E. ETVERK
A. LINTS
A. VIHMAN



Matemaatika

VII KLASSILE

ARH

E. ETVERK, A. LINTS, A. VIHMAN

MATEMAATIKA

VII KLASSILE

Nr. A-154

TRÜ Matemaatikateaduskond
Matemaatika õpetamise
metoodika kateeder

TÜ MATEMAATIKA-
INFORMAATIKATEADUSKOND

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1960

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

Tartu Ülikooli Raamatukogu
ARHIIVKOGU

1. KORDAMISEKS.

1. Kirjuta arvude a ja b summa. Arvuta see summa, kui

1) $a=716$ $b=284$ 2) $a=1\frac{5}{8}$ $b=2\frac{1}{2}$ 3) $a=7{,}5$ $b=2{,}95$

2. Kirjuta arvude m ja n vahe ja arvuta see vahe, kui

1) $m=1701$ $n=601$ 2) $m=4{,}08$ $n=3{,}9$ 3) $m=6\frac{5}{18}$ $n=1\frac{11}{24}$

3. Kirjuta kordaja abil lühemalt:

1) $ab+ab+ab+ab+ab$
2) $mx+mx+mx+mx+mx+mx$

4. Kirjuta astendaja abil lühemalt:

1) $aaaaa$ 2) $mmmmm$

5. Kirjuta lühemalt:

1) $aaann+aaann+aaann+aaann$
2) $a+a+a+aaa+aaa+aaa+aaa+aaa$
3) $xxxyy+xxxyy+xxyyy+xxyyy+xxyyy$

6. Kumb on suurem, kas
4^2 või 2^4; 2^3 või 3^2; 5^3 või 3^5; 3^4 või 4^3.

7. Arvuta.

1) $4a$ ja a^4, kui $a=3$
2) b^3 ja $3b$, kui $b=5$
3) $2m$ ja m^2, kui $m=10$

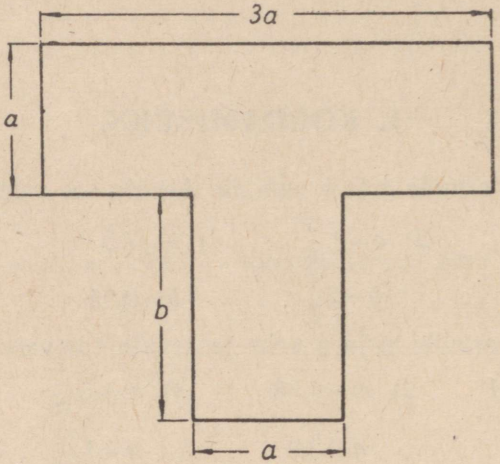
8. Arvuta.

1) $(\frac{1}{3})^2$ 2) $(\frac{3}{4})^2$ 3) $(\frac{1}{2})^3$ 4) $(0{,}1)^3$ 5) $(0{,}5)^2$

9. Arvuta.

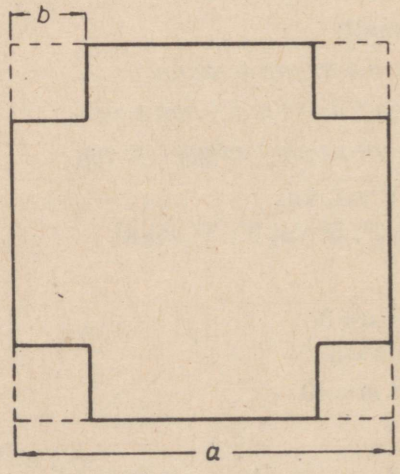
1) $2^4 \cdot 5^2$ 2) $8^2 \cdot 5^3$ 3) $2^3 \cdot 5 - 8^2$

10. Koosta valem joonisel 1 esitatud kujundi ümbermõõdu arvutamiseks.



Joon. 1.

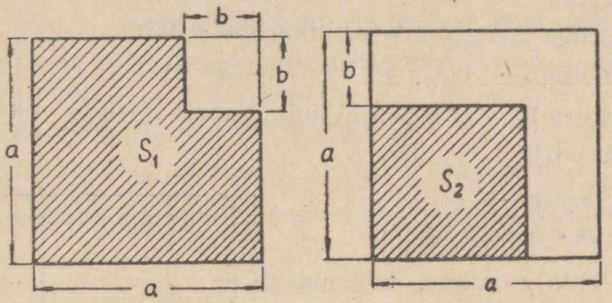
11. Ruudukujulisest kartongitükist, mille külje pikkus on a cm, valmistati servi üles pöörates pealt lahtine karp. Selleks lõigati lehe nurkadest välja ruudud küljepikkusega b cm. Avalda saadud karbi ruumala V.



Joon. 2.

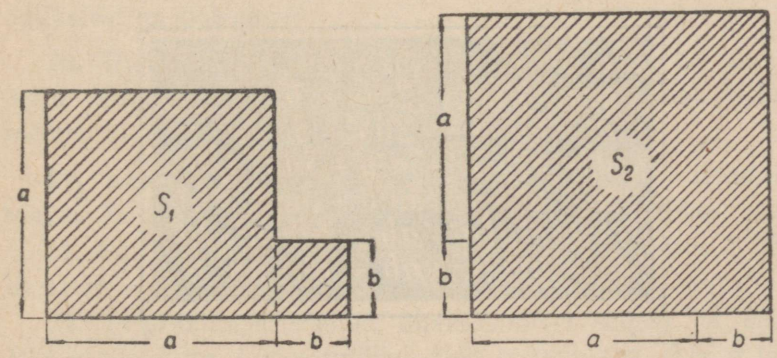
12. Kirjuta algebraline avaldis, mida loetakse järgmiselt:
1) arvude a ja b summa ruut;
2) arvude m ja n ruutude summa;
3) arvude a ja b summa kuup;
4) arvude a ja b kuupide summa;
5) arvude x ja y vahe ruut;
6) arvude x ja y ruutude vahe;
7) arvude c ja d vahe kuup;
8) arvude u ja v kuupide vahe.

13. Avalda joonisel 3 esitatud kujundite pindala S_1 ja S_2. Arvuta S_1 ja S_2, kui $a=3$ m ja $b=1$ m.



Joon. 3.

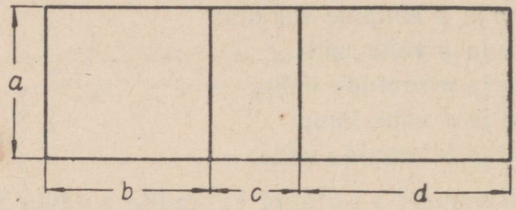
14. Avalda joonisel 4 esitatud kujundite pindalad S_1 ja S_2. Arvuta need pindalad, kui $a=1{,}2$ m ja $b=0{,}6$ m.



Joon. 4.

15. Põhjenda joonise 5 abil üksliikme ja hulkliikme korrutamise eeskirja

$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$



Joon. 5.

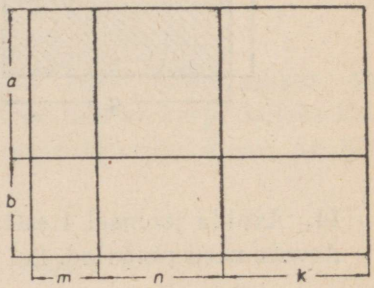
16. Korruta

a) hulkliige $2a^3-5a+1$ üksliikmega $-3a^4$;

b) hulkliige $15x^2-7x-25$ üksliikmega $11x^2$.

17. Selgita joonise 6 põhjal hulkliikmete $a+b$ ja $m+n+k$ korrutamise eeskirja

$(a+b)(m+n+k)=$
$am+an+ak+bm+bn+bk.$



Joon. 6.

18. Korruta ja koonda tulemus.

a) $(2x^2-x+1)(x+3)$

b) $(a^2-2a+3)(3a^2+a-2)$

c) $(2x^2-x+1)(x+3)$

d) $(a^2-2a+3)(3a^2+a-2)$

19. Sõnasta alljärgnevad valemid.

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

Joon. 7.

20. Lihtsusta.

1) $(3+a)^2+(a-3)^2-18$
2) $2n^2+(5+n)(5-n)-(5-n)^2$
3) $(2+x)^3+(2-x)^3-12x^2$
4) $(a-n)(a^2+an+n^2)+(a-n)^3+3an^2$
5) $2(3a-b)+3(4-2a)+2b$

21. Lihtsusta.

1) $(4+b)^2+(b-4)^2-32$
2) $(3+a)(3-a)-(3-a)^2+2a^2$
3) $(1+y)^3+(1-y)^3-6y^2$
4) $(b-x)(b^2+bx+x^2)-(b-x)^3+3bx^2$
5) $2(10-5x)+5(2x-a)+5a$

22. Arvuta avaldise väärtus, lihtsustades enne avaldist.

1) $(4+m)(4-m)+(4+m)^2-32$, kui $m=1{,}25$
2) $(x+3)^2-(x-3)^2$, kui $x=15$
3) $(a+2)^3-(a-2)^3-16$, kui $a=5$
4) $(1+x)(1-x+x^2)-(1+x)^3+3x^2$, kui $x=-1{,}5$

23. Lihtsusta võrduse vasakut poolt ja leia siis saadud võrdusest x.

1) $4(2x+3)+6(x-2)=42$
2) $(7+x)^2+(8+x)(8-x)=127$
3) $(x+1)^2-x^2=2$
4) $2x^2-2(x-3)^2=27$

24. Ristküliku ja ruudu ümbermõõdud on võrdsed. Ristküliku pikkus on a meetrit ja laius b meetrit. Leia ruudu külje pikkus.

25. Klassis on 22 tüdrukut ja 18 poissi. Mitu protsenti klassi õpilastest on tüdrukud?

26. Risttahukakujulise siloaugu sügavus on 1,9 m, pikkus 3,4 m ja laius 3,1 m. Silo täidab 85% augu ruumalast. Mitu kuupmeetrit silo on augus?

27. Kauba hinda, mille väärtus oli 220 rubla, alandati 10% võrra. Järgmisel aastal alandati selle kauba hinda veel 15% võrra. Kui palju maksab see kaup pärast teistkordset hinnaalandamist?

28. 14-grammise söetüki analüüsimisel selgus, et selles oli 10,4 g süsinikku, 1 g vesinikku, 0,84 g hapnikku, 0,56 g lämmas-

tikku ja peale selle veel mitmesuguseid muid aineid. Mitu protsenti sisaldas söetükk iga nimetatud ainet?

29. Klassist puudus 4 õpilast ehk 12,5% klassi õpilaste üldarvust. Leia klassi õpilaste arv.

30. Nimeta kõik x täisarvulised väärtused, mis rahuldavad tingimusi.

1) $-5<x<2$; 2) $-1007<x<-1002$.

31. Arvuta ja täida tühjad lahtrid alljärgnevas tabelis.

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	3	-8	12	$\frac{5}{18}$	-16	$-0{,}3$	-5	824
b	6	4	-3	$-\frac{7}{24}$	-8	0,12	-10	-376
$a+b$								
$a-b$								
$a\cdot b$								
$a:b$								
$\frac{a+b}{a-b}$								
$\frac{a-b}{a\cdot b}$								

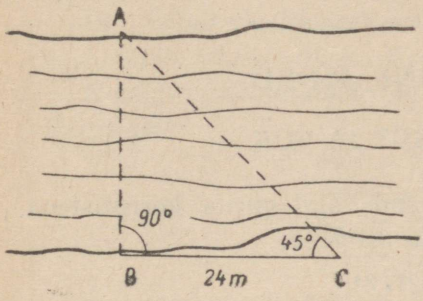
32. Täida alljärgnev tabel.

a	18	10	13	-11	-9	-23	750	-96
b	15	-8	-23	3	17	-17	750	-96
$a-b$								
$b-a$								

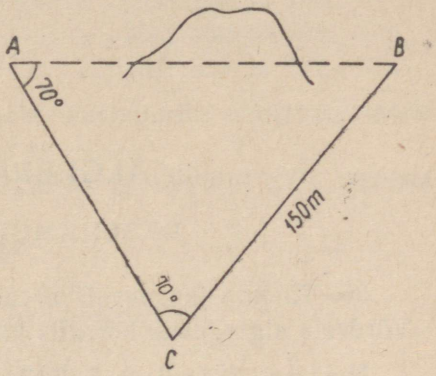
Millega võrdub $n-m$, kui $m-n=-7$?

Mis arvud on teineteise suhtes $x-y$ ja $y-x$?

33. Kui lai on jõgi (joon. 8)?



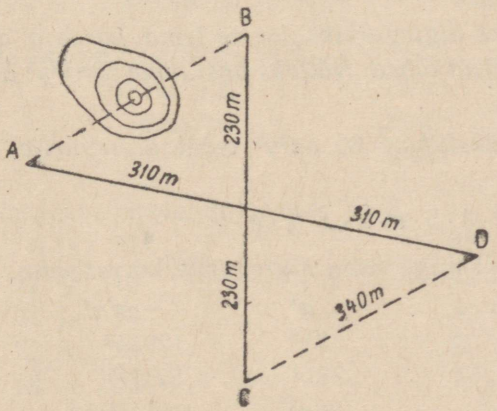
Joon. 8.



Joon. 9.

34. Kui pikk on lõik AB joonisel 9?

35. Otsusta joonise 10 põhjal, kui suur on punktide A ja B vaheline kaugus.



Joon. 10.

2. ALGEBRALINE MURD.

ÜKSLIIKMETE SÜT JA VÜK.

36. Kirjuta järgnevad arvud nende algtegurite korrutistena. Võrdsete algtegurite korrutis kirjuta astmena.

Näide. $324 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^4$

36	54	81	102	510
40	63	82	121	484

37. Lahuta järgnevad arvud algtegureiks.

42	64	86	144	720
45	72	92	150	1050
49	77	96	169	1352

38. *Üksliikme algtegureiks loeme tema kordaja algtegurid ja üksliikmes esinevad tähed. Näiteks üksliikme* $60ax^2y^3$ *algtegurid on* 2, 3, 5, *a, x* ja *y.*

Kirjutades üksliikme 60 ax^2y^3 *tema algtegurite korrutisena, saame*

$60ax^2y^3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$

39. Kirjuta üksliige tema algtegurite korrutisena.

15a	a^2	m^2n^2	$12a^3bc$
$8x$	$3b^2$	$120ab^3$	$18a^2b^2c^2$
$14b$	$36x^2$	$57x^2y^3$	$8a^5b$
$24a$	$26y^3$	$210ax^2y^3$	$20a^4b^2$
$39z$	$17x^4$	$4a^4b^3x$	$27a^2xy$

40. Leia peast järgmiste arvude SÜT:

9 ja 12	15 ja 35	6; 12 ja 20
10 ja 15	39 ja 52	9; 18 ja 45
21 ja 14	34 ja 51	7; 14 ja 21

41. Arvuta järgmiste arvude SÜT:

112 ja 176	121; 154 ja 165
132 ja 364	102; 136 ja 170
308 ja 392	144; 162 ja 198
360 ja 450	264; 360 ja 600
468 ja 624	104; 525 ja 712

42. *Antud üksliikmete* **suurimaks ühisteguriks** *nimetame nende üksliikmete kõikide ühiste tegurite korrutist.*

Näide. *Üksliikmete* $3a^2b^3$, $12a^3bc$ *ja* $18a^2b^2c^2$ *SÜT leiame järgmiselt:*

$$3a^2b^3 = 3 \cdot a^2b^3$$
$$12a^3bc = 2^2 \cdot 3 \cdot a^3bc$$
$$18a^2b^2c^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot a^2b^2c^2$$
$$SÜT = 3 \cdot a^2b$$

Ühistegurita üksliikmete SÜT on 1.

43. Leia üksliikmete SÜT.

a ja $2a$	$6a$ ja 8	$14ax^2$ ja $21a^2x$
ab ja b	$7ab$ ja $12ac$	$44cy^3$ ja $77c^2y^2$
$3x$ ja $6x$	a^4 ja a^2	$30m^2p^3q$ ja $65mp^2q^3$
x ja x^2	$14y^3$ ja $7y$	$22a^2b^3c^2$ ja $121\ a^3bc$
a ja b	$18abc$ ja $12ac$	$42ax^2y^3$ ja $35bx^2$

44. Leia kolme üksliikme SÜT.

a)	b)	c)	d)
$15ab^2$	$16x^3y^2z$	$12mn$	$26p^3q^2$
$21a^2b$	$24xy^2z^3$	$18n^2$	$65a^2p^2q^3$
$12ab$	$6x^2y^2z^2$	$30mn^2$	$39p^2q^3$

45. Leia peast järgmiste arvude VÜK:

8 ja 12	3; 5 ja 11
12 ja 15	4; 10 ja 16
21 ja 14	5; 12 ja 18
33 ja 22	9; 15 ja 25
24 ja 100	7; 10 ja 21

46. Arvuta järgmiste arvude VÜK:

12; 18; 96 ja 144	240; 810 ja 6300
14; 20; 28 ja 30	42; 56 ja 98
12; 28; 35 ja 40	54; 72 ja 126
12; 20; 36 ja 54	504; 686 ja 1890
18; 24; 32 ja 48	720; 945 ja 3969

47. *Antud üksliikmete* **väikseimaks ühiskordseks** *nimetame korrutist, mille saame, kui ühe üksliikme korrutame teiste üksliikmete nende teguritega, mis võetud üksliikmes ei esine.*

Näide. *Üksliikmete* $40m^2n^3p$ *ja* $84mnq^2$ *VÜK leiame järgmiselt:*

$$40m^2n^3p = 2^3 \cdot 5 \cdot m^2n^3p$$
$$84mnq^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot mnq^2$$
$$VÜK = 2^3 \cdot 5 \cdot m^2n^3p \cdot 3 \cdot 7 \cdot q^2 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot m^2n^3pq^2 = 840m^2n^3pq^2.$$

Ühisteguriteta üksliikmete VÜK on nende korrutis. Näiteks $3a^2$ *ja* $5b$ *VÜK on* $15a^2b$.

Kui antud üksliikmetest üks jagub kõigi teiste üksliikmetega, siis on ta antud üksliikmete VÜK.

Näiteks üksliikmete $18a^2b$, $54a^2b^2x$ *ja* $9ab^2$ *VÜK on* $54a^2b^2x$, *sest*

$$54a^2b^2x : 18a^2b = 3bx,$$
$$54a^2b^2x : 9ab^2 = 6ax.$$

48. Leia iga üksliikmete paari VÜK.

1)	2)	3)	4)
a; 7	$2y$; y	a; b	ab; ac
$2a$; 8	$10x$; $5x$	$2a$; $2b$	ab; $5ac$
$8a$; 2	$12b$; $4b$	$2a$; $5b$	$4ab$; $16ac$
$12x$; 16	$2a$; $3a$	$14a$; $3b$	$24ab$; $6a$
$51y$; 34	$6b$; $8b$	$15a$; $3b$	$36ab$; $48ac$

49. Leia iga üksliikmete paari VÜK.

1)	2)	3)	4)
abc; bcd	a^2; a	a^2b; a	a^3; b^3
$8abc$; bcd	a^2; $7a$	a^2b;$2a$	a^3; ab^3
$9abc$; bc	$3a$; $7a^2$	$3a^2b$; $6b$	a^3; a^2b^3
$8xyz$; $3xy$	$5a$; $15a^2$	$18a^2b$; $54a^2$	a^2b; ab^2
$8xyz$; $32xz$	$28a^2$; $35a$	$45a^2b$; $18b^2$	ab^2; a^3b

50. Leia iga üksliikmete paari SÜT ja VÜK.

1)	2)	3)
$6x$; $3x$	$4np$; $2pz$	$12a^4$; $27a^6$
k^2; $7k$	$6a^2b$; $9b^2$	$18x^2y^4$; $12x^3y^5$
cv; v	$7t^2$; $3t^2$	$15a^2x^3$; $35a^3x$
x^2y; xy^2	$12r$; $18\ rp$	$24x^3y^2$; $30xy^4$
$2m^2$; $3mn$	$7abc^2$; $14\ abc$	$16am^2n$; $15am^3n^2$

51. 75 cm^3 õli kaalub 60 g. Arvuta õli erikaal.

52. Auto sõitis a tunniga m kilomeetrit. Mitu kilomeetrit sõitis auto keskmiselt tunnis?

53. Paberi paksuse määramiseks võeti pakk paberit, milles oli n lehte. Paki paksus oli p millimeetrit. Kui paks oli paber?

54. Laua mõõtmed on m ja n meetrit. Laua poleerimiseks kulus p grammi polituuri. Mida tähendab avaldis $\frac{p}{mn}$?

55. Ruudukujulise põranda värvimiseks kulus v kg värvi. Mida tähendab avaldis $\frac{v}{a^2}$, kui põranda pikkus on a meetrit?

56. *Murdu, mille liikmetes esineb tähti, nimetatakse* **algebraliseks murruks.**

Algebralises murrus $\frac{a}{b}$ *tähed a ja b võivad tähendada mistahes arvusid, ainsaks erandiks on, et b ei või olla null. Miks?*

57. *Murdu* $\frac{a}{b}$ *võib vaadelda arvude a ja b jagatisena. Iga arvu võib kirjutada murruna, näiteks* $x = \frac{x}{1}$.

58. Kirjuta murruna järgmised arvud:

$$5;\ 0;\ a;\ b;\ a^2;\ a^2b;\ 2a^3b.$$

59. Arvuta murru väärtus, kui temas esinevate tähtede väärtused on antud.

1) $\frac{3a}{5b}$; $a=15;\ b=9$.

2) $\frac{6ab}{7c}$; $a=14;\ b=7;\ c=12$.

3) $\frac{4a}{3bc}$; $a=6;\ b=-2;\ c=12$.

4) $\frac{x^2a}{5b}$; $a=10;\ x=-2;\ b=24$.

5) $\frac{a+b}{a-b}$; $a=2{,}6;\ b=2{,}4$.

6) $\frac{3a+2b}{2a-3b}$; $a=5;\ b=3$.

60. Millist väärtust ei või omada murru nimetajas esinev täht igas alljärgnevas murrus:

$$\frac{m}{n};\ \frac{3}{n};\ \frac{5}{1-x};\ \frac{a}{x-2};\ \frac{5}{2+a};\ \frac{m}{x+3}?$$

61. *Murdu* $\frac{a}{b}$ *võib vaadelda arvude a ja b jagatisena. Jagatise omadustest on teada, et jagatis ei muutu, kui jagatavat ja jagajat suurendada või vähendada üks ja sama arv korda. Sellest järeldub, et murru* $\frac{a}{b}$ *väärtus jääb endiseks, kui ta lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.*

Miks ei või murru lugejat ja nimetajat korrutada nulliga? jagada nulliga?

62. Eelmisest ülesandest järeldub algebralise murru põhiomadus:

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}$$

Murru väärtus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

63. *Murru lugeja ja nimetaja korrutamist ühe ja sama arvuga nimetatakse* **murru laiendamiseks.** *Arvu, millega murru laiendamisel lugejat ja nimetajat korrutatakse, nimetatakse* **laiendajaks.**

Laiendame näiteks 3-ga murdu $\frac{a}{5}$, *saame*

$$\frac{a}{5} = \frac{3 \cdot a}{3 \cdot 5} = \frac{3a}{15}.$$

64. Laienda

4-ga murdu $\frac{1}{2}$;
5-ga „ $\frac{1}{3}$;
6-ga „ $\frac{1}{4}$;
3-ga „ $\frac{3}{4}$;
8-ga „ $\frac{7}{8}$;

8-ga murdu $\frac{a}{3}$;
3-ga „ $\frac{x}{5}$;
4-ga „ $\frac{2x}{7}$;
3-ga „ $\frac{1}{2a}$;
4-ga „ $\frac{5}{6a}$.

65. Laienda

a-ga murdu $\frac{5}{9}$;
b-ga „ $\frac{8}{13}$;

5-ga murdu $\frac{3a}{4c}$;
$3n$-ga „ $\frac{12m}{17n}$;

c-ga	murdu	$\frac{7}{10}$;	$2n$-ga	murdu	$\frac{12m}{17n}$;
$3k$-ga	„	$\frac{7}{12}$;	$5x$-ga	„	$\frac{24xy}{25z}$;
$10x$-ga	„	$\frac{2}{3}$;	$3xy^2$-ga	„	$\frac{24xy}{25z}$.

66. *Murru* **laiendamisel antud nimetajani** *leiame esmalt laiendaja, mille saame, kui jagame uue nimetaja antud murru nimetajaga. Saadud jagatisega laiendame antud murdu.*

Näited. 1) *Laienda murd* $\frac{2}{37}$ *nimetajani* 111.

$$111 : 37 = 3; \quad \frac{2}{37} = \frac{6}{111}$$

2) *Laienda murd* $\frac{2m}{13n}$ *nimetajani* $52m^2n$.

$$52m^2n : 13n = 4m^2; \quad \frac{2m}{13n} = \frac{8m^3}{52m^2n}$$

Kui võimalik, siis laiendaja leitakse peast.

67. Laienda murd

$\frac{3a}{4b}$	nimetajani	$20b$;	$\frac{a}{n}$	nimetajani	bn^2;
$\frac{5m}{4n}$	„	$24n$;	$\frac{3}{7}$	„	259;
$\frac{14x}{45y}$	„	$180xy^2$;	$\frac{b}{x}$	„	$2ax$;
$\frac{a}{b}$	„	$4a^2b^2$;	$\frac{a}{4b}$	„	$12ab^2$;
$\frac{12}{13}$	„	169;	$\frac{3m^2n}{4xy}$	„	$12m^2xy$.

MURRU TAANDAMINE.

68. *Murru lugeja ja nimetaja jagamist nende ühisteguriga nimetatakse* **murru taandamiseks.**

$$\frac{\overset{3}{\cancel{12}}\cancel{a}\cancel{b}c}{\cancel{8}\cancel{a}\cancel{b}\cancel{c}^2} = \frac{3}{2c}, \qquad \frac{\overset{1}{\cancel{4}}\cancel{m}\cancel{n}\cancel{x}}{\cancel{8}\cancel{m}\cancel{n}^2\cancel{x}^2} = \frac{1}{2nx}$$
$$2 \quad c \qquad\qquad 2 \quad nx$$

69. Missugust murdu nimetatakse taandumatuks? Millega peab murdu taandama, et saada taandumatu murd?

70. Taanda järgmised murrud:

1) $\frac{16}{40}$ $\frac{15}{18}$ $\frac{40}{88}$ $\frac{27}{63}$ $\frac{57}{243}$

2) $\frac{12}{64}$ $\frac{24}{78}$ $\frac{24}{54}$ $\frac{40}{96}$ $\frac{115}{320}$

3) $\frac{14}{35}$ $\frac{33}{88}$ $\frac{35}{63}$ $\frac{39}{91}$ $\frac{117}{130}$

4) $\frac{24}{66}$ $\frac{28}{32}$ $\frac{88}{121}$ $\frac{60}{84}$ $\frac{132}{143}$

5) $\frac{28}{72}$ $\frac{14}{49}$ $\frac{30}{84}$ $\frac{42}{72}$ $\frac{112}{176}$

6) $\frac{21}{63}$ $\frac{27}{72}$ $\frac{24}{70}$ $\frac{84}{220}$ $\frac{308}{392}$

7) $\frac{2 \cdot 6}{42}$ $\frac{3}{2 \cdot 3}$ $\frac{4}{3 \cdot 8}$ $\frac{6}{3 \cdot 10}$ $\frac{3 \cdot 4}{9}$

8) $\frac{-12}{6 \cdot 5}$ $\frac{-8 \cdot 5}{12}$ $\frac{5 \cdot 16}{-32}$ $\frac{3 \cdot (-12)}{40}$ $\frac{-36 \cdot 5}{-96}$

9) $\frac{72 \cdot 6}{-36}$ $\frac{22}{-33 \cdot 9}$ $\frac{17 \cdot (-2)}{-51}$ $\frac{-36}{-5 \cdot (-24)}$ $\frac{-75 \cdot 3}{-50}$

10) $\frac{3 \cdot 12}{18 \cdot 24}$ $\frac{-15 \cdot 20}{45 \cdot 30}$ $\frac{-3 \cdot 8 \cdot 36}{-2 \cdot 9 \cdot 48}$ $\frac{-4 \cdot (-7) \cdot 15}{3 \cdot 7 \cdot 50}$ $\frac{2 \cdot (-6) \cdot 32}{45 \cdot 5 \cdot (-6)}$

71. Taanda järgmised murrud:

1) $\frac{6a}{4}$ $\frac{6}{2a}$ $\frac{8b}{4a}$ $\frac{3a}{5a}$ $\frac{b}{2b}$

2) $\frac{12}{6a}$ $\frac{5a}{10}$ $\frac{9a}{3b}$ $\frac{5c}{7c}$ $\frac{n}{3n}$

3) $\frac{ab^2}{abc}$ $\frac{9ax}{15a^2}$ $\frac{15ax^2}{35bx^3}$ $\frac{12a^2b^2x}{18a^2b^2y}$ $\frac{20ab^2c^3}{48a^2b^3c^4}$

4) $\frac{a^2b}{abc}$ $\frac{8a^2}{12ax}$ $\frac{9ax^3}{6bx^2}$ $\frac{18a^2b^3y}{24a^2b^3x}$ $\frac{36a^2b^3c^4}{30ab^2c^3}$

5) $\frac{15a^2}{35ab}$ $\frac{26ab^2}{65a^2b}$ $\frac{48a^2bc}{78abc^2}$ $\frac{33m^2nx}{48mnx}$ $\frac{74p^2q^4}{37npq^3}$

6) $\frac{96m^2n^2}{72m^3n^3}$ $\frac{144mn^2p^3}{192m^2np}$ $\frac{169m^4n^3}{195m^2np^2}$ $\frac{57c^3u^4v^5}{190c^4u^3v^5}$ $\frac{105x^2z^2}{360x^3z}$

7) $\frac{ab \cdot 5ab}{10ab^2 \cdot 4b^2}$ $\frac{21x^3 \cdot 6y^3}{7xy \cdot 18xy}$ $\frac{39mp^2 \cdot 4n^2p}{26mn \cdot 7np}$ $\frac{32u^2 \cdot 49v^2}{56uv \cdot 28uv}$ $\frac{18x^2 \cdot 32y}{32x^2 \cdot 45y^3}$

MURDUDE TEISENDAMINE ÜHENIMELISTEKS.

72. Milliseid murde nimetatakse isenimelisteks? Milliseid murde nimetatakse ühenimelisteks? Mis on antud murdude ühiseks nimetajaks, kui nimetajad on ühistegurita?

Mis on antud murdude ühiseks nimetajaks, kui üks nimetajaist jagub teistega?

Mis võetakse antud isenimeliste murdude ühiseks nimetajaks?

73. Teisenda ühenimelisteks murrud:

1) $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{7}$ ja $\frac{4}{15}$; $\frac{2}{7}$ ja $\frac{5}{8}$; $\frac{1}{2}$ ja $\frac{7}{11}$; $\frac{6}{11}$ ja $\frac{7}{12}$

2) $\frac{5}{7}$ ja $\frac{5}{21}$; $\frac{3}{5}$ ja $\frac{7}{15}$; $\frac{3}{5}$ ja $\frac{8}{45}$; $\frac{3}{55}$ ja $\frac{10}{11}$; $\frac{13}{144}$ ja $\frac{7}{12}$

3) $\frac{5}{26}$ ja $\frac{1}{51}$; $\frac{11}{63}$ ja $\frac{13}{126}$; $\frac{13}{54}$ ja $\frac{7}{81}$; $\frac{1}{81}$ ja $\frac{49}{135}$; $\frac{34}{35}$ ja $\frac{54}{55}$

4) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ ja $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$ ja $\frac{4}{15}$; $\frac{23}{24}$, $\frac{7}{8}$ ja $\frac{59}{60}$

5) $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{11}$ ja $\frac{1}{2}$; $\frac{6}{11}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{13}$ ja $\frac{9}{14}$; $\frac{11}{50}$, $\frac{23}{125}$, $\frac{29}{150}$ ja $\frac{34}{225}$

74. Näide. *Teisenda murrud* $\frac{a}{3b}$ *ja* $\frac{b}{4c}$ *ühenimelisteks.*

Lahendus. *Et antud murdude nimetajad on ühistegurita, siis ühiseks nimetajaks on antud nimetajate korrutis.*

$$3b \cdot 4c = 12bc.$$

Vastavad laiendajad on $4c$ *ja* $3b$.

Seega,

$$\frac{a}{3b} = \frac{a \cdot 4c}{3b \cdot 4c} = \frac{4ac}{12bc}$$

$$\frac{b}{4c} = \frac{b \cdot 3b}{4c \cdot 3b} = \frac{3b^2}{12bc}.$$

75. Näide. *Teisenda murrud*

$$\frac{7c}{12abx}, \quad \frac{13x}{20ab^2} \quad \text{ja} \quad \frac{8b}{15a^2x^3}$$

ühenimelisteks.

TRÜ Matemaatikateaduskond
Matemaatika õpetamise

L a h e n d u s. *Lahutades nimetajad algteguriteks, saame*

$$2^2 \cdot 3 \cdot abx \qquad 2^2 \cdot 5 \cdot ab^2 \qquad 3 \cdot 5 \cdot a^2x^3;$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2b^2x^3 = 60a^2b^2x^3.$$

Leitud väikseim ühiskordne $60a^2b^2x^3$ *on antud murdude ühiseks nimetajaks. Jagades saadud ühise nimetaja antud murdude nimetajatega, leiame vastavad laiendajad:*

$$60a\,b^2x^3 : 12abx = 5abx^2;$$
$$60a^2b^2x^3 : 20ab^2 = 3ax^3;$$
$$60a^2b^2x^3 : 15a^2x^3 = 4b^2.$$

Laiendades antud murde nende laiendajatega, saamegi ühenimelised murrud:

$$\frac{7c \cdot 5abx^2}{12abx \cdot 5abx^2} = \frac{35abcx^2}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{13x \cdot 3ax^3}{20ab^2 \cdot 3ax^3} = \frac{39ax^4}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{8b \cdot 4b^2}{15a^2x^3 \cdot 4b^2} = \frac{32b^3}{60a^2b^2x^3}.$$

76. Teisenda järgmised murrud ühenimelisteks:

1) $\frac{a}{b}$	2) $\frac{a}{3b}$	3) $\frac{a}{a^2}$	4) $\frac{p}{a^2}$
$\frac{c}{d}$	$\frac{c}{4d}$	$\frac{3}{b}$	$\frac{q}{2ab}$
5) $\frac{2a^2}{x}$	6) $\frac{4x}{a^2}$	7) $\frac{2m}{3a^3}$	8) $\frac{p}{4m^2n}$
$\frac{3b}{y}$	$\frac{3y}{2b^2}$	$\frac{n}{12a^2b}$	$\frac{3p^2}{2mn^3}$
$\frac{4c}{z}$	$\frac{5y}{4ab}$	$\frac{5n}{18ab^2}$	$\frac{5}{14m^3n^2}$
9) $\frac{x}{a}$	10) $2b$	11) $\frac{2p}{3m^2}$	12) $\frac{5b}{24a^2c^3}$
a^2	$\frac{a}{3x^2}$	$\frac{5p^2}{6m^2n^2}$	$5d$
$\frac{y}{3a^3b}$	$\frac{3ab}{5xy}$	$3mn$	$\frac{7a}{36c^2}$

13) $\frac{5}{a}$	14) x	15) 2	16) $\frac{1}{x}$
$\frac{4}{a^2}$	$\frac{1}{2a}$	9	$\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5x^2}$	$\frac{1}{x^3}$

MURDUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

77. Ühenimeliste murdude summa on murd, mille lugejaks on antud murdude lugejate summa ja nimetajaks on liidetavate nimetaja.

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}=\frac{a+b+c}{n}$$

78. Liida murrud.

$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$	$\frac{4}{a}+\frac{5}{a}$	$\frac{-p}{q}+\frac{2p}{q}$
$\frac{8}{15}+\frac{2}{15}$	$\frac{3a}{k}+\frac{a}{k}$	$\frac{r}{10s}+\frac{1}{10s}$
$\frac{2x}{3}+\frac{4x}{3}$	$\frac{5u^3}{b}+\frac{u^3}{b}$	$\frac{-3u}{-5v}+\frac{2u}{5v}$
$\frac{4R}{9}+\frac{R}{9}$	$\frac{7}{2h}+\frac{k}{2h}$	$\frac{92a^2}{35y}+\frac{8ab}{35y}$
$\frac{p^2}{4}+\frac{3p^2}{4}$	$\frac{4m^2}{3n}+\frac{1}{3n}$	$\frac{a}{a^2}+\frac{1}{a^2}$

79. *Murru* $\frac{1}{2}$ *vastandarvuks on* $-\frac{1}{2}$ *ja murru* $\frac{a}{b}$ *vastandarvuks* $-\frac{a}{b}$

Kirjuta järgmiste arvude vastandarvud:

$$-\frac{2}{3};\quad \frac{3}{5};\quad -\frac{a}{b};\quad -\frac{m}{4};\quad -\frac{5}{n}.$$

80. *Teades, et*

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \text{ja}$$

$$-(-a) = a,$$

saame:

$$-\frac{-a}{b} = -\left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$$

ehk

$$\boxed{\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b}}$$

Edasi saame:

$$-\frac{a}{-b} = -\left(-\frac{a}{a}\right) = \frac{a}{b}$$

ehk

$$\boxed{\frac{a}{b} = -\frac{a}{-b}}$$

Laiendades murdu $\frac{a}{b}$ *arvuga* -1, *saame*

$$\frac{a}{b} = \frac{(-1)\cdot a}{(-1)\cdot b} = \frac{-a}{-b}, \quad \textit{seega}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}}$$

Murru väärtus ei muutu, kui muuta märk vastupidiseks murru ees ja murru ühes liikmes.
Murru väärtus ei muutu, kui muuta märk vastupidiseks murru mõlemas liikmes.

81. Kirjuta järgnevad murrud miinusmärgita murru ees:

$$-\frac{3}{4}; \quad -\frac{a}{2}; \quad -\frac{m}{n}; \quad -\frac{-3}{m}; \quad -\frac{a}{-2}.$$

82. Kirjuta järgnevad murrud miinusmärgiga murru ees:

$$\frac{2}{5}; \quad \frac{-x}{2}; \quad \frac{a}{b}; \quad \frac{5}{-n}; \quad \frac{n}{-3}.$$

83. *Murru lahutamisel liidame lahutatava murru vastandarvu.* Selgita järgmist sümbolites kirjutatud arutlust:

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}-\frac{c}{n}=\frac{a}{n}+\left(-\frac{b}{n}\right)+\left(-\frac{c}{n}\right)=$$
$$=\frac{a}{n}+\frac{-b}{n}+\frac{-c}{n}=\frac{a+(-b)+(-c)}{n}=\frac{a-b-c}{n}.$$

$$\boxed{\frac{a}{n}-\frac{b}{n}-\frac{c}{n}=\frac{a-b-c}{n}}$$

84. Liida murrud ja kui võimalik, siis taanda tulemus.

1) $\frac{2}{15}+\frac{1}{15}+\frac{7}{15}$

$\frac{5}{18}+\frac{11}{18}-\frac{7}{18}$

$\frac{4}{9}-\frac{5}{9}+\frac{4}{9}$

$\frac{3}{10}-\frac{9}{10}+\frac{1}{10}$

$\frac{3}{28}+\frac{9}{28}-\frac{5}{28}$

2) $\frac{7a}{10}-\frac{3a}{10}$

$\frac{5g}{16}+\frac{3g}{16}$

$\frac{2m}{3n}+\frac{m}{3n}$

$\frac{15x}{16y}-\frac{7x}{16y}$

$\frac{a}{2}-\frac{a}{2}$

85. Arvuta.

1) $\frac{a}{3b}+\frac{a}{3b}+\frac{a}{3b}$

$\frac{a^2}{3}+\frac{2b^2}{3}-\frac{4c^2}{3}$

$\frac{a}{x}+\frac{3a}{x}+\frac{5a}{x}$

$\frac{10x}{9a}-\frac{5x}{9a}+\frac{x}{9a}$

$\frac{9}{10a^2}-\frac{3}{10a^2}-\frac{1}{10a^2}$

2) $\frac{2a+5}{6}+\frac{3a+2}{6}$

$\frac{4m+8}{3}+\frac{2m-8}{3}$

$\frac{7n+12}{8}-\frac{3n+12}{8}$

$\frac{14x-9}{10}-\frac{6x+2}{10}$

$\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{2}$

Näide.

$$\frac{16x-3}{7}-\frac{2x-3}{7}=\frac{16x-3-(2x-3)}{7}=\frac{16x-3-2x+3}{7}=\frac{14x}{7}=2x.$$

86. Arvuta.

$\frac{m+n}{4p}-\frac{m-n}{4p}$

$\frac{24x-6y}{7}-\frac{10x-48y}{7}$

$\frac{3a}{a+b}+\frac{5a}{a+b}+\frac{7a}{a+b}$

$\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{a-b}$

$\frac{7m+8n}{3m} - \frac{3m-5n}{3m}$ $\qquad$ $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}$

$\frac{20a-9}{6b} - \frac{8a-9}{6b}$ $\qquad$ $\frac{a}{x} - \frac{b+c+d}{x}$

$\frac{7x+5}{2y} + \frac{7x-5}{2y}$ $\qquad$ $\frac{2a+3b}{a-b} - \frac{a+4b}{a-b}$

87. Isenimeliste murdude algebralisel liitmisel

1) leiame nende murdude ühise nimetaja, milleks on antud nimetaja VÜK;

2) leiame igale antud murrule laiendaja, milleks jagame leitud VÜK iga nimetajaga;

3) laiendame iga antud murdu leitud laiendajaga;

4) arvutame saadud ühenimeliste murdude summa;

5) kui võimalik, siis koondame saadud murru lugejat;

6) kui võimalik, siis taandame saadud murdu.

Näiteid. 1) *Leiame summa*

$$\frac{2a+b}{2ab} - \frac{a+b}{b^2} + \frac{a}{b^2}.$$

$\frac{2a+b}{2ab} - \frac{a+b}{b^2} + \frac{a}{b^2} =$ — 1) Ühiseks nimetajaks on $2ab^2$.

$= \frac{2a+\overset{\smile}{b}}{2ab} - \frac{a+\overset{\smile}{2a}}{b^2} + \frac{\overset{\smile}{2a}}{b^2} =$ — 2) Laiendajad on: $2ab^2 : 2ab = b$; $2ab^2 : b^2 = 2a$.

$= \frac{2ab+b^2}{2ab^2} - \frac{2a^2+2ab}{2ab^2} + \frac{2a^2}{2ab^2} =$ — 3) Laiendame iga murdu leitud laiendajaga.

$= \frac{(2ab+b^2)-(2a^2+2ab)+2a^2}{2ab^2} =$ — 4) Liidame lugejad.

$= \frac{2ab+b^2-2a^2-2ab+2a^2}{2ab^2} =$ — 5) Koondame lugeja.

$= \frac{b^2}{2ab^2} = \frac{1}{2a}.$ — 6) Taandame.

2) *Arvuta summa* $2a + \frac{b^3}{5c^2}$.

$$2a + \frac{b^3}{5c^2} = \frac{\overset{5c^2}{\smile}}{\frac{2a}{1}} + \frac{\overset{1}{\smile}}{\frac{b^3}{5c^2}} = \frac{10ac^2+b^3}{5c^2}.$$

88. Arvuta.

1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$; $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}$

2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; $\frac{1}{f}+\frac{1}{g}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{x}$; $\frac{1}{b}+\frac{1}{y}$

3) $\frac{1}{3x}+\frac{1}{3y}$; $\frac{1}{5a}+\frac{1}{7b}$; $\frac{1}{4m}+\frac{1}{5n}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{8u}$

4) $1+\frac{a}{3}$; $5+\frac{b}{5}$; $1+\frac{2}{x}$; $4+\frac{3}{x}$

5) $a+\frac{b}{c}$; $3+\frac{a}{b}$; $ab-\frac{2}{d}$; $3a-\frac{a}{2}$

6) $m+\frac{2m+3n}{2}$; $4+\frac{a+x}{4}$; $8+\frac{a-x}{4}$; $2a+\frac{2a+3b}{2b}$

7) $\frac{9}{25}-\frac{8}{45}$; $\frac{1-2x}{6}+\frac{1+x}{3}$; $\frac{2b}{15a}+\frac{b}{5a}$; $\frac{x}{3a}-\frac{1}{3a^2}$

89. Arvuta.

1) $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$; $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; $\frac{3}{a}-\frac{1}{2a}$; $\frac{5}{a}-\frac{2}{3a}$; $\frac{y}{z}-\frac{z}{mx}$

2) $\frac{2}{3x}-\frac{3}{2y}$; $\frac{4}{5a}-\frac{6}{7b}$; $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$; $\frac{1}{a}-\frac{2}{b}$; $\frac{2}{b}-\frac{3}{ab}$

3) $1-\frac{a}{3}$; $5-\frac{b}{5}$; $1-\frac{2}{x}$; $4-\frac{3}{x}$; $3-\frac{2}{a}$

4) $5-\frac{a+x}{3}$; $7-\frac{a-x}{6}$; $3m-\frac{4m+5n}{3}$; $3a-\frac{8a+3c}{2b}$; $4-\frac{2+a}{3}$

5) $a-b-\frac{a^2-b^2}{a}$; $a+b-\frac{a^2-b^2+ab}{a}$; $1+\frac{a}{1-a}$; $1-\frac{a}{1+a}$

6) $a^2-\frac{3b^3+a^3}{a}$; $\frac{a^2+b^2}{a+b}+a-b$; $\frac{a^2+b^2}{a-b}-(a+b)$; $a^2-ab+b^2-\frac{b^3}{a+b}$

7) $3a+2b-\frac{2a^2-b^2}{a}$; $\frac{x^2+y^2}{x+y}+3(x-y)$; $x^2+xy+y^2+\frac{y^3}{x-y}$; $\frac{n^3}{n^2-2n+4}+n+2$

90. Arvuta.

1) $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$

$\frac{8}{15}+\frac{2}{5}$

$\frac{5}{8}-\frac{1}{2}$

$\frac{9}{10}-\frac{4}{5}$

$\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$

2) $\frac{a}{4}+\frac{a}{12}$

$\frac{c}{3}-\frac{c}{6}$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{3p}$

$\frac{5}{4q}-\frac{3}{2q}$

$\frac{1}{a}+\frac{2}{ab}$

3) $\frac{2m}{ar}-\frac{a}{r}$

$\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}$

$\frac{5u}{6a^2}-\frac{u}{3a}$

$\frac{5}{a^2}-\frac{4}{a^2b^2}$

$\frac{7}{4x^3}+\frac{3}{x^2}$

4) $\frac{2}{a^2}-\frac{3}{ab}$

$\frac{m}{x^2y}-\frac{n}{xy^2}$

$\frac{3x}{4a^2b}+\frac{5y}{6ab^2}$

$\frac{5n}{6m^2}-\frac{7p}{6mn^2}$

$\frac{3ab}{10c^2d}+\frac{2c}{15d^2}$

5) $\frac{4a+b}{8}+\frac{2a-b}{8}$

$\frac{a+b}{10}+\frac{a-b}{10}$

$\frac{a+y}{3m}+\frac{2a-y}{3m}$

$\frac{5c-3u}{6n^2}+\frac{7c+3u}{6n^2}$

$\frac{2r-t}{s^2}+\frac{t-r}{s^2}$

6) $\frac{5a+b}{4}-\frac{a+b}{4}$

$\frac{c+nd}{2}-\frac{c-nd}{2}$

$\frac{6x-32}{2R^2}-\frac{4x-32}{2R^2}$

$\frac{58a^2-81}{27D^2}-\frac{58a^2}{27D^2}$

$\frac{19N-23}{8h^3}-\frac{1+19N}{8h^3}$

7) $\frac{a+4}{2}+\frac{a+5}{3}$

$\frac{x+7}{4}+\frac{x-21}{12}$

$\frac{x-1}{6}+\frac{x+4}{21}$

$\frac{p+2q}{3}-\frac{5p+16q}{24}$

$\frac{5a-7b}{14}-\frac{a-3b}{6}$

8) $\frac{am+bn}{ab}+\frac{am+cn}{ac}$

$\frac{a^2-1}{2a}-\frac{a-1}{2}$

$\frac{m^2+n^2}{mn}+\frac{1-n}{m}$

$\frac{p^2+q^2}{pq}-\frac{p-1}{q}$

$\frac{1}{a}-\frac{b+1}{ab}$

91. Näide. *Teisendame murru* $\frac{a}{m-n}$ *murruks nimetajaga* $n-m$. *Selleks kasutame võrdust.*

$$\frac{a}{b}=-\frac{a}{-b}.$$

Saame

$$\frac{a}{m-n}=-\frac{a}{-(m-a)}=-\frac{a}{-m+n}=-\frac{a}{n-m}$$

$$\frac{a}{m-n} = -\frac{a}{n-m}$$

92. Näide. *Arvutame summa*

$$\frac{a}{m-n} + \frac{b}{n-m},$$

saame

$$\frac{a}{m-n} + \frac{b}{n-m} = \frac{a}{m-n} - \frac{b}{m-n} = \frac{a-b}{m-n}.$$

93. Arvuta.

1) $\frac{x}{3} - \frac{y}{-3}$

$\frac{2}{a} - \frac{1}{-a}$

$\frac{4}{3a} + \frac{1}{-3a}$

$\frac{1}{a+x} - \frac{1}{-a-x}$

$\frac{1}{a-x} + \frac{2}{x-a}$

2) $\frac{1}{a-1} - \frac{a}{1-a}$

$\frac{m^2}{m-n} - \frac{n^2}{n-m}$

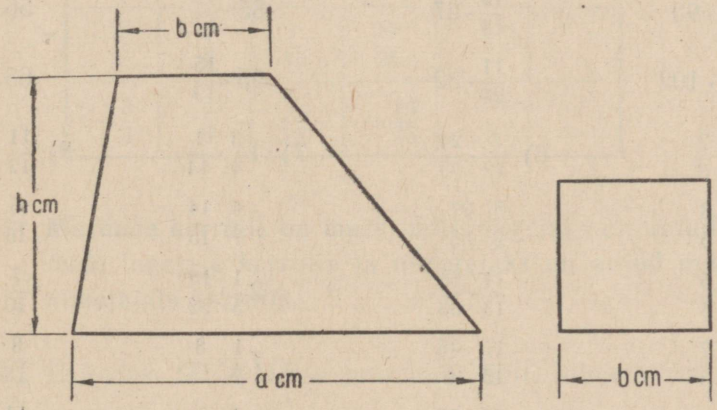
$\frac{n}{n-2} + \frac{n}{2-n}$

$\frac{2a}{a-x} + \frac{a}{x-a}$

$\frac{a}{x-a} + \frac{x}{x-a}$

94. Ühe kolmnurga pindala on $\frac{ah}{2}$ cm², teise pindala on $\frac{bh}{2}$ cm². Kui suur on nende kolmnurkade pindalade summa?

95. Arvuta joonisel 11 kujutatud trapetsi ja ruudu pindalade vahe.



Joon. 11.

96. Prisma kummagi põhja pindala on $\frac{a^2}{b}$ cm² ja külgpindala $\frac{m^2}{2b}$ cm². Kui suur on prisma täispindala?

97. Püramiidi põhja pindala on $\frac{a^2}{b^2}$ cm² ja külgpindala $\frac{am}{b}$ cm². Kui suur on püramiidi täispindala?

98. Kauba brutokaal on $\frac{a}{b}$ kg ja netokaal $\frac{1}{3b}$ kg. Kui suur on taarakaal?

99. Kooli esimese klassi õpilastest puudus ühel päeval $\frac{m}{n}$ protsenti; lõppklassis puudus samal päeval $\frac{a}{2n}$ protsenti õpilastest. Mitme protsendi võrra oli lõppklassis puudujaid vähem kui esimeses klassis?

MURDUDE KORRUTAMINE.

100. Arvuta korrutis ja võimaluse korral taanda.

1) $\frac{3}{4} \cdot 8$	2) $\frac{7}{8} \cdot 12$	3) $21 \cdot \frac{5}{7}$	4) $65 \cdot \frac{19}{30}$
$\frac{5}{6} \cdot 24$	$\frac{3}{5} \cdot 15$	$39 \cdot \frac{11}{13}$	$78 \cdot \frac{7}{12}$
$\frac{7}{12} \cdot 60$	$\frac{9}{10} \cdot 35$	$48 \cdot \frac{5}{8}$	$30 \cdot \frac{23}{42}$
$\frac{11}{15} \cdot 90$	$\frac{13}{18} \cdot 27$	$85 \cdot \frac{12}{17}$	$56 \cdot \frac{9}{16}$
$\frac{9}{17} \cdot 102$	$\frac{11}{24} \cdot 32$	$95 \cdot \frac{15}{19}$	$63 \cdot \frac{25}{27}$
5) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$	6) $\frac{7}{12} \cdot \frac{24}{35}$	7) $1\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{14}$	8) $\frac{11}{12} \cdot 4\frac{4}{5}$
$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{27}{55}$	$3\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{15}$	$\frac{5}{16} \cdot 7\frac{1}{9}$
$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{11}{13} \cdot \frac{65}{33}$	$2\frac{1}{5} \cdot \frac{15}{22}$	$\frac{7}{10} \cdot 3\frac{1}{3}$
$\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8}$	$\frac{17}{15} \cdot \frac{25}{6}$	$7\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15}$	$\frac{8}{13} \cdot 3\frac{1}{4}$
$\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{9}$	$\frac{18}{35} \cdot \frac{77}{24}$	$9\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7}$	$\frac{11}{17} \cdot 5\frac{2}{3}$

9) $2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{2}$ 10) $1\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{12}$ 11) $-3\cdot\frac{2}{3}$ 12) $-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}$

$4\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}$ $2\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{7}$ $(-6)\cdot\left(-12\frac{1}{4}\right)$ $\frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)$

$7\frac{3}{5}\cdot 1\frac{6}{19}$ $3\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{9}\cdot 5\frac{1}{2}$ $\frac{-3}{5}\cdot\frac{5}{-6}$ $-\frac{5}{9}\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{5}{8}$

$8\frac{1}{4}\cdot 1\frac{5}{11}$ $7\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{25}$ $-4\cdot\frac{5}{6}$ $-\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

$10\frac{4}{5}\cdot 4\frac{4}{9}$ $5\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{29}\cdot 4\frac{3}{4}$ $2\frac{1}{3}\cdot\frac{-3}{5}$ $-2\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\left(-8\frac{4}{5}\right)$

101. Kontrolli valemi

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{am}{bn}$$

õigsust, täites alljärgneva tabeli.

a	b	m	n	$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}$	$\frac{am}{bn}$
3	5	15	18		
0,4	1,5	0,5	0,6		
3	−5	−15	18		
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{14}{25}$		
$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{15}$	$-\frac{14}{25}$		

Murdude korrutis on murd, mille lugejaks on antud murdude lugejate korrutis ja nimetajaks on antud murdude nimetajate korrutis.

102. Esitades täisavaldise murruna, mille nimetajaks on 1, tuleta valemi $\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{am}{bn}$ põhjal valem $k\cdot\frac{a}{b}=\frac{ka}{b}$.

103. Arvuta korrutis ja kui võimalik, siis taanda.

1) $\frac{5}{9} \cdot 21$ 2) $12 \cdot \frac{5}{9}$ 3) $\frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15}$ 4) $1\frac{2}{5} \cdot \frac{a}{n^2} \cdot \frac{3}{7} a^2 n^2$

$\frac{3}{x} \cdot a$ $6 \cdot \frac{a}{3b}$ $\frac{4}{7} \cdot \frac{a}{n^2}$ $2\frac{1}{4} \cdot \frac{c^3}{x} \cdot 1\frac{1x^2}{3c^2}$

$\frac{c}{u^2} \cdot 2u$ $7m \cdot \frac{5}{u^2}$ $\frac{4a}{b} \cdot \frac{3c}{8a}$ $\frac{3a}{5b} \cdot \frac{10b}{21c} \cdot \frac{7c}{4a}$

$\frac{h}{ab} \cdot a$ $20c \cdot \frac{4ab}{5c}$ $\frac{ab}{6} \cdot \frac{3a}{4b}$ $\frac{8a^2}{21b^2} \cdot \frac{14b}{15c} \cdot \frac{c}{4a^2}$

$\frac{4f}{g^2h} \cdot fgh$ $9hx^2 \cdot \frac{a}{hx^2}$ $\frac{x^2u^3}{7} \cdot \frac{14}{a^2u}$ $1\frac{3}{4} N^2u^2 \cdot \frac{8u}{15N^2}$

5) $(-2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$ 6) $\frac{5a}{16b^2} \cdot (-32ab^2c)$

$nx \cdot \left(-\frac{x}{n}\right)$ $\left(-\frac{2a^2}{3b^2}\right) \cdot \left(-\frac{5a^2b^2}{8c}\right)$

$(-15m^3p) \cdot \frac{3x}{10m^2p}$ $\left(-\frac{N}{a}\right) \cdot \frac{a^2}{5N^3}$

$(-4at) \cdot \left(-\frac{5a^2u}{8t^2}\right)$ $\frac{-a^2x^3}{13} \cdot \frac{52c}{-ax}$

$\left(-3\frac{qw}{r}\right) \cdot qwr$ $\frac{h}{5u^2} \cdot \left(-\frac{15u^3}{16h^3}\right)$

104. Korruta kahel viisil:

a) teostades enne sulgudes näidatud tehted;

b) korrutades sulgavaldised, kasutades hulkliikmete korrutamise eeskirja.

Võrdle tulemusi.

1) $\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(2+\frac{3}{a}\right)$ 6) $\left(\frac{a}{3}+\frac{4}{b}\right) \cdot \frac{3b}{4a}$

2) $\left(2+\frac{a}{3}\right)\left(3-\frac{a}{2}\right)$ 7) $\left(\frac{2x}{7y}-\frac{3y}{5x}\right) \cdot \left(-\frac{35x^2}{6y^2}\right)$

3) $\left(5-\frac{3}{x}\right)\left(4+\frac{2}{x}\right)$ 8) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)$

4) $\left(7+\frac{2}{a}\right)\left(7-\frac{2}{a}\right)$ 9) $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{4}+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{4}-\frac{y}{5}\right)$

5) $\left(5+\frac{a}{x}\right)\left(5-\frac{a}{x}\right)$ 10) $\left(\frac{2}{a}-\frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{2}+\frac{3}{b}\right)$

Näide. 1) $\left(\overset{x}{\breve{3}}+\frac{2}{x}\right)\cdot\left(\overset{x}{\breve{3}}-\frac{2}{x}\right)=\frac{3x+2}{x}\cdot\frac{3x-2}{x}=$

$$=\frac{(3x+2)\cdot(3x-2)}{x\cdot x}=\frac{9x^2-4}{x^2}.$$

2) $\left(3+\frac{2}{x}\right)\cdot\left(3-\frac{2}{x}\right)=3^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2=\overset{x^2}{\breve{9}}-\frac{4}{x^2}=\frac{9x^2-4}{x^2}.$

105. Teosta tehted.

1) $\frac{a+b}{6}\cdot 2(m-4)$

$\frac{m+4}{6}\cdot 2(m-4)$

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot(a-b)$

$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\cdot(p+q)$

$\frac{a+2}{3}\cdot\frac{a+3}{4}$

2) $\left(\frac{x}{4a}-\frac{y}{4}\right)\cdot\left(\frac{x}{5a}-\frac{y}{5}\right)$

$\frac{a+b}{7}\cdot\frac{a-b}{14}$

$\frac{m-n}{5}\cdot\frac{m+n}{16}$

$\left(\frac{p}{6}-\frac{q}{2}\right)\cdot\left(\frac{p}{9}+\frac{q}{3}\right)$

$\left(\frac{u^2}{4}-\frac{v^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{u^2}{8}+\frac{v^2}{4}\right)$

MURRU ASTENDAMINE.

106. *Et aste on võrdsete tegurite korrutis, siis*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a}{b\cdot b}=\frac{a^2}{b^2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b}=\frac{a^3}{b^3}.$$

Üldiselt,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ tegurit}}=\frac{a^n}{b^n}$$

Murru aste on murd, mille lugejaks on antud murru lugeja aste ja nimetajaks antud murru nimetaja aste.

107. Astenda.

1) $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ $\left(\frac{b}{3}\right)^2$ $\left(\frac{2x}{9}\right)^2$ $\left(-\frac{a}{2}\right)^2$ $\left(-\frac{a}{2}\right)^3$

2) $\left(-\frac{5a^2}{6b^3}\right)^2$ $\left(\frac{3x^2}{10y^2}\right)^3$ $\left(-\frac{y^3}{6x^2}\right)^3$ $\left(\frac{a^3}{3b}\right)^2$ $\left(\frac{3x^2}{4y^3}\right)^3$

3) $\left(\frac{a+2}{2}\right)^2$ $\left(\frac{x-5}{10}\right)^2$ $\left(\frac{x+1}{4}\right)^3$ $\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^3$

4) $\left(\frac{4a}{5}\right)^2$ $\left(-\frac{7b}{8}\right)^2$ $\left(-\frac{8c}{15}\right)^3$ $\left(\frac{9d}{10}\right)^3$ $\left(-\frac{11e}{15}\right)^2$

5) $\left(\frac{3m}{4n}\right)^2$ $\left(-\frac{1}{2N}\right)^2$ $\left(\frac{0{,}1ab}{7c^2}\right)^3$ $\left(\frac{3a^2}{8mnp}\right)^2$ $\left(-\frac{1}{2m^2x}\right)^3$

6) $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(\frac{a}{2}-2\right)^2$ $\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)^2$ $\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{4}b\right)^2$ $\left(\frac{a}{n}-1\right)^3$

7) $\left(2+\frac{a}{2}\right)^3$ $\left(\frac{2}{3}-\frac{a}{2}\right)^3$ $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}n\right)^3$ $\left(m+\frac{3}{4}\right)^3$ $\left(\frac{2}{5}-\frac{2n}{3}\right)^3$

MURDUDE JAGAMINE

108. Arvuta.

1) $\frac{12}{35}:6$ $\frac{14}{15}:7$ $\frac{27}{48}:9$ $\frac{36}{55}:12$ $\frac{65}{72}:13$

2) $\frac{3}{5}:5$ $\frac{6}{7}:3$ $\frac{3}{8}:7$ $\frac{7}{16}:2$ $\frac{5}{21}:4$

3) $\frac{15}{16}:10$ $\frac{28}{33}:35$ $\frac{63}{50}:14$ $\frac{52}{105}:12$ $\frac{84}{95}:60$

4) $28:\frac{7}{10}$ $16:\frac{8}{13}$ $20:\frac{4}{5}$ $64:\frac{16}{17}$ $80:\frac{10}{11}$

5) $\frac{2}{3}:\frac{4}{7}$ 6) $\frac{5}{24}:\frac{35}{12}$ 7) $1\frac{14}{15}:\frac{29}{45}$ 8) $-2\frac{3}{5}:6\frac{1}{2}$

$\frac{3}{5}:\frac{6}{11}$ $\frac{27}{55}:\frac{3}{22}$ $5\frac{11}{14}:\frac{-18}{35}$ $4\frac{3}{8}:\left(-2\frac{5}{8}\right)$

$\frac{5}{16}:\frac{5}{7}$ $\frac{24}{65}:\frac{12}{91}$ $3\frac{5}{12}:\frac{5}{-16}$ $5\frac{4}{9}:\left(-4\frac{2}{3}\right)$

$\frac{9}{14}:\frac{11}{35}$ $\frac{4}{9}:\frac{8}{27}$ $-9\frac{3}{8}:\frac{-15}{24}$ $7\frac{7}{8}:5\frac{1}{4}$

$\frac{7}{12}:\frac{31}{24}$ $\frac{1}{3}:\frac{7}{30}$ $-2\frac{3}{5}:\frac{13}{-15}$ $-8\frac{1}{4}:\left(-3\frac{2}{3}\right)$

109. *Murru* $\frac{a}{b}$ *pöördarv on* $\frac{b}{a}$, *sest*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

Mis on murru $-\frac{a}{b}$ pöördarvuks?

Nimeta murdude

$$\frac{2}{3},\quad -\frac{5}{6},\quad \frac{m}{n},\quad -\frac{m}{n},\quad a,\quad -b,\quad \frac{1}{a}$$

pöördarvud.

110. *Jagada murd* $\frac{a}{b}$ *murruga* $\frac{m}{n}$, *tähendab leida niisugune arv, mille korrutamisel jagajaga* $\frac{m}{n}$ *saame jagatava* $\frac{a}{b}$.

Tõestame, et

$$\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}.$$

Selleks on tarvis näidata, et võrduse parema poole korrutamisel jagajaga $\frac{m}{n}$ *saame jagatava* $\frac{a}{b}$.

Korrutame:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{an}{bm}\cdot\frac{m}{n}=\frac{anm}{bmn}=\frac{a}{b}.$$

Seega,

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}}$$

Murru jagamisel murruga korrutame esimese murru teise murru pöördarvuga.

111. Esitades arvu a murruna ja kasutades murdude jagamise eeskirja, tõesta võrdused:

$$a : \frac{m}{n} = \frac{an}{m}; \quad \frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}.$$

112. Arvuta.

1) $\frac{a}{5} : 5$ 2) $2\frac{1}{4}a : 3$ 3) $\frac{2a}{5} : a$

$\frac{2x}{5} : 4$ $6\frac{1}{2}b^2 : 2b$ $\frac{ab}{8} : b$

$-\frac{6m}{5} : 2$ $-3\frac{1}{3}xy : (-10)$ $3\frac{1}{5} : 8a$

$-\frac{3n}{8} : (-27)$ $4\frac{1}{6}x^2y : 50$ $\frac{12xy}{17} : 3x$

$\frac{8p}{9} : 16$ $1\frac{1}{2}m^3 : 15$ $\frac{42rq}{5} : 21p$

4) $\frac{x}{5} : 2\frac{1}{3}$ 5) $\frac{a^2}{3} : \frac{a}{b}$ 6) $\frac{a^2}{b^2} : \frac{a}{b}$

$\frac{2a}{9} : 3\frac{1}{9}$ $\frac{x}{8} : \frac{x^2}{4}$ $\frac{a^2}{b^2} : \frac{b}{a}$

$\frac{a}{10} : 1\frac{2}{5}$ $\frac{3q^3}{4} : \frac{16q}{15}$ $\frac{a}{b} : \frac{1}{b}$

$3\frac{1}{3}u : 6\frac{2}{3}$ $\frac{18p}{5} : \frac{27p^3}{35}$ $\frac{2x}{3y} : \frac{2y}{3x}$

$6\frac{2}{3}a^3 : 1\frac{2}{3}$ $\frac{m^2}{2} : \frac{m^2}{10}$ $\frac{x}{y} : \frac{x^2}{y^2}$

113. Arvuta.

1) $\frac{b^2}{a} : 3a$ 2) $\left(-\frac{a^2}{b}\right) : 5n$

$\left(-\frac{2a^3}{n}\right) : a^2$ $\left(\frac{-a}{b}\right) : 7ac^2$

$\frac{16b}{a^2} : 4b^3$ $\frac{16b}{m^2} : (-4b^3)$

$\left(-\frac{15m^4}{8q}\right) : (-5m^2)$ $\frac{4ax}{b} : (-5ax^2)$

$\frac{2c^2}{5x} : (-14c^3x)$ $\left(\frac{8c^2n}{3f}\right) : (-4cf)$

3) $\frac{3m}{4p} : \frac{q}{2m}$

$\left(-\frac{ax}{c}\right) : \frac{2}{3x^2}$

$\frac{x^3}{y} : \left(-\frac{x^2}{y}\right)$

$\frac{1}{q^2} : \left(-\frac{n}{q^2}\right)$

$\frac{4fg}{h^2} : \frac{2fg}{h^3}$

4) $\frac{3a^2b}{2c^2} : \frac{6ab}{2c^2}$

$\left(-\frac{14xy}{9z^2}\right) : \frac{21x^2}{2c^2}$

$\left(-\frac{156a^4b^3}{17m}\right) : \left(-\frac{12a^2b}{17m}\right)$

$\frac{72u^5}{v^2} : 84\,\frac{u^3}{v^2}$

$\frac{135a^4b^3}{c^4} : \frac{105a^3b^3}{c^3}$.

114. Näide. *Lihtsusta* **mitmekordset murdu**

$$\frac{\frac{7}{25}}{\frac{14}{15}}$$

jagamise teel.

Lahendus.

$$\frac{\frac{7}{25}}{\frac{14}{15}} = \frac{7}{25} : \frac{14}{15} = \frac{7 \cdot 15}{25 \cdot 14} = \frac{3}{10}.$$

115. Näide. *Lihtsusta mitmekordset murdu*

$$\frac{a + \frac{bx}{c}}{\frac{1}{cx}}$$

laiendamise teel.

Lahendus. *Laiendades antud murdu cx-ga, saame*

$$\frac{a + \frac{bx}{c}}{\frac{1}{cx}} = \frac{acx + bx^2}{1} = acx + bx^2.$$

116. Lihtsusta järgmised murrud.

1) $\frac{\frac{3}{4}}{9}$ $\qquad$ $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ $\qquad$ $\frac{\frac{3x}{8y^2}}{\frac{5x^2}{12y}}$

$\frac{\frac{8}{3}}{5}$ $\qquad$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$

2) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}}$

$\dfrac{\dfrac{a}{2}}{2}$

$\dfrac{-b^2}{-\dfrac{a}{b}}$

$\dfrac{-\dfrac{b^2}{a}}{b}$

$\dfrac{\dfrac{16b}{a^2}}{4b^3}$

3) $\dfrac{x-\dfrac{x}{3}}{2x}$

$\dfrac{a+\dfrac{b}{c}}{c}$

$\dfrac{a+\dfrac{b}{c}}{\dfrac{1}{c}}$

$\dfrac{m+\dfrac{1}{4}}{m+\dfrac{1}{6}}$

$\dfrac{2+\dfrac{1}{a}}{3+\dfrac{1}{a}}$

KORDAMISEKS.

117. Taandada murrud.

a) $\dfrac{-12a^3b^4c^5}{-36a^4b^4c^5}$; b) $\dfrac{-72a^3b^4c^5x^6y^7}{-9a^3b^2c}$.

118. Arvuta korrutis

$$\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)$$

kahel viisil ja võrdle tulemusi.

119. a) Kirjuta hulkliige

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

astmena.

b) Kirjuta hulkliige

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

astmena.

120. a) Tõesta, et võrdus

$$(-a+b)(-a-b)=(a+b)(a-b)$$

on õige.

b) Tõesta, et võrdus

$$(-a-b)^2=(a+b)^2$$

on õige.

121. Tõesta, et võrdus

$$(a-b)^2=(b-a)^2$$

on õige.

122. Millise avaldise peab liitma avaldisega $(a-b)^2$, et tulemus oleks võrdne avaldisega $(a+b)^2$?

123. Millise avaldise peab lahutama arvude a ja b summa kuubist, et tulemus oleks võrdne a ja b kuupide summaga?

124. Arvuta x antud võrdest.

a) $\frac{x}{m}=\frac{5n}{2m}$; b) $\frac{ab}{cd}=\frac{a^2b^2}{x}$.

125. Teisenda murd

$$-\frac{-x^2-x+1}{2}$$

murruks, mille ees ei ole miinusmärki.

126. Teisenda murd $\frac{-a+b}{-x-y}$ niisuguseks murruks, milles lugeja ega nimetaja esimese liikme ees ei ole miinusmärki.

127. Ristküliku ühe külje pikkus on $\frac{a}{2}$ meetrit ja teise külje pikkus on $\frac{m}{a}$ meetrit. Kui suur on ristküliku pindala?

128. Toa pikkus on $\frac{a^2}{2b}$ meetrit ja laius $\frac{b}{3a}$ meetrit. Arvuta toa põranda pindala.

129. Kolmnurga alus on $\frac{2a}{b}$ cm ja kõrgus $\frac{b}{a}$ cm. Leia pindala.

130. Kolmnurga küljed on $\frac{a}{b}$ cm, $\frac{2a}{b}$ cm ja $\frac{b-a}{2b}$ cm. Leia kolmnurga ümbermõõt.

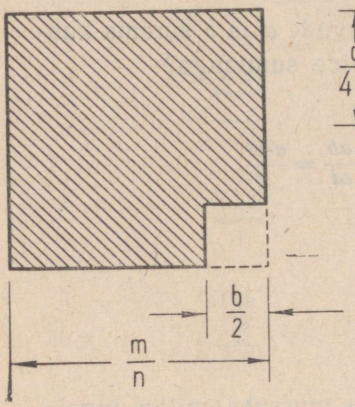
131. Rööpküliku külgede pikkused on $\frac{a-b}{m}$ cm ja $\frac{2a-b}{m}$ cm. Leia rööpküliku ümbermõõt.

132. Plekist ruudu külje pikkus on a mm. Soojenedes paisus ruudu külg 1 mm võrra. Leia pindala, mille võrra plekist ruudu pindala suurenes soojenedes.

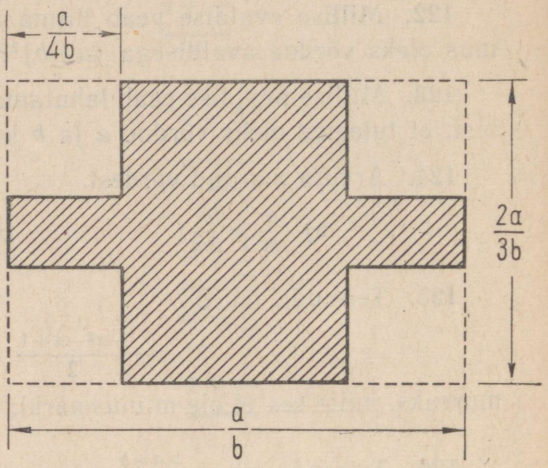
133. Vasest kuubi serv, mille pikkus on b mm, paisus kuumendamisel 1 mm võrra. Leia, mille võrra suurenes kuubi ruumala.

134. Arvuta joonisel 12 antud kujundi pindala.

135. Arvuta joonisel 13 antud kujundi pindala.



Joon. 12.



Joon. 13.

3. HULKLIIKMETE LAHUTAMINE TEGUREIKS.

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE ÜHISE TEGURI SULGUDE ETTE TOOMISEGA.

136. *Jagades hulkliikme*

$$am+bm-cm$$

arvuga m, saame

$$(am+bm-cm) : m=a+b-c.$$

Et jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutisega, siis

$$\boxed{am+bm-cm=m(a+b-c).}$$

Nii on hulkliige $am+bm-cm$ *teisendatud korrutiseks* $m(a+b-c)$. *Selle kohta öeldakse, et hulkliige on* **lahutatud tegureiks.**

Hulkliikme teisendamist korrutiseks nimetatakse **hulkliikme tegureiks lahutamiseks.**

137. Jaga hulkliige

$$12x^2-18x+30$$

tema liikmete suurima ühisteguriga 6 ning kirjuta seejärel antud hulkliige korrutisena, s. t. lahuta see hulkliige tegureiks.

138. Mis on hulkliikme $ak-bk-ck$ liikmete ühiseks teguriks? Jaga see hulkliige tema liikmete ühise teguriga ja esita siis antud hulkliige korrutisena.

139. Jaga hulkliige

$$9a^5x^2-6a^3x^3+15a^2x^5$$

tema liikmete suurima ühisteguriga. Lahuta antud hulkliige tegureiks.

140. *Ülesandeis* 136—139 *kirjeldatud hulkliikme tegureiks lahutamise võtet nimetatakse* **ühise teguri sulgude ette toomise võtteks.**

Antud hulkliikme lahutamisel tegureiks sulgude ette toomise võttega toimime järgmiselt:

1) leiame hulkliikme liikmete SÜT ja kirjutame selle teguriná sulgude ette;

2) sulgudesse kirjutame teise teguri, milleks on antud hulkliikme ja sulgude ees seisva teguri jagatis.

Näide.

$12a^2b - 18a^3b^2 - 24a^4b^3 = 6a^2b\,(2 - 3ab - 4a^2b^2)$,
sest $12a^2b : 6a^2b = 2$,
$-18a^3b^2 : 6a^2b = -3ab$,
$-24a^4b^3 : 6a^2b = -4a^2b^2$.

141. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

1) $3a+3b$
$3a+6$
$9a-6$
$12-4a$
$21-35a$

2) $6a-3x$
$7x-14a$
$15x+3a$
$16a-24x$
$72x-9a$

3) $mn+mx$
Q^2-PQ
mv^2-gv
$2st-6at^2$
$14N^2-7Nc$

4) $16r^3-24r^2$
$4u^3-u^4$
pq^2-3p^2q
m^3+5am^2
$15h^2k^3-9h^3k$

142. *Kui antud hulkliikme üks liikmetest on liikmete SÜT, siis saab tuua selle liikme sulgude ette. Sulgudes on sel korral üheks liikmeks* $+1$ *või* -1.

Näiteid.
$3a+3=3(a+1)$
$2ab-a=a(2b-1)$

143. Lahuta alljärgnevad kaksliikmed tegureiks.

1) $6ax-6a$
$5a^2-10ab$
$6ax-12a^2$
$9x^2-18ax$
$3a^2b+3b$

2) x^2+2ax^2
$12a^2-4a^2x$
$10ax-15bx$
$12ax^2-10a^2x$
a^2b^2-ab

144. Too -2 sulgude ette.

a) $-6a-4b$

b) $-2x^2+10x-12$

c) $-8a^2-6a-2$

145. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

$6ax-9bx+21cx$

$42a^2y-35ay^2+7ay$

$9cz^4-21c^2z^3-15c^3z^2$

$-12ax^2-9ax-6a$

$-5+10x-15x^2$

146. Jagades hulkliikme

$$7u(3a-2)+5(3a-2)$$

kaksliikmega $3a-2$, saame

$$[7u(3a-2)+5(3a-2)]:(3a-2)=7u+5$$

Siit järeldame, et

$$7u(3a-2)+5(3a-2)=(3a-2)(7u+5).$$

Hulkliikme

$$7u(3a-2)+5(3a-2)$$

liikmete ühiseks teguriks on hulkliige $3a-2$. *Sellest näeme, et kui antud hulkliikme liikmetel on hulkliikmeline ühistegur, siis võib tuua selle sulgude ette.*

147. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks.

$a(3m+n)+b(3m+n)$

$5(x-2y)+a(x-2y)$

$(a+b)(2x+y)+a(2x+y)$

$m(u+2)-n(u+2)$

$2(3b-v)-3v(3b-v)$

148. *Lahutame hulkliikme*

$$m(1+a+a^2)-(1+a+a^2)$$

tegureiks. Liikmete ühiseks teguriks on kolmliige $1+a+a^2$. *Kirjutame selle sulgude ette esimeseks teguriks; et ta on hulkliikmeline tegur, siis peame ta kirjutama sulgudesse.*

Nii saame

$$m(1+a+a^2)-(1+a+a^2)=(1+a+a^2)(m-1),$$

sest

$$\frac{m(1+a+a^2)}{1+a+a^2}=m \text{ ja } \frac{-(1+a+a^2)}{1+a+a^2}=-1.$$

149. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

$a(1+x)-(1+x)$
$a(1+x+x^2)-(1+x+x^2)$
$x(a^2-a+1)-2(a^2-a+1)$
$m(5x-1)-(n+2)(5x-1)$
$(3a+2b)(m+3c)-(2a+b)(m+3c)$

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE VALEMITE KASUTAMISEGA.

150. *Kui hulkliige on kahe arvu ruutude vahe, siis tema tegureiks lahutamisel saab kasutada valemit*

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

(*vt.* ül. 8.)

Näiteid.

a) $16a^2-81b^2=(4a)^2-(9b)^2=(4a+9b)(4a-9b)$.

b) $(2x+3y)^2-(2x-3y)^2=$
$=[(2x+3y)+(2x-3y)]\cdot[(2x+3y)-(2x-3y)]=4x\cdot 6y=24xy.$

151. Lahuta alljärgnevad hulkliikmed tegureiks.

1) x^2-1
y^2-4
$25-y^2$
$49-9x^2$
$0,04-c^2$

2) $1-x^2$
a^2-9
$64u^2-v^2$
$x^2-\frac{9}{25}$
$a^2-0,49$

3) $4x^2-9y^2$
$0,16a^2-0,09b^2$
$9a^2-(2x-1)^2$
$(3a+b)^2-(a-3b)^2$
$(a+b)^2-(a-b)^2$

152. Lahuta alljärgnevad hulkliikmed tegureiks, tuues esmalt ühise teguri sulgude ette ning kasutades seejärel valemit.

1) ax^2-ay^2
a^3-ax^2
$3R^2-3r^2$
$27a^2-12b^2$
s^3t^2-s

2) $2a^2-2b^2$
$8-18x^2$
$2R^2-2r^2$
$50a^2-98b^2$
$9a^3x^2-a$

Näide. $18a^3m^2-50a=2a(9a^2m^2-25)=$
$=2a[(3am)^2-5^2]=2a(3am+5)(3am-5)$.

153. *Valemist*

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

järeldame võrduse poolte vahetamise teel, et

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$$

Samal viisil järeldame valemist

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$

et

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

Neist valemeist näeme, et kui kolmliikme kaks liiget on kahe arvu ruudud ja üks liige on nende arvude kahekordne korrutis, siis selle kolmliikme saab kirjutada nende arvude summa või vahe ruuduna, s. t. selle kolmliikme saab lahutada teguriteks.

Näiteid.

a) $4a^2+12ab+9b^2=(2a)^2+2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2=(2a+3b)^2$.

b) $36m^2-60mn+25n^2=(6m)^2-2\cdot 6m\cdot 5n+(5n)^2=(6m-5n)^2$.

154. Lahuta järgmised hulkliikmed võimaluse korral tegureiks.

1) x^2+4x+4
x^2-2x+3
$x^2+14x+49$
$x^2-8x+16$
$x^2-18x+72$

2) $25-10y+y^2$
$1+2z+z^2$
$4u+8+u^2$
v^2-2v-1
$t^2-16t+64$

3) $x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}$
$4f^2+4f+1$
$x^2-0{,}2x+0{,}01$
$x^2-2{,}4x+1{,}44$
$x^2-0{,}6x-0{,}09$

4) $x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$
$16g^2-16g+4$
$h^2-6ah+9a^2$
$c^2-4ck+4k^2$
$25m^2-30mn+9n^2$

155. Lahuta järgnevad hulkliikmed teguriteks, tuues esmalt ühise teguri sulgude ette ning kasutades seejärel valemit.

1) $3a^2-6a+3$
$5a^2+10a+5$
$ax^2+4ax+4a$
$7x^2-14x+7$
$2x^2-16x+32$

2) $6a^2+12a+6$
$50y^2+20y+2$
$av^2-2av+a$
$3m^2-48m+19^2$
$5+10z+5z^2$.

156. Lahuta järgnevad kolmliikmed tegureiks.

1) $-a^2-8a-16$
$-x^2+10x-25$
$2x-x^2-1$

2) $-x^2-4x-4$
$2ab-a^2-b^2$
$-x^2+6x-9$

Näide. $10a-a^2-25=-(-10a+a^2+25)=$
$=-(a^2-10a+25)=-(a-5)^2$.

157. *Valemeist*

$$(a-b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

ja

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

saame järeldada, et

$$\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3}$$

ja

$$\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3}.$$

Neid valemeid saab hulkliikme tegureiks lahutamisel kasutada siis, kui hulkliikmes on neli liiget, milledest kaks on kahe arvu kuubid, üks on kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis ning üks on kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis.

Näide. $a^3+12a^2+48a+64=a^3+3\cdot a^2\cdot 4+3\cdot a\cdot 4^2+4^3=(a+4)^3$.

158. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks.

1) x^3+3x^2+3x+1
$8-12a+6a^2-a^3$
$c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$
$-a^3-30a^2-300a-1000$
$y^3+2y^2+\frac{3}{4}y+\frac{8}{27}$

2) $x^3+18x^2+108x+216$
$1+0{,}03p+0{,}0003p^2+0{,}000001p^3$
$125-75z+15z^2-z^3$
$8u^3+12u^2v+6uv^2+v^3$
$125a^3-150a^2b+60ab^2-8b^3$

159. *Valemeist*

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

ja

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

saame järeldada, et

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

ja

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Neist valemeist näeme, et kui hulkliige on kahe arvu kuupide summa või kuupide vahe, siis saab seda hulkliiget lahutada tegureiks, kirjutades üheks teguriks nende arvude summa (või vahe) ja teiseks teguriks nende arvude vahe (või summa) mittetäieliku ruudu.

Näide. $8a^3-27b^3=(2a)^3-(3b)^3=$
$=(2a-3b)[(2a)^2+2a\cdot 3b+(3b)^2]=$
$=(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2).$

160. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks.

1) a^3+125
$64-x^3$
$8x^3+1$
$27a^3-8b^3$
$z^3+0{,}001$

2) $250p^3+54q^3r^3$
$x^3-0{,}008$
$\frac{1}{8}-8a^3$
$125u^3+216$
$128a^3b^2-432b^2c^3$

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE LIIKMETE RÜHMITAMISE VÕTTEGA.

161. *Hulkliikme*

$$m(a+b)+n(a+b)$$

tegureiks lahutamisel saame kasutada ühise teguri sulgude ette toomise võtet, sest hulkliikme liikmetel on ühiseks teguriks $(a+b)$. Tuues selle ühise teguri sulgude ette, saame

$$m(a+b)+n(a+b)=(a+b)(m+n).$$

Hulkliikme

$$m(a+b)+n(a+b)$$

võib anda ka kujul

$$ma+mb+na+nb.$$

Kui seda hulkliiget hakata lahutama tegureiks, siis näeme, et kõikidel tema liikmetel ei ole ühist tegurit, kuid esimesel kahel liikmel on ühiseks teguriks m, kahel viimasel aga n.

Rühmitades selle hulkliikme liikmeid nii, et igas rühmas oleks ühise teguriga liikmed, siis saame

$$(ma+mb)+(na+nb).$$

Kummaski rühmas saab nüüd tuua ühise teguri sulgude ette. Seega saame

$$(ma+mb)+(na+nb)=m(a+b)+n(a+b).$$

Sel viisil oleme saanud hulkliikme niisugusel kujul, et kõikidel liikmetel on ühine tegur $(a+b)$, *mille võime tuua sulgude ette. Nii saame lõpuks:*

$$ma+mb+na+nb=(ma+mb)+(na+nb)=$$
$$=m(a+b)+n(a+b)=(a+b)(m+n).$$

Niisugust hulkliikme tegureiks lahutamise võtet nimetatakse **liikmete rühmitamise võtteks.**

Lahuta hulkliige

$$ma+mb+na+nb$$

tegureiks, rühmitades liikmed nii, et esimeses rühmas oleks liikmed ühise teguriga a, teises rühmas liikmed ühise teguriga b. Võrdle tulemust eespool saadud tulemusega.

162. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks liikmete rühmitamise võttega.

1) $ax+ay+2x+2y$
$n^2+nz+5n+5z$
$u^2+7u+au+7a$
$3a^2+2ab+ba+4b$
$6x^2-13x+6xy-13y$

2) $2ax-au+4bx-2bu$
$5Nc-5Nd+7c^2-7cd$
$z^2-hz+11z-11h$
$8x^3-8x^2y-4xy^2+4y^3$
$ax^2-bx^2+ax-bx$

3) $t^2-at-3t+3a$
$8m^2-4mn-6m+3n$
$16pq-12q-8pr+6r$
$20ab-4b-5a+1$
$5z^2-5hz+ah-az$

4) x^3+x^2+x+1
x^3-3x^2-2x+6
$3x^3-7x^2-9x+21$
x^3-2x^2-2x+4
$5x^3-35x^2+x-7$

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE MITME VÕTTEGA.

163. *Hulkliikmete tegureiks lahutamine ei ole lõpetatud, kui saadud korrutises hulkliikmeline tegur on omakorda veel tegureiks lahutatav. Näiteks, kui hulkliige*

$$3ax^2-3ay^2$$

on ühise teguri $3a$ *sulgude ette toomisega teisendatud korrutiseks*

$$3a(x^2-y^2),$$

siis tegureiks lahutamine ei ole lõpetatud, sest teine tegur on omakorda veel tegureiks lahutatav:

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y).$$

Hulkliikme tegureiks lahutamine on lõpetatud siis, kui ta on teisendatud niisuguseks korrutiseks, mille ükski hulkliikmeline tegur ei ole enam tegureiks lahutatav.

Tegureiks ei ole lahutatavad näiteks järgmised hulkliikmed:

$a+b$; $a-b$; a^2+ab+b^2;
a^2-ab+b^2; a^2+b^2; $2x-4y+3xy$.

Näide.

$$3ax^2-3ay^2=3a(x^2-y^2)=3a(x+y)(x-y)$$

Siin on tegureiks lahutamine lõpetatud, sest kumbagi hulkliikmelist tegurit ei saa enam tegureiks lahutada.

Hulkliikme tegureiks lahutamisel vaatame kõigepealt, kas kõigil liikmetel on ühine tegur; kui on, siis toome selle sulgude ette. Seejärel vaatame, kas sulgudes olevat avaldist saab veel tegureiks lahutada kas valemite kasutamise või liikmete rühmitamise võttega; kui see on võimalik, siis tuleb seda teha.

Näide.

$$\begin{aligned}6ax^2-12ax-9bx^2+18bx&=3x(2ax-4a-3bx+6b)=\\&=3x[(2ax-4a)-(3bx-6b)]=\\=3x[2a(x-2)-3b(x-2)]&=3x[(x-2)(2a-3b)]=\\&=3x(x-2)(2a-3b).\end{aligned}$$

164. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

1) $3x^2-6x+3$
$6-24p^2q^2$
$5y^2-1445$
$11x^2-66x+99$
$u^2-1{,}21$

2) $7a^2b^2-7c^4$
$245Q^2-140Q+20$
$121a^2b^2-100c^2d^2$
$24x^2+72x+54$
$4f^2-\frac{9}{25}$

3) $3a^3-12a$
$4a^4+4ab^3$
$x^2-a^2-2ab-b^2$
$a^2-b^2+2bc-c^2$
$5ax^3-40ax^2+80ax$

4) a^4-ab^3
$a^2+2ab+b^2-x^2$
a^2-b^2-a-b
$2a-3b-4a^2+9b^2$
$3k^4-6k^3+3k^2$

HULKLIIKMETE SUURIMA ÜHISTEGURI (SÜT) LEIDMINE.

165. *Antud hulkliikmete SÜT leidmiseks lahutame need hulkliikmed tegureiks ja moodustame siis kõikide ühiste tegurite korrutise.*

Näide. *Leiame hulkliikmete*

$$15h^2-15h,$$
$$9h^3-9h \text{ ja}$$
$$24h^3-48h^2+24h$$

suurima ühisteguri.

Lahendus.

$15h^2-15h=15h(h-1)=3\cdot5\cdot h\cdot(h-1);$
$9h^3-9h=9h(h^2-1)=3^2\cdot h(h+1)(h-1);$
$24h^3-48h^2+24h=24h(h^2-2h+1)=2^3\cdot3\cdot h(h-1)^2.$

$SÜT=3h(h-1).$

166. Leia iga järgmise avaldisepaari SÜT:

1) $8mnp$
$12m^2np-4mn^2p$

2) a^2x+ax^2
a^2x-ax^2

3) $15pq-5p$
$10p^2+15p$

4) $7a^2-21ab$
$5a-15b$

5) a^2-1
$a+1$

6) $5(a+x)^2$
$10(a^2-x^2)$

7) N^2-9
N^2-6N+9

8) a^3
a^2x+ax^2

9) m^2n^2-1
$5mn^2+5n$

10) u^3-c^2u
$u^3-2u^2c+uc^2$

167. Leia iga järgmise avaldisekolmiku SÜT:

1) x^2-2x+1
x^2-1
$5x-5$

2) $9-x^2$
x^2+6x+9
$2x+6$

3) $25-36x^2$
$5+6x$
$36x^2-60x+25$

4) $2a-5$
$10-4a$
$6a-15$

5) $4(a+1)^2$
$6a^2-6$
$2a^2+4a+2$

6) a^2-b^2+a-b
$3a^2-6a+3$
$5a^2-5b^2$

HULKLIIKMETE VÄIKSEIMA ÜHISKORDSE (VÜK) LEIDMINE.

168. *Antud hulkliikmete VÜK leidmiseks lahutame kõik need hulkliikmed tegureiks, misjärel moodustame korrutise, mille tegureiks on ühe hulkliikme kõik tegurid ning teiste hulkliikmete tegurite hulgast need, mis võetud hulkliikme tegurite hulgas ei esine.*

Näide. *Leiame hulkliikmete* $4N^2x-4N^2$, $6N(x^2+2x+1)$ *ja* $20Nx^2-20N$ *väikseima ühiskordse.*

Lahendus.

$4N^2x-4N^2=4N^2(x-1)=2^2\cdot N^2(x-1)$;
$6N(x^2+2x+1)=6N(x+1)^2=2\cdot 3\cdot N(x+1)^2$;
$20Nx^2-20N=20N(x^2-1)=2^2\cdot 5\cdot N(x+1)(x-1)$.

$VÜK=2^2\cdot N^2(x-1)\cdot 3\cdot (x+1)^2\cdot 5=$
$=60N^2(x-1)(x+1)^2$.

169. Leia järgmiste avaldisepaaride VÜK:

1) 5
$5a-5x$

2) 12
$12a+5b$

3) m
m^2+m

4) Ny
N^2-N

5) $4a+4n$
$5a-5n$

6) a^3-aR^2
$6a-6R$

7) x^2-u^2
$7x+7u$

8) $1-x^2$
$(x-1)(x+2)$

9) $(v-9)^2$
$(18-2v)^2$

170. Leia iga järgmise kolme hulkliikme VÜK:

1) $(b-7)^2$, b^2-7b, $5b$

2) ax, a^2+ax, $ax+x^2$

3) $3x^2-48$, $3x-12$, $(x+4)^2$

4) $(x-3)^2$, x^2-9, $5x-15$

5) $3(n^2-1)$, $(n-1)(n^2+1)$, n^3+n

6) $2(x-1)^2$, $7(x+1)^2$, $14(x^2-1)$

7) $a(a+b)+a^2-b^2$, $4a^2-4ab+b^2$, a^2-b^2

8) a^2-4, a^3+8, a^2+2a+4

9) a^3-a^2+a-1, a^3+a^2+a+1, a^4-1

10) $8ab+16b^2$, $a^2b+4ab^2+4b^3$, a^3

HULKLIIKMELISTE LIIKMETEGA MURRUD.

MURRU TAANDAMINE.

171. *Kui murru lugeja ja nimetaja on hulkliikmed, siis sellise murru taandamiseks lahutame tema lugeja ja nimetaja tegureiks. Juhul kui lugejal ja nimetajal on ühiseid tegureid, siis nende ühiste teguritega taandame murdu.*

Näiteid.

1. *Taanda murd* $\frac{3ab+3b}{6b+6ab}$.

Lahendus. $\frac{3ab+3b}{6b+6ab}=\frac{3b(a+1)}{6b(1+a)}=\frac{3b(a+1)}{6b(a+1)}=\frac{1}{2}$.

2. *Taanda murd* $\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49}$.

Lahendus.

$$(x+3)(x+2)+2(x-3)=x^2+5x+6+2x-6=$$
$$=x^2+7x=x(x+7);$$
$$x^2+14x+49=(x+7)^2;$$
$$\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49}=\frac{x(x+7)}{(x+7)^2}=\frac{x}{x+7}.$$

3. *Taanda murd* $\frac{2ab-2b}{8b-8ab}$.

Lahendus.

$$\frac{2ab-2b}{8b-8ab}=\frac{2b(a-1)}{8b(1-a)}=\frac{a-1}{4(1-a)}=-\frac{1-a}{4(1-a)}=-\frac{1}{4}.$$

172. Taanda võimaluse korral iga järgmine murd.

1) $\frac{9m+18}{9m-27}$

$\frac{ab-ac}{ad+ac}$

$\frac{a^2-a}{ab+a}$

$\frac{2x-2}{2x+7}$

$\frac{a-ax}{n-nx}$

2) $\frac{7h+14}{7h-35}$

$\frac{2e-1}{2e+3}$

$\frac{n+n^2}{1+n}$

$\frac{ar+a^2r^2}{a+ar}$

$\frac{6u^3-6u^2}{u-1}$

3) $\frac{3abc-7abu}{3ac-7au}$

$\frac{ns+nt}{sv+tv}$

$\frac{a^2-az}{ab-bz}$

$\frac{Q^3+Q^2}{Q^3+Q}$

$\frac{5z^3-6z}{15z^2-18}$

4) $\frac{4x^2-4x+1}{10x-5}$

$\frac{z^4-2z^2+1}{z^3-z}$

$\frac{25-10v+v^2}{25a-av^2}$

$\frac{9p^2-16q^2}{6p+8q}$

$\frac{gh^2-gf^2}{kh+kf}$

5) $\frac{ay^2-2ay+a}{y-1}$

$\frac{u^3-2u^2+u}{2u-2}$

$\frac{4x^2-1}{4x+2}$

$\frac{4n^2+25}{16n^4-625}$

$\frac{1-Q^4}{Q^2+1}$

6) $\frac{x-a}{a-x}$

$\frac{5nz-15}{3-nz}$

$\frac{15a^2-20ab}{21am-28bm}$

$\frac{1-h^2}{ch^2-c}$

$\frac{ab-bc}{ad-dc}$

7) $\frac{by-b}{1-y}$

$\frac{x^2+xy}{xy+y^2}$

$\frac{2a-5b}{15b-6a}$

$\frac{abd^2-abc}{abc-abd^2}$

$\frac{a^2-b^2}{a+b}$

8) $\frac{a^2-1}{1+a}$

$\frac{d^2u^2-9d^2}{du-3d}$

$\frac{(nz+1)^3}{n^2z^2-1}$

$\frac{a-x}{a-x}$

$-\frac{6-x}{x^2-36}$

9) $\frac{c^2-16}{4-c}$

$\frac{w^2-1}{(w+1)^2}$

$\frac{m^3n-mn^3}{mn^2-m^2n}$

$\frac{a-b}{b^2-a^2}$

$\frac{3h-k}{k^2-9h^2}$

10) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$

$\frac{m^2-2mn+n^2}{n-m}$

$\frac{u^2-v^2}{u^2-2uv+v^2}$

$\frac{a^3+a^2b-ab^2-b^3}{a^3-a^2b-ab^2+b^3}$

$\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2+2ab+b^2}$

11) $\frac{9-p^2}{p+3}$

$-\frac{-p-q}{p^2+2pq+q^2}$

$\frac{9a^2-16b^2}{9a^2-24ab+16b^2}$

$\frac{x^2-y^2-(x+y)z}{x^2-y^2+xz+yz}$

$\frac{m^4-m}{m^4-m^2}$

173. Lihtsusta avaldist

$$\frac{2a^3+2a^2-20a-30}{4a^2-9}$$

ja arvuta siis ta väärtus, kui $a=11$.

174. Lihtsusta avaldist

$$\frac{8x^2+16x+32}{x^3-8}$$

ja arvuta siis ta väärtus, kui $x=3$.

175. Näita, et murru

$$\frac{n^2-nx+n-x}{n^2-nx-n+x}$$

väärtus ei sõltu x väärtusest.

176. Näita, et murru

$$\frac{m^2+2m-mx-2x}{m^2+3m-mx-3x}$$

väärtus ei sõltu x väärtusest.

MURRU LAIENDAMINE.

177. Laienda murd $\frac{11}{17}$ nimetajani 51. Millega pead antud murru nimetajat korrutama, et saada uueks nimetajaks 51? Kui suur on laiendaja?

178. Näide. *Laienda murd* $\frac{2a-b}{a+3b}$ *nimetajani* $a^2+6ab+9b^2$.

Lahendus.

$$a^2+6ab+9b^2=(a+3b)^2.$$

Laiendaja on $a+3b$.

$$\frac{2a-b}{a+3b}=\frac{(2a-b)\cdot(a+3b)}{(a+3b)\cdot(a+3b)}=\frac{2a^2+6ab-ab-3b^2}{a^2+6ab+9b^2}=\frac{2a^2+5ab-3b^2}{a^2+6ab+9b^2}.$$

179. Laienda järgmised murrud antud nimetajani

1) $\frac{1}{a+b}$ nimetajani a^2-b^2

2) $\frac{a-b}{a+b}$ „ $a^2+2ab+b^2$

3) $\frac{x+y}{x-y}$ „ $x^2-2xy+y^2$

4) $\frac{m+n}{m-n}$ „ m^2-n^2

5) $\frac{a+b}{a-b}$ „ a^3-b^3

6) $\frac{m-n}{m+n}$ „ m^3+n^3

7) $\frac{2a+5}{3a-1}$ „ $9a^2-6a+1$

8) $\frac{2x-3}{5x+7}$ „ $25x^2+70x+49$

MURDUDE TEISENDAMINE ÜHENIMELISTEKS.

180. Tuleta meelde, kuidas teisendatakse murde ühenimelisteks.

Teisenda ühenimelisteks murrud

$$\frac{5}{54},\quad \frac{7}{81} \text{ ja } \frac{19}{135}.$$

181. Näide. *Teisenda murrud*

$$\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2} \text{ ja } \frac{2ab}{a^2-b^2}$$

ühenimelisteks.

Lahendus. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$VÜK=(a+b)^2(a-b).$

Esimese murru laiendaja on

$$(a+b)^2(a-b):(a^2+2ab+b^2)=a-b;$$

teise murru laiendaja on

$$(a+b)^2(a-b):(a^2-b^2)=a+b.$$

$$\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a-b)\cdot(a-b)}{(a^2+2ab+b^2)\cdot(a-b)}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2(a-b)};$$

$$\frac{2ab}{a^2-b^2}=\frac{2ab\cdot(a+b)}{(a^2-b^2)(a+b)}=\frac{2ab\cdot(a+b)}{(a+b)(a-b)(a+b)}=\frac{2ab(a+b)}{(a+b)^2(a-b)}.$$

182. Teisenda järgmised murrud ühenimelisteks:

1) $\frac{a}{a+b}$ ja $\frac{b}{a-b}$

2) $\frac{m}{m-n}$ ja $\frac{n}{m+n}$

3) $\frac{a+b}{a-b}$ ja $\frac{a-b}{a+b}$

4) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ ja $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$

5) $\frac{b}{a(a+b)}$, $\frac{a}{b(a-b)}$ ja $\frac{ab}{a^2-b^2}$

6) $\frac{c+d}{d(c-d)}$, $\frac{c-d}{d(c+d)}$ ja $\frac{cd}{c^2-d^2}$

Tartu Ülikooli Raamatukogu
ARHIIVKOGU

183. Kuidas toimub isenimeliste murdude liitmine ja lahutamine?

Teosta tehted:

$$\frac{12}{35}+\frac{29}{42}-\frac{61}{70}.$$

184. N ä i d e. *Teosta tehted:*

$$\frac{m-2n}{m^3+n^3}-\frac{m-n}{m^2n-mn^2+n^3}-\frac{1}{mn+n^2}.$$

L a h e n d u s.

1) *Lahutame nimetajad tegureiks ja leiame nimetajate VÜK, mis on antud murdude ühiseks nimetajaks:*

$$m^3+n^3=(m+n)(m^2-mn+n^2)$$
$$m^2n-mn^2+n^3=n(m^2-mn+n^2)$$
$$mn+n^2=n(m+n)$$
$$VÜK=(m+n)(m^2-mn+n^2)n.$$

2) *Jagades leitud VÜK iga murru nimetajaga, leiame iga murru laiendaja:*

$$n,\ m+n \text{ ja } m^2-mn+n^2.$$

3) *Laiendame iga murdu vastava laiendajaga ja liidame laiendatud murrud:*

$$\frac{m-2n}{m^3+n^3}-\frac{m-n}{m^2n-mn^2+n^3}-\frac{1}{mn+n^2}=$$
$$=\frac{n(m-2n)-(m+n)(m-n)-(m^2-mn+n^2)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n}=$$
$$=\frac{mn-2n^2-m^2+n^2-m^2+mn-n^2}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n}.$$

4) *Koondame lugeja, saame*

$$\frac{2mn-2n^2-2m^2}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n}.$$

5) *Kui võimalik, siis taandame. Taandamise võimaluse selgitamiseks lahutame lugeja tegureiks:*

$$\frac{2mn-2n^2-2m^2}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n}=\frac{-2(m^2-mn+n^2)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n}=$$
$$=\frac{-2}{(m+n)n}=-\frac{2}{n(m+n)}.$$

Vastus.

$$\frac{m-2n}{m^3+n^3}-\frac{m-n}{m^2n-mn^2+n^3}-\frac{1}{mn+n^2}=-\frac{2}{n(m+n)}.$$

185. Näide. *Lihtsusta avaldis*

$$\frac{a}{a-1}-\frac{2a}{1-a}-\frac{3a^2+a-2}{a^2-1}.$$

Lahendus.

$$\frac{a}{a-1}-\frac{2a}{1-a}-\frac{3a^2+a-2}{a^2-1}=\overbrace{\frac{a}{a-1}}^{a+1}+\overbrace{\frac{2a}{a-1}}^{a+1}-\frac{\overbrace{3a^2+a}^{1}-2}{(a+1)(a-1)}=$$
$$=\frac{a^2+a+2a^2+2a-3a^2-a+2}{(a+1)(a-1)}=$$
$$=\frac{2a+2}{(a+1)(a-1)}=\frac{2(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{2}{a-1}.$$

186. Teosta järgmised tehted:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}$

$\frac{2a+3b}{2a-3b}-\frac{2a-3b}{3b-2a}$

$\frac{7b-8a}{3a-2b}-\frac{b-4a}{2b-3a}$

$\frac{3a-4b}{a^2-b^2}-\frac{3b-2a}{b^2-a^2}+1$

$\frac{2b^3-2a^3}{a^3-b^3}-\frac{1}{b-a}+1$

2) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$

$\frac{5x-6y}{x-y}-\frac{3x-2y}{y-x}$

$\frac{7a+8}{5a-5}+\frac{8+4a}{4-4a}$

$\frac{4}{x-y}+\frac{5x+5y}{2y^2-2x^2}-2$

$\frac{2b^2-ab}{a^3+b^3}-\frac{a-b}{ab-a^2-b^2}-1$

3) $\frac{1}{y-3}-\frac{1}{y-1}$

$\frac{4-3a}{a-1}-\frac{4a-5}{1-a}$

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}$

$\frac{x}{2x-c}+\frac{c}{2x}$

$\frac{x-y}{x+3y}-\frac{x+y}{3y}$

4) $\frac{1}{2u-v}-\frac{1}{2u+v}$

$\frac{5}{3x-3}-\frac{3}{2x-2}$

$\frac{2}{a}+\frac{4a-b}{a^2+ab}$

$\frac{1}{1-c}-\frac{1}{c+1}$

$\frac{7n}{5m^2-m}-\frac{2n}{10m-2}$

5) $\frac{4}{x-1}+\frac{3}{1-x}$

$\frac{3}{2x-1}+\frac{7}{2x+1}-\frac{4-20x}{1-4x^2}$

$\frac{5}{5+3n}+\frac{3}{5-3n}-\frac{3n-35}{9n^2-25}$

$\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

$\frac{4a+x}{4a-x}+\frac{4a-x}{x-4a}$

6) $\frac{2}{1-a^2}-\frac{2}{a-1}$

$\frac{2a+3x}{2a-3x}-\frac{2a-3x}{3x-2a}$

$\frac{x}{x-y}+\frac{3x}{x+y}-\frac{2xy}{x^2-y^2}$

$\frac{2}{2x+3}+\frac{3}{3-2x}+\frac{2x+15}{4x^2-9}$

$\frac{2x-19}{3x-4}-\frac{5x}{6x-8}-\frac{1}{2}$

7) $\frac{2}{a+b}+\frac{3}{a-b}+\frac{4a+8b}{a^2-b^2}$

$\frac{2}{2a+3}+\frac{3}{3-2a}+\frac{2a+15}{4a^2-9}$

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b-2a}-\frac{2a-3b}{4a^2-b^2}$

$\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{2}{(a-1)(3-a)}+\frac{1}{(a-1)(a-2)}$

$\frac{n}{n^2-1}+\frac{n^2+n-1}{n^3-n^2+n-1}+\frac{n^2-n-1}{n^3+n^2+n+1}-\frac{2n^3}{n^4-1}$

8) $\frac{a-2b}{a^3+b^3}-\frac{a-b}{a^2b-ab^2+b^3}-\frac{1}{ab+b^2}$

$\frac{1}{a-b}-\frac{3ab}{a^3-b^3}-\frac{b-a}{a^2+ab+b^2}$

$\frac{2}{4+a}-\frac{a-3}{16-4a+a^2}-\frac{a^2-9a}{64+a^3}$

$\frac{1}{2m-3n}-\frac{2m+3n}{4m^2+6mn+9n^2}-\frac{6mn}{8m^3-27n^3}$

$\frac{a+1}{2a-2}+\frac{a^2+3}{2-2a^2}+\frac{2a-3}{a+1}$

187. Näide. *Kirjuta avaldis*

$$a-b-\frac{a^2-b^2+ab}{b}$$

murruna.

Lahendus.

$$a-b=\frac{a-b}{1}=\frac{b(a-b)}{b}=\frac{ab-b^2}{b};$$

seega

$$a-b-\frac{a^2-b^2+ab}{b}=\frac{ab-b^2}{b}-\frac{a^2-b^2+ab}{b}=$$

$$=\frac{ab-b^2-a^2+b^2-ab}{b}=\frac{-a^2}{b}=-\frac{a^2}{b}.$$

188. Kirjuta järgmised avaldised murdudena:

1) $1+\frac{a}{1-d}$ 4) $\frac{b}{b+x}+1$

2) $1+n+\frac{n^2}{1-n}$ 5) $x-3+\frac{7}{x+3}$

3) $a-b-\frac{a^2-b^2}{a}$ 6) $\frac{x^2-x-6}{x^2-4}-2-\frac{x-1}{2-x}$

189. Maja veevärgi kraan annab torustiku korrasolekul q liitrit vett minutis. Torude osalisel ummistumisel langeb minutiline läbivool d liitri võrra. Mitme minuti võrra kasvab sel puhul vanni täitumise aeg, kui vanni lastakse v liitrit vett?

190. Ujuja ujub seisvas vees kiirusega v meetrit sekundis. Jõevoolu kiirus on w meetrit sekundis. Kui palju aega kulub ujujal k meetri ujumiseks vastuvoolu rohkem, kui sama vahemaa ujumiseks pärivoolu?

Kui palju aega kulub ujujal k meetri edasi-tagasi ujumiseks?

MURDUDE KORRUTAMINE.

191. Korruta.

1) $3\cdot\frac{5}{6}$ 2) $\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{21}\cdot\frac{28}{45}$ 3) $\frac{113}{355}\cdot 1\frac{2}{113}$

$14\cdot\frac{2}{7}$ $\frac{17}{18}\cdot\frac{27}{34}\cdot\frac{9}{16}$ $1\frac{1}{3}\cdot 20\frac{1}{4}$

$3a\cdot\frac{b}{6a}$ $\left(\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c^2}{a^2}$ $\left(1+\frac{a+b}{a-2b}\right)\cdot\left(2-\frac{3a}{2a-b}\right)$

$\frac{a}{10b}\cdot 5b$ $\left(-\frac{2a}{3b}\right)\cdot\left(-\frac{6c}{4a}\right)\cdot 2b$ $\left(1-\frac{a-2b}{2a+b}\right)\cdot\left(2-\frac{5b}{a+3b}\right)$

192. Näide. Leia korrutis

$$(4-a^2)\cdot\frac{3a}{2+a}.$$

Lahendus.

$$(4-a^2)\cdot\frac{3a}{2+a}=\frac{(4-a^2)\cdot 3a}{2+a}=\frac{3a(2+a)(2-a)}{2+a}=$$
$$=3a(2-a)=6a-3a^2.$$

193. Näide. *Lihtsusta avaldis*

$$\frac{x^2-4u^2}{x+u}\cdot\frac{x^2-u^2}{x+2u}.$$

Lahendus.

$$\frac{x^2-4u^2}{x+u}\cdot\frac{x^2-u^2}{x+2u}=\frac{(x^2-4u^2)\cdot(x^2-u^2)}{(x+u)\cdot(x+2u)}=$$
$$=\frac{(x+2u)\,(x-2u)\cdot(x+u)\,(x-u)}{(x+u)\cdot(x+2u)}=(x-2u)\,(x-u).$$

194. Korruta.

1) $\frac{x^2-y^2}{xy}\cdot\frac{y}{x^2+xy}$

$-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(-\frac{3a^2}{4a-4b}\right)$

$(2x-2a)\cdot\frac{c}{x-a}$

$\frac{m+n}{7m}\cdot\frac{5m}{2m-2n}$

2) $\frac{a^2+ab}{3bc}\cdot\frac{12c}{a^2-b^2}$

$-\frac{10b^2-10a^2}{a^2}\cdot\left(\frac{b^2+a^2}{5a+5b}\right)$

$(x+1)\cdot\frac{3}{x^2-1}$

$\frac{4n+1}{6-10n}\cdot(5n-3)$

3) $\frac{m}{n-1}\cdot\frac{n^2-2n+1}{m+mn}$

$\frac{x+7u}{x-7u}\cdot(x^2-49u^2)$

$\frac{x^2-u^2}{2a+2b}\cdot\frac{a+b}{3x+3u}$

$\frac{x^2-1}{4}\cdot\frac{12}{x-1}$

$\frac{u^2-4v^2}{8u}\cdot\frac{12u^2}{2u-4v}$

4) $\frac{4ax-4x}{a+1}\cdot\frac{1}{4(a-1)}$

$\frac{x+a}{x-a}\cdot\frac{3a}{x^2-a^2}$

$\frac{9-z^2}{3z}\cdot\frac{d}{3+z}$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{5x}{x^2-1}$

$\frac{s^2-3s}{7t}\cdot\frac{14t^2}{s^2-9}$

5) $\frac{5p(p-q)}{3r(p+q)}\cdot\frac{3(p^2+q^2)}{5(p^2-q^2)}$

$\frac{4r^2+8r}{3r+9}\cdot\frac{15r+45}{14r^2+28r}$

$\frac{3a+3}{a^2+6a+9}\cdot\frac{6a+18}{a^2-1}$

$\frac{a}{a-b}\cdot\left(-\frac{b-a}{c}\right)$

$-\frac{ab+ac}{cd-bd}\cdot\frac{ab-ac}{bd+cd}$

6) $\frac{ad-ab}{bc+cd}\cdot\frac{ab+ad}{bc-cd}$

$\frac{a^2+4a+4}{3a+6}\cdot\frac{6a-12}{a^2-4}$

$\frac{9-6b+b^2}{3+b}\cdot\frac{9+6b+b^2}{3-b}$

$\frac{7a^2+28a+28}{21a^2-189}\cdot\frac{3a^2-18a+27}{a^2-4}$

$\frac{3a^2-3}{2a^2+8a+8}\cdot\frac{a^2-4}{6a^2-12a+6}$

195. Leia jagatised.

1) $\frac{39}{67} : \frac{52}{134}$ 2) $\frac{22}{35} : \frac{33}{70}$ 3) $\frac{a^2}{b^2} : \frac{5}{a}$ 4) $-\frac{2x}{3y} : \left(-\frac{2y}{3x}\right)$

$26 : \frac{13}{15}$ $7 : \frac{14}{15}$ $\frac{6a^2}{25b^2} : \frac{3a}{5b}$ $\frac{8m^2n}{15k} : \frac{2mn^2}{3k}$

$\frac{15}{16} : 5$ $-\frac{5}{8} : 15$ $a^2b : \frac{ab^2}{n}$ $-m^2 : \left(-\frac{2m}{a^2}\right)$

$12\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2}$ $13\frac{1}{3} : 4\frac{4}{9}$ $\frac{4ax}{b} : 8ax^2$ $\frac{8c^2n}{3a} : 4ac$

196. N ä i d e. *Leia jagatis*:

$$\frac{3a+2}{2} : (9a^2-4).$$

L a h e n d u s. *Korrutades murru nimetaja täisavaldisega, saame*

$$\frac{3a+2}{2} : (9a^2-4) = \frac{3a+2}{2(9a^2-4)} = \frac{3a+2}{2(3a+2)(3a-2)} = \frac{1}{2(3a-2)}.$$

197. N ä i d e. *Leia jagatis:*

$$(a+x)^2 : \frac{2a+2x}{6}.$$

Korrutades täisavaldise murru pöördarvuga, saame

$$(a+x)^2 : \frac{2a+2x}{6} = \frac{6 \cdot (a+x)^2}{2a+2x} = \frac{6(a+x)^2}{2(a+x)} = \frac{3(a+x)}{1} = 3(a+x).$$

198. Leia järgmised jagatised:

1) $\frac{a+b}{c} : (a+b)$ 2) $\frac{4n(p-q)}{p} : (p-q)$

$\frac{x^2-c^2}{7c} : (x+c)$ $\frac{m^2-mn}{6} : (3m-3n)$

$\frac{5a+1}{3} : (25a^2-1)$ $\frac{4a^2+4a+1}{a-1} : (4a^2-1)$

$c^2 : \frac{-c^3}{a+b}$ $(2p+2q) : \frac{p+q}{5a}$

$(x+2y) : \left(\frac{x+2y}{4n}\right)$ $(a-m)^2 : \frac{3a-3m}{8}$

$(14m-7) : \frac{4m^2-1}{9}$ $(a^3-n^3) : \frac{a^2+an+n^2}{a-n}$

199. Näide. *Leia jagatis.*

$$\frac{a^2-4}{x} : \frac{a+2}{x^2-x}.$$

Lahendus. *Lahutades esimese murru lugeja tegureiks, saame:*

$$a^2-4=(a+2)(a-2).$$

Lahutades teise murru nimetaja tegureiks, saame:

$$x^2-x=x(x-1).$$

Korrutades nüüd esimese murru teise murru pöördarvuga ning taandades, saame:

$$\frac{a^2-4}{x} : \frac{a+2}{x^2-x} = \frac{(a+2)(a-2)\ x(x-1)}{x(a+2)} = (a-2)(x-1).$$

200. Leia järgmised jagatised:

1) $\frac{x^2-ax}{4a} : \frac{x}{8a^2}$

$\frac{a^2-x^2}{ax} : \frac{a+x}{a^2x^2}$

$\frac{p^2+pq}{rx+sx} : \frac{p^3+p^2q}{rx^3+sx^3}$

$\frac{105f^2}{gh-1} : \frac{84fg}{1-gh}$

$(R^2-2+\frac{1}{R^2}):3(R-\frac{1}{R})$

2) $\frac{2x-4}{5a} : \frac{x-2}{15a^2}$

$\frac{(m+n)^2}{4m-4n} : \frac{6m+6n}{m-n}$

$\frac{a+b}{a-b} : \frac{b+a}{b-a}$

$\left(\frac{Q}{2}-\frac{2}{Q}\right) : \frac{Q+2}{4Q}$

$\frac{2a}{x-2} : \frac{4}{2-x}$

KÕIK TEHTED MURDUDEGA.

201. Näide. *Lihtsusta avaldis*

$$\left(\frac{a+2}{a-2}+\frac{a-2}{a+2}\right) \cdot (a^2-4).$$

Lahendus. *Sulgudes olevate murdude ühiseks nimetajaks on* $(a-2)(a+2)$. *Vastavad laiendajad on* $a+2$ *ja* $a-2$. *Niisiis*

$$\left(\frac{\overbrace{a+2}^{a+2}}{a-2}+\frac{\overbrace{a-2}^{a-2}}{a+2}\right) \cdot (a^2-4) = \frac{(a+2)(a+2)+(a-2)(a-2)}{(a-2)(a+2)} \cdot (a^2-4) =$$

$$= \frac{(a^2+4a+4+a^2-4a+4)(a^2-4)}{a^2-4} = 2a^2+8.$$

202. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\left(\frac{a}{3}+\frac{4}{b}\right)\cdot\frac{3b}{4a}$ 2) $\left(\frac{2x}{7y}-\frac{3y}{5x}\right)\cdot\left(\frac{35x^2}{6y^2}\right)$

3) $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right):(x+3)$ 4) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

5) $\left(\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-1}{a+1}\right)\cdot(a^2-1)$ 6) $\left(\frac{a-3}{a+3}+\frac{a+3}{a-3}\right)\cdot(a^2-9)$

203. Näide. *Lihtsusta avaldis*

$$\frac{2+\frac{2}{a-2}}{2-\frac{2}{a+2}}.$$

Lahendus.

$$\frac{2+\frac{2}{a-2}}{2-\frac{2}{a+2}}=\left(2+\frac{2}{a-2}\right):\left(2-\frac{2}{a+2}\right)=\frac{2(a-2)+2}{a-2}:\frac{2(a+2)-2}{a+2}=$$

$$=\frac{2a-4+2}{a-2}:\frac{2a+4-2}{a+2}=\frac{2a-2}{a-2}:\frac{2a+2}{a+2}=\frac{(2a-2)(a+2)}{(a-2)(2a+2)}=$$

$$=\frac{2(a-1)(a+2)}{(a-2)\cdot 2(a+1)}=\frac{(a-1)(a+2)}{(a-2)(a+1)}=\frac{a^2+a-2}{a^2-a-2}.$$

204. Näide. *Lihtsusta mitmekordset murdu*

$$\frac{1-\frac{1}{a+1}}{1+\frac{1}{a+1}}$$

laiendamise teel.

Lahendus. *Korrutades lugejat ja nimetajat avaldisega* $a+1$, *saame:*

$$\frac{1-\frac{1}{a+1}}{1+\frac{1}{a+1}}=\frac{a+1-1}{a+1+1}=\frac{a}{a+2}.$$

205. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\dfrac{x+\frac{x}{2}}{x-\frac{x}{2}}$ 3) $\dfrac{a+\frac{1}{3}}{a-\frac{1}{2}}$ 5) $\dfrac{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}$ 7) $\dfrac{1-\frac{b}{a}}{a+b}$

2) $\dfrac{1-\frac{p}{q}}{\frac{q-p}{r}}$ 4) $\dfrac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$ 6) $\dfrac{1+c}{1+\frac{1}{c}}$ 8) $\dfrac{\frac{5m}{2n}}{\frac{1}{2n}-\frac{1}{4}}$

9) $\dfrac{1+\dfrac{1}{m-1}}{1-\dfrac{1}{m+1}}$ 10) $\dfrac{a+\dfrac{5}{6}b}{a-\dfrac{4}{9}b}-1$

206. Teosta tehted.

1) $\left(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}\right):\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

2) $\left(\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{b}{a^2}\right):(a-b)$

3) $\left(\dfrac{x^3}{y}-\dfrac{y^3}{x}\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

4) $\left(\dfrac{m^2}{n^2}-\dfrac{n^2}{m^2}\right):(m+n)$

5) $\left(\dfrac{a+b}{b}-\dfrac{2b}{b-a}\right)\cdot\dfrac{b-a}{a^2+b^2}$

207. Näide. *Lihtsusta avaldis*

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3ab}-a-b\right]:\left[\frac{(a-b)^2}{ab}+1\right].$$

Lahendus.

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3ab}-a-b\right]:\left[\frac{(a-b)^2}{ab}+1\right]=$$

$$=\frac{(a+b)^3-3a^2b-3ab^2}{3ab}:\frac{(a-b)^2+ab}{ab}=$$

$$=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2}{3ab}:\frac{a^2-2ab+b^2+ab}{ab}=$$

$$=\frac{a^3+b^3}{3ab}:\frac{a^2-ab+b^2}{ab}=\frac{(a^2+b^3)ab}{3ab(a^2-ab+b^2)}=$$

$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{3(a^2-ab+b^2)}=\frac{a+b}{3}.$$

208. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\left(1+a-\dfrac{a^2+3}{a+1}\right)\cdot\left[\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{2}a\right)^2\right]$

2) $\left[\dfrac{a^2+ax}{2x}:(a^2-x^2)\right]\cdot\left[\dfrac{(a+x)^2}{4ax}-1\right]$

3) $\left(\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{a+1}{a-1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{4}-\dfrac{1}{4a}\right)$

4) $\frac{a-x}{ax} \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right) : \frac{a^2+x^2}{ax} \cdot \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)$

5) $\left(a-2+\frac{1}{a}\right) : \left(a^2-a-1+\frac{1}{a}\right)$

KORDAMISEKS.

209. Näita, et

a) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$;
b) $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

210. Lahuta kahel viisil tegureiks:

a) x^2+3x^2+3x+1;
b) x^3-3x^2+3x-1.

211. Kontrolli, kas kumbki alljärgnev võrdus on õige:

a) $x(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2-3x+1)^2$;
b) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

212. Arvuta x võrdest:

1) $\frac{a+1}{x}=\frac{a^2-1}{a-1}$

2) $\frac{a^3+3a^2+3a+1}{a^2+2a+1}=\frac{a+1}{x}$

3) $\frac{x}{n-1}=\frac{n^2-2n+1}{n^3-3n^2+3n-1}$

4) $\frac{x}{a^2-a+1}=\frac{a+1}{a^3+1}$

5) $\frac{n-1}{n^3-1}=\frac{x}{n^2+n+1}$

213. Arvuta x võrdusest:

1) $(x+1)(x-1)-x(x-1)=4$
2) $(x+3)^2-x^2=21$
3) $(x+3)(x^2-3x+9)-(x-1)^3-3x^2=1$
4) $(x-2)(x^2+2x+4)-(x+1)^3+x(3x+4)=1$
5) $x(x-2)^2-(x+1)(x^2-x+1)+4x^2=15$

214. Lihtsusta avaldised:

1) $\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}+\dfrac{\dfrac{2}{ab}}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2}$

2) $\dfrac{a(a-b)-b(a+b)}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}}$

3) $\left[\dfrac{(a-x)^2}{ax}+1\right]:\left[\dfrac{(a+x)^3}{3ax}-a-x\right]$

4) $\dfrac{x^4-x-3x^3+3x^2}{x^3y-y^4}:\dfrac{x^4+x^2-2x^3}{x^2y^2+xy^3+y^4}$

5) $\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}:\dfrac{x^3y+xy^3+2x^2y^2}{x^4-y^4}$

6) $\dfrac{a^2-ab}{a^2b+b^3}-\dfrac{2a^2}{b^3-ab^2+a^2b-a^3}$

7) $1-\dfrac{b-1}{a}-\dfrac{b}{a^2}$

8) $\left[\dfrac{1}{(b-a)^3}:\dfrac{1}{(a-b)^2}-\dfrac{1}{a+b}\right]:\dfrac{2a^2}{a^2-b^2}$

9) $\left(\dfrac{1}{b^2-a^2}:\dfrac{a^2}{a^2-b^3}+\dfrac{1}{a+b}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{1+b}\right)$

10) $\dfrac{2a^2b}{(a-b)^3}-\dfrac{b^2}{(a-b)^2}+\dfrac{a}{a-b}$

215. Taanda murdu.

1) $\dfrac{a^5-a^4-a^3+a^2}{a^6-2a^3+a^2}$

2) $\dfrac{9a^2-16b^2}{9a^2-24ab+16b^2}$

3) $\dfrac{a^2-2ab+b^2-am+bm}{a^2-am-b^2-bm}$

4) $\dfrac{x^3-4x^3+8x-8}{x^4-2x^3+8x-16}$

5) $\dfrac{(x^2-x-7)^2-25}{(x^2-x-6)^2-36}$

6) $\dfrac{a^2-b^2-2bc-c^2}{b^2-2bc+c^2-a^2}$

216. Teosta tehted.

1) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}+2(a-b)$

2) $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}+3(x-y)$

3) $\frac{m^3+n^3}{(m-n)^3}+\frac{mn}{(m-n)^2}-\frac{m+n}{m-n}$

4) $\frac{5}{4x+4y}+\frac{3}{x-y}-\frac{13x+7y}{4(x^2-y^2)}$

5) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}-\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}+\frac{2y^3-y^2+x^2}{x^2-y^2}$

217. *Et antud arvu korrutada* 100*-ga ja siis tulemusega liita mingi kahekohaline arv, tuleb ainult antud arvu lõppu kirjutada see kahekohaline arv.*

Näide.

$$100 \cdot 37+46=3746$$

Arvuta peast:

$$100 \cdot 58+12$$
$$100 \cdot 375+39$$
$$100 \cdot 8+34$$

218. *Peast saab kergesti korrutada kahte kahekohalist arvu, millede algusnumbrid on võrdsed ja lõpunumbrite summa on* 10.

Olgu ühe arvu numbrid a ja b, teise numbrid b ja c, kusjuures $b+c=10$.

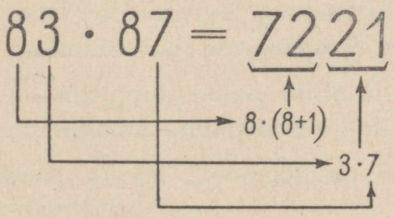
Korrutades need arvud saame $(10a+b) \cdot (10a+c) =$

$$=100a^2+10ab+10ac+bc=100a^2+10a(b+c)+bc=$$
$$=100a^2+10a \cdot 10+bc=100a^2+100a+bc=$$
$$=100a(a+1)+bc.$$

Seega

$$\boxed{(10a+b) \cdot (10a+c)=100 \cdot a \cdot (a+1)+bc}$$

Selleks et korrutada kahte kahekohalist arvu, millede algusnumbrid on võrdsed ja lõpunumbrite summa on 10, *tuleb nende arvude algusnumber korrutada* 1 *võrra suurema arvuga ning tulemusele kirjutada lõppu juurde lõpunumbrite korrutis.*



Märkus. *Kui antud arvude lõpunumbrid on* 1 *ja* 9, *siis tuleb algusnumbri ja* 1 *võrra suurendatud arvu korrutisele kirjutada juurde* 09. *Miks?*

219. Korruta peast.

1)	2)	3)
$72 \cdot 78$	$36 \cdot 34$	$49 \cdot 41$
$56 \cdot 54$	$23 \cdot 27$	$48 \cdot 42$
$71 \cdot 79$	$88 \cdot 82$	$94 \cdot 96$
$17 \cdot 13$	$22 \cdot 28$	$77 \cdot 73$
$57 \cdot 53$	$24 \cdot 26$	$38 \cdot 32$

220. 5-ga lõppeva kahekohalise arvu ruudu leidmine taandub kahe võrdse arvu korrutamisele, millede algusnumbrid on võrdsed ja lõpunumbrite summa on 10. Seega saame 5-ga lõppeva kahekohalise arvu ruudu leidmiseks järgmise eeskirja:

et leida 5*-ga lõppeva kahekohalise arvu ruutu, tuleb selle arvu esimene number korrutada* 1 *võrra suurema arvuga ja tulemusele kirjutada lõppu juurde* 25.

Näide.

$$35^2 = \underset{3 \cdot 4}{1225}.$$

221. Arvuta peast järgmised ruudud.

75^2	95^2	55^2	25^2	45^2
$8{,}5^2$	$6{,}5^2$	$7{,}5^2$	$3{,}5^2$	$5{,}5^2$

4. SIRGETE LÕIKUMINE JA PARALLEELSUS.

MATEMAATILISED LAUSED.

222. a) Mis on algarv? Mis on paarisarv? Mis on kahe arvu väikseim ühiskordne? Mida nimetatakse kahe arvu suurimaks ühisteguriks?

b) Mis on rööpkülik? Mida nimetatakse kolmnurga kõrguseks? Missugust hulknurka nimetatakse korrapäraseks? Missugust kolmnurka nimetatakse teravnurkseks, missugust nürinurkseks?

223. **Lauset, mis selgitab mingi uue mõiste sisu, nimetatakse definitsiooniks.**

Definitsioon on seega vastus selle mõiste kohta esitatud küsimusele «Mis see on?».

Definitsiooni andmine on defineerimine.

Näiteks lause «Rööpkülik on nelinurk, mille vastasküljed on paralleelsed» on definitsioon, sest selle lausega selgitatakse mõiste «rööpkülik» sisu.

Definitsiooni saab alati anda niisugusel kujul, et selles esineb sõna «nimetatakse». Näiteks rööpküliku definitsiooni saab anda ka kujul «Rööpkülikuks nimetatakse nelinurka, mille vastasküljed on paralleelsed».

224. Anna järgmiste mõistete definitsioonid: teravnurk, sirgnurk, võrdkülgne kolmnurk, kaarekraad, ring, võrdsed kujundid.

225. *Lauseid, mis väljendavad geomeetriliste kujundite (või arvude) omadusi, on kahte liiki: aksioomid ja teoreemid.*

Teoreem on niisugune lause, mille õigsust saab põhjendada varem tundmaõpitud lausete abil.

Teoreemi põhjendamist varem tundmaõpitud lausete abil nimetatakse **teoreemi tõestamiseks.**

Aksioom ehk põhilause on niisugune lause, mida loetakse õigeks ilma tõestuseta.

Näiteks sirgjoone omadustest kasutame aksioomina lauset

kaht punkti läbib ainult üks sirgjoon.

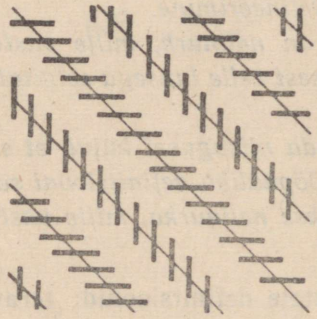
Seevastu lause

kaks sirgjoont lõikuvad ainult ühes punktis

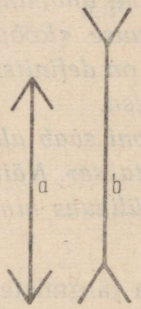
on teoreem, sest tema õigsust saab põhjendada eelmise aksioomi abil. Tõepoolest, kui kaks sirgjoont lõikuksid kahes punktis, siis neid punkte läbiks kaks sirgjoont, mida aksioomi järgi ei saa olla. Selle tõttu tuleb õigeks lugeda väide, et kaks sirgjoont saavad lõikuda ainult ühes punktis.

226. *Geomeetriliste kujundite omadusi õpitakse sageli tundma vaatluste ja mõõtmiste teel. Sel teel leitud omadused ei tarvitse alati olla õiged ja vajavad seepärast tõestamist. Et vaatlus võib anda ebaõigeid tulemusi, selles saame veenduda jooniste* 14 *kuni* 17 *vaatlemisel.*

a) Joonisel 14 kaldu läbikriipsutatud sirged ei näi olevat paralleelsed. Kontrolli nende vastastikust asendit rööplükke abil.



Joon. 14.

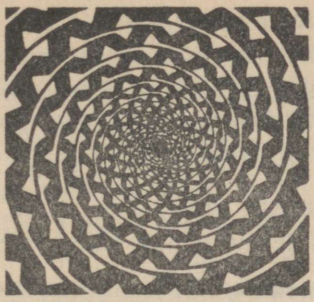


Joon. 15.

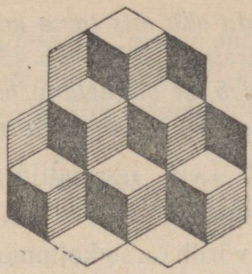
b) Kumb lõikudest *a* ja *b* joonisel 15 on pikem?

c) Kas joonis 16 kujutab spiraale või ühise keskpunktiga ringjooni? Kontrolli oma arvamist sirkli abil.

d) Mitu kuupi on kujutatud joonisel 17? Pööra joonist 180°



Joon. 16.



Joon. 17.

võrra ja vaata uuesti. Missuguses kuupide reas kuupide arv lehe pööramisel näib muutuvat ja kui palju?

227. Tuleta meelde teoreemid, mis väljendavad kahe kolmnurga võrdsuse tingimusi.

228. Tuleta meelde teoreemid, mis väljendavad võrdhaarse kolmnurga omadusi.

229. Tuleta meelde teoreem
a) ristküliku pindalast;
b) kolmnurga pindalast;
c) trapetsi pindalast.

230. Tuleta meelde teoreem, mis väljendab
a) millal arv jagub 9-ga;
b) millal arv jagub 5-ga;
c) millal arv jagub 2-ga.

TEOREEMI KOOSTIS.

231. *Iga teoreemi saab sõnastada nii, et üks osa temast algab sõnaga «kui» ja teine osa sõnaga «siis».*

Näiteks teoreemi «Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed» saab sõnastada ka nii: «Kui kolmnurk on võrdhaarne, siis tema alusnurgad on võrdsed.»

Seda osa teoreemist, mis algab sõnaga «kui», nimetatakse teoreemi **eelduseks,** *ja seda osa, mis algab sõnaga «siis» — teoreemi* **väiteks.**

Teoreemi eeldus ütleb, mis vaadeldava kujundi (arvu) kohta on teada ehk mis tema kohta on antud, ja väide ütleb, mis eeldusest järeldub selle kujundi kohta. Näiteks ülalantud teoreemi eeldus ütleb, et vaadeldav kujund on võrdhaarne kolmnurk, ja väide ütleb, et siis kolmnurga alusnurgad on võrdsed.

232. Leia iga alljärgneva teoreemi eeldus ja väide ning sõnasta iga teoreem nii, et temas esineksid sõnad «kui» ja «siis»:

a) võrdhaarse kolmnurga aluse mediaan on ühtlasi kolmnurga kõrguseks;

b) korrapärase kuusnurga külg on võrdne tema ümberringjoone raadiusega;

c) nulliga lõppev arv jagub 10-ga.

233. Sõnasta teoreem, mille eeldus ja väide on allpool kõrvuti antud.

Eeldus.	Väide.
a) Arvu ristsumma jagub 9-ga.	Arv jagub 9-ga.
b) Kolmnurga kaks külge on võrdsed.	Kolmnurga kaks nurka on võrdsed.
c) Kolmnurk on täisnurkne.	Kolmnurga kahe teravnurga summa on täisnurk.
d) Hulknurk on korrapärane.	Hulknurga pindala võrdub poole ümbermõõdu ja apoteemi korrutisega.
e) Kahest arvust a ja b suurem arv jagub väiksemaga.	Suurem arv on arvude a ja b väikseim ühiskordne.
f) Jagatav ja jagaja on ühesuguste märkidega.	Jagatis on positiivne.

234. Sõnasta teoreem, mille eeldus on antud.

a) Korrutise üks tegur võrdub nulliga.

b) Ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega.

c) Antud kaks suurust on võrdelised.

d) Jagatav ja jagaja on erinevate märkidega.

e) Jagatav on 0 ja jagaja on nullist erinev arv.

JÄRELDAMISHARJUTUSI.

235. *Antud tõdedest uute tõdede tuletamist ainult mõtlemise teel nimetatakse* **järeldamiseks.** *Kui on teada näiteks, et lõik a ei ole suurem lõigust b ega võrdne lõiguga b, siis saame järeldada, et lõik a on väiksem lõigust b.*

Mis järeldub lõikude a ja b kohta, kui on teada, et $a \neq b$?

236. Kuidas saab kolmnurki liigitada nende nurkade järgi? Mis järeldub kolmnurga kohta, kui on teada, et

a) kolmnurk ei ole teravnurkne ega nürinurkne?

b) kolmnurk ei ole nürinurkne?

c) kolmnurk ei ole täisnurkne?

237. Mida saab öelda arvu kohta,

a) mis ei ole negatiivne ega null?

b) mis ei ole positiivne?

c) mis ei ole positiivne ega negatiivne?

238. a) Mida saab öelda kahe suuruse kohta, kui nad on võrdsed ühe ja sama kolmanda suurusega?

b) On antud kaks võrdset suurust a ja b. Kummagi suurusega on liidetud üks ja sama suurus c. Mis saab öelda saadud summade $a+c$ ja $b+c$ kohta?

c) On antud võrratus $a<b$. Selle kummastki poolest lahutatakse üks ja sama arv c. Mis saab öelda vahede $a-c$ ja $b-c$ kohta?

239. Tee järeldus antud eeldustest ja anna eeldus ja järeldus ühe lausena.

a) $a=b$ ja $b=c$.

b) $a<b$ ja $b<c$.

c) $a=b$ ja $b \neq 8$.

d) Antud murru lugeja on 3 korda väiksem kui nimetaja.

e) Summa $a+b$ kumbki liidetav jagub 5-ga.

240. Otsusta, mida saab järeldada igast allpool antud lausest.

a) Arv x ei ole negatiivne.

b) Arv a ei ole suurem kui 12.

c) VII klassis ei ole üle 30 ega alla 29 õpilase.

d) Kumbki lõikudest a ja b ei ole teisest pikem.

241. Tee järeldus igast järgnevast eelduste paarist:

1)	2)	3)	4)
$a=b$	$a>b$	$x=a+b$	$s=a+b$
$b<c$	$b>c$	$x=a+c$	$b=a$

242. Otsusta, kas järgnevad väited on õiged või mitte.

a) Kui $x=4$, siis $3x-10>4$.

b) Iga võrdkülgne kolmnurk on võrdhaarne.

c) Iga võrdhaarne kolmnurk on võrdkülgne.

d) Iga võrdkülgne kolmnurk on võrdnurkne.

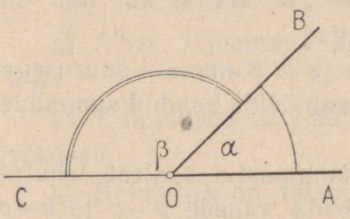
e) Kui kumbki kahest liidetavast jagub 4-ga, siis summa jagub 8-ga.

f) Kui arvu ristsumma jagub 9-ga, siis arv jagub 3-ga.

g) Kui koolis on 370 õpilast, siis seal leidub vähemalt kaks õpilast, kelle sünnipäev on ühel ja samal päeval.

KÕRVUNURGAD.

243. *Nurki tähistatakse sageli väikeste kreeka tähtedega* α *(alfa),* β *(beeta),* γ*(gamma),* δ *(delta) jne. See täht kirjutatakse nurga sisse (joon.* 18*). Selle tähise ette nurga märki ei kirjutata, näiteks* $\alpha=75°$*, mitte* $\angle\alpha=75°$.



Joon. 18.

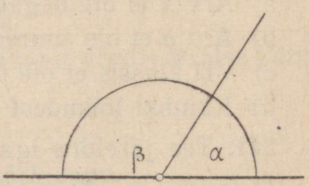
244. *Joonesta mingi nurk* α *ja pikenda tema üht haara üle nurga tipu O (joon.* 18*). Siis nurga* α *kõrvale tekib uus nurk, ütleme* β *ehk* $\angle BOC$ *(joon.* 18*). Nurki* α *ja* β *nimetatakse teineteise* **kõrvunurkadeks.**

Kaht nurka nimetatakse kõrvunurkadeks, kui neil on ühine tipp ja üks ühine haar, kuna teised haarad moodustavad sirgjoone.

Leia jooniselt 18 nurkade α ja β ühine tipp ja ühine haar. Missuguse joone moodustavad nende nurkade teised haarad?

245. Joonesta kaks lõikuvat sirget *AB* ja *CD*, tähista nende lõikepunkt ja selle juures tekkinud nurgad. Nimeta nüüd joonise järgi seal esinevad kõrvunurkade paarid ja iga paari puhul nurkade ühine haar.

246. Missuguse nurga saab, kui liita kõrvunurgad, s. o. kõrvaldada nende ühine haar (joon. 19)?



Joon. 19.

Kõrvunurkade summa võrdub sirgnurgaga.

Sümbolites:

$$\alpha+\beta=180°.$$

247. Avalda

a) α tema kõrvunurga β kaudu;

b) β tema kõrvunurga α kaudu.

248. Kui suur on nurk, mis on võrdne oma kõrvunurgaga? Kuidas saaks täisnurka defineerida kõrvunurga mõiste abil?

249. Mis liiki on teravnurga kõrvunurk, nürinurga kõrvunurk?

VÕRRAND.

250. N ä i d e. *Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast* 26° *võrra väiksem?*

L a h e n d u s. *Oletame, et otsitav nurk sisaldab* x *kraadi. Siis tema kõrvunurk sisaldab* $x+26$ *kraadi ja nende summa sisaldab* $x+(x+26)$ *ehk* $2x+26$ *kraadi. Et kõrvunurkade summa on sirgnurk, siis*

$$2x+26=180.$$

Saadud võrdusest järeldub (kuidas?), et

$$2x=180-26$$

ehk

$$2x=154,$$

seega

$$x=77.$$

K o n t r o l l. *Kui nurk on* 77 *kraadi, siis tema kõrvunurk peab olema* $180-77=103$ *kraadi. Lahutades sellest* 77 *kraadi, näeme, et saadud nurk on oma kõrvunurgast tõepoolest* 26 *kraadi võrra väiksem.*

V a s t u s. *Otsitav nurk on* 77°.

251. *Eelmise ülesande lahendamisel tähistasime otsitava nurga tähega* (x) *ja koostasime võrduse, milles see täht oli tundmatuks.*

Võrdust, mis sisaldab tundmatut, nimetatakse võrrandiks. Tundmatu leidmist võrrandist nimetatakse võrrandi lahendamiseks.

Ülesande lahendamine võrrandi abil algab otsitava suuruse tähistamisest mingi tähega. Sellele järgneb võrrandi koostamine

ühes tarviliku selgitusega ja võrrandi lahendamine. Saadud lahendit, s. o. tundmatu väärtust tuleb kontrollida. Lahendi kontrollimine peab toimuma ülesande teksti, mitte koostatud võrrandi põhjal, sest viimane võib sisaldada juba viga. Lahendi kontrollimise järel tuleb anda ülesande vastus.

Võrrandisse nimetusi arvude juurde ära kirjuta.

Lahenda järgnevad ülesanded võrrandi abil.

252. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 34° võrra suurem?

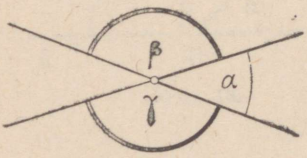
253. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 15° võrra väiksem?

254. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 3 korda suurem?

255. Kui suur on kumbki kõrvunurkadest, kui nende vahe on 9 korda väiksem nende summast?

TIPPNURGAD.

256. Joonesta mingi nurk α (joon. 20) ja pikenda tema mõlemat haara üle nurga tipu.



Joon. 20.

Kummagi haara pikendamisel üle nurga tipu (joon. 20) tekib nurgale α kõrvunurk: α ja β on kõrvunurgad, samuti α ja γ on kõrvunurgad. Nurki β ja γ nimetatakse teineteise suhtes **tippnurkadeks.**

Kaht nurka nimetatakse tippnurkadeks, kui neil leidub ühine kõrvunurk.

Mitu tippnurkade paari tekib kahe sirge lõikumisel?

257. *Olgu β ja γ tippnurgad ning α nende ühine kõrvunurk (joon. 20). Siis*

$$\alpha+\beta=180^\circ \text{ ja } \alpha+\gamma=180^\circ.$$

Avaldades neist võrdustest tippnurgad β ja γ, saame

$$\beta=180^\circ-\alpha \text{ ja } \gamma=180^\circ-\alpha.$$

Seega

$$\beta=\gamma.$$

Sellest selgub, et

tippnurgad on võrdsed.

258. Joonesta kaks lõikuvat sirget ja tähista tekkinud nurgad ringjärjekorras tähtedega α, β, γ, δ. Nimeta kõik tekkinud tippnurkade paarid ja kõik tekkinud kõrvunurkade paarid.

259. Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest on üks 78°. Kui suured on teised nurgad?

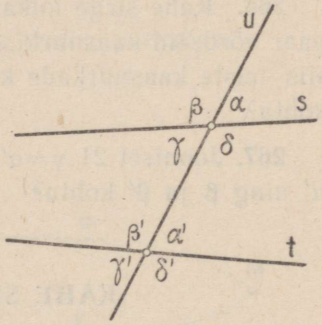
260. Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest on kahe nurga summa 128°. Leia iga tekkinud nurga suurus.

261. Kahe tippnurga summa on 158°20′. Kui suur on nende ühine kõrvunurk?

KAHE SIRGE LÕIKAMINE SIRGEGA.

262. *Lõikame kaht sirget s ja t mingi kolmanda sirgega u (joon. 21). Tähistame sirgete u ja s lõikumisel tekkinud nurgad tähtedega α, β, γ ja δ, sirgete u ja t lõikumisel tekkinud nurgad aga tähtedega α′, β′, γ′, δ′ (loe: alfa prim jne.).*

Kuidas nimetatakse nurki α ja γ, β′ ja δ′, γ ja δ, α′ ja γ′, γ′ ja β′?



Joon. 21.

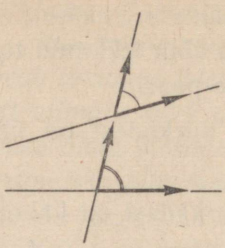
263. *Nurkadest, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmandaga ja asetsevad eri lõikepunktide juures, on mõnele paarile antud erinimetused.*

1) Kaht nurka, mis asetsevad ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal suunduvad ühtepidi, nimetatakse **kaasnurkadeks** *(joon. 22).*

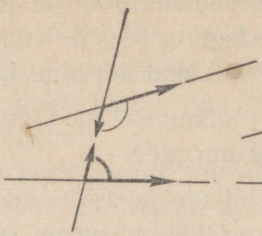
Joonisel 21 on kaasnurkadeks α ja α′, β ja β′, γ ja γ′, δ ja δ′.

2) Kaht nurka, mis asetsevad ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal suunduvad vastamisi, nimetatakse **lähisnurkadeks** *(joon. 23). Joonisel 21 on lähisnurkadeks γ ja β′, δ ja α′.*

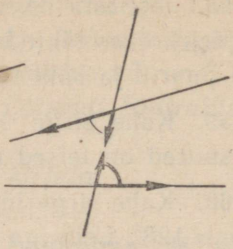
3) Kaht nurka, mis asetsevad üks ühel ja teine teisel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal suunduvad vastamisi, nimetatakse **põiknurkadeks** *(joon. 24). Joonisel 21 on põiknurkadeks γ ja α′, δ ja β′.*



Joon. 22.



Joon. 23.



Joon. 24.

264. Arvuta joonisel 21 esinevad nurgad, mis on tekkinud kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui $\alpha = 54°$ ja $\beta = \beta'$.

265. Arvuta nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui kahe kaasnurga summa on 153° ja üks neist on 70°.

266. Kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega on tekkinud üks paar võrdseid kaasnurki, näiteks $\alpha = \alpha'$ (joon. 21). Mis saab öelda siis teiste kaasnurkade kohta? põiknurkade kohta? lähisnurkade kohta?

267. Joonisel 21 $\gamma = \alpha'$. Mida saab öelda nurkade δ ja α', α ja α' ning β ja β' kohta?

KAHE SIRGE PARALLEELSUS.

268. Kaht sirget, mis asetsevad ühel ja samal tasapinnal ning ei lõiku, nimetatakse paralleelseteks.

Kahe sirge u ja v paralleelsust märgitakse nii: $u \parallel v$.

Too näiteid paralleelsetest sirgetest.

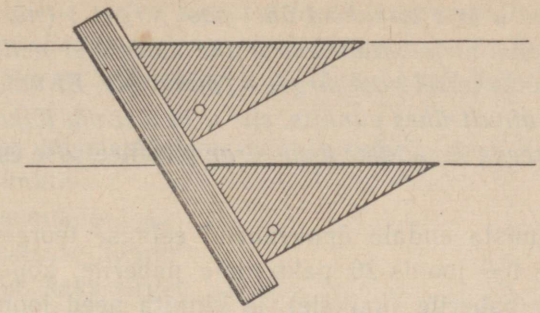
269. *Paralleelseid sirgeid oleme joonestanud rööplükke abil (joon. 25). See joonestamise võte põhineb järgmisel teoreemil:*

kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib paar võrdseid kaasnurki, siis need kaks sirget on paralleelsed.

