Tallinna Polütehniline Instituut

Matemaatika kateeder

M A T E M A A T I L I N E   A N A L Ü Ü S

programm ja metoodilised juhendid

Koostanud H.Roos

Tallinn, 1961

Juhendid on koostatud vastavalt õpikule:

А.Ф. Бермант, Курс математического анализа I, II (1958) (lühendid B I ja B II) ja ülesannetekogule

I. Petersen ja H. Koos, Kõrgema matemaatika ülesannete kogu I (1960) ja II (lühendid PR I ja PR II).

Võib kasutada ka õpikut:

A. Borkvell, Matemaatilise analüüsi kursus I ja II (1958 ja 1960).

Õpikut ja ülesannetekogu tuleb kasutada paralleelselt. Iga teema juurde kuuluvad ülesanded tuleb lahendada enne uue teema õppimisele asumist.

I. SISSEJUHATUS MATEMAATILISSE ANALÜÜSI.

Esimene teema: Funktsioonid ja nende graafikud.

Muutuvad ja jäävad ehk konstantsed suurused. Reaalarvud ja arvutelg. Kinnine ja lahtine arvuvahemik. Suuruse ligikaudne väärtus. Absoluutne ja relatiivne viga. Tehted ligikaudsete arvudega.

Funktsioon ja selle määramispiirkond. Funktsiooni graafik. Funktsiooni määramisviise: tabel, valem, graafik. Pöördfunktsioon ja selle graafik. Liitfunktsioon. Põhilised elementaarfunktsioonid: astmefunktsioon, eksponentfunktsioon, logaritmfunktsioon, trigonomeetrilised funktsioonid ja trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid; nende graafikud. Elementaarfunktsioonide klass. Lihtsamaid funktsioone: lineaarne, murdlineaarne ja ruutfunktsioon.

Funktsioonide graafikute konstrueerimine paralleellükke ja mastaabi muutmise abil.

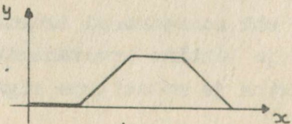
Õpikust B I tuleb hoolega läbi lugeda sissejuhatuse lõigud 1 - 8. Erilist rõhku tuleb panna lõikudele 6 - 8, milles käsitletakse reaalarvu, lahtise ja kinnise vahemiku, suuruse ligikaudse väärtuse ning absoluutse ja relatiivse vea mõisteid.

Edasi tuleb samast õpikust läbi töötada I peatüki lõigud 9(14) - 26(33) ja ülesannete kogust PR I näited I - IV lk. 115 - 119 ning lahendada ülesanded 454, 456 - 460, 463 - 465, 468 - 473, 479, 480, 483 - 486, 491, 492, 497 - 501, 506 - 510, 528 - 531, 534, 535, 537, 546 - 548, 555 - 557, 560, 561, 563, 565, 572, 573, 578, 579, 580 - 585.

Matemaatilise analüüsi kõige tähtsamaks mõisteks on funktsiooni mõiste, selle peab üliõpilane endale hästi selgeks tegema. Üliõpilane peab veendumusele jõudma, et kaks suurust võivad teineteisest sõltuda ka siis, kui nende vahelist seost pole võimalik väljendada meile tuntud matemaatiliste tehete abil [10 (15)] ja et üks funktsioon võib oma määramispiirkonna erinevates osades olla antud erinevate avaldiste kaudu, näiteks

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{kui } 0 \leqslant x < 1, \\ x-1, & \text{kui } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & \text{kui } 2 < x \leqslant 3, \\ 4-x, & \text{kui } 3 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

Siin on funktsioon f(x) antud nelja erineva avaldise kaudu, kuid tegemist on ikkagi üheainsa funktsiooniga, mille määramispiirkonnaks on kinnine vahemik $0 \leqslant x \leqslant 4$ ja mille graafikuks on murdjoon $y = f(x)$ (joon. 1)



joon. 1

Kindlat vahet tuleb teha funktsiooni määramispiirkonna ja funktsiooni väärtuste hulga vahel. Antud näite puhul on funktsiooni määramispiirkond otseselt antud, funktsiooni väärtuste hulga võib kõige lihtsamalt leida graafikult: $0 \leqslant y \leqslant 1$ ehk $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Matemaatilises analüüsis moodustavad niihästi funktsiooni väärtuste hulga kui ka määramispiirkonna nimeta arvud, ka trigonomeetriliste funktsioonide puhul. Nii mõistetakse funktsiooni sin x puhul argumendi x all nurga suurust absoluutmõõdus, mitte kraadides. Seega on antud juhul funktsiooni määramispiirkonnaks kõik arvud, mida võib lühidalt väljendada järgmiselt: $-\infty < x < +\infty$. Funktsiooni väärtuste hulgaks on aga kinnine vahemik [-1;1], sest $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

Laiemalt kasutusel olevates trigonomeetrilistes tabelites on nurkade suurused antud kraadides. Selgitame trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse arvutamist absoluutmõõdus antud argumendiväärtuse puhul järgmise näitega:

Arvutada sin x, kui x = 5.

Teisendame kõigepealt absoluutmõõdus antud nurga kraadmõõtu. 360° on absoluutmõõdus (radiaanides) $2\pi \approx 2 \cdot 3{,}1416 \approx 6{,}2832$; 270° on absoluutmõõdus $3 \cdot \frac{\pi}{2} \approx 3 \cdot 1{,}5708 \approx 4{,}7124$.

Et $4{,}7124 < 5 < 6{,}2832$, siis on antud nurk neljanda veerandi nurk ja erineb täispöördest $6{,}2832 - 5 = 1{,}2832$ võrra.

Koolis kasutusel olevatest V.M.Bradise tabelitest (XVI Radiaanmõõt) leiame, et nurk 1,2832 on $73^\circ\ 31'$. Seega

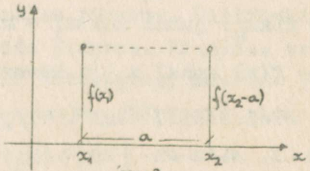
$$\sin 5 = \sin(360^\circ - 73^\circ\ 31') = -\sin 73^\circ\ 31' = -0{,}9589.$$

Funktsiooni graafiku valmistamisel peab kõigepealt uurima, kas graafik on sümmeetriline koordinaattelgede või alguspunkti suhtes või pole nende suhtes sümmeetriline, s.t. kas funktsioon on paaris- või paaritu või ei ole paaris- ega paaritu funktsioon. [B I, 15(2a)].

Edasi peab oskama funktsiooni $y = f(x)$ graafiku abil joonestada funktsioonide $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = A\,f(x)$ ja $y = f\,(k\,x)$ graafikuid.

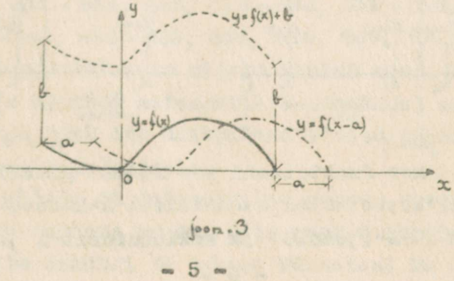
Vaatleme nõutud konstruktsioone üksikasjaliselt.

a) Et $f(x_1) = f(x_2 - a)$, kui $x_1 = x_2 - a$ ehk $x_2 = x_1 + a$, siis on kõveral $y = f(x)$ kohal x_1 ja kõveral $y = f(x - a)$ kohal $x_2 = x_1 + a$ võrdsed ordinaadid (joon. 2).



joon. 2

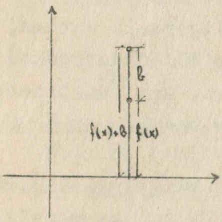
Seega saadakse esialgse joone $y = f(x)$ kõigi punktide abstsissteljesuunalisel nihutamisel a ühiku võrra funktsiooni $y = f(x - a)$ graafik (joon. 3).



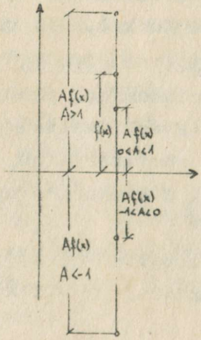
joon. 3

b) Kuna funktsiooni $f(x) + b$ väärtus iga argumendi väärtuse korral erineb $f(x)$ väärtusest b võrra (joon. 4), siis saadakse funktsiooni $y = f(x) + b$ graafik esialgse joone $y = f(x)$ nihutamisel ordinaattelje suunas b ühiku võrra (joon. 4).

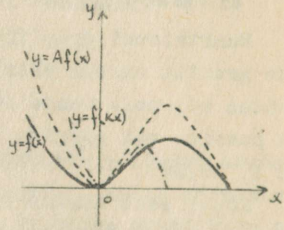
c) Et, joone $y = A\,f(x)$ mingile abstsissile vastava punkti ordinaat on joone $y = f(x)$ samale abstsissile vastava punkti ordinaadi A-kordne (joon. 5), siis saadakse $y = A\,f(x)$ graafik



joon. 4



joon. 5

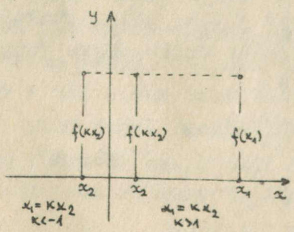


joon. 6

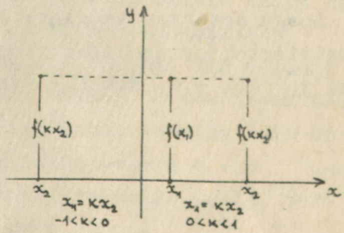
esialgse joone $y = f(x)$ ordinaatteljesuunalisel venitamisel juhul, kui $A > 1$ (joon. 6) ja kokkusurumisel juhul, kui $0 < A < 1$.

