^2 R^{1}_{212} + R^{2}_{212} = 0.$$

Определитель матрицы этой линейной однородной относительно R^{1}_{212} , R^{2}_{121} , $R^{1}_{121} - R^{2}_{212}$ системы равен χ^3 , т. е. отлична от нуля. Значит, система имеет лишь тривиальное решение, т. е.

$$R^{1}_{212} = R^{2}_{121} = 0, \quad R^{1}_{112} = R^{2}_{212}.$$

Находим эту единственную существенную компоненту $R = R^{1}_{112} = R^{2}_{212}$ тензора кривизны:

$$\begin{aligned}
R = & \lambda^3_{00} + \lambda^4_{00} + \lambda^5_{00} - \chi^{-1} \{ \lambda^3_{11} (\lambda^4 - \lambda^5) + \lambda^4_{11} (\lambda^5 - \lambda^3) + \\
& + \lambda^5_{11} (\lambda^3 - \lambda^4) + \\
& + \lambda^3_{10} (\lambda^4 - \lambda^5) (\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^5) + \lambda^4_{10} (\lambda^5 - \lambda^3) (\lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3) + \\
& + \lambda^5_{10} (\lambda^3 - \lambda^4) (\lambda^3 - 2\lambda^5 + \lambda^4) \} - \chi^{-1} [(\lambda^3_0)^2 H_1 + (\lambda^4_0)^2 H_2 + \\
& + (\lambda^5_0)^2 H_3] + \chi^{-2} [A^3_1 (\lambda^4 - \lambda^5) + A^4_1 (\lambda^5 - \lambda^3) + A^5_1 (\lambda^3 - \lambda^4)] \cdot \\
& \cdot [A^3_1 (\lambda^4 - \lambda^5) (\lambda^5 - 2\lambda^3 + \lambda^4) + A^4_1 (\lambda^5 - \lambda^3) (\lambda^3 - 2\lambda^4 + \lambda^5) + \\
& + A^5_1 (\lambda^3 - \lambda^4) (\lambda^3 - 2\lambda^5 + \lambda^4)] + \chi^{-2} (A^3_1 K_1 + A^4_1 K_2 + A^5_1 K_3),
\end{aligned} \tag{34}$$

где H_1, H_2, H_3 и K_1, K_2, K_3 выражаются через λ^α .

§ 8. Интегральные многообразия системы $S^1_{m_2}$ с тройкой характеристик, образующих шестиугольную триткань

1. Интегральные многообразия системы $S^1_{m_2}$, выделяемые соотношениями

$$\omega^\alpha = \nu^\alpha \omega^{2\alpha}, \tag{35}$$

являются двумерными многообразиями, на каждом из которых имеется m различных характеристик $\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1 = 0$. Рассмотрим характеристики $\omega^2 + \lambda^{\rho'} \omega^1 = 0$, $\rho' = 3, 4, 5$. Общие дифференциальные уравнения этой триткани в M_{m+2} получаются из (E), (G)₁, (G)₂ при $\alpha = \rho'$ подстановкой в них соотношений (35). Выражения объекта связности и тензора кривизны получаются из (30) и (34) в результате следующей подстановки:

$$\begin{aligned}
\lambda^{\rho'_0} & \rightarrow L^{\rho'_0} = \lambda^{\rho'_0} + \lambda^{\rho'_\beta} \nu^\beta, & \lambda^{\rho'_1} & \rightarrow L^{\rho'_1} = \lambda^{\rho'_1} + \lambda^{\rho'_\beta} \nu^\beta \lambda^\beta, \\
\lambda^{\rho'_{00}} & \rightarrow l^{\rho'_{00}} + l^{\rho'_{\beta 0}} \nu^\beta + \lambda^{\rho'_\beta} \xi^\beta, & & \\
\lambda^{\rho'_{11}} & \rightarrow l^{\rho'_{11}} + \lambda^{\beta \rho'} [l^{\rho'_{\beta 1}} \nu^\beta + \lambda^{\rho'_\beta} (t^\beta + \lambda^{\beta \rho'} \xi^\beta)] + \lambda^{\rho'_\beta} \nu^\beta (L_{\beta 1} - L^{\rho'_1}), \\
\lambda^{\rho'_{10}} & \rightarrow l^{\rho'_{10}} + \lambda^{\beta \rho'} (l^{\rho'_{\beta 0}} \nu^\beta + \lambda^{\rho'_\beta} \xi^\beta) + \lambda^{\rho'_\beta} \nu^\beta (L_{\beta 0} - L^{\rho'_0}).
\end{aligned} \tag{36}$$

Здесь $\lambda^{\beta \rho'} = \lambda^\beta - \lambda^{\rho'}$. Для вычисления $l^{\rho'_{11}}, l^{\rho'_{00}}, l^{\rho'_{10}}$ понадобится $d\nu^\alpha + \nu^\alpha (\omega^2_2 + \lambda^\alpha \omega^1_2 - \omega^\alpha_\alpha) - \omega^\alpha_0 - t^\alpha \omega^1 = \xi^\alpha \omega^{2\alpha}$,

где $t^\alpha = \nu^\alpha L^\alpha_0 + \nu^\beta (a^\alpha_{\beta 1} + \lambda^{\nu\beta} a^\alpha_{\beta \nu})$. Тогда

$$\begin{aligned}
l^{\rho'_{00}} & = \lambda^{\rho'_{00}} + \lambda^{\rho'_{0\beta}} \nu^\beta, \\
l^{\rho'_{11}} & = \lambda^{\rho'_{11}} + \lambda^{\beta \rho'} [\lambda^{\rho'_{1\beta}} \nu^\beta - 0,5 (\lambda^{\rho'_0} \lambda^{\rho'_\beta} + \lambda^{\rho'_\gamma} a^{\nu\beta}_{\gamma 1}) \nu^\beta], \\
l^{\rho'_{10}} & = \lambda^{\rho'_{10}} + \lambda^{\rho'_{1\beta}} \nu^\beta - 0,5 (\lambda^{\rho'_0} \lambda^{\rho'_\beta} + \lambda^{\rho'_\gamma} a^{\nu\beta}_{\gamma 1}) \nu^\beta, \\
l^{\rho'_{\beta 1}} & = \lambda^{\rho'_{\beta 1}} + 0,5 (\lambda^{\rho'_0} \lambda^{\rho'_\beta} + \lambda^{\rho'_\gamma} a^{\nu\beta}_{\gamma 1}) - \lambda^{\nu \rho'} (0,5 \lambda^{\rho'_\delta} a^{\delta \nu\beta}_{\gamma 1} + \lambda^{\rho'_\beta} \nu^\nu), \\
l^{\rho'_{\beta 0}} & = \lambda^{\rho'_{\beta 0}} + 0,5 \lambda^{\rho'_\delta} a^{\delta \nu\beta}_{\gamma 1} + \lambda^{\rho'_\beta} \nu^\nu.
\end{aligned} \tag{37}$$

Подставляя (36) и (37) в (34), получим сумму из слагаемых

$$\begin{aligned}
& \lambda^{\rho'_{00}}, \lambda^{\rho'_{11}}, \lambda^{\rho'_{10}}, (\lambda^{\rho'_0})^2, \lambda^{\rho'_0} \lambda^{\rho'_1}, \lambda^{\rho'_0} \lambda^{\rho'_\beta} + \lambda^{\rho'_\gamma} a^{\nu\beta}_{\gamma 1}, \\
& \nu^\beta (\lambda^{\rho'_\beta} (\lambda^{\rho'_1} k + \lambda^{\rho'_0} l) + \lambda^{\rho'_{0\beta}} m + \lambda^{\rho'_{1\beta}} n), \nu^\beta \nu^\delta \lambda^{\rho'_\gamma} a^{\nu\delta}_{\beta 1} \lambda^\delta.
\end{aligned} \tag{38}$$

Коэффициенты при них (также k, l, m, n) выражаются через λ^α . Обозначим результаты такой подстановки со штрихом, т. е. (29)', (30)', (34)'. Теперь и непосредственно можно проверить, что уравнения (29)' для λ такого, что $\Lambda(\lambda, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5) = c$ выполняются тождественно, если в них подставить λ^6_0, λ^6_1 из (19) и выражения $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ из (30)', т. е. действительно поле направлений $e_1 - \lambda e_2$ на интегральных многообразиях, где λ образует постоянное двойное отношение с $\lambda^3, \lambda^4, \lambda^5$, обладает абсолютным параллелизмом.

Двумерные пространства, допускающие абсолютный параллелизм направлений, названы А. П. Норденом квазиэвклидовыми; для них характерна не равенство нулю, а косая симметрия его тензора Риччи (см. [4], § 89).

У нас двойное отношение (см. п. 3, § 2) является абсолютным инвариантом. Теперь выяснился его геометрический смысл: именно, если $\Lambda(\lambda, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5) = c$, то направление $e_1 - \lambda e_2$ принадлежит связности определенной тройкой $e_1 - \lambda^{\rho'} e_2$, если же $\Lambda(\lambda^{\rho'}, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5) = c^{\rho'}$, где ρ' принимает любую тройку значений среди 6, 7, ..., $m+2$, то связности, определенные тройками направлений $e_1 - \lambda^{\rho'} e_2$ и $e_1 - \lambda^{\rho''} e_2$, совпадают.

2. Поскольку тождественное обращение в нуль кривизны необходимо и достаточно для того, чтобы ткань была шестиугольной, из (38) следует, что верна

Теорема 4. Для того, чтобы на каждом интегральном многообразии системы S^1_{m2} тройка семейств характеристик $\omega^2 + \lambda^{\rho'} \omega^1 = 0$ образовала шестиугольную триткань, достаточно обращение в нуль объекта

$$\lambda^{\rho'_0}, \lambda^{\rho'_1}, \lambda^{\rho'_{00}}, \lambda^{\rho'_{10}}, \lambda^{\rho'_{11}}, \lambda^{\rho'_0} \lambda^{\rho'_\beta} + \lambda^{\rho'_\gamma} \alpha^{\gamma \beta_1}, \lambda^{\rho'_\gamma} \alpha^{\gamma \delta \beta}, \lambda^{\rho'_{1\beta}}, \lambda^{\rho'_{0\beta}}.$$

3. В результате рассуждений, аналогичных проведенным в п. 2, § 6, где в роли $\lambda^{\rho'_\beta}$ надо брать $\lambda^{\rho'_\beta}$, $\lambda^{\rho'_0} \lambda^{\rho'_\beta} + \lambda^{\rho'_\gamma} \alpha^{\gamma \beta_1}$, $\lambda^{\rho'_\gamma} \alpha^{\gamma \delta \beta}$, получится

Теорема 5. Интегральные многообразия системы S^1_{m2} , на которых тройка характеристик $\omega^2 + \lambda^{\rho'} \omega^1 = 0$ образует шестиугольную триткань, существуют со следующим произволом:

1) при $\lambda^{\rho'_\beta} = 0$, $\lambda^{\rho'_\gamma} \alpha^{\gamma \delta \beta} = 0$, $\lambda^{\rho'_0} \lambda^{\rho'_\beta} + \lambda^{\rho'_\gamma} \alpha^{\gamma \beta_1} = 0$ не более m функций одного аргумента;

2) при $\lambda^{\rho'_{\beta_i}} = 0$, $\lambda^{\rho'_\gamma} \alpha^{\gamma \delta \beta_i} = 0$, $\lambda^{\rho'_0} \lambda^{\rho'_{\beta_i}} + \lambda^{\rho'_\gamma} \alpha^{\gamma \beta_{i1}} = 0$ ($i=1, 2, \dots, k$) не более k функций одного аргумента;

3) при $\lambda^{\rho'_\beta} \neq 0$, $\lambda^{\rho'_\gamma} \alpha^{\gamma \delta \beta} \neq 0$, $\lambda^{\rho'_0} \lambda^{\rho'_\beta} + \lambda^{\rho'_\gamma} \alpha^{\gamma \beta_1} \neq 0$ не более $m(m+1)/2$ произвольных постоянных.

§ 9. Законы сохранения системы S^1_{m2}

1. Интегралом или законом сохранения системы дифференциальных уравнений первого порядка называется внешняя форма Θ степени p в многообразии зависимых и независимых переменных, интеграл от которой равен нулю для всякого p -мерного цикла, лежащего на интегральном многообразии системы и гомологического на нем нулю (см. [1]). В силу теоремы Стокса задачу определения законов сохранения для системы уравнений первого порядка решают в следующей форме: в пространстве зависимых и независимых переменных ищутся дифференциальные формы Ω степени $p+1$, замкнутые ($d\Omega = 0$) и обращающиеся в нуль на всех интегральных многообразиях системы.

Для систем $S^1_{m_2}$ не существует нульмерных интегралов, ибо система запишется во внешних квадратичных уравнениях. Ищем одномерные интегралы Θ , т. е. $d\Theta = \Omega$, где $d\Omega = 0$ и

$$\Omega = A_{\alpha}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{2\alpha}. \quad (39)$$

Находим A_{α} так, чтобы $d\Omega = 0$. Введя обозначения $dA_{\alpha} + A_{\alpha}(\omega^{\alpha}_{\alpha} + \omega^2_2 + \lambda^{\alpha}\omega^1_2) = A_{\alpha 1}\omega^1 + A_{\alpha 0}\omega^{2\alpha} + A_{\alpha\alpha}\omega^{\alpha} + A_{\alpha\beta}\omega^{\beta}$, (40)

продифференцируем (39) и подставим туда (40), получим $(A_{\alpha 1}\omega^1 + A_{\alpha\beta}\omega^{\beta}) \wedge \omega^{\alpha} \wedge \omega^{2\alpha} + A_{\alpha}[a^{\alpha}_{\gamma 1}\omega^{\gamma} \wedge \omega^1 + a^{\alpha}_{\gamma\beta}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\beta}] \wedge \omega^{2\alpha} - A_{\alpha}\omega^{\alpha} \wedge [-\lambda^{\alpha}_0\omega^1 \wedge \omega^{2\alpha} + \lambda^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta} \wedge \omega^1] = 0$,

откуда

$$\begin{aligned} A_{\alpha 1} &= A_{\gamma}a^{\gamma}_{\alpha 1} + A_{\alpha}\lambda^{\alpha}_0, \\ A_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\lambda^{\alpha} - \lambda^{\beta}} [(\lambda^{\beta} - \lambda^{\gamma})A_{\gamma}a^{\gamma}_{\alpha\beta} + A_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{\beta} - A_{\beta}\lambda^{\beta}_{\alpha}], \\ A_{\beta\alpha} &= \frac{1}{\lambda^{\alpha} - \lambda^{\beta}} [(\lambda^{\alpha} - \lambda^{\gamma})A_{\gamma}a^{\gamma}_{\alpha\beta} + A_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{\beta} - A_{\beta}\lambda^{\beta}_{\alpha}]. \end{aligned}$$

Соотношения (40) примут вид

$$\begin{aligned} dA_{\alpha} + A_{\alpha}(\omega^{\alpha}_{\alpha} + \omega^2_2 + \lambda^{\alpha}\omega^1_2) - (A_{\gamma}a^{\gamma}_{\alpha 1} + A_{\alpha}\lambda^{\alpha}_0)\omega^1 - \\ - \frac{1}{\lambda^{\alpha} - \lambda^{\beta}} [(\lambda^{\beta} - \lambda^{\gamma})A_{\gamma}a^{\gamma}_{\alpha\beta} + A_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{\beta} - A_{\beta}\lambda^{\beta}_{\alpha}]\omega^{\beta} = \\ = A_{\alpha 0}\omega^{2\alpha} + A_{\alpha\alpha}\omega^{\alpha}. \end{aligned} \quad (41)$$

Внешний дифференциал формы (39)

$$(dA_{\alpha} + \dots) \wedge \omega^{2\alpha} = 0,$$

где dA_{α} имеют вид (41) и где A_{α} — искомые функции на M_{m+2} , не находится в инволюции, а его продолжением являются уравнения (41), где $A_{\alpha 0}$, $A_{\alpha\alpha}$ — новые искомые функции. Для совместности системы (41) необходимо, чтобы уравнение, полученное внешним дифференцированием α -ого уравнения этой системы, не содержало членов с $\omega^{\beta} \wedge \omega^1$, $\omega^{\beta} \wedge \omega^{\rho}$, где $\beta, \rho \neq \alpha$. Производя дифференцирование, получим на указанном пути систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно $3m$ неизвестных A_{α} , $A_{\alpha 0}$, $A_{\alpha\alpha}$, которая в силу своей громоздкости не выписывается. В общем случае в этой системе будет $m(m-1) + mC_2^{m-1} = m^2(m-1)/2$ уравнений. Их будет $3m$ лишь в случае $m=3$ (см. [1]), для $m=1, 2$ уравнений будет меньше, чем неизвестных, а при $m > 3$ уравнений больше, чем искомым неизвестных. Для того, чтобы у этой системы существовало нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг этой матрицы был меньше чем $3m$. Для этого приравняем нулю определители всех подсистем из $3m$ уравнений. Получим

$$\det \| a^{\alpha}_{\beta a 1} \quad a^{\beta a}_{\alpha 1} \quad a^{\delta}_{\alpha 1 \beta a} - \frac{\lambda^{\sigma} - \lambda^{\beta a}}{\lambda^{\alpha} - \lambda^{\beta a}} a^{\sigma}_{\alpha \beta} \| = 0, \quad (42)$$

где β_a принимает любые три значения из $1, 2, \dots, m$, $\beta_a \neq a$;
 $\det \| a^{\alpha_{\rho_b \beta_b}} A^{\rho_b \alpha \beta_b} A^{\nu \alpha \beta_b} A^{\sigma \nu \rho_b} - A^{\nu \alpha \beta_b \rho_b} \| = 0$, (43)

где ρ_b принимает s значений, β_b принимает t значений и $\rho_b, \beta_b \neq a$, $\rho_b \neq \beta_b$, причем $st = 3$;

$$A^{\rho_b \alpha \beta_b} = \frac{a^{\rho_b \alpha \beta_b} (\lambda^{\rho_b} - \lambda^{\beta_b})}{\lambda^\alpha - \lambda^{\beta_b}}, \quad A^{\sigma \alpha \beta_b \rho_b} = a^{\sigma \alpha \beta_b \rho_b} \frac{\lambda^\sigma - \lambda^{\beta_b}}{\lambda^\alpha - \lambda^{\beta_b}},$$

и

$$\det \begin{vmatrix} a^{\alpha_i \beta_{a1}} & a^{\rho \alpha_i 1} & 0 & a^{\nu \alpha_i 1 \beta_a} - A^{\nu \alpha \beta_a 1} \\ a^{\alpha_j \rho_b \beta_b} & 0 & A^{\rho_b \alpha_j \beta_b} A^{\nu \alpha \beta_b} \cdot A^{\sigma \nu \rho_b} - A^{\sigma \alpha \beta_b \rho_b} \end{vmatrix} = 0, \quad (44)$$

где $i = 1, 2, \dots, k$, $j = k + 1, \dots, m$, индекс β_a принимает r значений, β_b принимает s , а ρ_b принимает t значений и $\beta_b, \rho_b \neq \alpha_i, \alpha_j$, причем $rk + st(m - k) = 3m$;

$$A^{\rho_b \alpha_j \beta_b} = a^{\rho_b \alpha_j \beta_b} \frac{\lambda^{\rho_b} - \lambda^{\beta_b}}{\lambda^\alpha - \lambda^{\beta_b}}, \quad A^{\nu \alpha \beta_a 1} = a^{\nu \alpha \beta_a 1} \frac{\lambda^\sigma - \lambda^{\beta_a}}{\lambda^\alpha - \lambda^{\beta_a}}.$$

Чтобы иметь в системе $3m$ уравнений, a принимает все свои значения.

Пусть теперь индекс a принимает лишь часть из возможных значений: $a = \alpha_g$, $g = 1, \dots, \kappa$, $\kappa < m$. Обозначим остальные значения через α_h , $h = \kappa + 1, \dots, m$, причем

а) пусть β_a^x принимает r значений, где r находится из равенства $\kappa r = 3m$, которое наложит ограничения и на выбор κ и на r . Обозначим определитель, полученный из (42) подстановкой индексов $\alpha = \alpha_i$, $\beta_a = \beta_a^x$, через (45);

б) пусть β_b^x принимает s , а ρ_b^x принимает t значений, где s и t находятся из равенства $\kappa st = 3m$, которое также ограничивает выбор κ . Обозначим определитель, полученный из (43) подстановкой $\alpha = \alpha_j$, $\beta_b = \beta_b^x$, $\rho_b = \rho_b^x$, через (46);

в) результат подстановки индексов в (44): $\alpha_i = \alpha_{gi}$, $\alpha_j = \alpha_{gj}$, $\beta_a = \beta_a^h$, $\rho_b = \rho_b^h$ обозначим через (47), где $g_i = 1, 2, \dots, k$, $g_j = k + 1, \dots, \kappa$, а β_a^h принимает r , ρ_b^h принимает t значений, причем $kr + st(m - k) = 3m$;

г) результат подстановки индексов в (44): $\alpha_i = \alpha_p$, $\alpha_j = \alpha_q$, $\beta_a = \beta_a^{hv}$, $\beta_b = \beta_b^{hv}$, $\rho_b = \rho_b^{hv}$ обозначим через (48), где $p = 1, 2, \dots, k + v$, $q = k + 1, \dots, \kappa$, а β_a^{hv} принимает r , β_b^{hv} принимает t , ρ_b^{hv} принимает s значений, причем $(k + v)r + st(\kappa - k) = 3m$. Всевозможные подсистемы из $3m$ уравнений рассмотрены. Итак, верна

Теорема 6. Условия (43) — (48) являются необходимыми для существования у системы S^1_{m2} одномерного закона сохранения.

2. Пусть у системы $S^1_{m_2}$ имеется одномерный закон сохранения, такой что в соответствующей форме (39) $A_{\alpha_i} = 0$, $A_{\alpha_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = k + 1, \dots, m$. Тогда $d\Omega$ преобразуется к виду

$$\left\{ dA_{\alpha_i} + A_{\alpha_i}(\omega^{\alpha_i} + \omega^{2\alpha_i} + \lambda^{\alpha_i}\omega^{1\alpha_i}) - (A_{\beta_i}a^{\beta_i\alpha_i} + A_{\alpha_i}\lambda^{\alpha_i})\omega^1 + \right. \\ \left. + \left[-\frac{\lambda^{\beta_i} - \lambda^{\gamma_i}}{\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{\beta_i}} A_{\gamma_i} a^{\gamma_i\alpha_i\beta_i} + \frac{\lambda^{\beta_j} - \lambda^{\gamma_j}}{\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{\beta_j}} A_{\gamma_j} a^{\gamma_j\beta_j\alpha_i} - \right. \right. \\ \left. - \frac{\lambda^{\gamma_i} - \lambda^{\beta_j}}{\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{\gamma_i}} A_{\gamma_i} a^{\gamma_i\beta_i\beta_j} + A_{\alpha_i}\lambda^{\alpha_i\beta_i} - \right. \\ \left. - A_{\beta_i}\lambda^{\beta_i\alpha_i} \right] \omega^{\beta_i} \Big\} \wedge \omega^{\alpha_i} \wedge \omega^{2\alpha_i} + [A_{\alpha_i} a^{\alpha_i\beta_i} \omega^{\beta_i} \wedge \omega^1 + \\ + A_{\alpha_i} a^{\alpha_i\beta_j} \omega^{\beta_j} \wedge \omega^{\gamma_j}] \wedge \omega^{2\alpha_i} - A_{\alpha_i} \lambda^{\alpha_i\beta_j} \omega^{\alpha_i} \wedge \omega^{\beta_j} \wedge \omega^1,$$

требование тождественного обращения в нуль которого дает формулу для dA_{α_i} и еще равенства

$$a^{\alpha_i\beta_j} = 0, \quad a^{\alpha_i\beta_j\gamma_j} = 0, \quad \lambda^{\alpha_i\beta_j} = 0,$$

которые являются в силу теоремы 1 необходимыми и достаточными для того, чтобы у системы существовал промежуточный k -интеграл $\omega^{\alpha_i} \wedge \omega^{2\alpha_i} = 0$, т. е. верна

Теорема 7. Если у системы $S^1_{m_2}$ существует одномерный закон сохранения с соответствующей формой Ω вида $A_{\alpha_i} \omega^{\alpha_i} \wedge \omega^{2\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, то у системы $S^1_{m_2}$ существует промежуточный k -интеграл.

3. Говорят, что система обладает обобщенной функцией тока, если у нее есть интеграл, обращающийся в нуль на каждом интегральном многообразии вдоль одного семейства характеристик. Находим функцию тока для характеристик $\omega^{2\alpha} = 0$, α — фиксированное. Эта будет форма θ , которая имеет вид

$$\theta = k\omega^\alpha + h\omega^{2\alpha}, \quad (49)$$

ибо тогда на интегральных многообразиях системы будем иметь $\theta = (k\gamma^\alpha + h)\omega^{2\alpha}$, т. е. θ обращается там действительно в нуль вдоль семейства характеристик $\omega^{2\alpha} = 0$. Здесь k, h — некоторые функции на M_{m+2} , которые принадлежат определению. Так как

$$\omega^{2\alpha} - \omega^{2\beta} = (\lambda^\alpha - \lambda^\beta)\omega^1 \text{ и у нас } \lambda^\alpha - \lambda^\beta \neq 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \text{ то}$$

$$d\theta = (dk + k\omega^\alpha - \lambda^\alpha\omega^1) \wedge \omega^\alpha + \\ + \left(dh + k\omega^\alpha - h\lambda^\alpha\omega^1 + \frac{k\lambda^{\alpha\beta_1} + h\lambda^{\alpha\beta}}{\lambda^\alpha - \lambda^\beta} \omega^\beta \right) \wedge \omega^{2\alpha} - \\ - \frac{k\lambda^{\alpha\beta_1} + h\lambda^{\alpha\beta}}{\lambda^\alpha - \lambda^\beta} \omega^\beta \wedge \omega^{2\beta} + k\lambda^{\alpha\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma.$$

Условие, что θ есть интеграл, требует от $d\theta$ вида (39), для чего надо выбрать k, h такими, чтобы выражения в скобках при разложении по главным формам содержали лишь $\omega^\alpha, \omega^{2\alpha}$, причем $a^{\alpha\beta\gamma} = 0$. Если же при этом $k = 0$, то члена $ka^{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma$ не будет и надо потребовать $\lambda^\alpha = 0$. Итак, верна

Теорема 8. *Квазилинейная система $S^1_{m_2}$ может обладать обобщенной функцией тока относительно характеристик $\omega^{2\alpha} = 0$ (α — фиксированное) либо при $a^{\alpha\beta\gamma} = 0$, либо при $\lambda^\alpha = 0$.*

4. Пусть система Пфаффа $S_{\alpha 2\alpha}: \omega^\alpha = 0, \omega^{2\alpha} = 0$ обладает интегралом нулевого порядка, т. е. функцией, постоянной на каждом интегральном многообразии системы $S_{\alpha 2\alpha}$. Для существования этого интеграла необходимо и достаточно существование вполне интегрируемого уравнения вида $a\omega^\alpha + b\omega^{2\alpha} = 0$, где a и b — некоторые функции на M_{m+2} , а для этого необходимо и достаточно выполнение условий $a\alpha^{\alpha\beta_1} + b\lambda^{\alpha\beta} = 0$ для каждого β , где $\beta \neq \alpha$ и $a^{\alpha\beta\gamma} = 0$, для чего необходимо, но не достаточно, $a^{\alpha\beta_1}\lambda^{\alpha\gamma} - a^{\alpha\gamma_1}\lambda^{\alpha\beta} = 0, a^{\alpha\beta\gamma} = 0$. Пусть кроме того, система $S^1_{m_2}$ обладает функцией тока для характеристик $\omega^{2\alpha} = 0$. Тогда, умножая форму θ , определенную уравнением (49), на любой интеграл системы $S_{\alpha 2\alpha}$, получаем новую функцию тока. Действительно, если φ -интеграл системы $S_{\alpha 2\alpha}$, то $d\varphi = F(a\omega^\alpha + b\omega^{2\alpha}), F \neq 0$ и $d(\varphi\theta) = d\varphi \wedge \theta + \varphi d\theta = F(ah - bk)\omega^\alpha \wedge \omega^{2\alpha} + \varphi d\theta$ имеет вместе с $d\theta$ вид одномерного интеграла (39). Если $H = ah - bk \neq 0$, то уравнения $d\theta = 0, d(\varphi\theta) = 0$ равносильны двум уравнениям из системы $S^1_{m_2}$, причем второе из них с учетом первого имеет вид $d(\varphi\theta) = d\varphi \wedge \theta = FH\omega^\alpha \wedge \omega^{2\alpha} = 0$, т. е. оно равносильно уравнению $\omega^\alpha \wedge \omega^{2\alpha} = 0$ из системы. Следовательно, уравнение $\omega^\alpha = \nu^\alpha \omega^{2\alpha}$ равносильно уравнению $d\varphi = \varphi'\theta$. Дальнейшее дифференцирование дает $d\varphi' \wedge \theta = 0$, что учитывая $d\varphi \wedge \theta = 0$, равносильно $d\varphi' \wedge \theta = 0$. Этому требованию можно удовлетворить, выбрав в качестве φ' любой другой интеграл $\varphi' = \varphi'(\varphi)$ системы $S_{\alpha 2\alpha}$, так как тогда $d\varphi' = (\partial\varphi'/\partial\varphi)d\varphi$. Подставив это соотношение $\varphi' = \varphi'(\varphi)$, которое превращает уравнение $\omega^\alpha \wedge \omega^{2\alpha} = 0$ в тождество, в остальные уравнения системы $S^1_{m_2}$, приходим к системе $m - 1$ уравнений с $m - 1$ искомыми функциями. Итак, имеется промежуточный 1-интеграл.

Пусть системы Пфаффа $S_{\alpha_i 2\alpha_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) обладают интегралами нулевых порядков и система $S^1_{m_2}$ обладает функциями тока для характеристик $\omega^{2\alpha_i} = 0$. Проводив предыдущее рассуждение последовательно для каждой пары соответствующего интеграла и функции тока, приходим к системе с $m - k$ искомыми функциями, т. е. имеем промежуточный k -интеграл.

Здесь можно было рассуждать и по-иному. Образует форму $\theta = \varphi_1 \vartheta^1 + \dots + \varphi_k \vartheta^k$. Для нее $d(\varphi_i \vartheta^i) = d\varphi_i \wedge \vartheta^i + \varphi_i d\vartheta^i = F_i(a_i b_i - b_i k_i) \omega^{2\alpha_i} + \varphi_i d\vartheta^i$,

т. е. θ является интегралом системы $S^1_{m_2}$. Если же $d\vartheta^i = 0$, то $d\theta$ будет содержать лишь k из форм системы (С), а тогда в силу теоремы 7 у системы $S^1_{m_2}$ существует промежуточный k -интеграл. Итак, верна

Теорема 9. Если системы Пфаффа $S_{\alpha_i, 2\alpha_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) обладают интегралами нулевых порядков, а система $S^1_{m_2}$ функциями тока для характеристик $\omega^{2\alpha_i} = 0$, то у системы $S^1_{m_2}$ существует промежуточный k -интеграл.

5. Понятие обобщенной функции тока можно обобщить, т. е. искать интегралы, обращающиеся в нуль на характеристическом подмногообразии $\omega^{2\alpha_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$. Это будет форма вида

$$\theta = \sum_i k_i \omega^{\alpha_i} + h_i \omega^{2\alpha_i}, \quad (50)$$

так чтобы $d\theta$ имел вид (39). Рассуждения, аналогичные проведенным в п. 3, дают что верна

Теорема 10. Квазилинейная система $S^1_{m_2}$ может обладать обобщенной функцией тока (50) относительно характеристических подмногообразий $\omega^{2\alpha_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$, $k < m$) либо при $a^{\alpha_i} b_{\beta\gamma} = 0$, либо при $\lambda^{\alpha_i} \alpha_i = 0$.

Пусть система $S^1_{m_2}$ обладает обобщенной функцией тока θ вида (50) относительно характеристических подмногообразий $\omega^{2\alpha_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, $k < m$, и система Пфаффа $\omega^{\alpha_i} = 0$, $\omega^{2\alpha_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, обладает интегралом φ нулевого порядка. Для последнего необходимо и достаточно существование вполне интегрируемого уравнения вида $\sum_j (a_j \omega^{\alpha_j} + b_j \omega^{2\alpha_j}) = 0$. Тогда $d\varphi = \sum_j F_j (a_j \omega^{\alpha_j} + b_j \omega^{2\alpha_j})$. Если $k_i b_j - a_i h_j = 0$ при $i \neq j$, а $k_i a_j - a_i k_j = 0$, $h_i b_j - b_i h_j = 0$ при всех i, j , то $d(\varphi\theta)$ вместе с θ имеет вид одномерного интеграла, причем при $d\vartheta = 0$ форма $d(\varphi\theta)$ будет содержать лишь k из форм системы (С), т. е. верна

Теорема 11. Если система Пфаффа $\omega^{\alpha_i} = 0$, $\omega^{2\alpha_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, обладает интегралом нулевого порядка, а система $S^1_{m_2}$ обобщенной функцией тока (50), то у системы $S^1_{m_2}$ существует промежуточный k -интеграл.

Литература

1. Бляшке В., Введение в геометрию тканей. Москва, 1959.
2. Васильев А. М., Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория). Матем. сб., 1966, 70, № 4, 457—480.

3. Курант Р., Уравнения с частными производными. Москва, 1964
4. Норден А. П., Пространства аффинной связности. Москва—Ленинград, 1950.
5. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана. Москва—Ленинград, 1968.

Поступило
2 VI 1971

KAHE SÖLTUMATU MUUTUJA, m OTSITAVA FUNKTSIOONI JA ERINEVATE KARAKTERISTIKUTEGA I JÄRKU KVAASILINEAARSED OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÖRRANDITE SÜSTEEMID (GEOMEETRILINE TEOORIA)

H. Kilp

Resümee

Pealkirjas kirjeldatud süsteeme uuritakse artiklis Cartani meetodi abil. Antakse töös [2], kus $m=3$, esitatud tulemuste üldistused suvalise m korral. Nimelt on leitud vahepealse integraali olemasolu tingimused, tarvilik ja piisav tingimus süsteemile, mis on toodav lineaarkujule, ning vaadeldakse säilivusseadustega ja üldistatud voolufunktsioonidega seotud küsimusi ja viimaste seost vahepealsete integraalidega. §-des 6, 7 ja 8 vaadeldakse süsteemiga seotud sihtide absoluutse paralleelsusega afiinseid seostusi.

THE SYSTEMS OF THE FIRST ORDER QUASI-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES m UNKNOWN FUNCTIONS AND WITH DIFFERENT CHARACTERISTICS (GEOMETRIC THEORY)

H. Kilp

Summary

In this paper the systems, mentioned in the heading, have been examined by the method of Cartan. The generalisations of results of the paper [2] for arbitrary m have been given. In §§ 6, 7, 8 the affine connections with absolute parallelism of directions connected with the system have been examined.

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ ПО ЯДРУ ЭЛЕМЕНТАХ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л. Лооне

Кафедра математического анализа

Введение

Понятие ядра элемента в локально выпуклом пространстве E введено в статье [5]. В настоящей статье продолжается изучение свойств ядер элементов локально выпуклого пространства¹. В § 1 доказывается, что пространство ограниченных элементов E_m является векторным подпространством пространства E . В § 2 изучаются свойства подпространства ограниченных элементов в бэрдовском пространстве. В § 3 рассматривается некоторое ядро в пространстве s всех последовательностей.

§ 1. Пространство ограниченных элементов по ядру

Пусть E — локально выпуклое пространство над \mathbf{R} (или над \mathbf{C}). Пусть фильтр \mathfrak{A} определяет ядро в E . Обозначим через E_m пространство всех ограниченных элементов по ядру, определяемому фильтром \mathfrak{A} .

Лемма 1. *Если $x \in E_m$, то каждый фильтр в \mathbf{R} (или в \mathbf{C}), мажорирующий фильтр $\mathfrak{A}(x)$, имеет по крайней мере одну точку прикосновения.*

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} — фильтр в \mathbf{R} (или в \mathbf{C}), мажорирующий $\mathfrak{A}(x)$. Он является фильтром и в бикompактном пространстве $\overline{\mathbf{R}}$ (соответственно $\overline{\mathbf{C}}$). Следовательно, он имеет там по крайней мере одну точку прикосновения. Точки прикосновения фильтра \mathfrak{F} в $\overline{\mathbf{R}}$ (или в $\overline{\mathbf{C}}$) являются также точками прикосновения мажорируемого им фильтра $\mathfrak{A}(x)$ в пространстве $\overline{\mathbf{R}}$ (или $\overline{\mathbf{C}}$). Поскольку \mathfrak{A} имеет базис из выпуклых множеств и $x \in E_m$, то эти точки принадлежат \mathbf{R} (или \mathbf{C}).

Предложение 2. Пусть $\mathfrak{B} = \{B_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ — базис фильтра \mathfrak{A} .

¹ В настоящей статье используется символика статьи [5].

Для каждого $x \in E_m$ найдется $i \in \mathfrak{I}$ такой, что $V_i(x)$ ограничено в \mathbf{R} (или в \mathbf{C}).

Доказательство. Пусть $x \in E_m$. Покажем, что каждая окрестность ядра $K(x)$ принадлежит фильтру $\mathfrak{A}(x)$. В самом деле, пусть U — окрестность множества $K(x)$; рассуждая от противного, предположим, что всякое множество из $\mathfrak{A}(x)$ пересекается с $\mathbf{C}U$. Следы на $\mathbf{C}U$ множеств из $\mathfrak{A}(x)$ образуют базис фильтра \mathfrak{E} в \mathbf{R} (или в \mathbf{C}). Так как \mathfrak{E} мажорирует $\mathfrak{A}(x)$, то по лемме 1 фильтр \mathfrak{E} имеет по крайней мере одну точку прикосновения. Эта точка принадлежит $K(x)$, что противоречит предположению. Итак, каждая окрестность множества $K(x)$ принадлежит $\mathfrak{A}(x)$. Но в локально бикомпактном пространстве всякое бикомпактное множество обладает фундаментальной системой бикомпактных окрестностей (см. [1], гл. I, § 9, предложение 10). Поскольку $K(x)$ ограничено и замкнуто в \mathbf{R} (или в \mathbf{C}), то оно и бикомпактно, т. е. найдется $i \in \mathfrak{I}$ такой, что $V_i(x)$ ограничено.

Предложение 3. Если x и y — ограниченные элементы, то имеет место включение

$$K(x + y) \subset K(x) + K(y). \quad (1)$$

Доказательство. Если $K(x + y) = \emptyset$, то включение (1) очевидно. Если $K(x + y) \neq \emptyset$, то пусть c — произвольный элемент из $K(x + y)$. Тогда найдется фильтр \mathfrak{F}_1 , мажорирующий фильтр \mathfrak{A} , такой, что фильтр $\mathfrak{F}_1(x + y)$ сходится к точке c (см. [1], гл. 1, § 7, предложение 8). Пусть a — некоторая точка прикосновения фильтра $\mathfrak{F}_1(x)$ в пространстве \mathbf{R} (соответственно \mathbf{C}) (см. лемма 1), т. е. $a \in K(x)$. Найдется фильтр \mathfrak{F}_2 , мажорирующий фильтры \mathfrak{A} и \mathfrak{F}_1 , такой, что фильтр $\mathfrak{F}_2(x)$ сходится к a . Тогда фильтр $\mathfrak{F}_2(x + y)$ сходится к c . Из этого вытекает, что фильтр $\mathfrak{F}_2(y)$ сходится и пределом является точка $a - c$ (ср. [2], гл. IV, § 5, п. 7). Значит, $a - c \in K(y)$, т. е. для каждой точки c из $K(x + y)$ можно найти точки $a \in K(x)$ и $b \in K(y)$ такие, что $c = a + b$. Утверждение доказано.

Предложение 4. Множество E_m всех элементов, ограниченных по ядру, является векторным подпространством пространства E .

Доказательство. Из определения ограниченного элемента (см. [5]) вытекает, что $K(\lambda x) = \lambda K(x)$ для всякого $x \in E$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ (или \mathbf{C}). Пусть x и y принадлежат E_m . Следуя предложению 3, для ограниченности $x + y$ достаточно доказать, что ядро $K(x + y)$ является непустым множеством. Пусть a принадлежит $K(x)$, т. е. найдется фильтр \mathfrak{F}_1 , мажорирующий фильтр \mathfrak{A} , с $\mathfrak{F}_1(x)$, сходящийся к a . По лемме 1 множество предельных точек фильтра $\mathfrak{F}_1(y)$ непусто, т. е. содержит некоторую точку b . Следовательно, найдется фильтр \mathfrak{F}_2 , мажорирующий \mathfrak{F}_1 , с $\mathfrak{F}_2(y)$, сходящийся к b . Но тогда и фильтр $\mathfrak{F}_2(x + y)$ сходится и имеет

своим пределом точку $a + b$. Поскольку фильтр \mathfrak{F}_2 мажорирует \mathfrak{X} , то $a + b$ является элементом множества $K(x + y)$, т. е. $K(x + y) \neq \emptyset$. Предложение доказано.

Следствие 4.1. Множество E_c всех элементов, сходящихся по ядру, является векторным подпространством пространства E .

В самом деле, если $x, y \in E_c$, то найдутся a и b такие, что $K(x) = \{a\}$ и $K(y) = \{b\}$. Из предложений 3 и 4 вытекает, что $K(x + y) = \{a + b\}$.

§ 2. Ядра в локально выпуклом пространстве E , являющимся бэрзовским пространством

Предложение 5. Пусть E — локально выпуклое бэрзовское пространство. Если фильтр, определяющий ядро в E имеет счетный базис, то $E = E_m$ тогда и только тогда, когда фильтр имеет базис $\mathfrak{B} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ из слабо бикомпактных множеств.

Доказательство. Необходимость. Рассуждая от противного, предположим, что фильтр не имеет базиса из слабо бикомпактных множеств. Так как E — локально выпуклое бэрзовское пространство, то для любого множества из E' свойства «ограниченно в слабой топологии» и «равностепенно непрерывно» равносильны (см. [3], стр. 213 и 142). Из этого, пользуясь принципом конденсации особенностей (см. [3], гл. III), вытекает, что существует $x_0 \in E$ такой, что ни одно из множеств $B_i(x_0)$ не ограничено. По предложению 2 элемент x_0 не ограничен, т. е. $E \neq E_m$.

Достаточность следует из предложения 1 статьи [5].

Предложение 6. Пусть E — локально выпуклое бэрзовское пространство. Если фильтр, определяющий ядро в E имеет счетный базис $\mathfrak{B} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $E \neq E_m$, то E_m является множеством первой категории в E .

Доказательство. Пусть E_m^i — множество всех x из E , для которых множество $B_i(x)$ ограничено. Поскольку $E \neq E_m$, то ни одно из множеств B_i не равностепенно непрерывно (см. предложение 5). Следовательно (см. [3], гл. III), все множества E_m^i являются множествами первой категории в E . Но тогда и E_m — множество первой категории в E , ибо по предложению 2

$$E_m = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_m^i.$$

§ 3. Ядро в пространстве s

Пусть s — пространство всех последовательностей, топология в котором задана множеством полунорм $p_i(x)$ ($i=0, 1, 2, \dots$), где для любого $x = \{\xi_i\}$

$$p_i(x) = |\xi_i|. \quad (2)$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{B} = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ подмножеств пространства s' , где B_n является множеством всех элементов из s' , удовлетворяющих следующим условиям:

$$1^\circ \langle e_k, f \rangle = 0 \quad \forall k < n, \quad (3)$$

$$2^\circ \langle e_k, f \rangle \geq 0 \quad \forall k, \quad (4)$$

$$3^\circ \langle e, f \rangle = 1. \quad (5)$$

Поскольку $B_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ является непустым, выпуклым и замкнутым множеством в s' (см. [3], стр. 47 и 66) и $B_{n+1} \subset B_n$, то \mathfrak{B} есть базис фильтра в s' , определяющее ядро.

Предложение 7. *Фильтр с базисом $\mathfrak{B} = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяет ядро Кноппа в пространстве s .*

Доказательство. Как известно (см. [4], стр. 391), ядро Кноппа $K^\circ(x)$ элемента $x = \{\xi_k\}$ совпадает с множеством точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих при любом действительном φ условию

$$\operatorname{Re}(e^{i\varphi}z) \leq \overline{\lim}_n \operatorname{Re}(e^{i\varphi}\xi_n).$$

1. Покажем, что для каждого $x \in s$

$$K(x) \subset K^\circ(x). \quad (6)$$

Пусть a — элемент из $K(x)$, т. е. найдется $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $f_n \in B_n$, такая что

$$\lim_n \langle x, f_n \rangle = a. \quad (7)$$

В силу условия 1° для каждого $m < n$ имеет место

$$\langle x, f_n \rangle = \langle x - \sum_{k=0}^m \xi_k e_k, f_n \rangle. \quad (8)$$

По определению множеств B_n

$$\langle x, \operatorname{Re} f \rangle = \langle \operatorname{Re} x, f \rangle \quad (9)$$

для каждого $x \in s$ и $f \in B_n (n = 1, 2, \dots)$. Ввиду (9), из (7) и (8) вытекает, что для каждого $m < n$ имеет место

$$\operatorname{Re}(e^{i\varphi}a) = \lim_n \langle \operatorname{Re}(e^{i\varphi}(x - \sum_{k=0}^m \xi_k e_k)), f_n \rangle. \quad (10)$$

Так как $\langle e, f_n \rangle = 1$ и $\langle e_k, f_n \rangle \geq 0$ для каждого n и k , то из (10) получается

$$\operatorname{Re}(e^{i\varphi}a) \leq \limsup_{n \ k \geq n} \operatorname{Re}(e^{i\varphi}\xi_k) = \overline{\lim}_n \operatorname{Re}(e^{i\varphi}\xi_n),$$

т. е. $a \in K^\circ(x)$, и, следовательно, имеет место (6).

2. Покажем, что для каждого $x \in s$ имеет место включение, обратное к (6). Пусть a — некоторая предельная точка (конечная или нет) последовательности x , т. е. найдется $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, с $n < k_n$, такая что

$$\lim_n \xi_{k_n} = a. \quad (11)$$

Определяем последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\langle e_j, f_n \rangle = \begin{cases} 1, & j = k_n, \\ 0, & j \neq k_n. \end{cases}$$

Поскольку $k_n > n$, то $f_n \in B_n$ для всех n . Ввиду (11)

$$\lim_n \langle x, f_n \rangle = a, \quad (12)$$

т. е. $a \in K(x)$.

Так как ядро Кноппа последовательности x является замкнутой выпуклой оболочкой ее предельных точек (см. [4], гл. 6), то из этого вытекает, что $K^\circ(x) \subset K(x)$. Предложение доказано.

Предложение 8. *Пространство m всех ограниченных последовательностей является множеством первой категории в s .*

Это предложение является прямым следствием предложений 6 и 7, поскольку s_m совпадает с m и s — пространство Фреше (см. [3], стр. 82).

Литература

1. Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры. Москва, 1968.
2. Бурбаки Н., Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства. Москва, 1969.
3. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства. Москва, 1959.
4. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
5. Лооне Л., О ядрах элемента отделимого локально выпуклого пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 125—135.

Поступило
13 VIII 1971

TÖKESTATUD TUUMADEST LOKAALSELT KUMERAS RUUMIS

L. Loone

Resümee

Antud artiklis jätkatakse töös [5] defineeritud lokaalselt kumera ruumi elemendi tuuma uurimist. Tõestatakse, et tuuma järgi tõkestatud elementide ruum E_m on ruumi E vektoralamruum. Uuritakse tõkestatud elementide omadusi Baire'i ruumis ja vaadeldakse üht võimalikku tuuma kõigi jadade ruumis s .

BARRELLED CORES IN THE LOCALLY CONVEX VECTOR SPACE

L. Loone

Summary

The present paper is the continuation of the paper [5]. In section 1 it is shown that the subset E_m of barrelled elements in E is a vector space. In section 2 the author considers barrelled core in Baire space. Section 3 deals with a core defined in the space s of all sequences.

ОБ ОБРАТИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

М. Абель

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

1. Пусть A — комплексная коммутативная банахова алгебра с единицей e_A , а \mathfrak{M}_A — пространство всех максимальных идеалов алгебры A . Через $\hat{a}(M)$ мы будем обозначать комплексное число, соответствующее элементу $a \in A$ при гомоморфном отображении алгебры A в поле \mathbb{C} комплексных чисел, определяемое максимальным идеалом $M \in \mathfrak{M}_A$. Для каждого фиксированного элемента $a \in A$ при изменении M в \mathfrak{M}_A получаем определенную на \mathfrak{M}_A функцию \hat{a} .

Как известно (см. [7], стр. 93), относительно обычных алгебраических операций между функциями множество $\{\hat{a} : a \in A\}$ образует подалгебру \hat{A} алгебры $C(\mathfrak{M}_A, \mathbb{C})$ всех непрерывных функций, определенных на \mathfrak{M}_A .

Пусть $m(A)$ — множество всех ограниченных последовательностей $x = \{x_n\}$ элементов алгебры A . Если алгебраические операции над последовательностями определить по координатно и норму последовательности x — равенством ²

$$\|x\| = \sup_n \|x_n\|_A, \quad (1)$$

то множество $m(A)$ образует банахову алгебру с единицей $e = \{e_A\}$. При этом множество $c(A)$ всех последовательностей, сходящихся в алгебре A , образует относительно нормы (1) банахову подалгебру с единицей e алгебры $m(A)$.

Последовательность $x \in m(A)$ (или $x \in c(A)$) называется *обратимой в алгебре $m(A)$* (соответственно *в алгебре $c(A)$*), если в алгебре $m(A)$ (соответственно в алгебре $c(A)$) существует

¹ Всюду в дальнейшем вместо комплексной коммутативной банаховой алгебры с единицей будем говорить коротко банахова алгебра или алгебра.

² Здесь $\|\cdot\|_A$ означает норму алгебры A , причем $\|e_A\|_A = 1$.

вует последовательность x^{-1} , удовлетворяющая условию $x^{-1}x = xx^{-1} = e$.

2. Пусть $A = (a_{nk})$, $B = (b_{nk})$ и $C = (c_{nk})$ — некоторые бесконечные матрицы с комплексными элементами.

Сверткой матриц A и B называется матрица $C = A * B$, для которой

$$c_{nk} = \sum_{v=0}^k a_{nv} b_{n,k-v}. \quad (2)$$

Как известно (см. [10], стр. 163), единичной матрицей относительно свертки является матрица $U = (u_{nk})$, где $u_{nk} = 1$ при $k = 0$ и $u_{nk} = 0$ при $k \geq 1$ для всех n .

Ниже мы будем пользоваться следующими условиями для матрицы A :

$$\lim_n a_{nk} = a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = a, \quad (4)$$

$$\sum_k |a_{nk}| = O(1) \quad (5)$$

и

$$\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_k| = 0. \quad (6)$$

Как известно (см., например, [3], стр. 13), из условий (3) и (5) следует

$$\sum_k |a_k| < \infty. \quad (7)$$

Матрица A называется *сохраняющей сходимость*, если выполнены условия (3)–(5); *сохраняющей ограниченность*, если выполнено условие (5), и *порождающей сходимость*, если выполнены условия (3), (5) и (6).

Матрица A , сохраняющая сходимость, называется *мультипликативной*, если $a_k = 0$ для всех k , а *регулярной*, если, кроме того, выполнено условие $a = 1$.

Пусть

$$\rho(A) = a - \sum_k a_k.$$

Если $\rho(A) = 0$, то матрица A , сохраняющая сходимость, называется *конулевой*, а если $\rho(A) \neq 0$, то называется *корегулярной*.

Как известно [2], множество Φ^* всех матриц A , сохраняющих ограниченность, образует относительно нормы

³ Т. е. число n принимает все значения $0, 1, 2, \dots$

⁴ Здесь и всюду в дальнейшем $\lim_n x_n$ означает $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, а $\sum_k x_{nk}$ означает

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_{nk}.$$

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| \quad (8)$$

банахову алгебру с единицей U , если сложение матриц и умножение на число определить как обычно, а умножение матриц — в смысле свертки. При этом (см. [10], стр. 163) множество Γ^* всех матриц A , сохраняющих сходимость, образует относительно нормы (8) банахову подалгебру с единицей U алгебры Φ^* .

Пусть Π^* — множество всех матриц, порождающих сходимость. Поскольку множество Π^* замкнуто относительно алгебраических операций⁵ алгебры Φ^* и матрица $U \in \Pi^*$, то Π^* образует подалгебру с единицей U алгебры Φ^* .

Матрица $A \in \Phi^*$ (соответственно $A \in \Gamma^*$ или $A \in \Pi^*$) называется *обратимой в алгебре Φ^** (соответственно *в алгебре Γ^** или *в алгебре Π^**), если в алгебре Φ^* (соответственно в алгебре Γ^* или в алгебре Π^*) существует матрица A^{-1} , удовлетворяющая условию $A^{-1} * A = A * A^{-1} = U$.

3. Пусть $a = \{a_k\}$, $b = \{b_k\}$ и $c = \{c_k\}$ — некоторые последовательности комплексных чисел. *Сверткой* последовательностей a и b называется последовательность $c = a * b$, для которой

$$c_k = \sum_{v=0}^k a_v b_{k-v}.$$

Как известно (см. [7], стр. 95—96), множество всех последовательностей $a = \{a_k\}$ комплексных чисел a_k , ряд из которых абсолютно сходится, образует относительно нормы

$$\|a\| = \sum_k |a_k|$$

банахову алгебру с единицей, если сложение последовательностей и умножение на число определить по координатно, а умножение последовательностей — в смысле свертки. Следуя [4], стр. 126, эта алгебра обозначаем через⁶ W_+ .

4. В настоящей статье (в § 2) находится необходимое и достаточное условие для обратимости последовательности x в алгебре $s(A)$ в случае, когда A — любая банахова алгебра, а в алгебре $m(A)$ в случае, когда A — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра \hat{A} равномерно замкнута, т. е. \hat{A} является замкнутой подалгеброй в $C(\mathfrak{M}_A, \mathbb{C})$. Если алгебра A не обладает выше названными свойствами, то обратимость в алгебре $m(A)$ решается частично.

В § 3 исследуются связи между алгебрами последовательностей и алгебрами бесконечных матриц. Показывается, что алгебры $m(W_+)$ и Φ^* , а также алгебры $s(W_+)$ и Π^* , являются изометрически изоморфными.

⁵ Замкнутость множества Π^* относительно свертки матриц показано в [5], стр. 53—55, а также в [2].

⁶ В [7] алгебра W_+ обозначается через A_0 .

Полученные результаты применяются в § 4 для нахождения необходимых и достаточных условий обратимости матриц в алгебре \mathcal{P}^* . Обратимость матриц в алгебре Φ^* решается частично.

§ 2. Обратимость последовательностей элементов банаховой алгебры

Из предложения 1 и теоремы 2 статьи [1] при $X = \mathbf{N}$, учитывая замечание 1, получаем

Предложение 1. Пусть A — банахова алгебра. Для того, чтобы последовательность $x \in m(A)$ была обратимой в алгебре $m(A)$, необходимо, а в случае, когда A является полупростой банаховой алгеброй, для которой алгебра \hat{A} равномерно замкнута, то и достаточно выполнение условия

$$\sigma_A(x) = \inf_{(n, M) \in \mathbf{N} \times \mathfrak{M}_A} |x_n^\wedge(M)| > 0. \quad (9)$$

В случае, когда A не является полупростой банаховой алгеброй, для которой алгебра \hat{A} равномерно замкнута, то, вообще говоря, из выполнения условия (9) не следует обратимость последовательности x в алгебре $m(A)$.

Действительно, пусть $A = \mathcal{W}$, т. е. банахова алгебра всех абсолютно сходящихся тригонометрических рядов

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

определенных на $(-\infty, \infty)$, с нормой

$$\|x\|_{\mathcal{W}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|.$$

Алгебра \mathcal{W} полупроста (см. [4], стр. 34), но алгебра $\hat{\mathcal{W}}$ не является равномерно замкнутой, поскольку \mathcal{W} самосопряженна (см. [4], стр. 52) и $\hat{\mathcal{W}} \neq C(\mathfrak{M}_{\mathcal{W}}, \mathbf{C})$.

Пусть

$$S(\alpha, \beta, K) = \{x \in \mathcal{W} : \alpha \leq x(t) \leq \beta \forall t \in (-\infty, \infty), \|x\|_{\mathcal{W}} \leq K\}.$$

Как показано в статье [9], стр. 498, существуют такие положительные вещественные числа α , β и K с $\alpha < \beta$, что множество

$$\{\|x^{-1}\|_{\mathcal{W}} : x \in S(\alpha, \beta, K)\}$$

является неограниченным. Поэтому для каждого n в множестве $S(\alpha, \beta, K)$ найдется такой элемент x_n , что

$$\|(x_n)^{-1}\|_{\mathcal{W}} \geq n. \quad (10)$$

⁷ Здесь и всюду в дальнейшем $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Учитывая, что между максимальными идеалами $M_t \in \mathfrak{M}_W$ и точками $t \in [0, 2\pi)$ существует взаимно однозначное соответствие и справедливо равенство

$$\hat{x}_n(M_t) \equiv x_n(t)$$

для всех n (см. [4], стр. 36), то

$$\inf_{(n, M_t) \in \mathbb{N} \times \mathfrak{M}_W} |\hat{x}_n(M_t)| = \inf_n \inf_{t \in [0, 2\pi)} |x_n(t)| \geq a > 0.$$

Значит, последовательность $x = \{x_n\} \in m(W)$ и удовлетворяет условию (9), но $x^{-1} = \{(x_n)^{-1}\} \notin m(W)$, ввиду неравенства (10). Следовательно, последовательность x не обратима в алгебре $m(W)$.

Пусть теперь A — любая банахова алгебра. Покажем, что последовательность $x \in c(A)$, удовлетворяющая условию (9), обратима в алгебре $m(A)$, независимо от того, является ли A полупростой банаховой алгеброй, для которой алгебра \hat{A} равномерно замкнута, или нет.

Действительно, имеет место

Теорема 1. Пусть A — банахова алгебра. Для того, чтобы последовательность $x \in c(A)$ была обратимой в алгебре $c(A)$, необходимо и достаточно выполнение условия (9).

Доказательство. Необходимость следует из предложения 1, ввиду включения $c(A) \subset m(A)$.

Достаточность. Пусть последовательность $x = \{x_n\}$ сходится к $x_0 \in A$ и удовлетворяет условию (9). Тогда элементы x_n этой последовательности обратимы в алгебре A для всех n . Предположим, что последовательность $\{\|(x_n)^{-1}\|_A\}$ не является ограниченной. Тогда существует такая подпоследовательность $\{\|(x_{n_k})^{-1}\|_A\}$, что

$$\lim_k \|(x_{n_k})^{-1}\|_A = \infty. \quad (11)$$

Положим для всех k

$$b_k = \frac{1}{\|(x_{n_k})^{-1}\|_A} (x_{n_k})^{-1}.$$

Поскольку $b_k \in A$ и $\|b_k\|_A = 1$ для всех k , то, в силу условия (11), из неравенства

$$\begin{aligned} \|x_0 b_k\|_A &= \|(x_0 - x_{n_k}) b_k + x_{n_k} b_k\|_A \leq \\ &\leq \|x_0 - x_{n_k}\|_A + \frac{1}{\|(x_{n_k})^{-1}\|_A} \end{aligned}$$

следует, что

$$\lim_k \|x_0 b_k\|_A = 0.$$

⁸ Числа $\|(x_{n_k})^{-1}\|_A \neq 0$ для всех k , ибо элементы x_{n_k} обратимы в алгебре A .

Значит, элемент x_0 является топологическим делителем нуля (см. [8], стр. 19) алгебры A . Поэтому x_0 необратим в алгебре A (см. [8], стр. 20).

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \nu[(x_n)^{-1}] &= \sup_{M \in \mathfrak{M}_A} |(x_n)^{-1} \hat{}(M)| \leq \\ &\leq \sup_{(n, M) \in \mathbb{N} \times \mathfrak{M}_A} |(x_n)^{-1} \hat{}(M)| \leq [\sigma_A(x)]^{-1} \end{aligned}$$

независимо от n . В силу условия (9), теперь находим, что числовая последовательность $\{\nu[(x_n)^{-1}]\}$ ограничена. Поэтому элемент x_0 обратим в алгебре A (см. [8], теорема (1.4.23)). Полученное противоречие показывает, что последовательность $\{\|(x_n)^{-1}\|_A\}$ является ограниченной. Поэтому, так как для всех m и n имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|(x_n)^{-1} - (x_m)^{-1}\|_A &\leq \|(x_n)^{-1}(x_m - x_n)(x_m)^{-1}\|_A \leq \\ &\leq \|(x_n)^{-1}\|_A \|x_m - x_n\|_A \|(x_m)^{-1}\|_A, \end{aligned}$$

то последовательность $x^{-1} = \{(x_n)^{-1}\} \in c(A)$. Теорема доказана.

