

Mat 129

GERHARD RÄGO

Matemaatika tööraamat

keskkoolidele

Algebra

3. klassi kursus



14587

TARTU ÜLIKOOL
DIDAKTILINE SEMINAAR
MATEMAATIKA JAOSKOND

K. O.-Ü. «Loodus», Tartus

1929

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
56155

Keeleline korrektor: Tartu Ülikooli eesti keele lektor J. V. Veski
Tehniline korrektor: H. Pürkop

A-6287ii

Sisukord.

Peatükk I: Kuup-olenevus.

Harjutis I: Kuup-olenevus $y = x^3$	1
Harjutis II: Kuup-olenevus: järg	5
Harjutis III: Kuup-olenevuse $y = x^3$ pööre $x = \sqrt[3]{y}$	8

Peatükk II: Polünoomid: 2. tsükkel.

Harjutis IV: Olenevus $y = x^n$	13
Harjutis V: Astme mõiste loendamise-, arvu- ja mõõdu- süsteemides	18
Harjutis VI: Ülesandeid polünoomides	24
Harjutis VII: Astmeid ja polünoome. Ülesandeid täielise induktsiooni tõestusviisi käsitlemiseks	28

Peatükk III: Ligikaudne arvutamine.

Harjutis VIII: Ligikaudse arvutamise abimõisted	33
Harjutis IX: Arvutussaaduse kõikumisvahemiku ja vea hindamise ülesandeid	40
Harjutis X: Lühendatud arvutamise ülesandeid	45
Harjutis XI: Lühendatud arvutamise ülesandeid: järg	52
Harjutis XII: Ligikaudse arvutamise abivalemid	54

Peatükk IV: Juuravaldised.

Harjutis XIII: Juurte arvutamise ülesandeid	59
Harjutis XIV: Juuravaldiste teisendamise ülesandeid	65

Peatükk V: Eksponent-olenevus ja logaritm.

Harjutis XV: Eksponent-olenevus ja geomeetiline rida	71
Harjutis XVI: Astme mõiste üldistamine: negatiivne astmenäitaja	75

IV

Harjutis XVII: Astme mõiste üldistamine: murruline astmenäitaja	82
Harjutis XVIII: Arvu logaritmi mõiste. Logaritmi põhi- omadused	89
Harjutis XIX: Ülesandeid tutvumiseks logaritmide tabelitega	94
Harjutis XX: Ülesandeid arvutamiseks logaritmide tabelite abil	98
Harjutis XXI: Täiendavaid ülesandeid logaritmide alalt . .	107
Harjutis XXII: Ülesandeid tutvumiseks logaritmilise arvu- tuslükatiga	113
Harjutis XXIII: Geomeetrilise rea summa	118
Harjutis XXIV: Eksponent-olenevus ja geomeetriline rida rahandusküsimustes	121
—	
Algarvude tabel	126

Peatükk I.

Kuup-olenevus.

Harjutis I:

Kuup-olenevus $y = x^3$.

1. Kuubi serv on s cm pikk. Kui suur on kuubi ruumala v kuupsentimeetrites?

Tee vabalt käelt joonis kuubi täite seletamiseks kuupühikutega.

Anna kuubi ruumala väärtuste tabel servadele vastavalt $s = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$.

Kujuta kuubi ruumala v kõik kuubi serva s muutudes vahemikus 1 kuni 10.

2. Kuubi serv on täisarv t cm pikk. Tema tahud on kaetud ruutsentimeetrilise võrguga. Iga kahe vastastahu võrgu sõlmed on ühendatud tahkudel risti seisvate niitidega. Mitu sõlmpunkti p on tekkinud ruumilises võres?

3. Kujuta funktsioonide

$$y_1 = x \quad y_2 = x^2 \quad y_3 = x^3$$

käik vahemikus $x = -3$ kuni $x = +3$, võttes x -i väärtused iga 0,2 tagant.

Seleta joonisele tuginedes, milles erinevad kolme funktsiooni käigud. Võrdle eriti nende funktsioonide väärtusi x -i eriväärtustel $-1, 0$ ja $+1$; võrdle neid edasi vahemikkudes

-3 kuni -1 , -1 kuni 0 , 0 kuni $+1$, $+1$ kuni $+3$.

4. Kahe arvu x ja y olenevust saab esitada graafiliselt kaastmikuna. Selleks kujutame sirgel, lähtudes kindlast täpist, y väärtused lõikudena kohaselt valitud mõõtkavas, märgime nende lõikude lõpupunktid kriipsudega ja kirjutame viimaste juurde väikeste numbritega vastavad x -väärtused.

Kujuta 110 cm pikale, 5 cm laiale mm-paberiribale, kõrvuti üksteisega, kolme funktsiooni astmikud:

$$y_1 = x \quad y_2 = x^2 \quad y_3 = x^3.$$

Muutuja x väärtustena võta täisarvud vahemikus $0 \leq x \leq 10$. Pikkuseühikuks võta 1 mm.

Kirjelda kolme astmikku.

5. Kuubikujulise keedusoola-kristalli serv kasvab pikkusest 0 cm pikkuseni 1,4 cm. Teades, et keedusoola erikaal on 2,17, kujuta kristalli kaalu käik kristalli kasvades.

6. Seebimulli läbimõõt kasvab 0-ist 8 cm-ni. Kujuta mulli ruumala kasvamine samas vahemikus, võttes andmed 0,5 tagant.

Leia joonisest seebimulli ruumala raadiustel

$$2,7 \quad 3,9 \quad 4,8 \quad 5,3 \quad 6,6.$$

Kontrolli saadusi arvutamise teel.

7. Kerakujuline rahetera kasvab langedes auru vettumisel ja jäätumisel läbimõõdult 0-ist 20 mm-ni. Teades, et jää erikaal on 0,92, kujuta rahetera kaalu kasvamise käik.

8. Rubiini väärtust võib lugeda ligikaudu võrdeliseks tema kaalu kuubiga. Teades, et poolekaraadiline rubiin maksab 75 krooni, anna side rubiini hinna h ja tema kaalu k vahel.

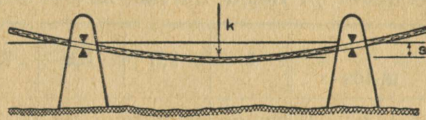
„Karaat“ on kalliskivide kaaluühik. Ta on võrdne 0,206 g-ga.

9. Katsed on näidanud, et laeva vedamiseks tarvis olevate hobusejõudude arv h kasvab võrdeliselt kiiruse v kuubiga. Antud aurulaeva vedamiseks kiirusega

20 kilomeetrit tunnis kulus 50 hobusejõudu. Avalda antud laeva jaoks side arvude h ja v vahel.

Kui masin suudab tõsta 1 kilogrammi 75 meetri kõrgusele 1 sekundi vältel, siis öeldakse, et tal on 1 „hobusejõud“.

10. Katsed näitavad, et pika, keskkohas koormatud laua paindumine on võrdeline koorma kuubiga. Laua paindumist mõõdetakse tema looga sügavusega (joonis 1). Avalda side laua looga sügavuse s ja laual lasuva koorma k vahel, teades, et antud laua puhul annab koorem 80 kg paindumise 15 cm.



Joonis 1.

11. Elektri juhtmed ripuvad harilikult oma kahe kinnituspunkti vahel loogas (joonis 2).

Looga sügavuse s mõõtmine olenevuses juhtme pikusest kahe kinnitustäpi vahel l andis järgmise tabeli kokkukuuluvaid väärtuspaare:

l m-tes	2	3	5	7	10	15	20
s cm-tes	0,2	0,5	2,6	6,9	20,0	67,3	160

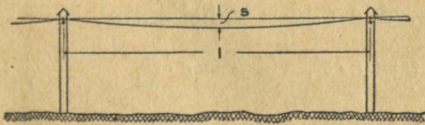
Katsu graafiliselt, kas saab kujutada l - s -olenevust kujul,

$$s = c \cdot l,$$

või kui see kuju ei kõlba, kujul

$$s = c \cdot l^2,$$

või viimaks

$$s = c \cdot l^3.$$


Joonis 2.

Näpunäide. Kujuta ükskord l - s -väärtuspaarid mm-paberile, siis l^2 - s - ja viimaks l^3 - s -väärtuspaarid. Joonis näitab,

kas üks mainitud olenevuskujudest tuleb arvesse. Jaataval korral määrata kordaja c väärtus ja anna l -s-side valemina.

12. Kahele toele toetuv raudlatt paindub keskkohas lasuva koorma mõjul s võrra. Viimane suurus on lati pikkusest p , nagu näitab katseandmete tabel:

p m-tes	1	2,5	6,3	7,9	8,5	9,4	10,0
s cm-tes	väga väike	0,5	7,6	14,8	18,3	24,9	30,1

Katsu graafiliselt leida side p ja s vahel kas kujul

$$s = c \cdot p, \text{ või } s = c \cdot p^2, \text{ või } s = c \cdot p^3.$$

Kui tarvis, tasanda vaatlusandmed.

13. 1°. Järgmine tabel kujutab katsest leitud andmeid suuruste r ja w vastastikuse olenevuse kohta:

r	3,7	4,1	4,9	5,3	5,8	6,1	6,9
w	6,3	8,6	14,7	18,6	24,4	28,4	42,0

Leia, kui võimalik, r ja w vaheline side kujul

$$w = c \cdot r, \text{ või } w = c \cdot r^2, \text{ või } w = c \cdot r^3.$$

Määrata leitud sideme põhjal katsevigade suurused ja nende % mõõdetava suuruse väärtusest.

2°. Järgmine tabel kujutab suuruste u ja t sidet:

t	12	15	16	19	21	25	30
u	8,6	16,9	20,5	34,3	46,3	78,1	134,8

Määrata, kui võimalik, side t ja u vahel kujul

$$u = c \cdot t, \text{ või } u = c \cdot t^2, \text{ või } u = c \cdot t^3,$$

tarbe korral vaatlusi tasandades.

Leia katsevead ja nende suuruse %.

Harjutis II:

Kuupolenevus: järg.

1. Anna valem, mille järgi saab ümber arvutada:

1^o. ruumala S kuupsüldades ruumalaks A kuuparssinates;

2^o. ruumala S kuupsüldades ruumalaks J kuupjalgades;

3^o. ruumala J kuupjalgades ruumalaks T kuuptollides;

4^o. ruumala T kuuptollides ruumalaks C kuupsentimeetrites;

5^o. ruumala S kuupsüldades ruumalaks M kuupmeetrites.

2. 1^o. Olgu mingi risttahuka mõõted detsimeetrites a , b ja c . Millena avaldub tema ruumala V_0 kuupdetsimeetrites? Millena avaldub tema ruumala V , kui kõik mõõted kasvavad n -kordseks? Avalda suurus V suuruse V_0 kaudu.

2^o. Olgu mingi kujundi ruumala V_0 . Kuidas avaldub tema ruumala V , kui endise mõõtühiku asemel võetakse kuup, mille serv on $\frac{1}{n}$ endise ühiku servast?

3. Kuubi serv kasvab 2-, 3-, 4-, ... n -kordseks. Kuidas muutub sel puhul kuubi servade kogupikkus? — kuubi kogupind? — kuubi ruumala?

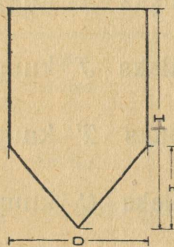
4. Kera läbimõõt kasvab 2-, 3-, 4-, ... n -kordseks. Kuidas muutub sel puhul kera ümbermõõt? — kera pind? — kera ruumala?

5. Silindri läbimõõt ja kõrgus kasvavad 2-, 3-, 4-... n -kordseks. Kuidas muutub sel puhul silindri ümbermõõt? — silindri külgpind? — silindri täispind? — silindri ruumala?

Sama ülesanne koonuse kohta.

6. Kõõgis tarvitataval veetrumlil on tõmpkoonuse kuju. Kui tähistada tema sügavust h ja põhja ja kaane läbimõõde vastavalt R ja r , siis võib tema ruumala määrata valemi järgi

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + Rr + r^2) h .$$



Joonis 3.

Näita, et trumli mõõdete kasvamisel k -kordseks kasvab trumli ruumala k^3 -kordseks.

7. Kõrvalseisev joonis 3. näitab viinavabriku kartulikatla läbilõiget. Anna katla ruumala arvutamise valem. Anna sellele kuju

$$V = \frac{\pi}{12} D^2 [3H - 2h] .$$

Näita, et katla mõõdete kasvamisel k -kordseks kasvab tema ruumala k^3 -kordseks.

8. Ülesandeis 3., 4., 5., 6. ja 7. käsitletud näiteist järelda üldine seadus, mille järgi kasvab geomeetrilise kujundi ruumala, kui tema lineaarmõõded kasvavad k -kordseks. Anna uusi näiteid järeldatud tõsiasja selgituseks.

9. Lahtisel tulel seisab kaks poolkera-taolist pesukatelt, läbimõõdudega d ja D cm-it. Kuidas suhtuvad nende küttepinnad? Kuidas suhtuvad nendes olevad veehulgad, kui mõlemad on ääreni täis? Kuidas suhtuvad ajad, mis tarvilikud, et vesi neis keema läheks?

10. Koduküpsetatud pidukook on Viljandimaal läbimõõdult l korda ja paksuselt p korda suurem vastavast Tartumaa koogist. Mitu korda on Viljandimaa kook suurem Tartumaa omast?

Näide. $l = 1,4$; $p = 1,6$.

11. Kahel silindrikujulisel keedisepurgil on läbimõõdud d ja D cm-it ja sügavused vastavalt h ja H cm-it. Kuidas suhtuvad nende purkide ruumalad?

Vasta küsimusele ilma ruumalasad arutamata.

12. Lual seisab kaks teineteise sarnast heinakuhja. Nende ümbermõõdud on laiemal kohal vastavalt C ja c dm-it. Äravedamisel selgus, et esimeses kuhjas on s sentnerit heinu. Hinda teise kuhja heinte hulk.

13. Kaks ruumi on asetatud täiesti ühte viisi ilma-kaarte suhtes ja on ehitatud täpsalt ühe ja sama plaani järgi, kuid teises mõõtkavas: ühe mõõted on teise omast k korda suuremad. Kuidas suhtuvad keskmised „valguse tihedused“ neis ruumes?

Millega on seletatav suurtes ruumides (näiteks kirikutes) püsivalt valitsev hämarus?

14. Elusolevuste lineaarmõõtude k -kordsel kasvamisel suureneb nende ruumala ja ühes sellega ka nende kaal k^3 korda. Samal ajal suurenevad aga nende lihaste ristilõigete pinnad ja ühes sellega lihaste jõuavaldised k^2 korda. Mis järgneb siit looma hüppe suuruse kohta (kirp, konn, peni, elevant või näiteks tint, ahven ja vaalaskala kuival)?

15. Katsed näitavad, et kehad, langedes liikumist tasandavas olluses (õli, vesi, õhk jne.), liiguvad juba mõni sekund peale langemise algust ühtlaselt. Newton'i I liikumisseaduse järgi peavad sel puhul mõjuvad jõud olema tasakaalus. Ülevalt alla mõjuvat jõudu, keha kaalu, saab avaldada ruumala V ja erikaalu e kaudu. Alt üles mõjuv olluse takistus liikumisele on, nagu katsed näitavad, võrdeline kehaesise pinnaga S ja liikumise kiiruse v ruuduga. Tähistäht võrdetegur mingi tähega, näit. c , ja avalda jõudude tasakaalu tingimus. Määra viimasest langemise kiirus v .

Näide 1. Vee erikaal $e = 1$. Kuidas oleneb vihma-tilga langemise kiirus tilga raadiusest? Kuidas muutub tilga langemise kiirus, kui tema raadius väheneb suuruselt 1 suurusele 0,01 0,0001 0,000001 jne.?

Millega on seletatav udu hõljumine õhus?

Vigam ülesand

Näide 2. Kulla erikaal on ≈ 19 , liiva erikaal $\approx 1,9$. Kuidas suhtuvad kulla- ja liivaterakeste langemiskiirused vees terakeste ühesuguse kuju ja suuruse puhul?

Põhjenda kulda kandva liiva „pesemise“ võtte.

16. Kuubikujuline karp, mille serva seesmine mõõt on 10 cm, on täidetud kuulidega, mille läbimõõt 2 cm, igas kihis sama palju kuule.

Mitu kuuli mahub karki?

Missuguse ruumala võtavad kuulid oma alla?

Kui suur on kuulidest vaba olev karbi ruumosa?

Mitu % ta moodustab kogu karbi ruumist?

Kuidas muutuks see % kuulide läbimõõdu 2-, 3-, 4-, ... n -kordsel vähenemisel?

Harjutis III:

Kuup-olenevuse $y = x^3$ pööre $x = \sqrt[3]{y}$.

1. Eratosthenes (umbes 276.—194. a. e. Kr.) kirjutab:

«Rahva jutu järgi kujutas üks vanadest traagikutest kuningas Minos't ta poja Glaukos'e haua valmistamist jälgimas. Nähes, et haua külge kõigest 100 jalga, lausus ta: „Sa oled kuningale liiga väikese haua välja mõõtnud. Ta saagu kaks korda suurem. Jäta alles tema kuubiline kuju, kuid tema küljed võta kahekordsetena.“»

Kas kuningas Minos'e tahe oli kooskõlas antud käsuga?

2. Theon (365. a. ümber p. Kr.) jutustab:

«Kui katkust meeletele viidud Delhi elanikud oma oraaklilt nõu pärisid, mis teha taudist jagu saamiseks, siis anti neile jumalate vastus, et tuleb templi kuubitaoline altar kahekordseks suurendada.»

Mitu korda suuremana pidi võetama uue altari servelmise altari servaga võrreldes?

Näpunäide. Anna võrrand otsitava määramiseks. Katsu seda võrrandit rahuldada täisarvuga proovimise teel.

Kui nõutav arv ei leidu täpsalt, siis anna 2 teineteisele järgnevat täisarvu, mis rahuldavad nõude ligikaudu. Poolita arvude vahemik ja katsu, kuidas rahuldab nõude arvude aritmeetiline keskmine. Rakenda võtet korduvalt, vähemalt 4 korda, hinnates iga sammu järel saaduse vea ülemmäär.

3. Hippokrates (440. a. ümber e. Kr.) väitis, et eelmises ülesandes nõutud altari servaks peab olema lõik, mis on keskmine võrdeline antud altari serva ja selle kahekordse vahel.

Kas Hippokrates'e väide on õige?

4. Kui pikk on 5-liitrilise kuubilise nõu serv?

Sama ülesanne 10-liitrilise nõu kohta.

5. Risttahuka mõõted on 8, 15 ja 22 cm. Kui suur on selle risttahukaga ruumvõrdse kuubi serv?

Valmista mõlema keha mudelid.

6. Kera raadius on 20 cm pikk. Kui suur on selle keraga ruumvõrdse kuubi serv?

7. Kunstjää-vabrik saadab limonaaditehasele 100 kuubikujulist jäätükki, servaga 20 cm. Kui suure jääkuubi võiks valada neid tükke kokku sulatades?

8. Kaks metallkera raadiustega 3,4 ja 5,6 cm on kokku sulatatud üheks keraks. Mis raadius on viimasel?

9. Valmista endale arvude 1, 2, 3, . . . 10 kuupide tabel.

10. Määra täisarvud, mis rahuldavad allpool-antud nõudeid, kui võimalik — täpsalt, kui mitte — siis ligikaudu, veaga, mis väiksem kui 1:

$$\begin{array}{lll} x^3 = 37 & y^3 = 64 & z^3 = 93 \\ u^3 = 216 & v^3 = 485 & w^3 = 520. \end{array}$$

2^o. Leia arvud, mis rahuldavad nõudeid

$$a^3 = 10 \quad b^3 = 25 \quad c^3 = 57$$

esiteks veega alla ühte, siis, tarvitades lähisväärtuste vahemiku poolitamise võtet — veega alla 0,5.

3^o. Sama teed kaks korda käies rahulda nõuded

$$c^3 = 15 \quad d^3 = 21 \quad e^3 = 73$$

veega alla 0,25.

4^o. Sama teed kolm korda käies rahulda nõuded

$$f^3 = 3 \quad g^3 = 19 \quad h^3 = 35$$

veega alla 0,125.

10. Tarvitades enamalt koostatud kuupide tabelit ja rakendades korduvalt interpolaatsioonivõtet

1^o. rahulda nõuded

$$x^3 = 14 \quad y^3 = 47 \quad z^3 = 75$$

veega mitte üle 0,1;

2^o. rahulda nõuded

$$u^3 = 4 \quad v^3 = 5 \quad w^3 = 6$$

veega mitte üle 0,01.

11. Kujuta olenevuse

$$y = x^3$$

graafiku järgi olenevuse graafik

$$x = \sqrt[3]{y}.$$

Seleta saadud joonisele tuginedes funktsiooni $x = \sqrt[3]{y}$ käik.

12. Kujuta mm-paberiribale kõrvuti üksteisega kolme funktsiooni astmikud

$$z_1 = x \quad z_2 = \sqrt{x} \quad z_3 = \sqrt[3]{x}$$

vahemikus $0 \leq x \leq 10$, võttes pikkuse ühikuks 10 cm.

Kirjelda võimalikult üksikasjaliselt, milles erinevad astmikud üksteisest.

13. Eestis puhastati

aastail	1922	1923	1924	1925
linu tonnides	262	447	642	225

Kujuta puhastatud linade toodangud:

- 1^o. lõik-kujutusviisil lõikudena;
- 2^o. pind-kujutusviisil ruutudena;
- 3^o. ruum-kujutusviisil kuupidena.

Missugune kolmest saadud pildist on kõige kergemini „loetav“?

14. Järgmine tabel kujutab meie meetoodangu käiku a. 1922—1926:

aastail	1922	1923	1924	1925	1926
mett tonnides	107,5	49,4	139,1	89,2	362,4

Kujuta need toodangud:

- 1^o. lõikudena;
- 2^o. ruutudena;
- 3^o. kuupidena.

15. Alljärgnev tabel näitab meie metsatööstuse toodangu kasvamist a. 1922—1926:

aastail	1922	1923	1924	1925	1926
puud standartites	33941	58285	62776	65450	75000

Kujuta puumaterjali hulgad:

- 1^o. lõikudena;
- 2^o. ruutudena;
- 3^o. kuupidena.

Võrdle saadud jooniseid nende „loetavuse“ suhtes.

„Standard“ on saetud metsamaterjali mõõduühik. Ta on võrdne 165 kuupjalaga.

16. Alljärgnev tabel näitab mõnede riikide kauba-laevastiku suurust 1925. a. tuhandeis tonnides:

Briti	P. Ameerika Ühendriigid	Saksa
21546	14771	2872
<hr/>		
Taani	Vene	Soome
990	331	123

Kujuta antud arvud:

- 1^o. lõikudena;
- 2^o. ruutudena;
- 3^o. kuupidena.

17. Valem

$$d = \sqrt[3]{\frac{65 H}{N}}$$

annab võlli jämeduse tollides, mis vajalik, et murdumist kartmata üle anda H „hobusejõudu“ N tiiru puhul minutis.

Arvuta võlli jämedus, veaga alla 0,001 tolli, andmeil $N = 120$, $H = 45$.

18. Mul on rida väga väikesi teraskuule, mille läbimõõdu otseseks määramiseks on käepärast olevad abinõud liiga jämedad. Tarviliku läbimõõdu määrان kaudselt: loen endale 100 kuuli ära ja paigutan nad mõõtklaasi vee sisse. Veepinna tõus vastab mahule $2,9 \text{ cm}^3$. Kui suur on keskmiselt kuuli läbimõõt?

Peatükk II.

Polünoomid: 2. tsükkel.

Harjutis IV:

Olenevus $y = x^n$.

1. 7 isikul on igaühel 7 kassi, iga kass sööb 7 hiirt, iga hiir sööb 7 odrapead, iga odrapea annaks 7 mõõtu vilja. Mitu mõõtu vilja jääb hävitamata tänu kassidele?

(Ahmes, umbes 1700 a. e. Kr.).

2. Minul on 2 vanemat; igal vanemal jälle 2 vane-
mat; igal viimaseist omakord 2 vanemat jne. Mitu esi-
vanemat on mul 10-das põlves, põlvi tagasi arvates?

3. Sümbolid a^2 ja a^3 tähendavad korrutiste $a \cdot a$ ja $a \cdot a \cdot a$ lühendatud kirjutisi. On loomulik laiendada seda kirjutusviisi ja mõista sümboleid a^4, a^5, \dots, a^n vastavalt korrutistena $a \cdot a \cdot a \cdot a, a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a, \dots, \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ tegurit}}$.

Näita, et selle kirjutusviisi puhul ikka on:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

kui $m > n$: $a^m : a^n = a^{m-n}$

kui $m < n$: $a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$

4. Koosta endale järgmine astmete tabel, toimetades kõik tarvilikud arvutamised peast:

aste \ alus	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	3	9	27	81						
⋮										
10	10	100	1000	10000						

Kuidas on kergem koostada tabelit, kas ridade või veergude kaupa?

5. On tõsi, et

$$a + b = b + a,$$

samuti, et

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Kas on üldiselt maksev ka võrdus

$$a^b = b^a?$$

Kas on a ja b täisarvulisi eriväärtusi, mille puhul viimane võrdus on maksev?

Näpunäide. Kasuta eelmises ülesandes koostatud tabelit.

6. Põrand, mille pikkus ja laius on s dm, on kaetud malelaua-sarnaselt ruudukujuliste parkettkividega, mille mõlemad mõõted on 1 dm. Kuidas muutuks katekivide hulk, kui nende mõõteid vähendada k -kordselt? — kui nende mõõteid vähendada k -kordselt ja põranda mõõteid suurendada k -kordselt?

Näide. $k = 2$.

7. Mitu laagrikuuli läbimõõduga 1 mm mahub kuu-
bikujulisse karpi, mille serva (seesmine) mõõt on s mm?
Kuidas muutub see kuulide arv karbi serva kasvamisel

k -kordseks? — karbi serva k -kordsel kasvamisel ja kuuli läbimõõdu k -kordsel vähenemisel?

Näide. $k = 5$.

8. Leia, kasutades 4. ülesandes koostatud astmete tabelit, järgmised summad:

$$1^0. 1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10$$

$$2^0. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 + 10^2$$

$$3^0. 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3 + 10^3$$

9. Näita, et summad

$$3^3 + 4^3 + 5^3 \text{ ja } 11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3$$

on ise kuuparvud.

10. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

	a	b	c	d
$1^0.$	$(+12)^4$	$(-9)^5$	$(-1)^{10}$	$(+10)^{15}$
$2^0.$	$2^3 \cdot 3^2$	$(-1)^5 \cdot 5^4$	$4^3 \cdot 10^5$	$2^{10} \cdot 10^2$
$3^0.$	$(1,5)^5$	$(0,7)^6$	$(1,01)^4$	$(-12,7)^3$
$4^0.$	$(\frac{2}{3})^4$	$(\frac{5}{8})^5$	$(1\frac{3}{4})^3$	$(5\frac{1}{2})^4$

11. Voolaku vedelik läbi peene toru, mille pikkus on l cm ja läbimõõt d cm, seistes rõhu all p grammi ruutsentimeetrile. Poiseuille'i seaduse järgi on siis 1 sekundi vältel torust läbi voolav vedeliku hulk kuupsentimeetrites

$$q = c \cdot \frac{p}{l} \cdot d^4,$$

kus c on vedelikule omane arvuline tegur. Näiteks on temperatuuril 20^0 vee puhul $c = 2,4 \cdot 10^8$, glütseriini puhul $c = 2,3$ ja vere puhul $c = 0,52 \cdot 10^8$.

Kuidas oleneb torust läbi voolava vedeliku hulk rõhust p ? — toru pikkusest l ? — toru läbimõõdust d ?

Näide 1. Tsement-veereservuaaris on 500 cm vee-pinna all 100 cm paksuses seinas auk tekkinud läbimõõduga 0,05 cm. Mitu liitrit vett läheb selle kaudu kaduma öö-päeva jooksul?

Näide 2. Kahe veresoone läbimõõdud on vastavalt 0,05 mm ja 0,1 mm. Kuidas suhtuvad sekundaarsed verekaod nende soonte läbilõikamisel?

12. 4. ülesande tabeli täienduseks koosta endale samasugune tabel aluste jaoks

$$0 \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad 1$$

ja astmenäitajatele 1, 2, 3, 4 ja 5.

Mis võib öelda iga murru üksteisele järgnevate astmete kohta?

13. Kujuta, kasutades eelmise tabeli andmeid, hästi suures mõõtkavas, näiteks 1 ühik 200 mm-is, funktsioonide

$$y_1 = x^1 \quad y_2 = x^2 \quad y_3 = x^3 \quad y_4 = x^4 \quad y_5 = x^5$$

käik vahemikus $0 \leq x \leq 1$.

Joonisele tuginedes kirjelda saadud kõverate käik võimalikult üksikasjaliselt.

Missugune tõsiasi tuleb esile saadud kõverate käigus nulli ümbruses?

14. Kujuta kohaselt valitud mõõtkavas hästi pikal ribal mm-paberit (näiteks 110 cm) funktsioonide

$$y_1 = x^1 \quad y_2 = x^2 \quad y_3 = x^3 \quad y_4 = x^4 \quad y_5 = x^5$$

käik vahemikus $1 \leq x \leq 10$, kõik ühes ja samas mõõtkavas.