Jooned $y = A f(x)$ ja $y = -Af(x)$ on sümmeetrilised x-telje suhtes (joon. 5).

d) Kuna $f(x_1) = f(kx_2)$ juhul kui $x_1 = kx_2$ ehk $x_2 = \frac{x_1}{k}$, siis on kõveral $y = f(x)$ kohal x_1 ja kõveral $y = f(kx)$ kohal $x_2 = \frac{x_1}{k}$ võrdsed ordinaadid. Kui $k > 1$, siis on $|x_2| < |x_1|$ (joon. 7). Kui $0 < k < 1$, siis on $|x_2| > |x_1|$.



joon. 7



joon. 8

Seega saadakse funktsiooni $y = f(kx)$ graafik esialgse joone $y = f(x)$ abstsissteljesuunalisel k-kordsel venitamisel juhul, kui $0 < k < 1$ (joon. 8) ja kokkusurumisel juhul, kui $k > 1$

(joon. 7 ja 6).

Jooned $y = f(kx)$ ja $y = f(-kx)$ on sümmeetrilised ordinaattelje suhtes (joon. 7 ja 8).

Teine teema: Funktsiooni piirväärtus ja pidevus.

Arvjada piirväärtus. Funktsiooni piirväärtus argumendi lähenemisel mingile kindlale suurusele või lõpmatul suurenemisel. Ühepoolsed piirväärtused. Lõpmatult vähenevad ja lõpmatult suurenevad suurused. Teoreeme lõpmatult vähenevatest suurustest. Teoreemid summa, korrutise ja jagatise piirväärtustest. Piirväärtuse olemasolu tunnused: 1) monotoonse jada puhul (ilma tõestuseta); 2) funktsiooni puhul, mille väärtused on kahe funktsiooni vastavate väärtuste vahel. Piirväärtused

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \text{ ja } \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Arv e, naturaallogaritmid. Lõpmatult vähenevate suuruste võrdlemine ja selle kasutamine piirväärtuste leidmisel ning ligikaudsel arvutamisel.

Funktsiooni pidevus antud punktis. Funktsiooni pidevus vahemikus. Funktsiooni katkevuskohad. Pidevate funktsioonide summa, korrutise ja jagatise pidevus. Liitfunktsiooni pidevus. Elementaarfunktsioonide pidevus. Kinnises vahemikus pidevate funktsioonide omadusi: tõkestatus, suurima ja väikseima väärtuse olemasolu, vahepealsete väärtuste olemasolu (kõik ilma tõestuseta).

Selle aine õppimiseks tuleb läbi töötada õpikust B I II peatüki lõigud 27(34) - 41(49) ja PR I järgi näited I - VIII lk. 129 - 136 ning lahendada ülesanded 591 - 593, 595 - 597, 600, 602, 604, 607, 611 - 614, 616, 619 - 626, 631 - 633, 635, 638, 643 - 646, 648 - 650, 656 - 659, 664, 666, 669, 671, 673, 678, 679.

Funktsiooni piirväärtuse mõiste kuulub nende mõistete hulka, milleta pole mõeldav matemaatilise analüüsi edasine õppimine. Selle tõttu peab iga üliõpilane tõsist tähelepanu pühendama piiri mõiste omandamisele.

Kuna piiri mõiste on defineeritud vahede absoluutväärtuste kohta käivate võrratuste kaudu, siis peab üliõpilane hästi tundma võrratuste omadusi ja oskama võrratusi ka geomeetriliselt tõlgendada.

Ülesanne 1. Mida esitab geomeetriliselt võrratus $|x - 5| < 3$?

Lahendus: Arvu absoluutväärtuse kohta käiv võrratus on alati asendatav selle arvu enda kohta käiva kahe võrratusega. Antud juhul

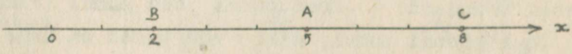
$$-3 < x - 5 < 3.$$

Liites siin kõigile võrratusi moodustavatele avaldistele arvu 5, jääb võrratus samapidi kehtima

$$-3 + 5 < x - 5 + 5 < 3 + 5$$

ehk

$$2 < x < 8 \text{ (joon. 9).}$$



joon. 9

Seega esitab võrratus $|x - 5| < 3$ arvsirgel lahtist vahemikku BC, mis ulatub arvule 5 vastavast punktist A kolme ühiku võrra nii vasakule kui ka paremale. Vahemiku otspunktidele A ja B vastavad arvud 2 ja 8 võrratust ei rahulda. Öeldakse ka, et võrratus $|x - 5| < 3$ määrab punkti $x = 5$ ümbruse raadiusega 3.

Ülesanne 2. Mida esitavad geomeetriliselt võrratused

$$0 < |x - 2| < 4?$$

Lahendus: Antud juhul on tegemist võrratustega

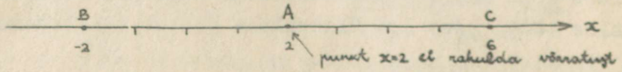
$$0 < |x - 2| \text{ ja } |x - 2| < 4.$$

Eelmise põhjal taandub viimane võrratus võrratusteks

$$-2 < x < 6,$$

esimene võrratus $0 < |x - 2|$ on aga rahuldatud iga x väärtuse korral välja arvatud see, mille puhul $|x - 2| = 0$ ehk $x = 2$.

Seega esitavad võrratused $0 < |x - 2| < 4$ lahtist vahemikku BC, mis ulatub arvule 2 vastavast punktist A nelja ühiku võrra vasakule ja paremale, välja arvatud selle vahemiku keskpunkt A (joon 10).



joon. 10

Enne funktsiooni piirväärtuse tundma õppimist vaadeldakse arvujada piiri [27(34) ja 28(35)].

Õpikus toodud näite

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{15}{16}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \ldots$$

puhul on selge, et $\frac{2^n - 1}{2^n} < 1$ iga n väärtuse korral, s.o. $\frac{2^n - 1}{2^n} \neq 1$. Kirjutis $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2^n + 1}{2^n} = 1$ aga tähendab ainult seda, et iga kuitahes väikese positiivse arvu ε puhul võib leida niisuguse n väärtuse, mille korral $1 - \frac{2^n - 1}{2^n} < \varepsilon$. Teiste sõnadega, et iga etteantud $\varepsilon > 0$ korral võib valida nii suure järjekorranumbriga n jada liikme U_n, mis erineb arvust 1 vähem kui ε võrra.

Funktsiooni f(x) [29,(36)] piirväärtuse $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ puhul ei ole oluline, kas x_0 kuulub funktsiooni määramispiirkonda või mitte, küll aga peab x_0 (nii vasak- kui ka parempoolne) ümbrus kuuluma funktsiooni määramispiirkonda, sest x lähenemine arvule x_0 võib sündida nii kasvades kui ka kahanedes, s.o. kas vasakult või paremalt. Juhul, kui x_0 kuulub määramispiirkonda, ei ole omakorda oluline, kas $f(x_0) = A$ või $f(x_0) \neq A$.

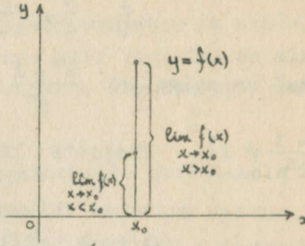
Piirväärtuse $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ määramisel tuleb nimelt kõne alla ainult need argumendi väärtused, mis e r i n e v a d väärtusest x_0 (olgugi kuitahes vähe).

Kui on olemas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, siis võib $x \to x_0$ mõlemalt poolt, s.o. võib olla nii hästi $x > x_0$ kui ka $x < x_0$.

Kui aga piirväärtuse määramisel on lubatud kasutada ainult argumendi väärtusi $x > x_0$ või väärtusi $x < x_0$, siis räägitakse ühepoolsetest piirväärtustest [29(36)]: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ on vasakpoolne piirväärtus ja $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ - parempoolne piirväärtus (joon. 11).

Funktsioonil on piirväärtus $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ kohal siis ja ainult siis, kui tal on sellel kohal mõlemapoolsed piirväärtused, kusjuures need piirväärtused on võrdsed:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$$



joon. 11

See mõlemapoolne ühine piirväärtus ongi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Kui $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, siis nimetatakse funktsiooni $f(x)$ p i d e v a k s kohal x_0.

Funktsiooni pidevuse mõiste on matemaatilise analüüsi üks tähtsamaid mõisteid. Seda mõistet on küllaldase põhjalikkusega selgitatud õpikus [35(42)]. Katkevuskohtade käsitlemine [36(43)] süvendab pidevuse mõistet, seepärast on kasulik raamatu näiteid suure hoolega läbi töötada. Samuti peab põhjalikult tundma pidevate funktsioonide omadusi [37(44), 38(45)], erilist rõhku tuleb panna teoreemidele I - V.