Пусть

$$m_0(A) = \{x \in m(A) : x_n = a_n a, \{a_n\} \in m(\mathbb{C}), a \in A\}.$$

Для последовательности $x \in m_0(A)$ условие (9) равносильно следующим двум условиям:

$$\inf_n |a_n| > 0 \tag{12}$$

и

$$a \hat{}(M) = 0 \text{ для всех } M \in \mathfrak{M}_A, \tag{13}$$

ибо в данном случае условие (9) имеет вид

$$\inf_n |a_n| \inf_{M \in \mathfrak{M}_A} |a \hat{}(M)| > 0.$$

Пусть теперь выполнены условия (12) и (13). Тогда последовательность $\{a_n\}$ и элемент a обратимы соответственно в $m(\mathbb{C})$ и в A . Поскольку

$$\{(a_n)^{-1} a^{-1}\} \{a_n a\} = \{e_A\} = e$$

и

$$\|(a_n)^{-1} a^{-1}\|_A \leq \|a^{-1}\|_A \sup_n |a_n|^{-1} = \|a^{-1}\|_A (\inf_n |a_n|)^{-1},$$

то последовательность $x^{-1} = \{(a_n)^{-1} a^{-1}\} \in m(A)$. Итак, верно

Теорема 2. Пусть A — банахова алгебра. Для того, чтобы последовательность $x \in m_0(A)$ была обратной в алгебре $m(A)$ необходимо и достаточно выполнение условий (12) и (13).

§ 3. Изоморфизмы между алгебрами последовательностей и алгебрами бесконечных матриц

Пусть последовательность $x \in m(W_+)$. Тогда для каждого фиксированного n , члены x_n последовательности x являются элементами алгебры W_+ . В силу этого, члены $x_n = \{x_{nk}\}$, причем $\{x_{nk}\} \in W_+$ для всех n . Поэтому каждая последовательность $x \in m(W_+)$ представляет собой некоторую бесконечную матрицу, скажем матрицу $A = (a_{nk})$, где

$$a_{nk} = x_{nk} \quad (14)$$

для всех n и k . Поскольку

$$\sum_k |a_{nk}| \leq \sup_n \sum_k |x_{nk}| = \sup_n \|x_n\|_{W_+} = \|x\|$$

независимо от n , то матрица $A \in \Phi^*$.

Пусть теперь, наоборот, A — любая матрица из алгебры Φ^* . Каждая строка $\{a_{nk}\}$ этой матрицы представляет собой некоторый элемент из алгебры W_+ . Обозначим через x последовательность, для которой

$$x_n = \{a_{nk}\} \quad (15)$$

для каждого n . Так как

$$\|x_n\|_{W_+} = \sum_k |a_{nk}| \leq \|A\|$$

независимо от n , то последовательность $x \in m(W_+)$.

Пусть τ — отображение, отображающее последовательность $x \in m(W_+)$ в матрицу A , для которой элементы a_{nk} определяются для всех k и n равенством (14). Отображение τ взаимно однозначно отображает алгебру $m(W_+)$ на алгебру Φ^* . Если последовательности $x, y \in m(W_+)$, а матрицы $A = \tau(x)$ и $B = \tau(y)$, то $\tau(x + y) = A + B$, $\tau(xy) = A * B$ и $\tau(\lambda x) = \lambda A$ при $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому отображение τ является изоморфизмом между алгебрами $m(W_+)$ и Φ^* . Поскольку для всех $x \in m(W_+)$ справедливо

$$\|x\| = \sup_n \|x_n\|_{W_+} = \sup_n \sum_k |a_{nk}| = \|A\| = \|\tau(x)\|,$$

то этот изоморфизм изометричен. Итак, нами доказана

Теорема 3. *Отображение τ , отображающее последовательность $x \in m(W_+)$ в матрицу A , для которой элементы a_{nk} определяются для всех n и k равенством (14), является изометрическим изоморфизмом между алгебрами $m(W_+)$ и Φ^* .*

Пусть отображение $\tau_0 = \tau|_c(W_+)$, т. е. отображение τ_0 является сужением изоморфизма τ на подалгебру $c(W_+)$. Тогда справедливо

Следствие 1. *Отображение τ_0 является изометрическим изоморфизмом между алгебрами $c(W_+)$ и Π^* .*

Доказательство. Пусть последовательность $x \in c(W_+)$ сходится к $a = \{a_n\} \in W_+$. Поскольку $c(W_+) \subset m(W_+)$, то по

теореме 3 изоморфизм τ отображает последовательность x в матрицу $A \in \Phi^*$, для которой элементы a_{nk} определяются для всех k и n равенством (14). В силу того, что

$$\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_k| = \lim_n \sum_k |x_{nk} - a_k| = \lim_n \|x_n - a\|_{W_+} = 0,$$

матрица A удовлетворяет условиям (3) и (6). Значит, матрица $A \in \Pi^*$.

Пусть теперь A — любая матрица из алгебры Π^* . Так как $\Pi^* \subset \Phi^*$, то по теореме 3 изоморфизм τ^{-1} отображает матрицу A в последовательность $x \in m(W_+)$, для которой элементы x_n определяются для всех n равенством (15). Обозначим через $a = \{a_k\}$ последовательность, элементы a_k которой определены для всех k условием (3). Эта последовательность принадлежит W_+ , в силу выполнения условия (7). Поскольку

$$\lim_n \|x_n - a\|_{W_+} = \lim_n \sum_k |x_{nk} - a_k| = \lim_n \sum_k |a_{nk} - a_k| = 0,$$

то последовательность a является пределом последовательности x . Значит, последовательность $x \in c(W_+)$. Поэтому алгебра $\Pi^* = \tau_0[c(W_+)]$.

Следовательно, отображение τ_0 есть изометрический изоморфизм между алгебрами $c(W_+)$ и Π^* , как сужение изометрического изоморфизма τ на подалгебру $c(W_+)$. Следствие доказано.

В силу следствия 1 имеет место

Следствие 2. *Относительно нормы и алгебраических операций алгебры Φ^* алгебра Π^* образует банахову алгебру с единицей U .*

Доказательство. Достаточно показать, что алгебра Π^* является полным пространством относительно нормы (8). Для этого, пусть $\{A_m\}$ — фундаментальная последовательность матриц в алгебре Π^* . Поскольку по следствию 1 отображение τ_0 есть изометрический изоморфизм между алгебрами $c(W_+)$ и Π^* , то $\{x_m\}$ с $x_m = (\tau_0)^{-1}(A_m)$ для всех m есть фундаментальная последовательность в алгебре $c(W_+)$. В силу полноты алгебры $c(W_+)$, последовательность $\{x_m\}$ сходится к элементу $x \in c(W_+)$. Пусть $A = \tau_0(x)$. Тогда матрица $A \in \Pi^*$. Так как

$$\lim_m \|A_m - A\| = \lim_m \|\tau_0(x_m - x)\| = \lim_m \|x_m - x\|_{W_+} = 0,$$

то матрица A является пределом последовательности $\{A_m\}$. Поэтому Π^* есть банахова алгебра.

§ 4. Обратимость бесконечных матриц относительно умножения в смысле свертки

Пусть

$$D = \{z : |z| \leq 1\}.$$

Как известно (см. [4], стр. 126), всякий максимальный идеал алгебры W_+ имеет вид

$$M_z = \{a = \{a_k\} \in W_+ : \sum_k a_k z^k = 0\},$$

где z — некоторая фиксированная точка в D . Кроме того, в каждой точке $z \in D$ справедливо равенство

$$\hat{a}^*(M_z) = \sum_k a_k z^k \quad (16)$$

для всех $a \in W_+$.

Имеет место

Предложение 2. Для того, чтобы матрица $A \in \Phi^*$ была обратимой в алгебре Φ^* , необходимо выполнение условия

$$\alpha_{\Phi^*}(A) = \inf_{(n,z) \in N \times D} \left| \sum_k a_{nk} z^k \right| > 0. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть матрица A обратима в алгебре Φ^* . Тогда по теореме 3 последовательность $x = \tau^{-1}(A)$ является обратимой в алгебре $m(W_+)$. В силу равенств (14) и (16), получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha_{\Phi^*}(A) &= \inf_{(n,z) \in N \times D} \left| \sum_k x_{nk} z^k \right| = \\ &= \inf_{(n,z) \in N \times D} \left| (x_n)^{\wedge}(M_z) \right| = \sigma_{W_+}(x), \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_{\Phi^*}(A) = \sigma_{W_+}(x) \quad (18)$$

для всех $A \in \Phi^*$, где $x = \tau^{-1}(A)$. Так как $\sigma_{W_+}(x) > 0$ по предложению 1, то для обратимости матрицы A в алгебре Φ^* необходимо выполнение условия (17).

При $z = 0$ и $z = 1$ предложение 2 известно (см. [2]).

Пусть теперь матрица $A \in \Pi^*$ и удовлетворяет условию (17). Тогда A обратима в алгебре Φ^* . Действительно, справедлива

Теорема 4. Для того, чтобы матрица $A \in \Pi^*$ была обратимой в алгебре Π^* , необходимо и достаточно выполнение условия (17).

Доказательство. Необходимость вытекает из предложения 2, ибо $\Pi^* \subset \Phi^*$.

Достаточность. Пусть матрица $A \in \Pi^*$ и удовлетворяет условию (17). По следствию 1 алгебры $s(W_+)$ и Π^* изометрически изоморфны, причем матрице A соответствует последовательность $x = (\tau_0)^{-1}(A)$, элементы x_n которой удовлетворяют условию (15) для всех n . Поскольку $\Pi^* \subset \Phi^*$ и $(\tau_0)^{-1}(A) = \tau^{-1}(A)$, то справедливо равенство (18) для матрицы A . В силу этого, из условия (17) следует выполнение условия (9) при $A = W_+$. Поэтому, по теореме 1, последовательность x обратима в алгебре

$c(W_+)$. Следовательно, A является обратимой матрицей в алгебре Γ^* . Теорема доказана.

Пусть

$$\Phi_0^* = \{A \in \Phi^* : a_{nk} = a_n a_k, \{a_n\} \in m(\mathbb{C}), \{a_k\} \in W_+\}.$$

При помощи теорем 2 и 3 получаем следующий результат.

Теорема 5. *Для того, чтобы матрица $A \in \Phi_0^*$ была обратимой в алгебре Φ^* , необходимо и достаточно выполнение условий (12) и*

$$\sum_k a_k z^k \neq 0 \quad \text{для всех } z \in D. \quad (19)$$

Доказательство. **Необходимость.** Пусть матрица $A \in \Phi_0^*$ обратима в алгебре Φ^* . Тогда по предложению 2, необходимо выполнение условия (17), которое в данном случае равносильно условиям (12) и (19).

Достаточность. Пусть условия (12) и (19) выполнены. В силу теоремы 3, алгебры $m(W_+)$ и Φ^* изометрически изоморфны. Поэтому, из обратимости последовательности $x = \tau^{-1}(A)$ в алгебре $m(W_+)$ следует и обратимость матрицы A в алгебре Φ^* . Поскольку в данном случае последовательность x принадлежит $m_0(W_+)$, то по теореме 2, выполнение условий (12) и (19) влечет за собой обратимость последовательности x в алгебре $m(W_+)$. В силу этого, матрица A обратима в алгебре Φ^* . Теорема доказана.

Теорема 5 известна в случае, когда $a_k = \mu^k$ с $|\mu| < 1$ для всех k (см. [2], теорема 4).

Пусть теперь матрица $A \in \Gamma^*$. Тогда выполнено условие (7). Таким образом, в каждой точке $z \in D$ ряд $\sum_k a_k z^k$ сходится.

Пусть

$$g_z(A) = \sum_k a_k z^k.$$

Поскольку $g_z(U) \equiv 1$ на D и, кроме этого,

$$g_z(\lambda A + \mu B) = \sum_k (\lambda a_k + \mu b_k) z^k = \lambda g_z(A) + \mu g_z(B)$$

и

$$g_z(A * B) = \sum_k \left(\sum_{v=0}^k a_v b_{k-v} \right) z^k = g_z(A) g_z(B)$$

для любых матриц A и B из алгебры Γ^* при $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, то в каждой фиксированной точке $z \in D$ функционал g_z является нетривиальным линейным мультипликативным функционалом на Γ^* . Поэтому ядро функционала g_z при $z \in D$ образует максимальный идеал алгебры Γ^* . Итак, верно

Предложение 3. *Множество*

$$M_z = \{A \in \Gamma^* : g_z(A) = 0\},$$

где z — некоторая фиксированная точка в D , образует максимальный идеал алгебры Γ^* .

Предложение 3 известно при $z = 1$ (см. [2], теорема 6).

Из предложения 3 непосредственно вытекает

Следствие 3. *Мультипликативные матрицы не обратимы в алгебре Γ^* .*

Для регулярных матриц следствие 3 известно (см. [6], стр. 89).

З а м е ч а н и е. Кроме выше сказанного, известны следующие утверждения (см. [2]): а) если матрица $A \in \Gamma^*$ имеет обратную матрицу A^{-1} в алгебре Φ^* , то $A^{-1} \in \Gamma^*$; б) конулевые (корегулярные) матрицы имеют только конулевою (соответственно корегулярную) обратную матрицу; в) матрица $A \in \Gamma^*$, для которой $a = 0$ или $a_0 = 0$, не обратима в алгебре Γ^* .

Литература

1. Абель М., Об алгебре ограниченных непрерывных функций со значениями в коммутативной банаховой алгебре с единицей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 52—77.
2. Абель М., Об алгебрах бесконечных матриц с умножением в смысле свертки. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, А (в печати).
3. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
4. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шиллов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца. Москва, 1960.
5. Коган Д. А., О некоторых свойствах свертки бесконечных матриц. Матем. зап. Уральский ун-т, 1965, 5, № 2, 52—58.
6. Коган Д. А., Множество максимальных идеалов для одного нормированного кольца и обобщение теоремы Винера. Тезисы научно-педагогической конференции, Свердловск, 1967, 87—89.
7. Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ. Москва, 1956.
8. Rickart, C. E., General theory of Banach algebras. Princeton, New Jersey—London, 1960.
9. Stafney, J. D., An unbounded inverse property in the algebra of absolutely convergent Fourier series. Proc. Amer. Math. Soc., 1967, 18, № 3, 498—499.
10. Vermes, P., Convolution of summability methods. J. Analyse Math., 1952, 2, 162—177.

Поступило
9 VII 1971

JADADE JA LÕPMATUTE MAATRIKSITE PÕRATAVUS

M. Abel

Resümee

Olgu $m(A)$ kompleksse kommutatiivse ühikuga Banachi algebra A elementide kõigi tõkestatud jadade hulk ning $c(A)$ hulga $m(A)$ alamhulk, mis koosneb kõigest algebras A koonduvatest jadadest. Hulgad $m(A)$ ja $c(A)$ moodustavad kompleksse kommutatiivse ühikuga Banachi algebra, kui nendes hulkades algebralised operatsioonid defineerida liikmeti ning norm seosega (1).

⁹ Числа a и a_0 находятся при помощи условий (3) и (4).

Olgu Φ^* kõigi tingimust (5) rahuldavate maatriksite hulk ning Π^* kõigi tingimusi (3), (4) ja (6) rahuldavate maatriksite hulk. Hulgad Φ^* ja Π^* moodustavad samuti kompleksse kommutatiivse ühikuga Banachi algebra, kui maatriksite liitmine ja skalaariga korrutamine defineerida nagu tavaliselt maatriksite korral, korrutamise võrduse (2) abil ning maatriksi A norm seosega (8).

Käesolevas artiklis lahendatakse jadade pööratavus algebras $c(A)$ ning osaliselt algebras $m(A)$. Näidatakse, et algebrad $m(W_+)$ ja Φ^* , samuti algebrad $c(W_+)$ ja Π^* , on isomeetriliselt isomorfsed, kus W_+ tähistab kõigi tingimust $\sum |a_k| < \infty$ rahuldavate jadade Banachi algebrat (vt. [4]). Tuginedes eespool nimetatud algebrate isomorfsusele, lahendatakse maatriksite pööratavus algebras Π^* ning osaliselt algebras Φ^* .

THE REVERSIBILITY OF SEQUENCES AND INFINITE MATRICES

M. Abel

S u m m a r y

Let $m(A)$ be the set of all bounded sequences of elements of a complex commutative Banach algebra A with unit and $c(A)$ be the subset of $m(A)$ which consists of all convergent sequences in A . If we define the algebraic operations in $m(A)$ and in $c(A)$ "termwise" and norm of sequence x by (1), then the sets $m(A)$ and $c(A)$ form the complex commutative Banach algebras with unit.

Let Φ^* be the set of all the matrices which satisfy the condition (5) and Π^* be the set of all the matrices which satisfy the conditions (3), (5) and (6). If we define the addition and the scalar multiplication of matrices as usual, the multiplication of matrices by (2) and norm by (8), then the sets Φ^* and Π^* form also the complex commutative Banach algebras with unit.

In the present paper the reversibility of sequences in $c(A)$ is solved, but the reversibility of sequences in $m(A)$ is solved partially. It is proved that the algebras $m(W_+)$ and Φ^* , also the algebras $c(W_+)$ and Π^* , are isometrically isomorphic, where by W_+ we denote the Banach algebra of all sequences $\{a_k\}$ with $\sum |a_k| < \infty$ ([4]). Using the above mentioned isomorphisms of algebras, the reversibility of matrices in Π^* is solved, but the reversibility of matrices in Φ^* is solved partially.

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ СУММИРУЕМОСТИ

Т. Сырмус

Кафедра математического анализа

Пусть $A = (a_{nk})$ — нижняя треугольная матрица (т. е. $a_{nk} = 0$ при $k > n$). Данному числовому ряду¹

$$\sum_k u_k \quad (1)$$

с последовательностью $x = \{x_k\}$ его частичных сумм

$$x_k = \sum_{i=0}^k u_i \quad (2)$$

поставим в соответствие последовательность $Ax = \{A_n\}$, где

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k. \quad (3)$$

Ряд (1) с частичными суммами (2) называют A -суммируемым методом A к сумме S_A , если $\lim A_n = S_A$.

Пусть m , c , cn , a и an — классы соответственно ограниченных, сходящихся, сходящихся к нулю, абсолютно и абсолютно к нулю сходящихся последовательностей. Через α и β будем обозначать любые из вышеперечисленных классов последовательностей.

Тауберовыми называются теоремы, в которых из предположения $\{A_n\} \in \alpha$ выводят заключение $x \in \beta$, если при этом на члены ряда (1) накладывается дополнительное условие, так называемое тауберово условие.

Пусть B есть другой метод суммирования, также определенный нижней треугольной матрицей. В настоящей статье рассматриваются такие обобщения тауберовых теорем (коротко T -теорем), в которых из предположения $\{A_n\} \in \alpha$ выносится заключение $\{B_n\} \in \beta$ при соответствующем тауберовом условии (коротко T -условии) и различных комбинациях классов α и β . В § 1 нашей статьи вводятся обозначения и доказываются основные леммы. В § 2 рассматриваются T -теоремы с необходимыми и достаточными T -условиями. Полученные теоремы ис-

¹ Всюду, где индексы суммирования или свободные индексы не указаны, они пробегают все значения $0, 1, 2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

пользуются в § 3 для получения T -теорем с достаточными T -условиями.

§ 1. Обозначения и основные леммы

1.1. Некоторые понятия и обозначения. Говоря о T -теоремах с достаточными условиями, если T -условие достаточно для вынесения заключения о ряде (1) в T -теореме. Например, классическая первая теорема Таубера [9] с T -условием

$$u_n = o(n^{-1}) \quad (4)$$

или ее обобщение, доказанное Харди и Литтлвудом [7, 8], с T -условием

$$u_n = O(n^{-1}). \quad (5)$$

Тауберову теорему называют *теоремой с точными T -условиями*, если это условие необходимо и достаточно для вынесения заключения о ряде (1) в T -теореме. Примером T -теоремы с точными условиями может послужить классическая вторая теорема Таубера ([6], теорема 89), в которой точное T -условие есть условие Кронекера—Коши

$$\sum_{k=0}^n ku_k = o(n+1). \quad (6)$$

Тауберовы теоремы с условиями вида (4) и им аналогичными называются *T -теоремами с o -условиями*, а T -теоремы с условиями вида (5) или аналогичными — T -теоремы с O -условиями.

Для метода A обозначим символом αA следующее множество последовательностей: $\alpha A = \{x : Ax \in \alpha\}$, где α — любой из вышеперечисленных классов последовательностей. При этом ряд (1) с частичными суммами (2) назовем αA -суммируемым к сумме S_A , если $x \in \alpha A$, т. е. $\{A_n\} \in \alpha$ и $\lim A_n = S_A$. Если $\{A_n\} \in m$, то назовем ряд (1) A -ограниченным. Мы будем говорить о T -теореме типа $(\alpha A, \beta B)$, если в ней из предположения $x \in \alpha A$ следует заключение $x \in \beta B$. Если при этом $B = E$, где E — единичная матрица, то будем говорить о T -теоремах типа $(\alpha A, \beta)$.

В настоящей статье рассматриваются T -теоремы как типа $(\alpha A, \beta B)$, так и типа $(\alpha A, \beta)$ с o - и O -условиями относительно членов ряда (1). Некоторые из T -теорем типа $(\alpha A, \beta B)$ имеются у Харди ([6], теоремы 63 и 65) и Литтлвуда ([6], теорема 32). Тауберовы теоремы типа $(\alpha A, \alpha B)$ при $\alpha = c, a, an$ с o -условиями, выраженными через разности ΔB_n , имеются у Реймерса [5]. Наиболее общие T -теоремы с точными условиями содержатся в работе Кангро [1].

Для треугольной матрицы $A = (a_{nk})$ введем обозначения:

$$\alpha_k = \sum_{i=0}^k a_{ki}, \quad (7)$$

$$a_{ki} = \sum_{j=0}^i a_{kj} \quad (i = 0, 1, \dots, k), \quad (8)$$

причем

$$\alpha_{kk} = \alpha_k, \quad (9)$$

$$\mathfrak{A}_{-1}(u) = 0, \quad \mathfrak{A}_{k-1}(u) = \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki} u_{i+1} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Ввиду формул (8) при этом имеем

$$\mathfrak{A}_{-1}(u) = 0, \quad \mathfrak{A}_{k-1}(u) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^i a_{kj} \right) u_{i+1} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Аналогичные обозначения используем и для треугольной матрицы $B = (b_{nk})$.

Для метода $A = (a_{nk})$, удовлетворяющего условию

$$\inf |\alpha_n| > 0, \quad (12)$$

и любого ряда (1) с последовательностью частичных сумм (2) справедливо равенство:

$$x_n = [A_n + \mathfrak{A}_{n-1}(u)] \frac{1}{\alpha_n}, \quad (13)$$

которое без трудностей получается из суммы A_n через преобразование Абеля.

Пусть, далее,

$$D_n^{AB}(u) = \sum_{h=0}^n \frac{b_{nh}}{\alpha_h} \mathfrak{A}_{h-1}(u) \quad (14)$$

при $n = 1, 2, \dots$, а

$$D_0^{AB}(u) = 0. \quad (15)$$

При помощи метода $B = (b_{nk})$ из (13) получим

$$B_n = \sum_{h=0}^n \frac{b_{nh}}{\alpha_h} A_h + D_n^{AB}(u), \quad (16)$$

где $n = 1, 2, \dots$, а $A_0 = \alpha_0 x_0$ и $B_0 = b_{00} x_0$.

Введем следующие условия:

$$\sum_{h=0}^n |a_{nh}| = O(1); \quad (a)$$

$$\lim \alpha_n = a; \quad (b)$$

$$\lim_n a_{nh} = a_h; \quad (c)$$

$$\lim \sum_{h=0}^n |a_{nh} - a_h| = 0. \quad (d)$$

Пусть (α, β) означает класс таких методов $A = (a_{nk})$, которые переводят все последовательности из класса α в класс β .
Замечание 1 (см. [3, 6]). Перечень точных условий для того, чтобы $A \in (\alpha, \beta)$ следующий:

- $A \in (\alpha, m)$ при $\alpha = m, c$ или cn : (a);
- $A \in (m, c)$: (a), (c) и (d);
- $A \in (m, cn)$: (c) и (d) при $a_k = 0$;
- $A \in (c, c)$: (a), (b) и (c);
- $A \in (c, cn)$: (a) и (b), (c) при $a = a_k = 0$;
- $A \in (cn, cn)$: (a) и (c) при $a_k = 0$;
- $A \in (c, c)$ регулярно: (a) и (b), (c) при $a = 1$; $a_k = 0$.

При этом, если

1° $A \in (\alpha, c)$ и $\alpha = m, cn$ или an , то $\lim A_n = \sum a_k x_k$, где $x \in \alpha$;

2° $A \in (\alpha, c)$ и $\alpha = c$ или a , то

$$\lim A_n = (a - \sum_k a_k) S_E + \sum_k a_k x_k,$$

где $S_E = \lim x_k$ и $x \in \alpha$.

Ниже воспользуемся следующими обозначениями для двух групп из всевозможных классов (α, β) матричных методов:

$\Gamma_1 = \{(m, c); (m, cn); (cn, cn); (\alpha, m)\}$ при $\alpha = m, c, cn$

и

$\Gamma_2 = \{(c, c); (c, cn)\}$.

При этом запись $A \in (\alpha, \beta) \in \Gamma_i$ ($i = 1, 2$) будет означать, что A принадлежит любому фиксированному классу из группы Γ_i ($i = 1, 2$).

1.2. Некоторые леммы. При заданном методе $A = (a_{nk})$ и последовательности $\{\gamma_k\}$ пусть метод $\mathcal{C} = (\gamma_k a_{nk})$.
Ниже мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. а) Если последовательность $\{\gamma_k\}$ удовлетворяет условиям

$$0 \neq \gamma_k = O(1), \quad (17)$$

а метод $A \in (\alpha, \beta) \in \Gamma_1$, то и метод $\mathcal{C} \in (\alpha, \beta)$.

б) Если последовательность $\{\gamma_k\}$ удовлетворяет условиям

$$\lim \gamma_k = \gamma, \quad 0 < |\gamma| < \infty, \quad (18)$$

а метод $A \in (\alpha, \beta) \in \Gamma_2$, то и метод $\mathcal{C} \in (\alpha, \beta)$.

в) Если для последовательности $\gamma_k \neq 0$ существует

$$\lim \gamma_k = 1, \quad (19)$$

а метод A регулярен, то и метод \mathcal{C} регулярен.

Доказательство. Пусть, например, $A \in (c, cn)$ и $\{\gamma_k\}$ удовлетворяет условиям (18). Ввиду замечания 1 метод A удовлетворяет условиям (a) и (b), (c) при $a = a_k = 0$. Для метода \mathcal{C} выполнимость условия (a) проверяется без трудностей. Также непосредственно видна выполнимость условия (c), так как $\lim a_{nk} \gamma_k = \gamma_k a_k = 0$. Ввиду того, что $A \in (c, cn)$ и $\{\gamma_k\} \in c$ на основании условия (18), то справедливо равенство

$$\lim \sum_{k=0}^n a_{nk} \gamma_k = 0.$$

Поэтому метод \mathfrak{C} удовлетворяет этим же условиям, что и метод A . Из замечания 1 теперь следует, что $\mathfrak{C} \in (c, cn)$.

Аналогично доказываются все остальные случаи леммы.

Совершенно очевидна следующая

Лемма 2. Пусть для метода $A = (a_{nk})$

$$a_n = a \neq 0 \quad (20)$$

и метод $B = (b_{nk}) \in (\alpha, \beta)$ при любых α и β . Тогда метод $\mathfrak{L} = (b_{nk}/a_k) \in (\alpha, \beta)$.

Для классов $(\alpha, \beta) \in \Gamma_i$ ($i = 1, 2$) лемма 2 вытекает из леммы 1.

Лемма 3. а) Пусть метод $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условиям (12) и

$$\sup |a_k| < \infty. \quad (21)$$

Тогда метод $\mathfrak{L}' = (\delta_{nk}/a_k) \in (\alpha, \alpha)$ при $\alpha = m, cn$.

б) Пусть метод $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условиям (12) и

$$\lim |a_k| = \infty. \quad (22)$$

Тогда метод $\mathfrak{L}' \in (m, cn)$.

в) Пусть метод $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условиям (12) и (б). Тогда метод $\mathfrak{L}' \in (\alpha, \alpha)$ при $\alpha = c, cn$.

Доказательство. а) Метод $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условию

$$a_k^{-1} = O(1) \quad (23)$$

ввиду условий (12) и (21). Так как преобразование $y = \mathfrak{L}'x$ определяет последовательность $y_n = x_n/a_n$, то в случае любой последовательности $x \in m$ из условия (23) следует, что $y \in m$ или $y \in cn$, если $x \in cn$.

Аналогично доказываются остальные случаи леммы.

§ 2. Тауберовы теоремы с точными условиями

Рассмотрим в этом параграфе T -теоремы типа $(\alpha A, \beta B)$ и $(\alpha A, \beta)$ с точными T -условиями.

2.1. Тауберовы теоремы типа $(\alpha A, \beta B)$. Наиболее общей из T -теорем указанного типа при любом классе (α, β) является

Теорема 1. Пусть методы $A = (a_{nk})$ и $B = (b_{nk})$ такие, что для $\{a_k\}$ выполнено условие (12), а

$$\mathfrak{L} = \left(\frac{b_{nk}}{a_k} \right) \in (\alpha, \beta). \quad (24)$$

Из $x \in \alpha A$ следует $x \in \beta B$ точно тогда, когда

$$D_n^{AB}(u) \in \beta. \quad (25)$$

² Через δ_{nk} обозначен символ Кронекера.

Доказательство. Поскольку метод A удовлетворяет условию (12), то для любой последовательности x справедливо равенство (16). Из последнего ввиду условия (24) и вытекает необходимость и достаточность условия (25) для того, чтобы из $x \in \alpha A$ следовало $x \in \beta B$. Теорема доказана.

Для методов $A = (a_{nh})$, удовлетворяющих условию (20), точное условие в теореме 1 естественно упрощается ввиду леммы 2. Это показывает следующее вполне очевидное

Следствие 1. Пусть метод $A = (a_{nh})$ удовлетворяет условию (20), а

$$B = (b_{nh}) \in (\alpha, \beta). \quad (26)$$

Из $x \in \alpha A$ следует $x \in \beta B$ точно тогда, когда

$$\sum_{k=0}^n b_{nk} \mathfrak{A}_{k-1}(u) \in \beta. \quad (27)$$

Тауберовы условия (25) и (27) в теореме 1 и следствии 1 являются O -условиями, если $\beta = m$ и o -условиями, если $\beta = c$ или cn . В последнем случае T -условия (25) и (27) принимают вид

$$\exists \lim D_n^{AB}(u) = s' \quad (28)$$

или соответственно

$$\exists \lim \sum_{k=0}^n b_{nk} \mathfrak{A}_{k-1}(u) = s''. \quad (29)$$

Замечание 2. а) При $\beta = cn$ тауберовы условия (25) и (27) в теореме 1 или следствии 1 обращаются в o -условия вида

$$D_n^{AB}(u) = o(1) \quad (30)$$

или соответственно

$$\sum_{k=0}^n b_{nk} \mathfrak{A}_{k-1}(u) = o(1). \quad (31)$$

б) При $\beta = c$ Тауберовы условия (25) и (27) в теореме 1 или следствии 1 обращаются в o -условия (28) или соответственно (29), где постоянные s' или s'' принимают значения

$$s' = S_B - (\beta' - \sum_k \beta'_k) S_A - \sum_k \beta'_k A_k \quad (32)$$

или соответственно

$$s'' = S_B - [(b - \sum_k b_k) S_A + \sum_k b_k A_k] \frac{1}{a} \quad (33)$$

в случае T -теорем типа $(\alpha A, cB)$ с $\alpha = c, cn, a$ и

$$s' = S_B - \sum_k \beta'_k A_k \quad (34)$$

или соответственно

$$s'' = S_B - \frac{1}{a} \sum_k b_k A_k \quad (34')$$

в случае T -теорем типа $(\alpha A, cB)$ с $\alpha = m, cn$ или an . При этом $\lim A_n = S_A \neq \pm\infty, \lim B_n = S_B \neq \pm\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_{nk}/a_k = \beta'_k$

и

$$\lim \sum_{k=0}^n b_{nk} a_k^{-1} = \beta',$$

а b_k и b определены для метода B равенствами (с) и (b).

Действительно, если часть а) замечания 2 не требует пояснений, то по поводу части б) достаточно отметить следующее. Постоянные s' и s'' легко подсчитываются из равенства (16), если перейти в нем к пределу при $n \rightarrow \infty$, учесть существование конечных пределов $S_A, S_B, \beta'_k, b_k, \beta', b$ и заключения 1° и 2° к замечанию 1.

Следствие 2. Пусть метод $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условиям (12) и (21), а метод

$$B = (b_{nk}) \in (\alpha, \beta) \in \Gamma_1. \quad (35)$$

Из $x \in \alpha A$ следует $x \in \beta B$ точно тогда, когда выполнено условие (25).

Доказательство. Последовательность $\gamma_k = 1/a_k$ удовлетворяет условиям (17), так как предположено (12) и (21). Поэтому и ввиду условия (35) из части а) леммы 1 следует, что и $\mathfrak{L} = (b_{nk}/a_k) \in (\alpha, \beta) \in \Gamma_1$. Справедливость следствия 2 теперь устанавливает теорема 1, применимая при любой паре (α, β) .

Следствие 3. Пусть метод $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условию (21) и существует

$$\lim a_k = a \neq 0, \quad (36)$$

а метод

$$B = (b_{nk}) \in (\alpha, \beta) \in \Gamma_2. \quad (37)$$

Из $x \in \alpha A$ следует $x \in \beta B$ точно тогда, когда выполнено условие (25).

Доказательство. Последовательность $\{\gamma_k\} = \{1/a_k\}$ удовлетворяет условиям (18), так как для $\{a_k\}$ выполнено (21) и (36). Поэтому и ввиду (37) из части б) леммы 1 следует, что и метод $\mathfrak{L} = (b_{nk}/a_k) \in (\alpha, \beta) \in \Gamma_2$. Утверждение следствия следует теперь из теоремы 1, справедливой для любой пары (α, β) .

Следствие 4. Пусть методы $A = (a_{nk})$ и $B = (b_{nk})$ регулярны и для A выполняется условие (12). Из $x \in cA$ следует $x \in cB$ точно тогда, когда выполняется условие (30).

Доказательство. Последовательность $\{\gamma_k\} = \{1/a_k\}$ удовлетворяет условию (19) из-за условия (12) и регулярности метода A . Поэтому и ввиду регулярности метода B из части в) леммы 1 следует, что метод $\mathfrak{L} = (b_{nk}/a_k)$ регулярен. Из теоремы 1 теперь следует, что условие (25) при $\beta = c$ необходимо

и достаточно для того, чтобы из $x \in cA$ следовало $x \in cB$. Но так как \mathfrak{Q} регулярен, то

$$\beta'_k = \lim_n \frac{b_{nk}}{\alpha_k} = 0,$$

$$\beta' = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{b_{nk}}{\alpha_k} = 1$$

и условие (25) обращается в (30). Это вытекает из части б) замечания 2.

2.2. Тауберовы теоремы типа $(\alpha A, \beta)$. В этом разделе применим предыдущие результаты для получения T -теорем типа $(\alpha A, \beta)$. При этом в полученных T -теоремах типа $(\alpha A, \beta B)$ следует считать $B = E$. Тогда метод $\mathfrak{Q} = (b_{nk}/\alpha_k)$ переходит в метод $\mathfrak{Q}' = (\delta_{nk}/\alpha_k)$, а $B_n = E_n = x_n$.

Теорема 2. Из $x \in \alpha A$ следует $x \in \beta$ для метода $A = (a_{nk})$, удовлетворяющего

а) условиям (12) и (21) при $\alpha = \beta = t$ или условию (12) при $\alpha = \beta = sp$, точно тогда, когда выполнено условие

$$\mathfrak{A}_k(u) = O(1) \quad (38)$$

или соответственно

$$\mathfrak{A}_k(u) = o(1); \quad (39)$$

б) условиям (12) и (22) при $\alpha = t$ и $\beta = sp$ или $\alpha = t$ и $\beta = c$ точно тогда, когда

$$\mathfrak{A}_{k-1}(u) = o(\alpha_k) \quad (40)$$

или соответственно

$$\exists \lim \frac{\mathfrak{A}_{k-1}(u)}{\alpha_k} = s'; \quad (41)$$

в) условиям (12) и б) при $\alpha = \beta = c$ точно тогда, когда

$$\exists \lim \mathfrak{A}_k(u) = t. \quad (42)$$

Доказательство. а) На основании части а) леммы 3 из условий (12) и (21) следует, что метод $\mathfrak{Q}' \in (\alpha, \alpha)$ при $\alpha = t$ или sp . Теперь для указанных классов (α, α) применима теорема 1, в которой ввиду $b_{nk} = \delta_{nk}$

$$\sum_{k=0}^n \frac{\delta_{nk}}{\alpha_k} \mathfrak{A}_{k-1}(u) = \frac{\mathfrak{A}_{n-1}}{\alpha_n}. \quad (43)$$

Поэтому необходимое и достаточное условие (25) из теоремы 1 обращается в условие

$$\frac{\mathfrak{A}_{n-1}}{\alpha_n} \in \alpha.$$

Последнее ввиду условий (12) и (21) выполнено точно тогда, когда выполнено (38) для случая $\alpha = t$ или (39) для случая $\alpha = sp$.

Аналогично на основании частей б) и в) леммы 3 доказываются при помощи теоремы 1 остальные части теоремы 2.

Замечание 3. В теореме 2 постоянные s' и t соответственно в условиях (41) и (42) имеют значения $s' = S_E = \lim x_n$, $t = aS_E - S_A$.

Без доказательства приведем следующие два следствия теоремы 2, из которых следствие 2 совпадает с теоремой 2.2.1 в работе Реймерса [5].

Следствие 1. Пусть метод $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условию (20). Из $x \in aA$ следует $x \in a$

а) в случае $a = t$ или sn точно тогда, когда выполняется условие (38) или соответственно условие (39);

б) в случае $a = c$ точно тогда, когда выполняется условие (42).

Следствие 2. Пусть метод $A = (a_{nk})$ регулярен и удовлетворяет условию (12). Из $x \in aA$ следует $x \in a$ для $a = c$ точно тогда, когда выполняется условие (39).

§ 3. Тауберовы теоремы с достаточными условиями

В этом параграфе рассмотрим некоторые T -теоремы с T -условиями, выраженными через члены ряда (1). Из них теорема 4 есть аналог первой теоремы Таубера, которая вытекает из теоремы 4 как частный случай.

3.1. Два тауберовых условия. Ниже нам понадобятся следующие T -условия для ряда (1), т. е. последовательности (2):

$$a_{nk}u_{k+1} = O(a_{nk}c_k) \quad (44)$$

или

$$a_{nk}u_{k+1} = o(a_{nk}c_k), \quad (45)$$

которые должны будут выполняться равномерно³ относительно n в процессе $k \rightarrow \infty$ и в которых $\{c_k\}$ — некоторая последовательность отличных от нуля чисел.

Общий элемент многих известных треугольных методов суммирования $A = (a_{nk})$ имеет вид

$$a_{nk} = \frac{a'_{n-k}}{A^*_n} \quad (46)$$

или

$$a_{nk} = \frac{a''_k}{A^*_n}, \quad (47)$$

где a'_k , a''_k и A^*_n — некоторые числовые последовательности. В качестве примеров приведем следующие методы:

³ Это значит: для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon) > 0$, что при $k > N(\varepsilon)$

$$|a_{nk}| |u_{k+1}| < \varepsilon |a_{nk}| |c_k|$$

для всех $n \geq k$.

Аналогично понимается равномерная ограниченность.

- 1) $(C, 1) = \left(\frac{1}{n+1} \right)$ при $a''_k = 1$ и $A^*_n = n+1$;
- 2) $(C, \alpha) = \left(\frac{A_n^\alpha}{A_n^\alpha} \right)$ при $a'_{n-k} = A_{n-k}^\alpha$ и $A^*_n = A_n^\alpha$;
- 3) $(R, p_k) = \left(\frac{p_k}{P_n} \right)$ при $a''_k = p_k$ и $A^*_n = P_n = \sum_{k=0}^n p_k$;
- 4) $(WN, p_k) = \left(\frac{p_{n-k}}{P_n} \right)$ при $a'_{n-k} = p_{n-k}$ и $A^*_n = P_n$.

Для всех таких методов типа (46) или (47) T -условия (44) или (45) приводятся к виду

$$\left(\sum_{j=0}^k a'_{n-j} \right) u_{k+1} = O(a'_{n-k} c_k) \quad (48)$$

и

$$\left(\sum_{j=0}^k a'_{n-j} \right) u_{k+1} = o(a'_{n-k} c_k) \quad (49)$$

или соответственно

$$\left(\sum_{j=0}^k a''_j \right) u_{k+1} = O(a''_k c_k)$$

и

$$\left(\sum_{j=0}^k a''_j \right) u_{k+1} = o(a''_k c_k),$$

которые, например, для метода $(C, 1)$ или (R, p_k) в случае последовательности $c_k = 1$ обращаются в эквивалентные общеизвестным T -условиям

$$k u_k = O(1) \quad \text{и} \quad k u_k = o(1)$$

или соответственно

$$P_k u_k = O(p_k) \quad \text{и} \quad P_k u_k = o(p_k)$$

из первой теоремы Таубера или ее аналогов.

3.2. Две тауберовы теоремы с достаточными условиями. Пусть ниже последовательность отличных от нуля чисел $\{c_k\}$ такая, что для метода $A = (a_{nk})$, удовлетворяющего условию (12), и метода $B = (b_{nk})$ выполняется условие

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \left| \frac{b_{n,k+1}}{\alpha_{k+1}} a_{k+1,i} |c_i| \right| = O(1) \quad (50)$$

или, что то же,

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \left| \frac{b_{nk}}{\alpha_k} a_{ki} |c_i| \right| = O(1). \quad (51)$$

Теорема 3. Пусть методы $A = (a_{nk})$, $B = (b_{nk})$ и последовательность $\{c_k\}$ такие, что для $\{a_k\}$ выполнено условие (12), для $\{c_k\}$ — условие (51), а метод $\mathfrak{Q} = (b_{nk}/\alpha_k) \in (\alpha, m)$ при $\alpha = m, c, sp, a$, или ap . Если последовательность $x \in \alpha A$ и удовлетворяет условию (44) равномерно по n , то $x \in mB$.

Доказательство. Ввиду условия (44) существует постоянная $K_1 > 0$ такая, что

$$|a_{ki}u_{i+1}| \leq K_1 |a_{ki}| |c_i|$$

для всех $k \geq i$. Суммируя полученные неравенства при $i = 0, 1, \dots, k-1$, получим оценку

$$|\mathfrak{A}_{k-1}(u)| \leq K_1 \sum_{i=0}^{k-1} |a_{ki}| |c_i|,$$

из которой ввиду условий (51) и (14) следует, что

$$D_n^{AB}(u) = O(1). \quad (52)$$

Так как $\mathfrak{Q} \in (a, t)$ и установлено (52), то применима теорема 1, которая допускает нужное нам заключение: $x \in tB$.

Из доказанной теоремы вытекают следующие следствия, второе из которых приведем без доказательства.

Следствие 1. Пусть методы $A = (a_{nk})$, $B = (b_{nk})$ и последовательность $\{c_k\}$ такие, что для $\{a_k\}$ выполняются условия (12) и (21), для $\{c_k\}$ — условие (50), а метод $B \in (a, t)$ при $a = t, c$ или *сп.* Если последовательность $x \in aA$ и удовлетворяет условию (44) равномерно по n , то $x \in tB$.

Доказательство. Отметим, что последовательность $\{1/a_k\}$ удовлетворяет условиям (17) ввиду условий (12) и (21). Поэтому из части а) леммы 1 следует, что $\mathfrak{Q} = (b_{nk}/a_k) \in (a, t)$, так как $B \in (a, t)$. Утверждение $x \in tB$ теперь следует из теоремы 3, если положить, что $x \in aA$.

Следствие 2. Пусть метод $B = (b_{nk}) \in (a, t)$ при $a = t, c, \text{сп.}$ а или *ап.* метод $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условию (20), а последовательность $\{c_k\}$ — условию (50) при $a_k = a$. Если последовательность $x \in aA$ и удовлетворяет условию (44) равномерно по n , то $x \in tB$.

Следующая теорема показывает, что для T -теорем типа (aA, cB) достаточным оказывается условие (45).

Теорема 4. Пусть методы $A = (a_{nk})$, $B = (b_{nk})$ и последовательность $\{c_k\}$ такие, что для A и B выполняется условие (с) при $a_k = b_k = 0$, для $\{c_k\}$ — условие (50), для $\{a_k\}$ выполняются условия (12) и (21), а метод $\mathfrak{Q} = (b_{nk}/a_k) \in (a, c)$ при $a = t, c, \text{сп.}$ а или *ап.* Если последовательность $x \in aA$ и удовлетворяет условию (45) равномерно по n , то $x \in cB$.

Доказательство. Ввиду условия (45) для произвольного $\varepsilon > 0$ подберем номер $N_1 = N_1(\varepsilon) > 0$ так, чтобы выполнялись условия

$$|a_{ki}| |u_{i+1}| < \frac{\varepsilon}{M} |a_{ki}| |c_i| \quad (53)$$

равномерно для всех $k \geq i > N_1$ (M определим ниже). При таких N_1 и $k > N_1$ можем записать равенство

$$\mathfrak{A}_{k-1}(u) = \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki} u_{i+1} = \sum_{i=0}^{N_1} a_{ki} u_{i+1} + \sum_{i=N_1+1}^{k-1} a_{ki} u_{i+1}. \quad (54)$$

Из условия (с) при $a_i = 0$ следует, что $\alpha_{ki} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) равномерно относительно $i \leq N_1$. Поэтому для ε найдется такое $N_2 > N_1$, что при $k > N_2$ и обозначении

$$\sum_{i=0}^{N_1} |u_{i+1}| = P$$

верна оценка

$$\sum_{i=0}^{N_1} |\alpha_{ki}| |u_{i+1}| < \frac{\varepsilon}{M} P.$$

Ввиду (53) теперь имеет место оценка для $k > N_2$:

$$\left| \sum_{i=N_{r+1}}^{k-1} \alpha_{ki} u_{i+1} \right| < \frac{\varepsilon}{M} \sum_{i=N_{r+1}}^{k-1} |\alpha_{ki}| |c_i|.$$

На основании равенства (54) с учетом последних двух оценок теперь следует, что при $k > N_2$ имеет место неравенство

$$|\mathfrak{A}_{k-1}(u)| < \frac{\varepsilon}{M} \left(P + \sum_{i=N_{r+1}}^{k-1} |\alpha_{ki}| |c_i| \right). \quad (55)$$

Зафиксировав выбранное N_2 , для $n > N_2$ получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \frac{b_{nk}}{\alpha_k} \mathfrak{A}_{k-1}(u) \right| &< \sum_{k=0}^{N_2} \left| \frac{b_{nk}}{\alpha_k} \right| |\mathfrak{A}_{k-1}(u)| + \\ &+ \frac{\varepsilon}{M} \sum_{k=N_{r+1}}^n \left| \frac{b_{nk}}{\alpha_k} \right| \left(P + \sum_{i=N_{r+1}}^{k-1} |\alpha_{ki}| |c_i| \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Так как предположены условия (12), (21) и $\lim b_{nk} = 0$, то найдется такое $N_3 > N_2$, при котором для $n > N_3$ будет

$$\left| \frac{b_{nk}}{\alpha_k} \right| < \frac{\varepsilon}{M} \quad (k = 0, 1, \dots, N_2).$$

Вследствие этого

$$\sum_{k=0}^{N_2} \left| \frac{b_{nk}}{\alpha_k} \right| |\mathfrak{A}_{k-1}(u)| < \frac{\varepsilon}{M} Q, \quad (57)$$

где

$$Q = \sum_{k=0}^{N_2} |\mathfrak{A}_{k-1}(u)|.$$

Далее учтем, что ввиду $\mathfrak{A} \in (\alpha, c)$ метод \mathfrak{A} удовлетворяет условию (а). Поэтому существует постоянное $R > 0$ такое, что

$$\sum_{k=N_{r+1}}^n \left| \frac{b_{nk}}{\alpha_k} \right| \leq \frac{R}{P}, \quad (58)$$

а ввиду условия (50) существует $T > 0$ такое, что

$$\sum_{k=N_{r+1}}^n \left| \frac{b_{nk}}{\alpha_k} \right| \sum_{i=N_{r+1}}^{k-1} |\alpha_{ki}| |c_i| \leq T. \quad (59)$$

Поэтому из (56), (57), (58) и (59) вытекает для $n > N_3$ оценка:

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{b_{nk}}{\alpha_k} \mathfrak{R}_{k-1}(u) \right| < \varepsilon,$$

если положить $M = Q + R + T$.

Но это означает, что

$$\sum_{k=0}^n \frac{b_{nk}}{\alpha_k} \mathfrak{R}_{k-1}(u) = o(1).$$

На основании теоремы 1 ввиду $\mathfrak{L} \in (a, c)$ теперь следует, что $x \in cB$, если $x \in aA$. Теорема доказана.

Без доказательства приведем следующие следствия этой теоремы.

Следствие 1. Пусть методы $A = (a_{nk})$, $B = (b_{nk})$ и последовательность $\{c_k\}$ такие, что для A и B выполнено условие (с) при $a_k = b_k = 0$, для $\{c_k\}$ — условие (50), для $\{a_k\}$ — условия (12) и (21), а метод $B \in (c, c)$. Если последовательность x удовлетворяет условию (45), равномерно по n и $x \in cA$, то $x \in cB$.

Следствие без трудностей вытекает из теоремы 4, если учесть часть б) леммы 1 для установления того, что метод $\mathfrak{L} = (b_{nk}/a_k) \in (c, c)$.

Следствие 2. Пусть для метода $A = (a_{nk})$ выполняются условия (12), (21) и (с) при $a_k = 0$, а последовательность $\{c_k\}$ удовлетворяет условию (50). Если для последовательности x выполнено условие (45) равномерно по n и $x \in cA$, то $x \in c$.

Следствие тотчас же вытекает из предыдущего следствия 1 при $B = E$.

Следствие 2 к теореме 4 имеет самостоятельный интерес при $c_k = 1$ в условии (45), устанавливая общую T -теорему типа (cA, c) с достаточным o -условием.

На применение последнего следствия рассмотрим два примера, из которых первый есть частный случай второго.

Пример 1. Для $A = (R, p_k)$ с $p_k \neq 0$, $\lim P_n \neq 0$ и

$$\sum_{k=0}^n |p_k| = O(P_n)$$

условия следствия 2 выполнены. Тауберово условие (45) в данном случае и при $c_k = 1$ есть условие

$$P_k u_{k+1} = o(p_k). \quad (60)$$

Поэтому из следствия 2 получаем, что для последовательности x , удовлетворяющей условию (60), из $x \in c(R, p_k)$ следует $x \in c$. Если при этом взять $p_k = 1$, получается известная T -теорема для метода $(C, 1)$ с T -условием $(k+1)u_k = o(1)$ или равносильным ему условием $ku_k = o(1)$.

Пример 2. Для метода $A = L$ логарифмических средних, определенного матрицей (l_{nk}) , где $l_{00} = 1$, $l_{10} = 0$ и $l_{11} = 1$, а $l_{nk} = [(k+1) \ln n]^{-1}$ ($n \geq 2$), условия следствия 2 выполнены. Тауберово условие (45) в данном случае при $c_k = 1$ есть условие (60), где $p_k = (k+1)^{-1}$.

Так из следствия 2 непосредственно следует, что для последовательности x , удовлетворяющей условию

$$[\sum_{j=0}^k (j+1)^{-1}]u_{k+1} = o\left(\frac{1}{k+1}\right), \quad (61)$$

из $x \in cL$ следует $x \in c$. Ввиду $1 + \dots + (k+1)^{-1} \sim \ln(k+1)$ условие (61) равносильно оценке $u_k = o((k+1)^{-1} \ln^{-1}(k+1))$. Таким образом из следствия 2 вытекает для логарифмических средних T -теорема, доказанная Новиковой [4]. Аналог такой теоремы имеется у Харди, а также у Кауфмана [2].

Литература

1. Кангро Г., О независимости тауберовых условий от порядка суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 122—130.
2. Кауфман Б. Л., О теоремах тауберова типа для логарифмических методов суммирования. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1967, № 1, 57—62.
3. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
4. Новикова Н. С., Теоремы тауберова типа для логарифмических средних. В сб. «Материалы межвузовск. конференции молодых ученых-матем.» Харьков, 1966, 97—101.
5. Рэймерс Э., Теоремы тауберова типа для матричных методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 43—51.
6. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
7. Hardy, G., Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series. Proc. London Math. Soc., (2), 1910, **8**, 301—320.
8. Hardy, G., Littlewood, J. E., Proc. London Math. Soc., (2), 1912, **11**, 411—478.
9. Tauber, A., Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. Monatsh. Math. und Phys., 1897, **8**, 273—277.

Поступило
10 II 1971

TAUBERI TÕUPI TEOREEMID MITMESUGUSTE SUMMEERIMISVIISIDE JAKKS

T. Sõrmus

Resümee

Olgu A normaalne ja B kolmnurkne summeerimismenetlus. Sümbolitega α ja β tähistame suvalisi klasse jadaklassidest m , c , cn , a ja an . Artiklis vaadeldakse $(\alpha A, \beta B)$ -tüüpi T -teoreeme, s.o. Tauberi teoreeme, kus jada αA -summeeruvusest järeldub selle jada βB -summeeruvus. Neid teoreeme vaadeldakse üldiste tarvilike ja piisavate Tauberi tingimustega, kuid vaadeldakse ka efektiivsemaid piisavaid Tauberi tingimusi.

TAUBERSCHE SÄTZE BEZÜGLICH VERSCHIEDENER SUMMIERBARKEITEN

T. Sörmus

Zusammenfassung

Es sei A eine normale, B eine dreieckige Matrixverfahren. Mit den Symbolen a und β bezeichnen wir die Folgenklassen m, c, cn, a und an . In der vorliegenden Arbeit werden Tauber-Sätze (T -Sätze) des Typus $(\alpha A, \beta B)$ untersucht, in denen aus der αA -Limitierbarkeit einer Folge die βB -Limitierbarkeit resultiert. Dabei werden die allgemeinen notwendigen und hinreichenden Tauber-Bedingungen gefunden, aber auch einige effektive hinreichende Tauber-Bedingungen abgeleitet.

Insbesondere werden folgende allgemeine T -Sätze bewiesen.

Satz 1. *Vorgelegt sei zwei Folge-Folge-Matrixverfahren $A = (a_{nk})$ und $B = (b_{nk})$, deren Glieder der Voraussetzungen (12) für $\{a_k\}$ und (24) genügen. Ist die Folge x αA -limitierbar, so ist die Folge x genau dann βB -limitierbar, wenn die Tauber-Bedingung (25) erfüllt wird.*

Satz 4. *Vorgelegt sei zwei Folge-Folge-Matrixverfahren $A = (a_{nk})$ und $B = (b_{nk})$, deren Glieder der Bedingung (c) mit $a_k = b_k = 0$ und die Voraussetzungen (12) und (21) für $\{a_k\}$ erfüllen. Genüge dabei die vorgegebene Folge $\{c_k\}$ der Bedingung (50) und es sei $\mathfrak{L} = (b_{nk}/a_k) \in (a, c)$ für $a = m, c, cn, a$ order an .*

Ist die Folge x αA -limitierbar und erfüllt die Tauber-Bedingung (45) gleichmäßig für n , so ist die Folge x auch cB -limitierbar.

СУММИРУЕМОСТЬ МЕТОДОМ ЧЕЗАРО ФОРМАЛЬНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ РЯДОВ

Н. Веске

Кафедра математического анализа

§ 1. Условия для суммируемости формального произведения рядов

Пусть даны ряды

$$\sum u_n \quad (1)$$

и

$$\sum v_n. \quad (2)$$

Составим по правилу Коши ряд-произведение

$$\sum w_n, \quad (3)$$

где

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k.$$

В теории тригонометрических рядов особенно много применений имеют теоремы о формальном произведении рядов. В таких теоремах, подчиняя ряд (1) некоторому ограничению и оставляя почти произвольным ряд (2), ищутся условия для $\{v_n\}$, чтобы ряды (1) и (3) были одновременно сходящимися или суммируемыми.

1. Общая теорема. Обозначим

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad V_n = \sum_{k=0}^n v_k, \quad W_n = \sum_{k=0}^n w_k.$$

Тогда

$$W_n = \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^k u_v v_{k-v} = \sum_{v=0}^n u_v \sum_{k=v}^n v_{k-v} = \sum_{v=0}^n u_v V_{n-v}.$$

Пусть $A = (a_{nk})$ и $B = (b_{nk})$ — регулярные треугольные матричные преобразования последовательности в последовательность и пусть A , кроме того, нормален. В этом параграфе рассмотрим следующую задачу формального произведения рядов.

Какими должны быть ряд (2) и число V , чтобы при всякой A -суммируемой к нулю последовательности

$$\{u_n\} \quad (4)$$

последовательность

$$\{W_n - VU_n\} \quad (5)$$

была B -суммируемой к нулю. В этом случае говорят, что последовательности $\{W_n\}$ и $V\{U_n\}$ равносуммируемы методом B .

Пусть $A^{-1} = (a'_{nk})$. Тогда, если

$$U'_n = \sum_{k=0}^n a_{nk} u_k,$$

то

$$u_n = \sum_{k=0}^n a'_{nk} U'_k.$$

Применим к последовательности (5) матричное преобразование B , получим последовательность

$$W'_n = \sum_{k=0}^n b_{nk} (W_k - VU_k).$$

Так как

$$W_n - VU_n = \sum_{v=0}^n (V_{n-v} - V) u_v,$$

то

$$\begin{aligned} W'_n &= \sum_{x=0}^n b_{nx} \sum_{v=0}^x (V_{x-v} - V) \sum_{k=0}^v a'_{vk} U'_k = \\ &= \sum_{x=0}^n b_{nx} \sum_{k=0}^x \sum_{v=k}^x (V_{x-v} - V) a'_{vk} U'_k = \\ &= \sum_{k=0}^n d_{nk} U'_k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_{nk} &= \sum_{x=k}^n b_{nx} \sum_{v=k}^x (V_{x-v} - V) a'_{vk} = \\ &= \sum_{v=0}^{n-k} (V_v - V) \sum_{x=k+v}^n b_{nx} a'_{x-v,k}. \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемая задача свелась к матричному преобразованию

$$W'_n = \sum_{k=0}^n d_{nk} U'_k \quad (6)$$

последовательности $\{U'_n\}$ в последовательность $\{W'_n\}$. Теперь мы можем сформулировать поставленную задачу следующим образом.

Каким условиям должны удовлетворять ряд (2) и число V , чтобы преобразование (6) переводило все сходящиеся к нулю последовательности $\{U'_n\}$ в сходящиеся к нулю последовательности $\{W'_n\}$.

Ответ на этот вопрос дает следующая лемма, которая получается применением следствия теоремы Кожима—Шура (см. [4], теорема 4, или [1], замечание 1.2) к преобразованию (6).

Лемма 1. Для того, чтобы последовательность (5) была B -суммируемой к нулю при всякой A -суммируемой к нулю последовательности (4), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{nh} = 0, \quad (7)$$

$$\sum_{k=0}^n |d_{nk}| = O(1). \quad (8)$$

2. Случай, когда A и B — методы Чезаро. Рассмотрим случай, когда $A = (C, \alpha)$ и $B = (C, \beta)$, где $-1 < \alpha \leq \beta$. Тогда, при помощи формул (15.25) и (15.12) из [1], найдем

$$\begin{aligned} d_{nh} &= \frac{A_h^\alpha}{A_n^\beta} \sum_{v=0}^{n-h} (V_v - V) \sum_{x=h+v}^n A_{n-x}^{\beta-1} A_{x-h-v}^{-\alpha-1} = \\ &= \frac{A_h^\alpha}{A_n^\beta} \sum_{v=0}^{n-h} (V_v - V) A_{n-h-v}^{\beta-\alpha-1} = \\ &= \frac{A_h^\alpha}{A_n^\beta} c_{nh}(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$c_{nh}(\alpha, \beta) = \sum_{v=0}^{n-h} V_v A_{n-h-v}^{\beta-\alpha-1} - V A_{n-h}^{\beta-\alpha}. \quad (10)$$

Следовательно, из леммы 1 вытекает

Теорема 1. Для того, чтобы последовательность (5) была (C, β) -суммируемой к нулю при всякой (C, α) -суммируемой к нулю последовательности (4), необходимо и достаточно, чтобы

$$c_{nh}(\alpha, \beta) = o(n^\beta), \quad (11)$$

$$\sum_{k=0}^n |A_k^\alpha c_{nk}(\alpha, \beta)| = O(n^\beta). \quad (12)$$

Выведем теперь достаточные условия для решения нашей задачи. Для этого напомним определение сходимости со скоростью λ или λ -сходимости ([2], стр. 387): пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ —

монотонно возрастающая последовательность положительных чисел. Сходящаяся последовательность $\{V_n\}$ с $V = \lim V_n$ называется λ -сходящейся, если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n (V_n - V) = V^*.$$

Последовательность $\{V_n\}$ называется B^λ -ограниченной значением V , если (см. [3], стр. 114)

$$\lambda_n \left(\sum_{k=0}^n b_{nk} V_k - V \right) = O(1).$$

1) Ввиду (10) имеем

$$c_{nh}(\alpha, \beta) = A_{n-h}^{\beta-\alpha} \left[\sum_{v=0}^{n-h} A_{n-h-v}^{\beta-\alpha-1} \frac{1}{A_{n-h}^{\beta-\alpha}} V_v - V \right].$$

Если последовательность $\{V_n\}$ является $(C, \beta - \alpha)$ -ограниченной со скоростью $\{(n+1)^{\beta-\alpha}\}$ значением V , то условия теоремы 1 выполнены при $\beta \geq \alpha + 1$, ибо условие (11) теоремы 1 выполнено при $\beta > 0$, а условие (12) — при $\beta \geq \alpha + 1$.

