Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Deivid Saad

Mazur–Ulami omadus kahemõõtmelises mitte rangelt kumeras Banachi ruumis

Matemaatika ja statistika õppekava
Matemaatika eriala
Magistritöö (30 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller
Nikita Leo

Tartu 2026

MAZUR–ULAMI OMADUS KAHEMÕÕTMELISES MITTE RANGELT KUMERAS BANACHI RUUMIS

Magistritöö

Deivid Saad

Lühikokkuvõte

Käesoleva magistritöö eesmärk on tutvustada Tingley probleemi tausta ja esitada kaks olulist tulemust: Tingley vastaspunktide teoreem ning Javier Cabello Sáncheze tulemus, mille järgi igal mitte rangelt kumeral kahemõõtmelisel reaalsel Banachi ruumil on Mazur–Ulami omadus. Töös selgitatakse, kuidas Tingley teoreem ja kahemõõtmelise ruumi geomeetria võimaldavad tõestada, et ühiksfääride vaheline sürjektiivne isomeetria on teatava lineaarse isomeetria ahend.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

Märksõnad: isomeetriline laiend, Tingley probleem, Mazur–Ulami omadus.

THE MAZUR–ULAM PROPERTY OF A TWO-DIMENSIONAL NON-STRICTLY CONVEX BANACH SPACE

Master's thesis

Deivid Saad

Abstract

This thesis introduces the background of Tingley's problem and presents two main results: Tingley's antipodal theorem and Javier Cabello Sánchez's proof that every non-strictly convex two-dimensional real Banach space has the Mazur–Ulam property. It explains how Tingley's theorem and two-dimensional geometry of the unit sphere are used to establish this property.

CERCS research specialization: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

Keywords: isometric extension, Tingley problem, Mazur–Ulam property.

Sisukord

Sissejuhatus

Selles töös vaatleme üksnes reaalseid normeeritud ruume.

Paljud matemaatikud üle kogu maailma uurivad aktiivselt probleemi, mida tänapäeval Tingley probleemina tuntakse. Nimi pärineb Daryl Tingley 1987. aasta artiklist [17], milles esitati järgmine küsimus:

Küsimus (Tingley probleem)**.** *Olgu X ja Y kaks Banachi ruumi. Olgu f sürjektiivne isomeetria nende ühiksfääride S_X ja S_Y vahel. Kas f on ruumide X ja Y vahel tegutseva lineaarse isomeetria ahend?*

Seda küsimust tuleb mõista laiemas kontekstis. Juba peaaegu sada aastat on uuritud erinevate Banachi ruumide alamhulkade vahel defineeritud isomeetriate afiinset jätkamist. Kõik algas 1932. aastal Stanisław Mazuri ja Stanisław Ulami tööga [12]. Tegemist oli vastusega Stefan Banachi esitatud küsimusele ning artikli põhitulemus, tuntud kui *Mazur–Ulami teoreem*, väidab järgmist:

Teoreem (Mazur–Ulami teoreem)**.** *Kui $f\colon X \to Y$ on sürjektiivne isomeetria normeeritud ruumide X ja Y vahel, siis f on afiinne.*

Huvi võib aga pakkuda ka küsimus, kas sarnane tulemus kehtib ka siis, kui isomeetria on defineeritud ruumi X mingil alamhulgal. Sellisel juhul võiks küsida, kas vaadeldav kujutus on mingi afiinse isomeetria ahend. Oluline tulemus selles suunas pärineb Piotr Mankiewiczi 1972. aasta artiklist [10]:

Teoreem. *Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $A \subset X$ ja $B \subset Y$ nende mingid alamhulgad. Kui A on sidus ja lahtine ja B on lahtine või kui A ja B on mõlemad kumerad, kinnised ja mittetühja sisemusega, siis iga sürjektiivne isomeetria $f\colon A \to B$ on mingi afiinse isomeetria $\tilde{f}\colon X \to Y$ ahend.*

Sellest tulemusest järeldub muuhulgas, et sürjektiivne isomeetria kahe normeeritud ruumi ühikkerade vahel on laiendatav lineaarseks isomeetriaks nende ruumide vahel. On loomulik küsida, kas sama kehtib ka siis, kui asendame ühikkerad ühiksfääridega.

Tingley probleemiga seostub ka järgmine mõiste, mille nimi viitab ülalmainitud Mazur–Ulami teoreemile:

Definitsioon. Banachi ruumil X on Mazur–Ulami omadus, kui iga Banachi ruumi Y korral kehtib, et iga sürjektiivne isomeetria $f\colon S_X \to S_Y$ on mingi lineaarse isomeetria $\tilde{f}\colon X \to Y$ ahend.

Tingley probleem on seega samaväärne küsimusega, kas igal Banachi ruumil on Mazur–Ulami omadus.

On teada märkimisväärne hulk Banachi ruume, millel see omadus on:

- $\ell^p(\Gamma)$ ruumid, kus $1 \leq p \leq \infty$ (G. G. Ding [4–7]);
- $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ruumid, kus (Ω, Σ, μ) on σ-lõpliku mõõduga ruum ning $1 \leq p \leq \infty$ (D. Tan [14–16]);
- lõplikumõõtmelised polüheedrilised Banachi ruumid (V. Kadets ja M. Martín [9]).

Kuigi positiivseid tulemusi on palju, ei ole veel jätkuvalt teada sedagi, kas Mazur–Ulami omadus on igal lõplikumõõtmelisel Banachi ruumil. Pikka aega püsis see küsimus lahendamata isegi kahemõõtmelisel ehk lihtsaimal mittetriviaalsel juhul. Aastal 2022 sai see küsimus kahemõõtmelisel juhul aga lõpuks positiivse vastuse.

Esimeseks sammuks oli Javier Cabello Sáncheze 2019. aastal avaldatud artikkel [3], milles näidatakse, et Mazur–Ulami omadus on kõigil mitte rangelt kumeratel kahemõõtmelistel ruumidel. Teiseks sammuks oli 2021. aasta Taras Banakhi ja Sáncheze ühine artikkel [2], kus oli tõestatud, et see omadus on ka igal mittesiledal kahemõõtmelisel ruumil. Tõestuse viis lõpuni Banakhi 2022. aastal avaldatud artikkel [1], milles tõestatakse, et see omadus on ka igal rangelt kumeral siledal kahemõõtmelisel Banachi ruumil.

Käesoleva töö esimeses peatükis tõestatakse Tingley teoreem ehk ülalmainitud Tingley artikli põhitulemus, mis ütleb, et kui X ja Y on lõplikumõõtmelised Banachi ruumid, siis iga sürjektiivne isomeetria $f\colon S_X \to S_Y$ kujutab antipoodid antipoodideks (st iga $x \in S_X$ korral kehtib $f(-x) = -f(x)$). Seda tulemust kasutatakse teises peatükis, kus esitatakse üksikasjalik tõestus Sáncheze tulemusest mitte rangelt kumera kahemõõtmelise Banachi ruumi kohta.

1 Tingley teoreemi tõestus

Selles osas esitame Daryl Tingley 1987. aasta artikli [17] põhitulemuse detailse tõestuse lõplikumõõtmeliste reaalsete Banachi ruumide korral. See tulemus ütleb, et kui kahe lõplikumõõtmelise normeeritud ruumi ühiksfääride vahel on sürjektiivne isomeetria, siis see isomeetria säilitab antipodaalsed punktid. Kuigi see tulemus ei lahenda kogu Tingley probleemi täielikult, on see üks probleemi põhilisi struktuurseid samme. Hiljem kasutame seda Cabello Sáncheze tõestuses.

Tingley teoreemi tõestus põhineb ühikkera ja ühiksfääri kumerusgeomeetrial. Kõigepealt kirjeldame ühikkera maksimaalseid päristahke ning vaatleme neid ühiksfääri maksimaalsete kumerate alamhulkadena. Seejärel kasutame kompaktsete kumerate hulkade koondumist Hausdorffi kauguse järgi, et uurida maksimaalsete päristahkude piirhulki. Selle abil tõestame esmalt antipodaalsuse säilimise eksponeeritud punktide puhul, seejärel ekstreempunktide puhul ja lõpuks kõigi sfääri punktide puhul.

Järgmises peatükis kasutame Tingley teoreemi selleks, et näidata, et ühiksfääride vaheline sürjektiivne isomeetria säilitab sfääril paiknevad sirglõigud. Just see järeldus on Cabello Sáncheze tõestuses kahemõõtmelise ruumi juhu jaoks kõige olulisem Tingley teoreemi rakenduskoht.

Olgu kogu selles peatükis X lõplikumõõtmeline reaalne Banachi ruum, $S = S_X$ tema ühiksfäär ja $B = B_X$ tema kinnine ühikkera. Kui A on ruumi X alamhulk, siis tähistab $\operatorname{aff} A$ tema afiinset katet, $\operatorname{conv} A$ tema kumerat katet, $\operatorname{ext} A$ tema ekstreempunktide hulka ja $\operatorname{relint} A$ tema suhtelist sisemust afiinse katte suhtes. Punktide x ja y vahelist lõiku tähistame $[x, y]$.

1.1 Tahud, maksimaalsed päristahud ja sfääri meetriline geomeetria

Kõigepealt fikseerime Tingley tõestuses kasutatavad geomeetrilised mõisted.

Definitsioon 1.1. Olgu $K \subset X$ kinnine kumer hulk.

- Hüpertasand H on hulga K *tugihüpertasand*, kui $K \cap H \neq \varnothing$ ja K paikneb ühes kahest hüpertasandi H poolt määratud kinnises poolruumis.

- Hulga K *tahk* on hulk kujul $K \cap H$, kus H on hulga K tugihüpertasand. Hulga K *päristahk* on selline tahk, mis ei ole kogu K.

- Hulga K päristahk on *maksimaalne*, kui ta ei ole ühegi teise K päristahu pärisalamhulk.

- Punkt $x \in K$ on hulga K *eksponeeritud punkt*, kui leidub tugihüpertasand H nii, et $K \cap H = \{x\}$.

Selles peatükis käsitleme eelkõige ühikkera B tahke. Kuna ühikkera B iga päristahk paikneb ühiksfääril S, võime ühikkera maksimaalseid päristahke vaadelda ka sfääri maksimaalsete kumerate alamhulkadena.

Lemma 1.2. *Hulk $F \subseteq S$ on B maksimaalne päristahk parajasti siis, kui F on sfääri S maksimaalne kumer alamhulk.*

Tõestus. Olgu F ühikkera B maksimaalne päristahk. Siis on F kumer ja $F \subset S$. Eeldame, et $F \subseteq K \subseteq S$, kus K on kumer. Näitame, et $K = F$.

Olgu $x \in \operatorname{relint} K$. Kuna $x \in S = \partial B$, leidub ühikkera B tugihüpertasand H, mis sisaldab punkti x. Kirjutame selle hüpertasandi kujul

$$H = \{u \in X : \varphi(u) = 1\},$$

kus $\varphi \in X^*$ on selline, et $\varphi(u) \leq 1$ iga $u \in B$ korral ja $\varphi(x) = 1$.

Näitame, et $K \subseteq H$. Olgu $y \in K$. Kuna $x \in \operatorname{relint} K$, leidub $z \in K$ ja $t \in (0, 1)$ nii, et $x = (1 - t)y + tz$. Kuna $y, z \in K \subseteq S \subseteq B$, siis

$$\varphi(y) \leq 1 \qquad \text{ja} \qquad \varphi(z) \leq 1.$$

Teisalt

$$1 = \varphi(x) = (1 - t)\varphi(y) + t\varphi(z).$$

Kuna paremal pool on kahe arvu $\varphi(y) \leq 1$ ja $\varphi(z) \leq 1$ kumer kombinatsioon, saab see olla võrdne arvuga 1 ainult siis, kui $\varphi(y) = \varphi(z) = 1$. Seega $y \in H$. Kuna $y \in K$ oli suvaline, saame $K \subseteq H$.

Järelikult $K \subseteq B \cap H$. Hulk $B \cap H$ on ühikkera B päristahk ja sisaldab hulka F. Kuna F on maksimaalne päristahk, peab kehtima $B \cap H = F$. Niisiis

$$F \subseteq K \subseteq B \cap H = F,$$

mistõttu $K = F$. Seega on F sfääri S maksimaalne kumer alamhulk.

Vastupidi, olgu $F \subseteq S$ sfääri S maksimaalne kumer alamhulk. Kuna $F \subseteq S = \partial B$, ei lõiku F hulga B sisemusega. Seega leidub hulka B toetav hüpertasand H, mille korral

$$F \subseteq B \cap H.$$

Seda saab näha näiteks valides punkti $x \in \operatorname{relint} F$ ja võttes hulka B punktis x toetava hüpertasandi; sama argument nagu eespool näitab, et kogu F sisaldub selles hüpertasandis.

Hulk $B \cap H$ on kumer alamhulk sfääril S. Kuna F on sfääri maksimaalne kumer alamhulk, järeldub sellest $F = B \cap H$. Seega on F ühikkera B päristahk.

Jääb näidata maksimaalsus. Kui F sisalduks mõnes ühikkera B suuremas päristahus G, siis oleks $G \subseteq S$ kumer alamhulk ja

$$F \subsetneq G \subseteq S,$$

mis oleks vastuolus F maksimaalsusega. Järelikult on F ühikkera B maksimaalne päristahk. $\square$

Punkti $x \in S$ *täht* sfääril S on

$$\operatorname{st}(x, S) = \{y \in S : [x, y] \subseteq S\}.$$

Seega koosneb $\operatorname{st}(x, S)$ parajasti neist ühiksfääri punktidest, mida saab punktiga x ühendada sfääril paikneva sirglõiguga.

Lemma 1.3. *Olgu $F \subseteq S$ kumer hulk ja olgu $x \in \operatorname{relint} F$. Kui $y \in S$ ja $[x, y] \subseteq S$, siis $\operatorname{conv}(F \cup \{y\}) \subseteq S$ ja $F \subseteq \operatorname{st}(y, S)$.*

Tõestus. Piisab näidata, et iga $z \in F$ korral $[y, z] \subseteq S$. Fikseerime $z \in F$ ja $p \in [y, z]$. Kui $z = x$, siis väide järeldub kohe eeldusest $[x, y] \subset S$. Eeldame nüüd, et $z \neq x$.