Mitme ühiku võrra kasvab igaüks neist funktsioonidest vahemikus

$$1 \leq x \leq 2, \quad 2 \leq x \leq 3, \quad \dots \quad 9 \leq x \leq 10?$$

Mis võib öelda saadud kujuduonte järskuse kohta?

15. Kui on olemas olenevuse $y = x^n$ graafiline kujutis, kuidas saada olenevuste

$$y_1 = 2x^n \quad y_2 = \frac{3}{4}x^n \quad y_3 = 0,01x^n$$

graafilisi kujutisi samas mõõtkavas?

16. Missugusel tingimusel on parabool $y = x^n$ sümmeetriline y -telje suhtes?

Missugusel tingimusel on parabool $y = x^n$ sümmeetriline nullpunkti suhtes?

17. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt kujul:

	a	b	c
1 ^o .	$x^3 \cdot x^4$	$x \cdot x^7$	$x^{10} \cdot x^2$
2 ^o .	$y \cdot y^2 \cdot y^3$	$y^2 \cdot y^4 \cdot y^6$	$y \cdot y^{10} \cdot y^{20}$
3 ^o .	$2z^2 \cdot 3z^3$	$5z^2 \cdot 8z$	$1,5z^3 \cdot 0,3z^5$
4 ^o .	$a^2 u^3 \cdot a^3 u^2$	$12au^3 \cdot \frac{1}{4}a^4 u^2$	$1\frac{2}{3}a^4 u \cdot \frac{3}{5}au^6$
5 ^o .	$5(-c)^3 v^5 c^2$	$\frac{5}{6}c^3 \cdot (-v)^3 \cdot 18cv$	$(-2)^3 c^3 \cdot \frac{3}{8}c^2 v^5$

18. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt kujul:

	a	b	c
1 ^o .	$p^n \cdot p$	$p^n \cdot p^n$	$p^{n-1} \cdot p^{n+1}$
2 ^o .	$q^{m-n} \cdot q^n$	$q^{m-n} \cdot q^{2n}$	$q^{m-n} \cdot q^{m+n}$
3 ^o .	$(-r)^{2n-1} \cdot (-r)^{2n+1}$	$(-r)^{2n} \cdot r^n$	$(-r)^{n-2} \cdot (+r)^{3n-3}$

19. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt kujul:

	a	b	c
1 ^o .	$(x^2)^5$	$(x^3)^{n-3}$	$(x^{n+1})^2$
2 ^o .	$(-y^3)^{2n}$	$(-y^{2n})^3$	$(-y^{2n+1})^{2n-1}$
3 ^o .	$(u^2 v^3)^3$	$(+2\frac{u^2}{v^3})^4$	$(-\frac{3u^2}{5v^2})^3$
4 ^o .	$(-8)^3 w^2$	$(-3w^2)^4$	$(-\frac{2}{5}w^2)^3$
5 ^o .	$-(-11p^3)^2$	$+(-10q^2)^3$	$-(-13)^2(-r)^4$

20. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lühidalt kujul:

	a	b	c
1 ^o .	$\frac{x^5}{x^2}$	$\frac{x^8}{x^4}$	$\frac{x^{12}}{x^{10}}$
2 ^o .	$\frac{y^n}{y^{n-2}}$	$\frac{y^{2n-2}}{y^{n-3}}$	$\frac{y^{n+m}}{y^{n-m}}$
3 ^o .	$\frac{z^{r-1}}{z^{r+1}}$	$\frac{z^{r+3}}{z^{2r+3}}$	$\frac{z^{r-1}}{z^{2r+1}}$
4 ^o .	$\frac{a^nu}{a^{n-2}u^{2n-1}}$	$\frac{a^nu^m}{a^{n+m}u^{m-n}}$	$\frac{a^{2n+1}u^{m-3}}{a^{n-1}u^{2m-3}}$

Harjutis V:

Astme mõiste loendamise-, arvu- ja mõõdu-süsteemides.

Elmärkus. Järgnevais ülesandeis 1–7 tuleb tarvitada astmete lühemat kirjutusviisi, näiteks kirjutada 7.7.7 asemel mitte 343, vaid 7³, kirjutada 10.10.10.10.10 asemel mitte 100000, vaid 10⁵.

1. 1^o. Avalda mm-tes järgmised pikkused:

1 cm, 1 dm, 1 m, 1 km.

2^o. Avalda mm²-tes järgmised pindalad:

1 cm², 1 dm², 1 m², 1 km².

3^o. Avalda cm³-tes järgmised ruumalad:

1 dm³, 1 m³, 1 hl.

4^o. Avalda g-des järgmised kaalud:

1 kg, 1 t.

2. 1^o. Avalda mm-tes järgmised pikkused:

r cm s mm,

q dm r cm s mm,

p m r cm s mm.

2^o. Avalda mm^2 -tes järgmised pindalad:

$$R \text{ cm}^2 \quad S \text{ mm}^2,$$

$$Q \text{ dm}^2 \quad R \text{ cm}^2 \quad S \text{ mm}^2,$$

$$P \text{ m}^2 \quad R \text{ cm}^2 \quad S \text{ mm}^2.$$

3^o. Koosta analoogilisi ülesandeid ruumimõõtude ümberarvutamiseks.

4^o. Koosta analoogilisi ülesandeid kaalumõõtude ümberarvutamiseks.

3. Mitu rulli on pakis, milles on

g tosinat ja h üksikrulli,
 f grossi g tosinat ja
 h üksikrulli?

$$1 \text{ gross} = 12 \text{ tosinat.}$$

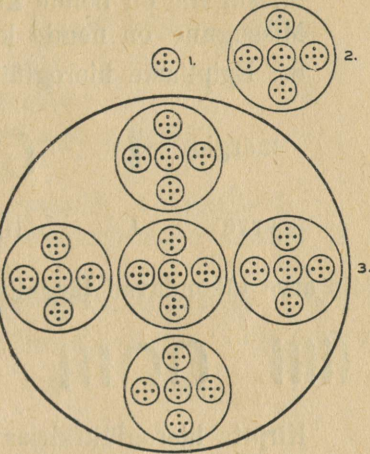
4. Mitu sekundit on

b minutis c sekundis,
 a tunnis b minutis c sekundis?

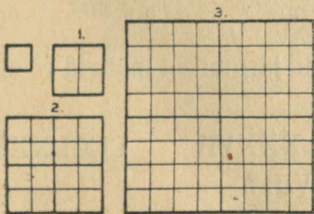
5. 1^o. Telefonikaabli kanalis on s üksikjuhet, r esimese järgu kaablit, q teise järgu ja p kolmanda järgu kaablit (joonis 4). Kui suur on üksikjuhtmete hulk kanalis?

2^o. Sama ülesanne juhuks, et juhtmed on kokku võetud uueks ühikuks 9 kaupa.

6. Parketipakkude tagavara koosneb k üksikpakust, j 1. järgu liitpakust, i 2. järgu ja h 3. järgu liitpakust (joonis 5). Kui suur on põranda pind, mida saab katta sellest tagavarast?



Joonis 4.



Joonis 5.

7. Kuubikeste mängukastis on

$$w \text{ kuupi servaga} \quad 1 \text{ cm}$$

$$v \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 3 \text{ cm}$$

$$u \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 3 \cdot 3 \text{ cm}$$

$$t \quad \text{''} \quad \text{''} \quad 3 \cdot 3 \cdot 3 \text{ cm.}$$

Missuguse ruumala võtavad need kuubid oma alla?
 Missugune on nende kuupide kogupind?
 Missugune on nende kuupide servade kogupikkus?
 8. Egiptlaste hieroglüüfikirjas tähendavad

märgid	I	∩	⊙	⊗
arve	1	10^1	10^2	10^3

Mis arve tähendavad järgmised 3 märki:

IIII ∩IIII ⊙⊙⊙∩IIII ?

Kirjuta hieroglüüfikirjas arvud

13 47 125 3468

Sõnasta printsiip, millele tugineb arvude kirjutamine hieroglüüfikirjas.

9. Roomlaste kirjutusviisis tähendavad

märgid	I	X	C	M
arve	1	10	10^2	10^3
ja märgid	V	L	D	
arve	5	$5 \cdot 10$	$5 \cdot 10^2$	

Peale selle mõistetakse

märke	IV	IX	XL	XC	CM
arvudena	4	9	40	90	900

Missuguseid arve tähendavad järgmised märgid rooma numeratsioonis:

XIV XXVIII XLIX LXXXVII CCCLXXVI
 MDCCXXVIII?

Kirjuta järgmised arvud rooma arvmärkides:

8, 13, 17, 39, 46, 98, 456, 969, 1632, 1929.

Sõnasta printsiip, millele tugineb arvude kirjutamine rooma arvmärkides.

10. Avalda järgmised arvud kümne astmete ja üheliste kaudu:

1^o. b kümnelist ja c ühelist;

2^o. a sajalist, b kümnelist ja c ühelist;

3^o. g sajalist ja i ühelist;

4^o. f tuhandelist, h kümnelist ja i ühelist;

5^o. p miljonit, q kümnetuhandelist, r sajalist ja u ühelist.

11. Tähistades arvu 10 lühemalt tähega k ja liitühikuid 100, 1000 jne. vastavalt k^2 , k^3 jne., kujuta arvud

73 289 5164 90607

tähe k polünoomidena.

12. Mis arve kujutavad järgmised avaldised:

$$1^0. 7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 8$$

$$2^0. 9 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7$$

$$3^0. 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + \\ + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1$$

$$4^0. 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1$$

$$5^0. 4 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2$$

$$6^0. 5 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 6$$

$$7^0. 7 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 3$$

$$8^0. 4 \cdot 12^3 + 7 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12^1 + 10$$

$$9^0. 13 \cdot 20^4 + 0 \cdot 20^3 + 17 \cdot 20^2 + 11 \cdot 20^1 + 19$$

$$10^0. 37 \cdot 60^3 + 51 \cdot 60^2 + 9 \cdot 60^1 + 43.$$

Milles seisab «positsiooniprintsiip», mis lubab arvude kirjutises ära jätta tähise + ja aluse astmed?

13. 1^o. Kirjuta eelmises ülesandes ridades 1—7 antud arvud positsiooniprintsiibil, võttes

ülesandeis	1 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o	5 ^o	6 ^o	7 ^o
alusteks	10	10	2	3	5	7	8

ja tarvitades arvmärkidena nii mitut märki reast 1, 2, 3, ... 9, 0 kui tarvis.

2^o. Ridades 8—10 esinevad polünoomid kujutavad teatud arve süsteemides vastavalt alustega 12, 20 ja 60.

Mitu arvmärki tuleks juurde luua märkide kogule 1, 2, ... 9, 0, et arve kirjutada nimetatud süsteemides?

14. Tarvitades enamalt koostatud astmetetabelit lähenda arv 3468 järk-järgult avaldistega

$$a_n \cdot 5^n, \quad a_n \cdot 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1}, \\ a_n \cdot 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} + a_{n-2} \cdot 5^{n-2} \text{ jne.},$$

kus kõik kordajad a_n, a_{n-1}, a_{n-2} jne. on väiksemad kui 5, kuni saadakse arvu 3468 täppis kujutis polünoomina alusel 5.

Kas iga teine arv avaldub samuti säärase polünoomina?

15. Kujuta, tarvitades enamalt valmistatud astmetetabelit ja eelmises ülesandes seletatud võtet:

1^o. arv 873 kahe astmetest koostatud polünoomina, mille kordajad on väiksemad kui 2;

2^o. arv 1045 kolme astmetest koostatud polünoomina, mille kordajad on väiksemad kui 3;

3^o. arv 4361 viie astmetest koostatud polünoomina, mille kordajad on väiksemad kui 5;

4^o. arv 19276 kaheksa astmetest koostatud polünoomina, mille kordajad on väiksemad kui 8;

5^o. arv 50803 kümne astmetest koostatud polünoomina, mille kordajad on väiksemad kui 10.

16. Lähtudes eelmise ülesande lahendite kujust, kirjuta, tuginedes positsiooniprintsiibile,

arv 873 süsteemis alusel 10 arvuna süsteemis alusel 2;
arv 1045 süsteemis alusel 10 arvuna süsteemis alusel 3;
analoogiliselt teised.

17. Kirjuta arv

1 ^o .	8974	süsteemis	alusel	7
2 ^o .	3478	"	"	11
3 ^o .	17569	"	"	12
4 ^o .	9999	"	"	20
5 ^o .	84107	"	"	60

Üleminekut aluselt 10 ettekirjutatud alusele toimeta järkjärgulise lähendamise teel.

Arv 20 oli maialaste arvusüsteemi alus Kesk-Ameerikas, Kr. sünd. aja ümber.

Arv 60 oli babüloomlaste arvusüsteemi alus, 2000 aasta ümber e. Kr.

18. Kujuta järgmised arvud polünoomidena ja avalda nad künnesüsteemis:

$$(101011101)_2 \quad (1021101)_3 \quad (4032)_5 \quad (9103)_{12}.$$

Väike arvmärk sulu taga näitab süsteemi alust, millel arv kirjutatud.

19. Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

$$\begin{array}{r}
 1^{\circ}. \quad (100110110)_2 \\
 + (111110011)_2 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2^{\circ}. \quad (30142)_5 \\
 + (4421)_5 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3^{\circ}. \quad (789ku)_{12} \\
 + (5k7k)_{12} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4^{\circ}. \quad (53124)_7 \\
 - (4635)_7 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5^{\circ}. \quad (9k32u0)_{12} \\
 - (879ku)_{12} \\
 \hline
 \end{array}$$

Tähtedega k ja u on tähistatud 12-süsteemis arvud 10 ja 11.

20. Olgu tegemist arvusüsteemiga, mille aluseks on arv 7. Anna selle süsteemi $1+1$ ja $1 \cdot 1$ tabelid.

Kirjuta vastavad tabelid ka aluste puhul 5 ja 2.

Missuguse alusega arvusüsteemis on nelja esimese tehte toimetamine kõige lihtsam?

Harjutis VI:

Ülesandeid polünoomides.

1. Ringikujulise tee väline läbimõõt on d , seesmine on 2δ võrra väiksem. Anna teepinna avaldis arendatud kujus.

Kuidas oleneb kõne all olev teepind läbimõõdust d ?
— kuidas tee laiusest 2δ ?

Mis sünnib teepinnaga, kui kõik mõõted kasvavad 2-, 3-, 4-, ... n -kordseteks?

Missuguse kuju omandab saadud avaldis erijuhul, kui $d = 35$ ja π -na võtta tema ligikaudne väärtus $3\frac{1}{7}$?

2. Kui raske on õõnes hõbesilinder, mille kõrgus on h cm, välisläbimõõt D cm ja seina paksus $\frac{\delta}{2}$ cm? Kordajate arvutamisel võta $\pi = \frac{22}{7}$, hõbeda erikaaluna $10\frac{1}{2}$.

Kuidas oleneb õõnsa silindri kaal tema läbimõõdust?
— tema seina paksusest?

Milleks taandub saadud kaaluavaldis erijuhul $D = 1$, $h = 7$?

3. Kuupdetsimeetri mudeli serv peaks olema võrdne 1 dm-ga. Mudeli valmistaja on eksinud mudeli tasandamisel serva kohta a dm võrra, kus a on väike murd. Kui suur on tõeliselt mudeli ruumala? Anna ta arendatud kujul.

Kui suure vea β mudeli ruumala suuruses tekitab viga a ?

Kui lai on valmistatud mudeli ruumala määramatuse piirkond?

4. Kirikutorni rist seisab keral, mille läbimõõt on 1 m. Päikesepaistel kasvab see läbimõõt δ m võrra, kus δ on väike murd. Kui suur on ruumala kasv kera paisumisel?

5. Kerasse, mille raadius on R , on kujutatud silinder, mille kõrgus on h . Näita, et selle silindri ruumala on kõrguse h 3-da astme polünoom.

Missuguse kuju võtab silindri ruumala valem juhul $R = 1$?

Sama ülesanne kerasse kujutatud koonuse kohta.

6. Kera segmendi ruumala arvutatakse valemi järgi:

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h),$$

kus R on kera raadius ja h segmendi sügavus.

Arvuta kera segmendi ruumala andmeil $R = 1$ ja $h = 1 + x$.

Missuguse kuju saab valem, kui võtta ümmarguselt $\pi = 3$?

7. Õpilaste maleringis on n liiget. Mitmel viisil v saab valida juhatust, mis koostub esimehest, kirjatoimetajast ja laekahoidjast?

Kujuta saadud valemi põhjal arvu v kõik arvu n muutudes rajades 3 kuni 15.

8. Tarbeaine, mille omahind 1 kroon, jõuab tema valmistajalt tarvitaja kätte kahe vaheltkaupleja kaudu. Kui oletada, et valmistaja ja iga vaheltkaupleja tahab saada p % tulu, kui kallilt tuleb siis tarbeasi tarvitaja kätte? Anna vastus arendatud kujus p polünoomina, kirjutades kordajad kümnendmurdudena.

Kui palju maksab tarvitaja vaheltkauplejate kasuks?

Kasvagu protsendimäär k -kordselt. Kas praegu arvutatud hinnavahe kasvab sama palju kordi?

9. Näita otsese arendamise teel, et

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2.$$

Kui eelmises ülesandes võtta p ja q täisarvulistena ja $p > q$, siis on kõik kolm arvu

$$x = p^2 - q^2 \quad y = 2pq \quad z = p^2 + q^2$$

positiivsed täisarvud. Miks?

Need kolm arvu rahuldavad tingimust

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ja lubavad endid tõlgitseda täisnurkse kolmnurga külgede mõõtarvudena.

Moodusta selle põhjal 5 täisarvuliste külgedega täisnurkset kolmnurka, korraldades arvutused kohase skeemi järgi.

Võta saadused tabeliks kokku ja veendu otsese arvutamise teel, et nad rahuldavad tingimust

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

10. Tõesta otsese arendamise teel, et on maksivad alljärgnevad samasused $1^0 - 12^0$.

Kontrolli nende samasuste maksvust, asendades mõlemas osas esinevaid tähti vabalt valitud arvudega.

$$1^0. (ma + b)^2 - m(a + b)^2 = (1 - m)(b^2 - ma^2)$$

$$2^0. (a^2 + bc)(bc + d^2) - (ac + cd)(ab + bd) = (ad - bc)^2$$

$$3^0. (R^2 + Rr + r^2)(R - r) = R^3 - r^3$$

$$4^0. (R^2 - Rr + r^2)(R + r) = R^3 + r^3$$

$$5^0. (m^2 + n^2)(p^2 + q^2) = (mp - nq)^2 + (mq + np)^2$$

$$6^0. n^2(n + 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = [n^2 + n + 1]^2$$

$$7^0. [n^2 + (n - 1)^2]^2 - 4n^2(n - 1)^2 = [n^2 - (n - 1)^2]^2$$

$$8^0. (a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$9^0. (p^2 + pq + q^2)^2 = (p^2 + pq)^2 + (q^2 + pq)^2 + (pq)^2$$

$$10^0. (a + b + c - d)^2 + (b + c + d - a)^2 + (c + d + a - b)^2 + (d + a + b - c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$$11^0. (f + g + h)^3 - 3(fg + gh + hf)(f + g + h) = f^3 + g^3 + h^3 - 3fgh$$

$$12^0. (x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)(x - 1) = x^{n+1} - 1.$$

11. Tõesta järgmised laused:

1^0 . Rida on aritmeetiline, kui tema üldliige oleneb lineaarselt liikme indeksist.

2^0 . Rida on aritmeetiline, kui tema n esimese liikme summa on n -i ruutfunktsioon vaba liikmeta.

12. Eelda tuntuna, et

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Kirjuta järjest aritmeetilise rea liikmed, nimetades esimest a ja rea vahet d :

$$a_1 = a \quad a_2 = a + d \quad a_3 = a + 2d \quad \dots \quad a_n = a + (n-1)d.$$

Moodusta nende summa ja taanda ta tuntud kujule.

13. Koosta korrutamistabel:

	1	2	3	...	n
1	1	2	3	...	n
2	2	4	6	...	$2n$
3	3	6	9	...	$3n$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	n	$2n$	$3n$...	n^2

Näita, et kõigi tabelis esinevate korrutiste summa

$$S = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

14. Näita, et eelmise ülesande tabelis viimases reas ja viimases veerus seisvate arvude summa on n^3 .

Näita, viimasele saadusele tuginedes, et kõigi tabelis esinevate arvude summa S on võrdne kuupide summaga

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Tuleta sellest märkusest esimese n täisarvu kuubi summa valem.

15. Näita, et kõigi tabelis

1	2	3	...	n
2	3	4	...	$n+1$
3	4	5	...	$n+2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	$n+1$	$n+2$...	$n+(n-1)$

esinevate arvude summa on võrdne n^3 .

16. Näita, et viimase tabeli viimases veerus ja viimases reas esinevate arvude summa on $3n^2 - 3n + 1$.

Asetades siia n asemel järjest 1, 2, 3, . . . n ja liites saadused, leiame tabelis esinevate arvude summa. Kuna see on n^3 , tuleta siit esimese n täisarvu ruutude summa valem:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

17. Kujuta arvud 8037 ja 2509 arvu 10 lühendatud tähise k polünoomidena. Korruta arvud omaette, korruta neid kujutavad polünoomid ja võrdle operatsioonide üksikuid samme ja lõpptulemusi.

Sama ülesanne arvpaaride kohta

11111 ja 235

43210 ja 357.

Harjutis VII:

Astmeid ja polünoome.

Ülesandeid täielise induktsiooni tõestusviisi käsitlemiseks.

Eelmärkus. Järgmised ülesanded 1–7 pakuvad näiteid tõe induktiivse tuletamise puudulikkusest.

1. Arv 840 on jaguv arvudega 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Veendu, et see on tõesti nõnda.

Kirjuta analoogia põhjal järgmised 5 jagajat.

Kontrolli arvu 840 jaguvust viimatikirjutatud arvudega.

2. Murdu $\frac{10}{81}$ arendades kümnendmurruks näeme,

et 6-el esimesel kohal seisavad 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Veendu, et see on tõesti nõnda.

Kirjuta analoogia põhjal järgmised 4 märki.

Kontrolli saadust, arendust tõeliselt läbi viies.

3. On tõsi, et

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ja et

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Veendu, et see on tõesti nõnda.

Võiks analoogia põhjal oodata, et

$$3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 7^4$$

$$3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 = 8^5$$

jne.

Avalda oodatav seadus üldkujul.

Kas on ta maksev?

4. Avaldis

$$2^{2n+1} - 1$$

annab n -i eriväärtustel 1, 2, 3 algarvud. Veendu, et see on tõesti nõnda. Võiks arvata, et ka $n = 4, 5, 6$ ja iga n üldse annab algarvu.

Uuri küsimust, koostades tabel

n	1	2	3	4
$2n + 1$						
2^{2n+1}						
$2^{2n+1} - 1$						

ja võrreldes saadust algarvude tabeli andmetega (vt. tabelit raamatu lõpus).

5. Kui valemisse

$$N = n^2 + n + 17$$

asetame n asemele järjest 1, 2, 3, saame algarvud. Kas on siin tegemist üldise valemiga algarvude arvu-
tamiseks?



Mis annab $n = 16$? Näita ilma vastavat N -i arvutamata, et ta on kordarv.

Missugune on väiksem n , mis asetamisel N -i avaldisse annab kordarvu?

6. Kui valemisse

$$N = n^2 + n + 41$$

asetame n asemele järjest 0, 1, 2, 3, saame algarvud. Kas on siin tegemist üldise valemiga algarvude arvutamiseks?

Mis annab aetus $n = 40$? Näita ilma vastavat N -i arvutamata, et ta on kordarv.

Missugune on väiksem n , mis asetamisel N -i avaldisse annab kordarvu?

7. Kui valemisse

$$N = 2n^2 + 29$$

asetame n asemele järjest arvud 0, 1, 2, 3, saame algarvud.

Kas on siin tegemist üldise valemiga algarvude arvutamiseks?

Näita ilma vastavat N -i arvutamata, et $n = 30$ puhul saadav arv laguneb teguriteks.

Eelmärkus. Järgmised ülesanded 8—16 toovad näiteid täielise induktsiooni tõestusvõtte käsitlemiseks.

8. On tõsi, et

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2.$$

Võib arvata, et

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Selle tõestuseks oletame, et lause on õige mingi n täisarvulisel eriväärtusel, näiteks n -i eriväärtusel N . Tõesta, et ta siis kindlasti maksev on ka järgneval n -i eriväär-

tusel $N+1$. Veendu otseselt, et lause on maksev n -i eriväärtusel 1. Järelda siit, et ta on maksev iga n -i puhul.

Töestusviis on tähtsamaid matemaatikas ja kannab „täielise induktsiooni“ nime.

9. Töesta eelmise lause põhjal tõsiasi: mitme üksteisele järgneva paaritu arvu summa on alati kordarv, s. t. ühtegi algarvu ei saa esitada mitme üksteisele järgneva paaritu arvu summana.

10. Töesta täielise induktsiooni viisil täisarvude summa valem:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

11. Töesta täielise induktsiooni viisil aritmeetilise rea summa valem:

$$a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d) = \frac{n[2a+(n-1)d]}{2}.$$

12. Töesta võtte abil n -ilt $(n+1)$ -le lihtarvude ruutude summa valem:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

13. Töesta võtte abil n -ilt $(n+1)$ -le lihtarvude kuupe summa valem:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

14. On tõsi, et

	$1 \cdot 2 \cdot 3$ on jaguv 6-ga;
samuti	$2 \cdot 3 \cdot 4$
ja ka	$3 \cdot 4 \cdot 5$.

Võib arvata, et üldiselt korrutis

$$n(n+1)(n+2)$$

on jaguv 6-ga iga n -i puhul.

Töesta seda.

15. On tõsi, et 6-ga on jaguv arv

$$1^3 - 1 = 0$$

samuti arv $2^3 - 2 = 6$

ja ka arv $3^3 - 3 = 24$.

Võib arvata, et vahe

$$n^3 - n$$

on jaguv 6-ga iga n -i puhul.

Tõesta seda.

Kas on see lause seotud eelmisega?

16. 1^o. Andku arv a jagamisel 7-ga jäägi j . Näita, et siis arv a^2 annab jagamisel 7-ga sama jäägi, mis arv j^2 , arv a^3 — sama jäägi, mis arv j^3 . Tõesta täielise induktsiooni viisil, et a^n annab jagamisel 7-ga sama jäägi, mis j^n .

2^o. Samad laused jagamise puhul arvudega 2, 3, 4, 5, 6 ja üldse iga täisarvuga t .

17. 1^o. Missugused jäägid jätavad arvud

$$19^4 \quad 43^5 \quad 101^3 \quad 459^2$$

jagamisel vastavalt arvudega

$$9 \quad 11 \quad 13 \quad 17 ?$$

Lahenda küsimus kord otseselt, teine kord eelmises ülesandes tõestatud lause põhjal.

2^o. Rakenda eelmises ülesandes tõestatud lauset jääkide kiireks määramiseks, mida jätavad arvud

$$37^4 \quad 1975^3 \quad 5892^5 \quad 111111^7$$

jagamisel vastavalt arvudega

$$9 \quad 11 \quad 7 \quad 3.$$

Peatükk III.

Ligikaudne arvutamine.

Harjutis VIII:

Ligikaudse arvutamise abimõisted.

1. Sammudega mõõtes tee pikkust kodust kooli leiti järgmised arvud:

1721 1735 1729 1745 1738 1726.

Kui suur on mõõdetud kauguse alammäär? — kauguse ülemmäär?

Kui lai on mõõtmisraaduste kõikumisvahemik?

Kauguse tõenäosemaks väärtuseks loetakse mõõtmisraaduste aritmeetilist keskmist. Kui suur ta on?

Kui suured on üksikute mõõtmisraaduste hälbed (erinemised) kauguse tõenäosemast väärtusest, ehk teisiti: kui suured on üksikute mõõtmisraaduste arvatavad vead?

Missugune on nende hälvete alam- ja ülemmäär?

2. Puulehe pinna mõõtmiseks kaeti ta läbi paistva mm-paberiga ja saadi loendamise teel viiel korral vastavalt cm^2 -tes:

90 89 92 91 90.

Kui suur on puulehe pinna mõõtmisraaduste alammäär, nende ülemmäär ja lehe pinna määramatuse vahemik?

Kui suur on lehe pinna tõenäosem väärtus?

Leia üksikute mõõtmisvahemike arvutavad vead ja nende vigade kõikumisvahemik.

3. Pagasi veohinna arvutamisel arvestatakse kaalu 5 kg-des. Milleni künib halvemal korral pagasi arvestatud kaalu viga?

4. Posthobuste sõidutariif käib järgmiselt: „Iga täie või algava kilomeetri pealt hobuse kohta 20 senti“.

Milleni künib halvemal korral arvestatud sõidukauguse viga?

5. Kui mingi pikkuse mõõtmisvahemikuna antakse näiteks 28 cm ja kirjutatakse

$$p = 28,$$

siis ei mõisteta seda arvu 28 üldiselt mitte pikkuse p täpsa väärtusena, vaid järgmises tähenduses: pikkus p on lähemal 28 cm-le kui 27-le või 29-le, s. t. mõõdetav pikkus on suurem kui 27,5 ja väiksem kui 28,5 cm:

$$27,5 < p < 28,5 .$$

Kui lai on p kõikumisvahemik?

Milleni võib künida andme 28 viga?

