A. VIHMAN

MATEMAATIKA

ÕPIK

VII KLASSILE

2. TRÜKK

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“
TALLINN, 1946

A. VIHMAN

MATEMAATIKA

ÕPIK

VII KLASSILE

2. TRÜKK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS"
TALLINN, 1946

ALGEBRA.

Peatükk I.

Algebraliste avaldiste teisendamine.

§ 1. Arvutamise abivalemite rakendamine avaldiste teisendamisel.

Algebraliste avaldiste teisendamise üheks tähtsaks eesmärgiks on avaldiste lihtsustamine.

Võimsaks vahendiks teisendamisel peale hulkliikme koondamise ning peale tehete üks- ja hulkliikmetega on arvutamise abivalemid:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

Näited.

1. $(x+3)(x-4)-(x-2)^2=(x^2+3x-$
$-4x-12)-(x^2-4x+4)=x^2+3x-$
$-4x-12-x^2+4x-4=3x-16.$

Kontroll: Olgu $x = 1$, siis $(x + 3)(x - 4) -$
$$- (x - 2)^2 = (1 + 3)(1 - 4) - (1 - 2)^2 =$$
$$= 4 \cdot (-3) - (-1)^2 = 4 \cdot (-3) - 1 =$$
$$= -12 - 1 = -13;$$
$$3x - 16 = 3 \cdot 1 - 16 = -13.$$

Et antud avaldise algkuju ja tema teisendatud kuju vabalt võetud tähe väärtusel andsid ühe ja sama numbrilise väärtuse, siis võib arvata, et meie teisendus on õige.

2. $(x + y + 1)(x - y + 1) =$
$= (x + 1 + y)\ (x + 1 - y) = (x + 1)^2 - y^2 =$
$= x^2 + 2x + 1 - y^2 = x^2 - y^2 + 2x + 1.$

3. $(x + 1)(x + 1)(x - 1)(x - 1) = (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2 =$
$= (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) = (x^2 + 1 + 2x)$
$(x^2 + 1 - 2x) = (x^2 + 1)^2 - (2x)^2 =$
$= x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2 = x^4 - 2x^2 + 1.$

Teine lahendusviis:

$(x + 1)(x + 1)(x - 1)(x - 1) = (x + 1)(x - 1)$
$(x + 1)(x - 1) = (x^2 - 1)(x^2 - 1) =$
$= (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1.$

4. $(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - 2(a^3 - 4) =$
$= a^3 - 8 - 2a^3 + 8 = -a^3.$

Ülesanded.

Lihtsustada järgmised avaldised, rakendades hulkliikmete korrutamist:

1. $(4b - 5c)(3b + 4c)$
$(2a^2 + 3b^2)(3a^2 - 2b^2)$
$(4a^2 - 5b^2)(5a^2 - 4b^2)$
$(3m^2 - 4x^3)(6m^2 - 2x^3)$
$(6a^2x^2 - 9b^3x^4)(5a^2x^2 - 7b^3x^4)$

1. $(a+5)(a+7)$
$(a+b)(a-7)$
$(a^2-8)(a^2+4)$
$(3m-4n)(5m-3n)$
$(4a^2+5b^2)(2a^2-b^2)$

Lihtsustada järgmised avaldised:

2. $(a+4)(a-2)$
$(7x^2-1)(x^2-3)$
$(3an+5n^2-2a^2)(n^2-6an)$
$(2c^3n^4+8c^9+n^6+4c^6n^2)(2c^3-n^2)$
$(2m^3+m^4-8m-16)(4+m^2-2m)$

2. $(a+\frac{1}{2}b)(2a-4b)$
$(3a^3+4b)(4a^3-5b)$
$(4m^2+2m+1)(2m-1)$
$(4b^2+2a^2-4ab)(3ab+1{,}5a^2+3b^2)$
$(x^6+x^5-x^3+x+1)(1-x+x^2)$

Lihtsustada, niipalju kui võimalik, järgmised avaldised, rakendades arvutamise abivalemeid:

3. $(3+x)(3-x)(9+x^2)$
$(a+x)(a-x)(a^2+x^2)$
$(x+y+z)(x+y-z)$
$(a+2b-3c)(a-2b-3c)$
$(a-3)(a+2)(a-2)$

3. $(2+x)(2-x)(4-x^2)$
$(a-b+c)(a-b-c)$
$(x+a)(x-a)^2$
$(x+a)^3(x-a)$
$(m+2)(m-2)(m-2)(m+2)$

4. $(a+1)^2\,(a-1)^3$
$(x^2+xy+y^2)\,(x-y)+y^3$
$(x^2-xy+y^2)\,(x+y)-x^3$
$(4m^2+2m+1)\,(2m-1)-(8m^3-2)$
$(3+a)\,(9-3a+a^2)-(a^3+25)$

4. $(b+2)^3\,(b-2)^3$
$(3-a)\,(9+3a+a^2)+a^3$
$(16-4x+x^2)\,(4+x)-x^3$
$(25m^2+5m+1)\,(5m-1)-(125m^3-3)$
$(6+y)\,(36-6y+y^2)-(y^3+215)$

Arvutamise abivalemid, nagu teada, hõlbustavad ka arvutamist, võimaldades arvutusi teostada mõnikord peast.

N ä i t e d.

1. $31^2=(30+1)^2=900+60+1=961$
2. $48^2=(50-2)^2=2500-200+4=2304$
3. $48\cdot 32=(40+8)\,(40-8)=1600-64=1536$
4. $36^2-26^2=(36+26)\,(36-26)=62\cdot 10=620$

Ülesanded.

Teostada võimalikult peast järgmised arvutused:

5. 49^2	5. 81^2	**6.** $57\cdot 43$	6. $49\cdot 31$
21^2	39^2	$24\cdot 16$	$37\cdot 23$
82^2	72^2	$82\cdot 78$	$92\cdot 88$
93^2	28^2	$94\cdot 86$	$81\cdot 79$
62^2	43^2	$44\cdot 36$	$24\cdot 16$

7. 25^2-15^2	7. 45^2-35^2
35^2-25^2	27^2-17^2
42^2-32^2	29^2-19^2
47^2-37^2	87^2-13^2
88^2-12^2	92^2-8^2

§ 2. Hulkliikme jagamine hulkliikmega.

Hulkliikme jagamisel hulkliikmega korrastame nii jagatava kui ka jagaja ühe ja sama tähelise teguri kas alanevate või tõusvate astmete järgi ja siis toimime arvude jagamise eeskujul.

Oletame, et jagatav ja jagaja on korrastatud mingi tähe alanevate astmete järgi. Oletame veel, et jagatis on leitud ja et see on samuti korrastatud sama tähe alanevate astmete järgi, siis on kõigil kolmel hulkliikmel kõrgeimaks liikmeks esimene liige.

Et jagatise ja jagaja korrutis võrdub jagatavaga, siis on selge, et jagatava kõrgeima liikme saame, kui korrutame jagatise kõrgeima liikme jagaja kõrgeima liikmega; teiste sõnadega, kui korrutame jagatise esimese liikme jagaja esimese liikmega, siis saame jagatava esimese liikme. Siit näeme, et jagatise esimese liikme saamiseks tuleb jagatava esimene liige jagada jagaja esimese liikmega.

Kui niiviisi leitud jagatise esimese liikme korrutame jagajaga, siis saame esimese osakorrutise. Lahutades esimese osakorrutise jagatavast, saame esimese jäägi. Arutelles ja toimides esimese jäägi suhtes täpselt samal viisil nagu esmalt jagatava suhtes, leiame jagatise teise liikme, teise osakorrutise ja teise jäägi. Teise jäägi esimest liiget jagades jagaja esimese liikmega, leiame jagatise kolmanda liikme, jne.

Seda toimingut jätkame seni, kuni saame jäägi, mis võrdub nulliga, või niisuguse jäägi, mis jagaja esimese liikmega enam ei jagu.

Esimesel juhul ütleme, et jagamine teostus jäägita; teisel juhul saame jagatise jäägiga.

Sama arutlus ja arvutamise eeskiri kehtib ka siis, kui antud hulkliikmed on korrastatud ühe tähe tõusvate astmete järgi. Puuduvate astmete kohta kirjutame korrastamisel nullid.

Tulemust võib kontrollida jagaja ja jagatise korrutise võrdlemise teel jagatavaga, või sel teel, et hulkliikmetes tähed asendame mingite vabalt võetud väärtustega ja võrdleme siis saadud numbrilisi väärtusi.

Näited.

1. Ülesanne. Jagada hulkliige $18x^3 + 7x + 12$ hulkliikmega $3x + 2$.

Lahendus.

	$18x^3 + 0 + 7x + 12$	$3x + 2$
1. osakorrutis....	$18x^3 + 12x^2$	$6x^2 - 4x + 5$
1. jääk..........	$-12x^2 + 7x + 12$	
2. osakorrutis....	$-12x^2 - 8x$	
2. jääk..........	$15x + 12$	
3. osakorrutis....	$15x + 10$	
3. jääk..........	2	

Kontroll: kui $x = 1$,

$$\text{siis } 18x^3 + 7x + 12 = 18 + 7 + 12 = 37,$$
$$3x + 2 = 3 + 2 = 5,$$
$$6x^2 - 4x + 5 = 6 - 4 + 5 = 7$$

Jagaja · jagatis + jääk = jagatav.

$5 \cdot 7 + 2 = 37$, seega tulemus on õige.

Vastus. Jagatis on $6x^2 - 4x + 5$, jääk on 2.

2. Leida hulkliikmete $6x^4 - 19x^3 + 5x^2 + 17x - 4$ ja $3x^2 - 5x + 1$ jagatis.

Lahendus.

$$\begin{array}{l|l}
6x^4 - 19x^3 + 5x^2 + 17x - 4 & 3x^2 - 5x + 1 \\
\underline{6x^4 - 10x^3 + 2x^2} & \overline{2x^2 - 3x - 4} \\
\quad -9x^3 + 3x^2 + 17x - 4 & \\
\quad \underline{-9x^3 + 15x^2 - 3x} & \\
\qquad -12x^2 + 20x - 4 & \\
\qquad \underline{-12x^2 + 20x - 4} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Kontroll: kui $x = 1$, siis

$$6x^4 - 19x^3 + 5x^2 + 17x - 4 =$$
$$= 6 - 19 + 5 + 17 - 4 = 5,$$
$$3x^2 - 5x + 1 = 3 - 5 + 1 = -1,$$
$$2x^2 - 3x - 4 = 2 - 3 - 4 = -5,$$
$$-1 \cdot (-5) = 5.$$

Vastus. Jagatis on $2x^2 - 3x - 4$.

3. Leida jagatis

$$(x^4 - a^4) : (x - a).$$

Lahendus.

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 0 + 0 + 0 - a^4 & x - a \\
\underline{x^4 - ax^3} & \overline{x^3 + ax^2 + a^2x + a^3} \\
\quad ax^3 + 0 + 0 - a^4 & \\
\quad \underline{ax^3 - a^2x^2} & \\
\qquad a^2x^2 + 0 - a^4 & \\
\qquad \underline{a^2x^2 - a^3x} & \\
\qquad\quad a^3x - a^4 & \\
\qquad\quad \underline{a^3x - a^4} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Vastus. $(x^4 - a^4) : (x - a) = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$.

Teostada järgmised jagamised:

8. $(63x^2 - 10x - 8) : (7x + 2)$
$(20a^2 - 57ab + 27b^2) : (5a - 3b)$
$(30x^2 - 61xy + 28y^2) : (3x - 4y)$
$(12a^2 - ab - 20b^2) : (4a + 5b)$
$(12x^2 - 13xy - 35y^2) : (3x - 7y)$

8. $(x^2 - 2ax - 8a^2) : (x - 2a)$
$(6x^2 + ax - a^2) : (2x + a)$
$(10a^2 - 3ab - 27b^2) : (5a - 9b)$
$(6x^2 - 23xy + 20y^2) : (2x - 5y)$
$(36a^2 - 71ab + 14b^2) : (9a - 2b)$

Arvutada järgmised jagatised:

9. $(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) : (a + 1)$
$(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) : (x - y)$
$(8a^3 + 36a^2 + 54a + 27) : (2a + 3)$
$(27x^3 - 135x^2 + 225x - 125) : (3x - 5)$
$(10a^3 + 17a^2 + 23a + 4) : (5a + 1)$

9. $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$
$(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a + b)$
$(125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3) : (5a + 2b)$
$(6a^2b + 9a^3 - 6ab^2 - 4b^3)\ (3a + 2b)$
$(2a^3 + 6ab^2 - 15b^3 - 5a^2b) : (2a - 5b)$

Arvutada järgmised jagatised:

10. $(a^4 + a^3b - a^2b^2 + ab^3) : (a^2 - b^2)$
$(3 + 8x + x^2 - 2x^3) : (1 + 2x - x^2)$
$(-6 + 13x - 2x^3 - 3x^2) : (2 - x^2 - 3x)$
$(1 - 5x + 8x^2 - 4x^3) : (1 - 3x + 2x^2)$
$(a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1) : (a^4 - a^3 + a^2 + 1)$

10. $(a^5 - a^3b^2 + a^2b^3 - b^5) : (a^3 + b^3)$
$(3 - 6x^2 + 4x^4 - x^6) : (3 - 3x^2 + x^4)$
$(1 - 2m^4 - m^2 - m^5 - m^3) : (1 - m^2 - m)$
$(a^3 + a - 7a^2 + 20) : (a^2 - 3a + 5)$
$(x^2 - x^3 - 13x + 21) : (x^2 + 2x - 7)$

Teostada järgmised jagamised:

11. $(a^4 - b^4) : (a - b)$
$(a^4 - b^4) : (a + b)$
$(a^5 - b^5) : (a - b)$
$(a^5 + b^5) : (a + b)$
$(x^6 - a^6) : (x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5)$

11. $(x^5 - y^5) : (x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$
$(m^5 + n^5) : (m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4)$
$(a^6 - b^6) : (a - b)$
$(a^6 - b^6) : (a + b)$
$(a^6 - b^6) : (a^2 + ab + b^2)$

§ 3. Arvutamise abivalemite kasutamine hulkliikmete jagamisel.

Kui arvutamise abivalemi põhjal arendatud korrutis võtta jagatavaks ja jagajaks üks tegur, siis teine tegur on jagatiseks. Nii saame korrutamise abivalemist jagamise valemi.

Näiteks

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

või teisiti kirjutades,

$$(a + b)\,(a + b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

Siit järeldame, et

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = (a + b).$$

Sel teel saame arvutamise abivalemitest järgmised jagamise valemid:

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b$$
$$(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b$$
$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b$$
$$(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = a - b$$
$$(a^3 + b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2$$
$$(a^3 + b^3) : (a^2 - ab + b^2) = a + b$$
$$(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$$
$$(a^3 - b^3) : (a^2 + ab + b^2) = a - b$$

Ülesanded.

Leida valemite abil järgmised jagatised:

12. $(x^2 - y^2) : (x - y)$
$(4a^2 - 9b^2) : (2a + 3b)$
$(a^2 - 1) : (a + 1)$
$(25x^2 - 49) : (5x + 7)$
$(100y^2 - 225) : (10y - 15)$

12. $(x^2 - 1) : (x - 1)$
$(9a^2 - 4) : (3a + 2)$
$(16x^2 - 81) : (4x - 9)$
$(a^4 - b^4) : (a^2 - b^2)$
$(x^4 - 1) : (x^2 + 1)$

13. $(x^2 + 14x + 49) : (x + 7)$
$(x^2 - 10x + 25) : (x - 5)$
$(9x^2 - 66x + 121) : (3x - 11)$
$(16x^2 + 40xy + 25y^2) : (4x + 5y)$
$(81x^2 - 90xy + 25y^2) : (9x - 5y)$

13. $(a^2 - 6a + 9) : (a - 3)$
$(4a^2 + 28a + 49) : (2a + 7)$
$(9a^2 + 12ab + 4b^2) : (3a + 2b)$
$(4a^2 + 24ab + 36b^2) : (2a + 6b)$
$(9a^2 - 48ab + 64b^2) : (3a - 8b)$

14. $(a^3+1):(a+1)$
$(64a^3+1):(4a+1)$
$(x^3-1):(x-1)$
$(a^3+x^3):(a^2-ax+x^2)$
$(8-a^3):(4+2a+a^2)$

14. $(a^3+27):(a+3)$
$(x^3-64):(x-4)$
$(1-x^3):(1+x+x^2)$
$(a^3+1):(a^2-a+1)$
$(125-a^3):(5-a)$

15. $(x^2-25):(x-5)$
$\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{16}{81}y^2\right):\left(\frac{1}{2}x+\frac{4}{9}y\right)$
$(x^3+125a^3):(x+5a)$
$(a^3-1000):(a-10)$
$(x^2+4x+4):(x+2)$

15. $(a^4-4):(a^2-2)$
$(x^4-16):(x^2+4)$
$(x^6+\frac{1}{8}):(x^2+\frac{1}{2})$
$(x^6-27):(x^2-3)$
$(\frac{1}{27}a^3+\frac{1}{8}b^6):(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b^2)$

§ 4. Arvude lahutamine algtegureiks.

Olgu antud mõni kordarv a; olgu b üks selle arvu tegureist; siis on

$$a=b\cdot q.$$

Selles võrduses arv a esineb korrutisena. Kui arvud b ja q on algarvud, siis meie võrdus annab arvu a tema algtegurite korrutisena ehk, nagu ütleme, algtegureiks lahutatud kujul.

Näiteks esinevad võrdustes

$15=3\cdot5$ $\quad$ $77=11\cdot7$ $\quad$ $611=13\cdot47$

arvud 15, 77 ja 611 lahutatult oma algtegureiks.

Olgu võrduses

$$a = b \cdot q$$

üks tegureist, näiteks b, k o r d a r v. Siis peab temale leiduma jagaja, mis on suurem kui 1 ja väiksem kui b; olgu see jagaja c. Sel puhul võime kirjutada

$$b = c \cdot p,$$

seega

$$a = c \cdot p \cdot q.$$

Nõnda edasi minnes ja kordarvulisi tegureid järjest korrutistena kirjutades jõuame viimaks niikaugele, et kõik paremal poolel seisvad tegurid on a l g a r v u d: arv a esineb siis oma algtegurite korrutisena ehk lahutatult algtegureiks.

Võib juhtuda, et ükski arvust a väiksem algarv ei ole arvu a teguriks; s i i s o n a i s e a l g a r v. Vastasel korral leidub algarv t, mis on arvu a teguriks. Sel puhul määrame arvu a ja leitud teguri t jagatise b, kirjutame $a = t \cdot b$ ja toimetame edasi arvuga b, nagu eespool arvu a puhul seletatud.

N ä i d e. Lahutame arvu 396 algtegureiks.

Talitades eespool-seletatud viisil, saame:

$$396 = 2 \cdot 198 = 2 \cdot 2 \cdot 99 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 33 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11.$$

Sobivat skeemi arvu algtegureiks lahutamiseks õpime järgmistest näidetest:

N ä i d e 1.

396	2
198	2
99	3
33	3
11	11

$$396 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$$

N ä i d e 2.

3003	3
1001	7
143	11
13	13

$$3003 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Kontrolliks jääb vaid teostada paremal pool märgitud korrutamised.

Üksliikme algtegureiks nimetame kordaja algtegureid ja kõiki ühetäheliste tegurite astendatavaid.

Näiteks on üksliikme $70ab^2x^3$ algtegurid

$$2, \quad 5, \quad 7, \quad a, \quad b, \quad x.$$

Oma algtegurite korrutisena esineb antud üksliige kujul:

$$70ab^2x^3 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ab^2x^3.$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised arvud algarvuliste tegurite korrutistena:

16. 104 126 215 310 399

16. 106 182 253 553 1495

17. 510 791 594 1001 4214

17. 713 950 966 1218 13489

18. Kirjutada kõik arvud 90-st 100-ni nende algarvuliste tegurite korrutistena, tehes tarvilikud arvutused peast.

18. Kirjutada järgmised arvud algtegurite korrutistena:

$28^2 \quad 36^3 \quad 98^2 \quad 165^2 \quad 189^2$

§ 5. Arvu jagajate leidmine.

Kui arv on lahutatud algtegureiks, saab kergesti leida tema jagajad, võttes arvu algtegureid üksikult, siis korrutades neid paarikaupa, kolmekaupa jne. Näiteks on

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5;$$

siit arvu 60 jagajad on

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 5 & \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 5 & 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \cdot 5 & 2 \cdot 3 \cdot 5 & 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}$$

ehk lühemalt 2, 3, 5; 4, 6, 10, 15; 12, 20, 30; 60;

kõigi nende jagajatega seltsib veel endastmõistetavalt jagaja 1.

Ülesanded.

Määrata iga järgmise arvu puhul kõik tema jagajad:

19.	6	16	24	35	42
19.	12	20	30	40	62

§ 6. Antud arvude suurim ühistegur.

Olgu antud kaks arvu, näiteks 30 ja 42. Nende arvude jagajad on vastavalt

	1	2	3	5	6		10	15	30
ja	1	2	3		6	7	14	21	42.

Nagu näeme, omavad arvud 30 ja 42 ühisjagajaid; nendeks on arvud

1, 2, 3 ja 6.

Seega on antud arvude suurimaks ühisjagajaks arv 6. Arvude suurimat ühisjagajat nimetame ka arvude suurimaks ühisteguriks. Niisiis:

antud arvude suurimaks ühisteguriks nimetame suurimat arvu, millega jagub jäägita igaüks antud arvudest.

Olgu kaks arvu lahutatud algtegureiks. Kirjutame välja mõlema arvu ühised algtegurid. Võttes neid tegureid üksikult, siis korrutatult paarikaupa, kolmekaupa jne., saame kõik meie arvude ühisjagajad; suurima neist saame, arvutades kõigi ühiste algtegurite korrutise.

Näide. Olgu antud arvud 420 ja 2700. Lahutades need algtegureiks, saame:

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \qquad 2700 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

Antud arvudel on järgmised ühised algtegurid:

$$2, \quad 2, \quad 3, \quad 5;$$

seega on antud arvude ühiseiks jagajaiks arvud

$$2, 3, 5; \quad 2\cdot2, \quad 2\cdot3, \quad 2\cdot5, \quad 3\cdot5;$$
$$2\cdot2\cdot3, \quad 2\cdot2\cdot5, \quad 2\cdot3\cdot5; \quad 2\cdot2\cdot3\cdot5.$$

Neid arve võime kirjutada lühemalt nii:

$$2, 3, 5; \ 4, 6, 10, 15; \ 12, 20, 30; \ 60;$$

nendega seltsib veel endastmõistetavalt jagaja 1.

Arvude 420 ja 2700 suurim ühisjagaja ehk *suurim ühistegur* on 60.

Eespool-öeldut üldistades jõuame järgmisele juhisele:

selleks, et saada antud arvude suurimat ühistegurit, lahutame arvud algtegureiks, kirjutame välja arvude *ühised* algtegurid ja leiame nende korrutise.

Näide. Leiame arvude 1452, 1980 ja 6600 suurima ühisteguri.

Korraldame töö nii:

				6600	2
		1980	2	3300	2
1452	2	990	2	1650	2
726	2	495	3	825	3
363	3	165	3	275	5
121	11	55	5	55	5
11	11	11	11	11	11

$1452 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^2$ $\quad 1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ $\quad 6600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$

Arvude 1452, 1980 ja 6600 suurim ühistegur on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$$

Ülesanded.

Leida peast järgmiste arvupaaride ja arvukolmikute suurimad ühistegurid.

20.	9 ja 12	6, 12 ja 20
	10 ja 15	9, 18 ja 45
	21 ja 14	7, 14 ja 21
	15 ja 35	10, 35 ja 50
	39 ja 52	18, 30 ja 42

Leida järgmiste arvupaaride ja arvukolmikute suurimad ühistegurid:

20.	112 ja 176	121, 154 ja 165
	132 ja 364	102, 136 ja 170
	308 ja 392	144, 162 ja 198
	360 ja 450	264, 360 ja 600
	468 ja 624	104, 525 ja 712

21. Ühe nööri pikkus on 210 m, teise oma 180 m. Kui suur on pikim nöörilõik, mis mahub nii esimesse kui teise täisarv korda?

21. Ühes korvis on 56 õuna, teises 84 pirni. Mitmele isikule saaks neid jaotada nõnda, et igaüks saaks võrdpalju õunu ja võrdpalju pirne? Kui suur on ülim isikute hulk, mille puhul on säärane jagamine veel võimalik?

22. Ühes klassis on 24 õpilast, teises 40. Kui suured on rühmad, milleks saab jaotada nii esimese kui ka teise klassi õpilasi, kõigis rühmades võrdpalju õpilasi? Mitu õpilast on suurimates niisugustes rühmades?

22. Ühes paberipakis on 480 lehte, teises 360 lehte. Mitme lehe kaupa võiks võtta kummastki pakist, et viimasel võtmisel ei tuleks kummaski pakis lehti puudu ega jääks lehti üle?

§ 7. Antud üksliikmete suurim ühistegur.

Antud avaldiste suurimaks ühisteguriks nimetame avaldiste kõigi ühiste algtegurite korrutist.

Olgu antud üksliikmed

$$42a^3b^2x \text{ ja } 105ab^2x^2$$

ehk lahutatult algtegureiks:

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a^3b^2x \text{ ja } 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ab^2x^2.$$

Nende avaldiste suurim ühistegur on

$$3 \cdot 7 \cdot ab^2x$$

ehk lühemalt

$$21ab^2x.$$

Ülesanded.

Leida allpool-antud avaldisepaaride suurimad ühistegurid:

23.	$6a$	23.	$7ab$	**24.**	$18abc$	24.	$42pqr$
	8		$12ac$		$12ac$		$35mpq$
	P^4		$14Q^3$		$35R^4$		$72s^3$
	P^2		$7Q$		$84R^3$		$120s^5$
	$14ax^2$		$44cy^3$		$30m^2p^3q$		$22h^2k^3l^2$
	$21a^2x$		$77c^2y^2$		$65mp^2q^3$		$121h^3kl$

Leida allpool-antud avaldisekolmikute suurimad ühistegurid:

25.	$15ab^2$	25.	$16x^3y^2z$	**26.**	$12mn$	26.	$26p^3q^2$
	$21a^2b$		$24xy^2z^3$		$18n^2$		$65a^2p^2q^3$
	$12ab$		$6x^2y^2z^2$		$30mn^2$		$39p^2q^3$

§ 8. Antud arvude väikseim ühiskordne.

Olgu antud arvud 12 ja 15. Nende ühe-, kahe-, kolme-, . . . kordsed on vastavalt

12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, 96, 108, **120**, 132, . . .

15, 30, 45, **60**, 75, 90, 105, **120**, 135, 150, 180, . . .

Kordsete ridades leidub ühiseid arve, näiteks

60, 120 ja edasi 180, 240,...

Neist ühiskordseist on üks väikseim; meie juhul 60; teised on selle ühe-, kahe-, kolme- jne. kordsed.

Antud arvude väikseimaks ühiskordseks nimetame väikseimat arvu, mis jagub jäägita iga antud arvuga.

Olgu kaks arvu a ja b lahutatud algtegureiks. Olgu nende arvude väikseim ühiskordne k. Vaadeldes arvu k arvu a kordsena, näeme, et temas peavad leiduma kõik arvu a algtegurid; vaadeldes teda arvu b kordsena, näeme, et temas peavad leiduma samuti kõik arvu b algtegurid. Järelikult saame arvu k, kui kirjutame välja kõik arvu a algtegurid, lisaks neile veel need arvu b algtegurid, mis arvus a ei esine, ja moodustame väljakirjutatud tegurite korrutise.

Näide. Leiame arvude 126 ja 56 väikseima ühiskordse. Korraldame töö nii:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \qquad\qquad 56 = 2^3 \cdot 7$$

Arvude 126 ja 56 väikseim ühiskordne on

$$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 7 = 504.$$

Eespool-öeldut üldistades jõuame järgmisele juhisele:

selleks, et saada antud arvude väikseimat ühiskordset, lahutame arvud algtegureiks, kirjutame välja ühe arvu algtegurid, nendele lisaks teiste arvude need algtegurid, mis veel puuduvad, ja leiame kõigi väljakirjutatud algtegurite korrutise.

Antud arvude väikseima ühiskordse leidmise juhise võib sõnastada ka nii:

selleks, et saada antud arvude väikseimat ühiskordset, lahutame arvud algtegureiks ja korrutame ühe antud arvudest teiste arvude nende algteguritega, mis võetud arvus ei esine.

Eelmistest juhistest järeldame, et

algarvude ja ühistegurita arvude väikseimaks ühiskordseks on nende arvude korrutis.

Näiteks 3 ja 7 väikseim ühiskordne on 21; 14 ja 15 väikseim ühiskordne on $14 \cdot 15 = 210$.

Ülesanded.

27. Leida peast järgmiste arvupaaride ja arvukolmikute väikseimad ühiskordsed:

8 ja 12	3, 5 ja 11
12 ja 15	4, 10 ja 16
21 ja 14	5, 12 ja 18
33 ja 22	9, 15 ja 25
24 ja 100	7, 10 ja 21

27. Leida järgmistes arvuridades väikseimad ühiskordsed:

12, 18, 96 ja 144	240, 810 ja 6300
14, 20, 28 ja 30	42, 56 ja 98
12, 28, 35 ja 40	54, 72 ja 126
12, 20, 36 ja 54	504, 686 ja 1890
18, 24, 32 ja 48	720, 945 ja 3969

28. Leida lühima nööri pikkus, mida saab lõigata nii 12 cm kui ka 15 cm pikkusteks tükkideks.

28. Kui suur on väikseim kuulide arv, mille puhul neid on võimalik korraldada rühmiti kas 14, 15, 21 või 35 kuuli rühmas?

29. Kooli õpilasi saab täpselt rühmitada 4-, 6-, 9-, 12-, 15-, 24-, 40- ja 90-kaupa. Kui suur on väikseim õpilaste hulk, mille puhul on seesugune rühmitus võimalik?

29. Mitu töötajat vähemalt peaks olema kollektiivis, et neid saaks rühmitada nii 3- kui 4- kui ka 5-kaupa?

§ 9. Antud üksliikmete väikseim ühiskordne.

Antud avaldiste väikseimaks ühiskordseks nimetame ühe avaldise korrutist teiste avaldiste nende algteguritega, mis võetud avaldises ei esine.

Olgu antud üksliikmed

$$40m^2n^3p \text{ ja } 84mnq^2$$

ehk lahutatult algtegureiks:

$$2^3 \cdot 5 \cdot m^2n^3p \text{ ja } 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot mnq^2.$$

Nende avaldiste väikseim ühiskordne on

$$2^3 \cdot 5 \cdot m^2 \cdot n^3 \cdot p \cdot 3 \cdot 7 \cdot q^2$$

ehk

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot m^2 \cdot n^3 \cdot p \cdot q^2$$

ehk

$$840m^2n^3pq^2.$$

Antud üksliikmete väikseima ühiskordse leidmise juhise võib sõnastada nii:

selleks, et saada antud üksliikmete väikseimat ühiskordset, võtame ühe neist üksliikmeist ja korrutame selle teiste üksliikmete nende algteguritega, mis võetud üksliikmes ei esine.

Ülesanded.

Leida järgmiste avaldisepaaride väikseimad ühiskordsed:

30.	$10b$	$40n$	cx	$14a^2$
	12	$64n$	dx	$21af$
30.	$44mx^2$	$15b^2y^3$	$6m^2nz$	$39pq^2h^3$
	$33m^2x^2$	$12b^3y^2$	$18mnz^3$	$52p^2q^2h^2$

Leida järgmiste avaldisepaaride suurimad ühistegurid ja väikseimad ühiskordsed:

31.	$6x$	k^2	cv	p^2q
	$3x$	$7k$	v^2	pq^2
31.	$2m^2$	$4np$	$6a^2b$	$7t^5$
	$3mn$	$2pz$	$9b^2$	$3t^2$
32.	$12r$	$7lmn^2$	$12w^4$	$18h^2k^4$
	$18rp$	$14lmn$	$27w^6$	$12h^3k^5$
32.	$15a^2u^3$	$24p^3q^2$	$16au^2v$	$27cm^2q^3$
	$35a^3u$	$30pq^4$	$15au^3v^2$	$45mq^2r$

§ 10. Ülesandeid kordamiseks.

33. Leida arvude 231 ja 693 suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

33. Leida arvude 667 ja 899 suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

34. Lahutada arv 4199 algteguriteks.

34. Lahutada arv 17017 algteguriteks.

35. Missuguste arvudega reast

2 3 4 5 9 10 25

jagub arv 137610?

35. Missugused arvudest

2 3 4 5 9 10 25

on arvu 1 234 560 jagajaiks?

36. Leida avaldiste

$$15pqr \qquad 33p^2q^2r \qquad 55pq^3$$

suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

36. Leida avaldiste

$$36f^3g^3h^6 \qquad 24f^2g^4h^5 \qquad 60f^4g^5h^4$$

suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

37. Avaldada üldkujul arv, mis jagamisel 7-ga annab jäägi 4.

37. Avaldada üldkujul arv, mis jagamisel 5-ga annab jäägi 3.

§ 11. Hulkliikmete lahutamine tegureiks.

Nagu teame, mõistetakse hulkliikme tegureiks lahutamise all hulkliikme teisendamist korrutiseks ehk üksliikmeks. Selline teisendamine, nagu edaspidi näeme, on vajalik murdude liitmisel ja lahutamisel.

Hulkliikme tegureiks lahutamise võtteist käsitleme järgmisi:

1) ühise teguri sulgude ette toomise võte;
2) liikmete rühmitamise võte;
3) arvutamise abivalemite kasutamise võte ja
4) liikme kahendamise võte.

Kuigi esimene võte on meile juba tuttav ja kolmandast võttest tunneme ühe valemi, nimelt ruutude vahe valemi kasutamist, vaatleme siiski ülevaatlikkuse pärast nüüd kõiki neid võtteid.

1. võte. Ühise teguri sulgude ette toomise võte tugineb valemile

$$ma + mb = m(a + b).$$

Näited.

1. $12x + 36 = 12(x + 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot (x + 3).$
2. $u^3 - 5u^2 = u^2(u - 5).$
3. $18ih^2 - 24i^2h^2 = 6ih^2(3 - 4i) = 2 \cdot 3 \cdot ih^2(3 - 4i).$
4. $7u(3q - 2) + 5(3q - 2) = (3q - 2)(7u + 5).$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised korrutistena, võttes liikmete ühise teguri sulgude ette:

38. $3a + 3$
$3a + 6$
$9a - 6$
$12 - 4a$
$21 - 35a$

38. $6a - 3x$
$7x - 14a$
$15x + 3a$
$16a - 24x$
$72x - 9a$

Võtta järgmistes avaldistes ühine tegur sulgude ette:

39. $mn + mx$
$Q^2 - PQ$
$mv^2 - gv$
$2st - 6at^2$
$14N^2 - 7Nc$

39. $16r^3 - 24r^2$
$4u^3 - u^4$
$pq^2 - 3p^2q$
$m^3 + 5cm^2$
$15h^2k^3 - 9h^3k$

Kirjutada järgmised avaldised üksliikmetena:

40. $5a^2 - 10ab$
$6ax - 12a^2$
$9x^2 - 18ax$

40. $12a^2 - 4a^2x$
$10ax - 15bx$
$12ax^2 - 10a^2x$

Võtta järgmistes avaldistes ühine tegur sulgude ette:

41. $6ax - 9bx + 21cx$
$42a^2y - 35ay^2 + 7ay$
$9cz^4 - 21c^2z^3 - 15c^3z^2$

41. $m(u + a) - n(u + a)$
$2(3b - v) - 3v(3b - v)$
$3q^2(2Q - 1) - (2Q - 1)$

2. v õ t e. Liikmete rühmitamise võtte puhul paigutame hulkliikmes liikmed nii sulgudesse, et õnnestuks mõne avaldise sulgude ette võtmine.

N ä i t e d.

1. $11N(5z + 4) - 5z - 4 = 11N(5z + 4) -$
$- (5z + 4) = (5z + 4)(11N - 1).$

2. $px + py - 2qx - 2qy = (px + py) -$
$- (2qx + 2qy) = p(x + y) - 2q(x + y) =$
$= (x + y)(p - 2q).$

3. $u^3 - 5u^2 - 3u + 15 = (u^3 - 5u^2) -$
$- (3u - 15) = u^2(u - 5) - 3(u - 5) =$
$= (u - 5)(u^2 - 3).$

Ülesanded.

Lahutada järgmised hulkliikmed teguriteks:

42. $(a - 2b)(4m + 7n) + a(4m + 7n)$
$(2u + v)(6R^2 - 1) - (6R^2 - 1)$
$(P + 2Q)(N^2 + 2) - 3Q(N^2 + 2)$
$(h - 2k)(h + k) + 3k(h + k)$
$(5l + 3m)(l - 2m) - 3m(l - 2m)$

42. $2p(p - q) + 3q(p - q)$
$(4a - 5b)(3m - 2p) + (4b - a)(3m - 2p)$
$(4a + 5b)(3p - 2m) - (4b + a)(3p - 2m)$
$(5a - 2b)(2m + 3p) - (2a - 7b)(2m + 3p)$
$n(1 - a + a^2) - (1 - a + a^2)$

43. $3a(x + y) + x + y$
$4m(2m - n) + 2m - n$
$5c(3d - 1) - 3d + 1$
$7(3p - 4) - 3p + 4$
$(4p + q)(x + y) + 3q(x + y)$

43. $3a(x + y) + 2x + 2y$
$5(x + y) + ax + ay$
$3a(m - n) - 2am + 2an$
$5a(m - n) + 10am - 10an$
$a(x - y) - 7ax + 7ay$

Liikmeid kohaselt rühmitades lahutada järgmised hulkliikmed tegureiks:

44. $ax + ay + 2x + 2y$
$n^2 + nz + 5n + 5z$
$u^2 + 7u + au + 7a$
$3a^2 + 2ab + 6a + 4b$
$6x^2 - 13x + 6xy - 13y$

44. $2ax - au + 4bx - 2bu$
$5Nc - 5Nd + 7c^2 - 7cd$
$z^2 - hz + 11z - 11h$
$8x^3 - 8x^2y - 4xy^2 + 4y^3$
$ax^2 - bx^2 + ax - bx$

45. $t^2 - at - 3t + 3a$
$8m^2 - 4mn - 6m + 3n$
$16pq - 12q - 8pr + 6r$
$20ab + 4b - 5a - 1$
$5z^2 - 5hz + ah - az$

45. $x^3 + x^2 + x + 1$
$x^3 - 3x^2 - 2x + 6$
$3x^3 - 7x^2 - 9x + 21$
$x^3 - 2x^2 - 2x + 4$
$5x^3 - 35x^2 + x - 7$

3. võte. Arvutamise abivalemite kasutamise võte tugineb vahetatud pooltega arvutamise abivalemeile:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b),$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3,$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3,$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2).$$

Näited.

1. $9a^2x^2 - 1 = (3ax)^2 - 1^2 = (3ax + 1)\,(3ax - 1).$
2. $h^2x^2 + 2ah^2x + h^2a^2 = h^2(x^2 + 2ax + a^2) =$
$= h^2(x + a)^2.$

3. $63x^2 - 84x + 28 = 7(9x^2 - 12x + 4) =$
$= 7 \cdot [(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2] = 7(3x - 2)^2.$

4. $64x^3 - 144x^2y + 108xy^2 - 27y^3 = (4x)^3 -$
$- 3 \cdot (4x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 4x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 = (4x - 3y)^3.$

5. $343x^3 + 8y^3 = (7x)^3 + (2y)^3 =$
$= (7x + 2y)(49x^2 - 14xy + 4y^2).$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised, kui võimalik, binoomide ruutudena:

46. $x^2 + 4x + 4$
$x^2 - 2x + 3$
$x^2 + 14x + 49$
$x^2 - 8x + 16$
$x^2 - 18x + 72$

46. $25 - 10y + y^2$
$1 + 2z + z^2$
$4u + 8 + u^2$
$v^2 - 2v - 1$
$t^2 - 16t + 64$

47. $x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$
$4f^2 + 4f + 1$
$x^2 - 0{,}2x + 0{,}01$
$x^2 - 2{,}4x + 1{,}44$
$x^2 - 0{,}6x - 0{,}09$

47. $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$
$16g^2 - 16g + 4$
$h^2 - 6ah + 9a^2$
$c^2 - 4ck + 4k^2$
$25m^2 - 30mn + 9n^2$

Kirjutada järgmised avaldised korrutistena:

48. $x^2 - 1$
$1 - x^2$
$y^2 - 4$
$25 - y^2$
$49 - 9z^2$

48. $9 - a^2$
$64u^2 - v^2$
$x^2 - \frac{64}{81}$
$0{,}04 - c^2$
$a^2 - 0{,}49$

Esitada järgmised avaldised korrutistena, soovi korral sulgusid enne avades, kus need olemas:

49.	$ax^2 - ay^2$	49.	$9s^3t^2 - s$
	$a^3 - ax^2$		$(m + n)^2 - n^2$
	$27b^2 - 12a^2$		$p^2 - (p - q)^2$
	$a^2b^2 - c^2$		$w^2 - (w - uv)^2$
	$\pi R^2 - \pi r^2$		$az^2 - a(y - z)^2$

Kirjutada järgmised avaldised binoomide kuupidena:

50. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$8 - 12a + 6a^2 - a^3$

$c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$

$-a^3 - 30a^2 - 300a - 1000$

$y^3 + 2y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{8}{27}$

50. $x^3 + 18x^2 + 108x + 216$

$1 + 0{,}03p + 0{,}0003p^2 + 0{,}000001p^3$

$125 - 75z + 15z^2 - z^3$

$8u^3 + 12u^2v + 6uv^2 + v^3$

$125a^3 - 150a^2b + 60ab^2 - 8b^3$

Esitada järgmised avaldised korrutistena:

51.	$a^3 + 125$	51.	$250p^3 + 54q^3r^3$
	$64 - x^3$		$x^3 - 0{,}008$
	$8x^3 + 1$		$\frac{1}{8} - 8a^3$
	$27a^3 - 8b^3$		$125u^3 + 216$
	$z^3 + 0{,}001$		$128a^3b^2 - 432b^2c^3$

4. v õ t e. Liikme kahendamise võte. Mõnikord on kasulik hulkliikme mõni liige kirjutada kahe liikme summana või vahena. Pärast seesugust kahendamist on mõnikord võimalik hulkliikme liikmeid nii rühmitada, et rühmadest saab ühised tegurid sulgude ette tuua.

