



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

J. PIIR

**MATEMAATILISE
FÜÜSIKA
MEETODID**

I

VARIATSIOONARVUTUS

TARTU 1966

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

TEOREETILISE FÜÜSIKA KATEEDER

J. PIIR

**MATEMAATILISE
FÜÜSIKA
MEETODID**

I

VARIATSIOONARVUTUS

TARTU 1966

E e s s ö n a .

Matemaatilise füüsika meetodite kursus on füüsikute õppeplaanis ühenduslülilik kõrgema matemaatika ja teoreetilise füüsika distsipliinide vahel. Selle kursuse üksikud osad on väljaarenenud ja laiaulatuslikud matemaatilised distsipliinid, nagu näiteks kompleksmuutuja funktsioonide teooria, variatsioonarvutus, osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teooria jne. On selge, et kahesemestrilise kursuse jooksul ei saa nende distsipliinide käsitus olla täielik, vaid on paratamatult valikuline. Seejuures pole alati võimalik taotleda tänapäeva matemaatikale iseloomulikku rangu, vaid on otstarbekam ka matemaatilisi mõisteid ja meetodeid käsitleda peamiselt selles plaanis, milles neid hiljem füüsika kursustes rakendatakse. Seda laadi eesmärki silmas pidades on kirjutatud ka käesolev, variatsioonarvutusele pühendatud vihik. Nii teoreetilise aine kui ka harjutusmaterjali esitamisel ja valikul on püütud silmas pidada eelkõige variatsioonarvutuse rakendusvõimalusi mitmesugustel füüsika aladel.

Oma ulatuselt ületab konspekt mõnevõrra programmi nõudeid. Kõigepealt on püütud lugejale refereerivas ja kohati retsepti laadis tutvustada ka funktsionaali ekstreemumite piisavaid tingimusi (§ 4), et ta oleks suuteline ilma täiendava kirjanduse uurimiseta lahendama iseseisvalt lihtsamaid sellealaseid praktilisi ülesandeid. § 6 on aga pühendatud füüsika ja eriti väljateooria variatsioonprintsipidele ja jäävuse seadustele. See materjal on obligatoorne eelkõige teoreetilise füüsika erialale spetsialiseerujatele.

Suurt tähelepanu on konspektis pööratud harjutusmaterjalile (ligi veerand kogu mahust), kuna ilma praktiliste töödeta pole mõeldav selliste kursuste põhjalik omandamine. Ülesanded on põhiliselt kolme liiki. Kõigepealt on siin toodud mõningaid täiendavaid küsimusi ja konkreetseid näiteid teoreetilise materjali juurde. Kõige suurema osa moodustavad vahest puhtarvutuslikud ülesanded, mis on mõeldud teoreetilise põhimaterjali kinnitamiseks ja üliõpilaste arvutusoskuse täiendamiseks või vähemalt selle hoidmiseks juba omandatud tasemel. Osa ülesandeid on aga tõsisema füüsikalise sisuga ja nõuavad mõningat süvenemist füüsika vastavatesse probleemidesse.

§ 1. SISSEJUHATUS. LIHTSAMAD VARIATSIONÜLESANDED.

1. Funktsionaali mõiste. Näiteid variatsioonülesannetest.

Funktsiooni mõiste ei ole küllaldane paljude reaalses esinevate sõltuvuste ja vastavuste kirjeldamiseks. Üheks võimalikuks funktsiooni mõiste üldistuseks on funktsionaali mõiste. Vajadus selliseks üldistamiseks tekib juba klassikalises matemaatikas (näiteks matemaatilises analüüsis geometrias) ja see leiab laialdast rakendamist nii mehhaanikas, optikas kui ka teistes füüsika distsipliinides. Vaatleme kõigepealt paari konkreetset näidet, mis aitavad selgitada nii funktsionaali mõistet kui ka variatsiooniarvutuse probleematikat üldse.

Kogu geomeetrilise optika aluseks on nn. Fermat' printsiip (1662), mille kohaselt valgussignaal valib ühest punktist (A) teise (B) jõudmiseks sellise trajektoori, mida mööda liikudes ta läbib nende punktide vahelise ala kõige kergemini, s. o. kõige lühema aja jooksul. Vaatame, kuidas tuleks seda printsiipi matemaatiliselt formuleerida. Peale valguskiire alg- ja lõpp-punktide $A = (x_0, y_0, z_0)$ ja

$B = (x_1, y_1, z_1)$ peab olema veel teada keskkonna murdumisnäitaja n ruumpunktide $P = (x, y, z)$ funktsioonina:

$$n = n(P) = n(x, y, z).$$

Olgu nüüd γ meelevaldne tükati sile kõver, mis ühendab punkte A ja B . Mõõda seda kõverat liikudes jõuaks valgussignaali punktist A punkti B aja $T = T[\gamma]$ jooksul:

$$\begin{aligned} T[\gamma] &= \int_A^B \frac{ds}{v(x, y, z)} = \\ &= \frac{1}{c} \int_A^B n(x, y, z) ds = \frac{1}{c} \int_A^B n(P) ds(P). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Fikseeritud otspunktide korral sõltub integraal $T[\gamma]$ ilmselt kõvera γ kujust, me ütleme, et ta on funktsionaal kõverast γ . Kõvera γ analüütiliseks määramiseks on mitmeid võimalusi. Näiteks võib selleks kasutada kahte funktsiooni $y = y(x)$ ja $z = z(x)$, mis rahuldavad rajatingimusi:

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0; \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1 \quad (1.2)$$

ja mis määravad ruumilise kõvera projektsioonid vastavalt xy - ja xz -tasandile. Järelikult võiksime anda funktsionaali (1.1) ka selliselt:

$$T[\gamma] = T[y(x), z(x)] = \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x_1} n(x, y(x), z(x)) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx. \quad (1.1')$$

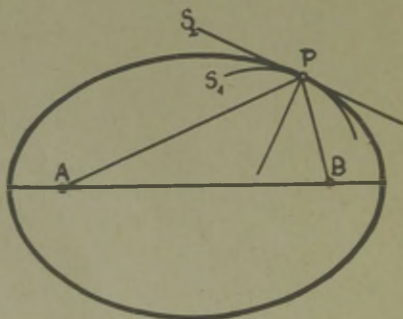
Uues esituses (1.1') on aeg $T[\gamma]$ määratud kahe pideva funktsiooniga $y(x)$ ja $z(x)$ (lõigul $[x_0, x_1]$ määratud igale pidevate funktsioonide paarile vastab kindel aja väärtus $T[y, z]$). Niisuguseid muutuvaid suurusi, mille arvulised väärtused sõl-

tuvad ühe või mitme funktsiooni valikust, nimetamegi funktsionaalideks. Kuna funktsioonidele ja nende süsteemidele saame vastavusse seada kindlad geomeetrilised objektid: jooned tasandil või ruumis, pinnad (või hüperpinnad) ruumis (n -mõõtmelises ruumis), siis räägitakse sageli, et ka funktsionaal on määratud teatud liiki geomeetrilistel objektidel: joontel, pindadel või hüperpindadel (vt. (1.1)).

Valguskiire kuju leidmiseks tuleb vastavalt Fermat' printsiibile määrata selline punkte A ja B ühendav tükati sile kõver, mille korral integraal (1.1) omandab minimaalse väärtuse. Või teisiti öeldes: lõigul $[x_0, x_1]$ tuleb pidevate funktsiooni paaride seast, mis rahuldavad lisatingimusi (1.2), valida selline funktsioonide paar, mille korral integraal (1.1') omandab minimaalse väärtuse. Lähem analüüs näitab, et on võimalikud ka juhud, kus valgussignaali levimisaeg on statsionaarne või koguni maksimaalne. Näiteks elliptilise peegli (peegli pind - pöördellipsoid) korral on aeg, mis kulub valgussignaali jõudmiseks ühekordse peegeldusega ühelt fookuselt teisele, kõigi üks kord peegeldunud kiirte jaoks ühesugune ($T[\gamma]$ on statsionaarne), kui aga asendada peegelduspunktis P pöördpeegli moodustaja (ellips) suurema kõverusega, kuid ühist puutujat omava joonega, siis on sellise peegli S_1 korral tegeliku valguskiire jaoks signaali leviku aeg koguni maksimaalne (puutetasandi S_2 korral aga ikka endiselt minimaalne (vt. joon. 1). Järelikult tuleks Fermat' printsiipi sõnastada veidi üldisemalt: valgussignaali liigub punktist A punkti B sellist trajektoori

mööda, mille korral signaali levimisaeg on kas minimaalne või maksimaalne või statsionaarne. Seejuures on põhilise tähtsusega siiski ekstremaalse levimisajaga juhud. Niisuguseid ülesandeid, kus tuleb leida funktsionaali ekstreemumkohad, nimetataksegi variatsioonülesanneteks.

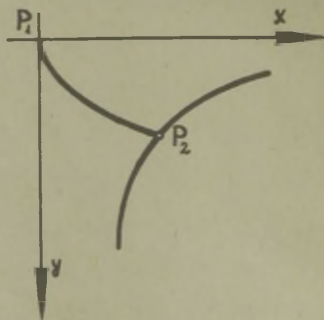
Teise näitena variatsioonülesannete kohta vaatleme nn. brahhiostrookrooniülesannet



Joon. 1.

(βραχίστοσ - lühim,

χρόνος - aeg). See ülesanne, mille formuleeris 1696. a. Johan Bernoulli ja mis ilmus sama aasta juunis Leipzigi teaduslikus ajakirjas "Acta Eruditorum", mängis suurt osa variatsioonarvutuse tekke- ja arenguloos. Vertikaaltasandil on antud kaks punkti P_1 ja P_2 . Määrata joon, mida mööda oma raskusjõu mõjul hõõrdumisvabalt libisev masspunkt jõuaks punktist P_1 punkti P_2 lühima aja jooksul (vt. joon. 2). (Punktis P_1 on masspunkt alghetkel paigal.) Ülesande lahendamiseks jättis J. Bernoulli täht-



Joon. 2.

aja pool aastat, kuid selle aja jooksul saatis lahenduse ainult G.W. Leibnitz, neljakuulise pikendusaja jooksul saatsid lahendused veel tema vend Jacob Bernoulli, I. Newton ja de l'Hospitale.

Sellest peale algab õige hoogne variatsioonarvutuse areng: töötatakse välja üldised meetodid variatsioonarvutuse ekstreemumprobleemide lahendamiseks ning neid hakatakse laialt kasutama eriti mehhaanikas ja hiljem ka teistes füüsika distsipliinides. Termin "funktsionaal" võttis esimesena kasutusele 1903. a. J.S. Hadamard. Vaatamata võrdlemisi pikale arengujale ei ole funktsionaalide arvutuses veel olemas klassikalise analüüsi taoliselt läbitöötatud üldisi meetodeid. Hästi läbi töötatud on põhiliselt variatsioonarvutus kitsamas mõttes, s. t. funktsionaalide ekstreemumprobleemide lahendusmetoodika.

Nagu toodud näidetest näha, on funktsionaali mõiste õige analoogiline funktsiooni mõistega. Kui näiteks ühe muutuja funktsioon korraldab vastavuse reaalarvude vahel, n -muutuja funktsioon n -mõõtmelise ruumpunktide ja reaalarvude vahel, kompleksmuutuja funktsioon kompleksarvude vahel, siis funktsionaal $J[y(x)]$ seab igale teatud kindlate omadustega funktsioonile vastavusse kindla reaalarvu. Piltlikult öeldes on funktsionaal funktsioon funktsioonist (mitte ära vahetada liitfunktsiooniga). Kaasaegne funktsionaalanalüüs tegeleb funktsionaalist veel üldisemate mõistete - operaatoritega, mis korraldavad vastavusi meelevaldsetest objektidest koosnevate hulkade vahel.

2. Funktsiooniruum.

n -muutuja funktsioonide uurimisel on väga hea kasutada geomeetrilist interpretatsiooni, mille puhul argumendi väärtuste igale võimalikule kombinatsioonile vastandatakse punkt n -mõõtmelises ruumis. Samasugune geomeetiline interpretatsioon on kasulik ka funktsionaalide uurimisel, kuna see võimaldab kergesti üldistada mõningaid tavalise analüüsi operatsioonide funktsionaalide juhule. Funktsionaali vaatleme sellises tõlgenduses funktsioonina, mis on defineeritud mingis funktsiooniruumis või selle piirkonnas, funktsiooniruumi punkti määrab aga iga antud funktsionaali argumendiks kohane funktsioon. Ometi on siin võrreldes mitme muutuja funktsioonide juhuga õige oluline erinevus. Kui kõiki n -muutuja funktsioonide võime nende geomeetrilises interpretatsioonis uurida ükskõik millise konkreetse n -dimensionaalse ruumi baasil (harilikult on selliseks ruumiks lihtsaim - n -mõõtmeline eukleidiiline ruum), siis kõigi mõeldavate funktsionaalide jaoks ei ole olemas ühist universaalset funktsiooniruumi. Konkreetsele funktsionaalile vastav funktsiooniruum tuleb valida sõltuvalt funktsionaali enese omadustest ja iseloomust. Näiteks, kui on vaatluse all funktsionaal $J[y] = \int_a^b \mathcal{F}(x, y, y') dx$, siis on seda loomulik vaadelda kõigi lõigul (a, b) defineeritud ja pideva I järku tuletisega funktsioonide ruumis; funktsionaali $J[y] = \int_a^b \mathcal{F}(x, y, y', y'') dx$ korral peab lõigul (a, b) defineeritud funktsioonidel olema ka pidev II järku tuletis.

Ekstreemumiprobleemide uurimisel funktsioonide vallas on

oluline tuletise mõiste, viimane omakorda tugineb piirväärtuse ja pidevuse mõistetele. Seejuures põhineb piirväärtuse mõiste ruumpunktidevahelise kauguse mõistele. Näiteks arvutada $\{ \xi_n \}$ piirväärtus ξ_0 defineeritaksegi tingimusega, et iga etteantud kuitahes väikese $\varepsilon > 0$ korral leidub selline arv $N(\varepsilon)$, nii et $|\xi_n - \xi_0| < \varepsilon$, kui vaid $n > N(\varepsilon)$. Absoluutväärtus $|\xi_n - \xi_0|$ aga kujutabki reaalarvude geomeetriselises interpretatsioonis arvsirge punktidevahelist kaugust. Ka piirväärtuse omaduste tõestamisel ei kasutata tehteid jada $\{ \xi_n \}$ elementideks olevate arvudega, vaid ainult nende vahede absoluutväärtustega, s. o. kaugustega. Piirväärtuse mõiste ülekandmiseks funktsionaalide valda on tarvis tuua sisse funktsiooniruumis kaugusele analoogiline mõiste, mida nimetatakse normiks. Normi mõiste me toome sisse esialgu võimalikult üldiselt, s. t. formuleerime esialgu lineaarse normeeritud ruumi mõiste. Lineaarseks ruumiks nimetame meelevaldsete elementide x , y , z , ... , mida nimetame punktideks, kogumit R , kus on defineeritud liitmise operatsioon ja korrutamine arvuga, nii et:

$$1) x + y = y + x,$$

$$2) (x + y) + z = x + (y + z),$$

3) leidub nullelement, s. t. element 0 , mille korral $x + 0 = x$ iga $x \in R$ korral;

4) iga x korral leidub vastandelement $-x \in R$, nii et $x + (-x) = 0$,

$$5) 1 \cdot x = x \text{ iga } x \in R \text{ korral,}$$

$$6) \alpha (\beta x) = \alpha \beta x, (\alpha, \beta - \text{suvalised arvud}),$$

$$7) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$8) \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y.$$

Lineaarset ruumi loeme normeeritaks, kui igale elemendile x leidub vastav mittenegatiivne arv $\|x\|$, mida nimetatakse elemendi x normiks, nii, et

$$1) \|x\| = 0 \text{ vaid siis, kui } x = 0,$$

$$2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$3) \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Lineaarses normeeritud ruumis võime kõnelda ka kahe punkti vahelisest kaugusest, mõistes selle all normi elementide vahest $\|x-y\|$.

Variatsioonarvutuses on olulisemad järgmised lineaarsed ruumid:

1) Ruum C , mis koosneb kõigist lõigul $[a, b]$ pidevatest funktsioonidest, kus elementide liitmise ja arvuga korrutamise all mõeldakse tavalist funktsioonide liitmist ja arvuga korrutamist, * norm aga määratakse funktsiooni mooduli maksimaalse väärtusega:

$$\|y\| = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|.$$

Järelikult on ruumis C funktsioon $y(x)$ funktsiooni $y_0(x)$ ε -naabruses, kui tema graafik asub kõverat $y_0(x)$ ümbritse-

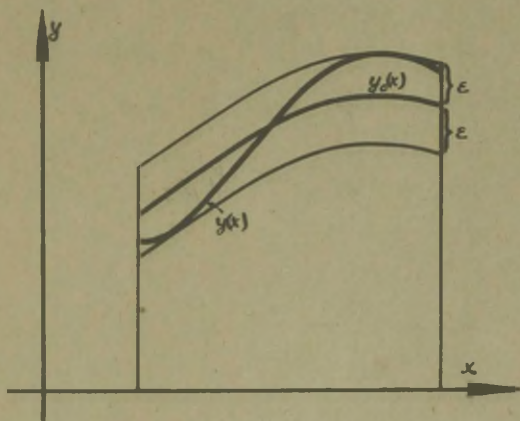
* Sageli nimetatakse lineaarset ruumi, mille mistahes elemendi x norm on mittenegatiivne, ka eukleidiliseks ruumiks. On võimalik vaadelda ka nn. pseudoekleidilisi ruume, mille elementide norm võib olla nii negatiivne kui ka positiivne.

** Õeldu on liitmise ja arvuga korrutamise kohta kehtiv ka teiste ruumide D , D_n ja C_n korral.

vas ribas, mille laius mööda vertikaali on 2ε (vt. joon.3).

2) Ruum C_n koosneb lõigul $[a, b]$ koos oma 1, 2, ..., n-järku tuletistega pidevatest funktsioonidest. Norm defineeritakse samuti nagu funktsiooniruumis C_1 , s. t. seosega

$$\|y\| = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|.$$



Joon. 3.

3) Ruum D_1 , mis koosneb lõigul $[a, b]$ koos oma esimese tuletisega pidevatest funktsioonidest. Norm defineeritakse seosega:

$$\|y(x)\|_1 = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y'(x)|.$$

4) Ruum D_n . See koosneb lõigul $[a, b]$ koos oma 1, 2, ..., n-järku tuletistega pidevatest funktsioonidest, mille norm defineeritakse valemiga

$$\|y(x)\|_n = \sum_{k=0}^n \max_{a \leq x \leq b} |y^{(k)}(x)|.$$

Analoogiliselt võib tuua sisse ka mitme muutuja funktsiooniruumid.

3. Funktsionaali pidevus.

Me nimetame funktsionaali $J[y]$ pidevaks punktis $y_0 \in R$, kui iga $\varepsilon > 0$ korral on olemas selline $\delta > 0$, nii et $|J[y] - J[y_0]| < \varepsilon$, kui vaid $\|y - y_0\|_R < \delta$.

Esimesel pilgul näib, et funktsionaalide uurimisel ja variatsioonülesannete lahendamisel eriti võib piirduda ruumiga C_1 (või isegi ruumiga C) kui üldisemaga kõigest loetletud ruumidest. Kuid juba lihtsaim funktsionaal $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ on pidev vaid siis, kui naabrust mõista ruumi D_1 mõttes, kuid on katkev funktsiooniruumis C_1 . Lihtsaks illustratsiooniks öeldule on joone pikkus $\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$. Alati leidub antud joone $y_0(x)$ ε -naabruses ($\|y - y_0\| < \varepsilon$) selline joon $y(x)$, mille pikkus on näiteks 10 korda suurem joone $y_0(x)$ pikkusest. See aga tähendabki, et funktsionaal ei ole pidev. Variatsioonarvutuses tuleb aga alati valida funktsiooniruum R nii, et meid huvitav funktsionaal oleks pidev.

Lõpuks märgime veel, et paljude variatsioonülesannete korral vaadeldakse funktsionaali mitte tervel funktsiooniruumil, vaid nendel funktsioonidel, mis rahuldavad teatud lisatingimusi (näiteks läbivad antud punkte).

4. Funktsionaali diferentsiaal ehk variatsioon.

Me nimetame funktsionaali $J[y]$ diferentsiaaliks ehk variatsiooniks δJ tema juurdekasvu $\Delta J = J[y+h] - J[y]$ lineaarset peosa. Niisiis on variatsioon δJ lineaarne funktsionaal, mis erineb juurdekasvust ΔJ argumenti juurdekasvu h suhtes teist või kõrgemat järku väikese suuruse võrra:

$$\Delta J[h] = \delta J[h] + A[h] \|h\|, \quad (1.3)$$

kus $A[h] \rightarrow 0$, kui $\|h\| \rightarrow 0$.

Funktsionaali $L[y]$ me nimetame aga lineaarseks, kui ta on:

- 1) pidev,
- 2) igasuguste funktsioonide h_1 ja $h_2 \in R$ korral kehtib seos $L[h_1 + h_2] = L[h_1] + L[h_2]$ ja
- 3) iga $h \in R$ korral $L[\alpha h] = \alpha L[h]$ (α - meelevaldne arv).

Lineaarsed on näiteks funktsionaalid $\int_a^b a(x) h(x) dx$,
 $\int_a^b a(x) h(x) dx$ ($a(x)$ - fikseeritud funktsioon).

Kui funktsionaali variatsioon on olemas, siis ta on määratud üheselt. Õeldus veendumiseks peame eelkõige silmas, et kui $L[h]$ on lineaarne funktsionaal ja $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{L[h]}{\|h\|} \rightarrow 0$, siis $L[h] \equiv 0$. * Oletame, et funktsionaali variatsioon ei

* Seda on kerge põhjendada väitevastaselt. Olgu näiteks $L[h_0] = \lambda \neq 0$, siis võttes $h_n = \frac{h_0}{n}$, saame $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L[h_n]}{\|h_n\|} = \frac{\lambda}{\|h_0\|} \neq 0$.

ole üheselt määratud, s. t.

$$\Delta J[h] = \varphi_1[h] + A_1[h] \|h\|$$

ja

$$\Delta J[h] = \varphi_2[h] + A_2[h] \|h\|,$$

kus $\varphi_1[h]$ ja $\varphi_2[h]$ on kaks lineaarset funktsionaali ning

$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} A_1[h] = 0$ ja $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} A_2[h] = 0$. Seega

$$\varphi_1[h] - \varphi_2[h] = (A_2[h] - A_1[h]) \|h\|$$

on h suhtes vähemalt teist järku väike. Kuna $\varphi_1[h] - \varphi_2[h]$ on ka lineaarne funktsionaal, mille korral $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\varphi_1[h] - \varphi_2[h]}{\|h\|} =$

$$= \lim_{\|h\| \rightarrow 0} (A_2[h] - A_1[h]) = 0, \text{ siis peab ta olema}$$

identselt null.

5. Funktsionaali ekstreemumi tarvilikud tingimused.

Meenutame kõigepealt n -muutuja funktsiooni ekstreemumkoha definitsiooni. Me ütleme, et n -muutuja funktsioonile $F(P)$ on punkt $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ekstreemumkohaks, kui leidub punkti P_0 selline ümbrus σ , milles $\Delta F = F(P) - F(P_0)$ ($P \in \sigma$) säilitab märki. Kui $\Delta F \geq 0$, siis on tegemist miinimumiga, kui $\Delta F \leq 0$, siis maksimumiga.

See definitsioon on rakendatav ka funktsionaalidele, kusjuures eristatakse tugevat ja nõrka ekstreemumit. Nõrga ekstreemumi korral säilitab $\Delta J = J[y] - J[y_0]$ märki, kui lubatud funktsioon $y(x)$ asub $y_0(x)$ ε -naabruses ruumi D_1 normi mõttes, s. t. $\|y - y_0\|_1 < \varepsilon$. Tugeva ekstreemumi kor-

ral säilitab ΔJ märki kõigi funktsioonide $y(x)$ korral, mis asuvad funktsiooni $y_0(x)$ mõnes ε -naabruses ruumi C normi mõttes, s. t. $\|y - y_0\| < \varepsilon$.

On selge, et iga tugev ekstreemum on samal ajal ka nõrgaks ekstreemumiks. Tõepoolest, kui $\|y - y_0\|_1 < \varepsilon$, siis on ammugi rahuldatud ka tingimus $\|y - y_0\| < \varepsilon$. Kui aga nüüd ΔJ säilitab märki kõigi nende funktsioonide korral, mis rahuldavad avaramat tingimust $\|y - y_0\| < \varepsilon$, siis ΔJ säilitab märki ka nende funktsioonide $y(x)$ korral, mis rahuldavad kitsamat tingimust $\|y - y_0\|_1 < \varepsilon$. Tuleb märkida, et nõrga ekstreemumi leidmine on tunduvalt lihtsam tugeva ekstreemumi leidmisest. See on seotud sellega, et enamik variatsiooniarvutuses kasutatavaid funktsionaale on pidevad ruumis D_1 (vt. 3), samal ajal aga ei ole need funktsionaalid enam üldiselt pidevad ruumis C .

Teoreem. Selleks, et funktsionaalil $J[y]$ oleks kohal $y = y_0$ ekstreemum, on tarvis, et ta variatsioon, (kui see on olemas) saaks nulliks kohal $y = y_0$, s. t.:

$$\delta J \Big|_{y=y_0} = 0.$$

Tõestuseks vaatleme konkreetset miinimumi juhtu. Vastavalt miinimumi definitsioonile

$$J[y_0 + h] - J[y_0] \geq 0,$$

kui $\|h\|_1$ on küllalt väike. Variatsiooni definitsiooni kohaselt aga

$$\Delta J = J[y_0 + h] - J[y_0] = \delta J[h] + A[h] \|h\|,$$

kus $A[h] \rightarrow 0$, kui $\|h\| \rightarrow 0$. Kui $\delta J[h] \neq 0$, siis küllalt väikese h korral määraks vahe ΔJ märgi esimese liik-

me, (s. o. pealiikme) märk. Teiselt poolt aga teame, et δJ on lineaarne funktsionaal ja sellepärast

$$\delta J[-h] = -\delta J[h],$$

järelikult võib juhusl $\delta J[h] \neq 0$ olla vahe ΔJ nii positiivne kui ka negatiivne, s. t. funktsionaalil ei saa siis olla ekstreemumit.

Matemaatilise analüüsi kursusest tunneme lisaks ekstreemumi olemasolu tarvilikule tingimusele ka veel piisavat tingimust, mis on seotud funktsiooni teise diferentsiaali märgiga. Analooilise probleemi käsitus funktsionaalide valdas on aga tunduvalt komplitseeritum.

6. Variatsioonarvutuse põhilemma.

Vaatleme lineaarset funktsionaali

$$L[h] = \int_a^b f(x) h(x) dx, \quad (1.4)$$

kus $f(x)$ on lõigul $[a, b]$ pidev funktsioon. Variatsioonarvutuse põhilemma väidab, et kui funktsionaal (1.4) on nulliga funktsiooni $h(x)$ korral, mis on lõigul $[a, b]$ pidev koos oma esimese tuletisega ja rahuldab ääretingimusi $h(a) = h(b) = 0$, siis on funktsioon $f(x)$ identselt null lõigul $[a, b]$.

Tõestuseks oletame väitevastaselt, et lõigul (a, b) leidub punkt $x = c$ nii, et $f(c) \neq 0$ ($a < c < b$). Konkreetsuse mõttes olgu $f(c) > 0$. Funktsiooni $f(x)$ pidevuse tõttu leidub lõigul $[a, b]$ niisugune punkti c ümbrus $[\xi_1, \xi_2]$, kus $f(x) > 0$. Valime nüüd funktsiooni $h(x)$ järgmiselt

$$h(x) = \begin{cases} 0, & a < x < \xi_1, \\ (\xi_2 - x)^2 (x - \xi_1)^2, & \xi_1 < x < \xi_2, \\ 0, & \xi_2 < x < b. \end{cases}$$

On kerge veenduda, et selline funktsioon on pidev koos oma esimese tuletisega ja rahuldab seega lemma tingimusi.

Funktsionaali $L[h]$ jaoks saame aga:

$$L[h] = \int_a^b f(x) h(x) dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x) (\xi_2 - x)^2 (x - \xi_1)^2 dx > 0.$$

Saadud järeldus on vastuolus lemma tingimustega ja seega meie väitevastane oletus ei saa olla õige.

Variatsiooniarvutuse põhilemmat on võimalik üldistada kahes suunas: 1) võime kitsendada funktsioonide $h(x)$ hulka, nõudes funktsiooni $h(x)$ ja tema tuletiste pidevust kuni järguni $n \geq 2$ (tõestada iseseisvalt!), 2) võime üle minna ka kordsetele integraalidele (mitme muutuja funktsioonide juht).

Nii näiteks tuleks kahekordsete integraalide korral see lemma sõnastada järgmiselt: kui integraal (lineaarne funktsionaal)

$$L[h(x,y)] \equiv \iint_D f(x,y) h(x,y) dx dy,$$

kus $f(x,y)$ on piirkonnas D pidev funktsioon, saab nulliks iga funktsiooni $h(x,y)$ korral, mis on piirkonnas D pidev koos oma esimest järku osatuletistega ja piirkonna rajajoonel γ on null ($f(x,y)|_{\gamma} = 0$), siis peab funktsioon $f(x,y)$ olema identselt null kogu piirkonnas D .

Tõestuseks oletame, et $f(\xi, \eta) > 0$. Siis peab leiduma

niisugune punkti (ξ, η) naabrus (väike ring C_ρ raadiusega ρ ja keskpunktiga punktis (ξ, η)), milles pidevuse tõttu on samuti $f(x, y) > 0$. Lemma tingimus $L[k] \equiv 0$ pole nüüd aga täidetud, kui valime funktsiooni $k(x, y)$ järgmiselt:

$$k(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{väljaspool ringi } C_\rho, \\ [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - \rho^2]^2, & \text{ringis } C_\rho. \end{cases}$$

7. Lihtsaim variatsiooniloesanne. Euleri võrrand.

Vaatleme funktsionaali

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (1.5)$$

kus $F(x, y, y')$ on pidev kolmemuutuja funktsioon ning omab pidevaid osatuletisi kuni järguni 2 (kaasa arvatud). Leiame nüüd kõigi funktsioonide $y = y(x)$ hulgast, mis on lõigul $[a, b]$ pidevad koos oma esimest ja teist järku tuletistega ja rahuldavad ääretingimusi

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad (1.6)$$

sellise, mille korral funktsionaal (1.5) oleks ekstremaalne. Nagu nägime viiendas punktis, on selleks tarvilik, et otsitava funktsiooni $y(x)$ korral oleks null funktsionaali $J[y]$ esimene variatsioon δJ . Esimese variatsiooni arvutamiseks anname funktsioonile $y(x)$ juurdekasvu $h(x)$. Selleks, et ka naaberfunktsioonid $y^*(x) = y(x) + h(x)$ rahuldaksid funkt-

sionaali (1.5) argumendile pealepandud tingimusi, peab $h(x)$ olema pidev koos oma esimest ja teist järku tuletistega ja lõigu $[a, b]$ otspunktides olema null (vt. tingimusi (1.6)):

$$h(a) = h(b) = 0. \quad (1.6')$$

Leiame nüüd funktsionaali J juurdekasvu lineaarse osa:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_a^b [F(x, y+h, y'+h') - F(x, y, y')] dx = \\ &= \int_a^b [F_y(x, y, y') h(x) + F_{y'}(x, y, y') h'(x)] dx + \end{aligned}$$

+ kõrgemat järku liikmed.

Ekstreemumiks on tarvilik, et

$$\delta J = \int_a^b [F_y(x, y, y') h(x) + F_{y'}(x, y, y') h'(x)] dx = 0. \quad (1.7)$$

Integreerides teist liiget ositi ja arvestades rajatingimusi (1.6') saame:

$$\delta J = \int_a^b [F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y')] h(x) dx = 0. \quad (1.7')$$

Nurksuluavaldis (1.7'), mis sisaldab funktsiooni F esimest ja teist järku osatuletisi ja funktsiooni $y(x)$ koos esimest ja teist järku tuletistega, on meie poolt tehtud eeldustel pidev funktsioon argumendist x . Selleks, et integraal (1.7') oleks null iga funktsiooniruumi C_2 kuuluva ja tingimusi (1.6') rahuldava $h(x)$ korral, peab variatsioonarvutuse põhilemma kohaselt olema avaldis nurksulgudes null:

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0. \quad (1.8)$$

Võrrand (1.8) on teist järku harilik diferentsiaalvõrrand.

