

Tartu Ülikool  
Loodus- ja täppisteaduste valdkond  
Matemaatika ja statistika instituut

Jaagup Kirme

**Banachi ruumide ekvivalentsed  
ümbernormeeringud, mille suhtes teine kaasruum  
on oktaedriline**

Matemaatika eriala  
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad : Rainis Haller, vanemteadur, *PhD*  
Märt Põldvere, dotsent, *PhD*

Tartu 2019

# Banachi ruumide ekvivalentsed ümbernormeeringud, mille suhtes teine kaasruum on oktaeedriline

Bakalaureusetöö

Jaagup Kirme

**Lühikokkuvõte.** Aastal 2019 andsid J. Langemets ja G. López-Pérez osalise vastuse G. Godefroy poolt aastal 1989 püstitatud küsimusele, tõestades, et igal separaablil Banachi ruumil, mis sisaldab ruumiga  $\ell_1$  isomorfset alamruumi, leidub ekvivalentne norm, mille suhtes vaadeldava ruumi teine kaasruum on oktaeedriline. Käesolevas bakalaureusetöös kirjutatakse üksikasjaliselt lahti Langemetsa ja López-Pérez teoreemi tõestuses kasutatud ümbernormeerimisteoreemide ning üldiste oktaeedrilisust puudutavate tulemuste tõestused ning esitatakse Langemetsa ja López-Pérez teoreemi tõestuse skeem.

**CERCS teaduseriala.** P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

**Märksõnad.** Normeeritud ruum, Banachi ruum, kaasruum, ekvivalentne ümbernormeering, oktaeedrilisus.

## Equivalent Renormings in Banach Spaces Inducing Octahedral Bidual Norms

Bachelor's Thesis

Jaagup Kirme

**Abstract.** In 2019, J. Langemets and G. López-Pérez gave a partial answer to a question posed by G. Godefroy in 1989 by proving that every separable Banach space containing an isomorphic copy of the space  $\ell_1$  admits an equivalent norm whose bidual norm is octahedral. In this bachelor's thesis, detailed proofs of the renorming theorems and general results on octahedrality applied in the proof of the theorem of Langemets and López-Pérez are presented, and an outline of the proof of their theorem is given.

**CERCS research specialisation.** P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

**Keywords.** Normed space, Banach space, dual space, equivalent renorming, octahedrality.

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	<b>4</b>
<b>1 Tarvilisi eelteadmisi</b>	<b>6</b>
1.1 Summaruumi kaasruum . . . . .	6
1.2 Hulga kumer ja absoluutselt kumer kate . . . . .	7
1.3 Minkowski funktsionaal . . . . .	10
1.4 Nõrgad topoloogiad normeeritud ruumis . . . . .	11
1.5 Faktorruumi ja alamruumi kaasruum . . . . .	14
1.6 Lineaarsete isomeetriaate ja faktorkujutuste duaalsus . . . . .	16
1.7 Millal Banachi ruum on „kaasruum“? . . . . .	18
1.8 Teadmisi Schauderi baasidest . . . . .	19
<b>2 Banachi ruumi oktaedrilisus</b>	<b>21</b>
2.1 Oktaedrilisuse mõiste ja sellega samaväärseid tingimusi . . . . .	21
2.2 Teise kaasruumi oktaedrilisus . . . . .	23
2.3 Antud hulga jaoks oktaedriline hulk . . . . .	24
<b>3 Ümbernormeerimisteoreemid</b>	<b>27</b>
3.1 Banachi ruumis tõkestatud absoluutselt kumera hulga lineaarse katte normeerimine selle hulga Minkowski funktsionaali abil . . . . .	27
3.2 Ekvivalentse normi jätkamine alamruumilt kogu ruumile . . . . .	28
3.3 Üks klassikaline ümbernormeerimisteoreem . . . . .	29
3.4 Kaasruumis *-nõrgalt kompaktse kumera hulga lineaarse katte normeerimine . . . . .	32
<b>4 Artikli [L LP] põhiteoreemi tõestus</b>	<b>34</b>
<b>Kirjandus</b>	<b>36</b>

## Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö on referatiivne teoreetiline uurimus funktsionaalanalüüsi valdkonnast, täpsemalt Banachi ruumide geometriast.

Oktaeedrilisuse mõiste tõid sisse G. Godefroy ja B. Maurey avaldamata artiklis „Normes lisses et anguleuses sur les espaces de Banach séparables“. Aastal 1989 ilmunud artiklis [G] tõestas Godefroy järgmise teoreemi.

**Teoreem** (vt [G, teoreem II.4]). *Olgu  $X$  Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

- (i)  $X$  sisaldab alamruumi, mis on isomorfne ruumiga  $\ell_1$ .
- (ii) ruumil  $(X, \|\cdot\|)$  leidub ekvivalentne norm  $|\cdot|$  nii, et  $(X, |\cdot|)$  on oktaeedriline.
- (iii) ruumil  $(X, \|\cdot\|)$  leidub ekvivalentne norm  $|||\cdot|||$  ja  $x^{**} \in X^{**} \setminus \{0\}$  nii, et

$$|||x + x^{**}||| = |||x||| + |||x^{**}||| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Ei ole raske näidata, et kui Banachi ruumi teine kaasruum on oktaeedriline, siis ka see ruum ise on oktaeedriline. Vastupidine väide üldjuhul ei kehti (vt [G, lk 12]). Eelneva teoreemi valguses püstitas Godefroy järgmise küsimuse: kas igal Banachi ruumil, mis sisaldab jadaruumiga  $\ell_1$  isomorfset alamruumi, leidub ekvivalentne norm, mille suhtes selle Banachi ruumi teine kaasruum on oktaeedriline.

Aastal 2019 tõestasid J. Langemets ja G. López-Pérez järgmise teoreemi, millega nad lahendasid Godefroy probleemi separaablite Banachi ruumide juhul.

**Teoreem** (vt [LLP<sub>0</sub>, teoreem 4.1]). *Olgu  $X$  separabel Banachi ruum, mis sisaldab ruumiga  $\ell_1$  isomorfset alamruumi. Siis leidub ruumil  $X$  esialgse normiga ekvivalentne norm, mille suhtes selle ruumi teine kaasruum on oktaeedriline.*

Bakalaureusetöös kirjutatakse üksikasjaliselt lahti Langemetsa ja López-Pérez teoreemi tõestuses kasutatud ümbernormeerimisteoreemide ning üldiste oktaeedrilisust puudutavate tulemuste tõestused ning esitatakse Langemetsa ja López-Pérez teoreemi tõestuse skeem. Tõestuses vajaminevad Cantori hulgal määratud pidevate funktsioonide ruumi puudutavad tulemused jäävad selles töös pea täielikult „kaadri taha“.

Bakalaureusetöö sisuline osa on jaotatud neljaks paragrahviks. Esimeses paragrahvis toome välja töös vajaminevaid klassikalisi tulemusi ja mõisteid Banachi ruumide teooriast: summaruumi kaasruumi kirjeldus, hulga kumer ja absoluutselt kumer kate, neelava hulga Minkowski funktsionaal, nõrgad topoloogiad normeeritud ruumis, faktorruumi ja alamruumi kaasruumi kirjeldus, lineaarsete isomeetriate ja faktor kujutuste duaalsus, piisav tingimus selleks, et Banachi ruum oleks samastatav kaasruumiga, Schauderi baas ja baasjada.

Teises ning kolmandas paragrahvis esitatakse vastavalt Langemetsa ja López-Pérez teoreemi tõestuses vajaminevate oktaedrilisust puudutavate tulemuste ning ümbornormeerimisteoreemide üksikasjalised tõestused.

Viimases, neljandas paragrahvis antakse Langemetsa ja López-Pérez teoreemi tõestuse skeem.

Töös vaadeldakse vaid reaalseid normeeritud (ja Banachi) ruume. Kasutatavad tähistused on Banachi ruumide teoorias standardsed. Banachi ruumi  $X$  kinnist ühikera ja ühiksfääri tähistatakse vastavalt sümboolitega  $B_X$  ja  $S_X$ , tema kaasruumi sümbooliga  $X^*$ ; kujutus  $j_X: X \rightarrow X^{**}$  on ruumi  $X$  kanooniline sisestus oma teise kaasruumi, kusjuures  $j_X x$  asemel kirjutatakse sageli lihtsalt  $x$ . Funktsionaali  $x^* \in X^*$  rakendamist elemendile  $x \in X$  tähistame  $\langle x, x^* \rangle$ . Kui  $Y$  on samuti normeeritud ruum, siis  $\mathcal{L}(X, Y)$  tähistab kõigi ruumist  $X$  ruumi  $Y$  tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite ruumi.

# 1 Tarvilisi eelteadmisi

## 1.1 Summaruumi kaasruum

**Lause 1.1.** Olgu  $Y$  ja  $Z$  normeeritud ruumid ning olgu  $p, q \in [1, \infty]$  kaas-eksponendid, s.t  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (kui  $p = 1$  või  $p = \infty$ , siis loetakse vastavalt  $q = \infty$  ja  $q = 1$ ). Siis kujutus

$$J: Y^* \oplus_q Z^* \longrightarrow (Y \oplus_p Z)^*,$$

kus

$$\langle (y, z), J(y^*, z^*) \rangle = \langle y, y^* \rangle + \langle z, z^* \rangle$$

kõikide  $y \in Y, z \in Z, y^* \in Y^*, z^* \in Z^*$  korral,

on isomeetriline isomorfism.

Edasises, kirjutades  $Y^* \oplus_q Z^* = (Y \oplus_p Z)^*$ , samastame me ruumi  $Y^* \oplus_q Z^*$  kaasruumiga  $(Y \oplus_p Z)^*$ , mõistes seejuures elemendi  $(y^*, z^*) \in Y^* \oplus_q Z^*$  all funktsionaali  $J(y^*, z^*) \in (Y \oplus_p Z)^*$  lausest 1.1, s.t

$$\langle (y, z), (y^*, z^*) \rangle = \langle y, y^* \rangle + \langle z, z^* \rangle$$

kõikide  $y \in Y, z \in Z, y^* \in Y^*, z^* \in Z^*$  korral.

**Lause 1.2.** Olgu  $X, Y$  ja  $Z$  normeeritud ruumid, olgu  $p, q \in [1, \infty]$  kaas-eksponendid ning olgu  $S \in \mathcal{L}(X, Y)$  ja  $R \in \mathcal{L}(X, Z)$ . Olgu operaator  $T: X \rightarrow Y \oplus_p Z$  defineeritud järgmiselt:

$$Tx = (Sx, Rx) \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Siis  $T \in \mathcal{L}(X, Y \oplus_p Z)$ , kusjuures kaasoperaator

$$T^*: Y^* \oplus_q Z^* = (Y \oplus_p Z)^* \rightarrow X^*$$

rahuldab tingimust

$$T^*(y^*, z^*) = S^*y^* + R^*z^* \quad \text{iga } (y^*, z^*) \in Y^* \oplus_q Z^* = (Y \oplus_p Z)^* \text{ korral} \quad (1.1)$$

ning teine kaasoperaator  $T^{**}: X^{**} \rightarrow (Y \oplus_p Z)^{**} = Y^{**} \oplus_p Z^{**}$  rahuldab tingimust

$$T^{**}x^{**} = (S^{**}x^{**}, R^{**}x^{**}) \quad \text{iga } x^{**} \in X^{**} \text{ korral.} \quad (1.2)$$

*Tõestus.* Operaatori  $T$  lineaarsus on ilmne. Operaator  $T$  on ka tõkestatud, sest mistahes  $x \in X$  korral

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|(Sx, Rx)\|_p = (\|Sx\|^p + \|Rx\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\|S\|^p \|x\|^p + \|R\|^p \|x\|^p)^{\frac{1}{p}} = ((\|S\|^p + \|R\|^p) \|x\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\|S\|^p + \|R\|^p)^{\frac{1}{p}} \|x\|. \end{aligned}$$

Tingimuse (1.1) tõestuseks piisab, fikseerides vabalt  $(y^*, z^*) \in Y^* \oplus_q Z^*$  ja  $x \in X$ , märkida, et

$$\begin{aligned}\langle x, T^*(y^*, z^*) \rangle &= \langle Tx, (y^*, z^*) \rangle = \langle (Sx, Rx), (y^*, z^*) \rangle \\ &= \langle Sx, y^* \rangle + \langle Rx, z^* \rangle = \langle x, S^*y^* \rangle + \langle x, R^*z^* \rangle = \langle x, S^*y^* + R^*z^* \rangle.\end{aligned}$$

Tingimuse (1.2) tõestuseks piisab, fikseerides vabalt  $x^{**} \in X^{**}$  ning  $(y^*, z^*) \in Y^* \oplus_q Z^* = (Y \oplus_p Z)^*$ , märkida, et

$$\begin{aligned}\langle (y^*, z^*), T^{**}x^{**} \rangle &= \langle T^*(y^*, z^*), x^{**} \rangle = \langle S^*y^* + R^*z^*, x^{**} \rangle \\ &= \langle S^*y^*, x^{**} \rangle + \langle R^*z^*, x^{**} \rangle = \langle y^*, S^{**}x^{**} \rangle + \langle z^*, R^{**}x^{**} \rangle \\ &= \langle (y^*, z^*), (S^{**}x^{**}, R^{**}x^{**}) \rangle.\end{aligned}$$

□

## 1.2 Hulga kumer ja absoluutselt kumer kate

**Definitsioon 1.1.** Olgu  $X$  vektorruum ning olgu  $C \subset X$ . Öeldakse, et hulk  $C$  on

- *kumer*, kui mistahes  $x, y \in C$  ja  $\lambda \in [0, 1]$  korral

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in C;$$

- *absoluutselt kumer*, kui mistahes  $x, y \in C$  ja  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ , korral

$$\mu x + \lambda y \in C.$$

On ilmne, et iga absoluutselt kumer hulk on kumer. Vastupidine väide ei kehti: kui  $x \in X \setminus \{0\}$ , siis ühepunktine hulk  $\{x\}$  on ilmselt kumer, kui mitte absoluutselt kumer, sest  $(-1)x + 0x = -x \notin \{x\}$ .