N ä i t e d.

1. $x^2 + 11x + 24 = x^2 + 3x + 8x + 24 =$
$= (x^2 + 3x) + (8x + 24) = x(x + 3) + 8(x + 3) =$
$= (x + 3)(x + 8).$

2. $a^2 - 3a - 10 = a^2 - 5a + 2a - 10 =$
$= (a^2 - 5a) + (2a - 10) = a(a - 5) + 2(a - 5) =$
$= (a - 5)(a + 2).$

3. $x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab =$
$= (x^2 + ax) + (bx + ab) = x(x + a) +$
$+ b(x + a) = (x + a)(x + b).$

4. $3x^2 + 4ax + a^2 = 3x^2 + 3ax + ax + a^2 =$
$= (3x^2 + 3ax) + (ax + a^2) =$
$= 3x(x + a) + a(x + a) =$
$= (x + a)(3x + a).$

Ülesanded.

Lahutada järgmised trinoomid tegureiks:

52. $x^2 + 5x + 6$
$x^2 + 9x + 20$
$y^2 - 10y + 21$
$y^2 - 19y + 90$
$z^2 + z - 6$

52. $z^2 + 3z - 28$
$u^2 + 2u - 15$
$u^2 - u - 20$
$p^2 + 4p - 12$
$x^2 + x - 42$

53. $y^2 + (a + b)y + ab$
$x^2 - (a + 3)x + 3a$
$x^2 + (b + 5)x + 5b$
$x^2 - (a - 7)x - 7a$
$y^2 + (9n - 7)y - 63n$

53. $z^2 + (2m + 3)z + 6m$
$z^2 - (3n - 1)z - 3n$
$u^2 - (c - 5)u - 5c$
$v^2 - (3m - 4n)v - 12mn$
$w^2 - (1 - 7k)w - 7k$

54. $2x^2 + 3xy + y^2$
$2x^2 + 5x + 3$
$5x^2 + 9x - 2$
$4a^2 - 2a - 2$
$7m^2 + 22m + 3$

54. $3a^2 + 5a + 2$
$3a^2 + 7a + 2$
$6n^2 + 13n + 6$
$6n^2 - 13n + 6$
$6n^2 - 5n - 6$

Esitada järgmised avaldised korrutistena, valides selleks sobiva võtte:

55. $x^2 + 6x + 9$ | 55. $1 - 8y + 16y^2$

$x^2 - 10x + 25$ | $1 - a^2z^2$

$u^2 - 49$ | $c^2x^2 - 81$

$36u^2 - 25v^2$ | $49 - 14pq + p^2q^2$

$z^2 + z + \frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16} - 25u^2v^2$

Lahutada järgmised hulkliikmed tegureiks:

56. $3x^2 - 6x + 3$ | 56. $7a^2b^2 - 7c^4$

$6 - 24p^2q^2$ | $245Q^2 - 140Q + 20$

$5y^2 - 1445$ | $121a^2b^2 - 100c^2d^2$

$11x^2 - 66x + 99$ | $24x^2 + 72x + 54$

$u^2 - 1,21$ | $4f^2 - \frac{9}{25}$

M ä r k u s e d. 1. Summa ruudu valem annab juhise 5-ga lõppeva arvu ruudu hõlpsaks arvutamiseks peast.

a) Kui arv koosneb a ühelisest ja sellele järgnevast 5-st kümnendikust, siis on selle arvu üldine kuju $a + 0,5$.

Selle ruut on $(a + 0,5)^2$. Viimase avaldise saame teisendada järgmiselt:

$$(a + 0,5)^2 = a^2 + a + 0,25 = a(a + 1) + 0,25.$$

Saadud avaldisest näeme, et kõne all oleva arvu ruudu saamiseks tuleb võtta selle arvu täisosa, see korrutada ühe võrra suurema arvuga ja tulemusega liita 0,25.

Nii on $3,5^2 = 3 \cdot 4 + 0,25 = 12,25$.

b) Kui arvus on a kümmet ja 5 ühte, siis on selle arvu kirjutis $10a + 5$. Selle ruut on $(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100 \cdot a(a + 1) + 25$.

Siit näeme, et 5-ga lõppeva arvu ruudu saamiseks tuleb võtta selle arvu kümnete arv, see korrutada ühe võrra suurema arvuga, saadus korrutada 100-ga ja tulemusega liita 25.

Nii on $45^2 = 4 \cdot 5 \cdot 100 + 25 = 2025$.

2. Kui kellelgi on tarvis koostada ruutude tabel, siis saaks ta mistahes arvu ruudu järgi leida järgmise arvu ruudu sel teel, et leitud arvu ruudule lisab selle arvu ja järgmise arvu summa, sest $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a^2 + a + (a+1)$.

Näiteks, kui 6^2 on teada, siis

$$7^2 = 6^2 + 6 + 7 = 36 + 13 = 49,$$
$$8^2 = 7^2 + 7 + 8 = 49 + 15 = 64,$$
$$9^2 = 8^2 + 8 + 9 = 64 + 17 = 81, \text{ jne.}$$

Ülesanded.

Arvutada peast järgmiste arvude ruudud:

57.	$1{,}5^2$	57.	25^2
	$4{,}5^2$		35^2
	$6{,}5^2$		55^2
	$8{,}5^2$		75^2
	$9{,}5^2$		85^2

Arvutada

58. 31^2, teades, et $30^2 = 900$;

58. 23^2, teades, et $22^2 = 484$;

59. arvude 30, 31, 32, . . ., 39, 40 ruudud.

59. Koostada ruutude tabel arvudele 1 kuni 100.

Peatükk II.

Algebraline murd.

Esimene tsükkel.

§ 12. Murd.

Murdu $\frac{5}{7}$ mõistame tulemusena, mille saame, kui terviku jaotame 7-ks võrdseks osaks ja neid osi võtame 5. Üldistame seda mõtet. Olgu m ja n kaks positiivset täisarvu. Murdu $\frac{m}{n}$ mõistame tulemusena, mille saame, kui terviku jaotame n võrdseks osaks ja neid osi võtame m.

Arvu, mis näitab, mitmeks osaks on jaotatud tervik, nimetame murru nimetajaks; arvu, mis näitab, mitu niisugust osa on võetud, nimetame murru lugejaks.

Selle asemel, et enne jaotada üks tervik n võrdseks osaks ja siis võtta m niisugust osa, võime enne võtta m tervikut kokku ja saaduse jaotada n võrdseks osaks. Öeldu põhjal võime murdu $\frac{m}{n}$ tõlgendada jagatisena, mille saame, jagades arvu m arvuga n. Seega

murd $\frac{m}{n}$ on niisugune arv, mis korrutamisel arvuga n annab arvu m.

Sümbolites avaldub see definitsioon kujul:

$$n \cdot \frac{m}{n} = m.$$

Olgu p ja q kaks positiivset täisarvu. Murru esimese tõlgenduse järgi sümbolitel

$$\frac{-p}{q} \text{ ja } \frac{p}{-q}$$

pole mõtet, küll aga omavad nad mõtet praegu-antud definitsiooni järgi. Viimasest nähtub, et kumbagi neist sümboleist tuleb mõista murruna $-\frac{p}{q}$:

$$\frac{-p}{q} = \frac{p}{-q} = -\frac{p}{q}.$$

Sellest järeldub, et pole vajadust eraldi uurida murdu, mille lugejaks või nimetajaks on negatiivne arv, vaid murru omaduste tuletamisel ja murdudega tehete käsitlemisel võime eeldada, et murru lugeja ja nimetaja on positiivsed.

Ülesanded.

60. Pudelitäie õli puhaskaal on p grammi; sama pudelitäie vee puhaskaal on q grammi. Kui suur on õli erikaal e?

60. Masina hooratas teeb n pööret sekundis. Mitu sekundit kulub rattal ühe pöörde tegemiseks?

61. Lennuk tõuseb kiirusega v meetrit sekundis. Mitu sekundit pärast tõusmist on lennuk 200 m kõrgusel?

61. Mootorratta bensiinikulu on k liitrit kilomeetri kohta; bensiinitagavara on v liitrit. Kui pika tee saab sõita selle bensiinitagavaraga?

62. Raamatus on n lehte. Tema paksus, kaasi ühes arvamata, on p mm. Kui paks on raamatu lehe paber?

62. Ristkülikutaoline tükk plekki, mille mõõtmed on p ja q meetrit, maksab k rubla. Kui kallilt hinnati 1 ruutmeeter seda plekki?

63. Laua mõõtmed on m ja n meetrit. Laua poleerimiseks kulus p grammi polituuri. Mida tähendab avaldis $\frac{p}{mn}$?

63. Ruudukujulise, a meetri pikkuse küljega põranda värvimiseks kulus v kg värvi. Mida tähendab avaldis $\frac{v}{a^2}$?

§ 13. Murru põhiomadus.

Murru põhiomaduse tuletamisel lähtume silmanähtavast tõest, et murru $\frac{a}{b}$ väärtus m korda suureneb, kui lugejat korrutame arvuga m, ja m korda väheneb, kui arvuga m korrutame nimetajat. Siit järeldub, et

murru väärtus ei muutu, kui korrutame ühe ja sama arvuga nii murru lugejat kui ka tema nimetajat.

Sümbolites avaldub see tõsiasi nõnda:

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}.$$

Lugedes sama võrdust paremalt poolt vasakule näeme, et

murru väärtus ei muutu, kui jagame ühe ja sama arvuga murru lugejat ja nimetajat.

Ülaltoodud võrduses peituvat murru omadust loeme murru põhiomaduseks.

§ 14. Murru teisendamine: laiendamine ja taandamine.

Korrutades murru $\frac{3}{4}$ lugejat ja nimetajat arvudega 5, 7, 9, 10 ja 13, saame murrud

$$\frac{15}{20} \quad \frac{21}{28} \quad \frac{27}{36} \quad \frac{30}{40} \quad \frac{39}{52}.$$

Murru põhiomaduse järgi on kõigil neil murdudel üks ja seesama väärtus $\frac{3}{4}$; seega kõik need murrud on murru $\frac{3}{4}$ t e i s e n d i d.

Jagades murru $\frac{840}{1120}$ lugejat ja nimetajat arvudega 2, 10, 20, 140 ja 280, saame murrud

$$\frac{420}{560} \quad \frac{84}{112} \quad \frac{42}{56} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{3}{4}.$$

Murru põhiomaduse järgi on kõigil neil murdudel üks ja seesama väärtus $\frac{420}{560}$; seega kõik need murrud on murru $\frac{420}{560}$ t e i s e n d i d.

Teisendust, mille puhul murru lugejat ja nimetajat korrutame ühe ja sellesama arvuga, nimetame murru l a i e n d a m i s e k s; teisendust, mille puhul murru lugejat ja nimetajat jagame ühe ja sellesama arvuga, nimetame murru t a a n d a m i s e k s.

Murru laiendamiseks pole tõket; murru taandamist on aga võimalik teostada vaid niikaua, kui murru lugejal ja nimetajal on veel ü h i s e i d t e g u r e i d.

Murdu, mille lugejal ja nimetajal pole ühiseid tegureid, nimetame t a a n d u m a t u k s.

Näiteks murrud

$$\frac{3}{5} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{13}{18} \quad \frac{23}{41}$$

ja

$$\frac{a}{b} \quad \frac{m}{n^2} \quad \frac{2p}{3q} \quad \frac{x+1}{a^3} \quad \frac{2+a}{2} \quad \frac{a+b}{a^2}$$

on taandumatud.

Murru taandamist selgitame järgmiste ülesannete varal.

Ü l e s a n n e 1. Taandada murd $\frac{234}{306}$.

L a h e n d u s.

$$\frac{234}{306} = \frac{117}{153} = \frac{39}{51} = \frac{13}{17}.$$

taandades kahega — taandades kolmega — taandades kolmega

Saadud murd $\frac{13}{17}$ on taandumatu, sest tema lugejal ja nimetajal pole ühiseid tegureid.

Ü l e s a n n e 2. Taandada murd $\frac{24 \cdot 35}{21 \cdot 36}$.

L a h e n d u s. Arvude 24 ja 36 suurimaks ühiseks teguriks on 12; arvude 35 ja 21 s. ü. t. on 7. Taandades antud murdu 12- ja 7-ga, saame

$$\frac{24 \cdot 35}{21 \cdot 36} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}.$$

M ä r k u s. Tegelikul arvutamisel toimitakse nii, et murru lugeja jagamisel taandajaga kriipsutatakse jagatav arv läbi ja kirjutatakse jagatis kriipsutatud arvust ülespoole; nimetaja jagamisel toimitakse samal viisil, kirjutades jagatise kriipsutatud arvu alla.

Ü l e s a n n e 3. Taandada murd $\frac{12abc}{-8abc^2}$.

L a h e n d u s. Lahutame antud murru lugeja ja nimetaja algtegureiks; saame

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot c}{-(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c} \text{ ehk } \frac{2^2 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot c}{-2^3 \cdot a \cdot b \cdot c^2}.$$

Nüüd näeme, et lugejal ja nimetajal on järgmised ühised tegurid:

$$2,\ 2,\ a,\ b,\ c \text{ ehk } 2^2,\ a,\ b,\ c.$$

Jagades lugeja ja nimetaja nende ühiste teguritega, saame:

$$\frac{12abc}{-8abc^2} = -\frac{3}{2c}.$$

Ülesanne 4. Taandada murd $\frac{66a^4b^2c^3}{165ab^3c^4d}$.

Lahendus.

$$\frac{66a^4b^2c^3}{165ab^3c^4d}=\frac{2\cdot 3\cdot 11\cdot a^4\cdot b^2\cdot c^3}{3\cdot 5\cdot 11\cdot a\cdot b^3\cdot c^4\cdot d}.$$

Taandades antud murdu lugeja ja nimetaja ühiste teguritega

$$3,\ 11,\ a,\ b^2 \text{ ja } c^3,$$

saame

$$\frac{66a^4b^2c^3}{165ab^3c^4d}=\frac{2a^3}{5bcd}.$$

Ülesanded.

Taandada, kui võimalik, järgmised murrud:

64.	64.	65.	65.	66.	66.
$\frac{16}{40}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{14}{35}$	$\frac{24}{66}$	$\frac{28}{72}$	$\frac{21}{63}$
$\frac{15}{18}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{33}{88}$	$\frac{28}{32}$	$\frac{14}{49}$	$\frac{27}{72}$
$\frac{40}{88}$	$\frac{24}{54}$	$\frac{35}{63}$	$\frac{88}{121}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{24}{70}$
$\frac{27}{63}$	$\frac{40}{96}$	$\frac{39}{91}$	$\frac{60}{84}$	$\frac{42}{72}$	$\frac{84}{220}$
$\frac{57}{243}$	$\frac{115}{320}$	$\frac{117}{130}$	$\frac{132}{143}$	$\frac{112}{176}$	$\frac{308}{392}$

67.	67.	68.	68.
$\frac{2\cdot 6}{42}$	$\frac{-12}{6\cdot 5}$	$\frac{72\cdot 6}{-36}$	$\frac{3\cdot 12}{18\cdot 24}$
$\frac{3}{2\cdot 3}$	$\frac{-8\cdot 5}{12}$	$\frac{22}{-33\cdot 9}$	$\frac{-15\cdot 20}{45\cdot 30}$
$\frac{4}{3\cdot 8}$	$\frac{5\cdot 16}{-32}$	$\frac{17\cdot(-2)}{-51}$	$\frac{-3\cdot 8\cdot 36}{-2\cdot 9\cdot 48}$
$\frac{6}{3\cdot 10}$	$\frac{3\cdot(-12)}{40}$	$\frac{-36}{-5\cdot(-24)}$	$\frac{-4\cdot(-7)\cdot 15}{3\cdot 7\cdot 50}$
$\frac{3\cdot 4}{9}$	$\frac{-36\cdot 5}{-96}$	$\frac{-75\cdot 3}{-50}$	$\frac{2\cdot(-6)\cdot 32}{45\cdot 5\cdot(-6)}$

Taandada järgmised murrud:

69. $\frac{6a}{4}$ $\frac{6}{2a}$ $\frac{8b}{4a}$ $\frac{3a}{5a}$ $\frac{b}{2b}$

69. $\frac{12}{6a}$ $\frac{5a}{10}$ $\frac{9a}{3b}$ $\frac{5c}{7c}$ $\frac{n}{3n}$

70. $\frac{ab^2}{abc}$ $\frac{9ax}{15a^2}$ $\frac{15ax^2}{35bx^3}$ $\frac{12a^2b^2x}{18a^2b^2y}$ $\frac{20ab^2c^3}{48a^2b^3c^4}$

70. $\frac{a^2b}{abc}$ $\frac{8a^2}{12ax}$ $\frac{9ax^3}{6bx^2}$ $\frac{18a^2b^3y}{24a^2b^3x}$ $\frac{36a^2b^3c^4}{30ab^2c^3}$

71. $\frac{15a^2}{35ab}$ $\frac{26ab^2}{65a^2b}$ $\frac{48a^2bc}{78abc^2}$ $\frac{33m^2nx}{48mnx}$ $\frac{74p^2q^4}{37npq^3}$

71. $\frac{96m^2n^2}{72m^3n^3}$ $\frac{144mn^2p^3}{192m^2np}$ $\frac{169m^4n^3}{195m^2np^2}$ $\frac{57c^3u^4v^5}{190c^4u^3v^5}$ $\frac{105x^2z^2}{360x^3z}$

§ 15. Murdude ühenimelisteks teisendamine.

Murde, milledel on üks ja seesama nimetaja, nimetame ühenimelisteks; niisuguste murdude nimetajat — nende ühisnimetajaks.

Näiteks

$$\frac{3}{17} \quad \frac{8}{17} \quad \frac{13}{17} \quad \frac{16}{17}$$

on ühenimelised murrud; samuti on

$$\frac{a}{2mn} \quad \frac{b^2}{2mn} \quad \frac{cd}{2mn} \quad \frac{h}{2mn}$$

ühenimelised murrud.

Antud murde on alati võimalik teisendada ühenimelisteks, võttes nende ühisnimetajaks antud nimetajate mingi ühiskordse. Lihtsuse mõttes võtame selleks ühisnimetajaks harilikult antud nimetajate v ä i k s e i m a ühiskordse. Murdude ühenimelisteks teisendamist selgitame järgmiste ülesannete varal.

Ü l e s a n n e 1. Teisendada murrud $\frac{11}{12}$ ja $\frac{13}{15}$ ühenimelisteks.

L a h e n d u s. Arvude 12 ja 15 väikseimaks ühiskordseks on 60; see on 5 korda suurem kui 12 ja 4 korda suurem kui 15. Järelikult murru põhiomaduse järgi

$$\frac{11}{12}=\frac{11\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{55}{60} \text{ ja } \frac{13}{15}=\frac{13\cdot 4}{15\cdot 4}=\frac{52}{60}.$$

Arvu, mis näitab, mitu korda murru laiendamisel suureneb murru lugeja ja nimetaja, nimetame murru l a i e n d a j a k s.

Eelmises ülesandes olid murdude laiendajad vastavalt 5 ja 4.

Üldine juhis, mille järgi murde teisendame ühenimelisteks, on järgmine:

selleks, et erinevate nimetajatega murde teisendada ühenimelisteks, määrame nende nimetajate väikseima ühiskordse ning võtame selle murdude ühisnimetajaks; murdude uued lugejad saame, kui korrutame antud lugejad vastavate laiendajatega. Laiendajate leidmiseks jagame ühisnimetaja antud murdude nimetajatega,

Ü l e s a n n e 2. Teisendada murrud $\frac{9}{14}$, $\frac{3}{35}$ ja $\frac{11}{24}$ ühenimelisteks.

L a h e n d u s. Lahutades nimetajad algtegureiks, saame

$$14=2\cdot 7 \qquad 35=5\cdot 7 \qquad 24=2^3\cdot 3;$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7=840$$

ning vastavad laiendajad on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 2^3 \cdot 3 \qquad 5 \cdot 7$$

ehk

$$60 \qquad 24 \qquad 35.$$

Järelikult

$$\frac{9}{14} = \frac{9 \cdot 60}{14 \cdot 60} = \frac{540}{840} \quad \frac{3}{35} = \frac{3 \cdot 24}{35 \cdot 24} = \frac{72}{840}$$

$$\frac{11}{24} = \frac{11 \cdot 35}{24 \cdot 35} = \frac{385}{840}$$

Ülesanne 3. Teisendada murrud

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ja $\frac{4}{5}$ ühenimelisteks.

Lahendus. Et antud nimetajad on algarvud, siis nende väikseimaks ühiskordseks on nende nimetajate korrutis $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Vastavad laiendajad on 15, 10 ja 6.

Järelikult

$$\frac{1}{2} = \frac{15}{2 \cdot 15} = \frac{15}{30}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{20}{30}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{24}{30}$$

Samal viisil toimime täheliste murdude ühenimelisteks teisendamisel.

Ülesanne 4. Teisendada murrud $\frac{a}{3b}$ ja $\frac{b}{4c}$ ühenimelisteks.

Lahendus. Et antud nimetajad on ühistegurita, siis ühiseks nimetajaks on antud nimetajate korrutis

$$3b \cdot 4c = 12bc.$$

Vastavad laiendajad on $4c$ ja $3b$.

Seega

$$\frac{a}{3b} = \frac{a \cdot 4c}{3b \cdot 4c} = \frac{4ac}{12bc}$$

$$\frac{b}{4c} = \frac{b \cdot 3b}{4c \cdot 3b} = \frac{3b^2}{12bc}.$$

Ülesanne 5. Teisendada murrud

$$\frac{7c}{12abx} \qquad \frac{13x}{20ab^2} \qquad \frac{8b}{15a^2x^3}$$

ühenimelisteks.

Lahendus. Lahutades nimetajad algtegureiks, saame

$$2^2 \cdot 3 \cdot abx \qquad 2^2 \cdot 5 \cdot ab^2 \qquad 3 \cdot 5 \cdot a^2x^3;$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2b^2x^3$$

ehk

$$60a^2b^2x^3.$$

Leitud väikseim ühiskordne $60a^2b^2x^3$ on antud murdude ühiseks nimetajaks. Jagades saadud ühise nimetaja antud murdude nimetajatega, leiame vastavad laiendajad:

$$60a^2b^2x^3 : 12abx = 5abx^2;$$
$$60a^2b^2x^3 : 20ab^2 = 3ax^3;$$
$$60a^2b^2x^3 : 15a^2x^3 = 4b^2.$$

Laiendades antud murde nende laiendajatega, saamegi ühenimelised murrud:

$$\frac{7c \cdot 5abx^2}{12abx \cdot 5abx^2} = \frac{35abcx^2}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{13x \cdot 3ax^3}{20ab^2 \cdot 3ax^3} = \frac{39ax^4}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{8b \cdot 4b^2}{15a^2x^3 \cdot 4b^2} = \frac{32b^3}{60a^2b^2x^3}.$$

Ülesanded.

Teisendada järgmised murrud ühenimelisteks:

72. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{15}$

72. $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{1}{2}$

73. $\frac{6}{11}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{9}{14}$

73. $\frac{11}{50}$, $\frac{23}{125}$, $\frac{29}{150}$, $\frac{34}{225}$

74. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$

74. $\frac{a}{3b}$, $\frac{c}{4d}$

75. $\frac{a}{b^2}$, $\frac{3}{b}$

75. $\frac{p}{a^2}$, $\frac{q}{2ab}$

76. $\frac{2a^2}{x}$, $\frac{3b}{y}$, $\frac{4c}{z}$

76. $\frac{4x}{a^2}$, $\frac{3y}{2b^2}$, $\frac{5y}{4ab}$

77. $\frac{2m}{3a^3}$, $\frac{n}{12a^2b}$, $\frac{5n}{18ab^2}$

77. $\frac{p}{4m^2n}$, $\frac{3p^2}{2mn^3}$, $\frac{5}{14m^3n^2}$

78. $\frac{x}{a}$, a^2, $\frac{y}{3a^3b}$

78. $2b$, $\frac{a}{3x^2}$, $\frac{3ab}{5xy}$

79. $\frac{2p}{3m^2}$, $\frac{5p^2}{6m^2n^2}$, $3mn$

79. $\frac{5b}{24a^2c^3}$, $5d$, $\frac{7a}{36c^2}$

Teisendada järgmised murrud ühenimelisteks:

80. $\frac{b}{a^2}$, $\frac{c}{2ab}$, $\frac{a}{b}$

80. $\frac{2a^2}{b^3}$, $\frac{3b^2}{a^2}$, $\frac{5ab}{c^3}$

81. $\frac{3c^2}{4b^3d^2}$, $\frac{2a}{6b^2d^3}$, $\frac{5x}{b^3d}$

81. a, $\frac{b^2}{a}$, $\frac{c}{2a}$

§ 16. Murdude liitmine.

Ü l e s a n n e 1. Liita murrud $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ ja $\frac{5}{7}$.

L a h e n d u s. Kõigil liidetavail on ühine nimetaja. On selge, et

2 seitsmendikku $+$ 3 seitsmendikku $+$ 5 seitsmendikku $=$

$=(2+3+5)$ seitsmendikku

ehk teisiti:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{2+3+5}{7}.$$

Saaduse võime kirjutada lühemalt $\frac{10}{7}$ ehk $1\frac{3}{7}$.

Samal viisil saame, et

$$\frac{3a}{5N^2}+\frac{2b}{5N^2}=\frac{3a+2b}{5N^2}.$$

Sõnastame oma arutluste tulemuse nõnda:

ühenimeliste murdude summa on murd, millel on seesama nimetaja, mis liidetavailgi, lugeja aga on antud murdude lugejate summa.

Ü l e s a n n e 2. Liita murrud $\frac{12}{35}$, $\frac{29}{42}$, $\frac{61}{70}$.

L a h e n d u s. Teisendame murrud ühenimelisteks. Ühisnimetajaks võtame väikseima võimalikest, see on nimetajate väikseima ühiskordse. Et

$$35 = 5 \cdot 7 \qquad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \qquad 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7,$$

siis on ühisnimetajaks arv

$$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \text{ ehk } 210$$

ja laiendajaiks arvud

$$2 \cdot 3, \quad 5 \quad \text{ja} \quad 3 \quad \text{ehk} \quad 6, \quad 5 \quad \text{ja} \quad 3.$$

Seega

$$\frac{12}{35} + \frac{29}{42} + \frac{61}{70} = \frac{12 \cdot 6}{35 \cdot 6} + \frac{29 \cdot 5}{42 \cdot 5} + \frac{61 \cdot 3}{70 \cdot 3} = \frac{72}{210} + \frac{145}{210} + \frac{183}{210} =$$

$$= \frac{72 + 145 + 183}{210} = \frac{400}{210} = \frac{40}{21} = 1\,\frac{19}{21}.$$

Arvutuse kirjutis tuleb pisut lühem, kui iga laiendaja kirjutada üksainus kord kaarekesega eraldatult vastava murru kohale. Kirjutades murrud pärast laiendamist kohe ühise murrukriipsuga, saame kirjutise järgmisel kujul:

$$\frac{\overset{6}{\breve{12}}}{35} + \frac{\overset{5}{\breve{29}}}{42} + \frac{\overset{3}{\breve{61}}}{70} = \frac{72 + 145 + 172}{210} =$$

$$= \frac{400}{210} = \frac{40}{21} = 1\,\frac{19}{21}.$$

Samal viisil talitame täheliste murdude liitmisel.

Ülesanne 3. Liita murrud

$$\frac{f}{3a^2}, \ \frac{g}{10ab}, \ \frac{h}{15b^2}.$$

Lahendus. Ühisnimetajaks on avaldis

$$30a^2b^2$$

ja laiendajaiks vastavalt

$$10b^2, \ 3ab, \ 2a^2;$$

seega

$$\frac{\overbrace{f}^{10b^2}}{3a^2} + \frac{\overbrace{g}^{3ab}}{10ab} + \frac{\overbrace{h}^{2a^2}}{15b^2} = \frac{10b^2f + 3abg + 2a^2h}{30a^2b^2}.$$

Ülesanne 4. Liita segaarvud $4\frac{3}{8}$, $2\frac{2}{5}$ ja $1\frac{7}{10}$.

Lahendus. Arvestades seda, et

$$4\frac{3}{8}=4+\frac{3}{8},\quad 2\frac{2}{5}=2+\frac{2}{5} \text{ ja } 1\frac{7}{10}=1+\frac{7}{10},$$

leiame:

$$4\frac{3}{8}+2\frac{2}{5}+1\frac{7}{10}=(4+2+1)+\left(\overset{5}{\frac{3}{8}}+\overset{8}{\frac{2}{5}}+\overset{4}{\frac{7}{10}}\right)=$$

$$=7+\left(\frac{15}{40}+\frac{16}{40}+\frac{28}{40}\right)=7+\frac{59}{40}=7+1\frac{19}{40}=8\frac{19}{40}.$$

Kokkuvõttes:

segaarvude liitmisel liidame täisosade summa murdosade summaga.

Märkus. Mõnikord on otstarbekohane kirjutada algebralist segaavaldist murdavaldise kujul. Küsimus taandub murdude liitmisele, kui arvestame tõsiasja, et iga täisavaldist võime kujutada murdavaldisena, mille nimetaja on 1.

Näide.

$$2a+\frac{b^3}{5c^2}=\frac{\overbrace{2a}^{5c^2}}{1}+\frac{\overbrace{b^3}^{1}}{5c^2}=\frac{10ac^2+b^3}{5c^2}.$$

Ülesanded.

Teostada järgmised liitmised:

82. $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$	82. $\frac{4}{a}+\frac{5}{a}$	83. $\frac{-p}{q}+\frac{2p}{q}$
$\frac{8}{15}+\frac{2}{15}$	$\frac{3a}{k}+\frac{a}{k}$	$\frac{r}{10s}+\frac{1}{10s}$
$\frac{2x}{3}+\frac{4x}{3}$	$\frac{5u^3}{b}+\frac{u^3}{b}$	$\frac{-3u}{5v}+\frac{2u}{5v}$
$\frac{4R}{9}+\frac{R}{9}$	$\frac{7}{2h}+\frac{k}{2h}$	$\frac{92a^2}{35y}+\frac{8ab}{35y}$
$\frac{p^2}{4}+\frac{3p^2}{4}$	$\frac{4m^2}{3n}+\frac{1}{3n}$	$\frac{a}{z^2}+\frac{1}{z^2}$

83. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$

$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$

84. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

$\frac{1}{f}+\frac{1}{g}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{x}$

$\frac{1}{b}+\frac{1}{y}$

$\frac{1}{m}+\frac{1}{z}$

84. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}$

$\frac{1}{5a}+\frac{1}{7b}$

$\frac{1}{4m}+\frac{1}{5n}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{8u}$

$\frac{1}{2f}+\frac{1}{g}$

85. $1+\frac{a}{3}$

$5+\frac{b}{5}$

$1+\frac{2}{x}$

$4+\frac{3}{x}$

$3+\frac{a}{b}$

85. $a+\frac{b}{c}$

$m+\frac{2m+3n}{2}$

$4+\frac{a+x}{4}$

$8+\frac{a-x}{4}$

$2a+\frac{2a+3b}{2b}$

86. Isale kulub ülikonna valmistamiseks $3\frac{1}{4}$ m riiet ja pojale $2\frac{1}{5}$ m. Mitu meetrit riiet peab ostma, et kumbki saaks endale ülikonna?

86. Ema ja tütar käisid kütuse muretsemiseks turbarabas tööl. Esimesel päeval oli nende töötulemus $\frac{1}{5}$, teisel päeval $\frac{3}{8}$ tonni turvast. Mitu tonni turvast oli nende saavutuseks kahel päeval kokku?

87. Silindri kummagi põhja pindala on $\frac{a^2}{b}$ cm², külgpindala on $\frac{m^2}{2b}$ cm². Kui suur on silindri täispindala?

87. Koonuse põhja pindala on $\frac{\pi a^2}{b^2}$ cm² ja külgpindala on $\frac{\pi am}{b}$ cm². Kui suur on koonuse täispindala?

§ 17. Murdude lahutamine.

Ülesanne 1. Lahutada murrust $\frac{7}{9}$ murd $\frac{5}{9}$.

Lahendus. On selge, et

$$7 \text{ üheksandikku} - 5 \text{ üheksandikku} =$$
$$= (7 - 5) \text{ üheksandikku}$$

ehk teisiti kirjutades

$$\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9},$$

mida võime kirjutada lühemalt $\frac{2}{9}$.

Samal viisil lahutame ühenimelisi tähelisi murde.

Näide.

$$\frac{9b^3}{10H^2u} - \frac{a^2c}{10H^2u} = \frac{9b^3 - a^2c}{10H^2u}.$$

Sõnastame oma arutluste tulemuse nõnda:

ühenimeliste murdude vahe on murd, millel on seesama nimetaja, mis antud murdudelgi, lugeja aga on antud murdude lugejate vahe.

Ülesanne 2. Lahutada murrust $\frac{5}{6}$ murd $\frac{3}{8}$.

Lahendus. Teisendades antud murrud ühenimelisteks, saame

$$\frac{\overset{4}{\breve{5}}}{6} - \frac{\overset{3}{\breve{3}}}{8} = \frac{20-9}{24} = \frac{11}{24}.$$

Samal viisil lahutame tähelisi murde.

Näide 1.

$$\frac{\overset{5c}{\smile}\,5a}{14cu^2} - \frac{\overset{2u}{\smile}\,9b}{35c^2u} = \frac{25ac - 18bu}{70c^2u^2}.$$

Näide 2.

$$mh - \frac{2a^2b^2c}{5nh^2} = \frac{\overset{5nh^2}{\smile}\,mh}{1} - \frac{\overset{1}{\smile}\,2a^2b^2c}{5nh^2} = \frac{5mnh^3 - 2a^2b^2c}{5nh^2}.$$

Näide 3.

$$\frac{\overset{3n}{\smile}\,3a - b}{2m} - \frac{\overset{2m}{\smile}\,2a - b}{3n} = \frac{3n(3a - b) - 2m(2a - b)}{6mn} =$$

$$= \frac{9an - 3bn - 4am + 2bm}{6mn}.$$

Ülesanne 3. Lahutada arvust $3\frac{7}{12}$ arv $1\frac{19}{20}$.

Lahendus. Teisendades murdosad ühenimelisteks, saame:

$$3\frac{7}{12} - 1\frac{19}{20} = 3\frac{35}{60} - 1\frac{57}{60}.$$

Et 35-st pole võimalik lahutada 57, siis võtame 3-st täisühikust ühe ja peenendame ta 60-ndikeks; saame:

$$2\frac{95}{60} - 1\frac{57}{60} = (2 - 1) + \frac{95 - 57}{60} = 1 + \frac{38}{60} = 1\frac{19}{30}.$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

segaarvude lahutamisel lahutame täisosad omaette ja murdosad omaette ning liidame tulemused; tarbe korral peenendame murruks ühe vähendatava ühtedest.

Käsiteldud juhule ei leidu vastet täheliste murdudega töötamisel.

Teostada järgmised lahutamised:

88. $\frac{1}{m} - \frac{1}{n}$ 88. $\frac{2}{3x} - \frac{3}{2y}$

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ $\frac{4}{5a} - \frac{6}{7b}$

$\frac{3}{a} - \frac{1}{2a}$ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

$\frac{5}{a} - \frac{2}{3a}$ $\frac{1}{a} - \frac{2}{b}$

$\frac{y}{x} - \frac{z}{mx}$ $\frac{2}{b} - \frac{3}{ab}$

89. $1 - \frac{a}{3}$ 89. $5 - \frac{a+x}{3}$

$5 - \frac{b}{5}$ $7 - \frac{a-x}{6}$

$1 - \frac{2}{x}$ $3m - \frac{4m+5n}{3}$

$4 - \frac{3}{x}$ $3a - \frac{8a+3c}{2b}$

$3 - \frac{2}{a}$ $4 - \frac{2+a}{3}$

Teostada järgmised liitmised ja lahutamised:

90. $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$ $\frac{5}{6} - \frac{3}{5}$ 90. $\frac{5}{8} - \frac{2}{5}$ $\frac{3}{7} + \frac{5}{6}$

91. $\frac{3}{a} + \frac{2}{b}$ $\frac{9}{10m} + \frac{1}{n}$ $\frac{2}{5p} + \frac{4}{7q}$ $\frac{11}{4x} - \frac{4}{11y}$ $\frac{17}{2u} - \frac{13}{3v}$

91. $\frac{a}{2b} + \frac{c}{d}$ $\frac{2f}{3g} - \frac{1}{5h}$ $\frac{u}{7} - \frac{2}{v}$ $\frac{m}{4} - \frac{6}{7n}$ $\frac{x}{4l} - \frac{1}{3m}$

Teostada järgmised liitmised ja lahutamised:

92. $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$ 92. $\frac{a}{4}+\frac{a}{12}$ **93.** $\frac{2m}{ar}-\frac{u}{r}$ 93. $\frac{2}{a^2}-\frac{3}{ab}$

$\frac{8}{15}+\frac{2}{5}$ $\frac{c}{3}-\frac{c}{6}$ $\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}$ $\frac{m}{x^2y}-\frac{n}{xy^2}$

$\frac{5}{8}-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{3p}$ $\frac{5u}{6a^2}-\frac{u}{3a}$ $\frac{3x}{4a^2b}+\frac{5y}{6ab^2}$

$\frac{9}{10}-\frac{4}{5}$ $\frac{5}{4q}-\frac{3}{2q}$ $\frac{5}{a^2}-\frac{4}{a^2b^2}$ $\frac{5n}{9m^2}-\frac{7p}{6mn^2}$

$\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$ $\frac{1}{a}+\frac{2}{ab}$ $\frac{7}{4x^3}+\frac{3}{x^2}$ $\frac{3ab}{10c^2d}+\frac{2c}{15d^2}$

94. $\frac{4a+b}{8}+\frac{2a-b}{8}$ 94. $\frac{5a+b}{4}-\frac{a+b}{4}$

$\frac{a+b}{10}+\frac{a-b}{10}$ $\frac{c+nd}{2}-\frac{c-nd}{2}$

$\frac{a+y}{3m}+\frac{2a-y}{3m}$ $\frac{6x-32}{2R^2}-\frac{4x-37}{2R^2}$

$\frac{5c-3u}{6n^2}+\frac{7c+12u}{6n^2}$ $\frac{58a^2-81}{27D^2}-\frac{58a^2}{27D^2}$

$\frac{2r-t}{s^2}+\frac{t-r}{s^2}$ $\frac{19N-23}{8h^3}-\frac{1+19N}{8h^3}$

Kirjutada järgmised segaarvud liigmurdudena:

95. $4\frac{2}{5}$ $6\frac{11}{13}$ $14\frac{4}{15}$ $33\frac{3}{14}$ $66\frac{2}{3}$

95. $8\frac{7}{9}$ $12\frac{5}{12}$ $19\frac{5}{18}$ $10\frac{17}{25}$ $12\frac{5}{16}$

Teostada järgmised liitmised ja lahutamised:

96. $\frac{1}{6}+\frac{3}{10}$ $\frac{5}{6}+\frac{7}{15}$ $\frac{7}{9}+\frac{11}{21}$ $\frac{19}{30}+\frac{11}{18}$

96. $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}-\frac{5}{6}$ $\frac{2}{5}-\frac{1}{-2}$ $\frac{1}{4}+\frac{-3}{4}$

97. $\frac{3}{4}-2\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{2}{7}+\frac{3}{-5}$ $\quad 1\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}$ $\quad -2\frac{1}{5}+\left(-1\frac{1}{2}\right)$

97. $-\frac{4}{5}-\frac{9}{10}$ $\quad 14\frac{4}{15}-\left(-12\frac{5}{12}\right)$ $\quad -19\frac{5}{18}+8\frac{7}{9}$

Kirjutada järgmised avaldised murdudena:

98. $a+\frac{1}{3}$ 98. $\frac{x+1}{2}-1$

$\frac{c}{4}-1$ $\quad \frac{5x+a}{7}-a$

$2m-\frac{n}{5}$ $\quad 4R-\frac{Rr-7}{3r}$

$3N+\frac{N^2}{b}$ $\quad 5+\frac{3u^2-10c^2}{4u^2}$

$\frac{m}{n^2}-5n$ $\quad \frac{7z^3-xy^2}{4xy}+2y$

Teostada järgmised liitmised ja lahutamised:

99. $\frac{a}{2N}-\frac{q}{3N}$ 99. $\frac{4x}{ab}+\frac{5b}{ax}$

$\frac{3c}{5D}-\frac{u}{12D}$ $\quad \frac{17}{24pq}-\frac{9}{16p^2}$

$\frac{15mn}{28}+\frac{27mn}{35}$ $\quad \frac{3c}{14x^2u}-\frac{5d}{21xu^2}$

$\frac{5}{8x}-\frac{1}{6y}$ $\quad \frac{18x^3}{m}+\frac{30ax^2}{2n}$

$\frac{19m}{12n}-\frac{8n}{28m}$ $\quad \frac{5p}{15u^3}-\frac{5q}{18uv^2}$

100. Pudelis oli $\frac{3}{4}$ liitrit õli. Priimusesse valati sellest $\frac{1}{3}$ liitrit. Kui palju jäi õli pudelisse?