Lisaks õpikus ja ülesannetekogus toodud näidetele võtame vaatluse alla järgmised funktsioonid:

<u>Näide 1.</u> $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ on katkev kohal $x = 0$, sest see argumendi väärtus ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda; mujal on funktsioon pidev.

Et aga $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ [41(49)], siis võib moodustada kõikjal pideva funktsiooni

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, & \text{kui } x \neq 0, \\ e & , \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

<u>Näide 2.</u>

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{kui } x < -1, \\ x+2, & \text{kui } x \geqslant -1, \end{cases}$$

on kõikjal määratud. Nagu funktsiooni avaldistest näha, on

$f(x)$ pidev, kui $x \neq -1$. Kohal $x = -1$ tuleb funktsiooni pidevust eraldi uurida. Selleks leiame mõlemapoolsed piirväärtused kõne all olevas punktis:

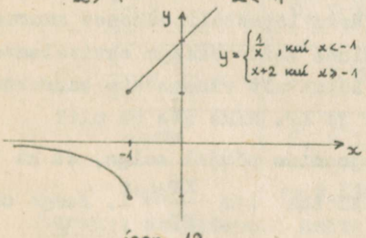
$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{1}{x} = -1 \quad (\text{kuna } x < -1 \text{ puhul } f(x) = \frac{1}{x}),$$

aga

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x+2) = 1 \quad (\text{kuna } x > -1 \text{ puhul on } f(x) = x+2).$$

Nagu näha, pole vasak- ja parempoolne piirväärtus võrdsed, seega pole olemas piirväärtust $\lim_{x \to -1} f(x)$ ning $f(x)$ on katkev kohal $x = -1$. See katkevuskoht on funktsiooni hüppekohaks, kusjuures hüppe suurus on (joon. 12):

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) - \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = 1 - (-1) = 2$$



joon. 12

Lõpmatult vähenevate suuruste puhul peab tundma suurusjärgu mõistet ja teadma, milliseid lõpmatult vähenevaid suurusi nimetatakse ekvivalentseteks. Eriti tähtis on näidata α ja $\sin \alpha$ ekvivalentsust, kui $\alpha \to 0$ [40(48) III lk. 125].

Lisaks õpikus toodud näidetele lahendame lõpmatult vähenevate suuruste järgu selgitamiseks veel kaks lihtsat ülesannet.

Ülesanne 3. Kuubi serva pikkus on x. Näidata, et serva pikkuse suurenemisel Δx võrra ruumala suureneb ligikaudu $3x^2 \Delta x$ võrra.

Lahendus: Ruumala suurenemine avaldub kujul

$$\Delta V = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

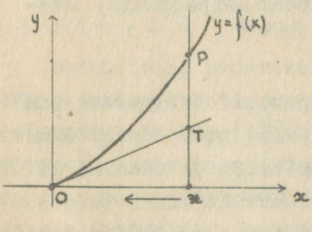
Kui $\Delta x \to 0$, siis $3x^2 \Delta x \to 0$, $3x(\Delta x)^2 \to 0$ ja $(\Delta x)^3 \to 0$, kusjuures

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x(\Delta x)^2}{3x^2 \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x} = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3}{3x(\Delta x)^2} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{3x} = 0.$$

Seega on kõik kolm liidetavat lõpmatult vähenevad suurused, kui $\Delta x \to 0$, sealjuures on aga teine liidetav esimese suhtes ja kolmas liidetav teise suhtes kõrgemat järku lõpmatult vähenev suurus. Selletõttu nimetatakse esimest liidetavat esimest järku, teist liidetavat teist ja kolmandat liidetavat kolmandat järku lõpmatult vähenevaks suuruseks. Jättes kõrvale kõrgemat järku lõpmatult vähenevad suurused, võimegi võtta $\Delta V \approx 3x^2 \Delta x$.

Kui oleks vajalik suurem täpsus, siis peaksime võtma $\Delta V \approx 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2$. Sel juhul ütleme, et ruumala juurdekasv on määratud kuni teist järku lõpmatult vähenevate suurusteni.

Ülesanne 4 Olgu OT joonisel 13 antud kõverale $y = f(x)$ punktis $(0;0)$ tõmmatud puutuja. Kui $X \to 0$, siis lõigud XT, XP ja TP on lõpmatult vähenevad suurused. Sealjuures on aga PT kõrgemat järku lõpmatult vähenev suurus võrreldes teineteisega ekvivalentsete lõpmatult vähenevate suurustega XT ja XP. Miks see on nii?



joon. 13

Lahendus: Kui $X \to 0$, siis on joonise põhjal selge, et ka $XP \to 0$ ja $XT \to 0$, kusjuures $XP \to XT$ ehk $\lim\limits_{x \to 0} \frac{XP}{XT} = 1$. Seega on XP ja XT ekvivalentsed lõpmatult vähenevad suurused ja nende vahe $XP - XT = TP$ on kõrgemat järku lõpmatult vähenev suurus [39(47)].

Matemaatilises analüüsis omab tähtsa koha funktsioon $\log_e x$ ehk $\ln x$ (naturaallogaritm x), sellepärast peab hästi tundma naturaallogaritmide alust arvu e [41(49)]. Peab oskama ka arvutada arvu e väärtusi soovitud täpsusega. Juhise selleks leiame lk. 127:

$$e = \lim_{n \to \infty} U_n, \quad 2 < U_n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 3.$$

Et $\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} : (n+1)$, siis saame kergesti arvutada e väärtust etteantud täpsusega. Näiteks võime e väärtust viie õige kohaga peale koma arvutada järgmise tabeli abil:

1	1, 0 0 0 0 0 0
$\frac{1}{1!} = 1$	1, 0 0 0 0 0 0
$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$	0, 5 0 0 0 0 0
$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2!} : 3$	0, 1 6 6 6 6 7
$\frac{1}{4!} = \frac{1}{3!} : 4$	0, 0 4 1 6 6 7
$\frac{1}{5!} = \frac{1}{4!} : 5$	0, 0 0 8 3 3 3
$\frac{1}{6!} = \frac{1}{5!} : 6$	0, 0 0 1 3 8 9
$\frac{1}{7!} = \frac{1}{6!} : 7$	0, 0 0 0 1 9 8
$\frac{1}{8!} = \frac{1}{7!} : 8$	0, 0 0 0 0 2 5
$\frac{1}{9!} = \frac{1}{8!} : 9$	0, 0 0 0 0 0 3
summa	2, 7 1 8 2 8 2
Seega	$e = 2,71828$.

Märkus: seitsmendat kohta peale koma ei ole vaja arvutada, sest see ei mõjuta summa viiendat kohta.

II. ÜHE MUUTUJA FUNKTSIOONI DIFERENTSIAALARVUTUS.

Kolmas teema: Funktsiooni tuletis ja diferentsiaal.

Ülesandeid, mis viivad tuletise mõisteni. Tuletis ja tema geomeetriline interpretatsioon. Funktsioonide summa, korrutise ja jagatise tuletis. Liit- ja pöördfunktsiooni tuletis. Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised. Ilmutamata funktsiooni diferentseerimine. Parameetriliselt antud funktsioon ja tema tuletis.

Diferentsiaal ja tema geomeetriline tähendus. Funktsioonide summa, korrutise ja jagatise diferentsiaal. Liitfunktsiooni diferentsiaal. Funktsiooni diferentsiaali invariantsus.

Funktsiooni diferentseeruvus. Diferentseeruva funktsiooni pidevus.

Kõrgemat järku tuletised ja diferentsiaalid.

B I järgi III peatüki lõigud 42(50) - 44(52), 46(54) - 49(57), 51(59) - 55(63), 59(67), 61(69) ja ülesannetekogu PR I järgi näited I - XIII lk. 144 - 154 ning lahendada ülesanded 681 - 684, 687, 688, 690 - 694, 697 - 701, 708 - 714, 717, 721, 722, 724 - 727, 741, 745 - 747, 751, 752, 754 - 756, 759, 767 - 771, 776 - 778, 784, 787, 788 - 791, 797 - 800, 803 - 805, 807 - 808, 813, 825 - 828, 836, 837, 841, 842, 844, 845, 843, 850, 851.

Üliõpilane peab veenduma, et diferentsiaalarvutuse põhilised mõisted - tuletis ja diferentsiaal - on välja kujunenud praktilisest vajadusest tundma õppida mitmesuguseid looduses esinevaid protsesse. Mõttekäikudega, mis viivad tuletise mõiste loomisele, tutvub üliõpilane lõikudes 42(50) ja 43(51). Sama tähtis on aga ka tuletise geomeetriline interpretatsioon, mis on küllaldase selgusega käsitletud lõigus 44(52). Üliõpilane peab omandama selge ettekujutuse pidevast funktsioonist ja diferentseeruvast funktsioonist. Funktsiooni diferentseeruvuse ja pidevuse vahekorda on selgitatud lõigus 54(62).

Samuti tuleb kindlat vahet teha funktsiooni tuletise ja diferentsiaali vahel. Seda aitab vast kõige paremini selgitada kummagi mõiste geomeetriline interpretatsioon [44(52) ja 51(59), joon. 53 ja 60].