Mõtet, mis avaldatud ülalõikes võrratuses, kirjutatakse sageli viisil

$$p = 28 (\pm 0,5) ,$$

loe: p on 28 veaga kuni 0,5 ühele või teisele poole. Analoogiliselt eelmisega tuleb tõlgitseda kirjutisi

$$\sqrt{7} = 2,6 \quad \pi = 3,14 .$$

Seleta, kuidas tuleb mõista mõõtmistulemusi väljendavaid kirjutisi:

m-tes on $r = 425$	mm-tes on $s = 84,6 (\pm 0,7)$
km ² -tes on $S = 7943$	l-tes on $V = 0,58 (\pm 0,02)$
kg-des on $P = 5,763$	sec-tes on $t = 12 (\pm 1,5) ?$

Anna nende mõõtmistulemuste kõikumisvahemikud.

6. Alljärgnevas tabelis on antud rida arvulisi väärtusi x, y, z, u, v — veaga, mis pole suurem kui $\frac{1}{2}$ viimase koha ühikust. Sule, nagu tehtud esimeses reas, suurused x, y, z, u, v kahe tõkke vahele, anna iga suuruse jaoks kõikumisvahemiku laius ja andme võimaliku vea ülemmäär.

Arv	Alam tõke	Ülem tõke	Tõkete vahe	Vea ülemmäär
$a = 5,84$ $x = 79$ $y = 79,0$ $z = 0,613$ $u = 1,57$ $v = 0,005$	$5,835 < a < 5,845$		0,01	0,005

Sama ülesanne juhtudel:

$$f = 29 (\pm 3) \quad g = 7,54 (\pm 0,18) \quad h = 0,365 (\pm 0,007).$$

7. Olgu suuruse mõõdetud väärtus s ; olgu mõõtmisvea ülemmäär σ . Missugused tõkked määravad suuruse kõikumisvahemiku?

Kujuta asi joonisel.

8. Suuruse s alammäärana on leitud väärtus p , ülemmäärana q . Olgu suuruse s väärtusena võetud p ja q aritmeetiline keskmine. Milleni küünib halvemal juhul viga?

Kujuta asi joonisel.

9. Anna murru $\frac{6}{17}$ lähisväärtused puudusega ja liiaga, kümnendmurdudena, veaga alla

$$0,1 \quad 0,01 \quad 0,001 \quad 0,0001.$$

10. Rakendades vahemiku poolitamise võtet anna $\sqrt{15}$ lähisväärtused, lihtmurdudena, puudusega ja liiaga, veaga alla

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{128}.$$

11. Postpaki kaaluna leiti 4,270 kg veaga mitte üle 5 g. Kui suur viga tuleb ülimalt 1 kg kohta? Kui suur on kaalumise relatiivse vea ülemmäär? Anna viimane protsentides.

12. Kahe tähise vahelise kauguse mõõtmise uue raudtee sihil andis 12,781 km veaga kuni 18 meetrit. Kui suur viga tuleb ülimalt 1 km kohta? Kui suur on mõõtmise relatiivse vea ülemmäär? Anna viimane protsentides.

13. 4 arvet kroonides:

1,09	18,46	782,25	3627,16
------	-------	--------	---------

on ümmardatud vastavalt summadeni:

1,00	18,00	780,00	3600,00.
------	-------	--------	----------

Missuguse protsendi (ligikaudu) moodustab kustutatud summa arve lõppsuurusest 1., 2., 3. ja 4. arve puhul?

14. Nööpnõela, pliatsi, lipuvarda ja telefoniposti jämedused on vastavalt

0,8 mm, 7 mm, 5 cm, 24 cm.

Korralda need andmed väheneva relatiivse vea, s. t. kasvava täpsuse järjekorras.

15. Määra 6. ülesandes seisvate andmete a, x, y, z, u, v protsentuaalsed vead ja järjestage need andmed kasvava täpsuse järjekorras.

16. Mõõtmisel leiti: tee pikkusena kahe kilomeetriposti vahel 1 km ($\pm 0,004$), kooli-õue pikkusena 60 m ($\pm 0,1$), töölaua pikkusena 120 cm ($\pm 0,3$), pliatsi pikkusena 13,8 cm ($\pm 0,05$).

Arvuta, mitme ühiku t kohta tuleb iga mõõtmise puhul viga 1.

Järjestage mõõtmised nende täpsuse järjekorras.

Kuidas arvutada „täpsust“ t mõõtmise relatiivse vea v kaudu?

17. Meetrisüsteemile üleminekul 1. jaanuaril 1929 leidus ajalehtedes mõõtude ümberarvutamise tabeleid, milles esinesid read:

$$5 \text{ kg} = 12,2096420 \text{ naela,}$$

$$5 \text{ naela} = 2,04756205 \text{ kg.}$$

Mitme ühiku kohta tuleb neis andmeis üks kahtlane? Kui suur on nende andmete relatiivne viga?

Apteekides tarvitavad kaalud lubavad kaaluda 5 kg veaga, mis võib küündida 1 g-ni. Määra kaalude täpsus. Sea asi kõrvu eelmise saadusega.

Poe kaalude seaduslikult lubatud viga võib küündida 0,001-ni mõõdetavast kaalust. Mitme kohaga oleks loomulik anda ülaltoodud andmeid?

18. Arv 415637 ümmardatakse järjest nõnda:

$$415640 \quad 415600 \quad 416000 \quad 420000 \quad 400000,$$

kirjutades teda, nagu öeldakse, vastavalt 5, 4, 3, 2 ja 1 „õige kohaga“.

Anna igal juhul absoluutne viga suuruse ja märgi poolest. Määra igale juhule vastavalt protsentuaalse vea ülemmäär.

19. On teada, et

$$\pi = 3,141592654 \dots$$

ja
$$\frac{1}{\pi} = 0,318309886 \dots$$

Anna nende arvude lähisväärtused ühe, kahe, ... kuue õige kohaga.

20. Kui suure protsentuaalse vea teeme halvemal korral, kui

3-kohase arvu kirjutame 1 õige kohaga,

5-kohase „ „ 3 „ „

6-kohase „ „ 4 „ „

21. Mitu kohta peab võtma murru $7354 : 8211$ kümnendarenduses, et saada teda relatiivse veaga mitte üle 1 % ?

22. Archimedes leidis, et

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Kui suur on maksimaalselt viga, kui π -na võtta $3\frac{1}{7}$? — kui π -na võtta $3\frac{10}{71}$?

Missuguse protsendi moodustab see viga π väärtusest ?

Mitu õiget kümnendkohta saab määrata π jaoks ülalantud võrratusest ?

23. Mitu märki peab võtma $\sqrt{13}$ kümnendarenduses, et saada arvu veaga alla 1 % ?

24. Leia vahemiku poolitamise võtte viisil $\sqrt[3]{21}$ lähisväärtused puuduse ja liiaga, rakendades võtet 5 korda.

Mitu õiget kümnendkohta saab määrata $\sqrt[3]{21}$ jaoks viimasest lähisväärtuste paarist ?

25. Andme 347 m viga küünib halvemal korral 0,5 meetrini. Sellevastu tuleks andmeid 3470 dm ja 34700 cm mõista vastavalt vigade ülemmääradega 0,5 dm ja 0,5 cm. Et vea ülenimäära õige suurus oleks näha arvu kirjutisest ka peale mõõtude teisendamist, kirjutatakse mitte

$$347 \text{ m} = 3470 \text{ dm} = 34700 \text{ cm},$$

vaid „standardkirjutusviisil“

$$347 \text{ m} = 347 \cdot 10^1 \text{ dm} = 347 \cdot 10^2 \text{ cm}$$

ja mõistetakse vea ülemmäärana vastavalt

$$0,5 \text{ m} \quad 0,5 \cdot 10^1 \text{ dm} \quad 0,5 \cdot 10^2 \text{ cm}.$$

Mõlemas viimasel reas on mõõduühik, nagu kirja- viisist näha, üks ja sama; nimelt $1 \text{ m} = 10^1 \text{ dm} = 10^2 \text{ cm}$.

Avalda järgmised ligikaudu teada olevad andmed ja nende vea ülemmäärad kõrval nimetatud mõõtudes:

14 km	meetrites;
0,7 km	sentimeetrites;
5,3 kg	grammides;
0,6 kg	milligrammides;
27,2 ($\pm 0,1$) m ²	ruutsentimeetrites;
1,54 ($\pm 0,03$) hl	kuupmillimeetrites.

26. Olgu loetud herneterade hulk pudelis ja leitud 1., 2., 3., 4. ja 5. täite puhul korduvalt kontrollitud andmetena:

19568	19607	19583	19624	19635.
-------	-------	-------	-------	--------

Nende arvude ümmardamine täissajalisteneni annab iga kord 19600. Määra ümmardamise vead suuruse ja märgi poolest.

Need vead mõjustavad vaid kahte viimast kümnendkohta, vähem kui 50 ühiku võrra. On kohane lugeda ses katses loomulikuks herneterade hulga mõõduks 100 hernest ja kirjutada herneterade hulka pudelis kolme maksva kohaga kujus:

$$196 \cdot 10^2.$$

Selgita, mis tähendaksid meie kokkuleppe puhul kirjutised:

1960 · 10 ¹	19600	19,6 · 10 ³	1,96 · 10 ⁴
	0,196 · 10 ⁵	0,00196 · 10 ⁷ .	

Mitu maksvat kümnendkohta on igal siin kirjutatud arvul?

27. Loenda selle raamatu viiel leheküljel seisvad trükitähed (A, a, B, b, \dots ; arvmärgid 0, 1, 2, \dots ; maatematilised sümbolid $+$, $-$, \dots ja kirjamärgid $;$, $;$, \dots).

Anna lehekülje trükitähtede hulk asjakohase küm-
nendkohtade arvuga. Kui suur on selle trükitähtede
hulga loomulik mõõt?

28. Joonista tahvlile mingi suurem kolmnurk ja
mõõda cm-paela abil kolm kõrgust ning kolm alust ja
arvuta neist andmeist kolmnurga pindala.

Anna tulemus asjakohase kümnendkohtade hulgaga.

Kuidas tuleks kirjutada sama pindala ruutmilli-
meetrites?

Harjutis IX:

Arvutussaaduse kõikumisvahemiku ja
vea hindamise ülesandeid.

1. Kana haudumisajaks arvatakse 19 kuni 24 päeva.
Millal võib oodata kanapoegi, kui kana pannakse hau-
duma 13. IV?

2. Koolimaja nädalane veetarve kõigub koolitöö ajal
32 ja 35 hektoliitri vahel.

Kui suur on kooliaastal (38 nädalat) tarvitatud
vee hulk?

3. Puutüve läbimõõtu d varbsirkliga mõõtes leiti
selle alamväärtusena d_1 cm ja ülemväärtusena d_2 cm:

$$d_1 < d < d_2 .$$

1^o. Kui lai on läbimõõdu d määramatuse piirkond? —
puu übermõõdu C määramatuse piirkond? — puu läbi-
löike pinna määramatuse piirkond?

2^o. Kui suur on maksimaalselt puu läbimõõdu viga δ ,
kui puu tüve läbimõõduna d võtta d_1 ja d_2 aritmeetiline
keskmine: $d \approx \frac{d_1 + d_2}{2}$?

3^o. Kuidas avaldub puu läbilõike pind S , kui läbi-
mõõduna võtta viimatinimetatud d väärtus?

— kui pinda S määrata tema alamväärtuse ja ülem-
väärtuse aritmeetilise keskmisena?

4. Sõnasta tõed, mida avaldavad järgmised kirjuti-
tised, kus joonepealne rida sisaldab oletuse, joonealune —
järeltuse:

$$\frac{a < b}{a + c < b + c}$$

$$\frac{a < b, c > 0}{ac < bc}$$

$$\frac{a < b, c < 0}{ac > bc}$$

$$\frac{a < b}{a - c < b - c}$$

$$\frac{a < b, c > 0}{\frac{a}{c} < \frac{b}{c}}$$

$$\frac{a < b, c < 0}{\frac{a}{c} > \frac{b}{c}}$$

5. Olgu arv c teada täpsalt; olgu arv x teada vaid
ligikaudu: $x \approx a$, veega mitte üle a . Anna rajad, mille
vahel peituvad arvud:

$$x + c \quad x - c \quad c - x \quad cx \quad \frac{x}{c} \quad \frac{c}{x}.$$

Kaalu eraldi juhtusid $c > 0$ ja $c < 0$.

6. Ringi pikkuse C annab valem $C = \pi d$, kus d
tähenab ringi läbimõõtu.

Olgu ringi läbimõõt sentimeetrites 82 veega alla 0,5.
Kui suur viga võiks halvemal korral tekkida ringi ümber-
mõõdu määramisel, kui võtta π jaoks piiblis (Kuningate
1. raamat, VII, 23) seisev lähendus 3?

7. Korduvalt mõõtes kaugust AB leiti tema alam-
määrana 862 ja ülemmäärana 878. Samad andmed BC
kohta on 537 ja 555. Kui suur on kaugus ABC , oletu-
sel, et koht B asub kohtade A ja C vahel? — oletusel,
et C asub A ja B vahel?

8. Valmis koduveini hulka, mis tuleb kallata pude-
litesse, võib arvata 44—46 liitri peale. Pudelite mahu-
tavus kõigub 0,7 ja 0,8 liitri vahel. Mitu pudelit läheb
tarvis veini äramahutamiseks?

9. Olgu suuruse u ligikaudne väärtus a , veega
ühele või teisele poole mitte suuremaga kui a . Olgu
suuruse v ligikaudne väärtus b , veega ühele või teisele
poole mitte suuremaga kui β .

Määra rajad, milles asuvad summa $u + v$ ja vahe $u - v$.

Kui suured on summa $u + v$ ja vahe $u - v$ määramise võimalikud vead?

Samul andmeil, mis ülal, määra rajad, milles asuvad korrutis uv ja jagatis $u : v$.

Kui suured on ümmarguselt võttes korrutise uv ja jagatise $u : v$ määramise võimalikud vead?

10. Kooli spordiplatsi mõõted on meetrites 85 ja 125 veaga mitte üle $\frac{1}{2}$ meetri. Kui kõrgele võib ümmarguselt küündida platsi pinna määramise viga?

Anna spordiplatsi pindala asjakohase täpsusega.

11. Kolmnurga alus on 23,7 cm, kõrgus 38,4 cm, mõlemad veaga alla 0,05 cm.

Kui kõrgele võib küündida kolmnurga pindala määramise viga?

Anna kolmnurga pindala asjakohase täpsusega.

✓ **12.** Maakivi kaalub õhus 2370 (± 20) grammi. Tema vee-väljasurve on 985 (± 3) cm^3 . Kui kõrgele võib küündida selle kivi erikaalu määramise viga?

Anna kivi erikaal asjakohase täpsusega.

13. Olgu suuruse u ligikaudne väärtus a , veaga ühele või teisele poole mitte suuremaga kui a .

Kui suur on ümmarguselt võttes korrutise cu määramise võimalik viga, kui arv c on täpsalt teada?

Kui suur on ümmarguselt võttes u^2 ja u^3 määramise võimalik viga?

14. Ruudu külje pikkusena leiti 18,7 cm, veaga mitte üle 0,05 cm. Arvuta ruudu pindala, leia saaduse vea ülemmäär ja anna pindala suurus kohaselt ümmardatud kujus.

Sama ülesanne, kui ruudu külgede pikkus on

79 m 43,9 dm 2,57 cm 0,36 mm.

15. Kuubi serva pikkus temperatuuril 0° on 235 mm. Soojenedes paisub serv 0,07 mm võrra. Mille võrra ümmarguselt paisub kuubi servade kogupikkus? — kuubi tahkude kogupind? — kuubi ruumala?

16. Maakera meridiaani läbimõõt muutub väärtusel 12712 km poolusel väärtusele 12754 km ekvaatoril.

Missuguste rajade vahel peitub meridiaani pikkus?

Mitme kohaga tuleks võtta arvutamisel π väärtus?

✓ 17. Meetrimõõdustiku maksimahakkamise aja (1. jaanuar 1929) ümber maksti meil saia naela eest vastavalt sordile 16 kuni 25 senti, lauavõi naela eest 1,35 kuni 1,45 krooni. Samal ajal ilmunud ajalehtedes leidis võrdus

$$1 \text{ kg} = 2,4419284 \text{ naela.}$$

Anna ülalnimetatud toiduainete kilogrammi hinnad.

Mitme kümnendkohaga tuleks anda võrdetegur, kui jääda mõistlikkudesse piiridesse?

18. Ringi raadiuse mõõtmise andis 34,7 cm, veaga mitte üle 0,05 cm. Arvuta ringi pindala, leia saaduse vea ülemmäär ja anna pindala suurus kohaselt ümmardatud kujus.

Mitme märgiga tuleb võtta arv π ?

Sama ülesanne, kui ringi raadiuse pikkus on

$$34 \text{ cm} \quad 9,3 \text{ cm} \quad 0,25 \text{ cm.}$$

19. Olgu kahe liidetava a ja b absoluutsed vead α ja β ja relatiivne viga $\frac{\alpha}{a} < \frac{\beta}{b}$. Näita, et summa $a + b$ relatiivne viga $\frac{\alpha + \beta}{a + b}$ on suurem esimesest murrust ja väiksem teisest; sõnades: summa relatiivne viga asub liidetavate relatiivsete vigade vahel.

Näide. Ristküliku külgede mõõtmise relatiivne viga jäägu vastavalt alla 1 ja 2 protsenti. Kui täpsalt saab arvutada ristküliku ümbermõõtu?

20. Tõesta laused:

1^o. Korrutise relatiivne viga on ümmarguselt võrdne tegurite relatiivsete vigade summaga.

2^o. Jagatise relatiivne viga on ümmarguselt võrdne jagatava ja jagaja relatiivsete vigade summaga.

Anna näiteid nende lausete rakendamiseks.

21. Tõesta laused:

1^o. Kui suurus s on teada relatiivse veaga p protsenti, siis võib tema ruudu määramisel viga küündida ümmarguselt $2p$ protsendini.

2^o. — siis võib tema kuubi määramisel viga küündida ümmarguselt $3p$ protsendini.

✓ 22. Võrdkülgse kolmnurga külge olgu teada relatiivse veaga alla 0,5 protsenti. Kui täpsalt saab arvutada tema pindala?

23. Tetraeder on 4 võrdkülgsest kolmnurgast moodustatud kolmetahune püramiid. Olgu tema serv teada relatiivse veaga alla p protsenti. Kui täpsalt saab arvutada 1^o. tetraedri servade kogupikkust; 2^o. tetraedri täit pindala; 3^o. tetraedri ruumala?

24. On mõõdetud 6 nurka ja saadud veaga alla 3^o järgmised väärtused:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 128^{\circ}17' & \alpha_2 = 84^{\circ}32' & \alpha_3 = 35^{\circ}25' \\ \alpha_4 = 12^{\circ}39' & \alpha_5 = 1^{\circ}04' & \alpha_6 = 58' \end{array}$$

1^o. Leia mõõtmisvahetuste promille-vigade ülemmäärad.

Mispärast püütakse määrata väikesi nurki kaudselt, selle asemel et neid mõõta nurgamõõtmisriistadega?

2^o. Määra ülalõetud andmeist vahed

$$\alpha_1 - \alpha_3 \quad \alpha_2 - \alpha_4 \quad \alpha_5 - \alpha_6$$

ja leia nende vahede võimalik promille-viga.

Mispärast püütakse määrata kahe teineteise lähedal asuva väärtuse vahet kaudselt, kui see võimalik?

Harjutis X:

Lühendatud arvutamise ülesandeid.

Eelmärkus. Kõigis matemaatika rakenduses nõutakse arvutamistulemusi vaid piiratud hulga kümnendkohtadega, sageli tunduvalt väiksema hulga kümnendkohtadega, kui neid on andmeis. On loomulik ja aja ning vaeva kokkuhoiu mõttes kohane korraldada arvutamist nõnda, et saaduses ei leiduks üleliigseid arvmärke, vaid et ta esineks kohe paraaja hulga kümnendkohtadega.

1. Perekonna suvituskulud koosnesid 1929. a. suvel järgmistest osadest (kõik andmed kuluderaamatu järgi kroonides): suvila üür 120,00; suvitusmaks 9,50; reis suvituskohale ja tagasi 53,85; sport ja meelelahutus 18,42; majapidamiskulud 372,87; muud 9,41. 1930. a. suvituskulude eelarvestamisel tuleb hinnata suvila võimalikku üürimuutust ± 20 krooniga, majapidamiskulude muutust ± 70 krooniga, kuna teised kulud arvatavasti oluliselt ei muutu.

Missuguse summani võib ümmarguselt ulatuda 1930. a. suvituskulude erine mine 1929. a. suvituskuludest?

Missugune rahasumma tuleks võtta 1930. a. arvata vate suvituskulude loomulikuks mõõduks?

Missugustel kümnendkohtadel 1929. a. suvituskulude üldsummas pole 1930. a. suvituskulude eelarve seisukohalt mõtet? — missugune koht on kahtlane? Missuguse kohani oleks loomulik ümmardada andmeid enne 1930. a. suvituskulude üldsumma arvutamist?

Alljärgnevas skeemis näitab esimene tulp 1930. a. suvituskulude üldsumma arvutamist 1929. a. suvituskulude üldsumma kaudu; teine tulp — nõutud suuruse otsesest (lühendatud) arvutamist. Teise tulba arvud on

võetud ühe koha võrra peenematena, kui otsitakse lõppsaadust. Miks?

120,00	12·10
9,50	1
53,85	5
18,42	2
372,87	37
9,41	1
<hr/>	<hr/>
584,05	58 (± 9) · 10
<hr/>	<hr/>
580 (± 90)	

või, ettevaatlikumalt,

$$6 (\pm 1) \cdot 100$$

või, ettevaatlikumalt,

$$6 (\pm 1) \cdot 100$$

Kontrolli skeemis esitatud arvutusi.

Koosta eelmisega analoogilisi ülesandeid.

2. Järgmine näide selgitab summa leidmist kolme maksva märgiga:

kaudsel teel, lühendamata andmeist:	otsesel teel, andmeid lühendades:
78931,97	$789 \cdot 10^2$
3175,61	32
87,365	1
<hr/>	<hr/>
82194,945	$822 \cdot 10^2$
<hr/>	
$822 \cdot 10^2$	

Kontrolli skeemis esitatud arvutusi.

Hinda esimese tulba andmete lühendamisel tekkinud vigu. Kuidas mõjustavad need vead kogusummas lõpptulemust?

Koosta analoogilisi näiteid lühendatud summa leidmiseks kahe maksva kohaga ja ühe maksva kohaga.

3. Arvuta järgmised summad kolme maksva kohaga, kirjutades selleks tulpa vaid tarvilikud numbrid:

$$1^{\circ}. 75,82 + 2,793 + 0,2583$$

$$2^{\circ}. 98345 + 45839 + 1291 + 746$$

$$3^{\circ}. 573,6 + 24,79 + 7,28$$

$$4^{\circ}. 1,7135 + 0,9234 + 0,0789$$

$$5^{\circ}. 0,0175 + 0,0003 + 0,0029 + 0,2746.$$

Koosta analoogilisi ülesandeid arvutamiseks kahe maksva kohaga.

4. Olgu summas n liidetavat. Arvutatagu summat lühendatult p kohani.

Kui suur on maksimaalselt summa viga?

5. Äri 1929. tegevusaasta tulud ja kulud olid kroonides vastavalt 4794,17 ja 3559,82. 1930. tegevusaasta kohta võib hinnata tulude muutust ümmarguselt ± 200 krooni võrra ja kulude muutust ümmarguselt ± 600 krooni võrra.

Missuguse summani võib küündida 1930. aasta puhaskasu eelarve kindlusetus?

Missugune summa tuleks võtta 1930 a. arvatava puhaskasu loomulikuks mõõduks?

Missugustel kümnendkohtadel 1929. a. tulude ja kulude summades pole 1930. a. eelarve seisukohalt mõtet? — missugune koht on kahtlane?

Missuguse kohani oleks loomulik ümmardada andmeid enne 1930. a. arvatava puhaskasu arvutamisele asumist?

Alljärgnevas skeemis näitab esimene tulp 1930. a. arvatava puhaskasu arvutamist eelmise aasta puhaskasu kaudu; teine tulp — nõutud suuruse otsesest (lühendatud) arvutamist.

4794,17	4,8 · 10 ³
3559,82	- 3,6 · 10 ³
1234,35	1,2 (± 0,8) · 10 ³
1,2 (± 0,8) · 10 ³	

Kontrolli skeemis esitatud arvutusi.

Koosta eelmisega analoogilisi ülesandeid.

6. Järgmine näide selgitab lühendatud vahe leidmist kolme maksva kohaga:

kaudsel teel, lühendama andmeist:	otsesel teel, andmeid lühendades:
1,79426	1,79
0,34517	0,35
<hr/>	<hr/>
1,44909	1,44
<hr/>	
1,45	

Kontrolli skeemis esitatud arvutusi.

Hinda esimese tulba andmete lühendamisel tekkinud vigu. Kuidas mõjustavad need vead arvutatavat vahet?

Koosta analoogilisi näiteid lühendatud vahe leidmiseks kahe ja ühe maksva kohaga.

7. Arvuta järgmised vahed kolme maksva kohaga, kirjutades selleks tulpa vaid tarvilikud numbrid:

$$1^{\circ}. 379438 - 29571$$

$$2^{\circ}. 58,569 - 9,7138$$

$$3^{\circ}. 1,5738 - 0,0059$$

$$4^{\circ}. 385,41 + 12,789 - 0,5694$$

$$5^{\circ}. 79835 + 38927 - 45328.$$

Koosta analoogilisi ülesandeid arvutamiseks nelja kohaga.

8. Ristkülikutaolise maatüki mõõted on 1293 (± 2) m ja 3128 (± 3) m.

Missuguse määraneni võib ümmarguselt küündida maatüki pindala määramise viga? Mitme protsendi võrra erineb see 10^4 ruutmeetrist (või aarist)?

Missuguse pindalaga oleks loomulik mõõta kõne all olevat maatükki?

Arvuta korrutis $1293 \cdot 3128$.

Missugustel selle korrutise kümnendkohtadel pole mõtet korrutise tõlgitsemisel maatüki suurusena? — misugune koht on juba kindlasti kahtlane?

Esimene järgnevaist skeemidest näitab maatüki pindala arvutamist esiotsa üleliigsete kümnendkohtadega (paremat kätt peent püstjoont) ja tulemuse ümmardamist kohase jämeduseni. Teine skeem näitab sama pindala lühendatud arvutamist pindala loomulikus mõõdus, s. o. 10^4 ruutmeetris.

$1293 \cdot 3128$	$1293 \cdot 3128$
312 8	313
62 56	62
28 152	28
9384	1
404 4504	$404 (+1) \cdot 10^4$
404 $(+1) \cdot 10^4$	

Anna mõlema skeemi puhul toimingute täielik kirjeldus ühes vastava põhjendusega.

Märkus. Ettevaatuse mõttes on parem arvutada kõik osakorrutised ja nende summa ühe üleliigse kohaga ja ümmardada alles saadus paraja jämeduseni. Miks nõnda?

9. Esimene järgmistest skeemidest kujutab korrutise $7,2185 \cdot 54,579$ leidmist kolme kohaga, arvutades esiotsa kõik korrutise märgid ja ümmardades teda nõutud jämeduseni vaid hiljemini. Teine skeem kujutab sama korrutise leidmist vaid ühe üleliigse kohaga ja saaduse ümmardamist nõutud jämeduseni. (Vt. seletust ja märkust järgmisel leheküljel.)

Kontrolli kõiki arvutusi.

$7,2185 \cdot 54,579$	$7,2185 \cdot 54,579$
382,053	382,1
10,9158	10,9
54579	5
436632	4
272895	393,9
393,9785115	394
394	

Seletuseks viimasele skeemile. Käsitletavas näites algab korrutaja ühelistega; see annab võimaluse korrutist jämedalt hinnata: ta asub 350 ja 420 vahel, millega on koma asend korrutises määratud. Korrutise võimaliku vea hindamine näitab, et osakorrutisi tuleb arendada kümnendikkudeni ja nende liitmise saadust ümmardada ühelisteni.

Märkus. Kümnendkohti andmeis, mida pole tarvis arvestada, märgitakse mingi märgiga, näit. punkt \cdot , haak \checkmark , kriips $'$ või mingi muu. Samuti märgitakse hiljem järk-järgult kohad, mis edaspidisel arvutamisel ei tule enam arvestamisele.

10. Järgmised kaks skeemi kujutavad korrutise $385,72 \cdot 75,496$ leidmist kolme maksva kohaga; esimene — kaudsel teel, kõiki osakorrutiste kohti arvutades; teine — otsesel teel, võttes osakorrutised parajase peenusega. Anna mõlemal juhul asja täielik kirjeldus.

$385,72 \cdot 75,496$	$3,8572 \cdot 7549,6$
226	48 8
60	39 68
3	77 480
	52 8472
	1 50992
291	20,31712
$291 \cdot 10^2$	$290 \cdot 10^2$

Märkus. Vt. seletust ja märkust 9. ülesande lõpul.