2) Пусть

$$\sum |V_n - V| < \infty. \quad (13)$$

Тогда ввиду (9) при $\beta \geq \alpha + 1$ находим

$$|d_{nh}| \leq \frac{A_h^\alpha}{A_n^\beta} A_{n-h}^{\beta-\alpha-1} \sum_{v=0}^{n-h} |V_v - V|,$$

и условия (7) и (8) леммы 1 выполнены.

3) Если

$$\sum_{k=0}^n (V_k - V) = O(1), \quad (14)$$

то условия (11) и (12) теоремы 1 выполнены при $\beta = \alpha + 1$, ибо

$$\sum_{v=0}^{n-h} (V_v - V) = o(n^{\alpha+1}),$$

$$\sum_{k=0}^n |A_k^\alpha \sum_{v=0}^{n-k} (V_v - V)| = O(n^{\alpha+1}).$$

Теорема 2. Последовательность (5) является (C, β) -суммируемой к нулю при всякой (C, α) -суммируемой к нулю последовательности (4), если

а) последовательность $\{V_n\}$ является $(C, \beta - \alpha)$ -ограниченной со скоростью $\{(n+1)^{\beta-\alpha}\}$ значением V при $\beta \geq \alpha + 1$;

или

б) выполнено условие (13) при $\beta \geq \alpha + 1$;

или

в) выполнено условие (14) при $\beta = \alpha + 1$.

Следствие 1. Последовательность (5) является (C, β) -суммируемой к нулю при всякой (C, α) -суммируемой к нулю последовательности (14) при $\beta \geq \alpha + 1$, если

$$\sum n |v_n| < \infty \quad (15)$$

и

$$V = \sum v_n. \quad (16)$$

Доказательство. Если имеет место (15) и (16), то

$$\sum_{n=0}^{\infty} |V_n - V| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |v_n| < \infty.$$

При $\alpha = \beta = 0$ из теоремы 1 и следствия 1 получается следующее

Следствие 2. Если $u_n = o(1)$ и

а) выполнено (13)

или

б) выполнены (15) и (16),

то ряды (3) и $V \sum u_n$ равномерно сходятся, т. е. последовательность (5) сходится к нулю.

3. Случай конкретных α и β . Рассмотрим во что превращаются условия теоремы 1 при некоторых конкретных α и β .

1) Если $\alpha = 0$, то условие (11) можно упростить, ибо

$$\frac{1}{n^\beta} c_{nk}(0, \beta) = \sum_{v=0}^{n-k} V_v A_{n-k-v}^{\beta-1} / A_n^\beta - V A_{n-k}^{\beta-\alpha} / A_n^\beta = o(1)$$

означает (C, β) -суммируемость ряда (2) к сумме V .

2) Если $\alpha = \beta$, то в формуле (11)

$$c_{nk}(\alpha, \alpha) = V_{n-k} - V. \quad (17)$$

Теперь учитывая, что $o[(n+k)^\alpha]$ равносильно $o(n^\alpha)$ при $k \leq n$, из теоремы 1 вытекает

Следствие 3. Для того, чтобы последовательность (5) была (C, α) -суммируемой к нулю при всякой (C, α) -суммируемой к нулю последовательности (4), необходимо и достаточно, чтобы

$$V_n - V = o(n^\alpha),$$

$$\sum_{k=0}^n (n-k+1)^\alpha |V_k - V| = O(n^\alpha).$$

Из (17) видим, что условие (12) означает (C, α) -ограниченность ряда (13). Если последний ряд расходится, то ввиду полной регулярности метода Чезаро при $\alpha \geq 0$ получаем, что (12) не может иметь места. Следовательно, из (12) вытекает (13). Значит, из следствия 3 получаем

Следствие 4. Пусть $\alpha \geq 0$. Для того, чтобы последовательность (5) была (C, α) -суммируемой к нулю при всякой (C, α) -суммируемой к нулю последовательности (4), необходимо и достаточно выполнение условия (13).

3) Если $A = (C, 1)$ и $B = E$, где E — единичный метод суммирования, то в преобразовании (6) при $k < n$ будет

$$d_{nk} = \sum_{v=k}^n (V_{n-v} - V) A_k^1 A_{v-k}^{-2} = (k+1)v_{n-k}$$

и

$$d_{nn} = (n+1)(v_0 - V).$$

Для сходимости последовательности (5) должно выполняться условие (8), принимающее вид

$$\sum_{k=1}^n (n-k+1)|v_k| + (n+1)|v_0 - V| = O(1),$$

для выполнения которого необходимо

$$\begin{aligned} (n+1)|v_0 - V| &= O(1), \\ (n-k+1)|v_k| &= O(1) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

что равносильно условиям

$$v_0 = V, \quad v_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Следовательно, имеет место

Следствие 5. Для того, чтобы последовательность (5) сходилась к нулю при всех $(C, 1)$ -суммируемых к нулю последовательностях (4), необходимо и достаточно выполнение условий (18).

§ 2. Обобщение теоремы Харди

Случай б) следствия 2 Харди обобщил на $(C, 1)$ -суммируемые ряды, заменяя (5) более сложным выражением. Именно Харди ([4], теорема 177) доказывает:

а) Если

$$u_n = o(n+1) \quad (19)$$

и

$$\sum n^2 |v_n| < \infty, \quad (20)$$

то

$$F_n = o(n), \quad (21)$$

где

$$F_n = \sum_{k=0}^n W_k - V \sum_{k=0}^n U_k + V^* U_n, \quad (22)$$

$$V^* = \sum n v_n$$

б) Если также $U_n = o(n+1)$ и, в частности, если $u_n = o(1)$, то

$$\sum_{k=0}^n W_k - V \sum_{k=0}^n U_k = o(n), \quad (23)$$

г. е. последовательность (5) является $(C, 1)$ -суммируемой к нулю.

Отсюда видно, если условие (19) заменить на $u_n = o(1)$, то $U_n = o(n)$ и, следовательно, (5) является $(C, 1)$ -суммируемой, т. е. имеет место (23).

Этот результат Харди можно дальше обобщить на (C, α) -суммируемые ряды, даже рассматривая более краткие выражения. Решим следующую задачу формального произведения рядов.

Пусть имеет место (16). Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы при всякой последовательности

$$u_n = o((n+1)^\nu), \quad \nu \geq 0, \quad (24)$$

было выполнено условие

$$\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha} u_k (V_{n-k} - V) = o(n^\alpha), \quad (25)$$

где $\alpha \geq 0$.

По лемме 1, если имеет место (24), для выполнения равенства (25) необходимо и достаточно, чтобы

$$g_{nk}(\alpha) = o(n^\alpha), \quad (26)$$

$$\sum_{k=0}^n A_k^\nu |g_{nk}(\alpha)| = O(n^\alpha), \quad (27)$$

где

$$g_{nk}(\alpha) = A_{n-k}^\alpha (V_{n-k} - V). \quad (28)$$

Если верно (16), то условие (26) выполнено. Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Если выполнено условие (16), то для того, чтобы равенство (25) имело место при любой (24), необходимо и достаточно выполнение условия (27).*

Найдем при помощи теоремы 3 достаточные условия для выполнения равенства (25). Действительно, так как

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n A_k^\nu |g_{nk}(\alpha)| &\leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\alpha A_n^\nu \sum_{\nu=n-k+1}^{\infty} |v_\nu| = \\ &= \sum_{\nu=1}^n |v_\nu| \sum_{k=n-\nu+1}^n A_{n-k}^\alpha A_k^\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |v_\nu| \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\alpha A_k^\nu \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^n |v_\nu| A_n^\nu A_{\nu-1}^{\alpha+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |v_\nu| A_n^{\alpha+\nu+1}, \end{aligned}$$

то, при выполнении условий

$$\sum_{k=1}^n k^{\alpha+1} |v_k| = O(n^{\alpha-\gamma}) \quad (29)$$

и

$$n^{\gamma+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |v_k| = O(1), \quad (30)$$

получаем, что

$$\sum_{k=0}^n A_k^{\gamma} |g_{nk}(a)| = O(n^{\alpha}),$$

т. е. (27) выполнено. Мы получили

Следствие 6. Пусть выполнены (16) и (24). Для того, чтобы имело место равенство (25), достаточно выполнение условий (29) и (30).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) При $\alpha = \gamma = 0$ выражение (25) приобретает вид

$$\sum_{k=0}^n u_k (V_{n-k} - V) = o(1),$$

т. е. последовательность (5) сходится к нулю. По теореме 3 последнее условие вытекает из (13), которое, в свою очередь, по следствию 6 следует из (15). В итоге мы получили вышеназванную теорему Г. Харди ([4], теорема 175).

2) Если $\alpha = 1$ при $\gamma = 0$, то равенство (25) приобретает вид

$$\sum_{k=0}^n (n - k + 1) u_k (V_{n-k} - V) = o(n). \quad (31)$$

Для того, чтобы при $u_n = o(1)$ условие (31) было выполненным, по следствию 6 достаточно выполнение условий

$$\sum_{k=1}^n k^2 |v_k| = O(n), \quad n \sum_{k=n+1}^{\infty} |v_k| = O(1).$$

Последние можно заменить более строгим условием (15).

3) Если $\alpha = \gamma = 1$, то выражение (25) приобретает вид

$$\sum_{k=0}^n A_{n-k}^1 u_k (V_{n-k} - V) = o(n), \quad (32)$$

для выполнения которого при (19) по следствию 6 достаточно выполнение условий

$$\sum_{k=1}^n k^2 |v_k| = O(1), \quad n^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |v_k| = O(1).$$

Эти два условия можно заменить условием (20). Теперь можем показать, что приведенная в начале параграфа теорема Харди является частным случаем теоремы 3. Действительно, так как

$$\begin{aligned}
F_n &= \sum_{k \neq 0}^n \sum_{v=0}^k u_v V_{k-v} - V \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^k u_v + V^* \sum_{k=0}^n u_k = \\
&= \sum_{v=0}^n u_v \sum_{k=v}^n V_{k-v} - V \sum_{v=0}^n u_v \sum_{k=v}^n 1 + V^* \sum_{k=0}^n u_k = \\
&= \sum_{v=0}^n u_v \left[\sum_{k=0}^{n-v} (n-v-k+1) v_k - (n-v+1) \sum_{k=0}^{\infty} v_k + \sum_{k=0}^{\infty} k v_k \right] = \\
&= \sum_{v=0}^n u_v \left[-(n-v+1) \sum_{k=n-v+1}^{\infty} v_k + \sum_{k=n-v+1}^{\infty} k v_k \right] = \\
&= \sum_{v=0}^n u_v A_{n-v}^1 (V_{n-v} - V) - \sum_{v=0}^n u_v (V_{n-v}^* - V^*),
\end{aligned}$$

то равенство (21) выполняется, если выполнены условия (32) и

$$\sum_{v=0}^n u_v (V_{n-v}^* - V^*) = o(n). \quad (33)$$

Но условие (32), как мы видели, вытекает из условия (20). Покажем, что из условия (20) вытекает также условие (33). Действительно, чтобы равенство (33) имело место при всякой $u_n = o(n+1)$, необходимо и достаточно по теореме 4 из [4] выполнение условия (8) при

$$d_{nk} = A_k^1 \sum_{v=n-k+1}^{\infty} v v_v / A_n^1,$$

так как условие (7), т. е. условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k+1}{n+1} (V_{n-k}^* - V^*) = 0$$

выполнено. Но

$$\begin{aligned}
A_n^1 \sum_{v=0}^n |d_{nv}| &\leq \sum_{v=0}^n A_v^1 \sum_{k=n-v+1}^{\infty} k |v_k| = \\
&= \sum_{k=1}^n k |v_k| \sum_{v=n-k+1}^n A_v^1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} k |v_k| \sum_{v=0}^n A_v^1 = \\
&= \sum_{k=1}^n k |v_k| \frac{2n-k+2}{2} k + \sum_{k=n+1}^{\infty} k |v_k| A_n^2 = \\
&= O(n),
\end{aligned}$$

если выполнено условие (20). Итак, имеем

Следствие 7. Пусть $u_n = o(n+1)$. Для того, чтобы имело место равенство (33), достаточно выполнение условия (20).

Примечание. Покажем, что в теореме Харди 177 из [4] при $u_n = o(1)$ условие (20) можно заменить более простым условием (15). Для этого преобразуем выражение (23):

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n W_k - V \sum_{k=0}^n U_k = \\
& = \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^k u_v V_{k-v} - V \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^k u_v = \\
& = \sum_{v=0}^n u_v \left[\sum_{k=v}^n V_{k-v} - V \sum_{k=v}^n 1 \right] = \\
& = \sum_{v=0}^n u_v \left[\sum_{k=0}^{n-v} (n-v-k+1) v_k - (n-v+1) V \right] = \\
& = \sum_{v=0}^n u_v \left[- \sum_{k=0}^{n-v} k v_k - (n-v+1) \sum_{k=n-v+1}^{\infty} v_k \right].
\end{aligned}$$

По лемме 1 для выполнения утверждения в теореме 177 из [4] при всякой сходящейся к нулю последовательности (4), необходимыми и достаточными являются условия:

$$\sum_{k=0}^{n-v} k v_k + (n-v+1) \sum_{k=n-v+1}^{\infty} v_k = o(n),$$

$$\sum_{v=0}^n \left| \sum_{k=0}^{n-v} k v_k + (n-v+1) \sum_{k=n-v+1}^{\infty} v_k \right| = O(n).$$

Однако эти условия выполнены, если выполнено условие (15).

При условии (15) имеет место также равенство (31), так как равенства (31) и (23) отличаются друг от друга суммой

$$\sum_{v=0}^n u_v \sum_{k=0}^{n-v} k v_k.$$

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора-Харди для заданной скорости. II. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1969, 18, № 4, 387—395.
3. Кангро Г., О λ -совершенности методов суммирования и ее применениях. I. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1971, 20, № 2, 111—120.
4. Харди Г., Расходящиеся ряды, Москва, 1951.

Поступило
9 VII 1971

RIDADE FORMAALSE KORRUTISE SUMMEERUVUS CESARO MENETLUSEGA

N. Veske

Resümee

Vaadeldakse ridade formaalse korrutise summeeruvust Cesàro menetlusega juhul, kui ühe rea liikmete jada on (C, a) -summeeruv nulliks. Seejuures saadakse tingimused teise rea jaoks. Samuti üldistatakse kaks G. Hardy teoreemi ridade formaalse korrutamise kohta ([4], teoreemid 175 ja 177) (C, a) -summeeruvusele.

SUMMIERBARKEIT DES FORMALEN PRODUKTS DER REIHEN NACH CESARO-VERFAHREN

N. Veske

Zusammenfassung

Im Artikel wird die Summierbarkeit des formalen Produkts der Reihen nach Cesàro-Verfahren behandelt im Fall, wenn die Glieder einer Reihe (C, a) -summierbar gegen Null sind oder die Bedingung (24) erfüllen. Dabei werden Bedingungen für die andere Reihe erfunden. Zum Beispiel gelten folgende Sätze:

Theorem 2. Die Folge (5) ist (C, β) -summierbar gegen Null bei jeder gegen Null (C, a) -summierbaren Folge (4), wenn

- a) die Folge $\{V_n\}$ bei $\beta \geq a + 1$ $(C, \beta - a)$ -beschränkt mit der Schnelligkeit $\{(n + 1)^{\alpha - \beta}\}$ vom Schrankenwert V ist,
oder
b) die Bedingung (13) bei $\beta \geq a + 1$ erfüllt ist,
oder
c) die Bedingung (14) bei $\beta = a + 1$ erfüllt ist.

Theorem 3. Wenn die Bedingung (16) erfüllt ist, dann ist (27) notwendig und hinreichend dazu, daß (25) bei jeder Folge mit der Bedingung (24) erfüllt ist.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЧИСЛОВЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

Э. Реймерс

Кафедра математического анализа

Введение

В статье [3] автор ввел понятие представления измеримой (в смысле Лебега) функции $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$ в виде числовой последовательности $x = \{x_k\}$, позволяющее интегрирование функции $x(t)$ свести к суммированию последовательности $x = \{x_k\}$ некоторым континуальным матричным методом суммирования ([3], теорема 4.3.2).

В настоящей статье (§ 3, теорема 3.1) дается новое доказательство теоремы 4.1.1 указанной статьи о представлении измеримых множеств на отрезке $[0, 1]$ последовательностями из нулей и единиц. Для этого (§ 2) введено новое представление для чисел из отрезка $[0, 1]$ в виде последовательностей из нулей и единиц. Это новое представление позволяет вычислять значения непрерывной функции, заданной числовой последовательностью (§ 4, теорема 4.2).

Во всей статье для двух последовательностей $x = \{x_k\}$ и $y = \{y_k\}$ сложение и умножение понимается в следующем смысле: $x + y = \{x_k + y_k\}$, $x \cdot y = \{x_k y_k\}$. Если пределы изменения индексов не указаны, то они могут принимать все целочисленные значения от 0 до ∞ . Вместо $x = \{x_k\}$ иногда будем писать $x = (x_0, x_1, \dots)$.

§ 1. Обозначения и вспомогательные результаты

Обозначим через $\omega = \{\delta_k\}$ последовательность, состоящую из нулей и единиц, т. е.

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k \in V \\ 0 & \text{при остальных } k, \end{cases}$$

для какого-нибудь подмножества $V \subset N$, где N — множество всех неотрицательных целых чисел, т. е. $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Вы-

бирая различные подмножества V из множества N , получим различные последовательности ω . Множество всех возможных последовательностей ω обозначим через Ω , а множество всех тех последовательностей ω , которые содержат бесконечно много единиц, обозначим через Ω^∞ . Для последовательностей ω используем еще следующие специальные обозначения: $e = (1, 1, 1, \dots)$; $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$, где 1 стоит на k -том месте ($k = 0, 1, \dots$); $0 = (0, 0, \dots)$. В случае надобности последовательности из Ω будем обозначать также символами ω' , ω'' , ω_v и т. д.

Введем в Ω частичное упорядочение. Пусть $\omega = \{\delta_k\}$ и $\omega' = \{\delta'_k\}$ принадлежат множеству Ω . Мы будем писать $\omega < \omega'$, если $\delta_k \leq \delta'_k$, причем $\delta_k < \delta'_k$ хотя бы при одном k , и $\omega = \omega'$, если $\delta_k = \delta'_k$. Если $\omega < \omega'$, то будем говорить, что последовательность ω *меньше* последовательности ω' или что ω' *больше* чем ω . *Верхней гранью* для ω' и ω'' будем называть наименьшую из ω , при котором $\omega' \leq \omega$ и $\omega'' \leq \omega$. *Нижней гранью* для ω и ω'' будем называть наибольшую из ω , при котором $\omega \leq \omega'$ и $\omega \leq \omega''$.

В Ω выполняются следующие условия:

- 1) $\omega < \omega'$ исключает $\omega = \omega'$,
- 2) если $\omega < \omega'$ и $\omega' < \omega''$, то $\omega < \omega''$,
- 3) для любых ω' и ω'' существуют их верхняя грань и их нижняя грань.

Ввиду условий 1)–3) множество Ω будет структурой (определение структуры см. в [1], стр. 37).

Структуру называют *полной*, если всякое ее непустое подмножество имеет верхнюю и нижнюю грани. Структура Ω *полна*, так как всякое ее подмножество имеет грани, вычисляемые по координатам (см. [2]). В общем структуру Ω можно рассматривать как полную булеву алгебру (см. [2]).

На структуре Ω или на его подмножествах мы будем рассматривать функционалы s , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1° $s(e) = 1$,
- 2° $s(\omega) \geq 0$,
- 3° если $\omega_1 \cdot \omega_2 = \theta$, то $s(\omega_1 + \omega_2) = s(\omega_1) + s(\omega_2)$,
- 4° если $\omega_1 = \{\delta_k\}$ и $\omega_2 = \{\delta_{k+1}\}$, то $s(\omega_1) = s(\omega_2)$.

Из этих условий вытекает, что

- 5° $s(\theta) = 0$,
- 6° $s(e_k) = 0$,
- 7° если $\omega_1 \leq \omega_2$, то $s(\omega_1) \leq s(\omega_2)$.

Назовем последовательность $\omega = \{\delta_k\}$ *периодической*, если существует натуральное число n такое, что $\delta_k = \delta_{k+n}$, начиная с некоторого индекса k ($k = 0, 1, \dots$). Условие 4° определяет значение функционала s однозначно для всех периодических последовательностей (см. [2], § 1).

§ 2. Представление числа в виде последовательности

Рассмотрим следующую систему полуотрезков

$$\Delta^{n_v} = \left(\frac{v}{2^n}, \frac{v+1}{2^n} \right]; \quad n=0, 1, \dots; \quad v=0, 1, \dots, 2^n - 1, \quad (2.1)$$

все множество которых обозначим через Λ . Этим полуотрезкам $\Delta^{n_v} \in \Lambda$ поставим в соответствие (знаком $=$) последовательности $\omega^{n_v} \in \Omega^\infty$ следующим образом.

Полуотрезку $\Delta^0 = (0, 1]$ поставим в соответствие последовательность $\omega^0 = e = (1, 1, \dots)$, т. е. $\Delta^0 = \omega^0$. Далее, разобьем полуотрезок Δ^0 на две равные по длине части $\Delta^1_0 = (0, 1/2]$ и $\Delta^1_1 = (1/2, 1]$, а соответствующую последовательность $\omega^0 = e$ на части

$$\omega^1_0 = (0, 1, 0, 1, \dots), \quad \omega^1_1 = (1, 0, 1, 0, \dots)$$

и определим соответствия $\Delta^1_0 = \omega^1_0$, $\Delta^1_1 = \omega^1_1$, где первая 1 из e попадает в часть ω^1_1 , соответствующую правому полуотрезку Δ^1_1 . Продолжая аналогично, разобьем $\Delta^1_0 = (0, 1/2]$ на две равные по длине части

$$\Delta^2_0 = \left(0, \frac{1}{4} \right], \quad \Delta^2_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right],$$

а соответствующую последовательность ω^1_0 на части

$$\omega^2_0 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots), \quad \omega^2_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

и определим соответствия $\Delta^2_0 = \omega^2_0$, $\Delta^2_1 = \omega^2_1$, где опять первая 1 из исходной последовательности ω^1_0 попадает в ω^2_1 , соответствующую правому полуотрезку Δ^2_1 , и т. д. В итоге получим следующую систему исходных соответствий:

$$\begin{aligned} \Delta^0 &= (0, 1] = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots) = \omega^0 \\ \Delta^1_0 &= \left(0, \frac{1}{2} \right] = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) = \omega^1_0 \\ \Delta^1_1 &= \left(\frac{1}{2}, 1 \right] = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) = \omega^1_1 \\ \Delta^2_0 &= \left(0, \frac{1}{4} \right] = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots) = \omega^2_0 \\ \Delta^2_1 &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) = \omega^2_1 \\ \Delta^2_2 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \dots) = \omega^2_2 \\ \Delta^2_3 &= \left(\frac{3}{4}, 1 \right] = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots) = \omega^2_3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Следовательно, соответствия в (2.2) составляют таким образом, что последовательно каждый полуотрезок Δ^{n_v} разбива-

ется на две равные по длине части Δ^{n+1}_μ и $\Delta^{n+1}_{\mu+1}$, а последовательность ω^{n_ν} , соответствующая этому полуотрезку, разбивается на две периодические части

$$\omega^{n+1}_\mu = \{\delta^{\mu k}\}, \quad \omega^{n+1}_{\mu+1} = \{\delta^{\mu+1 k}\}$$

так, чтобы было

$$\delta^{\mu+1 k} = \delta^{\mu k+2^n}.$$

Все множество последовательностей ω^{n_ν} обозначим через Ω_{Δ} . Для функционала s , определенного на множестве Ω_{Δ} , будет выполняться равенство

$$s(\omega^{n_\nu}) = \text{mes } \Delta^{n_\nu},$$

где $\text{mes } \Delta^{n_\nu}$ обозначает длину полупромежутка Δ^{n_ν} (см. [3], § 1).

Обозначим правые крайние точки $\frac{\nu+1}{2^n}$ полуотрезков (2.1) через r_k следующим образом:

$$r_0 = 1, \quad r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = \frac{3}{4}, \quad r_3 = \frac{1}{4}, \\ r_4 = \frac{7}{8}, \quad r_5 = \frac{3}{8}, \quad r_6 = \frac{5}{8}, \quad r_7 = \frac{1}{8}, \quad r_8 = \frac{15}{16}, \dots,$$

т. е. индекс k каждой точки $r_k = (\nu+1)/2^n \in \Delta^{n_\nu}$ берется равным индексу первой 1 в последовательности $\omega^{n_\nu} = \Delta^{n_\nu}$. Например, из (2.2) видно, что для $1 \in \Delta^0_0 = (0, 1]$ будет $k = 0$,

$$\text{т. е. } r_0 = 1; \text{ для } \frac{1}{2} \in \Delta^1_0 = \left(0, \frac{1}{2}\right] \text{ будет } k = 1,$$

$$\text{т. е. } r_1 = \frac{1}{2}; \text{ для } \frac{1}{4} \in \Delta^2_0 = \left(0, \frac{1}{4}\right] \text{ будет } k = 3,$$

$$\text{т. е. } r_3 = \frac{1}{4}; \text{ для } \frac{3}{4} \in \Delta^2_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \text{ будет } k = 2,$$

$$\text{т. е. } r_2 = \frac{3}{4} \text{ и т. д.}$$

Введем теперь для всех чисел $\xi \in (0, 1]$ некоторое представление в виде последовательностей из Ω^∞ , т. е. в виде бесконечной последовательности. Для этого сначала введем вспомогательное представление для чисел r_k в виде конечной последовательности e_k , т. е. поставим каждому числу r_k в соответствие e_k , считая его представлением числа r_k в виде последовательности из Ω . При этом будем писать

$$r_k = e_k. \quad (2.3)$$

Из (2.2) видно, что если $r_k \in \Delta^{n_\nu}$, то $e_k \in \omega^{n_\nu} = \Delta^{n_\nu}$, т. е. $e_k \leq \omega^{n_\nu}$.

При помощи этих вспомогательных представлений $r_k = e_k$ определим для всех чисел $\xi \in (0, 1]$ представление в виде бес-

конечной последовательности из Ω^∞ , в том числе и для чисел $\xi = r_k$. Пусть $\xi \in (0, 1]$ — произвольное число. Выберем из последовательности $\{r_k\}$ (строго) возрастающую подпоследовательность $\{r_{k_n}\}$ ($n = 0, 1, \dots$) следующим образом. Найдем в последовательности $\{r_k\}$ первое число r_i , удовлетворяющее условию $r_i < \xi$. Это число возьмем за r_{k_0} . Затем найдем в последовательности $\{r_k\}$ следующее число r_j , удовлетворяющее условию $r_{k_0} < r_j < \xi$, которое возьмем за r_{k_1} , и т. д., т. е.

$$k_n = \min_{r_{k_{n-1}} < r_j < \xi} j.$$

Тогда

$$\xi = \lim_n r_{k_n} = \sup_n r_{k_n}. \quad (2.4)$$

Представление числа ξ в виде последовательности ω_ξ из Ω^∞ определим теперь равенством

$$\xi = \omega_\xi = \sup_{k \in \{k_n\}} \{e_k\}. \quad (2.5)$$

Для каждого $\xi \in (0, 1]$ такое представление ω_ξ будет определено однозначно.

Таким образом, для всех чисел $\xi \in (0, 1]$ мы имеем однозначное представление в виде последовательности $\omega_\xi \in \Omega^\infty$. Заметим однако, что если $\xi = r_k$, то оно имеет еще и второе вспомогательное представление в виде последовательности, определенное равенством (2.3), где e_k уже не принадлежат Ω^∞ . Эти представления будут ниже играть только вспомогательную роль.

Примечание 2.1. Равенство (2.4) не нарушится, если из подпоследовательности $\{r_{k_n}\}$ отбросить конечное число первых членов, т. е. числа $r_{k_0}, r_{k_1}, \dots, r_{k_m}$. Другими словами, в представлении (2.5) конечное число первых 1 не существенно. Поэтому наряду с представлением (2.5) мы будем считать представлениями для ξ также представления

$$\xi = \omega'_\xi = \omega_\xi - \sum_{i=0}^m e_{k_i} \quad (2.6)$$

при любом m . Представления (2.6) удобны тем, что если $\Delta^{n_v} = \omega^{n_v}$ и $\xi \in \Delta^{n_v}$, то существует индекс m такой, что также $\omega'_\xi \in \omega^{n_v}$. И, наоборот, если при каком-либо m будет $\omega'_\xi \in \omega^{n_v}$, то $\xi \in \Delta^{n_v}$.

В дальнейшем под записью $\xi = \omega_\xi$ мы будем иметь в виду либо представление (2.5), либо представление (2.6) при каком-либо подходящем m .

Например, если $\xi = 1$, то

$$\{r_{k,n}\} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}, \dots \right) = \\ = (r_1, r_2, r_4, r_8, \dots),$$

и, следовательно,

$$\xi = \omega_{\xi} = \sup_{k \in \{2^n\}} \{e_k\} = \sum_{n=0}^{\infty} e_{2^n},$$

т. е. представление (2.5) имеет вид

$$1 = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots).$$

А представление (2.6), например, при $m = 0$ будет

$$1 = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots).$$

§ 3. Представление множеств в виде последовательностей

Найдем сначала представления в виде последовательностей из Ω^{∞} для промежутка, для произвольных открытых и замкнутых множеств. Если множества l_i и l_k не пересекаются, то будем писать $l_i \cdot l_k = \emptyset$.

Пусть

$$\Delta = (\alpha, \beta) \subset [0, 1]$$

— произвольный промежуток. Определим последовательность

$$\omega_{\Delta} = \sup_{r_k \in (\alpha, \beta)} \{e_k\}. \quad (3.1)$$

Последовательность ω поставим в соответствие промежутку Δ и будем считать представлением промежутка Δ в виде последовательности. При этом пишем

$$\Delta = \omega_{\Delta}.$$

Такое представление обладает следующим свойством: если для двух промежутков Δ_1 и Δ_2 имеем $\Delta_1 = \omega_1$, $\Delta_2 = \omega_2$ и $\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \emptyset$, то $\omega_1 \cdot \omega_2 = \emptyset$, т. е. если промежутки Δ_1 и Δ_2 не пересекаются, то их представления в виде последовательности ω_1 и ω_2 также не пересекаются.

Для суммы $\Delta_1 + \Delta_2$ получим представление

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \omega_1 + \omega_2.$$

Отметим, что если $\xi \in \Delta = (\alpha, \beta)$, то при исключении первых единиц из представления $\omega_{\xi} = \xi$ будет $\omega_{\xi} \leq \omega_{\Delta}$. Это следует из примечания 2.1. Заметим однако, что для одной точки обратное утверждение не имеет места. Именно, если $\xi = \beta$, то $\omega_{\beta} \leq \omega_{\Delta}$, но $\beta \notin \Delta$.

Рассмотрим, как представить в виде последовательности одноточечное множество $\{\xi\}$, где $\xi \in (0, 1)$. Пусть представление $\xi = \omega_{\xi}$ такое, что для некоторого промежутка $\Delta = \omega_{\Delta}$ из $\xi \in \Delta$ следует $\omega_{\xi} \leq \omega_{\Delta}$. Уменьшая длину промежутка Δ , видим, что для выполнения $\omega_{\xi} \leq \omega_{\Delta}$ нужно из ω_{ξ} исключать первые единицы (см. примечание 2.1). Таким образом, получим соответствие

$$\{\xi\} = \theta,$$

т. е. каждое одноточечное множество представляется в виде последовательности θ .

Если $\xi = 0$ или $\xi = 1$, то будем также считать $\{\xi\} = \theta$.

Пусть $G \subset [0, 1]$ — произвольное открытое множество. Для множества G определим представление в виде последовательности аналогично равенству (3.1), т. е. равенством

$$G = \omega_G = \sup_{r_k \in G} \{e_k\}. \quad (3.2)$$

При этом будем говорить, что множество G представлено в виде последовательности ω_G .

Из (3.2) видно, что для двух непересекающихся открытых множеств G_1 и G_2 с представлениями

$$G_1 = \omega_{G_1}, \quad G_2 = \omega_{G_2}$$

будет

$$\omega_{G_1} \cdot \omega_{G_2} = \theta,$$

т. е. представления непересекающихся открытых множеств в виде последовательности не пересекаются. Также имеем представление

$$G_1 + G_2 = \omega_{G_1} + \omega_{G_2}.$$

Рассмотрим, как представить в виде последовательности счетное множество точек $\{\xi_k\}$ ($k = 0, 1, \dots$), где $\xi_k \in (0, 1)$. Пусть $\xi = \xi_k \in \Delta_k = \omega_k$, где Δ_k — некоторые промежутки, и пусть представление $\xi = \omega_\xi$ такое, что $\omega_\xi \leq \omega_k$. Уменьшая длину промежутков, нужно для выполнения $\omega_\xi \leq \omega_k$ из ω_ξ выбрасывать первые единицы (см. примечание 2.1). Из этого следует, что каждому счетному множеству $\{\xi_k\}$ нужно поставить в соответствие последовательность θ , т. е. $\{\xi_k\} = \theta$.

Пусть $F \subset (0, 1)$ — замкнутое множество. Тогда $G = (0, 1) - F$ — открытое множество. Для множества F определим представление в виде последовательности равенством

$$F = \omega_F = e - \omega_G,$$

где $\omega_G = G$.

Перейдем теперь к рассмотрению представлений измеримых (в смысле Лебега) множеств в виде последовательностей из Ω^∞ . Пусть $l_i \subset E = [0, 1]$ измеримые множества и $\text{mes } l_i$ мера множества l_i .

Определение 3.1. Скажем, что измеримые множества l_i представлены в виде последовательностей ω_i , если

1° существует функционал s , определенный на множестве $\{\omega_i\}$ такой, что $s(\omega_i) = \text{mes } l_i$ при каждом l_i ,

2° если $l_i \cdot l_k = \emptyset$, то также $\omega_i \cdot \omega_k = \theta$.

Теорема 3.1. Каждое измеримое множество l_i представимо в виде последовательности ω_i из Ω^∞ .

Доказательство. Пусть l_i — измеримое множество. Множеству l_i поставим в соответствие последовательность

$$\omega_i = \sup_{F \subset I_i} \omega_F,$$

где F — замкнутое множество. Последовательность ω_i существует, так как Ω полная булева алгебра. Тогда условие 2° определения 3.1 будет выполняться по построению последовательностей ω_i .

Для выполнения условия 1° расширим функционал s , определенный на множестве Ω_{Δ} , следующим образом. Для каждого замкнутого множества $F = \omega_F$ и открытого множества $G = \omega_G$ из отрезка E положим

$$s(\omega_F) = \text{mes } F, \quad s(\omega_G) = \text{mes } G,$$

и определим

$$s(\omega_i) = \sup_{F \subset I_i} s(\omega_F).$$

Так как

$$\text{mes } l_i = \sup_{F \subset I_i} \text{mes } F = \sup_{F \subset I_i} s(\omega_F),$$

то $s(\omega_i) = \text{mes } l_i$. Также имеем

$$s(\omega_i) = \inf_{G \supset I_i} s(\omega_G),$$

так как

$$\text{mes } l_i = \inf_{G \supset I_i} \text{mes } G = \inf_{G \supset I_i} s(\omega_G).$$

Так построенный функционал s удовлетворяет условию 1° определения 3.1. Теорема доказана.

§ 4. Представление функций в виде числовых последовательностей

Пусть

$$\Delta = \{l_v\}_{v=0}^m$$

означает некоторое разбиение отрезка $[0, 1]$ на попарно не пересекающиеся измеримые множества l_v , т. е. пусть

$$[0, 1] = \sum_{v=0}^m l_v, \quad l_v \cdot l_\mu = \emptyset \quad (v \neq \mu).$$

Представим множества l_v последовательностями ω_v , т. е. пусть $l_v = \omega_v$. Тогда

$$\sum_{v=0}^m \text{mes } l_v = \sum_{v=0}^m s(\omega_v) = 1,$$

где $\omega_v \cdot \omega_\mu = \emptyset$ при $v \neq \mu$.

Пусть задана некоторая числовая последовательность $x = \{x_k\}$ и ограниченная измеримая функция $x = x(t)$, где $t \in [0, 1]$. Частью последовательности $x = \{x_k\}$ будем называть

любую последовательность $x \cdot \omega_v$. Члены последовательности $x = \{x_k\}$, попавшие в часть $x \cdot \omega_v$, будем обозначать через x_{v_n} ($n = 0, 1, \dots$).

Определение 4.1 (см. [3], определение 4.2.1). Мы скажем, что функция $x = x(t)$ на отрезке $[0, 1]$ представлена в виде числовой последовательности $x = \{x_k\}$, и пишем $x(t) = \{x_k\}$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $\Delta = \{l_v\}_{v=0}^m$, что для каждой части последовательности $x \cdot \omega_v$, где $\omega_v = l_v$ и $s(\omega_v) \neq 0$, будет

$$|x_{v_n} - x(t)| < \varepsilon, \quad (4.1)$$

если $t \in l_v$ и $n > N(\varepsilon)$.

Возьмем несколько примеров.

1) Постоянную функцию $x = c = \text{const}$ при $t \in [0, 1]$ представляет любая сходящаяся последовательность $x = \{x_k\}$, где $\lim x_k = c$.

2) Пусть $\varphi_G(t)$ — характеристическая функция открытого множества G , тогда $\varphi_G(t)$ представляется последовательностью $\omega_G = G$.

3) Функция $x = x(t) = t$, где $t \in [0, 1]$ представляется последовательностью

$$x = \{r_k\} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}, \frac{15}{16}, \dots \right).$$

Это следует из построения чисел r_k .

Имеет место следующая общая

Теорема 4.1 (см. [3], теорема 4.2.1). Любая ограниченная измеримая функция на отрезке $[0, 1]$ представима в виде ограниченной числовой последовательности.

Из определения 4.1 следует, что две ограниченные измеримые функции имеют различные представления в виде последовательности, если они отличаются друг от друга на множестве с мерой, отличной от нуля. Как известно, множество таких функций имеет мощность континуума, какова и мощность множества всех последовательностей ω .

Для непрерывных функций $x = x(t)$ на отрезке $[0, 1]$ можем сразу указать последовательность, которая представляет эту функцию. А именно имеет место

Теорема 4.2. Если $x = x(t)$ — непрерывная функция на $[0, 1]$, то она представима последовательностью

$$x = \{x(r_n)\} = (x(r_0), x(r_1), \dots, x(r_n), \dots). \quad (4.2)$$

Доказательство. Так как $x(t)$ непрерывна, то для каждого числа

$$\lim_n r_{k_n} = \xi \in [0, 1]$$

будет

$$x(\xi) = \lim_n x(r_{k_n}).$$

Но $x(t)$ также равномерно непрерывна, поэтому мы можем при каждом $\varepsilon > 0$ разбить отрезок $[0, 1]$ на частичные отрезки I_i ($i = 0, 1, \dots, n$) так, чтобы выполнялось неравенство (4.1). Теорема доказана.

Возьмем примеры. По теореме 4.2 сразу получим

$$x = \sin \pi t = \{\sin \pi r_n\} = \left(0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots \right),$$

$$x = \sin 2\pi t = \{\sin 2\pi r_n\} = \left(0, 0, -1, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \dots \right),$$

где иррациональные числа можно заменять некоторыми их рациональными приближениями.

Примечание 4.1. Для непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций $x = x(t) = \{x(r_n)\}$ можно их значения вычислять следующим образом. Пусть число $\xi \in (0, 1]$ имеет представление $\xi = \omega_\xi$, тогда выполняются равенства (2.4) и (2.5). Часть $x \cdot \omega_\xi$ будет содержать только члены $x(r_{h_n})$ последовательности (4.2). Ввиду (2.4) будет

$$x(\xi) = \lim_n x(r_{h_n}).$$

Примечание 4.2. Для чисел $\xi \in [0, 1]$ представление в виде последовательности $\omega_\xi \in \Omega^\infty$ можно определить по-разному. Рассмотрим еще одно представление. Пусть $\xi \in (0, 1)$. Аналогично, как в § 2, выберем из последовательности $\{r_n\}$ подпоследовательность $\{r_{h_n}\}$, где

$$r_{h_0} < \xi, \quad r_{h_1} > \xi, \quad r_{h_2} < \xi, \dots \quad (4.3)$$

и

$$\lim_n r_{h_n} = \xi.$$

Затем определим представление для числа ξ равенством (2.5). Для числа $\xi = 1$ возьмем из (4.3) только числа $r_i < \xi$, а для $\xi = 0$ только числа $r_h > \xi$ и определим представление опять равенством (2.5). Тогда для всех $\xi \in [0, 1]$ будем иметь представление в виде последовательности $\omega_\xi \in \Omega^\infty$. При таком определении будет выполняться следующее условие: из $\omega_\xi \in \omega_\Delta = \Delta = (\alpha, \beta)$ всегда следует $\xi \in \Delta$.

Литература

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
2. Реймерс Э., Новые общие методы суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 119—154.
3. Реймерс Э., Континуальные методы суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 50—89.

Поступило
19 VII 1971

FUNKTSIOONIDE ESITAMINE ARVUJADADE ABIL

E. Reimers

Resümee

Töös [3] oli sisse toodud mõiste mõõtuvate funktsioonide esitamise kohta arvujadade kujul. Käesolevas töös (§ 3, teoreem 3.1) antakse uus tõestus teoreemile 4.1.1 ülal mainitud tööst hulgal $[0,1]$ mõõtuvate hulkade esitamise kohta arvujadade kujul. Sel eesmärgil (§ 2) tuuakse sisse uus arvude esitusviis lõigus $[0,1]$ nullist ja ühtedest koosnevate jadade kaudu. See esitus võimaldab arvutada arvujada kujul antud pideva funktsiooni (§ 4, teoreem 4.2) väärtusi.

THE REPRESENTATION OF FUNCTIONS BY THE SEQUENCES OF NUMBERS

E. Reimers

Summary

In the paper [3] the notion of the representation of measurable functions in the form of sequences of numbers is introduced. In the present paper (§ 3, theorem 3.1) a new proof of the theorem 4.1.1 from the paper [3] on the representation of the measurable sets from the interval $[0,1]$ by the sequences of numbers is given. For this purpose (§ 2) a new representation of the numbers from the interval $[0,1]$ in the form of the sequences of ones and zeros is introduced. This representation allows us to calculate the values of the continuous function given by the sequence of numbers (§ 4, theorem 4.2).

О СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ПОЧТИ ВСЮДУ

Х. Тюрнпу

Кафедра математического анализа

Введение

Пусть $\{\varphi_k\}$ — система функций, измеримых по Лебегу и почти всюду конечных на отрезке $e = [a, b]$. В настоящей статье мы находим некоторые достаточные условия для сходимости почти всюду на отрезке e рядов вида¹

$$\sum \xi_k \varphi_k(t), \quad (1)$$

где $x = \{\xi_k\} \in l^p$ ($1 < p < \infty$).

Мы не требуем ортогональности системы $\{\varphi_k\}$ и, следовательно, из наших результатов вытекают, как частные случаи, условия для сходимости почти всюду ортогональных рядов, в частности, теорема Качмажа ([1] стр. 181), теорема Меньшова—Радемахера ([1], стр. 87), теорема Алексича ([1], стр. 178).

Отметим, что в работах Никишина [4—6] также исследуется сходимость почти всюду рядов (1) и доказывается ряд необходимых и достаточных условий для сходимости. Хотя эти условия в большинстве случаев неэффективны в смысле непосредственной проверки, они несомненно играют важную роль в развитии теории сходимости и суммируемости почти всюду. В нашей статье находим эффективные достаточные условия сходимости почти всюду, однако мы накладываем на систему $\{\varphi_k\}$ более сильные ограничения, чем в работах [4—6]. Для доказательства наших результатов мы воспользуемся методом переменного индекса в несколько модифицированной форме, при помощи которого существенно упрощаются доказательства основных теорем.

¹ Если пределы изменения индексов у знака \sum не указаны, то они изменяются от 0 до $+\infty$.

§ 1. Вспомогательные результаты

Ниже мы воспользуемся следующими леммами.
Пусть

$$s_n = \sum_{k=0}^n \xi_k \varphi_k(t)$$

— частичные суммы функционального ряда (1).

Лемма 1. Пусть $\{\lambda_k\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел. Для сходимости почти всюду на отрезке e последовательности

$$\{\lambda_n s_n(x, t)\} \quad (2)$$

для всех $x \in l^p$ необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена почти всюду для всех $x \in l^p$, т. е. функция

$$\sup_n \lambda_n |s_n(x, t)|,$$

была конечной почти всюду на отрезке e для всех $x \in l^p$.

Доказательство. Необходимость условия леммы 1 очевидна.

Достаточность. Пусть последовательность (2) ограничена почти всюду на e для всех $x \in l^p$. Найдем для каждого $x \in l^p$ последовательность $y = \{\eta_k\}$ с $\eta_k \uparrow \infty$ и $z = \{\xi_k \eta_k\} \in l^p$. При помощи преобразования Абеля, получаем

$$\lambda_n s_n(x, t) = A_n(z, t) + \frac{\lambda_n}{\eta_n} s_n(z, t), \quad (3)$$

где

$$A_n(z, t) = \lambda_n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\Delta \frac{1}{\eta_k} \right) s_k(z, t).$$

Так как $1/\eta_k = o(1)$, то учитывая ограниченность последовательности (2) почти всюду на e для всех $x \in l^p$, мы получим, что $\lambda_n s_n(z, t) = o(\eta_n)$ почти всюду на e . Покажем теперь, что последовательность $A_n(z, t)$ фундаментальна почти всюду на отрезке e . Имеем

$$|A_{n+p}(z, t) - A_n(z, t)| \leq B_{np}(z, t) + C_{np}(z, t),$$

где

$$B_{np}(z, t) = |\lambda_{n+p}| \sum_{k=n}^{n+p-1} |\Delta 1/\eta_k| |s_k(z, t)|,$$

и

$$C_{np}(z, t) = |\lambda_{n+p} - \lambda_n| \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta 1/\eta_k| |s_k(z, t)|.$$

Так как $\lambda_m \leq \lambda_k$ при $k \leq m$, то для любого $p = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned}
B_{np}(z, t) &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |\Delta 1/\eta_k| \lambda_k |s_k(z, t)| \leq \\
&\leq \sup \lambda_k |s_k(z, t)| \sum_{k=n}^{n+p-1} |\Delta 1/\eta_k| = o(1),
\end{aligned}$$

и

$$C_{np}(z, t) \leq \frac{\lambda_n - \lambda_{n+p}}{\lambda_n} \sup_k \lambda_k |s_k(z, t)| \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta 1/\eta_k| = o(1).$$

Следовательно, из ограниченности последовательности (2) почти всюду на e получаем, что последовательность $\{A_n(z, t)\}$ фундаментальна почти всюду на e для всех $z \in I^p$. Теперь из равенства (3) получаем, что последовательность (2) сходится почти всюду на e .

Лемма 2. Для того, чтобы измеримая по Лебегу на отрезке e функция g была конечной почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ нашлось измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\text{mes } T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ такое, что

$$\int_{T_\varepsilon} |g(t)| dt < \infty. \quad (4)$$

Доказательство. Необходимость условия (4) очевидна (см. [3], стр. 113).

Достаточность. Пусть условие (4) выполнено, но найдется множество $S \subset e$ с $\text{mes } S = a > 0$, на котором $|g(t)| = \infty$. Возьмем теперь в условии (4) число $\varepsilon < a$. Тогда получим, что на некотором множестве $S_1 \subset S$ с $\text{mes } S_1 > 0$ функция g интегрируема, и, следовательно, конечна почти всюду. Полученное противоречие и доказывает лемму 2.

Лемма 3. Для того, чтобы последовательность измеримых почти всюду конечных на отрезке e функций $\{f_n\}$ была ограничена почти всюду на e , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ нашлись измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\text{mes } T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_\varepsilon > 0$ такие, чтобы неравенство

$$D_m^\varepsilon \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi_{mn}^\varepsilon(t) f_n(t) dt \right| \leq M_\varepsilon \quad (5)$$

выполнялось равномерно относительно всех измеримых непересекающихся подразделений $\mathfrak{N}^\varepsilon = \{\mathfrak{N}_{mn}^\varepsilon\}$ множества T_ε на произвольное число $m+1$ частей, где $\chi_{mn}^\varepsilon(t)$ — характеристическая функция множества $\mathfrak{N}_{mn}^\varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $\{f_n\}$ ограничена почти всюду на e . Применяя лемму 2 к функции $\sup |f_n(t)|$, находим, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\text{mes } T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ такое, что

$$\int_{T_\varepsilon} \sup_n |f_n(t)| dt < \infty. \quad (6)$$

Следовательно, учитывая, что $\bigcup_{n=0}^m \mathfrak{N}_{mn}^\varepsilon \subset T_\varepsilon$ и $\mathfrak{N}_{mk}^\varepsilon \cap \mathfrak{N}_{ml}^\varepsilon = \emptyset$ при $k \neq l$, получим неравенство

$$\begin{aligned} D_m^\varepsilon &\leq \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi_{\mathfrak{N}_{mn}^\varepsilon}^\varepsilon(t) \sup_n |f_n(t)| dt \leq \\ &\leq \int_{T_\varepsilon} \sup_n |f_n(t)| dt, \end{aligned}$$

из которого вытекает необходимость условия (5).

Достаточность. Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ найдется измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\text{mes } T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и постоянная M_ε такие, что имеет место неравенство (5). Определим множества

$$\mathfrak{M}_{m0}^\varepsilon = \{t \in T_\varepsilon : \max_{k \leq m} |f_k(t)| = |f_0(t)|\} \quad (7)$$

и при $0 < n \leq m$

$$\mathfrak{M}_{mn}^\varepsilon = \{t \in T_\varepsilon : \max_{k \leq m} |f_k(t)| = |f_n(t)|; t \notin \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathfrak{M}_{mk}^\varepsilon\}. \quad (8)$$

Множества $\mathfrak{M}_{mn}^\varepsilon$, определенных через (7) и (8), измеримы и при фиксированных m не пересекаются, причем

$$\bigcup_{n=0}^m \mathfrak{M}_{mn}^\varepsilon = T_\varepsilon.$$

Обозначим через

$$\mathfrak{M}_{mn}^+ = \{t \in \mathfrak{M}_{mn}^\varepsilon : f_n(t) \geq 0\},$$

$$\mathfrak{M}_{mn}^- = \{t \in \mathfrak{M}_{mn}^\varepsilon : f_n(t) < 0\}$$

и заметим, что $\max_{k \leq m} |f_k(t)| = f_n(t)$ тогда и только тогда, когда $t \in \mathfrak{M}_{mn}^+$ и $\max_{k \leq m} |f_k(t)| = -f_n(t)$ тогда и только тогда, когда $t \in \mathfrak{M}_{mn}^-$. Следовательно, из неравенства (5) вытекает при $\mathfrak{N}_{mn}^\varepsilon = \mathfrak{M}_{mn}^+$ и $\mathfrak{N}_{mn}^\varepsilon = \mathfrak{M}_{mn}^-$, что

$$\int_{T_\varepsilon} \max_{n \leq m} |f_n(t)| dt \leq 2 \sup \mathfrak{N}^\varepsilon D_m^\varepsilon \leq 2M_\varepsilon. \quad (9)$$

Из (9) в силу теоремы Леви получаем, что имеет место (6), ибо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{n \leq m} |f_n(t)| = \sup_n |f_n(t)|.$$

Теперь наше утверждение вытекает из леммы 2.

§ 2. Функции Лебега и сходимость почти всюду

В этом параграфе мы предположим, что система $\{\varphi_k\}$ состоит из интегрируемых на отрезке e функций. Назовем функции

$$L_n(t) = \int_a^b |K_n(t, \tau)| d\tau, \quad (10)$$

функциями Лебега для системы $\{\varphi_k\}$, где ядро

$$K_n(t, \tau) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \varphi_k(\tau).$$

Известно, что функции Лебега играют важную роль при исследовании сходимости почти всюду ортогональных рядов. Мы покажем, что аналогичное обстоятельство имеет место даже для неортогональных систем функций, если последовательность $x \in l^2$. Точнее, мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\{\lambda_n\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел. Если система $\{\varphi_n\}$ почти всюду на отрезке e удовлетворяет условию

$$\lambda_n L_n(t) = O(1), \quad (11)$$

то последовательность (2) сходится почти всюду на отрезке e для всех $x \in l^2$.

Доказательство. По лемме 1 нам достаточно установить ограниченность почти всюду последовательности (2) для всех $x \in l^2$. По лемме 3 для этого достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ и $x \in l^2$ нашлись измеримое подмножество $T_{\varepsilon x} \subset e$ с $\text{mes } T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x} > 0$ такие, что неравенство

$$E_{\varepsilon x}^m(x) \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi^{\varepsilon x m n}(t) \lambda_n \sum_{k=0}^n \xi_k \varphi_k(t) dt \right| \leq M_{\varepsilon x} \quad (12)$$

имело место равномерно относительно всех непересекающихся подразделений $\mathfrak{R}^{\varepsilon x}$ множества $T_{\varepsilon x} \subset e$ на $m+1$ частей. Но в силу леммы 2 из условия (11) вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся множество $T_\varepsilon \subset e$ и число $M_\varepsilon > 0$ такие, что $\text{mes } T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и

$$\int_a^b \sup_n \lambda_n^2 L_n(t) dt \leq M_\varepsilon. \quad (13)$$

Покажем, что в качестве множества $T_{\varepsilon x}$ можем взять множество T_ε . Действительно, если $T_{\varepsilon x} = T_\varepsilon$, то, изменяя в левой части неравенства (12) порядок суммирования и воспользуясь неравенством Коши, получаем

$$E_m^\varepsilon(x) \leq \sqrt{\overline{F_m^\varepsilon}} \|x\|, \quad (14)$$

где

$$F_m^\varepsilon = \sum_{k=0}^m \left(\int_a^b \sum_{n=k}^m \lambda_n \chi_{mn}^\varepsilon(t) \varphi_k(t) dt \right)^2.$$

Заменяя в F_m^ε квадрат интеграла на двойной интеграл и изменяя три раза порядок суммирования, получаем, что

$$F_m^\varepsilon \leq G_m^\varepsilon + H_m^\varepsilon \leq 2M_\varepsilon,$$

где

$$G_m^\varepsilon = \int_a^b \int_a^b \sum_{p=0}^m \chi_{mp}^\varepsilon(u) \sum_{l=p+1}^m \chi_{ml}^\varepsilon(v) \lambda_p \lambda_l K_p(u, v) dv du,$$

и

$$H_m^\varepsilon = \int_a^b \int_a^b \sum_{l=0}^m \chi_{ml}^\varepsilon(v) \sum_{p=l}^m \chi_{mp}^\varepsilon(u) \lambda_p \lambda_l K_l(u, v) du dv,$$

ввиду условия (13), ибо

$$G_m^\varepsilon \leq \int_{T_\varepsilon} \sup_p \lambda^2_p L_p(u) du,$$

$$H_m^\varepsilon \leq \int_{T_\varepsilon} \sup_l \lambda^2_l L_l(v) dv.$$

Из неравенства (14) выводим теперь, что имеет место неравенство (12), что и доказывает теорему 1.

Из теоремы 1 мы выводим следующие следствия

Следствие 1.1. Если функции Лебега (10) системы $\{\varphi_k\}$ ограничены почти всюду на отрезке e , то ряд (1) сходится почти всюду на отрезке e для всех $x \in l^2$.

Доказательство вытекает из теоремы 1, если в ней положить $\lambda_n = 1$.

Как частный случай, мы из следствия 1.1 получаем известный критерий Алексича ([1], стр. 181) о сходимости ортогональных рядов.

Следствие 1.2. Если система $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет условию (11), то почти всюду на e для всех $x \in l^2$ при некотором $M_x > 0$

$$|s_n(x, t)| \leq M_x / \lambda_n. \quad (15)$$

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 1 и леммы 1.

§ 3. Коэффициентные критерии сходимости

В настоящем параграфе предположим, что система $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет следующему условию:

(J_p) Для каждых $\varepsilon > 0$ и $x \in I^p$ найдутся измеримое множество $T_{\varepsilon x} \subset e$ с $\text{mes } T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x} > 0$ такие, что для всех $x \in I^p$

$$\sup_n \int_{T_{\varepsilon}} |s_n(x, t)|^p dt \leq M_{\varepsilon x} \|x\|.$$

Оказывается, что условие (J_p) гарантирует, что для сходимости почти всюду рядов (1) имеют место все основные теоремы о сходимости почти всюду ортогональных рядов.

Условие (J_p) выполнено, в силу принципа равномерной ограниченности, если, например, последовательность $\{s_n(x, t)\}$ сходится для всех $x \in I^p$ в метрике L^p_e .

Теорема 2. Пусть $\{\lambda_p\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел и пусть система $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет условию (J_p). Если почти всюду на отрезке e имеет место неравенство (15) для всех $x \in I^p$, то ряд (1) сходится для тех $x \in I^p$, для которых

$$\sum |\xi_k|^p / \lambda_k^p < \infty. \quad (16)$$

Доказательство. Пусть элемент $x \in I^p$ удовлетворяет условию (16). Рассмотрим ряд

$$\sum \eta_k \varphi_k(t), \quad (17)$$

где $\eta_k = \xi_k / \lambda_k$. Так как $y = \{\eta_k\} \in I^p$, то она удовлетворяет неравенству (15), т. е.

$$|s_n(y, t)| \leq M_y / \lambda_n \quad (18)$$

почти всюду на отрезке e . Следовательно, в силу леммы 2 для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся подмножество $T_{\varepsilon y} \subset e$ с $\text{mes } T_{\varepsilon y} > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon y} > 0$ такие, что

$$\int_{T_{\varepsilon y}} \sup_n \lambda_n |s_n(y, t)| dt \leq M_{\varepsilon y}.$$

Обозначим через $T^1_{\varepsilon x}$ и $M^1_{\varepsilon x}$ множество и постоянную, которые фигурируют в условии (J_p). Далее, для сходимости ряда (1) почти всюду на e в силу лемм 1 и 3 мы должны показать, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримое подмножество $T_{\varepsilon x} \subset e$ с $\text{mes } T_{\varepsilon x} > b - a - 2\varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x} > 0$ такие, что

$$J^e_m(x) \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi^{ex}_{mn}(t) s_n(x, t) dt \right| \leq M_{\varepsilon x}.$$

Возьмем за $T_{\varepsilon x}$ множество $T_{\varepsilon y} \cap T^1_{\varepsilon x}$. При помощи преобразования Абеля получаем, в силу неравенства (18) и условия (J_p), что

$$\begin{aligned}
J_m^\varepsilon(x) &\leq \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi_{mn}^\varepsilon(t) \sum_{k=0}^{n-1} s_k(y, t) \Delta\lambda_k dt \right| + \\
&+ \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi_{mn}^\varepsilon(t) \lambda_n s_n(y, t) dt \right| \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^m |\Delta\lambda_k| \int_{T_{ex}^1} |s_k(y, t)| dt + \\
&+ \int_{T_{ey}} \sup_n \lambda_n |s_n(y, t)| dt \leq \\
&\leq \sqrt{b-a} \sum_{k=0}^m |\Delta\lambda_k| M_{ex} \|y\| + M_{ey} = M_{ex}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. Если система $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет условиям (J_2) и (11), то ряд (1) сходится почти всюду на отрезке e для тех $x \in l^2$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} < \infty.$$

Доказательство. По следствию 1.2 из условия (11) вытекает выполнение неравенства (15) для всех $x \in l^2$ почти всюду на отрезке e . Теперь по теореме 2 при $p = 2$ получаем наше утверждение.

Если система $\{\varphi_k\}$ ортогональна на e , то условие (J_2) выполнено, и следствие 2.1 превращается в известную теорему Качмажа (см. [1], стр. 181).

Из теоремы 2 вытекает, что для исследования сходимости ряда (1) почти всюду на отрезке e , надо знать оценку его частичных сумм. Конечно, если известны оценки функции Лебега, то по следствию 1.2 легко получить эти оценки. Следующая теорема дает другую возможность оценить частичные суммы ряда (1).

Теорема 3. Если система $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет условию (J_p) и для каждого $\varepsilon > 0$ и $x \in l^p$ найдется измеримое подмножество $T_{ex} \subset e$ с $\text{mes } T_{ex} > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{ex} > 0$ такие, что

$$\int_{T_{ex}} \max_{n \leq m} |s_n(x, t)| dt \leq M_{ex} / \lambda_m, \quad (19)$$

где $\{\lambda_m\}$ — такая невозрастающая последовательность положительных чисел, для которой существует подпоследовательность $\{\lambda_{v_n}\}$ со свойствами

$$\sum_n \lambda_{v_n}^p < \infty, \quad (20)$$

$$\lambda_{v_{n+1}} = O(\lambda_{v_n}), \quad (21)$$

то почти всюду на отрезке e для всех $x \in l^p$ имеет место неравенство (15).