Teda nimetatakse Euleri võrrandiks (L. Euler, 1744. a.). Funkt-

sionaali Euleri võrrandi integraalkõveraid nimetatakse selle funktsionaali ekstremaalideks. Niisiis, ainult oma ekstremaalidel võib funktsionaal (1.5) saavutada maksimaalset või minimaalset väärtust. Euleri võrrandi (1.8) kui II järku võrrandi üldlahendis erinevat kahte meelevaldset konstanti saame määrata rajatingimustest (1.6).

Tuleb märkida, et Euleri võrrandite (1.8) tuletamisel me eeldasime ka funktsiooni $y(x)$ teise tuletise pidevust, kuna funktsionaal $J[y]$ on määratud kõigil funktsiooniruumi C_1 funktsioonidel. On aga võimalik ka põhilemmat nii üldistada, et tingimusest (1.7) järeldub Euleri võrrand (1.8) ka siis, kui eeldame ainult funktsiooni $k(x)$ (ja ka $y(x)$) kuuluvust funktsiooniruumi C_1 (vt. ülesandeid 1, 2). Seejuures osutub, et lahendikõveral on pidev II järku tuletis siis, kui kõigis selle kõvera punktides $(x, y(x))$

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0 \quad (\text{ülesanne 3}).$$

8. Euleri võrrandi lahendusvõtteid lihtsamatel erijuhtudel.

$$a) J[y] = \int_a^b F(x, y') dx. \quad (1.9)$$

Euleri võrrand on nüüd väga lihtne:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

ja üks kord kergesti integreeritav:

$$F_{y'} = C.$$

Lahendades saadud võrrandi y' suhtes, saame

$$y' = f(x, C),$$

kust y on leitav integreerimise teel.

$$b) J[y] = \int_a^b F(y, y') dx. \quad (1.9')$$

Euleri võrrandi

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv F_y - F_{y'} y' y' - F_{y''} y'' = 0$$

esimese integraali võib leida kergesti. Selleks korrutame

Euleri võrrandi vasakut poolt suurusega y' :

$$y' F_y - y' \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv \frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = 0,$$

siit

$$F - y' F_{y'} = C.$$

c) Kui F ei sõltu y tuletisest, siis on Euleri võrrand harilik algebraalne või transtsendentne võrrand, mis määrab ühe või mitu kõverat. Viimased ei pruugi üldjuhul rahuldada ääretingimusi (1.6).

$$d) J[y] = \int_a^b F(y') dx. \quad (1.9'')$$

Euleri võrrand $\frac{d^2 F(y')}{dy'^2} y'' = 0$

viib siin lihtsale alternatiivile, kas

$$\frac{d^2 F(y')}{dy'^2} \equiv \varphi(y') = 0$$

või

$$y''(x) = 0.$$

Esimene võrranditest on rahuldatud, kui $y'(x) = \kappa_s$, kus κ_s on funktsiooni $\varphi(y')$ nullkohaks ja seega $y = \kappa_s x + C_1$. Teise võrrandi integreerimisel saame lineaarse funktsiooni

$$y = Cx + C_1.$$

See ongi Euleri võrrandi üldlahendiks, kuna esimene alternatiividest viib vaid lineaarse funktsiooni kitsamale erijuhule konstandi C rangelt fikseeritud väärtustega.

9. Variatsioontuletis.

Variatsioontuletise mõiste on osatuletise mõiste loomulikuks üldistuseks. Selleks vaatleme lihtsaimat funktsionaali:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1.5)$$

ja teostame kõigepealt ülemineku variatsioonülesandelt lõplikule harilikule võrrandisüsteemile. Jaotame lõigu (a, b) punktidega x_1, x_2, \dots, x_n $n+1$ osaks. Lihtsuse mõttes võtame osalõigud võrdsete pikkustega. Lisaks tähistame veel $x_0 = a$ ja $x_{n+1} = b$ ja $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Nüüd asendame siledad kõverad $y(x)$ murdjoonega, mille tippudeks on punktid $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$. Sellisel juhul võime funktsionaali (1.5) asendada ligikaudu summaga

$$\sum_{i=0}^n F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) = J[y_1, y_2, \dots, y_n]$$

(y_0 ja y_{n+1} on fikseeritud ääretingimustega (1.6)).

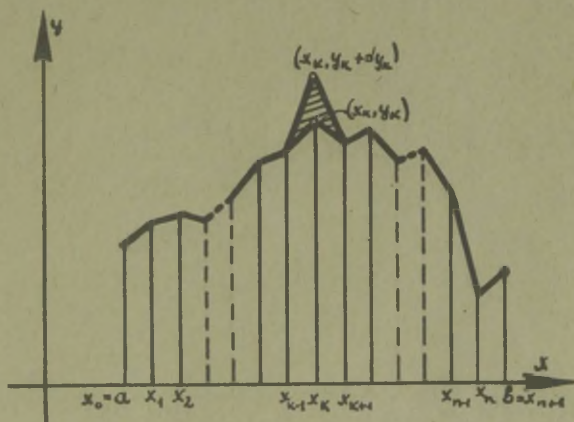
Vaatleme osatuletist $\frac{\partial J}{\partial y_k}$:

$$\frac{\partial J}{\partial y_k} = F(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}) \Delta x + F_{y'}(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}) - F_{y'}(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}) .$$

Suhte $\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial J}{\partial y_k}$ piirväärtust jaotuspunktide arvu n tõkestamisel kasvamisel, mis toimub nii, et iga lõigu pikkus läheneb nullile, nimetataksegi funktsionaali variatsioontuletiseks funktsiooni $y(x)$ järgi punktis x_k ja tähistatakse sümboliga $\frac{\delta J}{\delta y}$:

$$\frac{\delta J}{\delta y} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial F}{\partial y_n} = F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y'). \quad (1.10)$$

Märgime siinkohal, et avaldisel $\Delta x \frac{\partial F}{\partial y_n} = \Delta x dy_n$ on lihtne geometriline tähendus - pindala, mis jääb antud murdjoone ja punkti (x_n, y_n) nihutamisel punkti $(x_n, y_n + dy_n)$ tekkinud uue murdjoone vahele (vt. joon. 4). Toodud asjaolu



Joon. 4.

silmas pidades võime anda ka variatsioonituletise üldisema definitsiooni:

$$\left. \frac{\delta J}{\delta y} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{J[y+h] - J[y]}{\Delta s}, \quad (1.10')$$

kus Δs on kõveratega $y = y(x) + h(x)$ ja $y = y(x)$ piiratud pindala. Piirprotsess tuleb teostada nii, et nulliks läheb ka $\|h(x)\|$ ja et see lõik, millel $h(x) \neq 0$, tõmbuks kokku punktiks x_0 . Sellisel juhul defineerib piirväärtus (1.10)

(kui ta on olemas) variatsioontuletise punktis x_0 . On kerge näha, et variatsioontuletise korral kehtivad analüüsi kursusest hästi tuntud diferentseerimiseeskirjad.

10. Euleri võrrandite invariantisus.

Cartesiuse ristkoordinaatide x, y asemel võime tasandil kasutada ka kõverjoonelisi koordinaate u, v . Mõlemad koordinaatsüsteemid on seotud omavahel teisendusvalemitega

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \end{aligned} \quad (1.11)$$

kus funktsioonid $x(u, v)$ ja $y(u, v)$ on ühesed ja pidevad koos oma esimest järku osatuletistega ja rahuldavad tingimust

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.11')$$

(Tingimus (1.11') garanteerib üksühese vastavuse punkti vana- ja uute koordinaatide vahel.) Üks ja sama kõver avaldub kummaski koordinaadistikus erinevate võrrandite abil: $y = y(x)$ ja $v = v(u)$ (ilmutamata kujul $y(u, v) = y[x(u, v)]$).

Muutujate vahetuse (1.11) võime teostada ka funktsionaalis (1.5), mis muutub sellega funktsionaaliks funktsioonist $v = v(u)$:

$$\begin{aligned} J_1[v] &= \int_{a_1}^{b_1} F_1(u, v, v') du = \\ &= \int_a^b F(x(u, v), y(u, v), \frac{\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{du}}{\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{du}}) (\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{du}) du. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Näitame, et kui funktsioon $y = y(x)$ rahuldab funktsionaali (1.5) Euleri võrrandit, siis sama kõverat koordinaatides u, v määrav funktsioon $v = v(u)$ rahuldab funktsionaali (1.12) Euleri võrrandit.

Tõestuseks kasutame variatsioontuletise mõistet. Tähistame kõveratega γ ($y = y(x)$) ja γ^* ($y = y(x) + h(x)$) piiratud x, y -tasandi pindala sümboliga Δs . Muutujates u, v on need kõverad määratud vastavalt funktsioonidega $v = v(u)$ ja $v = v(u) + \eta(u)$, nende poolt piiratud pindala aga tähistame sümboliga $\Delta \sigma$. On teada, et lõpmata väikeste pindalade suhe avaldub järgmiselt:

$$\frac{\Delta s}{\Delta \sigma} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} (\neq 0).$$

Kuna funktsioon $y = y(x)$ rahuldab funktsionaali $J[y]$ Euleri võrrandit, siis

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{J[y+h] - J[y]}{\Delta s} = 0.$$

Siit aga järeldub, et ka

$$\lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{J_1[v+\eta] - J_1[v]}{\Delta \sigma} = 0.$$

Järelikult rahuldab ka funktsioon $v = v(y)$ funktsionaali (1.12) Euleri võrrandit, ehk teisiti öeldes: ekstremaal jääb ekstremaaliks, sõltumata koordinaatsüsteemi valikust.

Tõestatud teoreem lubab teha ülesannete lahendamist lihtsustavaid muutujate vahetusi juba funktsionaali defineerivas integraalis (vt. ülesanne 8).

Ülesandeid § 1 juurde.

1. Tõestada järgmine lemma: lõigul $[a, b]$ pidev funktsioon $f(x)$ on konstantne, kui integraal

$$\int_a^b f(x) h'(x) dx$$

on null iga funktsiooniklassi C_1 kuuluva funktsiooni $h(x)$ korral, mis rahuldab ääritingimusi $h(a) = h(b) = 0$.

Märkus: Lemma tingimuste põhjal

$$\int_a^b [f(x) - c] h'(x) dx = 0 \quad (1)$$

iga lõigul $[a, b]$ pideva funktsiooni korral, kui vaid konstant c on valitud nii, et

$$\int_a^b [f(x) - c] dx = 0,$$

s. t.

$$c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Valemi (1) põhjendamiseks arvestada, et igat lõigul $[a, b]$ pidevat funktsiooni $f(x)$ võib anda summamana $f(x) = \lambda(x) + c$, kus $\int_a^b \lambda(x) dx = 0$; funktsiooni $\lambda(x)$ võib aga samastada funktsiooniga $h'(x)$ (sest $h(b) = \int_a^b h'(x) dx = 0$). Lemma tõestuseks tuleb lõpuks valemis (1) võtta konkreetseks $f(x) = h(x) - c$.

2. Tõestada järgmine lemma: kui

$$\int_a^b [a(x)h(x) + b(x)h'(x)] dx = 0 \quad (1)$$

iga funktsiooniklassi C_1 kuuluva funktsiooni korral, mis rahuldab tingimusi $h(a) = h(b) = 0$, siis on funktsioon

$h(x)$ diferentseeruv funktsioon ja $a(x) - h'(x) = 0$. Selle lemma põhjal järeldub Euleri võrrand (1.8) ekstreemumi tarvilikust tingimusest (1.7), kui eeldame funktsioonide $y(x)$ ja $h(x)$ kuuluvust ainult funktsiooniklassi C_1 .

Märkus: Integreerides esimest liiget ositi võime valemi (1) esitada järgmisel kujul:

$$\int_a^x [-A(x) + h'(x)] h'(x) dx = 0,$$

kus $A(x) = \int_a^x a(\tau) d\tau$. Eelmises ülesandes tõestatud lemma põhjal aga $h'(x) - A(x) = \text{const}$.

3. Näidata, et Euleri võrrandi (1.8) lahendil $y(x)$ on ka pidev teist järku tuletis kõigis punktides $[x, y]$, kus $F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0$.

Märkus: Tõestuseks vaadelda piirväärtust

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_{y'x} \Delta x + F_{y'y} \Delta y + F_{y'y'} \Delta y'}{\Delta x}.$$

See piirväärtus on olemas ja Euleri võrrandi põhjal võrdub osatuletisega F_y ($F_y = \frac{d}{dx} F_{y'}$), järelikult on olemas ka piirväärtused igast liidetavast eraldi.

4. Lahendada esimeses punktis formuleeritud brahhisto-krooniülesanne.

Märkus: Koguenergia $\frac{mv^2}{2} - mgy$ on jääv ja alghetkel võib teda lugeda nulliks, seega $v = \sqrt{2gy}$ ja

$$\left. \begin{aligned} T[y(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx, \\ y(0) &= 0, \quad y(a) = h \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(punkt P_1 on võetud koordinaatide alguseks, x -telg on suunatud horisontaalselt ja y -telg vertikaalselt alla,

punkt $P_2 = (a, h)$) (vt. joon. 2, lk. 8).

Kuna on tegemist juhuga (1.9'), on Euleri võrrandi esimene integraal kergesti leitav

$$y(1 + y'^2) = C_1. \quad (2)$$

Võrrandi lõplikuks integreerimiseks ja eriti lahendikõvera geomeetriliseks tõlgendamiseks on otstarbekas tuua sisse parameeter t , võttes

$$y' = \cos t. \quad (3)$$

Valemitest (2) ja (3) saame

$$y = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2} (1 - \cos 2t). \quad (4)$$

Seoste (3) ja (4) abil leiame funktsiooni $x(t)$, pidades silmas, et

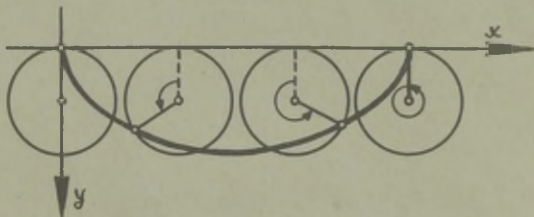
$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\frac{dy}{dt}}{y'} dt;$$

$$x(t) = C_1 \left(1 - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C_2. \quad (5)$$

Ääritingimuse põhjal $C_2 = 0$ ja tähistades veel $2t = \tau$ saame lõplikult

$$x = \frac{C_1}{2} (\tau - \sin \tau), \quad y = \frac{C_1}{2} (1 - \cos \tau).$$

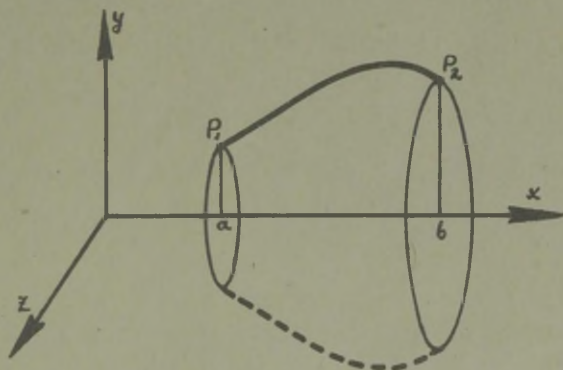
Lahendiks on niisiis tsükloid, s. o. joon, mida kirjeldab libisemiseta mööda x -telge veereva ringjoone fikseeritud punkt (vt. joon. 5).



Joon. 5.

Ringjoone raadius $\frac{C_1}{2}$ tuleb valida nii, et tekkinud tsükloid läbiks ka punkti P_2 .

5. Leida kõver, mille pöörlemisel ümber x -telje tekib minimaalse külgpindalaga pöördkeha (vt. joon. 6). Kõvera otspunktid $P_1 = (a, A)$ ja $P_2 = (b, B)$ on fikseeritud. Lähemalt



Joon. 6.

analüüsida juhtu, kus P_1 on koordinaatide alguspunkt.

Märkus: Funktsionaaliks on pöördkeha pindala

$$S[y(x)] = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Euleri võrrandi esimene integraal on juhu (1.9') põhjal kergesti leitav

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C.$$

Selle edasiseks integreerimiseks kasutada asendust $y' = \operatorname{sh} t$.

Vastus: Lahendikõveraks on aheljoon:

$$x = C_1 t + C_2, \quad y = C_1 \operatorname{ch} t.$$

6. Lahendada järgmised variatsioonülesanded:

$$\checkmark \text{ a) } J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2] dx; \quad y(0) = 0; \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1;$$

$$\text{b) } J[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1;$$

$$\checkmark \text{ c) } J[y(x)] = \int_2^8 (y^2 + 2xy y') dx; \quad y(a) = A; \quad y(B) = B;$$

$$\checkmark \text{ d) } J[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y') dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 2;$$

$$\checkmark \text{ e) } J[y(x)] = \int_0^1 [\frac{x^2}{y^2} + x^2 y' + 2xy] dx; \quad y(0) = 2; \quad y(1) = 1;$$

$$\checkmark \text{ f) } J[y(x)] = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1.$$

Vastus: a) $y = \sin x$; b) $y = x^3$;

c) integraal ei sõltu integreerimisteest, variatsioonülesandel ei ole mõtet;

d) pidevate funktsioonide hulgas lahendit ei leidu;

? e) $y = -x^{5/3} + 2$;

f) $y^2 + (x-1)^2 = 1$.

7. Leida järgmiste funktsionaalide ekstremaalid:

$$\text{a) } J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1+y'^2}{y^2} dx;$$

$$\checkmark \text{ b) } J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx;$$

$$\text{c) } J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx.$$

Vastus: a) $y = \operatorname{sh}(C_1 x + C_2)$;

b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$;

c) $(y - C_1)^2 = C(1 - Cx^2)$.

8. Leida järgmiste funktsionaalide ekstremaalid, teostades enne integraalis sobiv muutujate vahetus:

a) $J[r] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$;

b) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{[y \frac{dy}{dx} + x]^2}{[x \frac{dy}{dx} - y]} dx$;

c) $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{[1 + y']^2}{(x-y)(1-y')} dx$.

Märkus: a) minna üle Cartesiuse koordinaatidele,

b) minna üle polaarkoordinaatidele,

c) tuua sisse uued muutujad :

$$u = x - y,$$

$$v = x + y.$$

§ 2. LIHTSAIMA VARIATSIOONÜLESANDE ÜLDISTUSED.

1. Funktsionaalid mitme tundmatu funktsiooniga.

Uurime nüüd ekstreemumi tarvilikke tingimusi mitmest funktsioonist sõltuva funktsionaali

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx \quad (2.1)$$

korral (vt. ka näit. funktsionaali (1.1')). Nagu varemgi (§ 1,7), eeldame, et funktsioon F on pidev koos oma esimest ja teist järku osatuletistega. Leiame nüüd, milliseid tingimusi peavad rahuldama funktsioonid $y_i(x)$, mis teevad funktsionaali (2.1) ekstreemaalseks. Seejuures eeldame, et funktsioonid $y_i(x)$ ja nende esimest ja teist järku tuletised* on pidevad lõigul $[a, b]$ (funktsioonid $y_i(x)$ kuuluvad funktsiooniruumi C_2) ning nad rahuldavad ääretingimusi

$$\begin{aligned} y_i(a) &= A_i, \\ y_i(b) &= B_i. \end{aligned} \quad (2.2)$$

* Nagu juba § 1,7 lõpul märkisime, võib põhilemmat ka siin nii täiendada, et funktsioonide $y_i(x)$ teist järku tuletiste pidevust pole tarvis eeldada, vaid et see osutub järelduseks tingimustest $F_{y_i} \neq 0$ (vt. ka ülesanded 1-3, § 1).

Geomeetrilisest aspektist vaadates on meil tegemist funktsionaaliga, mis on defineeritud $(n+1)$ -dimensionaalses ruumis punkte $P_1 = (a, A_1, A_2, \dots, A_n)$ ja $P_2 = (b, B_1, B_2, \dots, B_n)$ ühendavatel siledatel kõveratel γ .

Analoogiliselt varem vaadeldud lihtsaima variatsioonülesande juhule (§ 1, 7) leiame funktsionaali (2.1) esimese variatsiooni

$$\delta J = \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{y_i} h_i + F_{y_i'} h_i') dx. \quad (2.3)$$

Kuna funktsioonide $y_i(x)$ variatsioonid $h_i(x)$ on üksteisest sõltumatud, siis võime ühe variatsioonidest (näiteks $h_\kappa(x)$) valida meelevaldselt, teised aga võtta nulliks. Ekstreemumi tarvilikust tingimusest $\delta J = 0$ järelduvad seega seosed

$$\int_a^b (F_{y_\kappa} h_\kappa + F_{y_\kappa'} h_\kappa') dx = 0, \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n). \quad (2.4)$$

Analoogilisest tingimusest (1.7) lähtudes saime lihtsaima variatsioonülesande (1.5) korral ekstreemumi tarviliku tingimusena funktsionaali (1.5) Euleri võrrandi (1.8). Siin aga saame funktsioonide $y_i(x)$ määramiseks süsteemi n Euleri võrrandist

$$F_{y_\kappa} - \frac{d}{dx} F_{y_\kappa'} = 0, \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n). \quad (2.5)$$

Süsteemi (2.5) üldlahend sisaldab $2n$ meelevaldset konstanti, mille määramiseks tuleb kasutada $2n$ ääretingimust (2.2).

2. Funktsionaalid kõrgemate tuletistega.

Lihtsaima variatsioonülesande teise võimaliku üldistuseks vaatleme juhtu, kus funktsionaal sisaldab funktsiooni $y(x)$ kõrgemaid tuletisi (kuni järguni n (kaasa arvatud)):

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx. \quad (2.6)$$

Funktsionaali (2.6) korral võime formuleerida järgmise variatsioonülesande: kõigi lõigul (a, b) funktsiooniruumi D_n kuuluvate funktsioonide $y(x)$ hulgast leida selline funktsioon, mis rahuldab ääritingimusi

$$\left. \begin{aligned} y(a) &= A_0, & y(b) &= B_0, \\ y'(a) &= A_1, & y'(b) &= B_1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)}(a) &= A_{n-1}; & y^{(n-1)}(b) &= B_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

ja muudab funktsionaali (2.6) ekstremaalseks.

Siingi lähtume ekstreemumi tarvilikust tingimusest

$\delta J = 0$, kus esimese variatsiooni leiame tavalisel viisil kui funktsiooni juurdekasvu lineaarse osa. Seega

$$\delta J = \int_a^b [F_y h + F_{y'} h' + \dots + F_{y^{(n)}} h^{(n)}] dx = 0, \quad (2.8)$$

kusjuures funktsioonid $h(x)$ kuuluvad funktsiooniruumi C_n ja rahuldavad homogeenseid ääritingimusi

$$h(a) = h'(a) = \dots = h^{(n-1)}(a) = h(b) = h'(b) = \dots = h^{(n-1)}(b) = 0. \quad (2.9)$$

Integreerides avaldises (2.8) esinevaid liikmeid $\int_a^b F_{y^{(n)}}(x) h^{(n)} dx$

κ korda ositi ja arvestades lisatingimusi (2.9) saame:

$$\delta J \equiv \int_a^b \left[F_y + \sum_{\kappa=1}^n (-1)^\kappa \frac{d^\kappa}{dx^\kappa} F_{y^{(\kappa)}} \right] h(x) dx = 0. \quad (2.8')$$

Kui eeldame, et funktsioon $F(x, y, \dots, y^{(n)})$ on pidev koos oma osatuletistega kuni järguni $n+1$ (incl.) ja $y(x)$ on pidev koos oma tuletistega kuni järguni $2n$, siis põhilemma (§ 1, 6) abil jõuamegi nn. Euleri-Poissoni võrrandile funktsiooni $y(x)$ määramiseks

$$F_y + \sum_{\kappa=1}^n (-1)^\kappa \frac{d^\kappa}{dx^\kappa} F_{y^{(\kappa)}} = 0. \quad (2.10)$$

Võrrand (2.10) on $2n$ -järku diferentsiaalvõrrand ning tema üldlahend sisaldab $2n$ meelevaldset konstanti. Nende määramiseks tuleb kasutada $2n$ lisatingimust (2.7).

Lõpuks märgime, et siingi on võimalik põhilemma sobiva üldistamise teel jõuda tingimuselt (2.8) otseselt Euler-Poissoni võrrandile (2.10), eeldades ainult funktsiooni $y(x)$ ja tema esimest, teist, ..., n -järku tuletiste pidevust.

3. Funktsionaalid mitme muutuja funktsioonidest.

Vaatleme nüüd järgmist variatsioonülesannet: kõigi piirkonnas D defineeritud funktsioonide $z(x, y)$ seast, mis piirkonna D äärel γ omandavad etteantud väärtusi

$$z(x, y)|_\gamma = f(x, y) \quad (2.11)$$

ja mis on piirkonnas D pidevad koos oma esimest ja teist järku osatuletistega, leida selline funktsioon $z(x, y)$, mille korral integraal

$$J[z(x,y)] = \iint_D F(x,y, z(x,y), z_x(x,y), z_y(x,y)) dx dy \quad (2.12)$$

omandaks ekstremaalse väärtuse.

Nagu teame (vt. § 1, 6), on sellise funktsiooni $z(x,y)$ korral null funktsionaali (2.12) esimene variatsioon. Seega

$$\delta J = \iint_D (F_z h + F_{z_x} h_x + F_{z_y} h_y) dx dy = 0 \quad (2.13)$$

Selleks, et ka naaberfunktsioon $z^* = z + h$ rahuldaks eespool loetletud tingimusi, peab funktsioon $h(x,y)$ olema piirkonna D äärel null,

$$h(x,y)|_\gamma = 0, \quad (2.11')$$

ja piirkonnas D pidev koos oma esimest ja teist järku osatuletistega.

Kasutades Greeni valemit:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_\gamma (P dx + Q dy)$$

(funktsioonid P ja Q peavad olema piirkonnas D pidevad koos oma esimest järku osatuletistega) ja ääretingimust (2.11') saame:

$$\begin{aligned} & \iint_D [F_{z_x} h_x + F_{z_y} h_y] dx dy = \\ & = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (h F_{z_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (h F_{z_y}) \right] dx dy - \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} \right) h dx dy \\ & = \int_\gamma h [F_{z_x} dy - F_{z_y} dx] - \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} \right) h dx dy = \\ & = - \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} \right) h(x) dx dy. \end{aligned}$$

Seega

$$\delta J = \iint_D (F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}) k(x) dx dy = 0. (2.13')$$

Variatsioonarvutuse põhilemma põhjal saamegi siit nn. Euler-Ostrogradski võrrandi

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0. (2.14)$$

(On eeldatud nagu varemgi, et funktsioon F ja tema esimest järku osatuletised on pidevad.) Võrrand (2.14) on osatuletisega diferentsiaalvõrrand, lahendi konkretiseerimiseks tuleb arvestada, et funktsioon $z(x,y)$ peab piirkonna D äärel omandama etteantud väärtusi (2.11).

Geomeetrilisest aspektist vaadates on antud juhul tegemist funktsionaaliga, mis on määratud ruumilistel pindadel, mis läbivad antud kõverat ruumis (selle kõvera projektsiooniks xy tasandile on piirkonna D äärejoon γ , kõver ise on aga määratud võrrandiga (2.11).

Lõpuks märgime, et käesoleva punkti tulemused on kergesti üldistatavad n -muutuja funktsioonide juhule: selleks, et funktsioon $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ teeks ekstremaalseks funktsionaali

$$J[\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)] = \underbrace{\int \dots \int}_{m\text{-kordne integraal}} F(x_1, \dots, x_m, \varphi, \varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_m}) dx_1 \dots dx_m, (2.15)$$

peab ta rahuldama võrrandit:

$$F_\varphi - \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial \varphi_{x_k}} = 0. (2.15')$$

Samuti on võimalik kombineerida käesoleva punkti tulemusi kahe eelmise punkti tulemustega ja formuleerida ekstreemumi tarvilikke tingimusi funktsionaalide jaoks, mis sõltuvad mitmest mitme muutuja funktsioonist ja mis sisaldavad nende funktsioonide kõrgemat järku osatuletisi.

4. Isoperimeetriline variatsioonülesanne.

Lihtsamas variatsioonülesandes oli lubatud kõverate või funktsioonide klass määratud pidevuse nõuetega ning ääritingimustega. Väga sageli esinevad rakendustes ka juhud, kus lubatud funktsioonid peavad rahuldama integraalikululist lisatingimust. Selliseid variatsioonülesandeid nimetataksegi isoperimeetrilisteks ülesanneteks. Nimetus "isoperimeetriline ülesanne" (s. o. ülesanne fikseeritud ümbermõõdu ehk perimeetriga) on seotud järgmise konkreetse probleemiga: kõigi sama pikkade pidevate kõverate hulgast leida selline, mis piirab suurimat pindala. Kuna kinnist kõverat on kõige mugavam anda parameetrilisel kujul: $x=x(t)$, $y=y(t)$ ($a \leq t \leq b$), siis kitsamas mõttes isoperimeetriline ülesanne seisnebki kahe sellise pideva ja diferentseeruva funktsiooni $x(t)$ ja $y(t)$ leidmises, mis teevad integraali

$$S[x(t), y(t)] = \int_a^b y(t) \dot{x}(t) dt \quad (2.16)$$

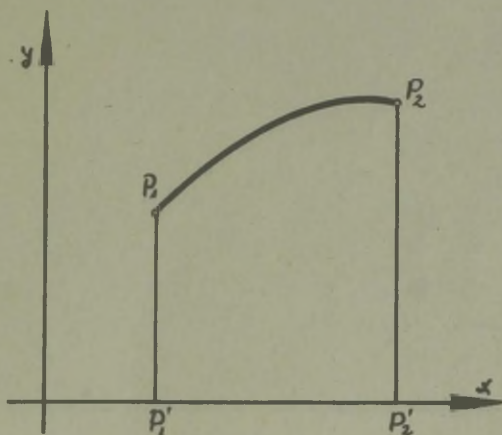
maksimaalseks ja mis rahuldavad samaaegselt tingimust

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = l = \text{const}, \quad (2.16')$$

kusjuures $x(a) = x(b)$ ja $y(a) = y(b)$. (2.16")

Analoogilise ülesande võime formuleerida ka ühe tundmatu funktsiooniga: leida kahte punkti P_1 ja P_2 ühendav antud pikkusega l kõver $y = y(x)$, mille korral kõverjooneline trapetsi $P_1' P_1 P_2 P_2'$ (vt. joon. 7) pindala oleks ekstremaalne. Siin on funktsionaaliks pindala

$$S[y(x)] = \int_a^b y(x) dx, \quad (2.17)$$



Joon. 7.

funktsioon $y(x)$ peab aga rahuldama nii ääretingimusi

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (2.17')$$

kui ka lisatingimust

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = l. \quad (2.17'')$$

Üldise isoperimeetrilise probleemi võiksime ühe tund-

matu funktsiooni korral sõnastada järgmiselt: lõigul (a, b) defineeritud C_1 ruumi funktsioonide (käsitlevas käsitluses eeldame küll funktsioonide kuuluvust ruumi C_2) seast leida funktsioon, mis rahuldab ääritingimusi

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (2.18)$$

ja mille korral funktsionaalil

$$J_1[y(x)] = \int_a^b G_1(x, y, y') dx \quad (2.18')$$

on antud väärtus λ_1 , nii et funktsionaal

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (2.18'')$$

oleks ekstremaalne.