Kui punktid x, y, z ei ole kõik erinevad, siis on väide ilmne. Oletame seega, et nad on erinevad. Kuna $x \in \operatorname{relint} F$, leidub punkt $z' \in F$ nii, et x on lõigu $[z, z']$ sisepunkt. Kuna $[x, y] \subseteq S$, leidub punkt $q \in [x, y]$, mille jaoks punktid z', q, p on kollineaarsed ja $q \in [z', p]$.

Punktid z' ja q kuuluvad sfääri S, seega annab ühikkera kumerus, et kogu lõik $[z', q]$ sisaldub keras B. Kuna q paikneb lõigul $[z', p]$, järeldub sellest $\|p\| \geq 1$.

Tõepoolest, kui $p \in \operatorname{int} B$, siis kuuluks lõigu $[z', p]$ iga punkt peale võimaliku otspunkti z' hulga B sisemusse, mis oleks vastuolus sellega, et $q \in S = \partial B$.

Teisest küljest kuulub p lõiku $[y, z]$ ning punktid $y, z \in S$, mistõttu $[y, z] \subseteq B$ ja seega $\|p\| \leq 1$. Saame $\|p\| = 1$, st $p \in S$. Kuna $p \in [y, z]$ oli suvaline, siis $[y, z] \subseteq S$. □

Järeldus 1.4. *Kui F on sfääri S maksimaalne kumer alamhulk ja $x \in \operatorname{relint} F$, siis $F = \operatorname{st}(x, S)$.*

Tõestus. Kuna F on kumer ja $x \in F$, siis $F \subseteq \operatorname{st}(x, S)$. Olgu $y \in \operatorname{st}(x, S)$. Siis $[x, y] \subseteq S$, mistõttu eelmine lemma annab

$$\operatorname{conv}(F \cup \{y\}) \subseteq S.$$

Kuna F on sfääri S maksimaalne kumer alamhulk, peab kehtima $\operatorname{conv}(F \cup \{y\}) = F$. Seega $y \in F$. Järelikult $\operatorname{st}(x, S) \subseteq F$. □

Märkus 1.5. Üldiselt ei tarvitse hulk $\operatorname{st}(x, S)$ olla kumer.

Järgmiseks kirjeldame sfääril paiknevad lõigud normi abil.

Lemma 1.6. *Olgu $x, y \in S$. Siis $[x, y] \subseteq S$ parajasti siis, kui $\|x + y\| = 2$.*

Tõestus. Kui $[x, y] \subseteq S$, siis on sfääril ka selle lõigu keskpunkt, seega $\|\frac{x+y}{2}\| = 1$ ehk $\|x + y\| = 2$.

Eeldame nüüd et $\|x + y\| = 2$. Fikseerime vabalt $t \in [0, 1]$ ja olgu

$$u = (1 - t)x + ty \qquad \text{ja} \qquad v = tx + (1 - t)y.$$

Siis $u + v = x + y$, mistõttu

$$2 = \|x + y\| = \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \leq 2.$$

Järelikult peab kehtima $\|u\| = \|v\| = 1$. Kuna u oli suvaline lõigu $[x, y]$ punkt, järeldub sellest, et $[x, y] \subset S$. □

Tähistame edaspidi $x \in S$ korral

$$\mathcal{D}(x) = \{y \in S : \|x - y\| = 2\}.$$

Lemma 1.7. *Iga $x \in S$ korral*

$$\mathcal{D}(x) = \mathrm{st}(-x, S).$$

Tõestus. Olgu $y \in S$. Eelmise lemma põhjal $y \in \mathrm{st}(-x, S)$ parajasti siis, kui $[-x, y] \subset S$ ehk $\|-x+y\| = 2$. Viimane on samaväärne tingimusega $y \in \mathcal{D}(x)$, sest $\|-x+y\| = \|x-y\|$. Seega $\mathcal{D}(x) = \mathrm{st}(-x, S)$. □

1.2 Hausdorffi kaugus ja maksimaalsete päristahkude piirid

Tingley tõestuse tehnilisem osa uurib ühikkera maksimaalsete päristahkude jadasid. Selleks kasutame kompaktsete hulkade Hausdorffi kaugust. Selles alapunktis tõestame eralduslemma eksponeeritud punkti ja tema tähes oleva teise punkti kohta. Seda lemmat kasutame hiljem antipodaalsuse säilimise tõestamisel eksponeeritud punktide puhul. Selles alajaotuses kasutame abistavat eukleidilist normi. Kuna lõplikumõõtmelises ruumis on kõik normid ekvivalentsed, ei sõltu koondumise mõiste sisuliselt selle normi valikust.

Definitsioon 1.8. Kui $A, B \subset \mathbb{R}^n$ on mittetühjad kompaktsed hulgad, siis nende *Hausdorffi kaugus* on

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|_2,\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|_2\right\}.$$

Kirjutame $A_i \to A$, kui $d_H(A_i, A) \to 0$.

Hausdorffi kaugus on standardne mõiste kompaktsete hulkade teoorias, vt näiteks Eggleston [8].

Teoreem 1.9 (Blaschke valikuteoreem [8])**.** *Iga ühiselt tõkestatud mittetühjade kompaktsete kumerate hulkade jada ruumis $\mathbb{R}^n$ sisaldab Hausdorffi kauguse järgi koonduvat osajada.*

Lemma 1.10. *Olgu $F_i \to T$ Hausdorffi kauguse järgi.*

- *Kui $x_i \in F_i$ ja $x_i \to x$, siis $x \in T$.*
- *Kui $x \in T$, siis leidub jada $x_i \in F_i$, mille jaoks $x_i \to x$.*

Tõestus. Mõlemad väited järgnevad otse Hausdorffi kauguse definitsioonist. □

Lemma 1.11. *Olgu $F_i \to T$ ja olgu $g\colon (\bigcup_i F_i) \cup T \to \mathbb{R}^m$ pidev kujutus. Kui lisaks $g(F_i) \to T'$, siis $g(T) = T'$.*

Tõestus. Olgu $y \in T$. Lemma 1.10 järgi leidub jada $x_i \in F_i$ nii, et $x_i \to y$. Pidevuse tõttu $g(x_i) \to g(y)$. Kuna $g(x_i) \in g(F_i)$ ja $g(F_i) \to T'$, annab Lemma 1.10, et $g(y) \in T'$. Seega $g(T) \subseteq T'$.

Olgu nüüd $y' \in T'$. Kuna $g(F_i) \to T'$, leiduvad punktid $y_i \in g(F_i)$, mille korral $y_i \to y'$. Valime $x_i \in F_i$ nii, et $g(x_i) = y_i$. Kuna hulgad F_i jäävad tõkestatud hulka, sisaldab jada (x_i) koonduvat osajada (x_{i_j}). Olgu selle piirelement y. Lemma 1.10 järgi $y \in T$, pidevuse tõttu $g(x_{i_j}) \to g(y)$. Teisalt $g(x_{i_j}) = y_{i_j} \to y'$. Seega $y' = g(y) \in g(T)$. Niisiis $T' \subseteq g(T)$. □

Järgmine tasandigeomeetria lemma on Tingley tõestuse tehniline tuum.

Lemma 1.12. *Olgu $\pi \subset \mathbb{R}^n$ kahemõõtmeline alamruum, milles on fikseeritud ristuvad x- ja y-telg. Olgu $\varepsilon > 0$, olgu punkt p positiivsel y-teljel ja punkt q positiivsel x-teljel nii, et $\|p\|_2 > \varepsilon$ ja $\|q\|_2 > \varepsilon$. Tähistagu l sirget läbi punkti p, mis on paralleelne x-teljega, ning olgu*

$$K = \operatorname{conv}\big(\{p\} \cup E(0, \varepsilon)\big),$$

kus $E(0, \varepsilon)$ on eukleidiline kera keskpunktiga 0 ja raadiusega ε.

Kui punkt $z \in \pi$ asub teises veerandis piirkonnas, mida piiravad sirge l, negatiivne x-telg ja hulga K piirjoon, ning kui $r \in \mathbb{R}^n$ rahuldab tingimust

$$[z, r] \cap \operatorname{relint} K = \varnothing,$$

siis $\|r - q\|_2 \geq \varepsilon$.

Tõestus. Vaatleme tasandit π ja punkti r sisaldavat alamruumi, mille mõõde on ülimalt kolm. Vajadusel samastame selle alamruumi eukleidilise ruumiga $\mathbb{R}^3$. Olgu η selle alamruumi kahemõõtmeline alamruum, mis sisaldab π y-telge ja on risti π x-teljega. Olgu $P\colon \mathbb{R}^3 \to \eta$ ortogonaalprojektsioon tasandile η.

Kui r asub tasandil η või tasandi η suhtes samal poolel kui z, siis on punkt q temast vähemalt ε kaugusel, sest q ise asub nullpunktist kaugusel üle ε. Seega jääb üle ainult juht, kus r ja z paiknevad η erinevatel pooltel.

Sel juhul lõikab lõik $[z, r]$ tasandit η. Olgu see lõikepunkt t. Eeldusest $[z, r] \cap \operatorname{relint} K = \varnothing$ järeldub, et ka $t \notin \eta \cap \operatorname{relint} K$. Projektsiooni P korral $\eta \cap \operatorname{relint} K = \operatorname{relint} P(K)$. Samas $P(z) \in \operatorname{relint} P(K)$ ning punkt $t \in [P(z), P(r)]$. Hulga $\operatorname{relint} P(K)$ kumerusest järeldub, et $P(r) \notin \operatorname{relint} P(K)$.

Kuna $P(q) = 0$ ja $P(K)$ sisaldab eukleidilist kera $E(0, \varepsilon)$, saame

$$\|P(r) - P(q)\|_2 = \|P(r)\|_2 \geq \varepsilon.$$

Ortogonaalprojektsioon ei suurenda kaugusi, seega

$$\varepsilon \leq \|P(r) - P(q)\|_2 \leq \|r - q\|_2.$$

Väide on tõestatud. □

Lemma 1.13. *Olgu $p \in S$ eksponeeritud punkt ja olgu $q \in \operatorname{st}(p, S)$, $q \neq p$. Siis leidub kinnine kumer hulk $T \subseteq S$ ja maksimaalsete päristahkude jada (F_i) nii, et*

$$F_i \to T, \qquad p \in T, \qquad q \notin T.$$

Tõestus. Valime tugihüpertasandi H, mis eksponeerib punkti p, st mille korral $H \cap S = \{p\}$. Olgu π punktide p ja q poolt määratud kahemõõtmeline alamruum ning olgu $l = H \cap \pi$. Valime tasandil π abistava eukleidilise struktuuri nii, et sirge $\mathbb{R}p$ ja l oleksid risti.

Olgu m sirge läbi punkti q, mis on paralleelne sirgega l. Sirge m lõikab lõiku $[p, -p]$ punktis u. Punkt u ei saa olla võrdne ei punktiga p ega $-p$. Tõepoolest, kui $u = p$, siis oleks q sirgel l, seega hüpertasandil H, mis oleks vastuolus asjaoluga, et $H \cap S = \{p\}$. Kui $u = -p$, siis oleks q tugisirgel, mis oleks võimatu, sest $q \in \operatorname{st}(p, S)$ ja H eksponeerib punkti p. Seega $u \in (-p, p)$. Järelikult $u \in \operatorname{int} B$.

Kuna norm ja eukleidiline norm on lõplikumõõtmelises ruumis ekvivalentsed, leidub $\varepsilon > 0$, nii et eukleidiline kera $E(u, \varepsilon)$ sisaldub kera B sisemuses. Lisaks võime eeldada, et ε on nii väike, et $\|p - u\|_2 > \varepsilon$ ja $\|q - u\|_2 > \varepsilon$.

Valime jada $(p_i) \subset \pi \cap S$, mis koondub punktiks p ja mille punktid paiknevad sirge $\mathbb{R}p$ sellel poolel, kus punkt q ei asu. Jättes vajaduse korral lõpliku arvu liikmeid kõrvale, võime eeldada, et iga p_i asub tasandil π veerandis, mida kirjeldab lemma 1.12, kui võtta nullpunktiks u, positiivseks x teljeks kiir $u + \mathbb{R}_+(q - u)$ ja positiivseks y-teljeks kiir $u + \mathbb{R}_+(p - u)$.

Iga i jaoks valime sfääri S maksimaalse kumera alamhulga F_i, mis sisaldab punkti p_i. Lemma 1.2 põhjal on F_i ühikkera B maksimaalne päristahk. Kuna $F_i \subset S \subset B$ ja F_i on kompaktne, saame Blaschke valikuteoreemi põhjal minna üle osajadale nii, et $F_i \to T$ mingi kompaktse kumera hulga T puhul; seda osajada tähistame lihtsuse mõttes endiselt (F_i).

Kuna iga F_i sisaldub kinnises hulgas S, annab lemma 1.10, et $T \subseteq S$. Samuti $p_i \in F_i$ ja $p_i \to p$, mistõttu lemma 1.10 järgi $p \in T$.

Jääb näidata, et $q \notin T$. Olgu $r \in F_i$. Kuna F_i on kumer ning $p_i, r \in F_i \subset S$, siis $[p_i, r] \subseteq S$. Vaatleme nüüd hulka

$$K = \operatorname{conv}\big(\{p\} \cup E(u, \varepsilon)\big).$$

Siis $K \subseteq B$ ja $\operatorname{relint} K \subseteq \operatorname{relint} B$, välja arvatud võimalik tipupunkt p. Seetõttu ei saa sfääril paiknev lõik $[p_i, r]$ lõigata hulka $\operatorname{relint} K$.

Rakendame lemmat 1.12 koordinaatides, mille alguspunkt on u. Nendes koordinaatides vastavad punktidele p, q, p_i, r vastavalt punktid $p-u$, $q-u$, $p_i - u$ ja $r - u$. Tehtud valikute tõttu on lemma eeldused täidetud, seega saame $\|r - q\|_2 \geq \varepsilon$, mis kehtib iga $r \in F_i$ ja iga i korral.