E e l d u s. *Sirgete u ja v lõikamisel sirgega t on tekkinud võrdsed kaasnurgad α ja β (joon. 26).*

V ä i d e. *Sirged u ja v on paralleelsed.*

T õ e s t u s. *Leiame lõigu AB keskpunkti C ja pöörame kogu joonise selle punkti ümber 180° võrra (joon. 27). Siis*



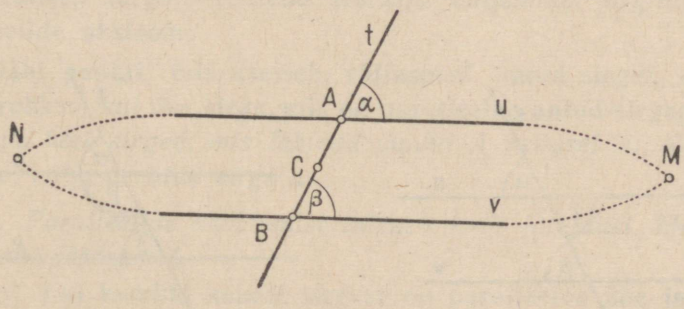
Joon. 25.

1) *punkt A ühtib punkti B endise asukohaga ja punkt B punkti A endise asukohaga, sest CA = CB;*

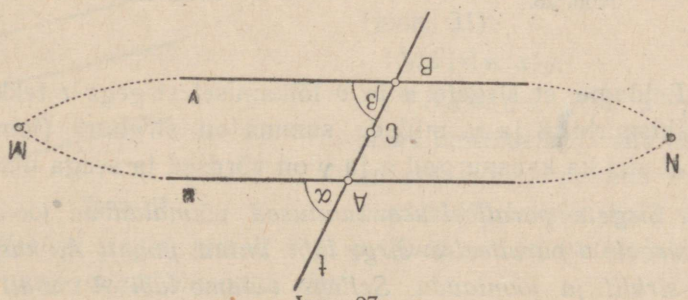
2) *nurk α satub sinna, kus enne oli nurga β tippnurk, ja nurk β sinna, kus enne oli nurga α tippnurk (need nurgad on võrdsed);*

3) *sirgete u ja v asukohad vahetuvad.*

Nii näeme, et kogu joonis ühtib oma endise asendiga.



Joon. 26.



Joon. 27.

Kui sirged u ja v lõikuksid ühel pool sirget t (näiteks paremal punktis M), siis kirjeldatud pööramine näitab, et neil leiduks veel teine lõikepunkt teisel pool sirget t (punkt N). Et kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis, siis u ja v ei või lõikuda, s. t. u‖v.

Seda teoreemi nimetame kahe sirge **paralleelsuse esimeseks tunnuseks.**

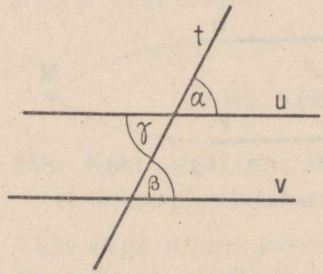
270. Valmista endale õppevahend eelmise teoreemi tõestamiseks. Selleks tee joonis 26 paksemale paberile, kopeeri siis sealt läbipaistvale paberile (kalkale) ja kinnita need joonised punktis *C* nööpnõela või peenikese naela abil.

Näita selle mudeli abil, kuhu satub nurk α pärast ühe lehe pööramist 180° võrra, kuhu nurk β.

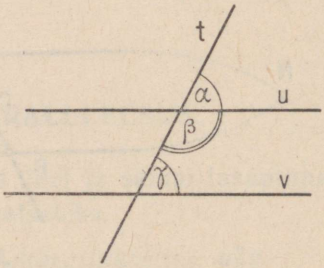
271. a) Eeldame, et sirgete *u* ja *v* lõikamisel sirgega *t* tekkis paar võrdseid põiknurki γ ja β (joon. 28). Näita, et siis ka kaasnurgad α ja β on võrdsed ja seega *u*‖*v*.

Kahe sirge paralleelsuse teine tunnus.

Kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib paar võrdseid põiknurki, siis need kaks sirget on paralleelsed.



Joon. 28.



Joon. 29.

b) Eeldame, et sirgete *u* ja *v* lõikamisel sirgega *t* tekkis üks paar lähisnurki β ja γ, millede summa on sirgnurk (joon. 29). Näita, et siis ka kaasnurgad α ja γ on võrdsed ja seega *u*‖*v*.

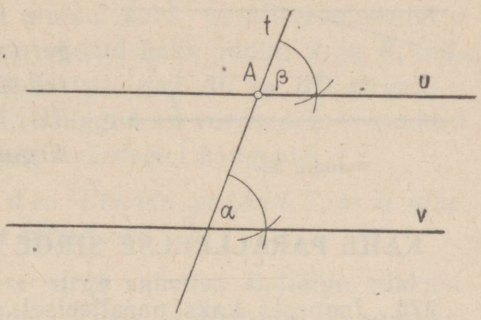
272. *Sirgete paralleelsuse tunnused võimaldavad joonestada antud sirgele v paralleelse sirge läbi antud punkti A, kasutades ainult sirklit ja joonlauda. Selleks võtame läbi A vabalt mingi*

sirge t, mis lõikab antud sirget v ja ehitame punkti A juurde sirgete t ja v vahelise nurgaga α võrdse kaasnurga β (joon. 30).

Ehitatud nurga teine haar u läbib punkti A ja on paralleelne sirgega v.

Teosta see konstruktsioon, võttes vabalt sirge ja väljaspool sirget ühe punkti.

273. Rakendades sirgete paralleelsuse tunnuseid, näita, et kaks sirget *u* ja *v*, mis on risti ühe ja sama sirgega *t*, on paralleelsed.



Joon. 30.

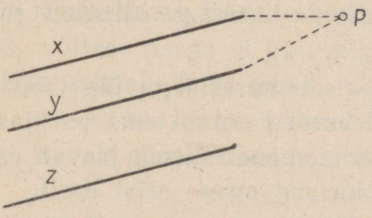
274. *Läbi antud punkti (punkt A joonisel 30) saab antud sirgele (sirge v joonisel 30) joonestada paralleelse sirge mitmel viisil. Kogemused näitavad, et sõltumatult ehitamisviisist saame läbi antud punkti ikka ainult ühe paralleeli sirgele v. Seda tõsiasja väljendab järgmine nn.* **paralleelide aksioom:**

läbi punkti, mis asetseb väljaspool antud sirget, ei lähe rohkem kui üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

Seega kõik sirged, mis läbivad punkti A joonisel 30, lõikavad sirget v, välja arvatud sirge u.

275. *Paralleelide aksioomist tuleneb hulk järeldusi. Märgime neist kaks tähtsamat.*

a) **Kui kumbki kahest sirgest on paralleelne ühe ja sama sirgega, siis need kaks sirget on paralleelsed.**



Joon. 31.

E e l d u s. $x \| z$; $y \| z$ (joon. 31).

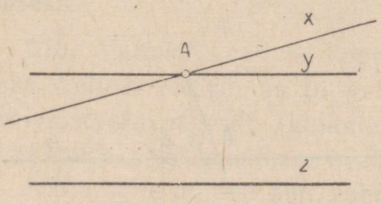
V ä i d e. $x \| y$.

T õ e s t u s. *Kui x ja y ei oleks paralleelsed, siis nad lõikuksid mingis punktis P. Seda punkti läbiks siis kaks sirgega z paralleelset sirget, nimelt x ja y. Kuid see on vastuolus paralleelide aksioomiga, tähendab* $x \| y$.

b) **Kui sirge lõikab üht kahest paralleelsest sirgest, siis lõikab ta ka teist.**

Eeldus. $y \parallel z$; *x ja y lõikuvad punktis A (joon. 32).*

Väide. *x ja z lõikuvad.*



Joon. 32.

Tõestus. *Kui sirge x ei lõikaks sirget z, siis oleks ta sellega paralleelne ja seega läbi sirgete x ja y lõikepunkti A läheks kaks sirget (x ja y), mis oleksid paralleelsed sirgega z. Kuid see pole võimalik. Tähendab, sirge x lõikab ka sirget z.*

KAHE PARALLEELSE SIRGE LÕIKAMINE SIRGEGA.

276. Joonesta kaks paralleelset sirget, lõika need mingi sirgega, mõõda tekkinud nurgad ja kirjuta tulemused joonisele. Mis paned tähele: a) iga kahe kaasnurga kohta; b) iga kahe põiknurga kohta; c) iga kahe lähisnurga kohta?

Kontrolli tehtud tähelepanekuid mingi teise lõikaja puhul.

Neist mõõtmistest nähtub, et

kui kahte paralleelset sirget lõigata mingi kolmanda sirgega, siis

1) **iga kaks kaasnurka on võrdsed,**
2) **iga kaks põiknurka on võrdsed,**
3) **iga kahe lähisnurga summa on sirgnurk.**

277. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kolmanda sirgega nii, et üks tekkinud kaheksast nurgast on 57°. Kui suured on teised nurgad?

278. Näita, et kui sirge on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, siis on ta risti ka teisega.

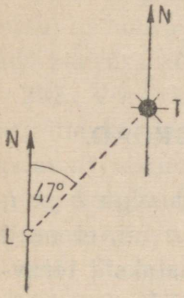
279. Kaks laeva sõidavad paralleelsete kurssidega, üks läänest itta, teine idast läände. Esimeselt laevalt paistab teine parajasti kirde suunas. Mis suunas paistab sel momendil teiselt laevalt esimene?

280. Kaks lennukit lendavad paralleelsete kurssidega, üks lõunast põhja, teine põhjast lõuna. Esimeselt lennukilt paistab teatud momendil teine lennuk suunas, mis on põhjasuunast 35° ida pool

(lühemalt suunas N35°E). Mis suunas paistab sel momendil teiselt lennukilt esimene?

281. Laevalt L peiliti tuletorni T suunas N47°E (joon. 33). Mis suunas paistis sel momendil tuletornist laev? Kui suur on $\angle LTN$?

282. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kahe sirgega nii, et tekkinud nelinurga kaks vastasnurka on 73° ja 127°. Kui suured on selle nelinurga ülejäänud nurgad?



Joon. 33

283. a) On antud kaks paralleelset sirget s ja t. Sirgel s on võetud kaks punkti A ja B, millest on tõmmatud ristlõigud AC ja BD sirgele t. Tõesta, et need ristlõigud on võrdsed, s. t. punktid A ja B on sirgest t võrdsetel kaugustel.

N ä p u n ä i d e. *Ühenda punktid C ja B ning vaatle tekkinud kolmnurki.*

Kahe paralleelse sirge vahelise ristlõigu pikkust nimetame nende sirgete vaheliseks kauguseks. See kaugus on igal pool üks ja sama.

b) Joonesta antud sirgega paralleelne sirge, mis asetseb sellest antud kaugusel. Mitu lahendit on sellel ülesandel?

VASTAVALT PARALLEELSETE HAARADEGA NURGAD.

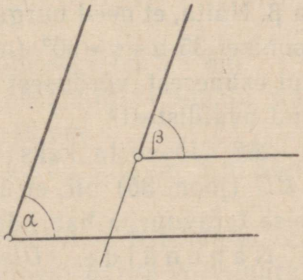
284. a) Joonesta mingi terav- või nürinurk α, võta selle nurga sees punkt ja tõmba sellest punktist kaks kiirt, mis on vastavalt paralleelsed ja s a m a s u u n a l i s e d nurga α haaradega. Tõesta, et nende kiirte vaheline nurk β võrdub nurgaga α.

N ä p u n ä i d e. *Pikenda nurga β üht haara üle nurga tipu nii, et ta lõikaks nurga α haara, ja võrdle nurki α ja β sellel pikendamisel tekkinud ühe nurgaga (joon. 34).*

b) Lahenda eelmine ülesanne veel kord, võttes nurga β tipu nii, et üks nurk ei asetseks teise sees.

Kui ühe nurga haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised teise nurga haaradega, siis need nurgad on võrdsed.

c) Mis nurgad saab vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega



Joon. 34.

nurkadest, kui ühe nurga tipp võtta teise haaral või selle pikendusel üle tipu?

285. Joonesta kaks vastavalt paralleelsete ja vastandsuunaliste haaradega nurka ja võrdle neid teineteisega.

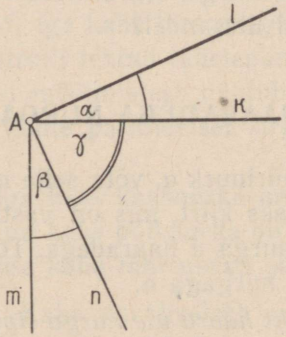
Näpunäide. *Võta abiks ühe nurga tippnurk.*

286. Joonesta kaks vastavalt paralleelsete haaradega nurka, mille ühed haarad on samasuunalised ja teised vastandsuunalised. Missugune seos valitseb nende nurkade vahel?

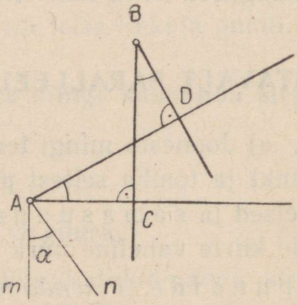
Näpunäide. *Võta abiks ühe nurga kõrvunurk.*

VASTAVALT RISTUVATE HAARADEGA NURGAD.

287. Joonesta mingi teravnurk α, mille haarad olgu k ja l, ning tõmba selle nurga tipust kaks uut kiirt m ja n nii, et need oleksid vastavalt risti nurga α haaradega ja moodustaksid teravnurga, ütleme β (joon. 35): $m \perp k$; $n \perp l$; $\beta < 90°$. Mõõda nurgad α



Joon. 35.



Joon. 36.

ja β. Näita, et need nurgad on alati võrdsed. Selleks pane tähele, et joonisel 35 $\alpha+\gamma=90°$ (miks?) ja ka $\beta+\gamma=90°$ (miks?). Mis saad, kui esimesest võrdusest avaldad α ja teisest β? Mis nähtub saadud avaldistest?

288. Joonesta kaks erinevate tippudega teravnurka CAD ja CBD (joon. 36) nii, et ühe teravnurga haarad on vastavalt risti teise teravnurga haaradega. Tõesta, et $\angle CAD = \angle CBD$.

Näpunäide. *Ülesande lahendamiseks tõmba punktist A kaks kiirt m ja n, mis on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised*

nurga B haaradega. Mis võib öelda nende kiirte vahelise nurga α ja nurga B suuruse kohta? Mis võib öelda nende kiirte vahelise nurga α ja nurga CAD suuruse kohta? Mis sellest järeldub nurkade CAD ja CBD suuruse kohta?

Kui ühe teravnurga haarad on vastavalt risti teise teravnurga haaradega, siis need nurgad on võrdsed.

289. Täisnurkses kolmnurgas *ABC* on täisnurga tipust *C* joonestatud kõrgus *CD*. Näita, et nurgad *ACD* ja *CBD* on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Mis sellest järeldub nende nurkade suuruse kohta?

290. Võrdhaarses kolmnurgas *ABC*, mille alus on *BC*, on joonestatud kõrgused *AD* ja *BE*. Näita, et nurgad *CAD* ja *EBC* on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Järelda siit, et võrdhaarse kolmnurga haarale joonestatud kõrguse ja kolmnurga aluse vaheline nurk on pool kolmnurga tipunurgast.

291. Joonesta mingi teravnurk, võta selle sees punkt ja tõmba sellest kaks kiirt, mis on vastavalt risti võetud nurga haaradega. Leia nende kiirte vahelise nurga suurus, kui võetud teravnurga suurus on α.

292. Teravnurkse kolmnurga *ABC* tippudest *A* ja *B* on joonestatud kolmnurga kõrgused, milledevaheline teravnurk on 67°. Leia

1) kolmnurga nurga *C* suurus;

2) tipust *A* tõmmatud kõrguse ja külje *AC* vahelise nurga suurus.

KORDAMISEKS.

293. Teisenda murruks avaldis

$$x+6-\frac{x^2-40}{x-6}.$$

294. Taanda murd

$$\frac{3a^2-27}{a^3-27}.$$

295. Arvuta kuubi täispindala, kui kuubi serv on 0,8 dm.

296. Arvuta korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala, kui püramiidi põhiserv on 14 cm ja kõrgus on 18 cm.

297. Üks kõrvunurkadest on teisest 4 korda suurem. Kui suur on kumbki nurk?

298. Kahe vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurga summa on 135°20′. Kui suur on kummagi nurga kõrvunurk?

299. Kolmes korvis on kokku 155 õuna. Teises korvis on 3 korda rohkem õunu kui esimeses ja kolmandas korvis on 10 õuna rohkem kui esimeses. Mitu õuna on igas korvis? Lahenda võrrandi abil.

300. Kolmnurga ümbermõõt on 37 cm. Teine külg on esimesest kaks korda pikem ja kolmas on teisest 3 cm lühem. Kui pikad on küljed? Lahenda võrrandi abil.

301. a) Nimeta mingi definitsioon, teoreem, aksioom.

b) Missugust lauset nimetatakse definitsiooniks, missugust teoreemiks, missugust aksioomiks?

302. Mis on põhjasuuna vastandsuund? kagusuuna vastandsuund? suuna $S8°E$ vastandsuund?

303. Missugune on põhja-lõuna sihi ristsiht? kagu-loode sihi ristsiht? püstsihi ristsiht?

304. Lihtsusta avaldised:

a) $(3x-7y)^2-(3x+7y)^2$;

b) $(5a-4b)(6a-3b)-(2a+9b)(15a-4b)$.

305. Lihtsusta järgmine avaldis ja arvuta selle väärtus, kui $x=-0{,}2$.

$$\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x-1}{2x-1}-\frac{10x}{4x-2}.$$

306. Lihtsusta järgmine avaldis ja arvuta selle väärtus, kui $x=-0{,}5$.

$$\frac{2x+7}{4x^2+28x+49}+\frac{2x-7}{4x^2-28x+49}.$$

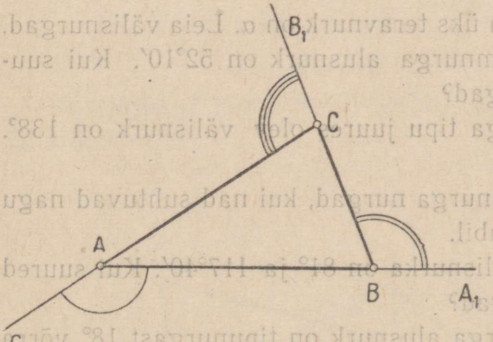
5. KOLMNURKADE JA NELINURKADE TÄHTSAMAD OMADUSED.

KOLMNURGA NURKADE SUMMA.

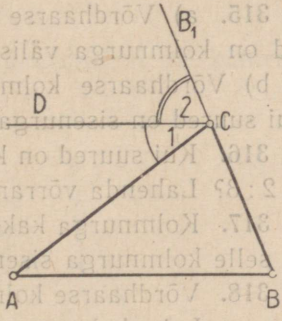
307. Joonesta kolmnurk ja selle kolmnurga mingi nurga kõrvunurk. Mis selleks teha? Joonesta ka kolmnurga teiste nurkade kõrvunurgad, pikendades iga külge ainult üks kord.

Kolmnurga nurga (ehk sisenurga) kõrvunurka nimetatakse kolmnurga välisnurgaks.

Mitu välisnurka on igal kolmnurgal? Nimeta neid jooniselt 37.



Joon. 37.



Joon. 38.

308. Joonesta kolmnurk ABC ja tema välisnurk, mille tipuks on punkt C (joon. 38). Selleks et näha, kuidas välisnurga suurus on seotud sisenurkadega, joonesta läbi C sirge CD, mis on paralleelne nurga C vastasküljega AB. Mis toimub välisnurgaga? Missuguse nurgaga võrdub $\angle 1$, missugusega $\angle 2$ (joon. 38) ja miks? Millega võrdub siis välisnurk ACB_1? Mis saaks samal viisil tões-

tada tipu A juures oleva välisnurga kohta, mis tipu B juures oleva välisnurga kohta?

Kolmnurga välisnurk võrdub temaga mitte kõrvuti asetsevate sisenurkade summaga.

309. Tõesta eelmises ülesandes sõnastatud teoreem tipu B juures oleva välisnurga kohta.

310. Põhjenda väidet:

kolmnurga välisnurk on suurem temaga mitte kõrvuti asetsevast sisenurgast.

311. Mis tuleb liita kolmnurga tipu C juures oleva välisnurgaga, et saada kolmnurga kõikide sisenurkade summa? Kui suur on see summa?

Kolmnurga sisenurkade summa võrdub sirgnurgaga.

312. Miks kolmnurgas ei saa olla kaht täisnurka ega kaht nürinurka? Kas leidub kolmnurka, mille üks nurk on täisnurk ja teine nürinurk? Miks?

313. On antud, et ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga. Mis järeldub kolmandate nurkade kohta?

314. a) Kui suur on täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa?

b) Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on α. Leia välisnurgad.

315. a) Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on $52°10'$. Kui suured on kolmnurga välisnurgad?

b) Võrdhaarse kolmnurga tipu juures olev välisnurk on $138°$. Kui suured on sisenurgad?

316. Kui suured on kolmnurga nurgad, kui nad suhtuvad nagu $1 : 2 : 3$? Lahenda võrrandi abil.

317. Kolmnurga kaks välisnurka on $81°$ ja $117°40'$. Kui suured on selle kolmnurga sisenurgad?

318. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on tipunurgast $18°$ võrra suurem. Leia kolmnurga sise- ja välisnurgad. Lahenda võrrandi abil.

KUMER HULKNURK.

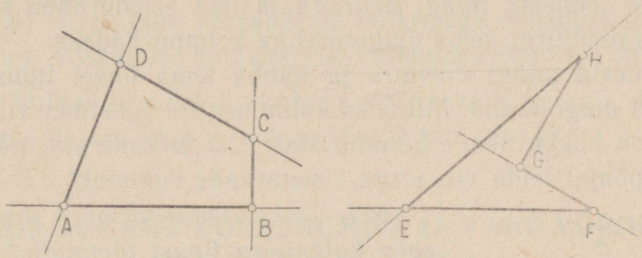
319. Tähista tasapinnal neli punkti nii, et nende hulgas ei leiduks kolme punkti, mis asetseksid ühel sirgel. Ühenda need punktid järjestikku lõikude abil ja nimeta saadud nelinurka, tema tippe ja külgi.

320. Võta eelmise ülesande eeskujul viis punkti ja ühenda need viisnurgaks.

321. Kuidas nimetatakse kolmnurki, nelinurki, viisnurki jne. ühise nimega?

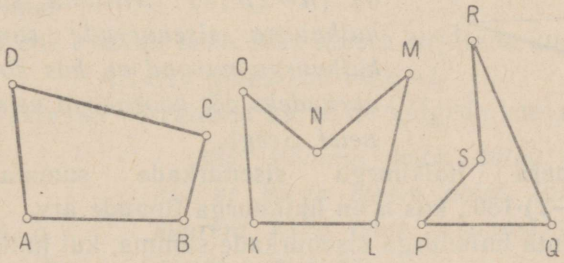
322. **Hulknurka nimetatakse kumeraks, kui tema iga külje pikendamisel saadakse sirge, millest hulknurga teised küljed on kõik ühel ja samal pool.**

Näiteks joonisel 39 kujutatud nelinurk *ABCD* on kumer (miks?), kuid nelinurk *EFGH* ei ole kumer, sest pikendades viimase külge *FG* saame sirge, millest selle nelinurga külg *EF* on ühel pool, külg *GH* aga teisel pool.



Joon. 39.

Missugused joonisel 40 esitatud hulknurkadest ei ole kumerad ja miks?



Joon. 40.

Kas kolmnurk saab olla mittekumer?

323. **Lõiku, mis ühendab hulknurga kaht tippu ja ei ole tema küljeks, nimetatakse hulknurga diagonaaliks.**

Mitu diagonaali on nelinurgal, mitu viisnurgal?

324. Mitu diagonaali saab tõmmata viisnurga, seitsenurga, kümmenurga ühest tipust?

Näpunäide. *Leia enne, mitmesse tippu diagonaali ei saa tõmmata.*

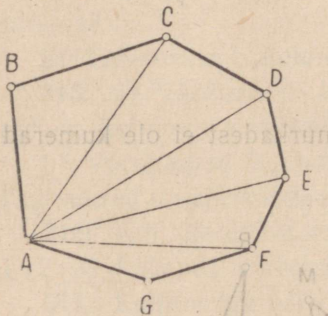
325. Edaspidi vaatleme ainult kumeraid hulknurki. Kumera hulknurga iga nurk (ehk sisenurk) on väiksem kui sirgnurk, kuna aga mittekumeral hulknurgal võib see olla sirgnurgast suurem, nagu nurk *FGH* joonisel 39.

Sisenurga kõrvunurka nimetatakse hulknurga **välisnurgaks.**

KUMERA HULKNURGA NURKADE SUMMA.

326. a) Joonesta mingi nelinurk ja leia sisenurkade summa, tükeldades nelinurga tema diagonaaliga kolmnurkadeks.

b) Joonesta mingi viisnurk ja tõmba tema ühest tipust kõik võimalikud diagonaalid. Mitmeks kolmnurgaks tükeldus viisnurk? Kui suur on kokku nende kolmnurkade sisenurkade summa? Kuidas selle põhjal leida viisnurga sisenurkade summat?



Joon. 41.

327. *Kui hulknurgal on n tippu, siis selle hulknurga tipust tõmmatud diagonaalid jaotavad hulknurga n—2 kolmnurgaks, sest selle tipu vastas on hulknurgal n—2 külge, milledest igaüks saab ühe kolmnurga aluseks (joon. 41). Nende kolmnurkade sisenurkade summa on* $(n-2)\cdot 180°$. *Niisama suur on ka hulknurga sisenurkade summa, sest hulknurga nurgad on kas kolmnurkade nurkadeks või koosnevad neist ja ainult neist. Seega,*

kumera hulknurga sisenurkade summa võrdub $(n-2)\cdot 180°$**, kus** n **on hulknurga tippude arv.**

328. Arvuta hulknurga sisenurkade summa, kui hulknurga tippude arv on 4; 6; 9; 12.

329. Missuguse hulknurga sisenurkade summa on 900°; 12 täisnurka; 5 sirgnurka; 2340°? Lahenda võrrandi abil.

330. Kui suur on hulknurga iga tipu juures oleva sisenurga ja välisnurga summa? Kui suur on siis n tipu juures olevate sise- ja välisnurkade summa kokku?

Hulknurga välisnurkade summa saamiseks lahuta sise- ja välisnurkade kogusummast sisenurkade summa ja näita, et

iga hulknurga välisnurkade summa võrdub 360°.

331. Korrapärase hulknurga sisenurgad on teatavasti võrdsed. Mis sellest järeldub välisnurkade kohta? Kui suur on korrapärase hulknurga välisnurk, kui hulknurga tippude arv on 3; 5; 6; 8?

Kuidas leida nende hulknurkade sisenurga suurust, kui välisnurga suurus on teada?

Näita, et korrapärase n-nurga välisnurk võrdub $360° : n$ ja sisenurk võrdub $180° - 360° : n$.

Anna avaldisele $180° - 360° : n$ murru kuju.

332. a) Arvuta korrapärase 15-nurga sisenurk ja välisnurk.

b) Missuguse korrapärase hulknurga välisnurk on 15°?

c) Missuguse korrapärase hulknurga sisenurk on 135°?

333. Kuidas muutub hulknurga sisenurkade summa, kui hulknurga tippude arv kasvab kolme võrra? viie võrra?

KOLMNURGA KAHE KÜLJE SUMMA JA VAHE VÕRDLEMINE KOLMANDA KÜLJEGA.

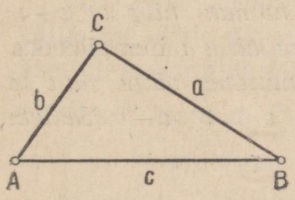
334. Joonesta mingi kolmnurk ABC ja tähista tema külgede pikkused tähtedega a, b ja c, nagu näidatud joonisel 42. Näita mõõtmise teel, et

kolmnurga iga külg on väiksem kui kahe teise külje summa.

Külje AB ehk c kohta saab seda lauset kirjutada kujul

$$AB < BC + AC \text{ ehk } c < a + b.$$

Kirjuta vastavad võrratused ka teiste külgede kohta.



Joon. 42.

335. *Võtame kolm lõiku a, b, ja c nii, et kõige pikem neist, ütleme a, on suurem kahe teise summast või võrdub nende summaga:*

$$a > b + c \text{ või } a = b + c.$$

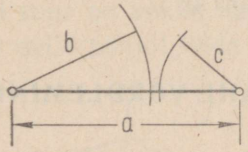
Proovime ehitada kolmnurka, mille küljed võrduvad lõikudega a, b ja c. Selleks joonestame esmalt lõigu pikkusega a ja siis tema otspunktide ümber ringjooned, mille raadiused on vastavalt b ja c. Selgub, et

kolmnurga joonestamine ei õnnestu; sest selleks tarvilikud abiringjooned raadiustega b ja c ei lõiku (joon. 43 ja 44). Kolmnurk tekib alles siis, kui külgi b ja c (või ühte neist) pikendada nii, et $a<b+c$ *(joon. 45). Sellest selgub, et*

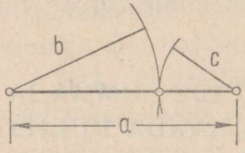
antud kolmest lõigust saab ehitada kolmnurka ainult siis, kui suurim lõik on lühem kahe teise lõigu summast.

Näiteks lõikudest $a=15$ *cm,* $b=27$ *cm ja* $c=12$ *cm ei saa ehitada kolmnurka, sest suurim lõik b ei ole väiksem lõikude a ja c summast.*

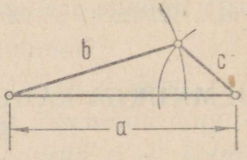
336. Otsusta, kas leidub kolmnurk, mille küljed on pikkusega
a) 5 m, 7 m ja 10 m;
b) 1,5 m, 4 dm ja 2,5 dm;
c) 7,4 dm, 3,7 dm ja 2,9 dm;
d) 35 cm, 18,9 m ja 19,2 m.



Joon. 43.



Joon. 44.



Joon. 45.

337. Otsusta, kas leidub võrdhaarne kolmnurk, millel
a) alus on 15 cm ja haar on 7 cm;
b) alus on 7 cm ja haar on 15 cm;
c) alus on 7,8 m ja haar on 3,9 m;
d) ümbermõõt on 6 m ja haar on 12 dm.

338. *Olgu antud kolmnurga kahe külje pikkused, näiteks a ja b, kusjuures* $a>b$. *Varem leidsime, et siis kolmas külg* $c<a+b$. *Summat* $a+b$, *millest c on väiksem, nimetame külje c* **ülemtõkkeks.** *Näitame nüüd, et kolmas külg c ei saa olla kuitahes väike, vaid ta peab olema suurem kahe teise külje vahest, s. t.* $c>a-b$. *Selleks võtame võrratuse*

$$a<b+c.$$

Kui vähendada selle võrratuse mõlemaid pooli ühe ja sama suuruse b võrra, siis vasak pool jääb ikkagi paremast väiksemaks, s. t.

$$a-b<b+c-b$$

ehk

$$a-b<c.$$

Lugedes seda võrratust paremalt vasakule, saame

$$c>a-b.$$

Nüüd oleme saanud külje c **alamtõkke,** *s. o. arvu, millest külje c pikkus on suurem. Tulemust saab üles märkida järgmiselt:*

$$a-b<c<a+b.$$

Seda loetakse nii: c on suurem a ja b vahest ning väiksem a ja b summast.

N ä i d e. *Kui* $a=4$ *cm ja* $b=1{,}5$ *cm, siis*

$$4\ cm-1{,}5\ cm<c<4\ cm+1{,}5\ cm$$

$$2{,}5\ cm<c<5{,}5\ cm$$

Kolmnurga iga külg on suurem kahe teise külje vahest ja väiksem nende summast.

339. Leida kolmnurga külje x tõkked, kui kaks antud külge on järgmised:

a) 5,7 cm ja 6,3 cm; b) 18 dm ja 7 dm;

c) 3,5 m ja 8,4 m; d) $8\frac{3}{4}$ m ja $6\frac{2}{3}$ m.

340. Kolmnurga kahe l ü h e m a külje pikkused on 35 cm ja 47 cm. Missugused on kolmanda külje tõkked?

341. Missugused on kolmnurga l ü h i m a külje tõkked, kui kaks pikemat külge on 7,8 dm ja 13,1 dm?

KOLMNURGA KÜLGEDE JA NURKADE VAHELISED SEOSED.

342. Joonesta mingi kolmnurk, mõõda tema kaks mittevõrdset külge ja nende vastas asetsevad nurgad. Missuguse külje vastas asetseb suurem nurk?

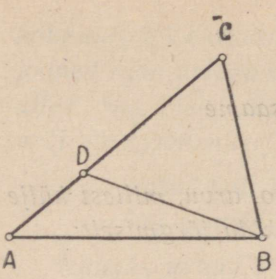
343. *Tõestame, et*

kolmnurgas asetseb suurema külje vastas suurem nurk.

E e l d u s. *Kolmnurgas ABC külg* $AC>BC$ *(joon. 46).*

V ä i d e. $\angle ABC>\angle CAB.$

T õ e s t u s. *Märgime küljel AC punkti D nii, et* $DC=BC$ *ja ühendame punktid D ning B. Siis kolmnurgas BCD nurgad CDB*



Joon. 46.

ja DBC on võrdsed (miks?). Et $\angle CDB$ *on kolmnurga ADB välisnurk, siis on ta suurem kui temaga mitte kõrvuti asetsev sisenurk A.*

Seega $\angle CDB > \angle CAB$. *Et* $\angle CDB = \angle DBC$, *siis ka* $\angle DBC > \angle CAB$. *Kuid* $\angle DBC$ *on osa nurgast ABC, mistõttu ka* $\angle ABC > \angle CAB$. *Sellega on väide tõestatud.*

344. *Tõestame, et on õige ka teoreem, mille saame, kui eelmise teoreemi eelduse ja väite ümber vahetame:*

kolmnurgas asetseb suurema nurga vastas suurem külg.

Eeldus. *Kolmnurgas ABC (joon. 46)* $\angle ABC > \angle CAB$.

Väide. $AC > BC$.

Tõestus. *Külgede AC ja BC kohta on õige üks kolmest väitest:*

$$AC < BC \text{ või } AC = BC \text{ või } AC > BC.$$

Neist esimene väide ei saa olla õige, sest eelmise teoreemi järgi peaks siis olema $\angle ABC < \angle CAB$, *mis on vastuolus eeldusega. Samal põhjusel ei saa ka teine väide olla õige, sest sellest järelduks, et nurgad ABC ja CAB on võrdsed. Nii jääb püsima ainult kolmas väide, s. t.* $AC > BC$.

Samal viisil saab näidata, et

kolmnurgas asetsevad võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed.

345. Kolmnurga ABC kohta on teada, et $\angle A = 78°$ ja $\angle B = 37°$. Järjesta kolmnurga küljed nende pikkuse järgi.

346. Täisnurkse kolmnurga ABC teravnurgad on $\angle A$ ja $\angle B$. Leia pikem kaatet, kui $\angle A = 34°$.

347. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 45°. Mis saab öelda kaatetite kohta?

348. Missugune külg on täisnurkses kolmnurgas kõige pikem? Missugune külg on nürinurkses kolmnurgas kõige pikem?

349. Kolmnurga küljed on $AB = 7{,}8$ cm, $BC = 9{,}4$ cm ja $AC = 5{,}6$ cm. Järjesta kolmnurga nurgad nende suuruse järgi.

350. Võrdhaarse kolmnurga alus on 8,4 dm ja ümbermõõt 23 dm. Kumb on suurem, kas alusnurk või tipunurk?

351. Kolmnurga KLM kohta on teada, et $\angle L > \angle M$ ja $LM > KM$. Missugune on kolmnurga suurim nurk?

352. Kolmnurga ABC külgede kohta on teada, et $BC > AC > AB$. Missugused nurgad on selles kolmnurgas teravnurgad? Mis saab öelda kolmanda nurga suuruse kohta?

353. Olgu täisnurkse kolmnurga üks teravnurk 30°. Kui suur on teine teravnurk? Kuidas seda teades saab võrdkülgsest kolmnurgast täisnurkse kolmnurga, mille üks nurk on 30° ja hüpotenuus on antud?

Joonesta täisnurkne kolmnurk, mille üks nurk on 30° ja hüpotenuus on 5 cm. Kui pikk on selles kolmnurgas 30°-se nurga vastaskaatet?

354. Joonesta mingi täisnurkne kolmnurk, mille üks nurk on 30°, täienda see kolmnurk võrdkülgseks kolmnurgaks ja tõesta, et

täisnurkses kolmnurgas 30°-se nurga vastaskaatet võrdub poole hüpotenuusiga.

355. Kui pikk on telefoniposti tugi, mis moodustab postiga nurga 30°, kui posti ja toe vaheline kaugus mööda maapinda on 1,8 m?

356. Täisnurkse kolmnurga üks nurk on 60° ja hüpotenuusi ning väiksema kaateti summa on 24 dm. Kui pikk on hüpotenuus?

RÖÖPKÜLIKU OMADUSED.

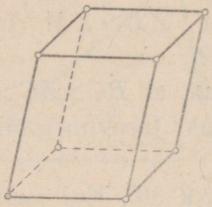
357. Joonesta kaks paralleelset sirget ja lõika neid kahe paralleelse sirgega. Kuidas nimetatakse tekkinud nelinurka?

Rööpkülik on nelinurk, millel on kaks paari paralleelseid vastaskülgi. Rööpkülikut nimetatakse ka parallelogrammiks.

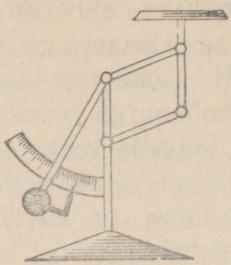
Kuidas nimetatakse keha (joon. 47), mille kõik tahud on rööpkülikud?

358. *Rööpkülik leiab tehnikas sageli rakendamist. Joonised* 48 *kuni* 51 *kujutavad mõningaid esemeid, millede juures on kasutatud rööpkülikut (kirjakaal, lauakaal, jalgratta lamp, hambaarsti riistade laud).*

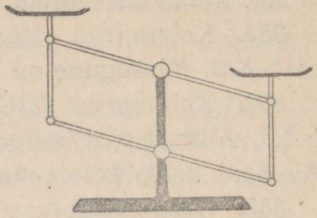
Selgita, miks on sobiv viimase kahe eseme kinnitamisel kasutada rööpkülikut, mitte aga kolmnurka.



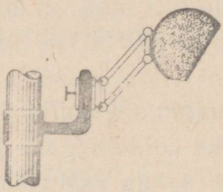
Joon. 47.



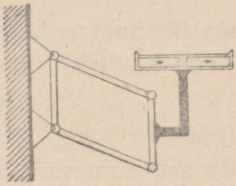
Joon. 48.



Joon. 49.



Joon. 50.



Joon. 51.

359. *Rööpküliku kahe vastaskülje vahelist ristlõiku nimetatakse tema kõrguseks. Et vastaskülgi on rööpkülikul kaks paari, siis on tal ka kaks kõrgust* (*joon.* 52).

Joonesta mingi rööpkülik ühes tema kahe kõrgusega, mõõda alused ja kõrgused, arvuta pindala kahel viisil ja võrdle tulemusi Millest on tingitud tulemuste erinevus, kui see esineb?

360. Joonesta rööpkülik, mille kaks külge on 5 cm ja 3,5 cm ning nendevaheline nurk on 60°. Mõõda rööpküliku diagonaalid.

361. Joonesta rööpkülik, mille kaks külge on 6,8 cm ja 4 cm ning nendevaheline nurk on 140°. Mõõda rööpküliku diagonaalid.

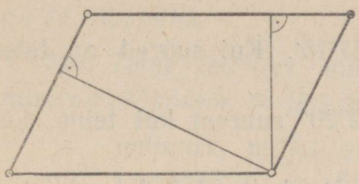
362. *Tõestame, et*

rööpküliku diagonaal tükeldab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks.

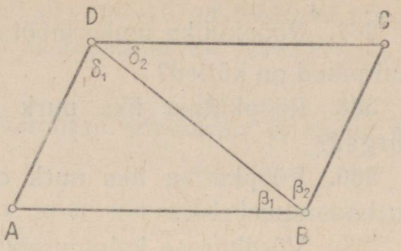
Eeldus. $AB \parallel DC$ *ja* $AD \parallel BC$ (*joon.* 53).

Väide. $\triangle ABD = \triangle CDB$.

Tõestus. *Kolmnurkadel ABD ja CDB on ühine külg BD. Selle külje lähisnurkadest* $\beta_1 = \delta_2$ *kui põiknurgad paralleelide AB ja DC juures ning* $\delta_1 = \beta_2$ *kui põiknurgad paralleelide AD ja BC*



Joon. 52.



Joon. 53.

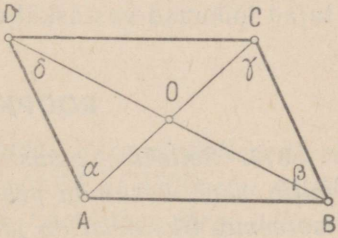
juures. Kolmnurkade võrdsuse tunnuse NKN põhjal järeldame eeltoodust, et $\triangle ABD = \triangle CDB$, *mida oligi vaja tõestada.*

363. Nimeta rööpküliku tükeldamisel saadud kolmnurkade vastavaid elemente; järelda eelmisest teoreemist, et

1) **rööpküliku vastaskülged on võrdsed ja**
2) **rööpküliku vastasnurgad on võrdsed.**

364. *Joonestame mingi rööpküliku ABCD ühes tema mõlema diagonaaliga ja tõestame, et*

rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist.



Joon. 54.

Eeldus: $AB \parallel DC$ *ja* $AD \parallel BC$ (*joon.* 54).

Väide. $AO = CO$ ja $BO = DO$.

Tõestus. *Kolmnurkade AOD ja COB külgedest* $AD = BC$, *sest nad on rööpküliku vastasküljed. Nende külgede lähisnurkadest* $\alpha = \gamma$ *kui põiknurgad paralleelide AD ja BC lõikaja AC juures ja* $\delta = \beta$ *kui põiknurgad samade paralleelide lõikaja BD juures. Kuid siis kolmnurkade võrdsuse tunnuse NKN järgi*

$$\triangle AOD = \triangle COB.$$

Sellest järeldub, et

$$AO = CO \text{ ja } BO = DO,$$

sest nad on võrdsete kolmnurkade vastavad küljed.

365. Põhjenda väidet, et

rööpküliku ühe külje lähisnurkade summa võrdub sirgnurgaga.

366. Rööpküliku ümbermõõt on 18,6 dm. Üks külg on teisest 1,8 dm pikem. Kui pikad on küljed?

367. Rööpküliku ümbermõõt on 5,5 m ja üks külg on $\frac{5}{6}$ teisest. Kui pikad on küljed?

368. Rööpküliku üks nurk on 57°15′. Kui suured on teised nurgad?

369. Rööpküliku üks nurk on 52°20′ suurem kui teine. Leia nurkade suurused.

370. Võrdhaarse kolmnurga alusel vabalt võetud punktist on joonestatud sirged paralleelselt haaradega. Leia saadud rööpküliku ümbermõõt, kui võrdhaarse kolmnurga haar on 12 cm.

371. Tõesta, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paralleelsed.

372. Tõesta, et rööpküliku mistahes külje lähisnurkade poolitajad on risti.

373. Rööpküliku teravnurga poolitaja, lõikudes rööpküliku küljega, jaotab selle lõikudeks 8 cm ja 3 cm. Leia rööpküliku ümbermõõt.

374. Tõesta, et kui rööpküliku pikema külje lähisnurkade poolitajad lõikuvad vastasküljel, siis lühem külg on pool pikemast.

RÖÖPKÜLIKU TUNNUSED.

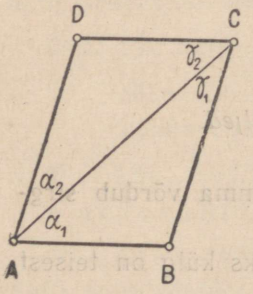
375. *Selleks et otsustada, kas antud nelinurk on rööpkülik või mitte, saab kasutada peale rööpküliku definitsiooni veel mitmeid teoreeme. Üks neist on järgmine:*

võrdsete vastaskülgedega nelinurk on rööpkülik.

E e l d u s. $AB=DC$ *ja* $AD=BC$ (*joon.* 55).

V ä i d e. *ABCD on rööpkülik.*

T õ e s t u s. *Joonestame nelinurga ühe diagonaali, näiteks diagonaali AC. Siis*



Joon. 55.

$$\triangle ABC=\triangle ACD,$$

sest ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega. Kuid siis

$$\alpha_1=\gamma_2 \text{ ja } \gamma_1=\alpha_2$$

kui vastavad nurgad neis kolmnurkades. Nende nurkade võrdsusest järeldub, et

$$AB \parallel DC \text{ ja } AD \parallel BC,$$

kuna nimetatud sirgete lõikamisel sirgega AC on tekkinud võrdsed põiknurgad. Et nelinurga ABCD vastasküljed on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.

376. *Teine teoreem, mis võimaldab otsustada et antud nelinurk on rööpkülik, on järgmine:*

nelinurk, millel on üks paar võrdseid ja paralleelseid vastaskülgi, on rööpkülik.

Eeldus. $AD=BC$ *ja* $AD \parallel BC$ (*joon.* 55).

Väide. *ABCD on rööpkülik.*

Tõestus. *Kolmnurkadel ADC ja ABC on peale ühise külje AC veel eelduse järgi*

$$AD=BC$$

ja põiknurkadena paralleelsete sirgete AD ja BC juures

$$\alpha_2=\gamma_1.$$

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse KNK järgi on siis

$$\triangle ADC=\triangle CBA.$$

Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et

$$\alpha_1=\gamma_2,$$

sest nad on võrdsete kolmnurkade vastavad nurgad. Sellest järeldub sirgete paralleelsuse teise tunnuse põhjal, et nelinurga ABCD vastasküljed AB ja DC on paralleelsed. Et eelduse järgi nelinurgal ABCD ka teine paar vastaskülgi on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.

377. *Rööpküliku tunnused koos kolmnurkade konstrueerimise oskusega võimaldavad ehitada rööpkülikut tema antud elementide järgi. Selleks ehitame nende elementide järgi esmalt ühe kolmnurga, milleks diagonaal jaotab rööpküliku, ja siis teise. Teostanud konstruktsiooni, põhjendame, et saadud nelinurk on rööpkülik.*

Rööpküliku kaht lähiskülge tähistame tähtedega a ja b, külje a lähisnurki tähtedega α *ja* β, *diagonaale tähtedega e ja f.*

a) Joonesta rööpkülik, millel $a=3{,}9$ cm, $b=2{,}9$ cm ja $e=5{,}8$ cm.

b) Joonesta rööpkülik, millel $a=4{,}5$ cm, $\alpha=48°$ ja $f=4{,}2$ cm.

c) Joonesta rööpkülik, millel $a=5{,}5$ cm, $\beta=130°$ ja $b=4{,}1$ cm.

378. a) Tõesta, et

neljanurk, mille diagonaalid poolitavad teineteist, on rööpkülik.

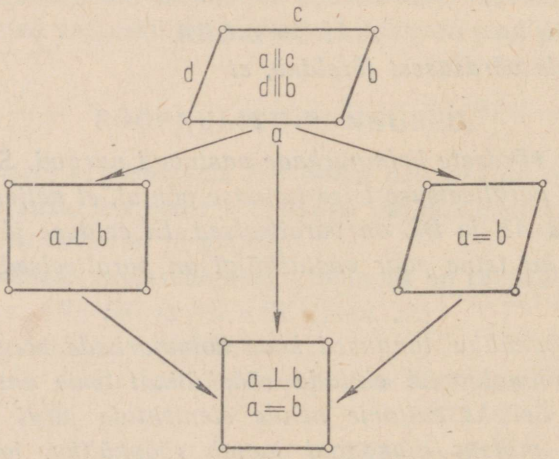
b) Eelmises ülesandes tõestatud lauset kasutades ehita rööpkülik, millel $a=5{,}7$ cm, $e=7{,}2$ cm ja $f=5{,}2$ cm.

RÖÖPKÜLIKU ERILIIGID.

379. *Praktikas esinevad sageli niisugused rööpkülikud, millel kas nurgad või küljed on võrdsed või nii nurgad kui ka küljed on võrdsed. Selliseid rööpkülikuid nimetatakse vastavalt ristkülikuteks, rombideks või ruutudeks (joon. 56).*

a) Ristkülik on rööpkülik, mille nurgad on võrdsed.

Et rööpküliku nurkade summa on 360°, siis ristküliku iga nurk peab olema 360° : 4 ehk 90°. Seega ristkülik on täisnurkne rööpkülik. Niisuguse rööpküliku saame, kui tema ühe nurga teeme täisnurgaks (joon. 56).



Joon. 56.

Põhjenda väidet, et kui rööpküliku üks nurk on täisnurk, siis on ka teised nurgad täisnurgad.

b) Romb on rööpkülik, mille küljed on võrdsed.

Rombi saame, kui rööpküliku ühe tipu lähisküljed teeme võrdseiks, sest siis on rööpküliku vastaskülgede võrdsuse tõttu kõik küljed võrdsed (joon. 56). Seega romb on võrdkülgne rööpkülik.

c) **Ruut on rööpkülik, mille nurgad on võrdsed ja küljed on võrdsed** (joon. 56).

380. a) Kuidas defineerida ruutu ristküliku kaudu (joon. 56)?
b) Kuidas defineerida ruutu rombi kaudu (joon. 56)?

RISTKÜLIKU OMADUSED.

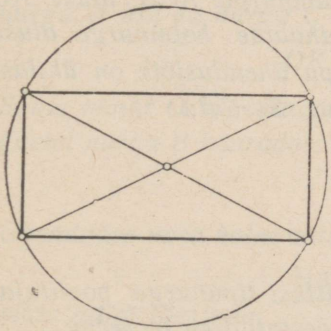
381. *Rööpküliku igal eriliigil on muidugi kõik rööpküliku omadused. Kuid peale nende on igal eriliigil veel omad eriomadused. Kui kõneldakse ristküliku või rombi omadustest, siis mõeldakse tavaliselt neid eriomadusi. Vaatleme neid.*

Joonesta ristkülik *ABCD* ühes tema diagonaalidega *AC* ja *BD*, vaatle kolmnurki *ABC* ja *BAD* ning tõesta teoreem:

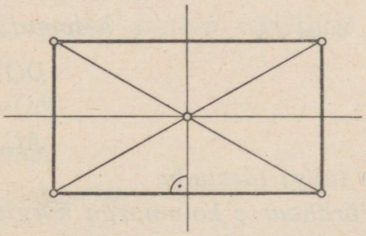
ristküliku diagonaalid on võrdsed.

382. Et ristküliku kui rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist ja ühtlasi on teineteisega võrdsed, siis järeldub, et

ristküliku diagonaalide lõikepunkt on tema tippudest võrdsetel kaugustel.



Joon. 57.



Joon. 58.

Kontrolli seda, joonestades ringjoone, mille keskpunktiks on ristküliku diagonaalide lõikepunkt ja mis läbib ristküliku üht tippu (joon. 57). Kas ta läbib ristküliku kõiki tippe?

Ringjoont, mis läbib ristküliku kõiki tippe, nimetatakse tema ümberringjooneks.

383. Näita, et ristküliku külje keskristsirge on tema sümmeetriateljeks. Mitu sümmeetriatelge on ristkülikul ja kus need teljed lõikuvad (joon. 58)?

384. a) Joonesta ristkülik, mille ühe tipu lähisküljed on 4,8 cm ja 7,5 cm.

b) Joonesta ristkülik, mille üks külg ja diagonaal on antud.

c) Joonesta ristkülik, mille ümberringjoone raadius on 3,5 cm ja nurk diagonaalide vahel on 45°.

385. Tõesta, et võrdsete diagonaalidega rööpkülik on ristkülik.

ROMBI OMADUSED.

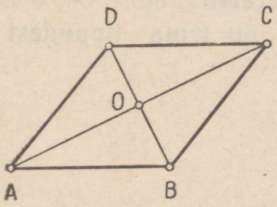
386. *Rombi eriomadustest tähtsaimat väljendab teoreem:*
rombi diagonaalid on teineteisega risti.

Eeldus. *Nelinurgas ABCD (joon. 59) AB=BC=CD=AD.*

Väide. *AC⊥BD.*

Tõestus. *Vaatleme kolmnurka ACD. Eelduse järgi*

$$AD=CD$$



Joon. 59.

ja seega kolmnurk ACD on võrdhaarne. Et rombi kui rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis diagonaalide lõikepunkt O on kolmnurga ACD aluse AC keskpunkt. Võrdhaarse kolmnurga aluse keskpunkti ja tipu ühenduslõik on ühtlasi kolmnurga kõrgus. Seetõttu

$$DO\perp AC$$

ehk

$$AC\perp BD,$$

mida tuligi tõestada.

Võrdhaarse kolmnurga kõrgus on ühtlasi tipunurga poolitaja. Nii poolitab DO nurga ADC; seega on tõestatud ka teoreem:

rombi diagonaal poolitab rombi nurga.

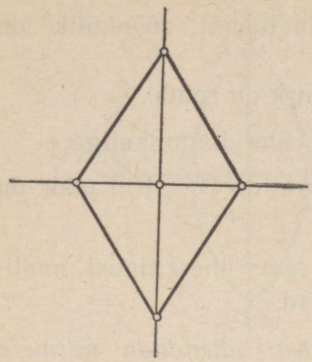
387. Tuleta meelde, mis on võrdhaarse kolmnurga sümmeetriateljeks ja järelda sellest, et

rombi diagonaal on rombi sümmeetriateljeks (joon. 60).

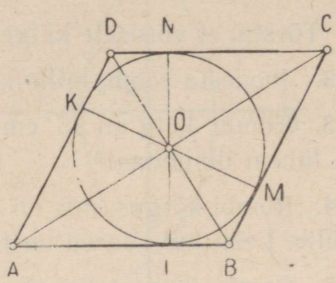
Mitu sümmeetriatelge on rombil?

388. *Tõestame, et*

rombi diagonaalide lõikepunkt asetseb rombi külgedest võrdsetel kaugustel.



Joon. 60.



Joon. 61.

E e l d u s. *Nelinurk ABCD on romb ja O on tema diagonaalide lõikepunkt; OK⊥AD; OL⊥AB; OM⊥BC; ON⊥CD* (*joon.* 61).

V ä i d e. $OK=OL=OM=ON$.

T õ e s t u s. *On teada, et nurgapoolitaja iga punkt asetseb nurga haaradest võrdsetel kaugustel. Et diagonaal AC on rombi nurkade A ja C poolitaja, siis on punkt O võrdsetel kaugustel nii nurga A kui ka nurga C haaradest, seega*

$$OK=OL \text{ ja } OM=ON.$$

Sama punkt O kui diagonaali BD punkt asetseb võrdsetel kaugustel nurga B haaradest ja seega

$$OL=OM.$$

Ühendades need kolm võrdust saame

$$OK=OL=OM=ON,$$

mida tuligi tõestada.

Ringjoon, mille keskpunktiks on punkt O ja raadiuseks on lõik OK, läbib punkte K, L, M ja N. Seda ringjoont nimetatakse rombi **siseringjooneks** (*joon.* 61).

389. a) Joonesta romb, mille külg on 5 cm ja diagonaal on 8 cm.

b) Joonesta romb, mille külg on 6,5 cm ja üks nurk on 45°.

c) Joonesta romb, mille diagonaalide pikkused on antud.

390. Tõesta, et rombi kõrgused on võrdsed. Nimeta neid kõrgusi jooniselt 61.

391. a) Tõesta, et ristuvate diagonaalidega rööpkülik on romb.

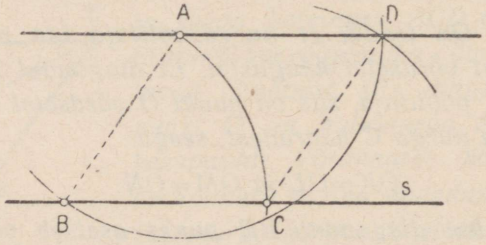
b) Tõesta, et võrdsete külgedega nelinurk on romb.

392. Joonesta romb, mille külg võrdub ühe diagonaaliga.

393. Rombi külg on 15 cm ja üks nurk on 60°. Kui pikk on rombi lühem diagonaal?

394. Rombi kõrgus, mis on tõmmatud tema ühest tipust, poolitab külje. Leia, kui suured on rombi nurgad.

395. *Rombi joonestamisega saab kergesti lahendada mitmeid konstruktsioonülesandeid sirkli ja joonlaua abil. Lahendame näiteks järgmise ülesande: joonestada antud sirgega paralleelne sirge, mis läbib antud punkti (viimane loomulikult ei saa asetseda antud sirgel).*

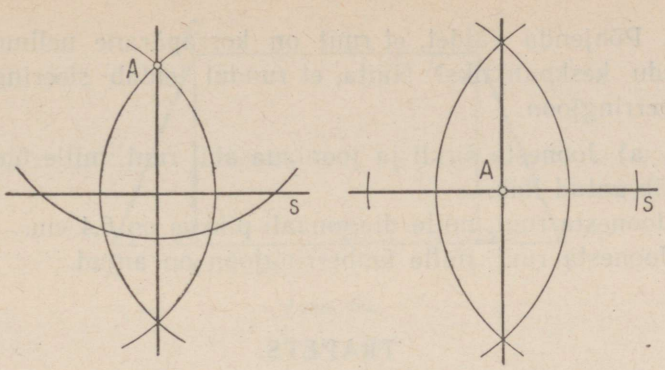


Joon. 62.

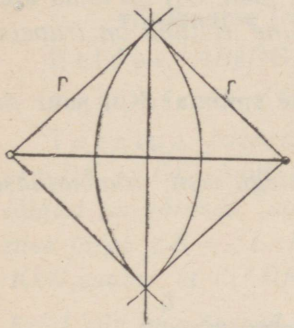
Olgu antud sirge s ja väljaspool seda punkt A (joon. 62). Joonestame meelevaldse raadiusega AB ringjoone, mille keskpunktiks on punkt A, ja mis lõikab antud sirget s kahes punktis (üks neist on B). Muutmata sirkli haaret märgime sirgel s lõigu BC = BA ja joonestame sama raadiusega kaare ümber punkti C. Punktide A ja C ümber joonestatud kaarte lõikepunkti D ühendame punktiga A. Sirge AD ongi otsitav.

Mis kujund on *ABCD*? Miks $AD \parallel s$?

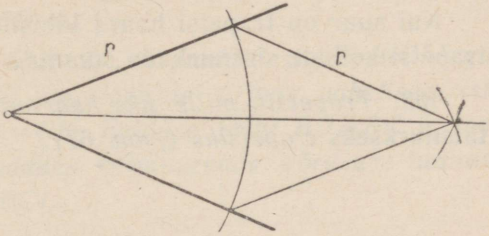
396. Näita, et antud sirgele *s* ristsirge joonestamine läbi antud punkti *A* sirkli ja joonlaua abil on teostatav rombi joonestamise teel, asetsegu antud punkt väljaspool antud sirget või sellel sirgel (joon. 63). Missugusel rombi omadusel põhineb see konstruktsioon?



Joon. 63.



Joon. 64.



Joon. 65.

397. Näita, et antud lõigu poolitamine sirkli ja joonlaua abil on teostatav rombi joonestamise teel (joon. 64). Missugusel rombi omadusel põhineb see konstruktsioon?

398. Näita, et nurga poolitamine sirkli ja joonlaua abil on teostatav rombi joonestamise teel (joon. 65). Missugusel rombi omadusel põhineb see konstruktsioon?

RUUDU OMADUSED.

399. Põhjenda väidet, et ruudul on kõik ristküliku ja ühtlasi ka kõik rombi omadused. Mis sellest järeldub ruudu sümmeetriatelgede kohta?

400. Põhjenda väidet, et ruut on korrapärane nelinurk. Mis on ruudu keskpunktiks? Näita, et ruudul leidub siseringjoon ja ka ümberringjoon.

401. a) Joonesta sirkli ja joonlaua abil ruut, mille üheks küljeks jääb antud lõik.

b) Joonesta ruut, mille diagonaali pikkus on 6,4 cm.

c) Joonesta ruut, mille ümberringjoon on antud.

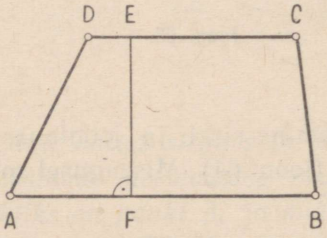
TRAPETS.

402. Trapets on nelinurk, millel ainult üks paar vastaskülgi on paralleelsed.

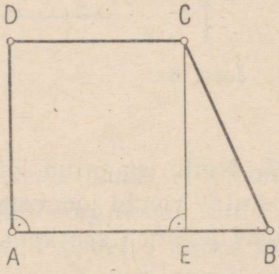
Trapetsi paralleelsed küljed (AB ja DC, joon. 66*) on tema* **alused,** *teised küljed aga* **haarad.** *Alustevaheline ristlõik on trapetsi* **kõrgus** (*EF, joon.* 66).

Kui suur on trapetsi haara lähisnurkade summa? Kui suur on trapetsi kõikide sisenurkade summa?

403. *Trapetsit, mille üks haar on alustega risti, nimetatakse* **täisnurkseks** *trapetsiks* (*joon.* 67).



Joon. 66.



Joon. 67.

Kui suured on täisnurkse trapetsi kaks nurka? Mis saab öelda täisnurkse trapetsi kõrguse kohta?

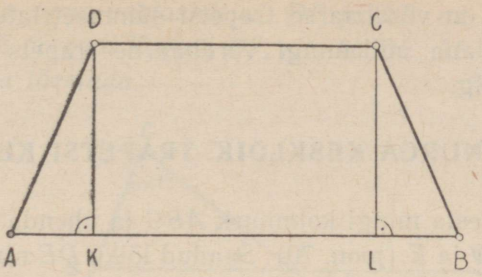
404. Joonesta täisnurkne trapets, mille

a) alused on 5,5 cm ja 3,9 cm ning lühem haar on 3,3 cm;

b) alused on 5,5 cm ja 3,9 cm ning pikem haar on 3,3 cm;

c) pikem alus on 6 cm ja haarad on 4 cm ja 5,5 cm;

d) üks alus on 6,4 cm ja diagonaalid on 5,4 cm ja 7,5 cm.



Joon. 68.

405. *Kui trapetsi haarad on võrdsed, siis nimetatakse teda* **võrdhaarseks** *trapetsiks (joon. 68).*

Tõestame, et

võrdhaarse trapetsi aluse lähisnurgad on võrdsed.

Eeldus. $AB \| DC$ *ja* $AD = BC$.

Väide. $\angle A = \angle B$ *ja* $\angle D = \angle C$.

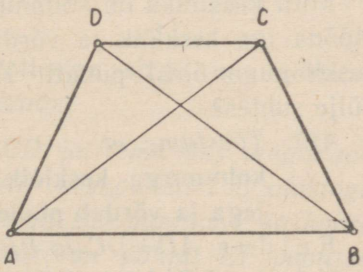
Tõestus. *Joonestame aluse DC otspunktidest trapetsi kõrgused DK ja CL (joon. 68). Et paralleelsete sirgete vahelised ristlõigud on võrdsed, siis* $DK = CL$. *Eelduse järgi* $AD = BC$ *ja joonise järgi* $\angle K = \angle L$. *Rakendades kolmnurkade võrdsuse tunnust KkN saame, et* $\triangle ADK = \triangle BCL$.

Kuid siis on võrdsed nende kolmnurkade kõik vastavad elemendid, seega ka $\angle A = \angle B$.

Sellest on kerge järeldada (kuidas?), et $\angle D = \angle C$.

406. *Võrreldes kolmnurki ABD ja ABC (joon. 69), tõesta, et*

võrdhaarse trapetsi diagonaalid on võrdsed.



Joon. 69.

407. Joonesta võrdhaarne trapets, mille

a) alus on 6 cm, haar 3 cm ja nendevaheline nurk on 60°;

b) alus, haar ja diagonaal on antud;

c) alused on 6 cm ja 4 cm ning kõrgus on 3 cm.

408. Kui suur on võrdhaarse trapetsi vastasnurkade summa?

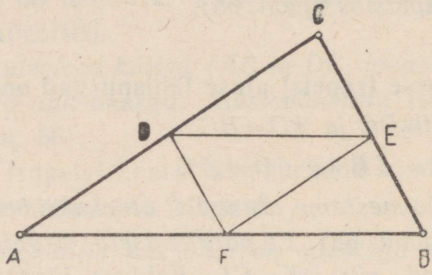
409. Võrdhaarse trapetsi haar on võrdne lühema alusega ja risti diagonaaliga. Kui suured on trapetsi nurgad?

410. Mis on võrdhaarse trapetsi sümmeetriateljeks? Joonesta sirkli ja joonlaua abil mingi võrdhaarne trapets ning siis tema sümmeetriatelg.

KOLMNURGA KESKLÕIK. TRAPETSI KESKLÕIK.

411. Joonesta mingi kolmnurk *ABC* ja ühenda selle kahe külje keskpunktid *D* ja *E* (joon. 70). Saadud lõiku *DE* nimetatakse kolmnurga **kesklõiguks.**

Kolmnurga kesklõiguks nimetatakse tema kahe külje keskpunkte ühendavat lõiku.



Joon. 70.

Mitu kesklõiku on kolmnurgal? Joonesta tema kõik kesklõigud. Mõõda iga kesklõik ja võrdle tema pikkust küljega, millel pole kesklõiguga ühist punkti. Kuidas kesklõik näib asetsevat selle külje suhtes?

412. *Tõestame, et*

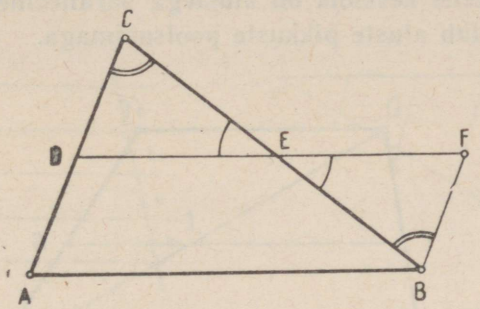
kolmnurga kesklõik on paralleelne kolmnurga ühe küljega ja võrdub poolega sellest küljest.

E e l d u s. *AD=DC ja BE=EC (joon. 71).*

V ä i d e. *DE∥AB ja DE=AB : 2.*

T õ e s t u s. *Joonestame sirge läbi punkti B paralleelselt sirgega AC ja pikendame kesklõiku DE lõikumiseni selle sirgega punktis F. Nii saame kolmnurga BEF, mis tunnuse NKN põhjal on võrdne kolmnurgaga CED (põhjenda seda üksikasjaliselt). Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et BF=DC ja EF=DE (miks?). Nii näeme, et nelinurgas ABFD on vastasküljed AD ja BF mitte ainult paralleelsed, nagu joonestasime, vaid ka võrdsed (AD=DC ja BF=DC, järelikult AD=BF). Seega nelinurk ABFD on rööp-*

külik. Kuid siis tema vastasküljed DF ja AB on paralleelsed ja võrdsed. Et DE on pool lõigust DF, siis ka DE∥AB ja DE=AB : 2, mida oligi vaja tõestada.



Joon. 71.

413. *Eelmises ülesandes saime kolmnurga kesklõigu tema kahe külje keskpunktide ühendamise teel. Näitame, et sama lõigu võib saada veel teisiti, nimelt kui ühe külje keskpunktist tõmmata teise küljega paralleelne lõik kuni kolmanda küljeni. Tõepoolest, kui näiteks läbi punkti D (joon. 71) tõmmata küljega paralleelne lõik küljeni BC, siis peab see ju ühtima lõiguga DE, sest vastasel korral läheks läbi punkti D kaks sirget, mis oleksid paralleelsed sirgega AB: üks oleks äsja joonestatud sirge ja teine oleks sirge, millel asetseb kesklõik. Niisiis*

kolmnurga ühe küljega paralleelne sirge, mis poolitab teise külje, poolitab ka kolmanda.

414. *Joonesta mingi trapets ABCD ja tema üks diagonaal, ütleme BD. Tõmba trapetsi haara AD keskpunktist E alustega paralleelne sirge, mis lõigaku diagonaali BD punktis F ja haara BC punktis G (joon. 72). Eelmise teoreemi põhjal EF poolitab kolmnurga ABD külje BD, s. t. BF=FD. Kuid sama teoreemi põhjal EG poolitab siis ka kolmnurga DCB külje CB, sest ta poolitab külje DB ja on paralleelne küljega DC. Seega punkt G on trapetsi haara BC keskpunkt. Saadud lõiku EG, mis ühendab trapetsi mitteparalleelsete külgede keskpunkte, nimetatakse* **trapetsi kesklõiguks.** *Kolmnurga kesklõigu omadustest järeldub, et trapetsi kesklõik*

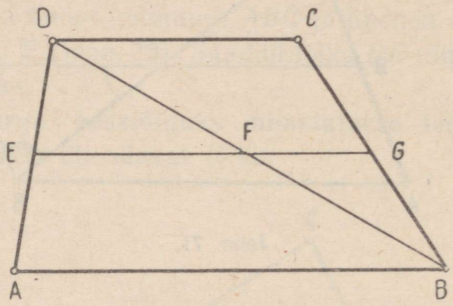
$$EG \parallel AB \parallel DC$$

ja

$$EG = EF + FG = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{AB + DC}{2}.$$

Nii oleme saanud, et

trapetsi kesklõik on alustega paralleelne ja tema pikkus võrdub aluste pikkuste poolsummaga.



Joon. 72.

415. a) Anna trapetsi kesklõigu definitsioon.

b) Missugusel kahel viisil saab joonestada antud trapetsi kesklõiku?

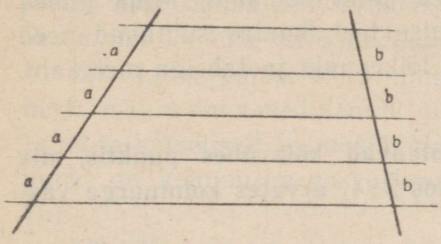
416. Missuguse kujundi saab trapetsist, kui tema ühe aluse pikkus väheneb nii, et saab võrdseks nulliga? Mis saab sel juhul trapetsi kesklõigust? Järelda sel teel, et kolmnurga kesklõik võrdub poolega ühest küljest.

417. *Kui trapetsi üks haar poolitada, saadud pooled uuesti poolitada jne., siis see haar jaotub võrdseteks lõikudeks (joon. 73). Tõmmates kõigist saadud jaotuspunktidest alustega paralleelsed sirged, jaotub trapetsi kesklõigu omaduste põhjal ka teine haar võrdseteks lõikudeks. Seda tõsiasja võime sõnastada järgmiselt (joon. 73):*

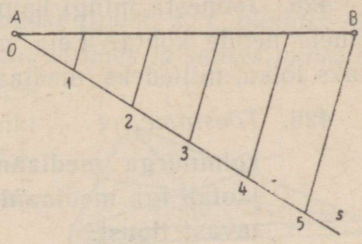
kui paralleelsed sirged lõikavad kaht sirget nii, et ühel neist tekivad võrdsed lõigud, siis tekivad võrdsed lõigud ka teisel sirgel.

418. *Eelmises ülesandes antud paralleelsete sirgete omadus võimaldab antud lõiku kergesti jaotada võrdseteks osadeks. Olgu vaja lõik AB jaotada näiteks viieks võrdseks osaks (joon. 74). Ülesande lahendamiseks joonestame läbi lõigu AB otspunkti A mingi abisirge s, märgime sellel järjestikku, alates punktist A, viis võrdset lõiku ning ühendame viimase lõigu otspunkti punktiga B.*

Nüüd joonestame sellele ühendussirgele paralleelsed sirged abisirge s punktidest 1, 2, 3 ja 4. Need paralleelid jaotavad lõigu AB viieks võrdseks osaks.



Joon. 73.



Joon. 74.

419. a) Jaota vabalt võetud lõik joonisel 74 näidatud viisil kolmeks võrdseks osaks.

b) Jaota vabalt võetud lõik joonisel 74 näidatud viisil kuueks võrdseks osaks.

420. a) Kolmnurga küljed on 22 m, 28 m ja 34 m. Tema külgede keskpunktide ühendamisel saadakse uus kolmnurk. Kui pikad on selle küljed?

b) Kolmnurga külgede pikkused a, b ja c avalduvad kahe arvu x ja y kaudu järgmiselt:

$$a=4x-2y;\ b=3x+y;\ c=5x-3y.$$

Avalda antud kolmnurga kesklõikudest moodustuva kolmnurga küljed x ja y kaudu. Leia kummagi kolmnurga ümbermõõt ja võrdle neid.

421. Trapetsi alused on 7 dm ja 12 dm. Kui pikad on lõigud, milleks diagonaal tükeldab kesklõigu?

422. Trapetsi kesklõik on 12 m. Digonaal tükeldab selle lõikudeks, milledest üks on teisest 3 m pikem. Kui pikad on trapetsi alused?

423. a) Trapetsi alused on 8,7 cm ja 5,9 cm. Kui pikk on kesklõik?

b) Trapetsi üks alus on 16 cm ja kesklõik on 12 cm. Kui pikk on teine alus?

c) Trapetsi üks alus on 4,8 cm ja kesklõik on 6,4 cm. Kui pikk on teine alus?

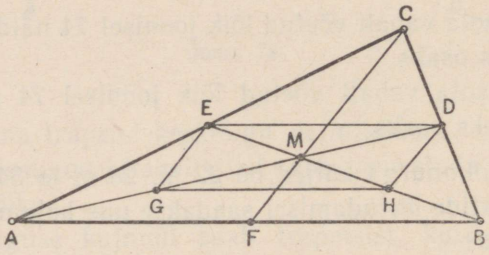
424. Mida nimetatakse kolmnurga mediaaniks? Kas mediaan saab asetseda väljaspool kolmnurka?

425. Joonesta mingi kolmnurga kolm mediaani. Mida paned tähele nende kohta? Leia mõõtmise teel, kuidas suhtuvad need kaks lõiku, milledeks mediaanide lõikepunkt jaotab iga mediaani.

426. *Tõestame, et*

kolmnurga mediaanid lõikuvad kõik ühes punktis, mis jaotab iga mediaani suhtes 2 : 1, arvates kolmnurga vastavast tipust.

Eeldus. $AE=CE$; $AF=BF$; $BD=CD$ (*joon.* 75).



Joon. 75.

Väide. *AD, BE ja CF lõikuvad kõik ühes ja samas punktis M ning seejuures* $AM : MD = BM : ME = CM : MF = 2 : 1$.

Tõestus. *Tähistame mingi kahe mediaani (näiteks AD ja BE) lõikepunkti tähega M ja ühendame nende mediaanide otspunktid D ja E ning lõikude AM ja BM keskpunktid G ja H. Siis DE on kolmnurga ABC kesklõik ja GH on kolmnurga ABM kesklõik, tähendab:*

$$ED \parallel AB \text{ ja } ED = \tfrac{1}{2} AB;$$
$$GH \parallel AB \text{ ja } GH = \tfrac{1}{2} AB.$$

Sellest järeldub, et

$$ED \parallel GH \text{ ja } ED = GH.$$

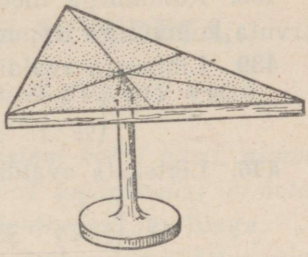
Kuid siis nelinurk GHDE on rööpkülik, sest tema üks paar vastaskülgi on paralleelsed ja võrdsed. Et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis

$$MD = MG \text{ ja } ME = MH.$$

Kuid MG on pool lõigust AM ja MH on pool lõigust BM, tähendab $AM:MD=2:1$ ja $BM:ME=2:1$.

Joonestame nüüd kolmanda mediaani CF. See peab tõestatu põhjal lõikama nii mediaani AD kui ka mediaani BE punktis, mis jaotab neid suhtes 2:1, arvates vastavast tipust, s. t. punktis M. See näitab, et kõik kolm mediaani lõikuvad ühes ja samas punktis.

427. Lõika papist välja mingi kolmnurk, määra tema mediaanide lõikepunkt ja näita katseliselt, et mediaanide lõikepunkt on kolmnurga raskuskese (joon. 76).



Joon. 76.