Üldise isoperimeetrilise ülesande (2.18–18'') lahendamiseks oletame, et funktsioonid G_1 ja F on pidevad koos oma esimest ja teist järku osatuletistega ning et ülesande lahend $y(x)$ ei ole funktsionaali (2.18') ekstremaaliks. Näitame, et seda isoperimeetrilist ülesannet võib taandada lihtsamale variatsioonülesandele. Nimelt kehtib järgmine nn. Euleri teoreem:

Kui funktsioon $y(x)$ rahuldab ääritingimusi (2.18), lisatingimust $J_1[y(x)] = \lambda$ ning teeb funktsionaali $J[y]$ ekstremaalseks, siis leidub selline konstant λ nii, et see funktsioon $y(x)$ teeb ekstremaalseks ka funktsionaali

$$\int_a^b H(x, y, y') dx, \quad (2.19)$$

$$\text{kus } H = F + \lambda G_1. \quad (2.19')$$

Vaatleme nüüd lisaks funktsioonile $y(x)$, mis on variatsioonülesande (2.18–18'') lahendiks, kaheparameetrilist

naaberköverte parve

$$\bar{y}(x) = y(x, \alpha_1, \alpha_2) = y(x) + \alpha_1 \eta_1(x) + \alpha_2 \eta_2(x), \quad (2.20)$$

kus $\eta_1(x)$ ja $\eta_2(x)$ on esialgu kaks meelevaldset lõigul (a, b) defineeritud funktsiooni, mis kuuluvad funktsiooni-ruumi C_1 ja rahuldavad homogeenseid ääritingimusi

$$\eta_1(a) = \eta_1(b) = \eta_2(a) = \eta_2(b) = 0.$$

Lisatingimuse $J_1[y] = l$ tõttu ei saa parameetrid α_1 ja α_2 olla sõltumatud. Tõepoolest, naaberfunktsioonidel (2.20) osutub funktsionaal $J_1[y]$ funktsiooniks parameetritest α_1 ja α_2 :

$J_1 \equiv J_1(\alpha_1, \alpha_2) = \int_a^b G_1(x, y + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2, y' + \alpha_1 \eta_1' + \alpha_2 \eta_2') dx$
 tingimus $J_1(\alpha_1, \alpha_2) = l$, aga tähendabki, et α_2 on tegelikult funktsioon α_1 -st. Tavalisel viisil leiame:

$$\left. \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_1 = \alpha_2 = 0} = \int_a^b [(G_1)_y \eta_i + (G_1)_{y'} \eta_i'] dx, \quad (i = 1, 2)$$

ehk pärast teise liikme ositi integreerimist:

$$\left. \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_1 = \alpha_2 = 0} = \int_a^b [(G_1)_y - \frac{d}{dx} (G_1)_{y'}] \eta_i dx. \quad (2.21)$$

Kuna $y(x)$ ei ole funktsionaalile J_1 ekstremaaliks, siis $(G_1)_y - \frac{d}{dx} (G_1)_{y'} \neq 0$ vahemikus (a, b) . Seega võime alati valida $\eta_2(x)$ nii, et:

$$\int_a^b [(G_1)_y - \frac{d}{dx} (G_1)_{y'}] \eta_2(x) dx \neq 0. \quad (2.21')$$

Kesutades seoseid (2.21-21') saame leida ka tuletise

$$\left. \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \right|_{\alpha_1 = 0} :$$

$$\left. \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \right|_{\alpha_1=0} = - \frac{\int_a^b [(G_1)_y - \frac{d}{dx} (G_1)_{y'}] \eta_1 dx}{\int_a^b [(G_1)_y - \frac{d}{dx} (G_1)_{y'}] \eta_2 dx} = \kappa. \quad (2.22)$$

Jagamine on võimalik just tänu tingimusele (2.21').

Ka funktsionaal J osutub naaberkõveratel (2.20) funktsiooniks parameetritest α_1 ja α_2 , arvestades veel parameetri α_2 sõltuvust parameetrist α_1 , saame:

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha_1} \right|_{\alpha_1=0} = \left. \frac{\partial J}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} + \left[\frac{\partial J}{\partial \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \right]_{\alpha_1=\alpha_2=0}$$

ehk

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha_1} \right|_{\alpha_1=0} = \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \eta_1 dx + \lambda \int_a^b [(G_1)_y - \frac{d}{dx} (G_1)_{y'}] \eta_1 dx, \quad (2.23)$$

kus

$$\lambda = - \frac{\int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \eta_2 dx}{\int_a^b [(G_1)_y - \frac{d}{dx} (G_1)_{y'}] \eta_2 dx}. \quad (2.23')$$

Kuna eelduse kohaselt teeb funktsioon $y(x)$ funktsionaali $J[y]$ ekstremaalseks, siis on ka funktsioonil

$J[\alpha_1, \alpha_2(\alpha_1)]$ kas maksimum või miinimum, kui $\alpha_1 = 0$. See-

ga: $\left. \frac{dJ}{d\alpha_1} \right|_{\alpha_1=0} = 0$, ehk (2.23) põhjal

$$\int_a^b \left\{ [(F_y + \lambda(G_1)_y) - \frac{d}{dx} [F_{y'} + \lambda(G_1)_{y'}]] \right\} \eta_1 dx = 0.$$

Funktsiooni η_1 meelevaldsuse tõttu jõuamegi siit põhilemma abil funktsionaali (2.19, 19') Euleri võrranditele:

$$H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} = 0. \quad (2.24)$$

Võrrandi (2.24) üldlahend sisaldab kolm esialgu määramatat konstanti (λ ja kaks integreerimiskonstanti). Nende määramiseks tuleb kasutada lisatingimust $J_1[y] = l_1$ ja ääritingimusi (2.18).

Et integraali (2.18'') korrutamisel konstandiga ekstreemumi asukoht ei muutu, siis võime H jaoks anda ka sümmeetrilisema avaldise

$$H = \lambda_1 F + \lambda_2 G_1. \quad (2.19')$$

Kuna nüüd esinevad H avaldises sümmeetriliselt F ja G_1 , siis võime väita, et funktsionaali $J[y]$ (2.18'') ekstreemalid tingimusel, et funktsionaal $J_1[y]$ (2.18') on fikseeritud väärtusega, ühtivad funktsionaali $J_1[y]$ (2.18') ekstreemalidega eeldusel, et funktsionaali $J[y]$ (2.18'') väärtus on fikseeritud.

Lõpuks märgime, et ühe lisatingimusega isoperimeetrilisele ülesandele (2.18-18'') võime juurde võtta veel ühe lisatingimuse

$$J_2[y(x)] = \int_a^b G_2(x, y, y') dx = l_2 = \text{const}$$

ja uuesti rakendada Euleri teoreemi. Selliselt jätkates võime oma tulemusi kergesti üldistada juhule, kus on suvaline arv integraali kujul formuleeritud lisatingimusi.

5. Tinglik ekstreemum (Lagrange'i ülesanne).

Isoperimeetrilise variatsioonülesande korral olid lisatingimused formuleeritud samuti funktsionaalide kujul.

On võimalik aga ka järgmine nn. tingliku ekstreemumi

probleem ehk Lagrange'i ülesanne: leida funktsionaali

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx \quad (2.25)$$

ekstreemum, kui lubatud funktsioonid $y_i(x)$ rahuldavad peale ääritingimuste

$$y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i \quad (2.25')$$

veel nn. seosevõrrandeid

$$G_j(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k; k < n). \quad (2.25'')$$

Vaatleme konkreetset juhtu, kus $n = 2$ ja $k = 1$.

Geomeetrilisest aspektist vaadeldes me otsime funktsionaali

$$J[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx \quad (2.26)$$

ekstreemumeid ruumilistel kõveratel γ , mis läbivad kahte punkti $P_0 = (a, A_1, A_2)$ ja $P_1 = (b, B_1, B_2)$ ning asuvad fikseeritud pinnal

$$G(x, y, z) = 0. \quad (2.26')$$

See ülesanne on kergesti taandatav variatsioonülesandele ilma lisatingimusteta. Selleks tuleb võrrandist (2.26') avaldada $z = \varphi(x, y)$ ja saadud tulemus asetada integraali (2.26). Kasutame seda asjaolu selleks, et tuletada võrrandeid, mida peavad rahuldama funktsioonid $y(x)$ ja $z(x)$, mis teevad funktsionaali (2.26) ekstreemaalseks. Oletame veel, et piki variatsioonülesande lahendi kõverat γ (mis on määratud kahe funktsiooniga $y = y(x)$, $z = z(x)$) $G_2 \neq 0$. See tingimus garanteeribki võimaluse avaldada $z = \varphi(x, y)$. Avaldades nüüd integraalis (2.26) z suuruste x ja y

kaudu, saame

$$J = \int_a^b F(x, y, \varphi, y', \varphi_x + \varphi_y y') dx = \int_a^b \bar{F}(x, y, y') dx$$

ja funktsiooni y määramiseks Euleri võrrandi

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} = 0. \quad (2.27)$$

Arvestades, et

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = F_y + F_z \varphi_y + F_{z'} (\varphi_{xy} + \varphi_{yy} y'),$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'} = F_{y'} + F_{z'} \varphi_{y'},$$

$$\frac{d}{dx} \bar{F}_{y'} = \frac{d}{dx} F_{y'} + \varphi_{y'} \frac{d}{dx} F_{z'} + F_{z'} (\varphi_{xy} + \varphi_{yy} y'),$$

saame (2.27) asemel:

$$F_y - \varphi_{y'} (F_{z'} - \frac{d}{dx} F_{z'}) - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (2.27')$$

Teiselt poolt saame võrrandist (2.26') avaldada φ_y :

$$G_y + G_z \varphi_y = 0 \quad \text{ehk} \quad \varphi_y = -\frac{G_y}{G_z}.$$

Seega (2.27') asemel võime kirjutada

$$\left(\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y \right) : G_y = \left(\frac{d}{dx} F_{z'} - F_{z'} \right) : G_z. \quad (2.27'')$$

Piki vaadeldava ülesande lahendi kõverat γ peavad võrrandi (2.27'') parem ja vasak pool kujutama ühte ja sama funktsiooni $\lambda(x)$, seega

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - (F_y + \lambda(x) G_y) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} F_{z'} - (F_{z'} + \lambda(x) G_z) = 0$$

ehk

$$\left. \begin{aligned} F_y^* - \frac{d}{dx} F_y'^* &= 0, \\ F_z^* - \frac{d}{dx} F_z'^* &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

kus

$$F^* = F + \lambda G. \quad (2.28')$$

Seega võime väita, et Lagrange'i probleemi ekstremaalid on kõrvaltingimusteta funktsionaali

$$J^* = \int_a^b (F + \lambda(x) G) dx \quad (2.28'')$$

ekstremaalideks. Seejuures tuleb võrrandisüsteemi (2.28) üldlahendis esineva meeleväldse funktsiooni $\lambda(x)$ ja nelja integreerimiskonstandi leidmiseks kasutada lisatingimust (2.26') ja ääretingimusi (2.25').

Leitud tulemus on (2.28-28'') kergesti ülekantav üldisemale juhule (2.25-25''), samuti jääb ta kehtima juhul, kui on tegemist nn. mitteholonoomsete seostega:

$$G_j(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0 \quad (2.29)$$

(seoseid (2.25'') nimetatakse holonoomseteks seosteks).

Ülesandeid § 2 juurde.

- ✓ 1. Lahendada järgmised mitme tundmatu funktsiooniga variatsioonülesanded:

$$a) J[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y'^2 + z'^2 + 2yz] dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

$$\checkmark \text{ b) } J[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2] dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = -\pi,$$

$$z(0) = 0, \quad z(\pi) = -\pi.$$

$$\checkmark \text{ c) } J[y(x), z(x)] = \int_0^1 [y'^2 + z'^2 + y'z'] dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0,$$

$$z(0) = -1, \quad z(1) = 1.$$

Vastus:

$$\text{a) } y = \sin x, \quad z = -\sin x;$$

$$\text{b) } y = x \cos x - \sin x, \quad z = x \cos x - \sin x;$$

$$\text{c) } y = -x + 1, \quad z = 2x - 1.$$

2. Erijuhulisele kahe tundmatu funktsiooniga variatsioon-

ülesandele viib ka lihtsaim variatsioonülesanne

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

kui sellele otsida lahendikõverat parameetrilisel kujul:

$$y = y(t), \quad x(t_0) = a, \quad y(t_0) = A,$$

$$x = x(t), \quad x(t_1) = b, \quad y(t_1) = B.$$

Vastavas funktsionaalis

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), y(t), \frac{y}{x}] \dot{x} dt = \int_{t_0}^{t_1} \phi[x, y, \dot{x}, \dot{y}] dt \quad (1)$$

integrand ei sisalda muutujat t ning on esimese astme homogeenne funktsioon tuletiste \dot{x} ja \dot{y} suhtes, s.t.

$$\phi(x, y, \kappa \dot{x}, \kappa \dot{y}) = \kappa \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}). \quad (2)$$

Näidata, et integraali (I) kuju ei sõltu parameetri t valikust, s.t. integraal ei muuda oma kuju uue parameetri $\tau = \varphi(t)$ ($\dot{\varphi}(t) \neq 0$) sissetoomisel.

Teiseks, veenduda, et funktsionaali (2) Euleri võrrandite süsteem taandub üheks võrrandiks

$$\phi_x(x, y, \dot{x}, \dot{y})(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) - \phi_{xy} - \phi_{yx} = 0, \quad (3)$$

kus

$$\phi_x = \frac{\phi_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = - \frac{\phi_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = \frac{\phi_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2}. \quad (3')$$

Tõestamiseks kasutada esimese astme homogeensete funktsioonide korral kehtivat seost

$$\phi = \phi_x \dot{x} + \phi_y \dot{y} \quad (4)$$

ning selle diferentseerimisel x, y, \dot{x} ja \dot{y} järgi saadavaid seoseid. (Valemi (4) saamiseks diferentseerida valemit (2) κ järgi ja siis võtta $\kappa = 1$.)

Võrrandi (3) lahendamisel tuleb juurde võtta lisatingimus, mis konkretiseerib parameetri t valiku (kui näiteks parameetriks t võtta kaare pikkus mööda ekstremaali, siis $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$).

3. Lahendada järgmised variatsioonülesanded kõrgemate tuletistega

$$1) a) J[y(x)] = \int_0^1 (1 + y''^2) dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

$$y'(0) = 1, \quad y'(1) = 1;$$

$$\sqrt{b) \quad J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y''^2 - y^2 + x^2) dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$y'(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;$$

$$c) \quad J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (-y''^2 + 16y^2 + x^2) dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi},$$

$$y'(0) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{\pi} - 2;$$

$$d) \quad J[y(x)] = \int_{-l}^l \left(\frac{1}{2} \mu y''^2 + \rho y \right) dx,$$

$$y(-l) = 0, \quad y(l) = 0,$$

$$y'(-l) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

Vastus:

a) $y = x,$

b) $y = \cos x,$

c) $y = e^{2x} + \sin 2x,$

d) $y = -\frac{\rho}{24\mu} (x^2 - l^2)^2.$

4. Leids Euler-Ostrogradski võrrandid:

$$a) \quad J[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy;$$

$$b) \quad J[u(x, y, z)] =$$

$$= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2u f(x, y, z) \right] dV.$$

5. Lahendada isoperimeetritelised ülesanded:

$$a) J = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx ; \int_0^1 y^2 dx = 2 ;$$

$$y(0) = 0, y(1) = 0 ;$$

$$b) J = \int_0^{x_1} y'^2 dx ; \int_0^{x_1} y dx = a ; \checkmark$$

$$y(0) = y_0, y(x_1) = y_1 ;$$

$$c) J = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx ;$$

$$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2 ;$$

$$y(0) = 0, y(1) = 1,$$

$$z(0) = 0, z(1) = 1.$$

Vastus:

$$a) y = \pm 2 \sin n\pi x, (n = 1, 2, \dots) ;$$

$$b) y = 3 \frac{(y_1 + y_0)x_1 - 2a}{x_1^3} x^2 + 2 \frac{3a - (y_1 + 2y_0)x_1}{x_1^2} x + y_0 ;$$

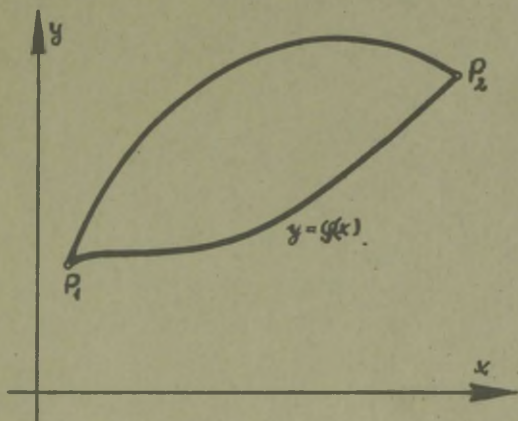
$$c) y = -\frac{5}{2} x^2 + \frac{7}{2} x ; z = x.$$

6. Punkte P_1 ja P_2 ühendavate antud pikkusega kõverate hulgast leida kõver, mille korral kõverjoonelise trapetsi $P_1' P_1 P_2 P_2'$ pindala on ekstremaalne (vt. joon. 7).

Märkus: Euleri võrrandi lõplikuks integreerimiseks on otstarbekas tuua sisse parameeter t , võttes $y' = \tan t$.

Vastus: Lahendiks on punkte P_1 ja P_2 ühendav ringi-
kaar pikkusega l .

7. Leida punkte P_1 ja P_2 ühendav antud pikkusega l kõ-
ver, mis piirab koos samu punkte läbiva fikseeritud kõve-
raga $y = \varphi(x)$ suurima pindala (vt. joon. 8).



Joon. 8.

Märkus: Lahendamiseks kasutada sama võtet mis eelmise
ülesande korral.

8. Leida otstest kinnitatud ja vabalt rippuva homogeense
paela kuju. Paela pikkus on antud, samuti eeldatakse, et
pael on absoluutselt paindub ja mitteveniv.

Märkus: Variatsioonülesande formuleerimisel pidada sil-
mas, et tasakaaluasendis on raskuskeske kõige madalamal, s. t.
peab olema minimaalne integraal.

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2} dx$$

(raskusväli on suunatud vertikaalselt alla, y -telg - üles). Euleri võrrandi lõplikuks integreerimiseks tuua sisse parameeter t : $y' = \operatorname{sh} t$.

Vastus: Ekstremaaliks on aheljoon:

$$x = c_1 t + c_2, \quad y = c_1 \operatorname{ch} t.$$

9. Leida geodeetilised jooned

a) sfääril ja b) silindril $x^2 + y^2 = \rho_0^2$.

Märkus: Ülesandeid on otstarbekas lahendada vastavalt polaar- ja silindrilistes koordinaatides. Mööda geodeetilisi jooni on kahe punkti vaheline kaugus minimaalne.

Vastus:

a) suuringid, b) jooned: $\varphi = C_1 + C_2 z, \quad \rho = \rho_0$.

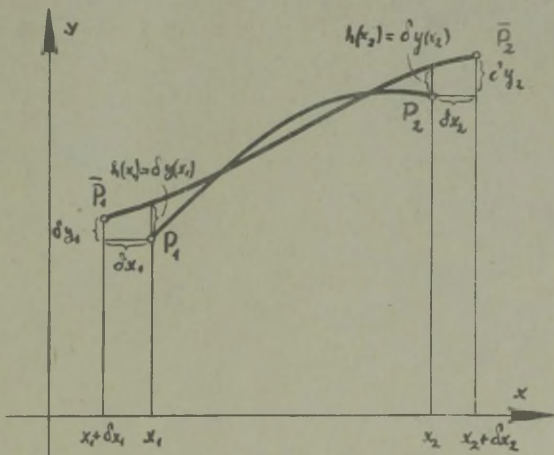
§ 3. ESIMISE VARIATSIOONI ÜLDINE AVALDIS JA SELLEGA SEOTUD VARIATSIOONÜLESANDED.

1. Esimese variatsiooni üldine avaldis.

Vaatleme funktsionaali

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (3.1)$$

muutumist üleminekul funktsioonidelt (kõveratelt) $y(x)$ naaberkõveratele $\bar{y}(x)$, seejuures erinevalt senisest käsitlesest loeme naaberkõvera $\bar{y}(x)$ otspunkte \bar{P}_1 ja \bar{P}_2 erinevateks kõvera $y(x)$ otspunktidest P_1 ja P_2 (vt. joon. 9). Kõiki vaadeldavaid kõveraid loeme siledateks



Joon. 9.

(funktsioonid $y(x)$ kuuluvad klassi C_1), nende vahelise kauguse defineerime aga selliselt:

$$\rho(y, \bar{y}) = \max |y - \bar{y}| + \max |y' - \bar{y}'| + \rho(P_1, \bar{P}_1) + \rho(P_2, \bar{P}_2) \quad (3.2)$$

($\rho(P_i, \bar{P}_i)$ - kõverate alguspunktide ($i=1$) ja lõpppunktide ($i=2$) vaheline kaugus). Üldise definitsiooni kohaselt loeme funktsionaali (3.1) esimeseks variatsiooniks tema juurdekasvu peaos, mis erineb kogu juurdekasvust ΔJ vaid liikmete poolest, mis on vähemalt teist järku väikesed suurused kauguse $\rho(y, \bar{y})$ (3.2) suhtes ($\rho(y, \bar{y})$ iseloomustab funktsionaali argumendi juurdekasvu ulatust). On ilmselge, et esimene variatsioon peab olema lineaarne nii funktsiooni $y(x)$ muutuse* $h(x) = \bar{y}(x) - y(x)$ kui ka otspunkti koordinaatide muutuste suhtes. Niisiis

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[y+h] - J[y] = \\ &= \int_{x_1 + \delta x_1}^{x_2 + \delta x_2} F(x, y+h, y'+h') dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [F(x, y+h, y'+h') - F(x, y, y')] dx + \\ &+ \int_{x_2}^{x_2 + \delta x_2} F(x, y+h, y'+h') dx - \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y+h, y'+h') dx \end{aligned}$$

ja

* Ei tarvitse erilist tähelepanu pöörata asjaolule, et $\bar{y}(x)$ ja $y(x)$ on defineeritud erinevatel lõikudel, me võime neid mõlemaid näiteks lineaarselt ekstrapoleerides jätkata lõigule, mis sisaldab mõlema funktsiooni määramispiirkondi.

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} [F_y(x, y, y') h + F_{y'}(x, y, y') h'] dx + \\ &\quad + F(x, y, y')|_{x=x_2} \delta x_2 - F(x, y, y')|_{x=x_1} \delta x_1 = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F(x, y, y')] h(x) dx + \\ &\quad + [F_y(x, y, y') h(x) + F(x, y, y') \delta x] \Big|_{x_1}^{x_2}. \end{aligned}$$

Jooniselt 9 näeme, et funktsiooni juurdekasv $h(x_1)$ on seotud alguspunkti ($h(x_2)$ - lõpp-punkti) koordinaatide juurdekasvudega ja piirdudes vaid lineaarsete liikmetega, võime kirjutada

$$h(x_1) = \delta y_1 - y' \delta x_1, \quad h(x_2) = \delta y_2 - y' \delta x_2 \quad (3.4)$$

ja seega lõplikult:

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} [F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}] h(x) dx + \\ &\quad + [F_{y'} \delta y + (F - y' F_{y'}) \delta x]_1^2 = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x))] h(x) dx + \\ &\quad + F_{y'}(x_2, y(x_2), y'(x_2)) \delta y_2 + [F(x_2, y(x_2), y'(x_2)) - y'(x_2) F_{y'}(x_2, y(x_2), y'(x_2))] \delta x_2 - \\ &\quad - F_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1)) \delta y_1 - [F(x_1, y(x_1), y'(x_1)) - y'(x_1) F_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1))] \delta x_1. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Väga sageli kasutatakse esimese variatsiooni üldises avaldises (3.5) funktsiooni $h(x)$ asemel sümbolit $\delta y(x)$ (funktsionaali argumendi variatsioon punktis x).

Leitud tulemus on kergesti üldistatav ka mitmest funktsioonist sõltuva funktsionaali juhule

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx; \quad (3.6)$$

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n (F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'}) \delta y_i(x) dx + \sum_{i=1}^n F_{y_i'} \delta y_i \Big|_1^2 + (F - \sum_{i=1}^n y_i' F_{y_i'}) \delta x \Big|_1^2. \quad (3.6')$$

Tähistades

$$F_{y_i'} = p_i; \quad -F + \sum_{i=1}^n y_i' F_{y_i'} = -F + \sum_{i=1}^n y_i' p_i = H, \quad (3.7)$$

võime esimese variatsiooni üldise avaldise (3.6') anda seliselt:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} (F_{y_i} - \frac{dp_i}{dx}) \delta y_i(x) dx + (\sum_i p_i \delta y_i - H \delta x) \Big|_1^2. \quad (3.8)$$

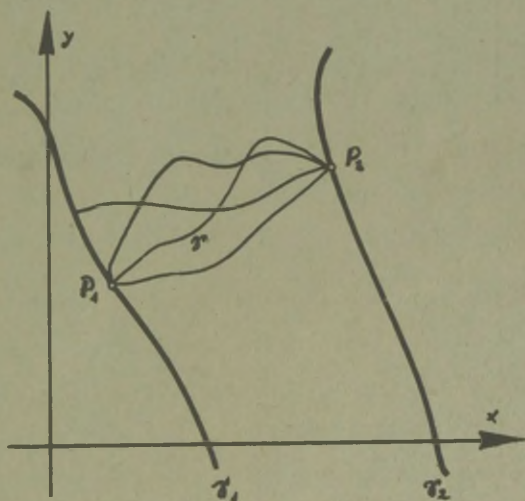
Kui tuletistest $F_{y_i'} y_i''$ moodustatud determinant ei ole null, siis võib võrdustest

$$F_{y_i'} = p_i$$

avaldada tuletised y_i' suuruste p_i ja y_i kaudu (fikseeritud x korral, s. t. lokaalselt). Selletõttu võime vaadeldavas funktsionaalis üle minna muutujatelt $x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'$ ja funktsioonilt F muutujatele $x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n$ ja funktsioonile H . Neid uusi muutujaid nimetame kanoonilisteks muutujateks.

2. Variatsioonülesanded muutuvate rajadega.

Funktsionaali (3.1) korral võime lisaks juba varem vaadeldud lihtsaimale variatsioonülesandele (§ 1, 7) ja isoperimeetrilisele variatsioonprobleemile (§ 2, 4) formuleerida ka variatsioonülesande muutuvate rajadega: siledate tasapinnaliste kõverate hulgast, mis ühendavad kahte fikseeritud kõverat γ_1 ja γ_2 , leida selline, mis teeb funktsionaali (3.1) ekstremaalseks (vt. joon. 10). Seejuures on eeldatud, et kõverad γ_1 ja γ_2 ei lõiku. Seda laadi ülesannete lihtsai-



Joon. 10.

maks esindajaks on kahe kõvera vahelise kauguse leidmise ülesanne.

Lähtume esimese variatsiooni üldisest avaldisest (3.5). Fakt, et näiteks kõver γ (resp. funktsioon $y(x)$) on meie ülesande lahendiks, tähendab seda, et funktsionaali $J[y]$ väärtus on kas suurem (või väiksem) võrreldes funktsionaali $J[\bar{y}]$ väärtustega kõigil teistel lubatud kõveratel, mis asuvad kõvera γ mõnesuguses δ -naabruses. Järelikult on funktsionaali $J[y]$ väärtus kõveral γ suurem (või väiksem) kui kõigil teistel siledatel kõveratel, millel on samad otspunktid (P_1 ja P_2) nagu kõver γ . See aga tähendab, et kõver γ peab olema funktsionaali (3.1) ekstremaaliks ehk funktsioon $y(x)$ rahuldama selle funktsionaali Euleri võrrandit (avaldises (3.5) on sel juhul $\delta x_1, \delta x_2, \delta y_1, \delta y_2$ nullid)

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (3.9)$$

Järelikult langeb funktsiooni $y(x)$ korral avaldisest (3.5) välja esimene liige. Kõveral γ on funktsionaali väärtus suurem (või väiksem) ka kui nendel naaberkõveratel, millel on kõveraga γ ühine lõpp-punkt, kuid erinevad alguspunktid ($\delta x_2 = \delta y_2 = 0$), või ka nendel, millel on kõveraga γ ühine alguspunkt, kuid erinevad lõpp-punktid ($\delta x_1 = \delta y_1 = 0$). Seega saame lisaks Euleri võrrandile (3.9) veel kaks nn. transversaalsusetingimust

$$\left. \begin{aligned} [F(x_1, y(x_1), y'(x_1)) - y'(x_1) F_{y'}(x_1, \dots)] \delta x_1 + F_{y_1}(x_1, \dots) \delta y_1 = 0, \\ [F(x_2, y(x_2), y'(x_2)) - y'(x_2) F_{y'}(x_2, \dots)] \delta x_2 + F_{y_2}(x_2, \dots) \delta y_2 = 0. \end{aligned} \right\} (3.10)$$

Kuna $\frac{\delta y_1}{\delta x_1}$ pole midagi muud kui äärejoone γ_1 tõus

punktis P_1 ja $\frac{\delta y_2}{\delta x_2}$ kõvera γ_2 tõus punktis P_2 , siis fikseerivad transversaalsusetingimused (3.10) tegelikult nurga, mille all lahendikõver γ lõikub kõveratega γ_1 ja γ_2 . Kõvera $y(x)$ kohta, mis rahuldab tingimust (3.10), öeldakse, et ta lõikab kõverat γ_1 (või γ_2) transversaalselt.

On kerge näha, et erikujulise funktsionaali

$$J[y] = \int_a^b v(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

korral taanduavad transversaalsusetingimused tegelikult ortogonaalsusetingimusteks (vt. ül. 1)

$$y'(x_1) \frac{\delta y_1}{\delta x_1} = -1, \quad y'(x_2) \frac{\delta y_2}{\delta x_2} = -1. \quad (3.10')$$

Variatsioonülesande lahendamiseks tuleb kõigepealt leida Euleri võrrandi (3.9) üldlahend. Meelevaldsete konstantide määramiseks aga tuleb nüüd kasutada transversaalsusetingimusi.

3. Tükati sileda ekstremaali juht.

Nagu märkisime lihtsaima variatsioonprobleemi lõpul (§ 1, 7), garanteerib tingimus $F_{y'y'} \neq 0$ ekstremaali teise tuletise pidevuse. On olemas aga terve rida selliseid variatsioonprobleeme, kus funktsionaal saavutab ekstremaalse väärtuse tükati siledatel kõveratel (näiteks Fermat' printsiibiga seotud probleemid peegeldumistega).

Vaatleme konkreetselt jälle funktsionaali (3.1), kuid seekord tavalisi ääretingimusi

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

rahuldavatel funktsioonidel, mille esimene tuletis on katkev mingis punktis c ($a < c < b$) (mujal aga diferentseeruv). Vahemikel $[a, c)$ ja $(c, b]$ rahuldab funktsioon $y(x)$ loomulikult Euleri võrrandit (3.9) (põhjendada!) ja nii saame kummagi vahemiku jaoks üldlahendid, mis mõlemad sisaldavad kahte meelevaldset konstanti (kokku on meelevaldseid konstante 4). Nende määramiseks on meil esialgu vaid kaks ääretingimust. Ülejäänud kahe tingimuse saamiseks peame silmas, et antud probleemi korral võime funktsionaali J esitada summana

$$J = \int_a^c F(x, y, y') dx + \int_c^b F(x, y, y') dx = J_1[y] + J_2[y].$$

Esimese funktsionaali varieerimisel on otspunkt $x=a$ fikseeritud, kuid teine otspunkt $x=c$ on vaba, funktsionaali J_2 korral on aga otspunkt $x=b$ fikseeritud, kuid otspunkt $x=c$ on samuti vaba. Seega ülesande lahendikõvera $y(x)$ korral (vt. 3.5)

$$\delta J_1 = F_{y'}|_{x=c-0} \delta y_1 + (F - y'F_{y'})|_{x=c-0} \delta x_1,$$

$$\delta J_2 = -F_{y'}|_{x=c+0} \delta y_1 - (F - y'F_{y'})|_{x=c+0} \delta x_1.$$

Ekstreemumitingimusest

$$\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 = 0$$

saame variatsioonide δx_1 ja δy_1 sõltumatuse tõttu:

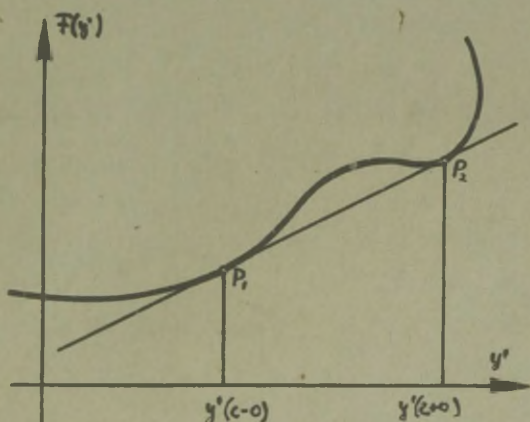
$$\left. \begin{aligned} F_{y'}|_{x=c-0} - F_{y'}|_{x=c+0} &= 0, \\ (F - y'F_{y'})|_{x=c-0} - (F - y'F_{y'})|_{x=c+0} &= 0. \end{aligned} \right\} (3.11)$$

Tingimusi (3.11) nimetatakse Weierstrassi-Erdmani tingimuseks.

Weierstrassi-Erdmani tingimustele võib anda järgmise, lihtsa geomeetrilise tõlgenduse. Selleks fikseerime muutujad x ja y ning vaatleme $F(x, y, y')$ funktsioonina ainult kolmandast argumendist y' . Esimene tingimustest (3.11) tähendab, et selle funktsiooni puutujad on punktides $y'(c-0)$ ja $y'(c+0)$ paralleelsed. Teine tingimustest, mille kirjutame

$$F|_{x=c-0} - F|_{x=c+0} = F_{y'} y' |_{c-0} \equiv F_{y'}|_{x=c} (y'|_{x=c-0} - y'|_{x=c+0}) = 0,$$

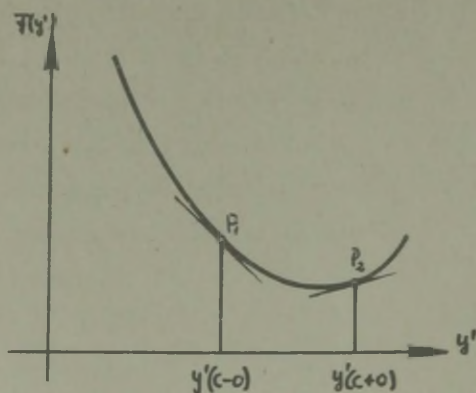
aga tähendab, et need puutujad ka ühtivad (vt. joon. 11).