**Definitsioon 1.2.** Olgu  $X$  vektorruum ning olgu  $C \subset X$ .

- Hulka

$$\text{conv}(C) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in C, \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

nimetatakse hulga  $C$  *kumeraks katteks*.

- Hulka

$$\text{absconv}(C) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in C, \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1 \right\}$$

nimetatakse hulga  $C$  *absoluutselt kumeraks katteks*.

Pole eriti raske näha, et

- hulga  $C$  kumer kate  $\text{conv}(C)$  on vähim hulka  $C$  sisaldav kumer hulk;
- hulga  $C$  absoluutselt kumer kate  $\text{absconv}(C)$  on vähim hulka  $C$  sisaldav absoluutselt kumer hulk.

**Lause 1.3.** Olgu  $X$  vektorruum ning olgu  $B, C \subset X$  kumerad hulgad. Siis

$$\text{conv}(B \cup C) = \{(1 - \lambda)b + \lambda c : \lambda \in [0, 1], b \in B, c \in C\} =: A.$$

*Tõestus.* Sisalduvus  $\text{conv}(B \cup C) \supset A$  on ilmne, seega jääb tõestada, et  $\text{conv}(B \cup C) \subset A$ .

Olgu  $x \in \text{conv}(B \cup C)$ ; siis leiduvad  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in B \cup C$  ja  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , nii, et  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ . Tähistame

$$J_B := \{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \in B\} \quad \text{ja} \quad J_C := \{1, \dots, n\} \setminus J_B.$$

Kui  $J_B = \emptyset$  või  $J_C = \emptyset$ , siis hulkade  $C$  ja  $B$  kumeruse tõttu vastavalt  $x \in C$  ja  $x \in B$ ; niisiis mõlemal juhul ilmselt  $x \in A$ . Seega jääb vaadelda juhtu, kus  $J_B \neq \emptyset$  ja  $J_C \neq \emptyset$ . Sellisel juhul

$$\lambda := \sum_{i \in J_C} \lambda_i > 0 \quad \text{ja} \quad 1 - \lambda = \sum_{i \in J_B} \lambda_i > 0$$

ning

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i \in J_+} \lambda_i x_i + \sum_{i \in J_-} \lambda_i x_i = (1 - \lambda) \sum_{i \in J_B} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda} x_i + \lambda \sum_{i \in J_C} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i.$$

Seega  $x \in A$ , sest

- $\lambda \in [0, 1]$ ;
- mistahes  $i \in J_B$  korral  $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda} > 0$  ja mistahes  $i \in J_C$  korral  $\frac{\lambda_i}{\lambda} > 0$ , kusjuures

$$\sum_{i \in J_B} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda} = \frac{1}{1 - \lambda} \sum_{i \in J_B} \lambda_i = 1 \quad \text{ja} \quad \sum_{i \in J_C} \frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in J_C} \lambda_i = 1;$$

järelikult hulkade  $B$  ja  $C$  kumeruse tõttu

$$\sum_{i \in J_B} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda} x_i \in B \quad \text{ja} \quad \sum_{i \in J_C} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in C.$$

□

**Lause 1.4.** Olgu  $X$  vektorruum ning olgu  $C \subset X$ . Siis

(a)  $\text{absconv}(C) = \text{conv}(C \cup -C)$ ;

(b) kui hulk  $C$  on kumer, siis

$$\text{absconv}(C) = \text{conv}(C \cup -C) = \{(1 - \lambda)a + \lambda(-b) : \lambda \in [0, 1], a, b \in C\}.$$

*Tõestus.* Kui  $C = \emptyset$ , siis ilmselt ka  $\text{absconv}(C) = \text{conv}(C \cup -C) = A = \emptyset$ , seepärast võime järgnevas eeldada, et  $C \neq \emptyset$ .

(a). Ühelt poolt, olgu  $x \in \text{absconv}(C)$ . Siis mingite  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in C$  ja  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$ , korral  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ . Tähistame

$$I^+ := \{i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i \geq 0\} \quad \text{ja} \quad I^- := \{1, \dots, n\} \setminus I^+$$

ning  $\mu := 1 - \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ . Nüüd

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i \in I^+} \lambda_i x_i + \sum_{i \in I^-} \lambda_i x_i = \sum_{i \in I^+} \lambda_i x_i + \sum_{i \in I^-} (-\lambda_i)(-x_i) + \frac{\mu}{2} x_1 + \frac{\mu}{2} (-x_1).$$

Seega  $x \in \text{conv}(C \cup -C)$ , sest iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral  $\pm x_i \in C \cup -C$  ning iga  $i \in I^+$  korral  $\lambda_i \geq 0$ , iga  $i \in I^-$  korral  $-\lambda_i > 0$  ja  $\frac{\mu}{2} \geq 0$ , kusjuures

$$\sum_{i \in I^+} \lambda_i + \sum_{i \in I^-} (-\lambda_i) + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} = \sum_{i \in I^+} |\lambda_i| + \sum_{i \in I^-} |\lambda_i| + \mu = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| + 1 - \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 1.$$

Teiselt poolt, olgu  $x \in \text{conv}(C \cup -C)$ . Siis mingite  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in C \cup -C$  ja  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , korral  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ . Tähistame

$$J^+ := \{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \in C\} \quad \text{ja} \quad J^- := \{1, \dots, n\} \setminus J^+.$$

Nüüd

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i \in J^+} \lambda_i x_i + \sum_{i \in J^-} \lambda_i x_i = \sum_{i \in J^+} \lambda_i x_i + \sum_{i \in J^-} (-\lambda_i)(-x_i).$$

Seega  $x \in \text{absconv}(C)$ , sest iga  $i \in J^+$  korral  $x_i \in C$  ja iga  $i \in J^-$  korral  $-x_i \in C$  ning

$$\sum_{i \in J^+} |\lambda_i| + \sum_{i \in J^-} |-\lambda_i| = \sum_{i \in J^+} \lambda_i + \sum_{i \in J^-} \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

(b) järeldeb vahetult väitest (a) ja lausest 1.3. □

### 1.3 Minkowski funktsionaal

**Definitsioon 1.3.** Olgu  $X$  vektorruum ning olgu  $A \subset X$  tema *neelav* alamhulk (s.t iga  $x \in X$  korral leidub  $t > 0$  nii, et  $x \in tA$ ). Hulga  $A$  *Minkowski funktsionaaliks* nimetame funktsionaali  $p_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$p_A(x) := \inf \{t > 0: x \in tA\}.$$

Märgime, et *iga neelav hulk sisaldab vastava vektorruumi nullelementi* (see fakt järeldeb vahetult neelavuse definitsioonist).

**Lause 1.5** (vt nt [M, lk 80, lause 1.9.14, (a)]). *Olgu  $X$  vektorruum, olgu  $A \subset X$  neelav alamhulk ning olgu  $p_A$  hulga  $A$  Minkowski funktsionaal.*

- (a) *Minkowski funktsionaal  $p_A$  on positiivselt homogeenne (s.t iga  $\lambda > 0$  ja  $x \in X$  korral  $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$ ), kusjuures*

$$A \subset \{x \in X: p_A(x) \leq 1\}.$$

- (b) *Kui hulk  $A$  on kumer, siis  $p_A$  on sublineaarne funktsionaal ruumil  $X$  (s.t  $p_A$  on positiivselt homogeenne ja subaditiivne (s.t mistahes  $x_1, x_2 \in X$  korral  $p_A(x_1 + x_2) \leq p_A(x_1) + p_A(x_2)$ )), kusjuures*

$$\{x \in X: p_A(x) < 1\} \subset A. \tag{1.3}$$

- (c) *Kui hulk  $A$  on absoluutselt kumer, siis  $p_A$  on poolnorm ruumil  $X$ .*

*Tõestus.* (a). Funktsionaal  $p_A$  on positiivselt homogeenne, sest kui  $x \in X$  ja  $\lambda > 0$ , siis

$$\begin{aligned} p_A(\lambda x) &= \inf \{t > 0: \lambda x \in tA\} = \inf \left\{ t > 0: x \in \frac{t}{\lambda} A \right\} \\ &= \lambda \inf \{s > 0: x \in sA\} = \lambda p_A(x). \end{aligned}$$

Kui  $x \in A = 1A$ , siis ilmselt  $p_A(x) \leq 1$ , seega  $A \subset \{x \in X: p_A(x) \leq 1\}$ .

(b). Eeldame, et hulk  $A$  on kumer. Märgime, et sel eeldusel mistahes  $t_1, t_2 > 0$  korral

$$t_1 A + t_2 A = (t_1 + t_2) \left( \frac{t_1}{t_1 + t_2} A + \frac{t_2}{t_1 + t_2} A \right) = (t_1 + t_2) A.$$

Olgu  $x_1, x_2 \in X$ . Kui  $t_1$  ja  $t_2$  on sellised, et  $x_1 \in t_1 A$  ja  $x_2 \in t_2 A$ , siis  $x_1 + x_2 \in t_1 A + t_2 A = (t_1 + t_2) A$ , seega  $p_A(x_1 + x_2) \leq t_1 + t_2$ . Seega saame sobivalt infimumeid võttes võrratuse

$$p_A(x_1 + x_2) \leq \inf \{t_1 > 0: x_1 \in t_1 A\} + \inf \{t_2 > 0: x_2 \in t_2 A\} = p_A(x_1) + p_A(x_2).$$

Niisiis, funktsionaal  $p_A$  on subaditiivne ning seega sublineaarne (sest punktis (a) tõestasime, et  $p_A$  on positiivselt homogeenne).

Olgu  $x \in X$  selline, et  $p_A(x) < 1$ . Siis leidub  $t \in (0, 1)$  nii, et  $x \in tA$ . Nüüd  $t^{-1}x \in A$ , järelikult hulga  $A$  kumeruse tõttu

$$x = t(t^{-1}x) + (1-t)0 \in A.$$

Seega kehtib sisalduvus (1.3).

(c). Eeldame, et hulk  $A$  on absoluutselt kumer. Veendumaks, et  $p_A$  on poolnorm, peame näitama, et mistahes  $\lambda \in \mathbb{R}$  ja  $x \in X$  korral

$$p_A(\lambda x) = |\lambda|p_A(x) \tag{1.4}$$

ning et  $p_A$  on subaditiivne. Funktsionaali  $p_A$  subaditiivsus on tõestatud väites (b), seega, fikseerides vabalt  $\lambda \in \mathbb{R}$  ja  $x \in X$ , jääb tõestada võrdus (1.4). Kui  $\lambda > 0$ , siis see võrdus kehtib funktsionaali  $p_A$  positiivse homogeensuse tõttu. Edasi, kuna iga  $t > 0$  korral  $0 = t0 \in tA$ , siis  $p_A(0) = 0$ ; järelikult (1.4) kehtib. Jääb vaadelda juhtu, kui  $\lambda < 0$ . Sel juhul mistahes reaalarvu  $t > 0$  korral hulga  $A$  absoluutse kumeruse tõttu

$$\begin{aligned} \lambda x \in tA &\iff t^{-1}\lambda x \in A \iff -t^{-1}\lambda x \in A \iff t^{-1}(-\lambda)x \in A \\ &\iff (-\lambda)x \in tA, \end{aligned}$$

järelikult funktsionaali  $p_A$  positiivse homogeensuse tõttu (arvestades, et  $-\lambda > 0$ )

$$\begin{aligned} p_A(\lambda x) &= \inf\{t > 0: \lambda x \in tA\} = \inf\{t > 0: (-\lambda)x \in tA\} \\ &= p_A((-\lambda)x) = (-\lambda)p_A(x) = |\lambda|p_A(x), \end{aligned}$$

nagu soovitud. □

## 1.4 Nõrgad topoloogiad normeeritud ruumis

Olgu  $X$  normeeritud ruum ning olgu  $E$  kaasruumi  $X^*$  vektoralamruum. Iga  $x \in X$ , iga lõpliku alamhulga  $\mathcal{F} \subset E$  ja iga arvu  $\varepsilon > 0$  korral tähistame

$$U_x(\mathcal{F}, \varepsilon) := \{u \in X: |\langle u - x, x^* \rangle| < \varepsilon \text{ iga } x^* \in \mathcal{F} \text{ korral}\}.$$

**Definitsioon 1.4.** Topoloogiat ruumis  $X$ , kus mistahes punkti  $x \in X$  ümbruste baas on kogum

$$\left\{ U_x(\mathcal{F}, \varepsilon): \mathcal{F} \subset E \text{ on lõplik alamhulk ja } \varepsilon > 0 \right\}$$

nimetatakse *nõrgaks topoloogiaks*  $\sigma(X, E)$  ruumis  $X$ .

Nõrka topoloogiat  $\sigma(X, X^*)$  nimetatakse lihtsalt *nõrgaks topoloogiaks* ruumis  $X$  ja tähistatakse sümboliga  $w$ . (See tähistus tuleb ingliskeelse sõna „weak“ – „nõrk“ – esitähdest.)

Nõrka topoloogiat  $\sigma(X^*, j_X(X))$  (kaasruumis  $X^*$ ) nimetatakse *\*-nõrgaks topoloogiaks* (loetakse: tärn-nõrk topoloogia) kaasruumis  $X^*$  ja tähistatakse sümboliga  $w^*$ .