428. Missugusel kolmnurgal üks mediaan on ühtlasi kolmnurga kõrguseks ja nurga poolitajaks? Missugusel kolmnurgal iga mediaan on ühtlasi kolmnurga kõrguseks ja nurga poolitajaks?

429. Joonesta mingi täisnurkne kolmnurk ühes hüpotenuusi mediaaniga ja võrdle mediaani pikkust hüpotenuusi pikkusega. Näita, et hüpotenuusi mediaan võrdub alati poole hüpotenuusiga.

430. Teades, et hüpotenuusi mediaan võrdub poole hüpotenuusiga, leia, kui suur on nurk täisnurkse kolmnurga, hüpotenuusi mediaani ja täisnurga poolitaja vahel, kui kolmnurga üks teravnurk on 59°

KORDAMISEKS.

431. Tõesta, et ristküliku külgede keskpunktid on ühe rombi tippudeks.

432. Tõesta, et rombi külgede keskpunktid on ühe ristküliku tippudeks.

433. Pioneerid matkasid kompassi järgi esiteks 3 km suunas $N30°E$, siis 2 km suunas $N40°W$ ja lõpuks veel 4 km suunas $N40°E$. Valmista nende teest joonis mõõdus 1 : 100 000 ja leia sellest, kui kaugel olid pioneerid matka lõpul oma lähtekohast otsejoones.

434. Laev sõitis esiteks kursiga $N60°E$, siis kursiga E ja lõpuks kursiga $S30°W$. Kuidas esimene teelõik asetseb viimase suhtes?

435. Millega võrdub trapetsi pindala? Avalda trapetsi pindala tema kesklõigu ja kõrguse kaudu.

436. Missugune kujund tekib, kui võrdhaarse trapetsi külgede keskpunktid ühendada järjestikku?

437. Missugune kujund tekib, kui nelinurga külgede keskpunktid ühendada järjestikku?

N ä p u n ä i d e. *Kasuta nelinurga diagonaale.*

438. Kolmnurga mediaanid on 15,6 cm, 18,9 cm ja 14,1 cm. Arvuta kolmnurga tippude kaugused mediaanide lõikepunktist.

439. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{5}{2x-1}+\frac{8}{2x+1}+\frac{7+16x}{1-4x^2}\right)\cdot\frac{2x-1}{x-1}.$$

440. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{5}{2a+3}+\frac{2}{3-2a}+\frac{2a+9}{4a^2-9}\right):\frac{8}{4a^2+12a+9}.$$

441. Teosta tehted

$$\frac{5{,}22-0{,}744:0{,}2}{25\cdot 0{,}016}+\left(3\frac{1}{15}-\frac{44}{45}\right):1\frac{22}{25}.$$

442. Teosta tehted

$$34{,}17:1{,}7+\left(2\frac{3}{4}+0{,}15\right):\frac{4}{5}-23\frac{3}{8}.$$

443. Mitu protsenti moodustab arvude 4,2 ja 3,8 vahe ruut samade arvude ruutude vahest?

444. Lihtsusta järgmine avaldis ja arvuta selle väärtus, kui $a=-2$:

$$\frac{a^2-ax+a-x}{a^2-ax-a+x}.$$

6. TEHTED LIGIKAUDSETE ARVUDEGA.

ARVUDE ÜMARDAMINE JA SELLEST TEKKIV VIGA.

445. *Arvu* 1254 *saab ümardada sajalisteni kahel viisil, nimelt võttes* 1254 *asemele* 1200 *või* 1300. *Esimest ümardamist nimetatakse ümardamiseks* **puuduga,** *teist aga ümardamiseks* **liiaga.**

Vastavalt sellele on arv 1200 *arvu* 1254 **ligikaudne väärtus puuduga** *ja arv* 1300 *arvu* 1254 **ligikaudne väärtus liiaga.**

Asendades antud arvu ükskõik kummaga nendest ligikaudsetest väärtustest, teeme vea, mida nimetatakse **ümardamisveaks.** *Puuduga ümardamise juhul on siin ümardamisviga* 1254—1200, *s. o.* 54, *liiaga ümardamise puhul* 1300—1254, *s. o.* 46.

446. Maakera läbimõõt poolusest pooluseni on 12 713,8 km. Anna maakera läbimõõdu ligikaudne väärtus tuhandetes kilomeetrites. Kui suure vea teed, kui ümardad selle arvu tuhandelisteni puuduga? liiaga?

Kummal juhul on viga väiksem?

447. a) Euroopa pindala on 9 439 926 km². Ümarda see arv tuhandelisteni nii puuduga kui ka liiaga. Otsusta, kummal juhul on viga väiksem.

b) Ringjoone pikkuse ja ringi läbimõõdu suhe on 3,141592653 . . . Ümarda see arv sajandikeni nii puuduga kui ka liiaga. Otsuta, kummal juhul on viga väiksem.

Täisarvude ümardamisel asendatakse iga ärajääv number nulliga, kümnendmurdude ümardamisel jäetakse aga lõpunumbrid lihtsalt ära.

Näide. $1685 \approx 1700$ (*ümardatult sajalisteni*);
$37{,}658 \approx 37{,}7$ (*ümardatult kümnendikeni*).

448. *Selleks et ümardamisviga oleks võimalikult väike, on kokku lepitud*

ümardada liiaga, kui esimene ärajääv või nulliga asendatav number on 5, 6, 7, 8 või 9, ja ümardada puuduga, kui esimene ärajääv number on 0, 1, 2, 3 või 4.

Järgnevates ülesannetes ümarda ikka selle reegli järgi.

449. Ümarda kümnelisteni arvud

37,4; 182; 1645; 5,6; 2049; 305.

Määra ümardamisvead ning leia nende hulgast suurim.

Missugune on suurim võimalik ümardamisviga, kui ümardame arve kümnelisteni?

Näide. $716{,}4 \approx 720$; *ümardamisviga on* 3,6.

450. Ümarda kümnendikeni

3,78; 4,348; 6,85; 29,391; 36,54; 0,259.

Missugune on suurim võimalik ümardamisviga, kui ümardame arve kümnendikeni?

451. Ümarda täismeetriteks

2,7 m; 16,3 m; 28,5 m; 39,4 m; 128 dm; 365 dm; 984 dm; 191 cm; 236 cm; 3799 cm; 5830 cm.

Missugune on ümardamisel tekkiva vea ülemmäär, kui mingi pikkuse ümardame täismeetriteks?

452. Suurimat võimalikku ümardamisviga nimetatakse ümardamisvea ülemmääraks.

Ümardades kümnelisteni on vea ülemmäär 5 (*vt. ül.* 449), *ümardades kümnendikeni on vea ülemmäär* 0,05 (*vt. ül.* 450) *jne. Üldiselt:*

ümardades arve ülesandes 448 antud reegli kohaselt mingi järguni, on ümardamisvea ülemmääraks pool selle järgu ühikust, milleni ümardati.

Ümardades arve näiteks tuhandelisteni, on ümardamisvea ülemmääraks pool tuhandest, s. o. 500.

453. Kui suur on vea ülemmäär, kui arv ümardati sajalisteni? sajandikeni? ühelisteni? kümnelisteni? tuhandikeni?

454. Ümarda järgmised arvud

a) tuhandikeni:	b) sajandikeni:	c) kümnendikeni:
0,2096	19,407	48,805
27,0607	8,095	4,83
4,00852	5,5428	0,754
6,90049	11,1065	127,896
1,82171	1,009	6,695
15,0999	2,999	14,051

455. Ümarda järgmised arvud nii, et ümardamisvea ülemmäär oleks 5.

1237,698; 75,6789; 465,5664; 791,1243; 65,0075.

456. Ümarda eelmise ülesande arvud nii, et ümardamisvea ülemmäär oleks: a) 0,5; b) 50; c) 0,005; d) 0,05.

457. Ümarda järgmised arvud

a) sajandikeni: 0,2093; 27,0605; 4,00202.

b) ühelisteni: 1,23; 0,746; 19,507; 8,09; 2,103.

c) tuhandikeni: 0,7385; 9,2297; 16,3776; 9,999.

d) kümnelisteni: 18,1; 96,2; 15,099; 19,101; 85,5.

e) tuhandelisteni: 817,8; 1511; 3690; 12723; 999.

f) kümnendikeni: 2,53; 0,95; 6,678; 0,6099.

458. Ümarda järgmised arvud kümnelisteni ning määra ümardamisviga: 503; 817; 4305; 21 658; 21 814.

459. Ümarda järgmised arvud tuhandelisteni ning määra ümardamisviga: 23 458; 13 709; 100 998; 365 651.

460. Ümarda järgmised arvud ühelisteni ning määra ümardamisviga: 0,8; 3,7; 15,5; 0,379; 1,813; 2,972.

461. Ümarda järgmised arvud kümnendikeni ning määra ümardamisviga: 8,512; 11,395; 0,403; 4,08; 6,17; 10,0098.

462. Ümarda järgmised arvud sajandikeni ning määra ümardamisviga: 9,647; 12,784; 0,231; 1,054; 19,6723; 0,455; 7,0993.

ARVU ALAMTÕKE JA ÜLEMTÕKE.

463. *Olgu mingi arvu x ümardamisel sajalisteni saadud* 2700, *s. t.* $x \approx 2700$. *Kui ümardamine on toimunud ülesandes* 448 *antud reegli kohaselt, siis arv x, mille täpne väärtus ei ole teada, peab olema väiksem kui* 2750, *kuid suurem kui* 2650 *(mõnikord ka viimasega võrdne):*

$$2650 < x < 2750.$$

Arve 2650 *ja* 2750 *nimetame tundmatu arvu x* **tõketeks,** *nimelt on* 2650 *tema* **alamtõke** *ja* 2750 *tema* **ülemtõke.**

464. Eesti NSV pindala p on sadade ruutkilomeetriteni ümardatult 45 100 km². Anna pindala p tõkked.

465. Tervete meetriteni ümardatult on koolimaja pikkus $p \approx 42$ m ja laius $l \approx 14$ m. Anna suuruste p ja l tõkked.

466. *Olgu tundmatu arvu x ümardamisel saadud tema ligikaudseks väärtuseks a, kusjuures selle ligikaudse väärtuse vea ülemmäär on v. Siis on arvu x ülemtõke $a+v$ ja alamtõke $a-v$:*

$$a-v<x<a+v.$$

Seega

arvu ülemtõke võrdub selle arvu ligikaudse väärtuse ja vea ülemmäära summaga, alamtõke võrdub ligikaudse väärtuse ja vea ülemmäära vahega.

N ä i d e. *Kui* $x \approx 15{,}4$ *ja* $v = 0{,}05$,

siis

$$15{,}4-0{,}05<x<15{,}4+0{,}05$$

ehk

$$15{,}35<x<15{,}45.$$

467. Ümardamisel kümnendikeni saadi arvud:

$$a=53{,}8;\ b=14{,}3;\ c=187{,}6;\ d=48{,}5.$$

Milline on nende arvude alam- ja ülemtõke? Vastus anna kujul:

$$53{,}75<a<53{,}85.$$

468. Ümardamisel sajandikeni saadi arvud:

$$a=1{,}07;\ b=0{,}12;\ c=19{,}36;\ d=187{,}05.$$

Milline on nende arvude alam- ja ülemtõke?

469. Ümardamisel tuhandikeni saadi arvud:

$$a=16{,}825;\ b=4{,}791;\ c=63{,}559;\ d=191{,}099.$$

Milline on nende arvude alam- ja ülemtõke?

470. Anna järgmiste suuruste tõkked nende suuruste ligikaudsete väärtuste põhjal:

$$a=0{,}8;\ b=6{,}5;\ c=1{,}25;\ d=12{,}683;\ e=79;\ f=6300;$$
$$g=48\,000;\ h=6795;\ i=21.$$

471. *Kui kirjutatakse, et klassi pikkus on* 12,0 *m, siis tahetakse sellega öelda, et viga mõõtmisel ei ületa* 0,05 *meetrit.*

Kui suur on klassi pikkuse alam- ja ülemtõke?

Miks ei või selle arvu lõpust nulli kustutada? Kuidas mõjuks nulli kustutamine vea ülemmäärale?

472. Missugune on vea ülemmäär ning ülem- ja alamtõke, kui kirjutatakse, et mingi raskus on 16,0 t? 9,00 ts? 25,000 kg? 0,030 t?

473. *Igasugune arvutamine tähendab antud arvude kaudu otsitavate arvude leidmist. Antud arvud on võetud sageli igapäevasest elust, on saadud seega mõõtmise, loendamise ja arvutamise teel, kusjuures need andmed on sageli ümardatud.*

Kõik ümardamise teel saadud arvud on ligikaudsed.

474. Missuguse vea ülemmääraga saab mõõta pikkusi mõõdupuu abil, millel pole a) detsimeetritest peenemaid jaotusi, b) sentimeetritest peenemaid jaotusi, c) millimeetritest peenemaid jaotusi?

Kõik mõõtmise teel saadud arvud on ligikaudsed.

Mõõtmisel saadud arve kirjutatakse ikka nii, et mõõtmisviga oleks mitte suurem kui pool arvu viimase järgu ühikut. Seega tuleb mõõtmisel saadud ligikaudseid arve mõista ja kirjutada niisamuti, nagu ümardamisel saadud ligikaudseid arvegi.

Näiteid. 1) *Kui tänava laius* $l \approx 8{,}4$ *m, siis see tähendab, et*

$$8{,}35 \text{ m} < l < 8{,}45 \text{ m}.$$

2) *Kui laua pikkus* $p \approx 1{,}20$ *m, siis see tähendab, et*

$$1{,}195 \text{ m} < p < 1{,}205 \text{ m}.$$

3) *Kui rauatüki kaalumisel saadi* $k \approx 73{,}0$ *g, siis see tähendab, et*

$$72{,}95 \text{ g} < k < 73{,}05 \text{ g}.$$

475. a) *Loendamisel saame ligikaudsed arvud, kui loendatavaid esemeid on palju, kui nad loendamise ajal muudavad oma asukohta, on paigutatud korrapäratult jne.*

Kuigi loendamise tulemus on mõnikord täpne arv, tuleb see arvutamise ja meelespidamise hõlbustamiseks asendada ümardamisel saadava ligikaudse arvuga. Kui näiteks linna elanike arvuks saadi rahvaloendusel 271 826 inimest, siis ümardatakse see harilikult arvuks 272 000.

b) *Ligikaudsed arvud võivad tekkida ka arvutamise tulemusena. Olgu näiteks vaja jaotada 24 m traati 7-ks võrdseks osaks. Siis iga osa pikkus meetrites on*

$$24 : 7 = 3{,}428\ldots$$

Tulemuse kasutamiseks peame selle ümardama kümnendikeni, sajandikeni, tuhandikeni jne. Igal juhul saame jagatiseks ligikaudse arvu.

476. *Asudes lahendama ükskõik millist ülesannet, on kõigepealt vaja endale selgeks teha, missugused selles ülesandes esinevad andmed on ligikaudsed ja missugused täpsed.*

Näiteks ülesandes: «Korrapärase kaheksanurga külje pikkuseks saadi mõõtmisel 5,7 m. Kui suur on selle kaheksanurga ümbermõõt?» esinev arv 8 on täpne arv, 5,7 aga ligikaudne arv, kuna see on saadud mõõtmise tulemusena.

477. Otsusta, kas alltoodud arvud väljendavad suuruse täpset või ligikaudset väärtust.

a) Kooli õpilaste arv on nimekirja järgi 791.
b) Linnas on 72 000 elanikku.
c) Tööline sai kassast 820 rubla palka.
d) Rong sõitis Tallinnast Moskvasse 23 tundi.
e) Isa, ema ja poja vanus on kokku 112 aastat.
f) Muuseumi külastas kuu jooksul 2500 inimest.
g) Kauplusest müüdi nädala jooksul 450 paari jalatseid.
h) Raamatukogu raamatute arv on 25 000.
i) Raudteerööpa pikkus on 10,35 m.
j) Jalgratta ratta kõrgus on 0,63 m.
k) Bensiinivaadi maht on 125 l.

478. Aruta läbi ülesanded 602—612 ja määra kindlaks, kas neis esinevad arvud on täpsed või ligikaudsed.

479. *Eelmistes klassides õppisime teostama tehteid täpsete arvudega ja jätsime tulemused enamasti ümardamata. Vaatleme nüüd, kuidas tuleb tehete tulemusi ümardada, kui arvutamisel kasutatavad andmed on ligikaudsed.*

LIGIKAUDSETE ARVUDE LIITMINE.

480. *Õpilased mõõtsid jaama kaugust koolimajast. Seda teostati osade kaupa. Saadi järgmised tulemused: koolimajast sidekontorini on 229 m, sidekontorist apteegini 198 m ja apteegist raudteejaamani 377 m. Kui kaugel asetseb raudteejaam koolimajast?*

Koolimaja — *Sidekontor* — *Apteek* — *Raudteejaam*

Liites need arvud, saame:

$$\begin{array}{r} 229 \\ +198 \\ 377 \\ \hline 804 \end{array}$$

Ülesande andmed on saadud mõõtmise teel ja on seega ligikaudsed. Järelikult on ligikaudne ka saadud summa. Kuidas tuleb see summa ümardada?

Sellele küsimusele vastuse saamiseks leiame otsitava **summa alamtõkke,** *liites liidetavate alamtõkked, ja* **summa ülemtõkke,** *liites liidetavate ülemtõkked.*

Summa alamtõke:

$$\begin{array}{r} 228{,}5 \\ +\ 197{,}5 \\ 376{,}5 \\ \hline 802{,}5 \end{array}$$

Summa ülemtõke:

$$\begin{array}{r} 229{,}5 \\ +\ 198{,}5 \\ 377{,}5 \\ \hline 805{,}5 \end{array}$$

Seega teame otsitavast kaugusest x järgmist:

$$802{,}5 < x < 805{,}5.$$

Võrdleme otsitava summa ligikaudset väärtust, tema alam- ja ülemtõket omavahel.

804
802,5
805,5

Kõigis kolmes arvus esineb üks ja sama sajaliste ning üks ja sama kümneliste number (8 *ja* 0). *Üheliste numbrid on erinevad:* 4, 2 *ja* 5. *Lepime kokku kirjutada ligikaudsete arvudega arvutamisel tulemusi nii, et* **kõik nendes esinevad numbrid oleksid õiged, peale viimase, mis võib õigest erineda.** *(Selleks viimaseks numbriks ei tohi olla muidugi mingi juhuslikult võetud number, vaid arvutamisel või ümardamisel saadud number r.) Selle kokkuleppe kohaselt võtame otsitava summa ligikaudseks väärtuseks* 804. *Seda pole enam vaja ümardada, sest ta vastab ülaltoodud kokkuleppele.*

V a s t u s. *Raudteejaama kaugus koolimajast on* 804 *m.*

481. *Teostades tehteid ligikaudsete arvudega, ei ole tulemuse vea ülemmäär enam pool ligikaudse arvu viimase järgu ühikust. Lahutades eelmises ülesandes vaadeldud summa ülemtõkkest* 805,5 *selle ligikaudse väärtuse* 804, *saame* 1,5. *Sama tulemuse saame, kui ligikaudsest väärtusest* 804 *lahutame alamtõkke* 802,5.

Tähendab, ligikaudse arvu 804 *vea ülemmäär on juba* 1,5. *Kui ligikaudse arvu vea ülemmäär ei ole pool tema viimase järgu ühikust, siis märgitakse see ülemmäär sageli selle arvu järele sulgudesse:*

$$x \approx 804\,(\pm 1{,}5).$$

See kirjutus tähendab, et

$$804 - 1{,}5 < x < 804 + 1{,}5.$$

482. Anna järgmiste ligikaudsete arvude tõkked.

$$a \approx 18{,}7\,(\pm 1{,}3);\quad b \approx 0{,}80\,(\pm 0{,}007);\quad c \approx 120\,(\pm 15).$$

483. *Kaalumise teel määrati kindlaks, et tühi pudel kaalub* 239,2 *g ja kork* 5,24 *g. Pudelisse valati* 25 *g vett. Kui palju kaalub nüüd pudel koos vee ja korgiga?*

Alamtõke	*Ligikaudne väärtus*	*Ülemtõke*
239,15	239,2	239,25
+ 5,235	+ 5,24	+ 5,245
24,5	25	25,5
268,885	269,44	269,995

Õigeid numbreid, nagu nende kolme summa kõrvutamine näitab, on saadud summas ainult kaks: 2 *ja* 6 *(sajalised ja kümnelised). Sel põhjusel on õige ümardada summa ühelisteni:*

$$269{,}44 \approx 269.$$

V a s t u s. *Pudel koos korgi ja veega kaalub* 269 *g.*

484. Missugused arvu järgud on antud eelmise ülesande esimeses liidetavas? teises liidetavas? kolmandas liidetavas?

Missugune on kõige madalam järk, mis kõikides andmetes on antud?

Missuguse järguni tuli ümardada ligikaudsete arvude summa?

Ligikaudsete arvude summa tuleb ümardada kõige madalama järguni, mis kõikides liidetavates on teada.

M ä r k u s. *Kui mõni liidetav on täpne arv, siis selle järgu määramisel, milleni summat ümardada, seda liidetavat ei arvestata. Näiteks, kui ülesandes* 499 *oleks* 25 *täpne arv, siis tuleks summa ümardada esimese ligikaudse liidetava järgi, s. o. kümnendikeni.*

485. Tee kindlaks, millise järguni tuleb ligikaudsete arvude summa ümardamise eeskirjale vastavalt ümardada iga järgmine ligikaudsete arvude summa:

a) $29{,}594+3{,}7+0{,}9009$;
b) $0{,}00825+0{,}002+0{,}87$;
c) $9{,}4+2{,}7327+7{,}26$;
d) $444{,}4+2{,}22+111{,}111$;
e) $0{,}2093+27+4{,}008$;
f) $0{,}08+0{,}10023+0{,}7$.

486. Ümarda järgmised summad vastavalt ligikaudsete arvude summa ümardamise eeskirjale:

a) $57{,}028+0{,}3+84=141{,}328\approx\ldots$
b) $0{,}2+49{,}35+0{,}069=49{,}619\approx\ldots$
c) $40+0{,}91+51{,}7=92{,}61\approx\ldots$

487. Leia järgmiste ligikaudsete arvude summa ning ümarda see:

a) $137\,000+680+31\,200+1700$;
b) $395+710+2900+3600$;
c) $478\,000+6750+4781+5400$.

488. Olgu vaja liita neli ligikaudset arvu:
$3{,}5+6{,}7837+4{,}257+0{,}07896$.
Liidame need:

$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ 6{,}7837 \\ 4{,}257 \\ 0{,}07896 \\ \hline 14{,}61966 \end{array}$$

Ligikaudsete arvude summa ümardamise reegli kohaselt tuleb saadud tulemuses säilitada ainult üks koht pärast koma (miks?):

$$14{,}61966\approx14{,}6.$$

Kolme viimase liidetava suurem täpsus osutus siin kasutuks ja ülearused kohad pärast koma nõudsid tarbetut tööd.

Seda tööd saab vältida, kui enne liitmist suurema täpsusega liidetavad ümardada nii, et neis jääks üks koht (varunumber) koma järel rohkem, kui on kõige väiksema täpsusega liidetavas.

Ümardame kolm viimast liidetavat ühe varunumbriga ning liidame uuesti:

$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ 6{,}78 \\ 4{,}26 \\ 0{,}08 \\ \hline 14{,}62\approx14{,}6. \end{array}$$

Saime endise tulemuse.

489. Ümarda eelmises ülesandes antud ligikaudsed arvud kümnelisteni (nagu on antud väikseima täpsusega liidetav 3,5) ja liida siis. Missuguse tulemuse saad? Miks on liidetavate ümardamisel vaja säilitada üks varunumber?

Ümarda edaspidi enne liitmist alati suurema täpsusega antud ligikaudsed liidetavad ühe varunumbriga ja alles siis liida.

Näide.

38 000+2175+127 000+3082.

Lahendus.

$$\begin{array}{r} 38\,000 \\ 2\,200 \\ 127\,000 \\ 3\,100 \\ \hline 170\,300 \end{array} \approx 170\,000.$$

490. Leia järgmiste ligikaudsete arvude summa:

a) 0,52+0,079+12; b) 1,038+12,5;
c) 4,8+0,475+3,5691; d) 12,57+0,617+32;
e) 0,72+0,6482+0,01686; f) 15,240+2,6463+0,81418;
g) 52,3+432+250+26,47.

491. Turist käis 94 km jalgsi, sõitis 895,6 km rongiga ja 240 km laevaga. Kui pikk oli kogu teekond?

492. Ühes tükis on 17,25 m nööri, teises 19 m ja kolmandas 21,3 m. Mitu meetrit nööri on kolmes tükis kokku?

493. Kolmnurga külgede mõõtmisel saadi pikkused 20,7 m, 14,53 m ja 21 m. Arvuta kolmnurga ümbermõõt.

494. Kollase vase valmistamiseks võeti 64,1 kg punast vaske, 32,75 kg tsinki ja 2,863 kg tina. Kui palju kaaluvad võetud metallid kokku?

495. Nelinurkse aia ümber ehitati tara. Aia üks külg oli 20 m, teine külg 16,8 m, kolmas 184 dm ja neljas 22,75 m. Kui pikk on kogu tara?

496. Teisenda harilikud murrud kümnendmurdudeks ühe numbriga koma järel ja leia summa S.

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{11}{12}+\frac{11}{15}.$$

Kontrolli saadud tulemuse õigsust, sooritades tehted harilike murdudega ning teisendades siis tulemuse kümnendmurruks ühe kohaga koma järel.

497. Teisenda liidetavad kümnendmurdudeks kahe kohaga koma järel ning leia tulemus.

a) $4\frac{1}{7}+5\frac{4}{9}+3\frac{5}{11}$;

b) $10\frac{5}{9}+6\frac{6}{11}+\frac{4}{7}$;

c) $11\frac{15}{309}+111\frac{17}{412}+1\frac{1}{206}$;

d) $4\frac{5}{63}+5\frac{1}{79}+\frac{11}{51}$.

498. Ristkülikukujulise maatüki pikkus on 1240 m ja laius 236 m. Leia selle maatüki ümbermõõt.

499. Maja ehitamiseks vajatakse 1 532 000 punast tellist ja 325 500 silikaatkivi. Mitu kivi on vaja selle maja ehitamiseks?

500. Kolhoosi maa-alast on põldude all 1550 ha, metsa all 640 ha, heinamaa all 1360 ha ning muuks otstarbeks kasutatakse 345 ha. Kui palju maad on sellel kolhoosil?

LIGIKAUDSETE ARVUDE LAHUTAMINE.

501. *Olgu vaja leida ligikaudsete arvude* 22,8 *ja* 1,248 *vahe. Lahutades, saame:*

$$\begin{array}{r} 22{,}8 \\ -\ 1{,}248 \\ \hline 21{,}552 \end{array}$$

Millise järguni ümardada saadud vahet?

Leiame vahe alamtõkke, lahutades vähendatava alamtõkkest lahutatava ülemtõkke, sest vahe on seda väiksem, mida väiksem on vähendatav ning mida suurem on lahutatav.

$$\begin{array}{r} 22{,}75 \\ -\ 1{,}2485 \\ \hline 21{,}5015 \end{array}$$

Vahe ülemtõkke leidmiseks lahutame vähendatava ülemtõkkest lahutatava alamtõkke, sest vahe on seda suurem, mida suurem on vähendatav ja mida väiksem on lahutatav:

$$\begin{array}{r} 22{,}85 \\ -\ 1{,}2475 \\ \hline 21{,}6025. \end{array}$$

Seega teame otsitavast vahest x järgmist:

$$21{,}5015 < x < 21{,}6025.$$

Võrdleme leitud vahet tema alam- ja ülemtõkkega:

21 552
21,5015
21,6025

Kõigis kolmes arvus esineb üks ja sama kümneliste ning üks ja sama üheliste number (2, 1). *Kümnendike numbris on erinevusi:* 5, 5 *ja* 6. *Vastavalt arvutamise tulemuste kirjutamise kokkuleppele peame ümardama:*

$$21{,}552 \approx 21{,}6.$$

Tulemusest saame teha sama järelduse, mis liitmise puhulgi:

ligikaudsete arvude vahe tuleb ümardada kõige madalama järguni, mis on teada nii vähendatavas kui ka lahutatavas.

502. Tee arvutamata kindlaks, mitu numbrit saame koma järel vastavalt vahe ümardamise eeskirjale järgmiste ligikaudsete arvude vahes:

a) 276,1 − 69,8943;
b) 97,8 − 0,8594;
c) 784,4908 − 35,3;
d) 0,75958 − 0,6;
e) 7,8004 − 2,23;
f) 3,5 − 0,789.

503. Ümarda järgmised vahed vastavalt vahe ümardamise eeskirjale:

a) $10{,}7 - 0{,}532 = 10{,}168 \approx \ldots$
b) $15{,}348 - 8{,}3 = 7{,}048 \approx \ldots$
c) $2 - 1{,}221 = 0{,}779 \approx \ldots$

504. Teosta järgmiste, erineva täpsusega ligikaudsete arvude lahutamine: 1) tavalisel viisil; 2) ümardades suurema täpsusega ligikaudset arvu enne lahutamist ühe varunumbrini.

a) 14,8 − 2,3651;
b) 29,3785 − 7,6.

Ümarda saadud tulemused eespool toodud ligikaudsete arvude vahe ümardamise reegli kohaselt. Võrdle saadud tulemusi. Millise järelduse võid sellest teha?

Ligikaudsete arvude lahutamisel ümarda alati suurema täpsusega antud arv ühe varunumbrini ja alles siis lahuta.

505. Lahuta järgmised ligikaudsed arvud:

1)	2)	3)
9 − 0,85	81 − 0,09	5,6 − 2,367
17 − 0,24	48 − 28,58	17,993 − 8,4
15 − 13,351	30 − 18,86	29,72 − 8,643
500 − 14,275	8,65 − 7	4,153 − 2,9

506. Leia järgmiste ligikaudsete arvude vahe:

1)	2)	3)
377 − 2,35	8,1 − 5,906	74,38 − 27
58,41 − 55,7	738 − 69,465	115,25 − 49
12 − 1,18	895,1 − 386,472	4,195 − 2,5
684,42 − 36,8	85 − 68,642	98 − 10,75
4,7 − 0,522	0,2 − 0,057	60 − 21,40

507. Teisenda harilikud murrud kümnendmurdudeks ühe numbriga koma järel ning arvuta alltoodud arvude vahe.

a) $\frac{9}{10} - \frac{1}{15}$

b) $\frac{15}{27} - \frac{1}{18}$

c) $\frac{25}{27} - \frac{10}{21}$

d) $\frac{11}{18} - \frac{11}{90}$

e) $\frac{13}{85} - \frac{11}{17}$

f) $\frac{17}{70} - \frac{11}{35}$

Kontrolli saadud tulemuste õigsust, teostades tehted harilike murdudega ning teisendades vahe kümnendmurruks.

508. Kahe ligikaudse arvu summa on 120,4. Üks liidetavatest on 50,98. Leia teine liidetav.

509. Auto, sõites kiirusega 68,7 km tunnis, möödub teisest samas suunas sõitvast autost, mille kiirus on 49 km tunnis. Kui kaugel olid need autod teineteisest üks tund enne kohtumist?

510. Sulatati 64,85 kg vaske, 32,755 kg tsinki ja 2,1 kg tina. Metalli kadu sulatamisel oli 2215 g. Leia saadud sulami kaal.

511. Linnas *A* on ligikaudu 175 000 elanikku, linnas *B* aga 89 500 elanikku. Kui palju on linnas *A* elanikke enam?

512. Sovhoosi metsas kasvas ligikaudu 5200 puud. Aasta jooksul raiuti maha ligikaudu 860 puud. Mitu puud on veel sovhoosi metsas?

513. Kütteladu sai 15 500 m^3 puid. Sellest on laos järel 210 m^3. Kui palju puid on müüdud?

514. Pudel koos petrooleumiga kaalub 1,42 kg, pudel kaalub 0,543 kg. Kui palju kaalub pudelis olev petrooleum?

515. Korteri põrandapindala on 79,43 m^2, sellest on ahjude all 5,325 m^2. Kui palju on vaba põrandapinda?

516. Mensuuris on 62,0 cm^3 vett. Mensuuri lasti tinatükk, mille järel veepind tõusis 94,35 cm^3-ni. Kui suur on tinatüki ruumala?

517. Kauba brutokaal on 1,23 t, taarakaal 0,150 t. Kui palju kaalub kaup?

518. Leia järgmised vahed, kui üks arvudest on ligikaudne ja teine täpne arv (täpne arv on antud jämedas kirjas):

a) 0,96 − **0,5**; b) **3,2** − 0,12; c) **3,27** − 0,2;

d) 8,065 − **0,0035**.

Märkus. *Täpset arvu vahe ümardamisel ei arvestata (vt. ül. nr.* 484).

LIGIKAUDSETE ARVUDE KORRUTAMINE

519. *Arvutame korrutise* $7 \cdot 0{,}052$, *milles esimene tegur on täpne ja teine ligikaudne arv, ning küsime, missuguse järguni tuleb tulemus ümardada.*

Korrutades antud arvud, saame

$$7 \cdot 0{,}052 = 0{,}364.$$

Et teise teguri vea ülemmäär on 0,0005, *siis võib arvutatud korrutis õigest tulemusest erineda juba kuni*

$$7 \cdot 0{,}0005 = 0{,}0035$$

võrra. Seega ei ole arvutatud korrutise viimasel järgunumbril 4 *mingit mõtet ja me ümardame korrutise sajandikeni:*

$$7 \cdot 0{,}052 = 0{,}364 \approx 0{,}36$$

520. *Eelmises ülesandes toodud näite eeskujul saaksime:*

$$\mathbf{70} \cdot 0{,}052 = 3{,}6;$$
$$0{,}7 \cdot 0{,}052 = 0{,}036;$$
$$7 \cdot 0{,}0052 = 0{,}036;$$
$$0{,}07 \cdot 5200 = 360.$$

Selleks et sõnastada siit silmanähtavat ümardamisreeglit, jätame nii ligikaudses teguris (0,052; 0,0052; 5200) *kui ka korrutises* (0,36; 3,6; 0,036; 360) *koma ja nullid arvu kirjutise alguses ja lõpus ära ning vaatleme siis saadud numbrite rühmi* 52 *ja* 36. *Esimest numbrite rühma* (52) *nimetatakse teguri* **tüveks** *ja teist* (36) *korrutise* **tüveks**. *Arvu tüves esinevad numbrid on arvu* **tüvenumbrid**.

Ligikaudse täisarvu tüveks nimetatakse seda arvu, mille saame, kui arvu lõpus olevad nullid ära jätame.

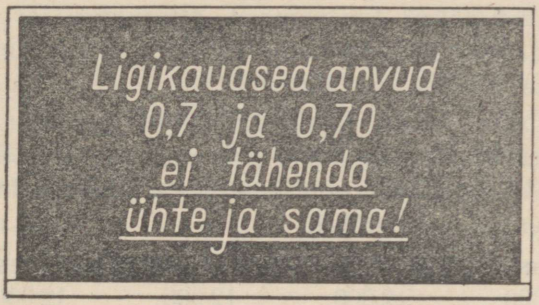
Ligikaudse kümnendmurru tüveks nimetatakse seda arvu, mille saame, kui koma ja arvu ees olevad nullid ära jätame.

Erandina kuulub 0 *täisarvu lõpus mõnikord tüvenumbrite hulka* (*vt. üles.* 522).

Näiteid.

a) 5200, *tüvi* 52;
b) 360, *tüvi 36;*
c) 0,07, *tüvi* 7;
d) 0,070, *tüvi* 70.

Nagu näeme, on eespool saadud korrutistes niisama palju tüvenumbreid, kui palju neid on ligikaudses teguris.



Joon. 77.

Seega

täpse arvu ja ligikaudse arvu korrutis tuleb ümardada nii, et korrutises oleks niisama palju tüvenumbreid, kui palju on neid ligikaudses teguris.

521. Kirjuta järgmiste ligikaudsete arvude tüved:
250; 7500; 0,07; 1,005; 0,070; 0,3009; 3,090.

Märkus. *Kümnendmurru lõpus olevad nullid kuuluvad tüvenumbrite hulka.*

522. *Nullidega lõppev ligikaudne täisarv, mille kohta me ei tea, millise järguni ta ümardati, loetakse ümardatuks selle madalaima järguni, milles esineb veel nullist erinev number.*

Näiteks loetakse ligikaudne arv 2400 *ümardatuks sajalisteni, ligikaudne arv* 10 030 *ümardatuks kümnelisteni, ligikaudne arv* 13 000 *ümardatuks tuhandelisteni jne.*

Nullid selliste ligikaudsete täisarvude lõpus tema tüvenumbrite hulka ei kuulu.

Kui aga on teada, missuguse järguni nullidega lõppev ligikaudne täisarv on ümardatud, ja kui selles järgus, milleni arv

ümardati (võib olla ka kõrgemates järkudes), leidub nulle, siis kuuluvad need nullid tüvenumbrite hulka.

Näide:

2501 ≈ 2500 (*ümardatud kümnelisteni*) → 3 *tüvenumbrit* (2,5,0). Arv ümardati kümnelisteni. Selles järgus asub null. See null kuulub tüvenumbrite hulka.

2500,3 ≈ 2500 (*ümardatud ühelisteni*) → 4 *tüvenumbrit* (2,5,0,0). Nullid, mis asuvad selles järgus, milleni arv ümardati, ja sellest kõrgemates järkudes, kuuluvad tüvenumbrite hulka.

250 300 ≈ 250 000 → 3 tüvenumbrit. Missuguse järguni see arv ümardati? Miks kuulub esimene null tüvenumbrite hulka, kolm viimast aga mitte?

Tüvenumbrite hulka kuuluvad nullid ligikaudses täisarvus märgime edaspidi, kus see teisiti pole selge, väikese kriipsukesega nulli alla. Näiteks: 1700 arv on ümardatud kümnelisteni, järelikult on selles arvus 3 tüvenumbrit.

523. Mitu tüvenumbrit on järgmistes ligikaudsetes arvudes:
12 000; 12 000; 12 000; 12 000?

524. Mitu tüvenumbrit on järgmistes ligikaudsetes arvudes: 24; 356; 502; 7004; 20 604; 250; 3100; 2050; 302 400; 5 003 000?

525. Mitu tüvenumbrit on igas järgmises, kümneteni ümardatud ligikaudses arvus: 230; 480; 1040; 20 050; 11 700?

526. Mitu tüvenumbrit on igas järgmises ligikaudses arvus: 8,5; 0,42; 0,703; 6,05; 1,003; 201,03; 0,03; 0,004; 2,60; 8,240; 8,040; 0,070; 0,2080; 0,300; 2,500; 603,100; 2004,50; 9800; 83000; 75 000; 8500; 490; 300 200; 1010?

527. Missugune erinevus on kirjutustel: «temperatuur on 37°» ja «temperatuur on 37,0°»?

528. Arvuta võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt, kui tema külje pikkuse mõõtmisel saadi 0,73 m.

529. Arvuta ruudu ümbermõõt, kui tema külje pikkus on ligikaudu 5,8 dm.

530. Arvuta korrapärase kuusnurga ümbermõõt, kui tema külje pikkus on ligikaudu 13,6 cm.

531. Arvuta järgmised korrutised, kui esimene tegur on täpne arv ja teine ligikaudne arv.

a) $8 \cdot 0{,}0042$; c) $98 \cdot 1{,}37$; e) $59 \cdot 0{,}20$;
b) $12 \cdot 0{,}751$; d) $60 \cdot 0{,}68$; f) $75 \cdot 9800$.

Näide. $31 \cdot 0{,}60 = 18{,}60 \approx 19$;
$22 \cdot 970 = 21\,340 \approx 21\,000$.

532. *Klassi pikkus on* 11,3 *m ja laius* 8,4 *m. Kui suur on klassi põranda pindala?*

Pindala leidmiseks tuleb pikkust ja laiust väljendavad arvud korrutada:

$$\begin{array}{r} 11{,}3 \\ \times\ 8{,}4 \\ \hline 452 \\ 904 \\ \hline 94{,}92 \end{array}$$

Klassi pikkust ja laiust väljendavad arvud on ligikaudsed (miks?), mistõttu korrutis tuleb ümardada. Küsime, missuguse järguni tuleb seda teha?

Antud arvude alamtõkked on 11,25 *ja* 8,35, *ülemtõkked on* 11,35 *ja* 8,45.

Korrutis omandab väikseima väärtuse, kui tegurid on võimalikult väiksed. Leiame korrutise alamtõkke, korrutades tegurite alamtõkked:

$$\begin{array}{r} 11{,}25 \\ \times\ 8{,}35 \\ \hline 5625 \\ 3375 \\ 9000 \\ \hline 93{,}9375 \end{array}$$

Nüüd korrutame tegurite ülemtõkked, et leida korrutise ülemtõke.

$$\begin{array}{r} 11{,}35 \\ \times\ 8{,}45 \\ \hline 5675 \\ 4540 \\ 9080 \\ \hline 95{,}9075 \end{array}$$

Kõrvutame nüüd kõik kolm korrutist.

Antud arvude korrutis: 94,92
Alamtõkete korrutis: 93,9375
Ülemtõkete korrutis: 95,9075

Igas korrutises on kümneliste number üks ja sama (9). *Üheliste arv aga on juba erinev:* 4, 3, 5. *Järelikult tuleb korrutis ümardada ühelisteni. Seega* $94{,}92 \approx 95$.

Mitu tüvenumbrit on esimeses teguris? teises teguris? Mitu tüvenumbrit on korrutises?

Millise järelduse võid teha?

Kahe ligikaudse arvu korrutist tuleb ümardada nii, et korrutises oleks nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on vähima tüvenumbrite arvuga teguris.

533. Määra arvutamist teostamata, mitu tüvenumbrit saame vastavalt korrutise ümardamise eeskirjale järgmiste ligikaudsete arvude korrutistes:

a) $7 \cdot 3{,}587$; d) $121 \cdot 1{,}0042$; g) $0{,}57 \cdot 0{,}305$;
b) $22 \cdot 5{,}87$; e) $1308 \cdot 0{,}00561$; h) $5{,}8 \cdot 0{,}001$;
c) $1{,}008 \cdot 81$; f) $44 \cdot 0{,}207$; i) $0{,}3 \cdot 7{,}84$.

534. Ümarda järgmised ligikaudsete arvude korrutised vastavalt korrutise ümardamise eeskirjale:

a) $0{,}8 \cdot 16{,}9 = 13{,}52 \approx \ldots$ d) $366 \cdot 90 = 32\,940 \approx \ldots$
b) $7{,}2 \cdot 0{,}09 = 0{,}648 \approx \ldots$ e) $0{,}79 \cdot 6{,}41 = 5{,}0639 \approx \ldots$
c) $24{,}0 \cdot 481 = 11544 \approx \ldots$ f) $0{,}03 \cdot 0{,}07 = 0{,}0021 \approx \ldots$

535 Arvuta kolmnurkse maatüki pindala, kui maatüki üks külg on 46 m ja vastastipu kaugus sellest küljest on 37 m.

536. Arvuta ligikaudsete arvude

$$3{,}8 \cdot 12{,}456$$

korrutis kahel viisil: 1) korrutades tegurid antud kujul; 2) ümardades enne korrutamist suurema tüvenumbrite arvuga tegurit nii, et selles oleks üks tüvenumber enam (varunumber) kui väiksema tüvenumbrite arvuga teguris.

Ümarda tulemused korrutise ümardamise reegli kohaselt ja võrdle tulemusi. Missuguse järelduse võid teha?

Rakenda seda arvutamist kergendavat võtet ligikaudsete arvude korrutamisel.

537. Leia järgmiste ligikaudsete arvude korrutised:

1) $15 \cdot 2{,}34$	2) $15{,}2 \cdot 0{,}03$	3) $17{,}007 \cdot 4{,}08$
$1{,}6 \cdot 0{,}25$	$0{,}07 \cdot 15{,}25$	$5{,}08 \cdot 0{,}0149$
$7{,}5 \cdot 0{,}014$	$0{,}156 \cdot 1{,}7$	$6{,}8 \cdot 0{,}93$
$1{,}01 \cdot 2{,}04$	$16{,}15 \cdot 0{,}08$	$0{,}991 \cdot 0{,}89$
$0{,}09 \cdot 3{,}07$	$23 \cdot 4{,}08$	$6{,}07 \cdot 0{,}305$

538. Leia ristkülikukujulise maatüki pindala, kui maatüki pikkus on 1,72 km ja laius 0,34 km.

539. Laoplatsile veeti 16 250 m^3 tammepalke. Arvuta palkide kaal, kui üks kuupmeeter palke kaalub 0,85 tonni.

540. Kui palju kaalub 17,5 m^3 kivisütt, kui 1 m^3 kivisütt kaalub 1,3 tonni?

541. Leia korrapärase kuusnurga ümbermõõt, kui kuusnurga pikkuseks saadi mõõtmisel 12,24 cm.

Mitu tüvenumbrit tuleb võtta siin korrutises? Miks?

542. Teosta järgmised korrutamised (üks tegureist on ligikaudne arv; teine — täpne arv, mis on trükitud jämedas kirjas).

1) $8 \cdot 6{,}57$;	3) $0{,}283 \cdot \mathbf{734}$;	5) $\mathbf{90} \cdot 375$;
2) $0{,}85 \cdot \mathbf{375}$;	4) $\mathbf{70} \cdot 4{,}8$;	6) $\mathbf{7} \cdot 12{,}8$.

543. Leia korrutised:

$$1)\ 5\tfrac{1}{9} \cdot 2\tfrac{4}{7}; \quad 2)\ \tfrac{8}{11} \cdot \tfrac{11}{18} \text{ ja } 3)\ 5\tfrac{1}{2} \cdot 8\tfrac{1}{11}$$

kahel viisil: a) teisenda iga harilik murd kümnendmurruks ning ümarda tulemust; b) leia korrutis harilike murdude korrutamise teel ning teisenda tulemus kümnendmurruks.

Harilike murdude teisendamisel kümnendmurruks ümarda arvud esimeses ülesandes kümnendikeni, teises sajandikeni ja kolmandas tuhandikeni.

Võrdle mõlemal teel saadud korrutisi.

544. Kolhoosniku perekond töötas aasta jooksul välja 731 normipäeva. Kui palju teravilja sai see perekond, kui iga normipäeva kohta arvestati 8,2 kg?

545. Sovhoosis on nisu all 1250 ha. Kui palju nisu saab sovhoos, kui loodetav saak on 18,5 ts hektarilt?

546. Tööliste brigaad töötas maantee parandamisel 132 tundi, korrastades keskmiselt 24 m maanteed tunnis. Mitu meetrit maanteed parandas see brigaad?

547. Põranda värvimiseks kulub 0,142 kg värvi ruutmeetrile. Kui palju värvi on vaja 43 m^2 suuruse põranda värvimiseks?

548. Leia 18,5 m^3 kivisõe kaal, kui 1 m^3 kivisütt kaalub 1,3 t.

549. Kui palju kaalub 12,87 m pikkune raudtala, mille jooksva meetri kaal on 60,4 kg?

550. Arvuta oma klassi põranda pindala.

551. Arvuta oma toa põranda pindala.

552. Veoauto koormasse mahub 1600 kg turvast. Kui palju turvast tuuakse kohale 19 koormaga?

553. Kaupluses oli 23 tükki vahariiet, igas tükis 23,0 m. Kui palju vahariiet oli selles kaupluses kokku?

554. Kui palju kaaluvad 36 kaubavagunit, kui ühe vaguni keskmine kaal koos kaubaga on 23,76 t?

555. Katusepleki tahvel kaalub 4,52 kg. Kui palju kaalub 50 sellist tahvlit?

556. Kahe punkti vaheline kaugus plaanil on 8,3 cm. Leia nende punktide vaheline tõeline kaugus, kui plaani mõõt on 1 : 250.

557. Maatüki pindala plaani järgi on 3,3 cm^2. Leia selle maatüki tõeline pindala, kui 1 cm plaanil kujutab 50 m.

558. Pudel kaalub 0,0475 kg. Kui palju kaaluvad 120 sellist pudelit?

LIGIKAUDSETE ARVUDE JAGAMINE.

559. *Olgu vaja jagada ligikaudne arv* 72,4 *ligikaudse arvuga* 0,13.

$$72{,}4 : 0{,}13 = 7240 : 13 = 556{,}923\ldots$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ \hline 90 \\ -\ 120 \\ \hline 30 \\ \hline 40 \\ \hline 1 \end{array}$$

Kuna siin jagamine nähtavasti ei lõpe, siis on väga oluline teada, kui kaugele jagamist jätkata.

Küsimusele vastamiseks leiame otsitava jagatise alam- ja ülemtõkke.

Jagatis omandab väikseima väärtuse siis, kui jagatav on võimalikult väike ja jagaja võimalikult suur. Seetõttu jagatise alamtõkkeks on jagatava alamtõkke ja jagaja ülemtõkke jagatis:

$$72{,}35 : 0{,}135 = 535{,}9\ldots$$

Jagatise ülemtõkkeks on jagatava ülemtõkke ja jagaja alamtõkke jagatis:

$$72{,}45 : 0{,}125 = 579{,}6.$$

Võrdleme nüüd antud ligikaudsete arvude jagatist tema alam- ja ülemtõkkega.

Ligikaudsete arvude jagatis:	556,923...
Jagatise alamtõke:	535,9...
Jagatise ülemtõke:	579,6.

Näeme, et jagatistes on ühesugused ainult sajaliste numbrid (5). *Kümneliste number on igas jagatises juba isesugune:* 5, 3, 7. *Seega tuleb jagatis ümardada kümnelisteni:*

$$72{,}4 : 0{,}13 = 556{,}923\ldots \approx 560.$$

Mitu tüvenumbrit on jagatavas? Mitu jagajas? Mitme tüvenumbriga saime jagatise?

560. *Eeltoodud näide kinnitab, et ligikaudsete arvude jagatise ümardamisel kehtib sama reegel, mis nende arvude korrutise ümardamiselgi:*

ligikaudsete arvude jagatis tuleb ümardada nii, et jagatises oleks nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on väiksema tüvenumbrite arvuga andmes.

561. Kontrolli selle reegli õigsust, jagades eelmise näite eeskujul ligikaudsed arvud 4,3 : 5,73, siis esimese arvu alamtõkke teise arvu ülemtõkkega ja lõpuks esimese arvu ülemtõkke teise arvu alamtõkkega. Mitu kohta tuleb jagatises säilitada?

562. Määra ilma jagamist teostamata, mitu tüvenumbrit saame vastavalt jagatise ümardamise eeskirjale järgmistes ligikaudsete arvude jagatistes:

a) 75 : 8;	d) 9,6 : 0,08;	g) 55,23 : 14;
b) 6,18 : 0,0013;	e) 0,3825 : 0,581;	h) 628,125 : 33,5;
c) 90,3062 : 30,1;	f) 1,33 : 0,6;	i) 4,75 : 6.

563. Ümarda järgmised ligikaudsete arvude jagatised vastavalt jagatise ümardamise eeskirjale.

a) $135 : 1{,}9 = 71{,}05 \ldots \approx \ldots$ d) $72{,}5 : 11 = 6{,}59 \ldots \approx \ldots$

b) $143{,}8 : 0{,}15 = 958{,}6 \ldots \approx \ldots$ e) $57{,}3 : 0{,}13 = 440{,}7 \ldots \approx \ldots$

c) $8{,}5 : 9 = 0{,}944 \ldots \approx \ldots$ f) $0{,}2 : 65 = 0{,}0307 \ldots \approx \ldots$

564. Arvuta ligikaudsete arvude jagatis

$$3{,}6918 : 0{,}18$$

kahel viisil: 1) teostades jagamise arvudega antud kujul, 2) ümardades enne jagamist suurema tüvenumbrite arvuga arvu nii, et selles oleks üks tüvenumber enam (varunumber) kui väiksema tüvenumbrite arvuga antud arvus.

Ümarda saadud jagatised jagatise ümardamise reegli kohaselt ja võrdle tulemusi.

Missuguse järelduse võid sellest teha?

Rakenda seda arvutamist kergendavat võtet ligikaudsete arvude jagamisel.

565. Leia järgmised ligikaudsete arvude jagatised:

1)	2)	3)	4)
$15{,}56 : 6{,}7$	$4{,}28 : 0{,}7$	$822 : 76$	$72{,}4 : 0{,}13$
$18{,}63 : 0{,}8$	$4{,}8 : 0{,}284$	$8 : 34$	$0{,}12 : 37{,}8$
$32{,}4 : 23{,}3$	$0{,}036 : 2{,}7$	$384 : 287$	$341{,}3 : 12$
$382{,}6 : 36{,}8$	$7{,}8 : 3{,}62$	$362 : 236$	$5 : 22{,}5$

566. Ristküliku pindala on 15,12 cm². Ristküliku ühe külje pikkus on 3,6 cm. Leia teise külje pikkus.

567. Toa põranda pindala on 69,2 m². Kui suur peab olema selle toa kõrgus, et toas oleks 250 m³ õhku?

568. Ristkülikukujuliselt põllult, mille pindala on 54 ha, saadi 834 ts nisu. Kui suur on keskmine nisusaak hektarilt?

569. 32,7 *m pikkune traat on vaja jaotada* 16 *võrdseks tükiks. Leia iga tüki pikkus.*

Siin arv 32,7 *m on ligikaudne arv,* 16 *aga täpne arv. Kuna* $16 = 16{,}0 = 16{,}00 = 16{,}000$ *jne., s. t. täpsel arvul võime kujutleda ükskõik kui mitu tüvenumbrit, siis määratakse jagatise tüvenumbrite arv ligikaudse andme tüvenumbrite arvu järgi.*

$$32{,}7\ m : 16 = 2{,}044\ m \approx 2{,}04\ m.$$

570. Teosta järgmised jagamised, kus üks arvudest on täpne arv (trükitud jämeda kirjaga).

1)	2)	3)	4)
$2{,}6 : \mathbf{165}$	$\mathbf{573} : 4{,}3$	$900 : \mathbf{96}$	$1{,}05 : \mathbf{12}$
$\mathbf{27} : 2{,}37$	$435 : \mathbf{13}$	$37{,}4 : \mathbf{19}$	$\mathbf{0{,}1} : 26$
$23{,}45 : \mathbf{3}$	$0{,}81 : 8$	$\mathbf{72} : 0{,}13$	$\mathbf{12} : 37{,}8$

571. Kahe linna vahemaa on 955 km. Mitme tunniga läbib selle vahemaa rong, kui selle keskmine kiirus on 52 km tunnis?

572. 83 ha suuruselt maa-alalt saadi 1430 t kartuleid. Kui suur on keskmine kartulisaak hektarilt?

573. Mitu vagunit on vaja 7500 t kauba veoks, kui kasutada 17 t kandejõuga vaguneid?

574. Ristkülikukujulise maatüki pindala on 19,45 ha. Selle maatüki laius on 230 m. Leia maatüki pikkus.

575. 1442 km raudteeliini ehitamine maksis 179 000 000 rubla. Leia raudtee ühe kilomeetri ehitamise hind.

576. Sovhoos eraldas 250 ha suuruse põllu väetamiseks 63,45 t mineraalväetist. Kui palju mineraalväetist tuleb külvata 1 hektarile?

577. Kolhoosnik sai töö eest 1342 kg teravilja. Mitu normipäeva töötas see kolhoosnik, kui iga normipäeva kohta arvestati 5,61 kg teravilja?

578. Rull traati kaalub 38,54 kg. Mitu meetrit traati on selles rullis, kui 1 m traati kaalub 0,528 kg?

579. Kui suur on tsementitünni ruumala, kui tünn mahutab 0,106 t tsementi, 1 m^3 tsementi kaalub aga 1,4 t?

580. Naftaveo tsistern mahutab 38,8 t naftat. Mitu sellist tsisterni on vaja 2138 t nafta veoks?

581. 1 cm^3 seatina kaalub 11,3 g, 1 cm^3 inglistina aga 7,3 g. Mitu korda on seatina inglistinast raskem?

582. Klassi ruumala on 235,34 m^3. Klassi põranda pindala on 48,3 m^2. Leia klassi kõrgus.

583. Heli levimiskiirus õhus on 333,3 m sekundis. Kui kaua aja pärast on kuulda müristamist, kui välku lõi 8690 m kaugusel?

584. 94-st võrdse pikkusega veetorust saadi 762 m pikkune torustik. Kui pikk on iga toru?

585. Koolimaja ruumala on 24 986 m^3. Selles koolis õpib ligikaudu 1100 õpilast. Mitu kuupmeetrit ehituse mahust tuleb iga õpilase kohta?

586. 25 ühesugust polti kaaluvad 7,82 kg. Kui raske on iga polt?

587. 50 ühesugust raamatut kaaluvad 21,32 kg. Kui raske on iga raamat?

588. *Lahendades ülesandeid, kus otsitava arvu leidmiseks on vaja sooritada mitu tehet, lisanduvad andmete vigadest tingitud vigadele veel vahepealsete tehete tulemuste ümardamisest tingitud vead.*

Olgu vaja näiteks leida korrutiste summa

$$x=3{,}6\cdot 2{,}18+1{,}8\cdot 3{,}74+2{,}4\cdot 4{,}06+0{,}90\cdot 8{,}61.$$

Arvutades vahepealseid tulemusi ümardamata, saame:

1) $3{,}6\cdot 2{,}18=7{,}848$;
2) $1{,}8\cdot 3{,}74=6{,}732$;
3) $2{,}4\cdot 4{,}06=9{,}744$;
4) $0{,}90\cdot 8{,}61=7{,}749$;

5)
$$\begin{array}{r} 7{,}848 \\ 6{,}732 \\ 9{,}744 \\ 7{,}749 \\ \hline 32{,}073\approx 32{,}1. \end{array}$$

Ümardades aga iga vahepealse tehte tulemuse vastavalt reeglile, saame:

$$7{,}8+6{,}7+9{,}7+7{,}7=31{,}9.$$

Saadud tulemus erineb märgatavalt esimesest tulemusest (32,1).

Märgitud puudust saame vältida, kui ümardame vahepealsete tehete tulemused mitte selle järguni või tüvenumbrite arvuni, mida näevad ette tehete tulemuste ümardamise reeglid, vaid **võtame igas vahepealses tulemuses ühe järgu või tüvenumbri rohkem.** *Sellise* **varunumbri** *säilitame kuni* **lõpptulemuse** *saamiseni, siis jätame selle ära, lõpptulemust vastavalt ümardades.*

Arvutame eelmise ülesande tulemuse ühte varunumbrit kasutades:

$$\begin{array}{r} 7{,}85 \\ 6{,}73 \\ 9{,}74 \\ 7{,}75 \\ \hline 32{,}07\approx 32{,}1. \end{array}$$

Saime täpselt sama tulemuse, mis ümardamata andmetega arvutades.

Seega enama kui ühetehtelise ülesande lahendamisel rakendame järgmist juhist:

vahepealsete tulemuste arvutamisel säilitame ühe varunumbri. Lõpptulemuses jätame selle varunumbri ära, tulemust vastavalt ümardades.

589. Leia järgmiste avaldiste ligikaudne väärtus, teisendades harilikud murrud kümnendmurdudeks. Tulemused arvuta ümardatult kümnendikeni.

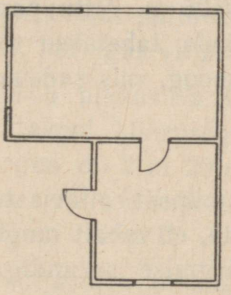
a) $\dfrac{3\frac{5}{6}+1\frac{4}{9}-2\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}$;

b) $\dfrac{\frac{4}{5}+3\frac{7}{10}-2\frac{3}{4}}{2\frac{3}{5}-1\frac{1}{2}}$;

c) $\dfrac{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$;

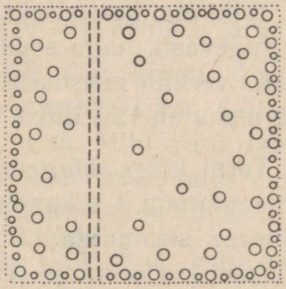
d) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):1\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}-\frac{2}{9}}$.

590. Kui palju kaalub kuusepuust palk, mille ristlõige on ristkülik mõõtmetega 168 mm×113 mm, palgi pikkus aga 4,29 m ja kui 1 dm³ kuusepuud kaalub 0,5 kg?



Mõõt 1:250

Joon. 78.



Joon. 79.

591. Kui palju tuleb maksta plaanil (joon. 72) näidatud kahe toa põranda värvimise eest, kui 1 m² värvimine maksab 1,85 rubla?

592. Leia suhkrupeedi saak ristkülikukujuliselt põllult, mille pikkus plaanil (mõõdusuhe 1 : 10 000) on 2,5 cm ja laius 1,2 cm, kui suhkrupeedi saak hektarilt on 550 ts.

593. Ruudukujulist metsalanki (joon. 73) läbib tee, mis jaotab selle langi kaheks mittevõrdseks osaks. Langi üks osa on teisest 526,5 a võrra suurem. Kui see tee oleks aetud 40,5 m võrra paremale, siis oleks ta langi täpselt poolitanud.

Kui suur on selle metsalangi pindala?

594. Tühi klaaskolb kaalub 24,8 g, veega täidetult 74,6 g, petrooleumiga täidetult aga 64,9 g. Arvuta nende andmete põhjal, kui palju kaalub 1 cm^3 petrooleumi.

595. Ristkülikukujuline tükk plekki kaalub 149,3 g. Selle plekitüki pikkus on 32,3 cm ja laius 12,7 cm. Mõõtmisel saadi selle plekitüki paksuseks $\frac{1}{2}$ mm. Leia plekitüki paksus arvutamise teel ja võrdle seda mõõtmise tulemusega, kui raua erikaal on 7,8

596. Ristkülikukujuline vaskplaat kaeti ühelt küljelt niklikorraga. Enne nikeldamist kaalus see plaat 48,7 g, pärast nikeldamist aga 49,5 g. Plaadi pikkus on 11,3 cm ja laius 6,5 cm. Nikli erikaal on 8,9. Leia niklikihi paksus.

597. Vundamendikaevise pikkus on 7,3 m, laius 5,5 m ja sügavus 3,5 m. Mitu autokoormat mulda tuleb sealt ära vedada, kui on teada, et 1 m^3 mulda kaalub 2,13 t ja auto kandejõud on 2,5 tonni?

598. Aia pikkus on 67,5 m ja laius 56,25 m. Mitu pange vett on vaja selle aia kastmiseks, kui maapinda tahetakse niisutada niisama tugevasti, nagu seda tegi vihmahoog, mis sadememõõtja järgi andis veekihi paksuseks 5,25 mm?

Pang mahutab 12,3 liitrit vett.

599. Torni kõige kõrgemal asuvast aknast allavisatud kivi jõudis maapinnani 4 sekundiga. On teada, et vabalt langev keha läbib esimese sekundiga 4,9 m ja iga järgmise sekundiga 9,8 m võrra rohkem kui eelmises sekundis.

Leia selle torni kõrgus, kui torni tipuni on viimasest aknast veel 4 m.

600. Teosta tehted ligikaudsete arvudega:

a) $(2500+46{,}12-11\,220 : 38) : 8$;
b) $0{,}28 : (0{,}64 \cdot 0{,}843+0{,}78 \cdot 0{,}8-26{,}078 : 32{,}6)$;
c) $(2{,}17 \cdot 4{,}3+3{,}07 : 0{,}3-7{,}8 \cdot 1{,}2) \cdot 0{,}8$;
d) $3{,}58 : 12-0{,}28) \cdot 8+0{,}028$;
e) $(5{,}05 : 200) \cdot 63-0{,}4725$.

Märkus. *Jämedas kirjas on antud täpsed arvud.*

601. Leia järgmiste avaldiste ligikaudne väärtus, teisendades harilikud murrud kümnendmurdudeks sajandikeni.

a) $\frac{\left(7\frac{5}{6}-6\frac{7}{8}\right)\cdot 13\frac{1}{3}}{3\frac{11}{12}}$; b) $\frac{7\frac{1}{3}+8\frac{1}{6}}{5\frac{1}{2}-1\frac{7}{12}}\cdot 10\frac{3}{7}$.

602. Lennuk, mille kiirus on 270 km tunnis, peab lendama punktist *A* punkti *B*, mis asub lähtekohast põhja suunas 1250 km kaugusel, ning siis uuesti tagasi punkti *A*.

a) Leia, kui kaua kestab lend tuulevaikse ilmaga.

b) Kui kaua kestab lend lõunatuule puhul, mis puhub kiirusega 37,5 km tunnis?

603. Risttahukakujulise metallitüki pikkus on 0,14 m, laius 0,4 dm ja paksus 2 cm. See metallitükk kaalub 873,6 g. Teise samast metallist risttahukakujulise metallitüki mõõtmed on 0,09 m×0,8 dm×0,2 dm. Kui palju kaalub teine metallitükk?

604. Viljapeade noppimine pärast lõikust annab täiendavalt miljoneid tsentnereid teravilja. Kooliõpilased korjasid 125 ha suuruselt nisupõllult viljapäid, kusjuures igalt ruutmeetrilt leiti neid keskmiselt 4. Kui palju teravilja saadi õpilaste poolt kogutud viljapeadest, kui igas viljapeas olevate terade kaaluks arvata 1 g?

605. Toa pikkus on 8,4 m, laius 6,5 m ja kõrgus 4 m. Sellel toal on 3 akent, kõrgusega 1,64 m ja laiusega 1,2 m, ja kaks ust, mille kõrgus on 2 m 20 cm ja laius 1 m. Mitu rulli tapeeti on vaja osta selle toa tapeetimiseks, kui tapeedirulli laius on 50 cm ja tapeeti on rullis 12 m, kui kadudeks arvestada 10%?

606. Viljasalve pikkus on 12 m ja laius 8 m. Vilja sügavus salves on 1,5 m. Selleks et teada saada, kui palju kaalub salves olev vili, võeti kast sisemiste mõõtmetega 0,5 m×0,5 m×0,4 m, täideti see ääreni viljaga ning kaaluti. Kastitäis teri kaalus 80 kg. Kui palju kaalub salves olev vili?

607. Katuse katmiseks kasutati ristkülikukujulisi katusekive, mille pikkus oli 25 cm ja laius 17 cm. Katus koosneb kahest ristkülikukujulisest osast, kummagi pikkus on 14 m ja laius 6,25 m. Kui palju kive on vaja selle katuse katmiseks, kui on teada, et katusekivide osaliselt üksteise peale asetamisel katab iga kivi katust 40% ulatuses kivi pindalast.

608. Nõu koos veega kaalus 68,4 kg. Kui sellest nõust kallati ära 78% seal olevast veest, siis kaalus nõu koos ülejäänud veega 28,3 kg. Kui palju kaalub tühi nõu?

609. Tühi nõu kaalub 15,2 g, elavhõbedaga täidetult aga 263 g. Leia selle nõu ruumala, kui on teada, et 1 cm^3 elavhõbedat kaalub 13,6 g.

610. Kolhoosi 42 ha suuruselt nisupõllult saadi 15,2 hektarilt keskmiseks saagiks 20,3 ts hektarilt, ülejäänud osalt 13,1 ts hektarilt. Kui suur oli keskmine nisusaak selle põllu igalt hektarilt?

611. Rong koosneb vedurist koos tendriga, mis kokku kaaluvad 76 t, ja 35-st kaubavagunist. Iga vagun koos kaubaga kaalub keskmiselt 23 t. Rong kulutab 1 km pikkuse tee läbimiseks rongikaalu iga tonni kohta 32 g kivisütt. Kui palju kivisütt peab vedur peale võtma sõiduks Tallinnast Tartusse, mille vahemaa on ümmarguselt 200 km?

612. Metsatukas kasvab 900 puud, neist on 300 männid ja ülejäänud kased. Kogu metsatuka puidu juurdekasv aastas on 2,3 m^3. Iga männi juurdekasv aastas moodustab 0,003 m^3. Arvutada iga kase juurdekasv aastas.

613. Pirita—Kose—Kloostrimetsa võidusõidu ringraja pikkus olevat 6,7554 km. Sõitja läbis sellę 3 minuti 27 sekundiga. Arvuta keskmise kiiruse alamtõke ja ülemtõke. Kas saab uskuda võistluse korraldajate teadet, et sõitja keskmine kiirus oli 117,485 km tunnis?

KORDAMISEKS.

614. Kuidas leida ligikaudsete arvude
a) summa ülemtõket? alamtõket?
b) vahe ülemtõket? alamtõket?
c) korrutise ülemtõket? alamtõket?
d) jagatise ülemtõket? alamtõket?

615. Kuidas ümardatakse ligikaudsete arvude summat ja vahet?

616. Kuidas ümardatakse ligikaudsete arvude korrutist ja jagatist?

617. Millega võrdub kolmnurga pindala? ristküliku pindala? rööpküliku pindala? trapetsi pindala? ruudu pindala?

618. Ristküliku külje ja diagonaali vaheline nurk on 27°34′. Kui suured on diagonaalidevahelised nurgad?

619. Võrdhaarse trapetsi ümbermõõt on 87 m ja haara pikkus on 16,4 m. Kui pikk on trapetsi kesklõik?

620. Leia arvude 120 ja 80 suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

621. Lihtsusta avaldis

$$\left[\frac{2}{3a}-\frac{2}{a+b}\left(\frac{a+b}{3a}-a-b\right)\right]:\frac{a-b}{a}.$$

622. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right):\left(1+\frac{b}{a}\right).$$

623. Lihtsusta avaldis

$$\frac{ab}{(a+b)^2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

624. Lihtsusta avaldis

$$\frac{ab}{a^2-2ab+b^2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right).$$

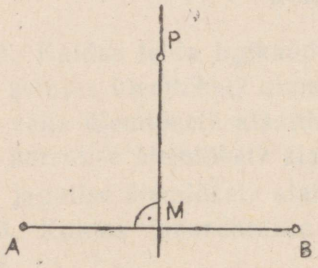
7. RINGJOON. SILINDER. KOONUS. KERA.

KÕÕLUGA RISTUV DIAMEETER.

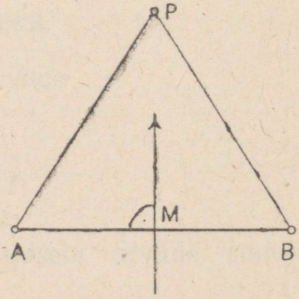
625. Kuidas nimetatakse sirget PM lõigu AB suhtes, kui PM on risti lõiguga AB ja poolitab selle lõigu (joon. 80)?

626. Lõigu AB keskristsirgel on võetud mingi punkt P (joon. 80). Mis võid öelda kolmnurkadest AMP ja BMP, mis tekivad lõigu AB otspunktide ühendamisel punktiga P? Kas lõigud AP ja BP on võrdsed või mitte? Miks? Kas see omadus on kõigil lõigu keskristsirge punktidel?

Lõigu keskristsirge iga punkt on lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel.



Joon. 80.



Joon. 81.

627. Joonesta lõik $AB = 6$ cm. Leia kolm punkti K, L ja M nii, et esimene neist oleks lõigu AB otspunktidest 4 cm, teine 5 cm ja kolmas 6 cm kaugusel. Kas punktid K, L ja M asetsevad ühel sirgel või mitte? Mis sirge see on? Leia veel mingi punkt, mis asetseb lõigu AB otspunktidest võrdsetel kaugustel? Kas see punkt asetseb lõigu AB keskristsirgel või mitte?

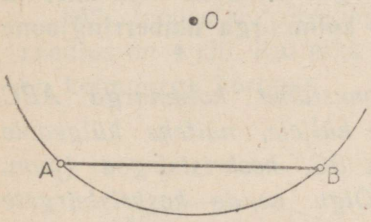
Iga punkt, mis on lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel, asetseb selle lõigu keskristsirgel.

628. Joonisel 81 on kujutatud võrdhaarne kolmnurk *PAB*, mille alusele *AB* on joonestatud keskristsirge. Kas see sirge läbib kolmnurga tippu *P* või mitte? Kummast ülalantud lausest see järeldub?

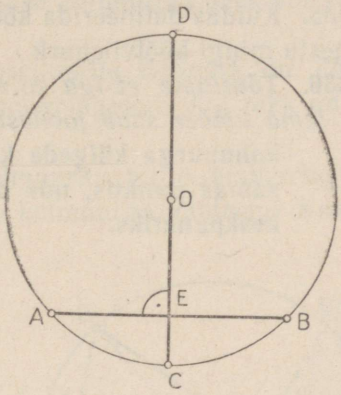
629. Ringjoon läbib punkte *A* ja *B* (joon 82). Mis on lõik *AB* selle ringjoone suhtes? Kuidas asetseb ringi keskpunkt *O* kõõlu otspunktide suhtes? Põhjenda väidet, et

kõõlu keskristsirge läbib ringjoone keskpunkti.

Kummast eespool antud lausest see järeldub?



Joon. 82.



Joon. 83.

630. Joonis 83 kujutab ringjoont koos kõõluga AB ja selle kõõluga ristuva diameetriga *CD*. Tõesta teoreem:

kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu ja selle otspunkte ühendavad kaared.

Mis on siin eelduseks, mis väiteks? Tõestuseks näita, mis juhtub joonise pooltega, kui joonis mööda sirget *CD* kokku murda.

631. Olgu antud, et diameeter *DC* joonisel 83 poolitab kõõlu *AB*. Kuidas nüüd tõestada, et diameeter *DC* on risti selle kõõluga? Kasuta tõsiasja, et kolmnurk *OAB* on võrdhaarne.

632. On antud lõik $AB=4$ cm. Joonesta viis ringjoont, millele see lõik on ühiseks kõõluks ja mille raadiused on vastavalt 3 cm, 3 cm, 2,5 cm, 2,5 cm ja 2 cm.

633. Joonesta ringjoon, mis läbib kaht antud punkti ja mille keskpunkt asetseb antud sirgel. Millal sel ülesandel lahend puudub?

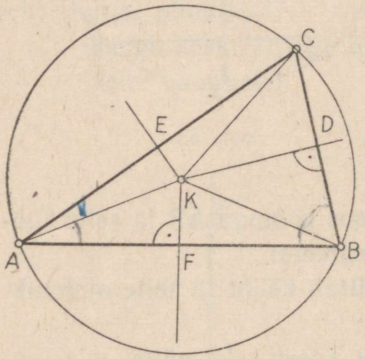
634. Joonesta mingi ringjoon, võta sellel kolm punkti ja ühenda need nii, et saaksid kolmnurga. Mis on selle kolmnurga küljed ringjoone suhtes?

Kolmnurka, mille tipud asetsevad ringjoonel, nimetatakse kõõlkolmnurgaks. Ringjoont, mis läbib kolmnurga tippe, nimetatakse kolmnurga ümberringjooneks.

Kõõlkolmnurga kohta öeldakse, et ta on **joonestatud ringjoone sisse.** *Kolmnurga ümberringjoone kohta öeldakse, et ta on* **joonestatud kolmnurga ümber.**

635. Kuidas defineerida kõõlnelinurka? üldiselt kõõlhulknurka? Joonesta mingi kõõlviisnurk.

636. *Tõestame, et iga kolmnurga saab teha kõõlkolmnurgaks, s. t. tema ümber saab joonestada ringjoone. Selleks tõestame, et* **kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad kõik ühes ja samas punktis, mis on selle kolmnurga ümberringjoone keskpunktiks.**



Joon. 84.

Joonestame kolmnurga ABC kahele küljele, näiteks külgedele AB ja BC, keskristsirged (joon. 84). Olgu nende keskristsirgete lõikepunkt K. Siis AK = BK (miks?) ja BK = CK (miks?), järelikult ka AK = CK. See võrdus näitab, et kolmnurga kahe külje AB ja BC keskristsirgete FK ja DK lõikepunkt K asetseb ka kolmanda külje AC keskristsirgel, sest ta on selle külje otspunktidest võrdsetel kaugustel. Seega kõik kolm keskristsirget lõikuvad ühes ja samas punktis K, mida oligi vaja tõestada. See punkt, asetsedes kolmnurga tippudest võrdsetel kaugustel, on neid tippe läbiva ringjoone keskpunktiks. Et kolmnurga külgede keskristsirged alati lõikuvad ja ainult ühes punktis, siis igal kolmnurgal leidub ümberringjoon.