Joon. 11.

Siit aga selgub ühtlasi, et tingimuse $F_{y'y'} \neq 0$ korral peab lähendikõver olema tingimata sile. Tõepoolest, kui näiteks $F_{y'y'} > 0$, siis on kõver $F = F(y')$ nõgus ja temale

erinevates punktides $y'(c-0)$ ja $y'(c+0)$ tõmmatud puutujad ei saa ühtida (vt. joon. 12.).



Joon. 12.

4. Variatsioonülesanded ekstremaali peegeldumise või murdumisega.

Variatsioonülesanded ekstremaali peegeldumise või murdumisega on üldistuseks Fermat' printsibist tuletatud opti-
kaprobleemidele ja on tihedalt seotud eelmises punktis vaa-
deldud tükati sileda ekstremaali üldjuhuga.

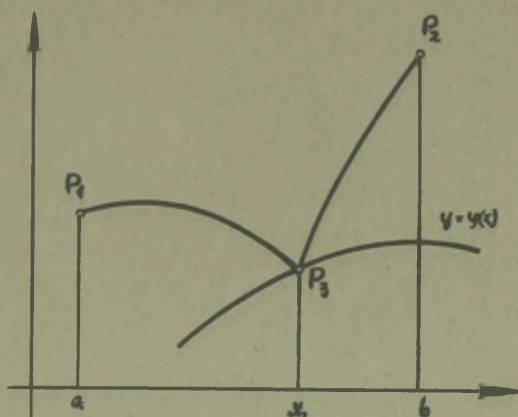
Ülesannet peegeldumisega võime formuleerida järgmiselt:
leida punkte $P_1 = (a, A)$ ja $P_2 = (b, B)$ ühendav kõver, mis
teeb ekstremaalseks funktsionaali

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

kusjuures otsitav kõver võib jõuda punkti P_2 alles pärast
peegeldumist etteantud kõveral $y = \varphi(x)$ (vt. joon. 13).

Ülesande lahendamiseks on otstarbekas lahutada funktsionaal kaheks:

$$J[y] = \int_a^c F dx + \int_c^b F dx = J_1[y] + J_2[y].$$



Joon. 13.

Kasutades esimese variatsiooni avaldist (3.5), leiame üldisest ekstreemumitingimusest

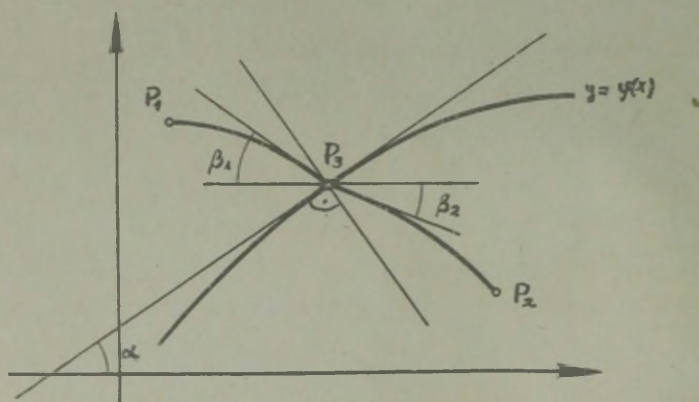
$$\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 = 0 \quad (3.12)$$

et lõikudel $[a, c]$ ja $[c, b]$ peab funktsioon $y(x)$ rahuldama Euleri võrrandeid. Õeldus veendumiseks tuleb fikseerida $y(x)$ ühel lõikudest ja varieerida teisel lõigul, seal on aga tegemist juba fikseeritud otspunktide juhuga. Kummagi lõigu jaoks määratud Euleri võrrandi üldlahendites on kokku 4 meelevaldset konstanti, teadmata on ka tipupunkti P_3 asukoht (s. t. koordinaat c). Nende 5 suuruse leidmiseks on olemas 2 ääretingimust, lahendikõvera pidevuse nõue punktis P_3 ja tingimus, et punkt P_3 asub kõveral $y = \varphi(x)$,

viienda tingimuse annab üldine ekstreemumi tarvilikkuse tingimus (3.12). Kirjutades välja δJ_1 ja δJ_2 avaldised ning arvestades, et 1) funktsioon $y(x)$ rahuldab mõlemal lõigul Euleri võrrandit, 2) et punktid P_1 ja P_2 on fikseeritud ja 3) et $\delta y_3 = \varphi(c) \delta x_3$, saame pärast δx_3 kui meelevaldse suurusega läbitaandamist tingimusele (3.12) anda järgmise kuju:

$$[F + (\varphi' - y') F_{y'}] \Big|_{x=c-0} = [F + (\varphi' - y') F_{y'}] \Big|_{x=c+0} \quad (3.13)$$

Analoogiliselt on käsitletav ka variatsioonülesanne murdumisega. Sel juhul on integrand funktsionaalis $J[y] = \int_k F(x, y, y') dx$ katkev mõnel joonel $y = \varphi(x)$. Punktid P_1 ja P_2 aga asuvad teine teisel pool kõverat $y = \varphi(x)$ (vt. joon. 14).



Joon. 14.

Ülesandeid § 3 juurde.

1. Näidata, et funktsionaali $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} v(x, y) \sqrt{1+y'^2} dx$ korral taandub transversaalsusetingimus (3.10) ortogonaalsusetingimuseks (3.10').

2. Leida koordinaatide alguspunkti sirgega $y_1 = mx_1 + k$ ühendavate kõverate hulgast kõver, mis teeb ekstremaalseks funktsionaali

$$J = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx.$$

Vastus: ringi kaared

$$y = \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \left(x + \frac{k}{m}\right)^2}.$$

3. Lahendada eelmine ülesanne juhul, kui lubatud kõverad ühendavad koordinaatide alguspunkti ringjoonega $(x-9)^2 + y^2 = 9$.

Vastus: ringi kaared $y = \pm \sqrt{8x - x^2}$.

4. Leida koordinaatide alguspunkti vertikaalsirgega $x = \frac{y}{4}$ ühendavate kõverjoonte hulgast kõver, mis teeb ekstremaalseks funktsionaali

$$J = \int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2) dx.$$

Vastus: $y \equiv 0$.

5. Lahendada brahhistokrooniülesanne (vt. § 1, 1 ja ülesanne 4) juhul, kui punkt P_1 on fikseeritud, kuid punkt P_2 võib liikuda a) mööda vertikaalsirget $x = x_1$, b) mööda horisontaalsirget $y = y_1$.

6. Leida vertikaalsirgeid $x = x_1$ ja $x = x_2$ ühendavate kõ-

verjoonte hulgast kõver, mis teeb ekstremaalseks funktsionaali

$$a) J = \int_{x_1}^{x_2} (a xy - y^3) dx ;$$

$$b) J = \int_0^1 (y^2 - x^2 y') dx .$$

Vastus:

$$a) y^2 = \frac{a}{3} x ; \quad b) y = -x .$$

7. Leida koordinaatjoonte alguspunkti tasandiga $x = x_1$ ühendavate kõverate hulgast kõver, mis teeb ekstremaalseks funktsionaali

$$J = \int_0^{x_1} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx .$$

Vastus: Kui $\cos x_1 \neq 0$, siis $y \equiv 0$, $z \equiv 0$;

kui $\cos x_1 = 0$, siis $y = C \sin x$, $z = -C \sin x$ (konstant C jääb määramatuks).

8. Üldistada ülesandes 1 tõestatud teoreem funktsionaalile

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} r(x, y_1, \dots, y_n) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n y_i'^2} dx .$$

9. Kasutades esimeses punktis arendatud meetodikat, leida esimese variatsiooni üldine avaldis funktsionaali

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'') dx \text{ jaoks.}$$

Märkus: Tuleb kasutada seoseid $\delta y(x_1) = y'(x_1) \delta x_1 + \delta y_1$;

$$\delta y'(x_1) = y''(x_1) \delta x_1 + \delta y_1' .$$

$$\text{Vastus: } \delta J = \int_{x_1}^{x_2} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''}) \delta y(x) dx +$$

$$+ \left[(F - y' F_y, -y'' F_{y''} + y' \frac{d}{dx} F_{y''}) \right]_{x=x_i} \delta x_i + \\ + (F_y, -\frac{d}{dx} F_{y''})_{x=x_i} \delta y_i + F_{y''} \Big|_{x=x_i} \delta y_i \Big|_1^2.$$

10. Leida funktsionaali $J = \int_0^1 (1+y'^2) dx$ ekstreemum, kui $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; $y(1) = 1$, kuid $y'(1)$ võib olla meelevaldne.

Vastus: $y = x$.

11. Leida funktsioon, millel funktsionaal $J = \int_0^1 (y'^2 - 2xy) dx$ saavutab ekstreemumi, kusjuures $y(0) = y'(0) = 0$, $y(1) = \frac{1}{120}$, kuna $y'(1)$ on meelevaldne.

Vastus:

$$y = \frac{x^5}{120} + \frac{1}{24} (x^2 - x^3).$$

12. Lahendada alljärgnevad variatsioonülesanded, kui on võimalik, siis leida ka ühe tipupunktiga tükati siledad lahendid:

a) $J[y(x)] = \int_0^4 (y'-1)^2 (y'+1)^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(4) = 2$;

b) $J[y(x)] = \int_0^2 y'^2 [4 - y'^2] dx$, $y(0) = 0$, $y(2) = 1$;

c) $J[y(x)] = \int_a^b (y'^2 + 2xy - y^2) dx$, $y(a) = A$, $y(b) = B$;

d) $J[y(x)] = \int_0^a y'^3 dx$, $y(0) = 0$, $y(a) = A$;

e) $J[y(x)] = \int_0^{x_1} \sin y' dx$, $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$.

13. Näidata, et funktsionaali

$$J[y] = \int_a^b v(x, y) \sqrt{1+y'^2} dx$$

korral viib tingimus (3.13) tavalisele peegeldumisseadusele (langemis- ja peegeldumisnurkad on võrdsed).

14. Näidata, et tingimus (3.13) viib murdumisega variatsioonülesandes $J[y] = \int_a^b v(x, y) \sqrt{1+y'^2} dx$,

$$\text{kus } v(x, y) = \begin{cases} v_1(x, y) & \text{piirkonnas I,} \\ v_2(x, y) & \text{piirkonnas II,} \end{cases}$$

üldistatud murdumiseseadustele

$$\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta_1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta_2)\right]} = \frac{v_2(x_1, y_1)}{v_1(x_2, y_2)} .$$

Märkus: Tasapinnalisel juhul viib Fermat' printsiip ülesannetes 13 ja 14 vaadeldud funktsionaalidele.

§ 4. TEINE VARIATSIOON JA SELLEGA SEOTUD PROBLEEMID.

1. Funktsionaali teine variatsioon.

Kahe muutuja funktsionaali $J_e[y, z]$, kus $y(x)$ ja $z(x)$ on mingi lineaarse normeeritud funktsiooniruumi R elemendid, nimetatakse bilineaarseks, kui ta iga fikseeritud z korral on lineaarne y suhtes ja iga fikseeritud y korral lineaarne z suhtes. Bilineaarset funktsionaali, kus $y = z$, nimetatakse ruutfunktsionaaliks.

Näiteks funktsionaal

$$J_e[y, z] = \int_a^b A(x) y(x) z(x) dx,$$

kus $A(x)$ on fikseeritud funktsioon, on bilineaarne, kuid

$$J[y] = J_e[y, y] = \int_a^b A(x) y^2(x) dx$$

on ruutfunktsionaal.

Ruutfunktsionaali $J[y] = J_e[y, y]$ nimetatakse positiivseks, kui iga $y \neq 0$ korral vaadeldavast ruumist $J_e[y, y] > 0$, kui aga eksisteerib ka selline positiivne konstant $\kappa > 0$, et $J[y, y] \geq \kappa \|y\|^2$ iga $y \in R$ korral, siis nimetame funktsionaali positiivselt määratuks.

Kui funktsiooniruumis R defineeritud funktsionaali $J[y]$ juurdekasvu

$$\Delta J = J[y + h] - J[y]$$

saab esitada kujul

$$\Delta J = \delta J[y, h] + \frac{1}{2} \epsilon[y, h, h] + \beta[y, h] \|h\|^2, \quad (4.1)$$

kus δJ on h suhtes pidev lineaarne funktsionaal (s. t. I variatsioon), φ - h suhtes pidev ruutfunktsionaal ja $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \beta [y, h] = 0$, siis nimetame funktsionaali kaks korda diferentseeruvaks. Ruutfunktsionaali $\varphi [y, h, h]$ nimetatakse funktsionaali teiseks variatsiooniks ehk teist järku diferentsiaaliks:

$$\delta^2 J = \varphi [y, h, h]. \quad (4.1')$$

Lihtsaima funktsionaali

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1.5)$$

teise variatsiooni võime fikseeritud otspunktide korral kergesti leida arendades ΔJ avaldises $F(x, y+h, y'+h')$ Taylori ritta kohal (x, y, y') kuni III järku liikmeteni (vt. § 1.7):

$$\delta^2 J = \int_a^b [F_{yy} h^2 + 2 F_{yy'} h h' + F_{y'y'} h'^2] dx. \quad (4.2)$$

Analoogiliselt on leitavad ka lihtsaima funktsionaali üldistuste (2.1), (2.6) ja (2.12) ja (2.15) teised variatsioonid.

Teist variatsiooni võib defineerida ka kui variatsiooni esimest järku variatsioonist

$\delta^2 J [y, h] = \delta (\delta J [y, h])$,
 vaadeldes seejuures $\delta J [y, h]$ funktsionaalina muutujast h .

2. Ekstreemumitingimused ja teine variatsioon.

Teoreem 1. Selleks, et funktsionaal $J[y]$, mis on defineeritud normeeritud funktsiooniruumis R , omaks kohal $y = y_0$ miinimumi (maksimumi), on tarvilik, et iga lubatava h korral

$$\delta^2 J[y_0, h] \geq 0. \quad (4.3)$$

Tõestuseks peame silmas, et ekstreemumkohas

$$\delta J[y_0, h] = 0 \quad (\S 1,5)$$

ja järelikult

$$\Delta J = \frac{1}{2} \delta^2 J[y_0, h] + \beta [y_0, h] \|h\|^2.$$

Küllalt väikese $\|h\|$ korral ühtib ΔJ märk $\delta^2 J[y_0, h]$ märgiga ja järelikult negatiivse teise variatsiooni korral ei saa funktsionaal omada kohal y_0 miinimumi.

Teoreem 2. Kui normeeritud funktsiooniruumis R defineeritud funktsionaali $J[y]$ esimene variatsioon on kohal y_0 null:

$$\delta J[y_0] = 0$$

ja teine variatsioon positiivselt määratud, siis on y_0 funktsionaali miinimumpunkt (ekstreemumi olemasolu piisav tingimus).

Tõestuseks valime positiivse arvu $\varepsilon > 0$ nii väikese, et iga $\|h\| < \varepsilon$ korral $\beta < \frac{\kappa}{2}$. Siis

$$\Delta J = \delta^2 J[h] + \beta \|h\|^2 > \frac{\kappa}{2} \|h\|^2 > 0,$$

kui $\|h\| < \varepsilon$, s. t. funktsionaalil on kohal y_0 minimum.

Märgime, et vaadeldavas teoreemis ei saa tingimust

$$\delta^2 J[y_0, h] \geq \kappa \|h\|^2$$

(funktsionaali teine variatsioon on positiivselt määratud) asendada nõrgemaga - tingimusega, et funktsionaali teine variatsioon oleks positiivne (vt. ül. 1).

3. Legendre'i tingimus.

Vaatleme nüüd jälle funktsionaali (1.5)

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (1.5)$$

mis on määratud fikseeritud otspunktidega kõveratel

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (1.6)$$

Leitud teise variatsiooni avaldistes (4.2):

$$\delta^2 J = \int_a^b [F_{yy} h^2 + 2F_{yy'} h h' + F_{y'y'} h'^2] dx$$

integreerime teist liiget ositi, pidades silmas, et $R(a) = R(b) = 0$. Saame

$$\delta^2 J = \int_a^b (Q h^2 + P h'^2) dx, \quad (4.4)$$

kus

$$\left. \begin{aligned} Q &= F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \\ P &= F_{y'y'} \end{aligned} \right\} \quad (4.4')$$

Nagu eelmises punktis nägime, taandub ekstreemumi lähem uurimine teise variatsiooni $\delta^2 J$ uurimisele või lihtsaima variatsioonülesande korral ruutfunktsionaali (4.4) uurimise-

le. Käesolevas kursuses me seda probleemi üksikasjalikult ei käsitle, vaid piirdume ainult põhiliste tulemuste refereerimise ja mõnede konkreetsete näidete vaatlemisega.

Formuleerime kõigepealt veel ühe miinimumi tarviliku tingimuse nn. Legendre' tingimuse.

Selleks, et funktsionaal $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ saavutaks kõveral $y = y_0(x)$ miinimumi, on tarvilik, et mööda seda kõverat

$$F_{y'y'} \gg 0. \quad (4.5)$$

Tõestuseks vaatleme ruutfunktsionaali (4.4)

$$\int_a^b (P h'^2 + Q h^2) dx$$

ja näitame, et väitevastane eeldus, nagu võiks mõnes punktis $x = x_0$ olla $P(x_0)$ negatiivne, viib tulemusele, et sobiva h valiku korral on ka ruutfunktsionaal (4.4) negatiivne. See aga on vastuolus miinimumi tarviliku tingimusega (vt. § 4.2. teoreem 1). Oeldus veendumiseks valime h selliselt:

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{\sigma} \left(1 + \frac{x-x_0}{\sigma}\right), & x_0 - \sigma \leq x \leq x_0, \\ \sqrt{\sigma} \left(1 - \frac{x-x_0}{\sigma}\right), & x_0 \leq x \leq x_0 + \sigma, \\ 0, & x \geq x_0 + \sigma, \quad x \leq x_0 - \sigma. \end{cases} \quad (4.6)$$

Lõigul $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$: $(h(x))'^2 = \frac{1}{\sigma}$ ja $h^2 \leq \sigma$ ja teise variatsiooni avaldises

$$\int_{x_0 - \sigma}^{x_0 + \sigma} Q h^2 dx + \int_{x_0 - \sigma}^{x_0 + \sigma} P h'^2 dx$$

ligineb esimene liidetav nullile, teine aga väärtusele

$P(x_0) < 0$, kui $\epsilon \rightarrow 0$.

Legendre püüdis näidata, et range võrratuse

$$F_{y'y'} > 0 \quad (4.5')$$

kehtivus mööda ekstremaali $y_0(x)$ ongi miinimumi piisavaks tingimuseks.

Selleks ta teisendas teise variatsiooni järgmisse kujju

$$\delta^2 J[R] = \int_a^b [P h'^2 + 2 W h h' + (Q+W') h^2] dx. \quad (4.7)$$

See on alati võimalik, sest iga diferentseeruva $W(x)$ korral annavad tingimuste $h(a) = h(b) = 0$ tõttu juurdelisatud liikmed nulli:

$$\int_a^b (h^2 W' + 2 h h' W) dx = \int_a^b \frac{d}{dx} (h^2 W) dx = 0.$$

Legendre'i väide oleks tõestatud, kui õnnestuks valida funktsioon W , nii et valemis (4.7) oleks nurksulgudes täisarv. Selleks aga peab funktsioon W rahuldama diferentsiaalvõrrandit

$$P(Q+W') = W^2. \quad (4.8)$$

See diferentsiaalvõrrand on alati lahenduv lokaalselt, kuid ei tarvitse omada küllalt pikal lõigul diferentseeruvat lahendit.*

* Näiteks kui $P = -1$, $Q = 1$, siis $W' + 1 + W^2 = 0$ ja $W(x) = \tan(c-x)$. On selge, et kui $b-a > \pi$, siis ei ole võrrandil kogu lõigul $[a, b]$ diferentseeruvat lahendit.

4. Kaaspunktid ja Jacobi tingimus.

Kuigi Legendre'i idee otsida miinimumi piisavat tingimust lokaalse, s. t. mitte lahendikõvera kohta tervikuna, vaid tema üksikute punktide kohta kehtiva võrratuse $F_{y_i y_i} > 0$ kujul, on põhimõtteliselt väär,* on tema lahendusvõtte - teise variatsiooni esitamine täisdiferentsiaali kujul - otstarbekas. Selle lahendusvõttega seotud diferentsiaalvõrrandi (4.8) uurimine võimaldab aga formuleerida juba täpsemaid miinimumi olemasolu tingimusi (ka mittelokaalseid).

Kõigepealt märgime, et võrrand (4.8) (nn. Riccati võrrand) on uue tundmatu funktsiooni h sissetoomise abil

$$W = - \frac{h'}{h} P \quad (4.9')$$

viidav kujju

$$- \frac{d}{dx} (P h') + Q h = 0. \quad (4.9'')$$

Võrrand (4.9'') on aga ruutfunktsionaali (4.4) Euleri võrrand ning teda nimetatakse funktsionaali (1.5) Jacobi võrrandiks.

Toome nüüd sisse kaaspunktide mõiste - ruutfunktsionaali $\delta^2 J[y, h]$ suhtes. Me nimetame punkti \tilde{x} punkti $x = a$

* On selge, et kui tingimus (4.5') on täidetud kõvera kaartel AB ja BC , siis on ta täidetud ka kogu kaarel AC . Ometi ei järeldu alati asjaolust, et kõvera kaared AB ja BC teevad funktsionaali minimaalseks, veel see, et ka kaar AC teeb sama funktsionaali minimaalseks. Näiteks sfääril on suurringi kaar lühim kahte punkti ühendav kõver, kui tema pikkus on väiksem poolest übermõõdust, pole aga seda, kui pikkus ületab poole übermõõtu.

kaaspunktiks, kui võrrandil (4.9') on mittetriviaalne lahend, mis on null punktides $x=a$ ja $x=\tilde{x}$. Punkte $x=a$ ja $x=\tilde{x}$ nimetame funktsionaali $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ suhtes kaaspunktideks, kui nad on kaaspunktideks funktsionaali $J[y]$ teisele variatsioonile $\delta^2 J[y]$.

Kui osutub, et funktsioon $y=y(x)$

1) rahuldab funktsionaali $J[y(x)]$ (1.5) Euleri võrrandit

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

ja ääritingimusi (1.6);

2) mööda seda kõverat $P(x) \equiv F_{y''}(x, y(x), y'(x)) > 0$ (Legendre'i tugev tingimus (4.5'));

3) lõigul $[a, b]$ ei leidu punkti α kaaspunkte (Jacobi tugev tingimus),

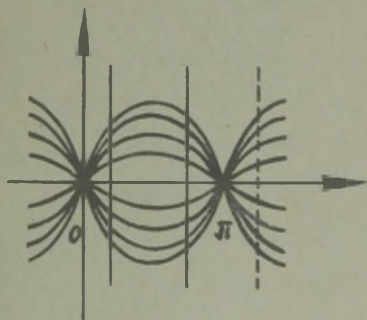
siis sellel kõveral saavutab funktsionaal nõrga miinimumi (maksimumi korral on võrratuse (4.5') märk vastupidine).

Toodud tingimused (Jacobi tingimuse tõime tõestuseta) ongi nõrga miinimumi piisavateks tingimusteks.

Kaaspunkti mõistele ja Jacobi tingimusele võime anda lihtsa geomeetrilise interpretatsiooni tuues sisse nn. ekstremaalide välja mõiste. Me ütleme, et üheparameetriline kõveraparv $y=y(x, c)$ moodustab piirkonnas D a) pärisvälja, kui läbi selle piirkonna iga punkti läheb üks ja ainus parve kõver b) tsentraalse välja, kui parve kõverad, täites terve piirkonna, lõikuvad kõik parajasti piirkonna D ühes punktis. Eriti saame ekstremaalide välja, kui see on moodustatud mõne variatsioonülesande Euleri võrrandite lahendite

poolt. Kui mingi konkreetne funktsioon sisaldub mõnes ekstremaalide väljas, siis räägime, et ta on lülitatav ekstremaalide välja.

Näiteks on funktsioon $y = \sin x$ lülitatav lõigul $0 < a \leq x \leq b < \pi$ pärisvälja $y = C \sin x$, lõigul $0 \leq x \leq b < \pi$ tsentraalsesse välja $y = C \sin x$, aga lõigul $[0, b]$ [$\pi < b$] ei moodusta funktsioonid $C \sin x$ enam välja (on vähemalt kaks punkti, kus parve kõverad lõikuvad) (vt. joon. 15).



Joon. 15.

Kui funktsioon $y(x)$ on ekstremaaliks funktsionaalile $J[y]$, siis varieeritud naaberfunktsioon $y(x) + h(x)$ on samuti ekstremaal, kui funktsioon $h(x)$ rahuldab funktsionaali $J[y]$ Jacobi võrrandit. Üeldus veendumiseks asetame naaberfunktsiooni Euleri võrrandisse ja arendame tulemuse ritta funktsiooni h astme-

te järgi, piirdudes ainult lineaarsete liikmetega.

Vaatleme nüüd meie lihtsa variatsioonülesande lahendikõverat $y(x)$ ja samast alguspunktist $P_0 = (a, A)$ väljuvate naaberekstremaalide kimpu. (Viimase saame, kui näiteks elimineerime Euleri võrrandi üldlahendist ääretingimuse abil ühe meelevaldsetest parameetritest). Jacobi tingimus punkti

a kaaspunktide puudumise kohta lõigul (a, b) tähendab, et ükski ekstremaali $y(x)$ punktist P_0 väljuvatest naaberekstremaalidest ei lõika lõigul (a, b) enam ekstremaali $y(x)$ (funktsiooni $h(x)$ ainsaks nullkohaks on punkt a). Järelikult on lahendikõver lülitatav punktist P_0 väljuvasse tsentraalsesse ekstremaalide välja.

5. Tugeva ekstreemumi piisavatest tingimustest.

Näiteid.

Kuna iga tugev ekstreemum on samaaegselt ka nõrgaks ekstreemumiks, siis langevad tarvilikud tingimused ühte nõrga ekstreemumi tarvilike tingimustega. Piisavad tingimused peavad olema mõnevõrra kitsamad. Osutub, et kitsendada tuleb Legendre'i tingimust. Tuleb nõuda, et $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ punktides (x, y) , mis on lähedased lahendiekstremaali punktidele, kuid y' igasuguste väärtuste korral. Kahjuks on see tingimus rakendatav ainult siis, kui funktsioon $F(x, y, y')$ on y' igasuguse väärtuse korral arendatav Tayloriga ritta:

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + F_{y'}(x, y, p)(y' - p) + \frac{1}{2} F_{y'y'}(x, y, p)(y' - p)^2 + \dots \quad (4.10)$$

Sama nõue on oluline ka nõrga ekstreemumi uurimisel, ainult siis peab rittaarendus (4.10) olema võimalik nende y' väärtuste korral, mis on lähedased lahendikõvera tõusule.

Kui funktsiooni $F(x, y, y')$ ei saa arendada Tayloriga ritta (4.10) või Legendre'i tingimus ei anna tugeva ekstreemumi kohta positiivset vastust, tuleb see asendada täpsema,

kuid keerukama tingimusega. Selleks tuuakse sisse nn. Weierstrasse E -funktsioon

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) F_{y'}(x, y, p) \quad (4.11)$$

(kus p on uuritava lahendikõvera tõus). Nõrga miinimumi korral

$$E(x, y, p, y') \geq 0 \quad (4.11')$$

punktides (x, y) , mis on küllalt lähedased uuritava ekstreemali punktidele ja $y'(x)$ puhul, mis on lähedased väärtustele $p(x)$. Tugeva miinimumi korral peab võrratus (4.11') kehtima igasuguste y' väärtuste korral. Maksimumitingimustes on võrratus (4.11') vastupidise märgiga. On lihtne näha, et arenduse (4.10) olemasolul läheb tingimus (4.11') üle Legendre'i tingimuseks.

Näitena uurime funktsionaali

$$J[y] = \int_0^a y'^3 dx \quad (a > 0)$$

ekstreemumit rajatingimustel $y(0) = 0$, $y(a) = b$. Ekstreemaliideks (vt. § 1, 8^d) on sirged $y = C_1 x + C_2$, milledest rahuldab rajatingimusi $y = \frac{b}{a} x$. Seda sirget saab lülitada tsentraalsesse ekstreemaliide välja $y = C_1 x$ keskpunktiga $P_0 = (0, 0)$, järelikult on Jacobi tingimus täidetud. Kuna funktsioon $F(x, y, y') = y'^3$ on iga lõpliku y' korral arendatav Taylori ritta, võime kasutada Legendre'i tingimusi. On kerge näha, et

$$F_{y'y'} = 6y' = 6 \frac{b}{a} > 0, \quad \text{kui } b > 0,$$

(nõrk miinimum) ja

$$F_{y'y'} = 6 \frac{b}{a} < 0, \text{ kui } b < 0,$$

(nõrk maksimum). Tugevat ekstreemumit ei saa olla, sest avaldis $F_{y'y'} = 6 y'$ ei säilita märki igasuguste y' väärtuste korral. Kui $b = 0$, on ka $F_{y'y'} = 0$ ja funktsionaalil ei ole siis üldse ekstreemaalset väärtust.

Legendre'i tingimuse asemel võib kasutada ka Weierstrasse'i E -funktsiooni kaudu antud tingimust (4.11') (kuigi üldiselt on viimase uurimine komplitseeritum). Meie juhul

$E(x, y, p, y') = y'^3 - p^3 - 3p^2(y' - p) = (y' - p)^2(y' + 2p)$
ekstreemaalil $y = \frac{b}{a} x$ on väljatõus $p = y' = \frac{b}{a}$, kui y' väärtused on ligidased väärtusele $p = \frac{b}{a}$ nii et $|y'| < 2p$, siis E säilitab märki, kui $b > 0$, siis $E \geq 0$ (nõrk miinimum), kui $b < 0$, siis $E \leq 0$ (nõrk maksimum).

Teise näitena vaatleme funktsionaali

$$J[y] = \int_0^a \frac{y}{y^{1/2}} dx$$

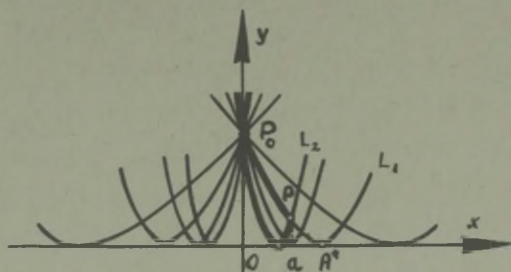
ekstreemumit rajatingimustel $y(0) = 1$, $y(a) = b$ ($a > 0$, $0 < b < 1$). Kuna on tegemist juhuga (1.9'), saame leida kohe Euleri võrrandi esimese integraali

$$\frac{y}{y^{1/2}} + y' \frac{2y}{y^{3/2}} = c \quad \text{ehk} \quad y' = 2C_1 \sqrt{y}$$

ja $y = (C_1 x + C_2)^2$. Punktist $P_0 = (0, 1)$ väljuvas paraboolide kimbus $y = (C_1 x + 1)^2$ saab leida kaks parabooli, mis läbivad punkti $P_1 = (a, b)$

$$y = \left(\frac{\sqrt{b}-1}{a} x + 1 \right)^2 \quad \text{ja} \quad y = \left(\frac{-\sqrt{b}-1}{a} x + 1 \right)^2$$

(vt. joonis 16). Esimese parabooli L_1 kaart P_0P saab lülitada tsentraalsesse välja lõigul $[0, a]$ (selle moodustavad paraboolide kaared, mille lagipunkt A^* asub x -teljel väljaspool lõiku $(0, a)$ (paremal pool).^{*} Uuritaval



Joon. 16.

ekstremaalil $f_{y'y'} = \frac{6y}{y'^4} > 0$ ja iga y' puhul. Siiski ei saa väita, et funktsionaal saavutab tugeva miinimumi vaadeldaval ekstremaalil, sest Tayloriga arendus ei ole võimalik iga y' korral. Nõrga miinimumi kindlakstegemiseks aga Lagrange'i kriteerium sobib, sest Tayloriga arendus (4.10) on olemas lähedikkõverale ligidaste y' väärtuste korral. Kuna ka E -funktsioonis

* Üldjuhul on ekstremaalide lõikumise uurimisel otsustav kasutada järgmist diferentsiaalgeomeetria teadaolevat fakti: üheparameetrilise kõveraparve $y = y(x, c)$ kaks lähedast kõverat saavad lõikuda vaid diskriminantkõvera külalt väikeses ümbruses. Diskriminantkõver (kujutab enesest kõveraparve mähijoont või singulaarsete punktide geometriilist kohta) on määratud võrrandisüsteemiga $y = y(x, c)$, $\frac{\partial y}{\partial c}(x, c) = 0$.

$$E(x, y, p, y') = \frac{y(y' - p)^2(2y' + p)}{y^2 p^3}$$

tegur $2y' + p$ ei säilita märki suvalistel y' väärtustel, siis tugevat miinimumi ei esine.