Kui $q \in T$, siis lemma 1.10 põhjal leiduks jada $r_i \in F_i$ nii, et $r_i \to q$. Kuid äsjatõestatud hinnangu põhjal saaksime iga i korral $\|r_i - q\|_2 \geq \varepsilon$, mis oleks vastuolus koondumisega $r_i \to q$. Seega $q \notin T$. □

1.3 Antipoodide säilimine

Olgu nüüd Y teine lõplikumõõtmeline reaalne Banachi ruum ühiksfääriga S_Y ning olgu

$$f \colon S_X \to S_Y$$

sürjektiivne isomeetria.

Lemma 1.14. *Iga $x \in S_X$ korral kehtib*

$$f(\operatorname{st}(x, S_X)) = \operatorname{st}(-f(-x), S_Y).$$

Tõestus. Lemmast 1.6 saame

$$\operatorname{st}(x, S_X) = \{y \in S_X : \|x + y\|_X = 2\}.$$

Seega

$$
\begin{aligned}
f(\mathrm{st}(x, S_X)) &= \{f(y) : y \in S_X,\ \|x+y\|_X = 2\} \\
&= \{u \in S_Y : \|f^{-1}(u) - (-x)\|_X = 2\} \\
&= \{u \in S_Y : \|u - f(-x)\|_Y = 2\}.
\end{aligned}
$$

Rakendades lemmat 1.6 ruumis Y, saame

$$\{u \in S_Y : \|u - f(-x)\|_Y = 2\} = \mathrm{st}(-f(-x), S_Y).$$

□

Järeldus 1.15. *Iga $x \in S_X$ korral kehtib*

$$-f(-x) \in f(\mathrm{st}(x, S_X)).$$

Tõestus. Kuna $-f(-x) \in \mathrm{st}(-f(-x), S_Y)$, siis lemma 1.14 järgi $-f(-x) \in f(\mathrm{st}(x, S_X))$. □

Lemma 1.16. *Kui $F \subseteq S_X$ on sfääri S_X maksimaalne kumer alamhulk, siis*

$$f(-F) = -f(F).$$

Tõestus. Olgu $z \in \operatorname{relint} F$. Järelduse 1.4 põhjal on $F = \mathrm{st}(z, S_X)$. Järeldus 1.15 annab nüüd

$$-f(-z) \in f(\mathrm{st}(z, S_X)) = f(F),$$

ehk

$$f(-z) \in -f(F).$$

Seega

$$f(-\operatorname{relint} F) \subseteq -f(F).$$

Kuna ühikkera maksimaalne päristahk F on oma relatiivse sisemuse sulund ja hulk $-f(F)$ on kinnine, järeldub pidevuse tõttu

$$f(-F) \subseteq -f(F).$$

Rakendades sama arutlust hulgale $-F$, saame

$$f(F) \subseteq -f(-F),$$

seega $-f(F) \subseteq f(-F)$. Koos eelnevalt saadud sisalduvusega $f(-F) \subseteq -f(F)$ annab see

$$f(-F) = -f(F).$$

$\square$

Lemma 1.17. *Olgu $F \subseteq S_X$. Siis on F ühikkera B_X maksimaalne päristahk parajasti siis, kui $f(F) \subseteq S_Y$ on ühikkera B_Y maksimaalne päristahk.*

Tõestus. Olgu F ühikkera B_X maksimaalne päristahk. Lemma 1.2 põhjal on F sfääri S_X maksimaalne kumer alamhulk. Valime punkti $x \in \operatorname{relint} F$. Olgu F' ühikkera B_Y maksimaalne päristahk, mis sisaldab punkti $f(x)$, ning valime punkti $y \in \operatorname{relint} F'$. Järelduse 1.4 põhjal on

$$F' = \operatorname{st}(y, S_Y).$$

Rakendades lemmat 1.14 isomeetriale $f^{-1}\colon S_Y \to S_X$, saame

$$f^{-1}(F') = f^{-1}(\operatorname{st}(y, S_Y)) = \operatorname{st}(-f^{-1}(-y), S_X).$$

Kuna $f(x) \in F'$, siis $x \in f^{-1}(F')$. Seega $x \in \operatorname{st}(-f^{-1}(-y), S_X)$. Kuna $x \in \operatorname{relint} F$, annab lemma 1.3

$$F \subseteq \operatorname{st}(-f^{-1}(-y), S_X) = f^{-1}(F').$$

Järelikult $f(F) \subseteq F'$.

Rakendame sama arutelu isomeetriale f^{-1} ja ühikkera B_Y maksimaalsele päristahule F'. Kuna $y \in \operatorname{relint} F'$, leidub ühikkera B_X maksimaalne päristahk F'', mille korral $f^{-1}(y) \in F''$ ning analoogiliselt eelmise aruteluga saame

$$f^{-1}(F') \subseteq F''.$$

Kokku saame $F \subseteq f^{-1}(F') \subseteq F''$. Kuna F ja F'' on ühikkera B_X maksimaalsed päristahud, peab maksimaalsuse tõttu kehtima $F = F''$. Järelikult $f^{-1}(F') = F$ ja seega $f(F) = F'$. Niisiis on $f(F)$ ühikkera B_Y maksimaalne päristahk.

Teistpidi suund saadakse tõestatud isomeetriale $f^{-1}\colon S_Y \to S_X$ rakendades. $\square$

Lemma 1.18. *Kui $p \in S_X$ on ühikkera B_X eksponeeritud punkt, siis*

$$f(-p) = -f(p).$$

Tõestus. Olgu $\mathcal{F}_p$ kõigi selliste kinniste kumerate hulkade $T \subseteq S_X$ kogum, mille korral

$$p \in T \qquad \text{ja} \qquad f(-T) = -f(T).$$

Kogum $\mathcal{F}_p$ ei ole tühi, sest p sisaldub mingil ühikkera B_X maksimaalsel päristahul. Lemma 1.16 põhjal kuulub iga selline päristahk kogumisse $\mathcal{F}_p$.

Olgu

$$U = \bigcap_{T \in \mathcal{F}_p} T.$$

Siis on U kinnine ja kumer. Kuna f on bijektsioon, saame

$$f(-U) = \bigcap_{T \in \mathcal{F}_p} f(-T) = \bigcap_{T \in \mathcal{F}_p} (-f(T)) = -f(U),$$

seega $U \in \mathcal{F}_p$.

Kui $U = \{p\}$, siis võrdusest $f(-U) = -f(U)$ järeldub kohe $f(-p) = -f(p)$.

Oletame nüüd, et leidub $q \in U$ nii, et $q \neq p$. Kuna U on kumer ja $U \subseteq S_X$, saame $[p, q] \subseteq S_X$. Seega $q \in \mathrm{st}(p, S_X)$.

Rakendame lemmat 1.13. Selle järgi leidub kinnine kumer hulk $T_0 \subseteq S_X$ ja ühikkera B_X maksimaalsete päristahkude jada (F_i) nii, et $F_i \to T_0$, $p \in T_0$ ja $q \notin T_0$.

Iga i korral annab lemma 1.16, et $f(-F_i) = -f(F_i)$. Näitame, et sellest järeldub $f(-T_0) = -f(T_0)$. Tõepoolest, kuna $F_i \to T_0$, siis ka $-F_i \to -T_0$. Lõplikumõõtmelises ruumis on kõik normid ekvivalentsed, seega võime Hausdorffi koondumist vaadelda ka X ja Y normi suhtes. Kuna f on isomeetria, saame

$$f(F_i) \to f(T_0) \qquad \text{ja} \qquad f(-F_i) \to f(-T_0).$$

Teiselt poolt $-f(F_i) \to -f(T_0)$. Kuna iga i korral $f(-F_i) = -f(F_i)$, on nende Hausdorffi piirid võrdsed. Järelikult $f(-T_0) = -f(T_0)$. Kuna $p \in T_0$, siis $T_0 \in \mathcal{F}_p$. Järelikult $U \subseteq T_0$, mis on vastuolus sellega, et $q \in U$ ja $q \notin T_0$. Saadud vastuolu näitab, et $U = \{p\}$ ja seega $f(-p) = -f(p)$. $\square$

Teoreem 1.19 (Straszewiczi teoreem, vt nt [13])**.** *Olgu $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktne kumer hulk. Siis on hulga K eksponeeritud punktide hulk tihe hulgas* $\operatorname{ext}(K)$.

Järeldus 1.20. *Kui $p \in \operatorname{ext}(B_X)$, siis*

$$f(-p) = -f(p).$$

Tõestus. Teoreemi 1.19 järgi leidub ühikkera B_X eksponeeritud punktide jada (p_i), mis koondub punktiks p. Lemma 1.18 järgi on iga i korral $f(-p_i) = -f(p_i)$. Isomeetria pidevust kasutades saame piirile üle minnes

$$f(-p) = \lim_i f(-p_i) = \lim_i (-f(p_i)) = -f(p).$$

$\square$

1.4 Tingley teoreem

Selles alapunktis kasutame sissejuhatuses sõnastatud Mankiewiczi jätkuteoreemi järgmises kujus: kui C ja D on kompaktsed kumerad hulgad ning neil on vastavates afiinsetes alamruumides $\operatorname{aff} C$ ja $\operatorname{aff} D$ mittetühi sisemus, ning $g\colon C \to D$ on sürjektiivne isomeetria, siis g on mingi afiinse isomeetria

$$\widetilde{g}\colon \operatorname{aff} C \to \operatorname{aff} D$$

ahend.

Teoreem 1.21 (Tingley, [17])**.** *Olgu X ja Y lõplikumõõtmelised reaalsed Banachi ruumid ning olgu*

$$f\colon S_X \to S_Y$$

sürjektiivne isomeetria. Siis iga $x \in S_X$ korral kehtib

$$f(-x) = -f(x).$$

Tõestus. Olgu $x \in S_X$ ning olgu F ühikkera B_X maksimaalne päristahk, mis sisaldab punkti x. Lemma 1.17 järgi on $f(F)$ ühikkera B_Y maksimaalne päristahk. Lemma 1.16 järgi on $f(-F) = -f(F)$.

Seega on nii F kui ka $f(F)$ kompaktsed kumerad hulgad, millel on vastavates afiinsetes alamruumides mittetühi sisemus. Mankiewiczi teoreemi järgi on ahend $f|_F$ mingi afiinse isomeetria

$$T\colon \operatorname{aff} F \to \operatorname{aff} f(F)$$

ahend. Samamoodi on $f|_{-F}$ mingi afiinse isomeetria

$$T'\colon \operatorname{aff}(-F) \to \operatorname{aff} f(-F) = \operatorname{aff}(-f(F))$$

ahend.

Olgu $n = \dim(\operatorname{aff} F)$. Kuna $x \in F$ ja F on kompaktne kumer hulk afiinses alamruumis $\operatorname{aff} F$, annab Carathéodory teoreem esituse $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, kus $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ ja $x_i \in \operatorname{ext}(F)$. Kuna F on ühikkera B_X tahk, kehtib

$$\operatorname{ext}(F) \subseteq \operatorname{ext}(B_X).$$

Seega annab järeldus 1.20 iga $i = 1, \dots, n+1$ korral $f(-x_i) = -f(x_i)$.

Nüüd kasutame afiinseid laiendusi:

$$\begin{aligned}
f(-x) &= T'(-x) = T'\left(-\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i T'(-x_i) = \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(-x_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i) = -\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i T(x_i) = -T\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right) = -T(x) \\
&= -f(x).
\end{aligned}$$

Kuna $x \in S_X$ oli suvaline, on väide tõestatud. $\square$

2 Põhitulemuse tõestus

Selles peatükis tõestame, et igal mitte rangelt kumeral kahemõõtmelisel Banachi ruumil on Mazur–Ulami omadus. Siin esitatud tõestus on artiklis [3] esitatud tõestuse adaptsioon, milles on ebavajalikud osad kõrvaldatud, lüngad ära täidetud ja sõltuvust allikatest vähendatud. See peatükk katab viidatud artikli järelduseni 3.8, ülejäänud osa artiklist keskendub täiendavatele tulemustele, mida meie siin ei esita.

Normeeritud ruumi N punktide a ja b korral nimetame hulka $\{(1-\lambda)a+\lambda b : \lambda \in [0,1]\}$ lõiguks ja tähistame $[a,b]$. Kui $a \neq b$, siis ütleme, et lõik on mittetriviaalne. Nimetame kaareks kahemõõtmelise normeeritud ruumi N ühiksfääri S_N kinnist sidusat pärisalamhulka, mis sisaldab vähemalt kahte elementi. Järgnevas näitame, et ühiksfääri S_N alamhulk K on kaar parajasti siis, kui see on homöomorfne lõiguga $[0,1]$ (ehk mittetriviaalse lõiguga mistahes Banachi ruumis).

Olgu X kahemõõtmeline normeeritud Banachi ruum, Y mingi teine Banachi ruum ja $\tau\colon S_X \to S_Y$ sürjektiivne isomeetria. Meie eesmärgiks on näidata, et kui X pole rangelt kumer (st kui S_X sisaldab mittetriviaalset lõiku), siis τ on mingi lineaarse isomeetria $T\colon X \to Y$ ahend. Piisab näidata, et τ on mingi lineaarse kujutuse $T\colon X \to Y$ ahend. Tõepoolest, kui selline kujutus T leidub, siis see kujutab sfääri sfääriks ja seega on ka isomeetria.

Paneme veel tähele, et kuna kujutus τ on homöomorfism, siis peab ruum Y samuti kahemõõtmeline olema. Viimase väite põhjendus on kirjandusest kergesti leitav, mistõttu me sellel pikalt ei peatu. Üks võimalik põhjendus on, et juhul $\dim Y < 2$ saame vastuolu sellega, et S_X on lõpmatu ja S_Y lõplik, juhul $\dim Y > 2$ saame vastuolu sellega, et kahe erineva punkti $p, q \in S_X$ korral on $S_X \setminus \{p,q\}$ mittesidus ja $S_Y \setminus \{\tau(p), \tau(q)\}$ sidus.

Tõestuse ülesehitus on järgmine. Esimese sammuna näitame, et kui S_X sisaldab mittetriviaalset lõiku, siis τ ühtib sellel lõigul mingi lineaarse kujutusega $T\colon X \to Y$. Teise sammuna näitame, et kui $T\colon X \to Y$ on lineaarne kujutus ja $\tau = T$ mingil kaarel K, siis kas $\tau = T$ tervel sfääril või kehtib see võrdus mingil sellisel kaarel K', mis on selle omaduse suhtes maksimaalne: kui K'' on kaar, $K' \subset K''$ ja $\tau = T$ kaarel K'', siis $K' = K''$.