Доказательство. Покажем сперва, что почти всюду на отрезке e имеет место оценка

$$|s_{v_n}(x, t)| \leq M_x / \lambda_{v_n}. \quad (22)$$

Для этого, в силу леммы 3, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ нашлись измеримое подмножество $T_{\varepsilon x} \subset e$ с $\text{mes } T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x}$ такие, что

$$N_m^\varepsilon(x) \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi^{\varepsilon x}_{mn}(t) \lambda_{v_n} s_{v_n}(x, t) dt \right| \leq M_{\varepsilon x}. \quad (23)$$

Применяя неравенство Гельдера для интеграла и для суммы, получаем, что

$$\begin{aligned} N_m^\varepsilon(x) &\leq (b-a)^{1/q} \left\{ \int_a^b \left| \sum_{n=0}^m \chi^{\varepsilon x}_{mn}(t) \lambda_{v_n} s_{v_n}(x, t) \right|^p dt \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq (b-a)^{1/q} \left\{ \int_a^b \left[\sum_{n=0}^m \chi^{\varepsilon x}_{mn}(t) \right]^{p/q} \sum_{n=0}^m \lambda_{v_n}^p |s_{v_n}(x, t)|^p dt \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq (b-a)^{1/p} \left\{ \max_{n \leq m} \int_{T_{\varepsilon x}} |s_{v_n}(x, t)|^p dt \sum_{n=0}^m \lambda_{v_n}^p \right\}^{1/p}, \end{aligned}$$

откуда в силу условий (J_p) и (20) следует существование $M_{\varepsilon x}$ такого, что неравенство (23) имеет место.

Теперь можем приступить к доказательству выполнения неравенства (15). Так как неравенство (23) выполнено, то достаточно показать, что почти всюду на e

$$\max_{v_m+1 \leq n < v_{m+1}} \lambda_n |s_n(x, t)| \leq M_x$$

равномерно относительно m . По лемме 3 для этого необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ нашлись измеримое подмножество $T_{\varepsilon x} \subset e$ с $\text{mes } T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x} > 0$ такие, что

$$O_m(x) = \left| \int_a^b \sum_{n=v_m+1}^{v_{m+1}} \chi^{\varepsilon x}_{mn}(t) \lambda_n s_n(x, t) dt \right| \leq M_{\varepsilon x}. \quad (24)$$

Но так как в силу неравенства (19)

$$\begin{aligned} O_m(x) &\leq \lambda_{v_m+1} \int \max_{T_{\varepsilon x} \quad v_m+1 \leq n \leq v_{m+1}} |s_n(x, t)| dt \leq \\ &\leq 2M_{\varepsilon x} \lambda_{v_m+1} / \lambda_{v_m+1}, \end{aligned}$$

то из предположения (21) заключаем, что имеет место неравенство (24), чем теорема 3 доказана.

Следствие 1.3. Если система $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет условию (J_p) и для всех $x \in l^p$ имеет место неравенство (19), то ряд (1) сходится почти всюду на отрезке e для тех $x \in l^p$, для которых имеет место (16).

Доказательство. По теореме 3 имеем, что справедлива оценка (15), вследствие чего из теоремы 2 и получаем наше утверждение.

Примечание. Если в теореме 3 положить $1/\lambda_m = O(1)$, то из лемм 1 и 2 вытекает сходимость ряда (1) без требования выполнения условия (J_p) .

Следующая теорема устанавливает, что для систем, удовлетворяющих условию (J_p) , имеет место неравенство $1/\lambda_m \leq \ln m$.

Теорема 4. Если система $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет условию (J_p) , то для всех $x \in l^p$ выполнено условие (19) с $1/\lambda_m = \ln m$.

Доказательство. В силу леммы 3 мы должны показать, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримое подмножество $T_{\varepsilon x} \subset e$ с $\text{mes } T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon x} > 0$ такие, что

$$J_m^\varepsilon(x) \leq M_{\varepsilon x} \ln m.$$

Так как справедлива (см., например, формулу (15.13) в [2]) формула

$$s_n(x, t) = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{-1/q} \sum_{v=0}^k A_{k-v}^{-1/p} \xi_v \varphi_v(t),$$

где $1/p + 1/q = 1$, то после изменения порядка суммирования находим, что

$$J_{m, \varepsilon}^\varepsilon(x) = \left| \int_a^b \sum_{k=0}^m \sum_{v=0}^k A_{k-v}^{-1/p} \xi_v \varphi_v(t) \sum_{n=k}^m \chi_{mn}^{\varepsilon x}(t) A_{n-k}^{-1/q} dt \right|.$$

Отсюда, применяя неравенства Гельдера для интеграла и для суммы, выводим

$$J_m^\varepsilon(x) \leq (b-a)^{1/q} \left\{ \int_a^b P_m(x, t) [Q_m^\varepsilon(x, t)]^{p/q} dt \right\}^{1/p},$$

где

$$P_m(x, t) = \sum_{k=0}^m \left| \sum_{v=0}^k A_{k-v}^{-1/p} \xi_v \varphi_v(t) \right|^p$$

и

$$Q_m^\varepsilon(x, t) = \sum_{k=0}^m \left| \sum_{n=k}^m \chi_{mn}^{\varepsilon x}(t) A_{n-k}^{-1/q} \right|^q.$$

Но так как для всех $t \in T_{\varepsilon x}$

$$\sum_{n=k}^m \chi_{mn}^{\varepsilon x}(t) A_{n-k}^{-1/q} = A_{m(t)-k}^{-1/q},$$

где $m(t)$ — индекс, при котором $t \in \mathfrak{N}_{m_i}$, то

$$\sup_{t \in T_{\varepsilon x}} Q_m^\varepsilon(x, t) \leq \sum_{k=0}^m |A_{m-k}^{-1/q}|^q \leq M \ln m.$$

Следовательно,

$$J_m^\varepsilon(x) \leq (b-a)^{1/q} M \ln^{1/q} m \left\{ \int_{T_{\text{ex}}} P_m(x, t) dt \right\}^{1/p},$$

откуда в силу условия (J_p) выводим, что существует число N_{ex} такое, чтобы

$$\begin{aligned} J_m^\varepsilon(x) &\leq (b-a)^{1/q} M M_{\text{ex}} \ln^{1/q} m \left\{ \sum_{h=0}^m \sum_{v=0}^h (A_{h-v}^{-1/p})^p |\xi_v|^p \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq (b-a)^{1/q} M M_{\text{ex}} \ln^{1/q} m \left\{ \sum_{v=0}^m |\xi_v|^p \sum_{h=v}^m (A_{h-v}^{-1/p})^p \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq (b-a)^{1/q} M^2 M_{\text{ex}} \ln^{1/q} m \ln^{1/p} m \|x\| = N_{\text{ex}} \ln m. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 1.4. Если система $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет условию (J_p) , то почти всюду на отрезке ε имеет место неравенство

$$s_m(x, t) = O(\ln m) \quad (25)$$

для всех $x \in l^p$.

Доказательство. По теореме 4 из (J_p) вытекает неравенство (19) с $\lambda_m = 1/\ln m$, вследствие чего по теореме 3 имеет место (25).

Следствие 2.4. Если система $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет условию (J_p) , то ряд (1) сходится почти всюду на отрезке ε для тех $x \in l^p$, для которых

$$\sum |\xi_k|^p \ln^p k < \infty.$$

Доказательство. По следствию 1.4 почти всюду на ε имеет место неравенство (25) для всех $x \in l^p$, откуда в силу теоремы 2 вытекает наше утверждение.

В случае ортогональных систем $\{\varphi_k\}$ следствие 2.4 при $p = 2$ превращается в известную теорему Меньшова—Радемахера.

Следствие 3.4. Если система $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет условию (J_p) , то подпоследовательность $\{s_{v_m}(x, t)\}$ частичных сумм ряда (1) сходится почти всюду на отрезке ε для тех $x \in l^p$, для которых

$$\sum_m (\ln m)^p \sum_{k=v_m+1}^{v_{m+1}} |\xi_k|^p < \infty. \quad (26)$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что

$$\zeta^p_m = \sum_{k=v_m+1}^{v_{m+1}} |\xi_k|^p \neq 0.$$

Покажем, что система $\{\Phi_m\}$, где

$$\Phi_m(t) = \zeta^{-1}_m \sum_{k=v_m+1}^{v_{m+1}} \xi_k \varphi_k(t),$$

удовлетворяет условию (J_p) . Действительно, так как имеет место равенство

$$\sum_{m=0}^i c_m \Phi_m(t) = \sum_{k=0}^{v_{i+1}} \xi_k \varphi_k(t), \quad (27)$$

то выполнение условия (J_p) для $\{\varphi_k\}$ влечет за собой его выполнение и для системы $\{\Phi_m\}$. Следовательно, по теореме 4 ряд

$$\sum c_m \Phi_m(t) \quad (28)$$

сходится почти всюду на отрезке e как только

$$|\sum c^p m \ln^p m < \infty,$$

т. е. (26) выполнено. Так как в силу равенства (27) ряд (28) и последовательность $\{s_{v_n}(x, t)\}$ сходятся одновременно, то следствие 3.4. доказано.

Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
2. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
3. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной. Москва, 1957.
4. Никишин Е. М., О системах сходимости для l_p . Изв. АН СССР, Сер. матем. 1970, 34, 621—638.
5. Никишин Е. М., О системах сходимости. Матем. сб., 1970, 81, № 1, 23—38.
6. Никишин Е. М., Резонансные теоремы и надлинейные операторы. Успехи матем. наук, 1970, 25, № 1, 129—191.

Поступило
19 X 1971

FUNKTSIONAALRIKLADE KOONDUVUS PEAAEGU KÕIKJAL

H. Tüürpu

Resümee

Käesolevas töös leitakse efektiivsed piisavad tingimused selleks, et kujul (1) esitatav rida oleks peaaegu kõikjal koonduv iga jada $x \in l^p$ korral. Kasutades muutuva indeksi meetodi modifitseeritud kuju, üldistatakse tuntud ortogonaalriiklade koonduvuskriteeriumid ridadele kujus (1).

THE ALMOST EVERYWHERE CONVERGENCE OF FUNCTIONAL SERIES

H. Tüürpu

Summary

In the present paper the effective sufficient conditions for the almost everywhere convergence of the series (1) for every $x \in l^p$ have been found. Using the modification of variable index method, the wellknown criterions of the almost everywhere convergence for orthogonal series (for example, the theorem of Menchov-Rademacher, the theorem of Alexits) are generalized for the series in the form (1).

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

В. Степин

Свердловский институт народного хозяйства

1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная ортонормированная на $[a, b]$ система функций, $\{c_n\}$ — последовательность действительных чисел и¹

$$\sum_k c_k \varphi_k(x) \quad (1)$$

ортогональный ряд с частичными суммами $S_n(x)$. Если ортогональный ряд (1) принадлежит L^2 , т. е. если его коэффициенты c_k удовлетворяют условию

$$\sum_k c_k^2 < \infty, \quad (2)$$

то по теореме Рисса—Фишера ортогональный ряд (1) сходится к некоторой функции $f(x) \in L^2$ в метрике пространства L^2 .

Хорошо известно существование ортогональных разложений, расходящихся всюду на $[a, b]$ (см. [1, 4]), поэтому вопросы суммирования ортогональных рядов привлекают внимание многих авторов.

Так, С. Качмаж ([4], стр. 222) в 1925 году доказал теорему: для того, чтобы любой ортогональный ряд (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (2) был почти всюду $(C, 1)$ -суммируемым, необходимо и достаточно, чтобы подпоследовательность его частичных сумм $\{S_{2^n}(x)\}$ сходилась почти всюду. Эту теорему через два года А. Зигмунд распространил на случай суммируемости методом Чезаро (C, p) при всех $p > 0$ и метод Пауссона—Абея (см. [4], стр. 219; [1], стр. 118).

Следуя Д. Е. Меньшову [5] и О. А. Зиза [3], приведем следующие определения.

¹ Если пределы изменения индексов у знака \sum не указаны, то индекс суммирования пробегает все натуральные значения от 1 до ∞ .

Всюду \lim_n означает $\lim_{n \rightarrow \infty}$.

Два метода A и B называются эквивалентными в пространстве L^2 , если для любого множества E с $\text{mes } E > 0$ всякий ряд (1), суммируемый методом A на E , будет суммируемым и методом B почти всюду на E , и наоборот: всякий ряд (1), суммируемый методом B на E , будет и A -суммируемым почти всюду на E .

Пусть $\{n_m\}_{\infty}^1$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Говорят, что последовательность $\{S_n\}$ суммируема методом $T[n_m]$ к числу s , если

$$\lim_m S_{n_m} = s.$$

В 1935 году С. Качмаж установил, что суммируемость почти всюду ортогонального ряда из L^2 регулярным линейным методом влечет за собой сходимость некоторой подпоследовательности частичных сумм $\{S_{n_m}(x)\}$ этого ряда почти всюду (см. [1], стр. 132). На вопрос о существовании обратного утверждения Д. Е. Меньшов [5] доказал, что существует такой линейный вполне регулярный метод T и такая ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, определенная и ограниченная в совокупности на $[0, 1]$, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_m\}$ метод T не эквивалентен сходимости подпоследовательности $\{S_{n_m}(x)\}$ ортогонального ряда (1) из пространства L^2 . А. Зигмунд, обобщая вышеприведенный результат С. Качмажа, в действительности установил, что методы (C, p) при $p > 0$ и Пауссона—Абеля эквивалентны в пространстве L^2 методу $T[2^m]$ (см. [4], стр. 219; [1], стр. 127). Затем О. А. Зиза [3] доказала, что в пространстве L^2 все методы Эйлера—Кноппа (E, q) при $q > 0$ и экспоненциальный метод Бореля эквивалентны методу $T[m^2]$.

В связи с этим возникает вопрос о рассмотрении класса линейных методов суммирования, эквивалентных сходимости некоторой подпоследовательности частичных сумм ортогональных рядов.

2. В настоящей статье покажем, что в пространстве L^2 метод (L, α) при $0 \leq \alpha \leq 1$ также эквивалентен методу $T[2^m]$. Напомним: числовой ряд $\sum u_k$ с частичными суммами

$$U_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

называется суммируемым методом (L, α) к числу s , если

$$\lim_n \sum_k a_{nk} U_k = s,$$

где

$$a_{nk} = \Delta \lambda^{(\alpha)}_{nk} = \lambda^{(\alpha)}_{nk} - \lambda^{(\alpha)}_{n, k+1},$$

$$\lambda^{(\alpha)}_{nk} = k^\alpha (1 - r_n)^\alpha r_n^k (1 - r_n^k)^{-\alpha},$$

а r_n — любая возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к единице. Метод (L, α) объединяет

(см. [2, 6]) хорошо известные методы Пауссона—Абеля ([7], стр. 20) и Ламберта ([7], стр. 458). В дальнейшем будем считать $0 \leq \alpha \leq 1$. Метод суммирования (L, α) регулярен при $0 \leq \alpha \leq 2$ (см. [2], стр. 61 и 65). Обозначим (L, α) -средние ряда (1) через $L^{(\alpha)}_n(x)$. Далее, обозначим

$$R^{(\alpha)}_n(x) = L^{(\alpha)}_n(x) - S_{2^n}(x). \quad (3)$$

Лемма 1. Пусть $r_n = 1 - 2^{-n}$. Если выполнено условие (2), то почти всюду на $[a, b]$ имеет место $\lim_n R^{(\alpha)}_n(x) = 0$.

Доказательство. Так как $(L, 0)$ — метод Пауссона—Абеля, то при $\alpha = 0$ лемма следует из вышеуказанного результата А. Зигмунда. Положим $0 < \alpha \leq 1$. По теореме Леви ([4], стр. 17, [1], стр. 19) достаточно показать сходимость ряда

$$\sum_n \int_a^b [R^{(\alpha)}_n(x)]^2 dx.$$

Поэтому представим разность (3) в виде

$$R^{(\alpha)}_n(x) = P^{(\alpha)}_n(x) + Q^{(\alpha)}_n(x),$$

где

$$P^{(\alpha)}_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} (\lambda^{(\alpha)}_{nk} - 1) c_k \varphi_k(x), \quad Q^{(\alpha)}_n(x) = \sum_{k=2^{n+1}}^{\infty} \lambda^{(\alpha)}_{nk} c_k \varphi_k(x).$$

Ввиду неравенства

$$\begin{aligned} \sum_n \int_a^b [R^{(\alpha)}_n(x)]^2 dx &\leq 2 \sum_n \int_a^b [P^{(\alpha)}_n(x)]^2 dx + 2 \sum_n \int_a^b [Q^{(\alpha)}_n(x)]^2 dx = \\ &= 2[A(r_n) + B(r_n)], \end{aligned}$$

остается доказать сходимость каждого из рядов в правой части последнего неравенства.

Для этого заметим, что для любой последовательности $0 < r_n \uparrow 1$ и $0 \leq \alpha \leq 2$ имеет место неравенство

$$0 \leq 1 - \lambda^{(\alpha)}_{nk} < k(1 - r_n). \quad (4)$$

Действительно, $1 - \lambda^{(\alpha)}_{nk} \geq 0$ при $0 \leq \alpha \leq 2$ (см. [2], стр. 67—68), а при $0 < q < 1$ имеем

$$\begin{aligned} 1 - k^\alpha (1 - q)^\alpha (1 - q^k)^{-\alpha} q^k &= 1 - q^k k^\alpha (1 + q + \dots + q^{k-1})^{-\alpha} < \\ < 1 - q^k &= (1 + q + \dots + q^{k-1})(1 - q) < k(1 - q). \end{aligned}$$

Используя свойство ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$ и неравенство (4), получаем

$$A(r_n) = \sum_n \sum_{k=1}^{2^n} (1 - \lambda^{(\alpha)}_{nk})^2 c_{2^k}^2 \leq \sum_n \sum_{k=1}^{2^n} k^2 (1 - r_n)^2 c_{2^k}^2.$$

Полагая здесь $r_n = 1 - 2^{-n}$ и изменяя порядок суммирования, находим

$$\begin{aligned} A(1 - 2^{-n}) &= \sum_n 2^{-2n} \sum_{k=1}^{2^n} k^2 c_{2^k}^2 \leq \\ &\leq \sum_k k^2 c_{2^k}^2 \sum_{n=\lfloor \log_2 k \rfloor}^{\infty} 2^{-2n} = O(1) \sum_k c_{2^k}^2 < \infty. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} B(r_n) &= \sum_n \sum_{k=2^{n+1}}^{\infty} (\lambda^{(\alpha)}_{nk})^2 c^2_k \leq \\ &\leq \sum_n \left(\frac{1-r_n}{1-r_n^2} \right)^{2\alpha} \sum_{k=2^{n+1}}^{\infty} k^{2\alpha} r_n^{2k} c^2_k. \end{aligned}$$

Так как $1 - (1 - 2^{-n})^{2^n} \rightarrow 1 - e^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} B(1 - 2^{-n}) &= O(1) \sum_n 2^{-2n\alpha} \sum_{k=2^{n+1}}^{\infty} k^{2\alpha} (1 - 2^{-n})^{2k} c^2_k = \\ &= O(1) \sum_k k^{2\alpha} c^2_k \sum_n 2^{-2n\alpha} (1 - 2^{-n})^{2k}. \end{aligned}$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} \sum_n 2^{-2n\alpha} (1 - 2^{-n})^{2k} &\leq \int_0^{\infty} 2^{-2t\alpha} (1 - 2^{-t})^{2k} dt = \\ &= \ln^{-1} 2 \cdot B(2k + 1, 2\alpha) = O(k^{-2\alpha}) \end{aligned}$$

(см. [7], стр. 127), то

$$B(1 - 2^{-n}) = O(1) \sum_k c^2_k < \infty.$$

Лемма 2. Метод (L, α) сильнее метода $(C, 1)$.

Доказательство см. [6], стр. 104—105.

Теперь может быть доказана

Теорема 1. Для того, чтобы ортогональный ряд (1) из L^2 являлся (L, α) -суммируемым почти всюду на E , необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{S_{2^n}(x)\}$ сходилась почти всюду на E .

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд (1) является (L, α) -суммируемым на множестве $E \subset [a, b]$. Тогда на E подалюбо существует конечный предел $\lim_n L^{(\alpha)}_n(x)$ при $r_n = 1 - 2^{-n}$. По лемме 1 почти всюду на E также существует $\lim_n S_{2^n}(x)$.

Достаточность непосредственно следует из вышепри-
веденного результата С. Качмажа и леммы 2.

3. В заключении данной статьи находим точные множители Зейля для метода суммирования Ламберта (L, α) .

Функция $v(n)$ называется точным множителем Вейля для метода суммирования T , если: а) из условия $\sum c^2_n v(n) < \infty$ следует суммируемость почти всюду методом T ряда (1); б) для любой функции $u(n)$, $0 < u(n) = o(v(n))$, существует ортогональный ряд (1), не суммируемый методом T ни в одной точке на отрезке $[a, b]$, и такой, что

$$\sum_n c^2_n u(n) < \infty.$$

Как известно, точным множителем Вейля для сходимости (теорема Д. Е. Меньшова—Р. Радемахера, см. [1], стр. 87)

является функция $\ln^2 n$. О. А. Зиза [3] показала, что точным множителем Вейля для методов Эйлера (E, q) при $q > 0$ и Бореля также является функция $\ln^2 n$.

Оказывается, что если вместо сходимости потребовать суммируемость ортогонального ряда (1) методом (L, α) , то точный множитель Вейля становится «лучше», а именно $v(n) = \ln^2 \ln n$.

Для доказательства используем лемму.

Лемма 3. Если некоторый метод T эквивалентен в пространстве L^2 методу $T [n_m]$, то точным множителем Вейля для метода T является функция $v(n) = \ln^2 t$, где $n_m \leq n < n_{m+1}$, $m = 1, 2, \dots$.

Доказательство см. [3], стр. 375.

Из леммы 3 при $n_m = 2^m$ и теоремы 1 следует

Теорема 2. Точным множителем Вейля для метода суммирования Ламберта (L, α) при $0 \leq \alpha \leq 1$ является функция $v(n) = \ln^2 \ln n$.

Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963
2. Жогин И. И., (L, α) -суммирование. Уч. зап. Свердлов. гос. пед. ин-т, 1967, 54, 68—82.
3. Зиза О. А., О суммировании ортогональных рядов методами Эйлера. Матем. сб., 1965, 66, № 3, 354—377.
4. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Москва, 1958.
5. Меньшов Д. Е., О суммировании ортогональных рядов линейными методами. Тр. Моск. матем. о-ва, 1961, 10, 351—352.
6. Стёпин В. П., (L, α) -суммирование рядов Фурье. Явление Гиббса. Матем. зап. Уральский ун-т, 1968, 6, № 4, 103—108.
7. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.

Поступило
16 II 1971

ORTOGONAALRIDADE ÜHEST SUMMEERIMISMENETLUSEST

V. Stöpin

Resümee

Artiklis näidatakse ruumi L^2 ortogonaalridade Lamberti (L, α) -summeeruvuse ($0 \leq \alpha \leq 1$) ja $T[2^n]$ -summeeruvuse ekvivalentsus. Leitakse ka Weyli tegurid (L, α) -menetluse jaoks.

ÜBER EIN SUMMIERUNGSVERFAHREN DER ORTHOGONALREIHEN

W. Stjopin

Zusammenfassung

Es wird die Äquivalenz der Lambert (L, α) -Summierbarkeit mit $0 \leq \alpha \leq 1$ und $T[2^n]$ -Summierbarkeit der Orthogonalreihen aus dem Raum L^2 bewiesen. Auch werden genaue Weyl-Faktoren für (L, α) -Verfahren abgeleitet.

О ЛОКАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

С. Барон

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

Пусть f — вещественная 2π -периодическая функция, интегрируемая на $(-\pi, \pi)$ по Лебегу. Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \quad (1)$$

является рядом Фурье функции f , а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nt - b_n \cos nt) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \quad (2)$$

является сопряженным с рядом (1).

Если для f существует производная $f' \in L(-\pi, \pi)$, то

$$f'(t) \sim C - \sum_{n=1}^{\infty} n B_n(t), \quad C = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt.$$

Если же f абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, то $C = 0$, ибо f предполагаем 2π -периодичной. Вообще (см. [1], стр. 87—88; [5], стр. 72), если существует абсолютно непрерывная на $[-\pi, \pi]$ производная $f^{(r-1)}$, то¹ (см. [16], стр. 63—64)

$$f^{(r)}(t) \sim (-1)^{(r+1)/2} \sum n^r B_n(t) \quad \text{при нечетном } r,$$

$$f^{(r)}(t) \sim (-1)^{r/2} \sum n^r A_n(t) \quad \text{при четном } r.$$

Пусть A — нормальный метод суммирования рядов, определенный в виде преобразования ряда в последовательность матрицей (a_{nk}) , а в виде преобразования ряда в ряд матрицей (α_{nk}) .

¹ Если пределы суммирования у знака \sum не указаны, то суммирование происходит по индексу n от 0 до ∞ . Во всех условиях и оценках свободные индексы принимают все значения 1, 2, ...

В статьях [2, 4] доказаны общие теоремы о локальном свойстве абсолютной A -суммируемости рядов

$$\sum \lambda_n A_n(t) \quad (3)$$

и

$$\sum \lambda_n B_n(t), \quad (4)$$

если метод A и числовая последовательность $\lambda = \{\lambda_n\}$ удовлетворяют некоторым условиям. Из общих теорем статей [2, 4] вытекают все известные, для конкретных A и λ , теоремы о локальном свойстве $|A|$ -суммируемости рядов (3) и (4). Напомним относящиеся сюда определения.

Ряд

$$\sum u_n \quad (5)$$

называется *абсолютно A -суммируемым*, коротко *$|A|$ -суммируемым*, если

$$\sum |u'_n| < \infty,$$

где

$$u'_n = \sum_{k=0}^n \bar{a}_{nk} u_k = \sum_{k=0}^n \Delta \bar{a}_{nk} U_k, \quad U_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Говорят, что $|A|$ -суммируемость ряда (3) (или (4)) является *локальным свойством функции f в точке x* , если $|A|$ -суммируемость ряда (3) (соответственно (4)) в точке x зависит от поведения f лишь в произвольно малой окрестности точки x .

Говорят, что $|A|$ -суммируемость ряда (3) (или (4)) является *локальным свойством функции f* , если она является локальным свойством f в каждой точке x .

Говорят, что $|A|$ -суммируемость ряда (3) (или (4)) *не является локальным свойством функции f* , если найдутся промежутки $(x + \alpha, x + \beta)$, где $x < x + \alpha < x + \beta < x + 2\pi$, и функция, равная f в $(x + \alpha, x + \beta)$ и равная нулю в $(x, x + \alpha) \cup (x + \beta, x + 2\pi)$, для которой ряд (3) (соответственно (4)) не является $|A|$ -суммируемым в точке x .

Целью настоящей статьи является получение таких же общих теорем, как в [2, 4], о локальном свойстве $|A|$ -суммируемости r раз продифференцированного ряда (3), т. е. ряда

$$\sum \lambda_n \frac{d^r}{dt^r} A_n(t), \quad (6)$$

в частности, о локальном свойстве $|A|$ -суммируемости продифференцированного ряда (1), т. е. ряда

$$-\sum n B_n(t). \quad (7)$$

Еще Хислоп ([16], теорема 1) фактически доказал (см. [17], стр. 66; [14], стр. 18), что чезаровская $|C, \alpha|$ -суммируемость r раз продифференцированного ряда (1) является локальным свойством f при $\alpha > r + 1$. Отсюда $|C, \alpha|$ -суммируемость ряда (7) является локальным свойством f при $\alpha > 2$. Однако Лал ([17], теорема 1) доказал, что $|C, 2|$ -суммируемость ряда (7) не

является локальным свойством f . Отсюда Меротра ([18], стр. 58) делает заключение, что $|C, \alpha|$ -суммируемость ряда (7) при $0 < \alpha \leq 2$ и абсолютные суммируемости ряда (7) при $|P| \subset \subset |C, 1|$ методом Вороного—Нёрлунда $P = (WN, p_n)$ и методом $P(C, 1)$ не являются локальным свойством функции f . Далее, Бхатт ([13], теорема 1) доказал, что $|l(C, 1)|$ -суммируемость ряда (7) не является локальным свойством f , где $l = (R, (n+1)^{-1})$ — метод логарифмических средних. Для метода взвешенных средних Рисса $Q = (R, q_n)$ Саксена ([21], теорема 1) показал, что $|Q(C, 1)|$ -суммируемость продифференцированного ряда (3) не является локальным свойством f , если выполнены следующие условия: $\lambda_n > 0$, $\lambda_n q_n / Q_n \downarrow 0$ и $\sum \lambda_n q_n / Q_n = \infty$. Наконец, Бхатт ([14], теорема 1) доказал, что $|C, r+1|$ -суммируемость r раз продифференцированного ряда Фурье (1) не является локальным свойством функции f . Все вышеназванные результаты о том, когда $|A|$ -суммируемость ряда (6) для конкретных A и λ не является локальным свойством f , содержатся в следующей общей теореме (см. [4], теорема 6), где обозначено (здесь и всюду в дальнейшем)

$$\gamma_n = \lambda_n a_{nn},$$

$$\omega_n = n^r \gamma_n.$$

Теорема 1. Если выполнены условия

$$a_{nn} \in (|A|, |E|) \quad (8)$$

и

$$\sum |\omega_n| = \infty,$$

то $|A|$ -суммируемость r раз продифференцированного ряда (3) не является локальным свойством функции f .

Напомним, что комплексные числа ε_n называются *множителями сходимости типа* $(|A|, |E|)$, коротко $\varepsilon_n \in (|A|, |E|)$, если для любого $|A|$ -суммируемого ряда (5) абсолютно сходится ряд

$$\sum \varepsilon_n u_n. \quad (9)$$

Как следует из общей теоремы Кангро ([8], теорема 3), условие (8) выполнено для всех методов A , для которых $\sum |\eta_n a_{nn}| < \infty$ (это условие отпадает при $a_{n0} = 1$) и $\sum n D_n < \infty$ (см. [3], стр. 50—51 и 165; или [4], стр. 224—225).

Из результатов недавно появившейся статьи Мохapatры ([20], теоремы 1 и 2) вытекает, что условие (8) выполнено, например, для методов $A = PQ$ и $A = QP$, если $|p_0| + |p_1| + \dots + |p_n| = O(P_n)$, $\sum |c_n| < \infty$, где $\sum c_n x^n = (\sum p_n x^n)^{-1}$, и если в первом случае $q_{n+1}/Q_{n+1} = O(q_n/Q_n)$, а во втором случае $q_n/Q_n = O(q_k/Q_k)$ при $k \leq n$.

Для методов $A = P$ последний результат получил раньше Дас (см. [4], лемма 9).

Оказывается, что если $|A|$ -суммируемость ряда (6) не является локальным свойством функции f , то при дополнительных условиях на матрицу A и члены этого ряда $|A|$ -суммируемость ряда (6) становится локальным свойством функции f в данной точке x . Нахождение таких условий — основная цель настоящей статьи.

§ 2. Основные леммы

Обозначим чезаровские суммы (см. [3], стр. 66—68; [5], стр. 130) последовательности $\{U_n\}$ частичных сумм ряда (5) через S_n^α , т. е.

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^n S_k^{\alpha-1} = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} U_k = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\alpha u_k.$$

Пусть $p = 0, 1, \dots$. Для $s = 0, 1, \dots, p+1$ обозначим

$$v^s_k = \sum_{n=k}^{\infty} |\Delta^s \bar{a}_{nk}|.$$

Для дальнейшего важна следующая лемма (ср. [4], леммы 1 и 5 и замечание на стр. 223) о множителях суммируемости.

Лемма 1. Пусть нормальный метод A при некотором p удовлетворяет условию

$$v_n^{p+1} = O(a_{nn}). \quad (10)$$

Пусть A и числа ε_n удовлетворяют условиям

$$v_{n+\kappa}^{p+1-\kappa} \Delta^\kappa \varepsilon_n = O(\varepsilon_n a_{nn}) \quad (\kappa = 1, \dots, p+1). \quad (11)$$

Если

$$\sum |\varepsilon_n a_{nn} S^n| < \infty, \quad (12)$$

то ряд (9) является $|A|$ -суммируемым.

Доказательство. Рассмотрим метод B с матрицей $(\bar{\beta}_{nk})$ преобразования ряда в ряд, где

$$\bar{\beta}_{nk} = \varepsilon_k \bar{a}_{nk}.$$

Применяя последовательно $p+1$ раз преобразование Абеля, ввиду треугольности метода A находим

$$v'_n = \sum_{k=0}^n \bar{\beta}_{nk} u_k = \sum_{k=0}^n \Delta \bar{\beta}_{nk} \cdot U_k = \dots = \sum_{k=0}^n \Delta^{p+1} \bar{\beta}_{nk} \cdot S^p_k.$$

По формуле разности произведения ([3], стр. 158) имеем

$$\Delta^{p+1} \bar{\beta}_{nk} = \sum_{\kappa=0}^{p+1} \binom{p+1}{\kappa} \Delta^\kappa \varepsilon_k \cdot \Delta^{p+1-\kappa} \bar{a}_{n,k+\kappa}.$$

Следовательно, ввиду (10), (11) и (12)

$$\begin{aligned} \sum |v'_n| &\leq \sum_k |S^{p_k}| \sum_{n=k}^{\infty} |\Delta^{p+1} \bar{\beta}_{nk}| \leq \\ &\leq \sum_{\kappa=0}^{p+1} \binom{p+1}{\kappa} \sum_k |S^{p_k} \Delta^{\kappa} \varepsilon_k| v_{k+\kappa}^{p+1-\kappa} < \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{2} \{f(x+t) + f(x-t)\},$$

$$\psi_x(t) = \frac{1}{2} \{f(x+t) - f(x-t)\},$$

$$j = \frac{p}{2}, \quad h = j + \frac{1}{2}.$$

Обозначим

$$\sum'_k = \sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty}.$$

Лемма 2. Пусть функция χ непрерывна на всем отрезке $[0, \pi]$, причем $\chi(0+) = 0$, и дважды дифференцируема, кроме, быть может, в точке $\delta \in (0, \pi)$, но существуют $\chi'(\delta^-)$ и $\chi'(\delta^+)$. Если производная χ' ограничена, а вторая производная χ'' конечна и интегрируема по Лебегу, то при четном p

$$a) \int_0^{\pi} \varphi_x(u) \chi(u) \sin(n+h)u \, du = O(1) \left\{ \sum'_k \frac{|A_k(x)|}{(n-k)^2} + |A_n(x)| \right\},$$

$$б) \int_0^{\pi} \psi_x(u) \chi(u) \cos(n+h)u \, du = O(1) \left\{ \sum'_k \frac{|B_k(x)|}{(n-k)^2} + |B_n(x)| \right\},$$

а при нечетном p

$$в) \int_0^{\pi} \varphi_x(u) \chi(u) \cos(n+h)u \, du = O(1) \left\{ \sum'_k \frac{|A_k(x)|}{(n-k)^2} + |A_n(x)| \right\},$$

$$г) \int_0^{\pi} \psi_x(u) \chi(u) \sin(n+h)u \, du = O(1) \left\{ \sum'_k \frac{|B_k(x)|}{(n-k)^2} + |B_n(x)| \right\},$$

где $B_0(x) = 0$, а для отрицательных k положено $A_k(x) = A_{-k}(x)$ и $B_k(x) = -B_{-k}(x)$.

Доказательство приведем для случая в), ибо в других случаях лемма 2 хорошо известна.

Так как h — целое число при нечетном p , то можем $n+h$ заменить на n .

Ввиду (1) имеем

$$\varphi_x(t) \sim \sum_k A_k(x) \cos kt$$

(см. [5], стр. 89) и, следовательно, обозначив

$$X_n = 2 \int_0^\pi \varphi_x(u) \chi(u) \cos nu \, du,$$

так как χ имеет ограниченную вариацию на $[0, \pi]$, получаем

$$\begin{aligned} X_n &= 2 \sum_k A_k(x) \int_0^\pi \chi(u) \cos ku \cos nu \, du = \\ &= \sum_k A_k(x) \int_0^\pi \chi(u) \cos(n+k)u \, du + \\ &+ \sum_k A_k(x) \int_0^\pi \chi(u) \cos(n-k)u \, du = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_k A_k(x) \int_0^\pi \chi(u) \cos(n-k)u \, du, \end{aligned}$$

где $l_k = 1$ при $k \neq 0$ и $l_k = 2$ при $k = 0$.

Так как χ' существует в $[0, \delta]$ и $(\delta, \pi]$ и ограничена, то (см. [9], стр. 147) в этих промежутках χ является неопределенным интегралом для χ' . Ввиду непрерывности χ на $[0, \pi]$, интегрируя по частям (см. [7], стр. 261), находим

$$\begin{aligned} X_n &= \left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \right) l_k A_k(x) \left\{ \chi(u) \frac{\sin(n-k)u}{n-k} \Big|_0^\pi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n-k} \int_0^\pi \chi'(u) \sin(n-k)u \, du \right\} + \\ &+ A_n(x) \int_0^\pi \chi(u) \, du = \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \right) \frac{1}{n-k} l_k A_k(x) \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) \chi'(u) \sin(n-k)u \, du + \\ &+ O(1) \cdot A_n(x) \end{aligned}$$

(в случаях а) и б) аналогичное равенство верно при $\chi(0+) = 0$).

Далее, так как χ'' существует и конечна в $[0, \delta]$ и $(\delta, \pi]$, причем $\chi'' \in L[0, \pi]$, то в этих промежутках χ' является неопределенным интегралом для χ'' (см. [9], стр. 292). Поэтому, снова интегрируя по частям, получаем при $k \neq n$

$$\int_0^{\delta} \chi'(u) \sin(n-k)u \, du = -\chi'(u) \frac{\cos(n-k)u}{n-k} \Big|_0^{\delta} + \\ + \frac{1}{n-k} \int_0^{\delta} \chi''(u) \cos(n-k)u \, du = \\ = O\left(\frac{1}{n-k}\right),$$

ибо $\chi'(t) = O(1)$. Аналогично при $k \neq n$ также

$$\int_0^{\pi} \chi'(u) \sin(n-k)u \, du = O\left(\frac{1}{n-k}\right).$$

В итоге

$$X_n = O(1) \left\{ \left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \right) \frac{1}{(n-k)^2} |A_k(x)| + |A_n(x)| \right\}.$$

Случаи а) и г) леммы 2 имеются в статье Бхатта ([14], стр. 20).

Доказательство случая а) леммы 2 фактически имеется в статье Бозанкет—Оффорда ([15], стр. 276). Оно приведено в статьях Бхатта ([10], стр. 75—77; [11], стр. 16—18; [12], стр. 791—792) при $p = 0$, что не ограничивает общности. Случай б) леммы 2 при $p = 0$ доказан в статье Саксены ([22], стр. 189—190).

Доказательство случая г) леммы при $p = 1$ дано в статье Лала ([17], стр. 72—73).

§ 3. Разложение чезаровских сумм продифференцированного ряда Фурье

Обозначим величины S_n^p для r раз продифференцированного ряда (1) через $T_n^p(x)$, т. е.

$$T_n^p(x) = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^p \frac{d^r}{dx^r} A_k(x).$$

Пусть D_n — ядро Дирихле. Обозначим

$$D_n^p(t) = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{p-1} D_k(t).$$

Теперь, если r — четное число, то, обозначив через S_n частичные суммы ряда (1), находим (ср. [5], стр. 88; [6], стр. 96)

$$\begin{aligned}
 T_n^{p,r}(x) &= \frac{d^r}{dx^r} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{p-1} S_k(x) = \\
 &= \frac{2}{\pi} \frac{d^r}{dx^r} \int_0^\pi \varphi_x(u) D_n^p(u) du = \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(u) \frac{d^r}{du^r} D_n^p(u) du. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Если же r — нечетное число, то (см. [4], стр. 224)

$$\begin{aligned}
 T_n^{p,r}(x) &= (-1)^{(r+1)/2} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^p k^r B_k(x) = \\
 &= -(-1)^{(r+1)/2} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi_x(u) \sum_{k=1}^n A_{n-k}^p k^r \sin ku du = \\
 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi_x(u) \frac{d^r}{du^r} D_n^p(u) du. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Таким образом, свойства ядер D_n^p играют существенную роль при исследовании вопросов $|A|$ -суммируемости ряда (6). Поэтому найдем сначала удобный для дифференцирования вид этих ядер. Действительно (см. [5], стр. 158), при $p = 0, 1, \dots$ имеем

$$D_n^p(t) = \operatorname{Im} \frac{e^{i(n+1/2)t}}{2 \sin(t/2)} \sum_{\mu=0}^n A_\mu^{p-1} e^{-i\mu t} = \operatorname{Im} \{N_n^1(t) + N_n^2(t)\},$$

где (см. [6], стр. 95)

$$N_n^1(t) = \begin{cases} -\frac{e^{-it/2}}{2 \sin(t/2)} \sum_{\mu=1}^p \frac{A_n^{p-\mu}}{(1-e^{-it})^\mu} & \text{при } p \geq 1, \\ 0 & \text{при } p = 0, \end{cases}$$

$$N_n^2(t) = \frac{e^{i(n+1/2)t}}{(1-e^{-it})^p 2 \sin(t/2)}.$$

Зафиксируем произвольное δ с $0 < \delta < \pi$.

Так как в выражении N_n^1 от n зависит лишь $A_n^{p-\mu}$, то при $t \in [\delta, \pi]$

$$\frac{d^r}{dt^r} N_n^1(t) = O(n^{p-1}) \quad (p = 1, 2, \dots),$$

или короче

$$\frac{d^r}{dt^r} N_n^1(t) = O(A_n^{p-1}).$$

По формуле Лейбница

$$\frac{d^r}{dt^r} N_n^2(t) = Y_n(t) + Z_n(t),$$

где

$$Y_n(t) = \sum_{\mu=0}^{r-1} \binom{r}{\mu} \frac{d^\mu}{dt^\mu} e^{i(n+1/2)t} \cdot \frac{d^{r-\mu}}{dt^{r-\mu}} \omega(t),$$

$$Z_n(t) = [i(n+1/2)]^r e^{i(n+1/2)t} \omega(t),$$

$$\omega(t) = [(1 - e^{-it})^p 2 \sin(t/2)]^{-1}.$$

При $t \in [\delta, \pi]$ очевидно имеем

$$Y_n(t) = O(n^{r-1}). \quad (15)$$

Далее, так как $1 - e^{-it} = 2ie^{-it/2} \sin(t/2)$, то

$$\begin{aligned} Z_n(t) &= i^r (n+1/2)^r e^{i(n+1/2)t} [i^p e^{-ipt/2} 2^{p+1} \sin^{p+1}(t/2)]^{-1} = \\ &= i^{r-p} (n+1/2)^r e^{i(n+h)t} 2^{-p-1} \sin^{-p-1}(t/2). \end{aligned}$$

Следовательно, для $t \in [\delta, \pi]$ при четном $r - p$

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dt^r} D^{p_n}(t) &= O(A_n^{p-1}) + Y_n(t) + \\ &+ (-1)^{(r-p)/2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^r \frac{\sin(n+h)t}{[2 \sin(t/2)]^{p+1}}, \end{aligned} \quad (16)$$

а при нечетном $r - p$

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dt^r} D^{p_n}(t) &= O(A_n^{p-1}) + Y_n(t) + \\ &+ (-1)^{(r-p-1)/2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^r \frac{\cos(n+h)t}{[2 \sin(t/2)]^{p+1}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Предположим для конкретности, что r — нечетное, а p — четное число. Тогда $r - p$ нечетно и при помощи (14) и (17) получаем

$$T^{p_n} = -\frac{2}{\pi} (E_n + F_n + G_n + H_n), \quad (18)$$

где

$$E_n(x) = \int_0^\delta \psi_x(u) \frac{d^r}{du^r} D^{p_n}(u) du,$$

$$F_n(x) = -(-1)^{(r-p-1)/2} (n+1/2)^r \times$$

$$\times \int_0^\delta \psi_x(u) \frac{2 \sin(u/2)}{[2 \sin(\delta/2)]^{p+2}} \cos(n+h)u du,$$

$$G_n(x) = (-1)^{(r-p-1)/2} (n+1/2)^r \int_0^\pi \psi_x(u) \xi(u) \cos(n+h)u \, du,$$

$$H_n(x) = [O(A_n^{p-1}) + O(n^{r-1})] \int_0^\pi |\psi_x(u)| \, du,$$

$$\xi(t) = \xi(t, \delta) = \begin{cases} [2 \sin(\delta/2)]^{-p-2} \sin(t/2) & \text{при } 0 \leq t < \delta, \\ [2 \sin(t/2)]^{-p-1} & \text{при } \delta \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Если, наоборот, r — четное и p нечетное числа, то из (13) и (17) получаем для $-T p_n$ такое же разложение с функцией φ_x вместо ψ_x . Наконец, при четном $r - p$ получаем для $T p_n$ аналогичные разложения из (14) и (16) или (13) и (16).

В некоторых случаях оценка $O(n^{r-1})$ в выражении H_n слишком груба. Поэтому найдем также более подробное выражение для Y_n . Действительно, для $t \in [\delta, \pi]$ вместо (15) имеем

$$Y_n(t) = O(A_n^{r-2}) + [i(n+1/2)]^{r-1} e^{i(n+1/2)t} \omega'(t), \quad (19)$$

причем производная

$$\begin{aligned} \omega'(t) &= - \frac{2ipe^{-it} \sin(t/2) + (1 - e^{-it}) \cos(t/2)}{[2 \sin(t/2)]^2 (1 - e^{-it})^{p+1}} = \\ &= i^{2-p} \frac{e^{itp/2} [pe^{-it/2} + \cos(t/2)]}{[2 \sin(t/2)]^{p+2}}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} i^{r-1} e^{i(n+1/2)t} [2 \sin(t/2)]^{p+2} \omega'(t) &= \\ &= i^{r-p+1} e^{i(n+h)t} [(p+1) \cos(t/2) - ip \sin(t/2)] = \\ &= i^{r-p+1} \{ [(p+1) \cos(t/2) \cdot \cos(n+h)t + p \sin(t/2) \cdot \sin(n+h)t] + \\ &\quad + i[(p+1) \cos(t/2) \cdot \sin(n+h)t - p \sin(t/2) \cdot \cos(n+h)t] \} = \\ &= i^{r-p+1} \{ [(p+1) \cos(n+j)t - \sin(t/2) \cdot \sin(n+h)t] + \\ &\quad + i[(p+1) \sin(n+j)t + \sin(t/2) \cdot \cos(n+h)t] \}. \end{aligned}$$

Если, например, $r - p$ нечетно при нечетном r и четном p , то ввиду (17) и (19)

$$\begin{aligned} H_n(x) &= O(A_n^{p-1}) \int_0^\pi |\psi_x(u)| \, du + \int_0^\pi \psi_x(u) \operatorname{Im} Y_n(u) \, du = \\ &= F_n^1(x) + F_n^2(x) + G_n^1(x) + G_n^2(x) + H_n^1(x), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$T p_n = - \frac{2}{\pi} (E_n + F_n + F_n^1 + F_n^2 + G_n + G_n^1 + G_n^2 + H_n^1), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} F_n^1(x) &= -(-1)^{(r-p+1)/2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{r-1} \times \\ &\times \int_0^\delta \psi_x(u) \frac{2(p+1) \sin(u/2)}{[2 \sin(\delta/2)]^{p+3}} \sin(n+j)u \, du, \end{aligned}$$

$$F_n^2(x) = -(-1)^{(r-p+1)/2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{r-1} \times \\ \times \int_0^\delta \psi_x(u) \frac{\sin(u/2)}{[2 \sin(\delta/2)]^{p+2}} \cos(n+h)u \, du,$$

$$G_n^1(x) = (-1)^{(r-p+1)/2} (p+1) \left(n + \frac{1}{2} \right)^{r-1} \times \\ \times \int_0^\pi \psi_x(u) \eta(u) \sin(n+j)u \, du,$$

$$G_n^2(x) = (-1)^{(r-p+1)/2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{r-1} \int_0^\pi \psi_x(u) \zeta(u) \cos(n+h)u \, du,$$

$$H_n^1(x) = [O(A_n^{p-1}) + O(A_n^{r-2})] \int_\delta^\pi |\psi_x(u)| \, du,$$

$$\eta(t) = \eta(t, \delta) = \begin{cases} [2 \sin(\delta/2)]^{-p-3} 2 \sin(t/2) & \text{при } 0 \leq t < \delta, \\ [2 \sin(t/2)]^{-p-2} & \text{при } \delta \leq t \leq \pi, \end{cases}$$

$$\zeta(t) = \zeta(t, \delta) = \begin{cases} [2 \sin(\delta/2)]^{-p-2} \sin(t/2) & \text{при } 0 \leq t < \delta, \\ 2^{-p-2} \sin^{-p-1}(t/2) & \text{при } \delta \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

В остальных случаях четности r и p чезаровские суммы T_p^n разлагаются аналогично.

§ 4. Основные теоремы

Теперь можем приступить к решению нашей задачи. Действительно, по лемме 1, положив в ней $\varepsilon_n = \lambda_n$, при выполнении условий (10) и

$$\nu_{n+x}^{p+1-x} \Delta^x \lambda_n = O(\gamma_n) \quad (x = 1, \dots, p+1) \quad (21)$$

ряд (6) является $|A|$ -суммируемым, если

$$\sum |\gamma_n T_p^n(x)| < \infty. \quad (22)$$

Пусть для конкретности r нечетно и p четно. Тогда для чезаровских сумм T_p^n имеет место разложение (18). Поэтому выполнение условия (22) сводится к выполнению условий

$$\sum |\gamma_n E_n(x)| < \infty, \quad \sum |\gamma_n F_n(x)| < \infty, \quad (23)$$

$$\sum |\gamma_n G_n(x)| < \infty, \quad \sum |\gamma_n H_n(x)| < \infty. \quad (24)$$

Однако в $E_n(x)$ и $F_n(x)$ входят значения функции f лишь из $(x - \delta, x + \delta)$. Следовательно, выполнение условий (23) зависит от значений f лишь из окрестности точки x . Выполнение второго из условий (24) вытекает из следующих условий:

$$\sum A_n^{p-1} |\gamma_n| < \infty, \quad (25)$$

$$\sum (n+1)^{-1} |\omega_n| < \infty. \quad (26)$$

Но $G_n(x) = O(n^r)$. Следовательно, доказана

Теорема 2. Пусть нормальный метод A при некотором p удовлетворяет условию (10). Пусть A и λ удовлетворяют условиям (21). Если выполнены условия (25) и

$$\sum |\omega_n| < \infty, \quad (27)$$

то $|A|$ -суммируемость ряда (6) является локальным свойством функции f .

Теперь можем доказать теорему, показывающую при каких условиях $|A|$ -суммируемость ряда (6) становится локальным свойством функции f в данной точке x .

Теорема 3. Пусть нормальный метод A при некотором p удовлетворяет условию (10). Пусть A и λ удовлетворяют условиям (21), (25), (26) и

$$\omega_n = O(\omega_k) \quad (k < n), \quad (28)$$

$$\omega_n = O(\omega_{n+k}) \quad (k < n). \quad (29)$$

Если при четном r

$$\sum \omega_n |A_n(x)| < \infty, \quad (30)$$

а при нечетном r

$$\sum \omega_n |B_n(x)| < \infty, \quad (31)$$

то $|A|$ -суммируемость ряда (6) является локальным свойством функции f в точке x .

Доказательство. Пусть r и p — соответственно нечетное и четное числа. Учитывая предыдущие рассуждения и выкладки, нам остается доказать выполнение первого из условий (24). Так как ξ удовлетворяет условиям леммы 2 для χ , то применим к G_n случай б) леммы 2 и оценим каждую из ее четырех частей в отдельности. Однако последнее вытекает из доказательства теоремы 1 статьи [4], если в ней γ_n заменить на ω_n .

Если же p — нечетное число при нечетном r , то разлагаем G_n на четыре части, применяя случай г) леммы 2. Если, наконец, r — четное число, то для разложения G_n применяем случай а) леммы 2 при четном p и случай в) при нечетном p . Теорема 3 доказана.

Для многих методов суммирования, например, для $A = (C, \alpha)$ с $0 < \alpha < 1$ условия (26) и (28) не выполняются даже при $r = 1$, если $\lambda_n \equiv 1$. Поэтому докажем следующую теорему, где условие (26) заменяется более слабым:

$$\sum (n+1)^{-2} |\omega_n| < \infty, \quad (32)$$

а вместо условия (28) требуется выполнение противоположного условия

$$\omega_k = O(\omega_n) \quad (k < n). \quad (33)$$

Теорема 4. Пусть нормальный метод A при некотором p удовлетворяет условию (10). Пусть A и λ удовлетворяют условиям (21), (25), (32), (33) и

$$\gamma_n = O(\gamma_k) \quad (k < n). \quad (34)$$

Если при четном r выполнено условие (30), а при нечетном r имеет место (31), то $|A|$ -суммируемость ряда (6) является локальным свойством функции f в точке x .

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2 применением леммы 1 сводим задачу к доказательству выполнения соотношения (22).

Пусть r и p — соответственно нечетное и четное числа. В данном случае разложением (18) мы пользоваться не можем, ибо второе из условий (24) приводит к условию (26), что грубее условия (32). Поэтому для чезаровских сумм T_n^p применим разложение (20). Так как $E_n(x)$, $F_n(x)$, $F_n^1(x)$ и $F_n^2(x)$ зависят от значений функции f лишь из окрестности $(x - \delta, x + \delta)$, то нам надо показать выполнение первого из условий (24) и

$$\sum |\gamma_n G_n^1(x)| < \infty, \quad \sum |\gamma_n G_n^2(x)| < \infty, \quad \sum |\gamma_n H_n^1(x)| < \infty. \quad (35)$$

Однако выполнение третьего из условий (35) вытекает из условий (25) и (32).

Остановимся на доказательстве выполнения первого из условий (24). Как и в доказательстве теоремы 3, применяя случай б) леммы 2 к интегралу G_n , разобьем его на четыре части и оценим каждую из них в отдельности.

Для первой части имеем (ср. [4], стр. 218)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n| \sum_{k=-\infty}^{-1} |B_k(x)| (n - k)^{-2} = L_1 + L_2,$$

где из (33), (32) и (31) вытекает

$$\begin{aligned} L_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n| \sum_{k=1}^n |B_k(x)| (n + k)^{-2} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} |\omega_n| \sum_{k=1}^n |\omega_k|^{-1} |\omega_k B_k(x)| < \infty, \end{aligned}$$

ибо (33) дает $|\omega_k|^{-1} = O(1)$; а из (33) и (31) также следует

$$\begin{aligned} L_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n| \sum_{k=n+1}^{\infty} |B_k(x)| (n + k)^{-2} = \sum_{k=2}^{\infty} |B_k(x)| \sum_{n=1}^{k-1} |\omega_n| (n + k)^{-2} = \\ &= O(1) \sum_{k=2}^{\infty} |\omega_k B_k(x)| < \infty. \end{aligned}$$

Для второй части запишем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} |\omega_n| \sum_{k=1}^{n-1} |B_k(x)| (n-k)^{-2} &= \sum_{n=2}^{\infty} |\omega_n| \sum_{k=1}^{n-1} |B_{n-k}(x)| k^{-2} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \sum_{n=k+1}^{\infty} (n-k)^r |\gamma_n B_{n-k}(x)| + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \sum_{n=k+1}^{\infty} [n^r - (n-k)^r] |\gamma_n B_{n-k}(x)| = M_1 + M_2.
\end{aligned}$$

Из (34) и (31) получаем

$$M_1 = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \sum_{n=k+1}^{\infty} |\omega_{n-k} B_{n-k}(x)| < \infty.$$

Обозначим $[n/2] = m$. Тогда

$$\begin{aligned}
M_2 &= \sum_{n=2}^{\infty} |\gamma_n| \left(\sum_{k=1}^m + \sum_{k=m+1}^{n-1} \right) k^{-2} [n^r - (n-k)^r] |B_{n-k}(x)| = \\
&= M_{21} + M_{22}.
\end{aligned}$$

Из (34) и (31) вытекает

$$\begin{aligned}
M_{21} &= O(1) \sum_{n=2}^{\infty} |\gamma_n| \sum_{k=1}^m k^{-2} (n-k)^r |B_{n-k}(x)| = \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^m k^{-2} |\omega_{n-k} B_{n-k}(x)| = \\
&= O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \sum_{n=k+1}^{\infty} |\omega_{n-k} B_{n-k}(x)| < \infty,
\end{aligned}$$

ибо $0 \leq n^r - (n-k)^r \leq 2^r (n-k)^r$ при $1 \leq k \leq m$. Далее, так как из (33) следует $|\omega_{n-k}|^{-1} = O(1)$, то из (33), (32) и (31) ВВОДИМ

$$\begin{aligned}
M_{22} &= \sum_{n=2}^{\infty} |\gamma_n| \sum_{k=m+1}^{n-1} k^{-2} [n^r - (n-k)^r] |B_{n-k}(x)| = \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{\infty} |\gamma_n| \sum_{k=m}^{n-1} n^{r-2} |B_{n-k}(x)| = \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{\infty} n^{-2} |\omega_n| \sum_{k=m}^{n-1} |\omega_{n-k}|^{-1} |\omega_{n-k} B_{n-k}(x)| = \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{\infty} n^{-2} |\omega_n| \sum_{k=m}^{n-1} |\omega_{n-k} B_{n-k}(x)| < \infty.
\end{aligned}$$

Для третьей части из (33) и (31) непосредственно заключаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n| \sum_{k=n+1}^{\infty} |B_k(x)| (n-k)^{-2} = \sum_{k=2}^{\infty} |B_k(x)| \sum_{n=1}^{k-1} |\omega_n| (n-k)^{-2} = \\ = O(1) \sum_{k=2}^{\infty} |\omega_k B_k(x)| < \infty.$$

Наконец, оценку четвертой части дает условие (31).

Следовательно, первое из условий (24) вытекает из условий (31)—(34). Заменяя в приведенных выкладках ω_n на ω_n/n , убеждаемся в том, что из этих же условий (31)—(34) по-прежнему так же следует выполнение первого и второго из условий (35). Заметим лишь, что для разложения G^1_n на четыре части применяем случай г) леммы 2 с $\chi = \eta$, ибо j — целое число ввиду четности p , а для разложения G^2_n применяем случай б) леммы 2, положив в ней $\chi = \zeta$.

Итак, в случае нечетного r и четного p теорема 4 доказана. В остальных случаях четности r и p доказательство аналогично.

§ 5. Применения к конкретным методам суммирования

Покажем, что из теорем 1—4 вытекают все известные результаты о локальном свойстве абсолютной суммируемости ряда (6) и, в частности, ряда (7).

1. Пусть A — метод Чезаро (C, α) с $\operatorname{Re} \alpha > -1$. Тогда $a_{nn} = 1/A_n^\alpha$, а по приведенной в § 1 теореме Кангро выполнено условие (8) теоремы 1 (ср. [2], стр. 117) при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ или $\alpha = 0$. Далее (см. [4], стр. 222),

$$v_h^s = \sum_{n=k}^{\infty} |nA_n^\alpha|^{-1} |kA_{n-k}^{\alpha-s-1} - sA_{n-k-1}^{\alpha-s}|.$$

Следовательно (см. [3], стр. 73),

$$v_n^s = \begin{cases} O(n^{-s}) & \text{при } s \leq \alpha \text{ или } s < \operatorname{Re} \alpha, \\ O(n^{-\operatorname{Re} \alpha}) & \text{при } s \geq \alpha \text{ или } s > \operatorname{Re} \alpha, \\ O(n^{-\operatorname{Re} \alpha}) \ln(n+2) & \text{при } s \neq \alpha \text{ с } s = \operatorname{Re} \alpha. \end{cases}$$

Поэтому условие (10) выполнено, если при $-1 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ возьмем $p = 0$, при $\alpha = 1, 2, \dots$ положим $p = \alpha - 1$, а при других α с $\operatorname{Re} \alpha \geq 1$ возьмем $p = [\operatorname{Re} \alpha]$. При таких p условия (25) и (21) сводятся к

$$\sum (n+1)^{p-1-\operatorname{Re} \alpha} |\lambda_n| < \infty, \quad \Delta^\kappa \lambda_n = O(n^{p+1-\operatorname{Re} \alpha - \kappa} \vartheta_n \lambda_n) \quad (36_1)$$

($\kappa = 1, \dots, p+1$) при $\operatorname{Re} \alpha \geq 1$ с $\alpha \neq 1$ и к условию

$$\Delta \lambda_n = O(\vartheta_n \lambda_n) \quad (36_2)$$

при $-1 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ или $\alpha = 1$, где

$$\vartheta_n = \begin{cases} n^{-\operatorname{Re} \alpha} & \text{при } 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1 \text{ или } \alpha = 1, \\ \ln^{-1}(n+1) & \text{при } \operatorname{Re} \alpha = 0, 1, \dots \text{ с } \operatorname{Im} \alpha \neq 0, \text{ если } \kappa = 1, \\ 1 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, из теорем 1—4 вытекают следующие следствия.

Следствие 1а. Если $\operatorname{Re} \alpha > 0$ или $\alpha = 0$ и

$$\sum (n+1)^{r-\operatorname{Re} \alpha} |\lambda_n| = \infty,$$

то $|C, \alpha|$ -суммируемость ряда (6) не является локальным свойством функции f . Если λ удовлетворяет условиям (36) и

$$\sum (n+1)^{r-\operatorname{Re} \alpha} |\lambda_n| < \infty,$$

то $|C, \alpha|$ -суммируемость ряда (6) является локальным свойством функции f .