**Definitsioon 1.5.** Olgu  $X$  normeeritud ruum. Öeldakse, et kaasruumi  $X^*$  alamhulk  $A$  eraldab punktid ruumis  $X$ , kui mistahes  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$ , korral leidub  $x^* \in A$  nii, et  $\langle x_1, x^* \rangle \neq \langle x_2, x^* \rangle$ .

On ilmne, et alamhulk  $A \subset X^*$  eraldab punktid ruumis  $X$  parajasti siis, kui mistahes  $x \in X \setminus \{0\}$  korral leidub  $x^* \in A$  nii, et  $\langle x, x^* \rangle \neq 0$ .

Järgnev lause ütleb, millal nõrk topoloogia  $\sigma(X, E)$  on Hausdorffi topoloogia.

**Lause 1.6.** Olgu  $X$  normeeritud ruum ning olgu  $E$  kaasruumi  $X^*$  vektoralamruum. Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) nõrk topoloogia  $\sigma(X, E)$  on Hausdorffi topoloogia;
- (ii) ruum  $E$  eraldab punktid ruumis  $X$ .

Järgnev lause kirjeldab perede koonduvust nõrkades topoloogiates. Asjaolu, et pere  $(x_\alpha)$  normeeritud ruumis  $X$  koondub nõrgas topoloogias  $\sigma(X, E)$  elemendiks  $x \in X$ , märgime me järgmiselt:  $x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{\sigma(X, E)} x$ .

**Lause 1.7.** Olgu  $X$  normeeritud ruum, olgu  $E$  kaasruumi  $X^*$  vektoralamruum, olgu  $(x_\alpha)$  ruumi  $X$  elementide pere ning olgu  $x \in X$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i)  $x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{\sigma(X, E)} x$ ;
- (ii) iga  $f \in E$  korral  $\langle x_\alpha, f \rangle \xrightarrow[\alpha]{} \langle x, f \rangle$ .

*Tõestus.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Kehtigu (i) ning olgu  $f \in E$  ja  $\varepsilon > 0$ . Veendumaks, et  $\langle x_\alpha, f \rangle \xrightarrow[\alpha]{} \langle x, f \rangle$ , piisab leida indeksi  $\alpha_0$  selliselt, et iga  $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$  korral

$$|\langle x_\alpha, f \rangle - \langle x, f \rangle| < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Tingimuse (i) põhjal saame leida indeksi  $\alpha_0$  nii, et kui  $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$ , siis  $x_\alpha \in U_x(\{f\}, \varepsilon)$ . Viimane tingimus on samaväärne tingimusega (1.5).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Kehtigu (ii) ning olgu  $\mathcal{F} \subset E$  lõplik alamhulk ja  $\varepsilon > 0$ . Veendumaks, et  $x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{\sigma(X, E)} x$ , piisab leida indeksi  $\alpha_0$  nii, et kui  $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$ , siis  $x_\alpha \in U(\mathcal{F}, \varepsilon)$ , s.t

$$|\langle x_\alpha, f \rangle - \langle x, f \rangle| < \varepsilon \quad \text{iga } f \in \mathcal{F} \text{ korral.} \quad (1.6)$$

Eelduse (ii) põhjal saame iga  $f \in \mathcal{F}$  korral leida indeksi  $\alpha_f$  nii, et kui  $\alpha \succ \alpha_f$ , siis kehtib (1.5). Kuna hulk  $\mathcal{F}$  on lõplik, siis pere indeksite hulga suunatuse tõttu leidub indeks  $\alpha_0$  nii, et  $\alpha_f \succ \alpha_0$  iga  $f \in \mathcal{F}$  korral. Aga nüüd, kui  $\alpha \succ \alpha_0$ , siis kehtib (1.6).  $\square$

**Lause 1.8.** *Olgu  $X$  normeeritud ruum ning olgu kaasruumi  $X^*$  vektoralamruum  $E$  ruumi  $X$  jaoks normeeriv, s.t*

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B_E} |\langle x, x^* \rangle| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

*Siis norm ruumis  $X$  on nõrgas topoloogias  $\sigma(X, E)$  alt poolpidev, s.t mistahes pere  $(x_\alpha)$  ja elemendi  $x \in X$  korral*

$$x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{\sigma(X, E)} x \implies \liminf_{\alpha} \|x_\alpha\| \geq \|x\|.$$

Kuna kaasruum  $X^*$  ning loomulik sisestus  $j_X(X)$  on normeerivad vastavalt ruumi  $X$  ja kaasruumi  $X^*$  jaoks, siis lausest 1.8 järeldub, et ruumi  $X$  ja kaasruumi  $X^*$  norm on alt poolpidev vastavalt nõrkades topoloogiates  $\sigma(X, X^*)$  ja  $\sigma(X^*, j_X(X))$ , s.t norm ruumis  $X$  on nõrgas topoloogias  $w$  alt poolpidev ning norm kaasruumis  $X^*$  on  $*$ -nõrgas topoloogias  $w^*$  alt poolpidev.

*Lause 1.8 tõestus.* Koondugu pere  $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  topoloogias  $\sigma(X, E)$  elemendiks  $x \in X$ . Iga  $x^* \in B_E$  korral

$$\|x_\alpha\| \geq \langle x_\alpha, x^* \rangle \quad \text{iga } \alpha \in \mathcal{A} \text{ korral,}$$

seega

$$\liminf_{\alpha} \|x_\alpha\| \geq \liminf_{\alpha} \langle x_\alpha, x^* \rangle = \lim_{\alpha} \langle x_\alpha, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle;$$

järelikult

$$\liminf_{\alpha} \|x_\alpha\| \geq \sup_{x^* \in B_E} \langle x, x^* \rangle = \|x\|.$$

$\square$

**Teoreem 1.9** (Banach–Alaoglu teoreem; vt nt [M, lk 229, teoreem 2.6.18]). *Olgu  $X$  normeeritud ruum. Siis tema kaasruumi kinnine ühikera  $B_{X^*}$  on  $w^*$ -kompaktne.*

**Teoreem 1.10** (Goldstine'i teoreem; vt nt [M, lk 232, teoreem 2.6.26]). *Olgu  $X$  normeeritud ruum. Siis  $j_X(B_X)$  on teise kaasruumi  $X^{**}$  kinnises ühikeras  $B_{X^{**}}$   $w^*$ -kõikjal tihe. (Meenutame, et  $j_X: X \rightarrow X^{**}$  on loomulik sisestus.)*

**Teoreem 1.11** (Banach–Dieudonné teoreem; vt nt [FHHMZ, lk 122, teoreem 3.92]). *Olgu  $X$  Banachi ruum ning olgu  $A \subset X^*$  kumer alamhulk. Kui iga  $n \in \mathbb{N}$  korral on hulk  $A \cap nB_{X^*}$   $w^*$ -kinnine kaasruumis  $X^*$ , siis on ka hulk  $A$   $w^*$ -kinnine kaasruumis  $X^*$ .*

**Lause 1.12.** *Olgu  $X$  Banachi ruum ning olgu  $C \subset X^*$  \*-nõrgalt kompaktne kumer hulk. Siis on ka hulga  $C$  absoluutselt kumer kate  $\text{absconv}(C)$  \*-nõrgalt kompaktne.*

*Tõestus.* Lause 1.4, (b), põhjal

$$\text{absconv}(C) = \{(1 - \lambda)a + \lambda(-b) : \lambda \in [0, 1], a, b \in C\} =: A,$$

seega piisab näidata, et hulk  $A$  on \*-nõrgalt kompaktne kaasruumis  $X^*$ . Olgu  $(c_\alpha)$  hulga  $A$  elementide pere; siis iga indeksi  $\alpha$  korral leiduvad elemendid  $a_\alpha, b_\alpha \in C$  ja arv  $\lambda_\alpha \in [0, 1]$  nii, et  $c_\alpha = (1 - \lambda_\alpha)a_\alpha + \lambda_\alpha(-b_\alpha)$ . Hulga  $C$  \*-nõrga kompaktsuse tõttu leiduvad pere  $(a_\alpha)$  osapere  $(a_\beta)$  ja element  $a \in C$  nii, et  $a_\beta \xrightarrow[\beta]{w^*} a$  kaasruumis  $X^*$ , ning osapere  $(b_\beta)$  osapere  $(b_\gamma)$  ja element  $b \in C$  nii, et  $b_\gamma \xrightarrow[\gamma]{w^*} b$  kaasruumis  $X^*$ . Lõigu  $[0, 1]$  kompaktsuse tõttu ruumis  $\mathbb{R}$  leiduvad pere  $(\lambda_\gamma)$  osapere  $(\lambda_\delta)$  ja arv  $\lambda \in [0, 1]$  nii, et  $\lambda_\delta \xrightarrow[\delta]{} \lambda$  ruumis  $\mathbb{R}$ . Aga nüüd

$$c_\delta = (1 - \lambda_\delta)a_\delta + \lambda_\delta(-b_\delta) \xrightarrow[\delta]{w^*} (1 - \lambda)a + \lambda(-b) \quad \text{kaasruumis } X^*,$$

kusjuures  $(1 - \lambda)a + \lambda(-b) \in A$ . Seega on hulk  $A$  \*-nõrgalt kompaktne kaasruumis  $X^*$ , nagu soovitud.  $\square$

## 1.5 Faktorruumi ja alamruumi kaasruum

Järgnev teoreem kirjeldab Banachi ruumi faktorruumi ning alamruumi kaasruume.

**Teoreem 1.13** (vt nt [M, lk 95, teoreem 1.10.17, ja lk 94, teoreem 1.10.16]).  
*Olgu  $X$  Banachi ruum ning olgu  $Z$  ruumi  $X$  kinnine alamruum.*

(a) *Kujutus  $J_1: Z^\perp \rightarrow (X/Z)^*$ , kus*

$$\langle x + Z, J_1 f \rangle = \langle x, f \rangle \quad \text{kõikide } x \in X \text{ ja } f \in Z^\perp \text{ korral,}$$

*on isomeetiline isomorfism.*

(b) *Kujutus  $J_2: X^*/Z^\perp \rightarrow Z^*$ , kus*

$$\langle z, J_2(x^* + Z^\perp) \rangle = \langle z, x^* \rangle \quad \text{kõikide } z \in Z \text{ ja } x^* \in X^* \text{ korral,}$$

*on isomeetiline isomorfism.*

Operaatoritele  $J_1$  ja  $J_2$  teoreemist 1.13 viidatakse kui *loomulikele* või *kanoonilistele (isomeetrilistele) isomorfismidele*.

**Järeldus 1.14.** Olgu  $X$  Banachi ruum, olgu  $Z$  ruumi  $X$  kinnine alamruum ning olgu

$$J_1: Z^\perp \rightarrow (X/Z)^* \quad \text{ja} \quad J_2: X^{**}/Z^{\perp\perp} \rightarrow (Z^\perp)^*$$

kanoonilised isomorfismid. Siis operaator

$$(J_2)^{-1}J_1^*: (X/Z)^{**} \rightarrow X^{**}/Z^{\perp\perp}$$

on isomeetiline isomorfism. Seejuures, kui

$$q: X \rightarrow X/Z \quad \text{ja} \quad \hat{q}: X^{**} \rightarrow X^{**}/Z^{\perp\perp}$$

on kanoonilised kujutused, siis  $\hat{q} = (J_2)^{-1}J_1^*q^{**}$ , s.t

$$(J_2)^{-1}J_1^*q^{**}x^{**} = x^{**} + Z^{\perp\perp} \quad \text{iga } x^{**} \in X^{**} \text{ korral.} \quad (1.7)$$

*Tõestus.* On selge, et isomeetrilise isomorfismi pöördoperaator on isomeetiline isomorfism. Veendume, et ka tema kaasoperaator on seda. Olgu  $A: X \rightarrow Y$  isomeetiline isomorfism. Mistahes  $y^* \in Y^*$  korral

$$\|A^*y^*\| = \sup_{x \in B_X} \langle x, A^*y^* \rangle = \sup_{x \in B_X} \langle Ax, y^* \rangle = \sup_{y \in B_Y} \langle y, y^* \rangle = \|y^*\|,$$

seega kaasoperaator  $A^*$  on isomeetria. Kaasoperaator  $A^*$  on ka sürjektsioon, sest mistahes  $x^* \in X^*$  korral  $y^* := (A^{-1})^*x^* \in Y^*$ , kusjuures

$$A^*y^* = A^*((A^{-1})^*x^*) = (A^*(A^{-1})^*)x^* = (A^{-1}A)^*x^* = I_X^*x^* = I_{X^*}x^* = x^*$$

(siin  $I_X$  ja  $I_{X^*}$  on vastavalt ruumi  $X$  ja kaasruumi  $X^*$  ühikoperaatorid). Seega  $A^*$  on isomeetiline isomorfism. Kokku oleme saanud, et isomeetrilise isomorfismi kaasoperaator on isomeetiline isomorfism. Seega on operaator  $(J_2)^{-1}J_1^*$  isomeetriliste isomorfismide kompositsioonina isomeetiline isomorfism.