Tõestuse lõpuni viimiseks jääb siis näidata, et kui $T\colon X \to Y$ on lineaarne kujutus ja $\tau = T$ mingil kaarel K, siis alati leidub kaar K' nii, et K on K' pärisalamhulk ning $\tau = T$ kaarel K'. See on tõestuse kõige keerulisem osa.

Vaatleme kahte juhtu. Esiteks näitame, et väide kehtib juhul, kui kaare K mõni otspunkt asub mingil mittetriviaalsel lõigul, mis sisaldub kaares K. Selle järel näitame, et väide kehtib ka juhul, kui mainitud eeldus ei kehti.

2.1 Abilemmad

Lemma 2.1. *Olgu X kahemõõtmeline reaalne normeeritud ruum.*

1. *Ühiksfäär S_X on homöomorfne ringiga $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.*
2. *Kui $K \subsetneq S_X$ on kinnine sidus hulk, mis sisaldab vähemalt kahte punkti, siis K on homöomorfne lõiguga $[0,1]$, st K on kaar.*

Tõestus. (1) Olgu $T\colon X \to \mathbb{R}^2$ isomorfism. Defineerime

$$h\colon S_X \to S^1, \qquad h(x) = \frac{Tx}{\|Tx\|_2}.$$

See on pidev bijektsioon kompaktsest ruumist Hausdorffi ruumi, seega homöomorfism.

(2) Olgu $K \subsetneq S_X$ kinnine sidus hulk, mis sisaldab vähemalt kahte punkti. Kuna $h\colon S_X \to S^1$ on homöomorfism, siis $L \coloneqq h(K) \subsetneq S^1$ on kinnine sidus pärisalamhulk, mis sisaldab vähemalt kahte punkti.

Fikseerime vabalt punkti $p \in S^1 \setminus L$. Kuna $S^1 \setminus \{p\}$ on homöomorfne reaalteljega $\mathbb{R}$, siis L on homöomorfne mingi kompaktse sidusa alamhulgaga ruumis $\mathbb{R}$. Iga selline hulk on lõik $[a,b]$, ning kuna L sisaldab vähemalt kahte punkti, siis $a < b$. Järelikult on K homöomorfne lõiguga $[0,1]$ ehk kaar, sest

$$K \cong L \cong [a,b] \cong [0,1]. \qquad \square$$

Lemma 2.2. *Olgu $x_1, x_2 \in S_X$. Siis*

$$[x_1, x_2] \subset S_X \iff [\tau(x_1), \tau(x_2)] \subset S_Y.$$

Tõestus. Lemma 1.6 järgi piisab näidata, et

$$\|x_1 + x_2\| = \|\tau(x_1) + \tau(x_2)\|.$$

Tingley teoreemi järgi $\tau(-x_2) = -\tau(x_2)$. Seega

$$\|\tau(x_1) + \tau(x_2)\| = \|\tau(x_1) - \tau(-x_2)\| = \|x_1 - (-x_2)\| = \|x_1 + x_2\|. \qquad \square$$

Kui N on kahemõõtmeline normeeritud ruum ning $x_1, x_2 \in S_N$ on sellised, et $x_1 \notin \{x_2, -x_2\}$, siis tähistame

$$K(x_1, x_2) = \left\{ \frac{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}{\|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\|} : \lambda \in [0,1] \right\}.$$

Paneme tähele, et tegemist on kaarega.

Lemma 2.3. *Olgu $x_1, x_2 \in S_X$ sellised, et $x_1 \notin \{x_2, -x_2\}$. Siis $\tau(K(x_1, x_2)) = K(\tau(x_1), \tau(x_2))$.*

Tõestus. Tähistame $y_1 = \tau(x_1)$ ja $y_2 = \tau(x_2)$. Paneme tähele, et τ injektiivsuse ja Tingley teoreemi kohaselt $y_1 \notin \{y_2, -y_2\}$, mistõttu on kaar $K(y_1, y_2)$ defineeritud. Vaatleme kujutusi

$$\varphi_X \colon (0, 2\pi) \to S_X \setminus \{-x_2\}, \quad \varphi_X(t) = \frac{\cos(t)(-x_2) + \sin(t)x_1}{\|\cos(t)(-x_2) + \sin(t)x_1\|},$$

ja

$$\varphi_Y \colon (0, 2\pi) \to S_Y \setminus \{-y_2\}, \quad \varphi_Y(t) = \frac{\cos(t)(-y_2) + \sin(t)y_1}{\|\cos(t)(-y_2) + \sin(t)y_1\|}.$$

Kuna kujutused φ_X, φ_Y ja $\tau^* = \tau|_{S_X \setminus \{-x_2\}} \colon S_X \setminus \{-x_2\} \to S_Y \setminus \{-y_2\}$ on homöomorfismid, siis homöomorfism on ka kujutus

$$f = \varphi_Y^{-1} \circ \tau^* \circ \varphi_X \colon (0, 2\pi) \to (0, 2\pi).$$

Kuna $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ ja $f(\pi) = \pi$ ning f on pidev ja injektiivne, siis $f([\frac{\pi}{2}, \pi]) = [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Kuna

$$\tau^* = \varphi_Y \circ f \circ \varphi_X^{-1}$$

ning φ_X^{-1} kujutab hulga $K(x_1, x_2)$ hulgaks $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, f kujutab hulga $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ iseendaks ja φ_Y kujutab hulga $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ hulgaks $K(y_1, y_2)$, siis saamegi $\tau(K(x_1, x_2)) = K(y_1, y_2)$. $\square$

Järeldus 2.4. *Olgu $x_1, x_2 \in S_X$, $x_1 \neq x_2$. Kui $[x_1, x_2] \subset S_X$, siis $\tau([x_1, x_2]) = [\tau(x_1), \tau(x_2)]$.*

Tõestus. Kuna $[x_1, x_2] \subset S_X$, siis $x_1 \neq -x_2$, sest muidu $0 \in [x_1, x_2] \subset S_X$. Lemmast 2.3 saame $\tau(K(x_1, x_2)) = K(\tau(x_1), \tau(x_2))$. Lemmast 2.2 saame, et $[\tau(x_1), \tau(x_2)] \subset S_Y$. Kuna $[x_1, x_2] \subset S_X$ ja $[\tau(x_1), \tau(x_2)] \subset S_Y$, siis $K(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ ja $K(\tau(x_1), \tau(x_2)) = [\tau(x_1), \tau(x_2)]$. □

Lemma 2.5. *Olgu $x_1, x_2 \in S_X$, $x_1 \neq x_2$. Kui $[x_1, x_2] \subset S_X$, siis iga $t \in [0, 1]$ korral*

$$\tau\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (1-t)\tau(x_1) + t\tau(x_2).$$

Tõestus. Olgu $z = (1-t)x_1 + tx_2$. Järelduse 2.4 järgi $\tau(z) \in [\tau(x_1), \tau(x_2)]$. Seega leidub $s \in [0, 1]$ nii, et

$$\tau(z) = (1-s)\tau(x_1) + s\tau(x_2).$$

Kuna $z \in [x_1, x_2]$, siis $\|z - x_1\| = t\,\|x_2 - x_1\|$. Et τ on isomeetria, siis ka

$$\|\tau(z) - \tau(x_1)\| = t\,\|x_2 - x_1\|.$$

Teisalt, kuna $\tau(z) \in [\tau(x_1), \tau(x_2)]$, siis $\|\tau(z) - \tau(x_1)\| = s\,\|\tau(x_2) - \tau(x_1)\|$. Et τ on isomeetria, siis $\|\tau(x_2) - \tau(x_1)\| = \|x_2 - x_1\|$, mistõttu

$$\|\tau(z) - \tau(x_1)\| = s\,\|x_2 - x_1\|.$$

Järelikult $s = t$ ja

$$\tau(z) = (1-t)\tau(x_1) + t\tau(x_2).$$ □

Lemma 2.6. *Olgu $T\colon X \to Y$ lineaarne, olgu $[a, b] \subset S_X$ ning olgu $J \subset [a, b]$ mittetriviaalne osalõik. Kui $\tau = T$ hulgal J, siis $\tau = T$ kogu lõigul $[a, b]$.*

Tõestus. Valime lõigu J kaks erinevat punkti

$$u = (1-s_1)a + s_1 b \qquad \text{ja} \qquad v = (1-s_2)a + s_2 b,$$

kus $s_1 \neq s_2$ ja $s_1, s_2 \in [0, 1]$. Lemma 2.5 järgi on

$$\tau(u) = (1-s_1)\tau(a) + s_1\tau(b) \qquad \text{ja} \qquad \tau(v) = (1-s_2)\tau(a) + s_2\tau(b).$$

Kuna $\tau = T$ punktides u ja v, saame

$$\begin{cases}(1-s_1)\tau(a) + s_1\tau(b) = T(u),\\ (1-s_2)\tau(a) + s_2\tau(b) = T(v).\end{cases}$$

Sama süsteemi rahuldavad ka $T(a)$ ja $T(b)$ (vektorite $\tau(a)$ ja $\tau(b)$ asemel), seega

$$\tau(a) = T(a) \qquad \text{ja} \qquad \tau(b) = T(b).$$

Rakendades uuesti lemmat 2.5, saame iga $t \in [0,1]$ korral

$$\tau\big((1-t)a+tb\big) = (1-t)\tau(a)+t\tau(b) = (1-t)T(a)+tT(b) = T((1-t)a+tb). \quad \square$$

Lemma 2.7. *Olgu $T\colon X \to Y$ lineaarne kujutus ja $H_0 \subset S_X$ kaar, millel $\tau = T$. Siis kas $\tau = T$ kogu sfääril S_X või leidub kaar $H \subset S_X$, mis sisaldab kaart H_0, millel $\tau = T$, ja mis on maksimaalne selles mõttes, et kui $K \subset S_X$ on kaar, $H \subset K$ ja $\tau = T$ hulgal K, siis $K = H$.*

Tõestus. Vaatleme hulka

$$F \coloneqq \{x \in S_X \colon \tau(x) = T(x)\}.$$

Kuna τ ja $T|_{S_X}$ on pidevad, on F kinnine hulgas S_X. Eeldusest saame $H_0 \subset F$.

Kuna H_0 on sidus alamhulk ruumis F, sisaldub H_0 täpselt ühes alamruumi F siduskomponendis C. Kuna siduskomponendid on kinnised ja F on kinnine hulgas S_X, on ka C kinnine hulgas S_X.

Lemma 2.1 järgi on C kas kogu S_X, üksik punkt või kaar. Kuna $H_0 \subset C$ ja H_0 ei ole üksik punkt, ei saa C olla üksik punkt.

Kui $C = S_X$, oleme valmis. Oletame, et $C \neq S_X$, ja olgu $H \coloneqq C$. Siis H on kaar, $H_0 \subset H$ ja $\tau = T$ hulgal H.

Väidame, et H on selles mõttes maksimaalne: kui $K \subset S_X$ on kaar, $H \subset K$ ning $\tau = T$ hulgal K, siis $K = H$. Tõepoolest, tingimusest $\tau = T$ hulgal K saame $K \subset F$. Kuna K on sidus ja sisaldab hulka $H = C$, siis hulga F siduskomponendi C maksimaalsusest järeldub $K = C = H$. $\square$

Lemma 2.8. *Olgu $T\colon X \to Y$ lineaarne kujutus. Olgu $H \subset S_X$ kaar ja olgu $q \in H$ tema otspunkt. Eeldame, et H sisaldab mittetriviaalset lõiku $[p,q] \subset H$.*

Eeldame lisaks, et $\tau = T$ kaarel H. Siis leidub punkti q suhteline ümbrus $W \subset S_X$ nii, et

$$\tau = T \qquad \textit{hulgal } H \cup W.$$

Tõestus. Jagame tõestuse kaheks juhuks.

1. Eeldame kõigepealt, et punkt q on mõne sfääril asuva lõigu sisepunkt, st leidub mittetriviaalne lõik $J \subset S_X$, mille suhtelisse sisemusse q kuulub. Olgu $p' \in [p, q)$ selline, et

$$[p', q] \subset H \cap J.$$

Rakendades lemmat 2.6 lõigule J ja selle osalõigule $[p', q]$, saame

$$\tau = T \qquad \text{hulgal } J.$$

Võttes nüüd $W := J$, saame

$$\tau = T \qquad \text{hulgal } H \cup W.$$

See lõpetab esimese juhu.

2. Eeldame nüüd, et punkt q ei ole ühegi sfääril paikneva lõigu sisepunkt.

Samm 0. Maksimaalse lõigu J valik.

Olgu ℓ sirge, mis läbib punkte p ja q. Kuna S_X on kompaktne ja ℓ on kinnine, siis $S_X \cap \ell$ on kompaktne hulk sirgel ℓ, mis sisaldab lõiku $[p, q]$. Olgu J alamruumis $S_X \cap \ell$ see siduskomponent, mis sisaldab lõiku $[p, q]$. Kuna $[p, q]$ on sidus, on see tõesti ühe siduskomponendi alamhulk. Sirge ℓ on homöomorfne ruumiga $\mathbb{R}$, mistõttu iga kompaktne sidus alamhulk sirgel on lõik. Seega leiduvad punktid $a, b \in \ell$ nii, et

$$J = [a, b] \subset S_X \cap \ell.$$

Väidame, et q on lõigu J otspunkt. Tõepoolest, vastasel juhul oleks q mittetriviaalse lõigu $J \subset S_X$ sisepunkt, mis on vastuolus juhu 2 eeldusega. Seega võime otspunktid tähistada nii, et $J = [a, q]$.

Lõik J on sisaldumise järgi maksimaalne kõigi sirgel ℓ asuvate lõikude I seas, mis rahuldavad tingimust $[p, q] \subset I \subset S_X$. Tõepoolest, kui $I \subset S_X \cap \ell$ on lõik ja $[p, q] \subset I$, siis I on sidus alamhulk alamruumis $S_X \cap \ell$, mis lõikub hulgaga J. Siduskomponendi maksimaalsuse tõttu peab kehtima $I \subset J$.