Следствие 1б. Пусть λ удовлетворяет условиям (36) и

$\sum (n+1)^{r-1-\operatorname{Re} \alpha} |\lambda_n| < \infty$ (или $\sum (n+1)^{r-2-\operatorname{Re} \alpha} |\lambda_n| < \infty$),
причем при $k < n$

$$n^{r-\operatorname{Re} \alpha} \lambda_n = O(k^{r-\operatorname{Re} \alpha} \lambda_k), \quad \lambda_n = O(\lambda_{n+k})$$

(или при $k < n$

$$k^{r-\operatorname{Re} \alpha} \lambda_k = O(n^{r-\operatorname{Re} \alpha} \lambda_n), \quad \lambda_n/n^{\operatorname{Re} \alpha} = O(\lambda_k/k^{\operatorname{Re} \alpha})$$

соответственно). Если при четном r

$$\sum (n+1)^{r-\operatorname{Re} \alpha} |\lambda_n A_n(x)| < \infty,$$

а при нечетном r

$$\sum (n+1)^{r-\operatorname{Re} \alpha} |\lambda_n B_n(x)| < \infty,$$

то $|C, \alpha|$ -суммируемость ряда (6) является локальным свойством функции f в точке x .

В случае $\lambda_n = 1$ условия (36) выполнены при $\alpha > -1$ или нецелой $\operatorname{Re} \alpha > -1$ и из следствий 1а и 1б получаем все известные результаты о локальном свойстве $|C, \alpha|$ -суммируемости ряда (6).

Действительно, учитывая теорему 15.5 из [3], из следствия 1а непосредственно следует: $|C, \alpha|$ -суммируемость r раз продифференцированного ряда (1) не является локальным свойством f при $-1 < \operatorname{Re} \alpha \leq r+1$ и является локальным свойством при $\operatorname{Re} \alpha > r+1$. Это при $\alpha \geq r+1$ получил Бхатт ([14], стр. 18—19). При $r=1$ из следствия 1а получаем: $|C, \alpha|$ -суммируемость ряда (7) не является локальным свойством функции f при $-1 < \operatorname{Re} \alpha \leq 2$ и является локальным свойством при $\operatorname{Re} \alpha > 2$. Последнее при $\alpha \geq 2$ получил Лал ([17], стр. 66—67), а при $0 < \alpha < 2$ — Меротра ([18], стр. 58).

Из следствия 1б непосредственно вытекает: если $r-1 < \alpha \leq r+1$, то $|C, \alpha|$ -суммируемость r раз продифференцированного ряда (1) является локальным свойством функции f в точке x , если $\sum (n+1)^{r-\alpha} |A_n(x)| < \infty$ при четном r и $\sum (n+1)^{r-\alpha} |B_n(x)| < \infty$ при нечетном r . Это в случае $\alpha = r+1$ получил Бхатт ([14], теорема 2), а в случае $r=1$ с $0 < \alpha \leq 2$ получил Меротра ([18], теорема 3).

2. Пусть $A = G(C, 1)$, где G — нормальный метод, определенный в виде преобразования ряда в последовательность матрицей (γ_{nk}) , а в виде преобразования ряда в ряд матрицей $(\bar{\gamma}_{nk})$. Тогда $a_{nn} = (n+1)^{-1} \gamma_{nn}$ и по формуле (8.7) из [3]

находим

$$\Delta \bar{a}_{nk} = \sum_{\mu=k}^n \Delta \bar{\gamma}_{n\mu} \cdot (\mu + 1)^{-1},$$

откуда сразу получаем

$$\bar{a}_{nk} = \sum_{\mu=k}^n \left(1 - \frac{k}{\mu + 1} \right) \Delta \bar{\gamma}_{n\mu},$$

а также

$$\Delta^2 \bar{a}_{nk} = (k + 1)^{-1} \Delta \bar{\gamma}_{nk}.$$

Поэтому, если G удовлетворяет условию (10) при $p = 0$, т. е. условию

$$\theta_k = \sum_{n=k}^{\infty} |\Delta \bar{\gamma}_{nk}| = O(\gamma_{kk}), \quad (37)$$

то метод A удовлетворяет условию (10) при $p = 1$, т. е. условию

$$v_k^2 = \sum_{n=k}^{\infty} |\Delta^2 \bar{a}_{nk}| = O\left(\frac{\gamma_{kk}}{k+1}\right).$$

Далее, из (37) также вытекает

$$v_k^0 = \sum_{n=k}^{\infty} |\bar{a}_{nk}| = O(1) \sum_{\mu=k}^{\infty} \theta_{\mu} = O(1) \sum_{\mu=k}^{\infty} |\gamma_{\mu\mu}|,$$

$$v_k^1 = \sum_{n=k}^{\infty} |\Delta \bar{a}_{nk}| \leq \sum_{\mu=k}^{\infty} (\mu + 1)^{-1} \theta_{\mu} = O(1) \sum_{\mu=k}^{\infty} (\mu + 1)^{-1} |\gamma_{\mu\mu}|.$$

Следовательно, условия (21) приобретают вид

$$|\Delta \lambda_n| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|\gamma_{kk}|}{k+1} = O\left(\frac{\lambda_n \gamma_{nn}}{n+1}\right), \quad |\Delta^2 \lambda_n| \sum_{k=n}^{\infty} |\gamma_{kk}| = O\left(\frac{\lambda_n \gamma_{nn}}{n+1}\right). \quad (38)$$

Пусть G удовлетворяет условиям

$$\gamma_{n0} = 1, \quad \gamma_{n+1, n+1} = O(\gamma_{nn}), \quad \sum n D_n < \infty, \quad (39)$$

где обозначено $(\gamma_{nk})^{-1} = (\zeta_{nk})$ и

$$D_n = \sup_k |\gamma_{n+k, n+k} \zeta_{n+k, k}|.$$

При помощи формулы (8.5) из [3] получаем, что первое из условий (39) влечет за собой $a_{n0} = 1$. Обозначим $(a_{nk})^{-1} = (\eta_{nk})$. Применяя к A формулы (9.10), (9.11), (9.6) и (15.27) из [3], заключаем, что

$$\eta_{nk} = (n + 1) \zeta_{nk} - (n - 1) \zeta_{n-1, k}.$$

Следовательно, по упомянутой теореме Кангро из условий (39) вытекает, что для метода $A = G(C, 1)$ выполнено условие (8) теоремы 1.

Итак, из теорем 1—4 получаем следующие следствия.

Следствие 2а. Если для G выполнены условия (39) и

$$\sum (n+1)^{r-1} |\lambda_n \gamma_{nn}| = \infty,$$

то $|G(C, 1)$ -суммируемость ряда (6) не является локальным свойством функции f . Если для G и λ выполнены условия (37), (38) и

$$\sum (n+1)^{r-1} |\lambda_n \gamma_{nn}| < \infty, \quad (40)$$

то $|G(C, 1)$ -суммируемость ряда (6) является локальным свойством функции f .

Следствие 2б. Пусть G и λ удовлетворяют условиям (37), (38) и

$$\sum (n+1)^{-1} |\lambda_n \gamma_{nn}| < \infty, \quad (41)$$

$\sum (n+1)^{r-2} |\lambda_n \gamma_{nn}| < \infty$ (или $\sum (n+1)^{r-3} |\lambda_n \gamma_{nn}| < \infty$), причем при $k < n$

$$n^{r-1} \lambda_n \gamma_{nn} = O(k^{r-1} \lambda_k \gamma_{kk}), \quad \lambda_n \gamma_{nn} = O(\lambda_{n+k} \gamma_{n+k, n+k})$$

(или при $k < n$

$$k^{r-1} \lambda_k \gamma_{kk} = O(n^{r-1} \lambda_n \gamma_{nn}), \quad \frac{\lambda_n \gamma_{nn}}{n+1} = O\left(\frac{\lambda_k \gamma_{kk}}{k+1}\right)$$

соответственно). Если при четном r

$$\sum (n+1)^{r-1} |\lambda_n \gamma_{nn} A_n(x)| < \infty,$$

а при нечетном r

$$\sum (n+1)^{r-1} |\lambda_n \gamma_{nn} B_n(x)| < \infty,$$

то $|G(C, 1)$ -суммируемость ряда (6) является локальным свойством функции f в точке x .

В случае $\lambda_n = 1$ условия (38) выполнены. Далее (см. [4], стр. 219), если G — метод Вороного—Нёрлунда $P = (WN, p_n)$ при $0 \leq p_n \downarrow$ или взвешенных средних Рисса $Q = (R, q_n)$ при $q_n > 0$, то G удовлетворяет условию (37). Ввиду этого из следствия 2б при $r = 1$ непосредственно вытекают следующие результаты. Если метод Q таков, что $q_n > 0$, $q_n/Q_n \downarrow$, $Q_n/(n^2 q_n) \downarrow$ и $\sum q_n/(n Q_n) < \infty$, то $|Q(C, 1)$ -суммируемость ряда (7) является локальным свойством f в точке x , когда $\sum (q_n/Q_n) |B_n(x)| < \infty$. Это доказал Саксена ([21], теорема 2), а при $q_n = (n+1)^{-1}$, т. е. при $Q = I$, доказал ранее Бхатт ([13], теорема 2). Если $0 \leq p_n \downarrow$, $P_n \rightarrow \infty$ и $\sum (n P_n)^{-1} < \infty$, то $|P(C, 1)$ -суммируемость ряда (7) является локальным свойством f в точке x , когда $\sum (1/P_n) |B_n(x)| < \infty$. Это результат Меротры ([18], теорема 2).

3. Если вместо (37) метод G удовлетворяет условиям

$$(k+1)^{-1} \theta_k = O(\gamma_{kk}), \quad \sum_{n=k}^{\infty} |\Delta^2 \bar{\gamma}_{nk}| = O(\gamma_{kk}), \quad (42)$$

то $A = G(C, 1)$ удовлетворяет условию (10) с $\rho = 2$, т. е. условию

$$\nu_k^3 = \sum_{n=k}^{\infty} |\Delta^3 \bar{a}_{nk}| = O\left(\frac{\gamma_{kk}}{k+1}\right).$$

Теперь, учитывая (21), мы видим, что при замене условия (37) условиями (42) следствия 2а и 2б остаются в силе, если в них условия (38) заменить на

$$\theta_n \Delta \lambda_n = O(\lambda_n \gamma_{nn}), \quad |\Delta^2 \lambda_n| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\theta_k}{k+1} = O\left(\frac{\lambda_n \gamma_{nn}}{n+1}\right),$$

$$|\Delta^3 \lambda_n| \sum_{k=n}^{\infty} \theta_k = O\left(\frac{\lambda_n \gamma_{nn}}{n+1}\right),$$

а в следствии 2б, кроме того, условие (41) заменить на

$$\sum |\lambda_n \gamma_{nn}| < \infty, \quad (43)$$

ибо, положив в (25) число $p = 2$, получаем вместо (41) условие (43), вытекающее из (40) уже при $r = 1$.

Сделав такие замены, получаем, что из следствия 2а вытекает следующий аналог теоремы Меротры [19]: *если $p_n \geq 0$, $\bar{\Delta} p_n$ не возрастает и ограничена и $\sum 1/P_n < \infty$, то $|P(C, 1)|$ -суммируемость ряда (7) является локальным свойством функции f при выполнении условия $\Delta p_1/P_{k+1} + \Delta p_2/P_{k+2} + \dots = O(k/P_k)$ (вместо последнего условия Меротры излишне требует, чтобы $p_n \uparrow$; его рассуждение неубедительно). Действительно, при $G = P$*

$$\Delta \bar{\gamma}_{nk} = \bar{\Delta}(p_{n-k}/P_n),$$

$$\Delta^2 \bar{\gamma}_{nk} = \Delta p_{n-k} \bar{\Delta}(1/P_n) + \Delta^2 p_{n-k}/P_{n-1},$$

и, следовательно, из наложенных на P условий непосредственно заключаем, что (40) и (42) имеют место (ср. [4], стр. 222).

4. Пусть $A = P$ с $0 \leq p_n \downarrow$ и $P_n \rightarrow \infty$. Тогда условие (25) отпадает, ибо выполнено условие (10) при $p = 0$. Теперь, учитывая доказательство следствия 2 статьи [4], из теорем 1, 2 и 4 выводим:

Следствие 3а. *Если $1 \geq p_{n+1}/p_n \uparrow$ и*

$$\sum (n+1)^r |\lambda_n|/P_n = \infty,$$

то $|P|$ -суммируемость ряда (6) не является локальным свойством f . Если

$$\Delta \lambda_n = O(\lambda_n/P_n) \quad (44)$$

и

$$\sum (n+1)^r |\lambda_n|/P_n < \infty,$$

то $|P|$ -суммируемость ряда (6) является локальным свойством f .

Следствие 3б. *Пусть P и λ удовлетворяют условиям (44) и*

$$\lambda_k k^r/P_k = O(\lambda_n n^r/P_n), \quad \lambda_n/P_n = O(\lambda_k/P_k) \quad (k < n),$$

$$\sum (n+1)^{r-2} |\lambda_n|/P_n < \infty.$$

Если при четном r

$$\sum (n+1)^r (1/P_n) |\lambda_n A_n(x)| < \infty,$$

а при нечетном r

$$\sum (n+1)^r (1/P_n) |\lambda_n B_n(x)| < \infty,$$

то $|P|$ -суммируемость ряда (6) является локальным свойством функции f в точке x .

В случае $r = 1$ и $\lambda = \{1\}$ следствие 3б доказал Меротра ([18], теорема 1).

Литература

1. Бари Н. К., Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
2. Барон С., О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 106—120.
3. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
4. Барон С., О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье и сопряженных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 212—228.
5. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. I. Москва, 1965.
6. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. II. Москва, 1965.
7. Камке Э., Интеграл Лебега—Стилтьеса. Москва, 1959.
8. Кангро Г., Об обобщении одной теоремы Мура. Докл. АН СССР, 1958, **121**, 967—969.
9. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной. Москва, 1957.
10. Bhatt, S. N., An aspect of local property of a Fourier series. Vijnana parishad anusandhan patrika. Res. J. Hindi Sci. Acad., 1959, **2**, 73—78 (на яз. хинди).
11. Bhatt, S. N., An aspect of local property of $(R, \log n, 1)$ summability of Fourier series. Tôhoku Math. J., 1959, **11**, 13—19.
12. Bhatt, S. N., An aspect of local property of absolute Nörlund summability of Fourier series. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1962, **A23**, № 5, 789—794.
13. Bhatt, S. N., An aspect of local property of absolute summability of the derived Fourier series. Math. Z., 1963, **80**, № 5, 384—389.
14. Bhatt, S. N., An aspect of local property of the absolute summability of the r th derived series. Indian J. Math., 1967, **9**, № 1, 17—24.
15. Bosanquet, L. S., Oifford, A. C., A local property of Fourier series. Proc. London Math. Soc., 1936, **40**, 273—280.
16. Hyslop, J. M., On the absolute summability of the successively derived series of a Fourier series and its allied series. Proc. London Math. Soc., 1940, **46**, 55—80.
17. Lal, S. N., An aspect of local property of $|C, 2|$ summability of the derived Fourier series. Ann. mat. pura ed. appl., 1962, **59**, 65—75.
18. Mehrotra, N. D., An aspect of local property of absolute summability of the derived Fourier series. Indian J. Math., 1964, **6**, № 1, 57—68.
19. Mehrotra, N. D., An aspect of local property of absolute summability of the derived Fourier series. Indian J. Math., 1967, **9**, № 2, 467—472.
20. Mohapatra, R. N., On absolute convergence factors. Rend. Circolo mat. Palermo, 1968, **16**, № 3, 259—272.
21. Saxena, A., An aspect of local property of absolute summability of the derived series of a Fourier series. Rend. Circolo mat. Palermo, 1964, **13**, № 3, 263—272.
22. Saxena, A., An aspect of Local Property of Absolute Nörlund Summability of the Conjugate series of a Fourier Series. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1966, **14**, № 4, 183—191.

Поступило
6 VII 1971

DIFERENTSEERITUD FOURIER' RIDADE ABSOLUUTSE SUMMEERUVUSE LOKAALSUSE OMADUSEST

S. Baron

Resümee

Olgu f Lebesgue'i mõttes vahemikus $(-\pi, \pi)$ integreeruv 2π -perioodiline funktsioon, (1) funktsiooni f Fourier' rida ning $\{\lambda_n\}$ — kompleksarvude jada.

Artiklis [4] on leitud tingimused selleks, et rea (6), s. t. r korda diferentseeritud rea (3), absoluutne summeeruvus antud punktis normaalse maatriksmenetlusega A ei oleks funktsiooni f lokaalne omadus. Käesolevas artiklis leitakse tingimused selleks, et rea (6) absoluutne A -summeeruvus oleks funktsiooni f lokaalne omadus (teoreem 2) või funktsiooni f lokaalne omadus punktis x (teoreemid 3 ja 4). Näidatakse, et saadud tulemustest erijuhuna järelduvad kõik teadaolevad teoreemid [13, 14, 16 — 19, 21] rea (6) absoluutse summeeruvuse lokaalsuse omaduse kohta konkreetsete menetluste A korral.

LOCAL PROPERTY OF ABSOLUTE SUMMABILITY OF THE DERIVED FOURIER SERIES

S. Baron

Summary

Let f be a periodic function with period 2π integrable in the Lebesgue sense over $(-\pi, \pi)$, and its Fourier series be given by (1). Let $\lambda = \{\lambda_n\}$ be a sequence of complex numbers.

It is said that $|A|$ -summability of the series (6) is a local property of f in the point x , if the $|A|$ -summability of the series (6) at $t = x$ depends only upon the behaviour of the generating function f in the immediate neighbourhood $(x - \delta, x + \delta)$ of the point x .

It is said that $|A|$ -summability of the series (6) is a local property of f , if the $|A|$ -summability of the series (6) is a local property of f in every point x .

It is said that $|A|$ -summability of the series (6) is not a local property of the function f , if there are an interval $(x + \alpha, x + \beta)$, where $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, and a function equal to f in $(x + \alpha, x + \beta)$ and vanishing in the remainder of the interval $(x, x + 2\pi)$, series (6) of which is not summable $|A|$ at $t = x$.

The object of this paper is to obtain conditions for the normal matrix $A = (a_{nk})$ and for λ under which the $|A|$ -summability of the series (6) in a given point is a local property of the function f . In [4] the following theorem has been proved:

Theorem 1. *If a_{nn} is an absolutely convergence factor for $|A|$ and $\Sigma |\omega_n| = \infty$, then $|A|$ -summability of the series (6) is not a local property of f .*
In the present paper we prove the theorems 2,3 and 4, where it is supposed A to satisfy the condition (10) by some p .

Theorem 2. *Let A and λ satisfy the conditions (21), (25) and (27). Then $|A|$ -summability of the series (6) is a local property of f .*

Theorem 3. *Let A and λ satisfy the conditions (21), (25), (26), (28) and (29). If for even r the (30) and for odd r the (31) have been fulfilled, then $|A|$ -summability of the series (6) is a local property of f in point x .*

The conditions (26), (28) and (29) in theorem 3 may be replaced by (32), (33) and (34) (theorem 4).

All the known results [13, 14, 16 — 19, 21] about the local property of absolute summability of the derived Fourier series for concrete type of matrices are followed from the above mentioned theorems 1—4.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕМЕНТА ОКОНЧАТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Д. Перадзе



Кафедра вычислительной математики

В вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим уравнение

$$x = Ax + b, \quad (1)$$

где A — линейный оператор в H , b — свободный член, x — искомый элемент. Допустим, что спектральный радиус $r_A < 1$ и оператор A имеет конечное число собственных значений, равных по модулю r_A , причем остальные точки спектра по модулю меньше r_A .

Для решения уравнения (1) привлечем метод обыкновенных итераций, задаваемый формулой

$$x_{n+1} = Ax_n + b, \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (2)$$

Итерационный процесс будет сходиться при любом начальном приближении x_0 . Практически счет осуществляется с некоторой заданной точностью и часто итерации прекращают на $(p+1)$ -ом шаге, если в пределах точности счета x_{p+1} совпадает с x_p . Пусть вычисления прекращаются, как только элемент-невязка $\delta_n = x_{n+1} - x_n$ попадает в область $S(0, \beta)$, где β — наперед заданное число. Элемент окончательной погрешности $\varepsilon_n = x^* - x_n = (I - A)^{-1}\delta_n$ окажется в области $G_0 = (I - A)^{-1}S(0, \beta)$. Здесь x^* — решение уравнения (1), а I — единичный оператор.

По примеру М. А. Красносельского и С. Г. Крейна [1] в вероятностных терминах уточним положение элемента окончательной погрешности в G_0 . Рассматривая начальную погрешность $\varepsilon_0 = x^* - x_0$ как случайный элемент с некоторым распределением в H , мы выделяем подпространство и область в нем, к которой сгущаются окончательные погрешности. Подобная задача для других уравнений рассматривалась автором ранее [2, 3]. В [2] изучался конечномерный случай, а в [3] — случай, когда A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве.

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим гауссову меру $g^{(\sigma)}$ с дисперсией σ . Со способом построения гауссовых мер (в частности, меры Винера) при $\sigma = 1$ можно ознакомиться в монографии [4]. Введение дисперсии отразится лишь на предмере ω_C цилиндрического множества

$$C = \{x : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subset R_n\} \quad (\text{см. [4], стр. 32}):$$

$$\omega_C = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{\pi^n}} \int_B e^{-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \xi_i^2} d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Пусть теперь ε_0 — случайный элемент в пространстве H . Для каждого элемента окончательной погрешности ε определим множество X_ε таких элементов, что итерация при ε_0 из X_ε дает окончательную погрешность ε . Фраза «вероятность принадлежности окончательной погрешности ε области \mathfrak{H} больше P » будет означать, что внутренняя гауссова мера $g^{*(\sigma)}$ множества $\bigcup_{\varepsilon \in \mathfrak{H}} X_\varepsilon$ больше P . Измеримость $\bigcup_{\varepsilon \in \mathfrak{H}} X_\varepsilon$ не предполагается.

Обозначим через H_{\max} замкнутую линейную оболочку, натянутую на действительные и мнимые части собственных и присоединенных элементов, соответствующих собственным значениям, по модулю равным r_A . Введем обозначения:

$$G_{-1} = AG_0, \\ U_h(H_{\max}) = \{x \in H : \rho(x, H_{\max}) < h\}.$$

Теорема. Для произвольно малого $h > 0$ вероятность принадлежности окончательной погрешности $\varepsilon = \varepsilon_n$ множеству $U_h(H_{\max}) \cap (G_0 \setminus G_{-1})$ больше некоторого $P_h(\sigma)$, причем $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} P_h(\sigma) = 1$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, покажем, что

$$H_{\max} \cap (G_0 \setminus G_{-1}) = (H_{\max} \cap G_0) \setminus (H_{\max} \cap G_{-1})$$

не пусто. Для этого приведем к противоречию включение

$$H_{\max} \cap G_{-1} \supset H_{\max} \cap G_0,$$

или, что то же самое, включение

$$(I - A)(H_{\max} \cap G_{-1}) \supset (I - A)(H_{\max} \cap G_0). \quad (3)$$

Ввиду того, что подпространство H_{\max} инвариантно относительно оператора A (а, значит, и относительно оператора $(I - A)^{-1}$), имеем

$$H_{\max} \cap G_0 = (I - A)^{-1}[S(0, \beta) \cap H_{\max}], \\ H_{\max} \cap G_{-1} = A(I - A)^{-1}[S(0, \beta) \cap H_{\max}].$$

В силу этих равенств включение (3) запишется так:

$$A_{\max}[S(0, \beta) \cap H_{\max}] \supset S(0, \beta) \cap H_{\max}.$$

где A_{\max} — сужение оператора A на инвариантное подпространство H_{\max} . Из последнего включения видно, что

$$\|A_{\max}^{-1}\| \leq 1$$

и, тем более,

$$\|A_{\max}^{-n}\| \leq \|A_{\max}^{-1}\| \leq 1.$$

Из последнего неравенства и неравенства

$$1 = \|A_{\max}^{-n} A_{\max}^n\| \leq \|A_{\max}^{-n}\| \|A_{\max}^n\|$$

вытекает

$$\|A_{\max}^n\| \geq \frac{1}{\|A_{\max}^{-n}\|} \geq 1, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

а это значит, что

$$r_A \geq r_{A_{\max}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A_{\max}^n\|} \geq 1,$$

что противоречит условию теоремы.

Доказательство теоремы. Ограничимся пока случаем, когда нуль не является собственным значением оператора A (общий случай будет рассмотрен позже). В силу этого предположения существует обратный оператор A^{-1} , определенный на области значений оператора A . Оператор A^{-1} необязательно ограниченный.

Предположим, что при данном начальном элементе погрешности ε_0 для окончания счета потребовалось k итерационных шагов. Формула

$$\varepsilon_k = A^k \varepsilon_0. \quad (k = 1, 2, \dots)$$

позволяет определить элемент окончательной погрешности ε , который равен ε_k . Элемент ε_0 назовем k -ым прообразом ε .

Заметим, что в область $G_0 \cap G_{-1}$ окончательная погрешность попадет только тогда (причем с первого шага), когда элемент начальной погрешности $\varepsilon_0 \in G_0$. В самом деле, первый прообраз элемента ε из $G_0 \cap G_{-1}$ принадлежит G_0 . Других прообразов быть не может, ибо в противном случае итерация закончилась бы раньше в $G_0 \setminus G_{-1}$.

Изучим расположение окончательной погрешности в области $G_0 \setminus G_{-1}$. Если удастся показать, что внешняя мера множества прообразов элементов ε , не входящих в $U_h(H_{\max}) \cap (G_0 \setminus G_{-1})$, $h > 0$, сколь угодно мала при $\sigma \rightarrow \infty$, то теорема будет доказана.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — все собственные значения оператора A (строго говоря, комплексного расширения A^c оператора A), равные по модулю r_A ; ввиду вещественности H и A комплексные собственные значения входят в эту совокупность вместе с сопряженными значениями. Пусть $\delta > 0$ настолько мало, что каждый круг $|\lambda - \lambda_k| \leq \delta$ не имеет других точек спектра, кроме λ_k . Формула

$$P_{\max}^c = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_k| = \delta} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

определяет проектор, проектирующий из комплексного расширения H^c на линейную оболочку H_{\max}^c корневых подпространств оператора A^c , соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Оператор P_{\max}^c переводит вещественные элементы в вещественные. Обозначим через P_{\max} его сужение на вещественную часть H пространства H^c . Он проектирует H на H_{\max} (на линейную оболочку, натянутую на действительные и мнимые части элемента из H_{\max}^c). Известно, что проектор P_{\max}^c коммутирует с A^c , откуда следует, что P_{\max} коммутирует с A . Значит, с A коммутирует и оператор $P_1 = I - P_{\max}$.

Пространство H и оператор A разлагаются в прямые суммы

$$\begin{aligned} H &= H_{\max} \dot{+} H_1, \\ A &= A_{\max} \dot{+} A_1, \end{aligned} \quad (4)$$

где $H_{\max} = P_{\max}H$, $H_1 = P_1H$, $A_{\max} = P_{\max}AP_{\max}$, $A_1 = P_1AP_1$. Тут же отметим, что спектр оператора A_1 состоит из спектра оператора A , исключая собственные значения, равные по модулю r_A . Поэтому

$$r_{A_1} < r_A. \quad (5)$$

Далее, введем множество

$$K(\eta) = \left\{ x \in H : \frac{\|P_1x\|}{\|P_1x\| + \|P_{\max}x\|} > \eta \right\} \quad (0 < \eta < 1)$$

и докажем, что для произвольно малого $h > 0$ и η , $0 < \eta < 1$, $\eta \sim 1$, существует такое натуральное число $n_0(\eta, h)$, что $A^{-n}\varepsilon \in K(\eta)$ при $n > n_0(\eta, h)$ для любого $\varepsilon \in D(A^{-n})$, не принадлежащего области $U_h(H_{\max}) \cap (G_0 \setminus G_{-1})$. Для этого надо показать, что величина

$$\frac{\|P_1A^{-n}\varepsilon\|}{\|P_1A^{-n}\varepsilon\| + \|P_{\max}A^{-n}\varepsilon\|}$$

для любого $\varepsilon \notin U_h(H_{\max}) \cap (G_0 \setminus G_{-1})$ и больших n сколь угодно близка к 1, или, что для всех ε одновременно при достаточно больших n отношения

$$\frac{\|P_{\max}A^{-n}\varepsilon\|}{\|P_1A^{-n}\varepsilon\|} = \frac{\|A^{-n}P_{\max}\varepsilon\|}{\|A^{-n}P_1\varepsilon\|} = \frac{\|A_{\max}^{-n}P_{\max}\varepsilon\|}{\|A_1^{-n}P_1\varepsilon\|}$$

сколь угодно малы. Выше мы использовали коммутруемость P_{\max} и P_1 с A , а также (4).

Пользуясь определением оператора A_{\max} , нетрудно увидеть, что спектр оператора A_{\max}^{-1} расположен на окружности радиуса $1/r_A$ и, следовательно, спектральный радиус оператора A_{\max}^{-1} равен $1/r_A$. Поэтому

$$\|A_{\max}^{-n}\|^{1/n} = \frac{1}{r_A} + \delta'_n,$$

где $\{\delta'_n\}$ — некоторая числовая последовательность, стремящаяся к 0 при $n \rightarrow \infty$. Тогда верна оценка

$$\|A_{\max}^{-n}P_{\max}\varepsilon\| \leq \left(\frac{1}{r_A} + \delta'_n\right)^n \|P_{\max}\varepsilon\|. \quad (6)$$

С другой стороны, известно, что

$$\|A_1^{-n}P_1\varepsilon\| \geq \|A_1^n\|^{-1} \|P_1\varepsilon\|$$

и

$$\|A_1^n\|^{1/n} = r_{A_1} + \delta''_n,$$

где $\{\delta''_n\}$ — некоторая числовая последовательность, стремящаяся к нулю. Следовательно, имеем

$$\|A_1^{-n}P_1\varepsilon\| \geq \frac{1}{(r_{A_1} + \delta''_n)^n} \|P_1\varepsilon\|. \quad (7)$$

Для $\varepsilon \in G_0$, не принадлежащих области $U_h(H_{\max}) \cap (G_0 \setminus G_{-1})$, запишем неравенство

$$\|P_{\max}\varepsilon\| \leq \|P_{\max}\| \|\varepsilon\| < c, \quad (8)$$

где c — некоторая постоянная, и

$$\|P_1\varepsilon\| \geq h. \quad (9)$$

Справедливость (8) станет очевидной, если вспомнить, что G_0 — ограниченное множество. Для получения же неравенства (9) отметим, что совокупность элементов $P_1\varepsilon$, $\varepsilon \notin U_h(H_{\max}) \cap (G_0 \setminus G_{-1})$, содержится в множестве элементов из H , отстоящих от подпространства H_{\max} на расстоянии, не меньшем h .

Применение соотношений (6) — (9) позволяет записать

$$\frac{\|A_{\max}^{-n}P_{\max}\varepsilon\|}{\|A_1^{-n}P_1\varepsilon\|} < \frac{c \left(\frac{1}{r_A} + \delta'_n\right)^n}{h \frac{1}{(r_{A_1} + \delta''_n)^n}}.$$

Величина в правой части последнего неравенства стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$ (см. (5)). Это обеспечивает существование такого $n_0(\eta, h)$, что n -ые прообразы окончательных погрешностей ε при $n > n_0(\eta, h)$, если только $\varepsilon \in D(A^{-n})$ и $\varepsilon \notin U_h(H_{\max}) \cap (G_0 \setminus G_{-1})$, принадлежат множеству $K(\eta)$.

Что же касается n -ых прообразов при $n \leq n_0$ рассмотренных окончательных погрешностей ε ($\varepsilon \in G_n$ и $\varepsilon \notin U_h(H_{\max}) \cap (G_0 \setminus G_{-1})$) и всех прообразов тех окончательных погрешно-

стей ε , которые не принадлежат ни одному $G_n = G_0 \cap D(A^{-n})$ с $n > n_0$, то они содержатся в множестве

$$\mathfrak{G}_0 = \bigcup_{1 \leq n \leq n_0} A^{-n} G_n.$$

Действительно, k -ые прообразы любой окончательной погрешности принадлежат множеству $A^{-k} G_k$. Кроме того, элемент ε , не принадлежащий ни одному G_n с $n > n_0$, может иметь не более n_0 прообразов.

Мы утверждаем, что множество \mathfrak{G}_0 вместе с G_0 при подходящем подборе α и β можно заключить в область

$$B(\alpha, \beta) = \{x \in H : \alpha < (x, e) \leq \beta\},$$

где e — некоторый элемент из H . В самом деле, в качестве e возьмем нормированный элемент из области определения оператора $(A^*)^{-n_0}$. Для $x \in G_n$ ($n = 1, 2, \dots, n_0$) имеем

$$(A^{-n}x, e) = (x, (A^{-n})^*e).$$

Следовательно,

$$|(A^{-n}x, e)| \leq \|x\| \|(A^{-n})^*e\|.$$

Так как $G_n \subset G_0$ ($n = 1, 2, \dots, n_0$) — ограниченные множества, заключаем, что $|(A^{-n}x, e)|$ для всех $x \in \mathfrak{G}_0$ ограничены в совокупности. То же самое справедливо и для $x \in G_0$. Теперь утверждение доказано.

Итак, прообразы окончательных погрешностей ε , не принадлежащие области $U_h(H_{\max}) \cap (G_0 \setminus G_{-1})$, «рассортированы» по двум множествам: $K(\eta)$ и $B(\alpha, \beta)$. Для завершения доказательства теоремы остается установить, что гауссовы меры множеств $K(\eta)$ и $B(\alpha, \beta)$ сколь угодно малы, если η ($0 < \eta < 1$) достаточно близки к 1, а дисперсия σ меры Гаусса достаточно большая (малости внешней меры $K(\eta)$ добьемся за счет η , а малости внешней меры $B(\alpha, \beta)$ — за счет σ).

Пусть $\{e_i\}$ — ортогональный базис, с помощью которого задана мера в H , а ν_1, ν_2, \dots — последовательность положительных чисел, с помощью которых производится отображение T каждой точки $z \in H$ в точку $Tz = (\nu_1 z_1, \nu_2 z_2, \dots)$ из пространства Ω , в котором задана гауссова предмера.

Мера множества $B(\alpha, \beta)$ оценивается просто. Имеем

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \{x \in H : \alpha < (x, e) \leq \beta\} = \\ &= \{x \in H : \alpha < \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, e_k) \leq \beta\}, \end{aligned}$$

где $u_k = (e, e_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда по известной формуле

$$g^{(\sigma)} B(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta x}^{\alpha x} e^{-\xi^2} d\xi, \quad \text{где} \quad x = \sigma^{-1} \left[\sum \left(\frac{u_k}{\nu_k} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Следовательно, $g^{(\sigma)} B(\alpha, \beta) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$.

Приступим к оценке меры $K(\eta)$. Множество $K(\eta)$ как открытое является измеримым. Покажем, что $g^{(\sigma)}K(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 1$. Действительно,

$$K(\eta') \subset K(\eta'') \quad \text{при} \quad \eta' > \eta''$$

и

$$\bigcap_{0 < \eta < 1} K(\eta) = \{x \in H : P_{\max} x = 0\}.$$

Поэтому

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} g^{(\sigma)}K(\eta) = g^{(\sigma)}\{x \in H : P_{\max} x = 0\}.$$

Последнее равенство справедливо на основании того, что гауссова мера любого подпространства равна нулю.

Теперь покажем, что при $\eta \rightarrow 1$ мера $K(\eta)$ стремится к нулю равномерно относительно σ . Определим в H множество $K_n(\eta)$ ($n = 1, 2, \dots$) как цилиндрическое множество, основание которого — ортогональная проекция $K(\eta)$ на линейную оболочку первых n элементов базиса $\{e_i\}$. Последовательность $\{K_n(\eta)\}$ монотонно убывает. Пересечение множеств $K_n(\eta)$ содержит $K(\eta)$. Поэтому

$$g^{(\sigma)}K(\eta) \leq \lim_{\eta \rightarrow \infty} \bar{g}^{(\sigma)}K_n(\eta).$$

Множества $K_n(\eta) \subset H$ вместе с элементом x содержат λx , где λ — произвольное вещественное число. Для таких множеств мера $g^{(\sigma)}K_n(\eta) = \omega^{(\sigma)}TK_n(\eta)$ не зависит от σ . Кроме того,

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} g^{(\sigma)}K_n(\eta) = 0.$$

Следовательно, $g^{(\sigma)}K(\eta) \rightarrow 0$ равномерно по σ .

Пусть теперь задано $0 < p < 1$. Можно так подобрать η , достаточно близкое к 1, и затем $\sigma \gg 0$, что $g^{(\sigma)}(K(\eta) \cup B(\alpha, \beta)) < 1 - p$. Следовательно,

$$g^{(\sigma)} \bigcup_{\varepsilon \in U_n(H_{\max}) \cap (G_0 \setminus G_{-1})} X_\varepsilon > p.$$

Это и означает справедливость теоремы в случае, когда 0 не является собственным значением оператора A .

Коротко об изменениях в доказательстве, когда нуль является собственным значением оператора A . В приведенном выше рассуждении под $A^{-n}\varepsilon$ ($n = 1, 2, \dots$) будем теперь подразумевать множество

$$\{x \in H : A^n x = \varepsilon\}.$$

Соответствующие видоизменения в доказательстве незначительны. Покажем, для примера, справедливость включения

$$A^{-n}\varepsilon \subset B(\alpha, \beta)$$

при $n \leq n_0$. Пусть $e = (A^*)^{n_0}e_1$. Для любого $x \in A^{-n}\varepsilon$ имеем $(x, e) = (x, (A^*)^{n_0}e_1) = (A^n x, (A^*)^{n_0-n}e_1) = (\varepsilon, (A^*)^{n_0-n}e_1)$.

В других местах доказательство сохраняется. Теорема доказана.

Автор выражает признательность Г. Вайникко за постановку задачи и руководство.

Литература

1. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Замечание о распределении ошибок при решении системы линейных уравнений при помощи итерационного процесса. Успехи матем. наук, 1952, 7, № 4, 157—161.
2. Перадзе Д. Г., О распределении ошибок при решении системы линейных алгебраических уравнений методом итерации. Сообщ. АН ГрузССР, 1968, 50, № 2, 289—294.
3. Перадзе Д. Г., О распределении ошибок при решении методом итерации линейных уравнений в гильбертовом пространстве. Сообщ. АН Груз. ССР, 1968, 51, № 2, 263—268.
4. Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь, Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. Москва, 1967.

Поступило
18 XI 1969

VEA JAOTUSEST LINEAARSETE VÖRRANDITE LAHENDAMISEL ITERATSIOONIMEETODIGA HILBERTI RUUMIS

D. Peradze

Resümee

Teatud tüüpi lineaarne võrrand lahendatakse iteratsioonimeetodiga Hilberti ruumis. Iteratsioonid lõpetatakse, kui hälve satub väiksesse piirkonda.

Eeldatakse, et lähteviga on juhuslik element parameetrist sõltuva normaalkaotusega. Eeldades, et parameeter läheneb lõpmatusele, määratakse arvutuste lõppvea asümptootiline paiknemine.

ON DISTRIBUTION OF THE ELEMENT OF ERROR IN HILBERT SPACE FOR SOLUTION OF LINEAR EQUATIONS BY THE METHOD OF ITERATION

J. Peradze

Summary

Linear equation of a certain class is solved by the iteration method in a real separable Hilbert space. The iterations end if the element of incompatibility belongs to a given small domain.

It is assumed that the initial error of approximation is a random element of normal distribution depending on the parameter. Assuming that the parameter tends to infinity, we define the asymptotic situation of the element of final error.

К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ С. Г. КРЕЙНА О ВОЗМУЩЕНИИ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЮЩИХ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ

Г. Вайникко

Кафедра вычислительной математики

М. Шлапкиене

Кружок СНО при кафедре вычислительной математики

В настоящей работе изучается класс линейных операторов A с плотной областью определения $D(A)$ в банаховом пространстве E , резольвенты $R(\lambda; A)$ которых определены в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega$ и удовлетворяют неравенству

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad (\operatorname{Re} \lambda \geq \omega; M = \text{const}). \quad (1)$$

Операторы этого класса тесно связаны с аналитическими полугруппами линейных ограниченных операторов и с задачей Коши

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0. \quad (2)$$

А именно, из (1) вытекает (см. [1]), что задача (2) имеет единственное ослабленное решение при любом $x_0 \in E$ (т. е. дифференциальное уравнение удовлетворяется при $t > 0$); если $x_0 \in D(A)$, то ослабленное решение является решением (т. е. уравнение удовлетворяется при $t \geq 0$). При этом решение (ослабленное решение) аналитично в некотором секторе, содержащем полусось $t > 0$.

Представляет интерес найти класс операторов B таких, что из (1) вытекает аналогичная оценка для $A + B$. Результаты такого рода получены в работах [1—3]. В настоящей статье эти результаты усиливаются.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (1) и пусть оператор $BR(\lambda_0; A)$ вполне непрерывен в E при некотором λ_0 ($\operatorname{Re} \lambda_0 \geq \omega$). Пусть одно из множеств $D(A^*)$ и $D(B^*)$ плотно в E^* , где A^* и B^* — сопряженные к A и B операторы.

Тогда оператор $A + B$ имеет резольвенту в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_1$ и

$$\|R(\lambda; A + B)\| \leq \frac{M_1}{1 + |\lambda|} \quad (\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_1; M_1 = \text{const}). \quad (3)$$

Доказательство. Утверждения теоремы вытекают из тождества

$$\lambda I - (A + B) = [I - BR(\lambda; A)](\lambda I - A)$$

и соотношения

$$\|BR(\lambda; A)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (\operatorname{Re} \lambda \geq \omega), \quad (4)$$

которое мы ниже докажем. Ради простоты записей будем считать, что $\omega = 0$ и $\lambda_0 = 0$. Имеем

$$\|BR(\lambda; A)\| = \|BA^{-1} \cdot AR(\lambda; A)\| = \|[AR(\lambda; A)]^*(BA^{-1})^*\|.$$

Поэтому, ввиду полной непрерывности оператора $(BA^{-1})^*$, для установления (4) достаточно показать, что

$$\|[AR(\lambda; A)]^*g\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (\operatorname{Re} \lambda \geq 0) \quad (5)$$

для каждого $g \in E$ или, по крайней мере, для каждого g из замыкания подпространства $E^*_0 = (BA^{-1})^*E^*$ пространства E^* .

Нормы операторов $[AR(\lambda; A)]^*$ равномерно ограничены:

$$\begin{aligned} \|[AR(\lambda; A)]^*\| &= \|AR(\lambda; A)\| = \|\lambda R(\lambda; A) - I\| \leq \\ &\leq |\lambda| \frac{M}{1 + |\lambda|} + 1 \leq M + 1 \quad (\operatorname{Re} \lambda \geq 0). \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим случай, когда $D(A^*)$ плотно в E^* . Для каждого $g \in D(A^*)$ имеем

$$\begin{aligned} \|[AR(\lambda; A)]^*g\| &= \|[R(\lambda; A)]^*A^*g\| \leq \\ &\leq \|R(\lambda; A)\| \|A^*g\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \|A^*g\| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (7)$$

при $|\lambda| \rightarrow \infty$ ($\operatorname{Re} \lambda \geq 0$). С помощью теоремы Банаха—Штейнгауза отсюда получаем, что сходимость (5) имеет место для любого $g \in E^*$.

Рассмотрим случай, когда $D(B^*)$ плотно в E^* . Так как $(BA^{-1})^*$ переводит $D(B^*)$ в $D(A^*)$, то E^*_0 содержится в замыкании $D(A^*)$. Теперь (5) снова вытекает из (6) и (7).

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Теорема 1 остается справедливой, если предположение о плотности $D(A^*)$ заменить предположением о плотности в E^* подпространства

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D\left(\left[(-A)^{\frac{1}{n}}\right]^*\right). \quad (8)$$

Это утверждение доказывается по той же схеме, что и теорема 1.

З а м е ч а н и е 2. В случае, когда $D(A^*)$ плотно в E^* , а оператор $BR(\lambda_0; A)$ допускает равномерную аппроксимацию конечномерными операторами, теорема 1 получена С. Г. Крейном [1]. В случае, когда подпространство (8) плотно в E^* , а пространство E обладает базисом, теорема 1 доказана В. Г. Раскиным и П. Е. Соболевским [2]. В работе П. Е. Соболевского и М. Н. Титенского [3] утверждение теоремы 1 установлено в предположении существования таких конечномерных операторов Q_n , что $Q_n Ax = A Q_n x$ для $x \in D(A)$ и $Q_n x \rightarrow x$ для каждого $x \in E$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (1), $D(B) \supset D(A)$ и пусть оператор $R(\lambda_0; A)B$ вполне непрерывен в E при некотором λ_0 ($\operatorname{Re} \lambda_0 \geq \omega$). Тогда справедливы утверждения теоремы 1.

Доказательство вытекает из тождества

$$\lambda I - (A + B) = (\lambda I - A)[I - R(\lambda; A)B]$$

и доказываемого ниже соотношения

$$\|R(\lambda; A)B\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (\operatorname{Re} \lambda \geq \omega).$$

Будем снова считать, что $\lambda_0 = 0$. Имеем

$$\|R(\lambda; A)B\| = \|R(\lambda; A)A \cdot A^{-1}B\|,$$

и ввиду полной непрерывности оператора $A^{-1}B$ достаточно заметить, что $R(\lambda; A)A$ сильно сходится при $|\lambda| \rightarrow \infty$ ($\operatorname{Re} \lambda \geq \omega$) к нулевому оператору.

Теорема 2 доказана.

Теорема 2 может быть применена при исследовании задачи Коши для параболических уравнений в пространствах типа C или L .

Литература

1. Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Москва, 1967.
2. Раскин В. Г., Соболевский П. Е., Разложение решений дифференциальных уравнений второго порядка в банаховых пространствах в ряды экспоненциальных решений. Дифференц. уравнения, 1969, 5, № 3, 543—545.
3. Соболевский П. Е., Титенский М. Н., Исследование разрешимости возмущенных параболических уравнений в банаховом пространстве и обобщенный метод Бубнова—Галеркина их приближенного решения. Дифференц. уравнения, 1969, 5, № 8, 1495—1502.

Поступило
20 VI 1970

**ÜHEST S. G. KREINI TEOREEMIST ANALUÜTILISI POOLRÜHMI
GENEREERIVATE OPERAATORITE HÄIRITUSTE KOHTA**

G. Vainikko ja M. Slapikene

Resüme e

Töös uuritakse lineaarsete operaatorite A klassi, mille resolvendid rahuldavad võrratust (1). On antud piisavad tingimused selleks, et operaatori $A + B$ resolvent rahuldaks analoogilist võrratust. Põhitulemused on toodud teoreemides 1 ja 2.

**ON A THEOREM OF S. G. KREIN
ABOUT PERTURBATIONS OF OPERATORS WHICH GENERATE
ANALYTICAL SEMI-GROUPS**

G. Vainikko and M. Slapikene

S u m m a r y

The present paper deals with the class of the linear operators A , the resolvents of which satisfy the inequality (1). Sufficient conditions for satisfying the analogical inequality by the resolvent of the operator $A + B$ are given in the paper. The theorems 1 and 2 include the main results.

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ

Г. Вайнико

Кафедра вычислительной математики

1. Устойчивость метода коллокации исследована в работах [1, 2]. Из результатов [1] вытекает устойчивость вычислительного процесса в случае, когда в качестве узлов интерполирования используются нули ортогональных многочленов, а в качестве координатной последовательности (при решении интегральных уравнений) — ортогональные по тому же весу многочлены. В [2] установлена устойчивость метода коллокации в случае, когда в качестве координатных функций используются фундаментальные многочлены интерполирования по Лагранжу. Следует отметить, что в [1] и [2] устойчивость понимается по-разному — матрицы погрешностей системы метода коллокации нормируются по-разному. В настоящей статье мы снова затрагиваем случай, когда координатные функции — фундаментальные многочлены интерполирования по Лагранжу. В случае чебышевских узлов интерполирования мы усилим результат [2] об устойчивости; одновременно будет замечено, что вычисления с чебышевскими узлами более устойчивы, чем вычисления в случае каких-нибудь других узлов интерполирования.

2. Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$x(t) = \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds + f(t). \quad (1)$$

На ядро $K(t, s)$ и свободный член $f(t)$ накладываем следующие условия:

1) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\int_{-1}^1 \frac{|K(t_1, s) - K(t_2, s)|^2}{w(s)} ds < \varepsilon$$

при $|t_1 - t_2| < \delta$ ($-1 \leq t_1, t_2 \leq 1$);

$$2) \sup_{-1 \leq t \leq 1} \int_{-1}^1 \frac{|K(t, s)|^2}{w(s)} ds < \infty;$$

3) однородное уравнение, соответствующее (1), имеет в классе непрерывных функций лишь нулевое решение;

4) функция $f(t)$ непрерывна на $[-1, 1]$.

Здесь $\omega(s)$ — некоторая неотрицательная суммируемая вместе с $1/\omega(s)$ функция. В дальнейшем она будет использована в качестве весовой функции при построении узлов интерполирования. В частности, в случае чебышевских узлов следует положить $\omega(s) = 1/\sqrt{1-s^2}$.

Обозначим через C и L^2_ω соответственно пространство непрерывных на $[-1, 1]$ функций и пространство квадратично-суммируемых на $[-1, 1]$ с весом $\omega(s)$ функций. Пространства C и L^2_ω являются банаховыми относительно норм

$$\|x\|_C = \max_{-1 \leq t \leq 1} |x(t)|, \quad \|z\|_{L^2_\omega} = \left[\int_{-1}^1 \omega(s) |z(s)|^2 ds \right]^{1/2}.$$

Из условий 1) и 2) на основании теоремы Арцела вытекает, что интегральный оператор

$$(Tz)(t) = \int_{-1}^1 K(t, s) z(s) ds$$

вполне непрерывен как оператор из L^2_ω в C ; тем более, он вполне непрерывен как оператор из C в C или из L^2_ω в L^2_ω . Принимая во внимание также условия 3) и 4), заключаем, что интегральное уравнение (1) имеет в любом из пространств C и L^2_ω единственное решение.

3. Пусть $W_0(t), W_1(t), \dots, W_n(t), \dots$ — система ортогональных на $[-1, 1]$ по весу $\omega(t)$ многочленов (W_n — многочлен степени n). Обозначим через $t_{0n}, t_{1n}, \dots, t_{nn}$ нули многочлена $W_{n+1}(t)$; известно (см. [4]), что все они простые и расположены в промежутке $(-1, 1)$. Построим соответствующие узлам $t_{0n}, t_{1n}, \dots, t_{nn}$ фундаментальные многочлены $l_{jn}(t)$ интерполирования по Лагранжу:

$$l_{jn}(t) = \frac{l_n(t)}{l'_n(t_{jn})(t - t_{jn})} \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad (2)$$

где

$$l_n(t) = (t - t_{0n})(t - t_{1n}) \dots (t - t_{nn}).$$

Приближенное решение уравнения (1) разыскиваем в виде

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^n \xi_{jn} l_{jn}(t) \quad (3)$$

и определим по методу коллокации из условий

$$\left[x_n(t) - \int_{-1}^1 K(t, s) x_n(s) ds - f(t) \right]_{t=t_{in}} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, n). \quad (4)$$

Это приводит к нахождению вектора $\xi^{(n)} = (\xi_{0n}, \xi_{1n}, \dots, \xi_{nn})$ из системы уравнений

$$\xi^{(n)} = T_n \xi^{(n)} + f^{(n)}, \quad (5)$$

где T_n — матрица с элементом

$$\int_{-1}^1 K(t_{in}, s) l_{jn}(s) ds$$

в i -ой строке, j -ом столбце ($i, j = 0, 1, \dots, n$), а

$$f^{(n)} = (f(t_{0n}), f(t_{1n}), \dots, f(t_{nn})).$$

Мы воспользовались равенствами

$$l_{jn}(t_{in}) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n). \quad (6)$$

Напомним попутно еще несколько важных свойств фундаментальных многочленов (2), используемых в дальнейшем:

$$\int_{-1}^1 \omega(s) l_{jn}(s) l_{kn}(s) ds = \begin{cases} \alpha_{jn} > 0 & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k, \end{cases} \quad (7)$$

$$\sum_{j=0}^n \alpha_{jn} = \int_{-1}^1 \omega(s) ds. \quad (8)$$

Отметим, что из условий 1)–4) и построения коллокационного процесса вытекает¹ его сходимость: при достаточно больших n система уравнений (5) однозначно разрешима, и $x_n(t) \rightarrow x(t)$ по норме L^2_w , где $x(t)$ и $x_n(t)$ — точное решение уравнения (1) и приближение (3). Сходимость по норме C удастся установить при некоторых дополнительных ограничениях о гладкости $f(t)$ и $K(t, s)$.

4. Рассмотрим наряду с системой (5) возмущенную систему

$$\tilde{\xi}_n = T_n \tilde{\xi}_n + \Gamma_n \tilde{\xi}_n + f^{(n)} + \gamma^{(n)}, \quad (9)$$

где $\Gamma_n = \{\gamma^{(n)}_{ij}\}_{i,j=0}^n$ и $\gamma^{(n)} = (\gamma_{0n}, \gamma_{1n}, \dots, \gamma_{nn})$ — погрешности, допущенные при составлении системы (5). Фактически мы решаем не (5), а возмущенную систему (9), и вместо (3) получаем возмущенное приближение

$$\tilde{x}_n(t) = \sum_{j=0}^n \tilde{\xi}_{jn} l_{jn}(t).$$

Нас интересует характер зависимости погрешности $x_n(t) - x(t)$ от погрешности Γ_n и $\gamma^{(n)}$. В [2] доказано, что

$$\|\tilde{x}_n - x_n\|_{L^2_w} \leq c_1 \|f\|_C \|\Gamma_n\|_{m_n \rightarrow m_n} + c_2 \|\gamma^{(n)}\|_{m_n}, \quad (10)$$

¹ См. [1], [2] или [3]. В [1, 3] результат сформулирован лишь для дифференциальных уравнений, однако, после замены искомой функции сходимость метода коллокации доказывается именно для интегральных уравнений.

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные, не зависящие от n и $f \in C$, а

$$\|\gamma^{(n)}\|_{m_n} = \max_{0 \leq i \leq n} |\gamma_{in}|, \quad \|\Gamma_n\|_{m_n \rightarrow m_n} = \max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^n |\gamma^{(n)}_{ij}|$$

— нормы вектора и матрицы в пространстве m_n . При этом возмущенная система (9) однозначно разрешима, если n достаточно велико и $\|\Gamma_n\| \leq \delta$, где $\delta > 0$ — некоторая достаточно малая постоянная. Из сказанного вытекает, что погрешность $\tilde{x}_n - x_n$ устойчива по отношению к малым погрешностям Γ_n и $\gamma^{(n)}$ системы метода коллокации.

Ниже мы установим новое неравенство

$$\|\tilde{x}_n - x_n\|_{L_w^2} \leq c_1 \|f\| c \Theta_n \|\Gamma_n\|_{R_n \rightarrow R_n} + c_2 \|\gamma^{(n)}\|_{m_n}, \quad (11)$$

где (см. (7))

$$\Theta_n = \frac{\max_{0 \leq i \leq n} \sqrt{a_{in}}}{\min_{0 \leq i \leq n} \sqrt{a_{in}}}. \quad (12)$$

При этом утверждается, что возмущенная система (9) однозначно разрешима, если n достаточно велико и $\Theta_n \|\Gamma_n\|_{R_n \rightarrow R_n} \leq \delta$, где $\delta > 0$ — достаточно малая постоянная.

Отложив доказательство сформулированных утверждений до следующего пункта, обсудим неравенство (11). В случае произвольной весовой функции $w(t)$, вообще говоря, $\Theta_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Однако в случае чебышевских узлов имеем (см. [4]) $a_{in} = \pi/(n+1)$ и $\theta_n = 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Таким образом, в случае чебышевских узлов

$$\|\tilde{x}_n - x_n\|_{L_w^2} \leq c_1 \|f\| c \|\Gamma_n\|_{R_n \rightarrow R_n} + c_2 \|\gamma^{(n)}\|_{m_n}, \quad (11')$$

что усиливает неравенство (10). В связи с трудностью нахождения евклидовой нормы $\|\Gamma_n\|_{R_n \rightarrow R_n}$ неравенства (11) и (11') представляют скорее лишь теоретический интерес. Из них видно, что в случае чебышевских узлов метод коллокации более устойчив по отношению к матрице погрешностей Γ_n , чем в случае каких-нибудь других узлов интерполирования. Чтобы это утверждение стало более строгим, желательно наряду с (11) доказать обратное неравенство

$$\|\tilde{x}_n - x_n\|_{L_w^2} \geq c \|f\| \Theta_n \|\Gamma_n\|_{R_n \rightarrow R_n} \quad (c = \text{const} > 0), \quad (13)$$

хотя бы при $\gamma^{(n)} = 0$ и каких-нибудь $f \in C$ и Γ_n .

5. Обозначим через E_n подпространство пространства $E = L_w^2$, состоящее из всех многочленов степени $\leq n$, а через

P_n оператор, ставящий любой непрерывной функции $x(t)$ в соответствие ее интерполяционный многочлен Лагранжа

$$P_n x = \sum_{j=0}^n x(t_{jn}) l_{jn}.$$

Оператор P_n можно рассматривать как неограниченный проектор, проектирующий из $E = L^2_w$ в подпространство E_n . На основании теоремы Эрдеши—Турана и условий 1) и 2) имеем (см. [1] или [3])

$$\|T - P_n T\|_{E \rightarrow E} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Система (5) метода коллокации равносильна галеркинскому уравнению

$$x_n = P_n T x_n + P_n f, \quad (15)$$

а возмущенная система (9) равносильна возмущенному галеркинскому уравнению

$$\tilde{x}_n = P_n T \tilde{x}_n + S_n \tilde{x}_n + P_n f + g_n, \quad (16)$$

где

$$S_n = \varphi^{-1} \Gamma_n \varphi_n \in L(E_n, E_n), \quad g_n = \varphi^{-1} \gamma^{(n)} \in E_n, \quad (17)$$

φ_n — оператор, ставящий любому многочлену

$$\sum_{j=0}^n \xi_{jn} l_{jn} \in E_n$$

в соответствие вектор

$$\xi^{(n)} = (\xi_{0n}, \xi_{1n}, \dots, \xi_{nn}).$$

Ввиду (14) для оценки нормы $\|\tilde{x}_n - x_n\|$ применима лемма 17.3 из [3]. Мы воспользуемся следующими двумя утверждениями указанной леммы:

а) найдутся такие постоянные c' , c'' и $\delta > 0$, что при $\|S_n\| \leq \delta$ уравнение (16) имеет единственное решение и

$$\|\tilde{x}_n - x_n\|_E \leq c' \|P_n f\|_E \|S_n\|_{E_n \rightarrow E_n} + c'' \|g_n\|_E \quad (n \geq n_0), \quad (18)$$

где x_n и \tilde{x}_n — решения уравнений (15) и (16);

б) найдется такая постоянная $c > 0$, что

$$\|\tilde{x}_n - x_n\|_E \leq c \|f\|_E \|S_n\|_{E_n \rightarrow E_n} \quad (n \geq n_0) \quad (19)$$

при $g_n = 0$, некотором $f \in E_n$ и любом S_n с $\|S_n\| \leq \delta$.

Введем в пространстве $(n+1)$ -мерных векторов $\xi^{(n)} = (\xi_{0n}, \xi_{1n}, \dots, \xi_{nn})$ норму

$$\|\xi^{(n)}\|_\alpha = \left[\sum_{j=0}^n \alpha_{jn} |\xi_{jn}|^2 \right]^{1/2}, \quad (20)$$

где α_{jn} — определенные в (7) числа. Получаемое таким образом банахово пространство обозначим через $R_{n,\alpha}$. Ввиду (7) для любого

$$x_n = \sum_{j=0}^n \xi_{jn} l_{jn} \in E_n$$

имеем

$$\|x_n\|_E = \left[\sum_{j=0}^n \alpha_{jn} |\xi_{jn}|^2 \right]^{1/2} = \|\varphi_n x_n\|_\alpha,$$

т. е. операторы $\varphi_n \in L(E_n, R_{n,\alpha})$ и $\varphi^{-1}_n \in L(R_{n,\alpha}, E_n)$ являются изометрическими изоморфизмами. Вместе с тем

$$\|S_n\|_{E_n \rightarrow E_n} = \|\Gamma_n\|_{R_{n,\alpha} \rightarrow R_{n,\alpha}}, \quad \|g_n\|_E = \|\gamma^{(n)}\|_\alpha.$$

Заметив, кроме того, что ввиду (7) и (8)

$$\|P_n f\|_E \leq \left[\int_{-1}^1 \omega(s) ds \right]^{1/2} \|f\|_C,$$

из (18) и (19) получаем неравенства

$$\|\tilde{x}_n - x_n\|_E \leq c_1 \|f\|_C \|\Gamma_n\|_{R_{n,\alpha} \rightarrow R_{n,\alpha}} + c_2 \|\gamma^{(n)}\|_\alpha, \quad (21)$$

$$\|\tilde{x}_n - x_n\|_E \geq c \|f\|_E \|\Gamma_n\|_{R_{n,\alpha} \rightarrow R_{n,\alpha}}, \quad (22)$$

где постоянные c , c_1 , c_2 не зависят от n и от f . Первое из этих неравенств справедливо при любом $f \in C$ и любых возмущениях Γ_n и $\gamma^{(n)}$ таких, что $\|\Gamma_n\|_{R_{n,\alpha} \rightarrow R_{n,\alpha}} \leq \delta$; второе неравенство справедливо при некотором специальном $f \in C$, $\gamma^{(n)} = 0$ и любым Γ_n . Далее,

$$\|\Gamma_n\|_{R_{n,\alpha} \rightarrow R_{n,\alpha}} \leq \Theta_n \|\Gamma_n\|_{R_n \rightarrow R_n}, \quad (23)$$

$$\|\gamma^{(n)}\|_\alpha \leq \left[\sum_{j=0}^n \alpha_{jn} \right]^{1/2} \|\gamma^{(n)}\|_{m_n} = \left[\int_{-1}^1 \omega(s) ds \right]^{1/2} \|\gamma^{(n)}\|_{m_n}, \quad (24)$$

где Θ_n — определенное в (12) число. Неравенство (23) справедливо для любой матрицы возмущений Γ_n ; существует специальная матрица возмущений Γ_n , для которой в (23) достигается знак равенства. Теперь неравенства (21) и (22) можно переписать в виде (11) и (13), и доказательство сформулированных в предыдущем пункте утверждений завершено.