Olgu  $x^{**} \in X^{**}$  suvaline. Võrduste (1.7) tõestuseks piisab näidata, et  $J_1^*q^{**}x^{**} = J_2(x^{**} + Z^{\perp\perp})$ , s.t iga  $f \in Z^\perp$  korral

$$\langle f, J_1^*q^{**}x^{**} \rangle = \langle f, J_2(x^{**} + Z^{\perp\perp}) \rangle$$

ehk, teisisõnu,

$$\langle q^*J_1f, x^{**} \rangle = \langle f, x^{**} \rangle,$$

milleks piisab näidata, et  $q^*J_1f = f$ , milleks omakorda piisab märkida, et iga  $x \in X$  korral

$$\langle x, q^*J_1f \rangle = \langle qx, J_1f \rangle = \langle x + Z, J_1f \rangle = \langle x, f \rangle.$$

□

## 1.6 Lineaarsete isomeetria ja faktorkujutuste duaalsus

Järgnev teoreem on meile tuttav kursusest „Funktsionaalanalüüs II“.

**Teoreem 1.15.** *Olgu  $X$  ja  $Y$  Banachi ruumid ning olgu  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Järgmised väited on samaväärsed:*

- (i)  $T$  on sürjektioon, kusjuures iga  $y \in Y$  korral

$$\|y\| = \inf\{\|x\| : x \in X, Tx = y\};$$

- (ii)  $T(B_X^\circ) = B_Y^\circ$ ;

- (iii) kujutus

$$\widehat{T}: X/\ker T \ni x + \ker T \mapsto Tx \in Y$$

on isomeetiline isomorfism.

**Definitsioon 1.6.** Operaatorit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , mis rahuldab ühte (ja seega kõiki) teoreemi 1.15 samaväärsetest tingimustest (i)–(iii), nimetatakse *faktorkujutuseks*.

**Lause 1.16.** *Olgu  $X$  ja  $Y$  Banachi ruumid ning olgu  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ .*

- (a) *Järgmised väited on samaväärsed:*

- (i)  $T$  on isomeetria;  
(ii)  $T^*$  on faktorkujutus.

Seejuures iga  $x^* \in X^*$  korral leidub  $y^* \in Y^*$  nii, et  $T^*y^* = x^*$  ja  $\|y^*\| = \|x^*\|$ .

- (b) *Järgmised väited on samaväärsed:*

- (i)  $T$  on faktorkujutus;  
(ii)  $T^*$  on isomeetria.

*Tõestus.* (a), (i) $\Rightarrow$ (ii). Olgu  $T$  isomeetria ning olgu  $x^* \in X^*$ . Veendumaks, et  $T^*$  on faktorkujutus, piisab leida  $y^* \in Y^*$  nii, et  $T^*y^* = x^*$ , ning veenduda, et

$$\|x^*\| = \inf\{\|v^*\| : v^* \in Y^*, T^*v^* = x^*\}. \quad (1.8)$$

Selleks defineerime operaatori  $T$  kujutisruumil  $Z := \{Tx : x \in X\} \subset Y$  funktsionaali  $z^* : Z \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\langle Tx, z^* \rangle := \langle x, x^* \rangle, \quad x \in X.$$

Ilmselt on funktsionaal  $z^*$  lineaarne. See funktsionaal on ka tõkestatud, sest

$$\sup_{z \in B_Z} \langle z, z^* \rangle = \sup_{x \in B_X} \langle Tx, z^* \rangle = \sup_{x \in B_X} \langle x, x^* \rangle = \|x^*\|$$

(siin arvestasime, et  $T$  on isomeetria). Ühtlasi järeldub eelmisest võrdusteahelast, et  $\|z^*\| = \|x^*\|$ . Hahn–Banachi teoreemi põhjal leidub funktsionaalil  $z^*$  normi säilitav jätk kogu ruumile  $Y$ , s.t leidub  $y^* \in Y^*$  nii, et  $y^*|_Z = z^*$  ja  $\|y^*\| = \|z^*\|$ . Paneme tähele, et  $T^*y^* = x^*$ , sest mistahes  $x \in X$  korral

$$\langle x, T^*y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle = \langle Tx, z^* \rangle = \langle x, x^* \rangle.$$

Kuna  $\|y^*\| = \|z^*\| = \|x^*\|$ , siis oleme ühtlasi tõestanud ka teoreemi (a)-osa väite, mis algab sõnaga „seejuures“. Võrduse (1.8) (ning ühtlasi ka kogu implikatsiooni) tõestuseks jääb veel tähele panna, et kui  $v^* \in Y^*$  on selline, et  $T^*v^* = x^*$ , siis

$$\|v^*\| = \|T^*\| \|v^*\| \geq \|T^*v^*\| = \|x^*\|$$

(siin arvestasime asjaolu, et kuna  $T$  on isomeetria, siis  $\|T\| = 1$  ning järelikult ka  $\|T^*\| = 1$ ).

(b), (i) $\Rightarrow$ (ii). Olgu  $T$  faktorkujutus ning olgu  $y^* \in Y^*$ . Veendumaks, et  $T^*$  on isomeetria, piisab näidata, et  $\|T^*y^*\| = \|y^*\|$ . Kuna  $\|T\| = 1$ , siis

$$\|T^*y^*\| \leq \|T^*\| \|y^*\| = \|T\| \|y^*\| = \|y^*\|,$$

niisiis jääb näidata, et  $\|T^*y^*\| \geq \|y^*\|$ . Selleks fikseerime vabalt arvu  $\varepsilon > 0$ . Olgu  $y \in S_Y$  selline, et  $\langle y, y^* \rangle > \|y^*\| - \varepsilon$ . Kuna  $T$  on faktorkujutus, siis leidub elemendi  $y$  originaal  $x \in X$ , s.t  $Tx = y$ , mille norm  $\|x\| \leq \|y\| + \varepsilon = 1 + \varepsilon$ . Nüüd  $\frac{x}{1+\varepsilon} \in B_X$ , seega

$$\|T^*y^*\| \geq \left\langle \frac{x}{1+\varepsilon}, T^*y^* \right\rangle = \left\langle \frac{Tx}{1+\varepsilon}, y^* \right\rangle = \frac{1}{1+\varepsilon} \langle y, y^* \rangle > \frac{\|y^*\| - \varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Eelnev võrratusteahel kehtib iga  $\varepsilon > 0$  korral, seega  $\|T^*y^*\| \geq \|y^*\|$ , nagu soovitud.

(a), (ii) $\Rightarrow$ (i). Olgu  $T^*$  faktorkujutus. Siis juba tõestatud implikatsiooni (b), (i) $\Rightarrow$ (ii), põhjal on  $T^{**}$  isomeetria. Veendumaks, et ka  $T$  on isomeetria, märgime kõigepealt, et mistahes operaatori  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  korral

$$A^{**}j_X = j_Y A \tag{1.9}$$

(meenutame, et  $j_X: X \rightarrow X^{**}$  ja  $j_Y: Y \rightarrow Y^{**}$  on loomulikud sisestused). Tõepoolest, olgu  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Võrduse (1.9) tõestuseks piisab märkida, et mistahes  $x \in X$  ja  $y^* \in Y^*$  korral

$$\langle y^*, A^{**}j_X x \rangle = \langle A^*y^*, j_X x \rangle = \langle x, A^*y^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle = \langle y^*, j_Y Ax \rangle.$$

Muuhulgas kehtib ka võrdus  $T^{**}j_X = j_Y T$ . Kuna operaatorid  $T^{**}$  ja  $j_X$  on isomeetriad, siis ka nende kompositsioon  $T^{**}j_X$  on isomeetria, järelikult peab ka

kompositsioon  $j_Y T$  olema isomeetria. Kuna loomulik sisestus  $j_Y$  on isomeetria, siis järeldub siit, et ka  $T$  on isomeetria, nagu soovitud.

(b), (ii)  $\Rightarrow$  (i). Seda implikatsiooni me käesolevas töös ei tõesta. Selle tõestus kasutab operaatori  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  ja tema kaasoperaatori  $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$  kujutisruumide kinnisuse samaväärsust, mis on mittetriviaalne tulemus (vt nt [M, lk 292, teoreem 3.1.21]).  $\square$

## 1.7 Millal Banachi ruum on „kaasruum“?

Järgnev teoreem annab piisavad tingimused selleks, et Banachi ruum oleks isomeetriliselt isomorfne mingi Banachi ruumi kaasruumiga.

**Teoreem 1.17** (vt [K, teoreem 1]). *Olgu  $X$  Banachi ruum ning rahuldagu alamhulk  $A \subset X^*$  järgmisi tingimusi:*

- (1) *hulk  $A$  eraldab ruumi  $X$  punktid (s.t iga  $x \in X \setminus \{0\}$  jaoks leidub  $x^* \in A$  nii, et  $\langle x, x^* \rangle \neq 0$ );*
- (2) *ruumi  $X$  kinnine ühikera  $B_X$  on kompaktne nõrgas topoloogias  $\sigma(X, \text{span } A)$ .*

*Tähistame  $Z := \overline{\text{span}}^{\|\cdot\|} A$  (s.t  $Z$  on hulga  $A$  lineaarse katte sulund kaasruumis  $X^*$ ) ning olgu  $J: Z \rightarrow X^*$  loomulik sisestus. Siis kujutus*

$$T := J^* j_X: X \rightarrow Z^*$$

*on isomeetria; niisiis ruum  $X$  on isomeetriliselt isomorfne ruumi  $Z$  kaasruumiga.*

*Tõestus.* Kujutus  $J^* j_X$  on üksühene, sest kui  $x \in X \setminus \{0\}$ , siis, arvestades, et  $E$  eraldab ruumi  $X$  punktid, leidub funktsionaal  $f \in A \subset Z$  nii, et  $\langle x, f \rangle \neq 0$ , seega

$$\langle f, J^* j_X x \rangle = \langle Jf, j_X x \rangle = \langle x, Jf \rangle = \langle x, f \rangle \neq 0,$$

niisiis  $J^* j_X x \neq 0$ .

Veendumaks, et  $T$  on isomeetriline isomorfism, piisab nüüd näidata, et

$$(\sharp) \text{ iga } z^* \in S_{Z^*} \text{ korral leidub } x \in S_X \text{ nii, et } J^* j_X x = z^*.$$

Tõepoolest, kehtigu  $(\sharp)$ . Siis  $T$  on pealekujutus, järelikult jääb teoreemi tõestuseks näidata, et  $T$  on isomeetria. Olgu  $x \in X \setminus \{0\}$ . Kuna  $T$  on üksühene, siis  $Tx \neq 0$ , seega  $\frac{Tx}{\|Tx\|} \in S_{Z^*}$ , järelikult tingimuse  $(\sharp)$  põhjal leidub  $u \in S_X$  nii, et  $Tu = \frac{Tx}{\|Tx\|} = T\left(\frac{x}{\|Tx\|}\right)$ . Operaatori  $T$  üksühesuse tõttu  $u = \frac{x}{\|Tx\|}$ , seega  $x = \|Tx\|u$  ning järelikult

$$\|Tx\| = \|Tx\| \|u\| = \|\|Tx\|u\| = \|x\|.$$

Niisiis,  $T$  on isomeetria.

Jääb tõestada väide (#). Olgu  $z^* \in S_{Z^*}$ . Kuna  $J$  on isomeetria, siis lause 1.16, (a), põhjal leidub  $x^{**} \in S_{X^{**}}$  nii, et  $J^*x^{**} = z^*$ . Goldstine'i teoreemi 1.10 põhjal leidub ühikera  $B_X$  elementide pere  $(x_\alpha)$  nii, et  $j_X x_\alpha \xrightarrow{\alpha} x^{**}$  teises kaasruumis  $X^{**}$ , s.t iga  $x^* \in X^*$  korral  $\langle x^*, j_X x_\alpha \rangle \xrightarrow{\alpha} \langle x^*, x^{**} \rangle$ . Siit järeldub, et iga  $f \in \text{span } A$  korral

$$\langle f, J^* j_X x_\alpha \rangle = \langle Jf, j_X x_\alpha \rangle \xrightarrow{\beta} \langle Jf, x^{**} \rangle = \langle f, J^* x^{**} \rangle = \langle f, z^* \rangle.$$

Teiselt poolt, eelduse põhjal on ühikera  $B_X$  kompaktne nõrgas topoloogias  $\sigma(X, \text{span } A)$ , seega leiduvad pere  $(x_\alpha)$  osapere  $(x_\beta)$  ja element  $x \in B_X$  nii, et  $x_\beta \xrightarrow{\beta} x$ . Nüüd mistahes  $f \in \text{span } A$  korral

$$\begin{aligned} \langle f, J^* j_X x_\beta \rangle &= \langle Jf, j_X x_\beta \rangle = \langle x_\beta, Jf \rangle = \langle x_\beta, f \rangle \\ &\xrightarrow{\beta} \langle x, f \rangle = \langle x, Jf \rangle = \langle Jf, j_X x \rangle = \langle f, J^* j_X x \rangle. \end{aligned}$$

Kuna  $(J^* j_X x_\beta)$  on pere  $(J^* j_X x_\alpha)$  osapere, siis ka

$$\langle f, J^* j_X x_\beta \rangle \xrightarrow{\beta} \langle f, z^* \rangle \quad \text{iga } f \in \text{span } A \text{ korral,}$$

järelikult  $\langle f, J^* j_X x \rangle = \langle f, z^* \rangle$  iga  $f \in \text{span } A$  korral ning seega, arvestades, et  $\text{span } A$  on ruumi  $Z$  kõikjal tihe alamruum,

$$\langle f, J^* j_X x \rangle = \langle f, z^* \rangle \quad \text{iga } f \in Z \text{ korral,}$$

s.t  $J^* j_X x = z^*$ .