Ülesandeid § 4 juurde.

1. Näidata, et ruumis C on funktsionaali

$$J[y] = \int_0^1 y^2(x) \left[\frac{1}{2}x + y(x) \right] dx$$

teine variatsioon positiivne punktis $y_0(x) \equiv 0$, kuid funktsionaalil ei ole punktis $y_0(x) \equiv 0$ miinimumi.

Märkus: Valides

$$y(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ \varepsilon - x, & \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq \varepsilon, \\ 0, & x \geq \varepsilon, \end{cases}$$

võib kergesti veenduda, et funktsioon $y(x)$: 1) asub funktsiooni $y_0(x) \equiv 0$ ε -naabruses ja 2) muudab funktsionaali negatiivseks.

2. Leida funktsionaali

$$J[y] = \int_0^a [y'^2 - y^2] dx$$

ekstremaal, mis ühendab punkte $P_0 = (0, 0)$ ja $P_1 = (a, 0)$, ja uurida, milliste a väärtuste korral saab teda lülitada ekstremaalide välja.

Märkus: Ülesande lahendamiseks võib uurida punktist $P_1 = (a, 0)$ väljuvate ekstremaalide parve või uurida Jacobi võrrandi lahendeid, mis rahuldavad tingimust $h(0) = 0$,

ja leida, kus paiknevad punkti $x=0$ kaaspunktid.

3. Kontrollida, kas Jacobi tingimus on täidetud funktsionaali

$$J[y] = \int_0^a [y'^2 + y^2 + x^2] dx$$

ekstremaali korral, mis ühendab punkte $P_0 = (0, 0)$ ja $P_1 = (a, 0)$.

Vastus: on täidetud iga a korral.

4. Uurida funktsionaali

$$J[y] = \int_0^a [6y'^2 - y'^4 + yy'] dx$$

ekstreemumit rajatingimustel $y(0) = 0$, $y(a) = b$.

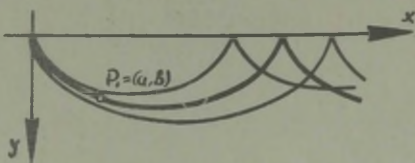
Märkus: Ekstremaalideks on sirged (vt. § 1, 8^d) $y = C_1x + C_2$ ning lähendikõver on lülitatav tsentraalsesse ekstremaalide välja $y = C_1x$. Juba Legendre'i kriteeriumi põhjal saab näidata, et kui $\frac{b}{a} > 1$, siis on nõrk maksimum, kui $\frac{b}{a} < 1$, siis on nõrk miinimum. Tugeva ekstreemumi kohta aga positiivset otsust ei saa anda. Kasutades E -funktsiooni $E = -(y'-p)^2[y'^2 + 2py' - (b-3p)^2]$ saab näidata, et tugeva maksimumiga on tegemist siis, kui $p = \frac{b}{a} > \sqrt{3}$. Selleks tuleb iga p korral uurida, milliste y' väärtuste juures muudab E -funktsiooni nurksulu avaldis märki.

5. Uurida brahhistrokrooni ülesande (ül. 4 § 1) ekstreemumit rajatingimustel $y(0) = 0$, $y(a) = b$

$$J[y(x)] = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y'}} dx.$$

Märkus: Alguspunkti läbivad tsükloidi kaared $x = C_1(\tau - \sin \tau)$, $y = C_1(1 - \cos \tau)$ moodustavad tsentraalse välja, kuhu kuulub ka

lahendikõver kui $C_1 > \frac{x_1}{2\pi}$ (tsükloidid, mille puhul $C_1 < \frac{x_1}{2\pi}$ lõikuvad lõigul $(0, x_1)$) (vt. joon. 17). Kuna iga y' korral on integrand arendatav ritta (4.10), võime kasutada Lagrange'i tingimust.



Joon. 17.

Vastus: tugev miinimum.

6. Lehendada järgmised variatsioonülesanded ja uurida ekstreemumite iseloomu.

$$a) J[y] = \int_0^1 [y'^2 + 12xy] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2;$$

$$b) J[y] = \int_0^2 (xy' + y'^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(2) = 0;$$

$$c) J[y] = \int_0^a (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx, \quad a > 0, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0;$$

$$d) J[y] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx, \quad y(-1) = 1, \quad y(2) = 4;$$

$$e) J[y] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 5;$$

$$f) J[y] = \int_0^{\pi/4} (4y^2 - y'^2 + 8y) dx, \quad y(0) = -1, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0;$$

$$g) J[y] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y}, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1, \quad (x_1 > 0, y_1 > 0);$$

$$h) J[y] = \int_1^2 \frac{x^3}{y^{1/2}} dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 4;$$

$$i) J[y] = \int_1^3 [12xy - y'^2] dx, \quad y(1) = 0, \quad y(3) = -24.$$

Vastused: a) tugev miinimum kõveral $y = x^3 + x$;

b) tugev miinimum kõveral $y = -\frac{x^2}{4} + 1$;

c) tugev miinimum kõveral $y = 0$, kui $0 < a < \frac{a}{4}$; kui $a > \frac{a}{4}$ pole miinimumi;

d) pidevatel kõveratel ekstreemumeid pole;

e) tugev miinimum kõveral $y = 7 - \frac{4}{x}$;

f) tugev miinimum kõveral $y = \sin 2x - 1$;

g) nõrk miinimum kõveral $y = \frac{y_1}{x_1} x$;

h) nõrk miinimum kõveral $y = x^2$;

i) tugev maksimum kõveral $y = -x^3 + x$.

§ 5. EULERI VÕRRANDITE KANOOINILINE KUJU. VARIATSIOON-
PRINTSIIBID JA JÄÄVUSE SEADUSED.

✓ 1. Euleri võrrandite kanooniline kuju.

Funktsionaali

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx. \quad (5.1)$$

Euleri võrrandite süsteemi

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.2)$$

võime väga mitmel viisil asendada I järku diferentsiaalvõrrandite süsteemiga, seejuures võrrandite järgu vähenemise arv kahekordistub võrrandite arv. Selleks on kõige lihtsam vaadelda võrrandites (5.2) tuletisi y_i' kui uusi sõltumataid tundmatuid (s. t. sõltumatuteks tundmatuteks on võrrandites (5.2) nii funktsioonid y_i kui ka y_i'). y_i ja y_i' suhtes esimest järku võrranditele (5.2) lisandub aga siis veel n seosevõrrandit:

$$\frac{dy_i}{dx} = y_i'$$

Palju sümmeetrilisema kuju saab anda Euleri võrranditele n kanoonilistes muutujates, mis me tõime sisse esimese variatsiooni üldise avaldise vaatlemisel (§ 3, 1). Selleks tuleb avaldada suurused y_i' seostest

$$p_i = F_{y_i'} \quad (5.3)$$

suuruste $x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n$ kaudu ja funktsioon $F(x, y_i, y_i')$

asendada nn. Hamiltoni funktsiooniga

$$H(x, y_i, p_i) = -F + \sum_i y'_i p_i. \quad (5.3')$$

Üleminek muutujatelt x, y_i, y'_i kanoonilistele muutujatele on vähemalt lokaalselt teostatav siis, kui

$$\frac{D(p_1, \dots, p_n)}{D(y'_1, \dots, y'_n)} \neq 0 \quad \text{ehk} \quad \det F_{y'_i y'_k} \neq 0. \quad (5.4)$$

Edaspidi meie eeldamegi, et tingimus (5.4) on alati täidetud.

Et Euleri võrrandites üle minna kanoonilistele muutujatele (5.3, 3'), selleks tuleb kõigepealt avaldada osatuletised $F_{y'_i}$ (mille arvutamisel on konstantsed tuletised y'_1, \dots, y'_n) osatuletiste $H_{y'_i}$ kaudu (konstantsed on p_1, \dots, p_n). Otsene arvutus on õige tülikas, sellepärast kasutame funktsiooni H täisdiferentsiaali avaldist (mis ei olene sõltumatute muutujate valikust):

$$\begin{aligned} dH &= -dF + \sum_i p_i dy'_i + \sum_i y'_i dp_i = \\ &= -F_x dx - \sum_i F_{y_i} dy_i + \sum_i (p_i - F_{y'_i}) dy'_i + \sum_i y'_i dp_i. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Funktsiooni H osatuletiste leidmiseks tuleks asendada diferentsiaalid dy'_i diferentsiaalide dx, dy_i, dp_i kaudu. Kanooniliste muutujate väärtus aga selles ongi, et niisugust asendust pole tarvis teha, sest definitsioonivalemi (5.3) kohaselt on dy'_i kordaja avaldises (5.5) null. Seega

$$dH = -F_x dx - \sum_i F_{y_i} dy_i + \sum_i y'_i dp_i \quad (5.5')$$

ja järelilikult

$$H_x = -F_x, \quad H_{y_i} = -F_{y_i}, \quad H_{p_i} = y_i'. \quad (5.6)$$

Kasutades leitud seoseid võime Euleri võrrandite süsteemi (5.2) asendada $2n$ võrrandiga

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (5.7)$$

Neid võrrandeid nimetataksegi funktsionaali (5.1) kanoonilisteks Euleri võrranditeks.

✓ 2. Euleri võrrandite esimesed integraalid.

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi esimesteks integraalideks nimetatakse funktsioone, mis jäävad konstantseteks mööda lahendikõveraid. Vaatleme nüüd lähemalt, millised funktsioonid võivad olla süsteemi (5.7) esimesteks integraalideks.

Vaatleme juhtu, kui funktsioon F ei sõltu otseselt x -st, s. t. $F_x = 0$, (5.3') põhjal Hamiltoni funktsioon ei sõltu samuti otseselt x -st. Kasutades võrrandeid (5.7) näeme, et

$$\frac{dH}{dx} \equiv \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx} = 0.$$

Seega $H = \text{const}$ mööda funktsionaali (5.1) igat ekstremaali. Teisiti öeldes: antud juhul ongi Hamiltoni funktsioon üheks Euleri võrrandite esimeseks integraaliks.*

Selgitame nüüd, millist tingimust peab täitma

* On kasulik võrrelda saadud tulemust § 1, 8 käsitletud juhuga $F = F(y, y')$.

funktsioon $\phi(y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$, et ta võiks olla Euleri võrrandite (5.7) esimeseks integraaliks. Vastavalt esimese integraali mõistele peab mööda süsteemi (5.7) integraalkõveraid olema ϕ konstantne, s. t.:

$$\frac{d\phi}{dx} = 0. \quad (5.8)$$

Tuletist $\frac{d\phi}{dx}$ (5.8) on otstarbekas pisut teisendada, arvestades võrrandeid (5.7):

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &\equiv \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx} + \frac{\partial \phi}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx} \right) = \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \phi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} \right) \equiv [\phi, H], \end{aligned} \quad (5.9)$$

kus avaldist

$$[\phi, H] = \sum_i \left[\frac{\partial \phi}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \phi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} \right] \quad (5.9')$$

nimetatakse funktsioonide ϕ ja H Poissoni sulgudeks. Niisiis: funktsioon $\phi(y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$ võib olla Euleri võrrandite esimeseks integraaliks siis ja ainult siis, kui tema Poissoni sulud Hamiltoni funktsiooniga H on nullid.

Juhul, kui ϕ sõltub x -st ka otseselt, siis ta saab olla Euleri võrrandite esimeseks integraaliks ikkagi vaid siis, kui on täidetud tingimus (5.8), ainult sel juhul kehtib (5.9) asemel seos

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + [\phi, H]. \quad (5.9'')$$

Kasutades Poissoni suluavaldisi võime anda Euleri kanoonilised võrrandid väga lihtsal ja sümmeetrilisel kujul:

$$\frac{dp_i}{dx} = [p_i, H], \quad \frac{dy_i}{dx} = [y_i, H].$$

3. Integraali $\int_a^b F(x, y_i, y'_i) dx$ invariantsus ja Euleri võrrandi esimesed integraalid.

Belmises punktis me nägime, et funktsionaalile

$$J[y_i] = \int_a^b F(y_i, y'_i) dx \quad (5.1')$$

vastav Euleri võrrandite süsteem annab lihtsa esimese integraali

$$H = \sum_i y'_i F_{y'_i} - F.$$

Asjaolu, et F ei sõltu otseselt x -st, on samaväärne funktsionaali (5.1') invariantsusega teisenduse

$$x^* = x + \alpha; \quad y_i^* = y_i \quad (5.10)$$

suhtes. Niisiis on Hamiltoni funktsioon H Euleri võrrandite esimeseks integraaliks parajasti siis, kui funktsionaal on invariantne teisendusel (5.10). Osutub, et selline seos Euleri võrrandite esimeste integraalide ja funktsionaali invariantsuse vahel on kaugemaleulatav.

Kõigepealt täpsustame veidi lähemalt funktsionaali invariantsuse mõistet.

Funktsionaal $J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$ on defineeritud $(n+1)$ -dimensionaalse ruumi kõveratel $\gamma (y_i = y_i(x))$. Teisenduse

$$\begin{aligned} x^* &= \varphi_0(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_i^* &= \varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (5.11)$$

abil saame igale kõverale γ seada vastavusse teisenendunud kõvera γ^* . Selleks tuleb kõvera γ parameetrilises esitu-

ses esinevad funktsioonid $y_i(x)$ asetada teisendusvalemitesse (5.11). Elimineerides nii leitud $(n+1)$ võrrandist x saame n võrrandit

$$y_i^* = \eta_i(x), \quad (5.12)$$

mis määravadki teisenenud kõvera γ^* . (Siin ja ka edaspidi me eeldame, et teisendusvalemid (5.11) on pööratavad, s.t. et on võimalik avaldada suurusi x, y_1, \dots, y_n funktsioonidena suurustest x^*, y_1^*, \dots, y_n^* ja nende funktsioonide abil tagasi minna teisendatud kõveratelt esialgsetele kõveratele γ .) Näiteks teiseneb lineaarteisendusel

$$x^* = x + \alpha, \quad y^* = y + \beta$$

sirge $y = ax + b$ sirgeks $y^* = ax^* + b + \beta - \alpha a$. Funktsionaali $J[y_i]$ me nimetame invariantseks teisenduse (5.11) suhtes, kui iga lubatud kõvera korral $J[\gamma] = J[\gamma^*]$, s. t.

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, \frac{dy_i}{dx}) dx = \int_{x_0^*}^{x_1^*} F(x^*, y_i^*, \frac{dy_i^*}{dx^*}) dx^*.$$

Nii näiteks on funktsionaal $J[\gamma] = \int_a^b y'^2 dx$ invariantne teisenduse $x^* = \alpha^2 x + c$, $y^* = \alpha y$ suhtes. Tõepoolest, kui kõver γ on antud võrrandiga $y = \eta(x)$ ($a \leq x \leq b$), siis teisenenud kõver γ^* on antud võrrandiga $y^* = \alpha \eta\left(\frac{x^* - c}{\alpha^2}\right) \equiv \eta^*(x^*)$ ($a \leq \frac{x^* - c}{\alpha^2} \leq b$) ja seega

$$\begin{aligned} J[\gamma^*] &= \int_{\alpha^2 a + c}^{\alpha^2 b + c} \left[\frac{d\eta^*(x^*)}{dx^*} \right]^2 dx^* = \int_{\alpha^2 a + c}^{\alpha^2 b + c} \left[\alpha \frac{d\eta\left(\frac{x^* - c}{\alpha^2}\right)}{dx^*} \right]^2 dx^* = \\ &= \int_{\alpha^2 a + c}^{\alpha^2 b + c} \left[\alpha \frac{d\eta\left(\frac{x^* - c}{\alpha^2}\right)}{d\left(\frac{x^* - c}{\alpha^2}\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{x^* - c}{\alpha^2}\right)}{dx^*} \right]^2 dx^* = \int_a^b \left[\frac{1}{\alpha} \frac{d\eta}{dx} \right]^2 \alpha^2 dx = J[\gamma]. \end{aligned}$$

Samal viisil on kerge näha, et funktsionaal $J[y] = \int_a^b xy'^2 dx$ pole invariantne näiteks teisenduse $x^* = x+c$, $y^* = y$ suhtes. Tõepoolest

$$\begin{aligned} J[y^*] &= \int_{a+c}^{b+c} x^* \left[\frac{dy^*(x^*)}{dx^*} \right]^2 dx^* = \int_{a+c}^{b+c} x^* \left[\frac{dy(x^*-c)}{dx^*} \right]^2 dx^* = \\ &= \int_a^b (x+c) \left[\frac{dy(x)}{dx} \right]^2 dx = J[y] + c \int_a^b \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

4. Noetheri teoreem.

Valime teisenduste (5.11) hulgast välja ühe üheparameetrilise teisenduste parve:

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \varphi_0(x, y_1, \dots, y_n, \alpha), \\ y_i^* &= \varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

($i=1, 2, \dots, n$),

kus φ_0 ja φ_i on diferentseeruvad funktsioonid ning parameeter α on valitud nii, et juhule $\alpha=0$ vastab identne teisendus, s. t.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x, y_1, \dots, y_n, 0) &= x, \\ \varphi_i(x, y_1, \dots, y_n, 0) &= y_i. \end{aligned} \right\} \quad (5.12')$$

Tõestame järgmise teoreemi: igale teisenduse parvele (5.12, 12'), mille suhtes on funktsionaal (5.1) invariantne, vastab selle funktsionaali Euleri võrrandite (5.2) mingi esi-

mene integraal. See teoreem on erijuht E. Noetheri (1882-1935) 1918. aastal tõestatud üldisemast teoreemist (vt. ka § 6, 4).

Tõestuskäigu lihtsustamise huvides kitsendame esialgu veidi teisenduste klassi (5.12, 12'), nõudes täiendavalt, et

$$x^* = x. \quad (5.12'')$$

Kui parameeter α on väike, siis

$$y_i^* - y_i \approx \frac{\partial \psi_i(x, y_k, 0)}{\partial \alpha} \alpha = \psi_i(x, y_k) \alpha, \quad (5.13)$$

kus

$$\psi_i(x, y_k) = \frac{\partial \varphi_i(x, y_k, 0)}{\partial \alpha}. \quad (5.13')$$

Beldame veel, et võrrandiga

$$y_i = y_i(x)$$

määratud kõver on funktsionaali (5.1) ekstremaaliks. Siis avaldub selle funktsionaali esimene variatsioon üleminekul kõveralt y_i kõverale $y_i + \alpha \psi_i$ järgmiselt:

$$\delta J = \alpha \sum_{i=1}^n F_{y_i} \psi_i \Big|_{x_0}^{x_1}$$

(sest antud juhul x ei varieeru, s. t. $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$ ja $\delta y_i = \alpha \psi_i$). Kuna vastavalt teoreemi tingimustele on funktsionaal (5.1) invariantne teisendusel (5.12-12''), siis peab δy_i toodud valiku korral olema esimene variatsioon null. Niisiis

$$\sum_{i=1}^n F_{y_i} \psi_i \Big|_{x_0}^{x_1} = 0$$

ehk

$$\sum_{i=1}^n F_{y_i} \psi_i \Big|_{x=x_0} = \sum_{i=1}^n F_{y_i} \psi_i \Big|_{x=x_1}. \quad (5.14)$$

Kuna leitud seosed on õiged igasuguste x_0 ja x_1 väärtuste korral, siis seega

$$\sum_{i=1}^n F_{y_i} \psi_i = \text{const}$$

mööda igat ekstremaali. Niisiis vastabki teisendusele (5.12-12") Euleri võrrandite esimene integraal:

$$\sum_{i=1}^n F_{y_i} \frac{\partial P(x, y_k, 0)}{\partial \alpha} . \quad (5.15)$$

Rakendame nüüd näitena toodud mõttekäike ka juhule $F_x = 0$ /vt. (5.1')/. Nagu märkisime juba eelmise punkti alguses, on selline funktsionaal invariantne teisenduse (5.10) suhtes. Teisendusele (5.10) vastab esimene variatsioon (eeldusel, et funktsioonid $y_i(x)$ on funktsionaalile (5.1') ekstremaaliks) (vt. (3.8))

$$\delta J = H \alpha \Big|_{x_0}^{x_1} .$$

Funktsionaali (5.1') invarianttsuse tõttu jõuamegi tulemusele

$$H(y_i, p_i) \Big|_{x=x_0} = H(y_i, p_i) \Big|_{x=x_1} ,$$

s. t.

$$H = \text{const}$$

(mööda ekstremaale). See aga tähendabki, et Hamiltoni funktsioon on Euleri võrrandite süsteemi esimeseks integraaliks.

5. Mehhaanika variatsioonprintsiihid ja jäävuseeadused.

Esimeseks selgesti formuleeritud variatsioonprintsii-
biks oli juba sissejuhatuses mainitud Fermat' printsiip
(1662) (vt. § 1, 1). Kuigi juba tol ajal olid õige levinud
vaated, mille kohaselt liikumisseaduste põhiomaduseks on
nende lihtsus, või siis teleoloogilise kallakuga vaated,
nagu saavutaks loodus oma eesmäärke lihtsaimate vahenditega,
nõudis mehhaanika variatsioonprintsiipideni jõudmine ligi
sajandi pikkust uurimistööd. Peamine raskus seisis selles,
et kaua ei olnud täit selgust, milline füüsikalistest suu-
rustest peaks liikumisprotsessis olema ekstremaalne. Opti-
kas aga oli selleks konkreetne ja kergesti mõistetav suurus
- aeg. Esimesed mehhaanika valdkonnas formuleeritud variat-
sioonprobleemid olidki oma loomult Fermat' printsiibi formaal-
seteks laiendusteks mehhaanika ülesannetel. Nii on J. Bernoul-
li kuulsa, 1696. aastast pärineva brahhistokrooni probleemi
korral minimaliseeritavaks suuruseks samuti aeg.

Tõsi küll, juba 1669. a. tõi G.W. Leibnitz (1646 - 1716)
mehhaanikasse uue suuruse "mõju" ("actio formalis"), mis on
massi, kiiruse ja teepikkuse korrutis. On väga tõenäoline,
et tal oli ka küllalt selge, millist osa mängib see suurus
mehhaanikas.* Kahjuks jäi Leibnitzi sellealane uurimus tema
kaasaegsetele praktiliselt tundmatuks, kuna see ilmus trükist

* 1751. a. publitseeris S. Koenig katkendid saksa mate-
maatik J. Hermannile saadetud kirjast, mille autor (arvatak-
se, et kirja kirjutas 1707. a. Leibnitz) väidab, et reaalse-
te liikumiste korral omandab mõju tavaliselt maksimaalse või
minimaalse väärtuse.

alles 1860. aastal. Enam-vähem rahuldava formuleeringu mehhaanika vähima mõju printsiibile andis alles 1746. aastal P. Maupertuis (1698-1759): "Mõju, mis on tarvilik selleks, et teostada mingit muutust looduses, on võimalikest väikseim." Mõju füüsikaline tähendus aga langes tal kokku Leibnitzi poolt antuga. Nii siis:

$$\int m v ds = \text{minimaalne} . \quad (5.16)$$

Tuleb märkida, et Maupertuis oli teleoloogiliste vaadete inukas pooldaja, kes nägi vähima mõju printsiibis jumaliku ettenägelikkuse kehastust ja otsis sellele rakendusi ka väljaspool loodusteadusi. Hilisem analüüs näitas, et vähima mõju printsiip on tegelikult variatsioonprintsiip, mille korral tulevad arvesse ka liikumised, mis annavad mõjuintegraalile statsionaarse või koguni maksimaalse väärtuse, ning veelgi enam, variatsioonprintsiipe võib formuleerida mitte ainult mehhaanika, vaid ka paljude teiste diferentsiaalvõrrandite korral.

Maupertuis' poolt antud vähima mõju printsiibi formuleering on küllalt ebamäärane, kuna pole selge, milliseid tingimusi peavad rahuldama võrdluseks võetavad võimalikud muutused. Selles suunas tegi olulise sammu edasi J.L. Lagrange (1736-1813), kes andis Maupertuis vähima mõju printsiibi (punktmasside süsteemi jaoks) range põhjenduse ja näitas, et võimalikud liikumised peavad rahuldama energia jäävuse seadust ning osakestele mõjuvad tungid peavad olema konservatiivsed. Pidades silmas, et

$$m_i v_i ds_i = m_i v_i^2 dt = 2 T_i dt$$

(T_i - i -nda osakese kineetiline energia), võime anda Maupertuis'-Lagrange'i printsiibile sellise, täpsema formuleeringu:

Konservatiivsete tungide mõju all oleva punktmasside süsteemi tegelik liikumine antud alg- ja lõppasendi vahel erineb kõigist teistest kinemaatiliselt võimalikest (s. t. seoste poolt lubatud) liikumistest, mis toimuvad sama kogue energiaga, selle poolest, et

$$W = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt \quad (T = \sum_i T_i) \quad (5.16')$$

omab ekstremaalse (või statsionaarse) väärtuse. Lagrange'i mõjufunktsiooni W varieerimisel tuleb arvestada, et energia lause

$$T + U = E = \text{const} .$$

(U -süsteemi potentsiaalne energia) tõttu sõltub kineetiline energia T ja seega ka süsteemi punktide kiirused nende asendist. Järelikult ei tarvitse liikumise aeg siin olla iga võrdlusaluse liikumise puhul ühesugune (aeg sõltub teest) ning meil on tegemist fikseerimata rajadega isoperimeetrilise variatsioonülesandega (lisatingimus kogueenergia $E = \text{const}$).

C. Jacobi näitas 1842. a., et Maupertuis'-Lagrange'i printsiibis on võimalik elimineerida aega, kasutades selleks energia lauset

$$2T = 2(E - U) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i ds_i^2}{dt^2}$$

ja

$$dt = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n m_i ds_i^2}{2(E-U)}}$$

ning

$$W = \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(E-U)} \sqrt{\sum_{i=1}^n m_i ds_i^2} . \quad (5.16'')$$

Vähima mõju printsiibi mitmesuguste erinevate formulatsioonide hulgast on eriti otstarbekas W. Hamiltoni (1805 - 1865) formulatsioon, mis on antud 1834. - 1835. a. Siin ei võrrelda enam sama energiaga võimalikke liikumisi, vaid sama ajavahemiku jooksul toimuvaid võimalikke liikumisi. Ekstremaalseeritavaks suuruseks Lagrange'i mõjuintegraali W asemel on mõjuintegraal S :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (\tau - u) dt . \quad (5.17)$$

Seda, nn. Hamiltoni vähima mõju printsiipi, võime sõnastada järgmiselt:

Kõigist kinemaatiliselt võimalikest liikumistest, mis viiksid süsteemi sama ajaga antud algasendist antud lõppasendisse, toimub tegelikult see, mille puhul mõjufunktsioon

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (5.17')$$

on ekstremaalne (statsionaarne).

Suurust L , mis on tegelikult kineetilise ja potentsiaalse energia vahe

$$L = \tau - u , \quad (5.17'')$$

nimetatakse süsteemi Lagrange'i funktsiooniks.

Märgime veel, et toodud Hamiltoni printsiipi võib üldis-

tada ka mittekonserveerivse tungivälja juhule (potentsiaal U puudub), samuti aga ka pidevate keskkondade juhule. Veelgi enam - Hamiltoni printsiibile analoogilisi printsiipe saab formuleerida ka teiste füüsikaliste nähtuste jaoks (elektromagnetism, väljateooria jne.).

Eelmise punkti tulemuste konkretiseerimiseks rakendamegi neid n punktmassist koosneva süsteemi juhule. Vastavalt Hamiltoni vähima mõju printsiibile kirjeldavad sellise süsteemi liikumist ajavahemikul (t_0, t_1) sellised funktsioonid $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) [(x_i, y_i, z_i) - i -nda punktmassi m_i koordinaadid], mille korral integraal

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

on ekstremaalne. Seejuures

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

ja i -ndale partiklile mõjuva tungi komponendid:

$$x_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

On kerge veenduda, et funktsionaali $\int_{t_0}^t L dt$ Euleri võrrandid on samaväärsed Newtoni võrranditega mehhaanikast. Kanonilisteks muutujateks oleks antud probleemi korral peale aja ja partiklite koordinaatide veel partiklite impulsi komponendid

$$p_x^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i; \quad p_y^i = m_i \dot{y}_i; \quad p_z^i = m_i \dot{z}_i \quad (5.18)$$

ja kogu energia

$$H = \sum_{i=1}^n (x_i p_x^i + y_i p_y^i + z_i p_z^i) - L =$$

$$= 2T - (T - U) = T - U. \quad (5.18')$$

Vaatleme nüüd, millised on mõjuintegraali Euleri võrrandite esimesed integraalid. Nende kaudu me jõuamegi nn. jäävusseadusteni, s. t. selliste suuruste sissetoomiseni, mis säilitavad oma väärtust süsteemi liikumisel. Nende hulk ja füüsikaline tähendus sõltub Lagrange'i funktsiooni L konkreetsest kujust.

1) Vaatleme kõigepealt nn. konservatiivset süsteemi, s. t. sellist süsteemi, mille Lagrange'i funktsioon (eriti aga potentsiaalne energia U) ei sõltu otseselt ajast. Nagu juba eespool nägime, on sel juhul jäävaks suuruseks Hamiltoni funktsioon H : konservatiivse süsteemi koguenergia on jääv.

2) Mõjuintegraal on invariantne paralleellükke suhtes, s. t. teisendusel

$$t^* = t, \quad y_i^* = y_i + b,$$

$$x_i^* = x_i + a, \quad z_i^* = z_i + c.$$

Jaotades selle teisenduse hulga kolmeks üheparameetriliseks teisenduste klassiks $t^* = t$, $x_i^* = x_i + a$, $y_i^* = y_i$, $z_i^* = z_i$ jne. ja rakendades eespool leitud tulemust (5.15), näeme, et mõjuintegraali invariantsele x -telje suunalise paralleellükke suhtes vastab süsteemi koguimpulsi x -komponendi jäävus

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{const.} \quad \text{ehk} \quad p_x \equiv \sum_{i=1}^n p_x^i = \text{const.}$$

Analoogiliselt järeldub invariantisusest y -telje ja z -telje suunalise paralleellükke suhtes süsteemi koguimpulsi y - ja z -komponendi jäävuse seadused:

$$p_y \equiv \sum_{i=1}^n p_y^i = \text{const}, \quad p_z \equiv \sum_{i=1}^n p_z^i = \text{const}.$$

On selge, et kui mõjuintegraal on invariantne ainult kindlas sihis teostatavate paralleellükete suhtes, siis on jääv vaid koguimpulsi vastavasuunaline komponent.

3) Vaatleme nüüd juhtu, kus mõjuintegraal on invariantne põörete suhtes ümber z -telje, s. t. koordinaatteisen-
duste

$$\begin{aligned} t^* &= t, & z_i^* &= z_i, \\ x_i^* &= x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha, \\ y_i^* &= -x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha \end{aligned}$$

suhtes. Valemi (5.15) põhjal leiame, et jäävaks suuruseks on

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{y}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \dot{x}_i \right) \equiv \sum_{i=1}^n (p_x^i \dot{y}_i - p_y^i \dot{x}_i) \equiv M_z.$$

See pole aga muud midagi kui koordinaatide alguspunkti suhtes arvatud süsteemi impulssmomendi $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{p}^i \times \vec{r}_i$

z -komponent. Niisiis on süsteemi impulssmomendi z -komponendi jäävus seotud mõjuintegraali invariantisusega ümber z -telje teostatud põörete suhtes.