637. Eelmisest teoreemist järeldub, et

läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, läheb üks ja ainult üks ringjoon.

Võta kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel, ja joonesta neid punkte läbiv ringjoon.

638. Kuidas leida joonisel ringjoone keskpunkt, kui see ei ole teada?

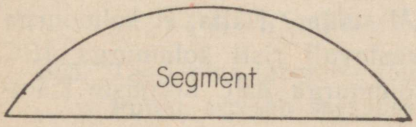
639. a) Joonesta ümberringjoon täisnurksele kolmnurgale, mille hüpotenuus on 5 cm ja üks kaatet on 4 cm. Leia, kui pikk on selle ringjoone raadius.

b) Näita, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi keskpunkt on tema ümberringjoone keskpunktiks.

640. Joonesta nürinurkne kolmnurk koos ümberringjoonega. Kas selle ringjoone keskpunkt asetseb kolmnurga sees või väljaspool kolmnurka?

641. Ehita võrdhaarne kolmnurk, mille tipunurk on 120° ja haar 5 cm. Joonesta kolmnurga ümberringjoon. Kui pikk on selle ringjoone raadius?

642. Joonesta võrdkülgne kolmnurk, mille ümberringjoone raadius on 4 cm. Kui pikk on selle kolmnurga apoteem? Kui suur on kolmnurga kõrgus?



Joon. 85.



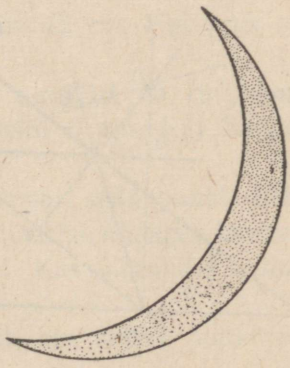
Joon. 86.

643. Joonis 85 kujutab ringi segmenti. Millega on piiratud segment? Kuidas joonestamise teel leida segmendi kaare raadiust?

644. Ümmargusest esemest on säilinud joonisel 86 kujutatud tükike. Kuidas teha kindlaks eseme läbimõõtu?

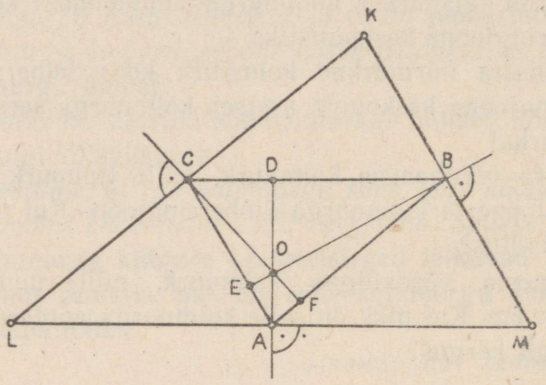
645. a) Joonesta mingi «kuusirp» (joon. 87), mida piiravad võrdsete raadiustega kaared.

b) Joonesta mingi «kuusirp» (joon. 87), mida piiravad mittevõrdsete raadiustega kaared.



Joon. 87.

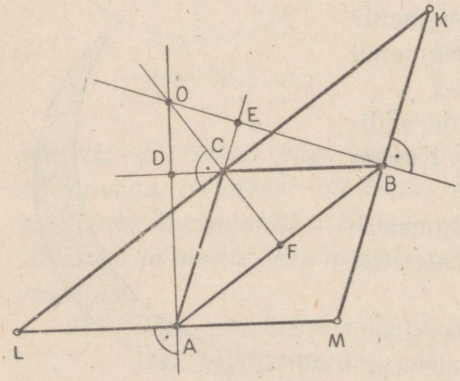
646. Joonesta mingi teravnurkne kolmnurk *KLM* ja selle külgede kolm keskristsirget. Mida tead kolmnurga külgede keskristsirgete lõikumise kohta? Tähista nende lõikepunkt mingi tähega, näiteks tähega *O*. Joonesta nüüd kolmnurk *ABC*, mille tippudeks on antud kolmnurga külgede keskpunktid (joon. 88). Mis on kolm-



Joon. 88.

nurga *ABC* küljed kolmnurga *KLM* suhtes? Näita, et kolmnurga *KLM* külgede keskristsirged on vastavalt risti kolmnurga *ABC* külgedega. Mis sellest järeldub kolmnurga *ABC* kõrguste lõikumise kohta?

647. Lahenda eelmine ülesanne veel kord, võttes kolmnurgaks *KLM* nürinurkse kolmnurga (joon. 89).



Joon. 89.

648. Kuidas saab valmistada jooniseid 88 ja 89, alates kolmnurgast *ABC*? Mis on kolmnurga *ABC* kõrgused *AD*, *BE* ja *CF* kolmnurga *KLM* külgede suhtes? Mis sellest järeldub kolmnurga *ABC* kõrguste kohta?

Kolmnurga kõrgused või nende pikendused lõikuvad kõik ühes ja samas punktis.

649. Mis on kõrguste lõikepunktiks täisnurksel kolmnurgal?

650. Millega võrdub kolmnurga pindala? Põhjenda väidet, et igas kolmnurgas

$$ah_a = bh_b = ch_c,$$

kus a, b, c on kolmnurga külgede pikkused ja h_a, h_b, h_c on vastavalt nendele külgedele joonestatud kõrgused.

651. Kolmnurga külg $a = 4{,}8$ m ja $c = 6{,}2$ m. Kolmnurga kõrgus $h_c = 3{,}6$ m. Arvuta küljele a joonestatud kõrgus.

652. Kolmnurga pindala on 24,5 a ja üks külg on 35 m. Kui pikk on sellele küljele joonestatud kõrgus?

653. Võrdhaarse kolmnurga alus on 6 cm ja haar 5 cm. Joonesta kolmnurk, mõõda alusele joonestatud kõrgus, arvuta pindala ja selle põhjal haarale joonestatud kõrgus. Kontrolli tulemust otsese mõõtmisega.

PUNKTI JA RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEND.

654. Tasapinnal on ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega 3 cm. Otsusta, kas tasapinna punkt M asetseb seespool ringjoont, ringjoonel või väljaspool ringjoont, kui

$$OM = 5 \text{ cm}; \quad OM = 2{,}5 \text{ cm}; \quad OM = 3 \text{ cm}.$$

655. Tee joonis järgmise lause selgitamiseks.
Punkt asetseb seespool ringjoont, ringjoonel või väljaspool ringjoont vastavalt sellele, kas punkti kaugus ringjoone keskpunktist on väiksem kui raadius, võrdne raadiusega või suurem kui raadius.

656. a) Väljaspool ringjoont asetsevast punktist on ringjoone lähima punktini 5 cm ja kaugeima punktini 12 cm. Kui pikk on raadius?

b) Seespool ringjoont asetsevast punktist on ringjoone lähima punktini 3 cm ja kaugeima punktini 6 cm. Kui kaugel asetseb punkt ringjoone keskpunktist?

657. a) On antud ringjoon ja väljaspool seda punkt. Leia ringjoone punktid, mis asetsevad antud punktist niisama kaugel, nagu see punkt on ringjoone keskpunktist. Kas ülesandel leidub alati lahend?

b) Lahenda eelmine ülesanne juhul, kui antud punkt on seespool ringjoont.

SIRGE JA RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEND.

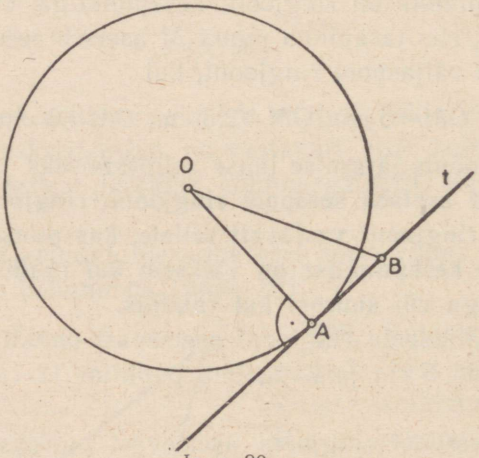
658. a) Joonesta ringjoon ja selle mingi kõõl. Pikenda seda kõõlu üle mõlema otspunkti. Mitu ühist punkti on saadud sirgel ringjoonega?

Sirget, millel on ringjoonega kaks ühist punkti, nimetatakse ringjoone lõikajaks.

b) Joonesta ringjoon ja selle mingi lõikaja. Leia lõikaja kaugus ringjoone keskpunktist ja võrdle seda raadiusega. Põhjenda ilma mõõtmiseta, et

ringjoone lõikaja kaugus ringjoone keskpunktist on väiksem kui raadius.

659. Joonesta ringjoon ja selle mingi raadius OA. Ehita raadiusele OA ringjoonel asetsevast otspunktist A ristsirge t (joon. 90). Tõesta, et sirgel t on ringjoonega ainult üks ühine punkt, nimelt punkt A. Tõestuseks võta sirgel t mingi muu punkt (mitte A), näiteks punkt B, ühenda see punktiga O ja näita, et võetud punkti



Joon. 90.

kaugus ringjoone keskpunktist on suurem kui raadius. Mis sellest järeldub punkti B asukoha kohta? Kus asetsevad siis sirge t kõik punktid, välja arvatud punkt A?

Sirget, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt, nimetatakse ringjoone puutujaks. Seda ühist punkti nimetatakse puutepunktiks.

Eespool kasutatud puutuja t ehitusviis näitab, et

raadiusega ristuv sirge, mis läbib raadiuse otspunkti ringjoonel, on ringjoone puutuja.

Ümberpöördult:

ringjoone puutuja on risti puutepunktist lähtuva raadiusega.

Tõepoolest, kui sirge t on ringjoone puutuja punktis A ja raadius OA ei oleks risti sirgega t (joon. 90), siis tõmmates punktist O sirgele t ristsirge OB saaksime täisnurkse kolmnurga OBA, milles kaatet OB oleks pikem kui hüpotenuus OA. Et see pole võimalik, siis peab raadius OA olema risti puutujaga t.

660. Kuidas leida sirge kaugust punktist? Kuidas leida puutuja kaugust ringjoone keskpunktist? Näita, et

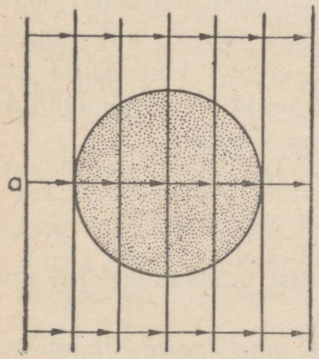
puutuja kaugus ringi keskpunktist võrdub raadiusega.

661. Mida võib öelda sirgest, kui on teada, et tema kaugus ringjoone keskpunktist a) on väiksem kui raadius, b) võrdub raadiusega, c) on suurem kui raadius?

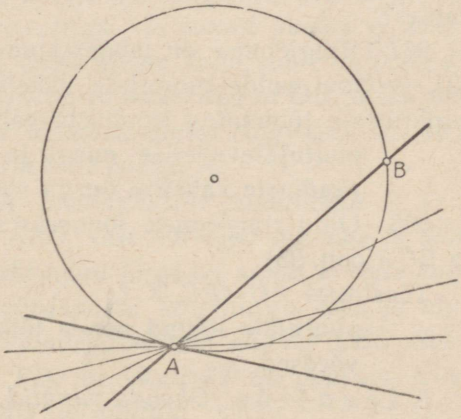
662. Joonesta vabalt võetud raadiusega r ringjoon ja kolm üksteisega paralleelset sirget nii, et nende kaugused ringi keskpunktist on vastavalt $0{,}5r$, r ja $1{,}5r$. Näita, et äärmiste sirgete vaheline kaugus võib olla r, $2r$ või $2{,}5r$.

663. a) Mis saab väljaspool ringjoont asetsevast sirgest a joonisel 91, kui ta liigub nooltega näidatud sihis?

b) Mis saab lõikajast AB joonisel 92, kui seda lõikajat pöörata tema lõikepunkti A ümber, kuni teine lõikepunkt B ühtib lõikepunktiga A?



Joon. 91.



Joon. 92.

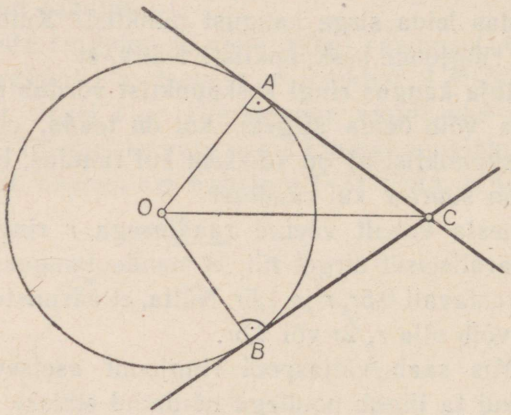
664. Ehita antud raadiusega ringjoon, mis läbib antud punkti ja mille keskpunkt asetseb antud sirgel. Millal on sel ülesandel üks lahend, millal kaks lahendit, millal lahend puudub?

665. a) Joonesta antud keskpunktiga ringjoon, mis puudutab antud sirget.

b) Joonesta ringjoon, mis läbib antud punkti A ja puudutab antud sirget selle antud punktis B.

666. a) Joonesta puutuja, kui on antud ringjoone keskpunkt ja puutepunkt.

b) Joonesta antud ringjoonele puutujad tema ühe ja sama



Joon. 93.

diameetri otspunktidest. Kuidas asetsevad need puutujad teineteise suhtes?

667. Ringjoonele on joonestatud kaks lõikuvat puutujat (joon. 93). Arvuta nende puutujate vahelise nurga suurus, kui puutepunktidesse tõmmatud raadiuste vaheline nurk on 112°. Näita, et

puutujatevahelise nurga ja puutepunktidesse tõmmatud raadiuste vahelise nurga summa on sirgnurk.

668. Olgu ringjoonele joonestatud kaks lõikuvat puutujat AC ja BC (joon. 93).

Tõesta, et $AC = BC$, s. t.

puutujate lõigud nende lõikepunktist puutepunktideni on võrdsed.

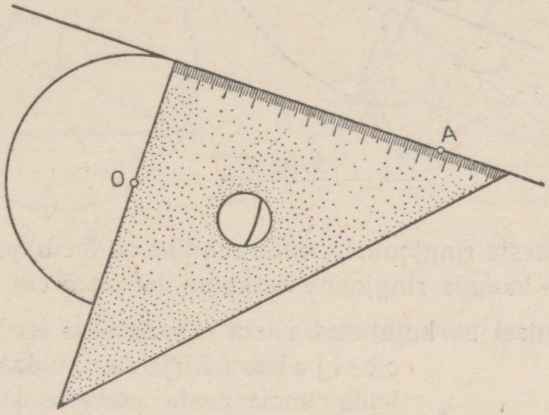
N ä p u n ä i d e. *Ühenda punktid O ja C ning vaatle kolmnurki AOC ja BOC (joon. 93).*

Mis on kiir CO nurga ACB suhtes?

Puutujatevahelise nurga poolitaja läbib ringjoone keskpunkti.

669. Joonesta antud ringjoonele puutujad läbi punkti, mis on väljaspool ringjoont.

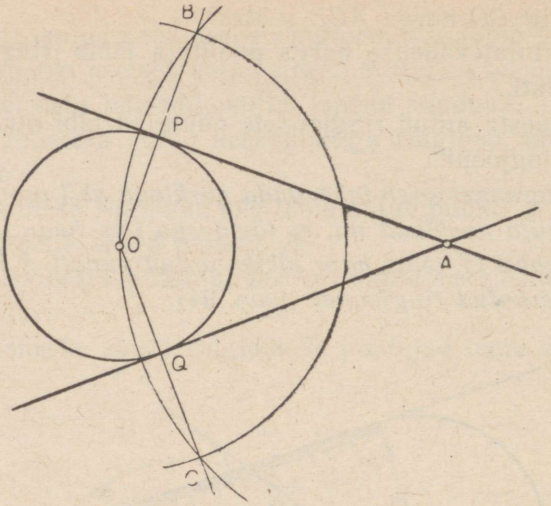
a) *Ülesannet saab lahendada nurklaua abil proovimise teel. Selleks paiguta nurklaud nii, et täisnurga üks haar läbiks antud ringi keskpunkti O, teine haar läbiks antud punkti A ja täisnurga tipp asetseks antud ringjoonel (joon. 94).*



Joon. 94.

b) *Ülesande lahendamiseks sirkli ja joonlaua abil joonesta antud ringjoone keskpunkti O ümber uus ringjoon raadiusega, mis võrdub antud ringjoone diameetriga, ja antud punkti A ümber ringjoon, mis läbib punkti O. Olgu nende kahe uue ringjoone lõikepunktid B ja C (joon. 95). Joonesta nüüd lõigud OB ja OC ning leia punktid P ja Q, kus nad lõikavad antud ringjoont. Nii sirge PA kui ka sirge QA on puutuja läbi punkti A.*

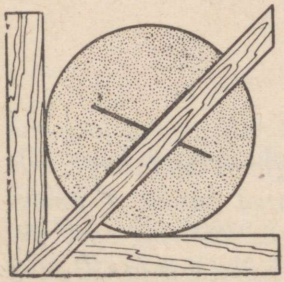
Põhjendus. *Punkti A ühendamisel punktidega B ja O tekiks võrdhaarne kolmnurk ABO, sest $AB=AO$ kui ühe ja sama ringjoone raadiused. Konstruktsiooni järgi on punkt P selle kolmnurga aluse keskpunkt; et võrdhaarse kolmnurga tipu ja aluse keskpunkti ühenduslõik on kolmnurga kõrgus, siis $AP \perp BO$. Seega sirge AP on risti raadiusega PO, järelikult AP on puutuja. Niisamuti saab näidata, et sirge AQ on puutuja.*



Joon. 95.

670. Joonesta ringjoonele, mille raadius on 3 cm, puutujad läbi punkti, mille kaugus ringjoone keskpunktist on 5 cm.

671. Joonisel 96 kujutatud riista nimetatakse k e s k p u n k t i o t s i j a k s. Kirjelda, kuidas tema abil leida ümmarguste esemete keskpunkti ja missugusel puutujate omadusel põhineb see leidmine.



Joon. 96.

672. On antud ringjoone kaks lõikuvat puutujat ja puutepunkt ühel neist. Joonesta ringjoon.

673. Tõesta, et kui punkti kaugus ringi keskpunktist võrdub diameetriga, siis sellest punktist tõmmatud puutujate vaheline nurk on 60°.

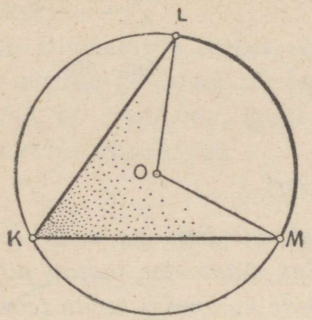
PIIRDENURK.

674. *Joonesta ringjoone ühest ja samast punktist K kaks kõõlu KL ja KM (joon. 97). Nende kõõlude vahelist nurka LKM nimetatakse* **piirdenurgaks.** *Piirdenurga kohta öeldakse, et ta toetub*

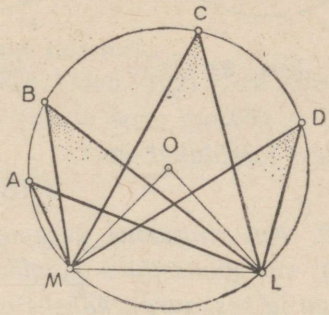
nurga sees olevale kaarele, näiteks piirdenurk LKM toetub kaarele LM. Samale kaarele toetub ka üks kesknurk, nimelt kesknurk LOM.

Missugusele kaarele toetuvad piirdenurgad *A*, *B*, *C* ja *D* joonisel 98?

Mitu piirdenurka toetub ühele ja samale kaarele? Mitu kesknurka toetub sellele kaarele?



Joon. 97.



Joon. 98.

675. Mõõda piirdenurk ja samale kaarele toetuv kesknurk. Kumb on suurem ja mitu korda?

676. *Tõestame, et*

piirdenurk võrdub poolega samale kaarele toetuvast kesknurgast.

Olgu $\angle ABC$ piirdenurk ja $\angle AOC$ kesknurk, mis toetuvad ühele ja samale kaarele. Tõestame siis, et $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC$.

Tõestamisel tuleb vaadelda kolme võimalikku juhtumit:

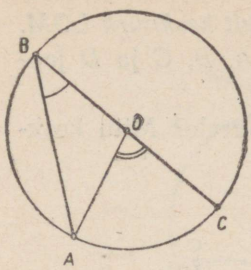
1. *ringjoone keskpunkt asetseb piirdenurga ühel haaral (joon. 99.);*
2. *ringjoone keskpunkt asetseb piirdenurga sees (joon. 100);*
3. *ringjoone keskpunkt asetseb väljaspool piirdenurka (joon. 101).*

1. *Kui ringjoone keskpunkt O asetseb piirdenurga haaral BC, siis kesknurk AOC on kolmnurga ABO välisnurk ja seetõttu*

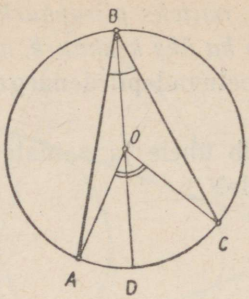
$$\angle AOC = \angle AOB + \angle OAB.$$

Et kolmnurk OAB on võrdhaarne (miks?), siis saadud võrduse paremal poolel on võrdsed liidetavad ja seega

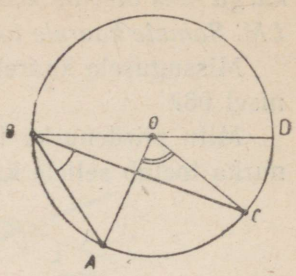
$$\angle AOC = 2 \cdot \angle ABO,$$



Joon. 99.



Joon. 100.



Joon. 101.

millest järeldubki, et

$$\angle ABC = \tfrac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

2. *Kui ringjoone keskpunkt asetseb piirdenurga sees (joon.* 100), *siis joonestame diameetri BD. See diameeter jaotab piirdenurga ja kesknurga kaheks osaks, millede kummagi kohta teoreem on eelmises punktis tõestatud:*

$$\angle ABD = \tfrac{1}{2} \cdot \angle AOD;$$
$$\angle DBC = \tfrac{1}{2} \cdot \angle DOC.$$

Liites esimese võrduse pooltega teise võrduse pooled ja viies paremal ühise teguri $\frac{1}{2}$ *sulgude ette, saame*

$$\angle ABD + \angle DBC = \tfrac{1}{2}(\angle AOD + \angle DOC)$$

ehk

$$\angle ABC = \tfrac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

3. *Kui ringjoone keskpunkt asetseb väljaspool piirdenurka (joon.* 101), *siis joonestades diameetri BD saame piirdenurga ABC esitada kahe niisuguse piirdenurga vahena, millede kohta teoreem on juba tõestatud:*

$$\angle ABD = \tfrac{1}{2} \cdot \angle AOD;$$
$$\angle CBD = \tfrac{1}{2} \cdot \angle COD.$$

Lahutades esimese võrduse pooltest teise võrduse pooled ja viies paremal ühise teguri $\frac{1}{2}$ *sulgude ette, saame*

$$\angle ABD - \angle CBD = \tfrac{1}{2}(\angle AOD - \angle COD)$$

ehk

$$\angle ABC = \tfrac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

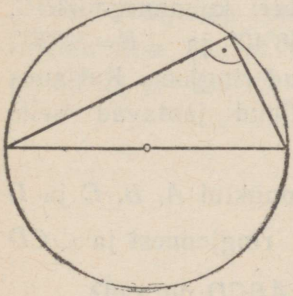
Sellega on teoreem täielikult tõestatud.

677. *Teoreemist piirdenurga kohta teeme järgmised järeldused.*

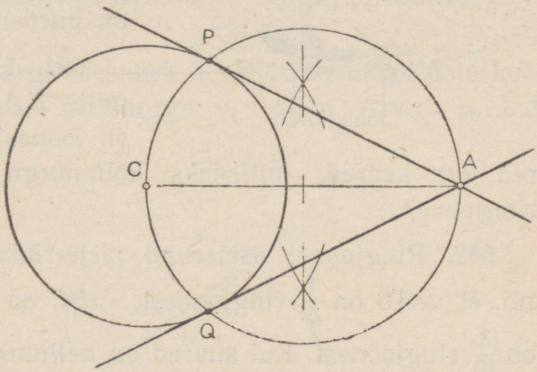
1. **Ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed, sest igaüks neist võrdub poolega ühest ja samast kesknurgast. Nende piirdenurkade tipud asetsevad kaarel** *MCL* (*joon.* 98), **mille igast punktist** *A, B, C, ...* **paistab kaare otspunkte ühendav kõõl** *ML* **ühes ja samas vaatenurgas.**

2. **Võrdsetele kaartele toetuvad piirdenurgad on võrdsed** (miks?).

3. **Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk,**
sest vastav kesknurk on kaks täisnurka (*joon.* 102). *See järeldus näitab, et ringjoone igast punktist* (*peale kahe punkti*) *paistab diameeter täisnurgas.*



Joon. 102.



Joon. 103.

Viimast järeldust nimetatakse Thalese* teoreemiks. *Seda teoreemi saab kasutada täisnurkse kolmnurga ehitamiseks antud hüpotenuusi ja kaateti järgi. Selleks joonestame ringjoone, mille diameetriks on antud hüpotenuus, ja mõõdame diameetri ühest otspunktist kõõlu, mis võrdub antud kaatetiga. Selle kõõlu ja diameetri teiste otspunktide ühendamisel saame nõutud täisnurkse kolmnurga.*

678. *Thalese teoreem annab uue võimaluse ringjoone puutuja ehitamiseks punktist, mis asetseb väljaspool ringjoont. Selleks ühendame antud punkti A antud keskpunktiga C ja joonestame ringjoone, millele lõik AC on diameetriks* (*joon.* 103). *Siis leiame*

* Thales, kreeka filosoof ja matemaatik, elas VI saj. 1. poolel e. m. a.

saadud ringjoone ja antud ringjoone ühised punktid P ja Q ning joonestame sirged AP ja AQ.

Teosta see konstruktsioon ja põhjenda, et *AP* ja *AQ* on puutujad.

679. Missugust joont mööda tuleks paadiga sõita Tallinna lahel, et rand linna piirides paistaks kogu aeg täisnurgas (joon. 104).



Joon. 104.

680. a) Kui suur piirdenurk toetub kaarele 40°, 75°, 118°20′, 131°48′?

b) Piirdenurk toetub kaarele, mis on 76° võrra väiksem ringjoone ülejäänud osast. Kui suur on piirdenurk?

681. Ümber kolmnurga *ABC*, mille $\angle A = 58°40'$ ja $\angle B = 72°30'$, on joonestatud ringjoon. Kui suured on kaared, milledeks kolmnurga tipud jaotavad selle ringjoone?

682. Ringjoonel asetsevad järjestikku punktid *A*, *B*, *C* ja *D* nii, et $\smile AB$ on $\frac{1}{5}$ ringjoonest, $\smile BC$ on $\frac{1}{6}$ ringjoonest ja $\smile CD$ on $\frac{3}{10}$ ringjoonest. Kui suured on nelinurga *ABCD* nurgad?

683. Kaks ringjoont lõikuvad punktides *A* ja *B*. Punktist *A* on joonestatud mõlema ringjoone diameetrid *AC* ja *AD*. Tõesta, et punktid *B*, *C* ja *D* asetsevad ühel ja samal sirgel.

Näpunäide. *Joonesta kõõl AB ja vaatle nurki ABC ja ABD.*

684. a) Ringjoonel on märgitud järjestikku punktid *A*, *B*, *C* ja *D* nii, et kaared *AB* ja *CD* on võrdsed. Tõesta, et kõõlud *AD* ja *BC* on paralleelsed.

Näpunäide. *Joonesta kõõl AC ja vaatle tekkinud piirdenurki.*

b) Ringjoonel on märgitud järjestikku punktid *A*, *B*, *C* ja *D* nii, et kaared *AB* ja *CD* on võrdsed. Tõesta, et kõõlud *AC* ja *BD* on võrdsed.

Näpunäide. *Võrdle kaari, milledele need kõõlud toetuvad.*

685. Antud on lõik $AB=4$ cm. Missugusel joonel asetsevad punktid, milledest lõik AB paistab täisnurgas.

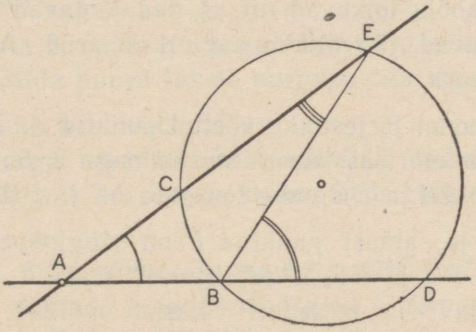
686. Antud on võrdkülgne kolmnurk, mille üheks küljeks on lõik AB, ja sirge s, mis lõikab selle kolmnurga kaht ülejäänud külge. Leia sirgel s kaks punkti, milledest lõik AB on näha nurgas 60°.

687. a) Ringi sisse on joonestatud korrapärane kuusnurk. Missuguse osa ringjoonest moodustab kuusnurga nurgale (kui piirdenurgale) vastav kaar? Leia selle nurga suurus.

b) Ringi sisse on joonestatud korrapärane viisnurk. Kui suur on selle viisnurga nurk?

688. Tõesta, et korrapärase viisnurga ühest ja samast tipust tõmmatud diagonaalid jaotavad hulknurga nurga võrdseteks osadeks.

689. Väljenda kolmnurga sisenurk α teise sisenurga β ja kolmanda tipu juures oleva välisnurga γ_1 kaudu. Arvuta α, kui $\beta=38°$ ja $\gamma_1=117°$.



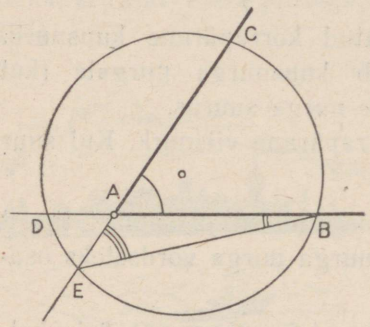
Joon. 105.

690. a) Väljaspool ringjoont asetsevast punktist A on joonestatud ringjoonele kaks lõikajat ACE ja ABD (joon. 105), millede vahel on kaared BC ja DE. Kaar BC on 54° ja kaar DE on 132°. Kui suur on $\angle AEB$, $\angle EBD$, $\angle BAC$?

b) Arvuta eelmise ülesande eeskujul väljaspool ringjoont lõikuvate lõikajate vaheline nurk BAC, kui nurga haarade vahel olevad kaared on 34° ja 105°.

691. Arvuta nurk ringjoone lõikajate vahel, kui nurga sees olevad kaared on a) 78° ja 134°; b) 55° ja 172°; c) 165°17′ ja 47°39′.

692. a) Ringjoon on lõigatud kahe sirgega EC ja DB, mis lõikuvad seespool ringjoont punktis A (joon. 106). Lõikajatevahelise nurga BAC ja tema tippnurga EAD sees olevad kaared on 78° ja 25°. Kui suur on $\angle CEB$, $\angle EBD$, $\angle BAC$?



Joon. 106.

b) Arvuta eelmise ülesande eeskujul seespool ringjoont lõikuvate lõikajate vaheline nurk BAC, kui selle nurga ja tema tippnurga haarade vahel olevad kaared on 115° ja 34°.

693. Arvuta nurk ringjoone lõikajate vahel, kui selle nurga ja tema tippnurga sees olevad kaared on a) 51° ja 34°; b) 68° ja 27°20′; c) 115°14′ ja 18°24′.

694. Kaks kõõlu lõikuvad nii, et nad jaotavad ringjoone osadeks, mis suhtuvad järjestikku nagu 1 : 3 : 5 : 6. Arvuta kõõludevaheline teravnurk.

695. Ringjoonel järjestikku võetud punktid A, B, C ja D jaotavad ringjoone kaarteks, mis suhtuvad nagu 2 : 5 : 7 : 1. Kui suur on nurk sirgete AB ja DC vahel? sirgete AC ja BD vahel?

696. Ühest ja samast punktist P on ringjoonele joonestatud kaks puutujat PU ja PV. Puutepunktid U ja V jaotavad ringjoone kaheks kaareks, milledest väiksem on 134°. Joonesta kõõl UV ja leia, kui suur on $\angle PUV$, $\angle PVU$, $\angle UPV$.

697. Ühest ja samast punktist P on ringjoonele joonestatud kaks puutujat PU ja PV, milledevaheline nurk on 78°. Kui suured on kaared, milledeks puutepunktid U ja V jaotavad ringjoone?

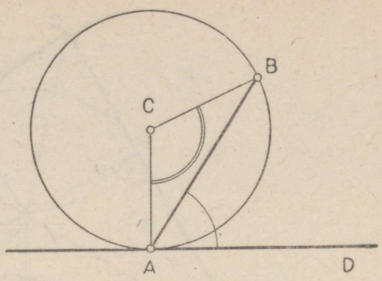
698. Arvuta puutuja ja puutepunktist tõmmatud kõõlu vaheline nurk BAD (joon. 107), kui kõõlule toetuv kesknurk $\angle ACB = 110°$.

699. Puutuja ja kõõlu vahelise nurga sees olev kaar moodustab 70% ringjoonest. Kui suur on see nurk?

700. Puutuja ja kõõlu vaheline nurk on 64°45′. Kui suured on kaared, milledeks kõõl jaotab ringjoone?

701. Kui suur on korrapärase kõõlkolmnurga külje ja selle otspunktist tõmmatud puutuja vaheline nurk?

702. Kui suur on korrapärase kõõlkuusnurga külje ja selle otspunktist joonestatud puutuja vaheline nurk?



Joon. 107.

KOLMNURGA SISERINGJOON.

703. Joonesta mingi vabalt võetud nurga poolitaja sirkli ja joonlaua abil. Võta nurgapoolitajal mingi punkt, leia selle kaugused nurga haaradest ja näita, et need kaugused on võrdsed.

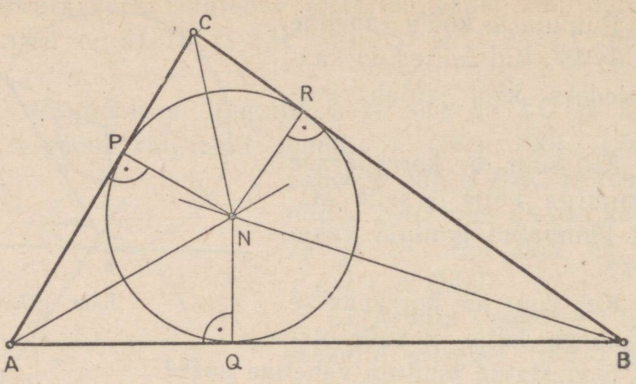
Nurgapoolitaja iga punkt on nurga haaradest võrdsetel kaugustel.

704. Joonesta mingi kolmnurga kolm nurgapoolitajat sirkli ja joonlaua abil. Mida paned tähele nurgapoolitajate kohta?

705. Tõestame teoreemi:

kolmnurga sisenurkade poolitajad lõikuvad kõik ühes punktis, mis on selle kolmnurga siseringjoone keskpunktiks.

Tõestus. *Joonestame kolmnurga ABC mingi kahe sisenurga, näiteks nurkade A ja B poolitajad ja tõmbame nende lõikepunktist N ristlõigud NP, NQ ja NR kolmnurga külgedele (joon. 108). Siis NP=NQ, sest punkt N kui nurga A poolitaja punkt on külgedest AC ja AB võrdsetel kaugustel. Niisamuti saab näidata, et NQ=NR. Neist kahest võrdusest järeldub, et ka NP=NR. Ühendades punktid C ja N, saame täisnurksed kolmnurgad PCN ja RCN, milledel on ühine hüpotenuus CN ja võrdsed kaatetid NP ja NR. Tunnuse KkN põhjal on need kolmnurgad võrdsed, tähendab ∠PCN=∠RCN. Kuid siis CN on kolmnurga nurga C poolitaja. Seega kõik kolm nurgapoolitajat lõikuvad punktis N. Ringjoon, mille keskpunktiks on punkt N ja raadiuseks on NP, läbib ka punkte Q ja R ning puudutab kolmnurga kõiki*



Joon. 108.

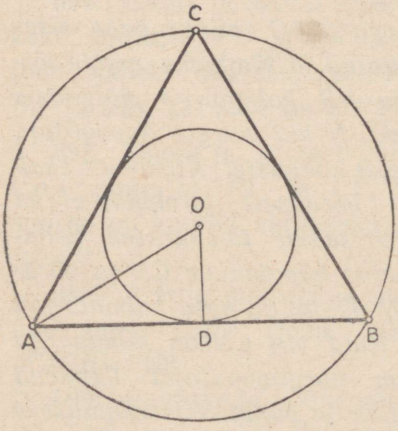
külgi (miks?). Seda ringjoont nimetatakse kolmnurga **siseringjooneks.**

Et kolmnurga nurgapoolitajad lõikuvad ainult ühes punktis, siis iga kolmnurga sisse saab joonestada ainult ühe ringjoone.

706. Tõesta, et võrdkülgse kolmnurga siseringjoone keskpunkt ja ümberringjoone keskpunkt ühtivad.

707. Joonesta kolmnurk, mille küljed on 4,5 cm, 5 cm ja 8 cm, ühes tema siseringjoone ja ümberringjoonega. Mõõda kummagi ringjoone raadius.

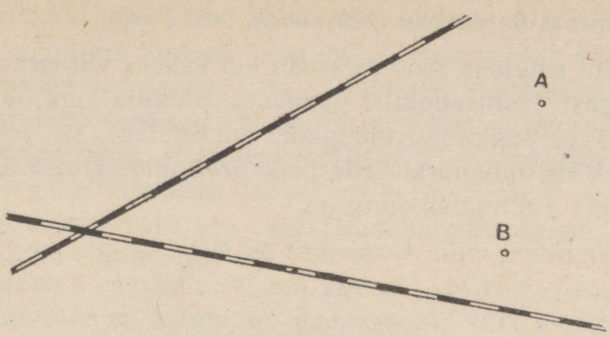
708. Näita, toetudes joonisele 109, et võrdkülgse kolmnurga *ABC* siseringjoone raadius *OD* on pool ümberringjoone raadiusest *OA*.



Joon. 109.

709. Leia vabalt võetud kolmnurga *ABC* küljel *BC* punkt, mis on kahest ülejäänud küljest võrdsetel kaugustel.

710. Joonis 110 kujutab kaht raudteed ühes kahe külaga *A* ja *B*. Kuidas leida 1) kolhoosi keskuse rajamiseks niisugune koht, mis asetseks võrdsetel kaugustel mõlemast raudteest ja võrdsetel kaugustel küladest *A* ja *B*? 2) peatuskohad raudteel, mis oleksid rajatavale kolhoosikeskusele võimalikult lähedal?



Joon. 110.

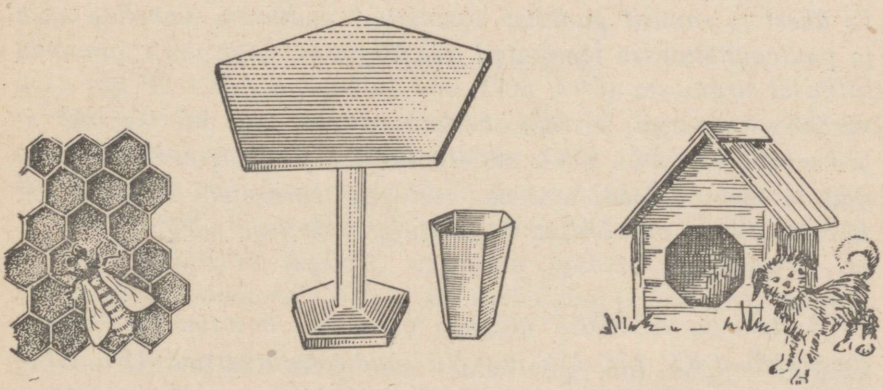
KORRAPÄRANE PUUTUJAHULKNURK.

711. Missugust hulknurka nimetatakse korrapäraseks? Kuidas joonestada korrapärast kuusnurka, korrapärast kaheksanurka, üldiselt korrapärast *n*-nurka?

Korrapäraseks hulknurgaks nimetatakse hulknurka, mille küljed on võrdsed ja nurgad on võrdsed.

712. Kus oled näinud korrapäraseid hulknurki? Nimeta joonisel 111 kujutatud esemete juures esinevaid korrapäraseid hulknurki.

713. *Kuuendas klassis õppisime tundma korrapäraseid hulknurki, mis tekivad, kui ringjoon jaotada võrdseteks osadeks ja saadud jaotuspunktid ühendada järjestikku kõõlude abil. Saadud hulknurki nimetatakse* **korrapärasteks kõõlhulknurkadeks.**

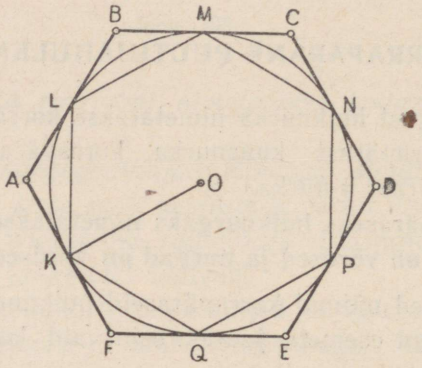


Joon. 111.

Korrapärast hulknurka võib saada veel teisiti.

Kui ringjoon jaotada enam kui kaheks võrdseks osaks ja igast jaotuspunktist tõmmata puutuja kuni lõikumiseni naaberpunktidest tõmmatud puutujatega, siis tekib korrapärane hulknurk. Seda hulknurka nimetatakse korrapäraseks puutujahulknurgaks.

Olgu ringjoon, mille keskpunkt on O ja raadius on OK, jaotatud n võrdseks kaareks, näiteks kuueks võrdseks kaareks KL, LM, MN jne. (joon. 112). Joonestades puutujad punktidest K, L, M



Joon. 112.

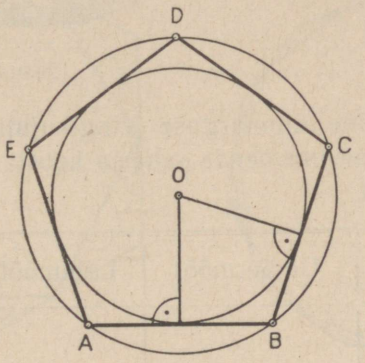
jne., saame hulknurga ABCDEF. Tõestame, et see on korrapärane. Selleks näitame esmalt, et saadud hulknurga nurgad on võrdsed. Et ühest ja samast punktist tõmmatud puutujate vaheline nurk ja puutepunktidesse tõmmatud raadiuste vaheline nurk annavad liitmisel sirgnurga (üles. 667), siis hulknurga ABCDEF iga nurk võrdub sirgnurga ja ühe kesknurga vahega. Nii saame, et $\angle A = 180° - \angle KOL$, $\angle B = 180° - \angle LOM$ *jne. Kuid need kesknurgad on kõik võrdsed, sest nad toetuvad võrdsetele kaartele KL, LM jne. Seega on võrdsed ka puutujatevahelised nurgad:*

$$\angle A = \angle B = \ldots = \angle F.$$

Hulknurga ABCDEF külgede võrdsuse tõestamiseks joonestame kõõlud KL, LM, MN jne. Nii saame kolmnurgad AKL, BLM jne., mis on võrdhaarsed, sest kaheks küljeks on neil ühest ja

samast punktist tõmmatud puutujate lõigud (üles. 668). Need kolmnurgad on ka võrdsed, sest peale tipunurkade on neil veel alused võrdsed (põhjenda seda). Kuid siis $AB=BC=CD=\ldots$, *sest igaüks neist koosneb kahest ühe ja sama pikkusega lõigust. Sellega on tõestatud, et hulknurk ABCDEF on korrapärane.*

714. Mida nimetatakse korrapärase hulknurga apoteemiks? Millega võrdub korrapärase puutujahulknurga apoteem, kui ringi läbimõõt on 14 cm? 25 cm?



Joon. 113.

715. Joonesta korrapärane kõõlviisnurk *ABCDE* (joon. 113). Tõesta, et tema küljed *AB*, *BC*, jne. on hulknurga keskpunktist *O* võrdsetel kaugustel. Joonesta ringjoon, mis puudutab hulknurga kõiki külgi.

716. Joonesta ringjoon raadiusega $r=3$ cm ja tema ümber ning sisse korrapärane kuusnurk.

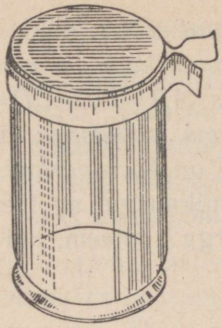
RINGJOONE PIKKUS.

717. *Ümmarguse palgi, lillepeenra, purgi jne. ümbermõõt on* **ringi ümbermõõt** *ehk* **ringjoone pikkus.** *Seda pikkust saab mõõta, kui kasutada painduvat mõõdulinti, nagu näidatud joonisel* 114.

Too näiteid, kus veel saab ringjoone pikkust niiviisi mõõta.

718. *Maapinnal leiduva ringjoone pikkuse mõõtmiseks on mõõdusirkel mõnikord sobivam kui mõõdulint (joon.* 115). *Selgita, miks.*

Too näiteid, kus maapinnal esineb ringjooni. Selgita, milleks nende pikkust on vaja mõõta ja kuidas seda tehakse.



Joon. 114.



Joon. 115.

719. Mõõda mõne ümmarguse (ringikujulise) eseme ümbermõõt ja läbimõõt, arvuta nende suhe ja koosta mõõtmise tulemustest järgmine tabel.

Eseme nimetus	Ümbermõõt	Läbimõõt	Nende suhe

Arvuta leitud suhete aritmeetiline keskmine ja võrdle seda teiste õpilaste poolt saadud keskmistega. Mida paned tähele?

720. *Täpsemad mõõtmised näitavad, et erinevate ringide ümbermõõtude ja läbimõõtude suhted ei erine üksteisest kuigi palju, olles kõik ligikaudu võrdsed arvuga* 3,14. *Seega ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe ei muutu ringi läbimõõdu muutudes ehk, teisiti öeldes, ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe on* j ä ä v *suurus. Arvutused näitavad, et see suhe on tõepoolest jääv. Järgnevast neljast ülesandest selgub, kuidas seda jäävat suhet saab arvutada järjest suurema täpsusega.*

721. Ringjoone raadius r on 5 cm. Arvuta korrapärase kõõlkuusnurga ja korrapärase puutujakuusnurga ümbermõõt (joon. 116).

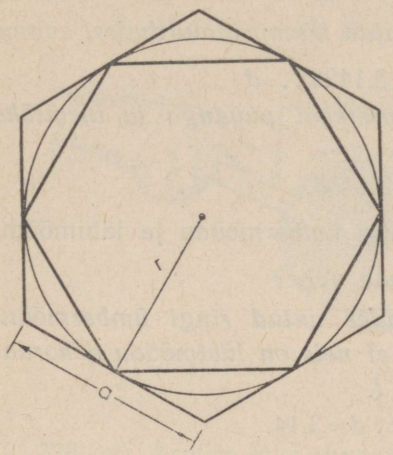
Puutujakuusnurga külje a arvutamiseks kasuta kuuendas klassis tundmaõpitud tõsiasja, et korrapärase kuusnurga apoteemi ja külje suhe on ligikaudu võrdne arvuga 0,866; *seega* $r : a = 0{,}866$ *ehk* $5 : a = 0{,}866$. *Siit saad leida a.*

Missugused kaks tõket saab antud ringi ümbermõõdule c, kui nendeks võtta kõõlkuusnurga ümbermõõt ja puutujakuusnurga

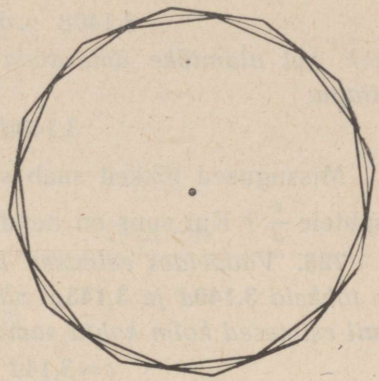
ümbermõõt? Kummast neist ringi ümbermõõt on suurem, kummast väiksem? Kirjuta tulemus võrratuste abil:

$$\ldots < c < \ldots$$

722. Lahenda eelmine ülesanne üldkujul, avaldades korrapärase kõõlkuusnurga ümbermõõdu ja korrapärase puutujakuusnurga ümbermõõdu ringi läbimõõdu d abil (joon. 116).



Joon. 116.



Joon. 117.

Korrapärase kõõlkuusnurga külg võrdub ümberringjoone raadiusega $\frac{d}{2}$.

Korrapärase kõõlkuusnurga ümbermõõt võrdub $6 \cdot \frac{d}{2} = 3d$.

Korrapärase puutujakuusnurga apoteemi ja külje suhe on $r : a = 0{,}866$.

Sellest saame, et $a : r = 1 : 0{,}866 = 1{,}155$,

seega $a = 1{,}155r = 1{,}155 \cdot \frac{d}{2} = 0{,}578d$.

Korrapärase puutujakuusnurga ümbermõõt $6a = 6 \cdot 0{,}578d = 3{,}468d$.

Ringi ümbermõõdu c *tõkked on* $3d < c < 3{,}47d$.

Missugused tõkked saab siit ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhtele $\frac{c}{d}$? Kui suur on nende tõkete vahe?

723. *Arvutades korrapärase kõõlkaksteistnurga ja korrapärase puutujakaksteistnurga ümbermõõdu (joon.* 117), *saaksime ringi ümbermõõdu* c *jaoks järgmised tõkked:*

$$3{,}10d < c < 3{,}22d.$$

Missugused tõkked saab siit ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhtele $\frac{c}{d}$? Kui suur on nende tõkete vahe?

724. *Kreeka matemaatik Archimedes, kes elas aastal 287 kuni 212 e. m. a., leidis korrapäraste 96-nurkade abil ringi ümbermõõdule c järgmised tõkked:*

$$3\frac{10}{71}d<c<3\frac{1}{7}d.$$

Väljendades tõketes esinevad kordajad kümnendmurdudes, saame

$$3{,}1408\ldots d<c<3{,}1428\ldots d$$

ehk, kui alamtõke ümardada tuhandikeni puuduga ja ülemtõke liiaga:

$$3{,}140d<c<3{,}143d.$$

Missugused tõkked saab siit ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhtele $\frac{c}{d}$? Kui suur on nende tõkete vahe?

725. *Vaadeldes eelmises ülesandes antud ringi ümbermõõtu c tõkkeid* **3,140***d ja* **3,143***d, näeme, et neis on läbimõõdu d kordajail esimesed kolm kohta samad, s. t.*

$$c\approx 3{,}14d \text{ ehk } c:d\approx 3{,}14.$$

Viimase suhte täpset väärtust tähistatakse kreeka tähega π *(pii). Kasutades seda tähist, saame:*

$$c:d=\pi \text{ ehk } c:2r=\pi.$$

Avaldades siit jagatava c, saame ringi ümbermõõdu (ehk ringjoone pikkuse) valemid:

$$\boxed{c=\pi d;\ c=2\pi r}$$

Ringi ümbermõõt võrdub arvu π ja läbimõõdu korrutisega ehk arvu 2π ja raadiuse korrutisega.

Arvu π *täpne väärtus avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna, millest on arvutatud enam kui 700 kümnendkohta. Ringi ümbermõõdu arvutamisel saab kasutada neist muidugi ainult esimesi kohti. Arvu* π *ligikaudse väärtusena kasutatakse harilikult arvu* 3,14, *mõnikord ka arvu* $3\frac{1}{7}$ *ja suuremat täpsust nõudvate arvutuste puhul arvuga* 3,1416.

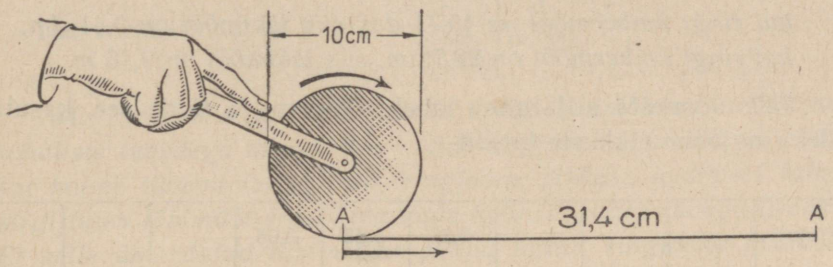
726. Ümmarguse vaagna ümbermõõdu mõõtmisel saadi tulemuseks 89,2 cm ja läbimõõdu mõõtmisel 28,4 cm. Arvuta arvu π ligikaudne väärtus.

727. a) Arvuta peast ringi ümbermõõt, kui läbimõõt on 1 m; 10 dm; 0,1 km; kui raadius on 5 cm; 0,5 dm; 1 m.

b) Arvuta ringi ümbermõõt c, kui läbimõõt $d=16$ cm; 4,5 dm; 0,8 m.

c) Arvuta ringjoone pikkus c, kui raadius $r=7$ cm; 3,8 dm; 12 m.

d) Mida kujutab joonis 118?



Joon.. 118.

728. a) Arvuta Maa ekvaatori pikkus, kui ekvaatori raadius on 6378 km.

b) Kuu liigub ümber Maa peaaegu ringjoonelist teed mööda ja tema kaugus Maast on 380 000 km. Arvuta Kuu tee pikkus.

c) Maa liigub ümber Päikese peaaegu ringjoonelist teed mööda, tehes aasta vältel ühe täistiiru. Arvuta Maa aastase tee pikkus, kui Maa kaugus Päikesest on 150 000 000 km.

729. a) *Ringjoone pikkuse kergemaks leidmiseks on koostatud tabeleid. Ühe sellise tabeli leiad õpikust lk.* 293. *Selles on antud ringi läbimõõdu väärtustele*

1,00, 1,01, 1,02, . . . , 9,98, 9,99, 10,00

vastavad ümbermõõdu väärtused:

3,14, 3,17, 3,20, . . . , 31,35, 31,38, 31,42.

Mingile antud läbimõõdule, näiteks läbimõõdule 2,76 *vastava ümbermõõdu leidmiseks võtad tabelist selle rea, mille algul (esimeses veerus) seisab antud läbimõõdu esimesest kahest kohast koosnev arv* 2,7, *ja selle veeru, mille pealkirjaks (esimeses reas) on antud läbimõõdu viimane koht* 6. *Võetud rea* 2,7 *ja veeru* 6 *lõikekohas leiad läbimõõdule* 2,76 *vastava ümbermõõdu* 8,67. *Tabeli*

kergemaks kasutamiseks lõika papist riba ja pane see selle rea alla, millest parajasti arvu otsid.

b) Kontrolli tabeli abil, et:

kui ringi läbimõõt on 1,74 dm, siis ümbermõõt on 5,47 dm;

kui ringi raadius on 3,54 m, siis ümbermõõt on 22,24 m;

kui ringi raadius on 4,5 km, siis ümbermõõt on 28,27 km.

c) *Sama tabeli abil saab leida ka ringi läbimõõtu, kui tema ümbermõõt on antud. Näiteks*

kui ringi ümbermõõt on 10,71 *dm, siis läbimõõt on* 3,41 *dm;*

kui ringi ümbermõõt on 28,78 *m, siis läbimõõt on* 9,16 *m.*

730. Joonesta alljärgnev tabel vihikusse ja täida see, kasutades ringjoone pikkuste tabelit.

r(cm)				2,36	1,65	3,65			
d(cm)	1,90	5,78	9,24						
c(cm)							25,82	17,06	5,97

731. *Kasutatud tabel võimaldab leida ringjoone pikkust ka neil juhtumitel, kui antud läbimõõtu ei leidu tabelis. Selleks tuleb teada, et kui läbimõõt d suureneb (väheneb)* 10, 100 *jne. korda, siis ringjoone pikkus* πd *samuti suureneb (väheneb)* 10, 100 *jne. korda, sest ühe teguri (d) suurenemisel (vähenemisel) mingi arv korda suureneb (väheneb) korrutis (*πd*) sama arv korda. Lühemalt öeldes, ringjoone pikkus on võrdeline läbimõõduga.*

N ä i t e i d. 1. *Et leida ringjoone pikkust, kui* $d=27$ *cm, võtame tabelist läbimõõdule* 2,7 *vastava pikkuse* 8,48 *ja suurendame seda* 10 *korda. Nii saame, et kui* $d=27$ *cm, siis* $\pi d=84{,}8$ *cm.*

2. *Et leida ringjoone pikkust, kui* $d=0{,}0852$ *m, võtame tabelist läbimõõdule* 8,52 *vastava pikkuse* 26,77 *ja vähendame seda* 100 *korda. Nii saame, et kui* $d=0{,}0852$ *m, siis* $\pi d=0{,}2677$ *m.*

732. Kasutades tabelit, leia ringjoone pikkus järgmistel andmetel:

a) läbimõõt on 15 cm, 92 m, 236 m, 928 km, 307 m, 57 dm, 1400 m.

b) läbimõõt on 0,163 cm, 0,47 km, 0,9 dm, 0,025 m, 0,06 dm, 0,007 m.

Töö vormista tabeli kujul:

d	15 cm	92 m	. . .
c	. . . .	. . . .	. . .

733. Kasutades tabelit, leia ringjoone pikkus järgmistel andmetel:

a) raadius on 8 cm, 13,5 dm, 32,6 dm, 13 m, 245 m, 382 km;

b) raadius on 0,07cm, 0,272 cm, 0,38 km, 0,415 m, 0,46 km.

Töö vormista tabeli kujul:

r	d	c
8 cm	16 cm	. . . .
13,5 dm	. . .	. . .

734. *Ringjoone pikkuste tabelis antud läbimõõdud on kolmekohaliste tüvedega arvud. Kui antud ringjoone läbimõõt on enam kui kolme tüvenumbriga, siis ringjoone pikkuse leidmisel tabeli järgi tuleb läbimõõt enne ümardada kolmekohalise tüvega arvuks. Et selle ümardatud läbimõõdu põhjal leitud ringjoone pikkuses saab olla ka ainult kolm õiget tüvenumbrit, siis tuleb tabelist saadud ringjoone pikkus ümardada samuti kolmekohalise tüvega arvuks, kui ta seda ei ole.*

Näide. *Kui* $d=8{,}376$ *m, siis ümardades saame, et* $d\approx 8{,}38$ *m ja sellele vastav ringjoone pikkus* $c=26{,}33$ *m* $\approx 26{,}3$ *m.*

735. Leida ringjoone pikkus, kui

a) läbimõõt on 1,082 m, 0,2747 dm, 5,718 m, 6223 m, 0,3065 km.

b) raadius on 0,1274 dm, 38,81 cm, 5296 m, 0,7652 km, 69,88 km.

Näide. *Kui* $r=0{,}3284$ *km, siis* $d=0{,}6568$ *km* $\approx 0{,}657$ *km ja* $c=2{,}064$ *km* $\approx 2{,}06$ *km.*

736. *Tabelis antud ringjoone pikkused on kahekohaliste murdosadega arvud, milledest väikseim on* 3,14 *ja suurim* 31,42. *Kui antud ringjoone pikkus on mingi arv, mis on suurem kui* 3,14, *aga väiksem kui* 31,42, *siis leiame ringjoone pikkuste tabelist kaks järjestikust arvu, millede vahel ta asetseb, vaatame, kummast neist ta erineb vähem, ja võtame sellele vastava läbimõõdu. Näiteks ringjoone pikkus* 23,1 *asetseb tabelis leiduvate ringjoone pikkuste* 23,09 *ja* 23,12 *vahel ja seejuures erineb arvust* 23,09 *vähem kui arvust* 23,12. *Seetõttu võtame otsitavaks läbimõõduks ringjoone pikkusele* 23,09 *vastava läbimõõdu, s. o.* 7,35. *Niisiis, kui ringjoone pikkus on* 23,1 *ühikut, siis läbimõõt on* 7,35 *ühikut. See läbimõõdu väärtus on muidugi ligikaudne ja nimelt veaga alla* 0,005.

Kui antud ringjoone pikkus erineb täpselt ühepalju kahest tabelis antud järjestikusest ringjoone pikkusest, siis on ükskõik, kummale neist vastav läbimõõt võtta. Tavaliselt võetakse suurem läbimõõt. Näiteks, kui ringjoone pikkus on 27,85 *ühikut, siis läbimõõduks saame* 8,87 *ühikut. Selgita tabeli abil, miks just selle.*

737. Leia tabeli abil ringi läbimõõt, kui tema ümbermõõt on: 4 cm; 4,3 dm; 5,5 m; 12 m; 14,3 m; 18,7 m; 28,39 km; 30,46 km.

738. *Kui antud ringjoone pikkuse mõõtarv ei kuulu tabelis antud äärmiste arvude, s. o.* 3,14 *ja* 31,42 *vahele, siis suurendame (või vähendame) seda mõõtarvu* 10, 100, ... *korda nii, et uus mõõtarv oleks suurem kui* 3,14, *kuid väiksem kui* 31,4. *Selle põhjal leitud läbimõõt tuleb muidugi sama arv korda vähendada (vastavalt suurendada).*

Näited. 1. *Olgu ringjoone pikkus* $c = 1{,}66$ *m; suurendades seda mõõtarvu* 10 *korda, saame* 16,6, *millele vastav läbimõõt tabeli järgi on* 5,28; *tähendab, otsitav läbimõõt* $d = 0{,}528$ *m.*

2. *Olgu ringi ümbermõõt* $c = 386$ *m; vähendades mõõtarvu* 100 *korda, saame* 3,86, *millele vastav läbimõõt tabeli järgi on* 1,23; *tähendab, otsitav läbimõõt* $d = 123$ *m.*

739. Leia tabeli abil ringi läbimõõt, kui tema ümbermõõt on:

a) 52 mm, 138 mm, 75 cm, 204 cm, 0,87 dm, 2,56 m, 2,92 dm, 0,6 km.

b) 88 mm, 212 mm, 1,12 m, 2,75 m, 0,03 km, 2,42 km, 1920 m, 2,5 m.

740. Mitu meetrit on ümmarguse tiigi läbimõõt, kui ümbermõõt on 245 sammu ja sammu pikkus on 0,7 m?

741. a) Mitu äärekivi kulub ümmargusele lillepeenrale, mille läbimõõt on 2,6 m, kui kivi laius on 17 cm?

b) Mitu lilletaime kulub ümmarguse lillepeenra ääristamiseks, kui peenra läbimõõt on 3,7 m ja taimede vaheks jätta 20 cm?

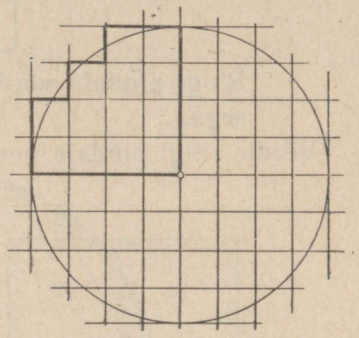
742. Lapsed tegid jääle karusselli, pannes kelgu tiirlema 6,5 m pikkuse lati otsa. Kui pika sõidu sai Tõnu, kes tegi 15 tiiru?

743. a) Ratas tegi 19,6 m vahemaal 8 pööret. Mitu pööret teeb ratas 1 km pikkusel vahemaal? Kui suur on selle ratta raadius?

b) Mitu pööret teeb 1,5 m kõrgune veduriratas ühes tunnis, kui vedur läbib tunnis 75 km? Missuguse aja vältel teeb see ratas 1000 pööret?

RINGI PINDALA.

744. *Ruudulisele paberile joonestatud ringi pindala ligikaudseks leidmiseks loendame kõik ruudud, mida see ring katab, kusjuures pooliku ruudu loeme terve eest, kui üle poole temast näib olevat ringi sees, ja jätame arvesse võtmata, kui üle poole temast näib olevat väljaspool ringi. Töö kergendamiseks võib leida esmalt veerandringi pindala ja korrutada tulemus neljaga. Ruutude kergemaks loendamiseks piirame joonega kõik kaasaarvatavad ruudud* (*joon.* 119).

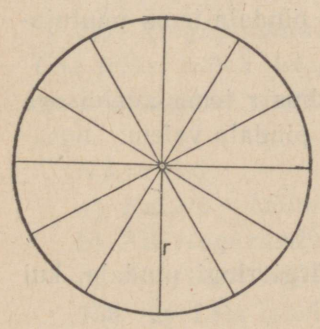


Joon. 119.

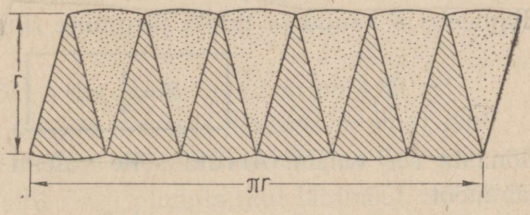
Leia joonisel 119 kujutatud ringi ligikaudne pindala, kui seal iga ruudu külg on 0,5 cm.

745. Joonesta ruudulisele paberile kolm ringi, mille raadiused on vastavalt 1 cm, 2,5 cm ja 3 cm. Leia eelmise ülesande eeskujul iga ringi ligikaudne pindala.

746. Joonesta paksemale paberile (kartongile) mingi ring, näiteks raadiusega 4 cm, jaota see raadiustega esiteks kuueks ja siis kaheteistkümneks võrdseks osaks ja lõika need osad korralikult paberist välja (joon. 120). Iga niisugust osa nimetatakse ringi sektoriks. Kleebi need sektorid vihikusse üksteise kõrvale joonise 121 eeskujul ja värvi vaheldumisi kahe eri värviga. Missugust kujundit meenutab see kujund? Mille poolest ta erineb rööpküliku? Millega võiks lugeda võrdseks selle «rööpküliku» aluse, millega kõrguse? Mis siit järeldub ringi pindala kohta?



Joon. 120.



Joon. 121.

Ringi pindala võrdub ringi poole ümbermõõdu ja raadiuse korrutisega.

Näide. *Kui ringi raadius* $r=2$ *cm, siis pool ümbermõõtu* $\pi r=3{,}14\cdot 2=6{,}28$ *cm ja pindala* $S=6{,}28\cdot 2=12{,}56$ *cm*^{2}.

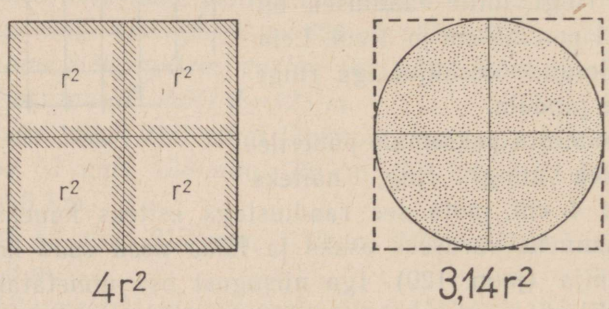
Arvuta sel viisil ringi pindala, kui ringi raadius on 5 cm; 4 dm; 8 m.

747. Tuleta eelmises ülesandes antud teoreemi põhjal ringi pindala valem.

$$S=\pi r^2$$

Ringi pindala võrdub raadiuse ruudu ja arvu π korrutisega.

Võrdle ringi pindala puutujaruudu pindalaga (joon. 122).



Joon. 122.

748. a) Arvuta valemi järgi ringi pindala, kui raadius

$r=2$ cm; 1,5 cm; 35 m; 0,8 km; 2,45 km.

b) Mitu protsenti moodustab ringi pindala tema puutujaruudu pindalast?

749. Asenda ringi pindala valemis raadius r tema avaldisega diameetri d kaudu ja tuleta järgmine ringi pindala valem:

$$S=\frac{1}{4}\pi d^2$$

Sõnasta see valem. Arvuta selle valemi järgi ringi pindala, kui läbimõõt

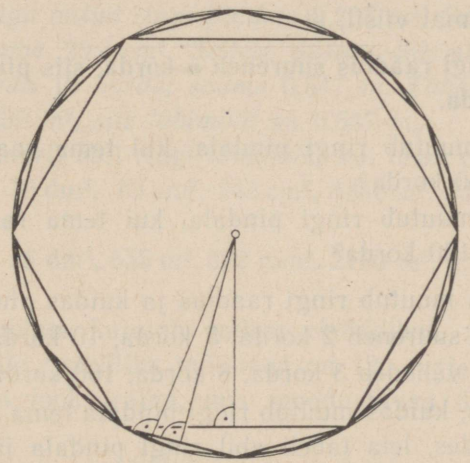
$d=2$ cm; 4 dm; 1 m; 0,4 m; 2,6 km.

Näide. *Kui ringi läbimõõt* $d=3{,}2$ *dm, siis pindala* $S=\frac{1}{4}\pi d^2=$
$=\frac{1}{4}\cdot 3{,}14\cdot 3{,}2^2=\frac{1}{4}\cdot 3{,}14\cdot 10{,}24=3{,}14\cdot 2{,}56=8{,}0384\approx 8{,}0$ *dm*^{2}.

750. Tuleta ringi pindala arvutamise eeskiri korrapärase hulknurga pindala arvutamise eeskirjast. Selleks vaatle ringi sisse joonestatud korrapärase 6-nurga, korrapärase 12-nurga, korrapärase 24-nurga jne. pindalasid (joon. 123). Millega võrdub iga niisuguse hulknurga pindala? Mida siit võiks järeldada ringi pindala kohta?

751. a) Arvuta ümmarguse piimanõu põhja pindala, kui nõu läbimõõt on 16 cm.

b) Arvuta ümmarguse palgi ristlõike (otsa) pindala, kui palgi läbimõõt on 36 cm.



Joon. 123.

752. *Ringi pindala kergemaks leidmiseks on koostatud tabeleid. Ühe sellise tabeli leiad õpikus lk.* 295. *Selle ehitus ja kasutamine on analoogiline ringi ümbermõõtude tabeli ehituse ja kasutamisega.*

Näiteid.

a) *Kui ringi läbimõõt on* 2,4 *m, siis pindala on* 4,52 *m*^{2}.

b) *Kui ringi raadius on* 3,76 *dm, siis pindala on* 44,41 *dm*^{2}.

c) *Kui ringi pindala on* 29,9 *m*^{2}, *siis läbimõõt on* 6,17 *m*.

753. a) Leia tabeli abil ringi pindala, kui läbimõõt on 1,8 cm, 2,7 cm, 3,74 dm, 5 dm, 6,38 m, 7,25 m, 8 km, 10 km.

b) Leia tabeli abil ringi pindala, kui ringi raadius on 1,2 cm, 3,8 cm, 4,72 dm, 0,71 dm, 0,95 m, 2 m, 1,5 km, 4,87 km.

c) Leia tabeli abil ringi raadius, kui ringi pindala on 11,7 cm^2, 41,4 dm^2, 7,07 m^2, 11 m^2, 18,2 km^2, 28 km^2.

754. a) Selgita, kuidas muutub ringi pindala, kui tema raadius suureneb mingi arv korda.

Kui ringi raadius on r, siis pindala on πr^2.

Kui ringi raadius on $10r$, *siis pindala on* $\pi(10r)^2 = \pi \cdot 100r^2 = 100\pi r^2$.

Kui ringi raadius on $100r$, *siis pindala on* $\pi(100r)^2 = \pi \cdot 10\,000r^2 = 10\,000\pi r^2$.

Mitu korda suurenes ringi pindala, kui tema raadius suurenes 10 korda? Kui raadius suurenes 100 korda?

b) Näita samal viisil, et

kui ringi raadius suureneb *n* korda, siis pindala suureneb n^2 korda.

c) Kuidas muutub ringi pindala, kui tema raadius suureneb 3, 5, 7, 12, 20, 50 korda?

d) Kuidas muutub ringi pindala, kui tema raadius väheneb 2, 5, 8, 10, 25, 100 korda?

755. Kuidas muutub ringi raadius ja kuidas pindala, kui

a) läbimõõt suureneb 2 korda, 5 korda, 10 korda?

b) läbimõõt väheneb 3 korda, 8 korda, 100 korda?

756. Teades, kuidas muutub ringi pindala tema raadiuse (läbimõõdu) muutudes, leia tabeli abil ringi pindala järgmistel andmetel.

a) Läbimõõt on 12 cm, 43 cm, 92 m, 25 km, 0,4 dm, 0,75 m.

b) Raadius on 8 cm, 32 cm, 0,3 m, 15 m, 0,28 km, 0,39 km.

N ä i d e. *Kui ringi raadius* $r = 5{,}5$ *m, siis läbimõõt* $d = 11$ *m. Tabelist leiame, et* **10** *korda väiksema läbimõõduga ringi pindala on* 0,95 m^2. *Suurendades seda* **100** *korda, saame* 95 m^2. *Lühidalt:*

kui $r = 5{,}5$ *m, siis* $d = 11$ *m ja* $S \approx 100 \cdot 0{,}95\ m^2 = 95\ m^2$.

Analoogiliselt:

kui $r = 0{,}07$ *m, siis* $d = 0{,}14$ *m ja* $S = 1{,}54\ m^2 : 100 = 0{,}0154\ m^2$.

757. Leia ringi pindala järgmistel andmetel:

a) läbimõõt on 1,07 dm, 0,326 dm, 7,87 m, 246 m, 0,508 km.

b) raadius on 0,124 dm, 31,9 cm, 671 m, 1128 m, 7,87 km.

758. *Tabelis antud ringi pindala väärtused on arvud vahemikust* 0,79 *kuni* 78,54. *Kui antud ringi pindala väärtus on sellesse vahemikku kuuluv arv, mida ei leidu tabelis, siis läbimõõdu leidmiseks leia tabelist antud pindala väärtusele lähim pindala väärtus ja võta sellele vastav läbimõõt. Näiteks pindala väärtusele* 5,02 *lähim tabelis leiduv väärtus on* 5,03 *ja sellele vastav läbimõõt* 2,53. *Tähendab, kui pindala* $S = 5{,}02$, *siis läbimõõt* $d = 2{,}53$.

Kui antud ringi pindala väärtus ei kuulu vahemikku 0,79 *kuni* 78,54, *siis läbimõõdu leidmiseks* **suurendame** (*või* **vähendame**) *seda väärtust* **100** *või* **10 000** *korda nii, et ta kuuluks sinna, leiame siis suurendatud* (*või vähendatud*) *pindala väärtusele vastava läbimõõdu ja* **vähendame** (*või* **suurendame**) *seda vastavalt* **10** *või* **100** *korda, nii et saaksime antud pindala väärtusele vastava läbimõõdu väärtuse.*

N ä i d e. *Olgu antud ringi pindala* 0,235 m^2. *Suurendades seda* 100 *korda, saame* 23,5 m^2. *Sellele vastav läbimõõt on* 5,47 *m. Vähendades seda* 10 *korda, saame* 0,547 *m. Tähendab, kui ringi pindala on* 0,235 m^2, *siis läbimõõt on* 0,547 *m.*

759. Leia tabeli abil ringi läbimõõt, kui tema pindala on

a) 2,4 dm^2, 13 dm^2, 53 cm^2, 248 cm^2, 4840 m^2, 0,8 m^2, 0,075 m^2, 100 m^2.

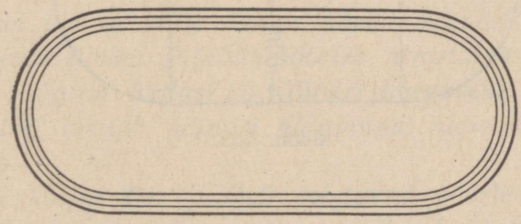
b) 4,7 dm^2, 16 dm^2, 855 m^2, 322 mm^2, 2100 m^2, 0,6 m^2, 0,024 km^2, 500 km^2.

760. Spordiplats kujutab endast ristkülikut, mille otstes on poolringid. Selle ristküliku mõõtmed on 120 m ja 80 m. Spordiplatsi äärel on jooksurajad, mis moodustavad 8 m laiuse riba (joon. 124).

a) Kui suur on spordiplatsi kogupindala?

b) Kui suur on jooksuradade all olev pindala?

c) Kui suur on jooksuradade all oleva riba välimise ääre pikkus, kui suur on seesmise ääre pikkus ja kui suur nende vahe?



Joon. 124.