100. Kolmnurga üks nurk on $50\frac{1^0}{2}$, teine nurk on $27\frac{1^0}{3}$. Kui suur on kolmas nurk?

101. Kauba brutokaal on $\frac{a}{b}$ kg, netokaal on $\frac{1}{3b}$ kg. Kui suur on taarakaal?

101. Kooli esimese klassi õpilastest puudus ühel päeval $\frac{m}{n}$ protsenti; lõppklassis puudus samal päeval $\frac{a}{2n}$ protsenti õpilastest. Mitme protsendi võrra oli lõppklassis puudujaid vähem kui esimeses klassis?

§ 18. Murdude korrutamine.

Ütlust „korrutada arv A täisarvuga t" mõistame nii, et tuleb võtta arv A liidetavana nii mitu korda, kui palju ühtesid on arvus t. Näiteks tähendab kirjutis

$$3 \cdot 4\frac{2}{5}$$

sedasama, mis kirjutis

$$4\frac{2}{5} + 4\frac{2}{5} + 4\frac{2}{5}.$$

Seega korrutamine täisarvuga taandub liitmisele ega paku sisuliselt uut. Küsime, kuidas mõista ütlust „korrutada arv A murruga $\frac{m}{n}$". Sellel ütlusel endises tõlgenduses pole mõtet. Sellele ütlusele sisu leidmiseks võtame järgmise ülesande.

Ülesanne. Kauba kilogrammi hind on A rubla. Kui palju maksab t (täisarv) kilogrammi seda kaupa? Kui palju maksab $\frac{m}{n}$ (murdarv) kilogrammi seda kaupa?

Lahendus. Esimesele küsimusele saame vastuse: t kilogrammi kaupa maksab rublades

$$t \cdot A.$$

Teise küsimuse lahendame nõnda:

1 kg kaupa maksab A rubla

$\frac{1}{n}$ " " " n korda vähem, seega $\frac{A}{n}$ "

$\frac{m}{n}$ " " " m korda rohkem, seega $\frac{mA}{n}$ "

Esimese küsimuse lahendame, korrutades arvu A täisarvuga t; teise — leides arvust A kui tervikust osa $\frac{m}{n}$. Et mõlemad küsimused on oma laadilt samased, siis on loomulik nimetada ühe ja sama nimega ka toiminguid nende lahendamiseks. Sel kaalutlusel nimetame osa $\frac{m}{n}$ leidmist arvust A kui tervikust arvu A korrutamiseks murruga $\frac{m}{n}$.

Järelikult:

korrutada arv A murruga $\frac{m}{n}$ tähendab leida arvust A kui tervikust osa $\frac{m}{n}$.

Selle definitsiooni järgi on

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ma}{nb}.$$

See tähendab:

kahe murru korrutis on murd, mille lugejaks on antud murdude lugejate korrutis ja nimetajaks antud murdude nimetajate korrutis.

Näide.

$$\frac{35}{78} \cdot \frac{13}{140} = \frac{35 \cdot 13}{78 \cdot 140} = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 4} = \frac{1}{24}.$$

Samal viisil toimime täheliste murdude korrutamisel.

Näide.

$$\frac{15a^2c^2x}{84mn^2y^3} \cdot \frac{24my^2}{35c^2} = \frac{15 \cdot 24 \cdot a^2c^2mxy^2}{84 \cdot 35 \cdot mn^2c^2y^3} = \frac{3 \cdot 2a^2x}{7 \cdot 7n^2y} = \frac{6a^2x}{49n^2y}.$$

Kui tegurina esineb segaarv, teisendame selle murruks ja arvutame korrutise, nagu ülal seletatud.

N ä i d e.

$$1\frac{7}{8}\cdot 3\frac{1}{5}=\frac{15}{8}\cdot\frac{16}{5}=\frac{15\cdot 16}{8\cdot 5}=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 1}=6.$$

Samal viisil toimime täheliste avaldiste puhul.

N ä i d e.

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(k+\frac{m}{n}\right)=\frac{ac+b}{c}\cdot\frac{kn+m}{n}=\frac{(ac+b)(kn+m)}{cn}.$$

Ülesanded.

Teostada järgmised korrutamised ja taandada, kus võimalik, saadused:

102. $\frac{3}{4}\cdot 8$ 102. $\frac{7}{8}\cdot 12$ **103.** $21\cdot\frac{5}{7}$ 103. $65\cdot\frac{19}{30}$

$\frac{5}{6}\cdot 24$ $\frac{3}{5}\cdot 15$ $39\cdot\frac{11}{13}$ $78\cdot\frac{7}{12}$

$\frac{7}{12}\cdot 60$ $\frac{9}{10}\cdot 35$ $48\cdot\frac{5}{8}$ $30\cdot\frac{23}{42}$

$\frac{11}{15}\cdot 90$ $\frac{13}{18}\cdot 27$ $85\cdot\frac{12}{17}$ $56\cdot\frac{9}{16}$

$\frac{9}{17}\cdot 112$ $\frac{11}{24}\cdot 32$ $95\cdot\frac{15}{19}$ $63\cdot\frac{25}{27}$

104. $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$ 104. $\frac{7}{12}\cdot\frac{24}{35}$ **105.** $1\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{14}$ 105. $\frac{11}{12}\cdot 4\frac{4}{5}$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}$ $\frac{5}{9}\cdot\frac{27}{55}$ $3\frac{4}{7}\cdot\frac{14}{15}$ $\frac{5}{16}\cdot 7\frac{1}{9}$

$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}$ $\frac{11}{13}\cdot\frac{65}{33}$ $2\frac{1}{5}\cdot\frac{15}{22}$ $\frac{7}{10}\cdot 3\frac{1}{3}$

$\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{8}$ $\frac{17}{15}\cdot\frac{25}{6}$ $7\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15}$ $\frac{8}{13}\cdot 3\frac{1}{4}$

$\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{9}$ $\frac{18}{35}\cdot\frac{77}{24}$ $9\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}$ $\frac{11}{17}\cdot 5\frac{2}{3}$

Teostada järgmised korrutamised:

106. $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{2}$

$4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3}$

$7\frac{3}{5} \cdot 1\frac{6}{19}$

$8\frac{1}{4} \cdot 1\frac{5}{11}$

$10\frac{4}{5} \cdot 4\frac{4}{9}$

106. $1\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{12}$

$2\frac{2}{3} \cdot 2\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{7}$

$3\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{9} \cdot 5\frac{1}{2}$

$7\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{25}$

$5\frac{4}{5} \cdot \frac{10}{29} \cdot 4\frac{3}{4}$

107. $-3 \cdot \frac{2}{3}$

$(-6) \cdot \left(-12\frac{1}{4}\right)$

$\frac{-3}{5} \cdot \frac{5}{-6}$

$-4 \cdot \frac{5}{6}$

$2\frac{1}{3} \cdot \frac{-3}{5}$

107. $-\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8}$

$\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)$

$-\frac{5}{9} \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) \cdot \frac{5}{8}$

$-\frac{7}{8} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

$-2\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(-8\frac{4}{5}\right)$

108. $\frac{5}{9} \cdot 21$

$\frac{3}{x} \cdot a$

$\frac{c}{u^2} \cdot 2u$

$\frac{h}{ab} \cdot a$

$\frac{4f}{g^2h} \cdot fgh$

108. $12 \cdot \frac{5}{9}$

$6 \cdot \frac{a}{3b}$

$7m \cdot \frac{5}{u^2}$

$20c \cdot \frac{4ab}{5c}$

$9hx^2 \cdot \frac{a}{hx^2}$

Teostada järgmised korrutamised:

109. $\frac{5}{12}\cdot\frac{8}{15}$

$\frac{4}{7}\cdot\frac{a}{n^2}$

$\frac{4a}{b}\cdot\frac{3c}{8a}$

$\frac{ab}{6}\cdot\frac{3a}{4b}$

$\frac{x^2u^3}{7}\cdot\frac{14}{x^2u}$

109. $1\frac{2}{5}\cdot\frac{a}{n^2}\cdot\frac{3}{7}a^2n^2$

$2\frac{1}{4}\cdot\frac{c^3}{x}\cdot 1\frac{1}{3}\,\frac{x^2}{c^2}$

$\frac{3a}{5b}\cdot\frac{10b}{21c}\cdot\frac{7c}{4a}$

$\frac{8a^2}{21b^2}\cdot\frac{14b}{15c}\cdot\frac{c}{4a^2}$

$1\frac{3}{4}N^2u^2\cdot\frac{8u}{15N^2}\cdot\frac{3N}{4u^2}$

110. $(-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

$nx\cdot\left(-\frac{x}{n}\right)$

$(-15m^3p)\cdot\frac{3x}{10m^2p}$

$(-4at)\cdot\left(-\frac{5a^2u}{8t^2}\right)$

$\left(-3\frac{qw}{r}\right)\cdot qwr$

110. $\frac{5a}{16b^2}\cdot(-32ab^2c)$

$\left(-\frac{2a^2}{3b^2}\right)\cdot\left(-\frac{5a^2b^2}{8c}\right)$

$\left(-\frac{N}{a}\right)\cdot\frac{a^2}{5N^3}$

$\frac{-a^2x^3}{13}\cdot\frac{52c}{-ax}$

$\frac{h}{5u^2}\cdot\left(-\frac{15u^3}{16h^3}\right)$

111. $\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(2+\frac{3}{a}\right)$

$\left(2+\frac{a}{3}\right)\left(3-\frac{a}{2}\right)$

$\left(5-\frac{3}{x}\right)\left(4+\frac{2}{x}\right)$

$\left(7+\frac{2}{a}\right)\left(7-\frac{2}{a}\right)$

$\left(5+\frac{a}{x}\right)\left(5-\frac{a}{x}\right)$

111. $\left(\frac{a}{3}+\frac{4}{b}\right)\cdot\frac{3b}{4a}$

$\left(\frac{2x}{7y}-\frac{3y}{5x}\right)\cdot\left(-\frac{35x^2}{6y^2}\right)$

$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)\cdot\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)$

$\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{5}\right)$

$\left(\frac{2}{a}-\frac{b}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{b}-\frac{3}{5}\right)$

112. Sepal kulub hobuseraua valmistamiseks $\frac{1}{5}$ tundi. Kui palju aega kulub 2, 5, 10 hobuseraua valmistamiseks?

112. Ühe meetri pikkuse raudlati raskus on $3\frac{2}{5}$ kg. Kui palju kaalub $\frac{5}{6}$ meetrit seda latti?

113. Ristküliku ühe külje pikkus on $\frac{a}{2}$ meetrit, teise külje pikkus on $\frac{m}{a}$ meetrit. Kui suur on ristküliku pindala?

113. Toa pikkus on $\frac{a^2}{2b}$ meetrit ja laius on $\frac{b}{3a}$ meetrit. Arvutada toa põranda pindala.

§ 19. Murdude jagamine.

Olgu antud kaks arvu a ja b. Ütlust „jagada arv a arvuga b" mõistame nõudena leida niisugune arv x, mis korrutamisel jagajaga b annaks jagatava a; sümbolites

$$b \cdot x = a.$$

Võtame lähemale vaatlusele juhu, et jagaja b on murd, näiteks $\frac{m}{n}$. Sel puhul on

$$\frac{m}{n} \cdot x = a,$$

jagades selle võrduse mõlemad pooled arvuga m, saame

$$\frac{1}{n} \cdot x = \frac{a}{m},$$

ja korrutades arvuga n, saame

$$x = \frac{a \cdot n}{m}$$

ehk

$$x = a \cdot \frac{n}{m}.$$

Näeme:

selleks, et saada arvu a ja murru $\frac{m}{n}$ jagatist, tuleb moodustada arvu a ja murru $\frac{n}{m}$ korrutis. Murd $\frac{n}{m}$ on saadud antud murrust $\frac{m}{n}$, vahetades temas lugeja ja nimetaja.

Lugeja ja nimetaja vahetamise teel saadud murdu nimetame antud murru pöördeks. Näiteks murru $\frac{4}{7}$ pööre on $\frac{7}{4}$ ja arvu 5 ehk $\frac{5}{1}$ pööre on $\frac{1}{5}$.

Kokkuvõttes ütleme:

selleks, et jagada arvu murruga, korrutame selle arvu murru pöördega.

Näited.

1. $\frac{22}{39}:\frac{55}{104}=\frac{22}{39}\cdot\frac{104}{55}=\frac{22\cdot 104}{39\cdot 55}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 5}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}.$

2. $\frac{a^2bx^3}{2nz}:\frac{ax^2}{3bz^2}=\frac{a^2bx^3}{2nz}\cdot\frac{3bz^2}{ax^2}=\frac{a^2bx^3\cdot 3bz^2}{2nz\cdot ax^2}=$

$$=\frac{abx\cdot 3bz}{2n\cdot 1}=\frac{3ab^2xz}{2n}.$$

3. $-\frac{3}{4}uv:\frac{3}{7}u^2=-\frac{3uv}{4}:\frac{3u^2}{7}=-\frac{3uv\cdot 7}{4\cdot 3u^2}=-\frac{21v}{12u}=-\frac{7v}{4u}.$

Märkus. Skeem, mille abil tuletasime arvu a ja murru $\frac{m}{n}$ jagatise x, on tõeliselt terviku leidmise skeem, kui on teada terviku osa $\frac{m}{n}$. Seega võime öelda:

jagada arv a murruga $\frac{m}{n}$ tähendab leida tervik, mille osa $\frac{m}{n}$ on arv a.

Ülesanded.

Teostada järgmised jagamised ja taandada, kus võimalik, saadused:

114. $\frac{12}{35}:6$	114. $\frac{3}{5}:5$	**115.** $\frac{15}{16}:10$	115. $28:\frac{7}{10}$
$\frac{14}{15}:7$	$\frac{6}{7}:3$	$\frac{28}{33}:35$	$16:\frac{8}{13}$
$\frac{27}{48}:9$	$\frac{3}{8}:7$	$\frac{63}{50}:14$	$20:\frac{4}{5}$
$\frac{36}{55}:12$	$\frac{7}{16}:2$	$\frac{52}{105}:12$	$64:\frac{16}{17}$
$\frac{65}{72}:13$	$\frac{5}{21}:4$	$\frac{84}{95}:60$	$80:\frac{10}{11}$

116. $\frac{2}{3} : \frac{4}{7}$ 116. $\frac{5}{24} : \frac{35}{12}$ 117. $-1\frac{14}{15} : \frac{29}{45}$ 117. $-2\frac{3}{5} : 6\frac{1}{2}$

$\frac{3}{5} : \frac{6}{11}$ $\frac{27}{55} : \frac{3}{22}$ $5\frac{11}{14} : \frac{-18}{35}$ $4\frac{3}{8} : -2\frac{5}{8}$

$\frac{5}{16} : \frac{5}{7}$ $\frac{24}{65} : \frac{12}{91}$ $3\frac{5}{12} : \frac{5}{-16}$ $5\frac{4}{9} : -4\frac{2}{3}$

$\frac{9}{14} : \frac{11}{35}$ $\frac{4}{9} : \frac{8}{27}$ $-9\frac{3}{8} : \frac{-15}{24}$ $7\frac{7}{8} : 5\frac{1}{4}$

$\frac{7}{12} : \frac{31}{24}$ $\frac{1}{3} : \frac{7}{30}$ $-2\frac{3}{5} : \frac{13}{-15}$ $-8\frac{1}{4} : -3\frac{2}{3}$

Teostada järgmised jagamised:

118. $\frac{b^2}{a} : 3a$ 118. $\left(-\frac{a^2}{b}\right) : 5n$

$\left(-\frac{2a^3}{n}\right) : a^2$ $\left(\frac{-a}{b}\right) : 7ac^2$

$\frac{16b}{a^2} : 4b^3$ $\frac{16b}{m^2} : (-4b^3)$

$\left(-\frac{15m^4}{8q}\right) : (-5m^2)$ $\frac{4ax}{b} : (-5ax^2)$

$1\frac{2}{5}\frac{c^2}{x} : (-14c^3x)$ $\left(-\frac{8c^2n}{3f}\right) : (-4cf)$

119. $\frac{3m}{4p} : \frac{q}{2m}$ 119. $\frac{3a^2b}{2c^2} : \frac{6ab}{2c^2}$

$\left(-\frac{ax}{c}\right) : \frac{2}{3x^2}$ $\left(-\frac{14xy}{9z^2}\right) : \frac{21x^2}{2c^2}$

$\frac{x^3}{y} : \left(-\frac{x^2}{y}\right)$ $\left(-\frac{156}{17}\frac{a^4b^3}{m}\right) : \left(-\frac{12}{17}\frac{a^2b}{m}\right)$

$\frac{1}{q^2} : \left(-\frac{n}{q^2}\right)$ $\frac{72u^5}{v^2} : 84\frac{u^3}{v^2}$

$\frac{4fg}{h^2} : \frac{2fg}{h^3}$ $\frac{135a^4b^3}{c^4} : \frac{105a^3b^3}{c^3}$

§ 20. Murru astendamine.

Astme definitsiooni järgi on

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n \text{ tegurit}}.$$

Murdude korrutamise eeskirja järgi võime võrduse parema poole asendada avaldisega

$$\frac{a\cdot a\cdot a\cdots a}{b\cdot b\cdot b\cdots b} \text{ ehk } \frac{a^n}{b^n};$$

seega

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Tulemuse sõnastame nõnda:

murru n-es aste on murd, mille lugeja ja nimetaja on vastavalt antud murru lugeja ja nimetaja n-endad astmed.

Näide.

$$\left(\frac{3a^2}{4b^3}\right)^3 = \frac{(3a^2)^3}{(4b^3)^3} = \frac{27a^6}{64b^9}.$$

Ülesanded.

Teostada järgmised murdude astendamised:

120.	$\left(\frac{4a}{5}\right)^2$	120.	$\left(\frac{3m}{4n}\right)^2$
	$\left(-\frac{7b}{8}\right)^2$		$\left(-\frac{1}{2N}\right)^2$
	$\left(-\frac{8c}{15}\right)^3$		$\left(\frac{0,1ab}{7c^2}\right)^3$
	$\left(\frac{9d}{10}\right)^3$		$\left(\frac{3a^2}{8mnp}\right)^2$
	$\left(-\frac{11e}{15}\right)^2$		$\left(\frac{1}{2m^2x}\right)^3$

Teostada järgmised astendamised:

121. $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$ 121. $\left(2+\frac{a}{2}\right)^3$

$\left(\frac{a}{2}-2\right)^2$ $\left(\frac{2}{3}-\frac{a}{2}\right)^3$

$\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}n\right)^3$

$\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{4}b\right)^2$ $\left(m+\frac{3}{4}\right)^3$

$\left(\frac{a}{n}-1\right)^3$ $\left(\frac{2}{5}-\frac{2n}{3}\right)^3$

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

122. $12\frac{1}{2}-6\cdot\frac{7}{12}+\frac{5}{6}:\frac{1}{3}$ 122. $-5:\frac{4}{5}+1\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot 4$

123. $-8\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-5\frac{1}{2}-4:\frac{2}{3}$ 123. $4:\left(-\frac{5}{8}\right)-2\frac{1}{2}-2\cdot\frac{3}{10}$

124. $\dfrac{1\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{9}}$ 124. $\dfrac{\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+2\frac{4}{5}}{1\frac{2}{9}:3\frac{2}{3}}$

125. $\dfrac{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ 125. $\dfrac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\left(1\frac{1}{12}\right)^2}{\frac{2}{9}-\frac{5}{6}}$

Arvutada avaldise $\dfrac{a^2+b^3}{3a-\frac{1}{2}b}$ numbriline väärtus, kui

126. $a=-\frac{1}{2}$ ja $b=\frac{2}{3}$

126. $a=-2\frac{1}{4}$ ja $b=-1\frac{1}{2}$

§ 21. Arvutamise põhiseadused murdarvude vallas.

Eespool on antud mitmeid eeskirju tehete sooritamiseks murdarvudega. Tekib küsimus, kas need eeskirjad on kooskõlas arvutamise põhiseadustega. Veendume mõne näite varal, et antud arvutamise eeskirjad tagavad arvutamise põhiseaduste kehtivust ka murdarvude vallas.

Näide 1. Summa liitmise seadus väidab, et

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Näitame, et see seadus on kehtiv ka murdarvude vallas. Olgu tegemist kolme murruga

$$\frac{m}{n}, \ \frac{p}{q} \text{ ja } \frac{r}{s}.$$

Käies murdude liitmise eeskirja järgi leiame ühelt poolt, et

$$\frac{m}{n} + \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) = \frac{m}{n} + \frac{ps + qr}{qs} = \frac{mqs + nps + nqr}{nqs}.$$

Teiselt poolt saame, et

$$\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) + \frac{r}{s} = \frac{mq + np}{nq} + \frac{r}{s} = \frac{mqs + nps + nqr}{nqs}.$$

Et tulemused on võrdsed, siis peavad seda olema ka lähteavaldised, seega

$$\frac{m}{n} + \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) = \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) + \frac{r}{s}.$$

Saadud võrdus näitab, et summa liitmise seadus on kehtiv ka murdarvude vallas.

Näide 2. Summa korrutamise seadus väidab, et

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Näitame, et see seadus kehtib ka murdarvude vallas. Olgu tegemist kolme murruga

$$\frac{m}{n}, \ \frac{p}{q} \text{ ja } \frac{r}{s}.$$

Käies murdude liitmise ja korrutamise eeskirjade järgi leiame ühelt poolt, et

$$\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{ps + qr}{qs} = \frac{m(ps + qr)}{nqs} = \frac{mps + mqr}{nqs}.$$

Teiselt poolt on

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} + \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = \frac{mp}{nq} + \frac{mr}{ns} = \frac{mps + mqr}{nqs}.$$

Et tulemused on võrdsed, siis peavad seda olema ka lähteavaldised, seega

$$\frac{m}{n}\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} + \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}.$$

Saadud võrdus näitab, et summa korrutamise seadus on kehtiv ka murdarvude vallas.

Analoogiliselt võime veenduda ka teiste arvutamise põhiseaduste kehtivuses murdarvude puhul.

Et murdarvud alluvad samadele arvutamise põhiseadustele, mis täisarvudki, siis võime nii ühtesid kui teisi kokku võtta ühiseks täis- ja murdarvude vallaks ehk r a t s i o n a a l a r v u d e v a l l a k s.

Negatiivsete arvude loomisel positiivsete arvude kõrvale oleme l a i e n d a n u d ennemalt tuntud arvuvalda: arvudega 1, 2, 3, . . . seltsisid arvud 0 ja —1, —2, —3, . . . Nende täisarvude vallas iga kahe teineteisele järgneva arvu vahe on ü k s. Murdarvude loomisega oleme t i h e n d a n u d arvuvalda; näiteks arvude 2 ja 3 vahel on asetunud arvud $2\frac{1}{4}$, $2\frac{2}{3}$, $2\frac{7}{10}$ ja kuitahes palju teisi.

Peatükk III.

Võrrand.

§ 22. Võrdus. Võrratus.

Kui kaks avaldist on **võrdsed**, siis märgime seda võrdusmärgiga nende avaldiste vahel. Näiteks kirjutame:

$$5 \cdot 13 - 7 \cdot 4 = 3 \cdot 9 + 10$$
$$\frac{2 \cdot 7 + 1}{3 \cdot 7 - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$3x(a - 4c) = 3ax - 12cx.$$

Niisuguseid kirjutisi nimetame **võrdusteks**. Kui kaks avaldist **pole** võrdsed, kasutame selle tõsiasja märkimiseks sümboleid

$$\neq \quad > \quad <.$$

Näiteks kirjutame:

$$5^2 - 3^2 \neq (5 - 3)^2$$
$$7^3 > 8^2 + 9$$
$$0{,}5^2 < 1 - 0{,}5.$$

Niisuguseid kirjutisi nimetame **võrratusteks**.

Iga võrdus koosneb kahest osast; neid osi nimetame lühidalt võrduse **vasakuks pooleks** ja **paremaks pooleks**. Samu nimetusi kasutame ka võrratuste puhul.

Näide. Otsustada, kas avaldiste

$$3(2 - a)^2 \text{ ja } 5a^2 - a + 8$$

numbrilised väärtused, kui $a = -5$, on isekeskis võrdsed või mittevõrdsed, ja kirjutada nende avaldiste vahele vastav märk.

L a h e n d u s. Kui $a = -5$, siis

$$
\begin{aligned}
&2 - a = 2 - (-5) = 2 + 5 = 7; \text{ ja} \\
&3(2 - a)^2 = 3 \cdot 7^2 = 3 \cdot 49 = 147; \\
&5a^2 - a + 8 = 5 \cdot (-5)^2 - (-5) + 8 = \\
&= 5 \cdot 25 + 5 + 8 = 125 + 5 + 8 = 138; \\
&\qquad 147 > 138.
\end{aligned}
$$

V a s t u s. Kui $a = -5$, siis

$$3(2 - a)^2 > 5a^2 - a + 8.$$

Ülesanded.

Missugune kahest sümbolist $=$ või $\neq$ kuulub järgmiste ühes ja samas reas seisvate avaldiste vahele:

127. $7 \cdot 8$ ja $5 \cdot 11$
2^2 ja $2 \cdot 2$
$9 \cdot 5 + 3$ ja $7^2 + 1$
$3^2 - 1$ ja $5^2 + 1$
$12 \cdot 7 - 1$ ja $13 \cdot 6 + 2$

127. $4 \cdot 5 - 1$ ja $3^2 + 2^3$
$2 \cdot 3 \cdot 4^2$ ja $(3^2 - 2) \cdot 4$
$(1 - \frac{4}{5}) \cdot 25$ ja $(4 - 1)\ (3 - 1)$
$\frac{5}{2^3 + 1}$ ja $\frac{3 \cdot 2 - 1}{4^2 - 7}$
$\frac{1 + 4^3}{13}$ ja $\frac{1}{2^2 + 1}$

128. Missugune kahest sümbolist $>$ või $<$ kuulub esimese ja teise avaldise vahele:

$10^2 - 8$ ja $9^2 + 12$

$7(13 - 4)$ ja $(7 + 1)^2$

$5^3 - 5^2$ ja $9 \cdot 11 + 3$

$8 \cdot 7^2 + 9$ ja $17 \cdot 25 - 20$

$\frac{5 \cdot 2^3}{3^2 + 5}$ ja $\frac{7 \cdot 9 - 3 \cdot 19}{6^2 - 11}$

$5 \cdot \frac{10^2 - 8 \cdot 11}{9^2 - 3}$ ja $\frac{3 \cdot 5^2 - 4 \cdot 13}{2(3^2 + 5)}$

128. Otsustada, kas all-antud avaldiste numbrilised väärtused tähtede antud väärtuste puhul on isekeskis võrdsed või mittevõrdsed, ja kirjutada nende avaldiste vahele vastav märk.

$2a + 5$ ja $4a - 3$, kui $a = 4$
$x^2 - 4x + 3$ ja $x^2 - x - 6$, kui $x = 3$
$4m - 5n - 8$ ja $3m - 2n - 1$, kui $m = 3$, $n = -2$
$(p + q)(p - q)$ ja $(p + q)^2$, kui $p = 3$, $q = -3$
$5(x - 1)^3$ ja $x^3 - x + 17$, kui $x = 3$

§ 23. Samasus.

Võrdust nimetame samasuseks, kui ta kehtib temas esineva tähe või tähtede igal väärtusel.

N ä i d e. Olgu antud võrdus:

$$(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2.$$

Asetame võrduse kummaski pooles tähe x asemele näiteks arvud

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad -1, \quad -2, \ \frac{1}{2}, \quad 0{,}8$$

ja korraldame tulemused tabelisse. Saame:

x	0	1	2	-1	-2	$\frac{1}{2}$	0,8
$(x-1)(x-2)$	2	0	0	6	12	$\frac{3}{4}$	0,24
$x^2 - 3x + 2$	2	0	0	6	12	$\frac{3}{4}$	0,24

Näeme, et iga kasutatud x-i väärtuse puhul nii üks kui teine avaldis omab üht ja sama väärtust. Sedasama näeme, andes tähele x veel teisi väärtusi. Seega antud võrdus on s a m a s u s.

Samaselt võrdumise tähiseks on $\equiv$.

Öeldu põhjal võime antud võrduse kirjutada kujul:

$$(x-1)(x-2) \equiv x^2 - 3x + 2.$$

Samaselt võrduvad avaldised tähendavad üht ja sedasama, erinedes üksteisest vaid väliselt kujult.

Kõik avaldiste teisendused, mis otseselt või kaudselt toetuvad arvutamise põhiseadustele, ei muuda avaldise numbrilist väärtust, vaid muudavad ainult tema välist kuju; niisuguste teisenduste tulemus on seega alati samaselt võrdne lähteavaldisega. Näiteks kõik arvutamise abivalemid on samasused.

N ä i d e 1.

$$6x(2x-a) + a(6x-4a) \equiv 12x^2 - 6ax + 6ax - 4a^2 \equiv$$
$$\equiv 12x^2 - 4a^2 \equiv 4(3x^2 - a^2).$$

M ä r k u s. Sümbolit $\equiv$ tarvitatakse ainult siis, kui on tarvis e r i t i rõhutada asjaolu, et võrdumine on kehtiv s a m a s e l t. Muidu tarvitatakse sümboli $\equiv$ asemel harilikku võrdusmärki $=$, nagu meie seda seni olemegi teinud kõigi teisenduste puhul.

N ä i d e 2. Otsustada, kas võrdus

$$2m + 3m + 5y = 5m + 4y$$

on samasus või mitte.

L a h e n d u s. Koondame esmalt võrduse vasaku poole, siis saame

$$5m + 5y = 5m + 4y.$$

Arvutame nüüd antud võrduse vasaku ja parema poole väärtused, andes tähtedele mingid vabalt võetud väärtused:

m	1	1	1
y	1	2	0
$5m+5y$	10	15	5
$5m+4y$	9	13	5

Näeme, et $5m + 5y$ ja $5m + 4y$ ei ole võrdsed, kui $m = 1$ ja $y = 1$ või kui $m = 1$ ja $y = 2$.

V a s t u s: Võrdus $5m + 5y = 5m + 4y$ ei ole samasus.

Ülesanded.

Otsustada, kas järgmised võrdused on samasused või mitte:

129. $5a + 3a - 7a = a + 1$
$3x + 7c - x - 4c = 2x + 3c$
$u^2u + uu^2 - u^3 = 2u^3$
$hhh + 3h^3 = 4h^3$
$N \cdot N + 1 = N(N + 1)$

129. $7N \cdot 7N = 7N^2$
$3p + 3p + 3p \cdot 3p = 6p + 9p^2$
$10(a + x) = 10a + 11x$
$5f \cdot f = f \cdot 5f - 1$
$21a \cdot 10x = 15x \cdot 14a$

§ 24. Võrrand.

Olgu antud võrdus $x^2 = 3x + 28$. See võrdus ei ole samasus. Tõepoolest, asetades tähe x asemele näiteks arvu 4, saame vasakul poolel 4^2 ehk 16, paremal poolel aga $3 \cdot 4 + 28$ ehk 40. Tulemused pole võrdsed.

Võib küsida, kas ehk siiski leidub x-i väärtusi, mille puhul mõlemad avaldised omavad üht ja sama väärtust, tähendab, x^2 saab võrdseks avaldisega $3x + 28$.

Asetades x-i asemele arvu 7 näeme, et esimene avaldis omab väärtust 7^2 ehk 49 ja teine väärtust $3 \cdot 7 + 28$, seega ka 49. Tähendab:

$$\text{kui } x = 7, \text{ siis on } x^2 = 3x + 28.$$

Võrdust, mis sisaldab mingit tähte ja ei ole samasus, nimetame võrrandiks.

Näited. Võrdused

$$2x - 10 = 17 - x$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x^3 = 3x + 2$$

on võrrandid, sest asetades x-i asemele näiteks nulli, saame võrduste vasakul poolel ja paremal poolel vastavalt

$$-10 \text{ ja } 17, \quad 6 \text{ ja } 0, \quad 0 \text{ ja } 2;$$

seejuures

$$-10 \neq 17, \quad 6 \neq 0, \quad 0 \neq 2.$$

Arvu kohta, mis asetamisel otsitava asemele võrrandi kummassegi poolde annab võrdsed tulemused, ütleme, et ta rahuldab võrrandit.

Näiteks rahuldab võrrandit

$$x^2 = 7x - 12$$

x-i väärtus 3, sest $3^2 = 9$ ja ka $7 \cdot 3 - 12 = 9$.

Võrrandit rahuldavat arvu nimetame lahendiks.

Näiteks arv -2 on võrrandi

$$x^3 = 3x^2 - 20$$

lahendiks.

Võrrandi lahendi leidmiseks vajalikkude teisenduste ja tehete sooritamist nimetame võrrandi lahendamiseks.

Üks võrrandi lahendamise viisidest tugineb proovimisele.

Näide. Lahendame võrrandi $7x = x^2 - 44$.

Asetades x-i asemele arvud

$$-7 \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2,$$

saame vasakul poolel

$$-49 \quad -42 \quad -35 \quad -28 \quad -21 \quad -14,$$

paremal poolel seevastu

$$+5 \quad -8 \quad -19 \quad -28 \quad -35 \quad -40.$$

Näeme, et arv -4 annab asetamisel kummalgi poolel võrdsed tulemused, nimelt -28; seega arv -4 on antud võrrandi lahendiks.

Algebra rakendamisel tegeliku elu poolt seatud küsimustes on esimeseks püüdeks avaldada need küsimused lühikirjas võrrandite näol. Algebra tähtsamaid ülesandeid on võtete leidmine võrrandite lahendamiseks.

§ 25. Võrduse ja võrratuse põhiomadused.

Igal võrdusel on 4 põhilise tähtsusega omadust, mis silmanähtavalt kehtivad ja tõestamist ei vaja. Sõnastame need võrduse omadused järgmiste aksioomidena:

1. Liitmisaksioom. Kui kahe võrdse arvuga liita üks ja sama arv, saame võrdsed tulemused.

Sümbolites: Kui $a = b$,
siis $a + m = b + m$.

2. Lahutamisaksioom. Kui kahest võrdsest arvust lahutada üks ja sama arv, saame võrdsed tulemused.

Sümbolites: Kui $a = b$,
siis $a - m = b - m$.

3. **Korrutamisaksioom.** Kui kaks võrdset arvu korrutada ühe ja sama arvuga, saame võrdsed tulemused.

Sümbolites: Kui $a = b$,
siis $ma = mb$.

4. **Jagamisaksioom.** Kui kaks võrdset arvu jagada ühe ja sama arvuga, saame võrdsed tulemused.

Sümbolites: Kui $a = b$,
siis $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$.

Siin arvuks m ei saa olla null.

Ülaltoodud 4 aksioomi moodustavad aluse, millele tugineb kogu võrrandite teisendamine ja lahendamine.

N ä i d e. Lahendame võrrandi $\frac{3}{4}x - 1 = 8$.

Teisendame selle võrrandi järk-järgult: liites kummagi poolega arvu 1, saame liitmisaksioomi põhjal võrrandi

$$\frac{3}{4}x = 9;$$

jagades siin kummagi poole arvuga $\frac{3}{4}$, saame jagamisaksioomi põhjal

$$x = 12,$$

millega otsitav lahend on leitud.

Kõik võrrandid, mis saame mõnest lähtevõrrandist ülaltoodud 4 aksioomi rakendamisel, on lähtevõrrandi t e i s e n d i d. Lähtevõrrand ja tema teisendid omavad kõik samu lahendeid. Seepärast nimetame kõiki neid võrrandeid üksteisega s a m a v ä ä r s e i k s ehk e k v i v a l e n t s e i k s.

Rööbiti ülaltoodud võrduste omadustega on kehtivad järgmised võrratuste omadused:

1. Kui $a > b$, siis $a + m > b + m$. Kui $a < b$, siis $a + m < b + m$.
2. Kui $a > b$, siis $a - m > b - m$. Kui $a < b$, siis $a - m < b - m$.

3. Kui $m > 0$ ja $a > b$, siis $ma > mb$.

Kui $m > 0$ ja $a < b$, siis $ma < mb$.

Seevastu:

Kui $m < 0$ ja $a > b$, siis $ma < mb$.

Kui $m < 0$ ja $a < b$, siis $ma > mb$.

4. Kui $m > 0$ ja $a > b$, siis $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

Kui $m > 0$ ja $a < b$, siis $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.

Seevastu:

Kui $m < 0$ ja $a > b$ siis $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.

Kui $m < 0$ ja $a < b$, siis $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

Märgime lõpuks veel järgmise tõsiasja: kui $m = 0$, siis igasuguste a ja b puhul

$$ma = mb.$$

Seepärast: kui $m = 0$, siis võrdusest

$$ma = mb$$

ei s a a järeldada, et ka

$$a = b.$$

Ülesanded.

130. Missugused täisarvud arvude —5 ja 0 vahel rahuldavad võrrandit

$$x^2 - 3x - 10 = 0?$$

130. Missugused täisarvud arvude -5 ja $+4$ vahel rahuldavad nõuet

$$x^2 + x - 12 = 0?$$

131. Missugused arvudest

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

rahuldavad võrrandit

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0?$$

131. Missugused arvudest

$$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

rahuldavad võrrandit

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0?$$

Allpool on antud rida võrdusi. Otsustada igaühe kohta, kas ta on samasus või võrrand.

132. $a + 1 = 1 + a$

$5c = 3c + c + c$

$7f = 14$

$5h + 3 = 3 + 5h$

$8k - 1 = 15$

132. $m \cdot m^2 \cdot m^3 = m^3 \cdot m^3$

$a^2 \cdot a^2 = (a^2)^2$

$\frac{mx + n}{m} = x + \frac{n}{m}$

$7(a + 2x) = 7a + 15$

$a - (b + 2c) = a + b - 2c$

§ 26. Võrrandite teisendamise lause.

Võrrandi iga liiget võib kanda üle ühelt võrrandi poolelt teisele, muutes seejuures liikme märgi vastupidiseks.

Tõepoolest, olgu tegemist näiteks võrrandiga

$$x^3 + 19x = 10x^2 - 30.$$

Lühiduse mõttes kirjutame ta kujul

$$A + B = C - D,$$

kus A, B, C ja D tähendavad avaldisi x^3, $19x$, $10x^2$ ja 30.

Tahetagu siin üle viia liige B vasakult poolelt paremale poolele. Selleks lahutame võrrandi kummastki poolest liikme B; lahutamisaksioomi põhjal on seejuures tekkivad vahed võrdsed; seega

$$A + B - B = C - D - B$$

ehk, lühemalt,

$$A = C - D - B.$$

Näeme nüüd liiget B vastupidise märgiga seismas võrrandi paremal poolel.

Tahetagu algvõrrandis üle viia paremalt poolelt vasakule poolele liige $-D$. Selleks liidame võrrandi kummagi poolega arvu D; liitmisaksioomi põhjal on tulemused võrdsed; seega

$$A + B + D = C - D + D$$

ehk, lühemalt,

$$A + B + D = C.$$

Näeme nüüd liiget D vastupidise märgiga seismas võrrandi vasakul poolel.

Näide 1. Olgu antud võrrand

$$5x + 1 = 8x - 20.$$

Praegu tõestatud lause lubab selle võrrandi kirjutada kujul $5x + 21 = 8x$ või $1 = 3x - 20$ või $0 = 3x - 21$. Kõik need 4 võrrandit on samaväärsed. Kõiki neid 4 võrrandit rahuldab arv 7.

Näide 2. Olgu antud võrrand $x^2 + 5x - 6 = 0$.

Praegu tõestatud lause lubab sama võrrandit kirjutada kujul $x^2 + 5x = 6$ või $x^2 = -5x + 6$ või $x^2 - 6 = -5x$ või $5x = 6 - x^2$. Kõik need võrrandid on samaväärsed. Kõiki neid võrrandeid rahuldavad arvud -6 ja 1.

§ 27. Lineaarvõrrand.

Olgu antud mingi võrrand, milles pole liikmeid otsitavaga nimetajas. Võtame võrrandi liikmed vasakule poolele nii, et paremale poolele jääks null; avame kõik sulud ja koondame vasaku poole.

Kui peale koondamist otsitav esineb võrrandis ainult esimesel astmel, siis nimetame seda võrrandit esimese astme võrrandiks ehk lineaarvõrrandiks.

Sama nimetuse anname sel korral ka lähtevõrrandile.

Näiteks on

$$2x = 7 \qquad 3x - 4 = 19 \qquad 7x - 1 = \frac{1}{2}x + 29$$

lineaarvõrrandid.

Seevastu

$$x^2 = x + 3 \qquad \frac{1}{x} - 2x = 10$$

pole lineaarvõrrandid.