Kuna $\tau = T$ lõigul $[p, q]$ ja $[p, q]$ on lõigu J osalõik, saame lemma 2.6 põhjal $\tau = T$ lõigul J. Tingley teoreemi järgi on $\tau = T$ ka lõigul $-J = [-q, -a]$.

Samm 1. Baasi vahetus ruumides X ja Y.

Tähistame

$$\lambda \coloneqq \frac{\|q-a\|}{2} > 0, \qquad u_1 \coloneqq \frac{q-a}{\|q-a\|}, \qquad u_2 \coloneqq \frac{q+a}{2}.$$

Väidame, et (u_1, u_2) sobib ruumi X baasiks ehk vektorid u_1 ja u_2 on lineaarselt sõltumatud. Kui u_1 ja u_2 oleksid lineaarselt sõltuvad, siis oleksid lineaarselt sõltuvad ka vektorid

$$q - a = 2\lambda u_1 \qquad \text{ja} \qquad q + a = 2u_2,$$

seega ka nende vektorite summa ja vahe,

$$2q = (q-a) + (q+a) \qquad \text{ja} \qquad 2a = (q+a) - (q-a).$$

Siit järelduks, et a ja q on lineaarselt sõltuvad. See on võimatu, sest $a, q \in S_X$, $a \neq q$ ning $a \neq -q$.

Tähistame iga vektori $x = \xi u_1 + \eta u_2 \in X$ koordinaate baasi (u_1, u_2) suhtes kujul $(\xi, \eta)_X$. Siis

$$q = (\lambda, 1)_X \qquad \text{ja} \qquad a = (-\lambda, 1)_X$$

ning

$$J = \{(t, 1)_X : t \in [-\lambda, \lambda]\} \qquad \text{ja} \qquad -J = \{(t, -1)_X : t \in [-\lambda, \lambda]\}.$$

Tähistame

$$v_1 \coloneqq T(u_1) \qquad \text{ja} \qquad v_2 \coloneqq T(u_2).$$

Väidame, et ka (v_1, v_2) on ruumi Y baas. Tõepoolest,

$$T(a) = v_2 - \lambda v_1 \qquad \text{ja} \qquad T(q) = v_2 + \lambda v_1.$$

Kuna $\tau = T$ hulgal J, on punktid $T(a)$, $T(q)$ ja $T(u_2)$ kõik sfääril S_Y. Kui v_1 ja v_2 oleksid lineaarselt sõltuvad, siis oleksid ka $T(a)$ ja $T(q)$ lineaarselt sõltuvad. Kuna nad on erinevad ning mõlemad normiga 1, peaks kehtima

$T(a) = -T(q)$. Aga siis oleks

$$T(u_2) = \frac{T(a) + T(q)}{2} = 0,$$

mis on võimatu, sest $u_2 \in J \subset S_X$ ja $T(u_2) = \tau(u_2) \in S_Y$. Seega on v_1 ja v_2 lineaarselt sõltumatud.

Tähistame iga vektori $y = \xi v_1 + \eta v_2 \in Y$ koordinaate baasi (v_1, v_2) suhtes kujul $(\xi, \eta)_Y$. Siis

$$T(q) = (\lambda, 1)_Y \qquad \text{ja} \qquad T(a) = (-\lambda, 1)_Y$$

ning

$$T(J) = \{(t, 1)_Y : t \in [-\lambda, \lambda]\} \qquad \text{ja} \qquad T(-J) = \{(t, -1)_Y : t \in [-\lambda, \lambda]\}.$$

Samm 2. Lokaalsed ümbrused punktide q ja $T(q)$ ümber.

Vaatleme sfääri S_X punkti $q = (\lambda, 1)_X$ ümber. Olgu

$$L_X \coloneqq \{(t, 1)_X : t \in \mathbb{R}\}$$

lõigu J tugisirge. Kuna J on mittetriviaalne lõik, mis asub ühikkera B_X rajal, on L_X kera B_X tugisirge. Seega iga punkti $(\alpha, \beta)_X \in B_X$ korral kehtib $\beta \leq 1$, ning

$$S_X \cap L_X = J.$$

Kuna q ei ole ühegi sfääris sisalduva lõigu sisepunkt ja q on lõigu J otspunkt, leidub punkti q suhteline ümbrus $W_X \subset S_X$ nii, et iga $z = (\alpha, \beta)_X \in W_X \setminus J$ rahuldab tingimusi

$$\lambda \leq \alpha < 2\lambda \qquad \text{ja} \qquad 0 < \beta < 1.$$

Vaatleme nüüd sfääri S_Y punkti $T(q) = (\lambda, 1)_Y$ ümber. Kõigepealt märgime, et $T(q)$ ei saa olla ühegi sfääris sisalduva lõigu sisepunkt. Tõepoolest, oletame vastupidi, et leidub mittetriviaalne lõik $K \coloneqq [y_1, y_2] \subset S_Y$ nii, et $T(q)$ on K sisepunkt. Siis leidub $s \in (0, 1)$ nii, et

$$T(q) = (1 - s)y_1 + sy_2.$$

Kuna $\tau^{-1}\colon S_Y \to S_X$ on samuti sürjektiivne isomeetria, saame lemma 2.2 abil, et

$$[\tau^{-1}(y_1), \tau^{-1}(y_2)] \subset S_X.$$

Rakendades nüüd lemmat 2.5 kujutusele τ^{-1} lõigul K, saame

$$q = \tau^{-1}(T(q)) = (1-s)\tau^{-1}(y_1) + s\tau^{-1}(y_2),$$

mis tähendab, et q on mingi S_X lõigu sisepunkt. See on vastuolus juhu 2 eeldusega.

Olgu

$$L_Y \coloneqq \{(t,1)_Y : t \in \mathbb{R}\}$$

lõigu $T(J)$ tugisirge. Kuna $T(J)$ on mittetriviaalne lõik sfääril S_Y, on L_Y ühikkera B_Y tugisirge. Seega iga punkti $(\alpha', \beta')_Y \in B_Y$ korral kehtib $\beta' \le 1$, ning $S_Y \cap L_Y$ sisaldab lõiku $T(J)$. Kuna $T(q)$ ei ole ühegi S_Y lõigu sisepunkt, on ta lõigu $T(J)$ otspunkt ning leidub punkti $T(q)$ suhteline ümbrus $W_Y \subset S_Y$ nii, et iga $y = (\alpha', \beta')_Y \in W_Y \setminus T(J)$ rahuldab tingimusi

$$\lambda \le \alpha' < 2\lambda \qquad \text{ja} \qquad 0 < \beta' < 1.$$

Kuna τ on pidev ja $\tau(q) = T(q)$, võime ümbrust W_X vajaduse korral kahandada nii, et

$$\tau(W_X) \subset W_Y.$$

Olgu nüüd

$$c_X \coloneqq -a \in -J \qquad \text{ja} \qquad c_Y \coloneqq T(c_X) = -T(a) \in T(-J).$$

Valitud baasides on nende koordinaadid

$$c_X = (\lambda, -1)_X \qquad \text{ja} \qquad c_Y = (\lambda, -1)_Y.$$

Samm 3. Kaugus punktideni c_X ja c_Y määrab teise koordinaadi.

Fikseerime suvalise punkti $z = (\alpha, \beta)_X \in W_X \setminus J$. Siis

$$z - c_X = (\alpha - \lambda, \beta + 1)_X.$$

Kuna $\lambda \le \alpha < 2\lambda$ ja $\beta > 0$, saame

$$0 \le \frac{\alpha - \lambda}{1+\beta} < \lambda,$$

ning seega

$$\left(\frac{\alpha - \lambda}{1+\beta}, 1\right)_X \in J \subset S_X.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\|z - c_X\|_X &= \|(\alpha - \lambda, \beta + 1)_X\|_X \\ &= (1+\beta)\left\|\left(\frac{\alpha - \lambda}{1+\beta}, 1\right)_X\right\|_X \\ &= 1 + \beta.\end{aligned}$$

Seega

$$\|z - c_X\|_X = 1 + \beta. \tag{1}$$

Olgu $\tau(z) = (\alpha', \beta')_Y$. Kuna $\tau(z) \in \tau(W_X) \subset W_Y$, saame sama arvutuse teha ruumis Y punktile $\tau(z)$ ja punktile c_Y. Nimelt, kuna $\lambda \le \alpha' < 2\lambda$ ja $\beta' > 0$, siis

$$0 \le \frac{\alpha' - \lambda}{1+\beta'} < \lambda,$$

ja seega

$$\left(\frac{\alpha' - \lambda}{1+\beta'}, 1\right)_Y \in T(J) \subset S_Y.$$

Niisiis

$$\|\tau(z) - c_Y\|_Y = 1 + \beta'. \tag{2}$$

Teiselt poolt, kuna $c_X \in -J$ ja $\tau = T$ hulgal $-J$, siis $\tau(c_X) = T(c_X) = c_Y$. Et τ on isomeetria, saame

$$\|\tau(z) - c_Y\|_Y = \|\tau(z) - \tau(c_X)\|_Y = \|z - c_X\|_X.$$

Koos võrdustega (1) ja (2) annab see

$$1 + \beta' = 1 + \beta,$$

seega

$$\beta' = \beta. \tag{3}$$

Samm 4. Kaugustasand lõigul $-J$ määrab esimese koordinaadi. Fikseerime taas $z = (\alpha, \beta)_X \in W_X \setminus J$ ning olgu $d \coloneqq 1 + \beta$. Vaatleme hulka

$$I_z \coloneqq \{w \in -J : \|z - w\|_X = d\}.$$

Kui $w \in -J$, siis $w = (\xi, -1)_X$, kus $\xi \in [-\lambda, \lambda]$, mistõttu

$$\begin{aligned} \|z - w\|_X = d &\iff \|(\alpha - \xi, \beta + 1)_X\|_X = d \\ &\iff \left\| \left(\frac{\alpha - \xi}{d}, 1 \right)_X \right\|_X = 1. \end{aligned}$$

Kuna $J = \{(t, 1)_X : t \in [-\lambda, \lambda]\}$, on see samaväärne tingimusega

$$\frac{\alpha - \xi}{d} \in [-\lambda, \lambda]$$

ehk

$$\xi \in [\alpha - \lambda d, \alpha + \lambda d].$$

Lõigates seda lõiku lõiguga $[-\lambda, \lambda]$ ning kasutades tingimusi $\alpha \geq \lambda$, $0 < \beta < 1$ ja $\alpha < 2\lambda$, saame

$$I_z = [\alpha - \lambda(1 + \beta), \lambda] \times \{-1\}. \tag{4}$$

Nüüd vaatleme hulka

$$K_{\tau(z)} \coloneqq \{y \in T(-J) : \|\tau(z) - y\|_Y = d\}.$$

Kirjutades $y = (\xi, -1)_Y$ ruumi Y koordinaatides ning kasutades samu võtteid koos võrdusega (3), saame

$$K_{\tau(z)} = [\alpha' - \lambda(1 + \beta), \lambda] \times \{-1\}. \tag{5}$$

Teiselt poolt, kuna $\tau = T$ hulgal $-J$ ja τ on isomeetria, siis iga $w \in -J$ korral

$$\|z - w\|_X = d \iff \|\tau(z) - \tau(w)\|_Y = d \iff \|\tau(z) - T(w)\|_Y = d.$$

Seega

$$T(I_z) = K_{\tau(z)}. \tag{6}$$

Aga valitud koordinaatides saadab lineaarne kujutus T punkti $(\xi, -1)_X$ ruumis X punktiks $(\xi, -1)_Y$ ruumis Y. Seetõttu annab valem (4)

$$T(I_z) = [\alpha - \lambda(1+\beta), \lambda] \times \{-1\}. \tag{7}$$

Võrreldes valemeid (5), (6) ja (7), saame

$$[\alpha' - \lambda(1+\beta), \lambda] = [\alpha - \lambda(1+\beta), \lambda],$$

ning järelikult $\alpha' = \alpha$. Koos võrdusega (3) saame $\tau(z) = T(z)$. Kuna punkt $z \in W_X \setminus J$ oli suvaline, siis $\tau = T$ hulgal $W_X \setminus J$. Et $\tau = T$ juba hulgal J ja ka hulgal H, järeldub $\tau = T$ hulgal $H \cup W_X$. See lõpetab teise juhu ja seega kogu tõestuse. $\square$

Lemma 2.9. *Olgu* $(1,0) \in S_X \cap S_Y$ *ja olgu* $H \subset S_X \cap S_Y$ *kaar, mille otspunktid on* $q \coloneqq (-\lambda, 1)$ *ja* $r \coloneqq (\lambda, 1)$ *mingi* $0 < \lambda \leq 1$ *korral. Lisaks olgu* $m \coloneqq (0, \mu) \in H$ *mingi* $\mu > 1$ *korral. Eeldame, et* $\tau|_H = \mathrm{Id}|_H$. *Siis leidub punkti* $(1,0)$ *suhteline ümbrus* $U_h \subset S_X$, *mille korral* $U_h \subset S_Y$.

Tõestus. Olgu $H_{m,r} \subset H$ kaare osa, mis ühendab punkte m ja r, ning olgu $H_{q,m} \subset H$ kaare osa, mis ühendab punkte q ja m.

Defineerime kujutuse

$$\sigma_q \colon H_{m,r} \to S_X, \qquad \sigma_q(u) = \frac{u - q}{\|u - q\|_X}.$$

Kuna $\tau(u) = u$ iga $u \in H$ korral ja $\tau(q) = q$, siis iga $u \in H_{m,r}$ korral

$$\|u - q\|_X = \|\tau(u) - \tau(q)\|_Y = \|u - q\|_Y.$$

Seega $\sigma_q(H_{m,r}) \subset S_X \cap S_Y$.

Paneme tähele, et $\sigma_q(H_{m,r})$ on kaar. Kusjuures ühelt poolt on

$$\sigma_q(r) = \frac{r - q}{\|r - q\|_X} = \frac{(2\lambda, 0)}{2\lambda} = (1, 0).$$

Teisalt on $m - q = (\lambda, \mu - 1)$ ja $\mu > 1$, on kaare $\sigma_q(H_{m,r})$ teise otspunkti $\sigma_q(m)$ teine koordinaat positiivne.