Lisaks sellele on soovitav veel kord tagasi tulla käesoleva tes juhendites eelmise teema puhul toodud ülesande 4 juurde (joon. 13), mis näitab, et funktsiooni diferentsiaal dy ja funktsiooni juurdekasv Δ y on ekvivalentsed lõpmatult vähenevad suurused. Seal toodud joonisele põhjeneva lahenduskäigu asemel võib nüüd küsimust käsitleda järgmiselt:

<u>Lahendus</u>. $XP = f(X) - f(0) = f(X) = \Delta y$. OT kui puutuja võrrand on $y = f'(0)x$, seega $XT = f'(0)\,X = dy$, kusjuures

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(X) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(X)}{X} = f'(0),$$

millest

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{dy} = \lim_{x\to 0}\frac{XP}{XT} = \lim_{x\to 0}\frac{f(X)}{f'(0)X} = \lim_{x\to 0}\frac{f(X)}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(X)}{X}\cdot X} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{f(X)}{X}X} = 1.$$

Diferentseerimise tehnika peab üliõpilane kindlalt omandama [46(54) - 49(57)]. Diferentseerimise põhivalemid [48(56)] tuleb tingimata pähe õppida. Erilist tähelepanu tuleb pühendada liitfunktsiooni diferentseerimisele [47(55)].

Suurt rõhku tuleb panna diferentsiaali mõiste rakendamisele ligikaudses arvutuses [53(61)].

Neljas teema: Tuletise rakendusi.

1. Funktsiooni uurimine.

Rolle'i, Lagrange'i ja Cauchy keskväärtusteoreemid. Teoreeme funktsiooni kasvamisest ja kahanemisest antud vahemikus. Funktsiooni ekstreemum. Tarvilik tingimus ekstreemumiks. Piisavad tingimused ekstreemumiks (esimest ja teist tuletist kasutades). Funktsiooni suurima ja väikseima väärtuse otsimine. Funktsiooni graafiku kumerus ja nõgusus, käänupunktid. Funktsiooni graafiku käänupunktide ja kumeruse ning nõgususe piirkondade otsimine.

L'Hospitale'i reegel. Funktsiooni graafiku püst- ja kaldasümptoodid. Funktsiooni uurimise ja tema graafiku konstrueerimise üldskeem.

Taylori valem, tema jääkliige Lagrange'i järgi. Taylori polünoom funktsiooni ligikaudse avaldisena.

Läbi töötada õpiku BI järgi IV peatüki lõigud 62(70) - 72(80) I (II võib ära jätta), 73(81) - 75(84) ja ülesannete kogu PR I järgi näited II - IV, VI - XII lk. 165 - 176 ning lahendada ülesanded 855, 857, 861, 867, 869, 870, 873, 874, 876, 878 - 882, 893 - 896, 918, 920 - 923, 928, 929, 936 - 940, 946, 947, 952 - 954, 958 - 960, 964 - 969, 981 - 985, 993 - 995, 998, 1001 - 1003, 1009 - 1012, 1016.

2. R a k e n d u s i l i g i k a u d s e s
a r v u t a m i s e s.

Funktsiooni ligikaudsete väärtuste arvutamine Taylori valemi ja diferentsiaali abil. Ligikaudse väärtuse hindamine.

Võrrandi lahendid (funktsiooni nullkohad), erinevad ja kordsed lahendid. Võrrandi ligikaudne lahendamine. Graafiline võte. Proovimis-, lõikaja- ja puutuja võte.

Õppida BI järgi IV peatüki lõigud 76(85) - 79(88) ja ülesannete kogu PR I järgi näide V lk. 168 ning lahendada ülesanded 903 - 908, 911, 915, 1023 - 1029.

Võrrandi lahendi ligikaudse väärtuse leidmist puutuja abil [76(85) III valem (Ђ)] nimetatakse ka Newtoni võtteks.

3. G e o m e e t r i l i s i r a k e n d u s i.

Tasapinnalise joone puutuja ja normaal. Tasapinnalise joone kõverus. Kõverusraadius, -keskpunkt ilma valemiteta koordinaatide jaoks) ja -ringjoon. Tasapinnalise joone evoluudi ja evolvendi mõiste.

Ruumikõvera parameetrilised võrrandid. Ruumikõvera puutuja ja tema võrrandid. Skalaarse argumendiga vektorfunktsioon. Hodograaf. Vektorfunktsiooni tuletis, tema geomeetriline ja mehhaaniline tähendus.

Tuletise geomeetrilisi rakendusi on käsitletud õpikus B I lõigetes 80(91) - 83(94). Peale selle tuleb läbi töötada PR II järgi paragrahvis „Diferentsiaalgeomeetria elemendid" toodud näited I - VI ning lahendada ülesanded 1814 - 1816, 1819, 1820, 1822, 1824, 1825, 1830, 1831, 1833 ja 1835.

III. ÜHE MUUTUJA FUNKTSIOONI INTEGRAALARVUTUS:

Viies teema: Funktsiooni üldintegraal ehk määramata integraal.

Algfunktsioon ja üldintegraal. Üldintegraalide põhivalemi. Üldintegraali lihtsamaid omadusi. Otsene integreerimine. Integreerimine muutuja vahetusega. Ositi integreerimine.

Algebra põhiteoreem (ilma tõestuseta). Reaalarvuliste kordajatega polünoomi esitamine lineaar- ja ruutpolünoomide korrutisena. Murdratsionaalse funktsiooni esitamine osamurdude summana (ilma tõestuseta).

Ratsionaalfunktsioonide integreerimine. Trigonomeetriliste funktsioonide suhtes ratsionaalsete funktsioonide integreerimine. Lihtsamate irratsionaalsete funktsioonide integreerimine. Funktsioonide integreerimine käsiraamatutes antud integraalide tabelite abil. Näiteid üldintegraalidest, mis pole avaldatavad elementaarfunktsioonide kaudu.

Õppida B I järgi VI peatüki lõigud 94(105) - 100(112), 102(114) (välja jätta II lk. 338 diferentsiaalbinoomi integreerimine), 103(115) - 105(117) ja ülesannetekogu PR I järgi näited I - XVI lk. 191 - 205 ning lahendada ülesanded 1033 - 1035, 1037, 1038, 1042, 1043, 1045, 1048, 1049, 1052, 1053, 1057, 1058, 1063, 1066, 1073, 1078, 1080, 1084, 1085, 1087, 1098, 1092, 1094, 1095, 1102, 1107, 1108, 1109, 1114, 1116, 1119, 1125, 1126, 1131, 1132, 1141, 1145, 1150, 1151, 1154, 1156, 1158, 1166, 1168, 1171, 1175, 1181, 1186, 1192, 1194, 1198, 1200, 1202, 1204, 1209, 1220, 1221, 1224, 1226, 1228, 1232, 1236, 1239, 1244, 1251

TPI-s käsitletakse tavaliselt üldintegraali, s.o. funktsiooni leidmist, kui on antud tema tuletis, enne määratud integraali

Enne kui asuda käesoleva teema õppimisele, peab teadma peast diferentseerimise põhivalemeid ning kordama B I IV peatüki lõiku 69(77) ja täiesti selgeks tegema selles lõigus antud teoreemi.

Integreerimise põhivalemid, mis on antud lõikude 94(105) ja 99(109) lõpul, tuleb pähe õppida.

Irratsionaalsete funktsioonide integreerimisel on mõnikord õpikus antud [104(116)] trigonomeetriliste teisenduste asemel sobivam kasutada hüperboolseid teisendusi, mis on näidatud ülesannetekogus PR I lk. 190 valemites (31) ja (32). Hüperboolsete funktsioonide definitsioonid on antud samas ülesannetekogus lk. 113. Nendest definitsioonidest võib kergesti järeldada hüperboolsete funktsioonide järgmised omadused:

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x,$$
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$
$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$
$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1),$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x + C,$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C, \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,$$
$$\int \operatorname{ch}^2 x dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{x}{2} + C,$$
$$\int \operatorname{sh}^2 x dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x - \frac{x}{2} + C.$$

Sageli võib antud üldintegraali avaldamiseks kasutada mitut eri võtet ja igale võttele vastavalt saada ka erineva vastuse. Kuid kõik saadud vastused erinevad üksteisest ainult konstantse liidetava võrra, kuigi see igakord ei ole silmnähtav.

Näiteks, kui $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ lahendamiseks kasutada teisendust $t = x + 1$, siis saame $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan t + C =$ $= \arctan (x + 1) + C$, kui aga kasutada teisendust $x = \frac{2}{z - 1}$ ehk $z = \frac{2}{x} + 1$, siis saame $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = -\int \frac{dz}{1 + z^2} =$ $= -\arctan (\frac{2}{x} + 1) + C$. Saadud vastustest pole otsekohe näha, et nad erineksid konstantse liidetava võrra. Kui aga lugeda meelevaldseid konstante mõlemas vastuses võrdseteks ja esimesest vastusest lahutada teise, siis saame

$$\arctan (x + 1) - [-\arctan(\frac{2}{x} + 1)], \text{ millest}$$
$$\tan[\arctan(x + 1) + \arctan (\frac{2}{x} + 1)] =$$
$$= \frac{\tan \arctan(x + 1) + \tan \arctan (\frac{2}{x} + 1)}{1 - \tan \arctan (x + 1) \cdot \tan \arctan (\frac{2}{x} + 1)} =$$

$$= \frac{x+1+\frac{2}{x}+1}{1-(x+1)(\frac{2}{x}+1)} = \frac{x^2+2x+2}{-x^2-2x-2} = -1.$$

Kuna $\tan(\frac{3\pi}{4} \pm k\pi) = -1$, kus k on naturaalarv, siis ongi

$$\arctan(x+1) - (-\arctan\frac{2}{x}+1) = \frac{3\pi}{4} \pm k\pi.$$

Järelikult erinevadki saadud üldintegraalid konstandi $\frac{3\pi}{4} \pm k\pi$ võrra.