11. Arvuta järgmised korrutised

kolme maksva kohaga:	nelja maksva kohaga:
$1^{\circ} \quad 3,14159 \cdot 123,74$	$5^{\circ} \quad 7589 \cdot 39654$
$2^{\circ} \quad 68179 \cdot 43859$	$6^{\circ} \quad 19,358 \cdot 0,00356$
$3^{\circ} \quad 453,7 \cdot 23,562$	$7^{\circ} \quad 0,0097 \cdot 35,174$
$4^{\circ} \quad 0,0127 \cdot 0,3794$	$8^{\circ} \quad 0,0385 \cdot 0,0937$

12. Arvu π katseliseks määramiseks mõõdetakse treitunud silindri übermõõt ning läbimõõt ja leitakse vastavalt $484,1 (\pm 0,3)$ mm ja $153,7 (\pm 0,2)$ mm.

Kui kõrgele võib küündida neist andmeist määratud arvu π viga?

Kui kaugele on mõtet arendada kahe ülalseisva andme jagatist arvu π leidmise otstarbeks?

Esimene järgmistest skeemidest kujutab otsitava jagatise lühendamatu arendamist peenusega kuni tuhandendikkudeni ja saaduse ümmardamist sajandikkudeni. Teine skeem kujutab sama jagatise leidmist lühendatud viisil.

<u>484,1 : 153,7</u>	<u>484,1 : 153,7</u>
$4841 : 1537 = 3,149$	$4,841 : 1,537 = 3,15$
<u>461 1</u> $\approx 3,15$	<u>4 61</u>
<u>23 00</u>	<u>23</u>
15 37	15
<u>7 630</u>	<u>8</u>
6 148	<u>8</u>
<u>1 4820</u>	
1 3833	
<u>987</u>	

Kontrolli kõiki arvutusi.

Seletuseks viimasele skeemile. Et saaks kergesti hinnata jagatise suurusjärku ja selle kaudu leida koma asendit jagatises, korraldame asja nõnda, et jagaja algaks ühelistega. Näeme, et jagatis on 3 ühelise ümber, millega koma asend määratud.

Et tuhandendikud jagatavas ei mõjуста sajandikke jagatises, siis jätame nad algusest peale arvestamata.

Märkus. Vt. märkust 9. ülesande lõpul.

13. Järgmine skeem näitab jagatise $17,85231 : 0,0384$ määramist peenusega kuni ühelisteni.

<u>17,85231 : 0,0384</u>
$1785,231 : 3,84 = 465$
<u>1536</u>
<u>249</u>
<u>230</u>
19
<u>19</u>

Kolme viimast märki jagatavas võib kustutada veel enne jagamisele asumist. Miks?

Seleta ja põhjenda edaspidist jagamise käiku.

14. Arvuta järgmised jagatised

kolme maksva kohaga: nelja maksva kohaga:

1 ^o . 56837 : 13451	5 ^o . 79563 : 58469
2 ^o . 4834 : 75,87	6 ^o . 27,954 : 0,00983
3 ^o . 2,4586 : 9,537	7 ^o . 0,0759 : 12,835
4 ^o . 0,34927 : 15,783	8 ^o . 1,6935 : 0,0628.

Harjutis XI:

Lühendatud arvutamise ülesandeid: järg.

Eelmärkus. Järgmistes ülesannetes tuleb andmeid ikka mõista võimaliku veaga kuni pooleni viimase kümnendkoha ühikust. Nii näiteks tähendab 27,4 arvu 27,4 ($\pm 0,05$); edasi 0,039 — arvu 0,039 ($\pm 0,0005$) ja $87,9 \cdot 10^6$ — arvu $87,9 (\pm 0,05) \cdot 10^6$.

Iga järgmise ülesande lahendamine koostub kahest osast:

a) saaduse võimaliku vea hindamine ja

b) saaduse määramine lühemal teel, leitud vea poolt määratud peenusega.

1. Anna järgmised summad ja vahed asjakohase täpsusega:

1 ^o . 315,6 + 25,84 + 7,395 + 0,1784
2 ^o . 0,0716 + 29,85 + 3,078 + 81,0
3 ^o . 78,694 — 29,8
4 ^o . 326,7 — 0,0096

2. Anna järgmised korrutised asjakohase täpsusega:

1 ^o . 39,532 · 12,97	4 ^o . 2,518 · 5,736
2 ^o . 82,75 · 9,813	5 ^o . 0,072 · 0,95
3 ^o . 0,376 · 15,48	6 ^o . 0,0034 · 0,058

3. Anna järgmised korrutised asjakohase täpsusega:

1 ^o . 1,4 · 217,93	4 ^o . 0,2435 · 58,031
2 ^o . 7,547 · 3,5	5 ^o . 82,54 · 756,43
3 ^o . 472,6 · 0,473	6 ^o . 0,30201 · 79685

4. Anna järgmised ruudud asjakohase täpsusega:

$$\begin{array}{lll} 1^{\circ}. (15,34)^2 & 3^{\circ}. (1,763)^2 & 5^{\circ}. (0,123)^2 \\ 2^{\circ}. (753,6)^2 & 4^{\circ}. (0,561)^2 & 6^{\circ}. (0,045)^2 \end{array}$$

5. Anna järgmised kuubid asjakohase täpsusega:

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}. (347,8)^3 & 3^{\circ}. (1,473)^3 \\ 2^{\circ}. (16,92)^3 & 4^{\circ}. (0,178)^3 \end{array}$$

6. Anna järgmised jagatised asjakohase täpsusega:

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}. 29,15 : 68,45 & 4^{\circ}. 7,9438 : 0,00273 \\ 2^{\circ}. 39458 : 9,81 & 5^{\circ}. 1 : 0,358 \\ 3^{\circ}. 96,05 : 0,873 & 6^{\circ}. 1 : 0,0074 \end{array}$$

7. Arvuta asjakohase täpsusega järgmised avaldised:

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}. 7,845 \cdot 10^6 + 39,3 \cdot 10^7 + 8,9 \cdot 10^5 & 5^{\circ}. 5,65 \cdot 10^5 \cdot 12,76 \cdot 10^3 \\ 2^{\circ}. 0,036 \cdot 10^4 + 29,3 \cdot 10^3 + 75,6 \cdot 10^4 & 6^{\circ}. 0,086 \cdot 10^3 \cdot 32,4 \cdot 10^4 \\ 3^{\circ}. 3,14159 \cdot 10^4 - 21,5 \cdot 10^3 & 7^{\circ}. 43,5 \cdot 10^7 : 0,072 \cdot 10^3 \\ 4^{\circ}. 1,417 \cdot 10^3 - 0,074 \cdot 10^4 & 8^{\circ}. 7,493 \cdot 10^8 : 8,56 \cdot 10^5 \end{array}$$


8. Liiter õhku kaalub 1,293 g. Kui palju kaalub klassitoas olev õhk?

9. Baromeetritoru seesmine läbimõõt on 0,84 cm. Vaatlusajal seisis elavhõbe 74,8 cm kõrgusel. Elavhõbeda erikaal on 13,60. Kui palju kaalub elavhõbedasamm?

10. Kalliskivi kaal on grammides 0,945. Kui suur on tema kaal karaatides, kui 1 karaat = 206 mg?

11. Maakera keskmine tihedus on 5,5 grammi kuupsentimeetris. Maakera keskmine raadius on 6370 km. Arvuta maakera mass. Kõik arvutused toimeta asjakohase täpsusega.

12. Aastal 1900 hinnati Ameerika Ühendriikide rahvaarvu 70,1 miljoni peale, kogu maa varandust 88517 miljoni dollari peale. Kui suur oli 1900. aastal keskmiselt iga Ühendriikide elaniku kohta tulev varandus?

13. Jalgrattasõitjate võiduajamistee tahetakse valmistada -kujuline, pikkusega 1000 m. Missugune peab olema selle tee otsade raadius, kui rööbikute osade kogupikkus on 800 m?

✓ 14. Aasta pikkus on 365 p. 5 t. 48 m. 46 s.

Avalda sama pikkus päevades.

Maakera orbiidi keskmine läbimõõt on $149,5 \cdot 10^6$ km. Kui suur on maakera liikumise kiirus tiirlemisel ümber päikese?

✓ 15. Kui pika tee kujundab ühe sekundi vältel maakera ekvaatori täpp maakera pöörlemisel ümber enda telje?

Maakera ekvaatori raadius kilomeetrites $r = 6377,4$.

Mitme määrgiga on kohane võtta arvutamisel korrajat π ?

✓ 16. Kui täpsalt saaks arvutada maakera ümbermõõtu, kui võtta arvu π arenduses

$$\pi = 3,1415926535897932384 \dots$$

10 kohta ja eeldada, et maakera raadius on teada täpsalt.

Harjutis XII:

Ligikaudse arvutamise abivalemid.

1. Puust ruutdetsimeetri mudeli külje kontrollmõõtmisel selgus, et mudeli kuju pole täpsalt ruut: üks külg on kuivamisel kokku tõmbunud 0,003 dm võrra, eelmise lähiskülge aga 0,004 dm võrra, nii et detsimeetrites on üks serv $1 - 0,003$, teine $1 - 0,004$.

Kui suur on mudeli praegune pind?

Määra seda, arvutades kord vahesid ja nende korrutist, teine kord rakendades binoomide korrutamiseeskirja. Liigita saaduse liikmed suurusjärkudele vastavalt. Missuguse osa moodustab väiksem liige keskmistest? Kas ta asub veel pinna määramise võimaliku vea

piirides või tunduvalt alla seda? Mitme märgiga on loomulik võtta mudeli pind?

Sõnasta ja lahenda ülesanne üldkujul, märkides ruutdetsimeetri külgede kokkutõmbed α ja β .

2. Olgu α ja β väiksed võrreldes 1-ga. Arenda korrutis $(1 + \alpha)(1 + \beta)$ ja anna tema ligikaudne väärtus, ära jättes teist järku väiksed liikmed.

Sama ülesanne korrutise puhul $(1 + \alpha)(1 - \beta)$.

Määra eelmiste valemite abil järgmised korrutised ligikaudu:

$$\begin{array}{ccc} 1,027 \cdot 1,009 & 1,015 \cdot 1,036 & 1,001 \cdot 1,082 \\ 1,019 \cdot 0,982 & 0,995 \cdot 0,976 & 0,936 \cdot 1,008 \end{array}$$

Hinda igal juhul saaduse viga.

3. Püstküliku mõõted on cm-tes a ja b , vastavalt veaga kuni p ja q %.

Missuguste tőkete vahel peitub püstküliku pind?

Anna tőkete ümmargused väärtused, eeldusel, et p ja q on väikesed (näit. 1 ja 3). Kui täpsalt saab määrata andmeist püstküliku pinda?

4. Tuleta võrdusest $(1 + \alpha)(1 - \alpha) = 1 - \alpha^2$ väikeste α väärtuste puhul maksivad valemid:

$$\frac{1}{1 - \alpha} \approx 1 + \alpha \quad \frac{1}{1 + \alpha} \approx 1 - \alpha.$$

Rakenda need valemid järgmiste jagatiste määramiseks:

$$\begin{array}{ccc} 1 : 1,008 & 1 : 0,991 & 1 : 1,012 \\ 1 : 1,001 & 1 : 0,997 & 1 : 1,005 \end{array}$$

Hinda igal juhul viga.

5. Joonpaisumistegur α temperatuuril t näitab, mille võrra paisub aine valmistatud pikkusmõõt temperatuuri tõustes alates t kraadist 1 kraadi võrra. Nii on temperatuuril 0° tsiingi jaoks $\alpha = 0,000030$, klaasi jaoks $\alpha = 0,000008$.

Olgu temperatuuril 0° mingi varda pikkus l_0 . Olgu varda aine paisumistegur temperatuuril 0° võrdne α -ga.

Olgu teada, et a väga aeglaselt muutub temperatuuriga. Anna valem varda pikkuse l_t arvutamiseks temperatuuril t .

Tuleta siit ligikaudu maksev valem:

$$l_0 = l_t \cdot (1 - a t).$$

6. Poodnik ostab maamehelt toiduainet, mõõtes õigest suurema mõõduga, mille viga küünib p % -ni, ja müüb sama ainet edasi, mõõtes teda õigest kuni q % väiksema mõõduga. Mitmeprotsendilise lubamatu tuluga ta töötab?

7. Olgu a arv, mis võrreldes arvuga a on väike. Näita,

et siis
$$\frac{1}{a+a} \approx \frac{1}{a} \left(1 - \frac{a}{a}\right)$$

ja
$$\frac{1}{a-a} \approx \frac{1}{a} \left(1 + \frac{a}{a}\right).$$

8. Arve suurus on $(a+a)$ krooni, kus a on väike võrreldes arvuga a . Ligikaudsel protsendi arvutamisel, mis moodustab ümmardamisel kustutatud summa a arve suurusel, võetakse murru $\frac{100 a}{a+a}$ asemel lühidalt $100 \frac{a}{a}$. Põhjenda võtte ja selgita tema rakendamist paari arvulise näitega.

9. Olgu $x \approx a$, veega alla a , nii et

$$a - a < x < a + a.$$

Näita, et praktiliselt on ükskõik, kas võtta relatiivset viga murruna $\frac{a}{x}$ või murruna $\frac{a}{a}$.

10. Pudukaupmees tarvitab siidpaela müümisel meetripuud, mis õigest d mm võrra lühem. Mitme meetri võrra on ta aastast petnud oma ostjaid, kellele ta on müü- nud kogusummas 10000 m siidpaela, see õiges mõõdus arvatud?

Sama ülesanne juhul, et müüdnud paela hulk 10000 m on arvatud kaupmehe mõõdus.

Ümmarda saadud valemid eeldusel, et d on väike võrreldes 1 meetriga.

11. Näita, et väikeste a puhul on maksivad valemid:

$$(1 + a)^2 \approx 1 + 2a$$

ja

$$(1 - a)^2 \approx 1 - 2a.$$

Rakenda need valemid järgmiste ruutude arvutamiseks:

$$\begin{array}{ccc} (1,03)^2 & (1,014)^2 & (1,059)^2 \\ (0,984)^2 & (0,907)^2 & (0,995)^2. \end{array}$$

Hinda saaduste viga.

12. Vasest valmistatud ruutdetsimeetri mudeli külg on 1 dm pikk temperatuuril 15° . Määra mudeli pindala temperatuuril 30° , teades, et vase joonpaisumistegur $a = 0,000017$.

13. Klaastoru seesmine läbimõõt on 1 cm temperatuuril 0° . Mille võrra kasvab toru ristilõike pind temperatuuri kasvades 0-ist kuni 100° . Klaasi joonpaisumistegur $a = 0,000008$.

14. Näita, kasutades ligikaudu maksvaid võrdusi 11. ülesandest, et väikeste a väärtuste puhul

$$\sqrt{1 + 2a} \approx 1 + a$$

ja

$$\sqrt{1 - 2a} \approx 1 - a.$$

Rakenda need valemid järgmiste ruutjuurte arvutamiseks:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{1,008} & \sqrt{1,035} & \sqrt{1,020} \\ \sqrt{0,988} & \sqrt{0,992} & \sqrt{0,956}. \end{array}$$

Kontrolli tulemuste headus.

15. Heli kiirust v (meetrit sekundis) õhus, temperatuuril t , määratakse valemi abil

$$v = 332 \sqrt{1 + 0,004 t}.$$

Anna lineaarne valem heli kiiruse ligikaudseks arvutamiseks.

Leia heli kiirus temperatuuridel 10° , 20° , 30° .

16. Näita, et väikeste a väärtuste puhul on maksivad valemid:

$$(1 + a)^3 \approx 1 + 3a$$

ja

$$(1 - a)^3 \approx 1 - 3a.$$

Rakenda need valemid järgmiste kuupide arvutamiseks:

$$(1,04)^3$$

$$(1,019)^3$$

$$(1,034)^3$$

$$(0,992)^3$$

$$(0,909)^3$$

$$(0,957)^3.$$

Hinda saaduste viga.

17. Olgu kuubilise nõu ruumala temperatuuril 4° üks liiter. Mille võrra paisub nõu mahutus temperatuuri tõusmisel 24° -ni, kui nõu seinte aine joonpaisumistegur $\alpha = 0,000\ 009$?

18. Näita, kasutades 16. ülesandes antud ligikaudu maksvaid võrdusi, et väikeste a väärtuste puhul

$$\sqrt[3]{1 + 3a} \approx 1 + a$$

ja

$$\sqrt[3]{1 - 3a} \approx 1 - a.$$

Rakenda need valemid järgmiste kuupjuurte arvutamiseks:

$$\sqrt[3]{1,009}$$

$$\sqrt[3]{1,014}$$

$$\sqrt[3]{1,039}$$

$$\sqrt[3]{0,984}$$

$$\sqrt[3]{0,996}$$

$$\sqrt[3]{0,961}$$

Peatükk IV.

Juuravaldised.

Harjutis XIII:

Juurte arvutamise ülesandeid.

1. Kui x ja y on kaks $\sqrt{2}$ lähisväärtust vastavalt puuduse ja liiaga ja $2 - x^2 < \delta$, samuti $y^2 - 2 < \delta$, siis $y - x < \delta$, s. t. mõlemad lähisväärtused x ja y lähendavad $\sqrt{2}$ veega alla δ .

Näita seda.

2. Olgu $\frac{m}{n}$ üks arvu $\sqrt{2}$ lähendusist puudusega; siis on murd $\frac{m+2n}{m+n}$ suurem kui $\frac{m}{n}$ ja lähendab arvu $\sqrt{2}$ liiaga.

Kui aga $\frac{m}{n}$ on üks arvu $\sqrt{2}$ lähendusist liiaga, siis on murd $\frac{m+2n}{m+n}$ väiksem kui $\frac{m}{n}$ ja lähendab $\sqrt{2}$ puudusega.

Näita seda.

Rakenda lause $\sqrt{2}$ kümne lähisväärtuse koostamiseks.

Leia lähisväärtuste vea ülemmäär eelmises ülesandes tõestatud lause põhjal.

3. 1^o. Näita, et juhul, kui a on väike võrreldes arvuga a , siis

$$\sqrt{a^2 + a} \approx a + \frac{a}{2a}.$$

Rakenda valem järgmiste ruutjuurte lähisväärtuste leidmiseks:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{4,07} & \sqrt{9,15} & \sqrt{36,24} \\ \sqrt{122} & \sqrt{170} & \sqrt{405}. \end{array}$$

Kontrolli saaduste headus.

2^o. Sama ülesanne $\sqrt{a^2 - a}$ kohta.

Anna rida arvulisi näiteid.

4. Näita, et juhul, kui $a \approx b$,

$$\sqrt{ab} \approx \frac{1}{2}(a + b).$$

Rakenda valem järgmiste ruutjuurte ligikaudsete väärtuste leidmiseks:

$$\sqrt{4,9 \cdot 5,1} \quad \sqrt{15,8 \cdot 16,3} \quad \sqrt{0,78 \cdot 0,85}.$$

Kontrolli saaduste headus.

5. Olgu a ja b kaks arvu, mis teineteisest vaid vähe erinevad. Ehita \sqrt{ab} ja näita graafiliselt, et see vaid vähe erineb arvust $\frac{1}{2}(a + b)$.

6. Olgu a arvu \sqrt{A} lähisväärtus (puuduse või liiaga). Olgu a viga, millega a kujutab \sqrt{A} ; siis on $a + a = \sqrt{A}$ ja kujutamisviga $a \approx \frac{A - a^2}{2a}$ ehk teisiti $a \approx \frac{1}{2} \left(\frac{A}{a} - a \right)$.

Näita seda ja anna tulemusele tuginedes arvu \sqrt{A} lähisväärtuste headuse hindamise võte.

7. Võrdkulgse kolmnurga kõrguse h arvutamiseks külje pikkusest a annab

Gerbert (a. 1000 ümber) valemi $h = \frac{6}{7} a$,

Heron (a. 100 ümber e. Kr.) „ $h = \frac{13}{15} a$.

Töökodades tarvitatakse sageli valemit $h = \frac{7}{8} a$.

Missugune neist kolmest valemist on kõige täpsam?

8. Määra Pythagoras' e lause põhjal graafiliselt järgmised ruutjuured:

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{2} & \sqrt{5} & \sqrt{10} & \sqrt{13} & \sqrt{17} \\ \sqrt{3} & \sqrt{15} & \sqrt{24} & \sqrt{11} & \sqrt{85}, \end{array}$$

vaadeldes ruutjuurealust kahe ruudu summana või vahena, ehitades vastav täisnurkne kolmnurk ja mõõtes hoolsalt selle 3. külge.

Hinda 6. ülesandes leitud võtte abil saaduste headus.

9. Määra graafiliselt

$$\sqrt{7} \quad \sqrt{10} \quad \sqrt{22} \quad \sqrt{39} \quad \sqrt{65},$$

kujutades juurealune kahe teguri korrutisena ja otsides kahe vastava lõigu keskmine võrdeline.

Hinda saaduste headus 6. ülesandes leitud võtte abil.

10. Näita, et

$$a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2 + b} < a + \frac{b}{2a}$$

ja et

$$a - \frac{b}{2a-1} < \sqrt{a^2 - b} < a - \frac{b}{2a}.$$

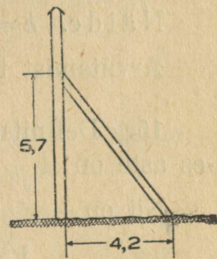
Rakenda võtte järgmiste ruutjuurte lähisväärtuste leidmiseks:

$$\sqrt{10} \quad \sqrt{35} \quad \sqrt{79} \quad \sqrt{147}.$$

Igal juhul hinda leitud lähisväärtuse viga.

Mitu õiget kümnendkohta annab iga lähisväärtus?

11. Olgu arv S teada veaga kuni $q\%$. Olenegu arv S arvust a ruuduliselt: $S = c \cdot a^2$, kus c on arvuiline tegur, mis teada täpsalt või mida võib määrata iga soovitud täpsusega. Näita, et arvu a viga võib küündida $\frac{1}{2}q$ protsendini.



Joonis 6.

12. Telegraafiposti viltuvajumise takistamiseks soovitakse talle rakendada kõrgusel 5,7 ($\pm 0,4$) m tugi (joonis 6),

paigutades see alustäpist kaugusele 4,2 ($\pm 0,5$) m. Kui pikk peab võetama tugi, kui arvata maa sees oleva osa pikkuseks 0,5 ($\pm 0,1$) m?

Arvuta nõutud pikkus asjakohase täpsusega.

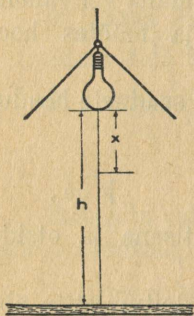
13. Heron'i valem

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

võimaldab kolmnurga pindala arvutamist tema kolme külje a , b ja c järgi. Valemis esinev p tähendab poolt kolmnurga ümbermõõtu.

Olgu dm-tes

$$a = 7,24 \quad (\pm 0,06) \quad b = 9,58 \quad (\pm 0,08) \\ c = 15,84 \quad (\pm 0,06).$$



Joonis 7.

Määra pindala S asjakohase täpsusega.

14. Olgu lambilt (joonis 7) lauale heidetud valguse tugevus, kiirte otsesel langemisel 1 m kõrguselt, märgitud tähega I . Rippugu lamp praegu kõrgusel h m üle laua. Mille võrra peab teda laskma madalamale, et valguse tugevus laual (otse lambi all) kasvaks endisega võrreldes n -kordseks?

Anna lõpptulemusele arvutamiseks soodus kuju.

Näide. $h = 1,9$; $n = 1,5$.

Arvutamist toimetada asjakohase täpsusega.

15. Definitsiooni põhjal on $\sqrt[n]{A}$ niisugune arv, mille n -es aste on A .

Nii on

$$\sqrt{49} = \pm 7, \text{ sest } (\pm 7)^2 = 49,$$

samuti

$$\sqrt[3]{729} = 9, \text{ sest } 9^3 = 729.$$

Leia proovimise teel järgmised juured:

	a	b	c
1 ^o .	$\sqrt{121}$	$\sqrt{289}$	$\sqrt{400}$
2 ^o .	$\sqrt[3]{216}$	$\sqrt[3]{1000}$	$\sqrt[3]{3375}$
3 ^o .	$\sqrt[4]{16}$	$\sqrt[4]{625}$	$\sqrt[4]{2401}$
4 ^o .	$\sqrt[5]{1}$	$\sqrt[5]{32}$	$\sqrt[5]{3125}$

16. 1^o. Näita proovimise teel, et ei saa rahuldada täisarvudega järgmisi nõudeid:

$$x^4 = 3 \qquad y^5 = 20 \qquad z^6 = 32.$$

2^o. Näita, et taandatud murru $\frac{p}{q}$ ükski aste ei saa olla täisarv.

3^o. Järelda eelmisest, et ülalseisvaid nõudeid ei saa rahuldada ka murdarvudega.

4^o. Tarvitades vahemiku poolitamise võtet, rahulda ülalseatud nõuded veaga alla 1, edasi alla $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{8}$.

5^o. Mis mõte on sümboolitel

$$\sqrt[4]{3} \qquad \sqrt[5]{20} \qquad \sqrt[6]{32} ?$$

17. Olgu a võrdlemisi hea \sqrt{N} lähisväärtus. Siis on $\sqrt{N} = a + \alpha_1$, kus α_1 on lähisväärtuse a parandus. Näita, et

$$\alpha_1 \approx \frac{N - a^2}{2a} = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{a} - a \right)$$

Olgu viimase murru ümmargune väärtus a ; siis on $\alpha_1 = a + \beta_1$, s. t. $\sqrt{N} = (a + a) + \beta_1 = b + \beta_1$.

2. paranduse β_1 lähisväärtuse β määrame nagu ennemalt, leiame $\sqrt{N} = (b + \beta) + \gamma_1 = c + \gamma_1$ ja jätkame protsessi, kuni juur leitud soovitava täpsusega, s. t. kuni parandus on väiksem kui lubatav viga.

Sõnasta öeldu põhjal \sqrt{N} lähisväärtuste ja moodustamise eeskiri.

Rakenda võte järgmiste ruutjuurte leidmiseks:

$$\sqrt{17} \quad \sqrt{52} \quad \sqrt{145} \quad \sqrt{3987}.$$

18. Olgu a võrdlemisi hea $\sqrt[3]{N}$ lähisväärtus. Siis on $\sqrt[3]{N} = a + a_1$, kus a_1 on lähisväärtuse a parandus.

Näita, et
$$a_1 \approx \frac{N - a^3}{3a^2}.$$

Olgu viimase murru ümmargune väärtus a ; siis on

$$a_1 = a + \beta_1 \text{ ja } \sqrt[3]{N} = (a + a) + \beta_1 = b + \beta_1.$$

2. paranduse β_1 lähisväärtuse β määrame nagu enne-
malt ja leiame $\sqrt[3]{N} = (b + \beta) + \gamma_1 = c + \gamma_1$ ning jätkame protsessi, kuni juur leitud soovitava täpsusega, s. t. kuni parandus on väiksem kui lubatav viga.

Arvuta sel viisil

$$\sqrt[3]{10} \quad \sqrt[3]{67} \quad \sqrt[3]{1019}.$$

19. 1^o. Näita, et juhul, kui δ on väike võrreldes arvuga a ,

$$\sqrt[3]{a^3 + \delta} = a + \frac{\delta}{3a^2}.$$

Rakenda valem järgmiste kuupjuurte lähisväärtuste leidmiseks:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[3]{8,012} & \sqrt[3]{27,15} & \sqrt[3]{125,19} \\ \sqrt[3]{0,217} & \sqrt[3]{731} & \sqrt[3]{1005}. \end{array}$$

Kontrolli saaduste headus.

2^o. Sama ülesanne $\sqrt[3]{a^3 - \delta}$ kohta.

Anna rida arvulisi näiteid.

20. Olgu arv V teada veaga kuni $q\%$. Olenegu arv V arvust a kuubiliselt: $V = c \cdot a^3$, kus c on arvuline tegur, mis teada kas täpsalt või mida saab määrata iga soovitud täpsusega. Näita, et võrdusest $V = c \cdot a^3$ määratud arvu a viga võib küündida $\frac{1}{3} q$ protsendini.

21. Kuubi ruumala on $340 (\pm 10) \text{ dm}^3$. Arvuta kuubi külge asjakohase täpsusega.

22. Kui suur on poolkera-kujulise katla läbimõõt, mille mahutus on $100 (\pm 2)$ liitrit? Anna vastus asjakohase täpsusega.

Harjutis XIV:

Juuravaldiste teisendamise ülesandeid.