Defineerime nüüd teise kujutuse

$$\sigma_r \colon H_{q,m} \to S_X, \qquad \sigma_r(u) = \frac{r-u}{\|r-u\|_X}.$$

Kuna $\tau(u) = u$ iga $u \in H$ korral ja $\tau(r) = r$, siis iga $u \in H_{q,m}$ korral

$$\|r-u\|_X = \|\tau(r) - \tau(u)\|_Y = \|r-u\|_Y.$$

Seega $\sigma_r(H_{q,m}) \subset S_X \cap S_Y$.

Ka $\sigma_r(H_{q,m})$ on kaar, kusjuures

$$\sigma_r(q) = \frac{r-q}{\|r-q\|_X} = (1,0).$$

Kuna $r - m = (\lambda, 1-\mu)$ ja $\mu > 1$, on kaare $\sigma_r(H_{q,m})$ teise otspunkti $\sigma_r(m)$ teine koordinaat negatiivne.

Niisiis on $\Gamma \coloneqq \sigma_q(H_{m,r}) \cup \sigma_r(H_{q,m})$ kaar, $(1,0)$ tema sisepunkt ja $\Gamma \subset S_X \cap S_Y$.

Kuna S_X on topoloogiline ring, järeldub sellest, et leidub punkti $(1,0)$ suhteline ümbrus $U_h \subset S_X$, mille korral ka $U_h \subset S_Y$. □

Lemma 2.10. *Olgu $q \coloneqq (-\lambda, 1), r \coloneqq (\lambda, 1) \in S_X \cap S_Y$. Oletame, et leidub punkti $(1,0)$ suhteline ümbrus $U_h \subset S_X$, mille korral $U_h \subset S_Y$. Siis leidub punkti r suhteline ümbrus $W_h \subset S_X$ nii, et iga $z \in W_h$ korral*

$$\|z-q\|_X = \|z-q\|_Y.$$

Tõestus. Defineerime pideva kujutuse

$$\Phi_q \colon S_X \setminus \{q\} \to S_X, \qquad \Phi_q(z) = \frac{z-q}{\|z-q\|_X}.$$

Kuna $r - q = (2\lambda, 0)$ ja $\|r-q\|_X = 2\lambda$, siis

$$\Phi_q(r) = \frac{r-q}{\|r-q\|_X} = (1,0).$$

Kuna U_h on punkti $(1,0)$ suhteline ümbrus ja Φ_q on pidev, leidub punkti r suhteline ümbrus $W_h \subset S_X$ nii, et $\Phi_q(W_h) \subset U_h$.

Fikseerime suvalise $z \in W_h$ ja olgu

$$u \coloneqq \Phi_q(z) = \frac{z-q}{\|z-q\|_X}.$$

Siis on $u \in U_h \subset S_Y$ ja definitsiooni järgi ka $u \in S_X$. Kuna

$$z - q = \|z-q\|_X \, u,$$

saame

$$\|z-q\|_Y = \big\| \|z-q\|_X u \big\|_Y = \|z-q\|_X \|u\|_Y = \|z-q\|_X. \qquad \square$$

Lemma 2.11. *Olgu $p \coloneqq (\lambda, -1), r \coloneqq (\lambda, 1) \in S_X \cap S_Y$ ja $m \coloneqq (0, \mu) \in S_X \cap S_Y$. Oletame, et leidub punkti m suhteline ümbrus $U_v \subset S_X$, mille korral $U_v \subset S_Y$. Siis leidub punkti r suhteline ümbrus $W_v \subset S_X$, mille korral iga $z \in W_v$ rahuldab*

$$\|z-p\|_X = \|z-p\|_Y.$$

Tõestus. Defineerime pideva kujutuse

$$\Phi_p \colon S_X \setminus \{p\} \to S_X, \qquad \Phi_p(z) = \frac{z-p}{\|z-p\|_X}.$$

Kuna $r - p = (0, 2)$ ja $\|r-p\|_X = 2/\mu$, siis

$$\Phi_p(r) = \frac{r-p}{\|r-p\|_X} = \frac{(0,2)}{2/\mu} = (0, \mu) = m.$$

Kuna U_v on punkti m suhteline ümbrus ja Φ_p on pidev, leidub punkti r suhteline ümbrus $W_v \subset S_X$ nii, et $\Phi_p(W_v) \subset U_v$.

Fikseerime suvalise $z \in W_v$ ja olgu

$$v \coloneqq \Phi_p(z) = \frac{z-p}{\|z-p\|_X}.$$

Siis on $v \in U_v \subset S_Y$ ja definitsiooni järgi ka $v \in S_X$. Kuna

$$z - p = \|z-p\|_X \, v,$$

saame

$$\|z-p\|_Y = \|\, \|z-p\|_X v\|_Y = \|z-p\|_X \, \|v\|_Y = \|z-p\|_X. \qquad \square$$

Lemma 2.12. *Olgu*

$$H \subset S_X \cap S_Y, \qquad q = (-\lambda, 1), \qquad r = (\lambda, 1), \qquad p = (\lambda, -1),$$

olgu $\tau|_H = \mathrm{Id}|_H$ *ning olgu*

$$m = (0, \mu) \in H, \qquad \mu > 1.$$

Siis leidub punkti r *suhteline ümbrus* $W \subset S_X$*, mille korral iga* $z \in W$ *jaoks kehtib*

$$\|z-q\|_X = \|z-q\|_Y \qquad \textit{ja} \qquad \|z-p\|_X = \|z-p\|_Y.$$

Tõestus. Lemma 2.9 annab punkti $(1,0)$ suhtelise ümbruse $U_h \subset S_X$, mille korral $U_h \subset S_Y$. Lemma 2.10 annab nüüd punkti r suhtelise ümbruse $W_h \subset S_X$ nii, et iga $z \in W_h$ korral

$$\|z-q\|_X = \|z-q\|_Y.$$

Kuna $m = (0, \mu)$ on kaare H sisepunkt ning $H \subset S_X \cap S_Y$, leidub samuti punkti m suhteline ümbrus $U_v \subset S_X$, mille korral $U_v \subset S_Y$. Lemma 2.11 annab punkti r suhtelise ümbruse $W_v \subset S_X$ nii, et iga $z \in W_v$ korral

$$\|z-p\|_X = \|z-p\|_Y.$$

Olgu $W \coloneqq W_h \cap W_v$. See on punkti r suhteline ümbrus hulgas S_X ning iga $z \in W$ rahuldab mõlemat nõutud võrdust. $\square$

2.2 Kahe sfääri lõike kohta

Lemma 2.13. *Olgu* X *kahemõõtmeline reaalne normeeritud ruum, olgu* S *selle ühiksfäär ning fikseerime punktid* $p, z \in S$ *nii, et*

$$z \neq p \qquad \textit{ja} \qquad z \neq -p.$$

Olgu
$$a := \|z - p\| \qquad ja \qquad b := \|z + p\|.$$
Siis leidub punkt
$$z' \in (p + aS) \cap (-p + bS)$$
nii, et z' ja z asuvad kumbki eri kinnisel pooltasandil, mis on määratud joonega $\mathbb{R}p$. (Punkt z' võib asuda joonel $\mathbb{R}p$.)

Tõestus. Kuna $z \neq \pm p$, siis vektorid p ja z on lineaarselt sõltumatud. Valime normeeriva funktsionaali $\varphi \in S_{X^*}$ nii, et $\varphi(p) = 1$. Fikseerime suvalise vektori $e \in \ker \varphi \setminus \{0\}$. Siis (p, e) on ruumi X baas. Asendades vajaduse korral e vektoriga $-e$, võime eeldada, et selle baasi suhtes asub punkt z lahtisel pooltasandil
$$H^+ := \{tp + se : s > 0\}.$$
Olgu
$$H^- := \{tp + se : s < 0\} \qquad \text{ja} \qquad \overline{H^-} := \{tp + se : s \leq 0\}.$$
Seega on $\overline{H^-}$ see kinnine pooltasand, millel soovime leida punkti
$$z' \in (p + aS) \cap (-p + bS).$$

Tõestame esmalt väite eeldusel, et X on rangelt kumer, ning seejärel kasutame seda üldjuhu tõestuses.

Eeldame, et ruum X on rangelt kumer. Tähistame tema kinnist ühikkera sümboliga B.

Iga $t \in [-1, 1]$ korral vaatleme sirget
$$L_t := \{x \in X : \varphi(x) = t\} = tp + \mathbb{R}e.$$

Kui $|t| < 1$, siis $\|tp\| = |t| < 1$ ja seega $tp \in \operatorname{int} B$. Järelikult on $B \cap L_t$ iga $t \in (-1, 1)$ korral mittekidunud kompaktne lõik. Seega iga $t \in (-1, 1)$ korral leiduvad reaalarvud $g(t)$ ja $f(t)$ nii, et $g(t) < 0 < f(t)$ ja
$$B \cap L_t = \{tp + se : g(t) \leq s \leq f(t)\}.$$

Veel võime lugeda, et

$$f(1) = g(1) = 0 \qquad \text{ja} \qquad f(-1) = g(-1) = 0,$$

sest tugisirged $\varphi = 1$ ja $\varphi = -1$ puutuvad rangelt kumerat ühikkera vastavalt ainult punktides p ja $-p$.

Nüüd näitame, et $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ on pidev. Fikseerime $t \in (-1,1)$.

Ülalt poolpidevus. Olgu (t_n) lõigu $[-1,1]$ elementide jada, mis koondub punktis t ning iga n jaoks olgu

$$x_n \coloneqq t_n p + f(t_n)e \in B.$$

Kuna B on tõkestatud, siis jada (x_n) on tõkestatud. Kuna

$$x_n = t_n p + f(t_n)e \qquad \text{ja} \qquad t_n \to t,$$

siis on ka arvjada $(f(t_n))$ tõkestatud. Valime osajada (t_{n_k}) nii, et

$$f(t_{n_k}) \to \limsup_{n\to\infty} f(t_n) \eqqcolon \alpha.$$

Kuna $(x_{n_k}) \subset B$ ja B on kompaktne, võime pärast sobivale osajadale üleminekut (ja eelmist osajada tähistust säilitades) eeldada, et (x_{n_k}) koondub mingiks elemendiks $x \in B$. Kuna

$$x_{n_k} = t_{n_k} p + f(t_{n_k})e \qquad \text{ja} \qquad t_{n_k} \to t,$$

siis saame $x = tp + \alpha e$. Seega $x \in B \cap L_t$, mistõttu $\alpha \le f(t)$ ehk

$$\limsup_{n\to\infty} f(t_n) \le f(t).$$

Alt poolpidevus. Valime $\eta > 0$ nii, et $f(t) - \eta > 0$. Siis

$$tp + (f(t) - \eta)e = (1-\lambda)\, tp + \lambda\, (tp + f(t)e),$$

kus

$$\lambda \coloneqq \frac{f(t) - \eta}{f(t)} \in (0,1).$$

Kuna $tp \in \operatorname{int} B$, $tp + f(t)e \in B$ ja B on kumer, siis

$$tp + (f(t) - \eta)e \in \operatorname{int} B.$$

Kuna $\operatorname{int} B$ on lahtine, siis iga t' korral, mis on punktile t piisavalt lähedal, kehtib endiselt

$$t'p + (f(t) - \eta)e \in B.$$

Seega $f(t') \geq f(t) - \eta$, mistõttu

$$\liminf_{t' \to t} f(t') \geq f(t) - \eta.$$

Kuna $\eta > 0$ oli suvaline, järeldub, et

$$\liminf_{t' \to t} f(t') \geq f(t).$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et f on pidev vahemikus $(-1, 1)$.

Näitame f pidevust punktis $t = 1$. Olgu $t_n \to 1$ ning tähistame

$$x_n \coloneqq t_n p + f(t_n)e \in B.$$

Kuna B on kompaktne, siis jada (x_n) igal osajadal on omakorda osajada, mis koondub mingiks punktiks $x \in B$. Kui $x_{n_k} \to x$, siis, kuna $t_{n_k} \to 1$, saame

$$x = p + \alpha e$$

mingi $\alpha \in \mathbb{R}$ korral. Sel juhul

$$\varphi(x) = \varphi(p + \alpha e) = 1.$$

Seega $x \in B \cap \{y : \varphi(y) = 1\}$. Kuna sirge $\{y : \varphi(y) = 1\}$ on hulga B tugisirge punktis p, siis range kumeruse tõttu

$$B \cap \{y : \varphi(y) = 1\} = \{p\}.$$

Järelikult $x = p$. Seega on jada (x_n) iga koonduva osajada piirelement p, mistõttu $x_n \to p$. Kuna ka $t_n p \to p$, saame kokkuvõttes, et

$$f(t_n)e = x_n - t_n p \to 0.$$

Kuna $e \neq 0$, siis $f(t_n) \to 0 = f(1)$. Järelikult on f pidev punktis 1.

Analoogiliselt saaksime, et $f(t) \to 0$, kui $t \to -1$. Kuna B on nullpunkti suhtes sümmeetriline, siis $g(t) = -f(-t)$ iga $t \in [-1, 1]$ korral, seega on ka g pidev.

Järelikult saab ühiksfääri S kirjutada kujul $S = S^+ \cup S^-$, kus

$$S^+ := \{tp + f(t)e : t \in [-1, 1]\} \subset \overline{H^+} \qquad \text{ja} \qquad S^- := \{tp + g(t)e : t \in [-1, 1]\} \subset \overline{H^-},$$

seejuures $z \in S^+$.

Vaatleme nüüd hulki

$$p + aS \qquad \text{ja} \qquad -p + bS.$$

Kusjuures paneme tähele, et

$$p + aS^- = \Big\{tp + ag\Big(\frac{t-1}{a}\Big)e : t \in [\,1-a,\, 1+a\,]\Big\},$$

ja

$$-p + bS^- = \Big\{tp + bg\Big(\frac{t+1}{b}\Big)e : t \in [\,-1-b,\, b-1\,]\Big\}.$$

Näitame, et lõik $I := [\,1-a,\, b-1\,]$ on mittetühi. Tõepoolest,

$$2 = \|2p\| = \|(z-p) + (z+p)\| \leq \|z-p\| + \|z+p\| = a + b,$$

seega $1 - a \leq b - 1$. Tegelikult kehtib siin range võrratus (ehk $a + b > 2$), sest vastasel juhul $a + b = 2$ saaksime kolmnurga võrratuses võrduse

$$\|(z-p) + (z+p)\| = \|z-p\| + \|z+p\|,$$

mistõttu ruumi range kumerus sunnib vektorid $z - p$ ja $z + p$ olema teineteise positiivsed kordsed, ja see viib vastuoluni $z \in \mathbb{R}p$.