Suurt tähelepanu tuleb pühendada murdratsionaalse funktsiooni integreerimisele [99(110), 100(112)], sest väga suur osa irratsionaalseid, trigonomeetrilisi ja muid funktsioone teisendatakse enne integreerimist muutuja vahetusega murdratsionaalseteks funktsioonideks.

Üliõpilane peab olema teadlik, et üldintegraal avaldub elementaarsetes funktsioonides ainult eriliselt valitud integreeritavate funktsioonide puhul. Näiteks isegi pealt näha nii lihtsad integraalid nagu

$$\int e^{x^2}dx, \int \sin(x^2)dx, \int \cos(x^2)dx, \int \frac{e^x}{x}dx, \int \frac{\sin x}{x}dx,$$

$\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ ei ole avaldatavad elementaarsetes funktsioonides.

Kuues teema: Määratud integraal.

Geomeetrilise ja füüsikalise sisuga ülesanded, mis viivad määratud integraali mõistele. Määratud integraali definitsioon ja olemasoluteoreem (ilma tõestuseta). Määratud integraali põhiomadused: lineaarsus integraalialuse funktsiooni suhtes, aditiivsus integreerimispiirkonna suhtes, ülemine ja alumine tõke, keskväärtusteoreem, integraali tuletis ülemise raja järgi, Newton-Leibnizi teoreem, seos üldintegraali ja määratud integraali vahel.

Määratud integraali arvutusvõtted: muutuja vahetus, ositi integreerimine.

Määratud integraali ligikaudne arvutamine: ristkülikuvalem, trapetsivalem, Simpsoni valem.

Lõpmatu rajaga päratu integraali mõiste, lõplikul arvul katkemiskohti omava funktsiooni päratu integraali mõiste.

Õppida B I järgi V peatüki lõigud 84(95) - 86(97), 88(99) - 90(101) I ja II (III võib ära jätta), 91(102) - 93(104) ja VII peatüki lõigud 106(118) - 108(120), 110(122), 112(124), ning ülesannetekogust PR I näited I, II, IV - XII, XIV lk. 222 - 228 [näites XI on trükiviga, peab olema $\int_0^1 \frac{4\,dx}{1+x^2}$]. Lahendada tuleb ülesanded 1265(1), 1266, 1268, 1270, 1273, 1281, 1282, 1285, 1287(1), 1288(1, 2), 1290, 1291, 1293, 1295, 1297, 1299(1), 1301, 1303, 1305, 1309(1,3,5), 1310, 1312, 1315, 1322, 1325, 1327, 1329, 1333, 1335, 1341, 1343, 1344, 1347, 1349, 1351, 1352, 1356, 1358, 1364, 1366, 1368, 1382, 1383, 1387, 1390, 1391.

Lõigud 84 ja 85 moodustavad sissejuhatava osa. Olulisem nendest on 84(95), mis annab määratud integraalile geomeetrilise tõlgenduse, mida iga üliõpilane kindlasti teadma peab. Näited füüsikast 85(96) ei ole esialgu nii tähtsad, kuna nende juurde tullakse veel hiljem füüsika, teoreetilise mehaanika ja mitmesuguste eriainete puhul. Väga põhjalikult tuleb aga läbi töötada 86(97), milles antakse määratud integraali definitsioon ja olemasolu teoreem.

Määratud integraali omadustest (88 ja 89) tuleks esile tõsta aditiivsust:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_k}^{b} f(x)\,dx,$$

mis võimaldab integreerida inseneripraktikas küllaltki sageli esinevaid funktsioone , nagu

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kui } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2\ , & \text{kui } 1 < x < 2, \\ \sqrt{4x - x^2}, & \text{kui } 2 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$$

seega

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 2dx + \int_2^4 \sqrt{4x - x^2}\,dx = 3 + \pi.$$

Määratud integraali arvutamisel muutujate vahetuse abil (107) on kaks võimalust. Võib avaldada üldintegraali uue muutuja kaudu, siis saadud üldintegraali teisendada tagasi esialgse muutuja funktsiooniks ning alles siis arvutada integraal Newton-Leibnizi valemi abil. Niisugusel juhul pole vaja integraali rajasid muuta. Sel viisil on lahendatud ülesannetekogus näide II lk. 223. Sageli on aga uue muutuja kaudu leitud üldintegraali tülikas teisendada esialgse muutuja funktsiooniks, kohasem on teisendada integraali rajasid uuele muutujale vastavaiks. Sellekohane näide on toodud õpikus (107, näide 1) ja ülesannetekogus (näide VII lk. 226).

Kui määratud integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ arvutamisel kasutada uut muutujat $u = \varphi(x)$, siis peab vaatama, et pöördfunktsioon $x = \psi(u)$ täidaks tingimusi, mis on esitatud õpikus lõigus 107(119) II. Eriti õpetlik on läbi uurida sealsamas toodud näide, kus need tingimused pole rahuldatud. Ekslik oleks siiski arvata, et $\int_{-1}^2 x^2 dx$ ei saaks üldse lahendada asendusega $u = x^2$. Kuid seda peab tegema mõistlikult, mitte puhtformaalselt nagu õpikus käsitletud. Integreerimise piirkonnaks on antud juhul vahemik $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Selle vahemiku ühes osas on x negatiivne $-1 \leqslant x \leqslant 0$ ja teises osas positiivne $0 \leqslant x \leqslant 2$. Kui nüüd valida $u = x^2$, siis on selle funktsiooni pöördfunktsiooniks vahemikus $-1 \leqslant x \leqslant 0$ funktsioon $x = -\sqrt{u}$ ja vahemikus $0 \leqslant x \leqslant 2$ funktsioon $x = \sqrt{u}$. Vastavalt sellele on esimeses vahemikus $dx = -\dfrac{du}{2\sqrt{u}}$ ja teises vahemikus $dx = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$. Järelikult peab antud integraali esitama summana

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^2 x^2 dx = \int_1^0 u\left(-\frac{du}{2\sqrt{u}}\right) + \int_0^4 u\,\frac{du}{2\sqrt{u}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{u}\,du + \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \sqrt{u}\,du + \int_0^4 \sqrt{u}\,du\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{[u\sqrt{u}]_0^1 + [u\sqrt{u}]_0^4\right\} = \frac{1}{3}(1 + 4 \cdot 2) = 3.$$

Väga kasulik on tähele panna „sümmeetrilise" integraali $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ omadusi juhtudel, kui $f(x)$ on paaris- või paaritu funktsioon, need on käsitletud eelmainitud lõigus 107(119) III.

Juhul kui üldintegraal pole avaldatav elementaarfunktsioonides, võib mõnikord kunstliku võtte abil määratud integraali siiski arvutada Newton-Leibniz'i valemi abil

Näiteks $\int \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$ pole avaldatav elementaarsetes funktsioonides, kuid $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$ on arvutatav Newton-Leibniz'i valemi kaudu. Esitame nimelt antud määratud integraali summana:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx.$$

Kui nüüd viimases integraalis võtta kasutusele uus muutuja t, nii et $x = \pi - t$, siis $dx = -dt$ ja

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt.$$

Ilmselt on nii saadud kaks esimest integraali võrdsed (esimeses integraalis võiks teha asenduse x = t, dx = dt), seega

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt ,$$

mis asendusega cos t = u taandub integraaliks

$$-\pi \int_1^0 \frac{du}{1+u^2} = \pi \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \pi \left[\arctan u\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{4} .$$

Niisuguseid kunstlikke võtteid saab siiski väga harva rakendada. Alati saab aga määratud integraali väärtust arvutada ligikaudselt [108(120)].

Mõlemat tüüpi päratu integraali puhul peab teadma definitsiooni ja oskama seda definitsiooni rakendada nii hästi integraali koonduvuse kui ka hajuvuse kindlaksmääramisel.

Seitsmes teema: Määratud integraali rakendusi.

Määratud integraali rakendamine geomeetriliste ja füüsikaliste suuruste leidmiseks.

Pindala arvutamine Cartesiuse ja polaarkoordinaatides. Keha ruumala definitsioon ja arvutamine paralleellõigete pindalade kaudu, pöördkeha ruumala. Kaare pikkuse definitsioon ja arvutamine. Pöördpinna pindala definitsioon ja arvutamine.

Lihtsamad füüsikalise sisuga ülesanded.

Sissejuhatava osana oleks soovitav läbi lugeda õpiku B I VIII peatüki lõigud 114(126) ja 115(127). Õppida tuleb III peatüki lõik 57(65) ja VIII peatüki lõigud 117(129) - 120(133).