Литература

1. Вайникко Г., О сходимости и устойчивости метода коллокации. Дифференц. уравнения, 1965, 1, № 2, 244—254.
2. Вайникко Г., О сходимости метода коллокации для многомерных интегральных уравнений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 244—257.
3. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунтцкий Я. Б., Стеценко В. Я., Приближенное решение операторных уравнений. Москва, 1969.
4. Сеге Г., Ортогональные многочлены. Москва, 1962.

Поступило
23 IX 1970

KOLLOKATSIOONIMEETODI STABIILSUSEST

G. Vainikko

Resümee

Artiklis uuritakse kollokatsioonimeetodi (3), (4) stabiilsust integraalvõrrandi (1) lahendamisel. On tõestatud võrratus (11), millest järeldub, et stabiilsuse seisukohalt on kõige otstarbekohasem kasutada Tšebõševi interpolatsioonisõlmi.

ABOUT STABILITY OF COLLOCATION METHOD

G. Vainikko

Summary

In the paper the stability of collocation method (3), (4) for integral equation (1) is investigated. The main result is contained in inequality (11). The best stability of collocation method is guaranteed by applying the Chebyshev interpolation points.

О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Т. Валлер

Кружок СНО при кафедре вычислительной математики

Э. Тамме

Кафедра вычислительной математики

Целый ряд работ посвящен исследованию решения краевых задач дифференциальных уравнений четвертого порядка методом конечных разностей (см. библиографию в [1]). В данной заметке доказывается сходимость метода конечных разностей при решении одной краевой задачи дифференциального уравнения шестого порядка.

Рассмотрим в p -мерном кубе

$$G = \{x = (x_1, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < 1; \alpha = 1, \dots, p\}$$

с границей Γ решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} Lu \equiv & - \sum_{\alpha, \beta=1}^p \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta} \left(p^{\alpha\alpha\beta}(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta} \right) - \\ & - \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma=1 \\ \alpha < \beta < \gamma}}^p \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \left(p^{\alpha\beta\gamma}(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \right) + \\ & + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \leq \beta}}^p \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(q^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) - \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(r^\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + \\ & + s(x) u = f(x) \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u &= \lambda(x) \quad \text{при } x \in \Gamma, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} &= \mu^\alpha(x), \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(p^{\alpha\alpha\alpha}(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} \right) = \nu(x) \end{aligned} \quad (2)$$

при $x_\alpha = 0$ и $x_\alpha = 1$ ($\alpha = 1, \dots, p$).

При приближенном решении этой задачи выбираем шаги $h_\alpha = 1/N_\alpha > 0$ и пользуемся разностной сеткой

$$\bar{\omega} = \{(x_1, \dots, x_p) : x_\alpha = i_\alpha h_\alpha; i_\alpha = -2, -1, \dots, N_\alpha + 2\}.$$

Обозначим через $\omega = \bar{\omega} \cap G$ множество внутренних узлов сетки.

Пусть $v = v(x) = v(i_1 h_1, \dots, i_p h_p)$ — функция, определенная на сетке $\bar{\omega}$. Символами v_m , v_{mn} и v_{mnl} обозначим значения этой функции, соответственно, при $i_\alpha = m$, $i_\beta = n$ и $i_\gamma = l$. Для разностей используем обозначения:

$$\Delta_\alpha v = (v_{i_\alpha+1} - v) / h_\alpha, \quad \nabla_\alpha v = (v - v_{i_\alpha-1}) / h_\alpha.$$

Аппроксимируем уравнение (1) разностным уравнением

$$\begin{aligned} L_h v \equiv & - \sum_{\alpha, \beta=1}^p \Delta_\beta \nabla_\alpha \Delta_\alpha (a^{\alpha\alpha\beta} \nabla_\beta \Delta_\alpha \nabla_\alpha v) - \\ & - \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma=1 \\ \alpha < \beta < \gamma}}^p \Delta_\gamma \Delta_\beta \Delta_\alpha (a^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\gamma \nabla_\beta \nabla_\alpha v) + \\ & + \sum_{\alpha=1}^p \Delta_\alpha \nabla_\alpha (b^{\alpha\alpha} \Delta_\alpha \nabla_\alpha v) + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^p \Delta_\beta \Delta_\alpha (b^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha v) - \\ & - \sum_{\alpha=1}^p \Delta_\alpha (c^\alpha \nabla_\alpha v) + dv = \varphi \quad (x \in \omega), \end{aligned} \quad (3)$$

где $a^{\alpha\alpha\alpha} = r_{i_\alpha-1/2}^{\alpha\alpha\alpha}$, $a^{\alpha\alpha\beta} = r_{i_\alpha, i_\beta-1/2}^{\alpha\alpha\beta}$ ($\beta \neq \alpha$), $a^{\alpha\beta\gamma} =$
 $= r_{i_\alpha-1/2, i_\beta-1/2, i_\gamma-1/2}^{\alpha\beta\gamma}$ ($\alpha < \beta < \gamma$), $b^{\alpha\alpha} = q^{\alpha\alpha}$, $b^{\alpha\beta} = q_{i_\alpha-1/2, i_\beta-1/2}^{\alpha\beta}$ ($\alpha < \beta$),
 $c^\alpha = r_{i_\alpha-1/2}^\alpha$, $d = s$, $\varphi = f$.

Граничные условия (2) аппроксимируем условиями

$$\begin{aligned} v_0 = \lambda_0, \quad v_{N_\alpha} = \lambda_{N_\alpha}, \quad \Delta_\alpha \nabla_\alpha v_0 = \mu_0^\alpha, \quad \Delta_\alpha \nabla_\alpha v_{N_\alpha} = \mu_{N_\alpha}^\alpha, \\ \Delta_\alpha (a^{\alpha\alpha\alpha} \nabla_\alpha \Delta_\alpha \nabla_\alpha v)_0 = \nu_0, \quad \Delta_\alpha (a^{\alpha\alpha\alpha} \nabla_\alpha \Delta_\alpha \nabla_\alpha v)_{N_\alpha} = \nu_{N_\alpha} \\ (\alpha = 1, \dots, p). \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим через G_h выпуклую окрестность куба G , содержащую сетку $\bar{\omega}$, и через $C^{(m)}(D)$ — класс функций, имеющих в области D все непрерывные частные производные до порядка m включительно.

Предположим, что задача $\{(1), (2)\}$ имеет решение $u \in C^{(3)}(G_h)$ и что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$r^{\alpha\beta\gamma} \in C^{(5)}(G_h), \quad q^{\alpha\beta} \in C^{(4)}(\bar{G}), \quad r^\alpha \in C^{(3)}(\bar{G}), \quad s \in C(\bar{G}).$$

Пусть $h_\alpha = \kappa_\alpha h$ ($\alpha = 1, \dots, p$), где κ_α — положительные постоянные.

При этих предположениях можно показать, что погрешности аппроксимации имеют следующие порядки:

$$\begin{aligned} \psi &= L_h u - f = O(h^2) \quad (x \in \omega), \\ \sigma_0^\alpha &= \Delta_\alpha \nabla_\alpha u_0 - \mu_0^\alpha = O(h^2), \\ \sigma_{N_\alpha}^\alpha &= \Delta_\alpha \nabla_\alpha u_{N_\alpha} - \mu_{N_\alpha}^\alpha = O(h^2), \\ \tau_0 &= \Delta_\alpha (a^{\alpha\alpha\alpha} \nabla_\alpha \Delta_\alpha \nabla_\alpha u)_0 - \nu_0 = O(h), \\ \tau_{N_\alpha} &= \Delta_\alpha (a^{\alpha\alpha\alpha} \nabla_\alpha \Delta_\alpha \nabla_\alpha u)_{N_\alpha} - \nu_{N_\alpha} = O(h). \end{aligned}$$

Если приближенное решение $y(x)$ задачи $\{(1), (2)\}$ найдено как точное решение алгебраической системы $\{(3), (4)\}$, то погрешность $z(x) = u(x) - v(x)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} L_h z &= \psi \quad (x \in \omega), \\ z_0 &= z_{N_\alpha} = 0, \quad \Delta_\alpha \nabla_\alpha z_0 = \sigma_0^\alpha, \quad \Delta_\alpha \nabla_\alpha z_{N_\alpha} = \sigma_{N_\alpha}^\alpha, \\ \Delta_\alpha (a^{\alpha\alpha\alpha} \nabla_\alpha \Delta_\alpha \nabla_\alpha z)_0 &= \tau_0, \quad \Delta_\alpha (a^{\alpha\alpha\alpha} \nabla_\alpha \Delta_\alpha \nabla_\alpha z)_{N_\alpha} = \tau_{N_\alpha} \\ &\quad (\alpha = 1, \dots, p). \end{aligned}$$

Предположим, что в \bar{G} выполнены неравенства

$$0 < \kappa \leq p^{\alpha\alpha\beta}(x) \leq A, \quad p^{\alpha\beta\gamma}(x) \geq 0, \quad q^{\alpha\beta}(x) \geq 0, \quad q^{\alpha\alpha}(x) \leq B, \\ r^\alpha(x) \geq 0, \quad s(x) \geq 0.$$

Пользуясь приемами из [1], можно при $p \geq 2$ получить оценку

$$\begin{aligned} T(z) &\equiv \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^p \|\nabla_\beta \Delta_\alpha \nabla_\alpha z\|_{\beta}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\kappa} \left[\frac{1}{32} \sqrt{\frac{2}{p(p-1)}} \|\psi\| + \right. \\ &+ \sum_{\alpha=1}^p \left(\frac{A}{\sqrt{h_\alpha}} + B \right) \|\sigma_0^\alpha\|_{\delta_\alpha} + \|\sigma_{N_\alpha}^\alpha\|_{\delta_\alpha} + A \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^p (\|\nabla_\beta \sigma_0^\alpha\|_{\beta\delta_\alpha} + \\ &+ \|\nabla_\beta \sigma_{N_\alpha}^\alpha\|_{\beta\delta_\alpha}) + \left. \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{p-1}} \sum_{\alpha=1}^p (\|\tau_0\|_{\delta_\alpha} + \|\tau_{N_\alpha}\|_{\delta_\alpha}) \right], \end{aligned}$$

в которой нормы определены следующим образом:

$$\|v\| = \left(\sum_{x \in \omega} |v(x)|^2 H \right)^{1/2}, \quad H = h_1 \dots h_p,$$

$$\|v_m\|_{\delta_\alpha} = \left(\sum_{i_1=1}^{N_1-1} \dots \sum_{i_{\alpha-1}=1}^{N_{\alpha-1}-1} \sum_{i_{\alpha+1}=1}^{N_{\alpha+1}-1} \dots \sum_{i_p=1}^{N_p-1} |v_m|^2 H / h_\alpha \right)^{1/2};$$

индекс β за символом нормы означает, что по i_β суммируется от 1 до N_β .

Из оценки

$$\|z\| \leq \frac{1}{32} \sqrt{\frac{2}{p(p-1)}} T(z)$$

следует, что при сделанных предположениях метод конечных разностей $\{(3), (4)\}$ сходится со скоростью

$$\|z\| = \|u - v\| = O(h).$$

В двумерном случае ($p = 2$) имеет место оценка

$$\max_{x \in \omega} |z(x)| \leq \frac{1}{16} T(z),$$

из которой следует равномерная сходимость рассматриваемого метода конечных разностей со скоростью

$$\max_{x \in \omega} |u(x) - v(x)| = O(h).$$

Можно показать, что при сделанных предположениях метод конечных разностей $\{(3), (4)\}$ сходится равномерно со скоростью $O(h)$ и в одномерном случае ($p = 1$). Равномерная сходимость этого метода со скоростью $O(h)$ имеет место и в трехмерном случае ($p = 3$), если дополнительно предполагать, что

$$p^{123}(x) \geq \kappa > 0 \quad (x \in \bar{G}).$$

Литература

1. Тамме Э., О решении квазилинейной краевой задачи четвертого порядка методом конечных разностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 258—275.

Поступило
30 VI 1970

KUUENDAT JÄRKU DIFERENTSIAALVÖRRANDI RAJAÜLESANDE LAHENDAMISEST VÖRGUMEETODIGA

T. Vallner ja E. Tamme

Resümee

Vaadeldakse kuuendat järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi rajaülesande $\{(1), (2)\}$ lahendamist võrgumeetodiga $\{(3), (4)\}$. Tõestatakse selle meetodi koonduvus.

ÜBER DIE LÖSUNG DER RANDWERTAUFGABE DER DIFFERENTIALGLEICHUNG SECHSTER ORDNUNG MITTELS EINES DIFFERENZENVERFAHRENS

T. Vallner und E. Tamme

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wird die Lösung der Randwertaufgabe $\{(1), (2)\}$ der partiellen Differentialgleichung sechster Ordnung mittels des Differenzenverfahrens $\{(3), (4)\}$ betrachtet. Es wird die Konvergenz dieses Verfahrens bewiesen.

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ МЕТОДОМ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР

Г. Вайникко

Кафедра вычислительной математики

А. Педас

Кружок СНО при кафедре вычислительной математики

1. В настоящей статье рассматривается линейное интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 \kappa(|t-s|) x(s) ds + f(t) \quad (1)$$

с непрерывно дифференцируемым при $\tau > 0$ ядром $\kappa(\tau)$, имеющим при $\tau = 0$ логарифмическую особенность,

$$|\kappa(\tau)| \leq b |\ln \tau| \quad (0 < \tau \leq 1; b = \text{const}). \quad (2)$$

Особенность ядра $\kappa(\tau)$ влечет за собой особенность решения $x(t)$ интегрального уравнения (1): если свободный член $f(t)$ непрерывно дифференцируем на отрезке $[0, 1]$, то $x(t)$ непрерывно дифференцируемо в промежутке $(0, 1)$ и имеет логарифмические особенности при $t = 0$ и $t = 1$.

Интегральные уравнения рассматриваемого типа довольно часто встречаются на практике. Сюда относятся, например, уравнение Милна и некоторые другие уравнения, связанные с переносом излучения (см., например, [3]). Вместе с тем численное решение таких уравнений весьма затруднительно из-за медленной сходимости приближенных методов. Ввиду логарифмической особенности решения $x(t)$ при $t = 0$ и $t = 1$, от методов дискретизации не следует ожидать более быстрой сходимости, чем $h |\ln h|$, где h — шаг дискретизации. Поэтому представляет интерес найти наиболее простые дискретизационные методы, сходящиеся с быстротой $h |\ln h|$. В настоящей статье доказывается, что указанную быстроту сходимости имеет метод механических квадратур с использованием квадратурной формулы средних

прямоугольников (со сдвинутыми на $h/2$ узлами для второй переменной t). При этом предполагается дополнительно, что

$$|\kappa'(\tau)| \leq \frac{b'}{\tau} \quad (0 < \tau \leq 1; b' = \text{const}). \quad (3)$$

2. В этом пункте дадим более четкие формулировки результатов статьи; их доказательства будут приведены в последующих пунктах.

Пусть n — натуральное число, $h = 1/n$. Составим систему алгебраических уравнений

$$\xi_{ni} = h \sum_{j=0}^{n-1} \kappa \left(\left| ih - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) \xi_{nj} + f(ih) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (4)$$

где ξ_{nj} — приближенные значения искомого решения в узлах $(j + \frac{1}{2})h$ (или jh). К системе (4) приходим, если заменить интегрирование в (1) по квадратурной формуле средних прямоугольников

$$\int_0^1 z(s) ds \approx h \sum_{j=0}^{n-1} z \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) h \right)$$

и задать переменной t затем значения ih ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Теорема 1. Пусть ядро $\kappa(\tau)$ непрерывно при $0 < \tau \leq 1$ и удовлетворяет условию (2), а свободный член $f(t)$ непрерывен при $0 \leq t \leq 1$. Пусть уравнение (1) имеет единственное решение $x^*(t)$.

Тогда система уравнений (4) имеет при достаточно больших n единственное решение $(\xi^*_{n0}, \xi^*_{n1}, \dots, \xi^*_{n,n-1})$ и при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} \left| \xi^*_{ni} - x^* \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) h \right) \right| \rightarrow 0. \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть ядро $\kappa(\tau)$ непрерывно дифференцируемо при $0 < \tau \leq 1$ и удовлетворяет условиям (2) и (3), а свободный член $f(t)$ непрерывно дифференцируем при $0 \leq t \leq 1$. Пусть уравнение (1) имеет единственное решение $x^*(t)$.

Тогда справедливы утверждения теоремы 1 и справедлива оценка

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} \left| \xi^*_{ni} - x^* \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) h \right) \right| \leq ch |\ln h| \quad (c = \text{const}). \quad (6)$$

З а м е ч а н и е 1. Из непрерывности ядра $\kappa(\tau)$ при $0 < \tau \leq 1$ и неравенства (2) вытекает, что интегральный оператор уравнения (1) вполне непрерывен в пространстве $C[0, 1]$. Поэтому предположение о существовании решения уравнения (1) равносильно условию, что соответствующее однородное уравнение имеет лишь нулевое решение.

З а м е ч а н и е 2. Утверждения теорем 1 и 2 остаются в силе и в случае, если систему (4) заменить системой

$$\xi_{ni} = h \sum_{j=0}^{n-1} \kappa \left(\left| ih - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) \xi_{nj} + f \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) h \right) \\ (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

3. Интегральное уравнение (1) рассмотрим как операторное уравнение

$$x = Tx + f \quad (7)$$

в банаховом пространстве $E = C[0, 1]$, а систему уравнений (4) как операторное уравнение

$$\xi_n = T_n \xi_n + p_n f \quad (8)$$

в банаховом пространстве $E_n = m_n$ векторов вида $\xi_n = (\xi_{n0}, \xi_n, \dots, \xi_{n,n-1})$ с нормой

$$\|\xi_n\| = \max_{0 \leq i \leq n-1} |\xi_{ni}|.$$

Здесь T и T_n — линейные вполне непрерывные операторы соответственно в пространствах $C[0, 1]$ и m_n , задаваемые формулами

$$(Tx)(t) = \int_0^1 \kappa(|t-s|) x(s) ds, \quad (9)$$

$$(T_n \xi_n)_i = h \sum_{j=0}^{n-1} \kappa \left(\left| ih - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) \xi_{nj} \\ (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (10)$$

а p_n — линейные непрерывные операторы из $C[0, 1]$ в m_n (связывающие отображения), задаваемые формулами

$$p_n x = \left(x \left(\frac{1}{2} h \right), x \left(\frac{3}{2} h \right), \dots, x \left(\frac{2n-1}{2} h \right) \right). \quad (11)$$

Напомним некоторые понятия и результаты (см. [1]). Пусть E и E_n — произвольные банаховы пространства, $p_n \in L(E, E_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) линейные операторы.

О п р е д е л е н и е 1. Последовательность вполне непрерывных операторов $T_n \in L(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T \in L(E, E)$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in L(E, E_n)$, если выполнены следующие два условия:

- а) $\|p_n Tx - T_n p_n x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для $\forall x \in E$;
- б) для любой последовательности $\xi_n \in E_n$, $\|\xi_n\| \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$), существуют такие $y_n \in F$, что $p_n y_n = T_n \xi_n$ ($n = 1, 2, \dots$) и последовательность $\{y_n\}$ компактна в E .

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1) последовательность вполне непрерывных операторов $T_n \in L(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T \in L(E, E)$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in L(E, E_n)$;

2) уравнение (7) имеет единственное решение x^* ;

3) операторы p_n ($n = 1, 2, \dots$) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} p_n E &= E_n \quad (n = 1, 2, \dots); \\ \|p_n\| &\leq a \quad (n = 1, 2, \dots; a = \text{const}); \\ \|\xi_n\|_{E_n} &\geq d \inf_{x \in E, p_n x = \xi_n} \|x\|_E \quad \text{для } \forall \xi_n \in E_n \\ &(n = 1, 2, \dots; d = \text{const} > 0); \\ \|p_n x\| &\rightarrow \|x\| \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{для } \forall x \in E. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (8) имеет при достаточно больших n единственное решение $\xi_n^* \in E_n$ и $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Справедлива оценка

$$c_1 \|p_n T x^* - T_n p_n x^*\| \leq \|\xi_n^* - p_n x^*\| \leq c_2 \|p_n T x^* - T_n p_n x^*\|, \quad (12)$$

где c_1, c_2 — некоторые положительные постоянные.

Заметим, что условие 3) теоремы 3 в нашем случае ($E = C[0, 1]$, $E_n = m_n$, p_n определены в (11)) выполнено, причем $a = d = 1$. Так как в теоремах 1 и 2 предполагается существование решения $x^*(t)$ интегрального уравнения (1) (уравнения (7)), то остается провести проверку условия 1) теоремы 3.

В четвертом и пятом пунктах мы установим, что для операторов (9) и (10) выполнены условия а) и б) определения 1. Рассуждения проводятся в условиях теоремы 1, и тем самым мы получаем доказательство теоремы 1 из утверждений теоремы 3 о существовании единственного решения ξ_n^* и сходимости $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$.

В шестом пункте мы в условиях теоремы 2 установим, что

$$\|T_n p_n x^* - p_n T x^*\| \leq c' h |\ln h| \quad (c' = \text{const}), \quad (13)$$

и оценка (6) вытекает из неравенств (12) и (13):

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq n-1} \left| \xi_{ni}^* - x^* \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) h \right) \right| &= \|\xi_n^* - p_n x^*\| \leq \\ &\leq c_2 \|T_n p_n x^* - p_n T x^*\| \leq c h |\ln h|. \end{aligned}$$

4. В этом пункте покажем, что

$$\|T_n p_n x - p_n T x\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{для } \forall x \in C[0, 1],$$

где T, T_n и p_n — определенные в (9), (10) и (11) операторы.

Действительно, для любой $x(t) \in C[0, 1]$ имеем

$$\|T_n p_n x - p_n T x\| = \max_{0 \leq i \leq n-1} \left| h \sum_{j=0}^{n-1} x \left(\left| i h - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) x \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) h \right) - \right.$$

$$-\int^1 \kappa \left(\left| \left(i + \frac{1}{2} \right) h - s \right| \right) x(s) ds \leq \max_{0 \leq i \leq n-1} (A_i + B_i + C_i),$$

где

$$A_i = h \sum_{j: (j+1/2)h \in U_i(\delta)} \left| \kappa \left(\left| ih - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) x \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) h \right) \right|,$$

$$B_i = \int_{U_i(\delta)} \left| \kappa \left(\left| \left(i + \frac{1}{2} \right) h - s \right| \right) x(s) \right| ds,$$

$$C_i = \left| h \sum_{j: (j+1/2)h \in V_i(\delta)} \kappa \left(\left| ih - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) x \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) h \right) - \int_{V_i(\delta)} \kappa \left(\left| \left(i + \frac{1}{2} \right) h - s \right| \right) x(s) ds \right|,$$

$$U_i(\delta) = (ih - \delta, ih + \delta) \cap [0, 1], \quad V_i(\delta) = [0, 1] \setminus U_i(\delta);$$

а δ — малое положительное число, которое выберем позже.

Обозначим

$$M = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|. \quad (14)$$

В силу (14) и (2)

$$\begin{aligned} A_i &\leq Mbh \sum_{j: (j+1/2)h \in U_i(\delta)} \left| \ln \left(\left| ih - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) \right| \leq \\ &\leq Mb \int_{U_i(\delta)} |\ln(|ih - s|)| ds. \end{aligned}$$

На последнем шаге мы воспользовались неравенством

$$h \sum_{j=j_1}^{j_2-1} \left| \ln \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) h \right) \right| \leq \int_{j_1 h}^{j_2 h} |\ln s| ds \quad (0 \leq j_1 < j_2 \leq n), \quad (15)$$

которое вытекает из выпуклости функции $y = |\ln s|$ в промежутке $(0, 1)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq n-1} A_i &\leq \max_{0 \leq i \leq n-1} Mb \int_{U_i(\delta)} |\ln(|ih - s|)| ds \leq \\ &\leq 2Mb \int_0^\delta |\ln s| ds \leq c' \delta |\ln \delta|, \end{aligned} \quad (16)$$

где c' — положительная постоянная.

С помощью (14) и (2) находим

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} B_i \leq c'' \delta |\ln \delta| \quad (c'' = \text{const}). \quad (17)$$

По произвольному $\varepsilon > 0$ зафиксируем теперь $\delta > 0$ так, что $(c' + c'')\delta |\ln \delta| < \varepsilon/2$. Из равномерной ограниченности и равномерной интегрируемости (см. [2]) функций

$$\gamma_{n,i}(s) = \begin{cases} \kappa(|ih - s|)x(s) & \text{при } s \in V_i(\delta), \\ 0 & \text{при } s \in U_i(\delta) \end{cases}$$

вытекает, что $\max_i C_i \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Выберем n_0 так, что $\max_i C_i \leq \varepsilon/2$ при $n \geq n_0$. Тогда

$$\max_i (A_i + B_i + C_i) \leq \varepsilon$$

при $n \geq n_0$ и ввиду произвольности $\varepsilon > 0$

$$\|T_n p_n x - p_n T_n x\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

5. В этом пункте покажем, что для операторов (9), (10) и (11) выполнено условие б) определения 1. Пусть задана последовательность $\xi_n \in m_n$, $\|\xi_n\| \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$). Построим ломанную $y_n(t)$, принимающую в узлах $(i + 1/2)h$ значения

$$\eta_{ni} = h \sum_{j=0}^{n-1} \kappa \left(\left| ih - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) \xi_{nj} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

линейную между соседними узлами и постоянную при $0 \leq t \leq \leq h/2$ и $1 - h/2 \leq t \leq 1$. Ясно, что $p_n y_n = T_n \xi_n$. Остается показать, что последовательность $\{y_n(t)\}$ компакта в пространстве $C[0, 1]$, т. е. функции $y_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) равномерно ограниченные и равномерно непрерывные.

Так как

$$\max_{t \in [0,1]} |y_n(t)| = \max_{0 \leq i \leq n-1} |\eta_{ni}| \leq \max_{0 \leq i \leq n-1} (A_i + C_i + D_i),$$

где

$$D_i = \int_{V_i(\delta)} \left| \kappa \left(\left| \left(i + \frac{1}{2} \right) h - s \right| \right) \right| ds \leq 2 \int_0^{1/2} |\ln s| ds,$$

а $\max (A_i + C_i) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см. пункт 4; $x(t) \equiv 1$), то функции $y_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) равномерно ограничены.

Покажем теперь, что функции $y_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) равномерно непрерывные. Пусть t_1, t_2 — абсциссы вершин ломаной $y_n(t)$:

$$t_1 = n_1 h + \frac{h}{2}, \quad t_2 = (n_1 + n_2) h + \frac{h}{2},$$

где $n_1 \geq 0, n_2 > 0, n_1 + n_2 \leq n - 1$. Пусть δ — достаточно малое положительное число. Тогда

$$|y_n(t_1) - y_n(t_2)| = \left| h \sum_{j=0}^{n-1} \left[\kappa \left(\left| t_1 - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \kappa \left(\left| t_2 - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) \right] \xi_{nj} \right| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \quad (18)$$

где

$$\Sigma_1 = h \sum_{j: (j+1/2)h \in U_{t_1}(\delta)} \left| \kappa \left(\left| t_1 - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) - \right. \\ \left. - \kappa \left(\left| t_2 - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) \right|,$$

$$\Sigma_2 = h \sum_{j: (j+1/2)h \in U_{t_2}(\delta)} \left| \kappa \left(\left| t_1 - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) - \right. \\ \left. - \kappa \left(\left| t_2 - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) \right|,$$

$$\Sigma_3 = h \sum_{j: (j+1/2)h \in V_{t_1, t_2}(\delta)} \left| \kappa \left(\left| t_1 - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) - \right. \\ \left. - \kappa \left(\left| t_2 - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) \right|,$$

$$U_{t_1}(\delta) = (t_1 - \delta, t_1 + \delta) \cap [0, 1], \quad U_{t_2}(\delta) = (t_2 - \delta, t_2 + \delta) \cap [0, 1], \\ V_{t_1, t_2}(\delta) = [0, 1] \setminus (U_{t_1}(\delta) \cup U_{t_2}(\delta)).$$

С помощью (2) и (15) получаем

$$\Sigma_1 \leq c_1 \delta |\ln \delta| \quad (c_1 = \text{const} > 0); \\ \Sigma_2 \leq c_2 \delta |\ln \delta| \quad (c_2 = \text{const} > 0).$$

Далее, так как при $(j + 1/2)h \in V_{t_1, t_2}(\delta)$ имеем

$$\left| t_1 - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \geq \delta, \quad \left| t_2 - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \geq \delta,$$

то

$$\Sigma_3 \leq \omega_\delta(|t_1 - t_2|),$$

где

$$\omega_\delta(\tau) = \sup_{\substack{\delta \leq s_1, s_2 \leq 1 \\ |s_1 - s_2| \leq \tau}} |\kappa(s_1) - \kappa(s_2)|$$

— модуль непрерывности функции $\kappa(t)$ на отрезке $[\delta, 1]$.

В итоге,

$$|y_n(t_1) - y_n(t_2)| \leq \omega_\delta(|t_1 - t_2|) + (c_1 + c_2) \delta |\ln \delta|. \quad (19)$$

В частности, если t и $t + h$ — соседние узлы, то

$$|y_n(t) - y_n(t + h)| \leq \omega_\delta(h) + (c_1 + c_2) \delta |\ln \delta|. \quad (20)$$

Принимая во внимание, что $y_n(t)$ — ломанная, получаем из неравенств (19) и (20), что

$$|y_n(t') - y_n(t'')| \leq 2\omega_\delta(h) + \omega_\delta(|t' - t''|) + c\delta|\ln \delta|, \quad (21)$$

где t' и t'' — произвольные точки отрезка $[0, 1]$, $c = 3(c_1 + c_2)$.

Из (21) заключаем, что функции $y_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) равностепенно непрерывны. Действительно, пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем сперва $\delta > 0$ так, что $c\delta|\ln \delta| < \varepsilon/3$. Затем, выберем $\eta > 0$ так, что $\omega_\delta(|t' - t''|) < \varepsilon/3$ при $|t' - t''| < \eta$. Наконец, выберем n_0 так, что $2\omega_\delta(h) < \varepsilon/3$ при $n \geq n_0$ (при $h \leq 1/n_0$). Тогда

$$|y_n(t') - y_n(t'')| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |t' - t''| < \eta, \quad n \geq n_0.$$

Уменьшив, если это нужно, число $\eta > 0$, можно добиться, чтобы последнее неравенство выполнялось при всех $n = 1, 2, \dots$. Этим доказана равностепенная непрерывность функций $y_n(t)$.

Тем самым завершено доказательство теоремы 1.

6. В этом пункте мы установим неравенство (13). В первую очередь, отметим, что для дифференцируемой в промежутках $0 < s < h/2$ и $h/2 < s < h$ функции $z(s)$ имеем

$$\int_0^h z(s) ds - hz\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h^2}{8}[z'(\eta) - z'(\xi)], \quad (20)$$

где $0 < \xi < h/2$; $h/2 < \eta < h$. Последняя формула непосредственно вытекает из теоремы Лагранжа о среднем.

Пусть теперь $x^*(t)$ — решение уравнения (1), T , T_n и p_n — операторы, задаваемые формулами (9), (10) и (11). Пусть $q_n \in L(C[0, 1], m_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) — линейные операторы, задаваемые формулами

$$q_n x = (x(0), x(h), \dots, x((n-1)h)) \quad (x \in C[0, 1]). \quad (21)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|T_n p_n x^* - q_n T x^*\| &= R_n(t) = R_n(i_0 h) = \max_{0 \leq i \leq n-1} R_n(ih) = \\ &= \max_{0 \leq i \leq n-1} \left[h \sum_{j=0}^{n-1} \left[\kappa \left(\left| ih - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) x^* \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) h \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{jh}^{(j+1)h} \kappa(|ih - s|) x^*(s) ds \right] \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция

$$z'(s) = \pm \kappa'(|i_0 h - s|) x^*(s) + \kappa(|i_0 h - s|) x^{*'}(s)$$

неограничена в точках $s = 0$, $s = 1$ (особенности решения $x^*(t)$) и в точке $s = i_0 h$ (особенность ядра $\kappa(|t - s|)$), то применение формулы (20) к величине $R_n(t)$ дает:

$$\begin{aligned}
R_n(t) = & \left| \frac{h^2}{8} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0-1, i_0}}^{n-2} \{ [\pm \kappa'(|t - \eta_j|) x^*(\eta_j) + \kappa(|t - \eta_j|) x^{*'}(\eta_j)] - \right. \\
& - [\pm \kappa'(|t - \xi_j|) x^*(\xi_j) + \kappa(|t - \xi_j|) x^{*'}(\xi_j)] \} + \\
& + h \sum_{j=0, i_0-1, i_0, n-1} \left[\kappa \left(\left| t - \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right| \right) x^* \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) h \right) - \right. \\
& \left. - \int_{jh}^{(j+1)h} \kappa(|t-s|) x^*(s) ds \right] \Big|, \quad (22)
\end{aligned}$$

где $jh < \xi_j < jh + h/2$, $jh + h/2 < \eta_j < (j+1)h$. С помощью (2), (3), (14) и

$$\max_{h \leq t \leq t-h} |x^{*'}(t)| \leq M' |\ln h| \quad (M' = \text{const} > 0)$$

из (22) получаем

$$\begin{aligned}
R_n(t) \leq & \frac{h^2}{8} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0-1, i_0}}^{n-2} \{ M [|\kappa'(|t - \eta_j|)| + |\kappa'(|t - \xi_j|)|] + \\
& + M' |\ln h| [|\kappa(|t - \eta_j|)| + |\kappa(|t - \xi_j|)|] \} + c_1 h |\ln h| \leq \\
\leq & \frac{h^2}{8} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0-1, i_0}}^{n-2} \left\{ Mb' \left(\frac{1}{|t - \eta_j|} + \frac{1}{|t - \xi_j|} \right) + \right. \\
& \left. + M' |\ln h| b (|\ln(|t - \eta_j|)| + |\ln(|t - \xi_j|)|) \right\} + c_1 h |\ln h| \leq \\
\leq & c_3 h \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} + c_2 h^2 |\ln h| \cdot |\ln(h^n n!)| + c_1 h |\ln h|, \quad (23)
\end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные. Ввиду неравенств

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \leq \ln n + 1, \quad n! < n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{1}{42n}},$$

из (23) вытекает, что

$$\|T_n p_n x^* - q_n T x^*\| = R_n(t) \leq ch |\ln h| \quad (c = \text{const} > 0). \quad (24)$$

Искомая оценка

$$\|T_n p_n x^* - p_n T x^*\| \leq c' h |\ln h| \quad (c' = \text{const})$$

следует в силу (11), (21) и (24) непосредственно из неравенства

$$\|T_n p_n x^* - p_n T x^*\| \leq \|T_n p_n x^* - q_n T x^*\| + \|q_n T x^* - p_n T x^*\|.$$

Тем самым завершено доказательство теоремы 2.

Литература

1. Вайникко Г., Компактная аппроксимация линейных вполне непрерывных операторов операторами в факторпространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 190—204.
2. Вайникко Г., Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту, 1970.
3. Соболев В. В., Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. Москва, 1956.

Поступило
25 IX 1971

LOGARITMILISE ISEÄRASUSEGA TUUMAGA INTEGRAALVÖRRANDITE LAHENDAMISEST KVADRATUURVALEMITE MEETODIL

G. Vainikko ja A. Pedas

Resümee

Artiklis käsitletakse integraalvõrrandi (1) lahendamist kvadratuurvalemite meetodil (4). Võrrandi (1) tuum on iseärane ja rahuldab võrratusi (2) ja (3). Näidatakse, et kvadratuurvalemite meetod koondub kiirusega $h|\ln h|$. See on suurim koondumise kiirus, mida tuuma ja võrrandi lahendi iseärasust arvestades võib saavutada diskretiseerimismeetodite abil.

ÜBER DIE LÖSUNG DER INTEGRALGLEICHUNGEN MIT DEM LOGARITMISCH SINGULÄREN KERN MIT HILFE DER METHODE DER QUADRATURFORMELN

G. Vainikko und A. Pedas

Zusammenfassung

Dieser Artikel behandelt die Auflösung der Integralgleichung (1) mit der Methode der Quadraturformeln (4). Der Kern der Gleichung (1) ist singular und genügt den Ungleichungen (2) und (3). Es wird gezeigt, daß die Methode der Quadraturformeln mit der Geschwindigkeit $h|\ln h|$ konvergiert. Das ist die größte Geschwindigkeit der Konvergenz, die man mit Hilfe der diskreten Verfahren erreichen kann, falls die Singularität der Lösung der Gleichung und des Kerns berücksichtigt wird.

МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ГОМОРИ ДЛЯ ЧАСТИЧНО ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Л. Кивистик

Кафедра вычислительной математики

Т. Шаганова

Кружок СНО при кафедре вычислительной математики

Для решения частично целочисленных задач линейного программирования в статье рассматриваются модификации метода Гомори, отличающиеся от традиционного метода Гомори тем, что дополнительные ограничения вводятся уже до получения оптимальной симплексной таблицы.

§ 1. Общая идея модификаций метода Гомори

1. Рассмотрим следующую задачу: максимизировать линейную форму

$$x_0 \equiv a_{00} + \sum_{j \in N} a_{0j}(-x_j) \quad (1)$$

при условиях:

$$x_i = a_{i0} + \sum_{j \in N} a_{ij}(-x_j), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_j - \text{целое число при } j \in T \subset \{0, 1, \dots, n\}. \quad (4)$$

Здесь N — множество индексов внебазисных переменных, n — число переменных.

В соотношениях (2) все переменные x_1, x_2, \dots, x_n выражены через внебазисные переменные. Это означает, что для внебазисных переменных соотношения (2) имеют вид

$$x_i = -(-x_i), \quad i \in N,$$

или, что то же самое,

$$a_{ii} = -1, \quad a_{ij} = 0, \quad \text{если } j \neq i \text{ и } i \in N.$$

Если $a_{kl} \neq 0$ — ведущий элемент, то симплексным шагом будем называть переход от (полной) симплексной таблицы (a_{ij}) с $i = 0, 1, \dots, n$ и $j \in \{0\} \cup N$ к новой таблице (a^*_{ij}) с $i = 0, 1, \dots, n$ и $j \in \{0\} \cup N \cup \{k\} \setminus \{l\}$ при помощи формул

$$A^*_k = -A_l/a_{kl},$$

$A^*_j = A_j - (a_{kj}/a_{kl})A_l$ для всех $j \in \{0\} \cup N \setminus (\{l\} \cup \{k\})$, где A_j, A^*_j — j -ый столбец предыдущей и последующей симплексной таблиц соответственно.

Как известно (см., например, [1]), традиционный метод Гомори для решения частично целочисленной задачи (1)—(4) состоит в следующем. Решается задача (1)—(3) и проверяется, выполнено ли условие (4). Если да, то оптимальное решение задачи (1)—(4) найдено, если нет, прибавляется дополнительное ограничение. Пусть симплексная таблица (a_{ij}) уже в оптимальной форме, т. е. $a_{0j} \geq 0$ и $a_{i0} \geq 0$ для всех $j \in N, i = 1, 2, \dots, n$, и пусть при $k \in T$ элемент a_{k0} — нецелое число. Тогда дополнительное ограничение Гомори (см. [1], стр. 142—143) имеет вид

$$x_{n+1} = -\gamma_{k0} - \sum_{j \in N} \gamma_{kj}(-x_j) \geq 0, \quad (5)$$

где $\gamma_{k0} = \{a_{k0}\} > 0$ и для $j \in N$

$$\gamma_{kj} = \begin{cases} \{a_{kj}\} & \text{при } j \in T \text{ и } \{a_{kj}\} \leq \{a_{k0}\}, \\ \frac{\{a_{k0}\}}{\{-a_{k0}\}} \{-a_{kj}\} & \text{при } j \in T \text{ и } \{a_{kj}\} > \{a_{k0}\}, \\ a_{kj} & \text{при } j \in \bar{T} \text{ и } a_{kj} \geq 0, \\ \frac{\{a_{k0}\}}{\{-a_{k0}\}} (-a_{kj}) & \text{при } j \in \bar{T} \text{ и } a_{kj} < 0. \end{cases} \quad (6)$$

После введения ограничения (5) симплексная таблица снова преобразуется к оптимальной форме и весь ход решения повторяется.

Однако ограничение Гомори можно прибавить и раньше, когда оптимальность симплексной таблицы еще не достигнута. Рассмотрим этот случай. При этом используем обстоятельство, что ограничение (5) никак не зависит от того, находится ли симплексная таблица в оптимальной форме или нет.

Пусть a_{kl} — ведущий элемент, выбранный по правилам прямого или двойственного симплекс-метода, в зависимости от того, в какой форме находится симплексная таблица, и пусть $l \in T$. Тогда после одного симплексного шага k -ое ограничение принимает вид

$$x_l = \frac{a_{k0}}{a_{kl}} + \frac{1}{a_{kl}}(-x_k) + \sum_{j \in N \setminus \{l\}} \frac{a_{kj}}{a_{kl}}(-x_j), \quad (7)$$

¹ Здесь и в дальнейшем символом $\{a\}$ обозначается дробная часть числа a . Таким же символом обозначено множество, содержащее только один элемент a . Но из контекста всегда ясно, с каким случаем имеется дело. В частности, если a имеет индексы, например, a_{kj} , то $\{a_{kj}\}$ всегда обозначает дробную часть.

где x_l — новая базисная переменная. Если a_{k0}/a_{kl} — целое число, то проводим упомянутый симплексный шаг, если нецелое, не проводим. В последнем случае составим ограничение Гомори по уравнению (7), где для краткости обозначим

$$\frac{a_{kj}}{a_{kl}} = \alpha_{lj} \quad \text{при } j \neq k \quad \text{и} \quad \frac{1}{a_{kl}} = \alpha_{lk}.$$

Дополнительное ограничение получается в виде

$$x_{n+1} = -\delta_{l0} + \delta_{lk}x_k - \sum_{j \in N} \delta_{lj}(-x_j) \geq 0, \quad (8)$$

где

$$\delta_{l0} = \{\alpha_{l0}\} = \left\{ \frac{a_{k0}}{a_{kl}} \right\}$$

и для $j \in N \cup \{k\}$

$$\delta_{lj} = \begin{cases} \{\alpha_{lj}\} & \text{при } j \in T \text{ и } \{\alpha_{lj}\} \leq \{\alpha_{l0}\}, \\ \frac{\{\alpha_{l0}\}}{\{-\alpha_{l0}\}} \{-\alpha_{lj}\} & \text{при } j \in T \text{ и } \{\alpha_{lj}\} > \{\alpha_{l0}\}, \\ \alpha_{lj} & \text{при } j \in \bar{T} \text{ и } \alpha_{lj} \geq 0, \\ \frac{\{\alpha_{l0}\}}{\{-\alpha_{l0}\}} (-\alpha_{lj}) & \text{при } j \in \bar{T} \text{ и } \alpha_{lj} < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Если $\delta_{lk} \neq 0$, то ограничение (8) нельзя прибавить непосредственно к симплексной таблице, так как оно содержит базисную переменную x_k . Для исключения последней умножим k -ое ограничение в (2) на δ_{lk} и заменим в (8) величину $\delta_{lk}x_k$ полученным выражением. Тогда получим

$$x_{n+1} = (\delta_{lk}a_{k0} - \delta_{l0}) + \sum_{j \in N} (\delta_{lk}a_{kj} - \delta_{lj}) (-x_j) \geq 0, \quad (10)$$

где всегда $\delta_{li} = 0$. Ограничение (10) прибавим к системе ограничений (2)–(3), а соответствующую строку в симплексной таблице возьмем в качестве ведущей. Так как ограничение (8) является правильным, т. е. не отсекает ни одного допустимого решения задачи (1)–(4), то правильным является и ограничение (10).

2. Число случаев, когда вводится дополнительное ограничение, можно еще увеличить. Пусть при базисном решении задачи (1)–(3) условие (4) еще не удовлетворено и пусть a_{kl} — ведущий элемент перед следующим симплексным шагом. Случай $l \in T$ мы рассмотрели выше. Если $l \in \bar{T}$, то можно поступить следующим образом. Проверим, будут ли после симплексного шага целыми все x_i , для которых $i \in T$. Если да, то проделаем этот шаг, если нет, не проделаем. Вместо этого составим новое ограничение по первой получаемой после симплексного шага строке, для которой требуется целочисленность переменной не имеет места. Пусть такой строкой является s -ая строка, соответствующая преобразованному ограничению

$$x_s = \left(a_{s0} - \frac{a_{sl}}{a_{kl}} a_{k0} \right) - \frac{a_{sl}}{a_{kl}} (-x_k) + \sum_{j \in N} \left(a_{sj} - \frac{a_{sl}}{a_{kl}} a_{kj} \right) (-x_j).$$

Обозначая для краткости

$$a_{sj} - \frac{a_{sl}}{a_{kl}} a_{kj} = \beta_{sj} \quad (j \neq k) \quad \text{и} \quad -\frac{a_{sl}}{a_{kl}} = \beta_{sk},$$

получим ограничение Гомори в виде

$$x_{n+1} = -\delta_{s0} + \delta_{sk} x_k - \sum_{j \in N} \delta_{sj} (-x_j) \geq 0, \quad (11)$$

где

$$\delta_{s0} = \{\beta_{s0}\} = \left\{ a_{s0} - \frac{a_{sl}}{a_{kl}} a_{k0} \right\}$$

и для $j \in N \cup \{k\}$

$$\delta_{sj} = \begin{cases} \{\beta_{sj}\} & \text{при } j \in T \text{ и } \{\beta_{sj}\} \leq \{\beta_{s0}\}, \\ \frac{\{\beta_{s0}\}}{\{-\beta_{s0}\}} \{-\beta_{sj}\} & \text{при } j \in T \text{ и } \{\beta_{sj}\} > \{\beta_{s0}\}, \\ \beta_{sj} & \text{при } j \in \bar{T} \text{ и } \beta_{sj} \geq 0, \\ \frac{\{\beta_{s0}\}}{\{-\beta_{s0}\}} (-\beta_{sj}) & \text{при } j \in \bar{T} \text{ и } \beta_{sj} < 0. \end{cases}$$

Для исключения из (11) базисной переменной x_k , умножим k -ое ограничение в (2) на δ_{sk} и подставим $\delta_{sk} x_k$ в (11). Получим ограничение

$$x_{n+1} = (\delta_{sk} a_{k0} - \delta_{s0}) + \sum_{j \in N} (\delta_{sk} a_{kj} - \delta_{sj}) (-x_j) \geq 0, \quad (12)$$

где всегда $\delta_{sl} = 0$. Как и в случае ограничения (10), можно утверждать, что ограничение (12) является правильным.

При $s = l$ дополнительным ограничением является ограничение (10). Отметим, что оно получается также как частный случай ограничения (12). Действительно, учитывая что $a_{ll} = -1$ и $a_{lj} = 0$ при $j \neq l$, получим

$$\beta_{lj} = a_{kj}/a_{kl} = a_{lj} \quad \text{при } j \neq k \quad \text{и} \quad \beta_{lk} = 1/a_{kl} = a_{lk}.$$

3. Ниже рассмотрим отдельно случай двойственной и прямой допустимости симплексной таблицы. Но в обоих случаях общая схема применения модификации метода Гомори может быть следующей.

1. Если таблица находится в оптимальной форме, но $\{a_{k0}\} \neq 0$ при $k \in T$, то вводится дополнительное ограничение (5).

2. Если таблица не находится в оптимальной форме (например, после введения ограничения (5)) и $l \in T$, то перед выполнением симплексного шага проверяется, будет ли целым значение новой базисной переменной x_l . При $x_l = a_{k0}/a_{kl}$ целом проводится симплексный шаг, при ее дробном значении вводится

дополнительное ограничение (10), которое берется в качестве ведущей строки. Относительно этой строки повторяются те же рассуждения, что и для k -ой строки.

Отметим, что после формирования очередного дополнительного ограничения предыдущее можно исключить из рассмотрения. Это примечание относится и к следующему, если ничего не оговорено.

3. Если при неоптимальной таблице индекс ведущего столбца $l \in \bar{T}$, то можно следовать любому из двух вариантов алгоритма.

В а р и а н т I. Проводится симплексный шаг.

В а р и а н т II. Перед выполнением симплексного шага проверяется, будут ли при выбранной ведущей строке целыми значения всех новых базисных переменных x_i , для которых $i \in T$, т. е. будут ли целыми $\beta_{i0} = a_{i0} - a_{il}a_{r0}/a_{rl}$ при $i \in T$. Если да, то симплексный шаг проводится, если нет, выбирается первый индекс $s_1 \in T$, для которого $\{\beta_{s_1,0}\} \neq 0$, и вводится дополнительное ограничение (12). Оно берется в качестве ведущей строки. Индекс s_1 фиксируется и образование новых ограничений (12) продолжается до тех пор, пока не получено ограничение, которое после одного симплексного шага дает базисное решение с целым значением x_{s_1} .

После получения такого ограничения можно снова применять любой из двух следующих вариантов алгоритма.

В а р и а н т IIa. Проводится симплексный шаг.

В а р и а н т IIб. Последнее дополнительное ограничение присоединяется к симплексной таблице (будем называть его «сохраняемым» ограничением), выбирается в качестве ведущей строки и рассматривается новая первая компонента x_{s_2} с $s_2 \in T$, которая после симплексного шага не получает целого значения (если такая найдется), и т. д. Так получается конечная последовательность индексов $s_1, \dots, s_{t-1} \in T$ ($t \geq 2$) такая, что, выбирая последнее «сохраняемое» ограничение в качестве ведущей строки, получают целые значения для $x_{s_1}, \dots, x_{s_{t-1}}$.

Перед выполнением симплексного шага проверяется, получают ли все x_i , где $i \in T$, целые значения. Если да, симплексный шаг проводится, если нет, не проводится. В последнем случае выбирается первый индекс $s_t \in T$ такой, что после симплексного шага x_{s_t} не получает целого значения, и формируются дополнительные ограничения (12) до тех пор, пока не получено «сохраняемое» ограничение, которое дает компоненте x_{s_t} целое значение. Если при этом $x_{s_1}, \dots, x_{s_{t-1}}$ тоже будут целыми, то рассуждения повторяются, если нет, проводится симплексный шаг, выбирая ведущей предпоследнюю «сохраняемую» строку.

Отметим, что на каждом шаге достаточно оставлять два последних «сохраняемых» ограничения.

§ 2. Случай двойственной допустимости

Рассмотрим частный случай, когда симплексная таблица (a_{ij}) задачи (1)–(4) находится в двойственно допустимой форме, т. е. $a_{0j} \geq 0$ для всех $j \in N$. Пусть a_{k0} — первый отрицательный элемент в столбце A_0 и a_{kl} — отрицательный ведущий элемент в k -ой строке, выбранный по правилам двойственного симплекс-метода. Тогда в ограничениях (10) и (12) свободные члены $\delta_{lk}a_{k0} - \delta_{l0}$ и $\delta_{sk}a_{k0} - \delta_{s0}$ отрицательны. Значит, выбирая новое ограничение (10) или (12) в качестве ведущей строки, можно применить двойственный симплекс-метод, сохраняя все время двойственную допустимость симплексной таблицы. В частности, это значит, что при переходе от одной симплексной таблицы к другой значение целевой функции монотонно убывает.

Процесс решения задачи можно провести по общей схеме, описанной в пункте 3 предыдущего параграфа.

Примечание. Конечность рассмотренного алгоритма до сих пор не доказана. Так как ведущий столбец при введении каждого нового ограничения может измениться, то допустима возможность, что при $l \in T$ целочисленность ни одной новой базисной переменной, а при $l \notin T$ переменной x_{s_l} , не достигается. Чтобы избежать введения бесконечного множества новых ограничений, можно всегда, по меньшей мере после введения некоторого фиксированного числа дополнительных ограничений, проводить симплексный шаг, независимо от того, будет ли новая базисная переменная целой или нет.

Пример. Найти неотрицательное решение системы

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 1/2 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 + x_5 &= 6 \\ -2x_1 - 6x_2 + 1/2x_3 + x_6 &= -5, \end{aligned}$$

максимизирующее линейную форму

$$z = -11x_1 - 30x_2 - 5x_3$$

при дополнительном условии, что x_1 и x_2 — целые числа.

Вычисления приведены в последующих таблицах. При этом применен вариант IIб алгоритма, описанного в конце предыдущего параграфа. В таблице 1 в качестве ведущего элемента следует брать число -6 в третьем столбце. Он отмечен звездочкой. Так как после симплексного шага мы получили бы $x_1 = x_2 = 5/6$, т. е. дробное число, то вводим ограничение (10). В нем ведущим является элемент -2 (отмечен звездочкой). После симплексного шага мы получили бы $x_1 = 5/2$, т. е. x_1 ($l=1$) является снова дробным числом. Вводим новое дополнительное ограничение (10). Так как теперь $x_1 \equiv x_2$ будет целым, то проводим симплексный шаг с ведущим элементом, отмеченным двумя звездочками. При этом первое дополнительное ограничение можно отбросить. Получим таблицу 2 и после обычного симплексного шага — таблицу 3, где x_1 и x_2 снова целые. Так

как теперь после симплексного шага мы получили бы x_1 дробное, то введем ограничение (12) с $s = 1$, $k = 4$ и $n + 1 = 9$. Выбирая дополнительное ограничение в качестве ведущей строки, мы получили бы $x_1 = 1$, $x_2 = 2/3$. Поэтому введем новое ограничение (12), где $s = 2$, $k = 9$ и $n + 1 = 10$. Так как последнее ограничение дает после симплексного шага целое значение как компоненте x_2 , так и компоненте x_1 , то, беря его в качестве ведущей строки, проведем третий симплексный шаг. Получим таблицу 4 в оптимальной форме, где условие целочисленности x_1 и x_2 выполнено. Оптимальным решением является $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 7/2$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1/2$; $z = -35$.

Таблица 1

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
z	0	11	30	5
x_1	0	-1	0	0
x_2	0	0	-1	0
x_3	0	0	0	-1
x_4	1/2	2	-3	0
x_5	6	2	7	-1
x_6	-5	-2	-6*	1/2

x_7	-5	-2*	-5	0
-------	----	-----	----	---

x_8	-3	-1	-3**	0
-------	----	----	------	---

Таблица 2

	1	$-x_1$	$-x_3$	$-x_3$
	-30	1	10	5
	0	-1	0	0
	1	1/3	-1/3	0
	0	0	0	-1
	7/2	3	-1	0
	-1	-1/3**	7/3	-1
	7	0	-2	1/2

Таблица 3

	1	$-x_5$	$-x_8$	$-x_3$
z	-33	3	17	2
x_1	3	-3	-7	3
x_2	0	1	2	-1
x_3	0	0	0	-1
x_4	-11/2	9	20	-9*
x_5	0	-1	0	0
x_6	1	0	-2	1/2

x_9	-2	3	33/5	-3*
-------	----	---	------	-----

x_{10}	-2	2	4	-2**
----------	----	---	---	------

Таблица 4

	1	$-x_5$	$-x_8$	$-x_{10}$
	-35	5	21	1
	0	0	-1	3/2
	1	0	0	-1/2
	1	-1	-2	-1/2
	7/2	0	2	-9/2
	0	-1	0	0
	1/2	1/2	-1	1/4

Алгоритм Гомори требует в данном случае 6 шагов и введение трех дополнительных ограничений. Если в примере заменить коэффициент 7 во втором ограничении, например, на 3, то уже таблица 2 является оптимальной, в то время как метод Гомори требует 5 симплексных шагов и введение 3 дополнительных ограничений.

§ 3. Случай допустимости симплексной таблицы

Предположим теперь, что начальная симплексная таблица (a_{ij}) , соответствующая задаче (1) — (4), находится в допустимой форме, т. е. $a_{i0} \geq 0$ для всех i .

Рассмотрим случай, когда двойственная допустимость еще не достигнута. Пусть $a_{0l} < 0$, $l \in T$ и a_{kl} — положительный ведущий элемент в столбце A_l . Оказывается, что в данном случае можно сохранять допустимость таблицы и после введения дополнительного ограничения (10). Действительно, если $k \in T$, то $\delta_{lk} = \alpha_{lk} = 1/a_{kl}$; если $k \in T$, $a_{kl} > 1$ и $1/a_{kl} = \{\alpha_{lk}\} \leq \{\alpha_{l0}\} = \{a_{k0}/a_{kl}\}$, то $\delta_{lk} = \{\alpha_{lk}\} = 1/a_{kl}$. В этих случаях свободный член в (10) имеет вид

$$\delta_{lk}a_{k0} - \delta_{l0} = \frac{a_{k0}}{a_{kl}} - \left\{ \frac{a_{k0}}{a_{kl}} \right\} = \left[\frac{a_{k0}}{a_{kl}} \right] \geq 0. \quad (13)$$

В остальных случаях, учитывая, как выводится ограничение (5) и коэффициенты (6) (см., например, [1, 2]), а также то, что ограничение (8) и формулы (9) — их следствия, можем при $\alpha_{ij} \geq 0$ всегда принимать $\delta_{lk} = \alpha_{lk} = 1/a_{kl}$. Правда, получаемое таким образом ограничение, быть может, ослабляется, но мы имеем право всегда принимать $\delta_{lk} = 1/a_{kl}$. А это значит, что всегда имеет место (13), причем остальные коэффициенты ограничения (10) имеют вид

$$\delta_{lk}a_{kj} - \delta_{lj} = \alpha_{lj} - \delta_{lj}, \quad \text{где } \alpha_{lj} = a_{kj}/a_{kl}.$$

Учитывая сказанное, можем ограничение (10) переписать в виде

$$x_{n+1} = [\alpha_{l0}] + \sum_{j \in N} (\alpha_{lj} - \delta_{lj}) (-x_j) \geq 0, \quad (14)$$

где величины δ_{lj} вычисляются по формулам (9). Отметим, что при этом $\alpha_{lj} - \delta_{lj} = 0$, если $j \in T$ и $\alpha_{lj} \geq 0$. Так как $\delta_{ll} = 0$, то элементом l -ого столбца в ограничении (14) является $\alpha_{ll} = 1$. Поэтому $[\alpha_{l0}]/\alpha_{ll} < a_{k0}/a_{kl}$ и после дополнения симплексной таблицы ограничением (14), соответствующая строка является ведущей с ведущим элементом $\alpha_{ll} = 1$. После симплексного шага x_l получает неотрицательное целое значение $x_l = [\alpha_{l0}] = [a_{k0}/a_{kl}]$. В частности, это значит, что при $l \in T$ на каждом шаге требуется введение не более одного дополнительного ограничения вида (14).

Ограничение (12) не допускает особых упрощений. Свободный член $\delta_{sk}a_{k0} - \delta_{s0}$ может быть как положительным, так и отрицательным. В последнем случае после присоединения дополнительного ограничения допустимость симплексной таблицы теряется. Поэтому в таком случае выгоднее провести шаг без дополнительного ограничения. Так как в (12)

$$\frac{\delta_{sk}a_{k0} - \delta_{s0}}{\delta_{sk}a_{kl} - \delta_{sl}} = \frac{a_{k0} - \delta_{s0}/\delta_{sk}}{a_{kl}} < \frac{a_{k0}}{a_{kl}},$$

то в случае $\delta_{sk}a_{k0} - \delta_{s0} \geq 0$ дополнительное ограничение (12) всегда выбирается по правилам симплексного метода в качестве ведущей строки, а ведущий элемент находится в l -ом столбце.

Процесс решения задачи можно провести по общей схеме, описанной в § 1, пункте 3. При этом, после определения ведущего столбца A_l , ведущий элемент a_{kl} определяется при $l \in T$ по правилу прямого симплекс-метода, т. е. так, чтобы было

$$\frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \min_{a_{il} > 0} \frac{a_{i0}}{a_{il}}. \quad (15)$$

При $l \in T$ ведущий элемент a_{kl} также можно определить по условию (15), но вместо этого целесообразнее использовать условие

$$\left[\frac{a_{k0}}{a_{kl}} \right] = \min_{a_{il} > 0} \left[\frac{a_{i0}}{a_{il}} \right]. \quad (16)$$

В силу сказанного выше, такой выбор k -ой строки обеспечивает сохранение допустимости таблицы. Если указанному условию удовлетворяет несколько строк, то из них можно выбирать ту, которой соответствует в новой таблице наименьшая по абсолютной величине сумма отрицательных элементов в нулевой строке (ср. [3]). Такой выбор обычно уменьшает число требуемых шагов.

Таким образом, в данном случае допустимость таблицы можно сохранять до получения оптимальной таблицы. Если оптимальная таблица не удовлетворяет условию требуемой частичной целочисленности, то вводится ограничение (5), после чего получается двойственно допустимая таблица и применяются рассуждения § 2.