761. Hobuseköietamise keti pikkus on 8,4 m. Kui suur pindala on maatükil, millelt hobune saab süüa rohtu?

762. Ristkülikukujulise väljaku igasse nurka tahetakse rajada veerandringi-kujuline ja keskele ringikujuline iluaed. Esimesed neist on raadiusega 7 m ja viimane raadiusega 6 m. Aia alla minev pind tuleb katta 10 cm paksuse mullakihiga. Mitu autokoormat kulub selleks mulda, kui igas koormas on 3 m^3 mulda?

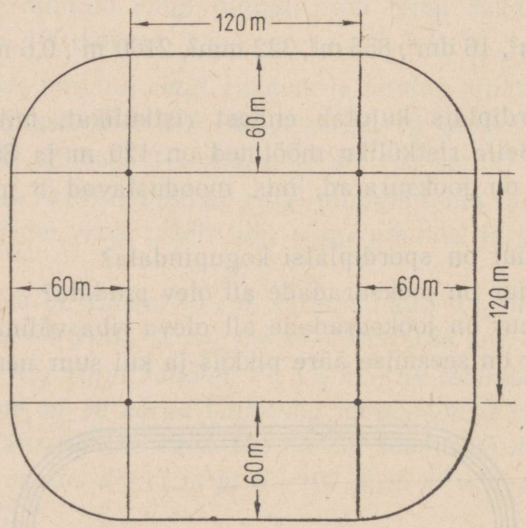
763. a) Mitu protsenti moodustab korrapärase kõõlnelinurga pindala ringi pindalast?

Näpunäide. *Ringi raadius olgu r. Kõõlnelinurga pindala leidmiseks vaatle neid kaht kolmnurka, milledeks diagonaal jaotab selle nelinurga.*

b) Mitu protsenti moodustab korrapärase kõõlkuusnurga pindala ringi pindalast?

764. Ümmarguse tiigi ümbermõõt on 132 m. Kui suur on tiigi pindala ja mitu kuupmeetrit sisaldab ta vett, kui tiigi keskmine sügavus on 0,8 m?

765. Arvuta joonisel 125 kujutatud väljaku pindala (hektaritest) ja ümbermõõt.



Joon. 125.

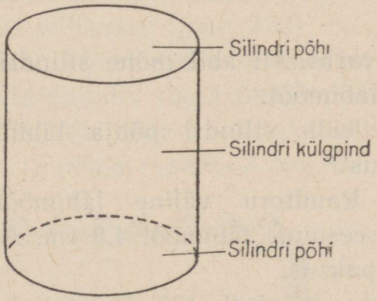
766. *Joonisel* 126 *kujutatud ümmargune pliiats, kilukarp, liimipurk ja piimanõu on oma kujult* **silindrid.**



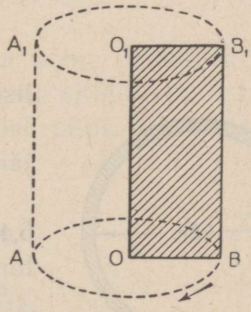
Joon. 126.

Silinder on piiratud kahe ringiga ja silindrilise pinnaga. Neid kaht ringi nimetatakse **silindri põhjadeks** *ja silindrilist pinda* **silindri külgpinnaks** (*joon.* 127). *Silindri külgpind on piiratud silindri põhjade ringjoontega.*

Nimeta veel silindrikujulisi kehasid.



Joon. 127.



Joon. 128.

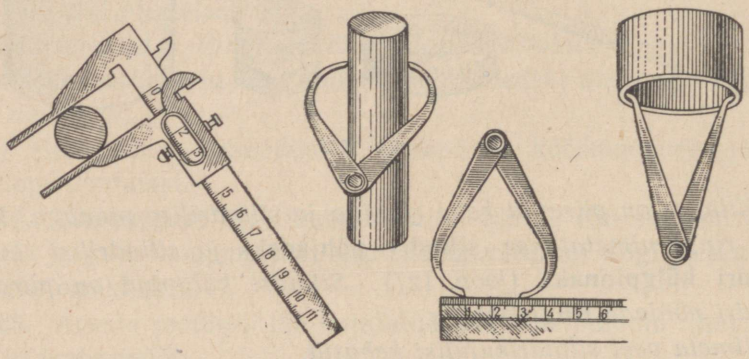
767. *Silindrit nimetatakse* **pöördkehaks,** *sest et ristküliku kiirel pöörlemisel ühe ta külje ümber näeme silindrit. Külge* OO_1 (*joon.* 128), *mille ümber ristkülik pöörleb, nimetatakse* **silindri teljeks.** *Silindri telg on ühtlasi ka* **silindri kõrguseks.** *Külge* BB_1, *mis pöörlemisel tekitab silindri külgpinna, nimetatakse silindri* **moodustajaks.**

Ristküliku küljed OB *ja* O_1B_1 *tekitavad pöörlemisel silindri põhjad. Lõigud* OB *ja* O_1B_1 *on silindri* **põhjade raadiusteks.**

Silindriks nimetatakse keha, mis tekib ristküliku pöörlemisel tema ühe külje ümber.

768. Ristkülik, mille pikkus on 3 cm ja laius 1 cm, pöörleb kord pikema, kord lühema külje ümber. Joonesta sel teel tekkinud silindrite kujutised.

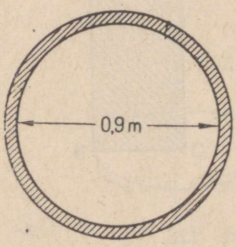
769. *Ümmarguste kehade läbimõõdu leidmiseks kasutatakse* **varbsirklit** *ja* **kobisirklit** *ehk* **tastrit.**



Joon. 129.

Määra varbsirkli abil mõne silindrikujulise eseme läbimõõt.

Kuidas leida silindri põhja läbimõõdu järgi raadiust?



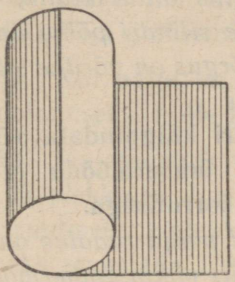
Joon. 130.

770. a) Raudtoru väline läbimõõt on 6,4 cm ja seesmine läbimõõt 4,8 cm. Arvuta toru seina paksus.

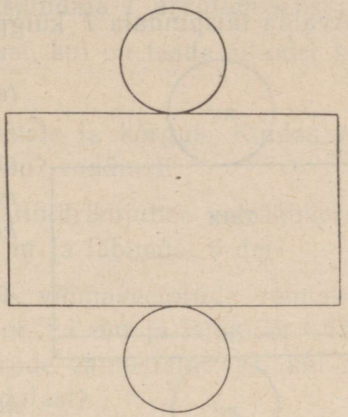
b) Arvuta joonisel 130 kujutatud toru väline läbimõõt, kui toru seina paksus moodustab 5% seesmisest läbimõõdust.

771. Kata silindri külgpind ühekordselt paberiga, lõika vabaks jäävad paberiääred ära ja laota see paberileht tasapinnale (joon. 131).

Milline kuju on silindri külgpinna laotusel? Mis on selle ristküliku aluseks, mis kõrguseks?



Joon. 131.

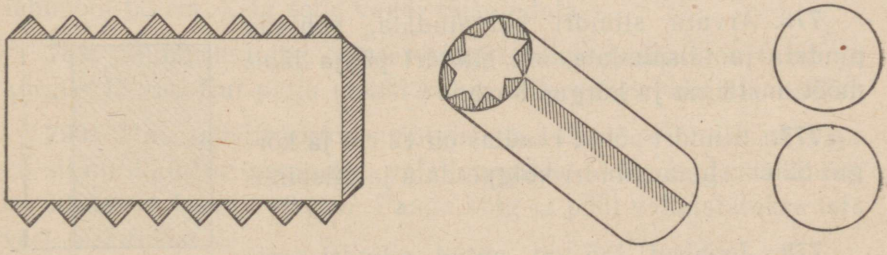


Joon. 132.

Lõika paberist välja ka silindri põhjad ja kleebi silindri pinnalaotus vihikusse (joon. 132).

772. Silindri moodustaja on 4 cm ja põhja läbimõõt 2 cm. Arvuta silindri põhja ümbermõõt ja joonesta silindri pinnalaotus.

773. Valmista kartongist silindri mudel, mille moodustaja on 8 cm ja põhja raadius 3 cm.



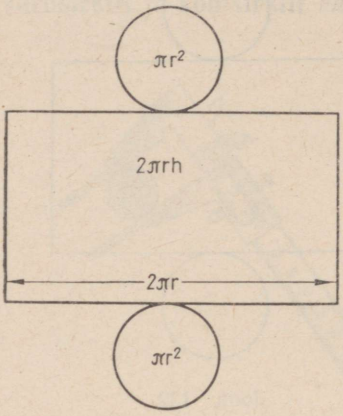
Joon. 133.

Selleks joonesta kõigepealt silindri külgpinnalaotus, varusta see kleepimiseks vajalike äärtega ja lõika saadud kujund kartongist välja. Seejärel kleebi külgpind kokku, nagu joonisel 133 näidatud, ja aseta kohale ka põhjad.

774. *Mitmesuguste silindrikujuliste esemete valmistamisel on vaja osata arvutada, kui palju kulub selleks materjali, s. t. on vaja osata arvutada silindri pindala.*

Silindri pindala ehk **täispindala** *T koosneb külgpindalast K ja kahe põhja pindalast 2P.*

Avalda täispindala *T* külgpindala *K* ja põhjapindala *P* kaudu.



Joon. 134.

775. *Silindri külgpindala leiame tema külgpinna laotusest. Et silindri külgpinna laotus on ristkülik, mille alus on võrdne silindri põhja ümbermõõduga ja kõrgus on võrdne silindri kõrgusega, siis*

silindri külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega.

Kui silindri põhja raadius on r ja kõrgus on h, siis põhja ümbermõõt on $2\pi r$ *ja silindri külgpindala valem on:*

$$K = 2\pi rh$$

Liites sellega põhjade pindala $2\pi r^2$, *saame täispindala*

$$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

ehk

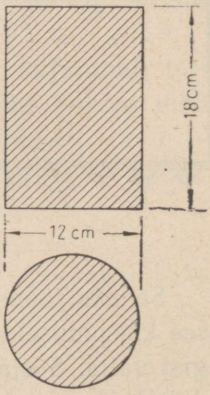
$$T = 2\pi r(h + r)$$

776. Arvuta silindri külgpindala, põhjade pindala ja täispindala, kui silindri põhja läbimõõt on 10 cm ja kõrgus 8 cm.

777. Silindri põhja raadius on 12 cm ja kõrgus 32 cm. Leia silindri külgpindala ja täispindala.

778. Joonisel 135 on antud silindri eestvaade ja pealtvaade. Leia selle silindri külgpindala.

779. Kui palju plekki kulub silindrikujulise raudahju külgpinna katmiseks, kui ahju kõrgus on 2,4 m ja läbimõõt 1,2 m?



Joon. 135.

780. Mitu ruutmeetrit plekki kulub vihmaveetoru valmistamiseks, kui toru pikkus on 8,5 m ja läbimõõt 12 cm ning valtsimiseks kulub 5% kogu materjalist?

781. Silindri kõrgus on a cm ja põhja läbimõõt b cm. Anna valem silindri külgpindala K ja täispindala T arvutamiseks.

782. Kuidas leida silindri kõrgust, kui on teada silindri külgpindala ja põhja ümbermõõt?

783. On antud silindri külgpindala ja kõrgus. Kuidas leida silindri põhja ümbermõõtu? läbimõõtu? raadiust?

784. Kui palju on vaja plekki silindrikujulise vabrikukorstna valmistamiseks, mille kõrgus on 12 m ja läbimõõt 6 dm?

785. Majavalitsus vajab majade vihmaveetorude remontimiseks 40 plekktoru. Iga toru pikkus on 7,1 dm ja läbimõõt 0,12 m. Mitu ruutmeetrit plekki on vaja torude valmistamiseks, kui valtsimiseks arvestada 10% torude pindalast?

786. Mitu ruutsentimeetrit plekki kulub silindrikujulise kaaneta nõu valmistamiseks, mille kõrgus on 5 cm ja põhja raadius 5 cm?

787. On vaja värvida 200 tänavavalgustamise lambi silindrikujulist posti. Iga posti kõrgus on 5 m ja läbimõõt 35 cm. Kui palju kulub selleks värnitsat, kui 1 m^2 värvimiseks kulub seda 0,2 kg?

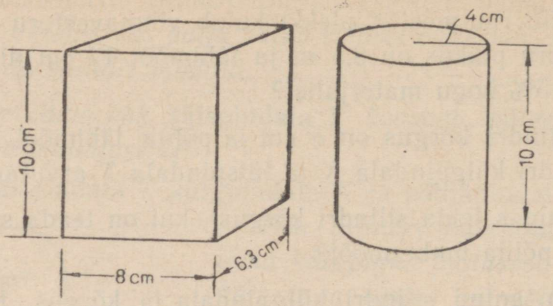
788. Silindrikujulise raudplekist vaadi pikkus on 0,80 m ja läbimõõt 60 cm. Leia selle vaadi täispindala.

789. Silindrikujulise konservipurgi põhja raadius on 6 cm ja kõrgus 15 cm. Kui palju plekki kulub selle purgi valmistamiseks?

790. Mitu tahvlit plekki mõõtmetega 142 cm × 71 cm on vaja 20 silindrikujulise veepange valmistamiseks, kui pange läbimõõt on 30 cm ja kõrgus 40 cm? Pange külg ja põhi valmistatakse tervest plekitükist.

SILINDRI RUUMALA.

791. *Kui võtta risttahukas ja silinder, mille põhjade pindalad on võrdsed ja kõrgused on võrdsed, täita üks neist liivaga ja valada see liiv teisesse, siis selgub, et nende kehade ruumalad on*



Joon. 136.

võrdsed. Et risttahuka ruumala võrdub tema põhja pindala ja kõrguse korrutisega, siis ka silindri ruumala võrdub tema põhja pindala ja kõrguse korrutisega, s. t.

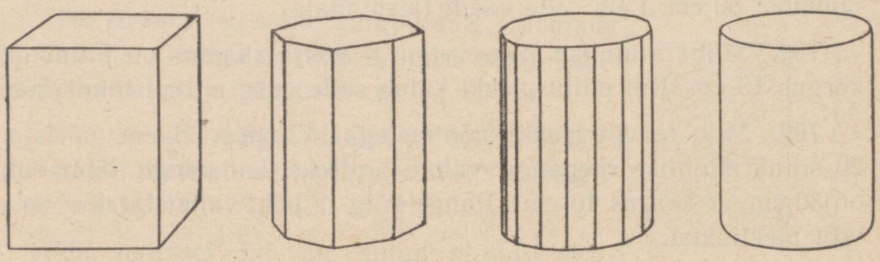
$$V = P \cdot H.$$

Kuna silindri põhjapindala $P = \pi r^2$, *siis asendamisel saame*

$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

792. Võta mingi silindrikujuline nõu, mõõda tema põhja läbimõõt ja kõrgus ning arvuta põhja pindala ja nõu ruumala. Kontrolli tulemust otsese mõõtmise teel, kasutades mõõtklaasi.

793. *Silindri ruumala arvutamise eeskirja saame leida ka arutluse teel.*



Joon. 137.

Kui korrapärase prisma külgtahkude arvu järjest suurendada, siis prisma erineb ikka vähem ja vähem silindrist. Kuidas leiame prisma ruumala? Mis sellest võib järeldada silindri ruumala kohta?

794. Mitu liitrit vett sisaldab silindrikujuline nõu, mille kõrgus on 9 dm ja sisemine läbimõõt 6 dm?

795. Silindrikujulise piimanõu põhja raadius on 8 cm ja kõrgus 30 cm. Mitu liitrit piima mahutab see nõu?

796. 90 cm pikkune ja 60 cm läbimõõduga raudplekist vaat on täidetud bensiiniga (erikaal 0,7). Kui palju kaalub see bensiin?

797. Silindrikujulise basseini läbimõõt on 9,1 m, vee sügavus basseinis on 70 cm. Mitu kuupmeetrit vett sisaldab see bassein?

798. Vasktraadi läbimõõt on 1 mm. Kui palju kaalub 50 m seda traati, kui vasktraadi erikaal on 8,9?

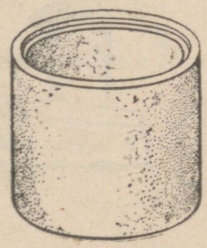
799. Kui palju kaalub 100 m vasktraati (ø2 mm, erikaal 8,9)?

800. Arvuta, kui palju kaalub silindrikujuline kuiv männipalk (erikaal 0,52), mille pikkus on 5 m ja läbimõõt 16 cm.

801. Klaaspurgi sisemine läbimõõt on 15 cm ja kõrgus 30 cm. Mitu liitrit keedist mahutab see purk?

802. Silindrikujulise kaevu läbimõõt on 12 dm. Mitu liitrit vett on selles kaevus, kui vee sügavus selles on 2,1 m?

803. Betoonist silindrikujulise kaevurakke (joon. 138) kõrgus on 8 dm, rakke sisemine läbimõõt 7,8 dm ja väline läbimõõt 9,2 dm. Kui palju kaalub see kaevurake? Betooni erikaal on 2,2.



Joon. 138.

804. Kui palju kaalub 4 m ümarrauda (ø 40 mm)?

805. Kera terastraati (erikaal 7,85), läbimõõduga 5 mm, kaalub 77 kg. Mitu meetrit on selles keras traati?

806. Silindrikujuline veenõu sisaldab 180 l vett. Veenõu kõrgus on 1 m. Kui suur on selle veenõu põhja pindala?

807. Silindrikujulise klaaspurgi sisemine läbimõõt on 18 cm. Kui kõrgel on veepind purgis, kui sinna valada 1 l vett?

808. 3 m pikkusest palgist, mille ristlõige on ruut küljega pikkusega 40 cm, on vaja valmistada võimalikult suure läbimõõduga ümmargune võll. Kui suur on seejuures puidu kadu kuupdetsimeetrites ja protsentides?

809. Ristkülik külgedega a ja b ($a>b$) pöörleb kord ümber telje a, kord ümber telje b. Kuidas suhtuvad pöörlemisel tekkivate silindrite ruumalad?

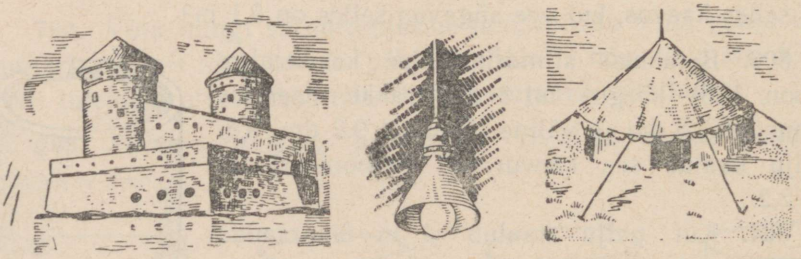
810. Silindrikujulise mõõtklaasi sisemine läbimõõt on 40 mm ja iga kriipsuvahe 5 cm^3. Kui suur on kahe teineteisele järgneva kriipsu vaheline kaugus?

811. Silindrikujulise naftapaagi läbimõõt on 11 m. Nafta pind on paagis 4 m kõrgusel. Kui palju kaalub paagis olev nafta (erikaal 0,76)?

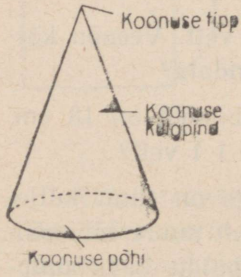
812. On vaja valmistada 1 liitri mahutavusega nõu, mille põhja läbimõõt on 8,6 cm. Kui kõrge peab olema see nõu?

813. Silindrikujuline teeklaas, mille sisemine läbimõõt on 5,6 cm, on pooleni täidetud veega. Pärast seda, kui klaasi lasti kivi, mis kaalus 128 g, tõusis vee pind 2 cm võrra. Arvuta kivi erikaal.

KOONUS.



Joon. 139.

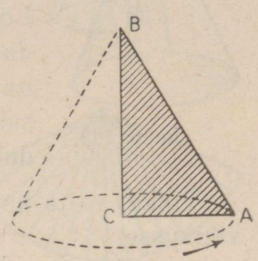


Joon. 140.

814. *Vaatle joonisel* 139 *kujutatud tornide katuseid, lambivarju, telgi katust. Need on oma kujult* **koonused.**

Koonus on piiratud ühe ringiga, mida nimetatakse **koonuse põhjaks,** *ja ühe kõvera pinnaga, mida nimetatakse* **koonuse külgpinnaks.** *Külgpind on piiratud ühelt poolt koonuse tipuga ja teiselt poolt koonuse põhja ringjoonega (joon.* 140). *Nimeta veel koonusekujulisi kehasid.*

815. *Koonust nimetatakse* **pöördkehaks,** *sest et täisnurkse kolmnurga kiirel pöörlemisel ühe kaateti ümber näeme koonust (joon.* 141). *Kaatetit, mille ümber toimub pöörlemine, nimetatakse* **koonuse teljeks,** *ühtlasi on ta ka* **koonuse kõrguseks;** *hüpotenuusi, mis tekitab koonuse külgpinna, nimetatakse koonuse* **moodustajaks.** *Pöörleva kolmnurga teine kaatet tekitab koonuse põhja. See kaatet on koonuse* **põhja raadiuseks.**



Joon. 141.

816. Nimeta joonise 141 põhjal a) millise külje ümber pöörleb kolmnurk *ABC* ja milleks on see külg koonusel? b) mille moodustab kaatet AC ja milleks on ta koonusel? c) mille moodustab hüpotenuus *AB* ja milleks on *AB* koonusel?

Koonuseks nimetatakse keha, mis tekib täisnurkse kolmnurga pöörlemisel ümber ühe kaateti.

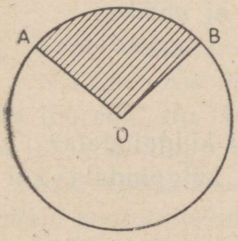
817. a) Pane nurklaud kahe näpu vahel pöörlema ja selgita, mille moodustavad kolmnurga küljed pöörlemisel.

b) Selgita, kuidas saab puust püramiidist valmistada koonuse, kui kasutada ainult höövlit.

c) Miskujuline katus ehitatakse tavaliselt prismakujulisele tornile? silindrikujulisele tornile?

d) Kuiva liiva, viljateri, väiksemaid kive jne. ei saa panna prisma- või püramiidikujulisse hunnikusse. Missuguse kuju võtavad need hunnikud tavaliselt?

818. Arvuta koonuse põhja ümbermõõt, kui põhja raadius $r=4$ cm; 1,5 dm.

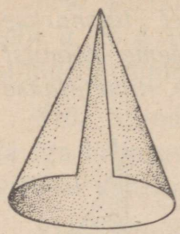


Joon. 142.

KOONUSE PINNALAOTUS.

819. Joonesta ring ja tõmba selle kaks raadiust, nagu on näidatud joonisel 142.

Kahe raadiusega ja kaarega piiratud ringiosa nimetatakse **sektoriks.** *Nurka AOB nimetatakse* **sektori nurgaks** *ja kaart AB* **sektori kaareks.**



Joon. 143.

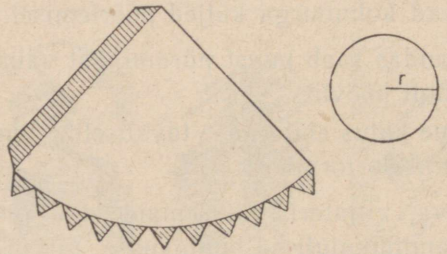
Lõika paberist välja mingi ringi sektor ja painuta see koonuse külgpinna mudeliks.

820. Võta mingi koonuse külgpinna mudel. Lõika see mööda moodustajat lahti, nagu on näidatud joonisel 143. Laota see paberileht tasapinnale. Missugune kuju on koonuse külgpinna laotusel? Mis on selle sektori raadiuseks ja millega võrdub sektori kaar?

Lõika välja ka koonuse põhi ja kleebi koonuse pinnalaotus vihikusse.

Koonuse külgpinna laotus on ringi sektor, mille raadius võrdub koonuse moodustajaga ja kaare pikkus võrdub koonuse põhja ümbermõõduga.

821. Koonuse külgpinna laotus on sektor, mille raadius on 10 cm ja nurk on 90°. Arvuta koonuse põhja raadius. Joonesta antud külgpinna laotus, varusta see kleepimiseks vajalike ääri-



Joon. 144.

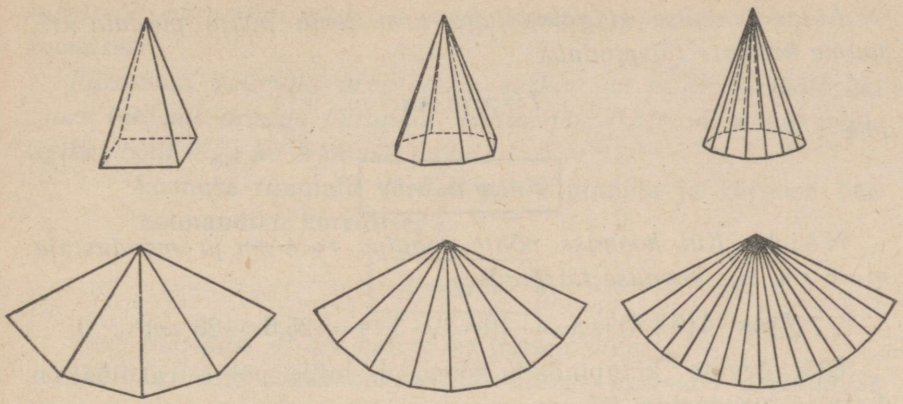
tega, lõika paberist välja ning kleebi kokku koonuse mudel (joon. 144). Mõõda saadud koonuse põhja raadius ja võrdle tulemust arvutuse tulemusega.

KOONUSE PINDALA.

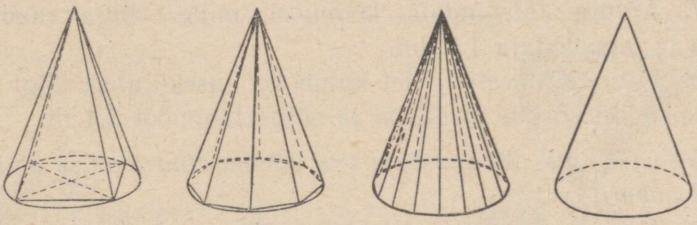
822. Kuidas arvutada korrapärase püramiidi külgpindala?

Avalda joonisel 145 kujutatud püramiidide külgpindala, kui püramiidi põhiserv on a ja apoteem on m.

823. *Kujutame, et koonuse sisse on kujundatud korrapärane nelinurkne püramiid (joon. 146). Suurendades püramiidi külgtah-*



Joon. 145.



Joon. 146.

kude arvu kahekordseks, saame korrapärase kaheksanurkse püramiidi. Suurendades püramiidi külgtahkude arvu veel kaks korda, siis veel kaks korda jne., saame korrapärased püramiidid, mille külgpindala ikka vähem ja vähem erineb antud koonuse külgpindalast. Et iga korrapärase püramiidi külgpindala võrdub tema põhja poole ümbermõõdu ja püramiidi apoteemi korrutisega, siis nähtavasti ka

koonuse külgpindala võrdub tema põhja poole ümbermõõdu ja moodustaja korrutisega.

Saab tõestada, et see eeskiri on täpselt õige.

N ä i d e. *Kui koonuse põhja raadius on* 60 *mm ja moodustaja on* 100 *mm, siis koonuse põhja pool ümbermõõtu on* $3{,}14 \cdot 60 = 188$ *mm, külgpindala on* $100 \cdot 188 = 18\,800$ *mm*$^2 \approx 190$ *cm*^{2}.

824. *Olgu koonuse põhja raadius r ja moodustaja m. Siis põhja pool ümbermõõtu on* πr *ja külgpindala on* πrm. *Seega*

$$K = \pi rm$$

Liites koonuse külgpindalaga πrm *tema põhja pindala* πr^2, *saame koonuse täispindala:*

$$T = \pi rm + \pi r^2$$

ehk

$$\boxed{T = \pi r(m + r)}$$

N ä i d e. *Kui koonuse põhja raadius* $r = 4$ *cm ja moodustaja* $m = 6$ *cm, siis koonuse täispindala*

$$T = \pi \cdot 4(6+4) = \pi \cdot 4 \cdot 10 = 40 \cdot 3{,}14 = 125{,}6 \approx 126 \text{ cm}^2.$$

825. Arvuta külgpindala koonusel, mille põhja raadius on 4 cm ja moodustaja 6,5 cm.

826. Arvuta koonuse täispindala, kui koonuse põhja läbimõõt on 8 cm ja moodustaja 10 cm.

827. Arvuta täispindala koonusel, mille põhja raadius on 1,2 dm ja moodustaja 1,8 dm.

828. Mitu ruutmeetrit riiet kulub koonusekujulise telgi katmiseks, kui telgi kõrgus on 2,3 m ja põhja läbimõõt 3,4 m.

N ä p u n ä i d e. *Moodustaja leia vähendatud joonise abil (ruudulisel paberil).*

829. Mitu ruutmeetrit plekki kulub torni koonusekujulise katuse katmiseks, kui katuse kõrgus on 3,8 m, torni läbimõõt 8,4 m ja kui valtsimiseks kulub 5% kogu materjalist?

830. Koonusekujulise katuse räästa pikkus on 15,7 m ja moodustaja 7,0 m. Kui suur on selle katuse pindala?

831. Koonuse põhja pindala on 28,26 dm² ja moodustaja 4,5 dm. Arvuta selle koonuse täispindala.

832. Koonuse külgpindala on 3,8 m² ja moodustaja 1,5 m. Kui suur on selle koonuse põhja raadius?

833. Täisnurkne kolmnurk, mille küljed on 3 m, 4 m ja 5 m, pöörleb pikema kaateti ümber. Kui suur on pöörlemisel tekkiva koonuse täispindala?

KOONUSE RUUMALA.

834. *Puust korrapärase nelinurkse püramiidi mudelist võib saada selle servade mahahööveldamise teel kaheksanurkse püramiidi, viimasest kuusteistnurkse püramiidi jne. Niiviisi tööd jät-*

kates võib püramiidi mudelist saada mudeli, mis väga vähe erineb koonusest.

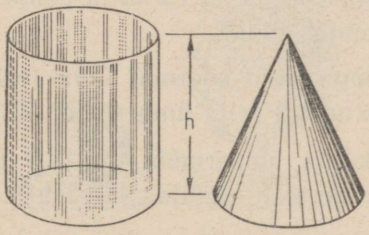
Püramiidi ruumala arvutamise eeskiri on kehtiv ükskõik kui suure tahkude arvuga püramiidi kohta, järelikult on ta vähemalt ligikaudselt õige ka koonuse puhul:

koonuse ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega.

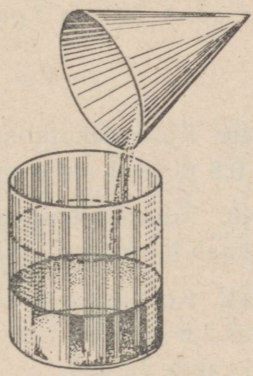
$$V = \frac{1}{3}Ph$$

Saab tõestada, et see valem on täpselt õige.

835. *Eelmises ülesandes antud koonuse ruumala arvutamise eeskirja õigsust saab kontrollida mõõtmise teel, kui on kasutada võrdsete kõrgustega ja võrdsete põhjadega silindri ja koonuse õõnsad mudelid (joon.* 147). *Mõõtes, mitu koonusetäit liiva mahub sel-*



Joon. 147.



Joon. 148.

lesse silindrisse, selgub, et silindri ruumala on kolm korda suurem koonuse ruumalast (joon. 148).

Järelda sellest, et koonuse ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega.

836. Tähistades koonuse põhja raadiuse tähega r ja kõrguse tähega h, koosta koonuse ruumala valem:

koonuse põhja pindala on ...,
põhja pindala ja kõrguse korrutis on ...,
koonuse ruumala

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

837. Arvuta tabelis antud andmeil koonuse ruumala.

r	1 cm	3 cm	3,2 dm	2,5 dm	1 m	3,5 m
h	3 cm	4 cm	5 dm	4,8 dm	2,5 m	5,2 m
r^2						
πr^2						
$\pi r^2 h$						
V						

838. *Koonuse ruumala võib arvutada ka teisiti: kui r^2 või h on jaguv 3-ga, siis ei tarvitse korrutist $\pi r^2 \cdot h$ jagada 3-ga, vaid võib kas r^2 või h jagada 3-ga. Seega koonuse ruumala*

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3} = \pi \frac{r^2}{3} \cdot h.$$

839. Koonusekujulise liivakuhja kõrgus on 1,2 m ja põhja raadius 0,8 m. Kui palju on selles kuhjas liiva?

840. Mitu 1,5-tonnise kandejõuga auto koormat liiva (erikaal 1,4) saab hunnikust, mille kõrgus on 1,5 m ja ümbermõõt 10,7 m?

841. Koonusekujulise kartulikuhja ümbermõõt on 11,9 m ja kõrgus 1,6 m. Mitu tonni kartuleid on selles kuhjas, kui 1 hl kartuleid kaalub 72 kg?

842. Koonuse kõrgus on 6,0 m ja põhja ümbermõõt 15,7 m. Leia selle koonuse ruumala.

843. a) Kuidas leida koonuse kõrgus, kui on antud koonuse ruumala ja põhja pindala?

b) Kuidas leida koonuse põhja pindala, kui on teada koonuse ruumala ja kõrgus?

844. Koonuse ruumala on 2411 cm^3 ja põhja raadius 8,0 cm. Leia koonuse kõrgus.

845. Koonuse põhja raadius on 4,5 cm ja moodustaja 7,0 cm. Leia selle koonuse ruumala.

Näpunäide. *Koonuse kõrgus leia joonise abil.*

846. Rauast (erikaal 7,8) koonuse põhja läbimõõt on 10,4 cm ja kõrgus 1,7 dm. Kui palju kaalub see koonus?

847. Puust (erikaal 0,6) koonuse põhja raadius on 4,8 cm ja kõrgus 12,0 cm. Kui palju kaalub see koonus?

848. Metallist koonuse põhja raadius on 2,2 cm ja kõrgus 4,5 cm. Kui palju jääb see koonus kergemaks, kui teda kaaluda nööri otsas vette lastuna?

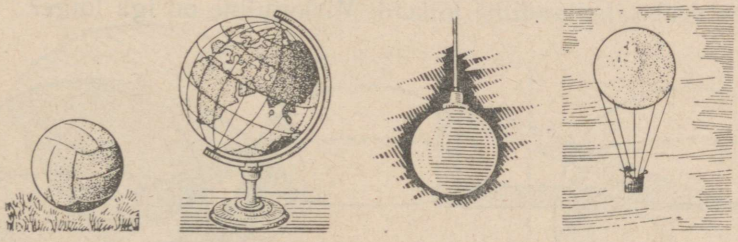
849. Kui palju kaalub vasest (erikaal 8,8) koonus vees, kui koonuse põhja läbimõõt on 4,0 cm ja kõrgus 5,0 cm?

850. Koonusekujulise kivisöehunniku ümbermõõt on 5,2 m ja kõrgus 2,2 m. Kui palju kaalub see kivisüsi, kui 1 m^3 kaalub 1,3 t?

KERA.

851. *Jalgpall, gloobus, lambikuppel ja õhupall on* **kerakujulised kehad** (*joon.* 149).

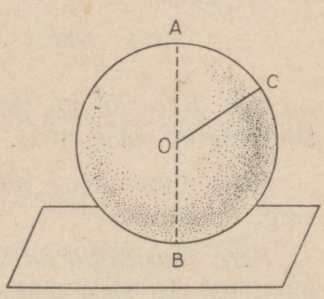
Nimeta veel kerakujulisi kehi.



Joon. 149.

Kera on piiratud kõverpinnaga, mida nimetatakse **kerapinnaks** *ehk* **sfääriks.** *Sfäär on niisugune pind, mille kõik punktid asetsevad ühest kindlast punktist ühel ja samal kaugusel. Seda punkti nimetatakse sfääri (ka kera)* **keskpunktiks** (*punkt O joonisel* 150).

Sirglõik, mis ühendab kera pinna mingi punkti kera keskpunktiga, on kera **raadius** (*OC joonisel* 150). *Ühe ja sama kera raa-*

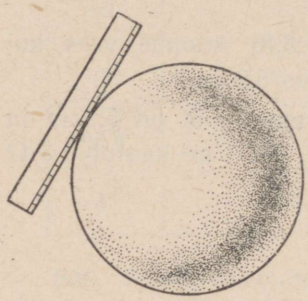


Joon. 150.

diused on võrdsed. Sirglõiku, mis ühendab kaht kera pinna punkti ja läbib kera keskpunkti, nimetatakse **kera läbimõõduks** (*AB* joonisel 150).

Kera läbimõõt on kera raadiusest kaks korda pikem: kui kera raadius on r cm, siis läbimõõt d=2r cm.

Kus lõikuvad kõik kera läbimõõdud?



Joon. 151.

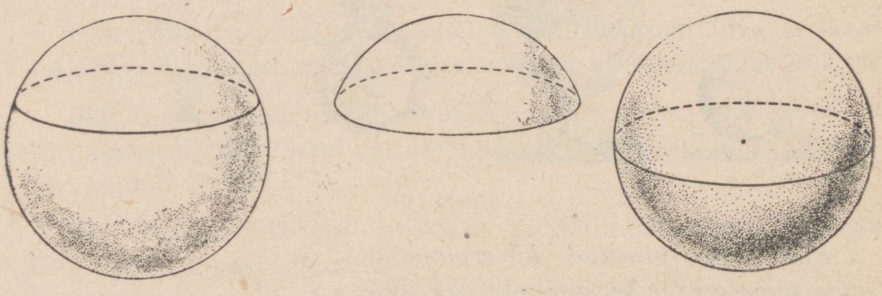
852. *Kerapind on kõverpind, nagu silindri ja koonuse külgpindki. Viimastest erineb kerapind selle poolest, et kerapinnale ei saa üheski sihis joonestada sirglõike* (*joon.* 151).

Mitmes sihis saab sirglõike joonestada silindri külgpinnal läbi selle pinna mingi punkti?

Lahendada sama küsimus koonuse külgpinna kohta.

853. Võta võimalikult kerakujuline kartul või õun. Lõika see noaga kaheks osaks (joon. 152). Miskujuline on saadud lõige?

Tee veel samalaadilisi lõikeid. Miskujuline on iga lõige?



Joon. 152.

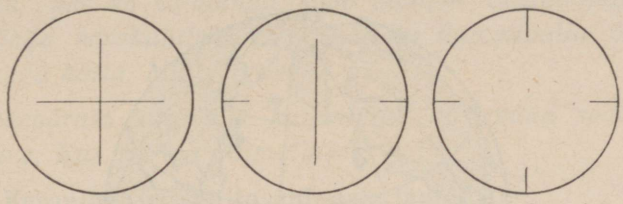
Joon. 153.

854. *Kera lõiget, mis läbib kera keskpunkti, nimetatakse kera* **suurringiks** (*joon.* 153).

Miks nimetatakse seda lõiget suurringiks? Mis on kera suurringi raadiuseks?

Kera suurringid on omavahel võrdsed, sest iga suurringi läbimõõt võrdub kera läbimõõduga. Suurring poolitab kera ja kerapinna.

855. Joonesta joonestuspaberile 3 võrdset ringi, lõika need välja ja tee neile sisselõiked, nagu on näidatud joonisel 154. Pane need ringid kokku joonisel 155 näidatud «tuulekeraks».



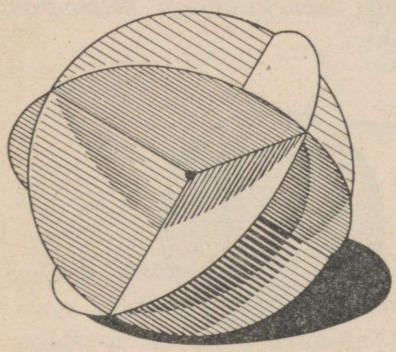
Joon. 154.

856. Vaatle joonisel 155 kujutatud «tuulekera» ja selgita järgmist:

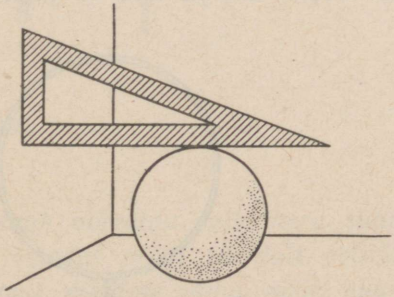
1) mitmest ringist on koostatud «tuulekera» ja mis need ringid on «tuulekera» suhtes?

2) mis on suurringide ühine keskpunkt kera suhtes?

3) mis võib öelda nende kolme suurringi lõikejoonte kohta?



Joon. 155.



Joon. 156.

857. Määra mõne kera läbimõõt ja raadius, nagu on näidatud joonisel 156.

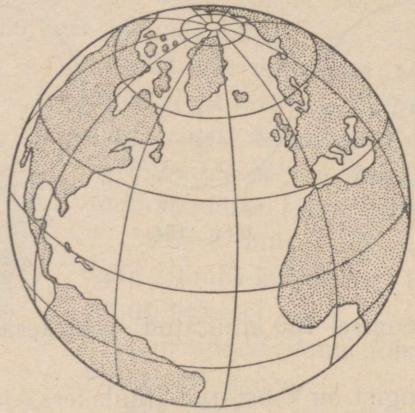
Mõõda kera läbimõõt varbsirkli ja tastri abil.

258. *Maa kujutab endast suurt kera, mille raadius on* 6371 *km.* **Meridiaanid** *on selle kera suurringjooned, samuti on suurringjoon ka* **ekvaator.**

Vaatle gloobust ja tee kindlaks, kas **paralleelid** on suurringjooned (joon. 157).

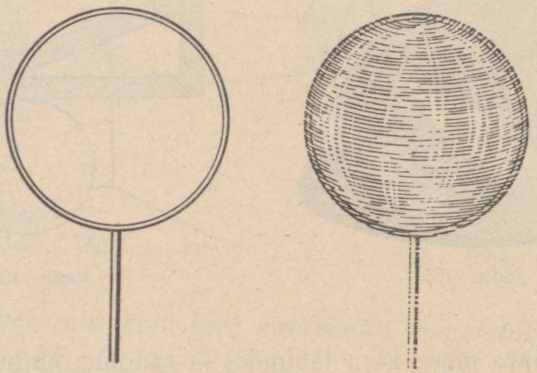
Kui suur on ekvaatori läbimõõt? meridiaani läbimõõt?

Kui suur on paralleelringide läbimõõdu ülemmäär?



Joon. 157.

859. *Kui ringjoon pöörleb kiiresti oma diameetri ümber, siis näeme kerapinda (joon.* 158). *Sfääri nimetataksegi sellepärast* **pöördpinnaks** *ja kera* — **pöördkehaks.**



Joon. 158.

860. Kera läbimõõt on 12 cm. Kui suur on selle kera suurringi pindala?

861. Kera raadius on 3,5 dm. Kui suur on selle kera suurringi pindala?

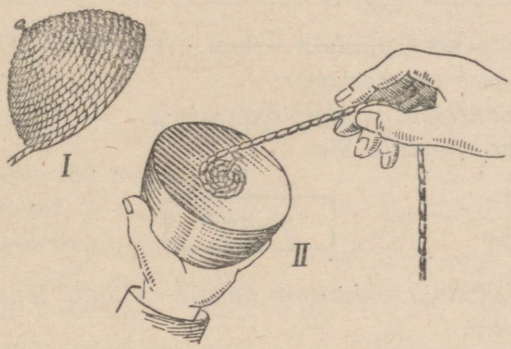
862. *Varem tundmaõpitud pöördkehade (silindri ja koonuse) külgpindala arvutamise eeskirja leidsime nende pinnalaotuse abil.*

Selgita, kas ka kerapinda saab laotada tasapinnale. Selleks katsu mõnda kerakujulist eset (näiteks kummipalli, õuna jne.) paberilehega katta. Mis selgub?

Kui käepärast on poolik kummipall, siis püüa seda laotada tasapinnale. Kas see on võimalik?

Kerapinda ei saa tasapinnale laotada.

863. *Et kerapinda ei saa tasapinnale laotada, siis kasutame kera pindala määramiseks teistsugust võtet. Alljärgnev joonis*



Joon. 159.

näitab, kuidas poolkera pindala saab võrrelda selle kera suurringi pindalaga. Selleks mähime jämedat nööri tihedalt esiteks poolkera kõverale pinnale ja pärast mähime sama nööri suurringi pinnale. Nööri mõõtes selgub, et poolkera kõvera pinna katmiseks kulub nööri kaks korda rohkem kui suurringi katmiseks.

Mitu korda on järelikult poolkera kõvera pinna pindala suurem suurringi pindalast? Mitu korda on terve kera pindala suurem suurringi pindalast?

See katse näitab, et

kera pindala on neli korda suurem sama kera suurringi pindalast.

864. Täida järgmise tabeli tühjad kohad.

Suurringi pindala	15 cm^2	3,5 m^2			0,35 dm^2	
Kera pindala			1 m^2	72 cm^2		3,48 dm^2

865. Kera raadius on 5 cm. Arvuta kera pindala.

1) *Raadiuse ruut on ...*
2) *Suurringi pindala on ...*
3) *Kera pindala on ...*

866. Arvuta kera pindala, kui kera läbimõõt on 36 cm.

867. Võrkpalli läbimõõt on 21 cm. Kui palju nahka kulub palli kesta valmistamiseks, kui õmblusteks arvestada 15% palli pindalast?

868. Koosta kera pindala valem.

Kui kera raadius on r,
siis suurringi pindala on ...
ja kera pindala S= ...

$$S=4\pi r^2$$

Suurringi pindala leidmiseks kasuta raamatu lõpus olevat ringi pindala tabelit.

869. Mitu ruutdetsimeetrit nahka kulub jalgpalli kesta valmistamiseks, kui palli läbimõõt on 20 cm ja õmblusteks arvestada 15% palli pindalast?

870. Mõõda vajalikud suurused ja arvuta kooli gloobuse pindala.

871. Kera suurringi pindala on 19,6 dm^2. Kui suur on selle poolkera täispindala?

872. Mitu ruutmeetrit riiet kulub õhupalli kesta valmistamiseks, kui palli läbimõõt on 20 m ja õmblusteks arvestada 5% õhupalli pindalast.

873. Maakera raadius on ligikaudu 6400 km. Arvuta maakera pindala.

874. Leia poolkera täispindala, kui kera läbimõõt on 5 dm.

875. Kera ümbermõõt on 24,5 dm. Arvuta kera pindala.

876. Kooli gloobuse ümbermõõt on 157 cm. Mitu ruutsentimeetrit on sellel gloobusel Euroopa pindala, kui Euroopa pindala moodustab ligikaudu 2% maakera pindalast?

877. Kui palju plekki on vaja poolkerakujulise kuppelkatuse katmiseks, kui katuse läbimõõt on 6,0 m?

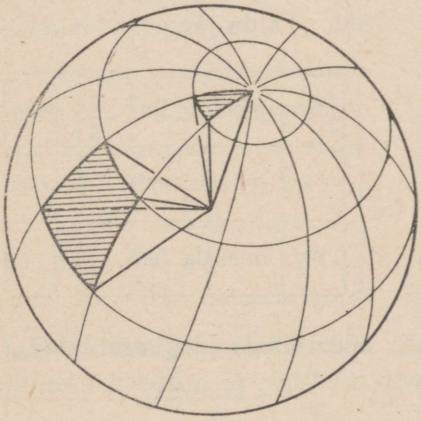
878. Kuupi, mille serva pikkus on 2,0 dm, on paigutatud kera, mis puudutab kuubi tahke. Kumma täispindala on suurem ja kui palju?

879. Täida järgmine tabel.

Kera raadius (dm)	4	5,9	8,7	0,6	120
Suurringi pindala (dm^2)					
Kera pindala (dm^2)					

KERA RUUMALA.

880. *Joonis* 160 *näitab, kuidas meridiaanid ja paralleelid tükeldavad gloobuse pinna osadeks. Need osad meenutavad trapetseid ja kolmnurki. Mille poolest erinevad need kujundid trapetsitest ja kolmnurkadest?*



Joon. 160.

Vaatleme nüüd püramiiditaolisi kehi, mille põhjadeks on kerapinna tükeldamisel saadud kujundid ja ühiseks tipuks kera keskpunkt. Nende kehade ruumalade summa võrdub kera ruumalaga ja põhjade pindalade summa — kera pindalaga. Kui niisuguse keha põhi on küllalt väike, siis võib tema ruumala ligikaudseks arvutamiseks rakendada püramiidi ruumala valemit, võttes püramiidi kõrguseks kera raadiuse. Tähistades nende püramiiditaoliste kehade ruumalad tähtedega V_1, V_2, V_3 jne., vastavate põhjade pindalad aga tähtedega S_1, S_2, S_3 jne. ja kera raadiuse tähega r, saame:

$$V_1 \approx \frac{1}{3} S_1 r;\ V_2 \approx \frac{1}{3} S_2 r;\ V_3 \approx \frac{1}{3} S_3 r \text{ jne.}$$

Liites püramiiditaoliste kehade ruumalad V_1, V_2, V_3 jne., saame kera ruumala V. Seega

$$V \approx \frac{1}{3} S_1 r + \frac{1}{3} S_2 r + \frac{1}{3} S_3 r + \ldots$$

Võttes võrduse paremal poolel ühised tegurid $\frac{1}{3}$ ja r sulgude ette, saame:

$$V \approx \frac{1}{3} r (S_1 + S_2 + S_3 + \ldots).$$

Et sulgudes seisev avaldis kujutab kera pindala S, siis saame:

$$V \approx \frac{1}{3} rS.$$

Saab tõestada, et see võrdus e i o l e l i g i k a u d n e, *vaid* t ä p n e, *s. t.*

kera ruumala võrdub kera pindala ja raadiuse ühe kolmandiku korrutisega.

881. Täida järgmine tabel.

Kera raadius (m)	0,1	0,3	0,8	2	4	10
Kera pindala (m^2)	0,126	1,13	8,04	50,3	201	1256
Kera ruumala (m^3)						

882. Täida järgmine tabel.

Kera raadius (cm)	1	8	20	30	50
Suurringi pindala (cm^2)					
Kera pindala (cm^2)					
Kera ruumala (cm^3)					

883. Koosta kera ruumala valem.
Kui kera raadius on r, siis
suurringi pindala on . . . ;
kera pindala on . . . ;
kera pindala ja raadiuse korrutis on . . . ;
kera ruumala $V = \ldots$
Kera ruumala on seega

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

884. *Kera ruumala arvutamise lihtsustamiseks leiame teguri, millega tuleb korrutada raadiuse kuupi, et saada kera ruumala:*

$$\frac{4}{3}\pi \approx 4{,}19.$$

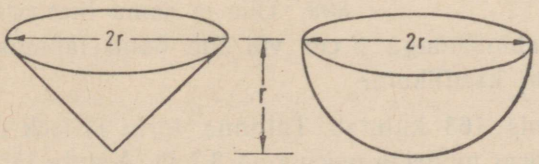
Seda teades võime kirjutada

$$\boxed{V \approx 4{,}19r^3}$$

885. Arvuta eelmises ülesandes antud eeskirja järgi kera ruumala tabelis antud raadiuste põhjal.

r (cm)	2,0	5,0	7,0	10,1	$\frac{1}{2}$	1,2	2,5	$1\frac{1}{3}$
r^3 (cm^3)								
V (cm^3)								

886. *Kera ruumala valemit saab tuletada ka katseliselt, kui meil on kasutada joonisel* 161 *kujutatud koonuse ja poolkera õõnsad mudelid.*



Joon. 161.

Võrdle joonisel kujutatud koonuse läbimõõtu ja kõrgust kera raadiusega.

Täites need mudelid liivaga, leiame, et poolkera ruumala on koonuse ruumalast kaks korda suurem. Koonuse ruumala on $\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3} \pi r^3$. *Poolkera ruumala on siis* $2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$. *Kera ruumala on muidugi kaks korda suurem, seega siis* $\frac{4}{3} \pi r^3$.

887. Arvuta kera ruumala, kui kera läbimõõt on 14 cm.

888. Arvuta kera ruumala, kui kera raadius on 3,00 m.

889. Kui palju kaalub rauast kera, kui kera raadius on 18 cm ja raua erikaal on 7,8?

890. Puust kerakujulise kuuli läbimõõt on 6,5 cm. Kui palju kaalub see kera, kui puu erikaal on 0,6?

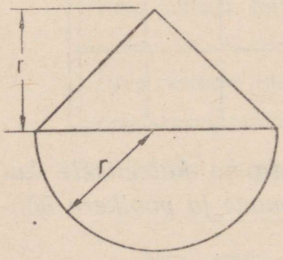
891. Kas sa jõuad üles tõsta korgist kera, mille läbimõõt on 1 m? Korgi erikaal on 0,24.

892. Kui palju kaaluvad 100 teraskuuli, kui ühe kuuli läbimõõt on 5 mm ja terase erikaal on 7,83?

893. Mitu protsenti materjali läheb kaotsi, kui kuubist treida võimalikult suur kera?

894. Kuidas suhtuvad kahe kera ruumalad, kui ühe kera raadius on teise kera raadiusest kaks korda suurem?

895. Kuidas suhtuvad kahe kera pindalad, kui ühe kera raadius on teise kera raadiusest kaks korda suurem?



Joon. 162.

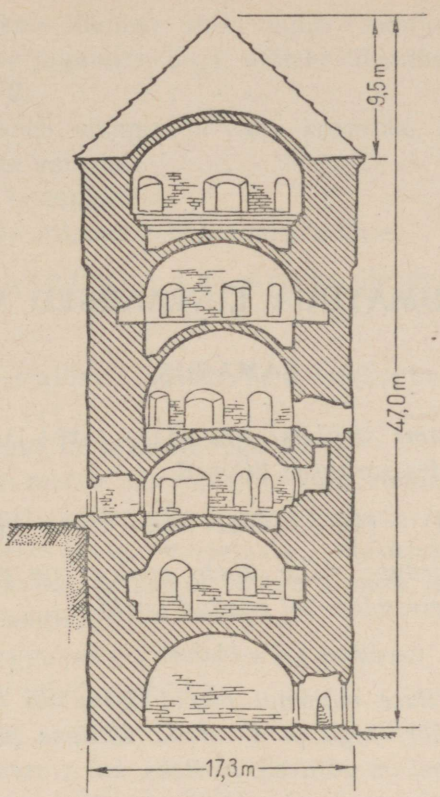
896. Poolkera suurringile, mille raadius on *r*, on paigutatud koonus raadiusega *r* ja kõrgusega *r* (joon. 162). Kui suur on tekkinud keha ruumala?

897. Kui palju kaalub rauast vanaaegne kahurikuul läbimõõduga 10 cm? Raua erikaal on 7,8.

898. Mitu liitrit vett mahutab 40-sentimeetrise läbimõõduga poolkerakujuline pada?

899. Ühe ja sama hinnaga saaks osta kaks õuna läbimõõduga 6 cm või ühe õuna läbimõõduga 8 cm. Kumb ost on kasulikum?

900. Joonis 163 kujutab Tallinna torni «Kieck in die Köck» läbilõikes. Torni müüride paksus on 3,7 m. Arvuta järgmised suurused.



Joon. 163.

1) Torni katuse pindala. Puuduvate mõõtmete leidmiseks tee vähendatud joonis.

2) Torni välispindala (ilma katuseta).

3) Torni iga korruse poolkerakujulise lae pindala.

4) Torni seinteks vajamineva pae kogus (akna- ja ukseavasid arvesse võtmata).

5) Torni seinte kaal, kui pae erikaal on 2,5.

8. ÜHE TUNDMATUGA LINEAARSED VÕRRANDID.

SAMASUS.

901. *Teisendame avaldist* $(2x+1)^2-(4x^2+1)$, *avades selles sulud ja koondades sarnased liikmed:*

$$(2x+1)^2-(4x^2+1)=4x^2+4x+1-4x^2-1=4x.$$

Kirjutame võrduse, mille üheks pooleks on antud avaldis ja teiseks pooleks teisendamisel saadud avaldis:

$$(2x+1)^2-(4x^2+1)=4x.$$

Kui selle võrduse mõlemal poolel asendada täht x mistahes vabalt võetud väärtusega ja arvutada võrduse poolte väärtused, siis selgub, et need on võrdsed. Näiteks, kui x asendada arvuga 3, siis võrduse vasaku poole väärtus

$$v=(2\cdot 3+1)^2-(4\cdot 3^2+1)=7^2-37=49-37=12$$

ja parema poole väärtus

$$p=4\cdot 3=12,$$

seega $v=p$. *Selles ei ole midagi üllatavat, sest sulgude avamine ja sarnaste liikmete koondamine on teisendused, mille puhul avaldise väärtus ei muutu.*

Teisendust, mille puhul avaldise väärtus ei muutu, nimetatakse samasusteisenduseks.

Sulgude avamine ja sarnaste liikmete koondamine on seega samasusteisendused.

902. Otsusta iga allpool nimetatud teisenduse kohta, kas see on samasusteisendus või mitte. Kui teisendus ei ole samasusteisendus, siis otsusta, kuidas avaldise väärtus nimetatud teisendusel muutub.

1) Hulkliikme liikmete ühise teguri toomine sulgude ette.

2) Avaldise jagamine 3-ga, näiteks üleminek avaldiselt $3a+6$ avaldisele $a+2$.

3) Kahe arvu summa ja vahe korrutise asendamine nende arvude ruutude vahega.

4) Murru laiendamine.

5) Murdude liitmise reegli rakendamine.

6) Murru korrutamine 4-ga, näiteks üleminek murrult $\frac{a}{8}$ murrule $\frac{a}{2}$.

7) Murdu sisaldava avaldise korrutamine nende murdude ühise nimetajaga.

8) Hulkliikme lahutamine tegureiks.

9) Hariliku murru teisendamine kümnendmurruks.

903. Võrdust, mille ühest poolest saab samasusteisenduste abil teise poole, nimetatakse samasuseks. Samasuses võib tähe asendada vabalt võetud arvuga, ilma et võrdus kaotaks kehtivust.

Näiteks järgmised võrdused on samasused:

1) $(2a-b)^2=4a^2-4ab+b^2$;

2) $3x-\frac{1-x}{2}=\frac{7x-1}{2}$;

3) $1-9a^4=(1+3a^2)(1-3a^2)$;

4) $0{,}75-\frac{1}{4}=0{,}5$.

Nimeta iga võrduse puhul need teisendused, mille abil saab võrduse ühest poolest teise.

Märkus. *Samasuse tähiseks on* $\equiv$, *kuid seda sümbolit kasutatakse ainult siis, kui soovitakse eriti rõhutada, et tegemist on samasusega. Niisugusel juhtumil tuleks näiteks kirjutada, et*

$$(a-2)^2-4\equiv a^2-4a+4-4\equiv a^2-4a\equiv a(a-4).$$

Kui samasust pole vaja eriti rõhutada, siis kasutatakse samasuse märkimiseks harilikku võrdusmärki $=$. *Nii võib ülalantud samasust kirjutada ka kujul*

$$(a-2)^2-4=a^2-4a+4-4=a^2-4a=a(a-4).$$

904. Tõesta, et järgmised võrdused on samasused.

1) $\frac{a}{2}(4x-1)-\frac{a}{3}(6x-2)=\frac{a}{6}$

2) $3mn-2m-12+18n=(3n-2)(m+6)$

3) $6x^2-5x-4=(3x-4)(2x+1)$

4) $(m^2+2mn+n^2)(m^2-2mn+n^2)=(m^2-n^2)^2$

5) $(3-1:\frac{2}{3}):(4-1:1\frac{1}{3})=\frac{6}{13}$

Näpunäide. *Tõestuseks näita, et võrduse ühest poolest (ükskõik kummast) saab samasusteisenduste teel teise poole.*

905. *Kas antud võrdus on samasus või mitte, seda saab otsustada ka* proovimise *teel. Selleks asenda võrduses esinev täht (või tähed, kui neid on mitu) mõnede vabalt võetud arvudega ja kontrolli arvutamise teel, kas võrdus jääb kehtima või mitte.*

Mida võib öelda võrduse kohta, mis ei jää kehtima tähe asendamisel mingi arvuga?

Kontrolli proovimise teel, kas järgnevad võrdused on samasused või mitte:

1) $(3+a)^2-(3-a)^2=12a$

2) $(1-a)^2-(a-1)^2=0$

3) $4(a-1)=0$

4) $a^2=3a-2$

5) $a^2-b^2=b^2-a^2$

906. Näita arvutamise teel, et

1) võrdus $2a^2-3a=3a$ on õige, kui $a=3$;

2) võrdus $6+\frac{2a}{2-a}+\frac{4}{a-2}=4$ on õige, kui $a=1$;

3) võrdus $5x+8=x$ on õige, kui $x=-2$;

4) võrdus $6x-2(3x-1)-2=0$ on õige, kui $x=0$.

Näita nüüd proovimise teel, et mõned nendest võrdustest ei ole samasused. Missugused nimelt?

Iga võrdus ei ole samasus.

907. Koosta iga järgneva lause põhjal võrdus ja otsusta, kas saadud võrdus on samasus või mitte.

1) Arv $5a$ on $3a$ võrra suurem kui $2a$.

2) Arv $7m$ on 6 võrra väiksem kui $10m$.

3) Arv x on 4 võrra väiksem kui 12.

4) Arv x on 4 korda väiksem kui arv y.

5) Arvude a ja 3 jagatis võrdub poolega nende arvude summast.

6) Arvude x ja 4 ruutude vahe on 16 võrra väiksem arvu x ruudust.

7) Arvude x ja 1 summa ruut on $2x$ võrra suurem samade arvude ruutude summast.

VÕRRANDI LAHENDID.

908. Mida nimetatakse võrrandiks? Kasutades tehetes esinevate arvude vahelisi seoseid, lahenda peast järgmised võrrandid.

a)	b)	c)	d)
$x+4=11$	$x+7=2$	$x+1=7$	$x+5=3$
$y-2=7$	$y-3=0$	$y-2=10$	$y-6=-4$
$6-z=1$	$2-z=3$	$15-z=9$	$74-z=80$
$5u=0{,}1$	$3u=7$	$5u=-1$	$-3u=\frac{1}{3}$
$21:v=7$	$4:v=0{,}5$	$15:v=3$	$18:v=-2$

Missuguseid tehetes esinevate arvude omadusi tuleb kasutada tulbas a antud võrrandite lahendamisel?

909. *Olgu antud võrrand* $x^2=x+6$. *Kui selles* x *asendada arvuga* 2, *siis saame mittevõrdsed tulemused:* $2^2\neq 2+6$. *Kui aga* x *asendada arvuga* 3, *siis saame võrdsed tulemused:*

$$3^2=3+6.$$

Kui võrrandis tundmatu asendamisel mingi arvuga võrrandi pooled osutuvad võrdseteks, siis öeldakse, et see arv rahuldab võrrandit.

Kas arv 3 rahuldab võrrandit $x^2=x+6$? Aga arv 2?

Proovi, kas arvudest 0, -1, -2 ja -3 mõni rahuldab võrrandit $x^2=x+6$ või ei rahulda.

Võrrandit rahuldavat arvu nimetatakse võrrandi lahendiks.

Näiteks arv 3 on võrrandi $x^2=x+6$ lahendiks, samuti ka arv -2.

910. Leia proovimise teel, kas arvude 0, 2, -2, 5, -5 hulgas leidub võrrandi

$$\frac{4x-1}{x-2}=3$$

lahendit.

911. a) Näita, et arvud 5 ja -3 on võrrandi $x^2=2x+15$ lahenditeks.

b) Näita, et arvud -1, $+1$, -2 ja $+2$ rahuldavad võrrandit $(x^2-1)(x^2-4)=0$. Mitu lahendit leidsid sellel võrrandil?

912. Mis liiki arv on positiivse arvu ruut? negatiivse arvu ruut? nulli ruut? Kas leidub niisugune arv, mille ruut võrdub -4? Kas leidub lahendit võrrandil

$$x^2=-4;\ x^2=-9;\ x^2+1=0;\ x^2+100=0?$$

913. a) Missuguse arvu jagamisel 5-ga saadakse 0? Mis on lahendiks võrrandil

$$\frac{x}{5}=0;\ \frac{x}{10}=0;\ x:2\frac{1}{3}=0;\ x:0{,}05=0?$$

b) Kas leidub arvu, millega arvu 1 jagades saadakse 0? Kas leidub lahendit võrrandil

$$\frac{1}{x}=0;\ \frac{5}{x}=0;\ 0{,}5:x=0;\ 1\frac{1}{4}:x=0?$$

914. Mis on lahendiks võrrandil

$$\frac{x}{2}=1;\quad \frac{x}{2}=0;\quad \frac{2}{x}=1?$$

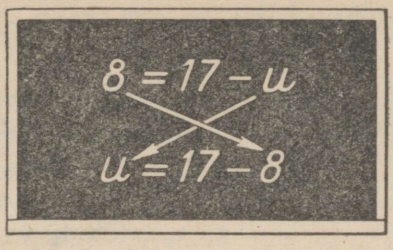
Võrrandil võib olla üks, kaks või enam lahendit. Võrrandil võib ka lahend puududa.

VÕRRANDI PÕHIOMADUSED

915. Rakendades tehetes esinevate arvude vahelisi seoseid, põhjenda järgmisi väiteid:

1) kui $x+7=15$, siis $x=15-7$;
2) kui $y-12=8$, siis $y=8+12$;
3) kui $6-z=4$, siis $6-4=z$;
4) kui $8=17-u$, siis $u=17-8$.

Võrreldes siin kaht ühes ja samas reas olevat võrrandit, näeme, et teine neist saadakse esimesest, kui selles viia üks liige (reas 1 ja 2) või kaks liiget (reas 3 ja 4) võrrandi ühelt poolelt teisele, muutes seejuures iga üleviidava liikme märgi vastupidiseks. Näiteks reas 4 olevast võrrandist $8=17-u$ saab võrrandi $u=17-8$, kui liige $-u$ viia võrrandi paremalt poolelt vasakule poolele, kirjutades sinna $+u$, ja liige 8 viia võrrandi vasakult poolelt paremale, kirjutades sinna -8 (joon. 164).



Joon. 164.

Selgita, missugused liikmed on võrrandites 1, 2 ja 3 viidud ühelt poolelt teisele.

Võrrandi liikmete ülalkirjeldatud omadust nimetatakse **võrrandi esimeseks põhiomaduseks.**

Võrrandi iga liikme võib viia võrrandi ühelt poolelt teisele, muutes selle liikme märgi vastupidiseks.

916. *Võrrandi esimene põhiomadus võimaldab tunduvalt kergendada võrrandi lahendamist. Olgu vaja lahendada näiteks võrrand*

$$6-5x=27-8x.$$

Teisendame võrrandit nii, et tema liikmed, mis sisaldavad tundmatut, oleksid võrrandi vasakul poolel, ja liikmed, mis ei sisalda tundmatut, paremal poolel. Antud võrrandis tuleb selleks liige $-8x$ *viia paremalt poolelt vasakule (märgiga +) ja liige* 6 *viia vasakult paremale (märgiga −). Seda tehes saame teisendatud võrrandi*

$$8x-5x=27-6.$$

Koondades nüüd sarnased liikmed, saame

$$3x=21.$$

Siit järeldub, et

$$x=7.$$

Lahenduse kirjutame lühidalt järgmiselt:

$$6-5x=27-8x;$$
$$8x-5x=27-6;$$
$$3x=21;$$
$$x=7.$$

Kontroll. $v=6-5\cdot 7=6-35=-29;$
$p=27-8\cdot 7=27-56=-29.$
$v=p.$

Vastus. $x=7.$

917. Rakendades võrrandi esimest põhiomadust, lahenda võrrandid:

1) $5x=4x+12$
2) $-5x=36-6x$
3) $10x=9x-44$
4) $x-1=1$
5) $x+2=5-x$
6) $14x-9=5x$
7) $3x-3=4+x$
8) $2x+4=1-x$
9) $7+3x=8-2x$
10) $4-5x=8+3x$

918. Millega võrdub x, kui

$$5=x;\ -3=x;\ -1=x?$$

Kui $a=b$, siis $b=a$

Võrrandi pooli võib vahetada ilma ühegi liikme märki muutmata.

Kasuta seda omadust järgmiste võrrandite lahendamisel:

1) $12=x+7$
2) $28=4+6x$
3) $4+2x=10x-4$
4) $-10=3+x$

Näide. $60=x+15;$
$x+15=60;$
$x=60-15;$
$x=45.$

919. Rakendades tehetes esinevate arvude vahelisi seoseid, põhjenda järgmisi väiteid.

1) Kui $8x=5$, siis $x=\frac{5}{8}$.
2) Kui $-3x=9$, siis $x=9:(-3)$
3) Kui $\frac{x}{5}=a$, siis $x=5a$.
4) Kui $\frac{4}{x}=2$, siis $4=2x$ ja $x=4:2$.

Võrreldes siin kaht ühes ja samas reas seisvat võrrandit, näeme, et teine neist saadakse esimesest selle vasaku ja parema poole korrutamisel või jagamisel ühe ja sama (nullist erineva) arvuga. Näiteks võrrandist $\frac{4}{x}=2$ saame võrrandi $4=2x$, kui esimese võrrandi mõlemad pooled korrutame arvuga x.

Missuguse arvuga tuleb korrutada või jagada 1., 2. ja 3. reas oleva võrrandi pooli, et leida võrrandi lahendit?

Võrrandi teine põhiomadus:

võrrandi pooli võib korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

920. *Nõue, et arv, millega võrrandi pooli korrutame, ei oleks* 0, *on tarvilik sellepärast, et võrrandi poolte korrutamisel arvuga* 0 *saaksime võrrandi, mida rahuldab iga arv. Korrutades näiteks võrrandi* $2x=10$ *pooli arvuga* 0, *saame võrrandi* $0\cdot 2x=0\cdot 10$ *ehk* $0x=0$. *Seda võrrandit rahuldab iga arv. Tõepoolest,* $0\cdot 2=0$, $0\cdot(-2)=0$, $0\cdot 5=0$ *jne. Antud võrrandit* $2x=10$ *rahuldab aga ainult arv* 5.

Võrrandil $0\cdot x=0$ on lõpmata palju lahendeid, sest tema lahendiks sobib iga arv.

Lahenda võrrandid

$$x+5=5+x;\ 2x+3=3+2x;\ 3x-6=3(x-2).$$

921. *Võrrandi mõlema poolega teostatav tehe märgitakse harilikult võrrandi järele püstkriipsu taha. Näiteks tähendab kirjutus*

$$2(x+7)=34\ |:2$$

võrrandi mõlema poole jagamist 2*-ga. Jagades saame*

$$x+7=17,$$

millest

$$x=17-7$$

ehk

$$x=10.$$

922. Kasutades võrrandi teist põhiomadust, lahenda järgmised võrrandid. Lahendeid kontrolli peast.

1) $7x=49$	2) $9x=0$	3) $1=\frac{3}{4}x$	4) $5=\frac{x}{2}$
$3y=-2{,}1$	$\frac{y}{2}=3$	$3y=\frac{1}{3}$	$\frac{6}{y}=2$
$\frac{z}{4}=1$	$\frac{2z}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{2z}{5}=0$	$\frac{3z}{4}=\frac{1}{2}$
$0{,}4u=0{,}8$	$0{,}3u=1{,}2$	$\frac{3}{u}=2$	$-1{,}2u=0{,}8$
$\frac{v}{5}=0{,}3$	$12=8v$	$\frac{3}{2v}=1{,}5$	$\frac{2}{3}v=-\frac{1}{6}$

Näiteid. 1) $\frac{3x}{4}=6;\ |\cdot 4$

$3x=24;\ |:3$

$x=8.$

2) $\frac{5}{2z}=15;\ |\cdot 2z$

$5=30z;$

$30z=5;\ |:30$

$z=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$

923. *Võrrandi esimene ja teine põhiomadus võimaldavad antud võrrandit mitmeti teisendada. Need teisendused ei ole samasusteisendused, sest antud võrrandi pooled pole võrdsed teisendamisel saadud võrrandi vastavate pooltega. Näiteks võrrandi*

$$3x-4=6+x$$

ja sellest esimese põhiomaduse põhjal saadud võrrandi

$$3x-x=6+4$$

vastavad pooled ei ole omavahel võrdsed. Küll on aga nende võrrandite lahendid võrdsed.

Kontrolli, et arv 5 rahuldab nii üht kui ka teist ülalantud võrrandit.

VÕRRANDITE LIIKE.

924. *Võrrandid liigitatakse neis esinevate tundmatute arvu järgi ühe tundmatuga võrrandeiks, kahe tundmatuga võrrandeiks jne. Lugedes tähtedega x, y ja z märgitud arvud tundmatuiks, on näiteks.*

$3x^2=x-1$ *ühe tundmatuga võrrand;*

$2x+3y=4a$ *kahe tundmatuga võrrand;*

$x^2+y^2=2z$ *kolme tundmatuga võrrand.*

Käesolevas peatükis vaatleme ainult ühe tundmatuga võrrandeid.

925. *Vaatleme mingit võrrandit, milles tundmatu ei esine murru nimetajas, näiteks võrrandit*

$$2(5x-8)=4-3(x+1).$$

Anname sellele võrrandile võimalikult lihtsa kuju. Selleks avame sulud, viime kõik liikmed võrrandi vasakule poolele, kirjutades paremale 0, *ja koondame sarnased liikmed:*

$$10x-16=4-3x-3;$$
$$10x+3x-16-4+3=0;$$
$$13x-17=0.$$

Kui pärast võrrandi lihtsustamist tundmatu esineb võrrandis ainult esimesel astmel, siis nimetatakse seda võrrandit esimese astme võrrandiks ehk lineaarseks võrrandiks (ka lineaarvõrrandiks).

Ühe tundmatuga lineaarses võrrandis on pärast võrrandi lihtsustamist ainult kaks liiget: liige tundmatuga esimesel astmel ja tundmatut mittesisaldav liige, nn. **vabaliige.** *Niisuguse võrrandi* **üldkuju** *on*

$$ax+b=0.$$

Selles võrrandis a ja b on mistahes arvud, kusjuures $a\neq 0$. *Lahendades üldkujulise lineaarse võrrandi, saame*

$$ax=-b;$$
$$x=-\frac{b}{a}.$$

Ühe tundmatuga lineaarsel võrrandil on üks ja ainult üks lahend.

926. Anna igale alljärgnevale võrrandile võimalikult lihtne kuju ja otsusta, missugused neist on lineaarsed võrrandid, missugused mitte. Lineaarsed võrrandid lahenda.

1) $3x-4(2-x)=6$
2) $x(3+x)=2(3-x)$
3) $(x-1)^2=x^2$
4) $3(2-3x)=8-2(3-x)$
5) $(x-3)(x+3)=7$

Näide. $x(7+x)=5-x(5+2x)$;
$7x+x^2=5-5x-2x^2$;
$7x+x^2-5+5x+2x^2=0$;
$3x^2+12x-5=0$. *Ei ole lineaarne võrrand.*

LINEAARSETE VÕRRANDITE KOOSTAMINE JA LAHENDAMINE.

927. *Lineaarseid võrrandeid lahendame järgmise üldplaani järgi.*

1) *Avame sulud, kui neid võrrandis on, ja koondame sarnased liikmed.*

2) *Viime tundmatut sisaldavad liikmed võrrandi ühele poolele ja kõik muud liikmed võrrandi teisele poolele.*

3) *Koondame sarnased liikmed.*

4) *Jagame võrrandi mõlemad pooled tundmatu kordajaga.*

Leitud lahendit tuleb kontrollida.

Näide. *Lahendame võrrandi* $4(x-2)-9=3-(x+5)$.

Lahendus.