Lõigust 121 tuleb selgeks teha mõned lihtsamad füüsikalise sisuga ülesanded. Ülesannetekogust PR I läbi töötada näited I - XVI lk. 244 - 258 ja lahendada ülesanded: 1407 - 1409, 1411, 1412, 1417, 1421, 1423, 1427, 1429, 1431, 1437, 1441, 1443, 1447, 1451, 1455, 1460, 1462, 1467, 1470, 1473, 1475, 1478, 1483, 1487, 1488, 1490, 1495, 1507, 1511, 1517, 1520, 1527.

Käesolev teema peab andma üliõpilasele kindla veendumuse, et määratud integraali mõiste on möödapääsematult vajalik väga mitmesuguste suuruste mõõtmisel.

IV. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONIDE DIFERENTSIAALARVUTUS.

Kaheksas teema: Mitme muutuja funktsiooni mõiste.

Kahe ja mitme muutuja funktsioonid. Kahe ja kolme sõltumatu muutuja funktsiooni määramispiirkond, esitusviisid. Kahe muutuja funktsiooni geomeetriline tõlgendus: pind, nivoojooned. Mitme muutuja funktsioon punkti funktsioonina. Kahe ja mitme muutuja funktsiooni piirväärtus. Mitme muutuja funktsiooni pidevus.

Õpikust B II läbi töötada X peatüki lõigud 136(151) - 143 (158) ja ülesannetekogust PR II § 15 „Mitme muutuja funktsioonid" näited I - VI ning lahendada ülesanded 1529, 1530, 1533, 1534, 1535, 1538, 1539, 1542, 1544, 1546, 1550 - 1552, 1554, 1557, 1561, 1564, 1565, 1567, 1569, 1570, 1574, 1576, 1577, 1580, 1582, 1583, 1586, 1587.

Maailmas toimuvaid nähtusi uurides on leitud, et enamatel juhtudel üks muutuv suurus ei sõltu mitte ühestainsast teisest muutuvast suurusest, vaid mitmest. Selletõttu omab mitme muutuja funktsioonide teooria suurt praktilist väärtust. Suuruse sõltuvus mitmest muutujast on muidugi hulga keerulisem kui sõltuvus ühestainsast argumendist.

Kuna ainult kahe muutuja funktsiooni $z = f(x,y)$ on võimalik geomeetriliselt interpreteerida kui kolmemõõtelise ruumi punkte (mis funktsiooni pidevuse korral moodustavad mingi pinna), siis on mitme muutuja funktsioonide uurimise lähtekohaks võetud kahe muutuja funktsioon.

Üheksas teema: Tuletised ja diferentsiaalid.

Osatuletised. Kahe muutuja funktsiooni osatuletiste geomeetriline tõlgendus. Osajuurdekasv ja osadiferentsiaal. Täisjuurdekasv ja täisdiferentsiaal. Täisdiferentsiaali avaldis. Pinna puutujatasapind ja normaal. Kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali geomeetriline tõlgendus. Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus, piisav tingimus. Suunatuletis. Funktsiooni gradient, selle tähtsamad omadused.

Liitfunktsiooni diferentseerimine. Funktsiooni diferentsiaali kuju invariantsus. Täistuletis.

Mitme muutuja ilmutamata funktsioonid. Ilmutamata funktsioonide diferentseerimine.

Kõrgemat järku osatuletised, nende sõltumatus diferentseerimise järjekorrast.

B II järgi õppida X peatüki lõigud 144(159) - 151 (166), 153(168) - 154(169), ülesannetekogust PR II § 15 näited VII - XVIII ja lahendada ülesanded 1588, 1591, 1592, 1594, 1597, 1601, 1603, 1607, 1608, 1611, 1612, 1616, 1619, 1621, 1623, 1626, 1631, 1637, 1642, 1647, 1648, 1650, 1653, 1656, 1657, 1659, 1662, 1665, 1667, 1669, 1672, 1676, 1678 - 1682, 1684, 1685, 1687, 1689, 1691, 1695, 1696, 1698, 1700, 1701, 1703, 1705, 1707, 1711, 1714, 1716, 1725, 1730, 1732, 1737, 1740, 1751.

Selle teema puhul tuleb kõigepealt selgeks teha kahe muutuja funktsiooni osatuletise, täisdiferentsiaali ja funktsiooni diferentseeruvuse mõisted. Neid mõisteid aitab selgitada neile vastav geomeetriline interpolatsioon: osatuletist lõigus 144 (159) esinevad joonised 14 a ja b ning diferentsiaali lõigus 146(161) joon. 15. Funktsiooni $f(x, y)$ diferentseeruvus kohal $(x;y)$ tähendab aga pinna $z = f(x,y)$ puutuvtasapinna olemasolu vastavas punktis (samuti nagu ühe muutuja funktsiooni $\varphi(x)$ diferentseeruvus mingil argumendi väärtusel tähendab joone $y = \varphi(x)$ puutuja olemasolu sellele argumendi väärtusele vastavas punktis).

Kui $f(x,y)$ on diferentseeruv, siis võib funktsiooni juurdekasvu $\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ väärtust ligikaudu (seda paremini, mida väiksemad on Δx ja Δy) asendada funktsiooni diferentsiaali väärtusega samal kohal, kusjuures argumendi juurdekasvud Δx ja Δy on vastavalt võrdsed diferentsiaalidega dx ja dy. See tõsiasi leiab inseneripraktikas laialdast kasutamist.

Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimisel omab keskse koha liitfunktsiooni diferentseerimine, mis on käsitletud lõigus 150(165). Seal toodud esimese teoreemi s õ n a s t u s t ei ole vaja ära õppida, küll aga peab vääramatult tundma neid kahte valemit, mis teoreemi sisu väljendavad. Teise teoreemi puhul on aga sõnastus oluline.

Teistkordsel diferentseerimisel mängib tähtsat osa segaosatuletiste teoreem [153(168)]: kui z''_{xy} ja z''_{yx} on pidevad mingis punktis, siis on seal $z''_{xy} = z''_{yx}$. Siinjuures tuleb aga teadlik olla, et segaosatuletiste pidevus on nende võrdumise piisavaks, mitte aga tarvilikuks tingimuseks. On olemas funktsioone $f(x,y)$, mille puhul f''_{xy} ja f''_{yx} pole pidevad, kuid on siiski võrdsed. Kui aga $f''_{xy} \neq f''_{yx}$, siis kõne all olevad segaosatuletised ei ole pidevad.

Kümnes teema: Mitme muutuja funktsioonide diferentsiaalarvutuse rakendusi.

Mitme muutuja funktsiooni ekstreemum. Ekstreemumi tarvilik tingimus. Mitme muutuja funktsiooni suurima ja väikseima väärtuse otsimine. Pinna puutuvtasapind ja normaal.

Õpikust B II läbi töötada peatüki XI lõigud 156(171) ja 157(172), korrata 146(161), ülesannetekogust PR II § 15 „Mitme muutuja funktsioonid" näited XXIV - XXVI ja lahendada ülesanded 1769, 1770, 1779, 1787, 1791, 1792, 1797, 1798 - 1801, 1804.

Paljud praktilised ülesanded nõuavad mitme muutuja funktsiooni ekstreemumi leidmist. Selliste ülesannete lahendamisel tuleb silmas pidada, et mitme muutuja funktsioonil võib olla ekstreemum kas statsionaarses punktis või punktis, kus funktsioon pole diferentseeruv.

Näiteks on funktsioonil $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ miinimum punktis (0;0), kuid selles punktis ei eksisteeri funktsioonil osatuletisi, nagu z'_x ja z'_y avaldamisel kergesti veenduda võib.

Lõigus 146(161) on antud pinna $z = f(x,y)$ puutuvtasapinna võrrand punktis $(x_o; y_o; z_o)$:

$$z - z_o = f'_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f'_y(x_o, y_o)(y - y_o) \ . \quad (*)$$

Kui pinna võrrand on aga antud ilmutamata funktsiooni kujul $F(x,y,z) = 0$, siis võib lõigu 151(166) II põhjal avaldada tema puutuvtasapinna punktis $(x_o; y_o; z_o)$.

Et

$$f'_x(x_o,y_o) = -\frac{F'_x(x_o,y_o,z_o)}{F'_z(x_o,y_o,z_o)}$$

ja

$$f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x_o,y_o,z_o)}{F'_z(x_o,y_o,z_o)},$$

siis omandab võrrand (*) kuju

$$z - z_0 = -\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}(x - x_0) - \frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}(y - y_0),$$

millest korrutamisel arvuga $F'_z(x_0,y_0,z_0)$ ja kõikide liikmete viimisel ühele võrrandi poolele saame

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

mis ongi ülesannetekogus PR II § 15 esitatud valemina (6).

V. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONIDE INTEGRAALARVUTUS.

Üheteistkümnes teema: Kahekordsed integraalid.

Geomeetrilise ja füüsikalise sisuga ülesandeid, mis viivad kahekordse integraali mõiste loomisele. Kahekordse integraali olemasolu teoreem.

Kahekordse integraali lihtsamaid omadusi: lineaarsus integraalialuse funktsiooni suhtes, aditiivsus integreerimispiirkonna suhtes, alumine ja ülemine tõke.

Kahekordse integraali arvutamine rist- ja polaarkoordinaatides kahe integraali abil.

Kahekordse integraali rakendamine geomeetriliste ja füüsikaliste ülesannete lahendamisel.