Lineaarvõrrandis peab leiduma liige otsitava esimese astmega; kirjutame selle liikme kujul ax. Kõrvu sellega võib leiduda otsitavast vaba liige; märgime selle tähega b. Seega

lineaarvõrrandi üldkuju on $ax + b = 0$.

Järgmised ülesanded selgitavad lineaarvõrrandi lahendamise käiku.

Ülesanne 1. Lahendada võrrand $12x = 21$.

Lahendus. Jagades võrrandi kummagi poole 12-ga, saame jagamisaksioomi põhjal võrdsed arvud; seega

$$x = \frac{21}{12}$$

ehk taandades

$$x = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}.$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrand $x + 8 = 13$.

Lahendus. Lahutades kummastki poolest 8, saame lahutamisaksioomi põhjal võrdsed arvud; seega

$$x = 13 - 8$$

ehk

$$x = 5.$$

Ülesanne 3. Lahendada võrrand $4x + 7 = 3$.

Lahendus. Lahutades kummastki poolest 7, saame lahutamisaksioomi põhjal võrdsed arvud; seega

$$4x = 3 - 7$$

ehk

$$4x = -4.$$

Jagades kummagi poole 4-ga, saame jagamisaksioomi põhjal võrdsed arvud; seega

$$x = \frac{-4}{4}$$

ehk

$$x = -1.$$

§ 28. Üldkujulise lineaarvõrrandi lahend.

Olgu antud lahendada võrrand

$$ax + b = 0.$$

Kummastki poolest arvu b lahutades saame lahutamisaksioomi põhjal

$$ax = -b;$$

kumbagi poolt arvuga a jagades saame jagamisaksioomi põhjal

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Et võrrand $ax + b = 0$ oleks tõesti esimese astme võrrand, selleks peab a olema nullist erinev: $a \neq 0$. Sel eeldusel on murrul $-\frac{b}{a}$ kindel ühene väärtus. Seega

lineaarvõrrandil on üks ning ainus lahend.

§ 29. Lineaarvõrrandi lahendamine.

Aja ja vaeva kokkuhoiu mõttes on otstarbekohane lineaarvõrrandi lahendamist toimetada järgmiselt:

1. **avame sulud, kui võrrandis esineb sulgavaldisi, ja koondame;**
2. **kanname kõik otsitavaga liikmed ühele poolele ja kõik otsitavast vabad liikmed võrrandi teisele poolele;**
3. **koondame;**
4. **jagame mõlemad pooled otsitava kordajaga ja taandame saaduse.**

Leitud lahendit kontrollime, asetades selle algvõrrandisse otsitava asemele.

Ülesanne. Lahendada võrrand

$$5(x-4)-2(3x+7)-14=9(2x+5)-x-21.$$

Lahendus. Avame sulud:

$$5x-20-6x-14-14=18x+45-x-21;$$

koondame kummagi poole:

$$-x-48=17x+24;$$

võtame otsitavaga liikmed vasakule poolele, otsitavast vabad liikmed paremale poolele:

$$-x-17x=24+48;$$

koondame nii vasaku poole kui ka parema poole:

$$-18x=72;$$

jagame kummagi poole -18-ga:

$$x=\frac{72}{-18};$$

taandades saame lõpuks

$$x = -4.$$

Kontrollime leitud lahendit.

Leitud x-i väärtuse puhul antud võrrandi vasak pool on:

$$5 \cdot (-4 - 4) - 2 \cdot [3 \cdot (-4) + 7] - 14 =$$
$$= 5 \cdot (-8) - 2 \cdot (-12 + 7) - 14 =$$
$$= -40 - 2 \cdot (-5) - 14 = -40 + 10 - 14 = -44;$$

sama x-i väärtuse puhul võrrandi parem pool on

$$9 \cdot [2 \cdot (-4) + 5] - (-4) - 21 =$$
$$= 9 \cdot [-8 + 5] + 4 - 21 = 9 \cdot (-3) + 4 - 21 =$$
$$= -27 + 4 - 21 = -48 + 4 = -44.$$

Et kummalgi poolel saime sama tulemuse, siis arv -4 tõesti rahuldab võrrandit.

Kontrollimisel tuleb leitud lahend asetada otsitava asemele võrrandi a l g k u j u kummassegi poolde, mitte aga juba teisendatud võrrandi pooltesse. Vastasel korral asetamine ei ilmutaks viga, mis ehk on juhtunud juba võrrandi teisendamisel.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandid:

133. $25 - 3y = 13$
$7 = 14 - 7x$
$-7z + 14 = 17$
$2w - 7 = 23$
$-3v - 6 = -8$

133. $3x - 2 = 4x$
$x + 4 = -6 - 1$
$3x + 7 = -3 + x$
$2x + 8 = 19 + x$
$8 = 3x + 9 - 2$

134. $15 = 3h - 12$
$14 = 12 - 6k$
$5k - 4 = 4k$
$3m + 7 = 6m$
$14 - 7n = 15$

134. $z + 3 = 4z - 5$
$z - 5 = 5 - 4z$
$3z - 2 = 7 + 2z$
$2 + 6P = 3 + 3P$
$3 + 5Q = -1 - Q$

135. $6x + 5 = 5x + 12$
$2 + 3x = 12 + 2x$
$3 + 4x = 10 + 3x$
$6 + 5x = 4x + 15$
$5x + 8 = 4x + 16$

135. $6y - 2 = 5y + 8$
$3y - 4 = 2y + 7$
$y + 2 = 2y - 7$
$3w - 5 = 2w + 5$
$z + 8 = 2z - 4$

136. $2p + 4 = 8 + p$
$3q + 7 = 16 + 2q$
$r + 5 = 16$
$5 + s = 12$
$2t + 9 = 3t$

136. $4x - 3 = 3x + 9$
$x - 9 = 4$
$x + 14 = 2x + 5$
$4x - 9 = 3x + 4$
$5x + 6 = 4x + 10$

137. $7x - 5x + x - 9 = 6$
$8y - 3y + 10 - 2y = 28$
$7z + 15 - 2z + z = 81$
$3v - v + 4v - 30 = 50 - 7 - 1$
$11s - 16 + s - 9s = 35 - 12$

137. $33 - 5t + 2 = 9t - 7t$
$5u - 3u + 5 - 3 = 5 + 3u - 15 + u$
$4p + 37 + 6p - 49 = 7p - 9$
$150q + 70 - 45q - 105 = 94 + 44q - 68$
$4r + 5 + 6r + 7 = 4 + 5r + 6 + 7r$

138. $2(x - 3) + 15(x + 5) = 273$
$4x + 5 - 3(x - 2) = 21$
$13(x + 11) - 5(x + 6) = 177$
$3(2z + 14) = 2(8z - 14)$
$z + 7 = 0{,}5(5z - 4)$

138. $5(z - 2) + 3(z + 7) = 3(2z + 7)$
$z - 7 + 3(4 + z) = 2(3z - 2) + 0{,}5(5z - 18)$
$3(z - 2) + 8(9 - 2z) = 2(z + 5) + 3(4 - z) + 8$
$5(z - 12) + 3(11 - 5z) = 7(3 - z) - 9(4z - 3)$
$(1 - z) + 2(2 - z) + 3(3 - z) + 4(4 - z) = 50$

139. $x + (9 - 15x) = 10 + 6x + 39$
$13x - (70 + 25x) = 62 - 16 + 17x$
$0 = (24 - 17x) - 13 - 40 + 12x - 9$
$15 - 3(2x - 1) = 16(x + 1) - 2(x - 1)$
$5(2x - 7) - 14(3x + 2) - x - 1 = -196$

139. $6(x + 2) + 5(x + 1) = 9(x + 3)$
$5(y - 3) + 7(3y + 6) - 2(y - 7) = 5$
$2(7 - 2y) - 9(5y - 11) + 8(3y - 1) = 30$
$7(6x - 1) - 5(12x - 7) + 3(2x + 1) = 23$
$5(8y - 1) - 7(4y + 1) + 8(7 - 4y) = 19$

Lahendada järgmised võrrandid, kasutades lihtsustamisel arvutamise abivalemeid:

140. $(x + 5)(x - 5) - x(x - 5) = 0$
$(x + 2)^2 = (x - 3)^2$
$(x + 3)^2 + (x + 2)^2 = (x + 5)^2 + (x + 1)^2$
$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = (x + 1)^3 - (3x^2 + 2)$
$(x + 4)^2 - (x + 1)^2 = (x + 7)^2 - (x + 2)^2$

140. $(x - 7)^2 - (x - 10)^2 = (x - 1)^2 - (x - 2)^2$
$(x + 3)^2 + (x - 8)^2 = (x + 5)^2 + (x - 9)^2$
$(x + 4)(x - 4) = (x + 2)^2$
$(x + 4)^3 - 1 = 3(2x + 3)^2 + x^3$
$(x - 2)^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - (6x^2 - 1)$

§ 30. Lineaarvõrrandi abil lahenduvaid ülesandeid.

Paljude ülesannete lahendamine on võrrandi abil tunduvalt kergem kui nende lahendamine aritmeetilisel teel, ilma võrrandita.

Ülesande lahendamine võrrandi abil toimub järgmiselt:

1) kõige esmalt tähistame otsitava suuruse või mõne teise, otsitavast oleneva suuruse mingi tähega, näiteks tähega x;

2) kokkulepitud tähe ja ülesande andmete kaudu avaldame siis teisi suurusi ning moodustame avaldiste paari niisuguste suuruste jaoks, mis ülesande tingimuste põhjal on võrdsed; sageli õnnestub moodustada ühe ja sama suuruse jaoks kaks erinevat avaldist, mis on muidugi teineteisega võrdsed seetõttu, et nad väljendavad üht ja sama suurust;

3) lõpuks moodustame võrrandi, ühendades võrdseid suurusi väljendavad avaldised võrdusmärgiga. Saadud võrrandi lahendamise tulemusena leiame otsitava väärtuse.

4) Tulemuse kontrollimiseks vaatame, kas ta vastab ülesande tingimustele.

Näited.

Ülesanne 1. Isa vanus on 40 aastat, poja vanus 12 aastat. Mitme aasta eest oli isa pojast 5 korda vanem?

Lahendus. Oletame, et isa oli pojast 5 korda vanem x aasta eest.

Sel ajal oli isa vanus $40 - x$ aastat;
poja vanus oli $12 - x$ „ .

Ülesande tingimuste kohaselt saame võrdsed avaldised, kui poja vanust väljendava avaldise $12 - x$ korrutame 5-ga, saame $5(12 - x)$.

Nüüd võime kirjutada võrrandi:

$$40 - x = 5(12 - x).$$

Lahendame saadud võrrandi:

$$\begin{aligned} 40 - x &= 60 - 5x \\ 5x - x &= 60 - 40 \\ 4x &= 20 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Kontroll: 5 aasta eest oli isa vanus $40 - 5 = 35$,
poja vanus oli siis $12 - 5 = 7$.
Isa oli tõesti pojast 5 korda vanem.
Lahend on õige.

Vastus. Isa oli pojast 5 korda vanem 5 aasta eest.

Ülesanne 2. Ühel riiulil on kolm korda rohkem raamatuid kui teisel. Kui ühelt riiulilt tõsta teisele 5 raamatut, siis jääb esimesele riiulile raamatuid kaks korda rohkem kui teisele.

Mitu raamatut on kummalgi riiulil?

Lahendus. Tähistame raamatute arvu teisel riiulil tähega x, siis on esimesel riiulil $3x$ raamatut.

Pärast 5 raamatu ümbertõstmist on esimesel riiulil $3x - 5$ raamatut, teisel riiulil on $x + 5$ raamatut.

Kui nüüd teise riiuli raamatute arvu korrutame arvuga 2, siis saame võrdsed avaldised, seepärast võime kirjutada võrrandi

$$3x - 5 = 2(x + 5).$$

Lahendame:
$$3x - 5 = 2x + 10$$
$$3x - 2x = 10 + 5$$

$x = 15$... raamatute arv teisel riiulil
$3x = 45$... „ „ esimesel „

Kontroll. Pärast ümbertõstmist jääb esimesele riiulile raamatuid

$$45 - 5 = 40,$$

teisele riiulile $15 + 5 = 20$.

$$45 : 15 = 3,$$
$$40 : 20 = 2.$$

Lahend on õige.

Vastus. Esimesel riiulil on 45 raamatut, teisel riiulil 15 raamatut.

Ülesanne 3. Aednik soovib istutada peenrale ühe rea aedvabarna istikuid. Kui ta istikud paigutab iga 4 dm tagant, siis tuleb 3 istikut puudu; kui ta aga iga vahe jätab 5 dm, siis jääb 1 istik üle. Kui pikk on peenar?

Lahendus. Nüüd on lahendamine kergem, kui tähega tähistame istikute arvu, aga mitte otsitavat suurust ennast, s. o. peenra pikkust.

Niisiis olgu istikute arv x.

Kui vahed jätta 4 dm, siis on kogu peenra pikkuse katmiseks tarvis $x+3$ istikut. Vahesid istikute vahel on alati ühe võrra vähem kui istikuid reas, seega on siis vahesid $x+3-1=x+2$. Et iga vahe on 4 dm, siis peenra pikkus on $4(x+2)$ dm.

Kui aga iga vahe jätta 5 dm, siis jääb 1 istik üle, seega mahub siis peenrale ritta $x-1$ istikut, vahede arv on selle järgi $x-1-1=x-2$.

Et iga vahe on nüüd 5 dm, siis peenra pikkus on $5(x-2)$ dm.

Et avaldised $4(x+2)$ ja $5(x-2)$ väljendavad üht ja sama peenra pikkust, siis võime kirjutada võrrandi

$$5(x-2)=4(x+2).$$

Lahendame saadud võrrandi:

$$5x-10=4x+8$$
$$5x-4x=8+10$$
$$x=18.$$

See on istikute arv. Peenra pikkuse leidmiseks asetame leitud x-i väärtuse ühte peenra pikkuse avaldisse, s. o. kas avaldisse $5(x-2)$ või $4(x+2)$, nii saame peenra pikkuse detsimeetrites:

$$5(x-2)=5(18-2)=5\cdot16=80.$$

Kontroll. Istikute arv 18,
istikuid mahuks ritta .... $18 + 3 = 21$,
vahesid .... $21 - 1 = 20$,
peenra pikkus .... $4 \cdot 20 = 80$.

Teisel juhul on

istikuid reas .... $18 - 1 = 17$,
vahesid .... $17 - 1 = 16$,
peenra pikkus .... $5 \cdot 16 = 80$.

Vastus. Peenra pikkus on 8 m.

Ülesanne 4. Süstasõitja aerutab pärivoolu kiirusega $4 \frac{\text{km}}{\text{t}}$ ja tagasitulekul vastuvoolu $3 \frac{\text{km}}{\text{t}}$. Tal kulus vastuvoolu tagasitulekuks 1 tund rohkem aega kui aerutamiseks pärivoolu.

Mitu tundi kestis süstasõit?

Lahendus. Oletame, et sõit pärivoolu kestis x tundi, siis sõit vastuvoolu kestis $x + 1$ tundi.

Tee pikkus pärivoolu aerutamisel on $4x$ km,
tee pikkus tagasiaerutamisel on $3(x + 1)$ km.

Et tee pikkused sinna ja tagasi on võrdsed, siis võime kirjutada võrrandi

$$4x = 3(x + 1).$$

Lahendame saadud võrrandi:

$$4x = 3x + 3$$
$$4x - 3x = 3$$
$$x = 3.$$

Näeme, et sõit pärivoolu kestis 3 tundi; sõit vastuvoolu kestis 1 tunni võrra rohkem, seega kestis sõit vastuvoolu 4 tundi, sõidu kestus oli siis kokku 7 tundi.

Kontroll. Aerutaja jõudis lähtekohast pärivett aerutades $3 \cdot 4$ km, s. o. 12 km kaugusele. Vastuvett tagasiaerutamiseks peaks selleks kuluma 1 tunni võrra rohkem aega kui sinna aerutamiseks, s. o. 4 tundi: tõesti 12 : 3 = 4.

Tulemused sobivad andmetega, seega on arvutus õige.

Vastus. Süstasõit kestis 7 tundi.

Ülesanded.

141. Leida kolm järjestikust täisarvu, mille summa on 72.

141. Leida neli järjestikust täisarvu, mille summa on 74.

142. Üks arv on teisest 5 võrra suurem. Väiksema kahekordse ja suurema neljakordse summa on 122. Leida need arvud.

142. Kahe arvu vahe on 10. Väiksema kolmekordse ja suurema viiekordse summa on 858. Leida need arvud.

143. Leida kolm üksteisele järgnevat täisarvu nii, et suurema kolmekordne on võrdne kahe väiksema summa kahekordsega.

143. Leida kolm järjestikust täisarvu nii, et kahe väiksema summa kolmekordne on võrdne suurema viiekordsega.

144. Valisin arvu, liitsin temaga 7, korrutasin saaduse 5-ga ja sain 95. Mis arvu ma valisin?

144. Valisin arvu. Kui ma selle korrutan kümnega ja liidan saadusega 15, saan täpselt sama arvu, mis siis, kui valitud arvu korrutan kaheteistkümnega ja saadusest lahutan 9. Mis arvu ma valisin?

145. Jaotada arv 13 kahte ossa nii, et nende osade vahe oleks 4.

145. Jaotada arv 87 kaheks liidetavaks nii, et üks liidetav oleks teisest 13 võrra suurem.

146. Kolme järjestikuse paarituarvu summa on 63. Mis arvud need on?

146. Kolme järjestikuse paarituarvu summa on 69. Leida need arvud.

147. Kolme järjestikuse paarisarvu summa on 72. Mis arvud need on?

147. Kolme järjestikuse paarisarvu summa on 90. Mis arvud need on?

148. Kui kumbagi kahest järjestikusest täisarvust vähendada 1 võrra, siis nende korrutis väheneb 20 võrra. Mis arvud need on?

148. Kui kumbagi kahest järjestikusest täisarvust suurendada 1 võrra, siis nende korrutis suureneb 18 võrra. Leida need arvud.

149. Isa on 50 aastat vana, poeg 24 aastat. Mitme aasta eest oli isa 3 korda vanem kui poeg?

149. Isa on 36 aastat, poeg 10 aastat vana. Mitme aasta pärast on isa pojast 2 korda vanem?

150. Kui tütar sündis, oli ema 24 aastane. Praegu on ema tütrest 4 korda vanem. Kui vana on tütar praegu?

150. Poja sündimisel oli isa 26 aastat vana. Praegu on isa pojast 3 korda vanem. Kui vana on poeg praegu?

151. Arv 96 on lahutatud kaheks isesuguseks osaks. Kui väiksemat osa suurendada 6 võrra, suuremat aga niisama palju vähendada, siis saame võrdsed arvud. Missugusteks osadeks on lahutatud arv 96?

151. Valisin arvu. Kui seda suurendan nelja võrra ja saaduse korrutan 3-ga, saan sama resultaadi, mille saan, kui seda arvu suurendan kahe võrra ja saaduse korrutan 4-ga. Mis arvu ma valisin?

152. Kolmnurga kolmest küljest on teine esimesest kaks korda pikem ja kolmas esimesest 16 sentimeetrit pikem; kolmnurga ümbermõõt on 108 sentimeetrit. Kui pikad on kolmnurga küljed?

152. Kolmnurga üks nurk on kolm korda suurem kui kolmas nurk ja teine nurk on kolmandast 20 kraadi võrra suurem. Arvutada kolmnurga nurgad.

153. Ühel õpilasel oli 180 rubla, teisel 216 rubla. Esimene kulutas iga päev 5 rubla, teine 8 rubla. Mitme päeva pärast oli neil ühepalju raha?

153. Kahel vennal on kummalgi oma rahakorjamiskarp, millesse isa iga päev paigutab 1 rubla. Praegu on ühe venna karbis 82 rubla, teise venna karbis 54 rubla. Millal oli esimesel vennal teisest kaks korda rohkem raha?

154. Rühm punaarmeelasi on paigutatud kasarmusse nii, et ühes toas on 36 meest ja igas teises toas 28 meest. Neid võiks aga paigutada ka nii, et ühes toas on 27 meest ja igas teises 31 meest. Mitu punaarmeelaste tuba on kasarmus?

154. Raudteejaamas ostetakse 36 piletit, neist 25 lähima väljasõidu-kohani ja 11 sinna ning tagasi, makstes kõigi piletite eest 10,65 rubla. Kui kallid olid piletid sinna ja piletid sinna ning tagasi, kui viimased on 15 kop. kallimad esimestest?

155. Kahel linnaosal oli elanikke vastavalt 900 ja 2500. Kahe aasta pärast toimetatud rahvaloendus näitas mõlemal osal elanikkude arvu ühesuurust kasvu, ühtlasi aga ka, et teises osas oli elanikke kaks korda rohkem kui esimeses. Mitme inimese võrra oli kasvanud elanikkude arv kummaski linnaosas?

155. Koer ajab jänest taga; viimane on koerast 150 jalga ees. Jänese hüpped on 7 jalga pikad, koera omad 9 jalga, kuna hüpete kestused on võrdsed. Mitme hüppega on koer jänese kannul? (Ühest vanast ülesannete kogust.)

156. Kui hernepeenral paigutada kepid iga 25 cm tagant, siis tuleks puudu 57 keppi; kui neid paigutada 35 cm tagant, jääks neid üle 19. Arvutada peenra pikkus.

156. Piimaühistu ehitas veski juurde elektrijaama. Voolu juhtimiseks sealt meiereisse tuli ühistul ehitada liin; selleks oli muretsetud kohale poste just niipalju, et saaks ehitada liini postivahedega 40 meetrit. Ühistu ehitas aga liini posti-

vahedega 45 meetrit ja nii jäi 4 posti üle. Kui kaugel on jõujaam meiereist?

157. Töökotta toodi raudvarras, millest oli tarvis valmistada määratud arv neetisid. Meister leidis, et võttes needi pikkuseks 12 mm, jääb 10 mm pikkune tükk raudvarrast järele; kui aga needi pikkuseks võtta 10 mm, siis saab valmistada 2 neeti rohkem kui tarvis. Kui pikk oli raudvarras?

157. Kilogramm kuivatatud õunu maksab 2 rubla, kilogramm kuivatatud ploome 2,5 rubla. Osteti õunu ja ploome, kokku 400 grammi. Ploomid maksid 85 kopikat. Kui palju maksti õunte eest?

158. Jõeaurik sõidab lähtesadamast sihtsadamasse pärivoolu kiirusega 20 $\frac{km}{t}$ ja tagasisõidul vastuvoolu kiirusega 18 $\frac{km}{t}$. Aurikul kulus tagasisõiduks $\frac{1}{2}$ tundi rohkem aega kui sinnasõiduks. Mitu tundi kestis edasi-tagasi sõit?

158. Rattasõitja sõitis kodust linna kiirusega 15 $\frac{km}{t}$. Tagasisõidul oli tuul tagant, selletõttu oli sõidukiirus 20 $\frac{km}{t}$. Tagasisõit kestis 1 tund vähem kui sinnasõit. Mitu tundi kestis edasi-tagasi sõit?

Peatükk IV.

Proportsioon.

§ 31. Kahe arvu suhe.

Kahe arvu suhte mõiste selgitamiseks lahendame järgmise ülesande.

Ülesanne. Kooli 7. klassis oli 40 õpilast, neist lõpetasid kursuse kiitusega 5 õpilast; 11. klassis oli 25 õpilast, neist lõpetasid kiitusega 3 õpilast.

Kumb klass andis suhteliselt rohkem kiitusega lõpetanuid?

Lahendus. Vastuse saamiseks vaatame, kui suur murdosa kummagi klassi õpilastest lõpetas kiitusega; selleks leiame kummaski klassis kiitusega lõpetanute ja kogu klassi õpilaste arvu jagatise ehk suhte. Need jagatised on:

7. klassis : $5 : 40 = 0{,}125$;

11. „ : $3 : 25 = 0{,}12$.

Siit näeme, et 7. klassi kiitusega lõpetanud õpilaste arv on suhteliselt suurem kui 11. klassis.

Me ütleme, et kiitusega lõpetanute ja kogu klassi õpilaste arvude suhe on 7. klassis 0,125 ehk 12,5% ja 11. klassis 0,12 ehk 12%.

Üldiselt defineerime suhet nõnda:

Kahe arvu suhteks nimetame nende arvude jagatist.

Näiteks arvude a ja b suhe on $\frac{a}{b}$ ehk $a : b$.

Kahe arvu suhe antakse sageli protsentides.

Ülesanded.

Allpool on antud rida suuruste paare. Märkeda iga paari puhul suuruste suhe ja avaldada see võimalikult lihtsate arvude kaudu:

159. 3 kg ja 10 kg
50 l ja 300 l
240 m ja 40 m
56 rubla ja 48 rubla

159. 20 dm^3 ja 30 dm^3
250 km ja 400 km
19 ha ja 57 ha
24 hl ja 36 hl

160. 1,40 m ja 25 cm
80 kopikat ja 1,20 rubla
1 kg ja 750 g
1 tund ja $12\frac{1}{2}$ minutit

160. 0,72 m ja 88 cm
400 g ja $\frac{3}{5}$ kg
25 cm^3 ja 0,875 l
$16\frac{2}{3}$ minutit ja 1,2 tundi

Avaldada järgmised suhted võimalikult väikeste täisarvude kaudu:

161. 198 : 55 91 : 65 85 : 102

161. 304 : 950 155 : 186 651 : 868

Anda järgmised suhted võimalikult lihtsalt:

162. $4\frac{1}{2} : 3\frac{3}{5}$ $9\frac{1}{4} : 15\frac{6}{7}$ 10,56 : 13,20

162. $6 : 7\frac{1}{2}$ $17\frac{1}{3} : 19\frac{2}{7}$ 0,2412 : 14,07

Avaldada järgmised suhted protsentides:

163. 15 : 100	163. 60 : 700	**164.** 1 : 2	164. $1 : n$
34 : 100	72 : 900	3 : 4	$a : x$
80 : 200	6 : 10	4 : 5	$c : 2u$
27 : 200	9 : 20	7 : 3	$2h : 25H$
50 : 300	13 : 50	5 : 6	$p : 1$

Avaldada järgmised andmed kahe võimalikult väikese täisarvu suhte näol:

165. 80%	165. 100%	**166.** $12\frac{1}{2}\%$	166. $16\frac{2}{3}\%$
60%	75%	$3\frac{1}{3}\%$	140%
40%	25%	$6\frac{1}{4}\%$	$66\frac{2}{3}\%$
20%	10%	$8\frac{4}{5}\%$	5,6%
0%	8%	$7\frac{1}{2}\%$	0,09%

167. Klassis oli 36 õpilast, paralleelklassis 42 õpilast. Klassikursuse lõpetasid vastavalt 30 ja 36 õpilast? Missuguse klassi lõpetas suhteliselt suurem arv õpilasi?

167. Ühele põllule külvati 12,4 hl nisu, teisele 8,6 hl rukist. Esimeselt põllult oli saak 57,8 hl, teiselt 51,6 hl. Missugune siinnimetatud kahest viljasordist andis suhteliselt külviga suurema saagi?

168. Võimleja, kelle keha pikkus on 160 cm, hüppab kaugust 5,8 m, heinaritsikas kehapikkusega 25 mm hüppab 1 m, 2 mm kehapikkusega kirp hüppab 20 cm. Kes neist kolmest hüppab suhteliselt kehapikkusega suurimat kaugust?

168. Rahvaloenduse andmeil oli 1922. a. Eestis meessoost elanikke 520 239, naissoost elanikke 586 820. Aastal 1934 olid vastavad arvud 528 888 ja 597 525. Kas naissoost elanikkude suhteline ülekaal näitab kasvamist või kahanemist?

§ 32. Võrre ehk proportsioon.

Võrde mõtte selgitamiseks toome järgmise ülesande.

Ü l e s a n n e. Õpilane mõõdab mõõtpaelaga klassi pikkust ja leiab selle olevat 10 m, veaga mitte üle 25 mm;

teine õpilane mõõdab oma töölaua pikkust ja leiab selle olevat 0,80 m, veaga mitte üle 2 mm. Kumb mõõtmissaadus on täpsem?

L a h e n d u s. Esimese mõõtmise puhul tuleb ühe meetri kohta viga kuni $\frac{25}{10}$ ehk 2,5 mm, teise mõõtmise puhul viga kuni $\frac{2}{0,80}$ ehk samuti 2,5 mm. Seega on mõlemad mõõtmised võrdtäpsed. Murrud $\frac{25}{10}$ ja $\frac{2}{0,80}$ annavad kummagi mõõtmisvea suhte mõõtmissaadusse ja kujutavad mõõtmiste r e l a t i i v s e i d v i g u. Need murrud on võrdsed:

$$\frac{25}{10}=\frac{2}{0,80}.$$

Võrdust, nagu kõnesolev, nimetame v õ r d e k s.
Üldiselt defineerime võrret nõnda:

võrdeks nimetame kahe suhte võrdust.

Näiteks võrdused

$$\frac{4}{6}=\frac{20}{30} \qquad \frac{a}{x}=\frac{x}{b} \qquad \frac{a-u}{a+u}=\frac{1}{a}$$

on võrded.

Neli arvu, millest võrre $a:b=c:d$ ehk

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

koosneb, on v õ r d e l i i k m e d; neist b ja c on s i s e l i i k m e d ning a ja d v ä l i s l i i k m e d.

Võrretega puutume sagedasti kokku nn. v õ r d e l i s t e ehk p r o p o r t s i o n a a l s e t e suuruste puhul. Olgu näiteks kaks suhkruhulka kilogrammides märgitud c ja d, nende suhkruhulkade väärtused rublades a ja b. Siis a on nii mitu korda suurem b-st, kui palju korda c on suurem d-st; sümbolites:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Me ütleme, et kauba hulk ja selle väärtus on võrdelised suurused. Niisugusteks suurusteks on ka hoiusumma ja selle kantud intress, ruudu külg ja ruudu ümbermõõt, piima ruumala ja piima kaal.

Üldiselt defineerime nii:

suurusi, mille vastavate väärtuste suhted on võrdsed, nimetame võrdelisteks ehk proportsionaalseteks suurusteks.

Näiteks hapniku hulk ja vesiniku hulk vees on võrdelised suurused, sest igasuguse veehulga puhul on temas leiduva vesiniku hulga ja hapniku hulga suhe üks ja seesama, nimelt 1 : 8.

Võrdeliste suuruste vastavate väärtuste jagatist nimetame võrdeteguriks ehk proportsionaalsuse koefitsiendiks.

Näiteks vees sisalduva hapniku ja vesiniku hulga võrdetegur on $\frac{1}{8}$ ehk 0,125.

Vaatleme ruudu külje pikkuse ja ümbermõõdu vastavaid väärtusi.

Me võime koostada järgmise tabeli:

Külje pikkus cm-tes	1	2	3	4	5	6
Ümbermõõt cm-tes	4	8	12	16	20	24

Näeme, et ruudu külje pikkus ja ümbermõõt on võrdelised suurused, sest nende vastavate väärtuste jagatised on võrdsed. Võrdetegur on siin $\frac{1}{4}$ ehk 0,25.

§ 33. Võrde põhiomadus.

Väidame, et

võrde siseliikmete korrutis on võrdne sama võrde välisliikmete korrutisega.

Tõepoolest, olgu tegemist võrdega

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};$$

kirjutades need murrud ühise nimetajaga, saame:

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd};$$

korrutades võrduse kumbagi poolt avaldisega bd, leiame:

$$ad=bc,$$

m. o. t. t.

Ümberpöördult:

kui neli arvu a, b, c, d rahuldavad tingimust $ad=bc$, siis võib neist moodustada võrde.

Tõepoolest, olgu

$$ad=bc;$$

jagades mõlemad korrutised bd-ga, leiame:

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$$

ehk taandades

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

m. o. t. t.

Praegu-tõestatud lause annab meile m u r d u d e v õ r d u m i s e t i n g i m u s e: kui $ad=bc$, siis

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Võrduses $ad=bc$ on võimalik vahetada tegurite järjekorda paremal poolel, vahetada tegurite järjekorda vasemal poolel ja ka vahetada võrduse pooli. Sellest järeldub, et ühteaegu võrdega $a:b=c:d$ on kehtivad võrded

$$a:c=b:d \qquad d:b=c:a \qquad b:a=d:c.$$

See tähendab, et

võrdes võib siseliikmed isekeskis ümber paigutada;
võrdes võib välisliikmed isekeskis ümber paigutada;
võrdes võib siseliikmed võtta välisliikmeteks ja välisliikmed siseliikmeteks.

Kui võrde

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

kummagi poole korrutame arvuga b, siis saame

$$a=\frac{b \cdot c}{d}.$$

Korrutades arvuga d, saame

$$c=\frac{a \cdot d}{b}.$$

See tähendab, et

võrde välisliige on siseliikmete korrutis jagatud teise välisliikmega; võrde siseliige on välisliikmete korrutis jagatud teise siseliikmega.

Ülesanne. Lahendada võrrand $\frac{4x-1}{2x+3}=\frac{2x-2}{x}$.

Lahendus. Võrde põhiomaduse põhjal võime kirjutada

$$
\begin{aligned}
(4x-1)x &= (2x+3)(2x-2) \\
4x^2-x &= 4x^2-4x+6x-6 \\
-x &= +2x-6 \\
-x-2x &= -6 \\
-3x &= -6 \\
3x &= 6 \\
x &= 2.
\end{aligned}
$$

Kas on kehtivad järgmised võrded:

169. $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3} = 1\frac{1}{2} : \frac{4}{5}$

$80 : 1\frac{4}{11} = 14\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$

$\frac{3}{5} : \frac{7}{15} = 4\frac{5}{7} : 1\frac{17}{20}$

$\frac{5}{13} : \frac{4}{15} = 3\frac{3}{4} : 2\frac{3}{5}$

$1\frac{5}{8} : 2\frac{3}{4} = \frac{44}{165} : \frac{120}{95}$

169. $0{,}16 : 0{,}4 = 1 : 2{,}5$

$0{,}65 : 1{,}3 = 0{,}7 : 1{,}4$

$5{,}2 : 0{,}140 = 1{,}3 : 0{,}035$

$3{,}5 : 0{,}8 = 1\frac{17}{18} : \frac{5}{9}$

$9{,}2 : 2{,}9 = 3\frac{5}{29} : 1$

170. Olgu $3x = 5a$. Kirjutada arvude x ja a vaheline seos võrdena.

170. Olgu $4m = 5n$. Kirjutada arvude m ja n vaheline seos võrdena.

Määrata järgmistest võrretest arv x:

171. $x : 10 = 5 : 8$

$1 : x = 4 : 7$

$10 : 32 = x : 9{,}6$

$0{,}5 : 0{,}3 = 0{,}6 : x$

$x : 1 = 1 : 4$

171. $x : a = n : b$

$a^2 : x = b^2 : c$

$ab : bc = x : 5$

$\frac{1}{m} : \frac{1}{n} = \frac{1}{p} : x$

$\frac{1}{x} : \frac{1}{a} = \frac{1}{b} : \frac{1}{2}$

172. $\frac{x}{3} = \frac{5}{27}$ $\qquad \frac{x}{c} = \frac{a}{b}$ $\qquad \frac{x}{3a} = \frac{3}{4b}$

172. $\frac{2}{x} = \frac{3}{10}$ $\qquad \frac{a}{x} = \frac{2m}{n}$ $\qquad \frac{m}{x} = \frac{7n}{2m}$

173. $\frac{7}{16} = \frac{x}{5}$ $\qquad \frac{a^2}{bx} = \frac{c}{a}$ $\qquad \frac{p}{x} = \frac{q^2}{4p^2}$

173. $\frac{9}{24} = \frac{1}{x}$ $\qquad \frac{m^2}{np} = \frac{np}{x}$ $\qquad \frac{hk}{lm} = \frac{lm}{x}$

Leida võrde neljas liige, kui kolm esimest liiget on vastavalt:

174.

2	5	4
5	4	2
7	3	14
35	20	14
4	8	16

174.

a	b	c
$6a$	$2b$	c
a^2	b^2	1
ab	bc	ca
a^2	ab	ab^2

Lahendada järgmised võrrandid:

175. $\frac{a-2}{a}=\frac{3}{5}$

175. $\frac{c}{c+6}=\frac{1}{3}$

176. $\frac{x}{3x+10}=\frac{1,5}{7}$

176. $\frac{4u-7}{5u}=\frac{1}{3}$

177. $\frac{w+6}{2w+15}=\frac{4}{5}$

177. $\frac{200-x}{x}=\frac{7}{18}$

178. $\frac{u-12}{1-3u}=2$

178. $\frac{3}{t+14}=\frac{1}{t}$

179. $3=\frac{12}{s+3}$

179. $\frac{2v+1}{3v}=\frac{1}{3}$

180. $\frac{n+4}{n+3}=\frac{6}{5}$

180. $\frac{7z-5}{3z+5}=1\frac{4}{5}$

181. $\frac{5x-1}{x-4}=\frac{1}{4}$

181. $\frac{10m-1}{1-m}=5$

182. $\frac{1-3n}{n-12}=\frac{1}{2}$

182. $2r=\frac{7r+0,5}{4}$

183. $\frac{100w}{3+10w}=\frac{10}{13}$

183. $\frac{10z+25}{2z+7}=\frac{-5}{1}$

184. $\frac{3r}{2r-5}=\frac{8}{11}$

184. $\frac{s+2}{s-5}=\frac{8}{15}$

185. $\frac{14-3t}{13}=\frac{4t-5}{10}$

185. $\frac{19-13u}{7}=\frac{5u+33}{2}$

186. $\frac{15-4h}{5}=\frac{21-5h}{7}$

186. $\frac{2(4v-1)}{5}=\frac{3(28-5v)}{4}$

187. $\frac{17}{4w-3}=\frac{13}{2w+3}$

187. $\frac{x^2}{x-4}=x-6$

188. $\frac{x+1}{x-1}=\frac{2x-5}{2x-7}$

188. $\frac{3x}{x+1}=\frac{3x+1}{x}$

189. Joonestada viis ruutu külje pikkustega vastavalt 4 cm, 4,5 cm, 5 cm, 5,5 cm ja 6 cm ja igaühes diagonaal. Mõõta diagonaalide pikkused ning tulemused kanda tabelisse:

Ruudu diagonaali pikkus cm-tes					
Ruudu külje pikkus cm-tes	4	4,5	5	5,5	6

1. Otsustada, kas ruudu diagonaal on võrdeline ruudu külje pikkusega.
2. Kui ruudu diagonaal ja külje pikkus on võrdelised suurused, siis kui suur on võrdetegur?

189. Arvutada ringi ümbermõõdud, kui diameetri väärtused on vastavalt 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 10 cm, 20 cm ja kanda tulemused tabelisse:

Ringi ümbermõõt cm-tes						
Ringi diameeter cm-tes	2	3	4	5	10	20

1. Kas ringi ümbermõõt on võrdeline läbimõõduga?
2. Kui ringi ümbermõõt on võrdeline ringi läbimõõduga, siis kui suur on proportsionaalsuse koefitsient?

§ 34. Tuletatud võrre.

Antud võrdest $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ saame võrduse põhiomaduste põhjal tuletada uusi nn. tuletatud võrdeid.

1. Kui $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, **siis** $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

Tõepoolest, kui

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

siis liitmisaksioomi põhjal

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

ehk, kirjutades võrduse kummagi poole murruna, saame:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

2. Kui $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, siis $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

Tõestus toimub lahutamisaksioomi rakendades.

3. Kui $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, siis $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Väide järeldub esimesest ja teisest omadusest jagamisaksioomi rakendamisel.

Ülesanded.

190. Kirjutada võrde $\frac{3}{5}=\frac{12}{20}$ järgi tuletatud võrded.

190. Tuletada võrdest $\frac{2,5}{4}=\frac{10}{16}$ uued võrded.

191. Tuletada võrdest $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$ uued võrded.

191. Tuletada võrdest $\frac{5}{m}=\frac{4}{n}$ uued võrded.

Peatükk V.

Võrrandsüsteem.

§ 35. Kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteem.

Mõnede küsimuste lahendamisel on otstarbekohane kasutada mitut tundmatu tähist.

Näide. Kui võimla valgustamiseks osta 2 leeklampi ja 7 hõõglampi, siis tuleb maksta 146 rubla; kui aga osta 1 leeklamp ja 12 hõõglampi, siis tuleb maksta 141 rubla. Kui kallis on leeklamp ja kui kallis on hõõglamp?

Märgime leeklambi hinna tähega x ja hõõglambi hinna tähega y, kusjuures kumbki hind on arvestatud rublades. Ülesande sõnastuse järgi on siis esimesel juhul

$$2x + 7y = 146,$$

teisel juhul

$$x + 12y = 141.$$

Ülesande lahendamine on taandatud nõudele: leida kaks niisugust arvu x ja y, mis rahuldavad ühtaegu nii esimest kui ka teist võrrandit, ehk teisiti öeldes, leida kaks niisugust arvu x ja y, mis rahuldavad võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} 2x + 7y = 146 \\ x + 12y = 141. \end{cases}$$

Nõuet, et tuleb ühtaegu rahuldada k a h t võrrandit, märgime sel viisil, et mõlemad võrrandid võtame loogelise suluga ühte.

Et võrrandeis tundmatud esinevad esimeses astmes, siis on need võrrandid lineaarsed ja süsteem on l i n e a a r - v õ r r a n d - s ü s t e e m.