Väite (#) tõestuseks jääb veel märkida, et  $\|x\| = 1$ , sest, ühelt poolt, kuna  $x \in B_X$ , siis  $\|x\| \leq 1$ , ning, teiselt poolt,

$$\|x\| = \|J^*\| \|j_X x\| \geq \|J^* j_X x\| = \|z^*\| = 1.$$

□

## 1.8 Teadmisi Schauderi baasidest

**Definitsioon 1.7** (vt [M, definitsioon 4.1.1]). Öeldakse, et jada  $(x_i)_{i=1}^\infty$  Banachi ruumis  $X$  on *Schauderi baas* ruumis  $X$ , kui iga elemendi  $x \in X$  korral leiduvad üheselt määratud arvud  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , nii, et

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i.$$

**Näide 1.1.** Lihtne on veenduda, et jada  $(e_i)_{i=1}^\infty$ , kus iga  $i \in \mathbb{N}$  korral

$$e_i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)}_{i \text{ komponenti}}$$

on Schauderi baas Banachi ruumides  $\ell_p$ , kus  $1 \leq p < \infty$ , ning  $c_0$ . Sellele baasile viidatakse kui nimetatud ruumide *standardühivektorbaasile* või ka *kanoonilisele baasile*.

**Definitsioon 1.8** (vt [M, definitsioon 4.1.2]). Öeldakse, et jada  $(x_i)_{i=1}^\infty$  Banachi ruumis  $X$  on (*Schauderi*) *baasjada*, kui ta on Schauderi baas oma elementide lineaarse katte sulundis  $\overline{\text{span}}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ .

**Definitsioon 1.9** (vt [M, definitsioon 4.3.1]). Olgu  $X$  ja  $Y$  Banachi ruumid ning olgu  $(x_i)_{i=1}^\infty$  ja  $(y_i)_{i=1}^\infty$  baasjadad vastavalt ruumis  $X$  ja ruumis  $Y$ . Öeldakse, et baasjadad  $(x_i)_{i=1}^\infty$  ja  $(y_i)_{i=1}^\infty$  on *ekvivalentsed* (või ka, et baasjada  $(x_i)_{i=1}^\infty$  on *ekvivalentne* baasjadaga  $(y_i)_{i=1}^\infty$ ), kui mistahes reaalarvude jada  $(\alpha_i)_{i=1}^\infty$  korral read

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$$

kas mõlemad koonduvad või mõlemad hajuvad.

**Lause 1.18** (vt [M, lause 4.3.2]). Olgu  $(x_i)_{i=1}^\infty$  ja  $(y_i)_{i=1}^\infty$  Schauderi baasid vastavalt Banachi ruumides  $X$  ja  $Y$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) baasid  $(x_i)_{i=1}^\infty$  ja  $(y_i)_{i=1}^\infty$  on ekvivalentsed;
- (ii) leidub isomorfism  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  nii, et  $Tx_i = y_i$ .

**Teoreem 1.19** (vt [M, teoreem 4.3.6]). Olgu  $(x_i)_{i=1}^\infty$  jada Banachi ruumis  $X$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) jada  $(x_i)_{i=1}^\infty$  on baasjada, mis on ekvivalentne ruumi  $\ell_1$  standardühivektorbaasiga;
- (ii) jada  $(x_i)_{i=1}^\infty$  on tõkestatud ning leidub reaalarv  $M > 0$  nii, et

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq M \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \quad \text{mistahes } n \in \mathbb{N} \text{ ja } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ korral.}$$

## 2 Banachi ruumi oktaedriline

### 2.1 Oktaedriline mõiste ja sellega samaväärseid tingimusi

Kolmnurga võrratus ütleb, et mistahes Banachi ruumi  $X$  elementide  $x$  ja  $y$  puhul

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Oktaedriline mõiste kirjeldab ruume, kus kolmnurga võrratuses teatud juhtudel kehtib peaaegu võrdus.

**Definitsioon 2.1.** Öeldakse, et Banachi ruum  $X$  (või ka et ruumi  $X$  norm) on *oktaedriline*, kui iga lõplikumõõtmelise alamruumi  $E \subset X$  ja iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $y \in S_X$  nii, et

$$\|x + y\| \geq (1 - \varepsilon)(\|x\| + \|y\|) \quad \text{iga } x \in E \text{ korral.}$$

Märgime, et lõplikumõõtmeline Banachi ruum ei saa olla oktaedriline. Tõepoolest, kui  $X$  on lõplikumõõtmeline Banachi ruum, siis  $E := X$  on ruumi  $X$  lõplikumõõtmeline alamruum, kusjuures mistahes  $y \in S_X$  korral  $x := -y \in E$  ning

$$\|x + y\| = \|0\| = 0 < 1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)(\|x\| + \|y\|).$$

Järgnev lause kirjeldab oktaedriline Banachi ruume ainult sfäärielementide terminites.

**Lause 2.1** (vt [HLP, lause 2.2]). *Olgu  $X$  Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

- (i) *ruum  $X$  on oktaedriline;*
- (ii) *iga ruumi  $X$  lõplikumõõtmelise alamruumi  $E$  ja iga arvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $y \in S_X$  nii, et*

$$\|x + ty\| \geq (1 - \varepsilon)(\|x\| + t) \quad \text{iga } x \in S_E \text{ ja iga } t > 0 \text{ korral;}$$

- (ii') *mistahes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in S_X$  ja  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $y \in S_X$  nii, et*

$$\|x_i + ty\| \geq (1 - \varepsilon)(\|x_i\| + t) \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ ja iga } t > 0 \text{ korral;}$$

- (iii) *mistahes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in S_X$  ja  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $y \in S_X$  nii, et*

$$\|x_i + y\| \geq 2 - \varepsilon \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral.}$$

*Tõestus.* (ii) $\Rightarrow$ (ii') $\Rightarrow$ (iii) on ilmne.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Kehtigu (i) ning olgu  $E \subset X$  lõplikumõõtmeline alamruum ja  $\varepsilon > 0$ . Olgu  $y \in S_X$  element oktaeedrilisuse definitsioonist 2.1. Kui  $x \in S_E$  ja  $t > 0$ , siis

$$\left\| \frac{1}{t}x + y \right\| \geq (1 - \varepsilon) \left( \left\| \frac{1}{t}x \right\| + \|y\| \right) = (1 - \varepsilon) \left( \frac{1}{t}\|x\| + 1 \right),$$

millest

$$\|x + ty\| \geq (1 - \varepsilon)(\|x\| + t).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Kehtigu (ii) ning olgu  $E \subset X$  lõplikumõõtmeline alamruum ja  $\varepsilon > 0$ . Olgu  $y \in S_X$  element tingimusest (ii) ning olgu  $x \in E$ . Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et

$$\|x + y\| \geq (1 - \varepsilon)(\|x\| + \|y\|).$$

Kui  $x = 0$ , siis see võrratus ilmselt kehtib. Kui aga  $x \neq 0$ , siis  $x = tx_1$ , kus  $x_1 := \frac{x}{\|x\|}$  ja  $t := \|x\| > 0$ , seega

$$\|x + y\| = t \left\| x_1 + \frac{1}{t}y \right\| \geq t(1 - \varepsilon) \left( \|x_1\| + \frac{1}{t} \right) = (1 - \varepsilon)(\|x\| + 1),$$

s.t soovitud võrratus kehtib.

(ii') $\Rightarrow$ (ii). Kehtigu (ii') ning olgu  $E \subset X$  lõplikumõõtmeline alamruum ja  $\varepsilon > 0$ . Olgu  $A \subset S_X$  ühiksfääri  $S_E$  lõplik  $\frac{\varepsilon}{2}$ -võrk. Eelduse põhjal leidub tingimuse (ii') kehtivusest  $y \in S_X$  nii, et mistahes  $a \in A$  ja  $t > 0$  korral

$$\|a + ty\| \geq \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) (\|a\| + t).$$

Olgu nüüd  $x \in S_E$  ja  $t > 0$  suvalised ning olgu  $a \in A$  selline, et  $\|x - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Siis

$$\|x + ty\| \geq \|a + ty\| - \|x - a\| \geq \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) (\|x\| + t) - \frac{\varepsilon}{2} \geq (1 - \varepsilon)(\|x\| + t).$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii'). Kehtigu (iii) ning olgu fikseeritud  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in S_X$  ja  $\varepsilon > 0$ . Valime elemendi  $y \in S_X$  nii, nagu tingimuses (iii). Olgu  $i \in \{1, \dots, n\}$  ja  $t > 0$ . Kui  $t \geq 1$ , siis

$$\begin{aligned} \|x_i + ty\| &\geq t \|x_i + y\| - \|(t-1)x_i\| \geq t(2 - \varepsilon) - |t-1| = \\ &= t(1 - \varepsilon) + 1 \geq (1 - \varepsilon)(1 + t). \end{aligned}$$

Kui  $0 < t < 1$ , siis

$$\|x_i + ty\| \geq \|x_i + y\| - \|(1-t)y\| \geq (2 - \varepsilon) - |1-t| \geq (1 - \varepsilon)(1 + t).$$

□

**Märkus.** Lause 2.1 samaväärsusest (i) $\Leftrightarrow$ (iii) järeldub lihtsasti, et ruum  $\ell_1$  on oktaeedriline.

## 2.2 Teise kaasruumi oktaedriline

**Lause 2.2** ([LLP<sub>0</sub>, lemma 2.1]). *Olgu  $X$  Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i)  $X^{**}$  on oktaedriline;

(ii) mistahes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in S_{X^{**}}$  ja  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $y^{**} \in S_{X^{**}}$  nii, et

$$\|x_i^{**} + y^{**}\| \geq 2 - \varepsilon \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral};$$

(ii') mistahes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in S_{X^{**}}$  ja  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $y \in S_X$  nii, et

$$\|x_i^{**} + y\| \geq 2 - \varepsilon \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral};$$

(iii) mistahes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in X^{**}$  ja  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $y^{**} \in B_{X^{**}} \setminus \{0\}$  nii, et

$$\|x_i^{**} + y^{**}\| \geq (1 - \varepsilon)(\|x_i^{**}\| + 1) \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral};$$

(iii') mistahes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in X^{**}$  ja  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $y \in B_X \setminus \{0\}$  nii, et

$$\|x_i^{**} + y\| \geq (1 - \varepsilon)(\|x_i^{**}\| + 1) \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral}.$$

**Märkus.** Lause 2.2 samaväärsusest (i) $\Leftrightarrow$ (ii') koos lause 2.1 samaväärsusega (i) $\Leftrightarrow$ (iii) on lihtne näha, et kui teine kaasruum  $X^{**}$  on oktaedriline, siis ka ruum  $X$  ise on oktaedriline.

*Lause 2.2 tõestus.* (i) $\Leftrightarrow$ (ii) järeldub vahetult lausest 2.1.

(ii') $\Rightarrow$ (ii), (iii') $\Rightarrow$ (iii) ja (i) $\Rightarrow$ (iii) on ilmsed.

(iii') $\Rightarrow$ (ii'). Kehtigu (iii') ning olgu  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in S_{X^{**}}$  ja  $\varepsilon > 0$ . Eelduse (iii') põhjal leidub  $y \in B_X \setminus \{0\}$  nii, et

$$\|x_i^{**} + y\| > \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)(1 + 1) = 2 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ puhul.}$$

Siis kolmnurga võrratusest  $\|y\| > 2 - \frac{\varepsilon}{2} - \|x_i^{**}\| = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$  ning seejuures

$$\begin{aligned} \left\|x_i^{**} + \frac{y}{\|y\|}\right\| &\geq \|x_i^{**} + y\| - \left\|y - \frac{y}{\|y\|}\right\| = \|x_i^{**} + y\| - \left|1 - \frac{1}{\|y\|}\right| \|y\| > \\ &> 2 - \frac{\varepsilon}{2} - (1 - \|y\|) > 2 - \varepsilon \end{aligned}$$

iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral, kusjuures  $\frac{y}{\|y\|} \in S_X$ . Seega kehtib (ii').

(iii) $\Rightarrow$ (iii'). Kehtigu (iii) ning olgu  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in X^{**}$  ja  $\varepsilon > 0$ . Eelduse (iii) põhjal leidub  $y^{**} \in B_{X^{**}} \setminus \{0\}$  selliselt, et iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\|x_i^{**} + y^{**}\| > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (\|x_i^{**}\| + 1) \geq (1 - \varepsilon)(\|x_i^{**}\| + 1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Goldstine'i teoreemi 1.10 põhjal leidub hulga  $B_X \setminus \{0\}$  elementide pere  $(y_\alpha)$  nii, et  $y_\alpha \xrightarrow[\alpha]{w^*} y^{**}$  teises kaasruumis  $X^{**}$ . Siis ka

$$x_i^{**} + y_\alpha \xrightarrow[\alpha]{w^*} x_i^{**} + y^{**} \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral.}$$

Kuna ruumi  $X^{**}$  norm on alt  $w^*$ -poolpidev, siis iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\liminf_{\alpha} \|x_i^{**} + y_\alpha\| \geq \|x_i^{**} + y^{**}\|,$$

järelikult leidub indeks  $\alpha$  nii, et iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\|x_i^{**} + y_\alpha\| \geq \|x_i^{**} + y^{**}\| - \frac{\varepsilon}{2} > (1 - \varepsilon)(\|x_i^{**}\| + 1).$$

□

### 2.3 Antud hulga jaoks oktaeedriline hulk

Paljudel juhtudel saab lause 2.2 samaväärsetes tingimustes elemendi  $y \in$  leida ühikera  $B_X$  mingist „heast“ alamhulgast. Järgnev definitsioon toob sisse „oktaeedrilise hulga“ mõiste, mis täpsustab seda olukorda.