Samuti kehtib

$$0 < a < 2 \qquad \text{ja} \qquad 0 < b < 2,$$

sest $z \neq p$ ja $z \neq -p$, ning range kumerus välistab võrduse võrratustes

$$\|z-p\| \leq \|z\| + \|-p\| = 2 \qquad \text{ja} \qquad \|z+p\| \leq \|z\| + \|p\| = 2.$$

Defineerime pideva funktsiooni $\Phi\colon I \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(t) = ag\Big(\frac{t-1}{a}\Big) - bg\Big(\frac{t+1}{b}\Big).$$

Lõigu I vasakpoolses $1-a$ otspunktis on Φ väärtus $\Phi(1-a) = -bg\big(\frac{2-a}{b}\big)$. Kuna $a < 2$ ja $a+b > 2$, siis $-1 < \frac{2-a}{b} < 1$. Seetõttu on $g\big(\frac{2-a}{b}\big) < 0$, ja järelikult $\Phi(1-a) > 0$.

Sarnaselt saame lõigu I parempoolses otspunktis $b-1$ funktsiooni Φ väärtust hinnata. Definitsiooni järgi on $\Phi(b-1) = ag\big(\frac{b-2}{a}\big)$. Kuna $b < 2$ ja $a+b > 2$, siis $-1 < \frac{b-2}{a} < 1$. Seega $g\big(\frac{b-2}{a}\big) < 0$, ja järelikult $\Phi(b-1) < 0$.

Järelikult leidub punkt $t_0 \in I$ nii, et $\Phi(t_0) = 0$ ehk $ag\big(\frac{t_0-1}{a}\big) = bg\big(\frac{t_0+1}{b}\big)$. Sellise t_0 korral kuulub punkt

$$z' := t_0 p + ag\Big(\frac{t_0-1}{a}\Big)e$$

ühtaegu nii hulka $p+aS^-$ kui ka hulka $-p+bS^-$, seega $z' \in (p+aS)\cap(-p+bS)$. Kuna alati $g \le 0$, siis $z' \in \overline{H^-}$, ning rangelt kumera normi korral isegi hulka H^-. See lõpetab rangelt kumera juhu.

Vaatleme nüüd üldist juhtu, kus X ei ole tingimata rangelt kumer. Kuna p ja z on lineaarselt sõltumatud, moodustavad nad ruumi X baasi. Defineerime selle baasi abil ruumil X eukleidilise normi $|\cdot|$ võrdusega

$$|tp+sz| := \sqrt{t^2+s^2} \qquad (t,s\in\mathbb{R}).$$

Siis $|p| = |z| = 1$. Iga $\varepsilon > 0$ korral defineerime

$$\|x\|_\varepsilon := \frac{\sqrt{\|x\|^2+\varepsilon|x|^2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \qquad (x\in X).$$

Siis on $\|\cdot\|_\varepsilon$ norm ruumil X: positiivsus ja homogeensus on ilmsed ning kolmnurga võrratus tuleneb Cauchy võrratusest ruumis $\mathbb{R}^2$, sest

$$\sqrt{\|x\|^2+\varepsilon|x|^2} = \big\|(\|x\|, \sqrt{\varepsilon}\,|x|)\big\|_2.$$

Normi $\|\cdot\|_\varepsilon$ suhtes on kinnine ühikkera

$$B_\varepsilon = \{x\in X : \|x\|^2+\varepsilon|x|^2 \le 1+\varepsilon\}.$$

Funktsioon $F(x) := \|x\|^2 + \varepsilon|x|^2$ on rangelt kumer, sest kujutus $x \mapsto \|x\|^2$ on kumer ja kujutus $x \mapsto |x|^2$ on rangelt kumer. Järelikult on B_ε rangelt kumer hulk. Seega on $\|\cdot\|_\varepsilon$ rangelt kumer norm.

Paneme ka tähele, et

$$\|p\|_\varepsilon = \frac{\sqrt{\|p\|^2 + \varepsilon|p|^2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} = 1$$

ja samamoodi $\|z\|_\varepsilon = 1$. Seega asuvad p ja z ruumi $(X, \|\cdot\|_\varepsilon)$ ühiksfääril S_ε.

Olgu

$$a_\varepsilon := \|z-p\|_\varepsilon \qquad \text{ja} \qquad b_\varepsilon := \|z+p\|_\varepsilon.$$

Tõestuse esimese osa põhjal leidub iga $\varepsilon > 0$ korral punkt

$$z'_\varepsilon \in \big(p + a_\varepsilon S_\varepsilon\big) \cap \big(-p + b_\varepsilon S_\varepsilon\big)$$

nii, et $z'_\varepsilon \in \overline{H^-}$. Paneme tähele, et pere (z'_ε) on tõkestatud:

$$\|z'_\varepsilon\|_\varepsilon \leq \|z'_\varepsilon - p\|_\varepsilon + \|p\|_\varepsilon = a_\varepsilon + 1$$

ja

$$a_\varepsilon = \|z-p\|_\varepsilon \leq \|z\|_\varepsilon + \|p\|_\varepsilon = 2$$

annavad kokku, et $\|z'_\varepsilon\|_\varepsilon \leq 3$.

Teisalt kehtib iga $x \in X$ ja $\varepsilon \leq 1$ korral

$$\|x\| \leq \sqrt{1+\varepsilon}\,\|x\|_\varepsilon \leq \sqrt{2}\,\|x\|_\varepsilon.$$

Järelikult saame $\varepsilon \leq 1$ puhul

$$\|z'_\varepsilon\| \leq 3\sqrt{2} \qquad (0 < \varepsilon \leq 1),$$

mistõttu on pere $(z'_\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1}$ algses normis tõkestatud.

Valime jada $\varepsilon_n \downarrow 0$. Kuna ruum X on lõplikumõõtmeline, võime pärast üleminekut osajadale eeldada, et

$$z'_{\varepsilon_n} \to z'$$

mingi $z' \in X$ korral. Kuna iga $z'_{\varepsilon_n} \in \overline{H^-}$ ja $\overline{H^-}$ on kinnine, saame $z' \in \overline{H^-}$.

Jääb veel näidata, et $z' \in (p + aS) \cap (-p + bS)$.

Esiteks on normi $\|\cdot\|_\varepsilon$ definitsiooni põhjal selge, et

$$a_{\varepsilon_n} \to a \qquad \text{ja} \qquad b_{\varepsilon_n} \to b.$$

Järgmiseks valime konstandi $C > 0$ nii, et iga $x \in X$ korral

$$|x| \leq C\|x\|,$$

mis on võimalik, sest kõik normid ruumis X on omavahel ekvivalentsed. Siis

$$\|x\| \leq \sqrt{1+\varepsilon}\,\|x\|_\varepsilon = \sqrt{\|x\|^2 + \varepsilon|x|^2} \leq \sqrt{1+\varepsilon C^2}\,\|x\|.$$

Seega

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\,\|x\| \leq \|x\|_\varepsilon \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon C^2}{1+\varepsilon}}\,\|x\|.$$

Järelikult kehtib $\|\cdot\|_\varepsilon \to \|\cdot\|$ ühtlaselt igal $\|\cdot\|$-tõkestatud hulgal.

Kuna jada $(z'_{\varepsilon_n} - p)$ on tõkestatud, siis saame

$$\Big|\|z'_{\varepsilon_n} - p\|_{\varepsilon_n} - \|z'_{\varepsilon_n} - p\|\Big| \longrightarrow 0.$$

Kuna $z'_{\varepsilon_n} - p \to z' - p$, siis algse normi pidevusest järeldub, et

$$\|z'_{\varepsilon_n} - p\| \to \|z' - p\|.$$

Kombineerides need kaks fakti ning arvestades, et $\|z'_{\varepsilon_n} - p\|_{\varepsilon_n} = a_{\varepsilon_n}$, saame

$$\|z' - p\| = a.$$

Samamoodi saame jada $(z'_{\varepsilon_n} + p)$ analüüsides, et

$$\|z' + p\| = b.$$

Seega oleme näidanud, et $z' \in p + aS$ ja $z' \in -p + bS$ ehk

$$z' \in (p + aS) \cap (-p + bS).$$

Kuna juba teame, et $z' \in \overline{H^-}$, on tõestus täielik. $\square$

Lemma 2.14. *Olgu X kahemõõtmeline reaalne normeeritud ruum, olgu $p, q \in X$ erinevad punktid ja olgu $a, b > 0$. Tähistame*

$$I \coloneqq (p + aS_X) \cap (q + bS_X).$$

Kui I sisaldab rohkem kui kahte punkti, siis I sisaldab mittetriviaalset lõiku.

Tõestus. Olgu

$$C_1 \coloneqq p + aB_X \qquad \text{ja} \qquad C_2 \coloneqq q + bB_X.$$

Siis C_1 ja C_2 on ruumi X kompaktsed kumerad kehad mittetühja sisemusega ning

$$\partial C_1 = p + aS_X \qquad \text{ja} \qquad \partial C_2 = q + bS_X.$$

Triviaalselt on

$$C_2 = \left(q - \frac{b}{a}p\right) + \frac{b}{a}C_1.$$

Rakendades nüüd tulemust [11, lause 21] kehade C_1 ja C_2 rajadele, saame, et I on kahe lõigu ühend, kus kumbki lõik võib olla triviaalne, st punkt või olla tühi. Kui I sisaldab rohkem kui kahte punkti, siis vähemalt üks neist kahest komponendist ei saa olla tühi ega punkt. Seega sisaldab I mittetriviaalset lõiku. □

Lemma 2.15. *Olgu X kahemõõtmeline reaalne normeeritud ruum ja olgu $p \in S_X$ punkt, mis ei ole ühegi sfääril S_X asuva lõigu sisepunkt. Olgu $a, b > 0$ ning tähistame*

$$I \coloneqq (p + aS_X) \cap (-p + bS_X).$$

Siis sisaldab hulk I kõige rohkem kahte punkti.

Tõestus. Oletame vastupidi, et I sisaldab rohkem kui kahte punkti. Lemma 2.14 järgi sisaldab I siis mittetriviaalset sirglõiku L.

Valime punkti $x \in L$. Kuna $x \in I$, leiduvad punktid $u, v \in S_X$, mille korral

$$x = p + au = -p + bv.$$

Sellest järeldub

$$2p = bv - au \qquad \text{ja seega} \qquad p = \frac{b}{a+b}v + \frac{a}{a+b}(-u).$$

Näitame, et punkti $x \in L$ saab valida nii, et $v \neq -u$. Kui $v = -u$, siis võrdusest $2p = bv - au$ saame

$$2p = -(a+b)u.$$

Kuna $\|p\| = \|u\| = 1$, peab sel juhul olema $a + b = 2$ ja $u = -p$. Siis aga

$$x = p + au = (1-a)p.$$

Niisiis saab juht $v = -u$ esineda ülimalt ühe punkti $x \in L$ korral. Kuna L on mittetriviaalne, valime edaspidi punkti $x \in L$ nii, et vastavate punktide $u, v \in S_X$ korral $v \neq -u$. Siis on

$$p = \frac{b}{a+b}\,v + \frac{a}{a+b}\,(-u)$$

punktide v ja $-u$ range kumer kombinatsioon. Seega on p lõigu $[-u, v]$ sisepunkt. Jääb näidata, et see lõik paikneb sfääril S_X.

Olgu B_X ruumi X kinnine ühikkera. Kuna $v, -u \in S_X \subset B_X$ ja B_X on kumer, siis $[-u, v] \subset B_X$. Valime ühikkera tugifunktsionaali $\varphi \in X^*$ punktis p, nii et $\|\varphi\| = 1$ ja $\varphi(p) = 1$. Kuna $v, -u \in B_X$, kehtib

$$\varphi(v) \leq 1 \qquad \text{ja} \qquad \varphi(-u) \leq 1.$$

Rakendades funktsionaali φ ülaltoodud kumerale kombinatsioonile, saame

$$1 = \varphi(p) = \frac{b}{a+b}\,\varphi(v) + \frac{a}{a+b}\,\varphi(-u).$$

Et mõlemad kordajad on positiivsed, saab see võrdus kehtida ainult juhul

$$\varphi(v) = \varphi(-u) = 1.$$

Järelikult rahuldab iga lõigu $[-u, v]$ punkt w tingimust $\varphi(w) = 1$. Kuna samal ajal $w \in B_X$, saame

$$1 = \varphi(w) \leq \|w\| \leq 1,$$

mistõttu $w \in S_X$. Seega $[-u, v] \subset S_X$.

Oleme leidnud sfääril S_X mittetriviaalse lõigu, kus p on sisepunkt. See on vastuolus eeldusega. Järelikult ei saa I sisaldada rohkem kui kahte punkti. $\square$

2.3 Teoreem 3.7

Teoreem 2.16 (Cabello Sánchez [3, teoreem 3.7]). *Olgu X ja Y kahemõõtmelised reaalsed normeeritud ruumid ning olgu $\tau\colon S_X \to S_Y$ sürjektiivne isomeetria. Kui leidub mittetühi suhteliselt lahtine hulk $U \subset S_X$ ja lineaarne $T\colon X \to Y$, mille korral $\tau = T$ hulgal U, siis on $\tau = T$ kogu sfääril S_X.*

Tõestus. Fikseerime suhteliselt lahtise mittetühja hulga $U \subset S_X$ ja lineaarse kujutuse $T\colon X \to Y$ nii, et $\tau = T$ hulgal U. Kuna S_X on topoloogiline ring, sisaldab iga tema mittetühi suhteliselt lahtine alamhulk kaart. Valime kaare $H_0 \subset U$.