Õppida BII XII peatüki lõigud 167(184) - 172(189), 174(191), 176(194) (viimase näite võib välja jätta), 177(195), 178(I) ja ülesannetekogust PR II § 19 „Mitmekordsed integraalid" näited I - VIII ja lahendada ülesanded 2222, 2224, 2227, 2229, 2230, 2232, 2234 - 2236, 2240, 2241, 2243, 2227, 2229, 2250, 2252, 2255, 2257, 2261, 2264, 2265, 2268, 2270, 2272, 2275, 2316, 2322, 2323, 2329, 2336, 2338, 2344, 2346.

Lõigus 167(184) on hästi näidatud, kuidas silindrilise keha ruumala mõõtmisel tekib vajadus kahekordse integraali mõiste järele. Samasugune vajadus tekib ka paljude muude suuruste mõõtmisel hoopis teistes ainevaldkondades nagu füüsikas, mehhaanikas, tugevusõpetuses, hüdromehhaanikas.

Oleks soovitav, et üliõpilane peale tutvumist kahekordse integraali definitsiooniga katsuks võimalikult iseseisvalt tuletada kahekordse integraali omadusi, mis on käsitletud lõikudes 169(186) ja 170(187).

Kahekordse integraali puhul peab üliõpilane kõigepealt oskama hästi ette kujutada võrratustega antud integreerimispiirkonda ja teiseks oskama integreerimispiirkonna järgi määrata integraali rajasid. Samuti peab oskama kahekordse integraali rajade abil leida integreerimispiirkonda määravaid võrratusi.

Kaheteistkümnes teema: Joonintegraal.

Geomeetrilise ja füüsikalise sisuga ülesandeid, mis viivad joonintegraali mõistele. Joonintegraal kaare pikkuse ja koordinaatide järgi tasapinnal. Joonintegraali lihtsamaid omadusi: lineaarsus integraalialuse funktsiooni suhtes, aditiivsus integreerimistee (kontuuri) suhtes. Joonintegraali arvutamine tema tavaliseks integraaliks teisendamise teel. Integreerimistee kujust sõltumatuse tingimused, koordinaatide järgi võetud joonintegraali puhul.

Õppida B II järgi XIII peatüki lõigud 181(200) - 183(202), 185(204) - 188(206), (millest ruumikõvera juhtumid välja jätta), ja ülesannetekogust § 20 „Joonintegraal" näited I, III, V, VI ja lahendada ülesanded 2361 - 2363, 2366, 2368 - 2372, 2380 - 2388.

Nagu nähtub lõigu 181(200), tekib muutuva jõu poolt tehtava töö arvutamisel vajadus uue matemaatilise mõiste - joonintegraali järele. Joonintegraal osutub tõhusaks uurimisabinõuks ka paljude teiste nähtuste puhul mehhanikas, elektromehhaanikas, hüdromehhaanikas, termodünaamikas ja muudes teadustes.

Kõigepealt tuleb endale hästi selgeks teha joonintegraali definitsioon kaare pikkuse järgi [181(200)]. Sellest definitsioonist järeldub, et joonintegraal kaarepikkuse järgi e i s õ l t u integreerimistee suunast, sest kaare pikkust vaadeldakse alati positiivse suurusena.

Edasi tuleb selgeks teha joonintegraali definitsioon koordinaatide järgi [183(202)]. Sellest definitsioonist järeldub, et joonintegraal koordinaatide järgi s õ l t u b integreerimistee suunast, sest $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ (või $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$)

(joon. 55). Kui integreerimistee suunda muuta, siis muutub Δx_i märk vastupidiseks.

Suurt tähelepanu tuleb pühendada tingimustele, mille puhul joonintegraal ei sõltu integreerimistee kujust [185(204), 186 (205)]. Eriti tuleb uurida nimetatud lõikudes käsitletud näidet

$$\int_{x^2+y^2=1} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y}\,dy.$$

VI. READ.

Kolmeteistkümnes teema: Arvread.

Rea koonduvus. Rea summa. Koonduvuseks tarvilik tingimus ja selle tingimuse mittepiisavus Harmooniline rida. Koonduvate ridade liitmine ja arvuga korrutamine. Koonduvuseks piisavad tingimused ja positiivsete liikmetega ridade hajuvus: ridade võrdlemine, D'Alembert'i tunnus, Cauchy integraaltunnus. Vahelduvate märkidega rida. Absoluutne ja tingimisi koonduvus. Absoluutselt koonduvate ridade omadusi: liikmete ümberpaigutamine ja gruppeerimine, ridade korrutamine. Leibnizi tunnus vahelduvate märkidega ridade koonduvuseks, rea jäägi hindamine.

Õppida B I järgi IX peatüki lõigud 123(137) - 126(140) ja ülesannetekogu PR II järgi § 22 „Read" näited I - X ja ülesanded 2413 - 2423, 2426, 2427, 2428, 2430, 2432, 2433, 2435, 2438, 2440, 2443, 2444, 2449, 2451, 2453 - 2457, 2459, 2461.

Read osutuvad matemaatilises analüüsis üheks tähtsamaks vahendiks nii funktsiooni ja integraali ligikaudsel arvutamisel kui ka diferentsiaalvõrrandite lahendamisel. Kuna niisugusteks operatsioonideks sobivad aga ainult koonduvad read, siis osutubki ridade teooria kesksеks probleemiks rea koonduvuse või hajuvuse küsimus.

Tuleb selget vahet teha positiivsete liikmetega rea koonduvuse tarviliku tingimuse $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, kus u_n on rea üldliige, ja piisava tingimuse vahel.

Rea koonduvuse tarvilik tingimus on küllaldase põhjalikkusega käsitletud lõigus 123(137) III, kus on alla kriipsutatud, et iga koonduva rea puhul on koonduvuse tarvilik tingimus rahuldatud; kui aga koonduvuse tarvilik tingimus on täidetud, siis pole rea koonduvus veel tagatud (harmooniline rida). Koonduvuse piisavatest tingimustest on lõigus 124(138) peale ridade võrdlemise, D'Alembert'i ja integraaltunnuse käsitletud veel Cauchy juurtunnust (II), mida ei ole küll programmis otseselt mainitud, kuid mida on mugav kasutada mõningate ülesannete lahendamisel.

Vahelduvate märkidega ridade puhul tuleb erilist tähelepanu pöörata absoluutselt koonduvate ridade ja mitteabsoluutselt ehk tingimisi koonduvate ridade omadustele, mida on käsitletud lõikudes 125(139) ja 126(140).

Neljateistkümnes teema: Astmeread.

Funktsionaalrida ja tema koonduvuspiirkond. Astmeread. Abeli teoreem. Koonduvusvahemik, koonduvusraadius, selle leidmine D'Alembert'i tunnuse abil. Funktsiooni arendamine astmereaks. Funktsiooni Taylori ritta arendamiseks piisavad tingimused. Funktsioonide e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 + x)$, $\arctan x$ ja $(1 + x)^n$ Taylori reaks arendused.

Astmeridade liitmine ja korrutamine. Astmeridade integreerimine ja diferentseerimine.

Õppida B I järgi IX peatüki lõigud 127(141) - 134(148), ülesannetekogu PR II järgi § 22 „Read" näited XI - XVII ja lahendada ülesanded 2479 - 2481, 2484, 2486, 2488, 2490, 2491, 2493, 2495, 2497, 2499 - 2501, 2504 - 2507, 2509, 2511, 2513, 2514, 2516 - 2518. (Vaata käesolevate juhendite viienda teema lõppu.)

Funktsionaalridade puhul on üheks kõige tähtsamaks mõisteks rea ü h t l a s e koonduvuse mõiste, mis on käsitletud lõigus 127(141). Lisaks sealtoodule võiks veel toonitada, et iga koonduva, kuid mitteühtlaselt koonduva rea puhul on vastavalt igale $\varepsilon > 0$ olemas niisugune naturaalarv N, et $|r_N(x)| < \varepsilon$ iga x väärtuse korral, mis kuulub koonduvusvahemikku, ainult et igale x väärtusele vastab erinev N väärtus. Niisiis on arv N mitteühtlase koonduvuse puhul kahe muutuja x ja ε funktsioon, ühtlase koonduvuse puhul aga ainult ühe muutuja ε funktsioon

Kui funktsionaalrea liikmed on mingis vahemikus pidevad ja rida on selles vahemikus ühtlaselt koonduv, siis võib teda nimetatud vahemikus liikmeti integreerida. See tõsiasi võimaldab avaldada üldintegraale, mis pole väljendatavad elementaarfunktsioonides, funktsionaalridadena (ülesanded 2516 - 2518).

Funktsionaalridadest on eriti suure praktilise väärtusega astmeread, millele tuleb selletõttu väga suurt tähelepanu pöörata ja mis on õpikus [129(143) - 134(148)] küllaldase selgusega käsitletud.

Viieteistkümnes teema: Komplekslilkmetega arv- ja astmeread.

Komplekslilkmetega arvread. Rea summa ja koonduvus. Astmerida, tema koonduvusraadius ja -ring. Eksponentfunktsioonide ja trigonomeetriliste funktsioonide defineerimine kompleksmuutuja puhul astmeridade abil. Euleri valem.

Õppida BI IX peatüki lõigud 135(150) koos seal toodud näidetega.