6. Hamilton-Jacobi võrrandid.

Vaatleme funktsionaali

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y'_i) dx, \quad (5.1)$$

mis on määratud $(n+1)$ -mõõtmelise ruumi mingis piirkonnas G asuvatel kõveratel. Oletame, et läbi selle piirkonna G kahe punkti P_0 ja P_1 läheb üks funktsionaali (5.1) ekstremaalidest. Suurust

$$S = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y'_i) dx, \quad (5.19)$$

kus integraal võetakse mööda punkte $P_0(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ ja $P_1(x_1, y_1^1, y_2^1, \dots, y_n^1)$ ühendavat ekstremaali, nimetatakse punktide P_0 ja P_1 vaheliseks geodeetiliseks kauguseks. See on ühene funktsioon punktide P_0 ja P_1 koordinaatidest. Eriti, kui funktsionaal $J[y_i]$ tähendab kõvera pikkust, siis on geodeetiline kaugus samaväärne kahe punkti vahelise kaugusega tavalises mõttes. Fermat' printsiibi funktsionaali $T[\gamma] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{n(x, y, z)}{c} \sqrt{1+y'^2+z'^2} dx$ korral on geodeetiliseks kauguseks aeg, mis kulub valgussignaalil liikumiseks punktist P_0 punkti P_1 . Mehhanika vähima mõju printsiibi funktsionaali korral on geodeetiliseks kauguseks mõju muutus, mis vastab üleminekule algolekust lõppolekusse.

Kui punkt P_0 on fikseeritud, P_1 aga on muutuv punkt piirkonnas G , siis on ka geodeetiline kaugus S funktsioon punkti $P_1 = P$ koordinaatidest, niisiis

$$S = S(x, y_1, \dots, y_n). \quad (5.19')$$

Leiame, millist diferentsiaalvõrrandit rahuldab funktsioon S . Arvutame kõigepealt funktsiooni S osatuletised $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y_i}$. Selleks arvutame funktsiooni diferentsiaali, s. o. juurdekasvu

$$\Delta S = S(x + \delta x, y_i + \delta y_i) - S(x, y_i)$$

lineaarosa, seejuures peame silmas, et

$$\Delta S = J[\gamma^*] - J[\gamma].$$

Siin on γ ekstremaal, mis ühendab punkti P_0 punktiga $P = (x, y_1, \dots, y_n)$, γ^* aga ekstremaal, mis ühendab teda punktiga $P^* = (x + \delta x, y_1 + \delta y_1, \dots, y_n + \delta y_n)$. Seega

$$dS = \delta J = \sum_i p_i \delta y_i - H \delta x \quad (5.20)$$

(lõpp-punkt varieerub). Järelikult

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= -H, \\ \frac{\partial S}{\partial y_i} &= p_i. \end{aligned} \quad (5.20')$$

Valemities (5.20) tuleb suurus p_i vaadelda kui osatuletiste F_{y_i} väärtusi punktis P , kusjuures tuletised $y_i = \frac{dy_i}{dx}$ on arvutatud mööda punkte P_0 ja P ühendavaid ekstremaale; seega ka

$$H(x, y_1, \dots, y_n) = H(x, y_1, \dots, y_n, p_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, p_n(x, y_1, \dots, y_n))$$

on funktsioon vaid suurustest x, y_1, \dots, y_n .

Võrranditest (5.20') näeme, et S kui funktsioon punkti P koordinaatidest peab rahuldama järgmist võrrandit:

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial y_n}) = 0, \quad (5.21)$$

mida nimetatakse Hamilton-Jacobi võrrandiks. Hamilton-Jacobi võrrand on I järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand. Euleri kanoonilised võrrandid (5.7) moodustavad võrrandi (5.21) karakteristiklike võrrandite süsteemi.

Anname veel meie poolt läbitehtud konstruktsioonidele geomeetrilise tõlgenduse. Võrrand $S(x, y, \dots, y^n) = \text{const.}$ määrab $(n+1)$ -dimensionaalses ruumis pinna, mille kõigi punktide geodeetiline kaugus fikseeritud punktist P_0 on ühesugune. Andes konstandile erinevaid väärtusi, saame terve parve selliseid pindu. Kuidas aga lõikuvad pinnad $S = \text{const.}$ punktist P_0 väljuvate ekstremaalidega? Vastuse saamiseks vaatleme valemit (5.20). Kui punktid P ja P^* asuvad mõlemad pinnal $S = \text{const.}$, siis

$$\sum_i p_i \delta y_i - H \delta x = 0.$$

See aga ütleb, et pinna $S = \text{const.}$ kõik joonelemendid punktis P lõikuvad sama punkti läbiva ekstremaaliga (mis väljub punktist P_0) transversaalselt, ehk teisiti, pinnad $S = \text{const.}$ lõikavad punktist P_0 väljuvaid ekstremaale transversaalselt. Niisiis asendatakse Hamilton-Jacobi formalismis ekstremaalide uurimine neid transversaalselt lõikavate pindade uurimisega.

Fermat' printsibist tuntud funktsionaali

$$T[\gamma] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{n(x, y, z)}{c} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

korral taanduvad transversaalsusetingimused lihtsalt ortogonaalsusetingimusteks (vt. ül. 8 § 3). Seega asendatakse Hamilton-Jacobi formalismis antud punktist väljuvate kiir-

tekimpude uurimine neid kiirtekiimpe ortogonaalselt lõikavate pindade (täpsemalt: pindade parvede) uurimisega. Need pinnad pole midagi muud kui optikast tuntud lainepinnad. Sel teel loob Hamilton-Jacobi formalism silla geomeetrilise ja laineoptika vahele. Loomulikult ei tähenda üleminek Fermat' printsiibi esialgselt formuleeringult Hamilton-Jacobi formalismile veel tõelist üleminekut kiirteoptikalt laineoptikale. Võrrand, mida rahuldab funktsioon S (nn. eikonaali võrrand) on ikkagi ainult lõpmata väikese lainepikkuse piirjuhule vastav ligikaudne erikuju laineoptika põhivõrrandist (vt. ülesanded 3 ja 4).

7. Seos Hamilton-Jacobi võrrandite ja Euleri võrrandite esimeste integraalide vahel.

Teoreem 1. Kui $S = S(x, y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ on Hamilton-Jacobi võrrandi (5.21) lahend, mis sõltub k parameetrist $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, siis iga $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) on Euleri kanooniliste võrrandite (5.7) esimeseks integraaliks (s. t. $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ on konstantne mööda igat ekstremaali).

Tõestuseks näitame, et $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right) = 0$ mööda mistahes ekstremaali. Arvutame selle tuletise:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial x} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial \alpha_i} \frac{dy_j}{dx}. \quad (5.22)$$

Asendades lahendi $S(x, y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ võrrandisse (5.21) ja diferentseerides α_i järgi saame

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_i} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial y_j \partial x_i} . \quad (5.23)$$

Seostest (5.22) ja (5.23) näeme, et mööda ekstremaale, s. t. seal, kus

$$\frac{dy_i}{dx} - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$$

ka

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right) = 0 .$$

Teoreem 2. (Jacobi teoreem). Kui funktsioon $S = S(x, y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ on Hamilton-Jacobi võrrandite täielik* integraal ja

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial y_k} \neq 0 , \quad (5.24)$$

siis seostest

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = \beta_i , \quad (5.25)$$

kus β_1, \dots, β_n on meelevaldsed konstandid, määratud funktsioonid

* Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi täielikuks lahendiks nimetatakse sellist lahendit, mis sisaldab nii palju sõltumatuid konstante, kui palju on sõltumatuid muutujaid. Antud juhul on küll $(n+1)$ sõltumatut muutujat, kuid kuna võrrand (5.21) sisaldab ainult funktsiooni S esimesi tuletisi, siis on üks konstantidest aditiivseks liidetavaks, s. t. täielikuks integraaliks oleks seega funktsioon $S^* =$

$= S(x, y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) + A$, kus A on meelevaldne konstant.

Konstandi A sissetoomine toob kaasa ainult täiesti triviaalse esimese integraali - funktsiooni, millel igal pool on konstantne väärtus 1.

$$y_i = y_i(x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}, \beta_1, \dots, \beta_n) \quad (5.26)$$

moodustavad koos funktsioonidega

$$p_i = \frac{\partial}{\partial y_i} S(x_1, y_k(\alpha_j, \beta_j), x_n) \quad (5.27)$$

Euleri kanooniliste võrrandite üldlahendi.

Tõestuseks peame silmas, et vastavalt teoreemile 1 on funktsioonid $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ Euleri võrrandite esimesteks integraalideks, s. t. nad on konstantsed mööda Euleri võrrandi lahendikõveraid (igale lahendikõverale vastab $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ kindel väärtus, näiteks β_i). Kui nüüd kõik esimesed integraalid on sõltumatud, s. t.

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial y_k} \neq 0,$$

siis võime n võrrandist (5.25) määrata y_i funktsioonina x -st ja $2n$ parameetrist $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$. Kanoonilisi muutujaid p_i saame aga leida funktsiooni S osatuletiste kaudu (vt. (5.20)).

Ülesandeid § 5 juurde.

1. Formuleerida jäävusseadused tsentraalses tungiväljas liikuva punktmassi jaoks.
2. Formuleerida jäävusseadused aksiaalsümmeetrilises tungiväljas liikuva punktmassi jaoks a) üldjuhul, b) juhul, kui väli ei sõltu z koordinaadist.
3. Leida Euleri kanoonilised võrrandid, Hamiltoni funktsioon ja Hamilton-Jacobi võrrandid Fermat' printsibi funktsionaali

$$T[\gamma] = \int_{P_0}^{P_1} \frac{n(x,y,z)}{c} \sqrt{1+y'^2+z'^2} dx$$

korral.

Vastus: $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{n}{c}\right)^2$.

4. Näidata, et eelmises ülesandes leitud Hamilton-Jacobi võrrand (nn. eikonaali võrrand) on piirjuhuku elektromagnetilise välja võrranditele kui lainepikkus $\lambda \rightarrow 0$.

Märkus: Maxwelli võrranditest vaba välja jaoks

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{div } \vec{D} = 0$$

ja seostest $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ näeme, et väljavektorite komponendid rahuldavad järgmist võrrandit

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (n = \sqrt{\epsilon\mu}) \quad (1)$$

(A võib olla väljavektorite mistahes komponent). Võrrand (1) on saadud eeldusel, et ϵ ja μ on konstantsed. Praktiliselt on võrrand (1) rakendatav ka siis, kui ϵ ja μ on peaaegu konstantsed (niisama et nende suuruste ruumilised tuletised on kaugelt väiksemad väljavektori ruumilistest tuletistest). Võrrandi (1) lahenditest on lihtsaim tasapinnalisi laineid kirjeldav lahend

$$A = a e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)} \quad (2)$$

($\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ - ringsagedus, \vec{k} - lainevektor; ta on suunatud risti lainefrondi, s. t. tasandiga $\vec{k}\vec{r} = \text{const.}$, kuna $|\vec{k}| = \frac{2\pi n}{c\lambda}$). Kui elektromagnetiline kiirgusväli ei

ole tasapinnaline, kuid siiski selline, et amplituud a ja lainvektori \vec{k} suund ei muutu oluliselt lainepikkuse suurusjärguliste lineaarmõõtmega piirkonnas, siis on võimalik sisse tuua nn. lainepinnad. Need on pinnad, mille kõigis punktides on lainefaas ühesugune. Igas küllalt väikeses ruumipiirkonnas võime rääkida ka lainete leviku suunast, mis on risti lainepindadega. Sel teel saame elektromagnetilise välja teooriasse tuua kiire mõiste. On selge, et eespool vaadeldud tingimused on seda paremini täidetud, mida väiksem on lainepikkus λ . Ideaalse olukorra saame piirjuhul $\lambda \rightarrow 0$. Selleks, et teostada ülemineku $\lambda \rightarrow 0$ võrrandis (1), peame silmas, et üldjuhul tuleb tasapinnalise laine (2) asemel võtta lahend kujul

$$A = a(x, y, z, t) e^{i\varphi(x, y, z, t)} \quad (3)$$

Tasalaine korral $\varphi = \vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha$ ja $\alpha = \text{const}$. Lainepindade sissetoomine on võimalik, kui $\varphi(x, y, z, t)$ erineb λ suurusjärgulises piirkonnas vähe lineaarsest funktsioonist, ning a on samas piirkonnas peaaegu konstantne. Arvestades ω ja \vec{k} seost lainepikkusega λ , näeme, et λ vähenedes peab funktsiooni φ väärtus kasvama. Nii siis piirjuhul $\lambda \rightarrow 0$, kasvab φ tõkestamatult. Asetades nüüd lahendi (3) võrrandisse (1) ja arvestades kõige suuremaid liikmeid, jõuame järgmisele võrrandile funktsiooni φ jaoks

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = 0. \quad (4)$$

Juhul, kui lainel on sagedus ω , võime kirjutada

$$\psi = -\omega t + \omega S(x, y, z). \quad (5)$$

Asendades selle võrrandisse (4), saamegi funktsiooni S jaoks eelmisest ülesandest tuntud Hamilton-Jacobi võrrandi.

5. Näidata, et igale mehhaanikaprobleemile punktmassi liikumistee määramiseks ajast sõltumatus tungiväljas potentsiaaliga $U(x, y, z)$ vastab Fermat' ülesanne valguskiire määramiseks. Leida seos partikli energia E ja potentsiaalse energia $U(x, y, z)$ ning murdumisnäitaja $n(x, y, z)$ vahel.

Märkus: Hamilton-Jacobi võrrand partikli jaoks

$$H(x, y, z, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}) \equiv U(x, y, z) + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

on viidav ülesandest 3 tuttavasse kujju, võttes

$$S = S_0(x, y, z) - Et$$

(E on partikli energia, mis on jääv suurus, kuna Lagrange'i funktsioon ei sisalda otseselt aega).

Vastus:

$$n(x, y, z) = \sqrt{2m c (E - U)}.$$

6. Leida antud potentsiaalse energiaga U tungiväljas liikuva punktmassi Euleri kanoonilised võrrandid, Hamiltoni funktsioon ja Hamilton-Jacobi võrrandid a) polaarkoordinaatides, b) silinderkoordinaatides.

Vastus:

$$a) H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi);$$

$$b) H = \frac{1}{2m} (p_y^2 + p_z^2 + \frac{p_x^2}{n^2}) + U(p, z, \varphi).$$

7. Leida Hamilton-Jacobi võrrandi täielik lahend homogeen-
ses tungiväljas $U = -Fz$ liikuva partikli jaoks. Ka-
sutades 8. punkti tulemusi, leida Euleri võrrandite kõik
lahendid ja esimesed integraalid.

Märkus: Hamilton-Jacobi võrrandis

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] - Fz \quad (1)$$

saab eraldada muutujad. Kõigepealt võib ülesandest 5 tun-
tud teisenduse $S = S_0(x, y, z) - Et$ viia võrrand (1) kujja

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right] = Fz - E \quad (2)$$

võrrandis (2) võime otsida funktsiooni S_0 kujul $S_0 =$
 $= S_1(x) + \bar{S}(y, z)$ (3). Asetades lahendi (3) võrrandis-
se (2) saame

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_1}{dx} \right)^2 = -\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial z} \right)^2 \right] + Fz - E. \quad (3)$$

Saadud võrduse vasakul pool on ainult x -i funktsioon,
paremal y -ja z -i funktsioon. Mõlemad avaldised saa-
vad olla võrdsed igasuguste x , y ja z väärtuste
korral vaid siis, kui nad on mõlemad konstandid. Nii saa-
me

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_1}{dx} \right)^2 = \alpha_1 \quad (4)$$

ja

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial z} \right)^2 \right] = Fz - E - \alpha_1. \quad (5)$$

Võrrandis (5) on samuti muutujad eraldatavad, nii saame veel kaks võrrandit

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_2}{dy} \right)^2 = \alpha_2, \quad (4^1)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_3}{dz} \right)^2 = F_z - E - \alpha_1 - \alpha_2. \quad (4^n)$$

Võrrandid (4-4ⁿ) on kergesti integreeritavad.

Vastus:

$$S = -Et + \sqrt{2m\alpha_1} x + \sqrt{2m\alpha_2} y + \frac{1}{3mF} \left[\sqrt{2m(F_z - E - \alpha_1 - \alpha_2)} \right]^3$$

Euleri võrrandite esimesed integraalid on kergesti interpreteeritavad, kui E asemel võtta integreerimiskonstandiks $\bar{E} = E + \alpha_1 + \alpha_2$.

8. Kasutades muutujate eraldamise meetodit (vt. ül. 7) ja Hamiltoni funktsiooni H avaldist polaarkoordinaatides (vt. ül. 6), leida Hamilton-Jacobi võrrandite täielik integraal eeldusel, et $U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}$.

Vastus:

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{\beta - 2m b(\theta) - p_\varphi^2 \frac{1}{\sin^2 \theta}} d\theta + \\ + \int \sqrt{2m(E - a(r)) - \frac{\beta}{r^2}} dr.$$

9. Kasutades funktsionaali $J = \int_a^b (y'^2 + y^2) dx$ ekstremaalide üldist avaldist $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, teha läbi kõik käesoleva paragrahvi konstruktsioonid.

Märkus: Geodeetiline kaugus kahe etteantud punkti $P_0 = (x_0, y_0)$ ja $P_1 = (x_1, y_1)$ vahel avaldub selliselt

$$S(P_0, P_1) = \frac{(y_1^2 + y_0^2) \operatorname{ch}(x_1 - x_0) + 2 y_0 y_1}{\operatorname{ch}(x_1 - x_0)} .$$

Vaadeldes punkti P_0 fikseerituna, punkti P_1 aga meelevaldsena ($x_1 = x$, $y_1 = y$) annab see avaldis Hamilton-Jacobi võrrandi kaheparameetrilise lahendiparve (veenduda, et see funktsioon tõepoolest rahuldab Hamilton-Jacobi võrrandit). Parameetrid x_0 ja y_0 aga ei ole mõlemad sõltumatud, sest

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial y_0} \right)^2 - y_0^2 .$$

Euleri võrrandi üldlahendi leidmiseks vastavalt 7. punktis tõestatud teoreemile 2 võime ükskõik kummale parameetritest x_0 või y_0 anda fikseeritud väärtuse (näiteks 0).

§ 6. NOETHERI TEOREEM JA VÄLJATEOORIA
VARIATSIOONPRINTSIIBID.

1. Sissejuhatavad märkused.

Lihtsa variatsioonülesande üldistust mitme muutuja funktsioonide juhule vaatlesime juba varem (§ 2, 3) ning leidsime funktsionaali

$$J[u(x_1, \dots, x_n)] = \int_G \dots \int_G F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx_1 \dots dx_n \quad (2.15)$$

esimese variatsiooni eeldusel, et funktsiooni u piirkonna äärel ei varieerita:

$$\delta J = \int_G \dots \int_G \left[F_u - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \right) \right] \delta u dx_1 \dots dx_n. \quad (6.1)$$

Kuna funktsionaalid mitme muutuja funktsioonidest mängivad füüsikas väga suurt osa (pidevate keskkondade mehhanika, hajutatud parameetritega mehhaanilised süsteemid (keeled, membraanid jne.), väljateooria jne.), siis uurime käesolevas paragrahvis funktsionaali (2.15) üksikasjalikumalt. Kõigepealt me leiame esimese variatsiooni üldise avaldise, seejärel formuleerime ja tõestame Noetheri teoreemi üldjuhul ning selle abil analüüsime füüsika jäävusseadusi.

Esimese variatsiooni üldise avaldise leidmiseks kasutame meetodikat, mis erineb kolmandas paragrahvis kasutatust. Nimelt tõlgendame üldjuhul esinevat integreerimispiirkonna G varieerimist kui sõltumatute muutujate x_1, x_2, \dots, x_n

varieerimise resultaati ja taandame oma ülesande funktsionaali käitumise uurimisele teisendusel

$$x_i^* = \phi_i(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \xi), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6.2)$$

$$u^* = \psi(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \xi).$$

On näha, et kuna $u = u(x_1, \dots, x_n)$, siis võime u^* vaadelda funktsioonina muutujatest x_1^*, \dots, x_n^* . Selleks tuleb esimesest n võrrandist (6.2) avaldada x_1, \dots, x_n muutujate x_1^*, \dots, x_n^* kaudu (me eeldame, et teisendusvalemid (6.2) lubavad sellist üleminekut uutelt koordinaatidelt vanadele) ja asetada tulemused viimasesse võrrandisse (6.2). Teisendusvalemid (6.2) määravad üheparameetrilise (parameeter ξ) parve varieeritud piirkondi $G^*(\xi)$ ja varieeritud funktsioone $u^*(\xi)$. Kui nõuame täiendavalt, et valemid (6.2) annaksid juhul $\xi = 0$ identse teisenduse, siis kuulub varieeritud piirkondade ja funktsioonide hulka ka esialgne integreerimispiirkond ja funktsioon u (kui $\xi = 0$).

Teisendus (6.2) seab funktsionaalile (2.15) vastavusse uue funktsionaali

$$J[u^*(x^*)] = \int_{G^*} \dots F(x_1^*, \dots, x_n^*, u^*, u_{x_1}^*, \dots, u_{x_n}^*) dx_1^* \dots dx_n^*.$$

Tähistuse lihtsustamiseks märgime edaspidi sõltumatuid muutujaid x_1, \dots, x_n ühe tähega x ja muutujaid x_1^*, \dots, x_n^* tähega x^* . Esimese variatsiooni arvutamiseks tuleb nüüd leida funktsionaali muutuse

$$\Delta J = J[u^*(x^*)] - J[u(x)] \quad (6.3)$$

peassa, mis on lineaarne parameetri ξ suhtes.

2. Funktsiooni u ja osatuletiste $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ variatsioonid.

Piirdudes ε väikeste väärtustega võime valemid (6.2) anda ka selliselt

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i + \varepsilon \varphi_i(x) + \text{kõrgemat järku liikmed,} \\ u^*(x^*) &= u(x) + \varepsilon \psi(x) + \text{kõrgemat järku liikmed,} \end{aligned} \quad (6.2)$$

kus

$$\varphi_i(x) = \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{ ja } \psi(x) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (6.2'')$$

Tähistame veel

$$\delta x_i = \varepsilon \varphi_i \quad \text{ja} \quad \delta u = \varepsilon \psi \quad (6.4)$$

ning

$$\begin{aligned} u^*(x) - u(x) &= \varepsilon \bar{\psi}(x) + \text{kõrgemat järku suurused} \\ \text{ja} \quad \bar{\delta} u &= \varepsilon \bar{\psi}(x) \end{aligned} \quad (6.4')$$

(vt. joon. 18).

Pidades silmas, et

$$\begin{aligned} u^*(x^*) - u(x) &= u^*(x^*) - u^*(x) + u^*(x) - u(x) = \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon \frac{\partial u^*}{\partial x_i} \varphi_i(x) + \bar{\delta} u + \text{kõrgemat järku liikmed,} \end{aligned}$$

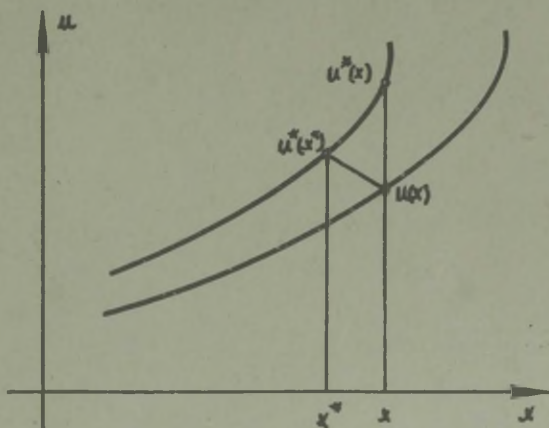
* Tuleb silmas pidada, et $\varphi_i(x)$ ja $\psi(x)$ sõltuvad muutujatest x nii otseselt kui ka funktsiooni $u(x)$ kaudu. Tuletiste $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ ja $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_k}$ arvutamisel me vaatlemegi edaspidi suurust u funktsioonina muutujatest x .

saame

$$\delta u \sim \bar{\delta} u + \varepsilon \sum_{i=1}^n \varphi_i \frac{\partial u^*}{\partial x_i}, \quad (6.5)$$

kuna $\frac{\partial u^*}{\partial x_i}$ ja $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ erinevad teineteisest vaid ε järku suuruse võrra, siis võib lineaarse lähenduse valemis (6.5) asendada tuletised $\frac{\partial u^*}{\partial x_i}$ tuletistega $\frac{\partial u}{\partial x_i}$:

$$\delta u = \bar{\delta} u + \varepsilon \sum_{i=1}^n \varphi_i \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (6.5')$$



Joon. 18.

Piirdudes ε suhtes lineaarsete liikmetega võime kirjutada:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial x_k} \sim \delta_{ik} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \quad (\text{kus } \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i=k; \\ 0, & \text{kui } i \neq k; \end{cases}$$

* Sümbol \sim tähendabki võrdust ε suhtes lineaarsete liikmete täpsusega.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i^*}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \sim \sum_{i=1}^n (\delta_{ik} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}) \frac{\partial}{\partial x_i^*} = \frac{\partial}{\partial x_k^*} + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \quad (6.6)$$

ning lõpuks

$$\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k^*} \sim \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \quad (6.6')$$

Leiame nüüd veel osatuletise $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ variatsioonid, s. t. vahe

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_k^*} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} &= \frac{\partial [u^*(x^*) - u(x^*)]}{\partial x_k^*} + \frac{\partial [u(x^*) - u(x)]}{\partial x_k} + \\ &+ \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k^*} - \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (6.7)$$

lineaarse osa. Vaatleme üksikuid liikmeid eraldi

$$\frac{\partial [u^*(x^*) - u(x^*)]}{\partial x_k^*} \underset{(6.4)'}{\sim} \varepsilon \frac{\partial \bar{\Psi}(x^*)}{\partial x_k^*} \underset{(6.6)'}{\sim} \varepsilon \frac{\partial \bar{\Psi}(x)}{\partial x_k}, \quad (6.7')$$

$$\frac{\partial [u(x^*) - u(x)]}{\partial x_k} \sim \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} (x_i^* - x_i) \underset{(6.2,4)'}{\sim} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x), \quad (6.7'')$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k^*} - \frac{\partial}{\partial x_k} \right) u(x^*) \underset{(6.6)'}{\sim} \left(\frac{\partial}{\partial x_k^*} - \frac{\partial}{\partial x_k} \right) u(x) \underset{(6.6)'}{\sim} -\varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}. \quad (6.7''')$$

Järelikult

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_k^*} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} &\sim \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n \varphi_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right) = \\ &= \frac{\partial (\delta u)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \delta x_i. \end{aligned} \quad (6.8)$$

3. Esimese variatsiooni üldine avaldis.

Funktsionaali $J[u(x)]$ juurdekasvu (6.3) lineaarosa leidmiseks teisendame kõigepealt integraali

$$J[y^*(x^*)] = \underbrace{\int \dots \int}_{(G^*)} F(x^*, u^*, u_{x^*}^*) dx^*$$

nii et integreerimispiirkonnaks oleks piirkond G . Selleks tuleb minna kordses integraalis üle muutujatelt x^* muutujatele x .

Naguteada matemaatilisest analüüsist

$$\int \dots \int_{G^*} F(x^*, u^*, u_{x^*}^*) dx_1^* \dots dx_n^* = \underbrace{\int \dots \int}_G F(x^*, u^*, u_{x^*}^*) \frac{D(x_1^*, \dots, x_n^*)}{D(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n$$

leiame (6.6) abil

$$\frac{D(x_1^*, \dots, x_n^*)}{D(x_1, \dots, x_n)} \sim \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & 1 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & 1 + \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \sim 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}. \quad (6.9)$$

Seega

$$\Delta J \sim \underbrace{\int \dots \int}_G [F(x^*, u^*, u_{x^*}^*) (1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}) - F(x, u, u_x)] dx_1 \dots dx_n. \quad (6.9')$$

Asendades integrandi ritta ε astmete järgi ja piirdudes vaid lineaarsete liikmetega saame

$$\begin{aligned} \delta J &= \underbrace{\int \dots \int}_G [F_u \delta u + \sum_{k=1}^n (F_{x_k} \delta x_k + \frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \delta u_{x_k} + \varepsilon F \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k})] dx_1 \dots dx_n = \\ &= \underbrace{\int \dots \int}_G [F_u (\bar{\delta} u + \sum_{k=1}^n u_{x_k} \delta x_k) + \sum_{k=1}^n F_{x_k} \delta x_k + F \sum_{k=1}^n \frac{\partial (\delta x_k)}{\partial x_k}] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \left(\frac{\partial \bar{\delta} u}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n u_{x_i x_k} \delta x_i \right) dx_1 \dots dx_n \quad (6.10)$$

ehk

$$\delta J = \underbrace{\int \dots \int}_G \left[\left(F_u - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \right) \bar{\delta} u + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \bar{\delta} u + F \delta x_k \right) \right] dx_1 \dots dx_n. \quad (6.11)$$

(6.11) saamisel on peetud silmas identsusi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \frac{\partial \bar{\delta} u}{\partial x_k} &\equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \bar{\delta} u \right) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \bar{\delta} u; \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (F \delta x_k) &\equiv \sum_{k=1}^n F_{x_k} \delta x_k + F_u \sum_{k=1}^n u_{x_k} \delta x_k + F \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_k} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} u_{x_i x_k} \delta x_k. \end{aligned}$$

Erijuhul, kui sõltumatuid muutujaid ei varieerita $\delta x_k = 0$ ja kui funktsiooni u variatsioon piirkonna G äärel on null, võime Greeni valemi põhjal integraali $\underbrace{\int \dots \int}_G \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \bar{\delta} u \right) dx$ teisendada integraaliks üle piirkonna G äärepinna Γ :

$$\underbrace{\int \dots \int}_\Gamma \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \bar{\delta} u \right) dS_k,$$

mis aga on null tingimuse $\bar{\delta} u|_\Gamma = 0$ tõttu. (6.11) taandub sel viisil juba tuntud avaldiseks (6.1).

Leitud esimese variatsiooni üldine avaldis (6.11) on kergesti üldistatav mitme muutuja funktsionaali juhule:

$$\delta J[u_1, \dots, u_M] = \underbrace{\int \dots \int}_G \left\{ \sum_{A=1}^M \left(F_{u_A} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \right) \bar{\delta} u_A + \right.$$

$$+ \sum_{\kappa=1}^n \left[\sum_{A=1}^M \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u_A}{\partial x_{\kappa}} \right)} \bar{\delta} u_A \right) - \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} (F \delta x_{\kappa}) \right] dx_1 \dots dx_n. \quad (6.11')$$

Teise, peaaegu triviaalse üldistuse saame, kui vaatleme teisendusvalemeid (6.2') sõltuvatena mitmest parameetrist $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_g$. Kuna valemid (6.2') omandavad kuju

$$x_{\kappa}^* = x_{\kappa} + \sum_{\alpha=1}^g \varepsilon_{\alpha} \varphi_{\alpha\kappa}(x, u),$$

$$u_A^* = u_A + \sum_{\alpha=1}^g \varepsilon_{\alpha} \psi_{\alpha A}(x, u),$$

siis on selge, et $\delta x_{\kappa}, \delta u_A$ ja $\bar{\delta} u_A$ all tuleb nüüd valemis (6.11) mõista järgmisi avaldisi:

$$\delta x_{\kappa} = \sum_{\alpha=1}^g \varepsilon_{\alpha} \varphi_{\alpha\kappa}(x, u),$$

$$\delta u_A = \sum_{\alpha=1}^g \varepsilon_{\alpha} \psi_{\alpha A}(x, u),$$

$$\bar{\delta} u_A = \delta u_A - \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial u_A}{\partial x_{\kappa}} \delta x_{\kappa}.$$

4. Noetheri teoreem.

Eelmises paragrahvis toodud (§ 5, 3) funktsionaali invariantisuse mõiste on kergesti üldistatav ka funktsionaalidele mitme muutuja funktsioonidest. Me ütleme, et funktsionaal (2.15) on invariantne teisenduse (6.2) (\mathcal{E} - fikseeritud) suhtes, kui

$$\mathcal{J}[u^*(x^*)] = \mathcal{J}[u].$$

Näiteks funktsionaal

$$J[u] = \iint_G [(u_x)^2 + (u_y)^2] dx dy$$

on invariantne teisenduse (xy -tasandi pööre)

$$\begin{aligned}x^* &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\y^* &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\u^* &= u.\end{aligned}\tag{6.12}$$

suhtes. Tõepoolest

$$u^*(x^*, y^*) = u(x^* \cos \alpha - y^* \sin \alpha, x^* \sin \alpha + y^* \cos \alpha)$$

(kahest esimesest valemist (6.12) on avaldatud x ja y ,
 x^* ja y^* kaudu) ja

$$\begin{aligned}J[u^*(x^*)] &= \iint_{G^*} [(u_{x^*}^*)^2 + (u_{y^*}^*)^2] dx^* dy^* = \\&= \iint_{G^*} [(u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha)^2 + (-u_x \sin \alpha + u_y \cos \alpha)^2] dx^* dy^* = \\&= \iint_G [(u_x)^2 + (u_y)^2] dx dy = J[u],\end{aligned}$$

sest jakobiaan $\frac{D(x, y)}{D(x^*, y^*)} = 1$.