**Definitsioon 2.2** (vt [L LP<sub>0</sub>, definitsioon 2.2]). Olgu  $X$  Banachi ruum ja olgu  $B \subset X^{**}$  kinnine kumer tõkestatud alamhulk. Öeldakse, et hulk  $A \subset B_X \setminus \{0\}$  on *hulga  $B$  jaoks oktaeedriline hulk*, kui mistahes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in B$  ja  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $a \in A$  selliselt, et

$$\|x_i^{**} + a\| \geq (1 - \varepsilon)(\|x_i^{**}\| + 1) \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral.} \quad (2.1)$$

Kui  $B = B_{X^{**}}$ , siis öeldakse lihtsalt, et  $A$  on *ruumi  $X^{**}$  jaoks oktaeedriline hulk*.

**Märkus.** Saab näidata, et kui  $A$  on ruumi  $X^{**}$  jaoks oktaeedriline hulk, siis saame ka mistahes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in X^{**}$  ja  $\varepsilon > 0$  korral leida  $a \in A$  nii, et võrratused (2.1) kehtiksid.

**Märkus.** Ruumi  $X^{**}$  jaoks oktaeedriline hulk  $A$  on ühikera  $B_X$  alamhulk, mis garanteerib ruumi  $X^{**}$  oktaeedrilisuse (ning seega ka ruumi  $X$  oktaeedrilisuse). Tõepoolest, näitame, et sellise hulga olemasolu puhul on täidetud lause 2.2 tingimus (ii'). Olgu  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in S_{X^{**}}$  ja  $\varepsilon > 0$ . Siis leidub  $a \in A$  nii, et iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\|x_i^{**} + a\| \geq (1 - \varepsilon_0)(\|x_i^{**}\| + 1) = 2 - 2\varepsilon_0, \quad \text{kus } \varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nüüd

$$2 \geq \|x_i^{**}\| + \|a\| \geq \|x_i^{**} + a\| \geq 2 - 2\varepsilon_0,$$

mistõttu  $1 \geq \|a\| \geq 1 - 2\varepsilon_0$ , seega

$$\left\| a - \frac{a}{\|a\|} \right\| = \left| 1 - \frac{1}{\|a\|} \right| \|a\| = |1 - \|a\|| \leq 2\varepsilon_0.$$

Järelikult  $\frac{a}{\|a\|} \in S_X$  ning

$$\left\| x_i^{**} + \frac{a}{\|a\|} \right\| \geq \|x_i^{**} + a\| - \left\| a - \frac{a}{\|a\|} \right\| \geq 2 - 2\varepsilon_0 - 2\varepsilon_0 = 2 - 4\varepsilon_0 = 2 - \varepsilon.$$

**Definitsioon 2.3.** Olgu  $C$  Banachi ruumi  $X$  alamhulk, arv  $\alpha > 0$  ja funktsionaal  $x^* \in S_{X^*}$ . Hulga  $C$   $\alpha$ -viil funktsionaali  $x^*$  järgi on hulk

$$S(C, x^*, \alpha) := \left\{ x \in C : x^*(x) > \sup_{c \in C} x^*(c) - \alpha \right\} \subset C.$$

**Definitsioon 2.4.** Öeldakse, et Banachi ruumil  $X$  on *tugev diameeter-2 omadus* (*SD2P*), kui ruumi  $X$  ühikera  $B_X$  mistahes viilude kumera kombinatsiooni diameeter on kaks.

Tugeva diameeter-2 omaduse ja oktaedrilisuse vahel duaalne on duaalne seos – kaasruum  $X^*$  on oktaedriline parajasti siis, kui ruumil  $X$  on tugev diameeter-2 omadus (vt nt [HLP]). Järgmine lause kasutab seda duaalsust ära, et saada oktaedriline hulk tugev diameeter-2 omadust matkivast hulgast.

**Laue 2.3** (vt [LLP<sub>0</sub>, lemma 2.3]). *Olgu  $X$  Banachi ruum ning olgu alamhulk  $A \subset B_X \setminus \{0\}$  selline, et mistahes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon \in (0, 2)$  ja kaasruumi ühikera  $B_{X^*}$  viilude keskmise  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(B_{X^*}, x_i^{**}, \varepsilon)$  korral leiduvad  $x_i^*, y_i^* \in S(B_{X^*}, x_i^{**}, \varepsilon)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ja  $x \in A$  selliselt, et*

$$\left\langle x, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^* - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^* \right\rangle \geq 2 - \varepsilon.$$

*Siis mistahes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in S_{X^{**}}$  ja  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $y \in A$  nii, et*

$$\|x_i^{**} + y\| \geq 2 - \varepsilon \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral.}$$

*Muuhulgas on  $A$  ruumi  $X^{**}$  jaoks oktaedriline hulk.*

*Tõestus.* Olgu  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in S_{X^{**}}$  ja  $\varepsilon > 0$ . Vaatleme viilude kumerat kombinatsiooni  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(B_{X^*}, x_i^{**}, \frac{\varepsilon}{2n})$ . Eelduse põhjal leiduvad  $y_i^*, x_i^* \in S(B_{X^*}, x_i^{**}, \frac{\varepsilon}{2n})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ja  $x \in A$  nii, et

$$\left\langle x, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^* - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^* \right\rangle > 2 - \frac{\varepsilon}{2n}$$

ehk

$$\left\langle x, \sum_{i=1}^n x_i^* - \sum_{i=1}^n y_i^* \right\rangle > 2n - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2)$$

Kuna  $\|x_i^*\|, \|y_i^*\|, \|x\| \leq 1$ , siis  $\langle x, x_i^* - y_i^* \rangle \leq 2, i = 1, \dots, n$ , mistõttu selleks, et võrratus (2.2) kehtiks, peab iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral kehtima võrratus  $\langle x, x_i^* - y_i^* \rangle > 2 - \frac{\varepsilon}{2}$  ning seega

$$\langle x, x_i^* \rangle > 2 - \frac{\varepsilon}{2} + \langle x, y_i^* \rangle \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2} - \|y_i^*\| \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

niisiis arvestades, et  $x_i^* \in S(B_{X^*}, x_i^{**}, \frac{\varepsilon}{2n})$ , siis

$$\|x_i^{**} + x\| \geq \langle x_i^*, x_i^{**} + x \rangle = \langle x_i^*, x_i^{**} \rangle + \langle x, x_i^* \rangle > 1 - \frac{\varepsilon}{2n} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq 2 - \varepsilon.$$

Näitame nüüd, et  $A$  on oktaeedriline hulk ruumi  $X^{**}$  jaoks. Olgu  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in B_{X^{**}} \setminus \{0\}$  ja  $\varepsilon > 0$ . Iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral  $x_i^{**} = t_i z_i^{**}$ , kus  $z_i^{**} := \frac{x_i^{**}}{\|x_i^{**}\|} \in S_{X^{**}}$  ja  $t_i := \|x_i^{**}\| > 0$ . Eelnevalt tõestatu põhjal leidub  $x \in A$  nii, et

$$\|z_i^{**} + x\| > 2 - \varepsilon \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral.}$$

Tõestamaks, et  $A$  on oktaeedriline hulk, piisab näidata, et

$$\|x_i^{**} + x\| \geq (1 - \varepsilon)(\|x_i^{**}\| + 1) \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral.}$$

Olgu  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Kuna  $t := t_i = \|x_i^{**}\| \leq 1$ , siis

$$\begin{aligned} \|x_i^{**} + x\| &= \|tz_i^{**} + x\| \geq \|z_i^{**} + x\| - |1 - t| \|z_i^{**}\| \\ &\geq 2 - \varepsilon - (1 - t) \geq (1 - \varepsilon)(1 + t) \geq (1 - \varepsilon)(\|x_i^{**}\| + t). \end{aligned}$$

□

### 3 Ümbernormeerimisteoreemid

#### 3.1 Banachi ruumis tõkestatud absoluutselt kumera hulga lineaarse katte normeerimine selle hulga Minkowski funktsionaali abil

**Teoreem 3.1** (vt nt [M, lk 330–331, lemma 3.4.28 tõestus]). *Olgu  $(X, \|\cdot\|)$  Banachi ruum ning olgu  $B \subset X$  kinnine tõkestatud absoluutselt kumer alamhulk. Olgu  $Y := \text{span } B$  ning olgu  $p: Y \rightarrow \mathbb{R}$  hulga  $B$  Minkowski funktsionaal. Siis  $(Y, p)$  on Banachi ruum, kusjuures  $B$  on selle ruumi kinnine ühikera. Seejuures, kui reaalarv  $M \geq 0$  on selline, et  $B \subset MB_X$ , siis*

$$\|y\| \leq Mp(y) \quad \text{iga } y \in Y \text{ korral.} \quad (3.1)$$

*Tõestus.* Kõigepealt paneme tähele, et hulk  $B$  on neelav oma lineaarses kattes  $Y := \text{span } B$ . Tõepoolest, olgu  $y \in Y$ . Kui  $y = 0$ , siis hulga  $B$  absoluutselt kumeruse tõttu  $y \in B = 1B$ . Eeldame nüüd, et  $y \neq 0$ . Siis leiduvad  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_1, \dots, b_n \in B$  ja  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  nii, et  $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ . Tähistame  $t := \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ ; siis  $t > 0$ . Nüüd

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = t \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{t} b_i,$$

Kuna  $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\alpha_i}{t} \right| = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 1$ , siis  $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{t} b_i \in \text{absconv}(B) = B$ , seega  $y \in tB$ . Niisiis on hulk  $B$  neelav ruumis  $Y$ .

Lause 1.5, (c), põhjal on Minkowski funktsionaal  $p$  poolnorm vektorruumis  $Y$ . Kui mingi  $y \in Y$  korral  $p(y) = 0$ , siis  $t^{-1}y \in B$  iga  $t > 0$  korral, järelikult  $y = 0$  (sest vastasel korral oleks hulk  $B$  tõkestamata). Niisiis on  $p$  norm vektorruumis  $Y$ .

Lause 1.5 põhjal

$$\{y \in Y : p(y) < 1\} \subset B \subset \{y \in Y : p(y) \leq 1\} = B_{(Y,p)}.$$

Lisaks, kui  $y \in Y$  on selline, et  $p(y) = 1$ , siis leiduvad arvud  $t_n > 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , nii, et  $t_n^{-1}y \in B$  iga  $n \in \mathbb{N}$  korral ja  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ . Kuna  $t_n^{-1}y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$  ruumis  $X$ , siis hulga  $B$  kinnisuse tõttu  $y \in B$ ; järelikult  $B_{(Y,p)} \subset B$  ning seega  $B_{(Y,p)} = B$ .

Olgu nüüd  $M \geq 0$  selline, et  $B \subset MB_X$ . Siis iga  $y \in Y$  korral

$$\begin{aligned} p(y) &= \inf\{t > 0 : y \in tB\} \\ &\geq \inf\{t > 0 : y \in tMB_X\} = \frac{1}{M} \inf\{s > 0 : y \in sB_X\} = \frac{1}{M} \|y\|, \end{aligned}$$

niisiis  $\|y\| \leq Mp(y)$ .

Jääb näidata, et normeeritud ruum  $(Y, p)$  on täielik. Oletame vastuväiteliselt, et see normeeritud ruum pole täielik, s.t selles ruumis leidub Cauchy jada  $(y_n)$ ,

mis pole  $p$ -normi järgi koonduv. Hinnangu (3.1) põhjal on  $(y_n)$  Cauchy jada ka ruumi  $X$  normi  $\|\cdot\|$  suhtes, järelikult ruumi  $X$  täielikkuse tõttu mingi  $y \in X$  korral  $\|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Paneme tähele, et tegelikult  $y \in Y$ . Tõepoolest, kuna  $(y_n)$  on Cauchy jada normi  $p$  suhtes, siis see jada on selle normi suhtes tõkestatud, seega leidub  $\alpha > 0$  nii, et  $y_n \in \alpha B$  iga  $n \in \mathbb{N}$  korral. Kuna hulk  $B$  ning seega ka tema kordne  $\alpha B$  on kinnine ruumi  $X$  normi suhtes, siis  $y \in \alpha B \subset \text{span } B = Y$ .

Tähistame iga  $n \in \mathbb{N}$  korral  $z_n := y_n - y$ , siis osajadale üle minnes võime eeldada, kuna jada  $(z_n)$  ruumis  $(Y, p)$  samuti hajub, et leidub  $\delta > 0$  nii, et  $p(z_n) > \delta$  iga  $n \in \mathbb{N}$  korral, kusjuures  $(z_n)$  on Cauchy jada normi  $p$  suhtes ning  $\|z_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Tähistame iga  $n \in \mathbb{N}$  korral  $u_n := \frac{1}{p(z_n)} z_n$ ; siis  $\|u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  ning  $p(u_n) = 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , kusjuures  $(u_n)$  on Cauchy jada normi  $p$  suhtes, sest

$$\begin{aligned} p(u_n - u_m) &= p\left(\frac{z_n}{p(z_n)} - \frac{z_m}{p(z_m)}\right) = \frac{1}{p(z_n)p(z_m)} p(p(z_m)z_n - p(z_n)z_m) \\ &= \frac{1}{p(z_n)p(z_m)} p\left(p(z_m)(z_n - z_m) - (p(z_n) - p(z_m))z_m\right) \\ &\leq \frac{1}{p(z_n)} p(z_n - z_m) + \frac{1}{p(z_n)} |p(z_m) - p(z_n)| \\ &\leq \frac{2}{p(z_n)} p(z_n - z_m) < \frac{2}{\delta} p(z_n - z_m). \end{aligned}$$

Fikseerime  $m \in \mathbb{N}$  selliselt, et kui  $n \geq m$ , siis  $p(u_n - u_m) \leq \frac{1}{2}$  ning seega  $2u_m - 2u_n \in B$ . Kuna  $\|u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  ning  $B$  on ruumis  $X$  kinnine hulk, siis järeldub siis protsessis  $n \rightarrow \infty$ , et  $2u_m \in B$ , s.t  $p(u_m) \leq \frac{1}{2}$ , mis on vastuolu tingimusega, et  $p(u_n) = 1$  iga  $n \in \mathbb{N}$  korral.  $\square$

**Märkus.** Pole raske näidata, et mistahes normeeritud ruumi  $X$  norm langeb kokku tema kinnise ühikera  $B_X$  Minkowski funktsionaaliga  $p_{B_X}$  (vt nt [M, lk 84, ülesanne 1.108, (a)]).