Пример. Найти неотрицательное решение системы

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 3 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 7x_1 - x_2 &\leq 12, \end{aligned}$$

максимизирующее линейную форму

$$z = 2x_1 + x_2$$

при дополнительном условии, что x_1 — целое.

Введем дополнительные переменные x_3, \dots, x_7 и перепишем задачу в форме (1) — (4). Ей соответствует таблица 5.

По правилам прямого симплекс-метода выбираем ведущий столбец. Он соответствует переменной x_1 , причем $i \equiv 1 \in T$. Среди индексов i выбираем тот, при котором выполняется условие (16). Однако этому условию удовлетворяют два индекса: $i = 5$ и $i = 7$. Поэтому подсчитываем сумму отрицательных элементов в нулевой строке новой таблицы для $i = 5$ и $i = 7$ и выбираем тот индекс, при котором эта сумма по абсолютной величине ми-

нимальна. Так, для $i = 5$ дополнительное ограничение (14) будет иметь вид:

$$x_8 = 1 - x_1 + 3x_2 \geq 0,$$

а указанная сумма равна -7 ; при $i = 7$ ограничением (14) является

$$x_8 = 1 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 0$$

и сумма равна -2 . Итак, берем $i = 7$ и присоединяем построенное на основе этой строки дополнительное ограничение (14) к таблице 5. Эту последнюю строку берем в качестве ведущей с ведущим элементом в столбце A_1 и делаем один шаг симплекс-метода. Получаем таблицу 6. Теперь в базис должна вводиться переменная x_2 , от которой целочисленность не требуется. Сначала проверим, будут ли после симплексного шага целыми все x_i , для которых $i \in T$. В данном случае переменная x_1 , от которой требуется выполнение условия целочисленности, после симплексного шага получала бы значение $5/3$, т. е. не целое. Следовательно, на данном шаге составим ограничение (12) по новой

Таблица 5

	1	$-x_1$	$-x_2$
2	0	-2	-1
x_1	0	-1	0
x_2	0	0	-1
x_3	3	-1	3
x_4	3	1	1
x_5	3	2	-3
x_6	10	5	1
x_7	12	7*	-1
x_8	1	1**	-1/2

Таблица 6

	1	$-x_8$	$-x_2$
2	2	-2	-2
1	1	-1/2	-1/2
0	0	-1	-1
4	1	5/2	5/2
2	-1	3/2*	3/2*
1	-2	-2	-2
1	-5	7/2	7/2
5	-7	5/2	5/2
x_8	0	-1	1/2**

Таблица 7

	1	$-x_8$	$-x_9$
2	2	-2	4
x_1	1	0	1
x_2	0	-2	2
x_3	4	6**	-5
x_4	2	2	-3
x_5	1	-6	4
x_6	5	2	-7
x_7	5	-2	-5

Таблица 8

	1	$-x_8$	$-x_9$
10/3	1/3	7/3	7/3
1	0	1	1
4/3	1/3	1/3	1/3
0	-1	0	0
2/3	-1/3	-4/3	-4/3
5	1	-1	-1
11/3	-1/3	-16/3	-16/3
19/3	1/3	-20/3	-20/3

строке, соответствующей переменной x_1 , присоединяем его к таблице 6 и делаем один шаг симплекс-метода. Получаем таблицу 7. Выбираем опять ведущий столбец. Он соответствует переменной x_8 , где $i \equiv 8 \pmod{T}$. В данном случае переменная x_1 после симплексного шага получила бы целое значение, поэтому нового ограничения не вводим, а просто проделываем один шаг симплекс-метода. Таблица 8 уже дает оптимальное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 4/3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2/3$, $x_5 = 5$, $x_6 = 11/3$, $x_7 = 19/3$; $z = 10/3$.

При решении же примера методом Гомори потребовалось бы проведение 8 шагов с введением двух дополнительных ограничений.

§ 4. Общий случай и заключительные замечания

Если задача (1) — (4) не находится ни в двойственно допустимой форме, ни в допустимой форме, то рассуждения предыдущих параграфов можно применять в том же или обратном порядке. Можно на первом этапе применять рассуждения второго параграфа, а на втором этапе, после получения допустимой таблицы, — рассуждения третьего параграфа. При этом на первом этапе не следует обращать внимания на знак коэффициентов целевой функции и в качестве ведущего элемента можно брать любое отрицательное число в ведущей строке. Можно, наоборот, на первом этапе применять рассуждения третьего параграфа, а на втором этапе, после получения двойственно допустимой таблицы, — рассуждения второго параграфа. При этом на первом этапе не следует обращать внимания на знак свободных членов и в качестве ведущего элемента можно брать любое положительное число в ведущем столбце.

Как показывает небольшой опыт решения задач малых размерностей, рассмотренные модификации метода Гомори дают оптимальное решение обычно значительно быстрее, чем второй алгоритм Гомори. Зато формирование дополнительных ограничений является более сложным. Поэтому машинный эксперимент мог бы дать ответ на вопрос о практической применимости этих модификаций.

Аналогичные модификации возможны и на основе первого алгоритма Гомори для полностью целочисленных задач, но кажется, что они не представляют особого интереса, так как третий алгоритм Гомори [1] и прямой алгоритм Гловера [3] дают более простые правила образования дополнительных ограничений.

Наконец, отметим, что вопрос о конечности описанных модификаций остается открытым.

Литература

1. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., Дискретное программирование. Москва, 1969.
2. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. Москва, 1967.
3. Glover, F., A new foundation for a simplified primal integer programming algorithm. Operat. Res., 1968, 16, № 4, 727—740.

Поступило
27 III 1970

GOMORY MEETODI MODIFIKATSIOONID OSALISELT TÄISARVULISTE ÜLESANNETE LAHENDAMISEKS

L. Kivistik ja T. Saganova

Resümee

Käsitletakse osaliselt täisarvuliste lineaarsete planeerimisülesannete lahendamist Gomory meetodi modifikatsioonide abil, mis erinevad traditsioonilisest Gomory meetodist selle poolest, et kitsendused lisatakse juba enne optimaalse simplekstabeli saamist. Selline võte vähendab tavaliselt tunduvalt ülesande lahendamiseks vajalike simplekssammude arvu.

MODIFICATIONS OF GOMORY ALGORITHM FOR MIXED INTEGER PROGRAMMING

L. Kivistik and T. Shaganova

Summary

Modifications of Gomory algorithm for solving partially integer linear programming problem are considered. These modifications differ from the traditional Gomory algorithm with respect to addition the Gomory cuts already before the optimal simplex table is obtained. Usually this method diminishes perceptibly the number of simplex steps needed to solve the problems of mixed integer programming.

О ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ КОТОРОЙ ЗАДАНА

Я. Габович

Эстонская сельскохозяйственная академия

§ 1. Вывод общей формулы

Пусть

$$z = \Phi(y), \quad y = \varphi(x).$$

Производная k -го порядка от сложной функции z по аргументу x вычисляется по известной формуле Бруно ([3], стр. 48)

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \sum \frac{k! \Phi^{(S)}(y)}{n_1! \dots n_k!} \left[\frac{\varphi'(x)}{1!} \right]^{n_1} \dots \left[\frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} \right]^{n_k}; \quad (1.1)$$

где

$$S = n_1 + n_2 + \dots + n_k \quad (1.2)$$

и сумма берется по всем неотрицательным целочисленным решениям уравнения

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + kn_k = k. \quad (1.3)$$

Рассмотрим следующую задачу: вычислить производную k -го порядка от функции $F(x)$, логарифмическая производная $f(x)$ которой задана.

Интегрируя дифференциальное уравнение

$$F'(x) = f(x)F(x), \quad (1.3)$$

получаем

$$F(x) = \exp \int f(x) dx.$$

Таким образом, дело свелось к дифференцированию сложной функции

$$F = \Phi(y) = e^y, \quad y = \varphi(x) = \int f(x) dx.$$

Подставляя в формулу (1.1) значения

$$\Phi^{(S)}(y) = e^y = F(x), \quad \varphi^{(m)}(x) = f^{(m-1)}(x)$$

($m = 1, 2, \dots, k$), получаем следующее решение поставленной задачи:

$$F^{(k)}(x) = \sum \frac{k! F(x)}{n_1! \dots n_k!} \left[\frac{f^{(0)}(x)}{1!} \right]^{n_1} \dots \left[\frac{f^{(k-1)}(x)}{k!} \right]^{n_k}. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) имеет весьма разнообразные применения. С некоторыми из них мы познакомимся в нижеследующих параграфах.

§ 2. Производные гамма-функции

В случае гамма-функции Эйлера,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (x > 0)$$

имеем $\Gamma'(x) = \psi(x)\Gamma(x)$, где

$$\psi(x) = -C + \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt$$

есть пси-функция Гаусса и $C = 0,577 \dots$ постоянная Эйлера. Известно ([2], стр. 958), что

$$\psi^{(m-1)}(x) = (-1)^m (m-1)! \zeta(m, x) \quad (2.1)$$

($m \geq 2$), где $\zeta(m, x)$ есть обобщенная дзета-функция:

$$\zeta(m, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^m}.$$

Подставляя (2.1) в формулу (1.4) и учитывая, что $F(x) = \Gamma(x)$, $f(x) = \psi(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma^{(k)}(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln^k t dt = \\ &= (-1)^k k! \Gamma(x) \sum \frac{[-\psi(x)]^{n_1}}{n_1! \dots n_k!} \left[\frac{\zeta(2, x)}{2} \right]^{n_2} \dots \left[\frac{\zeta(k, x)}{k} \right]^{n_k}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рассмотрим частные случаи. При $x = 1$ имеем

$$\psi(1) = -C, \quad \zeta(m, 1) = \zeta(m), \quad (2.3)$$

где $\zeta(m)$ — дзета-функция Римана. Подставляя значения (2.3) в формулу (2.2), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma^{(k)}(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \ln^k t dt = \\ &= (-1)^k \sum \frac{k! C^{n_1}}{n_1! \dots n_k!} \left[\frac{\zeta(2)}{2} \right]^{n_2} \dots \left[\frac{\zeta(k)}{k} \right]^{n_k}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При пользовании этой формулой полезно учесть, что для натуральных n

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} \pi^{2n} |B_{2n}|}{(2n)!}, \quad (2.5)$$

где B_{2n} — числа Бернулли. Для значений $k \leq 5$ формула (2.4) с учетом (2.5) дает

$$\begin{aligned} \Gamma'(1) &= -C, & \Gamma''(1) &= C^2 + \frac{\pi^2}{6}, \\ \Gamma'''(1) &= -C^3 - 0,5\pi^2 C - 2\xi(3), \\ \Gamma^{(4)}(1) &= C^4 + \pi^2 C^2 + 8C\xi(3) + 0,15\pi^4, \\ \Gamma^{(5)}(1) &= -C^5 - \frac{5}{3}\pi^2 C^3 - 20C^2\xi(3) - \\ &\quad - \frac{3}{4}\pi^4 C - \frac{10}{3}\pi^2\xi(3) - 24\xi(5). \end{aligned}$$

Пусть теперь $x = 0,5$. Имеем

$$-\psi\left(\frac{1}{2}\right) = C + \ln 4 = a, \quad (2.6)$$

$$\zeta\left(m, \frac{1}{2}\right) = (2^m - 1)\xi(m), \quad (2.7)$$

и из формулы (2.2) следует

$$\begin{aligned} \Gamma^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \frac{\ln^k t dt}{e^t \sqrt{t}} = \\ &= (-1)^k \sqrt{\pi} \sum \frac{k! a^{n_1}}{n_1! \dots n_k!} \left[\frac{(2^2 - 1)\xi(2)}{2} \right]^{n_2} \dots \left[\frac{(2^k - 1)\xi(k)}{k} \right]^{n_k}. \end{aligned}$$

Для значений $k \leq 5$ отсюда следует:

$$\begin{aligned} \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) &= -a\sqrt{\pi}, & \Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}(a^2 + 0,5\pi^2), \\ \Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right) &= -\sqrt{\pi}[a^3 + 1,5a\pi^2 + 14\xi(3)], \\ \Gamma^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}[a^4 + 3a^2\pi^2 + 56a\xi(3) + 1,75\pi^4], \\ \Gamma^{(5)}\left(\frac{1}{2}\right) &= -\sqrt{\pi}[a^5 + 5a^3\pi^2 + 140a^2\xi(3) + \\ &\quad + 8,75a\pi^4 + 70\pi^2\xi(3) + 744\xi(5)]. \end{aligned}$$

§ 3. Числа Стирлинга

Числа Стирлинга S_n^k ($n \geq 2$ и $k \geq 1$ натуральные индексы) определяются из равенства

$$F_n(x) = \sum_{m=1}^n S_n^m x^{m-1} = \prod_{p=1}^{n-1} (x - p). \quad (3.1)$$

Дифференцируя сумму (3.1) k раз и беря $x = 0$, получаем

$$F_n^{(k)}(0) = k! S_n^{k+1}. \quad (3.2)$$

Отсюда, между прочим, следует, что при $k \geq n$

$$S_n^{k+1} = 0. \quad (3.3)$$

Нашей целью является получение явной формулы для вычисления чисел Стирлинга. Для этого найдем логарифмическую производную произведения (3.1):

$$\frac{F'_n(x)}{F_n(x)} = f_n(x) = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{x-p}.$$

Продифференцировав $m-1$ раз функцию $f_n(x)$ и беря $x=0$, получаем

$$f_n^{(m-1)}(0) = -(m-1)! H_m(n), \quad (3.4)$$

где

$$H_m(n) = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^m}.$$

Теперь применима формула (1.4), где также полагаем $x=0$. Из (1.4), (3.2) и (3.4) следует:

$$S_n^{k+1} = (-1)^{n-1} (n-1)! S_k(n), \quad (3.5)$$

$$S_k(n) = \sum \frac{(-1)^s}{n_1! \dots n_k!} \left[\frac{H_1(n)}{1} \right]^{n_1} \dots \left[\frac{H_k(n)}{k} \right]^{n_k}, \quad (3.6)$$

где s есть сумма (1.2). При $k \leq 4$ суммы (3.6) принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} S_1(n) &= -H_1(n), & 2S_2(n) &= H_2^2(n) - H_2(n), \\ 6S_3(n) &= 3H_1(n)H_2(n) - 2H_3(n) - H_3^2(n), \\ 24S_4(n) &= H_4^2(n) - 6H_1(n)H_2(n) + \\ &+ 8H_1(n)H_3(n) + 3H_2^2(n) - 6H_4(n). \end{aligned}$$

Полученное явное выражение (3.5) для чисел Стирлинга дает возможность получить также явное выражение для чисел Бернулли порядка n с производящей функцией

$$\left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)} \frac{x^k}{k!}. \quad (3.7)$$

Именно, числа Стирлинга и Бернулли связаны следующим соотношением ([6], стр. 148):

$$S_n^k = \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}^{(n)}. \quad (3.8)$$

Из (3.5) и (3.8) сразу получаем:

$$B_{n-k-1}^{(n)} = (-1)^{n-1} k! (n-k-1)! S_k(n).$$

Наконец, отметим любопытное свойство сумм $S_k(n)$, которое следует из (3.3) и (3.5): если $n \leq k$, то $S_k(n) = 0$.

§ 4. Многочлены Бернулли

Многочлены Бернулли порядка n определяются из соотношения

$$F_n(x, z) = \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^n e^{xz} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{x^q}{q!} B_q^{(n)}(z). \quad (4.1)$$

Дифференцируя k раз сумму (4.1) по аргументу x и беря $x = 0$, получаем

$$\frac{\partial^k F_n(x, z)}{\partial x^k} \Big|_{x=0} = B_k^{(n)}(z). \quad (4.2)$$

Обозначим логарифмическую производную (по аргументу x) функции $F_n(x, z)$ через $f_n(x, z)$. Имеем

$$\begin{aligned} f_n(x, z) &= z + n \left(\frac{1}{x} - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) = \\ &= z + n \left(\frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \right) = \\ &= z + n \left(\frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{B_q x^q}{q!} \right) = \\ &= z - n \left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{B_q x^{q-1}}{q!} \right); \end{aligned} \quad (4.3)$$

где B_q — числа Бернулли (первого порядка). Прежде всего отметим, что при $x = 0$

$$f_n(0, z) = z - \frac{n}{2}, \quad (4.4)$$

ибо $B_1 = -1/2$. Далее, дифференцируя $m-1$ раз ($m \geq 2$) равенство (4.3) и беря $x = 0$, получаем

$$\frac{\partial^{m-1} f_n(x, z)}{\partial x^{m-1}} \Big|_{x=0} = -\frac{n B_m}{m}. \quad (4.5)$$

Теперь можем применить формулу (1.4) при $x = 0$. Из (4.2), (4.4), (4.5) и из равенства $F_n(0, z) = 1$ следует, что

$$B_k^{(n)}(z) = \sum \frac{k! (-n)^s}{n_1! \dots n_k!} \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{n} \right)^{n_1} \left(\frac{B_2}{2 \cdot 2!} \right)^{n_2} \dots \left(\frac{B_k}{k \cdot k!} \right)^{n_k}. \quad (4.6)$$

При пользовании этой формулой необходимо учесть, что $B_{2q+1} = 0$ ($q = 1, 2, \dots$). Поэтому сумма (4.6) берется по всем неотрицательным решениям уравнения

$$n_1 + 2n_2 + 4n_4 + \dots + 2gn_{2g} = k, \quad (4.7)$$

где g есть целая часть числа $k/2$: $g = [k/2]$. Соответственно для показателя s имеем

$$s = n_1 + n_2 + n_4 + \dots + n_{2g}.$$

При $z = 0$ имеем $B_k^{(n)}(0) = B_k^{(n)}$ (ср. (3.7) и (4.1)) и получаем формулу, выражающую числа Бернулли порядка n через числа Бернулли первого порядка:

$$B_k^{(n)} = \sum \frac{k! (-n)^s 2^{-n_1}}{n_1! n_2! \dots n_{2g}!} \left(\frac{B_2}{2 \cdot 2!} \right)^{n_2} \dots \left(\frac{B_{2g}}{2g \cdot (2g)!} \right)^{n_{2g}}. \quad (4.8)$$

Здесь s и g имеют такой же смысл, как в формуле (4.6). При фиксированном k и произвольном n величины $B_k^{(n)}$ являются многочленами от n . Формула (4.8) дает общий закон их составления. Частные случаи были рассмотрены Нёрлундом ([6], стр. 459; $k \leq 12$) и Митриновичем ([5], стр. 4266; $13 \leq k \leq 15$).

При $n = 1$ и $k = 2p + 1$ ($p = 1, 2, \dots$) формула (4.8) приводит к следующему свойству чисел Бернулли:

$$\sum \frac{(-1)^s \cdot 2^{-n_1}}{n_1! n_2! \dots n_{2p}!} \left(\frac{B_2}{2 \cdot 2!} \right)^{n_2} \dots \left(\frac{B_{2p}}{2p \cdot (2p)!} \right)^{n_{2p}} = 0,$$

где сумма опять берется по решениям уравнения (4.7).

Наконец, отметим, что формула (4.8) дает также возможность выразить числа Стирлинга через числа Бернулли первого порядка. Это непосредственно следует из соотношения

$$S_n^{n-k} = \binom{n-1}{k} B_k^{(n)},$$

которое получается из (3.8) заменой k на $n - k$.

§ 5. Числа и многочлены Эйлера

Многочлены Эйлера порядка n определяются из соотношения

$$\Phi_n(x, z) = \left(\frac{2}{e^x + 1} \right)^n e^{xz} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{x^q}{q!} E_q^{(n)}(z). \quad (5.1)$$

Дифференцируя k раз сумму (5.1) по аргументу x и беря $x = 0$, получаем

$$\frac{\partial^k \Phi_n(x, z)}{\partial x^k} \Big|_{x=0} = E_k^{(n)}(z). \quad (5.2)$$

Обозначим логарифмическую производную по аргументу x функции $\Phi_n(x, z)$ через $\varphi_n(x, z)$. Имеем

$$\varphi_n(x, z) = z - n + \frac{n}{e^x + 1}, \quad (5.3)$$

откуда

$$\varphi_n(0, z) = z - \frac{n}{2}. \quad (5.4)$$

Коэффициенты разложения функции $1/(e^x + 1)$ в степенной ряд легко выразить через числа Бернулли:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x + 1} &= \frac{1}{x} \left(\frac{x}{e^x - 1} - \frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) = \\ &= \frac{1}{x} \left[\sum_{q=0}^{\infty} B_q \frac{x^q}{q!} - \sum_{q=0}^{\infty} B_q \frac{(2x)^q}{q} \right] = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} B_q (1 - 2^q) \frac{x^{q-1}}{q!}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Продифференцируем $m-1$ раз ($m \geq 2$) функцию (5.3) (с учетом (5.5)) и положим $x=0$. Получаем

$$\frac{\partial^{m-1} \varphi_n(x, z)}{\partial x^{m-1}} \Big|_{x=0} = \frac{n}{m} (1 - 2^m) B_m. \quad (5.6)$$

Теперь можем опять применить формулу (1.4) при $x=0$. В силу (5.6) сумма снова берется по решениям уравнения (4.7). Из (5.2), (5.4), (5.6) и из условия $\Phi_n(0, z) = 1$ следует

$$\begin{aligned} E_k^{(n)}(z) &= \sum \frac{k! n^s}{n_1! n_2! \dots n_{2g}!} \times \\ &\times \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2} \right)^{n_1} \left(\frac{a_2 B_2}{2 \cdot 2!} \right)^{n_2} \dots \left(\frac{a_{2g} B_{2g}}{2g \cdot (2g)!} \right)^{n_{2g}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $a_m = 1 - 2^m$.

Числа Эйлера $E_k^{(n)}$ порядка n определяются из соотношения

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^n x} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(n)} \frac{x^k}{k!}. \quad (5.8)$$

Если в (5.1) положить $z = n/2$, то сравнение с (5.8) показывает, что

$$E_k^{(n)} = 2^k E_k^{(n)} \left(\frac{n}{2} \right). \quad (5.9)$$

Кроме того, из (5.8) следует, что (в силу чистоты функции $\operatorname{ch} x$) все числа Эйлера с нечетными индексами равны нулю. Следовательно, нас интересует лишь случай четного $k = 2p$. Выражение для чисел $E_{2p}^{(n)}$ получается из (5.7) при $z = n/2$ с учетом (5.9). При этом все члены суммы (5.7), соответствующие значениям $n_1 \neq 0$, обращаются в нуль. В результате получаем

$$E_{2p}^{(n)} = \sum \frac{(2p)! 2^{2p} \cdot n^S}{n_2! \dots n_{2p}!} \left(\frac{a_2 B_2}{2 \cdot 2!} \right)^{n_2} \dots \left(\frac{a_{2p} B_{2p}}{2p \cdot (2p)!} \right)^{n_{2p}}, \quad (5.10)$$

где сумма берется по всем неотрицательным решениям уравнения

$$n_2 + 2n_4 + \dots + pn_{2p} = p, \quad (5.11)$$

причем

$$S = n_2 + n_4 + \dots + n_{2p}.$$

При фиксированном p и произвольном n величины $E_{2p}^{(n)}$ являются многочленами от n . Формула (5.10) дает общий закон их составления. Для значений $p \leq 3$ имеем

$$E_2^{(n)} = -n, \quad E_4^{(n)} = 3n^2 + 2n, \quad E_6^{(n)} = -n(15n^2 + 30n + 16).$$

§ 6. Разбиения и суммы делителей

Обозначим число всевозможных разбиений натурального числа k (или, что то же, число всех неотрицательных решений уравнения (1.3); см. [3], стр. 48) через $P(k)$. Производящая функция чисел $P(k)$ известна ([3], стр. 133):

$$F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(n)x^n. \quad (6.1)$$

Дифференцируя k раз сумму (6.1) и беря $x = 0$, получаем

$$F^{(k)}(0) = k!P(k). \quad (6.2)$$

Найдем логарифмическую производную произведения (6.1):

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mx^{m-1}}{1-x^m}.$$

Известно ([1], стр. 72), что разложение этой функции в степенной ряд имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)x^{n-1}, \quad (6.3)$$

где $\sigma(n)$ есть сумма делителей натурального числа n . Из (6.3) следует, что

$$f^{(m-1)}(0) = (m-1)!\sigma(m).$$

Применяя теперь формулу (1.4), получаем

$$\sum \frac{1}{n_1! \dots n_k!} \left[\frac{\sigma(2)}{2} \right]^{n_2} \dots \left[\frac{\sigma(k)}{k} \right]^{n_k} = P(k), \quad (6.4)$$

где суммирование производится по решениям уравнения (1.3). Формула (6.4) любопытна тем, что она связывает функцию мультипликативного происхождения $\sigma(n)$ с функцией чисто аддитивного характера $P(k)$.

§ 7. Вычисление некоторых интегралов

Рассмотрим интеграл ($b > 0$)

$$F(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{b-1} \varphi \, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)} \quad (7.1)$$

(см. [4], стр. 770). Дифференцируя его k раз по параметру b , получаем

$$F^{(k)}(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{b-1} \varphi (\ln \sin \varphi)^k \, d\varphi. \quad (7.2)$$

Для логарифмической производной $f(b)$ функции (7.1) имеем

$$f(b) = -\beta(b), \quad (7.3)$$

где $\beta(b)$ определяется при помощи пси-функции Гаусса следующим образом ([2], стр. 961):

$$\beta(b) = \frac{1}{2} \left[\psi \left(\frac{b+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{b}{2} \right) \right]. \quad (7.4)$$

Для производной порядка $m-1$ функции (7.4) известно выражение (там же)

$$\beta^{(m-1)}(b) = (-1)^{m-1} (m-1)! S_m(b), \quad (7.5)$$

где

$$S_m(b) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(b+q)^m} = \frac{1}{2^m} \left[\zeta \left(m, \frac{b}{2} \right) - \zeta \left(m, \frac{b+1}{2} \right) \right]. \quad (7.6)$$

Из (7.3) и (7.5) следует, что

$$f^{(m-1)}(b) = (-1)^m (m-1)! S_m(b). \quad (7.7)$$

Теперь можем использовать формулу (1.4). Учитывая (7.1), (7.2) и (7.7) получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{b-1} \varphi (\ln \sin \varphi)^k d\varphi = \\ & = (-1)^k F(b) \sum \frac{k! [\beta(b)]^{n_1}}{n_1! \dots n_k!} \left[\frac{S_2(b)}{2} \right]^{n_2} \dots \left[\frac{S_k(b)}{k} \right]^{n_k}. \end{aligned}$$

Особый интерес представляет случай $b=1$. Имеем

$$F(1) = \frac{\pi}{2}, \quad \beta(1) = \ln 2,$$

$$S_m(1) = \frac{1}{2^m} \left[\zeta \left(m, \frac{1}{2} \right) - \zeta(m) \right] = (1 - 2^{1-m}) \zeta(m);$$

эти значения следуют из (7.1), (2.3) и (2.7). В результате получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin \varphi)^k d\varphi = \\ & = (-1)^k \frac{\pi}{2} \sum \frac{k! (\ln 2)^{n_1}}{n_1! \dots n_k!} \left[\frac{(1 - 2^{1-2}) \zeta(2)}{2} \right]^{n_2} \dots \\ & \dots \left[\frac{(1 - 2^{1-k}) \zeta(k)}{k} \right]^{n_k}. \end{aligned}$$

При $k=1$ приходим к известному интегралу Эйлера

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{1}{2} \pi \ln 2.$$

Далее имеем,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x)^2 dx = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi \ln^2 2}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x)^3 dx = -\frac{\pi}{8} [\pi^2 \ln 2 + 4 \ln^3 2 + 6\zeta(3)]$$

и т. д.

Литература

1. Арнольд И. В., Теория чисел. Москва, 1939.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, 1962.
3. Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ. Москва, 1963.
4. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. Москва, 1959.
5. Mitrinović, D. S., Sur une relation de récurrence relative aux nombres de Bernoulli d'ordre supérieur. C. r. Acad. sci., 1960, 250, 4266—4267.
6. Nörlund, N. E., Vorlesungen über Differenzrechnung. Berlin, 1924.

Поступило
21 IV 1971

ANTUD LOGARITMILISE TULETISEGA FUNKTSIOONI KÖRGEMAT JÄRKU TULETISTE ARVUTAMISEST

J. Gabovits̄

Resümee

Tuletatakse valem (1.4), mis võimaldab arvutada mõningaid analüüsis ja diferentsarvutuses esinevaid suurusi. Valem rakendatakse gammafunktsiooni k -järku tuletise arvutamiseks (§ 2), Stirlingi arvude ilmutatud kuju saamiseks (§ 3), Bernoulli ja Euleri polünoomide (§ 4—5) ning mõningate integraalide (§ 7) arvutamiseks.

ÜBER DIE BERECHNUNG DER DIFFERENTIALQUOTIENTEN HÖHERER ORDNUNG EINER FUNKTION, DEREN LOGARITHMISCHE ABLEITUNG GEGEBEN IST

J. Gabowitsch

Zusammenfassung

Es wird die Formel (1.4) ermittelt, die die Berechnung verschiedener in der Analysis und Differenzrechnung auftretender Grössen ermöglicht. Es werden die folgenden Grössen berechnet: die Ableitung der Ordnung k der Gammafunktion (§ 2), die Stirlingschen Zahlen (§ 3), die Bernoullischen und Eulerschen Polynome (§ 4—5) und einige oft vorkommende bestimmte Integrale (§ 7).

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНЫ

Э. Вирма

Эстонская сельскохозяйственная академия

Введение

В математической теории пластичности теоремы о предельном равновесии [1, 4] позволяют находить верхнюю и нижнюю границы предельной нагрузки конструкции, изготовленной из жестко-пластического материала. Однако, несмотря на то, что в задачах о круглых и кольцевых пластинах предельные нагрузки найдены аналитически, в случае прямоугольных пластин точные аналитические решения известны лишь для некоторых задач со сосредоточенными нагрузками.

Задача о нижней и верхней границах предельной нагрузки равномерно нагруженной квадратной пластины при условиях текучести Треска и Мизеса рассматривалась многими авторами (Прагер [4], Ходж [1], Шулл и Ху [5], Купман и Ланс [3], Ходж и Белыйчко [2] и др.).

Начиная с 1964 г. многими авторами задача предельного равновесия формулировалась в виде задачи математического программирования. Первая попытка в этом направлении для задачи о квадратной пластине с применением условия текучести Треска была предпринята Купманом и Лансом [3]. В их исследовании поле напряжений характеризовалось значениями напряжений в конечном числе точек сетки. Решение было получено применением линеаризованных условий текучести и конечно-разностных соотношений для всех точек сетки.

Поскольку использовалась грубая линеаризация условия текучести и сравнительно грубая сетка, то нельзя считать, что полученный результат является строго обоснованной нижней границей.

В настоящей работе для задачи о свободно опертой квадратной пластине изучают разные виды линеаризации условия текучести и разные сетки для конечно-разностных соотношений. По-

лученные нижние границы сравниваются между собой и с результатами, полученными при использовании других методов. Приводятся подробные значения и анализ напряженного состояния пластины.

§ 1. Аппроксимация уравнения равновесия и условия текучести

Рассмотрим свободно опертую, квадратную пластину стороной $2a$ и постоянной толщиной $2h$ в предположении, что пластина находится под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки P .

Обобщенные напряжения состоят из двух нормальных моментов M_x и M_y и тангенциального момента на единицу длины M_{xy} . Выбор знаков показан на фиг. 1.

Обозначим максимальный пластический момент через M_0 и введем следующие безразмерные переменные:

$$x = \frac{X}{a}, \quad y = \frac{Y}{a}, \quad p = \frac{Pa^2}{6M_0},$$

$$m_x = \frac{M_x}{M_0}, \quad m_y = \frac{M_y}{M_0}, \quad m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_0}.$$

Условие внутреннего равновесия требует, чтобы

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 6p = 0. \quad (2)$$

Условие текучести Треска для пластины требует, чтобы

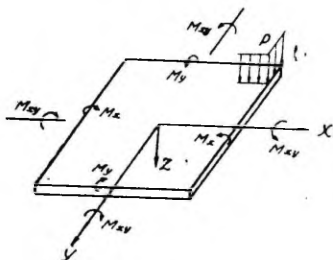
$$-1 \leq \frac{m_x + m_y}{2} \pm \left[\left(\frac{m_x - m_y}{2} \right)^2 + m_{xy}^2 \right]^{1/2} \leq 1,$$

$$-1 \leq 2 \left[\left(\frac{m_x - m_y}{2} \right)^2 + m_{xy}^2 \right]^{1/2} \leq 1. \quad (3)$$

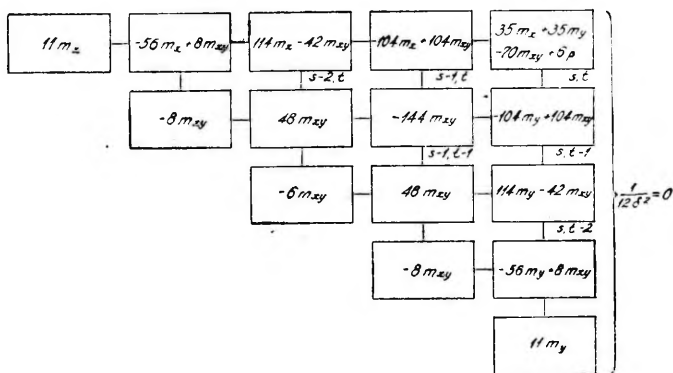
Поскольку нагрузка и способ опирания симметричны относительно осей, то можно исследовать только один октант пластины.

Краевое условие для свободно опертой пластины таково:

$$m_x(1, y) = 0. \quad (4)$$



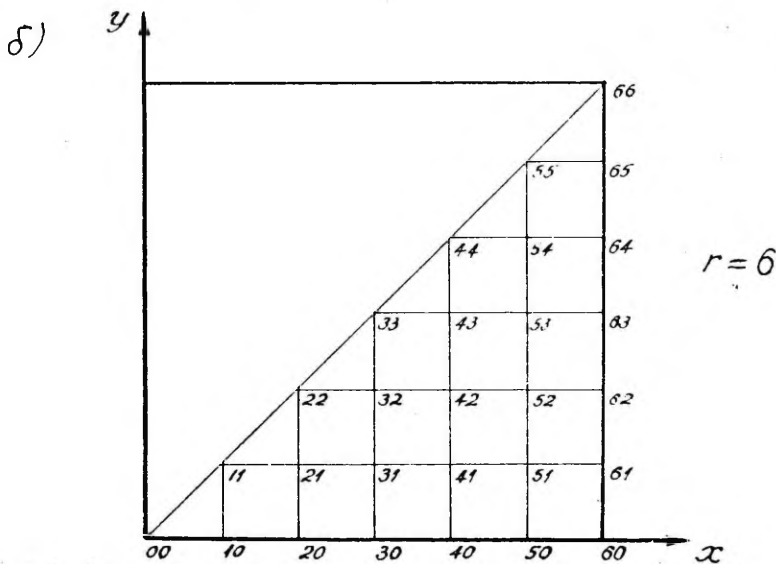
Фиг. 1.



Фиг. 2.

Вследствие симметрии на диагонали пластины $m_x = m_y$, а на оси x крутящий момент $m_{xy}(x, 0) = 0$. Для получения разностного уравнения, аппроксимирующего уравнение (2) в узле (s, t) , пользуемся квадратной несимметричной сеткой с шагом δ по осям. Для внутренних узлов применяем конечно-разностную схему, предлагаемую Купманом и Лансом в работе [3]. В граничных узлах аппроксимируется уравнение (2) при помощи схемы, представленной схематически на фиг. 2.

Выпишем разностные уравнения для узлов (s, t) , где $s = t, t = 1, \dots, r, t = 0, 1, \dots, r$ (см. фиг. 3). Получим систему линейных уравнений в виде:



Фиг. 3.

$$\sum_{s=l}^r \sum_{t=0}^r \alpha^{kl}_{st} m^{st}_x + \sum_{s=l}^r \sum_{t=0}^r \beta^{kl}_{st} m^{st}_y + \sum_{s=l}^r \sum_{t=0}^r \gamma^{kl}_{st} m^{st}_{xy} + 6p = 0 \quad (5)$$

$(k = l, l+1, \dots, r; l = 0, 1, \dots, r).$

Линеаризованные модели задач получаются путем замены условия текучести некоторым вписанным многогранником. Представим приближенные линеаризованные выражения условия текучести при помощи следующих соотношений:

$$a^{i_{kl}} m^{kl}_x + b^{i_{kl}} m^{kl}_y + c^{i_{kl}} m^{kl}_{xy} \leq 1$$

$(k = l, l+1, \dots, r; l = 0, 1, \dots, r; i = 1, 2, \dots, 3q).$ (6)

Здесь $3q$ — число граней многогранника, аппроксимирующего условие текучести. Поскольку в рассматриваемой части пластины $m_x \geq 0, m_y \geq 0, m_{xy} \geq 0$, то в формуле (6) необходимо учитывать лишь q неравенств. Соответствующая поверхность текучести при $q = 12$ показана на фиг. 4.

Для определения нижней границы предельной нагрузки и поля напряжений (m_x, m_y, m_{xy}) получим задачу линейного программирования: *найти* $\max p$ *при условиях*

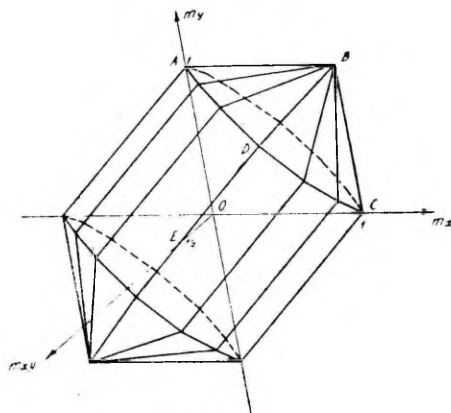
$$\sum_{s=l}^r \sum_{t=0}^r \alpha^{kl}_{st} m^{st}_x + \sum_{s=l}^r \sum_{t=0}^r \beta^{kl}_{st} m^{st}_y + \sum_{s=l}^r \sum_{t=0}^r \gamma^{kl}_{st} m^{st}_{xy} + 6p = 0,$$

$$a^{i_{kl}} m^{kl}_x + b^{i_{kl}} m^{kl}_y + c^{i_{kl}} m^{kl}_{xy} \leq 1,$$

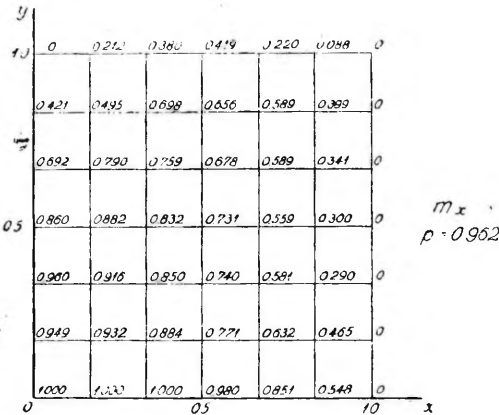
$$m^{kl}_x \geq 0, \quad m^{kl}_y \geq 0, \quad m^{kl}_{xy} \geq 0, \quad p \geq 0,$$

$(k = l, l+1, \dots, r; l = 0, 1, \dots, r; i = 1, 2, \dots, q).$

Погрешность результатов в большой мере зависит от числа узлов сетки, так как при грубой сетке поле напряжений может оказаться недопустимым в промежуточных точках сетки. С другой стороны, погрешность аппроксимации условия текучести зависит от числа неравенств в линеаризованных условиях текучести.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Качественную оценку можно получить, рассматривая соответствующее поле напряжений, отвечающее найденным границам редельной нагрузки при решении разных задач. Для подробного изучения вопроса необходимо применить разные варианты проксимации поверхности текучести и исследовать влияние измельчения сетки.

§ 2. Результаты и выводы

Применяя ЭВМ Минск-22, нами получены решения для четырнадцати вариантов задачи при $q = 4, 6, 8, 12$, и $r = 4, 5, 6, 8$. Результаты всех решенных вариантов представлены в табл. 1, а начения напряжений для задачи $q = 12, r = 6$ иллюстрируются а фиг. 5 и фиг. 6.

Сравнение результатов при $r = 5$ и $r = 6$ показывает, что азница нижних границ уменьшается при увеличении q . При том отмечается, что применение грубой аппроксимации условия екучности дает неудовлетворительные результаты даже при сравительно густой сетке. Поскольку значения границы при $r = 5, = 6, q = 12$ почти совпадают, то можно полагать, что при альнейшем измельчении сетки значение нижней границы существенно не изменяется.

В работе [5] получено значение для верхней границы при словии текучести Треска, равное 1,0. Сравнение границ показывает, что предельная нагрузка, полученная автором данной татьи, имеет максимальную возможную ошибку, равную 1,9%.

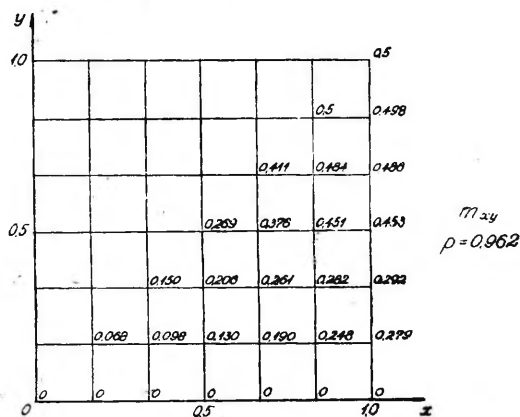
В работе [2] с использованием условия текучести Мизеса олучен более точный результат для верхней границы. Уменьшая результат работы [2] в $2/\sqrt{3}$ раза, получим для условия текучести Треска значение верхней границы, равное 0,968. Сравнение результатов показывает, что полученные в настоящей ра-

боте значения нижней границы довольно близки к действительной предельной нагрузке. Например, в случае наилучшей аппроксимации нижняя и верхняя границы почти совпадают.

Исследование соответствующего поля моментов показывает, что большая часть области пластины находится в предельном состоянии. Жесткая область возникает только на краю пластины, т. е. в узлах сетки (4,0), (5,0), (6,0), (5,1), (6,1). На оси x изгибающие моменты m_x и m_y уменьшаются с возрастанием x ; в узле (6,0) все моменты равны нулю. С удалением точки от центра убывание значений m_x и m_y ускоряется; в угловых точках крутящий момент m_{xy} становится максимальным.

Поскольку для свободно опертой равномерно нагруженной пластины не существует точного решения, то мы не можем оценить полученных значений для моментов. Но принимая во внимание почти полное совпадение вычислительных и точных значений в случае круглой пластины [3], можно полагать, что найденное поле моментов приближенно представляет действительное напряженное состояние для квадратной пластины.

Недостатком метода является большой объем вычислительных работ. Оказывается, что матрица условий задачи конечно-разностного метода всегда имеет больше строк, чем столбцов. Например, для задачи $r = 6$, $q = 12$ количество строк $m = 198$, а количество столбцов $n = 63$. Поскольку с применением стандартных программ количество строк лимитируется строже, чем количество столбцов, то дальнейшее измельчение сетки в общем случае оказывается затруднительным.



Фиг. 6.

Для упрощения вычислений полезно решить задачу при грубой сетке, затем последовательно увеличить число r . Если, например, нам известно напряженное состояние для задачи $r = 5$, то мы можем приближенно оценить значения моментов и для

Таблица

r	q			
	4	6	8	12
4		0,922	0,970	0,968
5	0,945	0,936	0,967	0,964
6	0,930	0,925	0,962	0,962
8	0,929	0,920	0,961	

задачи $r = 6$. Очевидно, что количество строк в формулах (7) значительно уменьшается. В данной работе матрица задачи для $r = 6$, $q = 12$ состоит из 98 строк, т. е. объем задачи сократился почти в два раза.

Значение нижней границы $p = 0,962$ немного меньше результата Купмана—Ланса. Несколько повышенное значение границы в работе [3], очевидно, является следствием грубости аппроксимации. Кроме того, уравнение равновесия аппроксимировалось только во внутренних узлах сетки, так как в данном исследовании учитываются и граничные точки пластины. Из таблицы можно заметить, что результат для этой задачи $p = 0,945$ меньше, чем в работе [3].

Литература

1. Ходж Ф. Г., Расчет конструкций с учетом пластических деформаций. Москва, 1963.
2. Hodge, P. G., Belytschko, T., Numerical Methods for the Limit Analysis of Plates. Trans. ASME, 1968, E 35, № 4, 796—804.
3. Коопман, D. C. A., Lance, R. H., On Linear Programming and Plastic Limit Analysis. J. Mech and Phys. Solids, 1965, 13, № 2, 77—87.
4. Prager, W., An Introduction to Plasticity. Addison-Wesley, 1959.
5. Shull, H. E., Hu, L. W., Load-Carrying Capacities of Simply Supported Rectangular Plates. Trans. ASME, 1963, E 30, № 4, 617—621.

Поступило
26 II 1970

LÖPLIKE VAHEDE MEETOD VABALT TOETATUD RUUDUKUJULISE PLAADI PIIRKOORMUSE UURIMISEKS

E. Virma

Resümee

Käesolevas töös vaadeldakse jäikplastilisest materjalist, servadel vabalt toetatud ruudukujulist plaati. Plaadile on rakendatud ühtlane ristkoormus intensiivsusega P . Piirkoormuse alumise tõkke leidmiseks kasutatakse D. C. A. Koopmani ja R. H. Lance'i [3] poolt vaadeldud lõplike vahede meetodit. Töös on uuritud Tresca plastilisusetingimuse mitmesuguseid aproksimatsiooni viise, samuti piirkoormuse alumise tõkke sõltuvust võrgu tihedusest. Tulemused on esitatud tabelis 1, kusjuures joonisel 5 ja 6 on toodud ka vastav pingeolukorra kirjeldus.

A FINITE DIFFERENCE METHOD FOR THE PLASTIC COLLAPSE LOAD OF A SIMPLY SUPPORTED SQUARE PLATE

E. Virma

Summary

In the present paper the simply supported square plate of the rigid plastic material is considered. The plate has been loaded with uniformly distributed transverse load of intensity P . Using a finite difference method, proposed by Koopman and Lance [3], the stress analysis problem is interpreted as a linear programming problem.

Author has made his assessments of the effects of changing the yield locus approximation and of decreasing the mesh size. The results of the analysis for the examples are shown in Table 1, whereas in Fig. 5 and Fig. 6 a corresponding description of the stresses has been given.

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Э. Сааресте

Таллинский политехнический институт

К. Соонетс

Кафедра теоретической механики ТГУ

1. В настоящей статье исследуется напряженно-деформационное состояние гибкой квадратной пластинки с учетом и геометрической и физической нелинейностей. Расчетные уравнения получаются из общих уравнений, выведенных в [8]. Описывается метод решения полученных уравнений и приводится часть результатов численного расчета.

2. Рассмотрим гибкую квадратную плоскую пластинку со стороной a и постоянной толщиной h . Размеры пластинки и физические свойства материала характеризуются следующими величинами: E — модуль упругости, e_s — интенсивность деформаций на пределе пропорциональности, причем коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$ как в упругой, так и в пластической областях, $\mu = e_s(a/h)^2$. На пластинку действует поперечная нагрузка постоянной интенсивности q , которая в дальнейшем заменяется параметром нагрузки

$$p = \frac{q}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^4.$$

Координатные оси x_1 и x_2 направим в срединной плоскости по сторонам квадрата, ось x_3 — перпендикулярно к недеформированной пластинке. Дальнейший анализ проводится в безразмерных координатах

$$x = \frac{x_1}{a}, \quad y = \frac{x_2}{a}, \quad z = \frac{2}{h} x_3. \quad (1)$$

Компоненты деформации ϵ^*_{ij} и искривления срединной поверхности κ^*_{ij} связаны с перемещениями следующим образом:

$$\begin{aligned} \epsilon^*_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{3,i}u_{3,j}), \\ \kappa^*_{ij} &= -u_{3,ij}, \end{aligned} \quad (2)$$

где запятая в индексах означает дифференцирование по координате x_k ($k = 1, 2$). Вместо них в дальнейшем используем безразмерные величины

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{a}{h}\right)^2 \varepsilon^*_{ij}, \quad \kappa_{ij} = \frac{a^2}{h} \kappa^*_{ij}.$$

Интенсивность деформаций $e_i/e_s = e$ представится в виде

$$e = \frac{1}{z_s} \sqrt{z^2 - 2z_0z + z^2_e}. \quad (3)$$

Здесь используются квадратичные формы $P_e, P_\kappa, P_{e\kappa}$, введенные А. А. Ильюшиным [4], причем

$$z_s = \sqrt{3} \mu \frac{1}{\sqrt{P_\kappa}}, \quad z_e = 2 \sqrt{\frac{P_e}{P_\kappa}}, \quad z_0 = -2 \frac{P_{e\kappa}}{P_\kappa}. \quad (4)$$

Граничные поверхности $z = z_{1,2}(x, y)$ между упругими и пластическими зонами находим из условия Мизеса $e = 1$; из формулы (3) следует

$$z_{1,2} = z_0 \mp \sqrt{z_s^2 + z^2_0 - z^2_e}. \quad (5)$$

Анализ ограничений, налагаемых на z_1 и z_2 , дается в [8].

Напряжения σ_{ij} связываются с деформациями e_{ij} уравнениями Генки — Ильюшина (случай $\nu = 0,5$)

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{3} E' (e_{ij} + e_{kk} \delta_{ij}), \quad (6)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера и

$$E' = E(1 - \omega).$$

Ограничиваясь идеально пластическими или линейно упрочняющимися материалами, имеем ($\lambda = \text{const}$)

$$\omega = \begin{cases} 0, & e_i \leq e_s, \\ \lambda \left(1 - \frac{e_s}{e_i}\right), & e_i \geq e_s. \end{cases} \quad (7)$$

Усилия T^*_{ij} и моменты M^*_{ij} определяются формулами

$$T^*_{ij} = \int_{(h)} \sigma_{ij} dx_3, \quad M^*_{ij} = \int_{(h)} \sigma_{ij} x_3 dx_3. \quad (8)$$

При интегрировании опираемся на гипотезы Кирхгофа. Также учитываем соотношения (6) и (7). Переход к безразмерным усилиям и моментам производится по формулам

$$T_{ij} = \frac{a^2}{Eh^3} T^*_{ij}, \quad M_{ij} = \frac{a^2}{Eh^4} M^*_{ij}.$$

Из соотношений (8) выразим компоненты деформации и моменты через усилия и искривления

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= A(2T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{2} B\kappa_{11}, \\
 \varepsilon_{22} &= A(2T_{22} - T_{11}) + \frac{1}{2} B\kappa_{22}, \\
 \varepsilon_{12} &= 3AT_{12} + \frac{1}{2} B\kappa_{12}, \\
 M_{11} &= \frac{1}{18} C \left(\kappa_{11} + \frac{1}{2} \kappa_{22} \right) - \frac{1}{2} BT_{11}, \\
 M_{22} &= \frac{1}{18} C \left(\kappa_{22} + \frac{1}{2} \kappa_{11} \right) - \frac{1}{2} BT_{22}, \\
 M_{12} &= \frac{1}{36} C\kappa_{12} - \frac{1}{2} BT_{12}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Коэффициенты A , B и C связаны с величинами

$$R_i = \int_{-1}^{z_1} \omega z^i dz + \int_{z_2}^1 \omega z^i dz \tag{10}$$

следующим образом:

$$A = (2 - R_0)^{-1}, \quad B = AR_1, \quad C = -3(BR_1 + R_2) + 2. \tag{11}$$

При аппроксимации диаграммы $\sigma_i - \varepsilon_i$ ломаной интегралы в формулах (10) выражаются в элементарных функциях [8].

Выбирая за основные неизвестные прогиб ω и функцию напряжений F , получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(B \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(B \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) + \\
 &+ \frac{1}{9} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[C \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \right] + \right. \\
 &+ \left. \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[C \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(C \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) \right\} = \\
 &= 2p + 2 \diamond^4(F, \omega),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[A \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[A \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right] + \\
 &+ 3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(A \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - \right. \\
 &\left. - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) \right] = -\frac{1}{4} \diamond^4(\omega, \omega).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Оператор $\diamond^4(\alpha, \beta)$ определяется следующим образом:

$$\diamond^4(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}.$$

Как частный случай вытекают из системы (12) уравнения Кармана для упругих пластинок, если положить $R_i = 0$ ($i = 0, 1, 2$).

Рассмотрим пластинку, кромки которой могут свободно перемещаться в срединной плоскости и края или а) шарнирно оперты, или б) жестко заделаны. Граничные условия выражаются следующим образом:

$$\text{если } x = 0, x = 1, \quad \text{то } w = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad (13)$$

$$\text{если } y = 0, y = 1, \quad \text{то } w = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Кроме того, в случае а)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = 1; \quad (14a)$$

в случае б)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = 1. \quad (14б)$$

3. Для решения системы (12) вместе с условиями (13) и (14) применим метод конечных разностей. Производные заменим конечно-разностными аппроксимациями точности квадрата шага сетки $\Delta = 1/n$. При составлении разностных формул для производных $[g(\alpha, \beta)f_{\beta\beta}]_{\alpha\alpha}$, где $\alpha, \beta = x, y$, сначала применим внешний оператор дифференцирования ко всему выражению в скобках и затем внутренний оператор к функции $f(\alpha, \beta)$. Описанная очередность применения операторов дифференцирования даст

$$\begin{aligned} \Delta^4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(g \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) &\approx [g(0, -1) + 4g(0, 0) + g(0, 1)]f(0, 0) + \\ &+ g(0, -1)f(0, -2) - 2[g(0, 0) + g(0, -1)]f(0, -1) + \\ &+ g(0, 1)f(0, 2) - 2[g(0, 0) + g(0, 1)]f(0, 1); \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(g \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) &\approx -2g(0, 0)[f(-1, 0) - 2f(0, 0) + f(1, 0)] + \\ &+ g(0, -1)[f(-1, -1) - 2f(0, -1) + f(1, -1)] + \\ &+ g(0, 1)[f(-1, 1) - 2f(0, 1) + f(1, 1)]. \end{aligned}$$

Здесь точка (i, i) принята за точку $(0, 0)$, первое число (индекс) указывает номер строки сетки. Для аппроксимации производной $(gf_{xy})_{xy}$ возьмем сетку шагом $\Delta = 1/(2n)$. Значения коэффициента $g(x, y)$ в межузловых точках основной сетки определим путем линейной интерполяции через значения в точках основной сетки. Описанный прием приводит к формуле

$$2\Delta^4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(g \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= [g(-1, -1) + g(1, -1) + g(-1, 1) + \\
&+ g(1, 1) + 4g(0, 0)] f(0, 0) + \\
&+ [g(0, 0) + g(-1, -1)] f(-1, -1) - \\
&- [g(-1, -1) + 2g(0, 0) + g(-1, 1)] f(-1, 0) + \\
&+ [g(0, 0) + g(1, -1)] f(1, -1) - \\
&- [g(1, -1) + 2g(0, 0) + g(-1, -1)] f(0, -1) + \\
&+ [g(0, 0) + g(-1, 1)] f(-1, 1) - \\
&- [g(-1, 1) + 2g(0, 0) + g(1, 1)] f(0, 1) + \\
&+ [g(0, 0) + g(1, 1)] f(1, 1) - \\
&- [g(1, 1) + 2g(0, 0) + g(1, -1)] f(1, 0). \quad (16)
\end{aligned}$$

Наконец, получим нелинейную алгебраическую систему, в которой нелинейные члены $[f_1(F, \omega)$ и $f_2(\omega, \omega)]$, обусловленные учетом геометрической нелинейности, перенесены в правые части следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
(A_1 + A_{1F})F + (B_1 + B_{1F})\omega &= -288\Delta^4 p + f_1(F, \omega), \\
(A_2 + A_{2F})F + (B_2 + B_{2F})\omega &= f_2(\omega, \omega). \quad (17)
\end{aligned}$$

Элементы матриц коэффициентов и свободных членов из-за громоздкого вида здесь не выписаны. Чтобы решить систему

$$\begin{aligned}
(A^{(h)}_{1F} + A_1)F + (B^{(h)}_{1F} + B_1)\omega &= -288\Delta^4 p_N + f_1(F_k, \omega_k), \\
(A^{(h)}_{2F} + A_2)F + (B^{(h)}_{2F} + B_2)\omega &= f_2(F_k, \omega_k) \quad (18)
\end{aligned}$$

(17), надо учесть дополнительные уравнения, вытекающие из граничных условий (13) и (14). В матрицы коэффициентов $A_i + A_{iF}$, $B_i + B_{iF}$ входят нелинейные слагаемые, обусловленные учетом физической нелинейности. Они обозначены индексом F .

Через значения ω и F в узлах сетки вычислим также величины, необходимые для характеристики деформационно-напряженного состояния.

4. Решение системы, состоящей из уравнений (17), (13) и (14) производится методом последовательных приближений. Имея приближение решения на k -ом шагу (F_k, ω_k) при значении параметра нагрузки p_N , нахождение последующего приближения осуществляется по следующей схеме:

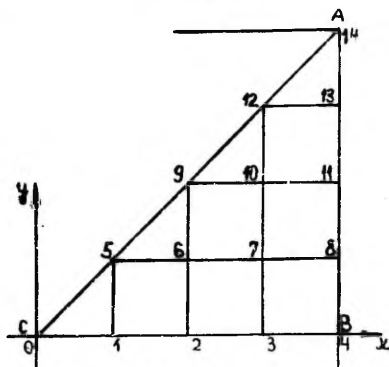
- 1) по формулам (4), (5) вычисляются z_{0k} , z_{sk} , z_{ek} и $z_{1,2k}$;
- 2) по формулам (3), (7), (10) определяются величины R_{ik} (соответствующие формулы в развернутом виде даны в [8]);
- 3) вычисляются элементы матриц $A^{(h)}_{iF}$, $B^{(h)}_{iF}$;
- 4) решается заново полученная линейная система вместе с граничными условиями.

Итерационный процесс заканчивается, если разница между последующими приближениями достаточно мала. При переходе к новому значению параметра p_{N+1} за начальное приближение

принимается решение системы при нагрузке p_N . За нулевое начальное приближение берется $F = 0$, $w = 0$, т. е. на первом шагу ищется упругое линейное решение.

5. Аналогичная задача была рассмотрена и в геометрически линейной постановке. В таком случае основные уравнения упрощаются, так как

$$F \equiv 0, z_0 = 0, |z_1| = z_2, R_0 = R_1 = 0.$$



Фиг. 1.

Уравнение равновесия представим в виде

$$\nabla^4 w = 9p + \delta p, \quad (19)$$

где δp включает члены, обусловленные учетом физической нелинейности.

Решение уравнения (19) ищется также с помощью метода конечных разностей по итерационной схеме, описанной в 4 пункте.

6. Описанный алгоритм был реализован для гибкой пластинки на ЭЦВМ «Минск-22» с программой на автоматическом языке MALGOL и для жесткой пластинки на ЭЦВМ «Урал-4» с программой на языке «ALGOL — mai».

Сторона квадрата была разделена по обоим направлениям на 8 частей. Из-за симметричных граничных условий достаточно рассмотреть 1/8 часть квадрата. Центру пластинки соответствует точка (0,0), углу — точка (4,4).

Граничные условия для функции F аппроксимировались уравнениями

$$F_{i,4} = 0, F_{i,5} = 3F_{i,3} - 0,5F_{i,2} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (20)$$

Для прогиба w использовались следующие аппроксимации: края имеют скользящий шарнир —

$$w_{i,4} = 0, \quad w_{i,5} = -w_{i,3}; \quad (21)$$

края имеют скользящую заделку — для жесткой пластинки

$$w_{i,4} = 0, \quad w_{i,5} = w_{i,3}; \quad (22)$$

для гибкой пластинки

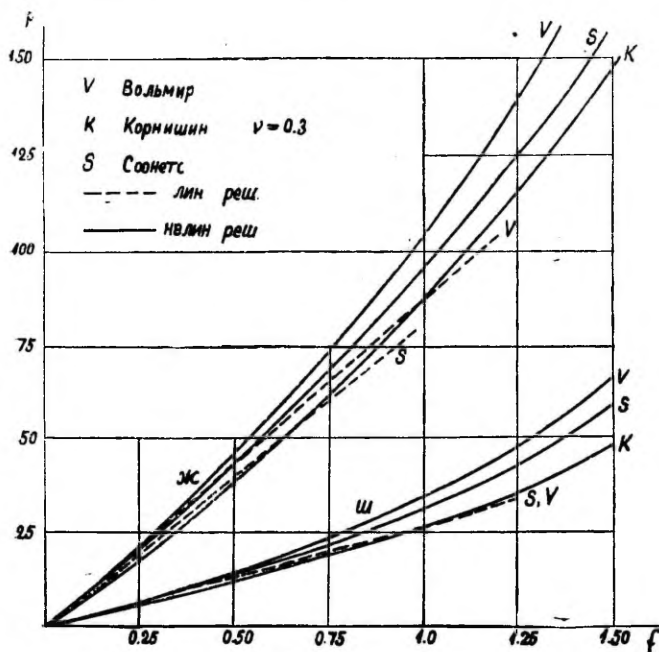
$$w_{i,4} = 0, \quad w_{i,5} = 3w_{i,3} - 0,5w_{i,2}. \quad (23)$$

За меру точности были приняты условия

$|\omega_{k+1}(0,0) - \omega_k(0,0)| < 10^{-\varepsilon}$, $|F_{k+1}(0,0) - F_k(0,0)| < 10^{-\varepsilon}$,
 где для гибкой пластинки $\varepsilon = 3$, для жесткой $\varepsilon = 2$. По решению системы (17) определены распределение усилий и моментов, упругих и пластических зон, также интенсивности деформаций на внешних поверхностях пластинки. Для жесткой пластинки получено распределение прогибов и пластических зон.