1. Tuginedes $\sqrt[n]{a}$ definitsioonile anna järgmistele juuravaldistele võimalikult lihtne kuju:

	a	b	c	d
1 ^o .	$(\sqrt{7})^2$	$(\sqrt[3]{15})^3$	$(\sqrt[5]{23})^5$	$(\sqrt[n]{a})^n$
2 ^o .	$\sqrt{17^2}$	$\sqrt[3]{11^3}$	$\sqrt[4]{3^4}$	$\sqrt[n]{a^n}$
3 ^o .	$\sqrt{19^4}$	$\sqrt[3]{12^6}$	$\sqrt[5]{2^{10}}$	$\sqrt[n]{a^{mn}}$
4 ^o .	$4\sqrt{25}$	$5\sqrt[3]{8}$	$2\sqrt[4]{81}$	$c\sqrt[p]{c^{pq}}$
5 ^o .	$(3\sqrt{a})^2$	$(2\sqrt[3]{3})^3$	$(c\sqrt[3]{c})^3$	$(c^2\sqrt[n]{c^{3n}})^n$

2. Tuginedes $\sqrt[n]{a}$ definitsioonile anna järgmistele juuravaldistele võimalikult lihtne kuju:

	a	b	c	d
1 ^o .	$\sqrt{2\frac{1}{4}}$	$\sqrt{5\frac{4}{9}}$	$\sqrt{7\frac{9}{16}}$	$\sqrt{1\frac{1}{15}}$
2 ^o .	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{6}{\sqrt{3}}$	$\frac{15}{\sqrt{5}}$	$\frac{28}{\sqrt{14}}$

$$\begin{array}{l}
 3^0. \quad \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \frac{2\sqrt{11}}{33} \qquad \frac{a}{b\sqrt{a}} \qquad \frac{c^2}{a\sqrt{c}} \\
 4^0. \quad \sqrt[3]{2\frac{10}{27}} \qquad \sqrt[3]{15\frac{5}{8}} \qquad \frac{a}{(\sqrt[3]{a})^2} \qquad \frac{a^3}{\sqrt[3]{a}}
 \end{array}$$

3. Tuginedes tõsiasjale, et $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ja ümberpöörduvalt, taanda järgmised juuravaldised:

a	b	c
1 ⁰ . $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$	$\sqrt{44} \cdot \sqrt{66}$
2 ⁰ . $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{32}$	$\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{56}$	$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{100}$
3 ⁰ . $\sqrt{a} \cdot \sqrt{3a}$	$a\sqrt{b} \cdot \sqrt{b^3}$	$\sqrt{ab} \cdot \sqrt{a^2b}$
4 ⁰ . $\sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[3]{4a^2}$	$\sqrt[3]{5b} \cdot \sqrt[3]{b^5}$	$\sqrt[3]{24b^2} \cdot \sqrt[3]{9b^2}$

4. Tuginedes tõsiasjale, et $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, taanda järgmised juuravaldised:

a	b	c	d
1 ⁰ . $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}$	$\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{x}}$
2 ⁰ . $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}}$	$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}}$	$\frac{\sqrt[3]{c^7}}{\sqrt[3]{c}}$	$\frac{\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{ax^2}}$

5. Avalda järgmised arvud võimalikult lihtsate juurte kaudu:

1 ⁰ . $\sqrt{40}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{50}$
2 ⁰ . $\sqrt{a^3}$	$\sqrt{b^5}$	$\sqrt{c^2 n^3}$	$\sqrt{f^4 g^5}$
3 ⁰ . $\sqrt[3]{24}$	$\sqrt[3]{320}$	$\sqrt[3]{16a^5}$	$\sqrt[3]{a^2 x^3}$
4 ⁰ . $\sqrt[4]{4a^2 b^3}$	$\sqrt[4]{27 c^5}$	$\sqrt[4]{48}$	$\sqrt[4]{64 a^5}$

6. Korralda järgmistes ridades esinevad arvud nende suuruse järgi, võttes esinevate juurte väärtused positiivsetena ja küllaldase hulga kümnendkohtadega:

$$1^{\circ}. 5\sqrt{3} \text{ ja } 3\sqrt{5} \qquad 3^{\circ}. \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{5} \text{ ja } \frac{1}{4}\sqrt{7}$$

$$2^{\circ}. \sqrt{65}, 8 \text{ ja } 3\sqrt{7} \qquad 4^{\circ}. 5, 2\sqrt{6} \text{ ja } \frac{1}{5}\sqrt{501}$$

7. Kasutades tõsiasja, et

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m} \text{ ja } \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{b^n},$$

saab juurte $\sqrt[n]{a}$ ja $\sqrt[m]{b}$ suurusjärjestust otsustada a^m ja b^n suurusjärjestuse põhjal.

Seda tähele pannes, korralda järgmised juured kasvava suuruse järgi, võttes kõiki positiivsetena:

$$1^{\circ}. \sqrt[3]{7} \text{ ja } \sqrt[3]{19} \qquad 3^{\circ}. \sqrt{2}, \sqrt[3]{3} \text{ ja } \sqrt[4]{4}$$

$$2^{\circ}. \sqrt{22} \text{ ja } \sqrt[3]{100} \qquad 4^{\circ}. \sqrt{14}, \sqrt[3]{2} \text{ ja } 2\sqrt[3]{6}$$

8. Arvutamine andis:

$$\begin{array}{|l|l|l|l|} \hline \sqrt{2} \approx 1,414 & \sqrt{3} \approx 1,732 & \sqrt{5} \approx 2,236 & \sqrt{7} \approx 2,646 \\ \hline \sqrt[3]{2} \approx 1,260 & \sqrt[3]{3} \approx 1,442 & \sqrt[3]{5} \approx 1,710 & \sqrt[3]{7} \approx 1,913, \\ \hline \end{array}$$

kõik veaga alla $\frac{1}{2}$ tuhandendikku.

Arvuta nende andmete põhjal alljärgnevad arvud, võttes esinevaid juuri positiivsetena. Hinda tulemuste vigu.

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 1^{\circ}. \sqrt{5} + \sqrt{7} & \sqrt{7} - \sqrt{3} & \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5} & \sqrt{5} - \sqrt[3]{3} \end{array}$$

$$2^{\circ}. \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \qquad \sqrt{6} \qquad \sqrt{35} \qquad \sqrt[3]{35}$$

$$3^{\circ}. \sqrt{18} \qquad \sqrt{98} \qquad \sqrt[3]{81} \qquad \sqrt[3]{448}$$

$$4^{\circ}. \sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{32}$$

$$5^{\circ}. 2\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - 3\sqrt{75}$$

$$6^{\circ}. \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250}$$

9. Tarvitades ruutjuurte tabelit arvuta järgmised avaldised veaga alla 0,01, andes neile eeskätt arvutamiseks kohane kuju:

$$\begin{array}{ll}
 1^0. (\sqrt{2} - 1) \sqrt{2} & 5^0. (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2 \\
 2^0. (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \sqrt{3} & 6^0. (\sqrt{11} + \sqrt{10})(\sqrt{11} - \sqrt{10}) \\
 3^0. (\sqrt{3} + 1)^2 & 7^0. (2 - \sqrt{8})^3 \\
 4^0. (\sqrt{10} - \sqrt{7})^2 & 8^0. (2\sqrt{7} - 3\sqrt{3})^3
 \end{array}$$

10. Toimeta järgmised korrutamised:

$$\begin{array}{ll}
 1^0. (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) & 2^0. (3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) \\
 3^0. (\sqrt{uv} - 1)(\sqrt{uv} + 1) & 5^0. \left(\sqrt{\frac{p}{2}} + \sqrt{\frac{q}{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{p}{2}} - \sqrt{\frac{q}{3}}\right) \\
 4^0. (s - 2\sqrt{uv})(s + 2\sqrt{uv}) & 6^0. \left(1 + \frac{\sqrt{st}}{u}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{st}}{u}\right)
 \end{array}$$

11. Tõesta, tuginedes ruutvõrrandi lahendusvalemile, et ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendite x_1 ja x_2 summa on võrdne $(-p)$ -ga ja samade lahendite korrutis on võrdne q -ga.

12. Tõesta, tuginedes ruutvõrrandi lahendusvalemile, et ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendite x_1 ja x_2 summa on võrdne arvuga $\left(-\frac{b}{a}\right)$ ja samade lahendite korrutis on võrdne arvuga $\left(+\frac{c}{a}\right)$.

13. Koosta ruutvõrrandid, mille lahendid on:

$$\begin{array}{ll}
 1^0. 1 + \sqrt{5} \text{ ja } 1 - \sqrt{5} & 3^0. \sqrt{2} \text{ ja } \sqrt{3} \\
 2^0. 3 + \sqrt{2} \text{ ja } 3 - \sqrt{2} & 4^0. -7 + 3\sqrt{2} \text{ ja } 5 - 3\sqrt{2}
 \end{array}$$

14. Lahenda järgmised võrrandid ja kontrolli saadused:

$$\begin{array}{ll}
 1^0. \sqrt{x^2 + 11} = x + 1 & 6^0. \sqrt{x + 9} + \sqrt{x} = 9 \\
 2^0. \sqrt{2x + 3} = x & 7^0. x + \sqrt{x - 7} = 19 \\
 3^0. \sqrt{5x + 6} = \sqrt{6x + 4} & 8^0. 2\sqrt{3x - 5} = 3\sqrt{x + 1} \\
 4^0. \sqrt{x - 5} = 5 - \sqrt{x} & 9^0. \sqrt{x + \sqrt{4x + 9}} - \sqrt{x + 5} = 0 \\
 5^0. \sqrt{x + 5} - \sqrt{x} = 1 & 10^0. \sqrt{u^2 - 16} - \sqrt{u^2 - 9} = 7
 \end{array}$$

15. On tõsi, et

$$\sqrt{5 \frac{5}{24}} = 5 \sqrt{\frac{5}{24}} \quad \text{ja} \quad \sqrt{12 \frac{12}{143}} = 12 \sqrt{\frac{12}{143}}.$$

Üldiselt aga ei ole

$$\sqrt{a + \frac{a}{b}} = a \sqrt{\frac{a}{b}},$$

nagu näidetest kerge veenduda.

Missugusel tingimusel on viimane võrdus siiski maksev?

16. Näita, et $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \neq \sqrt[3]{a+b}$, kui $a \neq 0$ ja $b \neq 0$.

17. On tõsi, et

$$\sqrt[3]{2 \frac{2}{7}} = 2 \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \quad \text{ja} \quad \sqrt[3]{3 \frac{3}{26}} = 3 \sqrt[3]{\frac{3}{26}}.$$

Üldiselt aga ei ole

$$\sqrt[3]{a + \frac{a}{b}} = a \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Näita seda.

Missugusel tingimusel on viimane võrdus ometi maksev?

18. Tarvitades esimese kümne täisarvu ruutjuurte ja kuupjuurte tabelit, arvuta järgmiste juuravaldiste väärtused, andes avaldistele selleks eriti kohane kuju. Kõik juured eelda positiivsetena. Hinda saaduste vigu.

	a	b	c	d
1 ^o .	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{7}{\sqrt{3}}$	$\frac{10}{\sqrt{7}}$
2 ^o .	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{7}}$
3 ^o .	$\sqrt[3]{\frac{1}{24}}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{49}}$	$\frac{4}{\sqrt[3]{81}}$	$\sqrt[3]{\frac{40}{27}}$

19. Tarvitades ruutjuurte tabelit, arvuta järgmiste juuravaldiste väärtused, andes avaldistele selleks eriti kohane kuju. Juured eelda positiivsetena.

Hinda saaduste vigu.

	a	b	c
1 ^o .	$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$	$\frac{14}{3+\sqrt{2}}$	$\frac{11}{5-\sqrt{3}}$
2 ^o .	$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$	$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$	$\frac{10}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$
3 ^o .	$\frac{1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$	$\frac{38}{3\sqrt{11}-4\sqrt{5}}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}$
4 ^o .	$\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$	$\frac{6+\sqrt{7}}{6-2\sqrt{7}}$

20. Anna järgmistele murdudele kuju, milles nimetaja on ratsionaalne.

1 ^o . $\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}$	3 ^o . $\frac{\sqrt{u}+\sqrt{v}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$
2 ^o . $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$	4 ^o . $\frac{2\sqrt{u}-3\sqrt{v}}{3\sqrt{u}+2\sqrt{v}}$

21. Lihtsusta järgmised avaldised, andes saadus ratsionaalse nimetajaga kujus:

1 ^o . $\frac{1}{m} - \frac{1}{m+\sqrt{2}}$	3 ^o . $\frac{1}{p\sqrt{5}} - \frac{1}{p\sqrt{5}+1}$
2 ^o . $\frac{1}{n\sqrt{3}-1} - \frac{1}{n\sqrt{3}}$	4 ^o . $\frac{\sqrt{2}}{p-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

22. Jagada suurus kuldloikes tähendab jaotada ta kahte ossa nõnda, et kogu suurus suhtuks suuremasse ossa, nagu suurem osa suhtub väiksemasse. Määra need osad.

Anna edasi leitud osade suhe, teisenda viimane nõnda, et oleks hõlpus tema arvutamine, anna selle suhte jaoks mõned lähisväärtused ja hinda viimaste vigu.

Peatükk V.

Eksponent-olenevus ja logaritm.

Harjutis XV:

Eksponent-olenevus ja geomeetriline rida.

1. Tarbeaine lastakse valmistajalt turule hinnaga h_0 senti, jõuab tarvitaja kätte aga alles vaheltkauplejate kaudu. Oletame, et viimased on kõik liigkasuvõtjad ja töötavad ühesuguse lubamatu kasuprotsendiga: 100%. Missuguse hinnaga h_1 jõuab tarbeaine ostja kätte, kui ta tuleb ühe vaheltkaupleja kaudu? — missuguse hinnaga h_2 , kui kahe kaudu? — missuguse hinnaga h_3 , kui kolme kaudu? — missuguse hinnaga h_n , kui n vaheltkaupleja kaudu?

Kui suur on hinna h kasvamistegur vaheltkauplejate arvu suurenemisel 1 võrra?

Kuidas kujuneks lugu, kui kasuprotsendi määr on 50, 25, 10?

2. Suur osa algelisi olevusi — pisikuid, nagu infusoorid ja bakterid, paljunevad jagumise teel: kui olud arenemiseks soodsad, saab kindlate ajavahemikkude tagant igast olevusest kaks. Olgu arenemisolud säärased, et ühest jagunemisest teisele kulub parajasti 1 tund. Arvuta pisikute hulk, mis tekib h_0 pisikust 1., 2., 3., ... n -da tunni lõpuks.

Anna tunni numbri n ja temale vastava pisikute hulga h_n side.

Kujuta kohaselt valitud mõõtkavas arvu h_n käik olenevuses arvust n vahemikus $0 \leq n \leq 10$.

3. Püsivate ilmastikuoludega maadel võib viljasaaki eelarvestada külvatud viljahulga ja „seemnearvu“ järgi. Andku maa q seemet. Kuidas kasvaks viljasaak ühelt aastalt teisele, kui alguses külvatakse S_0 hl ja järgmistele aastatele saagid kõik täielikult seemneks kasutatakse?

Avalda n -da aasta saagisuurus S_n aastaarvu n kaudu.

Kui suur on saagi kasvamisegur aastalt aastale?

Kuidas kujuneb asi juhtudel

$$q = 3; 5; 8; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}?$$

4. 1^0 . Iga arvusüsteemi alg-ühikuks on üks. Olgu teatud arvusüsteemi aluseks täisarv q . Avalda selle arvusüsteemi n -järku liitühik u_n alg-ühiku u_0 , aluse q ja järgunäitaja n kaudu.

Lahenda ülesanne eeskätt kümnesüsteemi näitel.

Erijuhud: $q = 12; 20; 60; 2; 3; 5; 8$.

2^0 . Harjutises IV, ülesandes 4. antud tabelit veergude järgi lugedes tuleme astmelisele olenevusele $y = x^n$. Sama tabelit ridade järgi lugedes jõuame eksponentsiaal-olenevusele $y = n^x$.

Kirjuta üksikutele veergudele ja ridadele vastavad olenevused valemina.

5. Pankades on viisiks hoiusummale aasta lõpul juurde arvata selle summa kantud intressid. Oletame, et aasta-alul paigutatakse pankka k_0 krooni p protsendiga. Milleni kasvab kapital 1., 2., 3., ... n -da aasta lõpuks?

Leitud avaldistele anna arvutamiseks kohane kuju.

Kuidas kujuneksid leitud avaldised erijuhul $k = 1$, $p = 10$?

Kujuta graafiliselt ühe krooni kasvamise käik tehtud oletusel.

6. Linn omandab linna külje all oleva endise mõisamaa ja jagab ta ehituskruntideks. Ehituse hoogsä arene-

mise tõttu kasvab kruntide väärtus iga aasta ümmarguselt $p\%$ tema väärtusest aasta alul. Olgu k -kroonise krundi väärtused 1., 2., 3., ... n aasta pärast vastavalt $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$.

Anna viimaste avaldised.

Näide. $k = 4000$; $p = 10$; $n = 8$. Määra v .

7. 1°. Eesti rahva juurdekasvu arvestatakse aastas 1,7 inimesega tuhande elaniku kohta.

Olgu Eesti elanikkude arv praegu E_0 . Kui suur on ta 1, 2, 3, ... n aastat hiljemini, kui lugeda rahva aastast juurdekasvu (1000 elaniku kohta) muutumatuks kogu selle aja kestes?

Kui suur on Eesti rahva-arvu aastane kasvamistegur?

2°. Aastane rahva-arvu juurdekasv on promilledes

Prantsusmaal	1,4	Soomes	9,4
Rootsis	5,1	Poolas	13,0
Lätis	7,2	Venes	22,1.

Kirjuta valemid, mis määravad nende maade rahva-arvu n aasta pärast, kui nende praegune rahva-arv on vastavalt $F_0, R_0, L_0, S_0, P_0, V_0$.

Kui suured on nende riikide rahva-arvude aastased kasvamistegurid?

8. Piiritusevaras võtab täiest l -liitrisest pudelist murdosa $\frac{p}{q}$ piiritust, valades varguse varjamiseks pudelis puuduva osa veega täis. Nädala pärast võtab ta uuesti pudeli murdosa $\frac{p}{q}$ seal olevast piirituselahusest ja valab pudelis puuduva osa uuesti veega täis. Järgmisel nädalal toimetab ta samuti, ja nii edasi.

Kui palju puhast piiritust on varga poolt võetud lahuseosas n -da varguse korral?

9. Soe keha paigutatakse vee ja sulava jää segusse. Keha jahtumine toimub siis nõnda, et tema temperatuur iga minuti lõpuks väheneb murru $\frac{p}{q}$ võrra temperatuurist

selle minuti alul. Olgu keha temperatuur katse alul, jäässe paigutamisel, t_0 ; tema temperatuur n -da minuti lõpul peale katse algust t_n . Anna arvude n ja t_n side.

Kui suur on temperatuuri kahanemistegur minutilt minutile?

10. Päikesekiired tungivad läbi klaasplaatide kihi; sellejuures läheb igas plaadis kaduma murdosa $\frac{p}{q}$ plaadile tulnud valgusest. Olgu plaatide kihile langeva valguse tugevus T_0 ; plaatide hulk kihis n . Avalda 1., 2., 3., ... n -dast plaadist läbitungiva valguse tugevused $T_1, T_2, \dots T_n$ andmete kaudu.

Kui suur on valguse tugevuse kahanemistegur plaadilt plaadile?

Kuidas kujuneb T_n arvutamise valem erijuhul $\frac{p}{q} = \frac{1}{10}$?

11. Poeglapse kaal muutub eaga, nagu tabel näitab:

Vanadus aastates	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Kaal kg-des	23,0	25,0	27,5	30,0	32,5	35,0	37,5	41,0	45,0

Määra iga aasta kohta kaalu kasvamistegur ja keskmine kasvamistegur (kolme kohaga) kogu ajavahemiku jaoks 7 kuni 15 aastat. Anna poeglapse kaalu kasvamise seadus selles ajavahemikus. Kas sama kasvamiseseadus jääb maksvaks surmani?

12. Alljärgnev tabel näitab baromeetrisamba kõrgusi õhkutõusmisel iga 100 meetri tagant:

Kõrgus üle merepinna m-tes	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Baromeetrisambas mm-tes	760	751	742	733	724	716	707	699	690	682	674

Määra baromeetrisamba kahanemistegur (veaga alla 0,01) ja anna seadus, mis valitseb õhurõhu käiku kõrguse muutudes.

13. 1^o. Olgu suuruse lähteväärtus s_0 ; suuruse kasvamisestegur ajaühiku kohta olgu q . Anna suuruse väärtus s_n n -da ajaühiku lõpul.

Anna valem q määramiseks andmeist s_0 , n ja s_n .

$$2^0. s_2 = s_0 \cdot 1,4. \text{ Kui suur on } q?$$

$$3^0. s_3 = s_0 \cdot 2,5. \text{ Kui suur on } q?$$

$$4^0. s_4 = s_0 \cdot 3,8. \text{ Kui suur on } q?$$

15. Näita,

1^o. et aritmeetilises reas on iga liige kahe temaga kõrvuti seisva liikme aritmeetiline keskmine;

2^o. et geomeetrilises reas on iga liige kahe temaga kõrvuti seisva liikme geomeetiline keskmine.

16. Näita,

1^o. et aritmeetilises reas $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ on

$$a_k + a_{n-k} = a_0 + a_n$$

$$\text{ja } a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_0 + a_n}{2} \cdot (n + 1);$$

2^o. et geomeetrilises reas $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ on

$$a_k \cdot a_{n-k} = a_0 \cdot a_n$$

$$\text{ja } a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \dots a_n = \sqrt{(a_0 \cdot a_n)^{n+1}}.$$

Sõnasta tulemused ja võrdle neid kuju poolest.

Harjutis XVI:

Astme mõiste üldistamine: negatiivne astmenäitaja.

1. Olgu linna elanikkude praegune arv E_0 ja elanikkude arvu aastane kasvamisestegur q . Tähendagu $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ elanikkude arvu 1, 2, 3, \dots, n aasta pärast. Missuguses tähenduses oleks loomulik mõista sümboleid $E_{-1}, E_{-2}, E_{-3}, \dots, E_{-n}$? — eriti ka sümboolit E_0 ?

Näita, et

$$E_1 = E_0 \cdot q, \quad E_2 = E_0 \cdot q \cdot q, \quad \dots \quad E_n = E_0 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_n \text{ tegurit}$$

ja et

$$E_{-1} = E_0 \cdot \frac{1}{q}, \quad E_{-2} = E_0 \cdot \frac{1}{q \cdot q}, \quad \dots \quad E_{-n} = E_0 \cdot \frac{1}{\underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_n \text{ tegurit}}$$

Esimese rea arve kirjutatakse lühendatult nõnda:

$$E_1 = E_0 \cdot q^1, \quad E_2 = E_0 \cdot q^2, \quad \dots \quad E_n = E_0 \cdot q^n.$$

Kuidas tuleks kirjutada lühendatult teise rea arve, et jääks püsima endiste valemite väline kuju?

Kahe valemite rea vahelülina seisaks

$$E_0 = E_0 \cdot q^0.$$

Mis tähenduses tuleb mõista sümbolit q^0 ?

2. Kümmeaastat tagasi headtegevaks otsustab kingitud kapital kasvab liitprotsentidel. Olgu tema praegune väärtus V_0 ja tema aastane kasvamisegur q . Tähendagu $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ kapitali väärtust 1, 2, 3, \dots, n aasta pärast. Missuguses tähenduses oleks loomulik mõista sümboleid $V_{-1}, V_{-2}, V_{-3}, \dots, V_{-n}$? — eriti ka sümbolit V_0 ?

Näita, et

$$V_1 = V_0 \cdot q, \quad V_2 = V_0 \cdot q \cdot q, \quad \dots \quad V_n = V_0 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_n \text{ tegurit}$$

ja et

$$V_{-1} = V_0 \cdot \frac{1}{q}, \quad V_{-2} = V_0 \cdot \frac{1}{q \cdot q}, \quad \dots \quad V_{-n} = V_0 \cdot \frac{1}{\underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_n \text{ tegurit}}$$

Esimese rea arve kirjutame lühendatult nõnda:

$$V_1 = V_0 \cdot q^1, \quad V_2 = V_0 \cdot q^2, \quad \dots \quad V_n = V_0 \cdot q^n.$$

Kuidas tuleks kirjutada lühendatult teise rea arve, et jääks püsima endiste valemite väline kuju?

Kahe valemite rea vahelülina seisaks

$$V_0 = V_0 \cdot q^0.$$

Mis tähenduses tuleb mõista sümbolit q^0 ?

3. Meie arvusteemi ühikud on vähenevas järjekorras:

liitühikud ... 10000, 1000, 100, 10;

algühik 1;

edasi kümnendosaad $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$

Esimese rea ühikuid järjestatakse järkude järgi:

... 4., 3., 2., 1. järk.

Missugust järku oleksid 2. ja 3. rea ühikud, kui järkude rida pikendada harilikul viisil üle nulli negatiivsele poolele?

Kui esimese rea n -dat järku ühikut tähistada U_n , siis on $U_n = \underbrace{1000 \dots 0}_{n \text{ nulli}}$. Mis tuleb mõista sümboli U_{-n} all?

Liitühik $U_n = 10^n$. Kuidas tuleks kirjutada U_{-n} avaldist, et püsima jääks eelmise valemi väline kuju ka negatiivse n -i puhul?

Mis arvu tuleb mõista sümboli 10^0 all?

4. Positiivsete astmenäitajate puhul on maksivad seadused:

$$1^0. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$4^0. (ab)^n = a^n b^n$$

$$2^0. a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m > n)$$

$$5^0. (a : b)^n = a^n : b^n$$

$$3^0. a^m : a^n = 1 : a^{n-m} \quad (m < n)$$

$$6^0. (a^m)^n = a^{mn}$$

Eelmiste ülesannete puhul näis loomulik olevat lugeda a^0 võrdseks arvuga 1 ja a^{-n} võrdseks arvuga $1 : a^n$.

Kas jäävad seesuguse kokkuleppe puhul ülalantud seadused maksvaks ka null- ja negatiivsete astmenäitajate puhul?

5. Kirjuta järgmised avaldised, tarvitades seejuures vaid positiivseid astmenäitajaid:

$$1^0. x^1 + x^{-1} \qquad 3^0. ax^0 + bx^{-1} + cx^{-2} + dx^{-3}$$

$$2^0. a^2 + 2ax^{-1} + x^{-2} \qquad 4^0. \frac{a_0}{x^0} + \frac{a_1}{x^{-1}} + \frac{a_2}{x^{-2}} + \frac{a_3}{x^{-3}}$$

6. Arvuta järgmiste sümboolite väärtused:

	a	b	c	d
1 ⁰ .	2 ⁻³	5 ⁻²	3 ⁻³	10 ⁻⁵
2 ⁰ .	$(\frac{1}{4})^{-2}$	$(\frac{2}{3})^{-5}$	$(1\frac{1}{5})^{-3}$	$(3\frac{1}{3})^{-4}$
3 ⁰ .	(1,3) ⁻²	(0,6) ⁻¹	(5,4) ⁻²	(6,8) ⁻²
4 ⁰ .	2 ⁴ · 3 ⁻²	5 ³ · 3 ⁻⁵	(-1) ⁴ · 7 ⁻³	(-9) ⁻¹ · (10) ⁻²
5 ⁰ .	$(\frac{5}{8})^{-1} \cdot 2^{-3}$	$(\frac{16}{3})^{-2} \cdot 4^4$	$(\frac{1}{8})^{-1} \cdot 6^3$	(0,2) ⁻³ · 10 ²

7. Anna järgmistele avaldistele võimalikult lihtne kuju, nõnda et saaduses ei esineks astmenäitajana 0 ega negatiivsed arvud:

	a	b	c
1 ⁰ .	$a^7 \cdot a^{-5}$	$3b^3 \cdot 4b^{-2}$	$0,5c^{-3} \cdot 0,4c^{-2}$
2 ⁰ .	$a^4 \cdot a^{-3}$	$\frac{2}{3}b^{-2} \cdot \frac{3}{2}b^{-5}$	$1,8c \cdot 0,06c^{-2}$
3 ⁰ .	$\frac{a^0}{a^{-2}}$	$\frac{4}{5} \frac{b^{-2}}{b^3}$	$3,5 \frac{c^2}{c^{-3}}$
4 ⁰ .	$(a^2)^{-3}$	$(b^{-1})^{-2}$	$(c^{-2})^3$
5 ⁰ .	$(a^2x^{-1})^2$	$(b^3y^{-2})^{-2}$	$(cz^3)^{-4}$

8. Näita, et ikka on:

$$1^0. a^{x-y} \cdot a^{y-z} \cdot a^{z-x} = 1$$

$$2^0. \left(\frac{p}{q}\right)^{-n} = \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$$3^0. a^n > b^n, \text{ kui } a > b, n > 0$$

$$a^n < b^n, \text{ kui } a > b, n < 0.$$

9. Üleminek peenematele mõõtudele meetrisüsteemis toimub kõige hõlpsamalt kümne astmete tarvitamisel: näiteks on

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}, \quad 1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}, \quad 1 \text{ kg} = 10^6 \text{ mg} \text{ jne.}$$

Anna analoogsed valemid üleminekuks peenematelt mõõtudelt jämedamatele, ja nimelt

mm-telt	m-tele	mm ³ -telt	liitritele
dm-telt	km-tele	cm ³ -telt	m ³ -tele
m ² -telt	mm ² -tele	g-delt	kg-dele
km ² -telt	cm ² -tele	mg-delt	tonnidele.

10. Rakendades eelmises ülesandes antud sidemeid kirjutame standard-kirjutusviisil:

$$15,2 \text{ km} = 15,2 \cdot 10^3 \text{ m} \qquad 3,47 \text{ cm}^2 = 3,47 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$0,28 \text{ kg} = 0,28 \cdot 10^6 \text{ mg} \qquad 18,5 \text{ mg} = 18,5 \cdot 10^{-9} \text{ t.}$$

Avalda samal viisil:

1 ^o . 5,67 m	cm-tes	5 ^o . <i>a</i> km	cm-tes
2 ^o . 0,83 kg	g-des	6 ^o . <i>s</i> dm ²	mm ² -tes
3 ^o . 18,2 m	km-tes	7 ^o . <i>v</i> l	m ³ -tes
4 ^o . 0,56 cm	m-tes	8 ^o . <i>p</i> g	t-des.