## 3.2 Ekvivalentse normi jätkamine alamruumilt kogu ruumile

Järgnev teoreem ütleb sisuliselt, et Banachi ruumi alamruumil defineeritud (esialgse normiga) ekvivalentne norm on jätkatav (esialgse normiga) ekvivalentseks normiks kogu sellel ruumil.

**Teoreem 3.2** (vt nt [FHHMZ, lk 60, lause 2.14]). *Olgu  $(X, \|\cdot\|)$  Banachi ruum ning olgu norm  $\|\!\| \cdot \!\|$  ruumi  $X$  kinnisel alamruumil  $Y$  ekvivalentne normiga  $\|\cdot\|$  sellel alamruumil. Siis leidub ruumil  $X$  normiga  $\|\cdot\|$  ekvivalentne norm  $|\cdot|$ , mis alamruumil  $Y$  ühtib normiga  $\|\!\| \cdot \!\|$ , s.t*

$$|y| = \|\!\|y\!\| \quad \text{iga } y \in Y \text{ korral.}$$

*Tõestus.* Olgu arvud  $\alpha, \beta > 0$  sellised, et

$$\alpha \|y\| \leq \|y\| \leq \beta \|y\| \quad \text{iga } y \in Y \text{ korral.}$$

Paneme siis tähele, et ka norm  $|\cdot|'$ , kus  $|y|' := \beta \|y\|$  iga  $y \in Y$  puhul, on ekvivalentne normiga  $\|\cdot\|$ . Seejuures kui  $|y|' \leq 1$ , siis

$$\|y\| \leq \beta \|y\| = |y|' \leq 1,$$

s.t  $B_{(Y,|\cdot|')} \subset B_{(Y,\|\cdot\|)}$ . Kuna normide ekvivalentsus on ekvivalentsiseos, siis seega saame üldisust kitsendamata eeldada, et  $B_{(Y,\|\cdot\|)} \subset B_{(Y,\|\cdot\|)}$ .

Lausest 1.3 järeldub lihtsasti, et hulk  $B := \text{conv}(B_{(Y,\|\cdot\|)} \cup B_{(X,\|\cdot\|)})$  on kinnine, absoluutselt kumer ja tõkestatud. Kuna  $B \cap Y = B_{(Y,\|\cdot\|)}$  on ruumi  $(Y, \|\cdot\|)$  kinnine ühikker, siis hulga  $B$  Minkowski funktsionaal  $p_B =: |\cdot|$  langeb kokku normiga  $\|\cdot\|$  ruumil  $Y$ .

Näitame veel, et norm  $|\cdot|$  on ekvivalentne normiga  $\|\cdot\|$  ruumil  $X$ . Teoreemist 3.1 saame, et  $|\cdot|$  on norm ruumil  $X$ , sest  $\text{span } B = X$ , ning et  $B_{(X,|\cdot|)} = B$ . Kuna  $B_{(X,\|\cdot\|)} \subset B$ , siis

$$|x| \leq \|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Vastasel juhul, kui kehtiks  $|x| > \|x\|$  mingi  $x \in X$  puhul, siis  $x \neq 0$  ning

$$1 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| < \left| \frac{x}{\|x\|} \right| \leq 1,$$

mis on vastuolu. Teiselt poolt, kui  $\|y\| \leq 1$ , siis

$$\|y\| \leq \frac{1}{\alpha} \|y\| \leq \frac{1}{\alpha},$$

s.t  $B_{(Y,\|\cdot\|)} \subset \frac{1}{\alpha} B_{(X,\|\cdot\|)}$ . Nüüd on selge, et  $B \subset \max\{1, \frac{1}{\alpha}\} B_{(X,\|\cdot\|)}$  ning teoreemi 3.1 põhjal siis  $\|x\| \leq \max\{1, \frac{1}{\alpha}\} |x|$  iga  $x \in X$  puhul. Kokku oleme saanud, et norm  $|\cdot|$  on ekvivalentne normiga  $\|\cdot\|$  ruumil  $X$ .  $\square$

### 3.3 Üks klassikaline ümbernormeerimisteoreem

Järgnev klassikaline ümbernormeerimisteoreem annab eeskirja, kuidas Banachi ruumist  $X$  lähtuva pideva lineaarse operaatori abil defineerida sellel ruumil esialgse normiga ekvivalentne norm.

**Teoreem 3.3.** *Olgu  $(X, \|\cdot\|)$  ja  $(Y, \|\cdot\|)$  Banachi ruumid ning olgu  $S: X \rightarrow Y$  pidev lineaarne operaator, seejuures leidugu ruumi  $X$  kinnine alamruum  $Z$  nii, et ahend  $S|_Z: Z \rightarrow Y$  on isomorfism „sisse“, s.t leiduvad reaalarvud  $\alpha, \beta > 0$  nii, et*

$$\alpha \|z\| \leq \|Sz\| \leq \beta \|z\| \quad \text{iga } z \in Z \text{ korral.}$$

*Siis*

$$\|x\| := \|Sx\| + \|x + Z\|, \quad x \in X,$$

on esialgse normiga ekvivalentne norm ruumis  $X$ . Seejuures norm  $\|\cdot\|$  teises kaasruumis  $(X, \|\cdot\|)^{**}$  on arvutatav järgmiselt:

$$\|x^{**}\| = \|S^{**}x^{**}\|_{Y^{**}} + \|x^{**} + Z^{\perp\perp}\| \quad \text{iga } x^{**} \in X^{**} \text{ korral.} \quad (3.2)$$

*Tõestus.* Olgu  $q: X \rightarrow X/Z$  kanooniline kujutus. Ühelt poolt, iga  $x \in X$  korral

$$\|x\| = \|Sx\| + \|qx\| \leq \|S\| \|x\| + \|x\| = (\|S\| + 1) \|x\|.$$

Teiselt poolt, leiame  $\kappa > 0$  nii, et

$$\kappa \|x\| \leq \|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Eelneva tingimuse kehtivuseks piisab veenduda, et

$$\|x\| \geq \kappa \quad \text{iga } x \in S_X \text{ korral.}$$

Olgu  $x \in S_X$ . Oletame, et mingi  $\varepsilon \in (0, 1)$  korral leidub  $z \in Z$  nii, et  $\|x - z\| < \varepsilon$ . Siis  $1 - \varepsilon < \|z\| < 1 + \varepsilon$ . Ilmselt  $z_1 := \frac{z}{\|z\|} \in S_Z$ , kusjuures

$$\begin{aligned} \|x - z_1\| &\leq \|x - z\| + \|z - z_1\| \\ &< \varepsilon + \left\| z - \frac{z}{\|z\|} \right\| = \varepsilon + \left\| \frac{(\|z\| - 1)z}{\|z\|} \right\| = \varepsilon + \|\|z\| - 1\| \\ &< 2\varepsilon, \end{aligned}$$

järelikult

$$\|Sx\| \geq \|Sz_1\| - \|S(z_1 - x)\| \geq \alpha - \|S\| \|z_1 - x\| \geq \alpha - 2\varepsilon \|S\|.$$

Võttes eelnevas arutelus  $\varepsilon := \frac{\alpha}{4\|S\|}$ , saame, et on kaks teineteist välistavat võimalust:

- (1)  $\|x + Z\| \geq \frac{\alpha}{4\|S\|}$ ;
- (2)  $\|x + Z\| = \inf_{z \in Z} \|x - z\| < \frac{\alpha}{4\|S\|} = \varepsilon$  - niisugusel juhul

$$\|Sx\| \geq \alpha - 2\varepsilon \|S\| = \frac{\alpha}{2}.$$

Niisiis igal juhul

$$\|x\| = \|Sx\| + \|x + Z\| \geq \min \left\{ \frac{\alpha}{4\|S\|}, \frac{\alpha}{2} \right\} =: \kappa.$$

Seega on norm  $\|\cdot\|$  ruumis  $X$  ekvivalentne esialgse normiga  $\|\cdot\|$ .

Tõestame nüüd võrduse (3.2). Selleks paneme tähele, et operaator

$$T: (X, \|\cdot\|) \ni x \mapsto (Sx, qx) \in Y \oplus_1 (X/Y)$$

on lineaarne isomeetria. Lause 1.16 põhjal on ka teine kaasoperaator

$$T^{**}: (X^{**}, \|\cdot\|) \longrightarrow (Y \oplus_1 (X/Y))^{**} = Y^{**} \oplus_1 (X/Y)^{**}$$

lineaarne isomeetria, seega iga  $x^{**} \in X^{**}$  korral lause 1.2 ja järeltule 1.14 põhjal

$$\begin{aligned} \|x^{**}\| &= \|T^{**}x^{**}\| = \|(S^{**}x^{**}, q^{**}x^{**})\|_1 \\ &= \|S^{**}x^{**}\| + \|q^{**}x^{**}\| = \|S^{**}x^{**}\| + \|(J_2)^{-1}J_1^*q^{**}x^{**}\| \\ &= \|S^{**}x^{**}\| + \|x^{**} + Z^{\perp\perp}\|. \end{aligned}$$

□

Järgnevalt tõestame mõned teoreemis 3.3 vaadeldud ümbernormeeringu oktaedrilisust käsitlevad tulemused.

**Teoreem 3.4** (vt [LP<sub>0</sub>, lause 2.4]). *Kui teoreemis 3.3 teine kaasruum  $Y^{**}$  on oktaedriline ning*

- (1)  $S|_Z: (Z, \|\cdot\|) \rightarrow Y$  on isomeetriline isomorfism „sisse“;
- (2)  $S(B_{(Z, \|\cdot\|)})$  on oktaedriline hulk teise kaasruumi  $Y^{**}$  jaoks,

siis teine kaasruum  $(X, \|\cdot\|)^{**}$  on oktaedriline.

*Tõestus.* Eeldame, et teoreemis 3.3 teine kaasruum  $Y^{**}$  on oktaedriline, kusjuures kehtivad tingimused (1) ja (2). Olgu  $n \in \mathbb{N}$ , ning olgu  $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in S_{(X, \|\cdot\|)^{**}}$  ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Teise kaasruumi  $(X, \|\cdot\|)^{**}$  oktaedrilisuseks piisab leida  $x^{**} \in B_{(X, \|\cdot\|)^{**}}$  nii, et

$$\|x_i^{**} + x^{**}\| \geq 2 - 2\varepsilon \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral.}$$

Kuna  $S(B_{(Z, \|\cdot\|)})$  on oktaedriline hulk teise kaasruumi  $Y^{**}$  jaoks, siis leidub  $z \in B_{(Z, \|\cdot\|)}$  nii, et iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\|S^{**}x_i^{**} + j_Y S z\| \geq (1 - \varepsilon)(\|S^{**}x_i^{**}\| + 1) \geq \|S^{**}x_i^{**}\| + 1 - 2\varepsilon.$$

Nüüd

$$\|j_X z\| = \|z\| = \|S z\| + \|z + Z\| = \|S z\| = \|z\| \leq 1,$$

s.t  $j_X z \in B_{(X, \|\cdot\|)**}$ ; seejuures iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\begin{aligned}
\|x_i^{**} + j_X z\| &= \|S^{**} x_i^{**} + S^{**} j_X z\| + \|x_i^{**} + j_X z + Z^{\perp\perp}\| \\
&= \|S^{**} x_i^{**} + j_Y S z\| + \|x_i^{**} + Z^{\perp\perp}\| \\
&\geq \|S^{**} x_i^{**}\| + 1 - 2\varepsilon + \|x_i^{**} + Z^{\perp\perp}\| \\
&= \|x_i^{**}\| + 1 - 2\varepsilon \\
&= 2 - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**Järeldus 3.5** (vt [LP<sub>0</sub>, lause 2.4]). *Olgu  $X$  ja  $Y$  Banachi ruumid, kusjuures teine kaasruum  $Y^{**}$  on oktaedriline ning leiduvad operaator  $S \in \mathcal{L}(X, Y)$  ja ruumi  $X$  kinnine alamruum  $Z$  nii, et*

- (1)  $S|_Z: Z \rightarrow Y$  on isomorfism „sisse“;
- (2) leidub teise kaasruumi  $Y^{**}$  jaoks oktaedriline hulk  $B \subset B_Y$  nii, et  $B \subset S(Z)$ ,

siis leidub ruumil  $X$  ekvivalentne norm, mille suhtes selle ruumi teine kaasruum on oktaedriline.