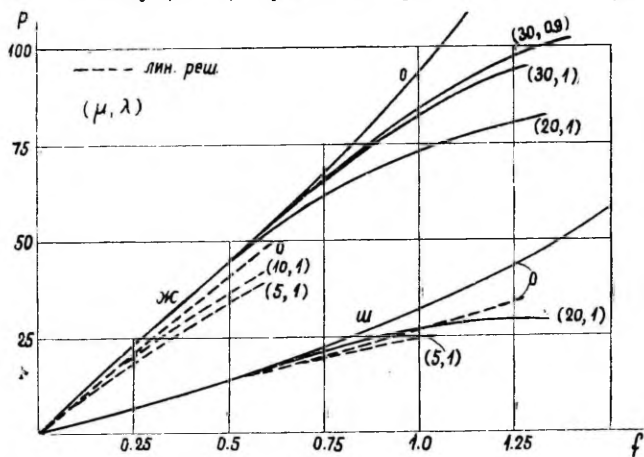
Сходимость итерационного процесса значительно зависела от комбинации значений параметров ρ и μ , т. е. от развитости пластических деформаций. Если при чисто упругом расчете ($\lambda = 0$) число итераций колебалось от 4 до 7 и при больших прогибах достигло 10—18, то с учетом пластических деформаций это число колебалось в пределах 5—25 (для жесткой пластинки 10—14). При малых значениях μ с ростом нагрузки сходимость стала очень медленной или процесс совсем расходился.

7. Приводим часть результатов численного расчета. На фиг. 2 сравниваются упругие решения (нагрузка-стрела прогиба f) с решениями А. С. Вольмира [2] при $\nu = 0,5$ и М. С. Корнишина [6] при $\nu = 0,3$. Прерывистые линии соответствуют жесткой пластинке. На фигурах и в таблицах буквы *ш* и *ж* означают соответственно скользящее шарнирное опирание и скользящую заделку. С развитием пластических деформаций

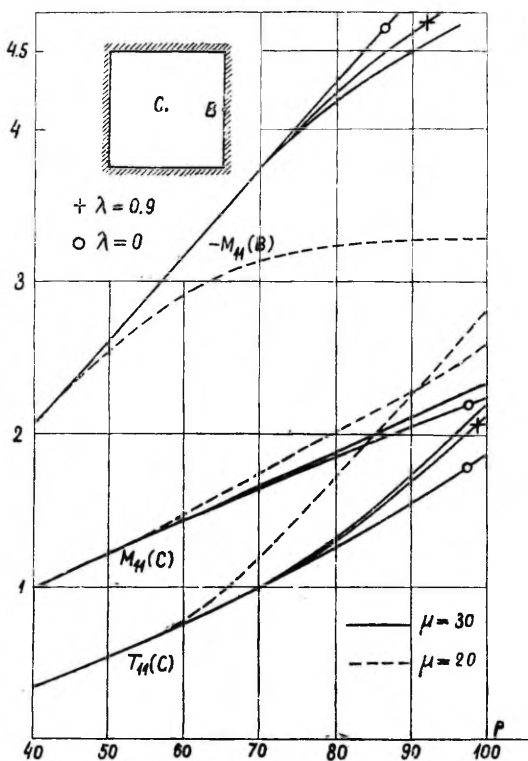


Фиг. 2.

скорость роста прогибов увеличивается. Фиг. 3 характеризует зависимость между p и f при некоторых значениях μ .



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Было проведено сравнение результатов при $\mu = 1,83$, $\rho = 12,2$ с результатами [9]. Расхождение в прогибах составляло около 8%, что объясняется разной густотой сетки.

На фиг. 4 показаны зависимости момента и мембранного усилия от нагрузки в центре и на середине края пластинки в случае заделки. По фигурам 5—7 можно проследить за изменением усилий и моментов в трех сечениях пластинки.

Таблицы 1 и 2 содержат результаты расчета гибкой пластинки в ряде точек пластинки (нумерация узлов приведена на фиг. 1). Таблицы 3 и 4 разделены в части вертикальными, горизонтальными и ступенчатыми линиями. Каждый треугольник содержит распределение величины, указанной на краю. Ступенчатая линия соответствует диагонали пластинки CA .

Предел пропорциональности достигается впервые на середине края при заделке и в центре пластинки при шарнирном

Таблица 1

Скользящий шарнир (μ)

№	λ	μ	ρ	w	z_0	T_{11}	T_{22}	M_{11}	M_{22}	M_{12}	z_1	z_2
0	0		15	0,570	-0,06	0,31	0,31	0,83	0,83	0	-1	1
	0,8	50	15	0,610	-0,09	0,32	0,32	0,70	0,70		-0,63	0,44
	1	5	15	0,669	-0,12	0,35	0,35	0,66	0,66		-0,59	0,35
	0,9	10	22,5	0,925	-0,12	0,73	0,73	1,15	1,15		-0,88	0,64
2	0		15	0,422	-0,03	0,19	0,07	0,70	0,64	0	-1	1
	0,8	5	15	0,443	-0,05	0,20	0,08	0,65	0,58		-0,75	0,65
	1	5	15	0,482	-0,06	0,22	0,10	0,64	0,58		-0,72	0,60
	0,9	10	22,5	0,686	-0,06	0,45	0,20	1,11	0,96		-0,97	0,85
6	0		15	0,394	-0,02	0,15	0,05	0,67	0,63	-0,07	-1	1
	0,8	5	15	0,415	-0,03	0,16	0,07	0,63	0,59	-0,07	-0,71	0,66
	1	5	15	0,454	-0,03	0,18	0,08	0,63	0,59	-0,08	-0,65	0,59
	0,9	10	22,5	0,647	-0,04	0,37	0,17	1,10	1,00	-0,11	-0,91	0,84
9	0		15	0,312	0,02	0,02	0,02	0,57	0,57	-0,14	-1	1
	0,8	5	15	0,329	0,02	0,03	0,03	0,56	0,56	-0,14	-0,68	0,73
	1	5	15	0,361	0,03	0,04	0,04	0,58	0,58	-0,14	-0,59	0,64
	0,9	10	22,5	0,522	0,02	0,09	0,09	1,01	1,01	-0,22	-0,84	0,88
12	0		15	0,100	0,06	-0,08	-0,08	0,25	0,25	-0,28	-1	1
	0,8	5	15	0,105	0,07	-0,09	-0,09	0,27	0,27	-0,28	-0,76	0,90
	1	5	15	0,116	0,08	-0,10	-0,10	0,29	0,29	-0,29	-0,67	0,82
	0,9	10	22,5	0,174	0,08	-0,22	-0,22	0,53	0,53	-0,46	-0,92	1
13	0		15	0	0	0	0	0	0	-0,31	-1	1
	0,8	5	15							-0,32	-0,85	0,85
	1	5	15							-0,33	-0,77	0,77
	0,9	10	22,5				-0,02			-0,53	-1	1
14	0		15	0	0	0	0	0	0	-0,35	-1	1
	0,8	5	15							-0,34	-0,74	0,74
	1	5	15							-0,35	-0,67	0,67
	0,9	10	22,5							-0,61	-0,90	0,90

Таблица 2

Скользкая заделка (ж)

№	λ	μ	p	w	z_0	T_{11}	T_{22}	T_{12}	M_{11}	M_{22}	z_1	z_2
0	0		101,2	1,074	-0,14	1,91	1,91	0	2,22	2,22	-1	1
	0,9	30	93,75	1,178	-0,14	1,86	1,86		2,17	2,17	-1	1
	1	30	91,55	1,171	-0,14	1,81	1,81		2,14	2,14	-1	1
	1	20	78,12	1,185	-0,14	1,64	1,64		1,98	1,98	-1	0,80
2	0		101,2	0,694	-0,08	1,10	0,13	0	1,39	1,27	-1	1
	0,9	30	93,75	0,776	-0,08	1,06	0,15		1,42	1,33	-1	1
	1	30	91,55	0,770	-0,08	1,03	0,15		1,41	1,32	-1	1
	1	20	78,12	0,808	-0,07	0,92	0,19		1,45	1,36	-1	1
4	0		101,2	0	0	0	-2,76	0	-5,76	-2,88	-1	1
	0,9	30	93,75				-2,54		-4,76	-2,38	-0,50	0,50
	1	30	91,55				-2,45		-4,56	-2,28	-0,50	0,50
	1	20	78,12				-1,98		-3,22	-1,61	-0,27	0,27
9	0		101,2	0,332	0,09	-0,04	-0,04	0,85	1,27	1,27		1
	0,9	30	93,75	0,530	0,09	-0,02	-0,02	0,84	1,23	-1,23	-1	1
	1	30	91,55	0,525	0,09	-0,02	-0,02	0,82	1,20	1,20	-1	1
	1	20	78,12	0,559	0,07	-0,02	-0,02	0,78	1,21	1,21	-1	1
11	0		101,2	0	0	0	-0,89	0	-4,30	-2,15	-1	1
	0,9	30	93,75				-0,86		-4,17	-2,08	-0,72	0,72
	1	30	91,55				-0,83		-4,10	-2,05	-0,73	0,73
	1	20	78,12				-0,73		-3,14	-1,57	-0,42	0,42
12	0		101,2	0,065	0,11	-0,36	-0,36	0,44	-0,31	-0,46	-1	1
	0,9	30	93,75	0,096	0,10	-0,35	-0,35	0,43	-0,37	-0,47	-1	1
	1	30	91,55	0,095	0,10	-0,34	-0,34	0,42	-0,37	-0,37	-1	1
	1	20	78,12	0,106	0,08	-0,30	-0,30	0,39	-0,47	-0,47	-1	1
13	0		101,2	0	0	0	0,05	0	-1,88	-0,94	-1	1
	0,9	30	93,75				0,05		-1,95	-0,97	-1	1
	1	30	91,55				0,05		-1,91	-0,96	-1	1
	1	20	78,12				0,04		-2,12	-1,06		1

опирании. При шарнирном опирании появляются пластические деформации сначала в зоне растяжения, затем и в зоне сжимающих усилий. С ростом нагрузки распространяются пластические зоны в глубину пластинки и также в направлении диагоналей. Вблизи углов появляются пластические области впервые в зоне сжатия. С ростом нагрузки происходит ускоренное увеличение момента M_{12} в окрестности угла, что причиняет появление зон текучести и в углу пластинки.

В случае заделки пластические зоны появляются и в центральной части пластинки, но распространяются вдоль края и в глубину быстрее, чем в центральной части. Сужение упругого ядра вдоль края понижает изгибающие моменты и приближает условия работы заделанной пластинки к шарнирно закрепленной пластинке. Это сказывается и в распределении прогибов.

В пластических зонах происходит уменьшение изгибающих моментов и ускоренный рост усилий в срединной поверхности по сравнению с упругим решением. В чисто упругих сечениях происходит незначительное перераспределение напряжений.

Учет упрочнения ($\lambda \neq 1$) сказывается тем сильнее, чем больше превышает нагрузку, вызывающая появление пластических деформаций.

Н. Ф. Ершовым [3] сделаны упрощающие допущения при определении пластических зон и величин R_i (формула (10)). По таблице 3 можно судить об изменении величин R_i без таких упрощений. Нам кажется, что имея достаточно мощные ЭЦВМ, отказ от таких упрощений усложняет расчет незначительно.

Таблица 3

Нелинейное решение

(ж)

$$p = 12,2; \quad \mu = 1,83; \quad \lambda = 1$$

A		z_2			B			z_1		A	
$e(+1)$	$\frac{1}{0}$	0,53	0,21	0,14	0,13	-0,13	-0,14	-0,21	-0,53	$\frac{-1}{0}$	ω
	1,87	$\frac{0,995}{1,005}$	1	1	1	-1	-1	-1	$\frac{-0,97}{0,019}$	0	
	4,80	0,80	$\frac{0,96}{1,05}$	0,73	0,70	-0,73	-0,73	$\frac{-0,90}{0,10}$	0,047	0	
	7,06	0,58	1,37	$\frac{0,42}{2,30}$	0,45	-0,54	$\frac{-0,48}{0,19}$	0,14	0,068	0	
	7,86	0,44	1,43	2,11	$\frac{0,29}{3,09}$	$\frac{-0,39}{0,23}$	0,21	0,15	0,075	0	
$e(-1)$	B										
	7,86	0,54	1,38	1,93	$\frac{2,81}{0,30}$	$\frac{0,50}{0,027}$	0,26	0,06	0	1,17	R_d
	7,06	0,68	1,37	$\frac{2,16}{0,21}$	0,18	0,023	$\frac{0,31}{0,017}$	0,05	0	1,11	
	4,80	0,87	$\frac{1,11}{0,00}$	0,041	0,05	0,005	0,00	$\frac{0,00}{0,00}$	0	0,86	
	1,87	$\frac{1,03}{0}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{0}{0}$	0,18	
$\frac{0}{0}$	0,14	0,44	0,51	0,53	0	0	0	0	$\frac{0}{0}$		
A	R_2			B	R_1			A			

Линейное решение

(ш)					(ж)				
$\rho = 12,2; \mu = 1,83; \lambda = 1$					$\rho = 11,4; \mu = 1,83; \lambda = 1$				
A $z_2 = z_1 $					B $z_2 = z_1 $				
0,96	0,53	0,74	1	1	0,40	0,43	0,56	1	1
0	0,54	0,59	0,65	0,68	1	1	1	1	0
	0,065							0,012	
0	0,12	0,47	0,43	0,41	1	1	1	0,027	0
		0,21					0,060		
0	0,15	0,27	0,36	0,34	0,71	0,78	0,082	0,036	0
			0,35			0,12			
0	0,16	0,29	0,38	0,32	0,64	0,13	0,090	0,038	0
				0,40	0,14				

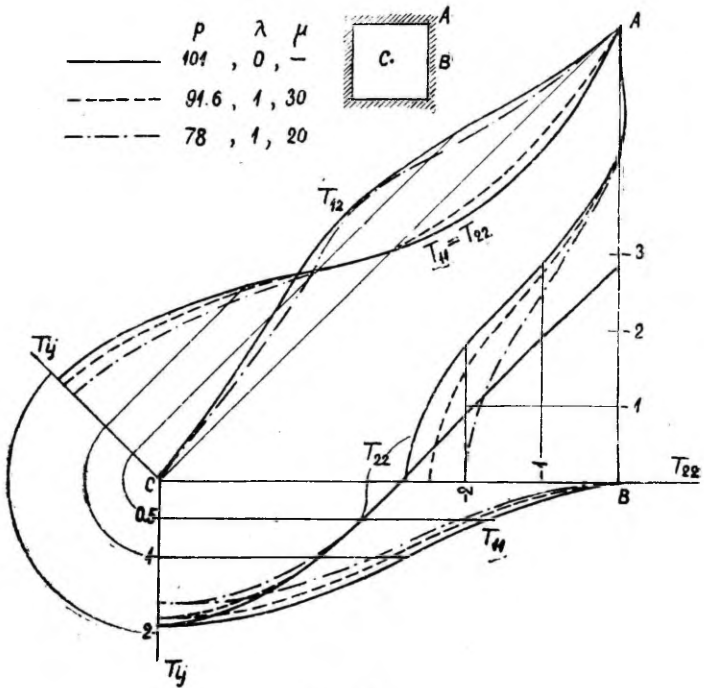
B

ω

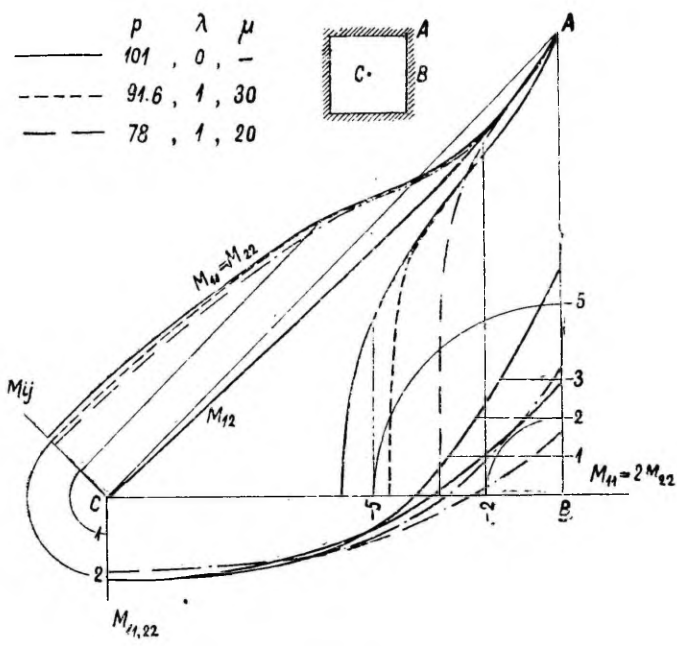
C

ω

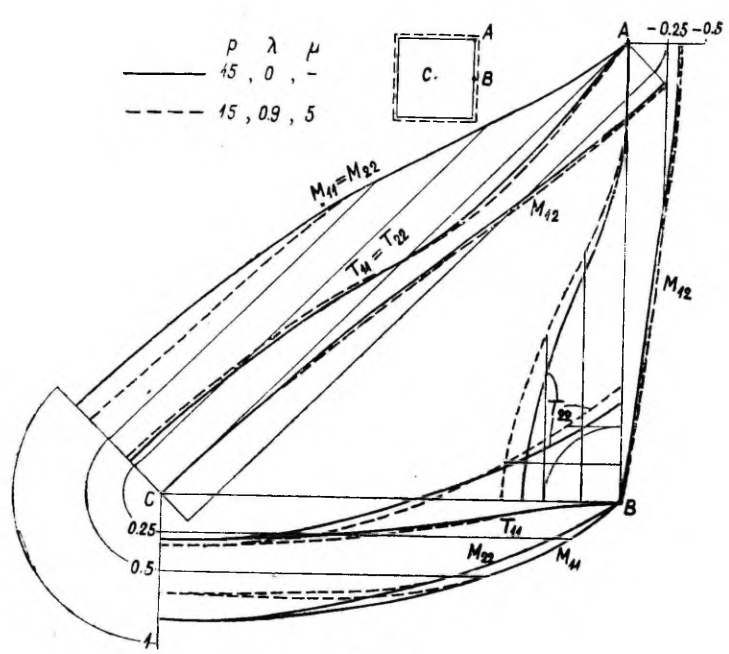
B



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Сравнение результатов расчета за пределом упругости в геометрически линейной и нелинейной постановках показывает, что с ростом нагрузки расхождение значительно увеличивается. Необходимо более детальное исследование влияния разных способов закрепления краев на поведение пластинки, также дальнейшее развитие улучшенных итерационных схем расчета.

Учет геометрической нелинейности при больших прогибах оказывает значительное влияние на результаты расчета прямоугольной пластинки. Необходимо более детальное исследование влияния разных способов закрепления краев на поведение пластинки.

Литература

1. Биркган А. Ю., Вольмир А. С., Исследование больших прогибов прямоугольной пластинки при помощи цифровых электронных машин. Изв. АН СССР. Мех. и машиностр., 1959, 2, 100—106.
2. Вольмир А. С., Гибкие пластинки и оболочки. Москва, 1956.
3. Ершов Н. Ф., Упруго-пластический изгиб сжатых гибких пластин. Тр. Горьковск. инж.-строит. ин-та, 1961, 39, 76—93.
4. Ильюшин А. А., Пластичность. Москва—Ленинград, 1948.
5. Колгадин В. А., Геометрически нелинейная задача упруго-пластического изгиба прямоугольных пластин. Прикл. механика, 1968, 4, № 4, 47—52.
6. Корнишин М. С., Исанбаева Ф. С., Гибкие пластины и панели. Москва, 1968.
7. Мяченков В. И., Репин А. А., Упруго-пластический изгиб прямоугольных пластин. Прикл. механика, 1969, 5, № 12, 77—82.
8. Соонетс К., О равновесии гибких упруго-пластических прямоугольных в плане панелей при больших прогибах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 180—189.
9. Стрельбицкая А. И., Колгадин В. А., Исследование изгиба прямоугольных пластин за пределом упругости. Прикл. механика, 1966, 2, № 10, 44—54.

Поступило
14 IV 1970

NÕTKE RUUDUKUJULISE PLAADI ELASTILIS-PLASTSEST PAINDEST

E. Saareste ja K. Soonets

Resümee

K. Soonetsi artiklis [8] tuletatud nõkete paneelide põhivõrrandid lihtsus-tatakse ruudukujulise algköveruseta plaadi juhuks. Mittelineaarse diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendamiseks kasutatakse lõplike vahede meetodit. Antakse ülesande lahendamise algoritmi, mis baseerub järkjärgulisele lähendamisele. Arvutused on tehtud kõigist servadest šarniirselt ja jäigalt kinnitatud plaatide jaoks elektronarvutil «Minsk-22». Programm on koostatud MALGOL keeles. Osa arvutustulemusi on esitatud graafikute ja tabelite kujul.

ÜBER DAS GLEICHGEWICHT DER ELASTISCH-PLASTISCHEN BIEGSAMEN PLATTE IM FALLE GROSSER DURCHBIEGUNGEN

E. Saareste und K. Soonets

Zusammenfassung

Die Differentialgleichungen elastisch-plastischer Platte [8] werden auf den Fall einer gleichmäßig belasteten quadratischen Platte reduziert.

Als Grundlagen werden die Henckyschen Gleichungen für das ideal-plastische oder linear-verfestigende Material mit der Misesschen Fließbedingung genommen. Zur Vereinfachung wird das Material auch elastisch inkompressibel genommen.

Für die Lösung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Differentialgleichungen wird die Methode endlicher Differenzen verwendet. Die Koeffizienten der Gleichungen werden durch die Iterationsmethode gefunden.

Es werden in Tafeln und Abbildungen die Verteilung der Durchbiegungen, Momente und Kräfte, ebenso der plastischen Gebiete und Verzerrungskomponenten gegeben.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ ПЛАСТИНОК

Л. Роотс

Кафедра теоретической механики

Э. Сакс

Кружок СНО при кафедре теоретической механики

В статье рассматривается задача об устойчивости равномерно сжатой трапециевидной (в частном случае треугольной) пластинки с частично защемленным, частично свободно опертым контуром. При решении задачи применяется приближенный метод Власова — Канторовича.

1. Трапеция, параллельные стороны которой защемлены, непараллельные свободно оперты

Рассмотрим трапециевидную пластинку, изображенную на рис. 1. Пусть T — интенсивность сжимающей нагрузки; тогда дифференциальное уравнение устойчивости пластинки имеет вид

$$D\nabla^4 w = -T\nabla^2 w. \quad (1.1)$$

Уравнение четвертого порядка (1.1) заменяем системой уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} D\nabla^2 M + TM &= 0, \\ \nabla^2 w &= M; \end{aligned} \quad (1.2)$$

к этой системе принадлежат краевые условия

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = a \quad \text{и} \quad x = b; \\ w = 0, \quad M = 0 \quad \text{при} \quad y = \beta x \quad \text{и} \quad y = \beta x. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Учитывая форму пластинки, переходим от прямоугольных координат x, y к координатам

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{x}.$$

В координатах ξ, η система уравнений (1.2) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} - \frac{2\eta}{\xi} \frac{\partial^2 M}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta^2 + 1}{\xi^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} + \frac{2\eta}{\xi^2} \frac{\partial M}{\partial \eta} + \frac{a^2 T}{D} M = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - \frac{2\eta}{\xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta^2 + 1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{2\eta}{\xi^2} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = a^2 M,$$

а краевые условия следующие $\left(\lambda = \frac{b}{a}\right)$:

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = \lambda \text{ и } \xi = 1;$$

$$\omega = 0, \quad M = 0 \quad \text{при } \eta = \alpha \text{ и } \eta = \beta. \quad (1.5)$$

Следуя методу Власова—Канторовича, задаем

$$M = f(\xi) \sin \frac{\pi(\eta - \alpha)}{\beta - \alpha},$$

удовлетворяя этим граничные условия на краях $\eta = \alpha$ и $\eta = \beta$. Функция $f(\xi)$ определяется из условия

$$\int_{\alpha}^{\beta} L(M) \sin \frac{\pi(\eta - \alpha)}{\beta - \alpha} d\eta = 0, \quad (1.6)$$

где

$$L(M) = \frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} - \frac{2\eta}{\xi} \frac{\partial^2 M}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta^2 + 1}{\xi^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} + \frac{2\eta}{\xi^2} \frac{\partial M}{\partial \eta} + \frac{a^2 T}{D} M.$$

Это дает для $f(\xi)$ уравнение

$$f''(\xi) + \frac{1}{\xi} f'(\xi) + \left(\frac{a^2 T}{D} - \frac{p^2}{\xi^2} \right) f(\xi) = 0, \quad (1.7)$$

где

$$p^2 = \frac{1}{2} + \frac{(3 + \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\pi^2}{3(\beta - \alpha)^2}. \quad (1.8)$$

Общее решение уравнения (1.7) выражается в бесселевых функциях p -го порядка в виде

$$f(\xi) = C_1 I_p \left(a \sqrt{\frac{T}{D}} \xi \right) + C_2 N_p \left(a \sqrt{\frac{T}{D}} \xi \right). \quad (1.9)$$

Поступая аналогично, задаем

$$\omega = g(\xi) \sin \frac{\pi(\eta - \alpha)}{\beta - \alpha};$$

согласно методу Власова—Канторовича получим для $g(\xi)$ уравнение

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[g''(\xi) \sin \frac{\pi(\eta - \alpha)}{\beta - \alpha} - \frac{2\pi\eta}{(\beta - \alpha)\xi} g'(\xi) \cos \frac{\pi(\eta - \alpha)}{\beta - \alpha} - \frac{\pi^2(\eta^2 + 1)}{(\beta - \alpha)^2 \xi^2} g(\xi) \sin \frac{\pi(\eta - \alpha)}{\beta - \alpha} + \frac{2\pi\eta}{(\beta - \alpha)\xi^2} g(\xi) \cos \frac{\pi(\eta - \alpha)}{\beta - \alpha} - f(\xi) \sin \frac{\pi(\eta - \alpha)}{\beta - \alpha} \right] \sin \frac{\pi(\eta - \alpha)}{\beta - \alpha} d\eta = 0$$

или

$$g''(\xi) + \frac{1}{\xi} g'(\xi) - \frac{p^2}{\xi^2} g(\xi) = C_1 I_p \left(a \sqrt{\frac{T}{D}} \xi \right) + C_2 N_p \left(a \sqrt{\frac{T}{D}} \xi \right) \quad (1.10)$$

Общее решение уравнения (1.10) имеет вид

$$g(\xi) = C_3 \xi^p + C_4 \xi^{-p} + F(\xi), \quad (1.11)$$

где $F(\xi)$ — частное решение уравнения (1.10).

Выражение (1.11) для $g(\xi)$ содержит четыре произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 ; краевые условия на параллельных сторонах трапеции дадут для них систему уравнений

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= 0, & g'(\lambda) &= 0, \\ g(1) &= 0, & g'(1) &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

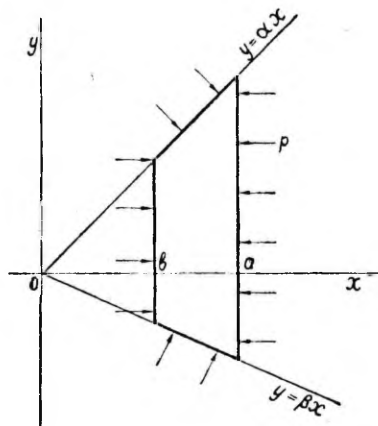


Рис. 1.

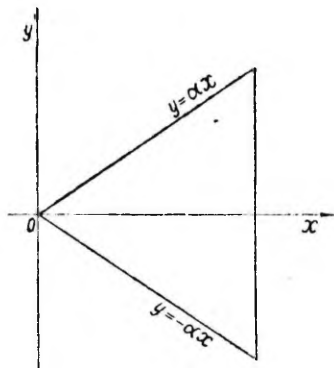


Рис. 2.

Условие нетривиальности решения системы линейных и однородных относительно C_1, \dots, C_4 уравнений дает уравнение для определения критической нагрузки:

$$D_{12} = 0, \quad (1.13)$$

где D_{12} — определитель системы (1.12).

2. Устойчивость равнобедренной треугольной пластинки

В частном случае равнобедренной треугольной пластинки (рис. 2)

$$\begin{aligned} \beta &= -\alpha, \quad \lambda = 0; \\ \rho^2 &= \frac{1}{2} + \frac{(3 + \beta^2)\pi^2}{12\beta^2}. \end{aligned}$$

Из условия

$$w = 0, \quad M = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0$$

следует

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Частное решение уравнения (1.10) выражается в виде степенного ряда

$$F(\xi) = C_1 2^{-\rho-2} \left(a \sqrt{\frac{T}{D}} \right)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{a^2 T}{4D} \right)^k \frac{\xi^{2k+\rho+2}}{(k+1)! \Gamma(\rho+k+2)},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} g(\xi) &= C_1 2^{-\rho-2} \left(a \sqrt{\frac{T}{D}} \right)^{\rho} \cdot \\ &\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{a^2 T}{4D} \right)^k \frac{\xi^{2k+\rho+2}}{(k+1)! \Gamma(\rho+k+2)} + C_3 \xi^{\rho}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из краевых условий

$$g(1) = 0, \quad g'(1) = 0$$

получим для C_1, C_3 систему уравнений

$$\begin{aligned} A_1 C_1 + C_3 &= 0, \\ A_2 C_1 + \rho C_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$A_1 = 2^{-\rho-2} \left(a \sqrt{\frac{T}{D}} \right)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{a^2 T}{4D} \right)^k \frac{1}{(k+1)! \Gamma(\rho+k+2)},$$

$$A_2 = 2^{-p-2} \left(a \sqrt{\frac{T}{D}} \right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{a^2 T}{4D} \right)^k \frac{2k + p + 2}{(k+1)! \Gamma(p+k+2)}.$$

Уравнение для критической нагрузки имеет вид

$$\begin{vmatrix} A_1 & 1 \\ A_2 & p \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{a^2 T}{4D} \right)^k \frac{1}{k! \Gamma(p+k+2)} = 0. \quad (2.3)$$

Для частного значения $p = 2$ (которому соответствует значение угла при вершине треугольника $80^\circ 40'$) найдена при помощи ЭЦВМ «Урал-4» вычислительного центра Тартуского государственного университета критическая нагрузка

$$T = 40,62 \frac{D}{a^2}. \quad (2.4)$$

Поступило
16 IV 1970

TRAPETSIKUJULISTE PLAATIDE STABIILSUSEST

L. Roots ja E. Saks

Resümee

Artikkel käsitleb ühtlaselt surutud trapetsikujulise (erijuhul kolmnurkse) plaadi stabiilsuse ülesannet. Vaadeldakse plaati, mille kontuur on osaliselt vabalt toetatud, osaliselt jäigalt kinnitatud. Ülesanne lahendatakse Vlassov-Kantorovitši meetodil. Tuletatakse võrrand kriitilise koormuse jaoks, mis lahendatakse ühel erijuhul võrdhaarse kolmnurga kujulise plaadi puhul.

ON THE BUCKLING OF TRAPEZOIDAL PLATES

L. Roots and E. Saks

Summary

The paper deals with the determining of critical loads for trapezoidal and triangular plates in uniform compression. The case of partially clamped, partially simply supported edges is observed. The problem has been solved by using the Kantorovich-Vlassov method of getting approximate solutions for partial differential equations.

ИМПУЛЬСИВНОЕ НАГРУЖЕНИЕ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН, МАТЕРИАЛ КОТОРЫХ ИМЕЕТ РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ТЕКУЧЕСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Я. Леллеп

Кафедра теоретической механики

Динамическое нагружение свободно опертых круглых пластин изучено (исходя из концепции жестко-пластического тела) Гопкинсом и Прагером [1]. Предельное равновесие пределов пластин, выполненных из материала с различными пределами текучести при растяжении и сжатии, рассмотрено в работе [2], а несущая способность растянуто-изогнутых круглых пластин в случае изотропного материала найдена в работе [3].

В настоящей статье рассматривается поведение круглой пластины растянутой в радиальном направлении и нагруженной прямоугольным импульсом в поперечном направлении. Допускается, что пластина выполнена из материала, имеющегося различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Исходя из концепции жестко-пластического тела, в статье получено полное решение проблемы.

§ 1. Основные уравнения и предположения

Рассмотрим свободно опертую круглую пластину радиуса a и толщины h , находящуюся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности P и растягиваемую горизонтальными силами N на контуре. Допустим, что усилие N остается неизменным во всем процессе деформации, причем $N < \sigma_t h$, где σ_t — предел текучести при растяжении. Допустим также, что интенсивность поперечной нагрузки остается постоянной до снятия нагрузки. Пусть разгрузка происходит внезапно в момент времени T_1 .

Предположим, что пластина выполнена из жестко-пластического материала, подчиняющегося условию текучести X_u [4], изображенного на рис. 1. Угловые точки шестиугольника X_u имеют на плоскости $(\sigma_r/\sigma_c, \sigma_\varphi/\sigma_c)$ следующие координаты:

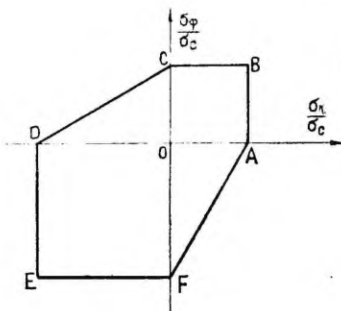


Рис. 1.

$A(\gamma, 0)$; $B(\gamma, \gamma)$; $C(0, \gamma)$; $D(-1, 0)$; $E(-1, -1)$; $F(0, -1)$, причем $\gamma = \sigma_r/\sigma_c$, где σ_r , σ_ϕ обозначают главные напряжения, а $-\sigma_c$ — предел текучести при сжатии. Для конкретности ограничимся случаем $0 < \gamma \leq 1$.

Для удобства введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
 \varrho &= \frac{r}{a}, & \eta &= \frac{2z}{h}, & \tau &= \sqrt{\frac{\sigma_c h^3}{8\mu a^4}} t, \\
 \tau_1 &= \sqrt{\frac{\sigma_c h^3}{8\mu a^4}} T_1, & t_1 &= \frac{T_r}{\sigma_c h}, & t_2 &= \frac{T_\phi}{\sigma_c h}, \\
 n &= \frac{N}{\sigma_c h}, & m_1 &= \frac{4M_r}{\sigma_c h^2}, & m_2 &= \frac{4M}{\sigma_c h^2}, \\
 p &= \frac{4a^2 P}{\sigma_c h^2}, & w &= \frac{hW}{2a^2}, & u &= \frac{U}{a};
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где r — координата в радиальном направлении, z — координата по толщине пластины, t — время, T_r и T_ϕ — усилия, M_r и M_ϕ — изгибающие моменты, W и U — перемещения срединной поверхности, а μ — плотность материала.

В безразмерных переменных (1.1) уравнения равновесия имеют вид:

$$(\varrho t_1)' = t_2, \quad [(\varrho m_1)' - m_2]' = (\ddot{w} - p)\varrho, \tag{1.2}$$

где штрих обозначает дифференцирование по ϱ , а точка над переменной — дифференцирование по τ . Усилия и моменты в формуле (1.2) выражаются через главные напряжения следующим образом:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma_r}{\sigma_c} d\eta, & t_2 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma_\phi}{\sigma_c} d\eta, \\
 m_1 &= \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma_r}{\sigma_c} \eta d\eta, & m_2 &= \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma_\phi}{\sigma_c} \eta d\eta.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

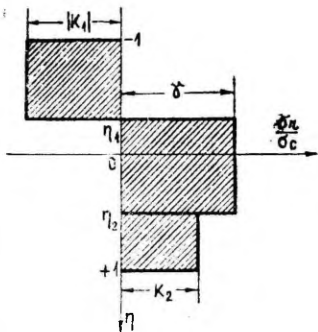


Рис. 2.

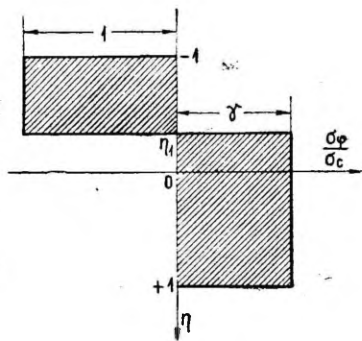


Рис. 3.

Скорости деформаций определяются из ассоциированного закона течения, причем они связаны со скоростями перемещений формулами:

$$\dot{e}_1 = \dot{u}' - \eta \dot{\omega}'', \quad (1.4)$$

$$\dot{e}_2 = \frac{\dot{u}}{\rho} - \frac{\eta}{\rho} \dot{\omega}'.$$

Как и в задаче Гопкинса — Прагера [1], так и здесь придется различать случай средних и высоких давлений.

§ 2. Средние давления

Если

$$\frac{12(1+n)(\gamma-n)}{1+\gamma} \leq p \leq \frac{24(1+n)(\gamma-n)}{1+\gamma}, \quad (2.1)$$

то во всей пластине реализуется режим течения $EF-BC$, т. е. $\sigma_\varphi/\sigma_c = -1$ при $-1 \leq \eta < \eta_1$ и $\sigma_\varphi/\sigma_c = \gamma$ при $\eta_1 < \eta \leq 1$, где η_1 — координата поверхности разрыва напряжения σ_φ . Имея в виду соотношения (1.3), найдем

$$t_2 = \frac{1}{2}[\gamma - 1 - \eta_1(1 + \gamma)], \quad m_2 = \frac{1}{2}(1 + \gamma)(1 - \eta_1^2). \quad (2.2)$$

Согласно ассоциированному закону течения $\dot{e}_1 \equiv 0$, $\dot{e}_2(\eta_1) = 0$; откуда с помощью (1.4) вытекает, что величины \dot{u} , $\dot{\omega}'$ и $\eta_1 = \dot{u}/\dot{\omega}'$ не могут зависеть от ρ . В таком случае

$$\dot{\omega} = \varphi(1 - \rho), \quad (2.3)$$

где $\varphi = \varphi(\tau)$ — некоторая функция безразмерного времени τ .

Интегрируя первое уравнение системы (1.2) с учетом (2.2) и удовлетворяя условиями $t_1(0) = t_2(0)$, $t_1(1) = n$, получим:

$$t_1 = t_2 = n, \quad \eta_1 = \frac{\gamma - 1 - 2n}{1 + \gamma}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим в дальнейшем отдельно стадии движения пластины в период действия нагрузки $0 \leq \tau \leq \tau_1$ и после снятия нагрузки $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, где τ_2 — момент времени окончания движения.

I стадия ($0 \leq \tau \leq \tau_1$). В течение периода нагружения интенсивность поперечной нагрузки остается постоянной. В момент времени τ_1 нагрузка внезапно снимается. Интегрируем второе уравнение системы (1.2) с помощью (2.2)–(2.4). Удовлетворяя при этом условиям $m_1(0) = m_2(0)$, $m_1(1) = 0$, найдем

$$\dot{\varphi} = 2 \left[p - \frac{12(1+n)(\gamma-n)}{1+\gamma} \right], \quad (2.5)$$

$$m_1 = \frac{1}{2} (1+\gamma) (1-\eta_1^2) (1-2\varrho^2 + \varrho^3) + \frac{1}{6} p \varrho^2 (1-\varrho). \quad (2.6)$$

Прогиб определяем из уравнений (2.3) и (2.5) с учетом начальных условий $w(\varrho, 0) \equiv \dot{w}(\varrho, 0) \equiv 0$. В результате получим:

$$w = \left[p - \frac{12(1+n)(\gamma-n)}{1+\gamma} \right] (1-\varrho) \tau^2. \quad (2.7)$$

Отметим, что в случае статического нагружения $\dot{w} = 0$, следовательно,

$$p = \frac{12(1+n)(\gamma-n)}{1+\gamma}, \quad m_1 = \frac{1}{2} (1+\gamma) (1-\eta_1^2) (1-\varrho^2). \quad (2.8)$$

Формулы (2.2), (2.4) и (2.8) представляют решение к проблеме предельного равновесия растянуто-изогнутой пластины.

II стадия ($\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$). В течение второй стадии движения интенсивность поперечной нагрузки равна нулю. Приняв в (2.5) и (2.6) $p = 0$, имеем

$$\dot{\varphi} = - \frac{24(1+n)(\gamma-n)}{1+\gamma}, \quad (2.9)$$

$$m_1 = \frac{1}{2} (1+\gamma) (1-\eta_1^2) (1-2\varrho^2 + \varrho^3). \quad (2.10)$$

Путем интегрирования (2.3) и (2.9) найдем прогиб w . Для определения постоянных интегрирования воспользуемся условиями непрерывности величин w и \dot{w} в момент времени τ_1 . Учитывая при этом формулу (2.7), получим

$$w = (1-\varrho) \left[- \frac{12(1+n)(\gamma-n)}{1+\gamma} \tau^2 + p \tau_1 (2\tau - \tau_1) \right].$$

Движение пластины оканчивается, когда скорости всех ее точек равны нулю; следовательно,

$$\tau_2 = \frac{p \tau_1 (1+\gamma)}{12(1+n)(\gamma-n)}.$$

§ 3. Высокие давления

Если

$$p > \frac{24(1+n)(\gamma-n)}{1+\gamma},$$

то вблизи центра пластины появляется область, где напряженное состояние соответствует режиму $E-B$ (рис. 1). В остальной части реализуется режим течения $EF-BC$.

I стадия ($0 \leq \tau \leq \tau_1$). Обозначим безразмерный радиус окружности, разделяющей две области, через ϱ_0 . В зоне $\varrho_0 \leq \varrho \leq 1$ остаются в силе формулы (2.2) и (2.3), а при $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$ имеем:

$$t_1 = t_2 = \frac{1}{2} [\gamma - 1 - \eta_0(1 + \gamma)],$$

$$m_1 = m_2 = \frac{1}{2} (1 + \gamma) (1 - \eta_0^2). \quad (3.1)$$

Из уравнений равновесия (1.2) вытекает, учитывая (2.2) и (3.1), что в зоне $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$

$$\ddot{w} = p \quad (3.2)$$

и $\eta_0 = \eta_1$. Из уравнения (3.2) следует

$$w = \frac{p}{2} \tau^2, \quad 0 \leq \varrho \leq \varrho_0. \quad (3.3)$$

В зоне $\varrho_0 \leq \varrho \leq 1$ скорость прогиба определяется соотношением (2.3). Для определения функции φ в формуле (2.3) воспользуемся условием непрерывности скорости прогиба в точке ϱ_0 . Так как ϱ_0 остается постоянной в течение первой стадии движения, то путем интегрирования по времени легко определить прогиб

$$w = \frac{p}{2} \cdot \frac{1-\varrho}{1-\varrho_0} \tau^2, \quad \varrho_0 \leq \varrho \leq 1. \quad (3.4)$$

Имея в виду формулы (2.2) и (3.1), интегрирование первого уравнения системы (1.2) и удовлетворение граничному условию $t_1(1) = n$, а также условию непрерывности величины t_1 в точке ϱ_0 , показывает, что во всей пластине остаются в силе и соотношения (2.4).

Интегрируя с помощью (2.2) и (3.4) второе уравнение системы (1.2) и удовлетворяя граничному условию $m_1(1) = 0$, а также требованию непрерывности величин m_1, m_1' в точке ϱ_0 , получим выражение изгибающего момента

$$m_1 = \frac{1}{2} (1 + \gamma) (1 - \eta_1^2) - \frac{p}{12(1 - \varrho_0)} \left(\varrho^3 - 2\varrho_0\varrho^2 + 2\varrho_0^3 - \frac{\varrho_0^4}{\varrho} \right) \quad (3.5)$$

в области $\varrho_0 \leq \varrho \leq 1$ и уравнение для определения величины ϱ_0 :

$$(1 + \varrho_0)(1 - \varrho_0)^2 = \frac{24(1+n)(\gamma-n)}{p(1+\gamma)}. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) дает возможность определить ϱ_0 для каждой комбинации γ, n, p .

II стадия ($\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$). В течение этой стадии шарнирная окружность радиуса ϱ_1 , находящаяся в момент τ_1 в точке ϱ_0 , приближается к центру пластины.

В зоне $0 \leq \varrho \leq \varrho_1$ напряженное состояние соответствует точкам *E* и *B* шестиугольника текучести (рис. 1), а при $\varrho_1 \leq \varrho \leq 1$ имеет место режим течения *EF* — *BC*.

Нетрудно проверить, что все кинематические требования выполнены, если скорость прогиба задать в виде

$$\dot{w} = \begin{cases} p\tau_1, & 0 \leq \varrho \leq \varrho_1, \\ p\tau_1 \frac{1-\varrho}{1-\varrho_1}, & \varrho_1 \leq \varrho \leq 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Так как при $0 \leq \varrho \leq \varrho_1$ остаются в силе формулы (3.1), а при $\varrho_1 \leq \varrho \leq 1$ соотношения (2.2), то методика интегрирования системы (1.2) с $p = 0$ аналогична методике, использованной в предыдущем случае. Представим здесь только основные результаты. Изгибающий момент выражается в области $\varrho_1 \leq \varrho \leq 1$ формулой

$$m_1 = \frac{1}{2}(1+\gamma)(1-\eta^2_1) \left[1 + \frac{1}{(1+3\varrho_1)(1-\varrho_1)^3} \times \right. \\ \left. \times \left(-2\varrho^2 + \varrho^3 + 6\varrho^2_1 - 4\varrho^3_1 - \frac{4\varrho^3_1 - 3\varrho^4_1}{\varrho} \right) \right], \quad (3.8)$$

причем остаются в силе соотношения (2.4). Для определения величины ϱ_1 получим уравнение

$$\dot{\varrho}_1(1 + 2\varrho_1 - 3\varrho^2_1) = -\frac{24(1+n)(\gamma-n)}{p\tau_1(1+\gamma)},$$

откуда с помощью условия $\varrho_1(\tau_1) = \varrho_0$ вытекает

$$\tau = \frac{p\tau_1(1+\gamma)}{24(1+n)(\gamma-n)}(1+\varrho_1)(1-\varrho_1)^2.$$

Вторая стадия движения оканчивается, когда $\varrho_1 = 0$, следовательно,

$$\tau_2 = \frac{p\tau_1(1+\gamma)}{24(1+n)(\gamma-n)}.$$

Наконец, отметим, что определение прогиба из заданного распределения скоростей прогиба происходит таким же путем, как в задаче Гопкинса и Прагера [1].

III стадия ($\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3$). В течение третьей стадии (до остановки движения в момент времени τ_3) пластина находится в состоянии $EF-BC$ (рис. 1). Распределение напряжений в данном случае дается соотношениями (2.2), (2.4) и (2.10), а прогиб определяется из уравнений (2.3) и (2.9) с учетом условий непрерывности величин ω и $\dot{\omega}$ в момент времени τ_2 . Движение пластины оканчивается, когда скорости всех ее точек обращаются в нуль; время движения

$$\tau_3 = \frac{\rho \tau_1 (1 + \gamma)}{12(1 + n)(\gamma - n)}.$$

§ 4. Распределение радиальных напряжений

При решении поставленной задачи мы предполагали, что некоторая зона пластины находится в состоянии $EF-BC$. Так как для такой зоны величины t_1 и m_1 мы определили из уравнений равновесия, то придется еще проверить, найдется ли статически допустимое распределение напряжения σ_r . Для проверки конструируем распределение напряжений σ_r , представленное на рис. 2 (на рис. 3 изображено распределение σ_φ).

Оказалось, что во всех рассмотренных выше случаях

$$t_1 = \frac{1}{2} [\gamma - 1 - \eta_1(1 + \gamma)], \quad \eta_1 = \frac{\gamma - 1 - 2n}{1 + \gamma}, \quad (4.1)$$

$$m_1 = \frac{1}{2} (1 + \gamma) (1 - \eta_1^2) - f(\varrho),$$

где $f(\varrho)$ — некоторая функция ϱ .

Из формул (1.3), (4.1) и рис. 2. выясняется, что

$$k_1 = -1 + \frac{2f(\varrho)}{(1 + \eta_1)(2 - \eta_1 + \eta_2)}, \quad (4.2)$$

$$k_2 = \gamma - \frac{2f(\varrho)}{(1 - \eta_2)(2 - \eta_1 + \eta_2)}.$$

Напряженное состояние является статически допустимым, если выполнены условия

$$-1 \leq k_1 \leq 0, \quad 0 \leq k_2 \leq \gamma, \quad (4.3)$$

причем $\eta_1 \leq \eta_2 \leq 1$.

Рассмотрим сперва случай статического нагружения. Из формул (2.8) и (4.1) получим:

$$2f(\varrho) = (1 + \gamma) (1 - \eta_1^2) \varrho^2. \quad (4.4)$$

Проверив выполнение неравенств (4.3) с помощью (4.2) и (4.4), выясняется, что они удовлетворены, если точку η_2 выбирать так, чтобы

$$\begin{aligned} & \gamma(1 - \eta_1) - 1 \leq \eta_2 \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\eta_1 - 1 + \sqrt{5 - 6\eta_1 + 5\eta_1^2 - \frac{4}{\gamma}(1 - \eta_1^2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отметим, что при $\gamma = 1$ из (4.5) вытекает $\eta_2 = -\eta_1$; тогда данное распределение напряжений совпадает с распределением; представленным в работе [3].

Проанализируем случай динамического нагружения со средними давлениями. Из формул (2.6), (2.10) и (4.1) выясняется, что

$$2f(\varrho) = -(1 + \gamma)(1 - \eta_1^2)(\varrho^3 - 2\varrho^2) - \frac{1}{3} \rho \varrho^2(1 - \varrho) \quad (4.6)$$

для первой стадии и

$$2f(\varrho) = (1 + \gamma)(1 - \eta_1^2)(2 - \varrho)\varrho^2 \quad (4.7)$$

для второй стадии движения. Проведя детальный анализ неравенств (4.3) для обеих стадий, учитывая при этом формулы (4.6) и (4.7) соответственно, приходим в обоих случаях к требованию (4.5).

В случае высоких давлений режим течения $EF - BC$ применялся не для всей пластины, а для зон $\varrho_0 \leq \varrho \leq 1$ и $\varrho_1 \leq \varrho \leq 1$ соответственно в первой и второй стадиях движения. Учитывая пределы применимости данного режима, с помощью формул (3.5), (3.8), (4.1) и (4.2) можно показать, что условия (4.3) выполнены для обеих стадий, если величину η_2 выбирать внутри отрезка (4.5).

Итак, можно утверждать, что полученное решение задачи удовлетворяет всем статическим и кинематическим условиям; следовательно, оно является полным. Как частный случай $n = 0$, $\gamma = 1$, из полученного решения вытекает решение задачи Гопкинса и Прагера [1].

Литература

1. Гопкинс Г., Прагер В., Динамика круглой пластической пластинки. Механика, Период. сб. перев. ин. статей, 1955, № 3, 112—122.
2. Лепик Ю. Р., К предельному равновесию пластин, материал которых имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластинок, 1969, Москва, 1970, 360—364.
3. Haddow J. B., Yield-point loading curves for circular plates. Intern. J. Mech. Sci., 1969, 11, № 5, 455—459.
4. Hu L. W., Modified Tresca's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and applications. J. Franklin Inst., 1958, 265, № 3, 187—204.

Поступило
16 VII 1971

**ÜMMARGUSTE PLAATIDE DÜNAAMILINE KOORMAMINE MATERJALI
KORRAL, MILLEL ON ERINEVAD VOOLAVUSPIIRID
TÖMBEL JA SURVEL**

J. Lellep

Resümee

Käesolevas töös vaadeldakse servalt vabalt toetatud ümmargust plaati, millele mõjub ühtlaselt jaotatud ristkoormus (selle intensiivsusel on konstantne väärtus kuni koormuse mahavõtmiseni) ja servale rakendatud tõmme, mis jääb muutumatuks kogu deformatsiooni vältel. Eeldatakse, et plaat on valmistatud jääk-plastsest materjalist, millel on erinevad voolavuspiirid tõmbel ja survel. Kasutades Hu voolavustingimust ning assotsieeritud voolavusseadust, on leitud (tehtud eelduste piires) probleemile täpne lahend.

**IMPULSIVE LOADING OF CIRCULAR PLATES IN CASE OF
MATERIAL WHICH HAS DIFFERENT YIELD STRESSES IN TENSION
AND COMPRESSION**

J. Lellep

Summary

This paper is concerned with the dynamic behaviour of simply supported circular plates, which are subjected to the transverse impulsive pressure loading and constant tensile end-load. The plates under observation have been made from material which has different yield stresses in tension and compression. Using Hu's yield condition and associated flow rule an exact (within the limits of the concept of a rigid-plastic body) solution is found.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

Л. Роотс, Э. Сакков, К. Соонетс. К пятидесятилетию проф. Ю. Лепика	3
Е. Габович. Упорядоченные группоиды и их выпуклые подсистемы	7
J. Gabovits. Järjestatud grupoidid ning nende kumerad alamsüsteemid. <i>Resümee</i>	26
J. Gabovich. Ordered groupoids and their convex subsystems. <i>Summary</i>	26
О. Иванова. Две теоремы об упорядочиваемых универсальных алгебрах	27
O. Ivanova. Kaks teoreemi järjestatavatest universaalsetest algebratest. <i>Resümee</i>	33
O. Ivanova. Two theorems about orderable universal algebras. <i>Summary</i>	33
Г. Рубанович. Упорядоченные унарные алгебры	34
G. Rubanovits. Järjestatud unarsed algebrad. <i>Resümee</i>	48
G. Rubanovitch. Ordered unary algebras. <i>Summary</i>	48
У. Кальюлайд. Об отсутствии делителей нуля в некоторых полугрупповых кольцах	49
U. Kaljulaid. Nullitegurite puudumisest mõningais poolrühmaringides. <i>Resümee</i>	57
U. Kaljulaid. On the absence of zero divisors in some semigroup rings. <i>Summary</i>	57
У. Кальюлайд. О фундаментальном идеале целочисленного группового кольца конечной группы	58
U. Kaljulaid. Fundamentaalsest ideaalist lõpliku rühma täisarvuliste koefitsientidega rühmaringis. <i>Resümee</i>	62
U. Kaljulaid. On the augmentation ideal of the integral grouping for finite groups. <i>Summary</i>	62
Х. Кильп. Квазилинейные системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при m неизвестных функциях двух независимых переменных и с несовпадающими характеристиками (геометрическая теория)	63
H. Kilp. Kahe sõltumatu muutuja, m otsitava funktsiooni ja erinevate karakteristikutega I järku kvaasilineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemid (geomeetriline teooria). <i>Resümee</i>	85
H. Kilp. The systems of the first order Quasi-Linear partial differential equations with two independent variables m unknown functions and with different characteristics (geometric theory). <i>Summary</i>	85
Л. Лооне. Об ограниченных по ядру элементах в локально выпуклом пространстве	86
L. Loone. Tõkestatud tuumadest lokaalselt kumeras ruumis. <i>Resümee</i>	90
L. Loone. Barrelled cores in the locally convex vector space. <i>Summary</i>	90
М. Абель. Об обратимости последовательностей и бесконечных матриц	91
M. Abel. Jadade ja lõpmatute maatriksite pööratavus. <i>Resümee</i>	101
M. Abel. The reversibility of sequences and infinite matrices. <i>Summary</i>	102
Т. Сырмус. Теоремы тауберова типа для различных видов суммируемости	103

T. Sõrmus. Tauberi tüüpi teoreemid mitmesuguste summeerimisviiside jaoks. <i>Resümee</i>	116
T. Sõrmus. Taubersche Sätze bezüglich verschiedener Summierbarkeiten. <i>Zusammenfassung</i>	117
Н. Веске. Суммируемость методом Чезаро формального произведения рядов	118
N. Veske. Ridade formaalse korrutise summeeruvus Cesàro menetlusega. <i>Resümee</i>	128
N. Veske. Summierbarkeit des formalen Produkts der Reihen nach Cesàro-Verfahren. <i>Zusammenfassung</i>	128
Э. Реймерс. Представление функций числовыми последовательностями	129
E. Reimers. Funktsioonide esitamise arvujadade abil. <i>Resümee</i>	139
E. Reimers. The representation of functions by the sequences of numbers. <i>Summary</i>	139
Х. Тюрнпу. О сходимости функциональных рядов почти всюду	140
H. Türrpu. Funktsionaalridade koonduvus peaaegu kõikjal. <i>Resümee</i>	151
H. Türrpu. The almost everywhere convergence of functional series. <i>Summary</i>	151
В. Степин. Об одном методе суммирования ортогональных рядов	152
V. Stöpin. Ortogonaalridade ühest summeerimisenenetlusest. <i>Resümee</i>	156
W. Stöpin. Über ein Summierungsverfahren der Orthogonalreihen. <i>Zusammenfassung</i>	156
С. Барон. О локальном свойстве абсолютной суммируемости продифференцированных рядов Фурье	157
S. Baron. Diferentseeritud Fourier' ridade absoluutse summeeruvuse lokaalsuse omadusest. <i>Resümee</i>	177
S. Baron. Local property of absolute summability of the derived Fourier series. <i>Summary</i>	177
Д. Перадзе. О распределении элемента окончательной погрешности при решении методом итераций линейных уравнений в гильбертовом пространстве	178
D. Peradze. Vea jaotusest lineaarse võrrandite lahendamisel iteratsioonimeetodiga Hilberti ruumis. <i>Resümee</i>	185
J. Peradze. On distribution of the element of error in Hilbert space for solution of linear equations by the method of iteration. <i>Summary</i>	185
Г. Вайникко и М. Шлапикiene. К одной теореме С. Г. Крейна о возмущении операторов, порождающих аналитические подгруппы	186
G. Vainikko ja M. Šlapikiene. Ühest S. G. Kreini teoreemist analüütilisi poolrühmi genereerivate operaatorite häirituste kohta. <i>Resümee</i>	189
G. Vainikko and M. Šlapikiene. On a theorem of S. G. Krein about perturbations of operators which generate analytical semi-groups. <i>Summary</i>	189
Г. Вайникко. К вопросу об устойчивости метода коллокации	190
G. Vainikko. Kollokatsioonimeetodi stabiilsusest. <i>Resümee</i>	196
G. Vainikko. About stability of collocation method. <i>Summary</i>	196
Т. Валлиер и Э. Тамме. О решении краевой задачи дифференциального уравнения шестого порядка методом конечных разностей	197
T. Vallner ja E. Tamme. Kuendat järku diferentsiaalvõrrandi rajaülesande lahendamisel võrgumeetodiga. <i>Resümee</i>	200
T. Vallner und E. Tamme. Über die Lösung der Randwertaufgabe der Differentialgleichung sechster Ordnung mittels Differenzverfahrens. <i>Zusammenfassung</i>	200

Г. Вайникко и А. Педас. О решении интегральных уравнений с логарифмической особенностью методом механических квадратур	201
G. Vainikko ja A. Pedas. Logaritmilise iseärasusega tuumaga integraalvõrrandite lahendamiseks kvadratuurvalemite meetodil. <i>Resüme</i>	210
G. Vainikko und A. Pedas. Über die Lösung der Integralgleichungen mit dem logarithmisch singulären Kern mit Hilfe der Methode der Quadraturformeln. <i>Zusammenfassung</i>	210
Л. Кивистик и Т. Шаганова. Модификации метода Гомори для частично целочисленных задач	211
L. Kivistik ja T. Šaganova. Gomory meetodi modifikatsioonid osaliselt täisarvuliste ülesannete lahendamiseks. <i>Resüme</i>	222
L. Kivistik and T. Šaganova. Modifications of Gomory algorithm for mixed integer programming. <i>Summary</i>	222
Я. Габович. О высших производных функции, логарифмическая производная которой задана	223
J. Gabovič. Antud logaritmilise tuletisega funktsiooni kõrgemat järku tuletiste arvutamiseks. <i>Resüme</i>	232
J. Gabowitsch. Über die Berechnung der Differentialquotienten höherer Ordnung einer Funktion, deren logarithmische Ableitung gegeben ist. <i>Zusammenfassung</i>	232
Э. Вирма. Конечно-разностная формулировка для изучения предельной нагрузки свободно опертой квадратной пластины	233
E. Virma. Lõplike vahede meetod vabalt toetatud ruudukujulise plaadi piirkoormuse uurimiseks. <i>Resüme</i>	239
E. Virma. A finite difference method for the plastic collapse load of a simply supported square plate. <i>Summary</i>	240
Э. Сааресте и К. Соонетс. Большие прогибы квадратной пластины при упруго-пластических деформациях	241
E. Saareste ja K. Soonets. Nõtke ruudukujulise plaadi elastilisplastsest paindest. <i>Resüme</i>	254
E. Saareste und K. Soonets. Über das Gleichgewicht der elastisch-plastischen biegsamen Platte im Falle grosser Durchbiegungen. <i>Zusammenfassung</i>	255
Л. Роотс и Э. Сакс. Об устойчивости трапециевидных пластинок	256
L. Roots ja E. Saks. Trapetsikujuliste plaatide stabiilsusest. <i>Resüme</i>	260
L. Roots and E. Saks. On the buckling of trapezoidal plates. <i>Summary</i>	260
Я. Леллеп. Импульсивное нагружение круглых пластин, материал которых имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии	261
J. Lellep. Ummarguste plaatide dünaamiline koormamine materjali korral, millel on erinevad voolavuspiirid tõmbel ja survel. <i>Resüme</i>	269
J. Lellep. Impulsive loading of circular plates in case of material which has different yield stresses in tension and compression. <i>Summary</i>	269

Цена 1 руб. 92 коп.

TU RAAMATUKOGU



1 0300 00289172 1