Üldiselt ütleme nii:

kaks võrrandit

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n, \end{cases}$$

milles a, b, c, d, m ja n on antud arvud ning x ja y otsitavad, moodustavad kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteemi; lahendada see süsteem tähendab leida niisugune x-i ja y väärtuste paar, mis ühtaegu rahuldab nii esimest kui ka teist võrrandit.

Lineaarvõrrand-süsteemi võrrandeid saab alati teisendada niisuguseks, et kummagi võrrandi vasakul poolel on kaks liiget, üks ühe, teine liige teise tundmatuga, ning paremal poolel on kummalgi võrrandil üksainus, otsitavast vaba liige. Niisugust võrrandsüsteemi kuju nimetame võrrandsüsteemi n o r m a a l k u j u k s. Lahendamisel teisendatakse võrrandsüsteem normaalkujuliseks.

1. Lineaarvõrrand-süsteemi lahendamine asetusvõttega.

Olgu lahendada eespool-toodud võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} 2x + 7y = 146 \\ x + 12y = 141. \end{cases}$$

Arutleme nii: kujutleme, et meil on juba õnnestunud leida otsitav y; siis ei ole enam raske leida teist otsitavat x-i. Tõesti, asetame teises võrrandis y asemele tema jaoks leitud väärtuse; pärast tuntud liikmete ülekandmist paremale poolele saame siis

$$x = 141 - 12y.$$

Seega oleks ka x leitud. Saadud x-i väärtus peab aga rahuldama ka esimest võrrandit; see tähendab, et

$$2 \cdot (141 - 12y) + 7y = 146.$$

Nii jõuame võrrandile, milles ainsaks otsitavaks on y. Lahendame selle võrrandi:

$$\begin{aligned} 282 - 24y + 7y &= 146 \\ -24y + 7y &= 146 - 282 \\ -17y &= -136 \\ 17y &= 136 \\ y &= 8. \end{aligned}$$

Asetades selle väärtuse x-i avaldises y asemele, saame

$$x = 141 - 12 \cdot 8 = 141 - 96 = 45.$$

Niisiis

$$\begin{cases} x = 45 \\ y = 8. \end{cases}$$

K o n t r o l l. $2 \cdot 45 + 7 \cdot 8 = 90 + 56 = 146.$
$45 + 12 \cdot 8 = 45 + 96 = 141.$

Leitud lahendid on õiged.

Kokkuvõttes võime anda järgmise eeskirja kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteemi lahendamiseks:

Avaldame ühest võrrandist ühe tundmatu teise kaudu; asetame saadud avaldise teise võrrandisse varemini avaldatud tundmatu asemele; lahendame tekkinud võrrandi ja asetame lahendi varemini avaldatud tundmatu avaldisse.

Käsiteldud võte kannab a s e t u s v õ t t e nime.

Asetusvõte on eriti sobiv kasutada siis, kui võrrandsüsteemis mõni otsitav esineb kordajaga 1; selle otsitava siis avaldamegi teise otsitava kaudu.

N ä i d e. Lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} x + 5y = 35 \\ 3x + 2y = 27. \end{cases}$$

L a h e n d u s. Esimesest võrrandist saame:

$$x = 35 - 5y.$$

Asetades teises võrrandis x-i asemele $35 - 5y$, saame:

$$3(35 - 5y) + 2y = 27$$
$$105 - 15y + 2y = 27$$
$$-15y + 2y = 27 - 105$$
$$-13y = -78$$
$$13y = 78.$$

Järelikult

$$y = 6.$$
$$x = 35 - 5 \cdot 6 = 35 - 30 = 5.$$

Niisiis:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 6. \end{cases}$$

K o n t r o l l. Asetades tulemused võrrandite vasakutesse pooltesse, saame:

$$5 + 5 \cdot 6 = 5 + 30 = 35$$
$$3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 15 + 12 = 27.$$

Näeme, et lahendite paar on õige.

2. Lineaarvõrrand-süsteemi lahendamine liitmisvõttega.

Kui lähemalt vaatleme lineaarvõrrand-süsteemi lahendamiseks antud eeskirja ja selle rakendamist ülalkäsiteldud näitele, siis näeme, et võtte kahe esimese sammu eesmärgiks on tuletada ühest võrrandist teise abil niisugune v õ r r a n d, m i s o l e k s v a b a ü h e s t t u n d m a t u s t.

Toimingut, mille abil kahest kahe tundmatuga võrrandist tuletatakse ühe tundmatuga võrrand, nimetatakse ü h e t u n d m a t u e l i m i n e e r i m i s e k s.

Tundmatu elimineerimist võib teostada mitmel viisil.

Üks lihtsamaid on järgmine: tundmatu y elimineerimiseks süsteemist

$$\begin{cases} 6x + 5y = 205 \\ 4x + 3y = 135 \end{cases}$$

korrutame esimese võrrandi kummagi poole —3-ga, teise võrrandi kummagi poole 5-ga; lühemas kõnekäänus: korrutame esimest võrrandit —3-ga, teist 5-ga; saame süsteemi:

$$\begin{cases} -18x - 15y = -615 \\ 20x + 15y = 675. \end{cases}$$

Liidame võrdsed suurused võrdsetega; liitmisaksioomi põhjal on tulemused võrdsed; seega

$$2x = 60.$$

See võrrand on vaba tundmatust y ja seega on seatud eesmärk saavutatud. Selleks tarvilikud tehted: korrutamine —3-ga, korrutamine 5-ga ja tulemuste liitmine on l u b a t a v a d   o p e r a t s i o o n i d; nende toimingute lubatavust kindlustavad korrutamis- ja liitmisaksioomid.

Edaspidine lahenduskäik on lihtne:

$$x = 30$$
$$4 \cdot 30 + 3y = 135$$
$$3y = 15$$
$$y = 5.$$

Niisiis süsteemi lahendiks on $\begin{cases} x = 30 \\ y = 5. \end{cases}$

Kokkuvõttes võime anda järgmise eeskirja ühe tundmatu elimineerimiseks kahe tundmatuga lineaarvõrrand-süsteemist:

Korrutame kummagi võrrandi kohase teguriga, valides tegurid nii, et saadavais võrrandeis eemaldatava tundmatu ees seisaksid absoluutselt võrdsed, kuid vastupidiste märkidega kordajad; saaduste liitmise tulemus on siis vaba sellest tundmatust.

Ülesanne 1. Lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} 15x - 8y = 29 \\ 3x + 2y = 13. \end{cases}$$

Lahendus.

$$\begin{array}{l|c|l} 15x - 8y = 29 & 1 & 15x - 8y = 29 \\ 3x + 2y = 13 & 4 & 12x + 8y = 52 \\ \hline & & 27x = 81 \\ & & x = 3 \end{array}$$

$$3 \cdot 3 + 2y = 13$$
$$9 + 2y = 13$$
$$2y = 13 - 9 = 4$$
$$y = 2.$$

Kontroll. $15 \cdot 3 - 8 \cdot 2 = 45 - 16 = 29$

$3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 9 + 4 = 13.$

Võrrandsüsteemi lahendiks on:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} 12x + 15y = 8 \\ 16x + 9y = 7. \end{cases}$$

Lahendus.

$$\begin{array}{l|c|l} 12x + 15y = 8 & 4 & 48x + 60y = 32 \\ 16x + 9y = 7 & -3 & -48x - 27y = -21 \\ \hline & & 33y = 11 \\ & & y = \frac{11}{33} = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$12x + 15 \cdot \frac{1}{3} = 8$$
$$12x + 5 = 8$$
$$12x = 8 - 5 = 3$$
$$x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

K o n t r o l l. $12 \cdot \frac{1}{4} + 15 \cdot \frac{1}{3} = 3 + 5 = 8$

$$16 \cdot \frac{1}{4} = 9 \cdot \frac{1}{3} = 4 + 3 = 7.$$

Võrrandsüsteemi lahendiks on: $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Muidugi võib võrrandsüsteemi ka nii lahendada, et mõlemad otsitavad leiame liitmisvõtte abil, elimineerides enne ühe, pärast teise otsitava.

Ü l e s a n n e 3. Lahendada võrrandsüsteem

$$36x + 42y = 95$$
$$2x + 2y = 5.$$

L a h e n d u s.

$$\begin{array}{l|r|r} 36x + 42y = 95 & 1 & 36x + 42y = 95 \\ 2x + 2y = 5 & -18 & -36x - 36y = -90 \\ \hline & & 6y = 5 \\ & & y = \frac{5}{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|r|r} 36x + 42y = 95 & 1 & 36x + 42y = 95 \\ 2x + 2y = 5 & -21 & -42x - 42y = -105 \\ \hline & & -6x = -10 \\ & & x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}. \end{array}$$

K o n t r o l l.

$$36 \cdot \frac{10}{6} + 42 \cdot \frac{5}{6} = 60 + 35 = 95$$

$$2 \cdot \frac{10}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{3} + \frac{5}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

õige.

$$\begin{cases} x = 1\frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

192. $\begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 15 \end{cases}$

192. $\begin{cases} y = 5x \\ 3x + y = 16 \end{cases}$

193. $\begin{cases} x = 4y \\ 2x - 7y = 16 \end{cases}$

193. $\begin{cases} 2x = 3y \\ 10x - y = 21 \end{cases}$

194. $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

194. $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

195. $\begin{cases} x = -y + 3 \\ 5x + 8y = 24 \end{cases}$

195. $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 10x - y = 14 \end{cases}$

196. $\begin{cases} 4x + 5y = 4 \\ x = 4 - \frac{1}{2}y \end{cases}$

196. $\begin{cases} y = 1 - x \\ 5x + 7y = 11 \end{cases}$

197. $\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 20 \end{cases}$

197. $\begin{cases} x + y = 40 \\ y - x = 8 \end{cases}$

198. $\begin{cases} x + 5y = 47 \\ x + y = 15 \end{cases}$

198. $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ x - y = 8 \end{cases}$

199. $\begin{cases} 3x + 8y = 19 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

199. $\begin{cases} 3x + 4y = 85 \\ 5x + 4y = 107 \end{cases}$

200. $\begin{cases} 3x + 8y = 59 \\ 6x + 5y = 107 \end{cases}$

200. $\begin{cases} 15x - 8y = 29 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

201. $\begin{cases} 14x - 9y = 24 \\ 7x - 2y = 17 \end{cases}$

201. $\begin{cases} 2x - 7y = 8 \\ 4y - 9x = 19 \end{cases}$

202. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

202. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$

203. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

203. $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x + 4y = 0 \end{cases}$

204. $\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$

204. $\begin{cases} 7x - 9y = 36 \\ 10x - 11y = 44 \end{cases}$

205. $\begin{cases} 5x + y = 10 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ **206.** $\begin{cases} 4x + 15y = 10 \\ x + 7y = 9 \end{cases}$

205. $\begin{cases} 3x + 4y = -10 \\ x - 7y = 5 \end{cases}$ 206. $\begin{cases} 3x + 5y = -21 \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}$

§ 36. Lahendumatud võrrandsüsteemid.

Ülesanne 1. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 6x + 10y = 15. \end{cases}$$

Lahendus. Elimineerime tundmatu y. Selleks korrutame esimese võrrandi 2-ga, teise —1-ga; saame:

$$\begin{cases} 6x + 10y = 16 \\ -6x - 10y = -15. \end{cases}$$

Liitmisaksioomi põhjal järeldub neist võrdusist, et null peaks olema võrdne ühega, mis on võimatu. Siin on tegemist juhuga, kus süsteemi võrrandid on teineteisele vasturääkivad: esimene nõuab, et $6x + 10y$ oleks 16, teine seevastu, et sama summa oleks 15.

Ülesanne 2. Lahendada süsteem:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 14. \end{cases}$$

Lahendus. Elimineerime tundmatu y. Selleks korrutame esimese võrrandi 2-ga, teise —1-ga; saame:

$$\begin{cases} 4x - 6y = 14 \\ -4x + 6y = -14. \end{cases}$$

Liites need võrrandid saame võrduse

$$0 = 0.$$

See nõue on täidetud olenemata sellest, missuguse väärtuse anname tundmatule y. Seepärast ei saa siit ka mingit y väärtust määrata. Siin on tegemist juhuga, kus kumbki võrrand nõuab üht ja sedasama ehk üks võrrandeist on teise võrrandi t e i s e n d; tõepoolest: kui teise võrrandi jagame 2-ga, saame esimese. Sel juhul ütleme, et mõlemad võrrandid on e k v i v a l e n t s e d. Ü h e s t nõudest ei jätku k a h e tundmatu määramiseks.

Kokkuvõttes:

lineaarvõrrand-süsteem on lahendumatu, kui selle süsteemi võrrandid on teineteisele vasturääkivad või kui üks süsteemi võrrandeist on teise võrrandi teisend.

Ülesanded.

Allpool järgneb rida võrrandsüsteeme. Missuguste süsteemide võrrandid on ekvivalentsed, missuguste süsteemide võrrandid on teineteisele vasturääkivad?

207. $\begin{cases} 3x - 2y = 14 \\ 9x - 6y = 36 \end{cases}$

208. $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x + y = 16 \end{cases}$

207. $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 6x + 8y = 14 \end{cases}$

209. $\begin{cases} 3x + \frac{1}{4}y = 6 \\ 4x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases}$

208. $\begin{cases} 7x - 8 = 4y - 2x \\ 18x - 8y = 16 \end{cases}$

209. $\begin{cases} x + \frac{2}{7}y = 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}y = 1 \end{cases}$

§ 37. Võrrandsüsteemi koostamine.

Ü l e s a n n e 1. Sportlane aerutas jõel pärivoolu, liikudes edasi kiirusega 14 km tunnis, vastuvoolu kiirusega 8 km tunnis. Kui suure kiirusega liiguks sportlane seisvas vees ja kui suur oli jõe voolu kiirus?

L a h e n d u s. Tähistame aerutaja kiiruse seisvas vees tähega x ja vee voolu kiiruse tähega y, kusjuures kiiruse ühikuks on kilomeeter tunnis.

Aerutaja kiirus pärivoolu koosneb kiirusest seisvas vees ja voolu kiirusest, seega

$$x + y = 14.$$

Kiiruse vastuvoolu aerutamisel saame, kui kiirusest seisvas vees lahutame voolu kiiruse, see tähendab, et

$$x - y = 8.$$

Nii oleme koostanud võrrandsüsteemi:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 8. \end{cases}$$

Lahendame selle:

$$\begin{array}{r} x + y = 14 \\ x - y = 8 \\ \hline 2x = 22 \\ x = 11 \end{array}$$

$$11 + y = 14; \qquad y = 14 - 11 = 3.$$

Seega

$$\begin{cases} x = 11 \\ y = \;\; 3. \end{cases}$$

K o n t r o l l. $11 + 3 = 14$
$11 - 3 = 8.$

V a s t u s. Aerutaja liikumise kiirus seisvas vees oli 11 km tunnis; jõe voolu kiirus oli 3 km tunnis.

M ä r k u s. Üldiselt on ülesannete lahendamine kahe tundmatu abil kergem kui ühe tundmatu abil; siiski on mõne ülesande lahendamine ühe tundmatu abil niisama kerge kui tema lahendamine kahe tundmatu abil.

Näitena lahendame ühe tundmatu abil ülesande, mille lahendamisel praegu kasutasime kahte tundmatut.

Tähistame jõe voolu kiiruse tähega v. Kui aerutaja kiirusest pärivoolu lahutame voolu kiiruse, siis saame aerutaja kiiruse seisvas vees. Nii on siis aerutaja kiirus seisvas vees

$$14 - v \text{ km tunnis.}$$

Aerutaja kiiruse seisvas vees saame ka sel teel, et kiirusele vastuvoolu lisame voolu kiiruse, saame

$$8 + v \text{ km tunnis.}$$

Saadud avaldised väljendavad mõlemad aerutaja kiirust seisvas vees, seepärast on nad võrdsed:

$$8 + v = 14 - v.$$

Siit

$$v + v = 14 - 8$$
$$2v = 6$$
$$v = 3 \ldots\ldots \text{ voolu kiirus.}$$

$14 - v = 14 - 3 = 11 \ldots\ldots$ aerutaja kiirus seisvas vees.

Ülesanne 2. Kui ristküliku pikkust suurendada ja laiust vähendada 4 cm võrra, siis väheneb ristküliku pindala 48 cm^2 võrra; kui aga pikkust vähendada 3 cm võrra ja laiust suurendada 6 cm võrra, siis suureneb ristküliku pindala 216 cm^2 võrra. Leida ristküliku pikkus ja laius.

Lahendus. Olgu ristküliku pikkus x cm ja laius y cm. Nüüd saame ristküliku elementide jaoks järgmised avaldised:

pikkus	laius	pindala
x cm	y cm	xy cm^2
$x + 4$ „	$y - 4$ „	$xy - 48$ „
$x - 3$ „	$y + 6$ „	$xy + 216$ „

Et pikkuse ja laiuse korrutis annab pindala, siis võime kirjutada võrrandsüsteemi:

$$\begin{cases} (x+4)(y-4) = xy - 48 \\ (x-3)(y+6) = xy + 216. \end{cases}$$

Lihtsustame esiteks esimese, siis teise võrrandi:

$$(x+4)(y-4) = xy - 48$$
$$xy - 4x + 4y - 16 = xy - 48$$
$$-4x + 4y = -48 + 16$$
$$-4x + 4y = -32$$
$$x - y = 8$$
$$(x-3)(y+6) = xy + 216$$
$$xy + 6x - 3y - 18 = xy + 216$$
$$6x - 3y = 216 + 18$$
$$6x - 3y = 234$$
$$2x - y = 78.$$

Nüüd lahendame võrrandsüsteemi asetusvõttega:

$$\begin{cases} x - y = 8 \\ 2x - y = 78 \end{cases}$$
$$x = 8 + y$$
$$2(8+y) - y = 78$$
$$y = 78 - 16$$
$$y = 62$$
$$x = 8 + 62$$
$$x = 70.$$

K o n t r o l l. Ristküliku pindala on $62 \cdot 70 = 4340$ (cm^2). Külgede pikkused ja pindala suurus esimesel juhul:

$$70 + 4 = 74; \quad 62 - 4 = 58;$$

pindala .... $74 \cdot 58 = 4292$

$$4340 - 4292 = 48.$$

Teisel juhul:

$$70 - 3 = 67; \quad 62 + 6 = 68;$$

pindala ... $67 \cdot 68 = 4556$

$$4556 - 4340 = 216.$$

V a s t u s. Ristküliku pikkus on 70 cm ja laius on 62 cm.

Kokkuvõttes toimub lineaarvõrrand-süsteemi koostamine järgmiselt:

märgime otsitavad kohaselt valitud tähtedega; avaldame nende tähtede ja ülesande andmete abil seosed, mis ülesandes on väljendatud sõnadega; saadud võrrandeid teisendame nii, et süsteem esineks kujul

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n. \end{cases}$$

L i n e a a r v õ r r a n d - s ü s t e e m i a b i l l a h e n d u v a i d ü l e s a n d e i d.

210. Kahe arvu summa on 183, nende arvude vahe on 9. Leida need arvud.

210. Leida kaks niisugust arvu, mille summa on 63 ja vahe on 11.

211. Kahe arvu summa on 44. Suurema kahekordse ja väiksema kolmekordse summa on 109. Leida need arvud.

211. Kahe arvu summa on 45. Kui suurendaksime ühte neist 2 korda ja teist 5 korda, siis oleks nende summa 165. Mis arvud need on?

212. Lennuk lendas pärituult kiirusega 165 km tunnis, vastutuult kiirusega 115 km tunnis. Määrata lennuki kiirus vaikse ilmaga. Missuguse kiirusega puhus tuul?

212. Aerutaja liikus jõel pärivoolu kiirusega 15 km tunnis ja vastuvoolu kiirusega 10 km tunnis. Arvutada aerutaja liikumise kiirus seisvas vees ja jõe voolu kiirus.

213. Klassis on 32 õpilase jaoks 25 pinki, kaheistmelisi ja üheistmelisi; vabu kohti pole. Kui palju on kaheistmelisi ja kui palju üheistmelisi pinke?

213. Rahakotis on 16 münti, 20- ja 5-kopikalised, kokku 185 kopikat. Mitu 20- ja 5-kopikalist on rahakotis?

214. Väikeloomade laudas on kodujäneseid ja kanu. Kui palju on kodujäneseid ja kui palju kanu, kui päid on 24 ja jalgu 60? (Vanast hiina ülesannetekogust.)

214. Karja-aias on kitsed ja haned, neil on kokku 15 pead ja 38 jalga. Mitu kitse ja mitu hane on karja-aias?

215. Koolipeol on üheks lõbustuseks märkilaskmine. Igal märgitabamisel maksab kassa laskjale 20 kopikat, igal möödalaskmisel maksab laskja 50 kopikat. Pärast 12-t lasku võlgnes laskja kassale 3,90 rubla. Mitu korda tabas ta märki ja mitu korda laskis mööda?

215. Turul osteti kahelt müüjalt mune, ühelt 5 rublaga paar, teiselt 4 rublaga paar, kokku 13 paari koguhinnaga 58 rubla. Mitu paari mune osteti ühelt, mitu paari teiselt müüjalt?

216. Õe ja venna vanus on kokku 50 aastat. 10 aastat tagasi oli vend 2 korda nii vana kui õde. Kui vanad on nad praegu?

216. Isa ja ema vanus on kokku 87 aastat. 15 aasta eest oli isa 2 korda vanem kui ema. Arvutada isa ja ema vanus.

217. Kahekohalise arvu ristsumma on 11. Kui numbrite järjekorda muuta, tekib arv, mis on eelmisest 63 võrra väiksem. Mis arv see on?

217. Kahekohalise arvu ristsumma on 12. Kui selle arvu numbrid vahetada, siis saame arvu, mis eelmisest on 18 võrra suurem. Leida see arv.

218. Mitu kg peab võtma 1. sorti kohvi hinnaga 31,5 rubla kg ja 2. sorti kohvi hinnaga 30,0 rubla kg, et saada 60 kg segu hinnaga 30,5 rubla kg?

218. Kohalikud kirjad margistatakse 15-kopikalise ja kauged kirjad 30-kopikalise postmargiga. Asutis saatis välja 15 kirja, milledele tuli postmarke panna 4,05 rubla eest. Mitu kohalikku ja mitu kauget kirja saatis asutis?

219. Sulepea on 2 kop. kallim kui pliiats. Ühe rubla eest saab osta 5 sulepead ja 4 pliiatsit. Kui kallis on sulepea ja kui kallis on pliiats?

219. Tütarlaps kudus 8 paari sokke ja 6 paari kindaid, milleks kulus kokku 2,1 kg lõnga. Kindapaarisse läks 70 grammi lõnga vähem kui sokipaarisse. Kui palju lõnga kulus sokkidesse?

220. 12 pirni ja 15 õuna maksavad 36,0 rubla, 15 pirni ja 12 õuna maksavad 36,9 rubla. Leida pirni hind ja õuna hind.

220. Ema saatis tütre turule, et ta ostaks 5 kimpu rediseid ja 4 kimpu murulauku, andes selleks kaasa 14 rubla. Eksikombel ostis tütar 4 kimpu rediseid ja 5 kimpu murulauku, saades kaasavõetud rahast 1 rubla tagasi. Palju maksis kimp rediseid ja palju kimp murulauku?

221. Klassi õpilased ostsid ühiselt riigilaenu pileteid. Loosimisel langes ühele piletile võit. Võidu jaotamisel tuleb 10 rubla puudu, kui igale õpilasele määrata 15 rubla, ja jääb 24 rubla üle, kui iga õpilane saab 14 rubla. Mitu õpilast on klassis ja kui suur on võidusumma?

221. Spordiseltsi aastaaruanne näitab puudujääki, mis liikmete poolt ühiselt tasutakse. Kui iga liige annab selleks 2 rubla, jääb ikka veel 7 rubla puudu; kui iga liige annab 2,5 rubla, jääb 5 rubla üle. Kui suur on puudujääk?

222. 5 kg leiba ja 2 kg liha maksab 21,25 rubla, aga 2 kg leiba ja 3 kg liha maksab 28,30 rubla. Kui palju maksab üks kg leiba ja üks kg liha?

222. 3 hõõglambi ja 8 meetri juhtmetraadi eest maksti 11,50 rubla; 5 hõõglambi ja 12 meetri juhtmetraadi eest maksti 18,50 rubla. Leida hõõglambi ja juhtmetraadi meetri hind.

223. Kolme aasta pärast ema on 3 korda vanem tütrest, seitsme aasta eest ema oli 7 korda vanem tütrest. Kui vana on ema ja kui vana on tütar?

223. Õpilane vastab küsimusele, kui vana ta on, lausega: „Kuus aastat tagasi oli isa minust 3 korda vanem, kuue

aasta pärast on ta minust 1,8 korda vanem.“ Kui vana on õpilane?

224. Kui ristkülikukujulise aia pikkust vähendada 10 m võrra ja laiust suurendada 5 m võrra, siis aia pindala väheneb 350 m^2 võrra. Kui aga laius jätta muutmata ja pikkust suurendada 10 m võrra, siis aia pindala suureneb 800 m^2 võrra. Leida aia pikkus ja laius.

224. Elamu põhiplaanil on ristküliku kuju. Kui maja pikkust vähendada 1 m võrra ja laiust suurendada 1 m võrra, siis elamispindala suureneb 3 m^2 võrra; kui pikkust aga suurendada 1 m võrra ja laiust samapalju vähendada, siis elamispindala väheneb 5 m^2 võrra. Määrata elamu projektis ettenähtud pikkus ja laius.

225. Üks mees lausub teisele: „Anna mulle 1 kopikas, siis on mul niipalju, kui sinul üle jääb.“ Teine vastab: „Anna sina mulle 1 kopikas, siis mul on kaks korda niipalju, kui sinul üle jääb.“ Kui palju raha on kummalgi?

225. Poisil on 2 korda rohkem õdesid kui vendi, igal õel aga on niisama palju vendi kui õdesid. Mitu last on perekonnas?

Peatükk VI.

Ruutjuur.

§ 38. Arvu ruutjuur.

Ruudu pindala leidmisel tuleb arvutada ruudu külje pikkuse ruut. Kui ruudu külg on näiteks 4 cm, siis on ruudu pindala 16 cm^2, sest

$$4^2 = 16.$$

Ümberpöördult, kui ruudu pindala on antud ja tuleb arvutada ruudu külg, siis peame leidma niisuguse arvu, mille ruut võrdub antud pindala väljendava arvuga.

N ä i d e. Ruudu pindala on 64 cm^2. Kui suur on ruudu külg? Vastuse saamiseks peame leidma arvu, mille ruut on 64. See arv on 8, sest

$$8^2 = 64.$$

Seega ruudu külje pikkus on 8 cm.

Arvu 8 nimetame 64 ruutjuureks ja kirjutame seda niisuguse sümboliga:

$$\sqrt{64} = 8.$$

Arvu, mille ruut võrdub antud arvuga, nimetame antud arvu ruutjuureks.

Küsimuse lahendamisel, kui suur on 16 ruutjuur, peame leidma arvu, mille ruut on 16.

Nõutud arv on 4, seega

$$\sqrt{16} = 4.$$

Samamärgiliste arvude korrutamise juhise põhjal on

$$(-4) \cdot (-4) = 16$$

ehk astendaja abil kirjutades

$$(-4)^2 = 16.$$

Sellepärast on õige ka võrdus

$$\sqrt{16} = -4.$$

Nii kehtivad mõlemad võrdused:

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{ja} \quad \sqrt{25} = -5.$$

Sellest näeme, et igal positiivsel arvul on kaks ruutjuurt, mis oma absoluutväärtuste poolest on võrdsed, kuid vastupidiste märkidega; seega arvu ruutjuured on teineteise vastasarvud. Sageli kirjutatakse arvu mõlemad ruutjuured ühe võrduse abil:

$$\sqrt{25} = \pm 5.$$

Kui ülesande tingimused teisiti ei nõua, siis ruutjuure leidmisel harilikult arvutatakse ainult tema absoluutväärtus; ka ruutjuurte tabelites antakse ruutjuurte absoluutväärtused.

Ülesanded.

226. Missugused on arvude

6, 7, 8, 9, 10 ruudud?

226. Täita järgmine tabel:

a	5	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a^2											

227. Kui suured on arvude

36, 49, 64, 81, 100 ruutjuured?

227. Milliste arvude ruudud on

4; 9; 25; 100; 225?

Leida proovimise teel järgmised ruutjuured:

228. $\sqrt{121}$ $\sqrt{196}$ $\sqrt{289}$

228. $\sqrt{144}$ $\sqrt{225}$ $\sqrt{324}$

229. Täita alljärgneva tabeli lüngad, leides puuduvad arvud tarbe korral proovimise teel:

a	24			41	80			76		87
a^2		441	529			841	900		729	

Leida arvutamise teel, mitu korda on suurem

230. 30 ruut 3 ruudust

230. 40 „ 4 „

231. 100 „ 1 „

231. 200 „ 2 „

Leida, mitu korda on väiksem

232. 0,8 ruut 8 ruudust

232. 1,5 „ 15 „

233. 0,86 „ 86 „

233. 0,92 „ 92 „

Eelmiste ülesannete lahendamisel näeme, et

kui suurendame arvu 10, 100, . . . korda, siis arvu ruut suureneb 100, 10 000, . . . korda;

kui vähendame arvu 10, 100, . . . korda, siis tema ruut väheneb 100, 10 000, . . . korda.

Arvutades tarbe korral ruutjuured proovimise teel, leida, mitu korda on suurem

234.	400	ruutjuur	4	ruutjuurest
234.	900	„	9	„
235.	640 000	„	64	„
235.	490 000	“	49	„

Arvutades vajaduse korral ruutjuured proovimise teel, leida, mitu korda on väiksem

236.	16	ruutjuur	1600	ruutjuurest
236.	9	„	900	„
237.	0,09	„	900	„
237.	1	„	10 000	„

Kahe viimase ülesande lahendamisel näeme, et

kui suurendame arvu 100, 10 000, ... korda, siis selle arvu ruutjuur suureneb vastavalt 10, 100, ... korda;

kui arvu vähendame 100, 10 000, ... korda, siis tema ruutjuur väheneb 10, 100, ... korda.

Viimati leitud tõsiasju, nagu edaspidi näeme, saame kasutada ruutjuurte määramisel tabeli abil.

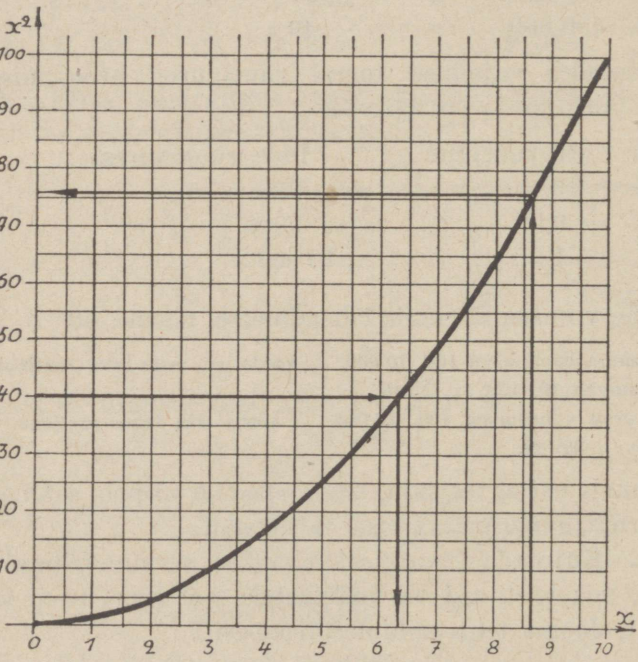
238. Kujutada graafiliselt avaldise x^2 numbrilised väärtused, mis vastavad x-i väärtustele 0-st kuni 10-ni iga 0,5 tagant. Joonis teha millimeeterpaberil!

§ 39. Ruutjuure leidmine graafiku abil.

Mõnikord muutub ruutjuure leidmine proovimise teel aegaviitvaks. Kui näiteks ruudu pindala on 40 cm², siis külje pikkuse leidmiseks hakkame otsima arvu, mille ruut on 40. Otsitav arv on seekord 6 ja 7 vahel, sest $6^2 = 36$ ja $7^2 = 49$, võiksime öelda isegi, et otsitav arv on 6-le lähemal kui 7-le, sest 40 on 36-le lähemal kui 49-le. Igatahes on otsitav arv 6 mingi murdosaga.

Proovimise asemel võime kasutada graafikut, mille valmistasime ülesande 207 lahendamisel. Joonisel 1 on see graafik veel kord esitatud.

Rõhtsal teljel on kujutatud arvu x väärtused, püstsihis x^2 väärtused.



Joonis 1.

Joonisel nooled osutavad, kuidas leiame 8,7 ruudu; otsime x-teljel arvu 8,7, sealt liigume üles kuni jõuame kõverjoone punktini, sellest kõverjoone punktist liigume rõhtjoont mööda kuni püsttelje punktini, viimati leitud punktile vastab arv 76. Seega $8{,}7^2 = 76$.

Kui tahame leida arvu, mille ruut on 40, teisiti öeldes, kui tahame leida 40 ruutjuurt, siis algame oma teekonda ruutude telje, s. o. püsttelje sellest punktist, mis kujutab arvu 40. Niiviisi jõuame rõhtsa telje punktini, mis vastab arvule 6,3. Seega

$$\sqrt{40} = 6,3.$$

Leitud arv 6,3 on 40 ruutjuure ligikaudne väärtus.

Ülesanded.

Leida graafikust järgmiste arvude ruudud:

239. 3,3; 4,5; 5,2; 6,6; 8,4;
239. 2,7; 3,8; 4,6; 7,1; 9,4.

Leida graafikust järgmised ruutjuured:

240. $\sqrt{20}$; $\sqrt{30}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{62}$;
240. $\sqrt{90}$; $\sqrt{85}$; $\sqrt{79}$; $\sqrt{68}$; $\sqrt{10}$.

Kui suur on ruudu pindala, kui tema külg on

241. 3,4 cm; 4,8 cm; 5,4 cm; 5,8 cm; 8,2 cm;
241. 3,6 cm; 4,9 cm; 5,5 cm; 6,4 cm; 9,5 cm.

Kui suur on ruudu külg, kui tema pindala on

242. 18 cm^2; 22 cm^2; 50 cm^2; 72 cm^2; 92 cm^2;
242. 98 cm^2; 82 cm^2; 60 cm^2; 55 cm^2; 32 cm^2.

§ 40. Ruutjuure leidmine tabeli abil.

Kui on tarvis ruutjuuri leida täpsemalt, kui me graafiku abil leiame, siis võime kasutada ruutjuurte tabelit.

Selle õpiku lõpus on ruutjuurte tabel, millest leiame iga kolmest numbrist koosneva arvu ruutjuure, s. o. ruutjuured arvudest 1,00 kuni 99,9. Tabelis antud ruutjuured koosnevad samuti kolmest numbrist, see tähendab, et tabelist leiame ruutjuured kolme kohaga.

Ruumi kokkuhoiu pärast on tabel nii koostatud, et selle arvu, mille ruutjuurt otsime, kaks esimest numbrit on lehekülje vasakul serval, seega tabeli esimeses veerus, juuritava arvu kolmas number aga tuleb võtta tabeli esimesest rõhtsast reast ülal.

Otsitava ruutjuure leiame sealt, kus ristuvad see rida ja see veerg, milles on antud arvu numbrid. Selgituseks toome siin selle tabeli alguse ja ühe tüki tabeli keskelt.

	0	1	2	3	4	$\boxed{5}$	6	7	8	9
1,0	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04
1,1	1,05	1.05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09
$\boxed{1,2}$	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	$\boxed{1.12}$	1.12	1,13	1,13	1,14
16,	4,00	4,01	4,02	4,04	4,05	4,06	4,07	4,09	4,10	4,11
17,	4,12	4,14	4,15	4,16	4,17	4,18	4,20	4.21	4,22	4,23

N ä i d e. Leiame tabelist $\sqrt{1,25}$.

Antud arvu 1,25 kaks esimest numbrit, s. o. 1,2 on tabelis esimeses veerus, ülalt lugedes k o l m a n d a s r e a s; antud arvu kolmas number, s. o. 5, on tabelis ülemises reas, ta seisab seal s e i t s m e n d a s v e e r u s. Kolmanda rea ja seitsmenda veeru ristumise kohal leiame otsitava ruutjuure 1,12, niisiis

$$\sqrt{1,25} = 1,12.$$

Samal viisil leiame, et

$$\sqrt{16} = \sqrt{16,0} = 4,00$$

ja

$$\sqrt{17,8} = 4,22.$$

Ü l e s a n n e. Ringi pindala on 164,2 cm². Kui suur on selle ringi läbimõõt?

L a h e n d u s.

$$\pi r^2 = 164{,}2$$

$$r^2 = \frac{164{,}2}{\pi} = \frac{164{,}2}{3{,}14} \approx 52{,}3$$

$$r = \sqrt{52{,}3} = 7{,}23$$

$$d = 2r = 2 \cdot 7{,}23 = 14{,}46 \approx 14{,}5.$$

V a s t u s. Ringi läbimõõt on 14,5 cm.

Ülesanded.

Leida tabeli abil järgmiste arvude ruutjuured:

243. 1,96; 2,56; 3,24; 4,41; 5,29.
243. 1,69; 1,21; 0,64; 0,49; 6,76.

244. 12; 15; 19; 37; 44.
244. 47; 54; 59; 73; 87.

245. 5,2; 8,4; 9,5; 12,5; 22,4.
245. 36,8; 42,5; 56,7; 84,2; 95,5.

Arvutada ruudu külje pikkus, kui ruudu pindala on

246. 5,4 cm^2; 8,6 cm^2; 9,8 cm^2; 14,5 cm^2; 16,8 cm^2.
246. 20,5 cm^2; 48,5 cm^2; 59,6 cm^2; 62,4 cm^2; 84,8 cm^2.

247. Kolmnurga alus on 4,2 cm ja kõrgus on 6 cm. Kui pikk on selle kolmnurgaga pindvõrdse ruudu külg?

247. Trapetsi alused on $a = 8{,}4$ cm, $b = 5{,}8$ cm ja kõrgus $h = 6$ cm. Arvutada selle trapetsiga pindvõrdse ruudu ümbermõõt.

Meie tabelis on antud ruutjuured arvudest 1,00 kuni 99,9. Küsime nüüd, kas see tabel võimaldab leida ruutjuurt arvust, mis on suurem kui 100 või mis on väiksem kui 1. Võimaldab küll.

Ühest väiksemate ja sajast suuremate arvude ruutjuurte määramisel rakendame meile juba tuttavat arvu omadust, et kui arvu suurendame või vähendame 100 korda, siis tema ruutjuur vastavalt suureneb või väheneb 10 korda; kui arvu suurendame või vähendame 10 000 korda, siis tema ruutjuur suureneb või väheneb 100 korda, jne., teisiti öeldes, kui arvus nihutame koma 2, 4, 6, jne. koha võrra, siis selle arvu ruutjuures koma nihkub samas suunas 1, 2, 3, jne. koha võrra.

Niisiis, kui tahame leida ühest väiksema arvu ruutjuurt, siis nihutame koma paremale poole kas 2 või 4 või 6 või jne. kohta, nii et saame arvu, mis oma suuruse poolest on ühe ja saja vahel. Sellest arvust leiame tabeli abil ruutjuure. Leitud ruutjuur on aga antud arvu ruutjuurest kas 10 või 100 või jne. korda suurem, olenedes sellest, mitme koha võrra nihutasime koma antud arvus. Et saada õige ruutjuur, selleks peame nüüd tabelis leitud ruutjuures koma nihutama vasakule poole järgmiselt:

Kui arvus nihutasime koma 2 koha võrra, siis ruutjuures nihutame koma 1 koha võrra, kui arvus koma nihkus 4 koha võrra, siis ruutjuures tuleb koma nihutada 2 koha võrra, jne.

Et koma esialgse asendi suhtes ei tekiks segadust, siis uued, abiasendid võime märkida komaga ülal; lõpliku, õige asendi ruutjuures märgime jälle all.

N ä i d e. Leiame ruutjuure arvust 0,0169. Nihutades koma 2 kohta paremale, saame 0,01'69; selle arvu ruutjuur on tabelis antud: see on 1'3. Saadud ruutjuur on õigest ruutjuurest 10 korda suurem, sellepärast peame temas koma nihutama 1 koha võrra vasakule, siis saame 0,13.

Niisiis

$$\sqrt{0{,}0169} = 0{,}13.$$

Leiame samal viisil $\sqrt{0{,}00072}$.

$$\sqrt{0{,}00'07'2} \ldots 2'68;$$

$$\sqrt{0{,}00072} = 0{,}0268.$$

Kui antud arv on sajast suurem, siis toimime vastupidi: esiteks nihutame koma vasakule 2, 4, 6, ... kohta, kuni saame arvu, mis on ühe ja saja vahel, leiame sellest ruutjuure; leitud ruutjuures nihutame koma vastavalt paremale 1, 2, 3, ... kohta.

Näide. Leida $\sqrt{841}$.

$$\sqrt{8'41} = \dot{2}'90; \qquad \sqrt{841} = 29{,}0 = 29.$$

Kui antud juuritava arvu koostises on rohkem kui kolm numbrit, siis ümardame ta nii, et tema koostisse ei jää üle kolme nullist erineva numbri, ja leiame ümardatud arvu ruutjuure.