11. Varda pikkuse mõõtmine andis 78,4 cm, veaga mitte üle 0,05 cm. Avalda saadus ühes vea ülemmääraga mm-tes, dm-tes, m-tes, km-tes.

12. Kullast ehiseseme kaaluks osutus 22,43 ($\pm 0,005$) g. Avalda mõõtmissaadus ja vea ülemmäär mg-des, kg-des, tonnides.

13. Avalda standard-kirjutusviisil

1 ^o . 5,37 ($\pm 0,005$) m ²	mm ² -tes
2 ^o . 0,28 ($\pm 0,005$) m ³	mm ³ -tes
3 ^o . 3,5 ($\pm 0,08$) hl	cm ³ -tes
4 ^o . 12 ($\pm 0,5$) mg	kg-des
5 ^o . 0,54 ($\pm 0,015$) cm ²	km ² -tes
6 ^o . 234 ($\pm 0,8$) kgm	gcm-tes
7 ^o . 94 (± 2) kilovatt-tundi	vattsekundites.

14. Avalda 1. veerus seisvad andmed kahes järgmises veerus nimetatud ühikutes:

1 ^o .	4,5 km/tund	m/min	cm/sec
2 ^o .	15,3 l/min	l/sec	hl/tund
3 ^o .	10,3 g/cm ²	g/cm ²	mg/mm ²
4 ^o .	7,8 g/cm ³	kg/dm ³	t/m ³
5 ^o .	120 hobusejõudu	kgm/sec-tes	

15. Kirjuta järgmiste seaduste avaldised jagamisjärki tarvitamata:

a) Boyle'i seadus: $p = \frac{c}{v}$;

b) seadus, mille järgi väheneb tühjuses valguse tugevus J kauguse r kasvades valgusallikast:

$$J = \frac{k}{r^2};$$

c) m g gaasi tihedust t määrav seadus, kui gaas on kuubilises nõus muutuva servaga s :

$$t = \frac{m}{s^3}.$$

16. Kujuta funktsioonide käigud:

$$y_1 = x^{-1} \quad y_2 = x^{-2} \quad y_3 = x^{-3} \quad y_4 = x^{-4}$$

ühes ja samas teljestikus, vahemikus $-3 \leq x \leq +3$, ja seleta joonisele tuginedes nende käikude iseärasused.

17. Kümnenarve 249, 35,7 ja 0,825 saab kirjutada kujul:

$$2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0, \quad 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1}, \\ 8 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3},$$

või veel ülevaatlikumalt, kui võtta kümne tähisena täht k , kujul:

$$2k^2 + 4k^1 + 9k^0, \quad 3k^1 + 5k^0 + 7k^{-1}, \quad 8k^{-1} + 2k^{-2} + 5k^{-3}.$$

Kirjuta samal viisil arvud:

58,43 301,705 0,00948.

18. Kirjuta eelmises ülesandes näidatud viisidel arvud:

777 77,7 7,77 0,777.

Kas täisarvude puhul maksev positsiooniprintsiip laseb ennast üldistada ka kümnendmurdude juhule?

Kas see üldistus on kooskõlas astmenäitaja mõiste laiendamisega, nagu see ülal antud?

19. 1^0 . Esinegu arvu kirjutises m numbrit enne komat a_{m-1} , a_{m-2} , ... a_1 , a_0 ja n numbrit peale komat b_1 , b_2 , ... b_n . Avalda arv kümne astmete summana, märkides arv 10 lühemalt tähega k . Kui selles summas võtta k^{-n} sulgude ette, jääb sulgudesse tähise k polünoom (positiivsete astmenäitajatega).

Näita seda.

2^0 . Olgu ühel arvul n , teisel — p kohta peale komat. Näita, eelmisele tuginedes, et arvude korrutisel on $n+p$ kohta peale komat.

20. Järgmised avaldised kujutavad teatud arve süsteemides alustega 2, 3, 4 ja 5. Kirjuta arvud kümnesüsteemis.

$$1^0. 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$$

$$2^0. 2 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3}$$

$$3^0. 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^{-1} + 3 \cdot 4^{-2}$$

$$4^0. 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{-3}$$

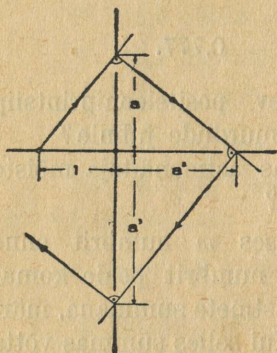
21. Näita, ilma vastavat joonist tegemata, et kaks punktide rida, mis kujutavad olenevusi

$$y_1 = a^x \quad y_2 = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

täisarvulise x -i puhul, on teineteisega sümmeetrilised y -telje suhtes.

22. Ehita joonisest 8. näha oleval viisil mm-paberil võimalikult hoolsalt arvu $a = 1,4$ esimesed 7 astet.

Ehita samal viisil arvu $a = 0,8$ esimesed 7 astet.



Joonis 8.

Milles erinevad saadud joonised?

Sõnasta tulemus üldkujul vastavalt juhtudele $a > 1$ ja $0 < a < 1$.

23. Ehita graafilise astendamise viisil (vt. eelmist ülesannet) arvu 1,6 esimesed 5 astet. Täienda joonist nii, et tast saaks ära lugeda ka sama arvu esimesed 5 negatiivset astet.

Joonista funktsiooni $y = (1,6)^x$ käigu graafik, võttes x täisarvulisena vahemikus $-5 \leq x \leq +5$.

24. Kujuta ühel ja samal joonisel järgmiste funktsioonide käigud vahemikus $-5 \leq x \leq +5$:

$$y = 1^x \quad y = 1,2^x \quad y = 1,4^x \quad y = 1,6^x \quad y = 1,8^x.$$

Võrdle nende funktsioonide käike.

Harjutis XVII:

Astme mõiste üldistamine:
murruline astmenäitaja.

1. On antud kaks arvu: 1 ja 7. Paiguta nende vahele kolmas arv nõnda, a) et need kolm arvu moodustaksid aritmeetilise rea; b) — et need kolm arvu moodustaksid geomeetrilise rea.

Ülesanne a) vastab lineaarsele interpolatsioonile; ülesanne b) eksponentsiaalsele interpolatsioonile.

Lahenda samad ülesanded kahe vahepealse arvu kohta.

2. Kasvagu suuräri aastane läbimüük aastalt aastale eksponentsiaalselt. Olgu äri asutamisaasta läbimüük L_0 ja aastase läbimüügi kasvamistegur q . Olgu 1., 2., 3., . . . n -da tegevusaasta läbimüügid vastavalt $L_1, L_2, L_3, \dots L_n$.

1^o. Anna $L_1, L_2, L_3, \dots L_n$ avaldised.

2^o. Olgu äri läbimüügid iga poole tegevusaasta kohta $L_{\frac{1}{2}}, L_{\frac{2}{2}}, L_{\frac{3}{2}}, \dots$. Kui suurena tuleks arvestada äri pooleaastase läbimüügi kasvamistegurit r ?

Anna $L_{\frac{1}{2}}, L_{\frac{2}{2}}, L_{\frac{3}{2}}, \dots$ avaldised.

3^o. Olgu äri läbimüügid iga veerand-tegevusaasta kohta $L_{\frac{1}{4}}, L_{\frac{2}{4}}, L_{\frac{3}{4}}, \dots$. Kui suurena tuleks arvestada äri veerandaastase läbimüügi kasvamistegurit s ?

Anna $L_{\frac{1}{4}}, L_{\frac{2}{4}}, L_{\frac{3}{4}}, \dots$ avaldised.

4^o. Olgu äri läbimüügid iga kuu ($\frac{1}{12}$ tegevusaasta) kohta $L_{\frac{1}{12}}, L_{\frac{2}{12}}, L_{\frac{3}{12}}, \dots$. Kui suurena tuleks arvestada äri kuulise läbimüügi kasvamistegurit t ?

Anna $L_{\frac{1}{12}}, L_{\frac{2}{12}}, L_{\frac{3}{12}}, \dots$ avaldised.

5^o. Mis tähenduses tuleks mõista sümboleid

$$L_{\frac{1}{k}}, L_{\frac{2}{k}}, L_{\frac{3}{k}}, \dots L_{\frac{m}{k}}, \dots ?$$

Olgu läbimüügi kasvamistegur tegevusaasta $\frac{1}{k}$ kohta märgitud tähega x . Avalda tema väärtus andmeis.

Anna sümboli $L_{\frac{m}{k}}$ avaldis.

6^o. Võrdle tulemust kirjaviisiga

$$L_n = L_0 \cdot q^n.$$

Kuidas tuleks kirjutada $L_{\frac{m}{k}}$ valemi parem pool, et $L_{\frac{m}{k}}$ määrav võrdus saaks sümbolit L_n määrava võrduse taoline?

Missugune tähendus tuleb anda sümbolile

$$q^{\frac{m}{k}} ?$$

3. Maailmasõja ajal toimetatud laiaulatuslikud vaatlused haavade paranemise kohta näitasid, et loomulikku- des tingimustes kasvab vastse koe pind eksponentsiaalselt ajaga. Olgu koe praegune pind P_0 ja koe pinna päevane kasvamistegur q . Olgu P_1, P_2, \dots, P_n vastse koe pinnad 1, 2, ... n päeva pärast.

1^o. Anna nende P_1, P_2, \dots, P_n avaldised.

2^o. Olgu koe pinnad iga poole päeva lõpuks vasta- valt $P_{\frac{1}{2}}, P_{\frac{2}{2}}, P_{\frac{3}{2}}, \dots$. Kui suurena tuleks arvestada koe pinna poolepäevast kasvamistegurit v ?

Anna $P_{\frac{1}{2}}, P_{\frac{2}{2}}, P_{\frac{3}{2}}, \dots$ avaldised.

3^o. Olgu koe pinnad iga tunni ($\frac{1}{24}$ päeva) lõpuks vastavalt $P_{\frac{1}{24}}, P_{\frac{2}{24}}, P_{\frac{3}{24}}, \dots$. Kui suurena tuleks arvestada koe pinna tunnilist kasvamistegurit u ?

Anna $P_{\frac{1}{24}}, P_{\frac{2}{24}}, P_{\frac{3}{24}}, \dots$ avaldised.

4^o. Mis tähenduses tuleks mõista sümboleid

$$P_{\frac{1}{k}}, P_{\frac{2}{k}}, P_{\frac{3}{k}}, \dots, P_{\frac{m}{k}} \dots ?$$

Olgu koe pinna kasvamistegur päeva $\frac{1}{k}$ kohta x . Avalda tema väärtus andme q kaudu.

Anna sümboli $P_{\frac{m}{k}}$ väärtus.

5^o. Võrdle tulemust kirjaviisiga

$$P_n = P_0 \cdot q^n.$$

Kuidas tuleks kirjutada $P_{\frac{m}{k}}$ valemi parem pool, et sümbolit $P_{\frac{m}{k}}$ määrav võrdus saaks sümbolile P_n vastava võrduse taoline?

Missugune tähendus tuleb anda sümbolile

$$q^{\frac{m}{k}} ?$$

6°. Mis tähenduses tuleks mõista sümboleid

$$P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, \dots P_{-m}?$$

Anna nende avaldised. Kirjuta saadused valemi $P_n = P_0 \cdot q^n$ kujul.

Mis tähenduses tuleks mõista sümboleid

$$P_{-\frac{1}{k}}, P_{-\frac{2}{k}}, P_{-\frac{3}{k}}, \dots P_{-\frac{m}{k}}?$$

Anna nende avaldised. Kirjuta saadused valemi $P_n = P_0 \cdot q^n$ kujul.

Missuguses tähenduses tuleb mõista sümboolit

$$q^{-\frac{m}{k}} \quad ?$$

4. Liigkasuvõtja laenab üliõpilasele V_0 krooni seaduse poolt keelatud viisil, nõudes kasu p %/aastas liitprotsendiliselt.

1°. Kui suur on laenusumma aastane kasvamis-
tegur q ?

2°. Olgu $V_1, V_2, \dots V_n$ summad, milleni kasvab võlg 1., 2., 3., ... n -da aasta lõpuks. Avalda need summad suuruste V_0 ja q kaudu.

3°. Olgu võla summad iga poole aasta lõpuks vastavalt $V_{\frac{1}{2}}, V_{\frac{2}{2}}, V_{\frac{3}{2}}, \dots$ Kui suurena tuleks arvestada võla pooleaastane (kuuekuuline) kasvamis-
tegur r ?

Anna $V_{\frac{1}{2}}, V_{\frac{2}{2}}, V_{\frac{3}{2}}, \dots$ avaldised.

4°. Olgu võla summad iga aastakolmandiku lõpuks vastavalt $V_{\frac{1}{3}}, V_{\frac{2}{3}}, V_{\frac{3}{3}}, \dots$ Kui suurena tuleks arvestada võla kolmandikuaastane (neljakuuline) kasvamis-
tegur s ?

Anna $V_{\frac{1}{2}}, V_{\frac{2}{3}}, V_{\frac{3}{3}}, \dots$ avaldised.

5°. Olgu võla summad iga aasta $\frac{1}{k}$ lõpuks $V_{\frac{1}{k}}, V_{\frac{2}{k}}, V_{\frac{3}{k}}, \dots V_{\frac{m}{k}}$. Kui suurena tuleks arvestada võla $\frac{1}{k}$ -aastane kasvamis-
tegur x ?

Anna sümbole $V_{\frac{1}{k}}, V_{\frac{2}{k}}, V_{\frac{3}{k}}, \dots, V_{\frac{m}{k}}$ avaldised.

6°. Võrdle sümbole V_n ja $V_{\frac{m}{k}}$ avaldisi.

Kuidas tuleks kirjutada $V_{\frac{m}{k}}$ valemi parem pool, et $V_{\frac{m}{k}}$ määrav võrdus saaks V_n määrava võrduse taoline?

Missugune tähendus tuleb anda sümbolele

$$q^{\frac{m}{k}} \quad ?$$

7°. Mis tähenduses tuleks mõista sümboleid

$$V_{-1}, V_{-2}, V_{-3}, \dots, V_{-m} \quad ?$$

Anna nende avaldised. Kirjuta nad valemi $V_n = V_0 \cdot q^n$ kujul.

8°. Mis tähenduses tuleb mõista sümboleid

$$V_{-\frac{1}{k}}, V_{-\frac{2}{k}}, V_{-\frac{3}{k}}, \dots, V_{-\frac{m}{k}} \quad ?$$

Anna nende avaldised. Kirjuta saadud valemid kujul $V_n = V_0 \cdot q^n$.

Kuidas tuleb mõista sümboleid $q^{-\frac{m}{k}}$?

5. Kasvagu suurus s eksponentsiaalselt ajaga t . Olgu suuruse lähteväärtus s_0 ja tema kasvamisegur ajaühiku kohta q . Anna side t ja s vahel.

Näide. $s_0 = 1; q = 1,5$.

Kujuta graafiliselt s käik aja t muutudes vahemikus $-4 \leq t \leq +5$, võttes t väärtused 0,5 tagant.

Kuidas tuletada saadud joonisest graafiline kujutis sidemeile

$$s = 2 \cdot (1,5)^t \quad s = 3 \cdot (1,5)^t \quad s = 0,7 \cdot (1,5)^t \quad ?$$

6. Näita, et kokkuleppe puhul, mõista sümboleid $y^{\frac{m}{k}}$ juure $\sqrt[k]{y^m}$ positiivse väärtusena, jäävad maksvaks, ka

murruliste astmenäitajate puhul, astmenäitajate liitmislause, lahutamislause ja korrutamislause, nimelt:

$$y^{\frac{p}{q}} \cdot y^{\frac{r}{s}} = y^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$$

$$y^{\frac{p}{q}} : y^{\frac{r}{s}} = y^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$$

$$\left(y^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = y^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$$

7. Leia järgmiste sümbolite väärtused:

1 ^o . $16^{\frac{1}{2}}$	5 ^o . $27^{-\frac{2}{3}}$	9 ^o . $2,89^{\frac{1}{2}}$
2 ^o . $125^{\frac{2}{3}}$	6 ^o . $243^{-\frac{1}{3}}$	10 ^o . $0,008^{\frac{1}{3}}$
3 ^o . $32^{\frac{4}{5}}$	7 ^o . $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{5}{2}}$	11 ^o . $0,125^{\frac{2}{3}}$
4 ^o . $121^{\frac{5}{2}}$	8 ^o . $\left(\frac{25}{49}\right)^{-\frac{3}{2}}$	12 ^o . $0,36^{-\frac{1}{2}}$

8. Kirjuta järgmised avaldised murruliste astmenäitajate juuremärgi kaudu:

	a	b	c	d
1 ^o .	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$	$a^{\frac{7}{5}}$	$a^{\frac{11}{4}}$
2 ^o .	$b^{-\frac{1}{2}}$	$b^{-\frac{5}{4}}$	$b^{1\frac{2}{3}}$	$b^{-2\frac{1}{2}}$
3 ^o .	$c^{0,3}$	$c^{1,4}$	$c^{-0,2}$	$c^{-2,4}$

9. Kirjuta järgmised avaldised ilma juuremärgi ja murrukriipsuta, mõistes esinevaid juuri positiivsetena:

	a	b	c	d
1 ^o .	\sqrt{a}	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt{a^3}$	$\sqrt[3]{a^2}$
2 ^o .	$\sqrt{ab^3}$	$a\sqrt{a^2}$	$a\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a^3b^5}$
3 ^o .	$\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$	$\frac{1}{7\sqrt{a}}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$	$\sqrt[3]{\frac{a^2}{125b^2}}$

10. Kirjuta lühemalt järgmised avaldised:

	a	b	c	d
1 ^o .	$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$	$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}$	$a \cdot a^{-\frac{2}{3}}$	$a^0 \cdot a^{\frac{3}{4}}$
2 ^o .	$b : b^{\frac{1}{2}}$	$b^2 : b^{-\frac{1}{3}}$	$b^{\frac{3}{2}} : b^{\frac{2}{3}}$	$b^{\frac{5}{6}} : b^{-\frac{1}{2}}$
3 ^o .	$(c^2)^{\frac{3}{2}}$	$(c^{-2})^{\frac{1}{4}}$	$(c^{-1})^{-\frac{1}{2}}$	$(c^{\frac{2}{3}})^0$

11. On antud sidemed:

$$1^0. y^2 = 9x^3 \quad 2^0. y^3 = 27x^2 \quad 3^0. x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 16.$$

Avalda y kujul $y = ax^n$.

12. On antud sidemed:

$$1^0. y^3 = x^2(x-1) \quad 3^0. x^2 + 2hxy + y^2 = 0$$

$$2^0. x^2 + y^2 = r^2 \quad 4^0. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Avalda nendega määratud y avaldised. Kirjuta viimased juuremargita.

13. N. n. radioaktiivsed ained saadavad vahet pidamata välja mitut liiki kiiri (teiste seas Röntgen'i kiiri), lagunedes ise seejuures. Aine lagunemise käik toimub nõnda, et iga tund laguneb kindel % ainehulgast, mis veel alal tunni alul.

Olgu ainehulk katse alul h_0 ; olgu aine lagunemisprotsent tunni kohta p . Kui suur on aine lagunemistegur q ?

Avalda veel alal oleva aine hulgad 1., 2., 3., ... t tunni lõpul.

Olgu T aeg tundides, mille kestel ainehulk väheneb poole peale. Näita, et

$$h_t = h_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

14. Kasvagu arv Y eksponentsiaalselt arvuga x :

$$Y = a \cdot q^x.$$

Märgime Y väärtuse, mis vastab x -i eriväärtusele $x = u$, sümbooliga Y_u . Kirjuta sümboolite Y_u , $Y_{u+\frac{1}{2}}$, Y_{u+1} väärtused, ja näita, et

$$Y_{u+\frac{1}{2}} = + | \sqrt{Y_u \cdot Y_{u+1}} | .$$

Tuleta siit konstruktsioon, mille abil saab määrata kahele Y -väärtusele vahepealset.

Näide. $Y = (1,7)^x$. Arvuta Y väärtused vastavalt täisarvulistele x -dele vahemikus $-5 < x < +5$. Ehita küllaldane hulk vahepealseid Y -väärtusi. Joonista Y käigu kujukõver x -i muutudes.

Harjutis XVIII:

Arvu logaritmi mõiste.

Logaritmi põhiomadused.

1. 10^0 . Meie arvusüsteemi aluseks on arv 10.

Sellest moodustatud liitühikud on järkudele:

	1. järk	2. järk	3. järk	4. järk . . .
vastavalt	10	100	1000	10000 . . .
või standard-kirjutusviisis				
	10^1	10^2	10^3	10^4 . . .

Kuidas on liitühiku järk seotud astmenäitajaga ühiku kirjutises standard-kirjutusviisil?

Arve 1, 2, 3, . . . j . . . võime nimetada liitühikute 10^1 , 10^2 , 10^3 , . . . 10^j . . . järkarvudeks.

2^o. Rida . . . 0,0001 0,001 0,01 0,1
kujutab kümnesüsteemi murdühikuid kasvavalt järjes-
tatult.

Kirjuta nad standard-kirjutusviisil ja laienda järkarvu mõiste ka murdühikute juhule.

Missugune on arvu 1 järkarv?

3°. Kujutagu arvud

... -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...
 järkarve. Nad kasvavad aritmeetilises reas. Kuidas kasvavad nendele vastavad arvud

... 0,001 0,01 0,1 1 10 100 1000 ...?

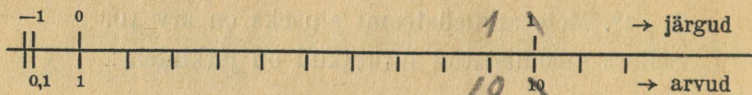
Anna side arvu N ja tema järgu j vahel.

4°. Võta 1 cm laiune, üle 1 m pikk riba mm-pabe-rit. Märki piki riba telg, vali mõõtkava 1 ühik ühes cm-is ja kujuta arvud

0,1 1 10 100

täppidena, märkides neid kriipsudega allapoole telge.

Täienda kujutis järkude kriipsudega ülespoole telge, nagu joonisest näha:



Kuhu langeksid järgukriipsud -2 ja -3 ? Kas neid saab joonistada mõõtkava puhul 1 ühik ühes cm-is?

5°. Saadud joonises kannavad järgukriipsud vaid täisarvulisi märke:

..., -1, 0, +1, +2, ...

Missugusele kohale kuuluks mõni vahepealne järgukriips, näiteks 0,5, kui nõuda, et ikka järk j kuuluks arvule 10^j ?

Määra see arv ja täienda joonis vastavate kriipsudega.

6°. Sama ülesanne järgukriipsude kohta 0,25 ja 0,75.

7°. Joonise valmistamisel varustusid järgukriipsuga ja järguarvuga vaid meie arvusteemi ühikud. Missugune järgumärk j kuuluks mõne vahepealse arvu, näit. arvu 5 juurde?

Kui laiendada järkarvu definitsiooni sellele juhule, siis peaks olema

$$10^j = 5.$$

Näita otsese proovimise teel, et j ei saa olla täisarvuline.

Näita vastuväiteliselt, et j ei saa olla ka murrukujuline $\frac{p}{q}$.

8^o. Järgnevast selgub, et arvu j saab määrata, sulgedes teda ikka kitsamatesse ja kitsamatesse rajadesse.

Tõepoolest, asendades prooviks j asemele arvud 0 ja 1 näeme, et $0 < j < 1$; sama näitab ka joonis.

Tõstes mõlemad võrrandi $10^j = 5$ osad järjest 2., 3., ... 13. astmele, näita, et

$$(10^j)^{10} < 10^7 \quad \text{ja} \quad (10^j)^{13} > 10^9.$$

Järelda siit, et

$$10^j < 7 \quad \text{ja} \quad 13^j > 9,$$

nii et $\frac{9}{13} < j < \frac{7}{10}$

ehk $0,692 < j < 0,700$.

Kui suure vea teeksime halvemal juhul, kui võtaksime $j = 0,696$?

Astendamist edasi arendades võiks viga suruda alla iga määra.

2. 1^o. Määra eelmises ülesandes seletatud viisil arvu 2 järk kümnesüsteemis.

2^o. Sama ülesanne arvu 3 jaoks.

3^o. Sama ülesanne arvu 11 jaoks.

3. Arvu N järk arvusüsteemis alusel 10 kannab nime logaritmi N (alusel 10). Tema tähiseks on $\log N$ (aluse märk 10 jäetakse harilikult ära), nõnda et

$$10^{\log N} = N.$$

Anna järgmiste sümbolite arvuline väärtus:

$$\begin{array}{lll} 10^{\log 7} & 10^{\log 23} & 10^{\log 0,31} \\ 10^{\log a} & 10^{\log ab} & 10^{\log c^2}. \end{array}$$

4. Kujuta järgmised arvud kümne astmetena ja anna nende arvude logaritmid:

	a	b	c	d
1 ^o .	10	100	10000	1000000
2 ^o .	0,1	0,001	0,0001	0,0000001
3 ^o .	$\sqrt{10}$	$\sqrt[3]{10}$	$\sqrt[3]{100}$	$\sqrt{1000}$
4 ^o .	$\sqrt[5]{100}$	$\sqrt[3]{0,1}$	$\sqrt[m]{0,001}$	$\sqrt{10^n}$

5. Logaritmi definitsiooni põhjal on

$$N = 10^{\log N}.$$

Näita, seda võrdust astendades, et

$$\log N^2 = 2 \log N$$

$$\log N^3 = 3 \log N$$

· · · · ·

$$\log N^m = m \log N.$$

Näita, et lause jääb maksvaks ka negatiivse m puhul.

Näide. On teada, et $\log 2 = 0,3010 (\pm 0,00005)$.

Leia praegutõestatud lause põhjal

$$\begin{array}{llll} \log 4 & \log 8 & \log 16 & \log 32 \\ \log \frac{1}{2} & \log \frac{1}{4} & \log \frac{1}{64} & \log \frac{1}{1024}. \end{array}$$

Hinda vastuste võimalikke vigu.

6. Definitsiooni põhjal on

$$M = 10^{\log M}$$

$$N = 10^{\log N}.$$

ja

Näita neid võrdusi korrutades ja jagades, et

$$\log (MN) = \log M + \log N$$

ja
$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N.$$

Sõnasta tõed, mis väljendatud viimases kahes võrduses.

Näide. On teada, et

$$\log 2 = 0,3010 \quad \log 3 = 0,4771 \quad \log 7 = 0,8451,$$

kõik veaga alla 0,00005.

Määra praegu tõestatud lausete põhjal

$$\log 6 \quad \log 14 \quad \log 21$$

$$\log \frac{2}{3} \quad \log \frac{3}{2} \quad \log \frac{7}{3}.$$

Hinda vastuste võimalikke vigu.

7. Näita, et

$$\log \frac{1}{N} = -\log N.$$

Järelda sedasama tõsiasiast, et

$$\frac{1}{N} = N^{-1}.$$

Näide. Leia

$$\log \frac{1}{2} \quad \log \frac{1}{3} \quad \log \frac{1}{6}.$$

8. Laienda korrutise logaritmi avaldist 3 teguri M, N, P juhule.

Tõesta täielise induktsiooni teel korrutise logaritmi valem iga tegurite arvu korral.

Näide. Määra eelmistel andmeil

$$\log 18 \quad \log 42 \quad \log 147.$$

9. Definiitsiooni põhjal on

$$N = 10^{\log N}.$$

Võttes selle võrduse mõlemad pooled astmele $\frac{p}{q}$, näita, et

$$\log \sqrt[q]{N^p} = \frac{p}{q} \log N.$$

Tõesta seletatud viisil eriti, et

$$\log \sqrt{N} = \frac{1}{2} \log N$$

ja

$$\log \sqrt[3]{N} = \frac{1}{3} \log N.$$

Näide. $\log 7 = 0,8451$ $\log 13 = 1,1139$.

Määra $\log \sqrt{7}$ $\log \sqrt[3]{13}$ $\log \sqrt[3]{7^2}$.

Harjutis XIX:

Ülesandeid tutvumiseks logaritmid tabelitega.

1. Arvude

0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000
logaritmid on vastavalt						
-3	-2	-1	0	+1	+2	+3.

Missuguste arvude vahel viimasest reast asub

	$\log 17$	$\log 831$	$\log 9$
ja edasi	$\log 0,7$	$\log 0,04$	$\log 0,005?$

Missugused täisarvud kujutavad esitatud logaritme puudusega ja sellejuures minimaalse veaga?

Neid täisarve nimetatakse meie logaritmid täisosadeks. Logaritmi täisosa parandust nimetatakse logaritmi murdosaks. Mis märgiga esineb see murdosa erandita? Selgita asi graafiliselt.

Vastavalt öeldule mõistetakse võrdust $\log 27 = 1,4314$ kirjutise lühendusena: $\log 27 = +1 + 0,4314$ ja $\log 0,19 = -2,2788$ kirjutise lühendusena: $\log 0,19 = -2 + 0,2788 = -1,7212$.

2. Olgu arvu A kirjutises m kohta enne komat.

Missuguste 10-ne astmete vahel asub arv A ? Kui suur on arvu A logaritmi täisosa?

Kui suured on järgmiste logaritmid täisosad:

$\log 51$	$\log 7$	$\log 4579$
$\log 4,56$	$\log 6789,01$	$\log 15,372$

3. Kujutagu arv B kümnendmurdu $0,000 \dots z$, kogusummas n nulliga enne esimest nullist erinevat märki. Missuguste kümne astmete vahel asub arv B ? Kui suur on arvu B logaritmi täisosa?