Kui funktsionaal

$$J[u] = \iint_G F(x, u, u_x) dx$$

on invariantne teisenduste parve (6.2) iga teisenduse suhtes,

siis kehtib seos

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \bar{\Psi} + F \varphi_k \right] = 0, \quad \left(\bar{\Psi} = \psi - \sum_{k=1}^n \varphi_k u_{x_k} \right), \tag{6.13}$$

kus funktsioonid ψ ja φ_i on defineeritud valemitega (6.2)

ja u on funktsionaali $J[u]$ meelevaldne ekstremaal
(Noetheri teoreem).

Teoreemi tõestuseks peame silmas, et invariantse nõu-
dest järeldub tingimus $\delta J = 0$. Esimese variatsiooni üldi-
ses avaldises (6.11) tuleb aga arvestada, et funktsioon
 $u(x_1, \dots, x_n)$ kui ekstremaal rahuldab Euleri võrrandit, seega

$$\int_G \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \bar{\delta} u + F \delta x_k \right) \right] dx_1 \dots dx_n = 0$$

ja siit piirkonna G meelevaldsuse tõttu

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \bar{\delta} u + F \delta x_k \right) \equiv \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{x_k}} \left(\psi - \sum_{k=1}^n \varphi_k u_{x_k} + F \varphi_k \right) \right) = 0.$$

Märkus 1. Kui teisenduste parv (6.2) sisaldab ϱ sõl-
tumatu parameetrit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\varrho$, siis saame ϱ sõltu-
matut seost (6.13).

Märkus 2. Kui on tegemist funktsionaaliga mitmest funkt-
sioonist, siis asendub tingimus (6.13) veidi keerukamaga

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{A=1}^M \frac{\partial F}{\partial u_A} \bar{\psi}_A + F \varphi_k \right] = 0, \quad (6.13')$$

kus

$$\bar{\psi}_A = \psi_A - \sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial u_A}{\partial x_k}$$

(vt. (6.4', 5')).

5. Väljateooria variatsioonprintsibid.

Nagu eespool märkisime, on mehhaanika vähima (täpsemi-
ni statsionaarse) mõju printsiip, mille me formuleerisime
masspunktide süsteemi jaoks (§ 5.5), kergesti üldistatav
eelkõige lõpmata suure vabadusastmete arvuga (ehk nn. haju-

tatud parameetritega mehhaaniliste süsteemide juhule. Selleks tuleb üldiselt Lagrange'i funktsiooni avaldises (5.17") asendada summeerimine üle lõplike masspunktide n ; summeerimisega üle lõpmata hulga elementaarsete masspunktide s . o. integreerimisega (vt. ülesanded 4 - 7). Vaadeldes välju kui lõpmata suure vabadusastmete arvuga süsteeme võime üles ehitada analoogiliselt klassikalisele mehhaanikale ka väljateooria, lähtudes sobivalt formuleeritud variatsioonprintsibist. Seejuures võib kasutada kas Hamiltoni või Lagrange'i formalismi. Esimesel juhul on põhisuurusteks Hamiltoni funktsioon ning üldistatud koordinaadid, mis alluvad nn. kanoonilistele võrranditele. Kuna ajakoordinaat on esile tõstetud (kanoonilistes võrrandites on põhiliseks muutujaks aeg, ruumikoordinaadid esinevad parameetrite osas), siis ei ole selline käsitlus relativistlikult kovariantne, ning see ongi selle formalismi põhiliseks puuduseks. Teisel juhul lähtutakse Lagrange'i mõjufunktsioonist, mille kaudu formuleeritakse väljavõrrandid ja jäävuseseadused. Kuigi analoogia mehhaanikaga ei ole siin igal sammul nii ilmne kui Hamiltoni formalismis, on kogu käsitlus relativistlikult kovariantne, sest aeg ja ruumikoordinaadid esinevad siin täiesti sümmeetriliselt. Käesolevas ülevaates piirdumegi Lagrange'i formalismi vaatlemisega.

Igat välja saame iseloomustada kas ühe või mitme väljafunktsiooniga u_A ($A = 1, 2, \dots, M$), mis sõltuvad ajast t ja ruumikoordinaatidest x, y, z . Et anda valemitele sümmeetrilistemat kuju, nummerdame koordinaate indeksiga all $x_1 = x$,

$x_2 = y$, $x_3 = z$ ja $x_0 = ct$ (c - valguse kiirus). Sõltuvalt funktsioonide u_A teisenemiseeskirjast üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise ja ruumitelgede pööramisele jaotame välju skalaar-, vektor-, tensor- või spinorväljaks.

Teooria aluseks võtame siingi variatsioonprintsibi

$$\delta S = 0. \quad (6.14)$$

Mõju S on funktsionaal väljafunktsioonidest u_A . Olulisemaks ja üldisemaks nõudeks funktsionaalile S on relativistliku invariantuse nõue, s. t. ta peab olema invariantne kõigi võimalike paralleelnihete ja homogeensete Lorentzi teisenduste suhtes. Lorentzi teisendusteks nimetatakse koordinaatide x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) selliseid lineaarseid homogeen-
seid teisendusi, mis jätavad invariantseks intervalli

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

nistahes kahe ajalisruumilise sündmuse (x_μ) ja ($x_\mu + dx_\mu$) vahel. Mõju kujutab vormiliselt integraali üle teatud aegruumi piirkonna

$$S = \int L(x_\mu) dx_1 dx_2 dx_3 dx_0. \quad (6.15)$$

Funktsiooni L nimetatakse lagranžiaaniks ehk Lagrange'i funktsiooni tiheduseks (Lagrange'i funktsioon \mathcal{L} on integraal lagranžiaanist üle kolmruumi piirkonna: $\mathcal{L}(x_0) = \int L(x_\mu) dx_1 dx_2 dx_3$). Lagranžiaan sõltub vabade väljade korral koordinaatidest x_μ harilikult ainult funktsioonide u_A ja nende osatuletiste kaudu. Seejuures leiavad füüsikalistes teooriates rakendust peamiselt funktsiooni-

dest u_A ja nende esimest järku osatuletistest sõltuvad lagranžiaanid

$$L(x_k) = L\left[u_A(x_k), \frac{\partial u_A(x_i)}{\partial x_k}\right]. \quad (6.15')$$

Variatsioonprintsibiist (6.14) saame eeldusel, et välja-funktsioonide variatsioonid δu_A saavad 4-mõõtmelise integreerimispiirkonna äärtel nulliks, väljavõrrandid:

$$\frac{\partial L}{\partial u_A} - \sum_{k=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_A}{\partial x_k}\right)} = 0. \quad (6.16)$$

Nn. lineaarsetes teooriates, kus väljavõrrandid (6.16) on lineaarsed diferentsiaalvõrrandid, võib lagranžiaan sisaldada ülimalt ruutkombinatsioone välja-funktsioonidest ja nende tuletistest.

6. Energiaimpulsstensor.

Kui integraal (6.15) on invariantne ϱ -parameetrilise teisenduste parve suhtes

$$x_k^* = \phi_k(x, u_A, \frac{\partial u_A}{\partial x}, \varepsilon_\alpha) = x_k + \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \varepsilon_\alpha \varphi_{\alpha k}, \quad (6.17)$$

$$u_A^* = \psi_A(x, u_B, \frac{\partial u_B}{\partial x}, \varepsilon_\alpha) = u_A + \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \varepsilon_\alpha \psi_{\alpha k},$$

siis kehtib Noetheri teoreemi kohaselt ϱ divergentsitüüpi seost

$$\operatorname{div} \theta_{\alpha, k} = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial \theta_{\alpha, k}}{\partial x_k} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \varrho), \quad (6.18)$$

kus

$$\theta_{\alpha, k} = \sum_{A=1}^M \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_A}{\partial x_k}\right)} \bar{\psi}_{\alpha A} + L \varphi_{\alpha k} \quad (6.18')$$

ja

$$\bar{\Psi}_{\alpha A} = \Psi_{\alpha A} - \sum_{\kappa=0}^3 \varphi_{\alpha \kappa} \frac{\partial \Psi_{\alpha A}}{\partial x_{\kappa}}. \quad (6.18'')$$

Iga selline seos annab ühe väljainvariandi. Et selles veenduda, integreerime võrdust (6.18) üle 4-mõõtmelise piirkonna, mis on piiratud kahe tasandiga $x_0 = a$ ja $x_0 = b$ ja silindripinnaga (4-ruumis) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ (vastav kolmruumi piirkond on piiratud sfääriga). Teisendades integraali divergentsist pindintegraaliks üle piirkonna ääre saame:

$$\int \text{div } \theta_{\alpha \kappa} dx_1 dx_2 dx_3 dx_0 = \int (\theta_{\alpha \kappa}, n_{\kappa}) d\sigma,$$

kus $d\sigma$ on 4-mõõtmelise piirkonna äärepinna element, n_{κ} - selle pinna normaali ühikvektor ja $(\theta_{\alpha \kappa}, n_{\kappa})$ - 4-vektorige $\theta_{\alpha \kappa}$ ja n_{κ} skalaarne korrutis. Kooskõlas tavaliste füüsikaliste kujutlustega kahaneb väli ruumilises lõpmatuses küllalt kiiresti, mistõttu piirjuhul saab integraal üle silindripinna nulliks.* Järele jääb vaid integraal üle silindri põhjade, seal aga $(\theta_{\alpha \kappa}, n_{\kappa})$ taandub 4-vektori $\theta_{\alpha \kappa}$ ajasarnaseks komponendiks $\theta_{\alpha 0}$ ja integreerimine üle $d\sigma$ integreerimiseks kõigi ruumiliste koordinaatide järgi. Nii saame

$$\int \theta_{\alpha 0}(x_1, x_2, x_3, a) dx_1 dx_2 dx_3 = \int \theta_{\alpha 0}(x_1, x_2, x_3, b) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (6.19)$$

ehk avaldis

$$R_{\alpha} = \int \theta_{\alpha 0} dx_1 dx_2 dx_3 = \int \left[\sum_{A=1}^4 \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial \Psi_{\alpha A}}{\partial x_0})} \bar{\Psi}_{\alpha A} + L \varphi_{\alpha 0} \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (6.19')$$

* Ruumiliselt lõplike piirkondade korral on see nii, kui väli piirkonna äärel saab nulliks.

on ajast sõltumatu.

Olgu märgitud, et võrdus (6.18) jääb kehtima ja tema poolt määratud jääva suuruse R_α arvuline väärtus jääb endiseks, kui lisame komponentidele $\theta_{\alpha\kappa}$ liikme

$$\sum_{\ell=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\ell} f_{\alpha, \ell\kappa}, \quad (6.20)$$

kus suurused $f_{\alpha, \ell\kappa}$ rahuldavad tingimust

$$f_{\alpha, \ell\kappa} = -f_{\alpha, \kappa\ell} \quad (6.20')$$

(vt. ül. 8).

Vaatleme nüüd, millistele järeldustele viivad eelmises punktis formuleeritud üldised mõjuintegraali invariantsuse nõuded. Peatume esiteks invariantsusel ruumi- ja aja-koordinaatide paralleelnihke suhtes. Selleks, et meil edaspidi poleks tarvis eristada vektorite ja tensorite kontra- ja kovariantseid komponente ja tensorite lühendamisel kasutada pseudoeukleidilise aegruumi meetrilist tensorit, toome sisse puhtimaginaarse ajalise koordinaadi $x_4 = i x_0$ (sama seos kehtib ka teiste vektorite ajaliste komponentide jaoks). Paralleelnihkel

$$x_\kappa^* = x_\kappa + \varepsilon_\kappa, \quad (\kappa = 1, 2, 3, 4). \quad (6.21)$$

Kuna seejuures vektorite ja tensorite komponendid ei muutu, siis

$$u_A^*(x^*) = u_A(x). \quad (6.21')$$

Võrreldes valemeid (6.17, 21, 21') näeme, et

$$\varphi_{\kappa\ell} = \delta_{\kappa\ell} = \begin{cases} 1, & \text{kui } \kappa = \ell, \\ 0, & \text{kui } \kappa \neq \ell, \end{cases} \quad (6.22)$$

ja

$$\psi_{\kappa A} = 0, \text{ kuid } \bar{\psi}_{\kappa A} = -\sum_{\ell=1}^4 \frac{\partial u_A}{\partial x_\ell} \varphi_{\kappa\ell} = -\frac{\partial u_A}{\partial x_\kappa}.$$

Seega saame avaldised (6.18, 18') anda selliselt

$$\operatorname{div} T_{\kappa\ell} \equiv \sum_{\ell=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\ell} T_{\kappa\ell} = 0, \quad (6.23)$$

$$T_{\kappa\ell} = \sum_{A=1}^M \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_A}{\partial x_\ell} \right)} \frac{\partial u_A}{\partial x_\kappa} - L \delta_{\kappa\ell}. \quad (6.23')$$

Suurust $T_{\kappa\ell}$ nimetatakse energiaimpulsstensoriks. Igale κ -le vastab (6.19') tüüpi jääv suurus

$$i P_\kappa = \int T_{\kappa\gamma} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (6.24)$$

Vektor P_κ on välja energiaimpulssvektor, komponendid P_κ ($\kappa=1,2,3$) annavad välja impulsi, komponent $P_0 = \frac{P_0}{t} = \frac{E}{c}$ välja energia E .

Lõpuks märgime, et valemiga (6.23) antud energiaimpulss-tensor $T_{\kappa\ell}$ ei ole üldiselt sümmeetriline, s. t.

$$T_{\kappa\ell} \neq T_{\ell\kappa}.$$

Kuid sobiva (6.20, 20') tüüpi liikme juurdelisamisega võime alati saada energiaimpulss-tensori sümmeetrilise avaldise:

$$T_{\kappa\ell}^{(s)} = T_{\kappa\ell} + \sum_{m=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_m} f_{\kappa, \ell m},$$

kus

$$f_{\kappa, \ell m} = -f_{\ell, \kappa m}. \quad (6.25)$$

7. Impulssmomendi ja spinmomendi tensorid.

Pisut keerukam on analüüsida mõjuintegraali invariant-
sust Lorentzi teisenduste suhtes. Üldist infinitesimaalset
Lorentzi teisendust võime lahutada üksikute koordinaattasan-
dite (kokku 6) pööreteks, x_1, x_2 tasandi pöördel nurga ω_{12}
võrra (vt. § 5, 5):

$$\begin{aligned}x_1^* &= x_1 \cos \omega_{12} + x_2 \sin \omega_{12}, & x_3^* &= x_3, \\x_2^* &= -x_1 \sin \omega_{12} + x_2 \cos \omega_{12}, & x_4^* &= x_4\end{aligned}$$

ehk lõpmata väikese pöörde korral:

$$\begin{aligned}x_1^* &= x_1 + x_2 \omega_{12}, & x_3^* &= x_3, \\x_2^* &= x_2 - x_1 \omega_{12}, & x_4^* &= x_4.\end{aligned}\tag{6.26}$$

Üleminekut ühelt inertsiaalsüsteemilt teisele, kiirusega v
 x_1 -telje suunas liikuvale süsteemile

$$\begin{aligned}x_1^* &= \frac{x_1 + i \frac{v}{c} x_4}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, & x_2^* &= x_2, \\x_4^* &= \frac{x_4 - i \frac{v}{c} x_1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, & x_3^* &= x_3\end{aligned}$$

võime vaadelda kui x_1, x_4 tasandi pöört imaginaarse nurga
 $\omega_{14} = i \omega_{40}$ võrra (ω_{40} - reaalarv), kusjuures

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \cos \omega_{14} = \operatorname{ch} \omega_{40}; \quad \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \sin \omega_{14} = -i \operatorname{sh} \omega_{40}.$$

Seega saame lõpmata väikese teisenduse esitada selliselt

$$\begin{aligned}x_1^* &= x_1 + \omega_{14} x_4, & x_2^* &= x_2, \\x_4^* &= x_4 - \omega_{14} x_1, & x_3^* &= x_3.\end{aligned}\tag{6.26'}$$

On kerge näha, et üldise teisenduse võime anda selliselt

$$x_k^* = x_k + \sum_{\ell=1}^4 \omega_{k\ell} x_\ell = x_k + \delta x_k, \quad (6.27)$$

kus

$$\omega_{k\ell} = -\omega_{\ell k}. \quad (6.27')$$

Tingimuse (6.27') tõttu on 16-st suurusest $\omega_{k\ell}$ sõltumatuid ainult 6 (diagonaallikmed $\omega_{11}, \dots, \omega_{44}$ on nullid). Seega on teisenduste parv (6.27) 6-parametrliline, nendeks on suurused $\omega_{k\ell}$, mille puhul $k < \ell$. Et seda asjaolu selgemalt esile tuua, teisendame (6.27) teist liiget (δx_k)

$$\begin{aligned} \delta x_k &= \sum_{\ell=1}^4 \omega_{k\ell} x_\ell = \sum_{\ell, m=1}^4 \omega_{m\ell} x_\ell \delta_{mk} = \sum_{m < \ell} \omega_{m\ell} x_\ell \delta_{mk} + \sum_{m > \ell} \omega_{m\ell} x_\ell \delta_{km} = \\ &= \sum_{m < \ell} \omega_{(\ell m)} (x_\ell \delta_{mk} - x_m \delta_{k\ell}) = \sum_{m < \ell} \omega_{(m\ell)} \varphi_k(m\ell) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Siin summeerime üle indeksi paaride $(m\ell)$, mille korral $m < \ell$. Igale sellisele paarile ($\omega_{(m\ell)} = \varepsilon_d$) vastab Noetheri teoreemi põhjal üks divergentsi tüüpi seos (6.18) ja üks jääv suurus (6.19'). Nende konkreetse kuju leidmiseks tuleb teada väljafunktsioonide u_A teisenemiseeskirja. Viimase võime anda sellisel üldisel kujul:

$$u_A^*(x^*) = u_A(x) + \delta u_A, \quad (6.29)$$

kus

$$\delta u_A = \sum_B \sum_{m < \ell} \Omega_{AB(m\ell)} u_B \omega_{(m\ell)} = \sum_{m < \ell} \omega_{(m\ell)} \Psi_A(m\ell). \quad (6.29')$$

* Meie käsitluses, kus piirduetakse ainult ortogonaalsest sirgjoonelistest koordinaatsüsteemidega pseudoeuclidilises algruumis, on suurused $\Omega_{AB(m\ell)}$ konstandid. Kõverjoonelistest

Skalaarse välja korral $\Omega_{AB(m\ell)} = 0$ (vt. ka ülesandeid (9 - 11). Kasutades seoseid (6.28 . 29') võime anda valemitele (6.18, 18') sellise kuju:

$$\sum_{\kappa=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} M_{\kappa(m\ell)} = 0, \quad (6.30)$$

kus

$$\begin{aligned} M_{\kappa(m\ell)} &= \sum_A \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_A}{\partial x_{\kappa}} \right)} \left(\frac{\partial u_A}{\partial x_m} x_{\ell} - \frac{\partial u_A}{\partial x_{\ell}} x_m \right) + \\ &+ L(\delta_{\kappa\ell} x_m - \delta_{\kappa m} x_{\ell}) - \sum_{A,B} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_A}{\partial x_{\kappa}} \right)} \Omega_{AB(m\ell)} u_B = \\ &= x_{\ell} T_{\kappa m} - x_m T_{\kappa\ell} - \sum_{A,B} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_A}{\partial x_{\kappa}} \right)} \Omega_{AB(m\ell)} u_B. \end{aligned} \quad (6.30')$$

Momentide tensor $M_{\kappa(m\ell)}$ koosneb kahest osast (orbitaalset) impulssmomendi tensorist

$$M_{\kappa(m\ell)}^0 = x_{\ell} T_{\kappa m} - x_m T_{\kappa\ell} \quad (6.31)$$

ja välja polarisatsioonilisi omadusi iseloomustavast spinmomendi tensorist

$$S_{\kappa(m\ell)} = - \sum_{A,B} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_A}{\partial x_{\kappa}} \right)} \Omega_{AB(m\ell)} u_B. \quad (6.31')$$

Kasutades valemteid (6.12') võime kergesti leida ka igale indeksi paarile vastavad jäävad suurused (vt. ül. 13).

koordinaatsüsteemide ja mitteeuclidilise meetrikaga aegruumi korral on suurused $\Omega_{AB(m\ell)}$ koordinaatide ja aja funktsioonid.

8. Esimest liiki gradientteisendus ja laengu jäävus.

Laenguga objekte kirjeldavate väljade (mesonväljad, elektron-positronväli jne.) väljafunktsioonid on kompleksed. Seejuures garanteerib lagranžiaani, mõjuintegraali ja jäävate suuruste reaalsuse asjaolu, et lagranžiaan sõltub vaid väljafunktsiooni ja tema tuletiste ruutkombinatsioonidest $\bar{u} u$ (kompleksarvu u ja tema kaaskompleksarvu \bar{u} korrutis). On ilmne, et mõjuintegraal on siis invariantne nn. esimest liiki gradientteisenduse suhtes:

$$u_A^* = e^{i\alpha} u_A, \quad \bar{u}_A^* = e^{-i\alpha} \bar{u}_A \quad (6.32)$$

ehk infinitesimaalsel kujul

$$u_A^* = u_A + i\alpha u_A, \quad \bar{u}_A^* = \bar{u}_A - i\alpha \bar{u}_A. \quad (6.32')$$

Pidades silmas, et

$$\psi_A = i u_A \quad \text{iga } u_A \text{ korral,}$$

ja

$$\psi_A = -i \bar{u}_A \quad \text{iga } \bar{u}_A \text{ korral,}$$

saame Noetheri teoreemi (6.18, 18') põhjal kirjutada

$$\sum_{\kappa=1}^4 \frac{\partial J_{\kappa}}{\partial x_{\kappa}} = 0, \quad (6.33)$$

kus

$$J_{\kappa} = i \sum_A \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial x_{\kappa}} \right)} \bar{u}_A - \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_A}{\partial x_{\kappa}} \right)} u_A \right]. \quad (6.33')$$

Vektorit J_{κ} tõlgendatakse kui vooluvektorit ja jäävat suurust Q :

$$i Q = \int J_4 dx_1 dx_2 dx_3 \quad (6.33'')$$

kui välja laengut (võrrand (6.33) - pidevuse võrrand). Seejuures ei tarvitse laeng Q tähendada alati elektrilist laengut; ta võib kirjeldada ka näiteks nukleonlaengut.

Ülesanded § 6 juurde.

1. Leida funktsionaali $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ esimese variatsiooni üldine avaldis, kasutades punktides 1 - 3 arendatud meetodikat.

2. Kontrollida, kas funktsionaal

$$J[y] = \iint \frac{\partial u}{\partial x} dx dy$$

on invariantne teisenduse (6.12) suhtes.

Vastus: ei ole.

3. Veenduda, et 4. punktis formuleeritud Noetheri teoreem viib funktsionaali $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ korral juba tuttavale formuleeringule (§ 5.3).

4. Formuleerida Hamiltoni printsip lõpliku keele väikeste ristvõnkumiste jaoks ja tuletada võnkumiste diferentsiaalvõrrand.

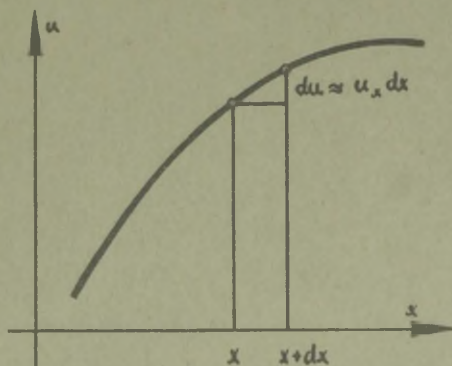
Märkus: Keelt, s. t. peenikest elastset pingutatud niiti, mis ei avalda vastupanu painutamisele, küll aga venitamisele, vaatleme kui ühemõõtmelist süsteemi. Tasakaaluolekus on keele mistahes punkt määratud ühe koordinaadiga x . Keele võnkumisi kirjeldab vektorfunktsioon $\vec{u}(x, t)$ (keele punkti x nihe tasakaaluasendist hetkel t), kui piirdume tasapinnaliste ristvõnkumistega, siis piisab nende kirjeldamiseks ühest skalaarsest funktsioonist $u(x, t)$. Keele kineetilise energia on kergesti leitav

$$\frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) u_t^2(x, t) dx \quad (1)$$

($\rho(x)$ - keele joontihedus). Potentsiaalne energia koosneb mitmest osast: 1) deformatsiooni potentsiaalne energia

$$\frac{1}{2} \int_0^l T_0 u_x^2(x, t) dx \quad (2)$$

(T_0 - keele ping), mis on seotud keele elementide ($x, x+dx$) pikenemisega $\sqrt{dx^2 + dy^2} dx \approx \frac{1}{2} u_x^2 dx$ võrra (vt. joon. 19);



Joon. 19.

(Pidades silmas, et ristvõnkumiste korral joonelemendile ($x, x+dx$) mõjuva pingetungi x komponent on null, näidata, et $T_0(x+dx) = T_0(x) = \text{const}$. Tõestuse juures arvestada, et võnkumiste väiksuse tõttu on ka u_x ja u_{xx} väikesed); 2) joonelementidele dx mõjuva välise tungi $f(x, t) dx$ ületamiseks kuluv energia

$$- \int_0^l u(x,t) f(x,t) dt \quad (3)$$

ja 3) keele otspunktides mõjuvate seosetungide ületamiseks kuluv potentsiaalne energia. See on määratud otspunktide kinnitusrežiimiga. Kui näiteks otspunkt $x=0$ on elastselt seotud etteantud seaduse $u_0 = \theta_1(t)$ järgi liikuva punktiga, siis oleks otspunkti $x=0$ potentsiaalne energia

$$- \frac{\sigma_1}{2} [u(0,t) - \theta_1(t)]^2 \quad (4')$$

(σ_1 - elastse tungi võrdetegur). Kui lisaks elastsele tungi mõjuks muu päritoluga teada olev tung $\mu_1(t)$, siis liisanduks veel liige

$$- \mu_1(t) u(0,t). \quad (4'')$$

Nii siis lugedes alghetke nulliks

$$S = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l [\rho(x) u_t^2(x,t) - T_0 u_x^2(x,t) + 2f(x,t)u(x,t)] dx dt + \\ + \int_0^t \left\{ \mu_1(t) u(0,t) + \frac{1}{2} \sigma_1 [u(0,t) - \theta_1(t)]^2 \right\} dt + \\ + \int_0^t \left\{ \mu_2(t) u(l,t) + \frac{1}{2} \sigma_2 [u(l,t) - \theta_2(t)]^2 \right\} dt. \quad (5)$$

Liikumine $u(x,t)$, mis viib keele aja t_1 jooksul algkujust $u(x,0) = \varphi_0(x)$ lõppkujju $u(x,t_1) = \varphi_1(x)$, on selline, mille korral funktsionaali (5) esimene variatsioon on null ($\delta S = 0$). Kasutades valemeid (1.7) ja (6.11) ning arvestades, et 1) $x_1 = t$, $x_2 = x$ 2) sõltumatud muutujad x ja t piirkonna äärtel ei varieeru, 3) $\bar{\delta} u(x,0) = 0$ ja $\bar{\delta} u(x,t_1) = 0$ saame

$$\begin{aligned}
 dS = & \int_0^{t_1} \int_0^l [f(x,t) - \rho(x) u_{tt} + T_0 u_{xx}] \bar{\delta} u \, dt \, dx + \\
 & + \int_0^{t_1} \{ T_0 u_x(0,t) + \sigma_1 u(0,t) + [\mu_1(t) - \sigma_1 \theta_1(t)] \} dt + \\
 & + \int_0^{t_1} \{ -T_0 u_x(l,t) + \sigma_2 u(l,t) + [\mu_2(t) + \sigma_2 \theta_2(t)] \} dt.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Kasutades juba tuntud meetodikat (vt. § 3, 2), saame

$$u_{tt} = \frac{T_0}{\rho} u_{xx} + \frac{f(x,t)}{\rho(x)}, \tag{7}$$

$$\left. \begin{aligned}
 T_0 u_x(0,t) + \sigma_1 (u(0,t) - \theta_1(t)) &= -\mu_1(t), \\
 -T_0 u_x(l,t) + \sigma_2 (u(l,t) - \theta_2(t)) &= -\mu_2(t),
 \end{aligned} \right\} \tag{7'}$$

kusjuures

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u(x,t_1) = \varphi_1(x). \tag{7''}$$

Märgime, et kui $\sigma_i = 0$, annavad ääretingimused (7') antud tungi mõjul liikuva otspunkti juhu; kui ka $\mu_i(t) = 0$, siis vaba otspunkti juhu; kui aga $\sigma_i = \infty$, siis saame antud viisil liikuva (või kui ka $\theta_i = 0$, siis kinnise) otspunkti juhu. Teise tingimuse (7'') asemel kasutatakse keele võnkumise probleemi uurimisel võrrandi (7) lahendit üheks määramiseks tavaliselt teist algtingimust: kiiruste jaotust alghetkel

$$u(x,0) = \psi_0(x).$$

5. Formuleerida Hamiltoni printsiip elastse varda (keele, vedru jne.) väikeste pikivõnkumiste jaoks ja leida võnkumiste diferentsiaalvõrrand.

Märkus: Võnkumisi iseloomustame funktsiooniga $u(x,t)$, mis annab varda punkti longitudinaalse nihke tasakaaluasendist. Pidades silmas, et väikesed deformatsioonid alluvad Hooke'i seadusele

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{T}{\kappa} = \frac{F}{\kappa S}$$

(T - pingeline, F - ristlõikele mõjuv tung, S - ristlõike pindala, κ - Youngi moodul), saame deformatsiooni potentsiaalse energia anda kujul:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \kappa(x) S(x) u_x^2(x,t) dx.$$

Vastus:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x) S(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[S(x) \kappa(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{f(x,t)}{\rho(x)}$$

($\rho(x)$ - varda tihedus, $f(x,t)$ - välise tungi tihedus).

6. Formuleerida Hamiltoni printsiip äärtelt kinnitatud tasapinnalise membraani väikeste ristvõnkumiste jaoks ja leida võnkumiste diferentsiaalvõrrand.

Märkus: Membraaniks nimetame õhukest pingutatud kilet, mis ei avalda vastupanu paindele, küll aga venitamisele. Membraani ristvõnkumisi iseloomustame membraani punktide hälvetega tasakaaluasendist (xy -tasand), s. o. funktsiooniga $u(x,y,t)$. Membraani ennast iseloomustame pindtihedusega $\rho(x,y)$ ja pingega T_0 (nii nagu keele korralgi, saab näidata, et $T_0 = \text{const}$). Membraani deformatsiooni potentsiaalne energia avaldub selliselt:

$$\frac{1}{2} \iint_D (u_x^2 + u_y^2) T_0 dx dy.$$

(D - membraaniga kaetud xy -tasandi piirkond), sest võnkumisel deformeerub pinnaelement $dx dy$ ja omandab juurdekasvu:

$$\sqrt{1+u_x^2+u_y^2} dx dy - dx dy = \frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2) dx dy.$$

Vastus:

$$u_{tt} = \frac{T_0}{\rho}(u_{xx}+u_{yy}) + \frac{f(x,y,t)}{\rho(x,y)}.$$

7. Formuleerida Hamiltoni printsiip homogeense sirge varda ristvõnkumiste jaoks, tuletada võnkumiste diferentsiaalvõrrand ja vabadele otspunktidele vastavad ääritingimused.

Märkus: Erinevalt keelest avaldab varras vastupanu paindele. Elementaarse paindedeformatsiooni potentsiaalset energiat me loeme seejuures võrdeliseks joonelemendi dx kõveruse $K = \sqrt{1+u_{xx}^2} \approx (1 + \frac{1}{2}u_{xx}^2)$ muutusega. Seega deformatsiooni potentsiaalne energia (μ -võrdetegur)

$$+ \int_0^l \frac{\mu}{2} u_{xx}^2 dx.$$

Vastus:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^4} = \frac{F}{\rho}, \quad \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u(l,t)}{\partial x^3} = 0.$$

(Jäiga kinnituse korral $u(0,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$; toetatud otspunkti korral $u(0,t) = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0$).

8. Veenduda, et divergentsitüüpi liikme (6.20) lisamisel avaldisele $\Theta_{\mu k}$ (6.18') jäävad kehtima seosed (6.18) ega muutu ka jäävate suuruste (6.19') väärtused.

Märkus: Avaldises (6.18') on juurdetulevad liikmed kas

nullid, kuna $f_{\alpha, \ell} = 0$, või kompenseerivad üksteist (6.20')
 tõttu. Jäävate suuruste avaldistes tuleb integrandi juurde
 ruumiline divergents, s. t. liige $\int \frac{\partial}{\partial x_\ell} f_{\alpha, \ell} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$, mis
 on teisendatav integraaliks üle ruumilise piirkonna äärepin-
 na. Piirjuhul $t \rightarrow \infty$ on see null.