Näited. 1. Leida $\sqrt{7056}$.

$$\sqrt{7056} \approx \sqrt{7060}; \qquad \sqrt{70'6} = 8'4;$$

$$\sqrt{7056} = 84.$$

2. Leida $\sqrt{0{,}2704}$.

$$\sqrt{0{,}2704} \approx \sqrt{0{,}270};$$

$$\sqrt{27'0} = 5'2;$$

$$\sqrt{0{,}2704} = 0{,}52.$$

Ülesanded.

Leida tabeli abil järgmiste arvude ruutjuured:

248.	0,441	0,676	0,256
248.	0,841	0,324	0,289
249.	0,0196	0,0049	0,0036
249.	0,0042	0,0007	0,0006
250.	62 500	78 400	123 000
250.	3 600	2 500	4 900
251.	336 000	24 000	12 000
251.	725 000	186 000	491 000

Määrata tabeli abil järgmiste arvude ruutjuured:

252. 385 12 50,4

252. 4234 560 38,24

253. 576,9 0,2859 4876

253. 0,5842 43,66 9,428

254. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala on 120 cm². Kui pikk on selle kolmnurga kaatet?

254. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala on 210 cm². Kui pikk on selle kolmnurga kaatet?

255. Ringi pindala on 50,24 m². Kui suur on raadius?

255. Ringi pindala on 78,5 m². Arvutada raadius.

256. Ringi pindala on 314 cm². Arvutada ümbermõõt.

256. Ringi pindala on 12,56 dm². Arvutada läbimõõt.

257. Ringi raadius on 5 cm. Leida niisuguse ruudu külg, mille pindala on võrdne ringi pindalaga.

257. Ringi diameeter on 18 cm. Leida niisuguse ruudu külg, mille pindala on võrdne ringi pindalaga.

258. Ruudu külg on 10 cm. Kui suur on selle ruuduga pindvõrdse ringi raadius?

258. Ruudu külg on 8 cm. Kui suur on selle ruuduga pindvõrdse ringi raadius?

259. Joonestada vabalt ring ja sellega pindvõrdne ruut.

259. Joonestada vabalt võetud külje pikkusega ruut ja selle ruuduga pindvõrdne ring.

260. Täita lüngad järgmises tabelis:

a			17			24		96		
a^2	1600			7056			9025		7744	
$\sqrt{a}$		8			2					3

§ 41. Ruutjuure leidmine algoritmi abil.

Mõnikord on tarvis ruutjuurt leida, kui tabelit pole käepärast; mõnikord jälle on tarvis ruutjuur leida suurema täpsusega, kui seda võimaldab kasutada olev tabel, sellepärast tuleb õppida ruutjuure leidmist ka arvutamise teel. Meie tutvume nüüd ruutjuure arvutamisvõttega, mida nimetatakse ruutjuure a l g o r i t m i k s.

Ruutjuure arvutamisel algoritmi abil rühmitatakse antud arvu numbrid paarikaupa rühmadeks, alates koma kohalt ja suundudes arvu täisosa numbrite rühmitamisel paremalt vasakule; igasse rühma jääb kaks numbrit, kusjuures viimasesse vasakpoolsesse rühma jääb mõnikord üks number; arvu murdosa numbrite rühmitamisel suundutakse koma kohalt paremale poole; kui siin viimasesse parempoolsesse rühma jääb üks number, siis täiendatakse see nulliga kahenumbriliseks. Näitena rühmitame sel kombel arvud 361, 326,5249 ja 0,00173:

$$3'61;$$
$$3'26{,}52'49;$$
$$0{,}00'17'30.$$

Iga rühm annab otsitavas ruutjuures ühe numbri. Ruutjuures tuleb koma asetada nii, et komast vasakule jääb niimitu numbrit, kuimitu numbrirühma on komast vasakul pool antud arvus. Kui näiteks arvutame ruutjuurt arvust $3'26{,}52'49$, siis tuleb koma leitud ruutjuures panna k a h e esimese numbri järele, sest antud arvus on komast vasakul pool k a k s numbrirühma.

Nüüd vaatame, kuidas leitakse otsitava ruutjuure numbrid. Arvutame näitena $\sqrt{1024}$ ehk rühmitatult $\sqrt{10'24}$

Otsitava ruutjuure esimese numbri leidmiseks võrreldakse juuritava arvu esimest numbrirühma ühekohaliste täisarvude (s. o. arvude 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) ruutudega, need on 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 ja 81. Suurim täisarv, mille ruut mahub antud arvu esimesse numbrirühma, ongi ruutjuure esimeseks numbriks.

Teiste sõnadega öeldes, leiame antud arvu esimese numbrirühma suurima täisarvulise ruutjuure. Antud juhul esimene numbrirühm on 10, sellest täisarvuline suurim ruutjuur on 3, sest kolme ruut on 9 ja 9 on suurim ruutarv, mis mahub numbrirühmasse 10. Niisiis ruutjuure esimene number on 3.

Ruutjuure teise numbri saamiseks toimime järgmiselt. Esimese numbri ruudu, arvu 9, lahutame antud arvu esimesest rühmast, saame arvu 1. Selle arvu järele kirjutame antud arvu teise numbrirühma, saame *esimese jäägi* 124. Ruutjuure esimese numbri liidame tema endaga, või teiste sõnadega, teeme ta kahekordseks, saame 6. Nüüd leiame järgmise jagatise: esimeses jäägis, s. o. arvus 124, jätame ära viimase numbri, sel teel saadud arvu 12 jagame ruutjuure esimese numbri kahekordsega, saame 2. Kas leitud arv 2 sobib ruutjuure teiseks numbriks või mitte, seda proovitakse nii, et see arvatav ruutjuure teine number, praegusel juhul 2, kirjutatakse esimese numbri kahekordse juurde, nii tekkinud arv 62 korrutatakse selle sama teise numbriga, s. o. arvuga 2.

Nii saadud korrutis kirjutatakse esimese jäägi alla. Nimetame seda korrutist *esimeseks osakorrutiseks*.

Kui esimene osakorrutis on võrdne esimese jäägiga või on sellest väiksem, siis leitud teine number on õige. Arvutus kirjutatakse nii, nagu allpool näha:

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{10'24} = 32 \\ & \;\;9 \\ \hline 62 & 124 \\ 2 & 124 \\ \hline \end{array}$$

Niisiis

$$\sqrt{1024} = 32.$$

Kui esimesest jäägist viimase numbri ärajätmise teel saadud arvu jagatis ruutjuure esimese numbri kahekordsega tuleb 10 või veelgi suurem arv, siis jätame need jagatised proovimiselt kohe kõrvale, sest me otsime ju ruutjuure teist numbrit, number aga saab olla ainult ühekohaline; sel korral hakkame proovima 10-st väiksemaid arve, 9, 8,... jne.

Näide.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{3'61} = 19 \\
 & 1 \\
\hline
29 & 261 \\
9 & 261 \\
\hline
\end{array}
$$

Viimases näites arvu 26 jagamisel arvuga 2 (mis on ruutjuure esimese numbri kahekordne) saame 13. Proovides nüüd arvu 9, selgub, et see sobibki.

Kui proovimisel osakorrutis tuleb suurem kui jääk ja kui see proovimine ei toimunud peast, siis paneme selle arvutuse sulgudesse, kirjutame jäägi uuesti ja hakkame proovima väiksemat arvu.

Kui otsitavas ruutjuures on kolm numbrit või rohkem, siis kolmanda numbri leiame järgmiselt.

Teise numbri proovimisel kirjutasime esimese numbri kahekordsest ja teisest numbrist koosneva arvu alla (püstkriipsust vasakul pool) teise numbri; nüüd liidame need püstkriipsust vasakul pool olevad teineteise alla kirjutatud arvud. Esimese osakorrutise lahutame esimesest jäägist, saadud vahele kirjutame juurde antud arvu kolmanda numbrirühma, saame niiviisi *teise jäägi*. Teisest jäägist jätame jälle ära viimase numbri ja nii saadud arvu jagame püstkriipsust vasakul pool oleva arvuga. Kas saadud jagatis sobib ruutjuure kolmandaks numbriks või mitte, seda proovime täpselt samal viisil, nagu proovisime teist numbrit, arvutades nimelt *teise osakorrutise* ja võrreldes seda teise jäägiga. Samal viisil leiame 4. numbri, 5. numbri jne. Kui jäägist viimase numbri ärajätmise teel saadud arv on väiksem kui püstkriipsust vasakul pool seisev arv, siis on jagatis väiksem kui 1, sel korral otsitav ruutjuure number on 0. Sel korral kirjutamegi otsitava numbri kohale ruutjuures 0, nulli kirjutame ka vasakul pool püstkriipsu oleva arvu lõppu, jäägile paremal pool püstkriipsu kirjutame juurde antud arvu järgmise numbrirühma ja jätkame ruutjuure järgmise numbri otsimist eespool kirjeldatud viisil.

N ä i d e.

$$\text{Leida} \quad \sqrt{326{,}5249}.$$

$$\sqrt{3'26{,}52'49} = 18{,}07$$

$$\begin{array}{r|rr}
 & 1 & \\
\hline
\left(\begin{array}{r} 29 \\ 9 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} 226 \\ 261 \end{array}\right) & \\
\hline
28 & 226 & \\
8 & 224 & \\
\hline
3607 & & 25249 \\
7 & & 25249
\end{array}$$

Seega

$$\sqrt{326{,}5249} = 18{,}07.$$

Selles näites esimesest jäägist, 226-st, viimase numbri ärajätmisel saame arvu 22, jagades seda esimese numbri kahekordsega, s. o. arvuga 2, saame 11; et otsitav number peab olema ühekohaline, siis proovime arvu 9. Selgub, et see annab esimese osakorrutisena arvu 261, mis esimesest jäägist 226-st on suurem; see tähendab, et 9 on liiga suur; paneme selle proovimisarvutuse sulgudesse, kirjutame esimese jäägi 226 uuesti ning proovime arvu 8; see sobib.

Kolmanda numbri leidmiseks peaksime jagama 25 arvuga

36. See jagatis on väiksem kui 1, sellepärast on kolmas number 0. Kirjutame nulli 36 juurde; teise jäägi, 252 juurde kirjutame antud arvu järgmise, neljanda numbrirühma ja hakkame otsima neljandat numbrit; 2524 jagamisel 360-ga leiame 7, mis ongi, nagu proovimine näitab, ruutjuure neljas number.

Kui antud arvust ei saa leida täpset ruutjuurt ja etteantud täpsus nõuab rohkem kohti ruutjuures, kui antud arvus on numbrirühmi, siis puuduvad rühmad moodustame nullidest, igas rühmas 2 nulli.

Kui etteantud täpsus nõuab näiteks nelja numbri arvutamist, siis selleks, et kindel olla, kas leitud neljas number on õige või peab ehk võtma ühe võrra suurema numbri, peame arvutama veel viienda numbri: kui viies number on 5-st väiksem, siis jääb kehtima varem leitud neljas number; kui viies number on 5 või 5-st suurem, siis leitud neljandale numbrile lisame 1.

N ä i d e 1. Arvutada $\sqrt{0{,}00173}$ täpsusega 0,0001.

$$\sqrt{0{,}00'17'30} = 0{,}04159 \approx 0{,}0416$$

	16
81	130
1	81
825	4900
5	4125
8309	77500
9	74871

V a s t u s. $\sqrt{0{,}00173} = 0{,}0416.$

Kas ligikaudse ruutjuure väärtuse arvutamisel viimane leitud number jääb kehtima või tuleb teda 1 võrra suurendada, seda saab otsustada ka seni leitud juure väärtuse numbrite ja viimase jäägi numbrite võrdlemise abil. Vaatame nimelt, kumb nendest arvudest, mis need numbrid moodustavad, on suurem. Kui jäägi numbritest moodustatud arv on suurem arvust, mille moodustavad leitud juure numbrid, siis tuleb juure viimast leitud numbrit ühe võrra suurendada. Kui aga jäägi numbritest moodustatud arv on väiksem juure numbritest koosnevast arvust, siis jääb kehtima viimane leitud juure number. Meie viimases arvutuses neljas number pärast koma tuli 5; jääk, mis selle numbri arvutamisel saime, on 775; seni leitud juure numbrid moodustavad arvu 415; nüüd näeme, et $775 > 415$, sellepärast tuleb juure väärtuseks võtta 0,0416.

N ä i d e 2. Arvutada $\sqrt{66,3}$ täpsusega 0,01.

$$\sqrt{66,30} = 8,14$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 64 \\
\hline
161 & 230 \\
1 & 161 \\
\hline
1624 & 6900 \\
4 & 6496 \\
\hline
 & 404 < 814
\end{array}$$

Siin on viimase jäägi numbritest moodustatud arv 404 väiksem kui leitud juure numbritest moodustatud arv 814, seepärast jääb kehtima viimane leitud ruutjuure number 4.

V a s t u s. $\sqrt{66,3} = 8,14$.

Ülesanded.

Kasutades ruutjuure leidmise algoritmi määrata järgmiste juurte väärtused:

261. $\sqrt{256}$ $\sqrt{1089}$ $\sqrt{4096}$

261. $\sqrt{361}$ $\sqrt{1369}$ $\sqrt{4761}$

262. $\sqrt{676}$ $\sqrt{2401}$ $\sqrt{6561}$

262. $\sqrt{841}$ $\sqrt{3025}$ $\sqrt{7396}$

Kasutades ruutjuure leidmise algoritmi määrata järgmiste juurte väärtused, kui võimalk, siis täpselt; kui mitte, siis täpsusega 1:

263. $\sqrt{2809}$ $\sqrt{112896}$ $\sqrt{1752976}$

263. $\sqrt{16641}$ $\sqrt{582169}$ $\sqrt{5527201}$

264. $\sqrt{42849}$ $\sqrt{654481}$ $\sqrt{15186609}$

264. $\sqrt{45369}$ $\sqrt{879844}$ $\sqrt{228795876}$

265. $\sqrt{90601}$ $\sqrt{931225}$ $\sqrt{100060009}$

265. $\sqrt{3136}$ $\sqrt{111556}$ $\sqrt{1755625}$

266. $\sqrt{17161}$ $\sqrt{589824}$ $\sqrt{5531904}$

266. $\sqrt{42025}$ $\sqrt{651249}$ $\sqrt{20966741}$

267. $\sqrt{44944}$ $\sqrt{881721}$ $\sqrt{176517796}$

267. $\sqrt{91809}$ $\sqrt{918521}$ $\sqrt{100080016}$

Leida järgmiste juurte väärtused kümnetuhandikeni:

268. $\sqrt{2}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{12}$

268. $\sqrt{13}$ $\sqrt{19}$ $\sqrt{29}$ $\sqrt{37}$ $\sqrt{41}$

Leida järgmiste juurte väärtused, kui võimalik, siis täpselt; kui mitte, siis ligikaudu täpsusega 0,0001:

269. $\sqrt{3,61}$ $\sqrt{19,0969}$ $\sqrt{0,6489}$

269. $\sqrt{9,99}$ $\sqrt{235,6981}$ $\sqrt{0,494209}$

270. $\sqrt{77,45}$ $\sqrt{4774,44}$ $\sqrt{0,00857476}$

270. $\sqrt{83,22}$ $\sqrt{678,72}$ $\sqrt{0,00036782}$

Leida järgmiste juurte väärtused, kui võimalik, siis täpselt; kui mitte, siis ligikaudu nelja kohaga koma järel:

271. $\sqrt{5,34}$ $\sqrt{17,0748}$ $\sqrt{0,9956}$

271. $\sqrt{7,89}$ $\sqrt{145,0378}$ $\sqrt{0,434241}$

272. $\sqrt{63,73}$ $\sqrt{5,149470}$ $\sqrt{0,01703045}$

272. $\sqrt{82,46}$ $\sqrt{473,506}$ $\sqrt{0,00190969}$

273. $\sqrt{91,37}$ $\sqrt{8738,02}$ $\sqrt{0,000634582}$

273. $\sqrt{32400}$ $\sqrt{96100}$ $\sqrt{980100}$

274. $\sqrt{48400}$ $\sqrt{28900}$ $\sqrt{291600}$

274. $\sqrt{200}$ $\sqrt{500}$ $\sqrt{5200}$

275. $\sqrt{130}$ $\sqrt{250}$ $\sqrt{720000}$

275. $\sqrt{1000}$ $\sqrt{2000}$ $\sqrt{300000}$

§ 42. Ülesandeid kordamiseks.

Leida järgmised jagatised:

276. $(a^4 - b^{12}) : (a - b^3)$

276. $(81 - 4x^4) : (9 + 2x^2)$

277. $(a^3 + a^5 + a^2 + 2a^4 - 1) : (a + a^2 - 1)$

277. $(x^3 - 32x^4 - 256) : (x^2 - 4x + 4)$

Lahutada järgmised hulkliikmed tegureiks:

278. $a^3 - a$

278. $ab^3 + 2ab^2 + ab$

279. $a^2 - ab - b - 1$

279. $4x^2 - 2x - 2$

Lahendada järgmised võrrandid:

280. $(x + 4)(x - 4) = (x - 2)^2$

280. $(1 + x)^3 = x(3x + x^2) + 10$

281. $x(x^2+2)+301=(x+7)(x^2-7x+49)$

281. $(x-2)(x^2+2x+4)=(x-2)^3+6(x^2-4)$

Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

282. $\begin{cases} x=3y \\ x+5y=16 \end{cases}$ **283.** $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 8x-2y=20 \end{cases}$

282. $\begin{cases} 3x-y=13 \\ 2x+y=12 \end{cases}$ 283. $\begin{cases} 3x+2y=40 \\ 5x-8y=10 \end{cases}$

Näidata, et

$$(a+\frac{1}{2})^2=a(a+1)+\frac{1}{4}.$$

Seda valemit sobivalt rakendades arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

284. $\left(5\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(13\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(8\frac{1}{2}\right)^2$

284. $19{,}5^2$ $7{,}5^2$ $40{,}5^2$

285. Arendada avaldis

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2.$$

286. Lihtsustada avaldis

$$(A+B)^2+(A+B)(A-B)+(A-B)^2.$$

287. Näidata, et

$$(10k+5)^2=100k(k+1)+25.$$

Seda valemit sobivalt rakendades arvutada järgmised ruudud:

25^2 55^2 65^2 85^2

288. Ristküliku ümbermõõt on u cm; ühe külje pikkus on p cm. Kui suur on ristküliku pindala?

288. Arv a on jaotatud kahte ossa, millest üks on x. Avaldada nende osade ruutude summa.

289. Arendada avaldis

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{u}{4}\right)^3.$$

290. Arendada korrutis

$$(P+3Q-7)\,(P+3Q+9).$$

290. Arendada korrutis

$$(N^2+2N+3)\,(N-4).$$

291. Esialgu kavatseti maja ehitada ruudukujulise põhiplaaniga. Hiljem otsustati aga pikkust suurendada a meetrit ja laiust vähendada niisama palju; kõrguseks jäeti endiselt h meetrit. Kas maja ruumala suurenes või vähenes ja kui palju?

292. Leida avaldiste

$$28a^2x^3 \qquad 42a^3x^2 \qquad 70a^2cx^2$$

suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

292. Leida avaldiste

$$6a^2b^3x^5 \qquad 12a^5b^4x \qquad 9a^4b^5x^2$$

väikseim ühiskordne.

293. Avaldada järgmised murrud protsentides:

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{4}{5} \qquad \frac{m}{n} \qquad \frac{1}{k} \qquad \frac{a}{a+b}.$$

294. Lihtsustada vahe

$$\frac{h+k}{k}-\frac{h-k}{k}.$$

Sooritada nõutavad tehted ja anda tulemused võimalikult lihtsal kujul:

295. $\frac{a^2b}{p^2q}:\frac{a}{p}$ 295. $\frac{4c^2x^2}{9u^2}:\frac{2cx}{3u}$

296. $\left(\frac{2ab^2}{3p^2q}\right)^2$ 296. $(2pq)^2\cdot(3p^2qr)^3:9(pq^2)^2$

297. Määrata avaldiste

$$\left(\frac{5p}{6q}\right)^2 \quad \text{ja} \quad \frac{0{,}8q}{p}$$

korrutis.

297. Korrutada avaldised

$$\frac{2u}{v}, \ \left(\frac{v}{4w}\right)^2 \quad \text{ja} \quad \left(\frac{2w}{u}\right)^3.$$

298. Jagada murd $\frac{4\pi r^2}{kR}$ murruga $\frac{4\pi R^2}{kr}$.

299. Kirjutada avaldis

$$\left(\frac{2p}{3q^2}\right)^4$$

sulgusid kasutamata.

300. Lihtsustada vahe $\left(1\frac{7}{18} - \frac{2c}{3}\right) - \left(2\frac{5}{6} - \frac{7c}{9}\right)$.

300. Liita murrud $\frac{q+2}{2}$, $\frac{3q+4}{5}$ ja $\frac{9q-8}{10}$.

301. Liita avaldised $\frac{4u+7}{6}$ ja $\frac{4}{15}(2u-1)$.

301. Lihtsustada avaldis $\frac{5}{24} + \frac{7t+5}{6} - \frac{5t-7}{12}$.

302. Jagada avaldis $\frac{2}{3} \cdot \frac{A}{l}$ avaldisega $\frac{3}{4} \cdot \frac{V}{lb}$.

302. Jagada avaldis $\left(\frac{2m}{3x}\right)^3$ avaldisega $\left(\frac{8n}{9x}\right)^2$.

303. Kui suur on täisnurga ja 60^0-se nurga suhe?

304. Anda järgmised suhted võimalikult lihtsate arvude kaudu:

$$162 : 27 \qquad 13\frac{7}{8} : 4\frac{5}{8} \qquad 62{,}8 : 1{,}57$$

304. Kirjutada järgmised suhted võimalikult väikeste täisarvude kaudu:

$$7455 : 4260 \qquad 6912 : 5184 \qquad 10\,265 : 14\,371$$

305. Tehnikumi sisseastumiskatseile ilmus 560 meeskandidaati ja 320 naiskandidaati. Esimestest sooritasid katsed 528, teistest 290. Kes olid edukamad, kas mees- või naiskandidaadid?

306. Otsustada, kas on kehtivad järgmised võrded:

$$\frac{323}{437}=\frac{17}{23} \qquad \frac{231}{323}=\frac{13}{19} \qquad \frac{697}{527}=\frac{41}{21}$$

307. Määrata a, teades, et $\frac{W}{g}=\frac{F}{a}\cdot$

308. Kalev on 49 aastat vana, tema poeg Olev on 7 aastane. Mitme aasta pärast on isa oma pojast 4 korda vanem?

309. Reinul on raha 3 korda rohkem kui tema vennal Ivaril. Kui Rein oma võla 12 rubla Ivarile ära maksaks, siis oleks Reinul ikka veel raha 2 korda rohkem kui Ivaril. Mitu rubla on kummalgi vennal?

310. Ühele poole tee äärde talust maanteeni taheti istutada pihlakaid, puust puuni 10 meetrit. Puukoolist saadi aga noori pihlakaid nii vähe, et nii istutades oleks tulnud neid 9 tükki puudu. Seepärast istutati pihlakad vahega 12 meetrit ja nüüd võis 3 kõige viletsamat puud istutamata jätta. Kui pikk on tee talust maanteeni?

311. Õe ja venna vanus on kokku 30 aastat. 5 aastat tagasi oli vend 3 korda nii vana kui õde. Kui vanad on nad praegu?

312. Kahe arvu vahe on 2. Esimese arvu viiekordse ja teise arvu kolmekordse summa on 62. Mis arvud need on?

313. 30 tonni kaupa veeti kohale hobusega ja veoautoga, hobusega 20 ja veoautoga 10 koormat. Mitu tonni kaalus keskmiselt hobusekoorem ja mitu tonni autokoorem, kui viimane oli esimesest 4 korda raskem?

Määrata graafiku (joonis 1, lk. 122) abil järgmised ruutjuured:

314. $\sqrt{15}$; $\sqrt{24}$; $\sqrt{28}$; $\sqrt{70}$; $\sqrt{92}$;
314. $\sqrt{18}$; $\sqrt{23}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{86}$.

Määrata tabeli abil järgmised ruutjuured:

315. $\sqrt{3,78}$; $\sqrt{52,3}$; $\sqrt{471}$; $\sqrt{0,341}$; $\sqrt{2356}$;

315. $\sqrt{9,29}$; $\sqrt{83,7}$; $\sqrt{549}$; $\sqrt{0,003}$; $\sqrt{1592}$.

Leida ruutjuure algoritmi abil järgmiste arvude ruutjuured:

316. 54756; 831744; 76,7376; 182,25;

316. 17424; 613089; 63,2025; 338,56.

317. Ruudukujulise maatüki pindala on 450 m². Leida selle maatüki serva pikkus.

317. Ruudukujulise maatüki pindala on 3 aari. Kui pikk on selle maatüki serv?

318. Vasklestal on ruudu kuju, mille külje pikkus on 5 cm. Kui suure raadiusega ringi peab sellest lestast välja lõikama, et ülejääva lesta pindala oleks 18 cm²?

318. Ringi läbimõõt on 8 cm. Kui suure ruudu peab sellest ringist välja lõikama, nii et ülejääva kujundi pindala oleks 30 cm²?

319. Ringist, mille läbimõõt on 10 cm, lõigatakse välja teine ring, nii et järele jääb rõngas pindalaga 35,5 cm². Kui suur on väljalõigatava ringi raadius?

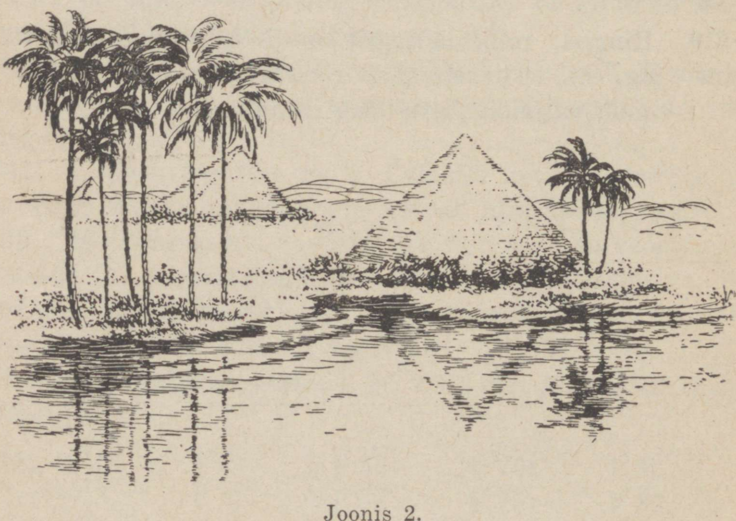
GEOMEETRIA.

Peatükk VII.

Püramiid.

§ 43. Püramiidi kirjeldus.

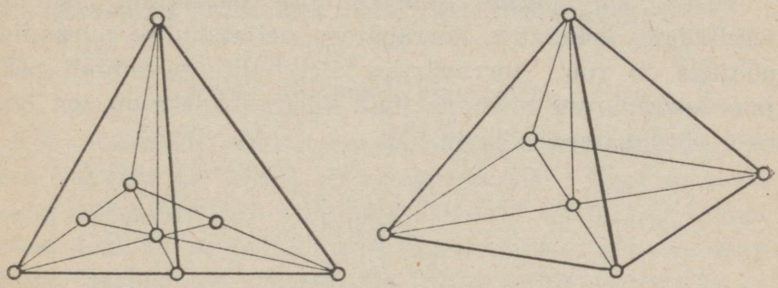
Igaüks, kes on õppinud vana Idamaa ajalugu, on kuulnud Egiptuse püramiididest. Need erilaadsed ehitised, kuhu maeti Vana-Egiptuse kuningad, pälvivad peale oma gigantsuse veel tähelepanu nende omapärase kuju poolest. Nende suurte kiviehitiste külgedeks on kolmnurgad, millel kõigil



Joonis 2.

on ühine tipp, see on *püramiidi tipp*. Põhi on Egiptuse püramiididel ruudukujuline.

Mõnikord ehitatakse telk püramiidikujuline. Kõige lihtsama telgi võib ehitada nii, et märgitakse maapinnal paraja suurusega kolmnurk, kolmnurga igas tipus lüüakse maa sisse teivas, teivaste ülemised otsad seotakse kokku püramiidi tipuks. Nüüd tõmmatakse teivastele puldan üle, ja telk ongi valmis. Teibad on nüüd püramiidi *külgservadeks*. Selle kolmnurga küljed, mis meie püramiidile on põhjaks, kannavad püramiidi *põhiservade* nime.



Joonis 3.

Ühise tipuga kolmnurki, mis püramiidi külgedelt piiravad, nimetame püramiidi *külgtahkudeks*. *Põhitahuks* on Egiptuse püramiididel ruut, meie telgil aga kolmnurk. Põhitahuks võib aga püramiidil olla mistahes hulknurk.

Üldiselt võime püramiidi kirjeldada nüüd järgmiselt:

püramiid on niisugune keha, mille põhjaks on mingi hulknurk, külgtahkudeks aga on ühise tipuga kolmnurgad.

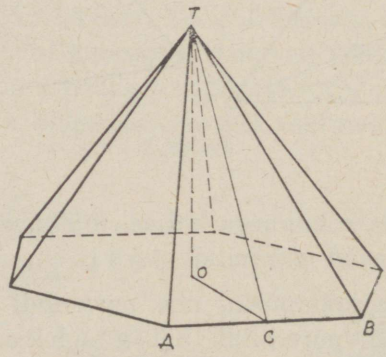
Sedamööda, mitu külgtahku püramiidil on, nimetatakse püramiidi *kolmetahuliseks*, *neljatahuliseks*, *viietahuliseks* jne.

Püramiidi mudeleid võib kergesti valmistada näiteks tuletikkudest, ühendades tikkude otsad kas kartulist või korgist väljalõigatud kuulikestega, nagu näha joonisel 3.

Kui püramiidi põhitahk on korrapärane hulknurk ja kui püramiidi külgservad on omavahel võrdsed, siis nimetame püramiidi k o r r a p ä r a s e k s.

Korrapärase püramiidi tunnusest, et tema külgservad on võrdsed, võime järeldada, et korrapärase püramiidi külgtahud on võrdhaarsed kolmnurgad.

Niisiis, korrapärase kolmetahulise püramiidi põhi on võrdkülgne kolmnurk, korrapärase neljatahulise püramiidi põhjaks on ruut, korrapärase viietahulise püramiidi põhjaks korrapärane viisnurk jne.; külgtahkudeks on aga igaühel võrdhaarsed kolmnurgad.



Joonis 4.

Püramiidi k õ r g u s e k s on tipu kaugus põhjast. Püramiidi kõrguse saamiseks tuleb tipust ehitada ristlõik püramiidi põhjale. Korrapärase püramiidi kõrgus läheb põhja keskpunktisse. Joonisel 4 on püramiidi kõrguseks sirglõik *OT*.

Püramiidi külgtahu kõrgust nimetatakse püramiidi a p o t e e m i k s.

Et korrapärase püramiidi külgtahk on võrdhaarne kolmnurk, siis läheb korrapärase püramiidi apoteem põhiserva keskpunktisse. Joonisel 4 on püramiidi apoteemiks sirglõik TC, ta poolitab põhiserva AB.

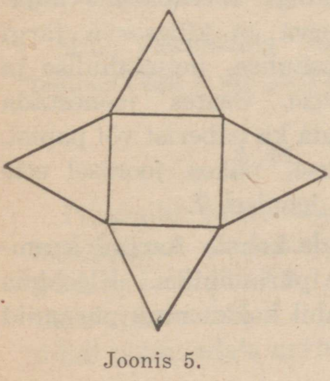
Püramiidi põhjal on oma apoteem, see on põhja keskpunktist O küljele AB joonestatud sirglõik OC.

Võrreldes püramiidi prismaga, näeme nendel olulisi erinevusi: prismal on kaks põhja, püramiidil üks; teise põhja asemel on püramiidil tipp; prisma külgtahud on ristkülikud, püramiidi omad aga ühise tipuga kolmnurgad.

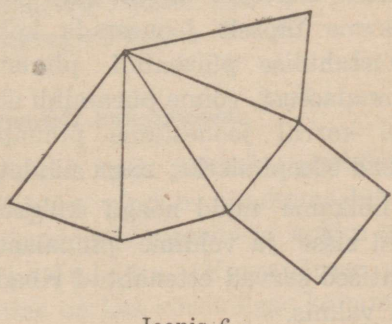
§ 44. Püramiidi pinnalaotus.

Kes püramiidi ehitust tahab hästi tundma õppida, see peab valmistama endale püramiidi mudeli. Väga kergesti saame püramiidi teha savist või kartulist või mõnest muust ainest. Kui selline püramiid paberiga katta ning kattepaber pärast tasapinnale laotada, siis saame püramiidi pinnalaotuse.

Püramiidi pinnalaotuse võime saada mitmesuguse kujuga, sedamööda, missugused servad lõikame lahti ja missugused jätame lahti lõikamata. Näiteks, kui püramiidi kattev pabe-



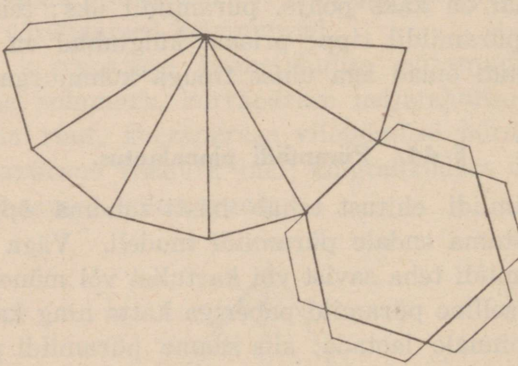
Joonis 5.



Joonis 6.

rist pind lahti lõigata külgservipidi, jättes põhiservad lahti lõikamata, siis saame tähekujulise pinnalaotuse, nagu näha joonisel 5.

Kui aga lahtilõikamine teostada põhiservi mööda, siis saame püramiidi pinnalaotuse niisuguse kujuga, nagu näeme joonisel **6.**



Joonis 7.

Korrapärase püramiidi pinnalaotust on kerge õigesti joonestada, sest tema külgtahud on ühesugused võrdhaarsed kolmnurgad ja põhitahk on mingi korrapärane hulknurk. Näiteks: etteantud põhiserva ja külgserva järgi oskame täpselt joonestada kolmetahulise, neljatahulise ja kuuetahulise püramiidi pinnalaotuse. Osates joonestada pinnalaotust, võime püramiidi ehitada ka paberist või papist. Sel korral joonestame pinnalaotuse, nähes joonisel ette ribad kleepimiseks, nagu näidatud joonisel 7.

Lõikame nüüd noaga külgservade kohale kerged krammid sisse ja voldime pinnalaotuse püramiidiks. Kleebime lahtised servad ettenähtud ribade abil kokku ning püramiid on valmis.

320. Korrapärase kolmetahulise püramiidi põhiserv on 2,5 cm ja külgserv on 3 cm. Joonestada selle püramiidi pinnalaotus.

320. Korrapärase neljatahulise püramiidi põhiserv on 3 cm ja külgserv on 3,5 cm. Joonestada selle püramiidi pinnalaotus ning mõõta joonisel püramiidi apoteemi pikkus.

321. Joonestada korrapärase kuuetahulise püramiidi pinnalaotus, kui põhiserva pikkus on 3 cm ja külgserva pikkus on 4 cm. Määrata joonisel põhitahu apoteem ja püramiidi apoteem.

322. Joonestada kolmetahulise püramiidi pinnalaotus, kui püramiidi kõik servad on omavahel võrdsed, näiteks 5 cm.

323. Ehitada paberist või papist kolmetahuline püramiid, mille kõik servad on ühepikkused. Serva pikkus valida vabalt.

M ä r k u s. Võrdsete servadega kolmetahulist püramiidi nimetatakse korrapäraseks t e t r a e e d r i k s.

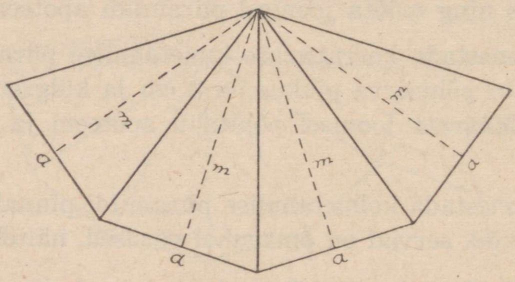
324. Korrapärase neljatahulise püramiidi põhiserva pikkus on 5 cm, külgserva pikkus on 8 cm. Joonestada selle püramiidi pinnalaotus ja voltida sellest püramiid.

325. Valmistada korrapärane kuuetahuline püramiid põhiservaga 4 cm ja külgservaga 9 cm.

§ 45. Püramiidi külgpindala.

Püramiidi täispindala koosneb tema põhitahu pindalast ja külgtahkude pindalast. Põhitahu pindala nimetame lühidalt p õ h i p i n d a l a k s ja külgtahkude pindalasid kokku nimetame püramiidi k ü l g p i n d a l a k s. Korrapärase püramiidi põhipindala arvutamine on kas võrdkülgse kolmnurga, ruudu või mõne muu korrapärase hulknurga pindala arvutamine, mis meile on tuttav. Seepärast pole tarvis seda enam eraldi uurida.

Püramiidi külgpindala määramisel võime toimida nii, et arvutame iga külgtahu pindala ja tulemused liidame. Näiteks, kui neljatahulise korrapärase püramiidi põhiserva



Joonis 8.

pikkus on a cm ja püramiidi apoteem on m cm (joonis 8), siis ühe külgtahu pindala on $\frac{a \cdot m}{2}$ cm². Püramiidi külgpindala, kui teda tähistada tähega S, on siis cm²-tes:

$$S = \frac{am}{2} + \frac{am}{2} + \frac{am}{2} + \frac{am}{2} = 4 \cdot \frac{am}{2}.$$

Viimase avaldise võime kirjutada niisugusel kujul

$$4 \cdot \frac{am}{2} = \frac{4am}{2}.$$

Tegur $4a$ tähendab püramiidi põhja ümbermõõtu ja m püramiidi apoteemi pikkust; seepärast võime öelda, et

korrapärase püramiidi külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja püramiidi apoteemi poole korrutisega.

Kui püramiidi põhja ümbermõõt tähistada tähega $ü$, siis saame püramiidi külgpindala jaoks valemi

$$S = \frac{üm}{2}.$$

Kui püramiidi täispindala tähistame tähega T ja põhipindala tähega P, siis

$$T = S + P.$$

Ülesanded.

326. Mõõta endavalmistatud püramiidi apoteemi ja põhiserva pikkused ning arvutada selle püramiidi külgpindala.

327. Korrapärase kolmetahulise püramiidi põhiserv on 4,2 cm, püramiidi apoteem on 8,6 cm. Arvutada külgpindala.

327. Korrapärase neljatahulise püramiidi põhiserv on 7,6 cm ja apoteem on 10,2 cm. Arvutada selle püramiidi täispindala.

328. Arvutada korrapärase kuuetahulise püramiidi külgpindala, kui põhiserv on 5,2 cm ja apoteem on 12,5 cm.

328. Tabeli andmetel arvutada püramiidide külgpindalad:

Nr.	Püramiidi nimetus	Põhiserv (cm)	Apoteem (cm)	Külgpindala (cm^2)
1	Kolmetahuline	8,4	12,0	
2	Neljatahuline	6,7	11,5	
3	Kuuetahuline	4,1	10,2	

329. Väikese maja katus on korrapärase neljatahulise püramiidi kujuline. Katuse räästa pikkus on 11,5 m. Katuse tipp on räästast 7 m kaugusel. Mitu ruutmeetrit on seda katust?

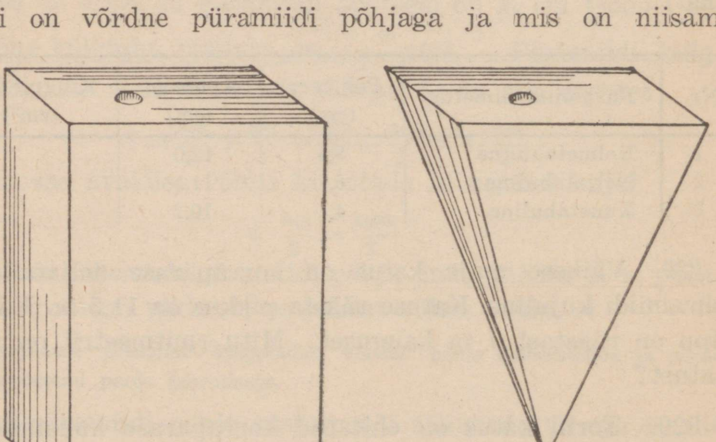
329. Torni katus on ehitatud korrapärase kuuetahulise püramiidi kujuliseks. Mitu ruutmeetrit plekki kulub selle katuse katmiseks, kui räästa pikkus on 1,2 m ja tipu kaugus räästast on 2,5 m?

330. Alljärgnevas tabelis on andmed korrapärase nelja-tahulise püramiidi kohta. Arvutada tabelis puuduvad suurused.

Andmed \ Harj. nr.	1	2	3	4	5	6
Põhiserv	5,2 cm	6,5 cm	3 dm	2 dm	15,3 m	8,6 dm
Apoteem	8,5 cm	10 cm	4,2 dm	35 cm	17 m	2,5 m
Põhipindala						
Külgpindala						
Täispindala						

§ 46. Püramiidi ruumala.