Avame sulud:	$4x-8-9=3-x-5;$
Koondame sarnased liikmed:	$4x-17=-x-2;$
Viime üle liikmed -17 ja $-x$:	$4x+x=17-2;$
Koondame sarnased liikmed:	$5x=15;$
Jagame võrrandi pooled 5-*ga:*	$x=3.$

Kontroll. $v=4\cdot(3-2)-9=4\cdot 1-9=-5;$

$p=3-(3+5)=3-8=-5;$

$v=p.$

Vastus. $x=3.$

Märkus. *Lahendus kirjuta edaspidi ilma selgituseta.*

928. Lahenda võrrandid:

1) $7(x-3)+3(x-5)=2(3x+2)$
2) $11x-(25-3x)=17$
3) $7-(7x-28)=0$
4) $3(10-x)-6(9{,}5-x)=0$
5) $3(x+4)=(17-x)\cdot 4$

929. Lahenda võrrandid:

1) $0{,}02(30-x)-4=0{,}2-0{,}04(x-3)$
2) $2x+3-4(x-2)=7-(3x-5)+4x$
3) $6+2v(-4v-1)=1-4v(2v+3)-5$
4) $(y-6)(2y-3)=2(y-4)(y-3)$
5) $5(x-2)-3(x-1)=-1$

930. Lahenda võrrandi abil järgmised ülesanded.

1) Arvuga x liideti 21 ning saadi 68. Millega võrdub x?
2) 26,8-le lisati arv a ning saadi 43,3. Leia a.
3) Arvust m lahutati 3,8 ja saadi 4,5. Leia m.
4) Arvust 15,7 lahutati arv s ja saadi 6,9. Leia s.
5) Arvu m suurendati 6,8 korda ja saadi 34. Leia m.
6) Arvu y jagamisel arvuga 3,7 saadi 11,1. Leia y.
7) Arv 13,5 jagati arvuga x ja saadi 0,5. Leia x.
8) Mingi arvuga liideti 180 ja saadi 150. Leia see arv.

931. Lahenda võrrandid:

1) $4k-0{,}2(k+4)=41$
2) $0{,}5(z-1)-0{,}25(3-z)=2$
3) $(3x-2)4=6x-6$
4) $5(k+2)=13+3k$
5) $4(3v-1)=3(2v+2)+8$

932. Lahenda võrrandid:

1) $2(5u-3)=3(2u+5)-5$
2) $(2x-1)-(6x-4)=0$
3) $(x-2)(x-3)=x(x-1)$
4) $3(6-x)-4(x+8)=0$
5) $2(x-1)-3(3+x)=5+x$

933. Lahenda võrrandi abil järgmised ülesanded.

1) Arvu 35 korrutati ühe teise arvuga ja saadi 72,45. Missuguse arvuga korrutati?
2) Mingi arv jagati 7,5-ga ja saadi 4,4. Leia see arv.
3) Missuguse arvuga tuleb liita 2,87, et saada 11,06?
4) Missugusest arvust tuleb lahutada 12,5, et saada 63,1?
5) Missugust arvu tuleb korrutada 3,8-ga, et saada 4,18?
6) Missuguse arvuga tuleb jagada 33,5, et saada 3,7?
7) Riiulil oli teatud hulk raamatuid. Kui neile lisati veel 14 raamatut, siis oli riiulil 81 raamatut. Mitu raamatut oli esialgu riiulil?
8) Pärast seda, kui laost veeti 284 m^3 puid ära, jäi sinna veel 3759 m^3 puid. Kui palju puid oli esialgu laos?

934. *Kui võrrand sisaldab harilikke murde, siis alustame võrrandi lahendamist murdude kaotamisega. Selleks korrutame võrrandi mõlemad pooled murdude ühise nimetajaga.*

Näide. $\frac{2x-1}{5}=3+\frac{1-3x}{4} \quad | \cdot 20$

Võrrandi mõlema poole korrutamiseks 20*-ga korrutame võrrandi* **iga liikme** *selle arvuga:*

$$\frac{\overset{4}{\cancel{20}}(2x-1)}{\underset{1}{\cancel{5}}}=20\cdot 3+\frac{\overset{5}{\cancel{20}}(1-3x)}{\underset{1}{\cancel{4}}}$$

ehk

$$4(2x-1)=20\cdot 3+5(1-3x);$$
$$8x-4=60+5-15x;$$
$$8x+15x=65+4;$$
$$23x=69;$$
$$x=3.$$

Kontroll. $v=\frac{2\cdot 3-1}{5}=\frac{5}{5}=1;$

$p=3+\frac{1-3\cdot 3}{4}=3-2=1;$

$v=p.$

Vastus: $x=3$.

935. Lahenda võrrandid.

1) $\frac{y}{3}-7=5$

2) $20=13+\frac{7x}{2}$

3) $1+\frac{4t}{5}=13$

4) $\frac{3x}{4}-\frac{x}{2}=1$

5) $\frac{x-2}{3}=5$

6) $7+\frac{x}{3}=13$

7) $8=\frac{x}{5}+7$

8) $\frac{3r}{8}-15=0$

9) $\frac{s}{2}+\frac{s}{4}=0$

10) $\frac{5}{x}=\frac{2}{3}$

936. Lahenda võrrandid.

1) $\frac{2c-1}{5}-\frac{1+c}{2}=1$

2) $\frac{s+3}{5}=8-\frac{s-1}{4}$

3) $\frac{a}{2}-\frac{a}{3}=\frac{a}{4}-1$

4) $\frac{2x+7}{4}-\frac{x+1}{3}=\frac{3}{4}$

5) $\frac{n}{2}-\frac{5n+4}{3}=\frac{4n-9}{3}$

937. Koosta võrdus iga järgneva lause põhjal.

1. Arv 6 on 2 võrra suurem kui 4.

2. Arv 10 on 2 korda suurem kui 5.

3. Arv $x+3$ on 4 võrra suurem kui $\frac{x}{2}$.

4. Arvude $x+1$ ja $x-1$ jagatis on 2.

5. Arvude $3x-1$ ja $x-2$ vahe on 3.

938. Näide. *Ma mõtlesin ühe arvu, liitsin sellega* 2, *tulemuse jagasin* 3*-ga, saadud jagatisest lahutasin* 4 *ja sain* 6. *Missuguse arvu ma mõtlesin?*

Lahendus.

1. Võrrandi koostamine.

Olgu minu poolt mõeldud arv x. *Liitnud selle arvuga* 2, *sain* $x+2$. *Saadud tulemuse jagamisel* 3*-ga sain* $\frac{x+2}{3}$. *Lahutades sellest* 4, *sain* $\frac{x+2}{3}-4$. *Ülesandes on öeldud, et tulemuseks ma sain* 6. *Järelikult*

$$\frac{x+2}{3}-4=6.$$

II. Võrrandi lahendamine.

$$\frac{x+2}{3}-4=6; \mid \cdot 3$$
$$x+2-12=18;$$
$$x-10=18;$$
$$x=18+10;$$
$$x=28.$$

III. Lahendi kontroll (*ülesande teksti põhjal*).

$$28+2=30;\ 30:3=10;\ 10-4=6.$$

IV. Vastus. *Mõeldud arv oli* 28.

939. Ma mõtlesin ühe arvu. Sellest arvust lahutasin 11, saadud vahe jagasin 8-ga ja tulemusega liitsin 7. Sain 10. Missuguse arvu ma mõtlesin?

940. Jagades tundmata arvu 5-ga ja suurendades saadud jagatist 27 võrra, saame arvu, mis on pool endisest tundmata arvust. Leia see arv.

941. Jüri on Reinust 2 aastat vanem, Maret on Jürist 3 aastat noorem. Kokku on Reinu, Jüri ja Mareti vanus 37 aastat. Kui vana on Rein?

942. Isa, poja ja tütre vanus on kokku 47 aastat. Isa on pojast 5 korda vanem, tütar on pojast 2 aastat noorem. Kui vana on poeg?

943. Lahenda võrrandid.

1) $\frac{2x-3}{5}=\frac{x+1}{3}$

2) $\frac{11}{15}x-\frac{5}{6}(x-2)=0$

3) $\frac{2(x-4)}{3}=3(x-2)-\frac{4x-3}{2}$

4) $\frac{2x+5}{3}-\frac{x+6}{2}-\frac{x+8}{6}=0$

5) $\frac{5(4x-1)}{8}-\left[x-\frac{3(1-x)}{2}\right]=2$

944. Kolme järjestikuse täisarvu summa on 54. Leia need arvud.

945. Nelja järjestikuse täisarvu summa on 34. Leia need arvud.

946. Kirjutati neli täisarvu, milledest iga järgmine on temale eelnevast arvust 2 võrra suurem. Nende arvude summa on 44. Leia need arvud.

947. Jaota arv 37 kahte ossa nii, et pool ühest osast oleks 15 võrra suurem teise osa $\frac{2}{3}$-st.

948. Lahenda võrrandid.

1) $2-x-\frac{5x-1}{3}=\frac{4x+2}{15}$

2) $2x-\frac{8x+7}{3}=-\frac{6x-5}{7}$

3) $\frac{6x-5}{7}=x-1-\frac{3x-4}{5}$

4) $5\cdot\frac{x}{6}-3\cdot\frac{x}{4}-2\frac{3}{8}=\frac{7}{9}x-1\frac{1}{12}x+15\frac{1}{8}$

5) $13z-\frac{8z}{9}=15z+22-\frac{7z}{2}$

949. Lahendada võrrandid.

1) $\frac{6}{7}(9-2x)-\frac{2}{3}(3x-4)=3-1\frac{1}{2}x$

2) $\frac{7x+18}{3}-\frac{4}{5}(x+3)=\frac{3}{2}(x+2)+\frac{2}{3}$

3) $\frac{7-2x}{2}-\left(1\frac{1}{2}x-\frac{x-2}{7}\right)=36-6x$

4) $\frac{5x-1}{3}+\frac{4(x-1)}{5}-2x-4=0$

5) $\frac{2(2x-7)}{7}+6\frac{5}{6}+\frac{7(x-4)}{3}=x+4-\frac{9-7x}{8}-\frac{1}{6}$

950. N ä i d e. 5., 6. *ja* 7. *klass kogusid* 840 *kg vanapaberit, kusjuures* 6. *klass kogus* 2 *korda rohkem ja* 7. *klass* 4 *korda rohkem kui* 5. *klass. Kui palju vanapaberit kogus iga klass?*

Lahendus.

I. Võrrandi koostamine.

Olgu 5. klassis kogutud x kilogrammi vanapaberit. Siis 6. klassis on seda kogutud 2x kilogrammi ja 7. klassis 4x kilogrammi. Et üldse koguti vanapaberit 840 kg, siis

$$x+2x+4x=840.$$

II. Võrrandi lahendamine.

$$x+2x+4x=840;$$
$$7x=840;$$
$$x=120.$$

III. Lahendi kontroll.

5. *klass* ... 120 *kg;*
6. *klass* ... 240 *kg;*
7. *klass* ... 480 *kg;*

Kokku ... 840 *kg.*

IV. Vastus. 5. *klass kogus vanapaberit* 120 *kg,* 6. *klass* 240 *kg ja* 7. *klass* 480 *kg.*

951. Kolhoosi aias kasvab 120 pirni-, õuna- ja ploomipuud. Pirnipuid on kolm korda rohkem kui ploomipuid, õunapuid kaks korda rohkem kui pirnipuid. Mitu pirni-, õuna- ja ploomipuud on kolhoosi aias?

952. Ristkülikukujulise põllu pikkus on kaks korda suurem laiusest. Leia selle põllu pikkus ja laius, kui põllu ümbermõõt on 960 m.

953. Kolmnurga ümbermõõt on 180 cm. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 9 : 11 : 16. Leia kolmnurga iga külje pikkus.

954. Kolm perekonda kasutavad korterit, mille üür on 90 rubla kuus. Esimese perekonna kasutada on korteri elamispinnast 30 m², teisel 20 m² ja kolmandal 50 m². Üür jaotatakse kolme perekonna vahel võrdeliselt kasutatavale elamispinnale. Kui palju tuleb maksta igal perekonnal?

955. Kolmnurga külgede pikkused väljenduvad kolme üksteisele järgneva täisarvuga. Leia iga külje pikkus, kui kolmnurga ümbermõõt on 24 cm.

956. Kahest kõrvunurgast on üks 4 korda teisest suurem. Leia kummagi nurga suurus.

957. Kahest kõrvunurgast on üks 36° teisest väiksem. Leia need nurgad.

958. Kolmes koolis on kokku 1200 õpilast. Teises koolis on õpilasi kaks korda rohkem kui esimeses, kolmandas koolis aga 40 õpilast vähem kui teises. Mitu õpilast on igas koolis?

959. Koolil on musti, valgeid ja kirjusid kanu kokku 178. Kirjusid kanu on 3 korda rohkem kui musti, valgeid aga 3 võrra rohkem kui musti. Mitu musta, mitu valget ja mitu kirjut kana on koolil?

960. Tehase kolmes tsehhis töötab kokku 624 töölist. Teises tsehhis on töölisi 5 korda rohkem kui esimeses, kolmandas tsehhis aga niipalju kui esimeses ja teises tsehhis kokku. Mitu töölist on igas tsehhis?

961. «Tere, tere, sada hane,» ütles haneparvele vastulendav üksik hani.

«Ei meid ole 100 hane,» vastas parve juht. «Kui meid oleks veel nii palju, nagu meid on, ja veel pool sellest ning veerand sellest ning sina ka lendaksid koos meiega, alles siis oleks meid sada hane!»

Mitu hane lendas parves?

VÕRRANDID, MIS SISALDAVAD TUNDMATUT MURRU NIMETAJAS.

962. *Võrrandit*

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}=0$$

lahendamata saab öelda, et selle lahendiks ei või olla arv 0 *ega arv* 1. *Miks? Lahenda see võrrand, korrutades võrrandi mõlemad pooled murdude ühise nimetajaga* $x(x-1)$.

Võrrandi lahendiks ei saa olla arv, mille puhul tundmatut sisaldav murru nimetaja võrduks nulliga.

963. Põhjenda väidet, et võrrandi

$\frac{4-x}{x-2}=6+\frac{2}{x-2}$ lahendiks ei või olla arv 2;

$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{2}{x-2}$ „ „ „ „ ükski arvudest 0, 1 ja 2;

$\frac{3}{x^2-4}=\frac{2}{x^2-2x-8}$ „ „ „ „ ükski arvudest 2, −2 ja 4.

964. Ütle arvud, mis ei või olla

võrrandi $\frac{4}{x-1}=\frac{2}{x+1}$ lahenditeks;

„ $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{5}{x+3}$ „

„ $\frac{2}{x+2}=\frac{1}{2x-1}$ „

965. *Lahendame võrrandi*

$$\frac{4-x}{x-2}=6+\frac{2}{x-2}, \qquad \text{(I)}$$

teades ette, et tema lahendiks ei saa olla arv 2. (Miks?) Korrutades võrrandi mõlemad pooled arvuga $x-2$, saame võrrandi

$$4-x=6(x-2)+2, \qquad \text{(II)}$$

mille lahendamisel saame:

$$\begin{aligned} 4-x&=6x-12+2;\\ 4-x&=6x-10;\\ -x-6x&=-10-4;\\ -7x&=-14.\\ x&=2. \end{aligned}$$

Oleme saanud lahendiks arvu, mis ei või olla antud võrrandi (I) *lahendiks. Kontrollimine näitab, et viga me teinud ei ole: arv* 2 *rahuldab võrrandit* (II) *ja kõiki järgnevaid võrrandeid, kuid ei rahulda antud võrrandit* (I). *Sellest tuleb teha järgmine järeldus:*

> **kui võrrandi pooli korrutada avaldisega, mis sisaldab tundmatut, siis võib saada võrrandi, millel on rohkem lahendeid kui antud võrrandil.**

Siin korrutasime võrrandi pooli avaldisega $x-2$ ja saime võrrandi, millel on üks lahend (2), *kuna antud võrrandil ei ole ühtki lahendit. Et võrrandil* (I) *lahendit ei saa olla, see selgub, kui tundmatut sisaldavad liikmed viia võrrandi vasakule poolele ja teostada seal murdude liitmine. Siis võrrand omandab kuju*

$$\frac{2-x}{x-2}=6 \text{ ehk } \frac{x-2}{x-2}=-6.$$

Sellel võrrandil ei ole lahendit, sest x iga väärtuse puhul võrrandi vasak pool on 1, *kuna parem pool on* -6.



Joon. 165.

966. *Arvu, mis rahuldab antud võrrandi (algvõrrandi) teisendamisel saadud võrrandit, kuid ei rahulda algvõrrandit, nimetatakse algvõrrandi* **võõrlahendiks.**

Näita, et $x=3$ on võrrandi

$$\frac{2}{x-3}+\frac{x-5}{x-3}=2$$

võõrlahend.

967. *Lahendanud võrrandi, milles tundmatu esineb murru nimetajas, vaatame esmalt, kas murdude nimetajad on leitud lahendi puhul nullist erinevad või mitte. Kui tundmatu asendamisel leitud arvuga mõni nimetaja muutub nulliks, siis see arv ei ole antud võrrandi lahendiks. Kui ükski nimetaja nulliks ei muutu, siis see arv* võib olla *võrrandi lahendiks. Kas ta seda on või ei ole, seda näitab lahendi kontroll.*

Näide 1. *Lahendame võrrandi*

$$\frac{3}{4x-2}=1-\frac{1}{1-2x}.$$

Lahutame esimese murru nimetaja teguriteks:

$$\frac{3}{2(2x-1)}=1-\frac{1}{1-2x}.$$

Muudame märgi teise murru nimetaja kõigil liikmeil ja teise murru ees:

$$\frac{3}{2(2x-1)}=1+\frac{1}{2x-1}.$$

Korrutame võrrandi mõlemaid pooli murdude ühise nimetajaga $2(2x-1)$:

$$3=2(2x-1)+2.$$

Lahendame saadud võrrandi:

$$3=4x-2+2;$$
$$4x=3;$$
$$x=\frac{3}{4}.$$

Kontroll.

I. *Arvutame algvõrrandis esinevate murdude nimetajad, kui* $x=\frac{3}{4}$:

$$4x-2=4\cdot\frac{3}{4}-2=3-2=1;$$
$$1-2x=1-2\cdot\frac{3}{4}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}.$$

II. *Arvutame algvõrrandi poolte väärtused:*

$$v=\frac{3}{1}=3;\ p=1-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=1+2=3;$$
$$v=p.$$

Vastus. $x=\frac{3}{4}$.

Näide. 2.

$$\frac{x+5}{x-1}-\frac{x+1}{x-3}+\frac{8}{(x-1)(x-3)}=0.$$

Korrutame võrrandi mõlemaid pooli murdude ühise nimetajaga $(x-1)(x-3)$:

$$(x+5)(x-3)-(x+1)(x-1)+8=0.$$

Avades sulud ja koondades sarnased liikmed, saame:

$$x^2+5x-3x-15-x^2+1+8=0;$$
$$2x-6=0;$$
$$x=3.$$

Kontroll.

I. *Arvutame algvõrrandis esinevate murdude nimetajad, kui* $x=3$:

$$x-1=3-1=2;$$
$$x-3=3-3=0\,(!)$$

Arv 3 *ei rahulda antud võrrandit.*

Vastus. *Antud võrrandil ei ole lahendit.*

968. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{6}{x-1}=2$ 2) $\frac{2x}{x-1}=5$

3) $\frac{1-x}{x-1}=3$ 4) $\frac{0{,}5x+2}{3-0{,}25x}=2$

969. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{5}{2x}+\frac{1}{6}=\frac{3}{5x}+\frac{4}{5}$

2) $\frac{2}{3x}-\frac{5}{6}=\frac{1}{2x}$

3) $\frac{5}{6x}=\frac{3}{4x}=\frac{1}{12x}$

4) $\frac{0{,}1}{2x}-\frac{0{,}15}{3x}=2$

970. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{2}{10-x}=\frac{3}{x}$

2) $\frac{2}{3x}=\frac{3}{2x}$

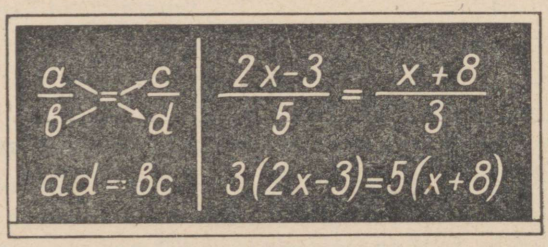
3) $\frac{2}{x-4}=\frac{6}{x-3}$

4) $\frac{x+2}{x-2}=\frac{x-4}{x+2}$

5) $\frac{x-5}{x-7}=\frac{x-8}{x-9}$

6) $\frac{x-3}{x}=\frac{x+1}{x+10}$

Märkus. *Võrde kuju omavaid võrrandeid on kõige lihtsam lahendada võrde põhiomaduse põhjal* (*joon.* 166).



Joon. 166.

971. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{x+2}{3x}=\frac{5}{12}$

2) $\frac{3u-5}{2}=\frac{4u-1}{-3}$

3) $\frac{6}{z}=\frac{7}{10-z}$

4) $\frac{E}{1+E^2}=\frac{1}{2+E}$

5) $\frac{2l}{1+l+4l^2}=\frac{1}{1+2l}$

6) $\frac{a}{a^2+1}=\frac{1}{a+4}$

972. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{3}{x-1}=\frac{4}{x+1}$

2) $\frac{x+1}{x}=\frac{2x+1}{2x}$

3) $\frac{18}{x-2}=9$

4) $\frac{3}{2x+4}=\frac{5}{3x+8}$

5) $\frac{x^2}{x-4}=x-6$

6) $\frac{24}{x}-\frac{17-x}{x-1}=1$

973. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{2}{x^2-4}$

2) $\frac{x+1}{3-x}+\frac{2x-5}{x-3}=4$

3) $\frac{11+x}{6+x}=\frac{8+x}{4+x}$

4) $\frac{0{,}3x+1{,}8}{1{,}6x+2{,}7}=0{,}6$

5) $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}$

6) $\frac{x^2}{x^2-4}+\frac{1}{2x-x^2}=1$

974. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{4x+7}{x-1}=\frac{12x+5}{3x+4}$

2) $\frac{5x-7}{3x+2}=\frac{5x-7}{3x-1}$

3) $\frac{7x-3}{x-1}=\frac{2}{3}$

4) $\frac{2(3-7x)}{1+x}=\frac{1}{2}$

5) $\frac{x+5}{x-5}-\frac{x-5}{x+5}=\frac{20}{x^2-25}$

6) $\frac{x+4}{x-4}-\frac{x-4}{x+4}=\frac{24}{x^2-16}$

975. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{10{,}3}{x}+\frac{1}{3}=\frac{7{,}8}{x}+\frac{2}{3}$

2) $\frac{1}{3x}-\frac{1}{4x}=\frac{1}{24}$

3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{4x}=\frac{1}{6}$

4) $\frac{3}{4-3x}+\frac{1}{3x}=0$

5) $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}=\frac{4}{x-2}$

6) $\frac{x-7}{x+7}=\frac{2x-15}{2x-6}-\frac{1}{2(x+7)}$

976. Üks masinakirjutaja võib käsikirja ümber kirjutada 8 tunniga, teine 7 tunniga. Kui kiiresti võivad nad selle töö lõpetada koos töötades?

977. Bassein täitub veega ühe kraani kaudu 3 tunniga, teise kraani kaudu 5 tunniga. Mitme tunniga täitub bassein siis, kui avada mõlemad kraanid korraga?

978. Kaks töölist lõpetaksid töö koos töötades 3 tunni ja 36 minutiga. Esimene tööline lõpetaks töö üksi 6 tunniga. Mitme tunniga teeks selle töö teine tööline üksi töötades?

979. Jaan läbis ühekilomeetrise vahemaa joostes 9 minuti võrra kiiremini kui kõndides. Teades, et joostes liikus Jaan $2\frac{1}{2}$ korda kiiremini kui kõndides, leia Jaani kõndimiskiirus ja jooksukiirus.

980. Missugune arv on vaja liita murru $\frac{2}{5}$ lugejaga ja nimetajaga, et saaksime murru $\frac{3}{7}$?

981. Missugune arv on vaja liita murru $\frac{2}{5}$ lugejaga ja nimetajaga, et saaksime murru $\frac{5}{14}$?

982. Murru nimetaja on lugejast 4 korda suurem. Kui murru lugejaga ja nimetajaga liidame 10, siis saame murru, mille väärtus on $\frac{1}{2}$. Leia murd.

983. Murru $\frac{4}{25}$ lugejale lisati 9 ja nimetajale 2. Siis lisati uuesti lugejale 9 ja nimetajale 2. Nii toimiti korduvalt, kuni murru väärtuseks saadi 1. Mitu korda lisati neid arvusid murru lugejale ja nimetajale?

984. Murru $\frac{13}{22}$ lugejast lahutati 3 ja nimetajast 5. Siis lahutati uuesti lugejast 3 ja nimetajast 5. Nii toimiti korduvalt, kuni murru väärtuseks saadi $\frac{1}{2}$. Mitu korda lahutati neid arvusid murru lugejast ja nimetajast?

985. Töölised said kokku 120 rubla. Kui neid oleks olnud 4 võrra vähem, siis oleks igaüks neist saanud kolm korda rohkem. Kui palju oli töölisi?

986. Töölised said kokku 180 rubla. Kui neid oleks olnud 3 võrra rohkem, siis oleks neist igaüks saanud kaks korda vähem. Kui palju oli töölisi?

987. Kui turist oli sõitnud $\frac{3}{8}$ kahe linna vahelisest teest, siis jäi tal sõita poolest teest veel 15 km. Leia nende linnade vaheline kaugus.

988. Kui turist oli sõitnud $\frac{5}{9}$ kahe linna vahelisest teest, siis oli tal sõidetud 10 km rohkem kui pool teed. Leia nende linnade vaheline kaugus.

989. Isa on 42 aastat ja poeg 9 aastat vana. Mitme aasta pärast on isa kaks korda pojast vanem?

990. Isa on 39 aastane, poeg 15 aastane. Mitme aasta eest oli poeg isast seitse korda noorem?

991. Esimese toru kaudu täitub bassein 5 tunniga, teise kaudu aga tühjeneb 6 tunniga. Mitme tunni pärast täitub bassein, kui avada mõlemad torud korraga?

992. Esimese toru kaudu täitub bassein 4 tunniga, teise kaudu 5 tunniga. Mitme tunni pärast täitub bassein, kui avada mõlemad torud korraga?

TÄHELISTE KORDAJATEGA VÕRRANDID.

993. *Võrrandis võib peale tundmatut tähistava tähe esineda veel muid tähti. Need tähed tähistavad antud arve, kuid pole öeldud, missuguseid nimelt. Neid tähtede abil kirjutatud antud arve nimetatakse* **tähelisteks kordajateks** *ehk* **parameetriteks** *ja tähistatakse harilikult tähestiku esimeste tähtedega a, b, c jne., kuna tundmatuid tähistatakse tähestiku lõpuosa tähtedega x, y, z, u, v.*

Et tähelise kordaja kohta pole öeldud, millist arvu ta tähendab, siis võib tema all mõelda meelevaldset arvu, kuid mitte niisugust, mille puhul võrrandis või tema lahendis mõni nimetaja muutub nulliks. Näiteks võrrandis

$$\frac{x}{a}-x=a$$

parameeter a tähendab meelevaldset arvu, kuid mitte arvu 0. *Lahendame selle võrrandi:*

$$\frac{x}{a}-x=a;\ |\cdot a$$
$$x-ax=a^2;$$
$$(1-a)x=a^2;\ |:(1-a)$$
$$x=\frac{a^2}{1-a}$$

Nüüd näeme, et antud võrrandis ei tohi tähe a all mõista ka arvu 1, *sest siis saadud lahend ei kõlbaks.*

Täheliste kordajatega võrrandi lahendamisel pane tähele, et

pärast tundmatut sisaldavate liikmete viimist võrrandi ühele poolele tuleb tundmatu viia sulgude taha ja siis võrrandi pooled jagada tundmatu kordajaga.

Näide. $ax+2=b-3x;$
$ax+3x=b-2;$
$(a+3)x=b-2;$
$x=\frac{b-2}{a+3}.$

994. Lahenda tähe x suhtes järgmised võrrandid:

1) $2x=a$
2) $ax=m-2x$
3) $2x+1=n$
4) $2(x+1)=p$
5) $px+3(x+1)=q$
6) $x-a=b-x$
7) $ax+(x-a)=b$
8) $x+h=2(x+k)$
9) $2x+3x=2c+3d$
10) $nx+x=1$
11) $px+qx=9$
12) $x=1-3x$
13) $x=1-mx$
14) $\frac{x}{p}+\frac{x}{q}=1$
15) $\frac{x}{2}=\frac{t}{3}-x$

995. Lahenda tähe x suhtes järgmised võrrandid:

1) $\frac{a}{x}-b=c$
2) $\frac{m}{x}+\frac{n}{x}=p$
3) $\frac{a}{x-1}-1=-b$
4) $\frac{a}{mx}+\frac{b}{nx}=p$
5) $\frac{m-x}{m+1}=n$
6) $\frac{a}{x-2}-c=\frac{b}{x-2}$
7) $\frac{m}{m-x}=\frac{n}{n-x}$
8) $\frac{a}{x-1}-\frac{6}{x+1}=0$
9) $\frac{m-x}{n-x}=\frac{m+x}{n+x}$
10) $\frac{a}{x+1}+2=\frac{bx}{x+1}$
11) $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$
12) $\frac{1}{x}=\frac{2}{m}-\frac{3}{n}$
13) $\frac{1}{x}=3-\frac{a}{b}$
14) $\frac{1}{x}=\frac{2u}{V}+3u$
15) $\frac{m}{x}=2a-\frac{b}{a}$

996. Ühe ruudu külg on a cm võrra väiksem teise ruudu küljest, pindala on aga d cm^2 võrra väiksem. Kui pikk on suurema ruudu külg?

997. Kolhoosis on tööl b naist, mis moodustab $a\%$ kogu kolhoosnikute arvust. Kui suur on kolhoosnikute arv selles kolhoosis?

998. Laeva kiirus seisvas vees on a km tunnis. Jõe voolu kiirus on b km tunnis. Kui kaugel asetseb üks linn teisest, kui auri'k kulutas reisiks sinna ja tagasi mööda jõge t tundi?

999. Plaani järgi pidid kolhoosnikud külvama a ha päevas. Tegelikult ületasid nad igapäevase külviplaani, külvates b ha päevas, mille tõttu lõpetasid külvitööd 2 päeva enne määratud tähtaega. Kui suur oli külvipind?

1000. Kolm töölist lõpetaksid töö koos töötades a tunniga. Esimene tööline lõpetaks selle töö üksi b tunniga, teisel töölisel kuluks selleks üksi töötades c tundi. Kui palju aega kuluks kolmandal töölisel üksi selle töö lõpetamiseks?

1001. Allpool on antud rida valemeid, milledes esineb mitu tähte. Loe kordamööda iga täht valemis tundmatuks ja lahenda valem selle tähe suhtes (kui ta pole juba selle suhtes lahendatud).

1) $S=\frac{1}{2}ah$ 6) $V=abc$ 11) $ab=hc$

2) $c=2\pi r$ 7) $s=vt$ 12) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

3) $k=\frac{a+b}{2}$ 8) $K=\frac{na}{2}\cdot m$ 13) $2\alpha+\beta=180°$

4) $S=\frac{ab}{2}$ 9) $e=\frac{P}{V}$ 14) $\alpha+\beta+\gamma=180°$

5) $T=K+2P$ 10) $S=(n-2)\cdot 180°$ 15) $\alpha=180°-\frac{360°}{n}$

Mitmed neist valemeist väljendavad tuntud tõsiasju. Kas tead mõnda neist?

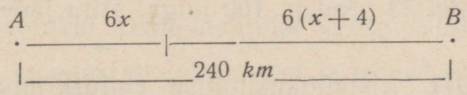
ÜLESANNETE LAHENDAMINE VÕRRANDI ABIL.

1002. Näide. *Linnade A ja B vahemaa on 240 km. Nendest linnadest väljusid ühel ja samal ajal teineteisele vastu kaks jalgratturit, kes kohtusid 6 tunni pärast. Leia kummagi jalgratturi sõidukiirus, kui on teada, et teine neist läbis tunnis 4 km rohkem kui esimene.*

Lahendus.

	Kiirus $\times$ $\left(\frac{\text{km}}{\text{t}}\right)$	*Aeg* (t.)	= *Tee pikkus* (km)
I jalgrattur	x	6	$6x$
II jalgrattur	$x+4$	6	$6(x+4)$

Tee pikkus on 240 km.



$6x+6(x+4)=240;$
$6x+6x+24=240;$
$12x=216;$

$x=18\frac{\text{km}}{\text{t}}$ (I *jalgrattur*)

$x+4=22\frac{\text{km}}{\text{t}}$ (II *jalgrattur*)

Kontroll. II *jalgrattur sõitis tunnis* $22-18=4$ *km rohkem kui* I *jalgrattur.* I *jalgrattur läbis* $6\cdot 18=108$ *km.* II *jalgrattur läbis* $6\cdot 22=132$ *km. Kokku oli tee pikkus* $108+132=240$ *km.*

Vastus. I *jalgrattur läbis* 18 *km tunnis,* II *jalgrattur* 22 *km.*

Märkus. *Kasuta ka edaspidi, kus sobib, võrrandi koostamiseks niisugust skeemi, nagu ülal näidatud.*

1003. Maret väljus linnast jalgrattal 2 tundi enne Virvet. Maret läbis tunnis 10 km, Virve 14 km. Millise aja jooksul jõuab Virve Maretile järele?

1004. Kaks mootorpaati väljusid samaaegselt ühest ja samast kohast ning sõitsid üks pärivoolu, teine vastuvoolu. Mootorpaatide kiiruste suhe on 2 : 3. Viie tunni pärast asusid nad teineteisest 100 km kaugusel. Leia mootorpaatide kiirus.

1005. Asulate *A* ja *B* vahemaa on 66 km. Kell 9 väljus asulast *A* jalgrattur asula *B* suunas kiirusega 14 km tunnis. Kell 10 väljus asulast *B* teine jalgrattur asula *A* suunas kiirusega 12 km tunnis. Kui kaua aja pärast kohtas esimene jalgrattur teist?

*

1006. Epul on 30 metallraha, 10- ja 15-kopikalised, koguväärtusega 3 rbl. 90 kop. Mitu 10- ja mitu 15-kopikalist tal on?

1007. Mootorsõidukite remonditöökojas parandati kuu jooksul autosid ja motorollereid, kokku 40 masinat. Töökojas praktikal viibiv Tõnu leidis, et parandatud sõidukeil oli kokku 100 ratast. Mitu autot ja mitu motorollerit oli töökojas parandamisel kuu jooksul?

1008. Pirita jõel sõitis 70 inimest süstadel. Üheinimese süstasid oli kolm korda rohkem kui kaheinimese süstasid. Mitu ühe- ja mitu kaheinimese süsta oli jõel?

1009. Jaanil on 3,05 rbl. väärtuses metallraha, viie- ja kümnekopikalised. Viiekopikalisi on 19 võrra enam kui kümnekopikalisi. Mitu viie- ja mitu kümnekopikalist on Jaanil?

1010. Jüri kasvatas kanu ja jäneseid. Kokku oli kanadel ja jänestel 33 pead ja 100 jalga. Mitu jänest ja mitu kana oli Jüril?

*

1011. Ristkülikukujulise ehituskrundi pikkus on laiusest 3 korda suurem. Kui selle ehituskrundi laiust suurendada 2 m võrra, siis tema pindala suureneb 96 m^2 võrra. Leia ehituskrundi mõõtmed.

1012. Ristküliku pikkus on 2 korda suurem laiusest. Kui selle ristküliku pikkust suurendada 5 m võrra, laiust aga 3 m võrra, siis tema pindala suureneb 92 m^2 võrra. Missugused on selle ristküliku esialgsed mõõtmed?

1013. Ruudu külgesid pikendati 1 m võrra. Ruudu pindala suurenes selle tõttu 15 m^2 võrra. Kui pikk oli selle ruudu külg esialgu?

1014. Ruudu iga külje pikkust vähendati 3 cm võrra, mille tõttu ruudu pindala vähenes 33 cm^2 võrra. Leia selle ruudu külje esialgne pikkus.

1015. Ristküliku pikkus on 5 m võrra suurem tema kahekordsest laiusest. Ristküliku ümbermõõt on 190 m. Leia selle ristküliku pikkus ja laius.

*

1016. Kolme üksteisele järgneva paarisarvu summa on 120. Leia need arvud.

1017. Leia kolme üksteisele järgneva paarisarvu summa, kui on teada, et teise ja kolmanda arvu summa on 28 võrra suurem esimesest arvust.

1018. Leia neli üksteisele järgnevat paarisarvu, kui on teada, et lahutades neljanda arvu teise arvu kolmekordsest, saame arvu, mis on 4 võrra suurem esimesest arvust.

1019. Leia kolm üksteisele järgnevat paaritut arvu, kui on teada, et esimese ja kolmanda arvu summa on 37 võrra suurem teisest arvust.

*

1020. Peeter, Jüri ja Rein korjasid kokku 63 seent. Jüri korjas 8 seent vähem kui Peeter, Rein korjas aga seeni 3 korda rohkem kui Jüri. Mitu seent korjas neist igaüks?

1021. Kolhoosi aias on 240 viljapuud. Õunapuid on 3 korda rohkem kui pirnipuid, ploomipuid 9 võrra vähem kui õunapuid, kirsipuid aga 4 korda rohkem kui ploomipuid. Mitu igast liigist puud on kolhoosi aias?

1022. Kolhoosil on 3 maatükki. Teine maatükk on esimesest 2,3 korda suurem, kolmas aga moodustab $\frac{2}{3}$ esimesest ja teisest tükist kokku. Kui suur on iga maatükk, kui kolme maatüki pindala kokku on 385 ha?

1023. Kolme arvu summa on 76. Leia need arvud, kui on teada, et teine arv on esimesest kaks korda suurem, kolmas arv aga on 4 võrra suurem kahe esimese summast.

1024. Plaani järgi pidid kolhoosnikud külvama 25 ha päevas. Tegelikult külvasid nad 30 ha päevas ning lõpetasid selle tõttu

külvitööd 3 päeva enne tähtaega. Kui suur oli ettenähtud külvipind?

1025. Aurik pidi plaani järgi sõitma ühest sadamast teise kiirusega 15 km tunnis. Masinarikke tõttu sõitis aurik ainult 12 km tunnis ning hilines selle tõttu 3 tundi. Kui kaugel asus üks sadam teisest?

1026. Jalgrattur sõitis kolhoosist linna kiirusega 16 km tunnis ja linnast tagasi koju kiirusega 12 km tunnis. Kogu sõiduaeg linna ja tagasi oli $2\frac{1}{3}$ tundi. Kui kaugel asus kolhoos linnast?

1027. Teekonnaks Tallinnast Tartusse ja tagasi kulus autol kokku 10 tundi. Mitu kilomeetrit on maanteed mööda Tallinnast Tartusse, kui auto keskmine kiirus sinnasõidul oli 60 km tunnis ja tagasisõidul 40 km tunnis ning kui Tartus peatuti 2 tundi?

1028. Jalgrattur sõitis kodust raudteejaama ja tagasi. Minnes oli tuul vastu, tulles tagant, mistõttu sinnasõit toimus kiirusega 12 km tunnis ja tagasisõit 18 km tunnis. Jaamas kulus jalgratturil pool tundi aega. Kogu reis kestis 3 tundi. Kui kaugel elas jalgrattur raudteejaamast?

1029. Kooperatiiv müüs esimesel päeval 0,5 kalevikangast, teisel päeval 0,4, kusjuures teisel päeval müüdi 30 m vähem kui esimesel päeval. Mitu meetrit kalevit oli kangas?

1030. Valve luges läbi $\frac{2}{9}$ raamatust. Nüüd selgus, et lugeda on 95 lehekülge rohkem sellest, mis on juba loetud. Mitu lehekülge on selles raamatus?

1031. Sovhoosis on põllumaa all $\frac{2}{3}$ kogu maa-alast, heinamaad moodustavad aga $\frac{2}{15}$ sovhoosi maa-alast. Kui palju on sellel sovhoosil maad, kui on teada, et põllumaad on 320 ha rohkem kui heinamaad?

1032. Ruudu külg on 6 m pikem kui võrdkülgse kolmnurga külg. Ruudu ümbermõõt on võrdkülgse kolmnurga ümbermõõdust 34 m suurem. Leia võrdkülgse kolmnurga külje pikkus.

1033. Trapetsi lühem alus on $\frac{2}{3}$ pikemast alusest. Trapetsi kesklõigu pikkus on 5 cm. Kui pikk on trapetsi pikem alus?

1034. Kaks matkagruppi väljuvad samaaegselt linnast *A*, et minna linna *B*. Esimene grupp liigub kiirusega 4 km tunnis, teine grupp aga kiirusega 5 km tunnis. Teine grupp jõudis 1 tund varem linna *B*. Kui suur on linnade *A* ja *B* vahemaa?

1035. Toomas, Jaan ja Peeter koguvad raha jalgrataste ostmiseks. Jaanil on kogutud 60 rubla rohkem kui Toomal, Peetril aga 100 rubla vähem kui Tooma kogutud kahekordne summa. Mitu rubla on igal poisil kogutud, kui kokku on nende poolt kogutud 960 rubla?

1036. Rein ütles: «Kui ma oma vanust korrutan 3-ga ning tulemusega liidan 2 aastat, siis saan oma isa vanuse. Korrutades aga isa vanust 2-ga ning liites tulemusega 3 aastat, saan vanaisa vanuse. Meie kolme vanus kokku on 99 aastat.»
Kui vana on Rein?

1037. Murru nimetaja on lugejast 2 võrra suurem. Suurendades murru lugejat ja nimetajat 1 võrra, saame uue murru, mille lugeja ja nimetaja suhe on 2 : 3. Kui suur on esialgne murd?

1038. Kahe arvu suhe on 7 : 2. Samade arvude vahe on 30. Leia suurem arv.

1039. Kahe arvu suhe on 3 : 5. Nende arvude vahe on 12. Leia väiksem arv.

1040. Kolhoosi viljapuuaeda istutati 120 viljapuud. Õunapuid istutati 3 korda, pirnipuid aga 30 võrra enam kui kirsipuid. Mitu puud istutati igast liigist?

1041. Kolme arvu summa on 51. Leia need arvud, teades, et esimene arv on kaks korda väiksem teisest, kolmas arv on aga 3 võrra suurem esimesest.

1042. Ma võtsin ühe arvu, liitsin sellega 28, korrutasin tulemust 3-ga, nüüd lahutasin 120, jagasin saadud vahe 20-ga ja sain 8 korda väiksema arvu, kui ma algul võtsin. Missuguse arvu ma võtsin?

1043. Kui ma algul jagan mõeldud arvu 4-ga, siis aga jagan mõeldud arvu 6-ga ja saadud jagatised liidan, saan 20. Leia mõeldud arv.

1044. Isa sõitis autoga ühest linnast teise keskmise kiirusega v km tunnis. Tagasi sõitis ta lennukiga, mille keskmine kiirus oli 3 korda suurem auto kiirusest. Kogu teekond kestis t tundi. Kui suur on nende linnade vahemaa?

1045. Ristküliku pikkus ja laius suhtuvad nagu 3 : 2. Kui selle ristküliku pikkust suurendada 2 korda, laiust aga vähendada 1 ühiku võrra, siis suureneb ristküliku ümbermõõt 16 ühiku võrra. Leia antud ristküliku mõõtmed.

1046. Ruudu pindala on ristküliku pindalast 3 m² suurem. Ristküliku pikkus on 4 meetrit suurem, laius aga 3 m väiksem ruudu külje pikkusest. Leia ruudu külje pikkus.

1047. Juhan sõitis Tartusse ja sealt tagasi. Kokku kulus tal sõiduks 14 tundi. Tema kiiruseks minnes oli 40 km ja tulles 30 km tunnis. Mitme tunniga jõudis Juhan Tartusse?

1048. Lennuk läbis 600 km 3 tunniga. Teekonna esimese osa läbis ta kiirusega 240 km tunnis. Teekonna teisel osal oli tuul vastu, mistõttu lennuki kiirus oli 160 km tunnis. Kui kaua sõitis lennuk kummagi kiirusega?

1049. Pedakas ostis 20 m³ kase- ja lepapuid. Kasepuudest maksis ta 40 rubla ruumimeetrist, lepapuudest 30 rubla ruumimeetrist. Kogu ostu eest maksis ta 680 rubla. Kui palju sai ta kase-, kui palju lepapuid?

1050. Haridusosakond jaotas 18 000 rubla kolme kooli A, B ja C vahel nii, et B sai $\frac{2}{3}$ sellest mis A, ja C kaks korda nii palju kui B. Kui palju sai iga kool?

1051. Kui auto kiirust suurendada 15 km võrra tunnis, siis sooritab ta 3 t. 30 min. jooksul sama matka, milleks tal enne kulus 4 t. 40 min. Leia auto esialgne kiirus.

1052. Jaota arv 45 kaheks osaks nii, et väiksema osa pool oleks kaks korda suurem kui suurema osa viiendik.

1053. Ruudu pindala on võrdne ristküliku pindalaga. Ristküliku laius on 2 m väiksem ja ristküliku pikkus 4 m suurem kui ruudu külg. Kui pikk on ruudu külg?

1054. Auto sõitis 225 km 5 t. 15 minutiga. Algul sõitis ta kiirusega 40 km tunnis, siis aga kiirusega 60 km tunnis. Kui kaugel sihtkohast auto kiirust suurendati?

9. SUURUSTE SÕLTUVUSE GRAAFILINE KUJUTAMINE.

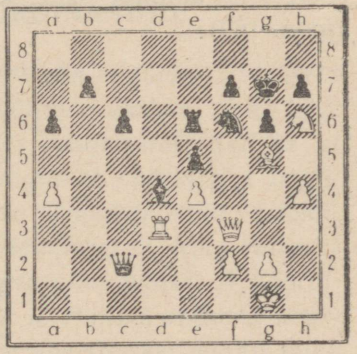
ASUKOHA MÄÄRAMISE ÜLESANDEID.

1055. a) *Selleks et sideasutused saaksid postisaadetise toimetada õigesse kohta, tuleb sellele kirjutada* a a d r e s s.

Missugustest andmetest koosneb linnas eluneva kodaniku aadress? Kuidas näeks välja aadress, kui linnad oleksid nummerdatud ja linna nimetuse asemel kasutada linna numbrit? Kuidas saaks k õ i k aadressi andmed väljendada ainult numbrite abil?

b) Missuguste andmete abil määratakse kohad teatrisaalis (kinos)?

1056. a) *Malelaud on jaotatud* 64-*ks ruudukujuliseks väljaks, millede asukoha määramiseks väljade püstread märgitakse vasakult paremale tähtedega a, b, c, d, e, f, g, ja h ning rõhtread altpoolt ülespoole numbritega* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *ja* 8 (*joon.* 167). *Nii saab iga väli oma «aadressi», mis koosneb tähest ja numbrist. Näiteks joonisel* 167 *asub valge vanker väljal d*3 *ja must kuningas väljal g*7.



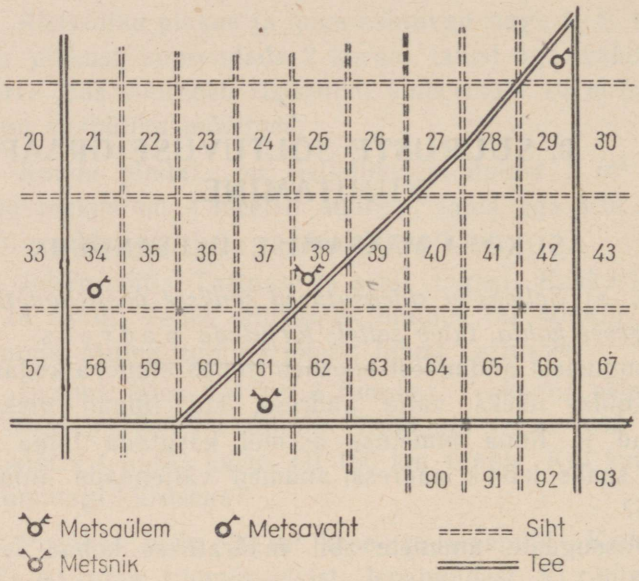
Joon. 167.

b) Määra valgete malendite asukohad joonisel 167.

c) Määra mustade malendite asukohad joonisel 167.

1057. a) *Metsa paremaks hooldamiseks ja ka asukoha määramiseks metsas jaotatakse see üksteisega ristuvate sihtide abil* k v a r t a l i t e k s, *mis järjekorras nummerdatakse.*

Leia metsaplaani (joon. 168) järgi, kus asub metskonna kantselei (metsaülem), kuidas sealt minna raielangile, mis asub kvartalil 33, ja kuidas sealt pääseb metsniku juurest läbi minnes taimeaeda, mis asub kvartalil 63?



Joon. 168.

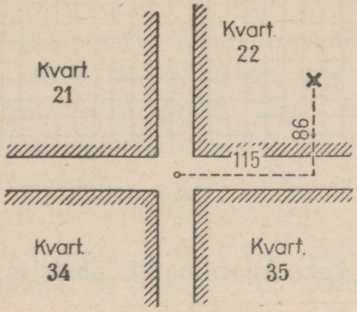
b) *Metsasihtide igasse ristumiskohta paigutatakse kvartalipost, mis kannab seal kokkupuutuva nelja kvartali numbreid* (*joon.* 169).



Joon. 169.

Leia jooniselt 168, kus asub kvartalipost, millel leiduvad kvartalinumbrid 36 ja 59; 42 ja 65; 64 ja 91.

c) Lapsed leidsid metsast rebaseuru, mis asus kvartalil 22. Selle asukoha määramiseks mõõtsid nad sammudega uru kauguse sihist, saades 86 sammu, ja sihile väljajõudmise koha kauguse kvartalipostist (joon. 170). Viimane kaugus oli 115 sammu. Rebase «aadress» märgiti üles järgmiselt:



Joon. 170.

Kv. 22, kv-post 22/34, 115/86

Kuidas nende andmete järgi leida üles rebaseurgu?

1058. a) Too näiteid, kus tegelikus elus vajatakse asukoha määramist.

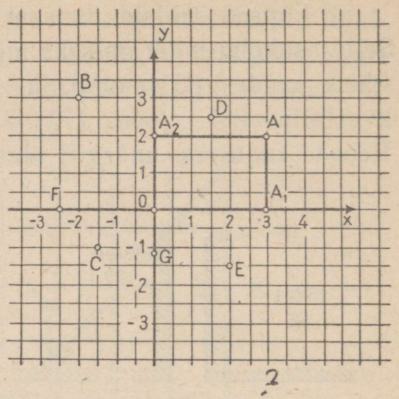
b) Missuguste andmetega määratakse laeva asukoht merel?

TASAPINNA PUNKTI KOORDINAADID.

1059. *Joonis* 171 *kujutab kaht teineteisega ristuvat arvtelge x ja y, milledel on ühine nullpunkt O ja võrdsed ühikud. Neid telgi kasutatakse punkti asukoha määramiseks tasapinnal. Selleks et määrata mingi punkti A asukohta, tõmmatakse punktist A telgedele ristlõigud* AA_1 *ja* AA_2 *ning loetakse telgedelt nende ristlõikude aluspunktide* A_1 *ja* A_2 *kaugused nullpunktist O. Neid kaugusi (koos vastava märgiga + või −) nimetatakse punkti A* **koordinaatideks** *ja tähistatakse tähtedega x ja y. Punkti esimene koordinaat* $x = OA_1$ *ja teda nimetatakse punkti* **abstsissiks;** *punkti teine koordinaat* $y = OA_2$ *ja teda nimetatakse punkti* **ordinaadiks.** *Joonisel* 171 *punkti A abstsiss on* 3 *ja ordinaat on* 2.

Leia jooniselt 171 punktide *B, C, D, E, F, G,* A_1 ja A_2 abstsiss ja ordinaat. Tulemused kirjuta tabelisse.

Punkt	Punkti	
	abstsiss	ordinaat
A	3	2



Joon. 171.

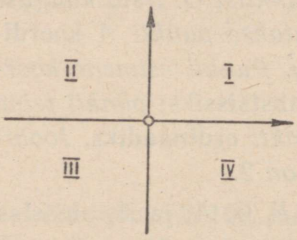
Tasapinna igal punktil on kaks koordinaati: abstsiss ja ordinaat.

1060. *Kaht teineteisega ristuvat sirget x ja y, mille suhtes määratakse punkti asukohta tasapinnal, nimetatakse* **koordinaattelgedeks;** *neist esimene telg on* **abstsisstelg** *ehk* x**-telg** *ja teine on* **ordinaattelg** *ehk* y**-telg.** *Abstsiss- ja ordinaattelg koos moodustavad* **koordinaatteljestiku** *ehk lihtsalt* xy**-teljestiku.** *Telgede lõikepunkt O on koordinaatide* **nullpunkt, alguspunkt** *ehk lihtsalt* **algus.**

1061. *Lõigud A_2A ja A_1A joonisel* 171 *näitavad punkti A kaugust vastavalt x-teljest ja y-teljest. Seejuures punkti kaugus ordinaatteljest $A_2A = OA_1 = x$, ja punkti kaugus abstsisstelljest $A_1A = OA_2 = y$. Nii näeme, et*

punkti abstsiss on punkti kaugus ordinaatteljest ja punkti ordinaat on punkti kaugus abstsisstelljest.

Millal on punkti abstsiss null? Millal on punki ordinaat null? Mis on abstsisstelje asetseva punkti ordinaadiks? Mis on ordinaatteljel asetseva punkti abstsissiks?



Joon. 172.

1062. *Koordinaatteljed jaotavad tasapinna neljaks veerandiks. Veerandid nummerdame joonisel* 172 *näidatud järjekorras.*

Tee kindlaks, missuguse märgiga on punkti abstsiss ja missuguse märgiga ordinaat, kui punkt asetseb tasapinna I veerandis, II veerandis, III veerandis, IV veerandis. Missugustes vee-

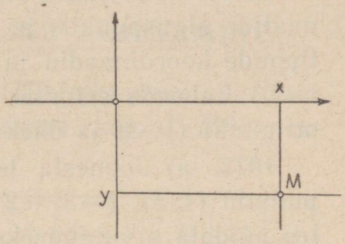
randites on punkti abstsiss negatiivne, missugustes ordinaat negatiivne?

1063. *Punkti, mille abstsiss on 2 ja ordinaat on −3, märgitakse sümboliga* (2; −3). *Lauset «punkti M abstsiss on 2 ja ordinaat on −3» ehk «punkti M koordinaadid on 2 ja −3» kirjutatakse lühidalt kujul*

$$M(2; -3).$$

Kirjuta sel kujul üles kõik joonisel 171 antud punktid.

1064. *Punkti leidmiseks tema koordinaatide x ja y järgi joonestame abstsisstelje punktist x ordinaatteljega paralleelse sirge ja ordinaattelje punktist y abstsisssteljega paralleelse sirge (joon. 173). Nende kahe sirge lõikepunkt M ongi otsitav punkt, sest tema koordinaatideks on antud arvud x ja y. Niisuguseid punkte on ainult üks, sest joonestatud sirged lõikuvad ainult ühes punktis.*



Joon. 173.

1065. Joonesta teljestik ja kujuta selles järgmised punktid:

$A(-2; 1)$ $B(1; -2)$ $C(-1; 2{,}5)$ $D(0; 3)$
$E(-3; 0)$ $F(1{,}5; -3)$ $G(0{,}8; 2{,}2)$ $H(2{,}5; 0)$

ÜLESANDEID KOORDINAATIDE KASUTAMISE KOHTA.

1066. Joonesta teljestik ja selles sirge, mis läbib punkte (−3; −1) ja (2; 4). Missugustes punktides lõikab see sirge koordinaattelgi?

1067. Joonesta teljestik ja selles sirge, mis lõikab telgi punktides (3; 0) ja (0; 1). Leia sellel sirgel punktid, millede abstsissid on 6; −1,5; −3.

1068. Joonesta teljestik ja selles sirge, mis lõikab telgi punktides (−1; 0) ja (0; 2). Leia sellel sirgel punktid, millede ordinaadid on −1; 4; 6.

1069. a) Leia punktidele

$P(2; 4)$ $Q(-5; 1)$ $R(-1{,}5; -3)$

x-telje suhtes sümmeetrilised punktid P_1, Q_1, R_1.

b) Leia punktidele

$S(1; 5)$ $T(-3; 4)$ $U(-1; -2)$

y-telje suhtes sümmeetrilised punktid S_1, T_1, U_1.

1070. a) Korrapärase kuusnurga keskpunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ja üks tipp punktis (0; 4). Joonesta see kuusnurk ja leia jooniselt tema teiste tippude koordinaadid.

b) Lahenda eelmine ülesanne eeldusel, et kuusnurga keskpunkt on punktis (3; −2) ja üks tipp punktis (3; 2).

1071. a) Joonesta teljestikus ruut, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja üks tipp on punktis (0; −4). Leia teiste tippude koordinaadid ja arvuta ruudu pindala.

b) Lahenda eelmine ülesanne eeldusel, et ruudu keskpunktiks on punkt (1; 3) ja üheks tipuks on punkt (−3; −1).

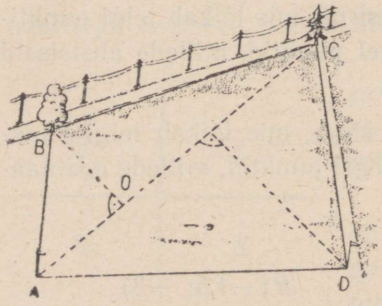
1072. a) Joonesta teljestikus kolmnurk, mille tippudeks on punktid (1; 3), (−3; −2) ja (0; 4). Leia kolmnurga pindala, mõõtes pindala arvutamiseks vajalikkude lõikude pikkused jooniselt.

b) Joonesta teljestikus romb, mille diagonaalide lõikepunkt asetseb koordinaatide alguses, üks tipp punktis (0; 3) ja teine tipp punktis (−5; 0). Leia rombi pindala.

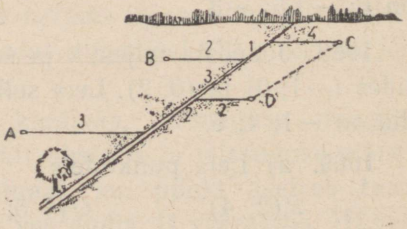
1073. Nelinurkse maatüki $ABCD$ plaanistamiseks ja pindala määramiseks võeti diagonaalsirge AC abstsissteljeks ja sellega ristuv sirge läbi tipu B ordinaatteljeks (joon. 174). Koordinaatide mõõtmisel (meetrites) saadi: $A(-198; 0)$, $B(0; 250)$, $C(602; 0)$, $D(202; -246)$.

a) Valmista maatüki plaan, kujutades 100 m lõiguna 1 cm. Vajaduse korral ümarda mõõtmise tulemusi.

b) Arvuta maatüki pindala, vaadeldes seda kahe kolmnurga pindalade summana.



Joon. 174.



Joon. 175.

1074. a) Joonis 175 kujutab sirget maanteed, millega ristuvad küladesse *A, B, C* ja *D* viivad haruteed. Joonesta koordinaatteljestikus külade asetusplaan, võttes abstsissteljeks maantee ja ordinaatteljeks küla *A* harutee. Joonestamiseks vajalikud kaugused on joonisel antud (kilomeetrites).

b) Anna külade asukohad koordinaatide abil.

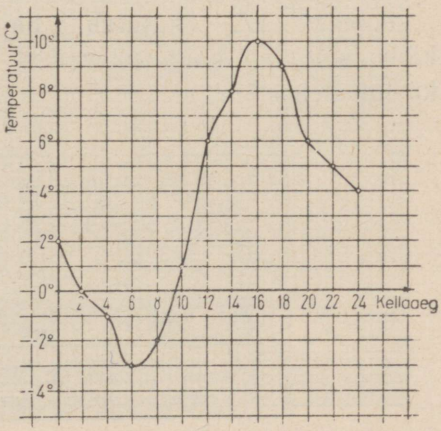
c) Kui suur on külade *C* ja *D* vaheline kaugus otsejoones ja kui pikk on neid ühendav tee?

SUURUSTE MUUTUMISE GRAAFILINE KUJUTAMINE.

1075. *Õhutemperatuuri muutumise jälgimiseks ühel sügisesel päeval mõõdeti temperatuuri iga kahe tunni tagant. Mõõtmise tulemused olid järgmised:*

Kellaaeg	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temp. C°	2	0	−1	−3	−2	1	6	8	10	9	6	5	4

Temperatuuri muutumise kujutamiseks joonise abil võtame kaks teineteisega ristuvat arvtelge (joon. 176*) ja kujutame rõhtteljel kellaaega ning püstteljel temperatuuri. Ühikud nende suuruste kujutamiseks valime kummagi telje jaoks eraldi ja nimelt nii, et aega saaks kujutada* 0 *tunnist kuni* 24 *tunnini ja temperatuuri* −3°*-st kuni* 10°*-ni. Kujutame selles teljestikus tabeli arvupaarid punktidena, võttes abstsissideks kellaajad ja ordinaatideks temperatuurid. Nii saame rea punkte, milledest igaühe kaugus temperatuuriteljest näitab temperatuuri mõõtmise kellaaega ja kaugus ajateljest näitab sellele kellaajale vastavat temperatuuri.*



Joon. 176.

Ülevaate saamiseks temperatuuri muutumise käigust ühen-

dame saadud punktid sujuva kõverjoonega, mis läbib kõiki neid punkte. Selle kõverjoone tõusmine ja langemine näitab temperatuuri tõusmist ja langemist. Saadud joonist nimetatakse temperatuuri **graafikuks.**

1076. a) Joonesta endale joonisel 176 kujutatud temperatuuri graafik vihikusse, kasutades 1 tunni kujutamiseks niisama suurt ühikut nagu 1° kujutamisekski.

b) Kirjelda saadud graafiku põhjal õhutemperatuuri ööpäevast muutumist, jaotades ööpäeva vahemikkudeks, milledes temperatuur ainult langes või ainult tõusis. Alusta nii:

1) Kella 0-st kuni kella 6-ni temperatuur langes ... °-st kuni ... °-ni.

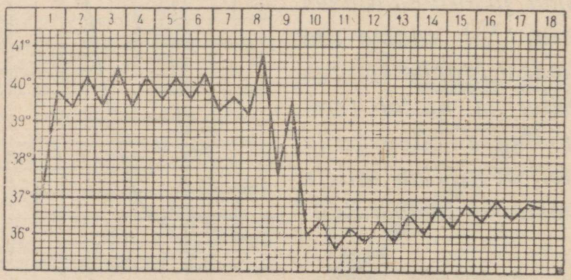
2) Kella 6-st kuni kella ...

c) Lahenda sama graafiku abil veel järgmised küsimused.

1. Kui kõrge võis olla temperatuur vaatluspäeval kell 1, kell 3, kell 11, kell 15?
2. Millal võis vaatluspäeval temperatuur olla 0°, 3°, 8°, 10°?
3. Missugune oli sel päeval maksimaalne temperatuur ja mis kellaajal? Missugune oli sel päeval minimaalne temperatuur ja mis kellaajal?
4. Millal oli sel päeval temperatuur üle nulli, millal alla nulli?
5. Millal oli sel päeval temperatuur üle 6°?

1077. *Haige kehatemperatuuri graafikus (joon. 177) ühendatakse temperatuuri kujutavad punktid murdjoone abil, kuna sujuva kõvera joonestamine on tülikas.*

Joonis 177 kujutab haige temperatuuri muutumise käiku sõltuvalt haiguspäevadest. Vasta selle põhjal järgmistele küsimustele.

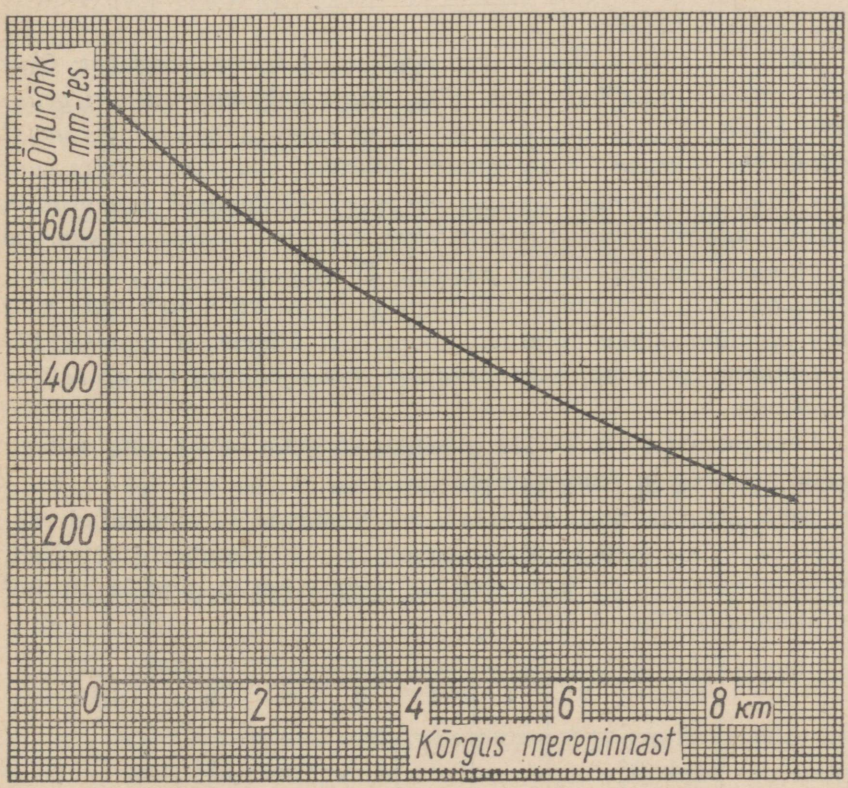


Joon. 177.

1. Mitu korda ööpäevas ja millal mõõdeti haige temperatuuri?
2. Mitu päeva kestis palavik?
3. Millal oli kõrgeim temperatuur ja kui kõrge see oli?
4. Kas haigel esines alatemperatuuri (alla 36°)? Millal?
5. Millal haige temperatuur muutus normaalseks, s. t. jäi püsima 36° ja 37° vahele?

1078. Valmista joonise 177 eeskujul haige temperatuuri graafik järgmise tabeli andmeil, võttes temperatuuriteljel alguspunktiks 35° ja kujutamisühikuks kummalgi teljel 1 cm.

Haiguspäevad		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Temperatuur C°	kell 6	38,3	38,8	38,9	38,7	38,0	37,6	37,4	37,2
	kell 18	38,9	39,4	39,7	39,5	38,4	38,1	37,7	37,5



Joon. 178.

1079. *Õhurõhku mõõdetakse baromeetri abil elavhõbedasamba kõrguse järgi: kui õhurõhk on nii suur, kui palju kaalub* 760 *mm kõrgune elavhõbedasammas, siis öeldakse, et õhurõhk on* 760 *mm. Merepinna kõrgusel muutub õhurõhk õige väikeses ulatuses, olles normaalselt* 760 *mm. Kui tõusta merepinnast kõrgemale, siis õhurõhk väheneb, nagu nähtub jooniselt* 178.

Lahenda joonise 178 abil järgmised küsimused.

1. Kui suur on õhurõhk lennukil, mille kõrgus merepinnast on 1 km, 2,5 km, 4 km, 7,5 km, 10 km?

2. Kui kõrgel merepinnast on lennuk, mille pardal baromeeter näitab 700 mm, 630 mm, 590 mm, 400 mm, 250 mm?

3. Kui suur on õhurõhk järgmiste mägede tipus (sulgudes on antud mäe kõrgus meetrites): Elbrus (5633), Etna (3263), Džomolungma e. Mount Everest (8882), Kilimandžaaro (5895)?

4. Kui kõrgele tuleks tõusta, et õhurõhk väheneks pooleni normaalsest suurusest?

1080. *Eelmistes ülesannetes vaatlesime kolme graafikut: õhutemperatuuri graafikut (joon.* 176*), haige kehatemperatuuri graafikut (joon.* 177*) ja õhurõhu graafikut (joon.* 178*). Igaüks neist näitab ühe suuruse (temperatuuri, õhurõhu) muutumist teise suuruse (aja, merepinnast arvatud kõrguse) muutumisel. Iga graafik koosneb kahest olulisest osast: teljestikust ja vaadeldava suuruse muutumiskäiku kujutavast joonest. Et viimane on graafiku iseloomustav osa, siis sageli mõistame graafiku all nimelt seda suuruse muutumiskäiku kujutavat joont. Nii ütleme, et joonisel* 177 *on temperatuuri graafikuks murdjoon, kuna joonisel* 176 *on selleks kõverjoon.*

Leia joonistel 176 ja 177 graafiku kõrgeim punkt ning sellega antud keilaaeg ja temperatuur.

1081. Arvuta ringi pindalad, mis vastavad tabelis antud raadiuse väärtustele, ja kujuta ringi pindala muutumine graafiliselt, võttes raadiuse 1 dm kujutamiseks lõigu 2 cm ja pindala 10 dm² kujutamiseks lõigu 1 cm.

r (dm)	0	1	2	3	4	5
S (dm²)						

Kasutades ringi pindala graafikut, täida järgmine tabel.

Ringi raadius (dm)	1,5	2,5	3,4			
Ringi pindala (dm^2)				10	45	63

1082. Kilovatt-tund (kWh) elektrienergiat maksab 0,40 rbl. Koosta tabel, mis näitab, kui palju maksab 5, 10, 15, 20, 25, 30 kWh elektrienergiat ja kujuta selle summa muutumine graafiliselt.

VÕRDELINE SÕLTUVUS.

1083. *Positiivsete suuruste puhul nimetasime kaht suurust võrdelisteks, kui nad sõltusid teineteisest nii, et ühe suuruse suurenemisel (vähenemisel) mingi arv korda suurenes (vähenes) ka teine suurus sama arv korda. Võrdeliste suuruste üheks tähtsaks omaduseks on see, et nende vastavate väärtuste suhe on jääv. Näiteks võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt on võrdeline küljega, sest külje suurenemisel mingi arv korda suureneb ka ümbermõõt sama arv korda. Ümbermõõdu ja külje vastavate väärtuste suhe on* 3, *seega jääv.*

Kasutame võrdeliste suuruste ülalnimetatud omadust selleks, et üht neist suurustest valemi abil väljendada teise kaudu.

Olgu suurus y võrdeline suurusega x. Siis nende suhe y : x peab olema jääv suurus. Tähistame selle jääva suuruse tähega a. Seega

$$\frac{y}{x} = a$$

ehk

$$y = ax.$$

Kui üks suurus on võrdeline teisega, siis see suurus võrdub teise suuruse ja ühe jääva teguri korrutisega. Seda jäävat tegurit nimetatakse võrdeteguriks.

Näiteks ringi ümbermõõt c on võrdeline raadiusega r; neid seob valem $c = 2\pi r$; *võrdeteguriks on arv* 2π.

1084. *Anname võrdelistele suurustele nüüd uue, üldisema definitsiooni:*

kaht teineteisest sõltuvat suurust x ja y nimetatakse võrdelisteks, kui nendevaheline seos väljendub valemiga $y = ax$, kus a on jääv tegur. Seda jäävat tegurit nimetatakse endiselt võrdeteguriks.

Näiteks valemiga $s=1{,}5\,t$ *seotud suurused on võrdelised; võrdetegur on* 1,5. *Ka valemiga* $u=-\frac{v}{3}$ *seotud suurused on võrdelised, sest selle valemi saame kirjutada kujul* $u=-\frac{1}{3}v$; *nüüd on näha, et võrdetegur on* $-\frac{1}{3}$.

1085. *Võrdeliste suuruste vahelist sõltuvust nimetatakse* **võrdeliseks sõltuvuseks.**

Otsusta, missugused järgmistest valemitest väljendavad võrdelist sõltuvust ja mis on selles sõltuvuses võrdeteguriks. Vajaduse korral lahenda valem ühe temas esineva suuruse suhtes.

1) $u=6a$
2) $c=\pi d$
3) $s=\frac{u}{2}$
4) $y=2:x$
5) $a:b=0{,}8$
6) $x\cdot y=1$
7) $2u+3v=0$
8) $3x-2y=1$
9) $2S:3T=1$
10) $S=\pi r^2$
11) $\alpha+\beta=90°$
12) $\alpha:\beta=0{,}5$
13) $a=\frac{3x}{4}$
14) $5a=-3t$
15) $u:2v=0{,}6$

Näide. *Kui* $3x:5a=0{,}2$,
siis $3x=0{,}2\cdot 5a$
ehk $3x=a$
ja $x=\frac{1}{3}a$,

seega sõltuvus on võrdeline; võrdetegur on $\frac{1}{3}$.

1086. Väljenda iga kahe järgmise suuruse vaheline sõltuvus valemina ja otsusta iga suurusepaari puhul, kas tegemist on võrdelise sõltuvusega või mitte:

1) täisnurkse kolmnurga teravnurkade suurused α ja β;

2) riide koguhind H ja meetrite arv x, kui meetri hind on 14 rbl.;

3) riide meetrite arv x ja riide meetri hind h, kui riide koguhind on 150 rbl.;

4) kuubi pindala S ja serva pikkus a;

5) kolmnurga pindala S ja alus a, kui kolmnurga kõrgus on 8 ühikut;

6) koonuse ruumala V ja kõrgus h, kui koonuse põhja pindala on 12 cm^2.

7) silindri külgpindala P ja moodustaja m, kui silindri põhja raadius on 1,5 m;

8) keha kaal P ja ruumala V, kui erikaal on jääv;

9) korrapärase kuusnurga apoteem m ja külg a;

10) ööpäeva algusest möödunud ajavahemik x ja ööpäeva lõpuni ülejäänud ajavahemik y.

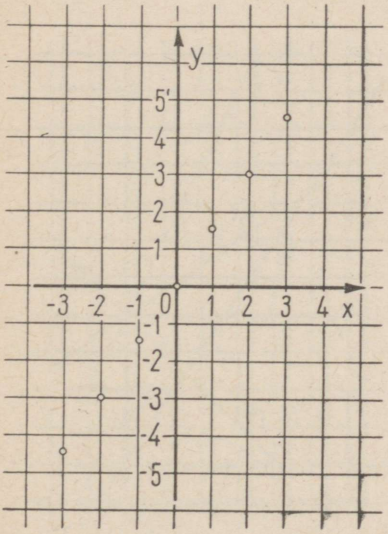
VÕRDELISE SÕLTUVUSE GRAAFIK.

1087. Näide. *Kujuta graafiliselt sõltuvus* $y = 1{,}5x$.

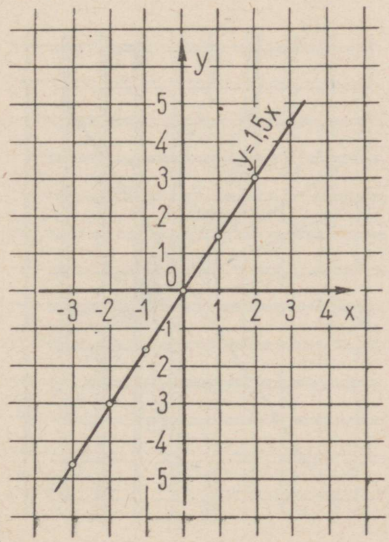
Lahendus. *Anname suurusele x vabalt rea väärtusi, näiteks täisarvulised väärtused* -3*-st kuni* $+3$*-ni, ja arvutame neile vastavad y väärtused. Nii saame järgmise x ja y vastavate väärtuste tabeli:*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-4{,}5$	$-3{,}0$	$-1{,}5$	0	1,5	3	4,5

Võtame nüüd teljestiku ja kujutame selles punktid, mille koordinaatideks on saadud tabeli arvupaarid (joon. 179). *Joonlauaga proovides selgub, et kõik saadud punktid asetsevad ühel ja samal sirgel. Kui kontrolliks anda x-le veel mingi vahepealne, tabelis*



Joon. 179.



Joon. 180.

mitteleiduv väärtus, näiteks väärtus 1,4, *ja arvutada sellele vastav y väärtus* 2,1, *siis näeme, et ka uus punkt* (1,4; 2,1) *asetseb endiste punktidega ühel ja samal sirgel. Tee see kontroll! Joonestades selle sirge, saame sõltuvuse* $y = 1{,}5x$ *graafiku (joon.* 180).