Rakendame lemmat 2.7. Kui sellest järeldub kohe, et $\tau = T$ kogu sfääril S_X, olemegi valmis. Oletame edaspidi, et leidub $H \subset S_X$, mis sisaldab kaart H_0, millel $\tau = T$, ja mis on sisaldumise mõttes maksimaalne selline. Olgu p ja q kaare H otspunktid.

Otspunktid ei ole sfäärilõigu sisepunktid. Kui näiteks p oleks mingi sfääril S_X asuva lõigu sisepunkt, siis sisaldaks H punkti p juures mittetriviaalset lõiku. Lemma 2.8 annaks siis kaarest H suurema kaare, millel $\tau = T$, mis on vastuolus H maksimaalsusega. Sama kehtib ka punkti q kohta. Seega kumbki otspunkt ei ole ruumi X sfääril ühegi mittetriviaalse sirglõigu sisepunkt.

Tingley teoreemi järgi kehtib iga $x \in S_X$ korral $\tau(-x) = -\tau(x)$. Kuna lineaarse kujutuse T korral on samuti $T(-x) = -T(x)$, siis $\tau = T$ ka hulgal $-H$. Kui $H \cup (-H) = S_X$, siis oleme valmis. Eeldame seega edaspidi, et

$$H \cup (-H) \neq S_X.$$

Väidame, et siis $-p \notin H$. Tõepoolest, kui $-p \in H$, siis kuna H on kaar, leidub alamkaar $A \subset H$, mille otspunktid on p ja $-p$. Lemma 2.1 tõestuses konstrueeritud paaritu homöomorfismi $h\colon S_X \to S^1$ korral on $h(A)$ ringi kaar otspunktidega $h(p)$ ja $-h(p)$, seega üks kahest kinnisest poolringist. Järelikult $h(A) \cup (-h(A)) = S^1$. Kuna h on paaritu, siis $h(-A) = -h(A)$, mistõttu $A \cup (-A) = S_X$. Et $A \subset H$, saame

$$S_X = A \cup (-A) \subset H \cup (-H),$$

mis on vastuolus eeldusega $H \cup (-H) \neq S_X$. Seega $-p \notin H$.

Valime nüüd funktsionaali $f \in X^* \setminus \{0\}$ nii, et $\ker f = \mathbb{R}p$. Kuna $S_X \cap \mathbb{R}p = \{\pm p\}$ ja $-p \notin H$, on $f(x) \neq 0$ iga $x \in H \setminus \{p\}$. Et $H \setminus \{p\}$ on sidus, peavad pideva funktsiooni $f|_{H\setminus\{p\}}$ väärtused olema sama märgiga. Seega sisaldub $H \setminus \{p\}$ täielikult kas hulgas $\{f > 0\}$ või hulgas $\{f < 0\}$.

Ühine normaliseerimine. Järelikult on p ja q lineaarselt sõltumatud. Defineerime baasid

$$\mathcal{B}_X = \Big(\frac{p-q}{\|p-q\|_X}, \frac{p+q}{2}\Big) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{B}_Y = \Big(\frac{\tau(p)-\tau(q)}{\|\tau(p)-\tau(q)\|_Y}, \frac{\tau(p)+\tau(q)}{2}\Big).$$

Olgu

$$\lambda := \frac{1}{2}\|p-q\|_X > 0.$$

Tähistame nende baaside suhtes koordinaate vastavalt kujul $(\xi,\eta)_X$ ja $(\xi,\eta)_Y$. Siis

$$p = (-\lambda, 1)_X \qquad \text{ja} \qquad q = (\lambda, 1)_X,$$

ja samamoodi

$$\tau(p) = (-\lambda, 1)_Y \qquad \text{ja} \qquad \tau(q) = (\lambda, 1)_Y.$$

Kuna T on lineaarne ning $T(p) = \tau(p)$ ja $T(q) = \tau(q)$, saadab T baasi $\mathcal{B}_X$ vektorid baasi $\mathcal{B}_Y$ vektoriteks. Seetõttu kehtib iga $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ korral

$$T(\xi,\eta)_X = (\xi,\eta)_Y.$$

Samastame nüüd ruumid X ja Y nende koordinaatide abil ühise tasandiga $\mathbb{R}^2$. Selle samastuse korral on $T = \mathrm{Id}$ ning tingimus $\tau = T$ hulgal H tähendab lihtsalt

$$H \subset S_X \cap S_Y \qquad \text{ja} \qquad \tau|_H = \mathrm{Id}|_H.$$

Kuna H ühendab punktid $(-\lambda, 1)$ ja $(\lambda, 1)$, võtab pidev esimene koordinaat ξ kaarel H kõik väärtused vahemikust $[-\lambda, \lambda]$. Seega leidub punkt $m \in H$, mille esimene koordinaat on 0. Kirjutame selle punkti kujul $m = (0, \mu)$. Kuna H ei saa langeda kokku lõiguga $[p,q]$, on $\mu > 1$. Lisaks kuulub m nii sfääri

S_X kui ka sfääri S_Y. Olgu veel

$$s \coloneqq -p = (\lambda, -1).$$

Punkti q lokaalne ümbrus. Rakendame lemmat 2.12 kaarele H koos punktidega

$$q_0 \coloneqq p = (-\lambda, 1), \qquad r_0 \coloneqq q = (\lambda, 1), \qquad p_0 \coloneqq s = (\lambda, -1).$$

Saame punkti q suhtelise ümbruse $W \subset S_X$ nii, et iga $z \in W$ korral kehtib

$$\|z - p\|_X = \|z - p\|_Y \qquad \text{ja} \qquad \|z - s\|_X = \|z - s\|_Y.$$

Kuna q on kaare H otspunkt, leidub punktile q kui tahes lähedal punkte sfäärilt S_X, mis ei kuulu hulka H. Valime niisuguse punkti $z \in W \setminus H$ piisavalt lähedal punktile q. Defineerime arvud

$$a \coloneqq \|z - p\|_X = \|z - p\|_Y \qquad \text{ja} \qquad b \coloneqq \|z - s\|_X = \|z - s\|_Y.$$

Siis, vaadeldes samu koordinaate ruumis Y, saame

$$z \in (p + aS_Y) \cap (s + bS_Y) = (p + aS_Y) \cap (-p + bS_Y).$$

Teiselt poolt, kuna $\tau(z) \in S_Y$, $\tau(p) = p$ ja $\tau(s) = s$, annab isomeetrilisus

$$\|\tau(z) - p\|_Y = \|z - p\|_X = a \qquad \text{ja} \qquad \|\tau(z) - s\|_Y = \|z - s\|_X = b.$$

Seega $\tau(z) \in (p + aS_Y) \cap (-p + bS_Y)$.

Kahe punkti argument. Kõigepealt märgime, et punkt $p \in S_Y$ ei ole ühegi mittetriviaalse sfäärilõigu sisepunkt ka ruumis Y. Tõepoolest, kui p oleks ruumis Y mingi lõigu sisepunkt, siis lemmade 2.2 ja 2.5 rakendamine kujutusele $\tau^{-1}\colon S_Y \to S_X$ annaks, et p on ka ruumi X mingi sfäärilõigu sisepunkt, mis on vastuolu.

Rakendame nüüd lemmat 2.15 punktile $p \in S_Y$. Sellest järeldub, et hulk

$$I \coloneqq (p + aS_Y) \cap (-p + bS_Y)$$

sisaldab kõige rohkem kahte punkti. Samas $z \in I$. Lemma 2.13 annab võimaliku teise punkti $z' \in I$, mis asub joone $\mathbb{R}p$ suhtes punktile z vastas oleval kinnisel pooltasandil. Kuna ka $\tau(z) \in I$, siis $\tau(z) = z$ või $\tau(z) = z'$.

Valime nüüd punkti q suhtelise ümbruse $V \subset S_Y$ nii väikese, et kogu V asub samal pool sirget $\mathbb{R}p$ kui punkt q. Kuna z on valitud piisavalt lähedale punktile q, võime eeldada, et $z \in V$. Kui $\tau(z) = z' \neq z$, siis asub z' lemma 2.13 järgi joone $\mathbb{R}p$ teisel poolel või sellel joonel. Seega $z' \notin V$.

Kuna V on punkti q suhteline ümbrus, leidub $\varepsilon > 0$ nii, et iga $y \in S_Y \setminus V$ korral $\|y - q\|_Y \geq \varepsilon$. Valime z nii, et $\|z - q\|_X < \varepsilon$. Kui nüüd $\tau(z) = z' \neq z$, siis $z' \notin V$ ja seega $\|z' - q\|_Y \geq \varepsilon$. Aga kuna $\tau(q) = q$ ja τ on isomeetria, saame samal ajal

$$\|z' - q\|_Y = \|\tau(z) - \tau(q)\|_Y = \|z - q\|_X < \varepsilon,$$

mis on vastuolu. Järelikult peab kehtima $\tau(z) = z$.

Niisiis leidub punkti q suhteline ümbrus, millel $\tau = \mathrm{Id}$. Kuna selles koordinaatide samastuses on $T = \mathrm{Id}$, saame, et $\tau = T$ ühel rangelt suuremal kaarel kui H. See on vastuolus kaare H maksimaalsusega.

Saadud vastuolu näitab, et $\tau = T$ kogu sfääril S_X. □

2.4 Järeldus 3.8

Järeldus 2.17 (Cabello Sánchez [3, järeldus 3.8])**.** *Iga kahemõõtmeline reaalne normeeritud ruum, mis ei ole rangelt kumer, on Mazur–Ulami omadusega.*

Tõestus. Olgu X kahemõõtmeline reaalne normeeritud ruum, mis ei ole rangelt kumer. Siis leidub mittetriviaalne lõik $[x, x'] \subset S_X$. Olgu $\tau\colon S_X \to S_Y$ suvaline sürjektiivne isomeetria. Lemma 2.5 järgi on τ lõigul $[x, x']$ afiinne: iga $t \in [0, 1]$ korral

$$\tau\big((1-t)x + tx'\big) = (1-t)\tau(x) + t\tau(x').$$

Vektorid x ja x' on lineaarselt sõltumatud ning moodustavad ruumi X baasi. Seega leidub üheselt määratud lineaarne kujutus $T\colon X \to Y$, mille korral $T(x) = \tau(x)$ ja $T(x') = \tau(x')$. Afiinsusest järeldub kohe, et $\tau = T$ kogu lõigul $[x, x']$.

Tähistame
$$u \coloneqq \frac{x + x'}{2}.$$
Kuna $[x, x'] \subset S_X$ on mittetriviaalne ja u on selle lõigu sisepunkt, leidub punkti u suhteliselt lahtine ümbrus $U \subset S_X$, mille korral $U \subset [x, x']$. Niisiis on $\tau = T$ mittetühjal suhteliselt lahtisel hulgal $U \subset S_X$. Rakendades teoreemi 2.16, saame $\tau = T$ kogu sfääril S_X.

Kuna τ oli suvaline sürjektiivne isomeetria, on ruumil X Mazur–Ulami omadus.

$\square$

Viited

[1] Taras Banakh. „Every 2-dimensional Banach space has the Mazur–Ulam property“. *Linear Algebra and its Applications* 632 (jaanuar 2022), lk. 268–280.

[2] Taras Banakh ja Javier Cabello Sánchez. „Every non-smooth 2-dimensional Banach space has the Mazur–Ulam property“. *Linear Algebra and its Applications* 625 (september 2021), lk. 1–19.

[3] Javier Cabello Sánchez. „A reflection on Tingley's problem and some applications“. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 476.2 (august 2019), lk. 319–336.

[4] Guang Gui Ding. „The representation theorem of onto isometric mappings between two unit spheres of $\ell_1(\Gamma)$ type spaces and the application to the isometric extension problem“. *Acta Mathematica Sinica* 20.6 (2004), lk. 1089–1094.

[5] Guanggui Ding. „The 1-Lipschitz mapping between the unit spheres of two Hilbert spaces can be extended to a real linear isometry of the whole space“. *Science in China Series A: Mathematics* 45 (2002), lk. 479–483.

[6] Guanggui Ding. „The isometric extension problem in the unit spheres of $\ell_p(\Gamma)$ type spaces for $p > 1$“. *Science in China Series A: Mathematics* 46 (2003), lk. 333–338.

[7] Guanggui Ding. „The representation theorem of onto isometric mappings between two unit spheres of ℓ_∞-type spaces and the application on isometric extension problem“. *Science in China Series A: Mathematics* 47 (2004), lk. 722–729.

[8] Harold George Eggleston. *Convexity*. Köide No. 47. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. Cambridge University Press, New York, 1958, lk. viii+136.

[9] Vladimir Kadets ja Miguel Martín. „Extension of isometries between unit spheres of finite-dimensional polyhedral Banach spaces“. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 396.2 (detsember 2012), lk. 441–447.

[10] Piotr Mankiewicz. „On extension of isometries in normed linear spaces“. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques, et Physiques* 20 (1972), lk. 367–371.

[11] Horst Martini, Konrad J. Swanepoel ja Gunter Weiss. „The geometry of Minkowski spaces – A survey. Part I“. *Expositiones Mathematicae* 19.2 (2001), lk. 97–142.

[12] Stanisław Mazur ja Stanisław Ulam. „Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés“. *C. R. Acad. Sci. Paris* 194 (1932), lk. 946–948.

[13] Ralph Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis.* Köide 28. Princeton Mathematical Series. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1970.

[14] Dong Ni Tan. „Extension of isometries on the unit sphere of L_p spaces“. *Acta Mathematica Sinica, English Series* 28 (2012), lk. 1197–1208.

[15] Dong-Ni Tan. „Extension of isometries on unit sphere of L^∞“. *Taiwanese Journal of Mathematics* 15.2 (2011), lk. 819–827.

[16] Dong-Ni Tan. „On extension of isometries on the unit spheres of L_p spaces for $0 < p \leq 1$“. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 74.18 (2011), lk. 6981–6987.

[17] Daryl Tingley. „Isometries of the unit sphere“. *Geometriae Dedicata* 22.3 (aprill 1987), lk. 371–378.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Deivid Saad,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   „Mazur–Ulami omadus kahemõõtmelises mitte rangelt kumeras Banachi ruumis“,

   mille juhendajad on Rainis Haller ja Nikita Leo, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Deivid Saad
27.05.2026