Püramiidi ruumala arvutamise juhise saamiseks võrdleme püramiidi ruumala niisuguse prisma ruumalaga, mille põhi on võrdne püramiidi põhjaga ja mis on niisama



Joonis 9.

kõrge nagu püramiid. Selleks valmistame paksemast paberist või papist võrdsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega püramiidi ja prisma. Kummagi põhjasse teeme avause (joonis 9). Täidame nüüd püramiidi liivaga või viljateradega ja kallame püramiiditäie prismasse. Nii toimime teist ja kolmandat korda. Katsel selgub, et prismasse mahub parajasti 3 püramiiditäit. Katset teisekujulise püramiidi ja prismaga korrates veendume, et kui püramiidi ja prisma põhjad on võrdsed ja kui nende kõrgused on võrdsed, siis on püramiidi ruumala üks kolmandik prisma ruumalast.

Prisma ruumala aga võrdub põhipindala ja prisma kõrguse korrutisega, sellest järeldame, et p ü r a m i i d i r u u m a l a o n ü k s k o l m a n d i k p õ h i p i n d a l a j a k õ r g u s e k o r r u t i s e s t.

Kui püramiidi põhipindala tähiseks on P ja kõrguse tähiseks on k, siis saame püramiidi ruumala V jaoks valemi.

$$V = \frac{Pk}{3}.$$

Ülesanded.

331. Korrapärase neljatahulise püramiidi põhiserv on 8 cm ja püramiidi kõrgus on 9 cm. Arvutada püramiidi ruumala.

331. Püramiidi põhjaks on ruut külje pikkusega 2 dm. Selle püramiidi kõrgus on 3,2 dm. Mitu liitrit on selle püramiidi ruumala?

332. Korrapärase kolmetahulise püramiidi põhiserva pikkus on 6 cm. Püramiidi kõrgus on 7,5 cm. Joonestada püramiidi põhi loomulikus suuruses, mõõta joonisel selle põhikolmnurga kõrgus ja saadud andmete järgi arvutada püramiidi põhipindala; seejärel arvutada püramiidi ruumala.

332. Korrapärase kolmetahulise püramiidi põhiserv on 8,2 m; püramiidi kõrgus on 12,5 m. Joonestada püramiidi põhikolmnurk vähendatud mõõtkavas, võttes joonisel 1 m kujutamiseks 1 cm; määrata joonisel selle kolmnurga kõrgus ja arvutada tema pindala. Põhipindala ja kõrguse järgi arvutada püramiidi ruumala.

333. Korrapärase kuuetahulise püramiidi põhiserv on 4,2 cm; püramiidi kõrgus on 6,5 cm.

Määrata joonise abil põhitahu apoteem. Arvutada põhipindala ja seejärel püramiidi ruumala.

334. Kolm kalurit ehitasid endale ööbimiseks telgi, millel on korrapärase neljatahulise püramiidi kuju. Telgi laius maapinnal on 2,5 m; telgi kõrgus on 2,2 m. Mitu kuupmeetrit õhku on telgis iga kaluri jaoks?

335. Alljärgnevas tabelis on andmed korrapärase neljatahulise püramiidi kohta. Arvutada tabelis puuduvad suurused.

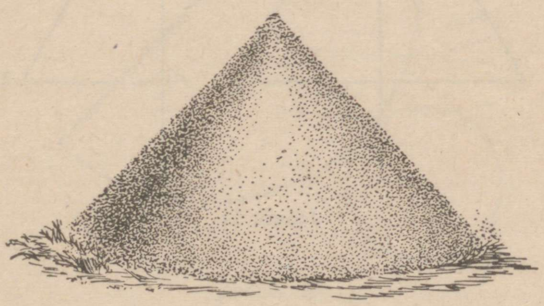
Andmed \ Harj. nr.	1	2	3	4	5	6
Põhiserv (cm)	6				5	6,2
Apoteem (cm)	5	2,5	10	13		8
Kõrgus (cm)	4	2	8	12	6	
Põhipindala (cm^2)		9				
Külgpindala (cm^2)			240		65	
Täispindala (cm^2)						
Ruumala (cm^3)				400		95

Peatükk VIII.

Koonus.

§ 47. Koonuse kirjeldus.

Kui vilja masindamisel puhas vili lastakse vabalt maha voolata, siis tekib korrapärane püramiiditaoline kuhik. Selle kuhiku kuju erineb siiski püramiidist selle poolest, et ta on ümmargune. Samasugune kuhik tekib näiteks ka siis, kui

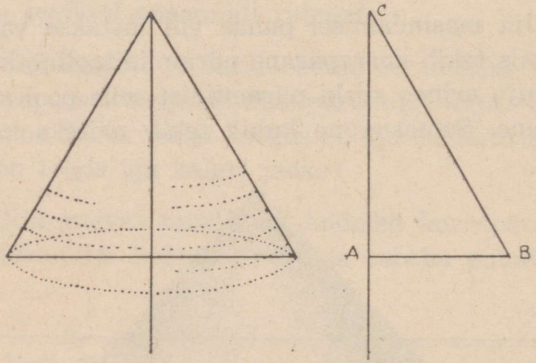


Joonis 10.

liivaaugust liiva välja loobitakse ja kui seejuures labidatäied enam-vähem ühte kohta lähevad. Sügisel kartulinoppimise ajal võib igal kartulipõllul sellise kujuga kartulikuhjasid näha. Praegu kirjeldatud kuhikukujulist keha nimetatakse k o o n u s e k s. Pliiatsiteritajaga teritatud ümmarguse pliiatsi ots on näiteks koonusekujuline; ka mõne torni katus, nagu Tallinnas Harjumäel Kiek-in-de-Kök'i katus, esitab koonust.

Nagu silindri, nii võib ka koonuse tekitada pöörlemise teel. Nimelt, kui täisnurkne kolmnurk panna pöörlema ühe oma kaateti ümber, siis hüpotenuus ja teine kaatet kujundavad koonuse.

Pöörlemist võib teostada nii, nagu seda tegime silindri vaatlemisel — traadist kolmnurga paneme pöörlema kas kahe peo vahel või tsentrifugaalmasina abil, kui viimane on koolis olemas.



Joonis 11.

Sellel pöörlemisel hüpotenuus m o o d u s t a b k o o n i l i s e p i n n a; lõik BC on koonuse m o o d u s t a j a.

Kaatet AB kujundab pöörlemisel ringi; see ring on koonuse p õ h j a k s; kaatet AB on koonuse p õ h j a r a a d i u s e k s. Pöörlemise teljeks on püstkaatet AC. Teda nimetataksegi seepärast k o o n u s e t e l j e k s. Telg on ühtlasi koonuse k õ r g u s e k s.

Pöörleva kaateti otspunkt B kujundab ringjoone, mis on koonuse põhja ümbermõõduks. Paigalseisva kaateti ülemine otspunkt C jääb koonuse t i p u k s.

Kokkuvõttes võime öelda, et

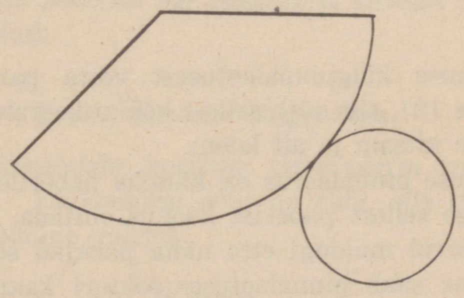
koonus on keha, mida piirab ring ja kooniline pind.

Kooniline pind on koonuse külgpinnaks, ring on tema põhipinnaks.

Koonilist pinda kasutatakse igapäevases elus, näiteks kaupluses väiksema hulga kohvi, sooda jms. pakkimisel; selleks keeratakse paberist koonusekujuline nn. „tuutu".

§ 48. Koonuse pinnalaotus.

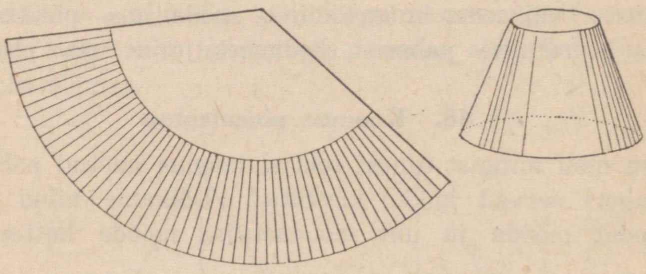
Olgu meil mingist ainest tehtud koonus kaetud paberiga ja paberi servad kokku kleebitud. Lõikame nüüd põhja ringjoont mööda ja üht moodustajat mööda kattepaberi



Joonis 12.

lahti. Selgub, et koonuse pinda saab tasapinnale laotada. Koonuse pinnalaotus esitab ringi ja ühe ringi sektorit, nagu näha joonisel 12. Ring on põhjalaotus. Külgpinnalaotus on niisuguse ringi sektor, mille raadiuseks on koonuse moodustaja. Selle sektori kaareks on koonuse põhja ümbermõõt. Seda, et koonuse külgpinnalaotus on ringi sektor, võiksime juba ette aimata; sest koonuse moodustajad on ju kõik ühepikkused, see tähendab, et koonuse põhiserva punktid asetsevad koonuse tipust võrdsetel kaugustel, tasapinnal aga asetsevad ühest punktist võrdsetel kaugustel olevad punktid ringjoone kaarel.

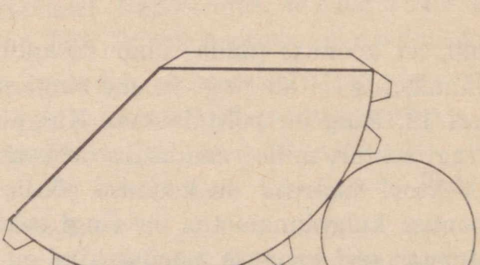
Mida teravam on koonus, seda väiksema nurgaga sektor on tema külgpinnalaotus.



Joonis 13.

Kui koonuse külgpinnalaotusest võtta paraja laiusega triip (joonis 13), siis võib sellest kokku keerata lambivarju, mis pealt on kitsam ja alt laiem.

Kui koonuse pinnalaotus on näiteks paberile joonestatud, siis on kerge sellest paberist koonus ehitada. Kleepimiseks tuleb sel korral muidugi ette näha parajad servad (joonis 14). Kuidas saab pinnalaotuses sektori kaare joonestada just nii pika, nagu on koonuse põhja ümbermõõt?



Joonis 14.

Seda saab teha nii, et koonuse põhja ümbermõõdu pikkuse arvutame põhja raadiuse kaudu. Siis paigutame sirkliga sektori kaarele poole sentimeetri kaupa või isegi sentimeetrikaupa nii palju sentimeetreid, nagu neid sisaldab põhja ümbermõõt.

Ülesanded.

336. Koonuse moodustaja on 10 cm, põhja raadius on 3 cm. Joonestada selle koonuse pinnalaotus.

336. Joonestada koonuse pinnalaotus, kui koonuse moodustaja on 8 cm ja põhja läbimõõt on 8 cm.

337. Ehitada paberist või kartongist koonus, võttes mõõdud omal valikul.

§ 49. Koonuse külgpindala.

Koonuse täispindala koosneb tema põhja pindalast ja külgpindalast. Et koonuse põhi on ring, siis toimub selle pindala arvutamine valemi

$$P = \pi r^2$$

järgi, kus P tähendab põhja pindala ja r tähendab põhja raadiust.

Et koonuse külgpinnalaotus on ringi sektor, mille raadiuseks on koonuse moodustaja ja mille kaare pikkuseks on põhja ümbermõõt, siis arvutame külgpindala, nagu arvutatakse sektori pindala. Ringi pindala võrdub tema poole ümbermõõdu ja raadiuse korrutisega.

Kui nüüd sektor on näiteks veerand ringist, siis tema pindala saamiseks tuleb võtta veerand ringjoonest, see on just sektori kaar, ja selle pool korrutada raadiusega. Nii järeldame, et

sektori pindala võrdub tema poole kaare ja raadiuse korrutisega.

Sellest omakorda järgneb, et

koonuse külgpindala võrdub põhja poole ümbermõõdu ja moodustaja korrutisega.

Kui põhja raadiuse pikkus on r, siis ümbermõõt on $2\pi r$ ja pool ümbermõõtu on πr. Kui koonuse moodustaja pikkus tähistada tähega m ja külgpindala tähega S, siis saame külgpindala arvutamiseks järgmise valemi:

$$S = \pi r m.$$

Täispindala T saamiseks tuleb külgpindalaga liita põhipindala P, nii et

$$T = S + P.$$

Ülesanded.

338. Antud on koonus, mille mõõtmed on järgmised: põhja raadius $r = 2{,}3$ cm; moodustaja $m = 5{,}2$ cm. Arvutada külgpindala ja täispindala.

338. Koonuse põhja raadius on 3 cm, moodustaja on 6 cm. Arvutada täispindala.

339. Torni katus on koonusekujuline. Katuse räästaalune läbimõõt on 8 m. Torni tipu kaugus räästast on 10 m. Arvutada katuse pindala.

339. Lehtri laiemal osal on peaaegu koonuse kuju. Kui palju plekki kulub lehtri valmistamiseks, kui lehtri suu läbimõõt on 16 cm ja lehtri moodustaja pikkus on 15 cm.

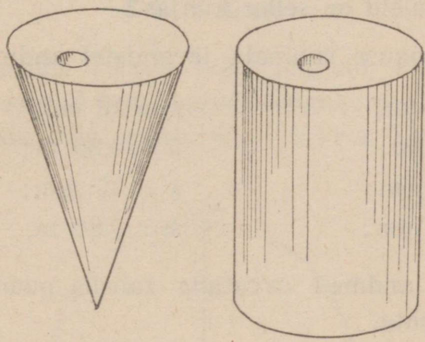
340. Koonuse külgpindala on 157 cm², moodustaja on 10 cm. Arvutada põhja raadius.

340. Koonuse külgpindala on 188,4 cm², põhja raadius on 6 cm. Leida koonuse moodustaja.

§ 50. Koonuse ruumala.

Juhise koonuse ruumala arvutamiseks leiame samal viisil, nagu leidsime püramiidi ruumala valemi. Koonust võrdleme silindriga. Teeme silindri ja koonuse, mõlemad ühesuuruste põhjadega ja võrdsete kõrgustega.

Kumbagi põhja teeme avause (joonis 15). Vaatame, mitu koonusetäit liiva või viljateri mahub silindrisse. Kui koonus



Joonis 15.

ja silinder on hoolsalt tehtud, nii et nende põhjad tõesti on pindvõrdsed ja kõrgused mõlemal samad, siis näeme, et silindri ruumala on koonuse ruumalast kolm korda suurem. Et silindri ruumala võrdub põhipindala ja kõrguse korrutisega, siis

koonuse ruumala on üks kolmandik põhipindala ja kõrguse korrutisest.

Tähistades põhja raadiuse tähega r, kõrguse tähega k, ja ruumala tähega V, siis saame koonuse ruumala arvutamiseks valemi

$$V = \frac{\pi r^2 k}{3}.$$

341. Arvutada koonuse ruumala, mille põhja raadius on 4 cm ja kõrgus on 6 cm.

342. Arvutada ülesande nr. **339** andmetel torni katusealune ruumala, kui katuse tipu kõrgus laest on 9,2 m.

342. Kartulikuhja läbimõõt maapinnal on 2 m, kuhja kõrgus on 1,5 m.

Mitu hl kartuleid on selles kuhjas?

Arvutada koonuse ruumala järgmistel andmetel:

343. $r = 10$ cm; $k = 12$ cm;

343. $r = 0{,}2$ m; $k = 0{,}35$ m;

344. $r = 3{,}4$ cm; $k = 32$ mm;

344. $r = 5{,}4$ dm; $k = 0{,}80$ m.

345. Tabeli andmeil arvutada tabelis puuduvad suurused koonuse kohta.

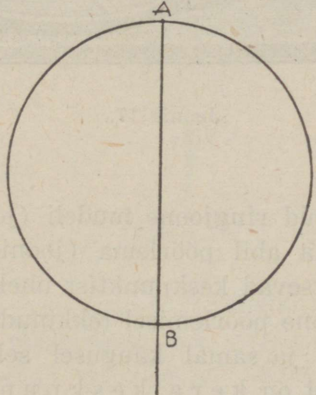
Harj. nr.	Põhja raadius (cm)	Moodustaja (cm)	Kõrgus (cm)	Põhipindala (cm^2)	Külgpindala (cm^2)	Ruumala (cm^3)
1	2,4	3,6	3,1			
2		8,5	6,1			215
3	7,2	11,2	8,7	158		
4	12,4		16		75	
5	13,3	19,7				2600

Peatükk IX.

Kerapind ja kera.

§ 51. Kera.

Niisuguse kujuga kehad, nagu jalgpall, käsipall, tõukekuul, gloobus, kuulid kuullaagris, lõngakera jne., kannavad geomeetrias kõik ühist nimetust — kera. Looduses esineb

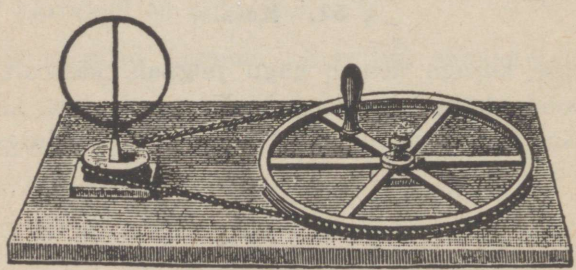


Joonis 16.

kera kuju väga sageli. Võib koguni öelda, et paljudel juhtudel loodus eelistab kera kuju. Näiteks veetilgad tulisel pliidil võtavad kera kuju, väikesed elavhõbeda tilgad on kerad, meile kõigile tuttav seebimull on kerakujuline. Kui õnnestub valmistada hästi liimjas seebivesi, siis võib seebimulli õige suureks keraks puhuda. Ja lõpuks kõik taevakehad, sealhulgas Maa, on ligikaudu kerakujulised.

Nagu silindri ja koonuse saime tekitada pöörlemise teel, nii saame pöörlemise teel tekitada ka kera.

Kui ringjoon pöörleb oma diameetri ümber, siis see ringjoon moodustab k e r a p i n n a. Niisugust kerapinna tekkimist saame nähtavaks teha, kui traadist valmistatud ja



Joonis 17.

pidemega varustatud ringjoone mudeli (joonis 16) paneme tsentrifugaalmasina abil pöörlema (joonis 17). Et ringjoone punktid asetsevad keskpunktist ühel ja samal kaugusel, siis ka ringjoone pöörlemisel tekkinud kerapinna punktid asetsevad ühel ja samal kaugusel sellest samast keskpunktist, mis nüüd on k e r a k e s k p u n k t i k s.

Me võime sellepärast öelda, et

kerapind on niisugune pind, mille kõik punktid asetsevad ühest kindlast punktist ühel ja samal kaugusel.

Küsimusele, „mis on kera?“, võime anda nüüd järgmise vastuse:

kera on kerapinnaga piiratud keha.

Kera on kõige lihtsam keha, ta on piiratud üheainsa pinnaga. Oma lihtsuse poolest võib kera pidada täiuslikemaks kehaks.

Kui meie moodustame kera pöörleva ringi abil, siis selle ringi läbimõõt on kera läbimõõduks ja ringi raadius on kera raadiuseks.

Neid kerapinna punkte, mis pöörlemisel paigale jäävad, nimetatakse nabadeks ehk poolusteks.

Joonis 18.

Kui pöörleval ringjoonel märkida mõned punktid silmale nähtavate märkidega, siis näeme, et pöörlemisel need punktid kujundavad ringjooned. Need ringjooned on seda suuremad, mida kaugemal pöörlemise teljest on need punktid, mis neid ringjooni moodustavad (joonis 18). Üks neist on kõige suurem, see kannab kera ekvaatori nime.

Ekvaator poolitab kerapinna kaheks võrdseks osaks. Ekvaator on kerapinna üheks suurringjooneks. Peale ekvaatori on kerapinnal veel teisi suurringjooni. Kõik need ringjooned, mis läbivad pooluseid, on samuti suurringjooned. Pooluseid läbivaid suurringjooni nimetatakse m e r i d i a a n i d e k s.

Kui gloobusel märkida kaks mingit punkti, siis võib küsida, milline tee gloobuse pinnal on nende punktide vahel kõige lühem. Lähemal vaatlusel selgub, et

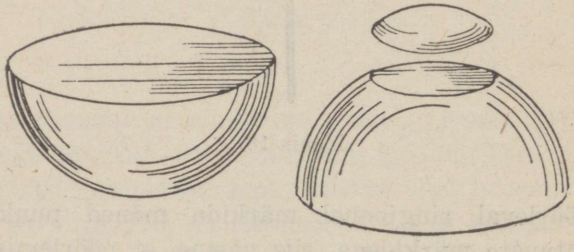
kõige lühem tee kahe punkti vahel kerapinnal on suurringjoone kaar.

Kahe punkti vahel kerapinnal pinguli tõmmatud niit märgib kõige lühemat teed nende punktide vahel, seega suurringjoone kaart.

§ 52. Kera lõige tasapinnaga.

Kui võtta kerakujuline kartul, õun või peet ja see noaga läbi lõigata, siis võime öelda, et oleme teostanud kera lõikamise tasapinnaga, sest noa tera võime lugeda tasapinna mudeliks. Siinjuures näeme, et

kera lõige tasapinnaga on ring.



Joonis 19.

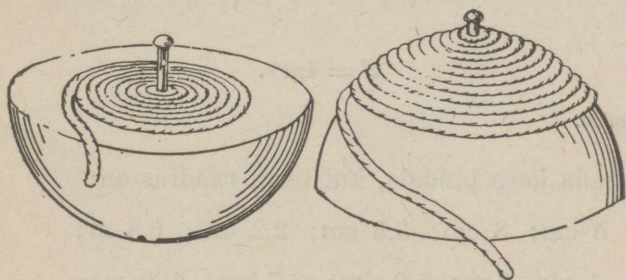
See lõikering on seda suurem, mida ligemal on lõikav tasapind kera keskpunktile. Kõige suurema lõike saame sel korral, kui lõikav tasapind läbib kera keskpunkti. Seda ringi nimetame kera s u u r r i n g i k s (joonis 19). Et suurring läbib kera keskpunkti, siis suurringi raadius ja läbimõõt on vastavalt ka kera raadiuseks ja läbimõõduks. Suurring poolitab kera kaheks poolkeraks.

§ 53. Kera pindala.

Nagu teame, saab silindri ja koonuse pinnad tasapinnale laotada.

Kerapind erineb neist mõlemast sellepoolest, et teda ei saa tasapinnale laotada.

Kera pindala leidmiseks võrdleme poolkera pindala sellesama kera suurringi pindalaga. Üks seesuguse võrdlemise võimalustest on järgmine. Võtame näiteks puust kera, mis



Joonis 20.

suurringi mööda on poolitatud, nii et meil on kaks poolkera. Nüüd hakkame nööriga mähkima kaht pinda: ühel poolkeral katame nööriga poolkera kumera pinna osa, see tähendab poole kerapinna, teisel poolkeral aga tasase osa, see on, suurringi pinna. Mähkimist teostame nii, et lööme keskele naela, selle naela ümber mähime spiraalselt nööri. Mähkimist peab teostama hoolega, nii et mõlemad pinnad oleksid ühesuguselt tihedalt nööriga kaetud. Kõige sobivam selleks on pesunöör. Nüüd on selge, et see pind, kumb on suurem, vajab katmiseks rohkem nööri, ja nimelt niimitu korda rohkem, kuimitu korda see pindala on teisest suurem. Lühidalt: katmiseks kuluv nööri pikkus on võrdeline kaetava pindalaga. Pindalade võrdlemiseks võrdleme nööride pikkusi. Meie katsel selgub (joonis 20), et poole kerapinna katmiseks on tarvis just kaks korda pikem nöör, kui selle kera suurringi katmiseks. Seepärast võime öelda, et poolkera pindala võrdub kahekordse suurringi pindalaga. Sellest järeldame, et

kera pindala võrdub tema suurringi neljakordse pindalaga.

Kui kera raadius on tähistatud tähega r, siis suurringi pindala on πr^2, seega on siis kera pindala $4\pi r^2$. Tähistades kera pindala tähega S, võime kirjutada kera pindala valemi

$$S = 4\pi r^2.$$

Ülesanded.

Arvutada kera pindala, kui tema raadius on

346. 5 cm; 8 cm; 3,6 cm; 2,2 dm; 6,8 m;

346. 1 m; 4 m; 5,9 dm; 8,7 cm; 120 mm.

Arvutada kera pindala, kui tema läbimõõt on

347. 3 dm; 6 cm; 0,5 m; 4,2 m; 12 mm;

347. 4 dm; 9 cm; 0,6 m; 5,8 m; 14 mm.

348. Jalgpalli läbimõõt on 26 cm. Mitu dm^2 nahka läheb selle palli katte valmistamiseks, kui õmbluste jaoks arvestada 15%-ne lisa?

348. Pajal on poolkera kuju. Paja pealmine läbimõõt on 61 cm. Kui suur on paja seesmine pindala?

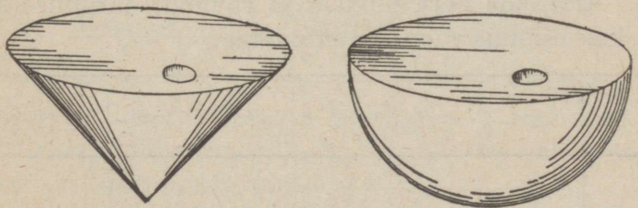
349. Maakera raadius on 6370 km. Mitu miljonit km^2 on Maakera pindala?

350. Kera pindala on 5 dm^2. Arvutada selle kera raadius.

350. õhupalli pindala on 300 m^2. Arvutada läbimõõt.

§ 54. Kera ruumala.

Kui meil on puust poolkera ja samast puust koonus, mille põhi on võrdne selle poolkera suurringiga ja kõrgus on võrdne poolkera raadiusega, siis võib nende kehade kohta öelda, et nad on võrdsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega; siinjuures nimetame poolkera tasapinnalise külje ka põhjaks. Nende kehade ruumalasid võib võrrelda kaalumise teel, sest kaal on ju võrdeline ruumalaga. Kaalumisel selgub, et poolkera on kaks korda raskem kui koonus. Siit



Joonis 21.

järeldame, et poolkera ruumala on koonuse ruumalast kaks korda suurem.

Poolkera ja sama suure põhjaga ning sama kõrge koonuse ruumalasid saab võrrelda ka otsesel teel, kui need kehad on näiteks plekist valmistatud ja kummagi põhjas on avaus, mille kaudu neid võib täita liivaga või mõne muu ainega. Siingi näeme, et poolkera ruumala on koonuse ruumalast kaks korda suurem. Nüüd on koonuse põhja raadius ja kõrgus võrdsed, sest koonus on poolkeraga ühekõrgune, kuid poolkera kõrguseks on tema raadius. Seepärast võime raadiuse ja kõrguse tähistada ühe ja sama tähega r. Siis on koonuse ruumala $\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3$.

Selle järgi on poolkera ruumala $2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$; kera ruumala on muidugi kaks korda suurem, seega siis $\frac{4}{3} \pi r^3$. Kera ruumala arvutamiseks võime kirjutada nüüd valemi

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Ülesanded.

351. Kera raadius on 3 cm. Arvutada kera ruumala.

351. Kera läbimõõt on 8 cm. Kui suur on selle kera ruumala?

352. Arvutada kera pindala ja ruumala järgmise skeemi järgi, kus raadius r on antud cm-tes:

Harj. nr.	r	r^2	r^3	4π	$4\pi r^2$	$4\pi r^3$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
1	5						
2	7						
3	2,4						
4	3,6						
5	22						

353. Mis on kasulikum saada, kas kaks õuna läbimõõduga 10 cm või üks õun läbimõõduga 14 cm?

354. Pajal on poolkera kuju; tema läbimõõt on 30 cm. Mitu liitrit vett mahub sellesse patta?

354. Õhupalli läbimõõt on 30 cm. See õhupall on täidetud heeliumiga, mille kuupmeeter kaalub 0,18 kg. Arvutada, mitu kg kaalub õhupallis olev gaas.

355. Kui palju kaalub rauast tõukekuul, mille läbimõõt on 10 cm. Raua erikaal on 7,8.

355. Kui raske on tammepuust kera läbimõõduga 30 cm? Tammepuu erikaal on 0,8.

§ 55. Ülesandeid kordamiseks.

356. Risttahuka servade pikkused on tähistatud tähtedega a, b ja c; mida väljendab avaldis $2(ab + bc + ac)$?

356. Risttahuka servade pikkused on 5,6 cm, 4,3 cm ja 2 cm. Arvutada selle risttahuka täispindala ja ruumala.

357. Kuubi serva pikkus on tähistatud tähega a; mida väljendab avaldis $6a^2$?

358. Kuubi täispindala on 150 cm^2. Leida selle kuubi ruumala.

358. Arvutada kuubi ruumala, kui tema täispindala on 17,8 dm^2.

359. Antud kuubi serva pikkus on 5 cm. Kui pikk on niisuguse kuubi serv, mille täispindala on antud kuubi täispindalast kaks korda suurem?

360. Ruudukujulise mänguplatsi külje pikkus on 46,5 m. Kui palju liiva läheb selle mänguplatsi katmiseks, kui 1 tonni liivaga saab katta 20 m^2?

360. Põranda pikkus on 6,60 m, laius 3,20 m. Mitu ruudukujulist parketiplaati on tarvis selle põranda katmiseks, kui plaadi serva pikkus on 15 cm?

Määrata ristküliku pikkus a tema pindala S ja laiuse b järgi:

361. $S = 20\ m^2$; $b = 2{,}5$ m;

361. $S = 32\ m^2$; $b = 4{,}75$ m.

362. Kui suur on ruudu ja ristküliku pindalade vahe, kui kummagi ümbermõõt on 46,4 m ja ristküliku pikkus on laiusest 1,6 m võrra suurem?

Arvutada akende valgustuspindala ja põranda pindala suhe (valgustuskoefitsient)

363. oma klassiruumis;

363. oma töötoas kodus.

Normaalne valgustuskoefitsient on vähemalt 0,20.

364. Võrdhaarse kolmnurga alus on 6,8 cm ja kõrgus on 5 cm. Arvutada pindala.

Määrata kolmnurga kõrgus k tema pindala S ja aluse a järgi:

365. $S = 52{,}70$ cm²; $a = 12{,}4$ cm;

365. $S = 69{,}70$ m²; $a = 6{,}8$ m.

366. On antud võrdhaarne täisnurkne kolmnurk. Kui suured on selle kolmnurga nurgad?

366. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi pikkus on 20 cm. Kui suur on selle kolmnurga pindala?

367. Võrdhaarse kolmnurga tippnurk on 4 korda suurem kui alusnurk. Arvutada selle kolmnurga nurgad.

368. Rööpküliku alus on 12,4 cm, kõrgus on 6,4 cm. Arvutada rööpküliku pindala.

368. Rööpküliku pindala on 182 cm², alus on 20,6 cm. Leida rööpküliku kõrgus.

369. Plaanil mõõtkavaga 1 : 2000 on kujutatud rööpküliku-kujuline heinamaa.

Plaanil on rööpküliku alus 60 mm ja kõrgus on 40 mm. Mitu tonni heinu saadi sellelt heinamaalt, kui hektaarilt saadi keskmiselt 18 kvintaali?

Arvutada trapetsi pindala, kui on antud tema alused a ja b ning kõrgus k:

370. $a = 36$ cm; $b = 14$ cm; $k = 8$ cm;

370. $a = 35{,}5$ m; $b = 22{,}4$ m; $k = 12{,}6$ m.

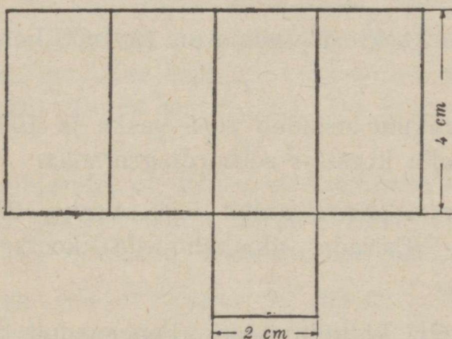
Trapetsi alus a, kõrgus k ja pindala S on antud; arvutada teine alus.

371. $a = 20$ cm; $k = 7$ cm; $S = 122,5$ cm^2;
371. $a = 12,5$ cm; $k = 5,5$ cm; $S = 60,5$ cm^2.

Joonestada korrapärane kuusnurk, mõõta joonisel selle apoteem ja arvutada pindala, võttes kuusnurga külje pikkuseks

372. 3 cm; 3,5 cm.

372. 4,2 cm; 4,5 cm.



Joonis 22.

373. Joonisel 22 on antud prisma pinnalaotus. Arvutada joonise andmete järgi prisma täispindala ja ruumala.

373. Neljatahulise korrapärase prisma põhiserva pikkus on 6,2 cm, kõrgus on 10,5 cm. Arvutada prisma täispindala ja ruumala.

374. Ümmarguse torni ümbermõõt on 37,7 m. Kui suur on torni läbimõõt?

374. Vankri ratta läbimõõt on 80 cm. Kui pikk on ratta rehv?

Arvutada ringi pindala, kui raadius on

375. 8 cm; 10 cm;

375. 12 cm; 13,2 cm.

376. Kui pikk on 36^{0}-ne kaar ringis, mille raadiuse pikkus on 15 m?

376. 40^{0}-se kaare pikkus on 12,57 m. Kui pikk on ringi raadius?

377. Ringi pindala on 120 cm^{2}. Kui suur on 57^{0}-se sektori pindala?

377. 65^{0}-se sektori pindala on 130 m^{2}. Leida ringi pindala.

378. Talmikuld sisaldab 90% vaske ja 10% tsinki. Esitada talmikulla koosseis sektordiagrammis.

378. Alpakahõbe sisaldab 52% vaske, 22% tsinki ja 26% niklit. Esitada alpakahõbeda koosseis sektordiagrammis.

379. Silindri külgpinna-laotusena saadud ristküliku pikkus on 16 cm ja laius on 5 cm, kusjuures laius on silindri kõrguseks. Arvutada selle silindri täispindala ja ruumala.

379. Silindri külgpindala on 24 dm^{2} ja põhipindala on 8 dm^{2}. Arvutada silindri ruumala.

380. 30 meetrit vasktraati kaalub 134 grammi. Arvutada selle traadi läbimõõt, teades, et vase erikaal on 8,9.

380. Kui pikk on 0,4-millimeetrilise läbimõõduga nikeliintraat, mis kaalub 150 grammi. Nikeliini erikaal on 8,8.

381. Mitu liitrit mahutab silindrikujuline veenõu, mille ümbermõõt on 82,6 cm ja sügavus on 60 cm?

381. Mitu tonni bensiini sisaldab silindrikujuline tsistern, mille pikkus on 4,6 m ja mille läbimõõt on 1,8 m? Bensiini erikaal on 0,75.

382. Korrapärase neljatahulise püramiidi põhiserv on 1,2 dm ja apoteem on 1,6 dm. Arvutada selle püramiidi täispindala.

382. Paviljoni katus on korrapärase kuuetahulise püramiidi kujuline. Katuseräästa pikkus ühest küljest on 3,2 m; katuse tipu kaugus räästast on 3 m. Arvutada selle katuse pindala.

383. Koolis on kuusepuust valmistatud korrapärase neljatahulise püramiidi mudel, mille põhiserva pikkus on 10 cm ja kõrgus on 12 cm. Kas saab selle püramiidi raskust leida teda kaalumata? Leida see raskus, kui kuusepuu erikaal on 0,5.

383. Alumiiniumist on tehtud korrapärane neljatahuline püramiid, mille põhiserv on 3 cm ja kõrgus on 4,5 cm. Kui palju kaalub see püramiid? Alumiiniumi erikaal on 2,7.

384. Koonuse põhja raadius on 3,9 cm; koonuse moodustaja on 8 cm. Arvutada külgpindala.

384. Arvutada koonuse täispindala, kui koonuse põhja läbimõõt on 8 cm ja moodustaja on 12 cm.

385. Koonuse külgpinna-laotusena saadud sektori kaare pikkus on 86 cm; sektori sirgjoonelise serva pikkus on 60 cm. Arvutada selle koonuse täispindala.

386. Koonuse põhja raadius on 5,7 cm, koonuse kõrgus on 16 cm. Arvutada ruumala.

386. Vasest koonus kaalub 350 g; selle koonuse kõrgus on 15 cm. Leida põhja raadius, teades, et vase erikaal on 8,9.

387. Gloobuse läbimõõt on 50 cm. Kui suur on selle gloobuse pindala ja ruumala?

388. Kuubi serv on 9 cm, kera läbimõõt on 10 cm. Kumma pindala on suurem?

388. Puust kera mahub parajasti plekist tehtud kuupi, mille seesmine serva pikkus on 1 dm. Kui palju jääb kuupi veel tühja ruumi?

389. Mis kaalub rohkem, kas kaks haavlit läbimõõduga 4 mm või üks haavel läbimõõduga 5 mm?

390. Antud on poolkera, mille raadiuse pikkus on 5,2 cm. Leida selle poolkera täispindala.

391. Poolkera täispindala on 58,9 cm². Kui pikk on poolkera raadius?

392. Puusilindri kõrgus ja põhja läbimõõt on teineteisega võrdsed — kumbki 2 dm. Sellest silindrist treitakse nii suur kera, kui võimalik. Mitu protsenti puitu tuleb maha treida?

Ruutjuurte tabeli kasutajale.

Tabelist leiame igale arvule ruutjuure kolme kohaga.

1. $\sqrt{87} = \sqrt{87{,}0} = 9{,}33$;
tabeli neljas lehekülg, rida 87, veerg 0.

2. $\sqrt{7{,}26} = 2{,}69$;
tabeli teine lehekülg, rida 7,2, veerg 6.