9. Leida väljavõrrandid, tensorid $T_{k\ell}$ ja $M_{k, \ell m}$ ning
 jäävad suurused skalaarse välja korral.

Märkus: Siin ja järgnevatel ülesannetes on küllaldase
 vilumuse puudumisel soovitatav lagranžiaanide avaldistes esi-
 nevad summad kirjutada välja üksikasjaliselt ja alles siis
 teostada nõutavad arvutused.

Lineaarses teoorias peab skalaarse välja lagranžiaan
 olema selline (ainus skaalar, mida saab moodustada u ja
 tema esimest järku osatuletiste ruutkombinatsioonidest)

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{m^2}{2} u^2.$$

Vastus:

$$T_{k\ell} = \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_\ell} - \frac{1}{2} \delta_{k\ell} \left[\sum_{m=1}^4 \left(\frac{\partial u}{\partial x_m} \right)^2 + m^2 u^2 \right],$$

$$M_{k, \ell m} = \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(x_\ell \frac{\partial u}{\partial x_m} - x_m \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \right) + L (\delta_{k\ell} x_m - \delta_{km} x_\ell),$$

$$(\square - m^2) u(x) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - m^2 u = 0.$$

(Klein-Gordoni võrrand).

10. Leida Klein-Gordoni võrrandi (vt. ül. 9) staatiline
 radiaalsümmeetriline lahend ja ajast x_0 ning koordinaadist
 x_1 sõltuv eraldatud muutujatega perioodiline lahend. Leida
 viimase juhu jaoks tensorite $T_{k\ell}$ ja $M_{k, \ell m}$ konkreetsed
 avaldised.

Märkus: Eraldatud muutujatega lahendit otsida kujul

$$u = X_1(x_1) X_0(x_0).$$

Vastus:

$$u = A \cos \sqrt{\kappa^2 + m^2} x_0 \cos \kappa x_1.$$

11. Näidata, et elektromagnetilise välja võrrandid vaakumis on tuletatavad variatsioonprintsibiist $\delta S = 0$, kus lagranžiaan:

$$L = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{H}^2) = \frac{1}{16\pi} \sum_{\kappa, l=1}^4 F_{\kappa l} F_{\kappa l}.$$

Arvutada tensorid $T_{\kappa l}$, $M_{\kappa, ml}$, $M_{\kappa, ml}^0$ ja $S_{\kappa, ml}$ ja jäävad suurused. Esitada leitud avaldised nii nelja- kui kolmemõõtmelisel kujul.

Märkus: Elektromagnetilise välja tensor $F_{\kappa l}$ on seotud 4-potentsiaaliga A_{κ} (A_1, A_2, A_3 - vektorpotentsiaali komponendid, $A_4 = i\varphi$, φ - skalaarne potentsiaal):

$$F_{\kappa l} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial A_l}{\partial x_{\kappa}} - \frac{\partial A_{\kappa}}{\partial x_l}. \quad (1)$$

Maxwelli võrrandite esimene paar sisaldub võrdustes

$$\frac{\partial F_{\kappa l}}{\partial x_m} + \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_{\kappa}} + \frac{\partial F_{m\kappa}}{\partial x_l} = 0, \quad (2)$$

mis järelduvad vahetult välja tensori avaldisest potentsiaali kaudu (1). Variatsioonprintsipi potentsiaali jaoks annab võrrandite teise paari (veenduda!)

$$\sum_{l=1}^4 \frac{\partial F_{\kappa l}}{\partial x_l} = 0. \quad (3)$$

Tensori $M_{\kappa, m \ell}$ konstrueerimiseks tuleb konkretiseerida väljafunktsioonide teisenemiseeskirju. Kuna vektor A_{κ} teiseneb samuti kui kohavektor, siis

$$\delta A_{\kappa} = \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\kappa \ell} A_{\ell}. \quad (4)$$

Tähelepanu väärrib asjaolu, et mõju S on invariantne nn. teist liiki gradientteisenduse suhtes

$$A_{\kappa}^* = A_{\kappa} + \frac{\partial f}{\partial x_{\kappa}}, \quad (5)$$

kus f on meelevaldne funktsioon muutujatest x_{ℓ} . Funktsionaali invariantisus meelevaldset funktsiooni sisaldava teisenduste rühma suhtes toob kaasa lineaarse sõltuvuse Euleri võrrandite vahel (nn. teine Noetheri teoreem, mida me käesolevas kursuses ei vaatle), mistõttu ka võrrandisüsteemi lahendid ei ole ühesed. Lahendite hulga kitsendamiseks tuuakse sisse potentsiaali jaoks nn. Lorentzi tingimus

$$\sum_{\kappa=1}^4 \frac{\partial A_{\kappa}}{\partial x_{\kappa}} = 0. \quad (6)$$

Veenduda, et Lorentzi tingimuse abil lihtsustub võrrand potentsiaali jaoks (3), andes lainevõrrandi

$$\sum_{\ell=1}^4 \frac{\partial^2 A_{\kappa}}{\partial x_{\ell}^2} = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{\partial^2 A_{\kappa}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_{\kappa}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_{\kappa}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 A_{\kappa}}{\partial x_0^2} = 0. \quad (7)$$

Võttes lagranžiaani aga algusest peale kujul

$$L = \frac{1}{16\pi} \sum_{\kappa, \ell=1}^4 F_{\kappa \ell} F_{\kappa \ell} - \frac{1}{8\pi} \sum_{\kappa, \ell=1}^4 A_{\kappa, \kappa} A_{\ell, \ell} \quad (8)$$

saame variatsioonprintsibiist potentsiaali jaoks lainevõrrandi (7), ilma et oleks vaja kasutada lisatingimust (6).

Ometi toob kaasa lagranžiaani (8) kui ka temaga ekvivalentse

$$L = \frac{1}{16\pi} \sum_{k,l=1}^4 A_{k,l} A_{k,l} . \quad (8')$$

kasutamine teist laadi raskuse. Lagranžiaanid (8) ja (8') viivad välja energia jaoks väärtustele, mis ei ole positiivselt määratud (kontrollida!). Kasutades aga nüüd energia avaldises Lorentzi tingimust, mis vähendab potentsiaali vektori sõltumatute komponentide arvu kolmele, saame energia jaoks uuesti positiivselt määratud avaldise.

12. Konkretiseerida eelmise ülesande tulemusi eeldusel, et nullist erinevad ainult vektorpotentsiaali komponendid $A_1 = a \cos K(x_0 - x_1)$ ja $A_2 = b \cos K(x_0 - x_2)$.

13. Kasutades 7. punkti tulemusi, analüüsida, millised divergentsitüüpi seosed (6.30) ja millised jäävad suurused on seotud mõjuintegraali invariantisusega kolmruumi pöörete suhtes ning missugused järelduvad invariantisusest Lorentzi teisenduste suhtes. Saadud tulemuste alusel grupeerida skalaarse ja elektromagnetilise välja jäävad suurused.

§ 7. VARIATSIONARVUTUSE OTSESED MEETODID.

1. Otseste meetodite põhiidee.

Senini me taandasime variatsioonülesande lahendamise vastava Euleri võrrandi või võrrandite süsteemi lahendamisele etteantud lisatingimuste juures. Kuid mitte alati ei õnnestu neid diferentsiaalvõrrandeid lõplikul kujul integreerida ja paratamatult tuleb kasutada ligikaudseid meetodeid. Seejuures on otstarbekam vaadelda funktsionaale endid, mitte aga nende Euleri võrrandeid. Niisuguseid variatsioonülesannete lahendamise meetodeid nimetataksegi otsesteks meetoditeks. Oma olemuselt on need meetodid küllaltki universaalsed ja rakendatavad ka diferentsiaalvõrrandite lahendamisel, juhul kui viimased on esitatavad sobiva funktsionaali Euleri võrranditena.

Otsest meetodid tuginevad võimalusele vaadelda funktsionaali $J[y]$ kui funktsiooni lõpmata paljudest muutujatest $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, milleks on näiteks lubatud funktsioonide $y(x)$ rittaarenduse

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (7.1)$$

kordajad (näiteks Taylori või Fourier' rea kordajad). Piirdues reas (7.1) lõpliku hulga liikmetega $y = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$, saame funktsionaali $J[y]$ asendada ligikaudu funktsiooniga $J[a_1, \dots, a_n]$. Funktsiooni ekstreemumid on aga leitavad tavalisel teel. Edasine piirprotsess $n \rightarrow \infty$ annaks meile juba variatsioonülesande tõelise lahendi.

Anname esitatud mõttele veidi rangema formuleeringu. Konkreetsuse mõttes vaatleme mingis funktsiooniruumis R määratud funktsionaali $J[y]$ miinimumi leidmise ülesannet. Et probleemil oleks üldse mõte, peab ruumis R leiduma funktsioone, mille korral $J[y]$ on lõplik ($J[y] < \infty$), ning kooskõlas ülesande tüübiga (miinimumi leidmine) peab funktsionaali väärtuste hulk olema alt tõkestatud (alumine tõke μ). Kahtlemata leidub siis selline funktsioonide jada

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots = \{y_n(x)\}, \quad (7.2)$$

nii et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n(x)] = \mu. \quad (7.2')$$

Kui sellel minimeerival jadal $\{y_n(x)\}$ on piirkõver $y_0(x)$ ja

$$J[y_0(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} J[y_n(x)], \quad (7.3)$$

siis

$$J[y_0(x)] = \mu. \quad (7.3')$$

Nii siis tuleb variatsioonülesande lahendamiseks 1) leida minimeeriv jada $\{y_n(x)\}$, 2) tõestada, et jadal $\{y_n\}$ on olemas piirkõver $y_0(x)$, 3) tõestada, et piirprotsess (7.3) on teostatav. Üksikuid minimeeriva jada liikmeid võime vaadelda kui vastava variatsioonülesande ligikaudseid lahendeid.

On selge, et minimeerivat jada saab konstrueerida

alati, kui funktsionaali väärtuste hulk on alt tõkestatud. Mitmesugused otsesed meetodid erinevadki üksteisest põhiliselt minimeeriva jada valiku poolest. Tuleb märkida, et jada $\{y_n(x)\}$ piirkõvera olemasolu ei ole iseenesest mõistetav (vt. ül. 1). Sama kehtib ka piirprotsessi (7.3) kohta, sest variatsioonarvutuse funktsionaalid ei tarvitse olla pidevatel kõveratel pidevad. Võrduse (7.3) kehtivuseks on tarvis nõuda funktsionaali poolpidevust (altpoolt). (Tõestada!)*

2. Ritzi meetod.

Siin on funktsionaali $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ minimeeriva jada $\{y_n(x)\}$ konstrueerimisel aluseks lõigul (a, b) lineaarselt sõltumatute funktsioonide täielik hulk

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad (7.4)$$

Funktsioonid $\varphi_n(x)$ peavad olema sellised, et iga nende lineaarne kombinatsioon

$$y_n(x) = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n \quad (7.5)$$

oleks funktsionaali $J[y]$ lubatud kõveraks.

Kõveratel (7.5) osutub funktsionaal $J[y]$ n -muutuja funktsiooniks (muutujad c_1, c_2, \dots, c_n), selle miinimumi leidmine on ainult tehnilise iseloomuga ülesanne. Nii leiame iga n korral funktsioonide (7.5) hulgast funktsioo-

* Funktsionaali $J[y]$ nimetatakse altpoolt poolpidevaks kohal y_0 , kui iga positiivse arvu ε korral leidub selline $\delta(\varepsilon)$, et $J[y] - J[\bar{y}] < \varepsilon$, kui vaid $\| \bar{y} - y \| < \delta$.

ni $y_n^*(x)$, mille puhul on funktsionaalil $J[y]$ väikseim väärtus μ_n . Kuna $(n+1)$ -liikmelises kombinatsioonis (7.5) sisalduvad ka kõik n -liikmelised lineaarsed kombinatsioonid, siis ilmselt

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq \mu_{n+1} \geq \dots$$

Kui funktsionaal on vaadeldavas lineaarses ruumis R pidev ja funktsioonide $\varphi_n(x)$ hulk täielik, siis jada $\{y_n^*\}$ on minimiseeriv jada, s. t.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu.$$

Tõepoolest olgu $y_0(x)$ funktsioon, millel $J[y]$ on minimaalne $J[y_0(x)] = 0$, siis leidub pidevuse tõttu iga $\varepsilon > 0$ korral selline $\delta > 0$, et

$$|J[y] - J[y_0]| < \varepsilon,$$

kui

$$\|y - y_0\|_R < \delta.$$

Lineaarsete kombinatsioonide (7.5) seas leidub (kui n on küllalt suur) selline $y_n(x)$, et

$$\|y_n - y_0\|_R < \delta.$$

Seega

$$J[y_n] \leq \mu + \varepsilon.$$

Olgu nüüd $y_n^*(x)$ see lineaarne kombinatsioon n funktsioonist $\varphi_k(x)$, mille juures funktsionaal antud n korral on minimaalne, siis:

$$\mu_n = J[y_n^*(x)] \leq J[y_n] \leq \mu + \varepsilon.$$

ε - meelevaldsuse tõttu saame siit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu.$$

Ritzi meetodi koonduvus sõltub üldiselt nii vaadeldavast variatsioonülesandest kui ka funktsioonide $\varphi_n(x)$ (7.4) valikust. Väga sageli piisab juba paarist-kolmest funktsioonist $y_n(x)$, et saada küllalt head lähendust täpsele lähendusele. Konkreetsete lähendite koonduvuse uurimine ja vea hindamine on küllaltki keeruline (vt. näit. [5], [6], rakendusis füüsikas vt. [7]).

3. Euleri murdjoone meetod.

Nagu märkisime juba kursuse alguses (§ 1, 9), on võimalik funktsionaali $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ ligikaudu asendada n -muutuja funktsiooniga, kui asendame siledad kõverad $y(x)$ neid aproksimeerivate murdjoontega, mille tippude abstsissid x_1, x_2, \dots, x_n on fikseeritud, koordinaadid y_1, y_2, \dots, y_n aga vabalt valitavad. Kui murdjoone lülide arv on küllalt suur, võime integreerimise funktsionaalis $J[y]$ asendada summeerimisega ja

$$J[y_1, \dots, y_n] = \sum_{k=0}^n F(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x_k}) \Delta x_k, \quad (7.6)$$

$(\Delta x_k = x_{k+1} - x_k).$

Funktsiooni $J[y_1, \dots, y_n]$ ekstreemumi leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\frac{\partial J}{\partial y_k} \equiv F_y(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x_k}) \Delta x_k + F_y(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x_{k-1}}) \Delta x_{k-1} - F_y(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x_k}) \Delta x_k = 0. \quad (7.7)$$

Leides iga n korral selle murdjoone, mis teeb funktsiooni (7.6) minimaalseks, saame minimeeriva murdjoonte jaoks, mille igat liiget võime vaadelda kui teatud täpsusega lühikaudset lahendit variatsioonülesandele.

4. Ostaväärtusülesannetega seotud variatsioonprobleemid.

Vaatleme nn. Sturm-Liouville'i ülesannet: leida lõigul $[a, b]$ võrrandi

$$-[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x) \quad (7.8)$$

mittetriviaalsed lahendid, mis rahuldavad homogeenseid ääritingimusi

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (7.8')$$

Seejuures on eeldatud, et funktsioonid $p(x)$ ja $q(x)$ on lõigul $[a, b]$ positiivsed. On võimalik tõestada, et see ülesanne omab mittetriviaalseid lahendeid vaid parameetri λ kindlate väärtuste $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ korral. Neid λ väärtusi nimetamegi ülesande omaväärtusteks ja vastavaid lahendeid omafunktsioonideks.

On kerge näha, et ülesandele (7.8, 8') viib isoperimeetiline ülesanne funktsionaali

* Harilikult vaadeldakse Sturm-Liouville'i ülesande korral üldisemaid lineaarhomogeenseid ääritingimusi

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

mis aga viitavad mõnevõrra keerukamatele variatsioonülesannetele.

$$J[y] = \int_a^b [p(x)(y'(x))^2 + q(x)(y(x))^2] dx \quad (7.9)$$

jaaks lisatingimustel

$$\int_a^b \varrho(x) y^2(x) dx = 1 \quad (7.9')$$

ja

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (7.9'')$$

Seejuures on funktsionaal $J[y]$ alt tõkestatud, sest

$$J[y] = \int_a^b (py'^2 + qy^2) dx \geq \int_a^b qy^2 dx \geq M \int_a^b y^2 dx.$$

(M - funktsiooni $q(x)$ minimaalne väärtus lõigul $[a, b]$)

See võimaldab tema miinimumi leidmisel edukalt rakendada ka otseseid meetodeid.

Otsese arvutuse teel võime kontrollida, et funktsionaali $J[y]$ minimaalseks väärtuseks ongi kõige väiksem omaväärtus λ_1 (y_1 - vastav omafunktsioon):

$$J[y_1] = \int_a^b (py_1'^2 + qy_1^2) dx = y_1 p y_1' \Big|_a^b + \int_a^b \left[\frac{d}{dx} (p y_1') + q y_1 \right] y_1 dx = \lambda_1 \int_a^b \varrho(x) y_1^2(x) dx = \lambda_1.$$

Järgmiste omaväärtuste ja omafunktsioonide leidmiseks tuleb juba nõuda täiendavalt, et otsitav funktsioon oleks ortogonaalne esimese omafunktsiooniga y_1 , s. t. tuleb juurde veel lisatingimus

$$\int_a^b \varrho(x) y_1(x) y_2(x) dx = 0. \quad (7.10)$$

Funktsionaali (7.9) miinimumi otsimine täiendava tingimusega (7.10) kitsendatud funktsioonide hulgal annab meile järgmise omaväärtuse $\lambda_2 > \lambda_1$ ja omafunktsiooni y_2 .

Tuues juurde veel lisatingimuse

$$\int_a^b \varphi(x) y_2(x) y(x) dx = 0 \quad (7.10')$$

saame leida kolmanda omaväärtuse λ_3 ja omafunktsiooni y_3 jne.

Ülesandeid § 7 juurde.

1. Leida Poissoni võrrandi $\Delta z = -1$ ligikaudne lahend, mis piirkonna äärel saab nulliks ruudus $-a \leq x \leq a$, $-a \leq y \leq a$.

Märkus: Probleem taandub funktsionaali $\iint_D (z_x^2 + z_y^2 - 2z) dx dy$ miinimumileidmisele. Ligikaudset lahendit võib otsida näiteks kujul

$$\begin{aligned} \text{a) } z &= \alpha (x^2 - a^2)(y^2 - a^2), & \text{b) } z &= \alpha \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a}, \\ \text{c) } z &= \alpha (x^2 - a^2)^2 (y^2 - a^2)^2, & \text{d) } z &= \alpha_1 (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) + \\ & & & + \alpha_2 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - a^2)^2, \end{aligned}$$

kus α , α_1 ja α_2 on konstandid. Analüüsida, milline neist lähenditest on parim.

2. Leida funktsionaali

$$J[y(x)] = \int_0^1 (x^2 y'^2 + 100 xy^2 + 2xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0$$

ligikaudne ekstreemumväärtus, võttes minimiseeruva jada kujul $y_n(x) = (x-1)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1})$ ja piirdudes juhtudega $n=1$ ja $n=2$.

3. Leida funktsionaali

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0$$

ligikaudne ekstreemumväärtus, võttes $y_n(x)$ kujul:
 $y_n(x) = x(1-x)(d_1 + d_2x + \dots + a_n x^{n-1})$ ja piirdudes juhtudega
 $n=1$ ja $n=2$. Võrrelda tulemusi täpse lahendiga.

4. Leida Euleri meetodil variatsioonülesande

$$J[y] = \int_0^2 (y'^2 + y^2 - 2xy) dx, \quad y(0) = y(2) = 0$$

ligikaudne lahend ja võrrelda seda täpse lahendiga. Lõik
 $(0,2)$ jaotada n võrdseks osaks ja vaadelda juhte $n=2, 4, 8$.

5. Kvantmehaanika üheks põhiprobleemiks on Schrödingeri võrrandi

$$\sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_i^2} \right) + [E - U(x_i, y_i, z_i)] \Psi = 0 \quad (1)$$

omaväärtuste $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ ja neile vastavate omafunktsioonide $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$ leidmine [m_i - i -nda osakese mass, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h - Plancki konstant), U osakeste süsteemi potentsiaalne energia]. Seejuures peavad omafunktsioonid olema lõplikud ja lõpmatuses saane nulliks. Veenduda, et sellele ülesandele vastab isoperimeetiline variatsioonülesanne funktsionaali

$$J[\Psi] = \int \dots \int \bar{\Psi} \hat{H} \Psi dV_1 \dots dV_N \quad (2)$$

jaaks, kus \hat{H} on nn. Hamiltoni operaator

$$\hat{H} = - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) + U \quad (3)$$

ja

$$\int \dots \int \bar{\Psi} \Psi dV_1 \dots dV_N = 1. \quad (4)$$

Samuti veenduda, et otsitav omaväärtus E on esitatav ka kujul

$$E = \frac{\int \dots \int \bar{\Psi} \hat{H} \Psi \, dV_1 \dots dV_N}{\int \dots \int \bar{\Psi} \Psi \, dV_1 \dots dV_N}.$$

6. Lahendada eelmises ülesandes formuleeritud variatsioonülesanne vesinikusarnase aatomi põhiseisundi jaoks.

Märkus: Vesinikusarnase aatomi korral

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{Ze^2}{r}$$

(Ze - tuuma laeng). Põhiseisundis sõltub funktsioon Ψ ainult raadiusest r , seega:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{Ze^2}{r}.$$

Ülesande lahendamiseks valida Ψ kas kujul: 1) $\Psi = A e^{-\frac{\alpha r}{a_0}}$ või 2) $\Psi = A e^{-\alpha r} (1 + \beta r)$.

Vastus: $E_1 = \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha Z \right) = -\frac{1}{2} \frac{Z^2 e^2}{a_0}, \Psi_1 = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}} e^{-\frac{rZ}{a_0}},$

kus $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ (nn. Bohri raadius).

7. Veenduda, et parameetri α sobiva valiku korral on funktsioonid $\Psi_2 = B \left(1 - \frac{\alpha r}{a_0} \right) e^{-\frac{\alpha r}{a_0}}$ ortogonaalsed põhiseisundi omafunktsiooniga Ψ_1 (vt. eelmine ülesanne), s. t.

$\int \Psi_2 \Psi_1 \, r^2 dr = 0$. Seejärel leida järgmine energia omaväärtus, mis vastaks radiaalsümmeetrilisele omafunktsioonile Ψ_2 .

Märkus: $\alpha = \frac{1}{3}(Z + \beta)$,

$$E_2(\beta) = \left(-\frac{Z\beta}{2} + \frac{Z\beta^2}{6} - \frac{1}{2} \frac{Z^2 \beta^2}{\beta^2 - Z\beta + Z^2} \right) \frac{e^2}{a_0}.$$

ja energia miinimumitingimusest

$$\beta = \frac{Z}{2}.$$

Vastus:

$$E_2 = -\frac{Z^2}{2^3} \frac{e^2}{a_0}, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{Z^3}{8\pi a_0^3}} \left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}}.$$

8. 1928 - 1930. a. rakendas E. Hylleraas ülesandes nr.5 formuleeritud kvantmehhaanika variatsioonprintsipi heeliumi-sarnase aatomi põhiseisundi ja mõnede ergutatud seisundite energia ja omafunktsioonide arvutamiseks. Põhiseisundi korral ta võttis kõige madalama lahendi kujul

$$\psi = \psi_1(r_1) \psi_2(r_2)$$

[r_1 ja r_2 on vastavalt esimese ja teise elektroni kaugus tuumast (laenguga Ze)]. Kui potentsiaalse energia avaldises

$$u = -\frac{Ze^2}{r_1} - \frac{Ze^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} \quad (1)$$

jätaksime viimase liikme arvestamata, siis oleks $\psi_1(r_1)$ ja $\psi_2(r_2)$ lihtsalt ülesandes 6 leitud vesinikusarnase aatomi omafunktsioonid $\psi_1(r_i) = A e^{-\frac{Zr_i}{a_0}}$. Kuid teine elektron ekraaneerib mõningal määral tuuma mõju esimesele elektronile ja vastupidi, sellepärast on loomulik võtta ψ kujul

$$\psi = A e^{-\frac{\lambda r_1}{a_0}} e^{-\frac{\lambda r_2}{a_0}} \quad (2)$$

($Z - \lambda$ iseloomustab ekraaneerimise tugevust). Formuleerida omaväärtusprobleemi variatsioonülesanne, leida parameetri λ väärtus, mis annaks energiale kõige väiksema väärtuse, ning määrata põhioleku energia ja omafunktsiooni ligikaudsed avaldised.

Märkus: Raskusi tekitab integraali

$$\iint \frac{e^2}{r_{12}} e^{-\frac{2\lambda(r_1+r_2)}{a_0}} dV_1 dV_2 = e^2 \int e^{-\frac{2\lambda r_1}{a_0}} \left[\int \frac{e^{-\frac{2\lambda r_2}{a_0}}}{r_{12}} dV_2 \right] dV_1$$

arvutamise. Integraal $\int \frac{e^{-\frac{2\lambda r_2}{a_0}}}{r_{12}} dV_2$ kujutab tuuma ümber tihedusega $e^{-\frac{2\lambda r_2}{a_0}}$ paikneva tsentraalsümmeetrilise ruumlaengu potentsiaali esimese elektroni asukohas. Potentsiaaliteooriast on teada, et laetud sfääri väli väljaspool sfääri on selline, nagu oleks kogu kerapinna laeng koondunud tsentrisse. Sfääri sees aga on potentsiaal konstantne, s. t. selline, nagu ta on ka kera tsentris. Üeldut silmas pidades

$$\int \frac{e^{-\frac{2\lambda r_2}{a_0}}}{r_{12}} dV_2 = \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} e^{-\frac{2\lambda r_2}{a_0}} 4\pi r_2^2 dr_2 + \int_{r_1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\lambda r_2}{a_0}}}{r_2} 4\pi r_2^2 dr_2 = \frac{1}{a_0} \left[\frac{a_0}{\lambda r_1} - \left(1 + \frac{a_0}{\lambda r_1}\right) e^{-\frac{2\lambda r_1}{a_0}} \right].$$

Teiste integraalide arvutamine ei tekita erilisi raskusi.

Saame

$$E(\lambda) = \left[\lambda^2 - \left(2Z - \frac{5}{8}\right) \lambda \right] \frac{e^2}{a_0}. \quad (3)$$

Märgime lõpuks, et saadud tulemus on eksperimentaalselt kergesti kontrollitav. Nimelt ionisatsioonenergia

$$J = -E_1 + \frac{Z^2 e^2}{2a_0} \quad (4)$$

($\frac{Z^2 e^2}{2a_0}$ - pärast ühe elektroni eemaldumist järele jääva süsteemi tuum + elektron energia).

Vastus:

$$E_1 = - \left(Z - \frac{5}{16} \right)^2 \frac{e^2}{a_0}.$$

Saadud lahendi täpsuse iseloomustamiseks toome mõnede elementide ionisatsioonienegiade eksperimentaalsed ja teoreetilised (valemi (4) põhjal arvutatud) väärtused (ühikutes $\frac{e^2}{a_0}$)

Aine	J _{teor}	J _{eksp}
He	0,848	0,9035
Li ⁺	2,723	2,7798
Be ⁺⁺	5,598	5,6561
B ⁺⁺⁺	9,473	9,5321
C ⁺⁺⁺⁺	14,343	14,407

Kirjandus.

1. Гельфанд, И.М., Фомин, С.В., Вариационное исчисление, ГИФМЛ, 1961.
2. Эльсгольс, Л.Э., Вариационное исчисление, ГИИЛ, 1958.
3. Смирнов, В.И., Курс высшей математики, I-IV, 1951.
4. Полак, Л.С., Вариационные принципы механики и их развитие и применения в физике, ГИФМЛ, 1960.
5. Михлин, Г.С., Вариационные методы в математической физике, ГИИЛ, 1957.
6. Канторович, Л.В., Крылов, В.И., Приближенные методы высшего анализа, ГИИЛ, 1952.
7. Гомбаш П., Проблема многих частиц в квантовой механике, И.Л., 1952.
8. Miller, M., Variationsrechnung, TVG, Leipzig 1959.
9. Kivistik, L., Variatsioonarvutus, TRÜ rotaprint 1965.

S i s u k o r d .

Eessõna	3
§ 1. SISSEJUHATUS. LIHTSAMAD VARIATSIOONÜLESANDED . . .	5
1. Funktsionaali mõiste. Näiteid variatsioon- ülesannetest	5
2. Funktsiooniruum	10
3. Funktsionaali pidevus	14
4. Funktsionaali diferentsiaal ehk variatsioon . .	15
5. Funktsionaali ekstreemumi tarvilikud tingimused.	16
7. Lihtsaim variatsioonülesanne. Euleri võrrand. .	20
8. Euleri võrrandi lahendusvõtteid lihtsamatel erijuhtudel	22
9. Variatsioonituletis.	24
10. Euleri võrrandite invariantisus.	26
Ülesandeid § 1 juurde	28
§ 2. LIHTSAIMA VARIATSIOONÜLESANDE ÜLDISTUSED	34
1. Funktsionaalid mitme tundmatu funktsiooniga . .	34
2. Funktsionaalid kõrgemate tuletistega.	36
3. Funktsionaalid mitme muutuja funktsioonidest. .	37
4. Isoperimeetiline variatsioonülesanne	40
5. Tinglik ekstreemum (Lagrange'i ülesanne). . . .	45
Ülesandeid § 2 juurde	48
§ 3. ESIMISE VARIATSIOONI ÜLDINE AVALDIS JA SELLEGA SEOTUD VARIATSIOONÜLESANDED.	55
1. Esimese variatsiooni üldine avaldis	55
2. Variatsioonülesanded muutuvate rajadega	59
3. Tükati sileda ekstreemaali juht	61

4. Variatsioonilised ekstremaali peegeldumise või murdumisega	64
Ülesandeid § 3 juurde	67
§ 4. TEINE VARIATSIOON JA SELLEGA SEOTUD PROBLEEMID.	71
1. Funktsionaali teine variatsioon	71
2. Ekstreemitingimused ja teine variatsioon.	73
3. Legendre'i tingimus	74
4. Kaaspunktid ja Jacobi tingimus.	77
5. Tugeva ekstreemumi piisavatest tingimustest. Näiteid	80
Ülesandeid § 4 juurde	84
§ 5. EULERI VÕRRANDITE KANONILINE KUJU. VARIATSIOON-PRINTSIIBID JA JÄÄVUSE SEADUSED.	88
1. Euleri võrrandite kanooniline kuju.	88
2. Euleri võrrandite esimesed integraalid.	90
3. Integraali $\int F(x, y, y') dx$ invariantisus ja Euleri võrrandi esimesed integraalid.	92
4. Noetheri teoreem	94
5. Mehhaanika variatsioonprintsipiibid ja jäävuseadused	97
6. Hamilton-Jacobi võrrandid	104
7. Seos Hamilton-Jacobi võrrandite ja Euleri võrrandite esimeste integraalide vahel.	107
Ülesandeid § 5 juurde.	109
§ 6. NOETHERI TEOREEM JA VÄLJATEORIA VARIATSIOON-PRINTSIIBID	116
1. Sissejuhatavad märkused	116
2. Funktsiooni u ja osatuletiste $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ variatsioonid	118
3. Esimese variatsiooni üldine avaldis	121
4. Noetheri teoreem	123
5. Väljateooria variatsioonprintsipiibid	125
6. Energiaimpulssstensor	128
7. Impulssmomendi ja spinmomendi tensorid.	132
8. Esimest liiki gradientteisendus ja laengu jäävus	135

Ülesandeid § 6 juurde	136
§ 7. VARIATSIOONARVUTUSE OTSESED MEETODID	146
1. Otseste meetodite põhiidee	146
2. Ritzi meetod	148
3. Euleri murdjoone meetod	150
4. Omaväärtusülesannetega seotud variatsioonprob- leemid	151
Ülesandeid § 7 juurde	153
Kirjandus	158

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Эликооли, 18

И. ШИР

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

I

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

На эстонском языке

Vastutav toimetaja J. Lembra

Korrektor E. Oja

=====
TRU rotaprint 1966. Trüki-poognaid 10,25. Tingtrüki-
poognaid 9,33. Arvestuspoognaid 8,1. Trükiarv 350.
Faber 30 x 42. 1/4. Paljundamisele antud 30. VI 1966.

MB 05433. Tell. nr. 321.

Hind 23 kop.