Kui suured on järgmiste logaritmid täisosad:

$\log 0,3$	$\log 0,076$	$\log 0,00092$
$\log 0,175$	$\log 0,000342$	$\log 0,04593?$

4. Olgu arvu N logaritmi n :

$$N = 10^n.$$

Kui suur on arvu $10^r \cdot N$ logaritmi?

Mille võrra erinevad arvude N ja $10^r \cdot N$ logaritmid?

Näide. On teada, et

$\log 2 = 0,3010$	$\log 7 = 0,8451$
$\log 13 = 1,1139$	$\log 483 = \underline{\underline{3,6839}}$

2 //

Kirjuta järgmised logaritmid:

$\log 20$	$\log 2000$	$\log 0,2$	$\log 0,002$
$\log 700$	$\log 0,07$	$\log 1,3$	$\log 1300$
$\log 4,83$	$\log 4830$	$\log 0,483$	$\log 0,000483$

5. Kirjuta järgmiste arvude logaritmid, määrates nende täisosa peast ja võttes nende murdosa tabelist:

	a	b	c	d
1 ^o .	16	37	49	83
2 ^o .	62	21	99	56
3 ^o .	270	430	850	170
4 ^o .	331	124	649	957

6. Määra tabeli järgi järgmiste arvude logaritmid:

	a	b	c	d
1 ^o .	0,19	0,23	0,452	0,853
2 ^o .	1,2	4,4	2,67	8,27
3 ^o .	74,3	57,5	0,05	0,082
4 ^o .	0,0079	0,0134	0,0092	0,0564

7. Määra tabelist järgmiste arvude logaritmid:

	a	b	c
1 ^o .	$1,7 \cdot 10^5$	$6,9 \cdot 10^7$	$8,3 \cdot 10^4$
2 ^o .	$29,3 \cdot 10^{-3}$	$89,7 \cdot 10^{-5}$	$5,43 \cdot 10^{-6}$
3 ^o .	$0,095 \cdot 10^6$	$0,85 \cdot 10^{-3}$	$0,003 \cdot 10^{-5}$

8. 1^o. On teada, et

$$\log 96 = 1,9823 \quad \text{ja} \quad \log 97 = 1,9868.$$

Leia interpolatsiooni teel

$$\log 96,1 \quad \log 96,2 \quad \dots \quad \log 96,9.$$

Võrdle tulemusi tabelis seisvate andmetega. Kus on lahkuminekud kõige väiksemad, kus kõige suuremad?

2^o. Kujuta tabeli andmete järgi $\log N$ käik vahemikus 96 kuni 97, võttes N mõõtkavaks 1 ühik 10-es cm-is, kujutades püstsihis vaid tuhandendikud ja kümnetuhandendikud mõõtkavas 1 kümnetuhandendik 1 mm-is.

Märgi samal joonisel arvutamise teel leitud tuhandendikud ja kümnetuhandendikud.

Millega on seletatav arvutussaaduste lahkuminek tabeli andmeist?

9. Leia tabelist järgmiste arvude logaritmid:

	a	b	c	d
1 ^o .	1247	2983	7561	9915
2 ^o .	34,58	8,908	479,4	0,7382
3 ^o .	6,719	0,05634	45630	0,1013

10. Leia tabelist arvud, mille logaritmid on:

	a	b	c
1 ^o .	0,1206	0,9410	2,6075
2 ^o .	2,3766	3,7292	5,9186
3 ^o .	$\overline{1,4216}$	$\overline{2,7033}$	$\overline{3,8722}$

11. Leia tabelist järgmistele logaritmidele vastavad arvud:

	a	b	c	d
1 ^o .	0,6990	1,9031	2,7709	3,2788
2 ^o .	0,2529	$\overline{1,6561}$	$\overline{2,8739}$	$\overline{3,5403}$
3 ^o .	4,1847	2,5378	3,9253	5,9943

12. Leia tabelist arvud, mille logaritmid on:

	a	b	c
1 ^o .	0,4053	1,6420	2,7415
2 ^o .	3,9046	0,7970	1,9743
3 ^o .	$\overline{1,6600}$	$\overline{2,0350}$	$\overline{3,0908}$
4 ^o .	0,0002	$\overline{1,0150}$	$\overline{2,0037}$

Harjutis XX:

Ülesandeid arvutamiseks logaritmide tabelite abil.

1. Alljärgnevad skeemid näitavad kahte töökorraldamisviisi korrutiste $17,5 \cdot 8,29$ ja $68,1 \cdot 0,00743$ arvutamiseks logaritmide abil:

	num	log
$\log 17,5 =$	68,1	1
$\log 8,29 =$	0,00743	2
$\log 17,5 \cdot 8,29 =$	4	3
$17,5 \cdot 8,29 =$		

Väikeste numbritega parempoolses skeemis on märgitud arvutuse üksikute sammude järjekord.

Lühendus num = numerus tähendab arvu.

Täida mõlemad skeemid.

Arvuta järgmised korrutised logaritmide abil ja kontrolli tulemus otsese korrutamise teel:

$$17 \cdot 38 \quad 723 \cdot 54 \quad 7,9 \cdot 8,3 \quad 0,35 \cdot 97,5.$$

2. 1^o. Anna skeem jagatise $25,7 : 0,18$ arvutamiseks logaritmide abil.

Täida skeem ja kontrolli tulemus otsese jagamise teel.

Sama ülesanne jagatise puhul $5,82 : 0,0749$.

Märkus. Selle asemel, et lahutada $\log 0,0749 = \bar{2},8745$, on kohasem liita logaritmi täiendus:

$$(-\log 0,0749) = 1,1255.$$

Põhjenda võtte.

2°. Järgmine skeem näitab $\sqrt[5]{0,0472}$ arvutamist logaritmidel abil:

$$\log 0,0472 = \bar{2},6739$$

$$\frac{1}{5} \log 0,0472 = \bar{1},7348 \quad [\bar{2},6739 = \bar{5} + 3,6739]$$

$$\sqrt[5]{0,0472} = 0,5430.$$

3. Leia järgmised korrutised, jagatised, astmed ja juured, määrates eeskätt nende logaritmid. Töö korralda kindla plaani järgi. Saadused kontrolli otsese arvutamise teel.

	a	b	c
1°.	1,57 · 28,3	0,76 · 49,2	0,0925 · 34,7
2°.	39,51 : 0,7934	7543 : 0,0129	543,6 : 0,03921
3°.	(49,2) ²	(1,792) ³	(3,568) ⁴
4°.	$\sqrt{273}$	$\sqrt{15,87}$	$\sqrt{0,0694}$
5°.	$\sqrt[3]{0,298}$	$\sqrt[3]{0,0458}$	$\sqrt[5]{0,3974}$

4. Alljärgnevad skeemid näitavad paari võimalikku töökorraldamisviisi $\sqrt[3]{a^2 b}$ arvutamisel logaritmidega:

$$\log \sqrt[3]{a^2 b} = \frac{1}{3} (\log a^2 + \log b) = \frac{1}{3} (2 \log a + \log b);$$

log a =	num	log
2 log a =	a	3
log b =	a ²	5
2 log a + log b =	b	4
$\frac{1}{3} (2 \log a + \log b) =$	a ² b	6
$\sqrt[3]{a^2 b} =$	$\sqrt[3]{a^2 b}$	7

Väikeste numbritega parempoolses skeemis on märgitud arvutuse üksikute sammude järjekord.

Täida esimene skeem erijuhul $a = 4,38$ $b = 7,12$; teine — erijuhul $a = 1,756$ $b = 0,9372$.

Logaritmi järgmised avaldised ja anna iga avaldise puhul asjakohane skeem avaldise väärtuse arvutamiseks logaritmidel abil.

1°. ab	6°. πpq	11°. $a\sqrt{2}$
2°. $\frac{a}{c}$	7°. πr^2	12°. $\frac{1}{2} a\sqrt{3}$
3°. $\frac{ab}{c}$	8°. $\frac{1}{2} ah$	13°. $a\sqrt{b}$
4°. a^2b	9°. $\frac{1}{3} \pi r^2h$	14°. $a\sqrt{\frac{b}{c}}$
5°. \sqrt{ab}	10°. $2 \pi rl$	15°. $\frac{4}{3} \pi r^3$

Täida skeemid, ise vabalt valides tähtede a, b, c, \dots arvulised väärtused.

5. Risttahuka aluseks on ruut küljega 34,57 cm; risttahuka kõrgus on 59,26 cm.

Arvuta selle keha ruumala.

6. Täisnurkse kolmnurga kõrgus jaotab hüpotenuusi osadeks 167,4 ja 89,3 mm. Arvuta kolmnurga kõrgus.

7. Kera läbimõõt on 17,68 mm. Arvuta tema ümbermõõt, pindala ja ruumala.

8. Cheops'i püramiidi aluseks on ruut küljega 233 m; püramiidi kõrgus on 148 m. Käigud ja kambrid moodustavad päris väikese osa ruumalast. Kivi erikaal, millest püramiid ehitatud, on ligikaudu 2,75. Mitu tonni kivimassi tuli hankida püramiidi ehitamisel?

9. Koonuse aluse läbimõõt on 4,57 cm, tema kõrgus 6,23 cm. Arvuta koonuse täispind ja ruumala.

10. Silindri läbimõõt on 18,74 mm, tema kõrgus 13,92 mm. Arvuta silindri täispind ja ruumala.

11. Kui suure peab võtma gloobuse läbimõõdu, et tema pind oleks 1 m^2 suur?

12. Valem

$$d = \sqrt[3]{\frac{65 H}{N}}$$

annab võlli jämeduse tollides, mis tarvilik, et edasi anda H „hobusejõudu“ N tiiru puhul minutis.

Arvuta d andmetel

$$H = 215, \quad N = 180.$$

13. Kui suur on maakera tiirlemise kiirus liikumisel ümber päikese?

Maakera tee raadius $r = 149,5 \cdot 10^6$ (kilomeetrites).

14. 1 kroon vastab $\frac{100}{248}$ g puhta kulla väärtusele.

Kui suur on kuldkerä läbimõõt, mille väärtus on võrdne meie riigi 1929/30. aasta eelarvega 93 824 026 krooni? Kuidas muutuks leitud läbimõõt, kui ülalnimetatud summas ära jätta 26 krooni?

15. Uuemate uurimuste järgi on 1 cm^3 -lises ruumalas temperatuuril 0° ja rõhul 760 mm hapnikumolekule $2,7 \cdot 10^{19}$ tükki. Molekuli läbimõõduks on $2,7 \cdot 10^{-8}$ cm. Kui neid molekule lugeda kuulikujulisteks ja neid saaks korraldada korrapäraseks ruumiliseks võreks nimetatud 1 cm^3 ruumalas, kui suur oleks iga 2 kõrvuti seisva molekuli vaheline kaugus?

Kui see molekulide hulk laduda külj külje vastu ruuduliselt lauale, kui suure pinna nad võtaksid oma alla?

Kui see molekulide hulk laduda külj külje vastu sirgele joonele, kui pika lõigu nad täidaksid?

Võrdluseks olgu maakera ümbermõõt.

16. Järgmises reas näiteis on antud mõnede avaldiste logaritmid.

Anna vastavad avaldised võimalikult kokkusurutud kujul:

$$1^0. \log m + 2 \log n \qquad 4^0. \frac{1}{3} \log (a + 1)$$

$$2^0. \log k - \frac{1}{2} \log 5 \qquad 5^0. \log r - \frac{2}{3} \log s$$

$$3. 3 (\log p - \log q) \qquad 6^0. 1 - \frac{1}{2} \log x$$

$$17. \text{ Valem } S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

annab koonuse külgpinna avaldise koonuse kõrguse h ja põhja raadiuse r kaudu.

Alljärgnev skeem näitab üht võimalikku töökorraldamisviisi külgpinna S arvutamiseks logaritmide abil.

Väikeste numbritega on märgitud arvutuse üksikute samude järjekord.

	num	log
r	1	3
r^2	7	5
h	2	4
h^2	8	6
$r^2 + h^2$	9	10
$\sqrt{r^2 + h^2}$		11
r		12
π		13
S	15	14

Seleta arvutamise käik ja täida skeem andmeil $r = 38,9$ $h = 52,7$.

Anna skeemid, mille järgi saaks arvutada alljärgnevate avaldiste väärtusi, kasutades logaritmide tabelleid.

1 ^o .	$\frac{a+b}{c}$	5 ^o .	$\sqrt{\frac{ax}{a-x}}$
2 ^o .	$a^2 + b^2$		ab
3 ^o .	$\sqrt{c^2 - a^2}$	6 ^o .	$\frac{ab}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$
4 ^o .	$\frac{1}{a(b+c)}$	7 ^o .	$v_0 (1+p)^n$
		8 ^o .	$h_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

18. Tüvikoonuse külgpinda määratakse valemi abil

$$Q = \pi l \frac{D+d}{2},$$

kus l on moodustaja ning D ja d on tüvikoonuse aluste läbimõõdud.

Arvuta tüvikoonuse külgpind, teades, et $D = 2,76$
 $d = 1,85$ $l = 3,48$, mõõteid dm-tes arvates.

19. Vaadi ruumala määratakse valemi järgi

$$V \approx \pi \cdot \frac{2D^2 + d^2}{12} \cdot h,$$

kus D on vaadi kesklõike läbimõõt (harilikult punni kohal), d on vaadi otsa läbimõõt ja h on vaadi kõrgus.

Arvuta vaadi ruumala andmetel:

$$D = 2,65 \quad d = 1,94 \quad h = 3,18.$$

20. Ringi sissejoonistatud korrapärase 8-, 12- ja 10-nurga külje pikkused on raadiuse 1 puhul vastavalt:

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Arvuta need avaldised logaritmide abil ja hinda iga tulemuse viga.

21. Olgu antud ruutvõrrand $ax^2 + bx + c = 0$.

Anna skeem selle lahendite arvutamiseks logarit-
 mide abil.

Näited:	1 ^o . $a = 3,15$	$b = 5,34$	$c = -1,28$
	2 ^o . $a = 5,74$	$b = 13,85$	$c = 3,92$

22. Heron'i valem

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

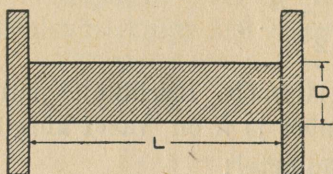
annab võimaluse arvutada kolmnurga pindala S , kui on teada kolmnurga küljed a , b ja c . Tähega p on valemis märgitud pool kolmnurga ümbermõõtu: $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Anna skeem kolmnurga pindala arvutamiseks logarit-
 mide abil, teades tema külgi.

Näide. $a = 15,8 (\pm 0,4)$; $b = 23,6 (\pm 0,5)$; $c = 9,7 (\pm 0,3)$.

Arvuta S . Mitu märki on kohane võtta tulemuses?

23. Rullile, mille mõõted on cm-tes D ja L (joonis 9), on mähitud telefonikaabel, mille läbimõõt on d cm. Palju kaablit mahub 1., 2., 3., . . . n -dale kihile? Kui



Joonis 9.

pikk on esimese n kihi kaabel? Taanda valem võimalikult lihtsakujuliseks ja anna skeem nõutud pikkuse arvutamiseks logaritmidel abil.

24. New-York on üks möödunud sajandil eriti kiiresti kasvanud linnadest.

Aastal 1810 oli tema elanikkude arv 120 000, aastal 1910 aga 4 769 000. Kui suur on New-York'i linna elanikkude arvu keskmine aastane kasvumistegur? Kui suur on New-York'i elanikkude aastane juurdekasvuprotsent?

25. 1°. Joonis 10 kujutab geomeetrilise rea liikmete järk-järgulist graafilist konstruktsiooni lähteliikmest a ja rea tegurist q (meie juhul $q < 1$). Põhjenda võtte.

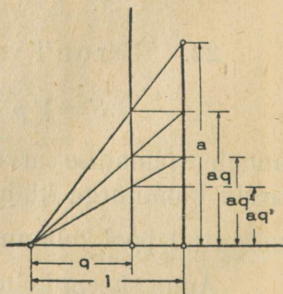
2°. Laienda võtte juhule $q > 1$.

26. Oktaavis on 12 tooni:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
do	do#	re	re#	mi	fa	fa#	sol	sol#	la	la#	si.

Siit edasi korduvad toonid, olles oktaavi võrra kõrgemad: 13. toon on do', 14. do' # jne.

Do-keel (põhioktaavis) võngub sekundis teatud arv kordi w_1 . Do' keele võnguarv w_{13} on w_1 kahekordne: $w_{13} = 2 w_1$. Vahepealsete toonide võnguarvud moodustavad geomeetrilise rea. Selle rea tegur i kannab muusikas intervalli nime.



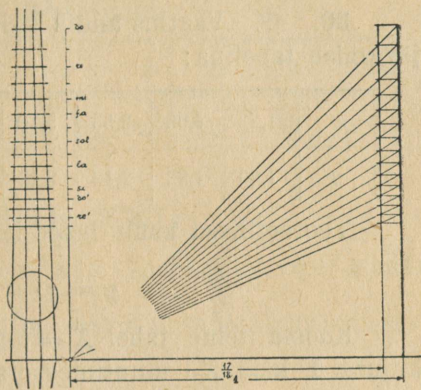
Joonis 10.

Anna w_2, w_3, \dots, w_{13} avaldised w_1 ja i kaudu ja määra i väärtus. i väärtuse arvutamist toi-

meta logaritmidega. Näita, et murd $\frac{18}{17}$ annab hea i lähiväärtuse.

la-keel võngub sekundis 435 korda. Määra w_1 ja w_{13} .

Toonidele do, do \sharp , re, re \sharp jne. vastavad võnguarvud kasvavad geometrilises reas, mille teguri ligikaudne väärtus on $\frac{18}{17}$. Tooni võnguarv on aga pöördvõrdeline vastava keele pikkusega: do, do \sharp , re, re \sharp jne. keelte pikkused moodustavad geometrilise rea teguriga $\frac{17}{18}$. Juuresolev joonis 11



Joonis 11.

kujutab mandoliini pidelaua jaotamiskonstruktsiooni.

Põhjenda võtte.

27. Meie metsa puumassi aastast juurdekasvu arvatakse 2% peale. Mis aastaks võiks loota, et meie metsade puumass on praegusega võrreldes kahekordseks kasvanud?

28. Päevalill annab aastas ümmarguselt 2000 seemet. Oletame, et kasvamistingimused on soodsad üle kogu maakera. Taime jõudsaks arenemiseks arvame tema jaoks 1 m² pinda. Oletame, et ükski seeme ei lähe kaduma, vaid idaneb ja annab uue taime. Oletame, et taim annab aastas ainult ühe lõikuse. Mitu aastat kuluks, et ühest päevalille-seemnest arenenud taimed kaksid kogu maakera pinna, mered välja arvatud?

Maakera raadius ≈ 6400 km. Mered moodustavad 72% kogu maakera pinnast.

29. Tõesta lause:

Kui suurus y on teise suurus x astmeliselt:

$$y = cx^n,$$

siis nende logaritmid

$$Y = \log y \quad \text{ja} \quad X = \log x$$

olenevad teineteisest lineaarselt.

30. 1^o. Vaatlus andis kahe suuruse x ja y sideme järgmise tabelina:

x	1,22	1,60	2,53	3,10	4,06	5,32	6,85	8,55
y	1,65	1,82	2,19	2,43	2,70	3,09	3,42	3,79

Teoreetilised kaalutlused lubavad oletada sidet kujus

$$y = c \cdot x^n .$$

Koosta teine tabel $X = \log x$ ja $Y = \log y$ jaoks ja kujuta Y käik X -i muutudes, tarbekorral vaatlusi tasandades.

Määra c ja n ning anna side x ja y vahel valemina.

2^o. Sama ülesanne tabeli puhul:

s	11,7	14,5	18,3	21,2	27,2	31,0	34,8	43,5
t	5,12	3,86	3,05	2,60	1,99	1,65	1,44	1,20

31. Tõesta lause:

Kui suurus y oleneb teisest suurusest x eksponentsiaalselt: $y = a \cdot q^x$, siis oleneb esimese logaritmi $Y = \log y$ teisest suurusest $X = x$ lineaarselt.

32. 1^o. Vaatlus andis kahe suuruse x ja y sideme järgmise tabelina:

x	2,50	4,69	7,32	10,2	11,8	13,5	16,0	18,1
y	2,55	3,51	4,35	6,60	7,32	9,51	11,9	16,5

Teoreetilised kaalutlused lubavad oletada sidet kujul

$$y = a \cdot q^x .$$

Koosta uus tabel väärtustele $X=x$ ja $Y=\log y$ vastavalt ja kujuta Y kõik X -i muutudes, tarbekorral vaatlusi tasandades.

Määra a ja q ja anna nõutud side valemina.

2^o. Sama ülesanne tabeli puhul:

u	1,2	3,0	4,5	5,4	7,3	8,8	11,3	14,4
v	73,1	53,5	35,9	27,3	19,5	12,5	8,0	3,6

Harjutis XXI:

Täiendavaid ülesandeid logaritmidest alalt.

1. 1^o. Mitu märki on tarvis arvude kirjutamiseks:

$$2^{100} \qquad 43^{15} \qquad 5^{5^5} ?$$

2^o. Mitu nulli seisab koma ja esimese nullist erineva märgi vahel arvude

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{100} \qquad \left(\frac{10}{17}\right)^{20} \qquad \left(\frac{13}{19}\right)^{50}$$

kirjutistes kümnendmurdudena?

2. On tõsi, et $\log \frac{1}{2} = \log \frac{1}{2}$ ja et $3 > 2$, seega tõsi, et $3 \log \frac{1}{2} > 2 \log \frac{1}{2}$ ehk $\log \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \log \left(\frac{1}{2}\right)^2$, s. t.

$$\text{et } \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ ehk et } \frac{1}{8} > \frac{1}{4}.$$

Mis ütled sa selle mõttekäigu kohta?

3. Harjutises XVIII, ülesandes 6. antud lause lubab arvutada korrutise logaritmi, kui tegurite logaritmid on teada. Missuguste arvude logaritme peab tundma, et neist saaks arvutada kõigi arvude logaritme arvupiirkonnas 1 kuni 100?

Mitu neid arve on?

Eelmärkus. Ülesanne 1. harjutises XVIII ja käesoleva harjutise ülesanded 4., 5., 7., 8., 9. ja 14. näitavad võimalust määrata arvude logaritme. Nende tegelik arvutamine tabelite koostamiseks tugineb teistele alustele, kui siin esitatud.

4. Järjest ruutjuuri võttes määra

$$10^{\frac{1}{2}} \quad 10^{\frac{1}{4}} \quad 10^{\frac{1}{8}}.$$

Määra $10^{\frac{1}{8}}$ astendamise teel arvud, mille logaritmid on

$$0 \quad \frac{1}{8} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{7}{8} \quad 1.$$

Ehita neil andmeil kohases mõõtkavas funktsiooni $y = \log x$ kujukõver vahemikus $1 \leq x \leq 10$.

Leia joonisest järgmiste arvude logaritmid:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad 9 \quad 10.$$

Võrdle tulemusi logaritmid tabeli andmetega.

Leia joonisest edasi järgmiste arvude logaritmid:

$$1,7 \quad 2,4 \quad 3,5 \quad 4,8 \quad 5,3.$$

Võrdle saadusi tabeli andmetega.

5. 1^o. Järjest ruutjuuri võttes määra

$$10^{\frac{1}{2}}, \quad 10^{\frac{1}{4}}, \quad 10^{\frac{1}{8}}, \quad \dots \quad 10^{\frac{1}{2048}},$$

võttes neid arve nelja märgiga. Kus saab, rakenda tõi-asi, et $\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2}$. Saadud väärtusi kasutades koosta arvude tabel, mille logaritmid on

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \dots \quad \frac{1}{2048}.$$

2^o. Neile andmeile tuginedes saab mõne arvu, näit. 3, logaritmi järgmiselt arvutada: otsime koostatud tabelis arvu t_1 , mis < 3 , kuid temale võimalikult lähedal asub;

määrame jagatise $\frac{3}{t_1} = s_1$; otsime tabelis arvu t_2 , mis sellest s_1 väiksem ja temale võimalikult lähedal asub; arvutame $\frac{s_1}{t_2}$, saame s_2 , ja jätkame protsessi edasi, kuni jõuame tegurini t , mis praktiliselt $= 1$.

Siis on $3 = t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdots t$

ja $\log 3 = \log t_1 + \log t_2 + \cdots + \log t$.

Kuna $\log t_1, \log t_2, \dots$ meie koostatud tabelis olemas, saame liitmisel $\log 3$. Toimeta nagu seletatud.

6. Suurte raskuste tõstmiseks tarvitatakse riista — polüspasti, mis koostub kahest plokidesüsteemist (joonis 12). Ühe plokiga liikuv osas saab jõuga k_0 tõsta koormat $k_1 = 2 \cdot k_0$, kahe plokiga — koormat $k_2 = 2 \cdot 2 \cdot k_0$, kolmega — koormat $k_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot k_0$ jne.

Olgu polüspasti liikuv osal n plokki. Kui raske koorma k_n saab tõsta jõuga k_0 ?

Mitu plokki peab polüspastil olema, et 80 kg kaaluv inimene saaks tõsta temaga 1-tonnilist koormat?

Koosta ülesandele vastav võrrand ja lahenda viimane proovimise teel.

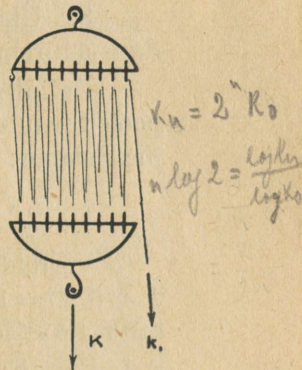
7. Olgu antud võrrand $2^x = 3$.

Näita proovimise teel, et tal pole täisarvulist lahendit.

Näita vastuväiteliselt, et pole olemas ka murdu $x = \frac{p}{q}$, mis täpsalt rahuldaks nõude $2^x = 3$.

Näita, et on olemas kaks täisarvu y ja $y + 1$, millest üks rahuldab nõude puudusega, teine liiaga.

Näita, et on olemas kaks murdarvu $\frac{z}{2}$ ja $\frac{z+1}{2}$, millest üks rahuldab nõude puudusega, teine liiaga.



Joonis 12.

Samuti kaks murdarvu $\frac{u}{5}$ ja $\frac{u+1}{5}$, kaks murdarvu $\frac{v}{10}$ ja $\frac{v+1}{10}$, ... kaks murdarvu $\frac{s}{n}$ ja $\frac{s+1}{n}$.

Kui täpsalt saab määrata tundmatut x arvudest y ja $y+1$, $\frac{z}{2}$ ja $\frac{z+1}{2}$, $\frac{u}{5}$ ja $\frac{u+1}{5}$, $\frac{v}{10}$ ja $\frac{v+1}{10}$, ... $\frac{s}{n}$ ja $\frac{s+1}{n}$?

Arvu x nimetatakse arvu 3 logaritmi alusel 2 ja märgitakse sümboliga $\log_2 3$.

8. Üks viisidest, sümboli $\log_2 3$ väärtust määrata ikka suurema ja suurema täpsusega, on järgmine:

Definitsiooni põhjal on $2^{\log_2 3} = 3$. Tõstes mõlemad pooled ruutu, saaduse jälle ruutu, saaduse uuesti ruutu jne. leiame:

$$2^{2 \log_2 3} = 9 \quad 2^{4 \log_2 3} = 81 \quad 2^{8 \log_2 3} = 6561 \text{ jne.}$$

Võrreldes neid arve 2 astmetega $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, ... näeme: $64 < 81 < 128$, s. t. $6 < 4 \cdot \log_2 3 < 7$, kust $1,5 < \log_2 3 < 1,75$. Edasi on $4096 < 6561 < 8192$, s. t. $12 < 8 \cdot \log_2 3 < 13$, kust $1,5 < \log_2 3 < 1,63$ jne.

Sulgedes nõnda $\log_2 3$ ikka kitsamatesse ja kitsamatesse rajadesse, saame teda leida iga nõutud täpsusega.

Määra seletatud viisil $\log_2 3$ veaga alla 0,05.

9. Ehita võimalikult hoolsalt kõver, mis kujutab funktsiooni $y = 2^x$ käiku vahemikus $-3 \leq x \leq +3$, võttes x -i väärtused 0,5 tagant.

Määra joonisest x -i väärtus, millel y omab väärtuse 3. Võrdle tulemust eelmises ülesandes leitud $\log_2 3$ väärtusega.

Määra joonisest edasi $\log_2 5$ ja $\log_2 7$.

Kujuta uuel joonisel funktsiooni $y = \log_2 x$ käigu kõver, võttes tarvilised andmed eelmiselt jooniselt.

10. Seleta sümbolid: $\log_3 2$, $\log_7 5$, üldiselt $\log_a N$.

Näita, et põhilaused $\log(MN)$, $\log \frac{M}{N}$, $\log N^m$ kohta jäävad maksvaks iga aluse a puhul ($a > 1$).