*Tõestus.* Teoreemi 3.2 põhjal leidub ruumil  $X$  ekvivalentne norm  $|\cdot|$  nii, et ahend  $S|_Z: (Z, |\cdot|) \rightarrow Y$  on isomeetiline isomorfism „sisse“. Teoreemi 3.3 põhjal on

$$\|x\| := \|Sx\| + |x + Z|, \quad x \in X,$$

normiga  $|\cdot|$  ekvivalentne norm ruumis  $X$  ning seega ka esialgse normiga ekvivalentne norm ruumis  $X$ . Kuna ahend  $S|_Z: (Z, |\cdot|) \rightarrow Y$  on isomeetria, siis eeldusest (2) järeldub, et  $S(B_{(Z, |\cdot|)}) \supset B$  ning seega  $S(B_{(Z, |\cdot|)})$  on oktaedriline hulk teise kaasruumi  $Y^{**}$  jaoks. Teoreemi 3.4 põhjal on teine kaasruum  $(X, \|\cdot\|)**$  oktaedriline. □

### 3.4 Kaasruumis \*-nõrgalt kompaktse kumera hulga lineaarse katte normeerimine

**Teoreem 3.6** (vt [LP<sub>0</sub>, lause 2.5]). *Olgu  $(X, \|\cdot\|)$  Banachi ruum ja olgu  $C \subset B_{X^*}$  \*-nõrgalt kompaktne kumer hulk. Olgu  $Y := \text{span}(C)$  ja  $K := \text{conv}(C \cup -C)$  ning olgu  $|\cdot|: Y \rightarrow \mathbb{R}$  hulga  $K$  Minkowski funktsionaal. Siis*

- (a) hulk  $K$  on absoluutselt kumer ja \*-nõrgalt kompaktne;
- (b)  $(Y, |\cdot|)$  on Banachi ruum, kusjuures  $B_{(Y, |\cdot|)} = K$  ja

$$\|y\| \leq |y| \quad \text{iga } y \in Y \text{ korral;} \quad (3.3)$$

- (c) kui  $i: (Y, |\cdot|) \rightarrow X^*$  on loomulik sisestus, siis  $\|i\| \leq 1$  ning, tähistades  $Y_* := \overline{i^*j_X(X)}^{|\cdot|} \subset (Y, |\cdot|)^*$ , ruum  $(Y, |\cdot|)$  on isomeetriliselt isomorfne ruumi  $Y_*$  kaasruumiga;
- (d) kui alamruum  $Y$  on kaasruumis  $X^*$  kinnine, siis alamruum  $Y$  on ka  $*$ -nõrgalt kinnine ning normid  $\|\cdot\|$  ja  $|\cdot|$  ruumis  $Y$  on ekvivalentsed.

*Tõestus.* (a). Hulga  $K$  absoluutne kumerus jäeldub lausest 1.4, (a); selle hulga  $*$ -nõrgalt kompaktsus jäeldub lausest 1.12.

(b) jäeldub vahetult teoreemist 3.1, arvestades, et  $Y = \text{span}(C) = \text{span}(K)$  ning et  $K \subset B_{X^*}$ , kusjuures väite (a) põhjal on hulk  $K$  absoluutselt kumer ja kinnine.

(c). Hinnang  $\|i\| \leq 1$  jäeldub vahetult hinnangust (3.3); ülejäänud väide jäeldub vahetult teoreemist 1.17.

(d). Eeldame nüüd, et alamruum  $Y$  kaasruumis  $X^*$  on kinnine. Siis  $(Y, \|\cdot\|)$  on Banachi ruum (sest kaasruum  $(X^*, \|\cdot\|)$  on täielik ning täieliku ruumi kinnine alamruum on samuti täielik). Kuna hinnangu (3.3) põhjal on formaalne ühikopeeraator  $(Y, |\cdot|) \rightarrow (Y, \|\cdot\|)$  pidev, siis ruumide  $(Y, |\cdot|)$  ja  $(Y, \|\cdot\|)$  täielikkuse tõttu on Banachi teoreemi põhjal pöördopeeraatorist ka selle formaalse ühikopeeraatori pöördopeeraator pidev, s.t formaalne ühikopeeraator  $(Y, \|\cdot\|) \rightarrow (Y, |\cdot|)$  on pidev, s.t leidub  $\kappa > 0$  nii, et  $|y| \leq \kappa\|y\|$  iga  $y \in Y$  korral. Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$\|y\| \leq |y| \leq \kappa\|y\| \quad \text{iga } y \in Y \text{ korral,} \quad (3.4)$$

s.t normid  $\|\cdot\|$  ja  $|\cdot|$  alamruumil  $Y$  on ekvivalentsed.

Veendume nüüd, et alamruum  $Y$  on  $*$ -nõrgalt kinnine kaasruumis  $X^*$ . Banach–Dieudonné teoreemi 1.11 põhjal piisab selleks veenduda, et iga  $n \in \mathbb{N}$  korral on hulk  $Y \cap nB_{X^*}$   $*$ -nõrgalt kinnine kaasruumis  $X^*$ . Olgu  $n \in \mathbb{N}$  ning olgu  $(y_\alpha)$  hulga  $Y \cap nB_{X^*}$  elementide pere, mis koondub  $*$ -nõrgalt mingiks elementiks  $x^*$  kaasruumis  $X^*$ . Hulga  $Y \cap nB_{X^*}$   $*$ -nõrgalt kinnisuseks piisab näidata, et  $x^* \in Y \cap nB_{X^*}$ . Kuna iga indeksi  $\alpha$  korral  $y_\alpha \in nB_{X^*}$ , s.t  $\|y_\alpha\| \leq n$ , siis normi  $*$ -nõrgalt poolpidevuse tõttu ka

$$\|x^*\| \leq \liminf_{\alpha} \|y_\alpha\| \leq n;$$

niisiis  $x^* \in nB_{X^*}$ . Seega jääb näidata, et  $x^* \in Y$ . Iga indeksi  $\alpha$  korral  $\|y_\alpha\| \leq n$ , seega hinnangu (3.4) põhjal  $|y_\alpha| \leq \kappa n$ , s.t  $y_\alpha \in \kappa nK$  (siin arvestasime, et  $K = B_{(Y, |\cdot|)}$ ). Kuna väite (a) põhjal on hulk  $K$  ning seega ka tema kordne  $\kappa nK$   $*$ -nõrgalt kinnine, siis  $x^* \in \kappa nK \subset Y$ , nagu soovitud.  $\square$

## 4 Artikli [L LP] põhiteoreemi tõestus

Selles paragrahvis me tõestame artikli [L LP] põhiteoreemi, mille me sõnastasime juba sissejuhatuses. Parema jälgitavuse huvides sõnastame ta siinkohal uuesti.

**Teoreem 4.1** (vt [L LP<sub>0</sub>, teoreem 4.1]). *Olgu  $X$  separaabel Banachi ruum, mis sisaldab ruumiga  $\ell_1$  isomorfset alamruumi. Siis leidub ruumil  $X$  esialgse normiga ekvivalentne norm, mille suhtes selle ruumi teine kaasruum on oktaedriline.*

Teoreemi 4.1 tõestus toetub järgnevatele küllaltki fundamentaalsetele tulemustele, mida me käesolevas bakalaureusetöös ei tõesta. Meenutame, et  $\Delta$  tähistab sellest töös Cantori hulka.

**Teoreem 4.2** (vt [DGH, teoreem 2]). *Olgu  $X$  separaabel Banachi ruum, mis sisaldab ruumiga  $\ell_1$  isomeetriliselt isomorfset alamruumi. Siis leidub ruumi  $X$  kinnine alamruum  $Y$  nii, et faktorruum  $X/Y$  on isomeetriliselt isomorfne ruumiga  $C(\Delta)$ .*

**Teoreem 4.3** (vt [L LP<sub>0</sub>, teoreem 4.1 ja selle tõestus]). *Ruumil  $C(\Delta)$  leidub ekvivalentne norm, mille suhtes tema teine kaasruum on oktaedriline. Seejuures ruumi  $C(\Delta)$  kinnine ühikera selle ekvivalentse normi suhtes sisaldab ruumi  $\ell_1$  standardühikvektorbaasiga ekvivalentset baasjada, mis on ühtlasi oktaedriline hulk teise kaasruumi jaoks.*

Nüüd me saame tõestada käesolevas töös tsentraalse teoreemi 4.1 (s.t artikli [L LP<sub>0</sub>] põhiteoreemi 4.2).

*Teoreemi 4.1 tõestus.* Teoreemi 3.2 põhjal võime üldisust kitsendamata eeldada, et ruum  $X$  sisaldab ruumiga  $\ell_1$  isomeetriliselt isomorfset alamruumi. Teoreemi 4.2 põhjal leidub ruumi  $X$  kinnine alamruum  $Y$  nii, et faktorruum  $X/Y$  on isomeetriliselt isomorfne ruumiga  $C(\Delta)$ . Teoreemi 4.3 põhjal leidub faktorruumil  $X/Y$  selline ekvivalentne norm  $|\cdot|$ , et teine kaasruum  $(X/Y, |\cdot|)^{**}$  on oktaedriline, kusjuures ühikera  $B_{(X/Y, |\cdot|)}$  sisaldab selle teise kaasruumi jaoks oktaedrulist hulka  $\{w_i : i \in \mathbb{N}\}$ , mille elementide jada  $(w_i)_{i=1}^\infty$  on ruumi  $\ell_1$  standardühikvektorbaasiga ekvivalentne baasjada. Teoreemi 1.19 põhjal leidub reaalarv  $K > 0$  nii et

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq K \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \right| \quad \text{mistahes } n \in \mathbb{N} \text{ ja } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ korral.}$$

Normide  $\|\cdot\|$  ja  $|\cdot|$  ekvivalentsuse tõttu leiduvad reaalarvud  $A, B > 0$  nii, et

$$A\|w\| \leq |w| \leq B\|w\| \quad \text{iga } w \in X/Y \text{ korral.}$$

Olgu  $q: X \rightarrow X/Y$  kanooniline faktorkujutus; siis iga  $i \in \mathbb{N}$  korral leidub element  $z_i \in X$  nii, et

$$\|w_i\| \leq \|z_i\| < \|w_i\| + 1 \quad \text{ja} \quad qz_i = w_i.$$

Jada  $(z_i)_{i=1}^\infty$  on tõkestatud, sest iga  $i \in \mathbb{N}$  korral

$$\|z_i\| < \|w_i\| + 1 \leq \frac{1}{A}|w_i| + 1 \leq \frac{1}{A} + 1,$$

seejuures mistahes  $n \in \mathbb{N}$  ja  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  korral

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| &\leq K \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \right\| \leq KB \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \right\| = KB \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i q z_i \right\| = KB \left\| q \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i \right\| \\ &\leq KB \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i \right\|. \end{aligned}$$

Teoreemi 1.19 põhjal on  $(z_i)_{i=1}^\infty$  ruumi  $\ell_1$  standardühivektorbaasiga ekvivalentne baasjada. Tähistame  $Z := \overline{\text{span}}^{\|\cdot\|} \{z_i : i \in \mathbb{N}\} \subset X$  ja  $W := \overline{\text{span}}^{|\cdot|} \{w_i : i \in \mathbb{N}\} \subset X/Y$ . Kuna jadad  $(z_i)_{i=1}^\infty$  ja  $(w_i)_{i=1}^\infty$  on mõlemad ruumi  $\ell_1$  standardühivektorbaasiga ekvivalentsed baasjadad, siis lause 1.18 põhjal leidub isomorfism  $T: Z \rightarrow W$  nii, et  $Tz_i = w_i$  iga  $i \in \mathbb{N}$  korral. Kuna samuti  $qz_i = w_i$  iga  $i \in \mathbb{N}$  korral, siis, arvestades, et  $(z_i)_{i=1}^\infty$  on ruumi  $Z$  Schauderi baas, järeldub siit, et  $q|_Z = T$ ; niisiis  $q|_Z$  on isomorfism. Järelduse 3.5 põhjal leidub ruumil  $X$  esialgse normiga ekvivalentne norm, mille suhtes selle ruumi teine kaasruum on oktaeedriline.  $\square$

## Kirjandus

- [BGLPRZ] J. BECERRA GUERRERO, G. LÓPEZ PÉREZ, AND A. RUEDA ZOCA. *Octahedral norms and convex combination of slices in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 4, 2424–2435.
- [DGH] S. J. DILWORTH, M. GIRARDI, AND J. HAGLER. *Dual Banach spaces which contain an isometric copy of  $L_1$* . Bull. Polish Acad. Sci. Math. **48** (2000), no. 1, 1–12.
- [FHHMZ] M. FABIAN, P. HABALA, P. HÁJEK, V. MONTESINOS, AND V. ZIZLER. *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York, 2011.
- [G] G. GODEFROY. *Metric characterization of first Baire class linear forms and octahedral norms*. Studia Math. **95** (1989), no. 1, 1–15.
- [HLP] R. HALLER, J. LANGEMETS, AND M. PÕLDVERE. *On duality of diameter 2 properties*. J. Convex Anal. **22** (2015), no. 2, 465–483.
- [HS] J. HAGLER AND C. STEGALL. *Banach spaces whose duals contain complemented subspaces isomorphic to  $C[0, 1]$* . J. Functional Analysis **13** (1973), 233–251.
- [K] S. KAIJSER. *A note on dual Banach spaces*. Math. Scand. **41** (1977), no. 2, 325–330.
- [LLP<sub>0</sub>] J. LANGEMETS AND G. LÓPEZ-PÉREZ. *Bidual octahedral renormings and strong regularity in Banach spaces*. arXiv:1902.04170v2 [math.FA] 11 Apr 2019, preprint.
- [LLP] J. LANGEMETS AND G. LÓPEZ-PÉREZ. *Bidual octahedral renormings and strong regularity in Banach spaces*. J. Inst. Math. Jussieu, to appear.
- [M] R. E. MEGGINSON. *An introduction to Banach space theory*. Graduate Texts in Mathematics, 183. Springer, New York, 1998.

## **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Jaagup Kirme,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

„Banachi ruumide ekvivalentset übernormeeringud, mille suhtes teine kaasruum on oktaedriline“,

mille juhendajad on Rainis Haller ja Märt Põldvere,

reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

*Jaagup Kirme*

**08.05.2019**