3. $\sqrt{5674} \approx \sqrt{5670} = \sqrt{56'70} = [7'53] = 75{,}3$;
juuritava ümardamine kolme nullist erineva numbrini; juuritava numbrite rühmitamine paarideks komast alates; tabeli neljas lehekülg, rida 56, veerg 7. Ruutjuurel on kaks numbrit koma ees, sest juuritaval on koma ees kaks numbripaari, seega

$$\sqrt{5674} = 75{,}3.$$

4. $\sqrt{0{,}000\,3859} \approx \sqrt{0{,}00'03'86} = [1'96] = 0{,}0196$;
juuritava ümardamine kolme nullist erineva numbrini; juuritava numbrite rühmitamine paarideks komast alates; tabeli esimene lehekülg, rida 3,8, veerg 6. Juure esimene number koma järel on 0, sest juuritava komale järgnev numbripaar on 00, seega

$$\sqrt{0{,}000\,3859} = 0{,}0196.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04
1,1	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09
1,2	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13	1,13	1,14
1,3	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17	1,17	1,18
1,4	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	1,22
1,5	1,22	1,23	1,23	1,24	1,24	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26
1,6	1,26	1,27	1,27	1,28	1,28	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30
1,7	1,30	1,31	1,31	1,32	1,32	1,32	1,33	1,33	1,33	1,34
1,8	1,34	1,35	1,35	1,35	1,36	1,36	1,36	1,37	1,37	1,37
1,9	1,38	1,38	1,39	1,39	1,39	1,40	1,40	1,40	1,41	1,41
2,0	1,41	1,42	1,42	1,42	1,43	1,43	1,44	1,44	1,44	1,45
2,1	1,45	1,45	1,46	1,46	1,46	1,47	1,47	1,47	1,48	1,48
2,2	1,48	1,49	1,49	1,49	1,50	1,50	1,50	1,51	1,51	1,51
2,3	1,52	1,52	1,52	1,53	1,53	1,53	1,54	1,54	1,54	1,55
2,4	1,55	1,55	1,56	1,56	1,56	1,57	1,57	1,57	1,57	1,58
2,5	1,58	1,58	1,59	1,59	1,59	1,60	1,60	1,60	1,61	1,61
2,6	1,61	1,62	1,62	1,62	1,62	1,63	1,63	1,63	1,64	1,64
2,7	1,64	1,65	1,65	1,65	1,66	1,66	1,66	1,66	1,67	1,67
2,8	1,67	1,68	1,68	1,68	1,69	1,69	1,69	1,69	1,70	1,70
2,9	1,70	1,71	1,71	1,71	1,71	1,72	1,72	1,72	1,73	1,73
3,0	1,73	1,73	1,74	1,74	1,74	1,75	1,75	1,75	1,75	1,76
3,1	1,76	1,76	1,77	1,77	1,77	1,77	1,78	1,78	1,78	1,79
3,2	1,79	1,79	1,79	1,80	1,80	1,80	1,81	1,81	1,81	1,81
3,3	1,82	1,82	1,82	1,82	1,83	1,83	1,83	1,84	1,84	1,84
3,4	1,84	1,85	1,85	1,85	1,85	1,86	1,86	1,86	1,87	1,87
3,5	1,87	1,87	1,88	1,88	1,88	1,88	1,89	1,89	1,89	1,89
3,6	1,90	1,90	1,90	1,91	1,91	1,91	1,91	1,92	1,92	1,92
3,7	1,92	1,93	1,93	1,93	1,93	1,94	1,94	1,94	1,94	1,95
3,8	1,95	1,95	1,95	1,96	1,96	1,96	1,96	1,97	1,97	1,97
3,9	1,97	1,98	1,98	1,98	1,98	1,99	1,99	1,99	1,99	2,00
4,0	2,00	2,00	2,00	2,01	2,01	2,01	2,01	2,02	2,02	2,02
4,1	2,02	2,03	2,03	2,03	2,03	2,04	2,04	2,04	2,04	2,05
4,2	2,05	2,05	2,05	2,06	2,06	2,06	2,06	2,07	2,07	2,07
4,3	2,07	2,08	2,08	2,08	2,08	2,09	2,09	2,09	2,09	2,09
4,4	2,10	2,10	2,10	2,10	2,11	2,11	2,11	2,11	2,12	2,12
4,5	2,12	2,12	2,13	2,13	2,13	2,13	2,14	2,14	2,14	2,14
4,6	2,14	2,15	2,15	2,15	2,15	2,16	2,16	2,16	2,16	2,17
4,7	2,17	2,17	2,17	2,17	2,18	2,18	2,18	2,18	2,19	2,19
4,8	2,19	2,19	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,21	2,21	2,21
4,9	2,21	2,22	2,22	2,22	2,22	2,22	2,23	2,23	2,23	2,23
5,0	2,24	2,24	2,24	2,24	2,24	2,25	2,25	2,25	2,25	2,26
5,1	2,26	2,26	2,26	2,26	2,27	2,27	2,27	2,27	2,28	2,28
5,2	2,28	2,28	2,28	2,29	2,29	2,29	2,29	2,30	2,30	2,30
5,3	2,30	2,30	2,31	2,31	2,31	2,31	2,32	2,32	2,32	2,32
5,4	2,32	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,34	2,34	2,34	2,34

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	2,35	2,35	2,35	2,35	2,35	2,36	2,36	2,36	2,36	2,36
5,6	2,37	2,37	2,37	2,37	2,37	2,38	2,38	2,38	2,38	2,39
5,7	2,39	2,39	2,39	2,39	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,41
5,8	2,41	2,41	2,41	2,41	2,42	2,42	2,42	2,42	2,42	2,43
5,9	2,43	2,43	2,43	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,45	2,45
6,0	2,45	2,45	2,45	2,46	2,46	2,46	2,46	2,46	2,47	2,47
6,1	2,47	2,47	2,47	2,48	2,48	2,48	2,48	2,48	2,49	2,49
6,2	2,49	2,49	2,49	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,51	2,51
6,3	2,51	2,51	2,51	2,52	2,52	2,52	2,52	2,52	2,53	2,53
6,4	2,53	2,53	2,53	2,54	2,54	2,54	2,54	2,54	2,55	2,55
6,5	2,55	2,55	2,55	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,57	2,57
6,6	2,57	2,57	2,57	2,57	2,58	2,58	2,58	2,58	2,58	2,59
6,7	2,59	2,59	2,59	2,59	2,60	2,60	2,60	2,60	2,60	2,61
6,8	2,61	2,61	2,61	2,61	2,62	2,62	2,62	2,62	2,62	2,62
6,9	2,63	2,63	2,63	2,63	2,63	2,64	2,64	2,64	2,64	2,64
7,0	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,66	2,66	2,66	2,66	2,66
7,1	2,66	2,67	2,67	2,67	2,67	2,67	2,68	2,68	2,68	2,68
7,2	2,68	2,69	2,69	2,69	2,69	2,69	2,69	2,70	2,70	2,70
7,3	2,70	2,70	2,71	2,71	2,71	2,71	2,71	2,72	2,72	2,72
7,4	2,72	2,72	2,72	2,73	2,73	2,73	2,73	2,73	2,73	2,74
7,5	2,74	2,74	2,74	2,74	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75
7,6	2,76	2,76	2,76	2,76	2,76	2,77	2,77	2,77	2,77	2,77
7,7	2,77	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78	2,79	2,79	2,79	2,80
7,8	2,79	2,79	2,80	2,80	2,80	2,80	2,80	2,81	2,81	2,81
7,9	2,81	2,81	2,81	2,82	2,82	2,82	2,82	2,82	2,82	2,83
8,0	2,83	2,83	2,83	2,83	2,84	2,84	2,84	2,84	2,84	2,84
8,1	2,85	2,85	2,85	2,85	2,85	2,85	2,86	2,86	2,86	2,86
8,2	2,86	2,87	2,87	2,87	2,87	2,87	2,87	2,88	2,88	2,88
8,3	2,88	2,88	2,88	2,89	2,89	2,89	2,89	2,89	2,89	2,90
8,4	2,90	2,90	2,90	2,90	2,91	2,91	2,91	2,91	2,91	2,91
8,5	2,92	2,92	2,92	2,92	2,92	2,92	2,93	2,93	2,93	2,93
8,6	2,93	2,93	2,94	2,94	2,94	2,94	2,94	2,94	2,95	2,95
8,7	2,95	2,95	2,95	2,95	2,96	2,96	2,96	2,96	2,96	2,96
8,8	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97	2,98	2,98	2,98	2,98
8,9	2,98	2,98	2,99	2,99	2,99	2,99	2,99	2,99	3,00	3,00
9,0	3,00	3,00	3,00	3,00	3,01	3,01	3,01	3,01	3,01	3,01
9,1	3,02	3,02	3,02	3,02	3,02	3,02	3,03	3,03	3,03	3,03
9,2	3,03	3,03	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,05	3,05
9,3	3,05	3,05	3,05	3,05	3,06	3,06	3,06	3,06	3,06	3,06
9,4	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,08	3,08	3,08	3,08
9,5	3,08	3,08	3,09	3,09	3,09	3,09	3,09	3,09	3,10	3,10
9,6	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,11	3,11	3,11	3,11	3,11
9,7	3,11	3,12	3,12	3,12	3,12	3,12	3,12	3,13	3,13	3,13
9,8	3,13	3,13	3,13	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14
9,9	3,15	3,15	3,15	3,15	3,15	3,15	3,16	3,16	3,16	3,16

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10,	3,16	3,18	3,19	3,21	3,22	3,24	3,26	3,27	3,29	3,30
11,	3,32	3,33	3,35	3,36	3,38	3,39	3,41	3,42	3,44	3,45
12,	3,46	3,48	3,49	3,51	3,52	3,54	3,55	3,56	3,58	3,59
13,	3,61	3,62	3,63	3,65	3,66	3,67	3,69	3,70	3,71	3,73
14,	3,74	3,75	3,77	3.78	3,79	3,81	3,82	3,83	3,85	3,86
15,	3,87	3,89	3,90	3,91	3,92	3,94	3,95	3,96	3,97	3,99
16,	4,00	4,01	4,02	4,04	4,05	4,06	4,07	4,09	4,10	4,11
17,	4,12	4,14	4,15	4,16	4,17	4,18	4,20	4,21	4,22	4,23
18,	4,24	4,25	4,27	4,28	4,29	4,30	4,31	4,32	4,34	4,35
19,	4,36	4,37	4,38	4,39	4,40	4,42	4,43	4,44	4,45	4,46
20,	4.47	4,48	4,49	4,51	4,52	4,53	4,54	4,55	4,56	4,57
21,	4,58	4,59	4,60	4,62	4,63	4,64	4,65	4,66	4,67	4,68
22,	4,69	4,70	4,71	4,72	4.73	4,74	4,75	4,76	4,77	4,79
23,	4,80	4,81	4,82	4,83	4,84	4,85	4,86	4,87	4.88	4,89
24,	4,90	4,91	4,92	4,93	4,94	4,95	4,96	4,97	4,98	4,99
25,	5,00	5,01	5,02	5,03	5,04	5,05	5,06	5,07	5,08	5,09
26,	5,10	5,11	5,12	5,13	5,14	5,15	5,16	5,17	5,18	5,19
27,	5,20	5,21	5,22	5,22	5,23	5,24	5,25	5,26	5,27	5,28
28,	5,29	5,30	5,31	5,32	5,33	5,34	5,35	5,36	5,37	5,38
29,	5,39	5,39	5,40	5,41	5,42	5,43	5,44	5,45	5,46	5,47
30,	5,48	5,49	5,50	5,50	5,51	5,52	5,53	5,54	5,55	5,56
31,	5,57	5,58	5,59	5,59	5,60	5,61	5,62	5,63	5,64	5,65
32,	5,66	5,67	5,67	5,68	5,69	5,70	5,71	5,72	5,73	5,74
33,	5,74	5,75	5,76	5,77	5,78	5,79	5,80	5,81	5,81	5,82
34,	5,83	5.84	5,85	5,86	5,87	5.87	5,88	5,89	5.90	5,91
35,	5,92	5,92	5,93	5,94	5,95	5,96	5,97	5,97	5,98	5,99
36,	6,00	6,01	6,02	6,03	6,03	6,04	6,05	6,06	6,07	6,07
37,	6,08	6,09	6,10	6.11	6,12	6,12	6,13	6,14	6,15	6,16
38,	6,16	6,17	6,18	6,19	6,20	6,20	6,21	6,22	6,23	6,24
39,	6,24	6,25	6,26	6,27	6,28	6,28	6.29	6,30	6.31	6,32
40,	6,32	6,33	6,34	6,35	6,36	6,36	6,37	6,38	6,39	6,40
41,	6,40	6,41	6,42	6,43	6,43	6,44	6,45	6,46	6,47	6,47
42,	6,48	6,49	6,50	6,50	6,51	6,52	6,53	6,53	6,54	6,55
43,	6,56	6,57	6,57	6,58	6,59	6,60	6,60	6,61	6,62	6,63
44,	6,63	6,64	6,65	6,66	6,66	6,67	6.68	6,69	6,69	6,70
45,	6,71	6,72	6,72	6,73	6,74	6,75	6,75	6,76	6,77	6,77
46,	6,78	6,79	6,80	6,80	6,81	6,82	6,83	6,83	6,84	6,85
47,	6,86	6,86	6,87	6,88	6,88	6,89	6,90	6,91	6,91	6,92
48,	6,93	6,94	6,94	6,95	6,96	6,96	6,97	6,98	6,99	6,99
49,	7,00	7,01	7,01	7,02	7,03	7,04	7,04	7,05	7,06	7,06
50,	7,07	7,08	7,09	7,09	7,10	7,11	7,11	7,12	7,13	7,13
51,	7,14	7,15	7,16	7,16	7,17	7,18	7,18	7,19	7,20	7,20
52,	7,21	7,22	7,22	7,23	7,24	7,25	7,25	7,26	7,27	7,27
53,	7,28	7,29	7,29	7,30	7,31	7,31	7,32	7,33	7,33	7,34
54,	7,35	7,36	7,36	7,37	7,38	7,38	7,39	7,40	7,40	7,41

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55,	7,42	7,42	7,43	7,44	7,44	7,45	7,46	7,46	7,47	7,48
56,	7,48	7,49	7,50	7,50	7,51	7,52	7,52	7,53	7,54	7,54
57,	7,55	7,56	7,56	7,57	7,58	7,58	7,59	7,60	7,60	7,61
58,	7,62	7,62	7,63	7,64	7,64	7,65	7,66	7,66	7,67	7,67
59,	7,68	7,69	7,69	7,70	7,71	7,71	7,72	7,73	7,73	7,74
60,	7,75	7,75	7,76	7,77	7,77	7,78	7,78	7,79	7,80	7,80
61,	7,81	7,82	7,82	7,83	7,84	7,84	7,85	7,85	7,86	7,87
62,	7,87	7,88	7,89	7,89	7,90	7,91	7,91	7,92	7,92	7,93
63,	7,94	7,94	7,95	7,96	7,96	7,97	7,98	7,98	7,99	7,99
64,	8,00	8,01	8,01	8,02	8,02	8,03	8,04	8,04	8,05	8,06
65,	8,06	8,07	8,07	8,08	8,09	8,09	8,10	8,11	8,11	8,12
66,	8,12	8,13	8,14	8,14	8,15	8,15	8,16	8,17	8,17	8,18
67,	8,19	8,19	8,20	8,20	8,21	8,22	8,22	8,23	8,23	8,24
68,	8,25	8,25	8,26	8,26	8,27	8,28	8,28	8,29	8,29	8,30
69,	8,31	8,31	8,32	8.32	8,33	8,34	8,34	8,35	8,35	8,36
70,	8,37	8,37	8,38	8,38	8,39	8,40	8,40	8,41	8,41	8,42
71,	8,43	8,43	8,44	8,44	8,45	8,46	8,46	8,47	8,47	8,48
72,	8,49	8,49	8,50	8,50	8,51	8,51	8,52	8,53	8,53	8,54
73,	8,54	8,55	8,56	8,56	8,57	8,57	8,58	8,58	8,59	8,60
74,	8,60	8,61	8,61	8,62	8,63	8,63	8,64	8,64	8,65	8,65
75,	8,66	8,67	8,67	8,68	8,68	8,69	8,69	8,70	8,71	8,71
76,	8,72	8,72	8,73	8,73	8,74	8,75	8,75	8,76	8,76	8,77
77,	8,77	8,78	8,79	8,79	8,80	8,80	8,81	8,81	8,82	8,83
78,	8,83	8,84	8,84	8,85	8,85	8,86	8,87	8,87	8,88	8,88
79,	8,89	8,89	8,90	8,91	8,91	8,92	8,92	8,93	8,93	8,94
80,	8,94	8,95	8,96	8,96	8,97	8,97	8,98	8,98	8,99	8,99
81,	9,00	9,01	9,01	9,02	9,02	9,03	9,03	9,04	9,04	9,05
82,	9,06	9,06	9,07	9,07	9,08	9,08	9,09	9,09	9,10	9,11
83,	9,11	9,12	9,12	9,13	9,13	9,14	9,14	9,15	9,15	9,16
84,	9,17	9,17	9.18	9,18	9,19	9,19	9,20	9,20	9,21	9,21
85,	9,22	9,22	9,23	9,24	9,24	9,25	9,25	9,26	9,26	9,27
86,	9,27	9,28	9,28	9,29	9,30	9,30	9,31	9,31	9,32	9,32
87,	9,33	9,33	9,34	9,34	9,35	9,35	9,36	9,36	9 37	9,38
88,	9,38	9,39	9,39	9,40	9,40	9,41	9,41	9,42	9,42	9,43
89,	9,43	9,44	9,44	9,45	9,46	9,46	9,47	9,47	9,48	9,48
90,	9,49	9,49	9,50	9,50	9,51	9,51	9,52	9,52	9,53	9,53
91,	9,54	9,54	9,55	9,56	9,56	9,57	9,57	9,58	9,58	9,59
92,	9,59	9,60	9,60	9,61	9,61	9,62	9,62	9,63	9,63	9,64
93,	9,64	9,65	9,65	9,66	9,66	9,67	9,67	9,68	9,69	9,69
94,	9,70	9,70	9,71	9,71	9,72	9,72	9,73	9,73	9,74	9,74
95,	9,75	9,75	9,76	9,76	9,77	9,77	9,78	9,78	9,79	9,79
96,	9,80	9,80	9,81	9,81	9.82	9,82	9,83	9,83	9,84	9,84
97,	9,85	9,85	9,86	9,86	9,87	9,87	9,88	9,88	9,89	9,89
98,	9,90	9,90	9,91	9,92	9,92	9,92	9,93	9,93	9,94	9,94
99,	9,95	9,95	9,96	9,96	9,97	9,97	9,98	9,98	9,99	9,99

Vastused.

1. $12b^2 + bc - 20c^2$
$6a^4 + 5a^2b^2 - 6b^4$
$20a^4 - 41a^2b^2 + 20b^4$
$18m^4 - 30m^2x^3 + 8x^6$
$30a^4x^4 - 87a^2b^3x^6 + 63b^6x^8$

2. $a^2 + 2a - 8$
$7x^4 - 22x^2 + 3$
$5n^4 - 27an^3 - 20a^2n^2 + 12a^3n$
$16c^{12} - n^8$
$m^6 - 64$

3. $81 - x^4$
$a^4 - x^4$
$x^2 + 2xy + y^2 - z^2$
$a^2 - 6ac + 9c^2 - 4b^2$
$a^3 - 3a^2 - 4a + 12$

4. $a^5 - a^4 - 2a^3 + 2a^2 + a - 1$;
x^3; y^3; 1; 2

5. 2401; 441; 6724; 8649; 3844

6. 2451; 384; 6396; 8084; 1584

7. 400; 600; 740; 840; 7600

8. $9x - 4$
$4a - 9b$
$10x - 7y$
$3a - 4b$
$4x + 5y$

9. $a^2 + 2a + 1$
$x^2 - 2xy + y^2$
$4a^2 + 12a + 9$
$9x^2 - 30x + 25$
$2a^2 + 3a + 4$

10. $a^2 + ab$, jääk $2ab^3$
$3 + 2x$
$-3 + 2x$
$1 - 2x$
$a^4 + a^3 + a^2 - 1$, jääk $-2a^3 + a^2 + 2$

11. $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$
$a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$
$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$
$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$
$x - a$

12. $x + y$
$2a - 3b$
$a - 1$
$5x - 7$
$10y + 15$

13. $x + 7$
$x - 5$
$3x - 11$
$4x + 5y$
$9x - 5y$

14. $a^2 - ab + b^2$
$16a^2 - 4a + 1$
$x^2 + x + 1$
$a + x$
$2 - a$

15. $x + 5$
$\frac{1}{2}x - \frac{4}{9}y$
$x^2 - 5ax + 25a^2$
$a^2 + 10a + 100$
$x + 2$

16. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$
$5 \cdot 43$
$2 \cdot 5 \cdot 31$
$3 \cdot 7 \cdot 19$

17. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$
$7 \cdot 113$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$
$7 \cdot 11 \cdot 13$
$2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 43$

18. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
$7 \cdot 13$
$2 \cdot 2 \cdot 23$
$3 \cdot 31$
$2 \cdot 47$
$5 \cdot 19$
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3$
Algarv
$2 \cdot 7 \cdot 7$
$3 \cdot 3 \cdot 11$
$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

19. 2; 3
2; 4; 8
2; 4; 6; 8; 12
5; 7
2; 6; 14; 21

20. 3; 5; 7; 5; 13
2; 3; 7; 5; 6

21. 30 m

22. 2; 4; 8; suurim 8

23. 2; p^2; $7ax$

24. $6ac$; $7R^3$; $5mp^2q$

25. $3ab$

26. $6mn$

27. 24; 60; 42; 66; 600
165; 80; 180; 225; 210

28. 60 cm

29. 360

30. $60b$; $320n$; cdx; $42a^2f$

31. $3x$ ja $6x$
k ja $7k^2$
v ja cv^2
pq ja p^2q^2

32. $6r$ ja $36rp$
$7lmn$ ja $14lmn^2$
$3w^4$ ja $108w^6$
$6h^2k^4$ ja $36h^3k^5$

33. 231; 693

34. $13 \cdot 17 \cdot 19$

35. 2; 3; 5; 9; 10

36. pq; $165p^2q^3r$

37. $7a + 4$

38. $3(a + 1)$
$3(a + 2)$
$3(3a - 2)$
$4(3 - a)$
$7(3 - 5a)$

39. $m(n + x)$
$Q(Q - P)$
$v(mv - g)$
$2t(s - 3at)$
$7N(2N - c)$

41. $3x(2a - 3b + 7c)$
$7ay(6a - 7y + 1)$
$3cz^2(3z^2 - 7cz - 5c^2)$

40. $5a(a - 2b)$
$6a(x - 2a)$
$9x(x - a)$

42. $2(a - b)\ (4m + 7n)$
$(6R^2 - 1)\ (2u + v - 1)$
$(N^2 + 2)\ (P - Q)$
$(h + k)\ (H + k)$
$51(1 - 2m)$

43. $(x + y)\ (3a + 1)$
$(2m - n)\ (4m + 1)$
$(3d - 1)\ (5c - 1)$
$6(3p - 4)$
$4(p + q)\ (x + y)$

44. $(x + y)\ (a + 2)$
$(n + z)\ (n + 5)$
$(u + 7)\ (u + a)$
$(3a + 2b)\ (a + 2)$
$(6x - 13)\ (x - y)$

45. $(t - a)\ (t - 3)$
$(2m - n)\ (4m - 3)$
$(4p - 3)\ (4q - 2r)$
$(5a + 1)\ (4b - 1)$
$(z - h)\ (5z - 1)$

46. $(x+2)^2$
Ei ole võimalik
$(x+7)^2$
$(x-4)^2$
Ei ole võimalik

47. $(x-\frac{1}{5})^2$
$(2f+1)^2$
$(x-0{,}1)^2$
$(x-1{,}2)^2$
Ei ole võimalik

48. $(x+1)(x-1)$
$(1+x)(1-x)$
$(y+2)(y-2)$
$(5+y)(5-y)$
$(7+3z)(7-3z)$

49. $a(x+y)(x-y)$
$a(a+x)(a-x)$
$3(3b+2a)(3b-2a)$
$(ab+c)(ab-c)$
$\pi(R+r)(R-r)$

50. $(x+1)^3$
$(2-a)^3$
$(c+d)^3$
$-(c+10)^3$
$(y+\frac{2}{3})^2$

51. $(a+5)(a^2-5a+25)$
$(4-x)(16+4x+x^2)$
$(2x+1)(4x^2-2x+1)$
$(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$
$(z+0{,}1)(z^2-0{,}1z+0{,}01)$

52. $(x+2)(x+3)$
$(x+5)(x+4)$
$(y-3)(y-7)$
$(y-9)(y-10)$
$(z+3)(z-2)$

53. $(y+a)(y+b)$
$(x-a)(x-3)$
$(x+b)(x+5)$
$(x-a)(x+7)$
$(y+9n)(y-7)$

54. $(x+y)(2x+y)$
$(x+1)(2x+3)$
$(x+2)(5x-1)$
$2(a-1)(2a+1)$
$(m+3)(7m+1)$

55. $(x+3)^2$
$(x-5)^2$
$(u+7)(u-7)$
$(6u+5v)(6u-5v)$
$(z+\frac{1}{2})^2$

56. $3(x-1)^2$
$6(1+2pq)(1-2pq)$
$5(y+17)(y-17)$
$11(x-3)^2$
$(u+1{,}1)(u-1{,}1)$

57. 2,25
20,25
42,25
72,25
90,25

58. 961

60. $\frac{p}{q}$ 61. $\frac{200}{v}$ sek. 62. $\frac{p}{n}$ mm

63. Ühele ruutmeetrile kulunud polituuri hulk

67. $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{4}{3}$

68. -12; $-\frac{2}{27}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{10}$; $\frac{9}{2}$

69. $\frac{3a}{2}$; $\frac{3}{a}$; $\frac{2b}{a}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$

70. $\frac{b}{c}$; $\frac{3x}{5a}$; $\frac{3a}{7bx}$; $\frac{2x}{3y}$; $\frac{5}{12abc}$

71. $\frac{3a}{7b}$; $\frac{2b}{5a}$; $\frac{18a}{13c}$; $\frac{11m}{16}$; $\frac{2pq}{n}$

72. $\frac{70}{105}$; $\frac{63}{105}$; $\frac{75}{105}$; $\frac{28}{105}$

73. $\frac{6552}{12012}$; $\frac{7007}{12012}$; $\frac{7392}{12012}$; $\frac{7722}{12012}$

74. $\frac{ad}{bd}$; $\frac{cb}{db}$

75. $\frac{a}{b^2}$; $\frac{3b}{b^2}$

76. $\frac{2a^2yz}{xyz}$; $\frac{3bxz}{xyz}$; $\frac{4cxy}{xyz}$

77. $\frac{24b^2m}{36a^3b^2}$; $\frac{3abn}{36a^3b^2}$; $\frac{10a^2n}{36a^3b^2}$

78. $\frac{3a^2bx}{3a^3b}$; $\frac{3a^5b}{3a^3b}$; $\frac{y}{3a^3b}$

79. $\frac{4n^2p}{6m^2n^2}$; $\frac{5p^2}{6m^2n^2}$; $\frac{18m^3n^3}{6m^2n^2}$

80. $\frac{2b^2}{2a^2b}$; $\frac{ac}{2a^2b}$; $\frac{2a^3}{2a^2b}$

81. $\frac{9c^2d}{12b^3d^3}$; $\frac{4ab}{12b^3d^3}$; $\frac{60d^2x}{12b^3d^3}$

82. $\frac{5}{7}$; $\frac{2}{3}$; $2x$; $\frac{5R}{9}$; p^2

83. $\frac{p}{q}$; $\frac{r+1}{10s}$; $-\frac{u}{5v}$; $\frac{92a^2+8ab}{35y}$; $\frac{a+1}{z^2}$

84. $\frac{a+b}{ab}$; $\frac{f+g}{fg}$; $\frac{a+x}{ax}$; $\frac{b+y}{by}$; $\frac{m+z}{mz}$;

85. $\frac{3+a}{3}$; $\frac{25+b}{5}$; $\frac{x+2}{x}$; $\frac{4x+3}{x}$; $\frac{3b+a}{b}$

86. $5\frac{9}{20}$ meetrit **87.** $\frac{4a^2+m^2}{2b}$ cm^2

88. $\frac{n-m}{mn}$; $\frac{b-a}{ab}$; $\frac{5}{2a}$; $\frac{13}{3a}$; $\frac{my-z}{mx}$

89. $\frac{3-a}{3}$; $\frac{25-b}{5}$; $\frac{x-2}{x}$; $\frac{4x-3}{x}$; $\frac{3a-2}{a}$

90. $\frac{17}{21}$; $\frac{7}{30}$

91. $\frac{3b+2a}{ab}$; $\frac{9n+10m}{10mn}$; $\frac{14q-20p}{35pq}$; $\frac{121y-16x}{44xy}$; $\frac{51v-26u}{6uv}$

92. $\frac{5}{2}$; $\frac{14}{15}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{17}{12}$

93. $\frac{2m-au}{ar}$; $\frac{b+ac}{a^2}$; $\frac{5u-2au}{6a^2}$; $\frac{5b^2-4}{a^2b^2}$; $\frac{7+12x}{4x^3}$

94. $\frac{3a}{4}$; $\frac{a}{5}$; $\frac{a}{m}$; $\frac{4c+3u}{2n^2}$; $\frac{r}{s^2}$

95. $\frac{22}{5}$; $\frac{89}{13}$; $\frac{214}{15}$; $\frac{1455}{14}$; $\frac{200}{3}$

96. $\frac{7}{15}$; $1\frac{3}{10}$; $1\frac{19}{63}$; $1\frac{11}{45}$

97. $-1\frac{3}{4}$; $-\frac{31}{35}$; $-1\frac{1}{2}$; $-4\frac{9}{10}$

98. $\frac{3a+1}{3}$; $\frac{c-4}{4}$; $\frac{10m-n}{5}$; $\frac{3bN+N^2}{b}$; $\frac{m-5n^3}{n^2}$

99. $\frac{3a+2q}{6N}$; $\frac{36c-5u}{60D}$; $\frac{183mn}{140}$; $\frac{15y-4x}{24xy}$; $\frac{133m^2-24n^2}{84mn}$

100. $\frac{5}{12}$ liitrit

101. $\frac{3a-1}{3b}$ kg

102. 6; 20; 35; 66; $\frac{1008}{17}$

103. 15; 33; 30; 60; 75

104. $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{18}$

105. $\frac{1}{8}$; $3\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{2}$; 4; 8

106. $8\frac{1}{6}$; 6; 10; 12; 48

107. -2; $73\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $-3\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{2}$

108. $11\frac{2}{3}$; $\frac{3a}{x}$; $\frac{2c}{u}$; $\frac{h}{b}$; $\frac{4f^2}{g}$

109. $\frac{2}{9}$; $\frac{4a}{7n^2}$; $\frac{3c}{2b}$; $\frac{a^2}{8}$; $2u^2$

110. $1\frac{1}{3}$; $-x^2$; $-\frac{9mx}{2}$; $\frac{5a^3u}{2t}$; $-3q^2u^2$

111. $\frac{(b+c)(2a+3)}{ac}$; $\frac{36-a^2}{6}$; $\frac{20x^2-2x-6}{x^2}$;

$\frac{49a^2-4}{a^2}$; $\frac{25x^2-a^2}{x^2}$

112. $\frac{2}{5}$, 1, 2 tundi

113. $\frac{m}{2}$ ruutmeetrit

114. $\frac{2}{35}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{3}{55}$; $\frac{5}{72}$

115. $\frac{3}{32}$; $\frac{4}{165}$; $\frac{9}{100}$; $\frac{13}{315}$; $\frac{7}{475}$

116. $1\frac{1}{6}$; $1\frac{1}{16}$; $\frac{7}{10}$; $2\frac{1}{22}$; $\frac{14}{31}$

117. -3; $-11\frac{1}{4}$; $-10\frac{14}{15}$: 15; 3

118. $\frac{b^2}{3a^2}$; $-\frac{2a}{n}$; $\frac{4}{a^2b^2}$; $\frac{3m^2}{8q}$; $-\frac{1}{10cx^2}$

119. $\frac{3m^2}{2pq}$; $-\frac{3ax^3}{2c}$; $-x$: $-\frac{1}{n}$; $2h$

120. $\frac{16a^2}{25}$; $\frac{49b^2}{8}$: $-\frac{512c^3}{3375}$; $\frac{729d^3}{1000}$; $\frac{121e^2}{225}$

121. $a^2 + a + \frac{1}{4}$

$\frac{a^2}{4} - 2a + 4$

$\frac{a^4 + 18a + 81}{9a^2}$

$\frac{64a^2 - 144ab + 81b^2}{144}$

$\frac{a^3 - 3a^2n + 3an^2 - n^3}{n^3}$

122. $11\frac{1}{2}$

123. $\frac{1}{2}$

124. $-2\frac{1}{2}$

125. $\frac{27}{400}$

126. $-\frac{59}{198}$

129. Ei ole samasus; on samasus; ei ole samasus; on samasus; ei ole samasus

130. —2

131. 1; 3; 5

132. Samasus; samasus; võrrand; samasus; võrrand

133. $4; 1; -\frac{3}{7}; 15; -\frac{2}{3}$

134. $9;\quad -\frac{1}{3};\quad 4;\quad 2\frac{1}{3};\quad -\frac{1}{7}$

135. 7; 10; 7; 9; 8
136. 4; 9; 11; 7; 9
137. 5; 6; 11; 12; 13
138. 12; 10; 8; 7; 6
139. —2; —4; —7,6; 0; 4
140. 5; 0,5; — 6,5; 3; — 7,5
141. 23; 24; 25
142. 17; 22
143. 4; 5; 6
144. 12
145. 8,5; 4,5
146. 19; 21; 23
147. 22; 24; 26
148. 10; 11
149. 11 aasta eest
150. 8
151. 42; 54
152. 23 cm;
46 cm ja 39 cm
153. 12 päeva pärast
154. 4
155. 700
156. 66,5 meetrit
157. 70 mm
158. 9,5 tundi
159. 3 : 10; 1 : 6;
6 : 1; 7 : 6
160. 28 : 5; 2 : 3;
4 : 3; 24 : 5
161. 18 : 5; 7 : 5; 5 : 6
162. 5 : 4; 7 : 12; 4 : 5

163. 15%; 34%; 40%; 13,5%; 16,67%

164. 50%; 75%; 80%; 233,3%; 83,3%

165. 4 : 5; 3 : 5; 2 : 5; 1 : 5; 0 : 1

166. 1 : 8; 1 : 30; 1 : 16; 11 : 125; 3 : 40

167. Paralleelklassi

168. Kirp

169. On; on; ei ole; on; ei ole

170. $\frac{x}{a}=\frac{5}{3}$

171. $6\frac{1}{4}$; $1\frac{3}{4}$; 3; 0,36; $\frac{1}{4}$

172. $\frac{5}{9}$; $\frac{ac}{b}$; $\frac{9a}{4b}$

173. $2\frac{3}{16}$; $\frac{a^3}{bc}$; $\frac{4p^3}{q^2}$

174. 10; 1,6; 6; 8; 32

175. 5

176. 6

177. — 10

178. 2

179. 1

180. 2

181. 0

182. 2

183. $\frac{1}{40}$

184. $-2\frac{6}{17}$

185. $2\frac{1}{2}$

186. 0

187. 5

188. 6

189. 1. On võrdeline; 2. Võrdetegur on 1,4

190. $\frac{8}{5}=\frac{32}{20}$; $\frac{-2}{5}=\frac{-8}{20}$; $\frac{8}{-2}=\frac{32}{-4}$

191. $\frac{a+2}{2}=\frac{b+3}{3}$; $\frac{a-2}{2}=\frac{b-3}{3}$; $\frac{a+2}{a-2}=\frac{b+3}{b-3}$

192. $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$

193. $\begin{cases} x=64 \\ y=16 \end{cases}$

194. $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$

195. $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$

196. $\begin{cases} x=6 \\ y=-4 \end{cases}$

197. $\begin{cases} x=35 \\ y=15 \end{cases}$

198. $\begin{cases} x=7 \\ y=8 \end{cases}$

199. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

200. $\begin{cases} x=17 \\ y=1 \end{cases}$

201. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

202. $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

203. $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

204. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 205. $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ 206. $\begin{cases} x=-5 \\ y=2 \end{cases}$

207. Vasturääkivad 208. Lahenduv: $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$

209. Ekvivalentsed 210. 96; 87

211. 23; 21 212. 25 km tunnis

213. Kaheistmelisi 7; üheistmelisi 18
214. Kodujäneseid 6; kanu 18
215. Märki 3 ; mööda 9 korda
216. 20 a.; 30 a. 217. 92
218. 20 kg; 40 kg 219. 12 kop.; 10 kop.
220. 1,50 rbl.; 1,20 rbl. 221. 34 õpilast; 500 rbl.
222. 65 kop.; 9 rbl. 223. 42 aastat; 12 aastat
224. 100 m; 80 m 225. 5 kop.; 7 kop.
226. 36; 49; 64; 81; 100 227. 6; 7; 8; 9; 10
228. 11; 14; 17 230. 100 korda
231. 10 000 korda 232. 100 korda
233. 10 000 korda 234. 10 korda
235. 100 korda 236. 10 korda
237. 100 korda 238. Vaata joonis 1
239. 11; 20; 27; 43; 70
240. 4,5; 5,5; 6,7; 7; 7,9
241. 12 cm^2; 23 cm^2; 29 cm^2; 34 cm^2; 67 cm^2
242. 4,2 cm; 4,7 cm; 7,1 cm; 8,5 cm; 9,6 cm
243. 1,40; 1,60; 1,80; 2,10; 2,30
244. 3,46; 3,87; 4,36; 6,08; 6,63
245. 2,28; 2,90; 3,08; 3,54; 4,73
246. 2,32 cm; 2,93 cm; 3,13 cm; 3,81 cm; 4,10 cm
247. 3,55 cm 248. 0,664; 0,822; 0,506

249. 0,140; 0,07; 0,06 **250.** 250; 280; 351

251. 580; 155; 110 **252.** 19,6; 3,46; 7,10

253. 24,0; 0,535; 69,9 **254.** 15,5 cm

255. 4 meetrit **256.** 62,8 cm

257. 8,86 cm **258.** 5,64 cm

260.

a	40	64	17	84	4
a^2	1600	4096	289	7056	16
$\sqrt{a}$	6,32	8	4,12	9,17	2

261. 16; 33; 64 **262.** 26; 49; 81

263. 53; 336; 1324 **264.** 207; 809; 3897

265. 301; 965; 10003 **266.** 131; 768; 2352

267. 212; 939; 13286

268. 1,4142; 2,2361; 2,6458; 3,3166; 3,4641

269. 1,9; 4,37; 0,8055

270. 8,8006; 69,0973; 0,0926

271. 2,3108; 4,1322; 0,9978

272. 7,9831; 2,4661; 0,1305

273. 9,5588; 93,4774; 0,0252

274. 220; 170; 540

275. 11,4018; 15,8114; 845,6949

276. $a^3 + a^2b^3 + ab^6 + b^9$ **277.** $a^3 + a^2 + a + 1$

278. $a(a+1)(a-1)$ **279.** $(a+1)(a-b-1)$

280. 10. **281.** 21. **282.** $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$

283. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ **284.** $(5\frac{1}{2})^2 = 5 \cdot 6 + \frac{1}{4} = 30\frac{1}{4}$

285. $\frac{9a^2+12ab+4b^2}{36}$ 286. $3A^2+B^2$

287. $25^2=200\cdot 3+25=625$ 288. $\frac{Pu}{2}-p^2$ cm²

289. $\frac{512-576u+216u^2-27u^3}{1728}$

290. $P^2+Q^2+6PQ+2P+6Q$

291. Vähenes a^2h kuupmeetri võrra

292. $14a^2x^2$; $420a^3cx^3$

293. 75%; 80%; $\frac{100m}{n}$ %; $\frac{100}{k}$ %; $\frac{100a}{a+b}$ %

294. 2 295. $\frac{ab}{pq}$ 296. $\frac{4a^2b^4}{9p^4q^2}$

297. $\frac{5p}{9q}$ 298. $\frac{r^3}{R^3}$ 299. $\frac{16p^4}{81q^8}$

300. $\frac{c-13}{9}$ 301. $\frac{12u+9}{10}$ 302. $\frac{8Ab}{9V}$

303. 3 : 2 304. 6 : 1; 3 : 1; 40 : 1.

305. Meeskandidaadid 306. On; ei ole; ei ole

307. $a=\frac{Fg}{W}$ 308. 7 a. pärast

309. 36 rbl.; 108 rbl. 310. 1320 meetrit

311. 10 a.; 20 a. 312. $8\frac{1}{2}$; $6\frac{1}{2}$

313. 0,5 tonni; 2 tonni 314. 3,9; 4,9; 5,3; 8,4; 9,6

315. 1,94; 7,23; 21,7; 0,584; 48,6

316. 234; 912; 8,76; 13,5

317. 21,2 m 318. 1,49 cm

319. 4,1 cm 327. 54,18 cm²

328. 195 cm² 329. 161 m²

330.

	1	2	3	4	5	6
Põhipindala	27,04cm²	42,25cm²	9dm²	4dm²	234,09m²	73,96dm²
Külgpindala	88,4cm²	130cm²	25,2dm²	7dm²	520,2m²	430dm²
Täispindala	115,44cm²	172,25cm²	34,2dm²	11dm²	754,29m²	503,96dm²

331. 192 cm³ **332.** 39 cm³
333. 98,3 cm³ **334.** 1,5 m³
335.

Andmed / Harj. nr.	1	2	3	4	5	6
Põhiserv (cm)	6	3	12	10	5	6,2
Apoteem (cm)	5	2,5	10	13	6,5	8
Kõrgus (cm)	4	2	8	12	6	7,4
Põhipindala (cm²)	36	9	144	100	25	38,44
Külgpindala (cm²)	60	15	240	260	65	99,2
Täispindala (cm²)	96	24	384	360	90	137,64
Ruumala (cm³)	48	6	384	400	50	95

338. 37,6 cm²; 54,2 cm² **339.** 125,6 m²
340. 5 cm **341.** 100 cm³

342. 154 m³ **343.** 1256 cm³ **344.** 38,6 cm³

345.

Harj. nr.	Põhja-raadius (cm)	Moodus-taja (cm)	Kõrgus (cm)	Põhi-pindala (cm^2)	Külg-pindala (cm^2)	Ruumala (cm^3)
1	2,4	3,6	3,1	18	27,2	18,6
2	5,8	8,5	6,1	106	155	215
3	7,1	11,2	8,7	158	250	460
4	12,4	1,92	16	482	75	2550
5	13,3	19,7	14	555	820	2600

346. 314 cm^2; 805 cm^2; 163 cm^2; 61 dm^2; 580 m^2

347. 28 dm^2; 113 cm^2; 3,14 dm^2; 55 m^2; 452 mm^2

348. 24,4 dm^2 **349.** 510 milj. km^2

350. 6,25 cm **351.** 113 cm^3

351. 113 cm^3.

352.

Harj. nr.	r	r^2	r^3	4π	$4\pi r^2$	$4\pi r^3$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
1	5	25	125	12,56	314	1570	523
2	7	49	343	12,56	615	4300	1433
3	2,4	5,76	13,82	12,56	72,5	174	58
4	3,6	12,96	46,66	12,56	163	587	196
5	22	484	10650	12,56	6100	13400	44667

353. Üks õun läbimõõduga 14 cm

354. 14 liitrit

355. 4,1 kg
356. Täispindala
357. Täispindala
358. 125 cm^3
359. 7,07 cm
360. 108 tonni
361. 8 m
362. 0,6 m^2
364. 17 cm^2
365. 8,5 cm
366. 90^0; 45^0; 45^0
367. 30^0; 30^0 120^0
368. 81 cm^2
369. 17,3 kvintaali
370. 2 dm^2
371. 15 cm
372. 23,3 cm^2; 32 cm^2
373. 36 cm^2; 16 cm^3
374. 12 m
375. 200 cm^2; 314 cm^2; 450 cm^2; 545 cm^2
376. 9,42 m
377. 19 cm^2
379. 121 cm^2; 102 cm^3
380. 0,71 mm
381. 32,6 liitrit.
382. 5,27 dm^2
383. 200 g
384. 98 cm^2
385. 31,7 dm^2
386. 545 cm^3
387. 78,5 dm^2; 65,5 dm^3
388. Kuubi pindala on suurem
389. Kaks haavlit kaalub rohkem.
390. 25,5 dm^2 **391.** 2,5 cm **392.** 33,3%

SISUKORD.

ALGEBRA. Lk.

Vastutav toimetaja A. Mitt.

Ladumisele antud 29. V 1946. Trükkimisele antud 20. VIII 1946. Trükiarv 24600. Paber 56 × 79 1/16. Trükipoognaid 12,25. Trükitähti trükipoognas 32480. Arvutuspoognaid 9,9. MB-01668. Tellimise nr. 963. Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4.

На эстонском языке.
А. Вихман, Учебник математики для VII кл.

Rbl. 5.—