11. Lahenda logaritmime teel (alusel 10, mille puhul logaritmid leiduvad tabelites valmitena) järgmised võrrandid:

$$\begin{array}{ll} 1^0. 3^x = 5 & 4^0. \left(\frac{14}{9}\right)^x = \frac{5}{6} \\ 2^0. 2^x = 7 & 5^0. (1,4)^x = 8,1 \\ 3^0. 11^x = 23 & 6^0. (3,9)^x = 1. \end{array}$$

12. Olgu N mingi arv ja a ning b kaks erinevat alust. Logaritmi definitsiooni põhjal on

$$a^{\log_a N} = N \quad \text{ja} \quad b^{\log_b N} = N,$$

s. t.

$$a^{\log_a N} = b^{\log_b N}.$$

Võta mõlemal pool logaritmi alusel b ja avalda $\log_b N$ $\log_a N$ kaudu.

Sõnasta eeskiri, mille järele saab üle minna süsteemilt alusega a (vana) süsteemile alusega b (uus).

Kuidas olenevad teineteisest $\log_b N$ ja $\log_a N$?

Näide. Leia $\log_2 15$, $\log_2 29$, $\log_2 7$, kirjutades nende sümbolite definitsioonvõrrandid ja logaritmid viimaste mõlemaid osi alusel 10.

13. Näita, et ikka on

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Kuidas olenevad teineteisest $\log_a b$ ja $\log_b a$?

14. Olgu $y = 1,5^x$. Arvuta võimalikult lihtsal teel y -väärtused, mis vastavad täisarvulistele x -dele vahemikus $0 \leq x \leq +8$.

Täienda saadud tabelit y -väärtustega, mis vastavad täisarvulistele x -dele vahemikus $-8 \leq x \leq 0$.

Kujuta hoolsalt mõõtkavas 1 ühik 1 cm-is arvu y käik arvu x muutudes sileda, ladusa kõverana.

Määra joonisest

$$\log_{1,5} 2 \quad \log_{1,5} 3 \quad \log_{1,5} 5 \quad \log_{1,5} 7 \quad \log_{1,5} 10.$$

Viimase arvu abil leia $\log_{10} 1,5$, tuginedes eelmises ülesandes antud sidemele. Teades $\log_{10} 1,5$ määra

$$\log_{10} 2 \quad \log_{10} 3 \quad \log_{10} 5 \quad \log_{10} 7.$$

15. Olgu joonistatud funktsiooni $y_1 = \log_{10} x$ käigu kujukõver. Näita, et funktsiooni $y_2 = \log_2 x$ käigu kujukõver saadakse eelmisest joonise tasapinna venitamise teel y -lõikude sihis mõõtkavas $1 : \log_{10} 2$.

Üldista lause funktsioonide

$$y_1 = \log_a x \quad \text{ja} \quad y_2 = \log_b x$$

kujukõverate kohta.

16. Joonista kõverad:

$$\begin{aligned} y &= \log_{1,5} x & y &= \log_2 x & y &= \log_3 x \\ y &= \log_4 x & y &= \log_5 x. \end{aligned}$$

1^o. Tõmba neile kõveraile puutujad x -telje täpist $x=0$. Kus asuvad puutetäpid?

2^o. Olgu puutetäppidele vastav x märgitud tähega e . Kui suur on selle väärtus?

3^o. Joonista kõver $y = \log_e x$ ja tõmba ka temale puutuja x -telje täpist $x=0$.

Kui suur on puutetäpis y ?

Mille poolest on $\log_e x$ kõver erilises seisukohas teiste $\log_a x$ kõveratega võrreldes?

$\log_e x$ kutsutakse loomulikuks logaritmiiks. Ta esineb sageli füüsika ja tehnika probleemides.

Harjutis XXII:

Ülesandeid tutvumiseks logaritmilise arvutuslükatiga.

1. 1^o. Võta üle 1 m pikkune, 1 cm laiune riba mm-paberit ja märgi piki seda telg. Selle keskkohast alates kujuta mõõtkavas 1 ühik 10 cm-is lõikudena $\log 1, \log 2, \dots \log 10, \log 20, \dots \log 100, \dots \log 1000$.

Lõikude lõputäpid märgi kriipsudega, mille vastu kirjuta arvud 1, 2, \dots 10, 20, \dots 100 \dots

Saadud joonis kujutab „logaritmilist astmikku“.

2^o. Kujuta samal teljel edasi

$$\begin{array}{llll} \log 0,1 & \log 0,2 & \dots & \log 0,9 \\ \log 0,01 & \log 0,02 & \dots & \log 0,09. \end{array}$$

Mis paistab silma vahemikkude võrdlemisel 0,01 kuni 0,1; 0,1 kuni 1; 1 kuni 10; 10 kuni 100 jne.?

3^o. On teada, et $\log 10^r \cdot N = r + \log N$.

Näita viimasele võrdusele tuginedes, et logaritmi astmik koostub väliselt sarnastest, üksteisega ühtivatest lõigenditest.

Võrdle asja klaveri klaviatuuriga.

Alguses joonistatud vahemikku 1-st kuni 10-ni võib seepärast mõista ka vahemikuna 10-st kuni 100-ni, 100-st kuni 1000-ni, 0,01 kuni 0,1-ni jne.

2. Järgmine tabel annab rea kõrgusi meetrites:

raamat	0,28	Eiffel'i torn	300
inimene	1,70	Mount Everest	8800.

Kujuta need kõrgused logaritmilisel astmikul. Kuidas kujuneks joonis, kui tahaksime kujutada neid arve harilikul meetripaelal mõõtkavas 1 m 1 cm-is?

3. Järgmine tabel annab rea läbimõõte meetrites:

hernetera	5 mm	Kuu	3470 km
jalgpall	20 cm	Maakera	12740 km.

Kujuta need läbimõõdud logaritmilisel astmikul.

Kuidas kujuneks joonis, kui katsuksime kujutada neid läbimõõte harilikul meetripaelal mõõtkavas 1 ühik 1 mm-is?

4. Valmista endale teisel paberiribal logaritmiline astmik kaks korda suuremas mõõtkavas kui eelmine: 1 ühik 20 cm-is. Sea mõlemad astmikud kõrvuti, nii et kriipsud 1 ühte langevad. Ülemise (s. o. esimese astmiku) kriipsude vastas

1 4 9 . . . 100

seisavad alumisel kriipsud

1 2 3 . . . 10 .

Alumisel teljel kujutab lõik $\overline{1n}$ pikkust $(\log n) \cdot 20$ cm. Ülemisel teljel kujutab sama lõik pikkust $(\log n) \cdot 2 \cdot 10$ cm = $(\log n^2) \cdot 10$ cm.

Järelda sellest, et üldiselt seisab arvu n vastas alumisel astmikul arvu n ruut ülemisel; arvu n vastas ülemisel tema ruutjuur alumisel.

Anna eeskiri arvude ruutimise ja ruutjuurimise jaoks log-astmikkude abil.

5. Arvuta logaritmilise arvutuslükatiga järgmiste arvude ruudud:

	a	b	c
1 ⁰ .	3,5	4,7	8,3
2 ⁰ .	1,74	2,56	5,92
3 ⁰ .	1,08	3,14	9,56

6. Arvuta logaritmilise arvutuslükatiga järgmiste arvude ruudud, kirjutades andmed, kus tarvis, standardkirjutusviisil ühe nullist erineva kohaga enne komat:

	a	b	c
1 ⁰ .	29,4	49,2	758
2 ⁰ .	0,565	0,782	0,0834
3 ⁰ .	0,111	0,035	0,0079

7. Arvuta logaritmilise arvutuslükatiga järgmiste arvude ruutjuured:

	a	b	c
1 ^o .	2,4	7,5	15
2 ^o .	24	39	68
3 ^o .	3,75	8,45	16,4

8. Määra logaritmilise arvutuslükatiga järgmiste arvude ruutjuured, kirjutades andmed standard-kirjutusviisil ühe või kahe nullist erineva kohaga enne komat, nii et 10 esineks paarisastmel:

	a	b	c
1 ^o .	278	5680	7940
2 ^o .	0,673	0,024	0,834
3 ^o .	0,00754	0,0105	0,00095.

9. Võta kaks ühesugust log-astmikku ja sea nad teineteise vastu nõnda, et märgi 1 vastas ülemisel astmikul seisaks märk b alumisel.

Lähtudes tõsiasiast, et lõik $\overline{1 a}$ kujutab log a , lõik $\overline{1 b}$ kujutab samal mõõdul log b , näita, et kriipsu a vastas ülemisel seisab kriips ab alumisel.

Anna eeskiri korrutamiseks log-astmikkude abil.

10. Arvuta logaritmilise arvutuslükati abil järgmised korrutised:

	a	b	c
1 ^o .	1,7 · 3,9	4,5 · 2,8	6,9 · 6,1
2 ^o .	3,3 · 5,7	2,9 · 6,4	1,2 · 9,4
3 ^o .	4,25 · 9,45	2,54 · 4,35	5,87 · 8,62
4 ^o .	1,15 · 1,92	1,56 · 5,28	2,95 · 9,48

11. Arvuta logaritmilise arvutuslükati abil järgmiste standard-kirjutusviisil antud arvude korrutised:

	a	b
1 ^o .	$1,4 \cdot 10^2 \cdot 2,7 \cdot 10^3$	$3,9 \cdot 10^3 \cdot 2,1 \cdot 10^{-2}$
2 ^o .	$1,82 \cdot 10^3 \cdot 4,56 \cdot 10^{-2}$	$3,44 \cdot 10^{-1} \cdot 5,76 \cdot 10^{-2}$
3 ^o .	$8,72 \cdot 10^1 \cdot 3,52 \cdot 10^{-1}$	$4,82 \cdot 10^{-2} \cdot 9,15 \cdot 10^3$

12. Arvuta logaritmilise arvutuslükati abil järgmised korrutised, kirjutades andmed standard-kirjutusviisil ühe nullist erineva kohaga enne komat:

	a	b	c
1 ^o .	25 · 49	56 · 72	99 · 92
2 ^o .	170 · 385	292 · 452	587 · 75
3 ^o .	42,6 · 50,6	38,4 · 7,08	18,3 · 10,6
4 ^o .	0,285 · 73,4	0,675 · 0,94	0,0385 · 20,6

13. Võta kaks ühesugust astmikku ja sea nad teineteise vastu nõnda, et kriipsu a vastas ülemisel seisaks kriips b alumisel.

Lähtudes tõsiasiast, et lõik $\overline{1a}$ kujutab $\log a$ ja lõik $\overline{1b}$ kujutab $\log b$, näita, et kriipsu 1 vastas alumisel astmikul seisab $\frac{a}{b}$ ülemisel.

Anna eeskiri jagamiseks log-astmikkude abil.

14. Arvuta logaritmilise arvutuslükati abil järgmised jagatised:

	a	b	c
1 ^o .	9,4 : 1,5	8,7 : 2,1	4,3 : 3,6
2 ^o .	3,5 : 5,7	2,4 : 6,8	1,8 : 9,5
3 ^o .	1 : 3,75	2,64 : 1,37	6,18 : 8,39
4 ^o .	2,84 : 7,33	4,59 : 1,78	9,36 : 3,14

15. Arvuta logaritmilise arvutuslükati abil järgmised jagatised, kirjutades andmed, kus tarvis, standardkirjutusviisil ühe nullist erineva kohaga enne komat:

	a	b	c
1 ^o .	34 : 55	43 : 92	87 : 28
2 ^o .	215 : 78	563 : 44	33 : 103
3 ^o .	4,52 : 0,387	0,768 : 25,6	0,554 : 0,392
4 ^o .	28,5 : 0,0042	1 : 0,675	864 : 0,0375

16. Võta kaks ühesugust astmikku ja sea nad kuidagi teineteise vastu.

Seisku näiteks arvude a' , a'' , a''' vastas ülemisel arvud b' , b'' , b''' alumisel.

Näita, et

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''},$$

s. t.: teineteise vastas seisvate arvude suhe on kogu astmikude ulatusel üks ja seesama.

17. Mõõtude teisendamise näiteid.

1^o. On teada, et 20 šillingit \approx 18 krooni.

Mitu krooni on 12, 15, 25, 32, 42 šillingit?

Mitu šillingit on 10, 14, 20, 28 krooni?

2^o. On teada, et 21 tolli \approx 54 cm.

Mitu cm on 8, 15, 37, 45 tolli?

Mitu tolli on 25, 40, 50, 62, 84 cm?

3^o. Anna teisi mõõtude teisendamise ülesandeid.

4^o. Mitu protsenti on

arv	22	arvust	78
„	143	„	527
„	0,72	„	2,95 ?

18. Kolme suurema pildi mõõted on sentimeetrites vastavalt 75×54 , 112×76 , 48×87 .

Kui suured tuleksid klišeed nendest piltidest käesoleva raamatu jaoks, kui iga pildi jaoks oleks määratud üks lehekülg?

19. 1^o. Olgu a ja b kaks logaritmidüsteemi alust. Näita, et $\log_a x$ ja $\log_b x$ on võrdelised.

Kui suur on võrdetegur?

2^o. Järelda eelmisest, et kõik logaritmade astmikud (alustel a , b , c jne.) on isekeskis sarnased.

3^o. Olgu olemas $\log_a x$ -astmik, pikkusühikus l mm. Näita, et sama astmik kujutab $\log_b x$, ainult teises pikkusühikus. Missuguses nimelt?

20. 1^o. Määra arvu 1,1 esimesed 25 astet, arvutusi võimalikult otstarbekohaselt korraldades. Tulemused anna 5 kohaga.

Valmista saadud andmete tabeli põhjal $\log_{1,1} x$ -astmik.

2^o. Määra $\log_{1,1} 10$, tabelis kohaselt interpoolides.

3^o. Eelmises ülesandes öeldu põhjal kujutab praegu valmistatud astmik ka $\log_{10} x$. Missuguses mõõtkavas nimelt?

4^o. Kuidas leida $\log_{10} N$, kui $\log_{1,1} N$ on teada?

Leia

$$\log_{10} 2 \quad \log_{10} 3 \quad \log_{10} 19 \quad \log_{10} 23.$$

Harjutis XXIII:

Geomeetrilise rea summa.

1. Araablase Ibn Khallikan'i (1211—1282) jutu järgi oli hindu kuningas Schiram malemängust nõnda vaimustatud, et avaldas nõusoleku maksta mängu leiutajale Sissa Ibn Dahir'ile autasuna iga summa, mille see peaks küsima. Mängu leiutaja palus endale autasu nisuterades, ja nimelt 1 tera malelaua 1. ruudule, 1·2 tera teisele, 1·2·2 kolmandale, 1·2·2·2 neljandale jne.

Mitu tera palus endale Sissa Ibn Dahir?

Terade hulgast kujutluse saamiseks olgu antud järgmised andmed:

1 hl sisaldab ligikaudu $1,6 \cdot 10^6$ tera ja kaalub ümarguselt 70 kg; ühe kaubavaguni kandejõud ≈ 16 tonni.

2. Ahelakujuline käevõru koostub 30 lülist. Kulla-sepp on nõus ta müüma tingimusel, et esimese lüli eest makstakse kõigest 1 sent, teise eest 1.5 senti, järgmise eest 1.5.5 senti, järgmise eest 1.5.5.5 senti jne.

Kui palju tuleks käevõru maksma, kui ta ostetaks sel tingimusel?

(Ühest vanast ülesannetekogust.)

3. Et saada geomeetrilise rea

$$\begin{array}{ccccccc} a & a q & a q^2 & \dots & a q^{n-1} \\ \text{summa} & & & & \\ s_n = & a + a q + a q^2 + \dots + a q^{n-1} \end{array}$$

arvutamiseks kohane valem, korruta viimane võrdus q -ga, lahuta tulemusest eelmine võrdus ja määra s_n .

Anna saadusele arvutamiseks soodus kuju.

4. 1^o. Näita otsese arendamise teel, et

$$\begin{aligned} (q+1)(q-1) &= q^2 - 1 \\ (q^2+q+1)(q-1) &= q^3 - 1 \\ (q^3+q^2+q+1)(q-1) &= q^4 - 1. \end{aligned}$$

Näib tõenäone, et üldiselt

$$(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)(q - 1) = q^n - 1.$$

Tõesta seda täielise induktsiooni viisil.

2^o. Tuleta praegu leitud saadusest valem summa

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}$$

arvutamiseks ja siit valem summa

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

arvutamiseks.

5. 1^o. Telefoniliinil on 10 juhet. Pääsukeste parv laskub kahe posti vahel juhtmetele: esimesele 5, teisele 8, kolmandale 11 jne. Mitu pääsukest on parves?

2^o. Sama ülesande teisend: esimesele laskub 5 pääsukest, teisele 15, kolmandale 45 jne. Mitu pääsukest on parves?

Hinda pääsukeste äramahtumise võimalust.

6. 1^o. Setu pakkus asunikule osta temalt hobune, makstes esimese hobuseraua-naela pealt 1 kroon, teise pealt 2 krooni, 3-da pealt 3 krooni jne. Kui kallilt hindas setu oma hobust?

2^o. Mustlane pakkus asunikule osta temalt hobune, makstes esimese hobuseraua-naela pealt 1 sent, 2-se pealt 1·2 senti, 3-da pealt 1·2·2 senti, 4-da pealt 1·2·2·2 senti jne. kuni viimaseni. Kui kallilt hindas mustlane oma hobust?

7. Lumepall kuhjab enese ümber mäest alla veeredes ikka uusi ja uusi lumekihte, mahu poolest järjest kasvades.

Kiireks abiandmiseks suurveehädalistele korraldatakse linnas „seltskondlik rahapall“: linnapea annetab 1 krooni ja palub kaartidega ühtlasi kolme linnanõuniku sama summa annetada ja igaüht neist oma poolt sama ettepanek 3 tuttavale teha, kes edasi samas suunas töötaksid.

Arvates, et kaardi kättetoimetamine iga kord 1 päev aega nõuab, ja et kaart ei juhtu kunagi selle kätte, kes on enamalt annetanud, ja keegi kaardi saaja ei keeldu asjale kaasa aitamast, arvuta 10 päeva jooksul kokku tulev rahasumma.

Mitmele isikule oleks ülaltehtud oletusel asi teatavaks saanud 19 päeva jooksul?

Võrdle saadust maakera elanikkude arvuga, mis on $\approx 2,0 \cdot 10^9$.

8. Järve kalatagavara vähenemise tõttu oleks õiglane vähendada järve rendihinda iga aasta 10% võrra

eelkäinud aastarendist. Milleni oleks see langenud 5. aasta lõpuks, kui rendi praegune hind on 600 krooni?

Kui palju kaotab järve rentnik selle 5 aasta vältel, makstes järve eest 600 krooni aastas kogu rendiaja kestes?

9. Õhupump tühjendab 100 edasi-tagasi käiguga Röntgen'i torus oleva õhu kuni $\frac{1}{50000}$ alguses seal olnud õhuhulgast, imedes iga käigu puhul ühe ja sama protsendi torus parajasti olevast õhuhulgast. Kui suur on see protsent?

10. Langemiskatsete korraldamiseks õhuvabas ruumis pumbatakse 2,385 m pikk, 8,542 cm läbimõõduga klaastoru õhust vabaks (rõhuni 10 mm). Läterõhk on 760 mm. Õhupumba kannualune ruum muutub pumba töötades 0 ja 0,684 l vahel. Mitu kannu käiku on tarvis nõutud hõrenduse saavutamiseks?

11. Avalda valemist

$$s_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

arv n andmete kaudu a , q ja s_n
ja arv q andmete kaudu a , n ja s_n .

Anna skeemid arvude n ja q arvutamiseks.

Harjutis XXIV:

EkspONENT-OLENEVUS JA GEOMEETRIILINE
rida rahandusküsimustes.

1. Isa paigutab panka poja sündimise puhul poja nimel 100 krooni, tähtajaga poja täisealiseks saamisel. Pank maksab 10% aastas ja lisab aasta kestel kogunenud kasu aasta lõpul kapitalile. Arvuta väärtused, milleni kasvab hoiusumma 1., 2., 3., ... 20-da aasta lõpuks.

Arvutamised toimeta otseselt nelja kohaga, kohases skeemis, tähele pannes, et $\frac{11}{10} = 1 + 0,1$.

Kujuta graafiliselt saadud kasu käik.

Võrdluseks kujuta samas võrgus kasu käik juhule, et kapital kannab vaid lihtprotsente.

2. Kui suure kasu saab pangamaja 1, 2, 3, 5, 10 ja 15 aasta kestel, võttes oma võlgnikult 1000 krooni pealt 12% lihtprotsentide viisil ja makstes oma hoiuletoojale sama summa pealt 8% lihtprotsentide viisil?

Kas pank saaks püsivalt töötada, andes laenu lihtprotsendiliselt ja makstes ise lihtprotsente?

3. Missuguse summani oleks kasvanud praeguseks ajaks 1 \$ lihtprotsentide viisil, 6%-ga aastas, kui ta oleks pandud kasvama Ameerika avastamisel Kolumbus'e poolt (a. 1492)?

4. Aastal 1626 ostis Peter Minuit, esimene Uue Madalmaa kuberner, indiaanlastelt Manhattan'i saare 24 \$ eest.

Manhattan'i saarel asub praegu rikkaim New-York'i osa, kuhu on koondunud suurem hulk Ameerika rikkamaid asutisi. Praegu hinnatakse Manhattan'i maa-ala väärtust $5 \cdot 10^9$ \$ peale.

Näita, et indiaanlased võiksid nüüd kogu selle hiiglaväärtusega maa-ala tagasi osta kapitaliga, milleks oleks kasvanud väike summake 24\$ 300 aasta kestes, kui ta oleks kandnud 8 lihtprotsenti aastas.

5. 1^o. kui 1 kroon oleks paigutatud 3-el lihtprotsendil panka Kristuse sündimisel, siis oleks ta kasvanud praeguseni ümmarguselt summaks $(1,03)^{1930} \approx 6 \cdot 10^{24}$, lihtprotsentidel aga kõigest 58,9 krooniks. Näita seda.

2^o. Anna esimese summa väärtus maakera-suurustes kullakuulides. Andmed: 1 kroon vastab $\frac{100}{248}$ g kulla väärtusele, maakera raadius ≈ 6400 km, kulla erikaal ≈ 19 .

6. Tööstuse sissesead maksis uuena 15000 krooni. Tema väärtuse iga-aastasel hindamisel kustutatakse sisseseadu vananemise ja kulumise arvel 8% eelkäivast väärtusest. Kui suurena arvestatakse sisseseadu väärtust 10 aasta pärast?

7. Missugune summa peab paigutatama tütre sündimisel pankka liitprotsentidele, et kindlustada temale 18 aasta vanuseks saamisel kaasavarana 5000 krooni, kui arvata protsendimääraks $4,5\%$?

8. Tartu linna võlg on praegu (1929) 2 950 000 krooni suur. Kui suure summa peaks linnale kinkima, et ta liitprotsentidel seistes 100 aasta pärast kataks selle võla, eeldusel muidugi, et linn võlaprotsendid on korralikult tasunud?

9. Keegi laenab oma tuttavale 25 krooni kahe aasta peale liitprotsentidel, saades tähtajal lisaks laenatud summale veel 24 krooni intresse. Mitme protsendiga arvestati? (Widmann, 1489.)

10. Benjamin Franklin, kuulus Ameerika Ühendriikide president ja teadlane, pärandas oma surmal 1790. aastal Boston'i linnale 1000 £ tingimusega, et see kapital kasvaks 100 aastat. Saadud summa 130 000 £ suurem osa, 100 000 £, tuleb testamendile vastavalt kulutada mõneks üldkasulikuks otstarbeks, jääk aga, 30 000 £, jätta uuesti 100 aastaks kasvama.

Mitme protsendilise kasuga arvestas Franklin?

Kui suureks kasvab jääk 30 000 £ järgmise 100 aasta jooksul endise protsendimäära puhul?

11. Leia kapitali algsuurus ja protsendimäär, teades, et ta muutub m aasta pärast M krooniks, n aasta pärast N krooniks.

12. Mitme aasta jooksul kasvab kapital kahekordseks, kandes 4% , 8% , 12% kasu liitprotsendiliselt?

Kas 3 leitud aega on pöördvõrdelised nende protsentide määradega?

13. Keegi pärandab oma 7500-kroonise varanduse Tartu Ülikoolile tingimusega, et see esiotsa lastaks kasvada kuni 10000 kroonini ja sealt peale kapitali aastased intressid ära tarvitataks andekate üliõpilaste toetusrahaks. Millal võib alata toetusrahade väljamaksmine, kui arvestada 8 liitprotsendiga?

14. Isa maksab pankka oma poja õppimisvõimaluse kindlustamiseks ülikoolis poja sündimisest peale iga aasta 100 krooni. Hoiusumma lunastamise tähtpäevaks määrab ta poja 19. aasta sünnipäeva. Pank maksab pika tähtajaga hoiusummade pealt 10% liitprotsentide viisil. Kui suur on poja õppimisvõimalust kindlustav summa?

15. Suurtehase töölislinnakeses võib tööline omandada majakese väikese aiaga, makstes 20 aasta jooksul iga aasta alul 50 krooni. Kui suur on majakese väärtus, kui arvata protsendimääraks 6%?

16. Noorpaar ostab endale 4000-kroonise korterisiseseadu, makstes ostmisel 2000 krooni ja iga 6 kuu takka 500 krooni, 4 korda. Kui suur on mööblikaupluse poolt antud hinnaalandus, kui lugeda raha pealt antavaks kasuprotsendiks 8%?

17. Kooli endiste õpilaste kogu liige on pikemat aega oma aastamaksud maksmata jätnud ja võlgneb kogule praegu 215 krooni. Ta kohustab ennast maksma iga 3 kuu takka 30 krooni, 8 korda. Kas maksja võidab või kaotab selle maksu jaotuse puhul, kui arvestada raha kasuprotsenti 8-ga?

18. Korteritüür on kuuviisi ettemaksmisel 60 krooni. Kui suur peaks ta olema aastaviisi ettemaksmisel, kui arvestada 12%-lise aastakasuga?

19. Suurema kunstiteose kiiremaks levimiseks võimaldab kirjastus selle omandamist järelmaksu teel: iga kuuliselt 5 krooni, kokku 30 korda. Kui suur on teose väärtus, kui lugeda raha pealt saadavaks kasuprotsendiks $8\frac{1}{2}$ %?

20. Teadusliku seltsi liikmemaks on 2 krooni aastas. Eluaegsed liikmed maksavad ühekordselt 30 krooni. Keskmiseks seltsi liikmeks olemise ajaks võib arvestada 20 aastat. Raha kasuprotsent on $7\frac{1}{2}$ %. Kas on aastane ja ühekordne liikmemaks õiges vahekorras?

21. Töökojas võiks aastas töötasu kokku hoida 2000 krooni võrra, kui töökoja varustust täiendada elektrimootoriga, mille hind on 7000 krooni. Mootori voolutarvitamise ja järelevalve kulud oleksid aastas 500 krooni. Kas tuleb lugeda mootori omandamist ennast tasuvaks, kui arvata tema eluiga 12 aasta peale ja lugeda rahaprotsendiks 8?

22. Leia iga-aastane maks, mis tuleb tasuda võla kustutamiseks 10000 krooni suuruses 5,5 protsendiga 30 aasta jooksul.

23. Missuguse summa peab raudteevalitsus iga aasta kõrvale panema 4 protsendiga liite viisil, et oleks võimalik asendada 1000 000 krooni maksvat veerevat koosseisu, mille eluiga on 25 aastat?

24. 35-aastane õpetaja kindlustab oma pärijad kindlustusseltsis 2500-kroonise summaga. Ta sureb 54-aastaselt. Kindlustusseltsi kassaraamat näitab, et selts selle kindlustuse puhul ei saa kasu ega kannata kahju. Kui suur oli seltsile tasutud aastamaks, kui arvata protsentide määraks arvu 6?

25. Mitme aastaga on tasa tööstuse sisseseadusse paigutatud kapital 15 600 krooni, kui pika-ajalise laenu protsendiks arvata 4,5 ja iga aasta alul kirjutatakse sisseadu omandamiskulude kattele 2000 krooni?

26. Linna külje all oleva talumaa omanik tükeldab oma maa ehituskruntideks ja rendib nad 99 aastaks. 10 aasta pärast on ta nõus laskma krundid pärisomanduseks välja osta, nõudes nende eest 20 aasta renti. Mitmeprotsendiliseks arvestab ta tulu?

Algarvude tabel.

2	127	283	467	661	877	1087
3	131	293	479	673	881	1091
5	137	307	487	677	883	1093
7	139	311	491	683	887	1097
11	149	313	499	691	907	1103
13	151	317	503	701	911	1109
17	157	331	509	709	919	1117
19	163	337	521	719	929	1123
23	167	347	523	727	937	1129
29	173	349	541	733	941	1151
31	179	353	547	739	947	1153
37	181	359	557	743	953	1163
41	191	367	563	751	967	1171
43	193	373	569	757	971	1181
47	197	379	571	761	977	1187
53	199	383	577	769	983	1193
59	211	389	587	773	991	1201
61	223	397	593	787	997	1213
67	227	401	599	797	1009	1217
71	229	409	601	809	1013	1223
73	233	419	607	811	1019	1229
79	239	421	613	821	1021	1231
83	241	431	617	823	1031	1237
89	251	433	619	827	1033	1249
97	257	439	631	829	1039	1259
101	263	443	641	839	1049	1277
103	269	449	643	853	1051	1279
107	271	457	647	857	1061	1283
109	277	461	653	859	1063	1289
113	281	463	659	863	1069	1291