Paljude praktiliste küsimuste lahendamisel osutub kompleksmuutuja funktsioonide kasutamine otstarbekohaseks. Selletõttu ongi programmi võetud komplekslilkmetega arv- ja astmeread. Üliõpilane peab tutvuma eksponentfunktsiooni ja trigonomeetriliste funktsioonide vaheliste seostega.

Neist kõige olulisem on Euleri valem

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Lisaks õpikus toodud näidetele lahendame veel kaks ülesannet:

Ülesanne 1. Leida $\mathrm{Ln}(-1)$.

Lahendus: Euleri valemi põhjal on $-1 = e^{(2k\pi+\pi)i}$, kus k on meelevaldne täisarv. Järelikult

$$\mathrm{Ln}\,(-1) = (2k\pi + \pi)\,i = (2k+1)\pi i.$$

Ülesanne 2. Avaldada Arc tan x logaritmfunktsiooni kaudu.

Lahendus. Tähistame Arc tan x = z, siis

$$\tan z = x \quad \text{ehk} \quad \frac{\sin z}{\cos z} = x.$$

Et

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{ja} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

siis
$$x = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})},$$
millest
$$e^{2iz} = \frac{1 + xi}{1 - xi}.$$
Logaritmides saame:
$$z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + xi}{1 - xi}.$$
Seega
$$\operatorname{Arc tan} x = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + xi}{1 - xi}.$$

VII. DIFERENTSIAALVÕRRANDID.

Kuueteistkümnes teema: Esimest järku diferentsiaalvõrrandid.

Geomeetrilise ja füüsikalise sisuga ülesandeid, mille lahendamine toimub diferentsiaalvõrrandite abil. Harilikud diferentsiaalvõrrandid, diferentsiaalvõrrandi järk. Diferentsiaalvõrrandi lahend ja integraalkõverad. Esimest järku diferentsiaalvõrrand, sihiväli, isokliinid. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja ainsus. Cauchy ülesanne. Üld- ja erilahendid. Eralduvate muutujatega, homogeensed, lineaarsed ja eksaktsed (ehk täisdiferentsiaalides) diferentsiaalvõrrandid.

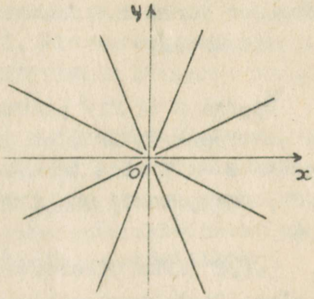
Euleri meetod esimest järku diferentsiaalvõrrandi ligikaudseks lahendamiseks.

Õppida B II XIV peatüki lõigud 192(217) - 194(219) (ära jätta viimane näide: Bernoulli' võrrand), 195(220, 221) I, 196(222) (III ja IV pole vaja õppida), ülesannetekogust PR II § 17 „Esimest järku diferentsiaalvõrrandid" näited I - VII, IX ja lahendada ülesanded 1875 - 1877, 1882, 1883, 1885, 1887, 1895, 1899, 1900, 1903, 1906, 1909, 1911, 1913, 1915, 1917, 1920, 1921, 1923, 1925, 1927, 1929, 1934, 1936, 1939, 1941, 1942, 1944, 1946 - 1949, 1960, 1961, 1963, 1965, 1970, 1972, 1973, 2043 - 2046.

Kõigepealt peab üliõpilane endale selgeks tegema mõisted diferentsiaalvõrrandi järk, aste, üldlahend ja erilahend.

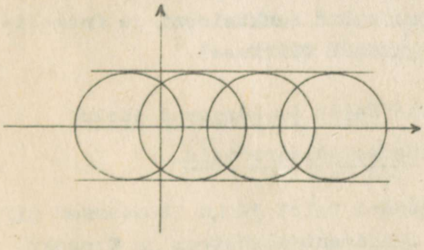
Peab silmas pidama, et esimest järku diferentsiaalvõrrandi puhul võib leiduda punkte, mida ei läbi antud võrrandi ükski integraalkõver, samuti aga võib leiduda punkte, mida läbivad mitu või koguni lõpmata palju integraalkõveraid.

Näide 1. Diferentsiaalvõrrandist $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ on näha, et otsitava funktsiooni tuletis pole määratud üheski punktis, kus argument on null. Et antud võrrandi üldlahend on $y = cx$, siis on integraalkõverateks punkti (0;0) läbivad sirged, välja arvatud sirge $x = 0$. Seega läbib koordinaattasapinna iga punkti, kus $x \neq 0$ üks ja ainult üks integraalkõver, punkti ($x = 0$; $y \neq 0$) ei läbi ükski integraalkõver punkti (0;0) aga kõik, s.o. lõpmata palju integraalkõveraid (joon 14).



joon. 14

Näide 2. Nagu kergesti veenduda võib, on diferentsiaalvõrrandi $y^2(1 + y'^2) = a^2$ $(a > 0)$ üldlahend $(x - c)^2 + y^2 = a^2$ ja iseärane lahend, s.o. lahend, mis pole tuletatav üldlahendist, $y = \pm a$.


joon. 15

Seega on integraalkõverateks võrdsete raadiustega ringid, mille keskpunktid asetsevad x-teljel, ja kaks x-teljega sümmeetrilist sirget, mis on üldlahendiga antud ringjoonte puutujateks (joon. 15). Kuna üldlahendist $c = x \pm \sqrt{a^2 - y^2}$, siis läbib iga punkti, kus $-a < y < a$, kaks integraalringjoont, iga punkti, kus $y = \pm a$, läbib üks ringjoon ja üks sirge ning punkte, kus $y > a$ või $y < -a$, ei läbi ükski integraalkõver. Seega asetsevad kõik integraalkõverad ribas, mis on piiratud sirgetega $y = a$ ja $y = -a$.

Ühte antud punkti läbiva integraalkõvera leidmist ehk diferentsiaalvõrrandi erilahendi leidmist vastavalt antud algtingimustele nimetatakse Cauchy ülesandeks.

Seitsmeteistkümnes teema: Teist ja kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid.

Teist järku diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja ainsus. Cauchy ülesanne. Üld- ja erilahendid. Mõnede teist järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine järgu alandamise võttega. Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine mõningatel erijuhtumitel.

Õppida B II XIV peatüki lõigud 199(226) - 200(227), ülesannetekogust PR II § 18 „Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid" näited I - IV ning lahendada ülesanded 2066, 2068 - 2071, 2073, 2075, 2077, 2079, 2081, 2083, 2084, 2086, 2088, 2089, 2091, 2092.

Teist järku diferentsiaalvõrrandi üldlahend sisaldab kaks meelevaldset konstanti, seega esitab üldlahend kaheparameetrilist joonte parve. Ühe kindla integraalkõvera leidmiseks peab olema algtingimustena antud üks punkt, mida integraakõver peab läbima ja joone siht ehk puutuja tõus selles punktis, s.o. erilahendi leidmiseks peab olema antud funktsiooni ja funktsiooni tuletise väärtus antud argumendi väärtusel.

Kaheksateistkümnes teema: Teist ja kõrgemat järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid.

Homogeensed ja mittehomogeensed teist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid. Lahendite fundamentaalsüsteem ja Wronsky determinant. Homogeense ja mittehomogeense võrrandi üldlahendi struktuur. Teist järku lineaarsed konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandid. Karakteristlik võrrand. Homogeense võrrandi üldlahend .juhtumitel, kui karakteristliku võrrandi lahendid on 1) reaalsed ja erinevad, 2) reaalsed, kuid kordsed, 3) kompleksed. Mittehomogeense võrrandi erilahend spetsiaalsete vabaliikmete puhul. Rakendusi lihtsamate võnkumiste ja resonantsi uurimisel.

Teooria üldistamine kõrgemat järku võrrandite jaoks.

Läbi töötada õpikust B II XIV peatüki lõigud 202(230) - 205(333), 207(235), ülesannetekogust PR II § 18 „Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid" näited V - XI ja lahendada ülesanded 2094, 2096, 2100, 2102, 2103, 2106, 2108, 2109, 2110, 2113, 2115, 2116, 2117, 2119, 2120, 2122, 2123, 2125, 2127, 2142, 2144, 2148, 2150, 2151, 2153 - 2155, 2160, 2162.

Teist ja kõrgemat järku lineaarsete diferentsiaalvõrrandite üldlahendi leidmisel on oluline tähtsus l i n e a a r s e l t s õ l t u m a t u t e l erilahenditel. Lineaarselt sõltumatuid erilahendeid on küllalt põhjalikult käsitletud lõikudes 202(230) ja 203(231).

Üks tähtsamaid liike lineaarsetest diferentsiaalvõrranditest on konstantsete kordajatega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid, mis on käsitletud lõigus 204(232). Mittehomogeensest lineaarsest konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandist on lõigus 205(233) käsitletud kahte tüüpi: 1) vabaliikmega $P(x)e^{dx}$ ja 2) vabaliikmega $e^{\alpha x}[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x]$. Erijuhtumite kohta, kus $\alpha = 0$, on toodud õpikus näiteid, mis tuleb hoolega läbi lahendada.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, программа и методические указания.

Сост. Х. Роос

На эстонском языке

Таллинский Политехнический Институт. Таллин, ул. Калинина д. IOI.

TPI rotaprint 1961. Trükipoognaid 2,25.

Tiraaž 1100. Tell. nr. 89

Tasuta