Saab tõestada, et kõik punktid, millede ordinaat $y = 1{,}5x$, *asetsevad tõepoolest ühel ja samal sirgel.*

1088. *Saadud graafiku abil saab lahendada kaht liiki ülesandeid, nimelt* 1) *leida y, kui x on antud, ja* 2) *leida x, kui y on antud.*

Kuidas lahendad ühe, kuidas teise ülesande?

Nimetatud ülesandeid saab sõnastada veel teisiti, kui võtta arvesse, et neis y tähendab korrutist $1{,}5x$. *Nii saame järgmised ülesanded:*

1) *leia korrutis* $1{,}5x$, *kui x on antud, näiteks leia korrutis* $1{,}5 \cdot 2$;

2) *leia x, kui korrutis* $1{,}5x$ *ehk y on antud, näiteks leia x, kui* $1{,}5x = 3$.

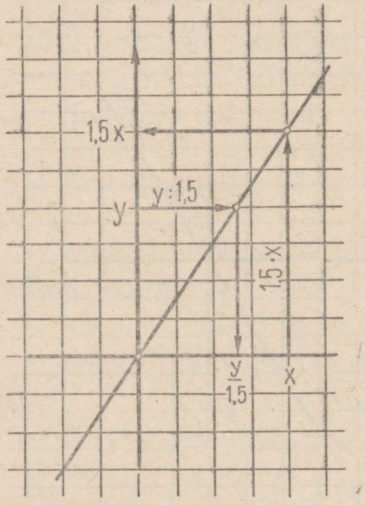
Et viimasest võrdusest $x = 3 : 1{,}5$, *siis seda teist ülesannet saab sõnastada ka veel nii: leida jagatis* $y : 1{,}5$, *kui y on antud.*

Seega saadud joonis võimaldab:

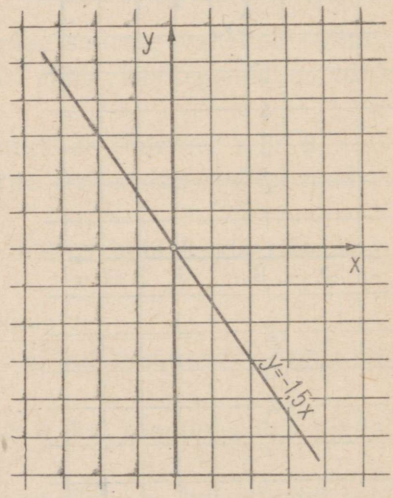
1) *korrutada arve graafiliselt* 1,5*-ga;*

2) *jagada arve graafiliselt* 1,5*-ga;*

Selgita joonise 181 abil, kuidas toimub üks, kuidas teine tehe.



Joon. 181.



Joon. 182.

1089. Valmista endale joonis 181 kaks korda suuremas mõõtkavas ja lahenda selle abil järgnevad küsimused.

1) Kui palju on $1{,}5x$, kui $x=2$; -1; $-0{,}5$; -3?

2) Kui palju on $1{,}5 \cdot 3$; $1{,}5 \cdot 0{,}5$; $1{,}5 \cdot (-2{,}4)$; $1{,}5 \cdot (-3{,}4)$?

3) Kui suur on x võrduses $y=1{,}5x$, kui $y=3$; -3; $1{,}2$; $-1{,}2$?

4) Kui palju on $1{,}8 : 1{,}5$; $3{,}5 : 1{,}5$; $-4 : 1{,}5$; $-2{,}5 : 1{,}5$?

1090. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y=-1{,}5x$ (joon. 182). Missuguseid korrutamisi ja missuguseid jagamisi saab teostada selle graafiku abil?

1091. Kujuta ühes ja samas teljestikus sõltuvused $y=0{,}5x$ ja $y=-0{,}5x$. Lahenda graafiliselt järgmised ülesanded.

1) Leia $0{,}5x$, kui $x=2{,}6$; $-1{,}8$; $-2{,}5$.

2) Leia $-0{,}5 \cdot 3$; $-0{,}5 \cdot (-2{,}8)$; $-0{,}5 \cdot (-4)$.

3) Leia x võrdusest $y=-0{,}5x$, kui $y=1{,}2$; $-1{,}7$; 3.

4) Leia $2 : 0{,}5$; $-1{,}4 : 0{,}5$; $0{,}8 : (-0{,}5)$.

1092. a) *Eelmistest ülesannetest selgus, et*

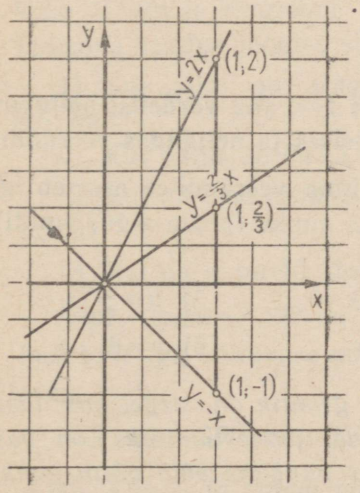
võrdelise sõltuvuse $y=ax$ graafik on sirgjoon.

b) *Anname valemis $y=ax$ suurusele x väärtused* 0 *ja* 1:

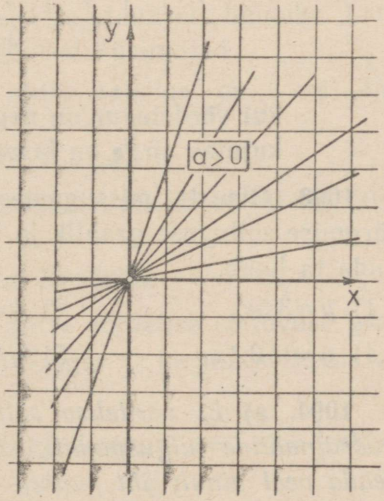
kui $x=0$, *siis* $y=0$; *kui* $x=1$, *siis* $y=a$.

Tulemus näitab, et (*joon.* 183)

võrdelist sõltuvust $y=ax$ kujutav sirge läbib koordinaatide alguspunkti ja punkti $(1; a)$.



Joon. 183.

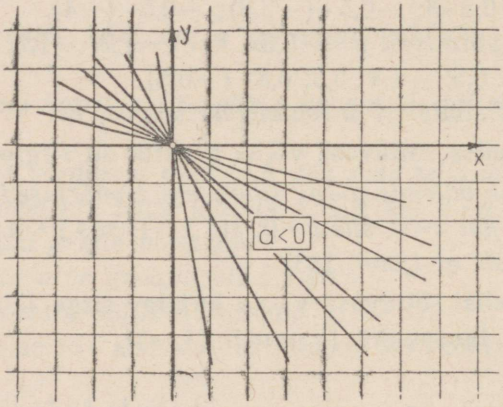


Joon. 184.

c) *Oletame, et valemis* $y=ax$ *võrdetegur* a *on positiivne arv, s. o.* $a>0$. *Kui* x*-le anda positiivne väärtus, siis ka korrutis* ax *ehk* y *on positiivne, ja kui* x*-le anda negatiivne väärtus, siis ka* ax *ehk* y *on negatiivne. See näitab, et (joon.* 184)

kui võrdetegur on positiivne arv, siis võrdelist sõltuvust kujutav sirge on tasapinna esimeses ja kolmandas veerandis.

d) *Oletame, et valemis* $y=ax$ *võrdetegur* a *on negatiivne arv, s. o.* $a<0$. *Kui anda* x*-le positiivne väärtus, siis korrutis* ax *ehk* y *on negatiivne, ja kui anda* x*-le negatiivne väärtus, siis* ax *ehk* y *on positiivne. See näitab, et (joon.* 185)



Joon. 185.

kui võrdetegur on negatiivne arv, siis võrdelist sõltuvust kujutav sirge on tasapinna teises ja neljandas veerandis.

1093. Otsusta, missugustes tasapinna veerandites asetseb iga järgmise sõltuvuse graafik ja leia üks punkt (peale alguspunkti), mida ta läbib.

1) $y=3{,}6x$ 2) $y=-0{,}8x$ 3) $y=-7x$

4) $y=-0{,}4x$ 5) $y=-25x$ 6) $y=6\frac{1}{3}x$

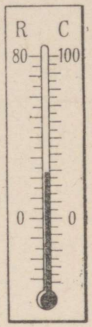
1094. a) *Et võrdelise sõltuvuse graafik on sirge, mis läbib koordinaatide alguspunkti, siis tema joonestamiseks on vaja teada veel ainult üht punkti. Selleks punktiks võib võtta punkti* (1; *a), kuid väikese ühiku korral ei ole see punkt sirge joonestami-*

selt küllalt sobiv, sest ta asetseb alguspunktile liiga lähedal. Teise punkti abstsiss valitakse vabalt, kuid nii, et saadav punkt ei oleks alguspunktile liiga lähedal ega läheks ka joonise piirkonnast välja.

b) Joonesta kahe punkti abil iga järgmise sõltuvuse graafik.

1) $y=2x$	2) $s=-3t$	3) $u=v$
4) $y=-x$	5) $s=1{,}2t$	6) $u=-v$
7) $y=1{,}8x$	8) $s=-t$	9) $u=-2{,}4v$

1095. Temperatuuri mõõdeti varem ka Réaumur'i (loe: reomüüri) kraadides (R°). Teades, et 80°R = 100°C ja 0°R = 0°C (joon. 186), näita, et temperatuur Réaumur'i kraadides y ja Celsius'e kraadides x on seotud valemiga $y=0{,}8x$. Kujuta see sõltuvus millimeetripaberil graafiliselt, võttes 10° kujutamiseks lõigu 1 cm, ja lahenda saadud joonise abil järgmised küsimused.



Joon. 186.

1) Mitu kraadi Réaumur'i järgi on 20°, 50°, 80°, 45°, 72°C järgi?

2) Mitu kraadi Celsius'e järgi on 60°, 20°, 45°, 15°, 61°R järgi?

3) Kui palju on $0{,}8 \cdot 20$; $0{,}8 \cdot 32$; $0{,}8 \cdot 45$; $0{,}8 \cdot 75$?

4) Kui palju on $20 : 0{,}8$; $60 : 0{,}8$; $36 : 0{,}8$; $52 : 0{,}8$?

1096. Kujuta graafiliselt vahemikus $0 < r \leqslant 10$ ringjoone pikkuse c sõltuvus raadiusest r, võttes raadiuse kujutamisel ühikuks 1 cm ja ringjoone pikkuse kujutamisel ühikuks 1 mm. Lahenda saadud joonise abil järgmised küsimused.

1) Kui pikk on ringjoon, mille raadius on 3 cm; 4 cm; 6,5 cm?

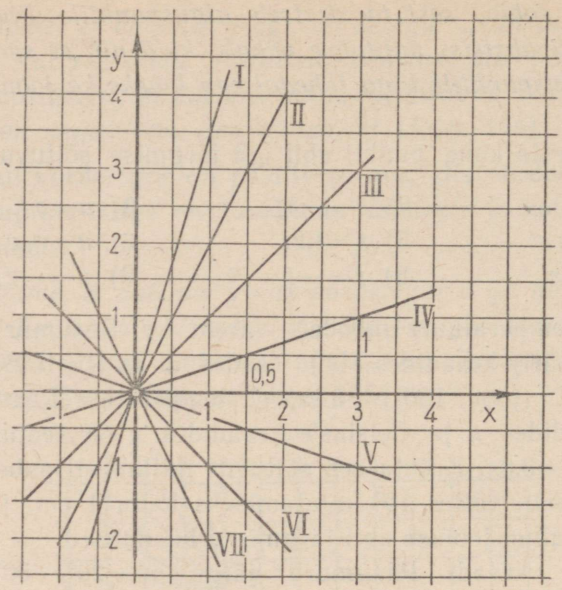
2) Kui palju on $2\pi \cdot 2{,}4$; $2\pi \cdot 5$; $2\pi \cdot 8{,}4$?

3) Kui pikk on raadius, kui ringjoone pikkus on 20 cm, 50 cm, 1,2 m?

4) Kui palju on $40 : 2\pi$; $15 : 2\pi$; $36 : 6{,}28$?

1097. Joonisel 187 on antud seitse võrdelise sõltuvuse graafikut. Leia iga sõltuvuse puhul võrdetegur ja kirjuta sõltuvus valemina.

N ä i d e. *Sõltuvuse IV puhul võrdetegur* $a = 1 : 3 = \frac{1}{3}$ *ehk* $a = 0{,}5 : 1{,}5 = \frac{1}{3}$ *ja valem on* $y = \frac{1}{3}x$.



Joon. 187.

1098. Joonis 188 kujutab ruudu diagonaali pikkuse sõltuvust ruudu külje pikkusest. Leia selle graafiku järgi

a) ruudu diagonaali pikkus, kui külje pikkus on 2 cm; 4,5 cm; 5,6 cm;

b) ruudu külje pikkus, kui diagonaali pikkus on 2 cm; 4,5 cm; 7,1 cm;

c) valem, mille järgi ruudu diagonaal sõltub külje pikkusest.

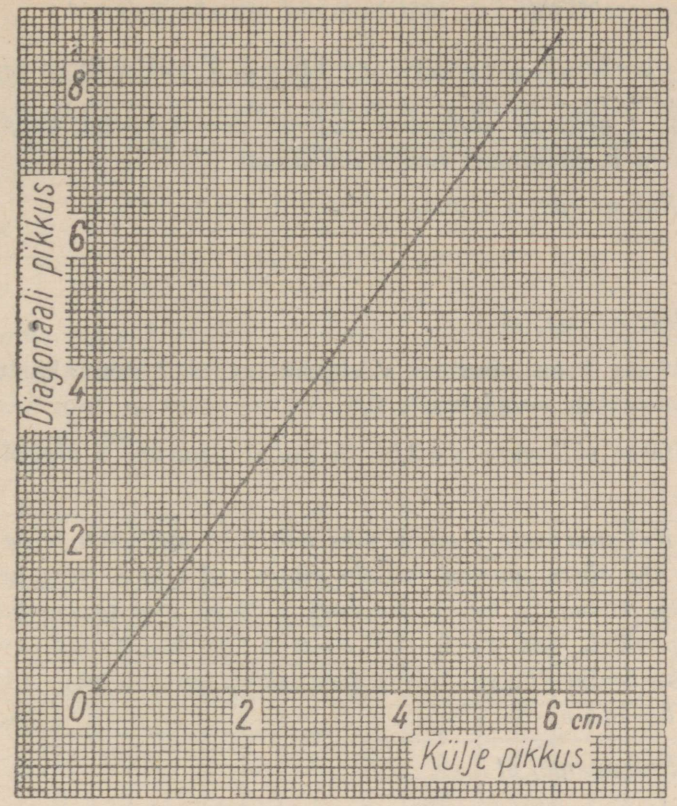
1099. Teades, et võrdkülgse kolmnurga kõrguse h ja külje a suhe on ligikaudu 0,87, kirjuta valem, mille järgi kõrgus sõltub küljest, ja kujuta see sõltuvus graafiliselt. Sõnasta ülesanded, mille lahendamine on võimalik selle graafiku abil.

LINEAARNE SÕLTUVUS.

1100. Anna valemi kujul vastus järgmistele küsimustele.

1) Kui suur on maisitaime kõrgus k, mille ta saavutab p päeva pärast, kui taime praegune kõrgus on 35 cm ja ta kasvab ööpäevas 2 cm?

2) Kui suur on võrdhaarse kolmnurga tipunurk β, kui alusnurk on α?



Joon. 188.

3) Missugune on küünla pikkus p pärast t tundi põlemist, kui küünla esialgne pikkus on 27 cm ja igas tunnis põleb ära 4 cm pikkune osa?

1101. *Kõigil eelmises ülesandes saadud valemitel on üks ja sama kuju* $y=ax+b$, *kus* y *ja* x *on kaks teineteisest sõltuvat suurust ning* a *ja* b *on kaks antud arvu. Näiteks* 1. *küsimuse vastamisel saadud valemis* $k=2p+35$ *on suuruse* y *kohal maisitaime kõrgus* k, *suuruse* x *kohal päevade arv* p, *kuna arvuks* a *on* 2 *ja arvuks* b *on* 35.

Mis esineb y, x, a *ja* b asemel küsimuste 2 ja 3 puhul saadud valemites?

1102. Sõltuvust, mida väljendab valem $y=ax+b$, **kus** x **ja** y **on kaks teineteisest sõltuvat suurust ning** a **ja** b **on kaks antud arvu, nimetatakse lineaarseks sõltuvuseks.**

Lineaarseid sõltuvusi väljendavad näiteks valemid

$$y=3x+2,\ y=-x+4,\ s=1{,}6t+3,\ T=240+2P \text{ jne.}$$

1103. *Lineaarse sõltuvuse valemis* $y=ax+b$ *on kaks antud arvu:* a *ja* b. *Selgitame nende tähendust.*

a) *Kui suurusele* x *anda väärtus* 0, *siis saame, et*

$$y=a\cdot 0+b=b.$$

Sellest näeme, et

arv b **on suuruse** y **algväärtus, s. t. see väärtus, mis vastab** x **väärtusele** 0.

Näiteks sõltuvuse $s=2{,}5t-3$ *puhul suuruse* s *algväärtuseks on* -3.

b) *Kui suurusele* x *anda kaks väärtust, milledest teine on esimesest ühe võrra suurem, näiteks väärtused* 4 *ja* 5, *ning arvutada, kui palju kasvas* y, *kui* x *suurenes* 1 *võrra, siis saame vastuseks* a. *Tõepoolest, kui* $x=4$, *siis* $y=a\cdot 4+b=4a+b$; *kui* $x=5$, *siis* $y=a\cdot 5+b=5a+b$; *suuruse* y *juurdekasv on* $(5a+b)-(4a+b)=$ $=5a+b-4a-b=a$.

Sellest näeme, et

arv a **näitab, mille võrra muutub** y, **kui** x **suureneb ühe võrra.**

Näiteks sõltuvuse $y=-2{,}5x+4$ *puhul suurus* y *muutub* $-2{,}5$ *võrra, kui* x *suureneb ühe võrra, s. t.* x *suurenedes* 1 *võrra* y v ä h e n e b 2,5 *võrra.*

1104. Ütle iga valemi puhul, kuidas muutub valemi vasakul poolel olev suurus, kui paremal olev suurus suureneb ühe võrra.

1) $y=x+2$ 2) $s=4{,}5t$ 3) $u=3-2v$
4) $S=2T+10$ 5) $\beta=90°-\alpha$ 6) $s=n\cdot 180°-360°$

1105. *Kui lineaarse sõltuvuse valemis* $y=ax+b$ *võtta suuruse* y *algväärtuseks* 0, *s. t.* $b=0$, *siis saame võrdelise sõltuvuse valemi* $y=ax$. *See tähendab, et*

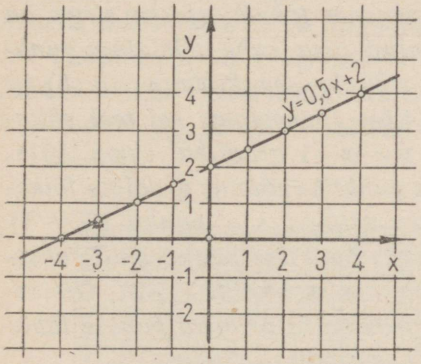
võrdeline sõltuvus on lineaarse sõltuvuse erijuhtum.

1106. Näide. *Kujuta graafiliselt sõltuvus* $y=0{,}5x+2$.

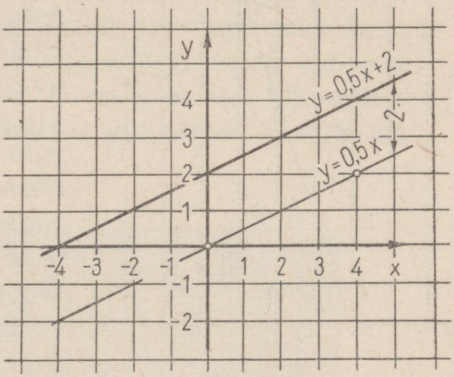
Lahendus I. *Andes suurusele* x *täisarvulised väärtused* -4*-st kuni* $+4$*-ni ja arvutades suuruse* y *vastavad väärtused, saame*

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$	4

Kujutame nüüd koordinaatteljestikus punktid, millede koordinaatideks on saadud tabeli arvupaarid. Saadud üheksa punkti asetsevad kõik ühel ja samal sirgel, mis ongi antud sõltuvuse graafikuks (joon. 189).



Joon. 189.



Joon. 190.

Lahendus II. *Joonestame esmalt võrdelise sõltuvuse* $y=0{,}5x$ *graafiku. Selleks on sirge, mis läbib punkte* (0; 0) *ja* (4; 2). *Et graafiku* $y=0{,}5x+2$ *iga punkti ordinaat on* 2 *võrra suurem graafiku* $y=0{,}5x$ *vastava punkti ordinaadist, siis nihutame saadud sirget paralleelselt tema algasendiga* 2 *ühiku võrra kõrgemale (joon.* 190), *saades seega sõltuvuse* $y=0{,}5x+2$ *graafiku.*

Kumb lahendusviis on lihtsam?

1107. a) Kujuta ühes ja samas teljestikus sõltuvused $y=2x$, $y=2x+1$ ja $y=2x-1$.

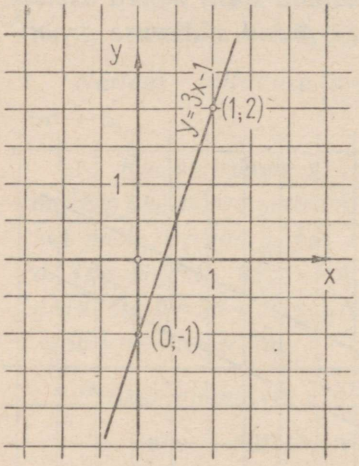
b) Kujuta ühes ja samas teljestikus sõltuvused $y=-x$, $y=-x+3$ ja $y=-x-3$.

c) Kujuta ühes ja samas teljestikus sõltuvused $y=-\frac{3}{4}x$; $y=-\frac{3}{4}x+2{,}5$ ja $y=-\frac{3}{4}x-2{,}5$.

Võrdle iga sõltuvuse puhul y algväärtust (vabaliiget) selle punkti ordinaadiga, kus graafik lõikab y-telge.

1108. *Eelmistest ülesannetest selgus, et*

lineaarse sõltuvuse $y=ax+b$ graafikuks on sirge, mis on paralleelne sõltuvust $y=ax$ kujutava sirgega ja lõikab y-telge punktis, mille ordinaat on b.



Joon. 191.

See asjaolu võimaldab kergesti joonestada lineaarse sõltuvuse graafikut. Teda saab aga joonestada ka ilma abisirget $y=ax$ joonestamata. Selleks paneme tähele, et see sirge on määratud oma kahe mistahes punktiga, näiteks punktidega $(0;\ b)$ ja $(1;\ a+b)$. Joonestame sel teel sõltuvuse $y=3x-1$ graafiku (joon. 191). Üheks punktiks võtame graafiku lõikepunkti y-teljega, s. o. punkti $(0;\ -1)$ ja teiseks punktiks punkti, mille abstsiss on 1, s. o. punkti $(1;\ 2)$. Otsitavaks graafikuks on neid punkte läbiv sirge (joon. 191). Niisiis

lineaarse sõltuvuse $y=ax+b$ graafikuks on sirge, mis lõikab y-telge punktis ordinaadiga b ja läbib punkti $(1;\ a+b)$.

Kui nimetatud punktid asetsevad lähestikku, siis joonis ei tule küllalt täpne. Sel juhtumil võetakse teine punkt kaugemal, näiteks abstsissiga 5.

1109. Joonesta kahe punkti järgi järgmiste sõltuvuste graafikud.

1) $y=x+1$
2) $y=2x-3$
3) $y=-x+2{,}5$
4) $y=-2x+4$
5) $y=0{,}4x-2$
6) $y=1{,}2x-3$
7) $y=-0{,}8x+4$
8) $y=-0{,}6x-1$
9) $y=\frac{3}{4}x-2\frac{1}{4}$
10) $y=-\frac{2}{3}x+3\frac{1}{3}$

1110. Mille poolest erinevad ja mille poolest on sarnased sõltuvuste

a) $y=4x+5$ ja $y=4x+2$ graafikud?

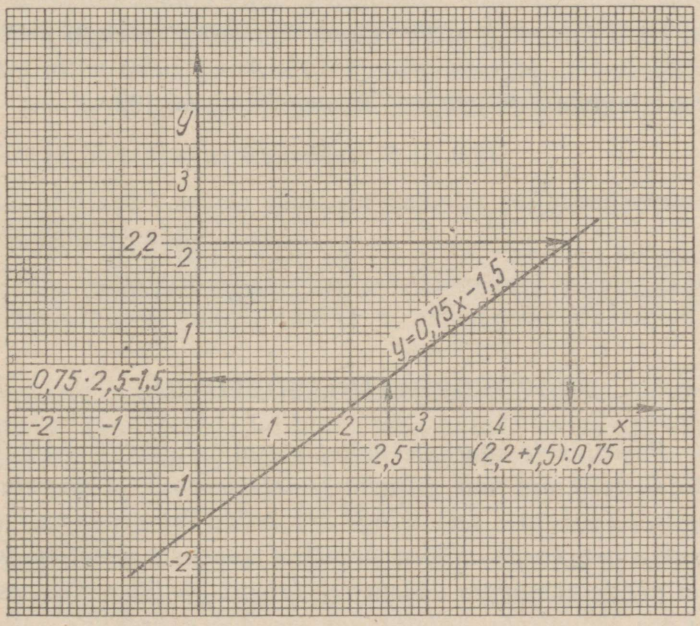
b) $y=2x-3$ ja $y=5x-3$ graafikud?

c) $y=-3x+1$ ja $y=-3x-1$ graafikud?

Kui kahes lineaarses sõltuvuses x kordajad on võrdsed, siis neid sõltuvusi kujutavad sirged on paralleelsed; kui aga vabaliikmed on võrdsed, siis neid sõltuvusi kujutavad sirged lõikavad y-telge ühes ja samas punktis.

Näiteks sõltuvusi $y=8x+3$ ja $y=8x-7$ kujutavad sirged on paralleelsed, sest nad mõlemad on paralleelsed sirgega $y=8x$. Sõltuvusi $y=2x-5$ ja $y=6x-5$ kujutavad sirged lõikavad y-telge ühes ja samas punktis, nimelt punktis -5.

1111. *Sõltuvuse $y=0{,}75x-1{,}5$ graafik võimaldab ilma arvutamiseta leida kahe tehte tulemust, nimelt tulemust, mille saame, kui mistahes arvu x korrutame arvuga 0,75 ja sellest korrutisest lahutame 1,5 (joon. 192). Näiteks loeme jooniselt 192, võttes x väärtuseks 2,5 ja leides sellele vastava y väärtuse, et $0{,}75 \cdot 2{,}5-1{,}5 \approx 0{,}4$.*



Joon. 192.

Leia samal viisil:

1) $0{,}75 \cdot 4 - 1{,}5$ 2) $0{,}75 \cdot 3{,}3 - 1{,}5$
3) $0{,}75 \cdot 2 - 1{,}5$ 4) $0{,}75 \cdot (-0{,}7) - 1{,}5$

1112. Kasutades sõltuvuse $y = 0{,}75x - 1{,}5$ graafikut (joon. 192), lahenda võrrandid:

1) $0{,}75x - 1{,}5 = -1$ 2) $0{,}75x - 1{,}5 = -2$
3) $0{,}75x - 1{,}5 = 1$ 4) $0{,}75x - 1{,}5 = 2$
5) $0.75x - 1.5 = -1.5$ 6) $0{,}75x - 1{,}5 = 2{,}2$

Näpunäide. *On antud suuruse y väärtus ja leida tuleb sellele vastav x väärtus.*

1113. *Lugedes võrduses* $y = 0{,}75x - 1{,}5$ *suuruse y antuks ja x tundmatuks ning lahendades antud võrduse x suhtes, saame*

$$0{,}75x = y + 1{,}5$$

ehk

$$x = (y + 1{,}5) : 0{,}75.$$

Et jooniselt 192 *saab antud y väärtusele leida vastavat x väärtust, siis näeme, et vaadeldava sõltuvuse graafik võimaldab ilma arvutamiseta leida tulemust, mille saame, kui mingi arvuga y liidame* 1,5 *ja selle summa jagame arvuga* 0,75. *Arv y tuleb võtta y-teljelt ja tulemus lugeda x-teljelt. Nii leiame jooniselt* 192, *et*

$$(2{,}2 + 1{,}5) : 0{,}75 \approx 4{,}9.$$

Leia samal viisil:

1) $(-2 + 1{,}5) : 0{,}75$ 2) $(-1 + 1{,}5) : 0{,}75$
3) $(2{,}5 + 1{,}5) : 0{,}75$ 4) $(-0{,}5 + 1{,}5) : 0{,}75$

PÖÖRDVÕRDELINE SÕLTUVUS.

1114. *Positiivsete suuruste puhul me nimetasime kaht suurust pöördvõrdelisteks, kui nad sõltusid teineteisest nii, et ühe suuruse suurenemisel (vähenemisel) mingi arv korda teine vähenes (suurenes) sama arv korda. Pöördvõrdeliste suuruste põhiomaduseks on see, et nende vastavate väärtuste korrutis on jääv. Näiteks ühe ja sama tee läbimiseks vajalik aeg on pöördvõrdeline selle tee läbimise kiirusega, sest kui kiirus suureneb mingi arv korda, siis*

selle tee läbimiseks kuluv aeg väheneb sama arv korda. Aja ja kiiruse vastavate väärtuste korrutis on võrdne tee pikkusega, seega jääv.

Tuletame valemi, mis seob kaht teineteisest pöördvõrdeliselt sõltuvat suurust x ja y. Nende korrutis peab olema jääv. Tähistame selle korrutise tähega a. Siis

$$xy = a$$

ehk

$$y = \frac{a}{x}.$$

Missugust suurust tähendab täht *a*, kui *x* on liikumise kiirus ja y on liikumiseks kulunud aeg?

1115. *Anname pöördvõrdelistele suurustele nüüd uue, üldisema definitsiooni, mis on rakendatav ka suuruste negatiivsete väärtuste puhul:*

kaht teineteisest sõltuvat suurust nimetatakse pöördvõrdelisteks, kui nendevaheline seos väljendub valemiga $y = \frac{a}{x}$ kus *a* on jääv suurus.

Näiteks valemiga $s = 3 : t$ seotud suurused on pöördvõrdelised. Niisamuti on pöördvõrdelised ka valemiga $u = -2 : 3v$ seotud suurused, sest selle valemi saame kirjutada kujul $u = \frac{-\frac{2}{3}}{v}$, millest on näha, et jääv suurus $a = -\frac{2}{3}$.

1116. *Pöördvõrdeliste suuruste vahelist sõltuvust nimetatakse* **pöördvõrdeliseks sõltuvuseks.**

Otsusta, missugused järgmistest valemitest väljendavad võrdelist, missugused pöördvõrdelist ja missugused lineaarset sõltuvust.

Küsimuse otsustamiseks lahenda valem ühe temas esineva suuruse suhtes (kui ta pole sel kujul juba antud) ja vaata, kas valemile saab anda ühe kujudest

$$y = ax, \quad y = ax + b, \quad y = \frac{a}{x}.$$

1) $y = \frac{6x+4}{2}$ 2) $r = \frac{c}{6{,}28}$ 3) $h = 24 : a$

4) $z = 12 : 5x$ 5) $u = 7 - v$ 6) $S = \pi r^2$

7) $vt = 12$ 8) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 9) $y = 1 : x^2$

Missugused antud valemitest ei väljenda ühtki ülalnimetatud sõltuvust?

1117. Väljenda iga kahe järgmise suuruse vaheline sõltuvus valemina ja otsusta iga suurusepaari puhul, kas tegemist on mõne sulle tuntud sõltuvuseliigiga või mitte:

1) antud rahasumma s (näit. 10 rbl.) eest saadav maiustuste kaal k(kg) ja maiustuste kilogrammi hind h(rbl.);

2) kera pindala S ja raadius r;

3) korrapärase kuusnurga ümbermõõt $ü$ ja kuusnurga külje pikkus a;

4) päevade arv v, mis kolhoosil kulub vilja koristamiseks, ja päevas koristatav hektarite arv h, kui koristada tuleb üldse 186 ha;

5) trapetsi pindala S ja kõrgus h, kui trapetsi alused on 6 cm ja 10 cm;

6) ristküliku alus a ja kõrgus b, kui pindala S on jääv;

7) ristküliku pindala S ja kõrgus b, kui alus a on jääv;

8) ristküliku alus a ja kõrgus b, kui ümbermõõt $ü$ on jääv;

9) silindri täispindala T ja moodustaja m, kui põhja raadius on 10 cm;

10) käesoleva kuu eelolevate päevade arv y ja möödunud päevade arv x.

PÖÖRDVÕRDELISE SÕLTUVUSE GRAAFIK.

1118. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y=\frac{4}{x}$, andes x-le täisarvulised väärtused -8-st kuni $+8$-ni. Missugust täisarvulist väärtust sellest vahemikust x-le anda ei saa? Kas kujutataval graafikul leidub punkt, mille abstsiss on 0? Niisuguse punkti puudumise tõttu öeldakse, et graafik katkeb kohas $x=0$ (joon. 193). Graafiku käigu selgitamiseks katkemiskoha ümbruses anna x-le veel väärtused $-0{,}5$, $-0{,}25$, 0,25 ja 0,5. Kõikide saadud punktide ühendamisel sujuva kõverjoonega saad joonisel 193 kujutatud graafiku.

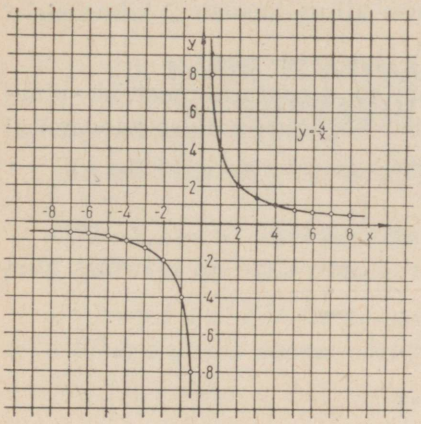
Joonesta endale see graafik kaks korda suuremas mõõtkavas, paigutades telgede lõikepunkti jooniselehe keskele. Kirjelda y muutumist x kasvamisel -8-st kuni $-0{,}25$-ni ja x kasvamisel 0,25-st kuni 8-ni.

1119. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y=\frac{1}{x}$. Anna x-le ainult positiivsed väärtused 0,25, 0,5 1, 2, 3 ja 4. Kujutamisühikuks võta 2 cm.

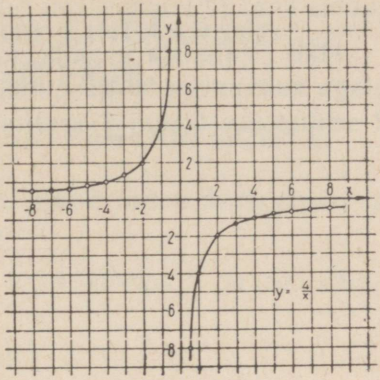
Missugust arvutamisülesannet saab lahendada saadud joonise abil? Lahenda selle abil järgmised küsimused.

1) Kui suur on ristküliku kõrgus, kui tema pindala on 1 m² ja alus on 2 m; 0,5 m; 1,5 m; 2,5 m; 75 cm?

2) Kui suured on järgmiste arvude pöördarvud: 4; 0,75; 2,5; 2,25?



Joon. 193.



Joon. 194.

1120. Joonesta ülesande 1118 eeskujul sõltuvuse $y=\frac{-4}{x}$ ehk $y=-\frac{4}{x}$ graafik. Missugustes veerandites asetseb saadud kõrverjoon nüüd (joon. 194)?

1121. *Pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuks on kõverjoon, mida nimetatakse* **hüperbooliks.** *Hüperbool koosneb kahest eraldi asetsevast harust. Kui pöördvõrdelise sõltuvuse valemis $y=a:x$ arv a on positiivne, siis hüperbooli üks haru on esimeses veerandis ja teine kolmandas veerandis, kui aga a on negatiivne, siis hüperbooli üks haru on teises veerandis ja teine neljandas veerandis.*

1122. Kujuta graafiliselt ühes ja samas teljestikus sõltuvused

$$y=2:x, \quad y=4:x \quad \text{ja} \quad y=8:x,$$

andes x-le ainult positiivseid väärtusi.

1123. Joonesta koordinaattasapinna esimeses veerandis rida ristkülikuid, mille pindala on 12 cm², paigutades ristkülikud nii, et nende üks külg asetseks x-teljel ja teine külg y-teljel. Missugu-

sel joonel asetsevad nende ristkülikute need tipud, mis on väljaspool koordinaattelgi? Joonesta see joon.

1124. Kujuta ühes ja samas teljestikus sõltuvused $y=2:x$ ja $y=-2:x$, andes x-le ainult positiivseid väärtusi. Kuidas need graafikud asetsevad x-telje suhtes?

1125. Valmista graafik, mis näitab 6 kilomeetri läbimiseks kuluva aja muutumist, kui liikumise kiirus kasvab 2 kilomeetrist tunnis kuni 12 kilomeetrini tunnis.

1126. Valmista graafik, mis näitab 4-ruutsentimeetrise pindalaga kolmnurga kõrguse muutumist kolmnurga aluse kasvamisel 2 sentimeetrist kuni 8 sentimeetrini.

10. KAHE TUNDMATUGA LINEAARSED VÕRRANDISÜSTEEMID.

KAHE TUNDMATUGA VÕRRANDI LAHENDI MÕISTE.

1127. N ä i d e. *Matemaatikaringil on 8 liiget. Mitu poissi ja mitu tüdrukut on matemaatikaringis?*

L a h e n d u s. *Tähistame poiste arvu tähega x ja tüdrukute arvu tähega y, siis saame võrrandi*

$$x+y=8.$$

See on **kahe tundmatuga esimese astme võrrand** *ehk* **kahe tundmatuga lineaarne võrrand.**

Lahendame selle võrrandi proovimise teel. Kui matemaatikaringi liikmed on kõik poisid, siis $x=8$ ja $y=0$.

Arvupaar

$$\begin{cases} x=8 \\ y=0 \end{cases}$$

on antud kahe tundmatuga võrrandi lahend, sest asetades antud võrrandisse x asemele 8 ja y asemele 0, näeme, et võrrand on rahuldatud.

Kui matemaatikaringis on 7 poissi, siis tüdrukuid on 1, s. t. arvupaar

$$\begin{cases} x=7 \\ y=1 \end{cases}$$

on samuti võrrandi $x+y=8$ lahend.

Nimeta veel võrrandi

$$x+y=8$$

lahendeid.

Täida alljärgnev tabel nii, et iga ülestikku seisvate arvude paar oleks võrrandi $x+y=8$ lahendiks.

x	0	1	2		4			7	8
y				5		3	2	1	0

Mitu lahendit on võrrandil $x+y=8$, mis vastavad antud ülesande tingimusele?

1128. Näide. *Reinul ja Jüril on kahe peale kokku* 15 *rubla raha. Kui palju raha on Reinul ja kui palju Jüril?*

Lahendus. *Tähistame rahasummad nii:*

Reinul x *rubla,*

Jüril y *rubla.*

Nüüd võime kirjutada võrrandi

$$x+y=15.$$

On võimalik, et Reinul ei olegi raha, siis

$$x=0 \text{ ja } y=15.$$

Arvupaar

$$\begin{cases} x=0 \\ y=15 \end{cases}$$

on võrrandi $x+y=15$ *lahend.*

Kui Reinul on 1 *kopikas ehk* 0,01 *rbl., siis Jüril on* 14,99 *rbl. Arvupaar*

$$\begin{cases} x=0{,}01 \\ y=14{,}99 \end{cases}$$

on võrrandi $x+y=15$ *teine lahend.*

Nimeta veel selle võrrandi mõni lahend.

Mitu lahendit on võrrandil $x+y=15$, mis vastavad antud ülesande tingimusele?

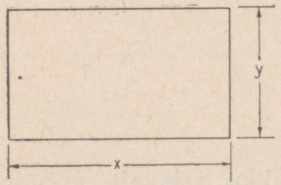
1129. Näide. *Ristküliku ümbermõõt on* 23 *cm. Missugused võivad olla selle ristküliku pikkus ja laius?*

Lahendus. *Olgu ristküliku pikkus* x *cm ja laius* y *cm. Siis ümbermõõt on* $(2x+2y)$ *cm. Saame võrrandi*

$$2x+2y=23.$$

Jagades selle võrrandi mõlemad pooled 2-ga, saame

$$x+y=11{,}5.$$



Joon. 195.

Leia alljärgnevas tabelis tundmatu puuduv väärtus nõnda, et x ja y vastavate

väärtuste paar oleks võrrandi $x+y=11{,}5$ lahendiks.

x	0,02		1,5	10	11,4
y		11			

Kas saab öelda, mitu lahendit on võrrandil $x+y=11{,}5$?

1130. Võrrandit kujul $ax+by=c$, kus a ja b tähendavad mistahes nullist erinevaid arve ja c mistahes arvu, nimetatakse kahe tundmatuga lineaarseks võrrandiks.

Tähed x ja y tähendavad tundmatuid. Arvud a ja b on tundmatute kordajad, c on vabaliige. Kahe tundmatuga lineaarse võrrandi lahendiks on arvupaar, mis seda võrrandit rahuldab. Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandil võib olla lõpmatu hulk lahendeid.

1131. Missugused allpool antud arvupaarid on võrrandi

$$7x-2y=14$$

lahenditeks, missugused mitte?

$\begin{cases} x=-8 \\ y=-35 \end{cases}$ $\begin{cases} x=10 \\ y=28 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=15 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-8\frac{3}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x=2{,}5 \\ y=1{,}75 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=-8 \end{cases}$

1132. Asenda võrrandis

$$7x-2y=14$$

x arvuga 4 ja arvuta saadud võrrandist y.

Kontrolli, kas vaadeldav x ja y väärtuste paar on võrrandi $7x-2y=14$ lahendiks.

1133. Asenda võrrandis

$$5x-6y=7$$

y arvuga 8 ja arvuta saadud võrrandist x.

Kontrolli, kas vaadeldav x ja y väärtuste paar rahuldab võrrandit $5x-6y=7$.

1134. On antud kolm kahe tundmatuga võrrandit ja kolm arvupaari, nii et iga arvupaar on ühe antud võrrandi lahend.

Tee kindlaks, missugune arvupaar on missuguse võrrandi lahendiks.

1) $2x-3y=18$; 2) $x-5y=20$; 3) $4x+y=8$;

a) $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=30 \\ y=2 \end{cases}$

1135. a) *Kui kahe tundmatuga võrrandi lahendist üks arv on antud, siis teise arvu leidmiseks asendame võrrandis vastava tundmatu antud arvuga, mistõttu saame ühe tundmatuga võrrandi; lahendades saadud võrrandi, saamegi antud kahe tundmatuga võrrandi lahendi teise arvu.*

b) Leia võrrandi

$$3x-2y=10$$

lahend, mille üks arv on antud.

$\begin{cases} x=-6 \\ y= \end{cases}$ $\begin{cases} x=8 \\ y= \end{cases}$ $\begin{cases} x= \\ y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x= \\ y=7 \end{cases}$

1136. Leia võrrandist

$$3x-2y=7$$

x väärtus, kui $y=4$; 10; $14\frac{1}{2}$; 16.

1137. On antud võrrand

$$x+y=20.$$

Mida võid öelda x väärtuse kohta, kui

$$y>10?$$

1138. On antud võrrand

$$x+y=0.$$

Mida võid öelda x väärtuse kohta, kui

$$y>0?$$

1139. On antud võrrand

$$x-y=8.$$

Mida võid öelda y väärtuse kohta, kui

$$x<8?$$

1140. *Kui kahe tundmatuga võrrandi lahendi leidmisel pole kummagi tundmatu ühtki väärtust antud, siis ühe tundmatu väärtus võetakse meelevaldselt, teise tundmatu väärtus leitakse nii, nagu juhatatud ülesandes* 1135.

Leia võrrandi

$$5x-3y=12$$

lahendite hulgast neli lahendit nii, et igas lahendis oleks $0<x<10$.

1141. Leia võrrandi

$$2x-5y=10$$

lahendite hulgast kolm lahendit nii, et igas lahendis oleks

$$-8<y<0.$$

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDI GRAAFIK.

1142. *Kui võrrandist*

$$2x-y=3$$

avaldada tundmatu y, siis saame:

$$-y=-2x+3;$$
$$y=2x-3.$$

Saadud võrdusest võime järeldada, et

y väärtus sõltub x väärtusest.

Mis liiki on see sõltuvus?

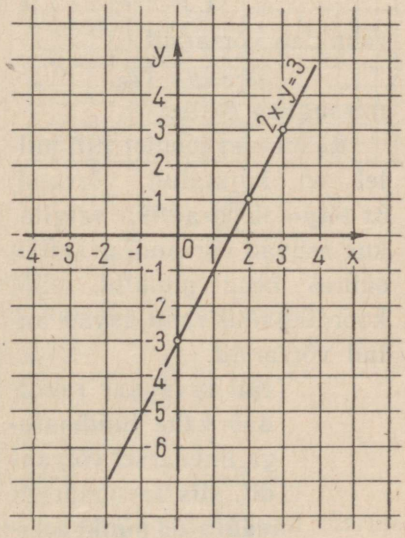
1143. Joonesta sõltuvuse $y=2x-3$ graafik.

Võrdle oma joonist joonisega 196.

Joont, mille said, nimetatakse ka võrrandi $2x-y=3$ graafikuks.

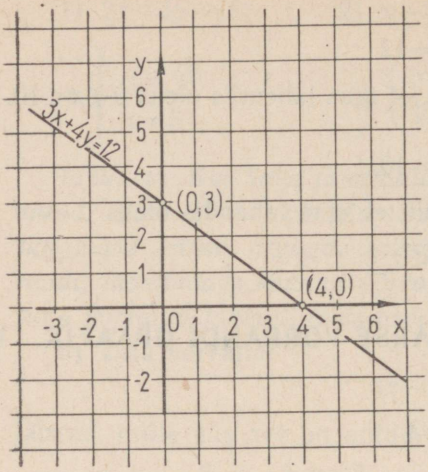
1144. *Ülesandeist* 1142 *ja* 1143 *järeldub, et*

iga kahe tundmatuga lineaarne võrrand väljendab tundmatutevahelist lineaarset sõltuvust; selle sõltuvuse graafikut nimetame kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafikuks. Kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafik on sirge.



Joon. 196.

Mitme punkti koordinaate on tarvis teada kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafiku joonestamiseks?



Joon. 197.

1145. *Kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafiku joonestamiseks vajalikud punktid võib kõige kergemini saada nii, et ühe punkti võtame abstsissiga* $x=0$ *ja teise punkti ordinaadiga* $y=0$. *Näiteks võrrandi*

$$3x+4y=12$$

graafiku joonestamiseks kasutame punkte (0; 3) *ja* (4; 0) (*joon.* 197).

Kui niiviisi valitud punktid tulevad joonisel liiga lähestikku või väljapoole joonise piirkonda, siis kasutame sirge joonestamiseks muid punkte.

1146. Tee kindlaks, missugune arvupaar

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=6 \\ y=-1{,}5 \end{cases}$$

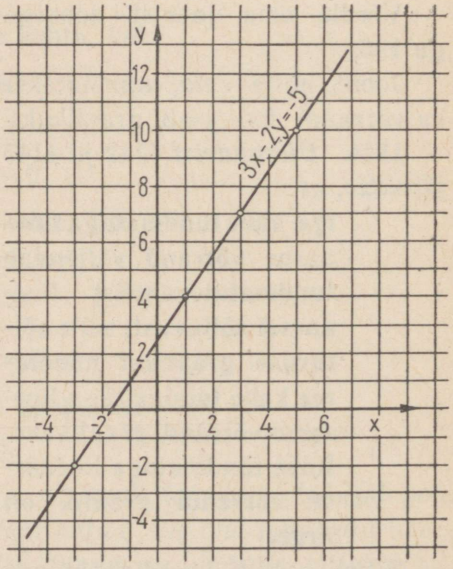
rahuldab võrrandit

$$3x+4y=12,$$

missugune mitte.

Kasutades joonist 197, millel on kujutatud võrrandi $3x+4y=12$ graafik, selgita, kus asuvad võrrandi graafiku suhtes need punktid, mille koordinaadid rahuldavad antud võrrandit.

Kui arvupaar rahuldab kahe tundmatuga lineaarset võrrandit, siis arvupaariga määratud punkt asetseb sirgel, mis on selle võrrandi graafikuks.



Joon. 198.

1147. Joonisel 198 on esitatud võrrandi

$$3x-2y=-5$$

graafik. Tee selle graafiku abil kindlaks, missugused arvupaarid

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=2{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=7 \\ y=13 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

on võrrandi $3x-2y=-5$ lahenditeks, missugused mitte.

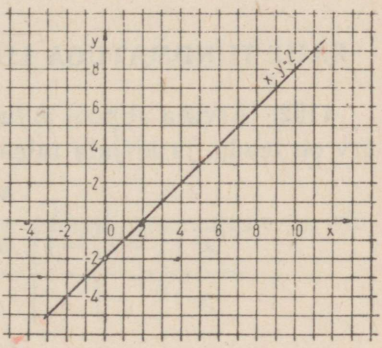
1148. Joonisel 199 on kujutatud võrrandi

$$x-y=2$$

graafik. Leia joonisel esitatud sirgel punkt, mille abstsiss $x=5$. Kui suur on selle punkti ordinaat y? Tee kindlaks, kas selle punkti koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$x-y=2.$$

Leia samal joonisel sirgel asuv punkt, mille ordinaat $y=4$. Kui suur on selle punkti abstsiss x? Selgita, kas selle punkti koordinaadid on võrrandi $x-y=2$ lahendiks.



Joon. 199.

Kui punkt asetseb antud võrrandi graafikul, siis selle punkti koordinaadid on antud võrrandi lahendiks.

1149. Leia joonisel 199 kujutatud võrrandi

$$x-y=2$$

graafiku abil selle võrrandi lahendid, kui üks arv on antud:

$$\begin{cases} x=-3 \\ y= \end{cases} \quad \begin{cases} x= \\ y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y= \end{cases} \quad \begin{cases} x= \\ y=4\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=8 \\ y= \end{cases} \quad \begin{cases} x=9 \\ y= \end{cases} \quad \begin{cases} x= \\ y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x= \\ y=8 \end{cases}$$

Kontrolli, kas graafiku abil leitud lahendid rahuldavad võrrandit.

1150. Joonesta võrrandi

$$2y-x=4$$

graafik ja täida saadud graafiku abil alljärgnev tabel nii, et iga ülestikku seisvate arvude paar oleks antud võrrandi lahendiks.

x	-3		1	1,5		3	3,5	
y		1			3			4

1151. Leia graafiliselt võrrandi

$$2x-y=4$$

lahendite hulgast viis lahendit:

a) võttes x väärtused vahemikust

$$-1 \leqslant x \leqslant 5;$$

b) võttes y väärtused vahemikust

$$-4 \leqslant y \leqslant 5.$$

KAHE TUNDMATUGA LINEAARNE VÕRRANDISÜSTEEM.

1152. Arvuta allpool antud kahe võrrandi lahendid, millest üks arv on teada, ja kirjuta tulemus tabeli vastavasse lahtrisse:

$$x-y=-1$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y								

$$x-2y=-5$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y								

Kui tabelid on täidetud, siis leia arvupaar, mis esineb mõlemas tabelis. See arvupaar on mõlema võrrandi lahendiks ehk, teisiti öeldes, see arvupaar on võrrandite $x-y=-1$ ja $x-2y=-5$ **ühine lahend.**

1153. Leia eelmise ülesande eeskujul võrrandite

$$x+y=7 \text{ ja } 3x-2y=-4$$

ühine lahend.

1154. Tee kindlaks, kas kolme arvupaari

$$\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \qquad \text{ja} \qquad \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$$

hulgas leidub võrrandite

$$3x-5y=-15 \text{ ja } x-y=-1$$

ühine lahend.

1155. Võrrandid, millele otsitakse ühiseid lahendeid, moodustavad võrrandisüsteemi.

Näiteks ülesandes 1154 *antud võrrandid*

$$3x-5y=-15 \text{ ja } x-y=-1$$

moodustavad võrrandisüsteemi, mida kirjutatakse nii:

$$\begin{cases} 3x-5y=-15 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

Võrrandisüsteemi võrrandite ühist lahendit nimetatakse selle **süsteemi lahendiks.**

Näiteks süsteemi

$$\begin{cases} 3x-5y=-15 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

lahend on

$$\begin{cases} x=5 \\ y=6. \end{cases}$$

Otsusta ülesande 1152 lahenduse põhjal, missugune on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x-2y=-5 \end{cases}$$

lahend.

Võrrandisüsteemi lahendi leidmist nimetatakse selle **süsteemi lahendamiseks.**

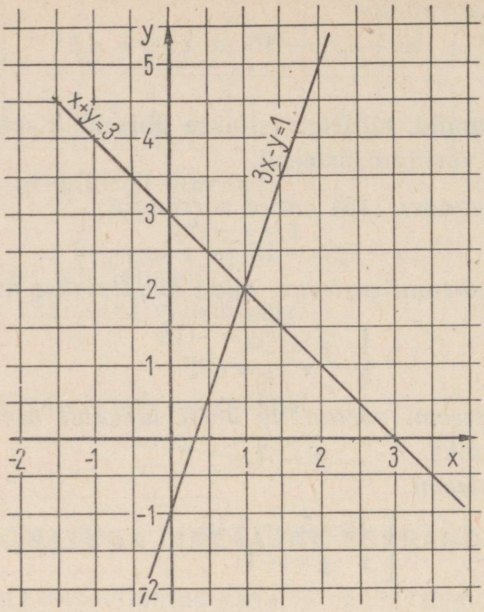
KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI GRAAFILINE LAHENDAMINE.

1156. *Joonisel* 200 *on esitatud võrrandite* $x+y=3$ *ja* $3x-y=1$ *graafikud.* Otsusta joonise põhjal, kumba võrrandit rahuldavad järgmiste punktide koordinaadid: $(-2; 5)$; $(0; 3)$; $(3; 0)$; $(2; 5)$; $(0;-1)$; $(1{,}5; 3{,}5)$?

Leia jooniselt võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-y=1 \end{cases}$$

lahend.



Joon. 200.

1157. Joonesta ühes ja samas teljestikus võrrandite $x-y=5$ ja $2x+y=1$ graafikud. Leia saadud joonise abil süsteemi

$$\begin{cases} x-y=5 \\ 2x+y=1 \end{cases}$$

lahend.

1158. Joonisel 201 on kujutatud võrrandite

$$105x-260y=-624$$

ja

$$175x+260y=-104$$

graafikud.

a) Leia selle joonise abil võrrandi

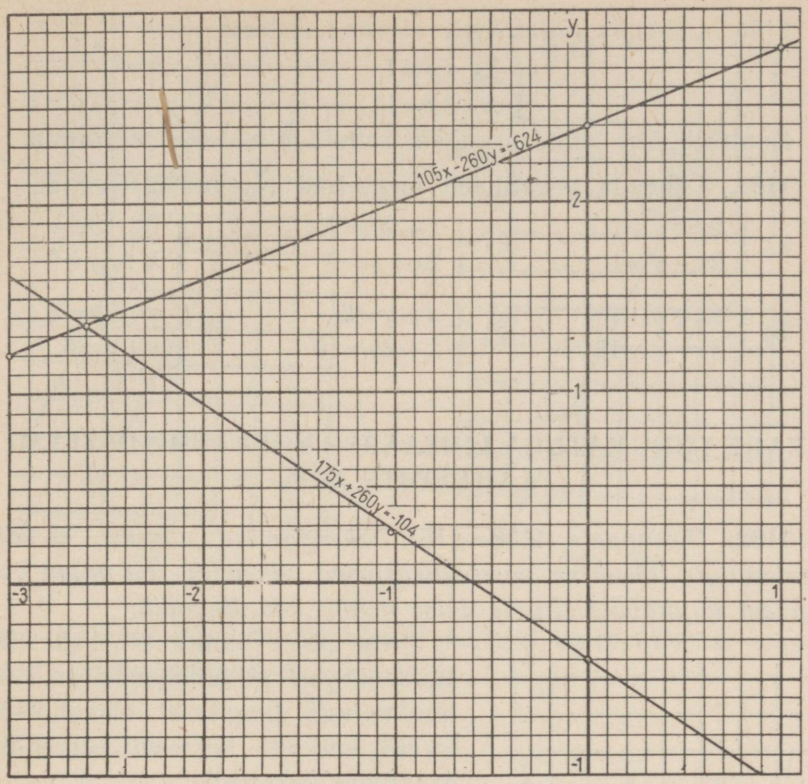
$$105x-260y=-624$$

lahendid, mille üks arv on antud:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y= \end{cases} \qquad \begin{cases} x= \\ y=2{,}6 \end{cases}$$

b) Leia graafiku abil võrrandi

$$175x+260y=-104$$



Joon. 201.

lahendis puuduv arv:

$$\begin{cases} x= \\ y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0{,}5 \\ y= \end{cases}$$

Kontrolli arvutamise teel, kui suure vea sa tegid puuduva arvu leidmisel graafiku abil.

1159. Leia jooniselt 201 võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 105x-260y=-624 \\ 175x+260y=-104 \end{cases}$$

lahend nii täpselt, kui suudad. Kontrolli leitud lahendit.

Kahe tundmatuga võrrandisüsteemi graafiliseks lahendamiseks kujutame süsteemi võrrandid graafiliselt. Kui saadud jooned lõikuvad, siis lõikepunkti koordinaadid on antud süsteemi lahendiks.

1160. Lahenda graafiliselt võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+3y=11. \end{cases}$$

Kontrolli, kas leitud arvupaar rahuldab mõlemat võrrandit.

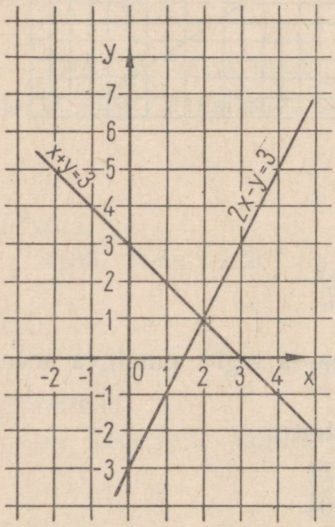
1161. Lahenda graafiliselt järgmised võrrandisüsteemid:

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x+y=8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x-3y=-18 \\ x+3y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x-y=16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=6 \\ x+2y=10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+2y=8 \\ x+y=6 \end{cases}$

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDITE ARV.

1162. *Ülesannete* 1156—1161 *lahendamisel nägime, et kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendiks on antud võrrandeid kujutavate sirgete ühise punkti koordinaadid.*



Joon. 202.

Mitu ühist punkti on kahel lõikuval sirgel? Mitu lahendit on kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil, kui selle süsteemi võrrandite graafikud lõikuvad?

Otsusta joonise 202 abil, mitu lahendit on süsteemil

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

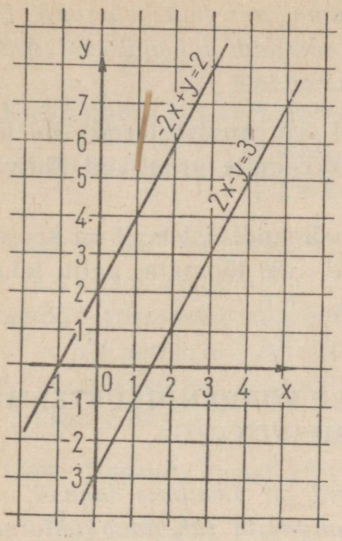
Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil on üks lahend, kui võrrandeid kujutavad sirged lõikuvad.

1163. Otsusta joonise 203 abil, kas süsteemil

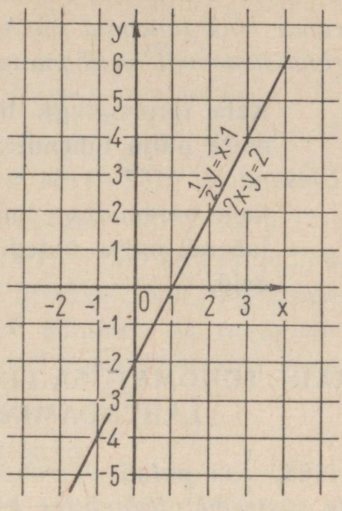
$$\begin{cases} -2x+y=2 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

on lahend või mitte.

Jooniselt on näha, et võrrandeid kujutavad sirged on paralleelsed. Seega neil sirgetel puudub lõikepunkt. Vaadeldes antud süsteemi, näeme, et sel süsteemil puudub lahend, sest muutes esi-



Joon. 203.



Joon. 204.

mese võrrandi liikmete ees olevad märgid vastupidiseks, saame antud süsteemi teisendada süsteemiks

$$\begin{cases} 2x-y=-2 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

Viimase süsteemi võrrandite nõuded on aga vasturääkivad: esimene võrrand nõuab, et ühe tundmatu kahekordse ja teise tundmatu vahe peab võrduma −2-ga, kuid teine võrrand nõuab, et sama vahe peab võrduma 3-ga. Niisugust võrrandisüsteemi nimetatakse **vastuoluliseks.**

Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil puudub lahend, kui võrrandeid kujutavad sirged on paralleelsed.

1164. *Joonisel 204 on kujutatud võrrandisüsteemi*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y=x-1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

võrrandite graafikud. Need graafikud, nagu joonisel näha, ühtivad. Nendel sirgetel on lõpmata palju ühiseid punkte. Seega antud võrrandisüsteemil on lõpmata palju lahendeid. See selgub ka süsteemi vaatlemisel: korrutades esimese võrrandi liikmed −2-ga ja viies siis tundmatud vasakule poolele, saame 2x−y=2. Seega

selle süsteemi esimene võrrand on sama, mis teine võrrand. Ühe võrrandi kõik lahendid on ka teise võrrandi lahenditeks. Antud võrrandisüsteemil on lõpmatu hulk lahendeid.

Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil on lõpmata palju lahendeid, kui võrrandite graafikud ühtivad.

Ülesandeist 1162—1164 *selgub, et*

kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil on kas üks lahend, mitte ühtegi lahendit, või lõpmata palju lahendeid.

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE LIITMISVÕTTEGA.

1165. *Kui antud võrrandisüsteemil on üksainus lahend, siis selle süsteemi võrrandites kumbki tundmatu tähendab ühtainust arvu ja kummagi võrrandi vasak pool tähendab üht kindlat arvu.*

Näiteks süsteemi

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ x-3y=-3 \end{cases}$$

esimese võrrandi vasak pool tähendab arvu 12.

Missugust arvu tähendab selle süsteemi teise võrrandi vasak pool?

Antud süsteemi lahendamiseks liidame esimese võrrandi pooltega teise võrrandi vastavad pooled, saame

$$\begin{array}{r} 2x+3y=12 \\ x-3y=-3 \\ \hline 3x \quad =9, \end{array}$$

siit

$$x=3.$$

Tundmatu y väärtuse leidmiseks asendame antud süsteemi ühes võrrandis, näiteks teises, tähe x leitud väärtusega 3, *saame*

$$\begin{gathered} 3-3y=-3; \\ -3y=-6 \\ y=2. \end{gathered}$$

Kontrollimiseks arvutame süsteemi võrrandite vasakud pooled, asendades neis x ja y leitud väärtustega. Saame

$2 \cdot 3+3 \cdot 2=6+6=12;$ | $3-3 \cdot 2=3-6=-3;$
$V_1=P_1$ | $V_2=P_2.$

Seega antud süsteemi lahend on

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Nagu näeme, on antud süsteemi esimeses võrrandis y kordajaks +3, teises võrrandis aga −3. Need kordajad on vastandarvud ja seetõttu võrrandite vasakute poolte liitmisel kaob liige tundmatuga y. Nii õnnestus kõrvaldada ehk **elimineerida** *tundmatu y.*

Võrrandisüsteemi eespool kirjeldatud lahendamisviisi nimetatakse **liitmisvõtteks.**

1166. Lahenda peast võrrandisüsteemid:

a) $\begin{cases} 3x+2y=6 \\ 5x-2y=-22 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x+7y=7 \\ -4x+y=-31 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-4y=12 \\ 2x+4y=51 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 5x+2y=9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+2y=11 \\ 5x-2y=3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 5x+y=19 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x-3y=4 \\ 5x+3y=-1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+2y=2 \\ -x+y=4 \end{cases}$

1167. Näide. *Lahendame liitmisvõttega võrrandisüsteemi*

$$\begin{cases} 2x+3y=21 \\ 6x-y=13 \end{cases}$$

Lahendus. *Kui siin teise võrrandi liikmed korrutame 3-ga, siis saame*

$$\begin{cases} 2x+3y=21 \\ 18x-3y=39 \end{cases}$$

Liites nüüd võrrandite vastavad pooled, saame

$$\begin{array}{r} 2x+3y=21 \\ 18x-3y=39 \\ \hline 20x=60, \end{array}$$

$$x=3.$$

Asendades antud süsteemi ühes võrrandis, näiteks esimeses, tähe x leitud väärtusega 3, saame leida tundmatu y.

$$2\cdot 3+3y=21;$$
$$3y=21-6;$$
$$3y=15;$$
$$y=5.$$

Eespool toodud arvutused kirjutame lühemalt nõnda:

$$\begin{cases} 2x+3y=21 \\ 6x-y=13 \end{cases} \Bigg| \cdot 3 \Bigg| \begin{array}{r} 2x+3y=21; \\ 18x-3y=39; \\ \hline 20x \quad =60; \\ x=3. \end{array}$$

$$6+3y=21;$$
$$3y=15;\ y=5.$$

Kontroll.

$$2\cdot 3+3\cdot 5=6+15=21;\ V_1=P_1. \quad \Big| \quad 6\cdot 3-5=18-5=13;\ V_2=P_2.$$

Vastus.

$$\begin{cases} x=3 \\ y=5. \end{cases}$$

1168. Lahenda võrrandisüsteemid.

a) $\begin{cases} 3x-4y=-20 \\ x+2y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x-3y=1 \\ 5x-2y=12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x+3y=6 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 15x+23y=-10 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}$

1169. *Võrrandisüsteemi lahendamisel liitmisvõttega peab korrutama* **mõlema** *võrrandi pooli selliste arvudega, et ühe tundmatu kordajad tuleksid vastandarvud.*

Näide.

$$\begin{cases} 3x+4y=11 \\ 5x+6y=17 \end{cases} \Bigg| \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot(-3) \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} 15x+20y=55; \\ -15x-18y=-51; \\ \hline 2y=4; \\ y=2. \end{array}$$

$$3x+4\cdot 2=11;$$
$$3x=3;$$
$$x=1.$$

Kontroll.

$3 \cdot 1+4 \cdot 2=3+8=11;$ | $5 \cdot 1+6 \cdot 2=5+12=17;$

$V_1=P_1$ | $V_2=P_2.$

Vastus.

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2. \end{cases}$$

1170. Lahenda süsteemid:

a) $\begin{cases} 6x+7y=-8 \\ 8x+9y=-10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y=-10 \\ 4x-5y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x+4y=78 \\ 5x+7y=64 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+14y=47 \\ 2x-21y=1 \end{cases}$

1171. *Võrrandisüsteemi, mille võrrandites tundmatuga liikmed on vasakul poolel ja vabaliikmed paremal poolel, nimetatakse* **normaalkujuliseks.**

Teisenda võrrandisüsteemid normaalkujulisteks ja lahenda need.

a) $\begin{cases} 6x=18-5y \\ 4x=y-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x=127-3y \\ 3y=97-4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 20+y=3x \\ 7x-100+3y=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2-y=-3x \\ 3y=10-12x \end{cases}$

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE ASENDUSVÕTTEGA.

1172. *Ühe tundmatu saame võrrandisüsteemist kõrvaldada ka sel teel, kui lahendame süsteemi ühe võrrandi selle tundmatu suhtes ning asetame siis saadud avaldise süsteemi teise võrrandisse vastava tundmatu asemele.*

Näide. $\begin{cases} 7x-3y=29 \\ 2x+y=12 \end{cases}$

Lahendus. *Avaldame teisest võrrandist tundmatu y,*

$$y=12-2x.$$

Asendame nüüd esimeses võrrandis tundmatu y avaldisega $12-2x$, *saame*

$$7x-3(12-2x)=29.$$

Asendamise tulemusena saame ühe tundmatuga võrrandi, milles y enam ei esine. Lahendame selle võrrandi:

$$7x-36+6x=29;$$
$$13x=65;$$
$$x=5.$$

Võrduse

$$y=12-2x$$

abil leiame nüüd y väärtuse:

$$y=12-2\cdot 5=12-10=2.$$

Kontroll.

$$7\cdot 5-3\cdot 2=35-6=29; \quad V_1=P_1. \qquad | \qquad 2\cdot 5+2=10+2=12; \quad V_2=P_2.$$

Vastus.

$$\begin{cases} x=5 \\ y=2. \end{cases}$$

Asendusvõtte rakendamisel on tarvis silmas pidada, et kui me lahendasime **ühe** *võrrandi mingi tundmatu suhtes, siis asendamine peab toimuma* **teises** *võrrandis. Tundmatu avaldamist ja asendamist ei saa teostada ühe ja sama võrrandi abil, sest siis saame samasuse, millest sarnaste liikmete koondamisel tundmatu kaob.*

Kontrolli seda võrrandiga

$$2x+y=12,$$

lahendades selle *y* suhtes ja asendades nüüd tundmatu *y* samas võrrandis saadud avaldisega.

Asendusvõtte kasutamine on eriti sobiv siis, kui ühe tundmatu kordajaks on arv 1 *või* -1, *sest siis on selle otsitava suhtes võrrandi lahendamine eriti hõlpus.*

1173. Lahenda asendusvõtte abil järgmised võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} 5x+8y=91 \\ 11x+y=18 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 13x+y=27 \\ 12x+3y=27 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x+y=77 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 9x-y=81 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 14x-y=38 \\ 7x+2y=29 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x-5y=5 \\ 3x-2y=54 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+17y=49 \\ 3x-y=43 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 16x-5y=-3 \\ x+4y=30 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x=37-y \\ 3y+6=4x \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x=5y-13 \\ 7y-25=2x \end{cases}$

1174. Lahenda võrrandisüsteemid.

1) $\begin{cases} 3x+2y=23 \\ 5x-2y=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x+2y=47 \\ -7x+3y=-17 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x+5y=110 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 9x-2y=6 \\ 7x+y=20 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x+2y=23 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x+6y=39 \\ 2x+5y=26 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 8x-3y=17 \\ 9x-2y=26 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x+y=25 \\ 5x-y=23 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x+4y=16 \\ 3x-4y=16 \end{cases}$

1175. *Võrrandisüsteemide lahendamiseks tuleb kõigepealt lihtsustada süsteemi kuuluvad võrrandid, lihtsustades algul ühe, siis teise võrrandi.*

Näide.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=5 \\ 3(x+y)-4(x-y)=120 \end{cases}$$

Lahendus.

1) $\frac{\overset{3}{\smile}}{\frac{x+y}{8}}+\frac{\overset{4}{\smile}}{\frac{x-y}{6}}=5;$

$3(x+y)+4(x-y)=120;$

$3x+3y+4x-4y=120;$

$7x-y=120;$

2) $3(x+y)-4(x-y)=120;$

$3x+3y-4x+4y=120;$

$-x+7y=120;$

3) $\begin{cases} 7x-y=120 \\ -x+7y=120 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \\ \cdot 7 \end{array} \right| \begin{array}{l} 49x-7y=840; \\ -x+7y=120; \\ \hline 48x=960; \\ x=20. \end{array}$

$7 \cdot 20-y=120;$
$y=140-120$
$y=20.$

Kontroll.

$\frac{20+20}{8}+\frac{20-20}{6}=\frac{40}{8}=5;$ $\quad V_1=P_1$

$3(20+20)-4(20-20)=$
$=3 \cdot 40-4 \cdot 0=120;$ $\quad V_2=P_2.$

Vastus.

$x=20$
$y=20$

1176. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} 2(7x+3y)-4(6x-5y)=280 \\ 5(11x+7y)-2(15x+9y)=1760 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2(3x-5y)-3(x-5)=56-4(6+2y) \\ 2(4x-3)-33=5(x-2y)+2(3y-5) \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-4)(y+7)=(x-3)(y+4) \\ (x+5)(y-2)=(x+2)(y-1) \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x+4)(y+5)=(x+1)(y+8) \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1) \end{cases}$

5) $\begin{cases} (3x+4)^2+(3y-8)^2-18xy=9(x-y)^2 \\ (x+y)^2-(x+3)^2+2x(9-y)=(y+7)^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} (2x+1)^2+(y+2)^2=4(x+1)^2+(y+1)^2 \\ 9x^2+4y^2=(3x+1)^2+(2y-1)^2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} (8x+y)(8x-y)+26=x(64x+1)-y(y-1) \\ (x+y)^3-(x-y)+8=(x+y)(x^2-xy+y^2)+ \\ +3xy(x+y) \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x-y)^3+12=(x-y)(x^2+xy-y^2)-3xy(x-y)+ \\ +x+y \\ (x+2y)(x-2y)+8=x(x+1)-y(4y+1) \end{cases}$

9) $\begin{cases} 8\{x+2[y-2(x+3)]\}=29 \\ 2\{2y-2[y-2(x+1)]\}=9 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2\{x+3[y-2(x-1)]\}=5 \\ 5\left\{6\left[\frac{1}{2}(x+1)-y\right]-x\right\}=6 \end{cases}$

1177. Lahenda võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{5}=2 \\ \frac{2x+1}{3}-\frac{3y+1}{5}=\frac{47}{15} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8 \\ \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x-y}{2}+3=\frac{2x+y}{5} \\ 8-\frac{x-2y}{4}=\frac{x}{2}+\frac{y}{3} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2}{3}y+2=3x-2{,}5y \\ 10-\frac{1}{4}(2x-y)=\frac{4}{7}x+\frac{2}{3}y \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{3x+4y}{5}-\frac{14x-3y}{15}=\frac{7y-x}{10}+\frac{y-x}{2} \\ \frac{4x+3y-3}{7}+\frac{5x-2y+7}{14}=\frac{9y-5x}{21}+\frac{3y}{4} \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{8x-y}{9}-\frac{7x+y}{12}=\frac{13x-3y}{16}-\frac{5x+8}{18}-\frac{1}{72} \\ \frac{11x-4y}{15}+\frac{11x+4y}{20}=\frac{17x+2y}{30}-\frac{7y-5x}{12} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{5} \\ \frac{x+4}{y+4}=\frac{2}{5} \end{cases}$

8) $\begin{cases} \frac{5}{y-1}=\frac{4}{x-1} \\ \frac{1}{2y-1}=\frac{1}{2x+1} \end{cases}$

1178. Lahenda võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} x-2=\frac{xy+13}{y+6} \\ y-2=\frac{xy-13}{x+4} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{1-9x}{1-y}=-4 \\ \frac{x}{2x-10}-\frac{5y}{6x-30}=\frac{1}{20-4x} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{y-6}{x-4}+\frac{10}{x^2-16}=\frac{y+6}{x+4} \\ \frac{5}{x^2-3x}-\frac{3}{xy-3y}=\frac{10}{xy} \end{cases}$

4) $\begin{cases} y+3(y+3{,}5)=6(y-1)+x \\ \frac{y+6}{y-4}=\frac{x+3}{x-5}-\frac{49}{xy-5y-4x+20} \end{cases}$

1179. *Kui ülesande lahendamiseks kasutatakse kahte tundmatut, siis tuleb koostada ka kaks võrrandit, teiste sõnadega, tuleb koostada võrrandisüsteem. Lahendame näitena võrrandisüsteemi abil järgmise ülesande.*

Ülesanne. *Töökoda sai tähtajalise tellimuse valmistada rajooni laulupäevaks metallmärke. Kui töökoda valmistaks iga päev* 180 *märki, siis jääks tähtpäevaks* 600 *märki puudu. Kui aga töökoda valmistaks iga päev* 210 *märki, siis võiks tähtpäevaks valmistada* 300 *märki rohkem kui tellitud. Kui mitu märki telliti ja mitmepäevane oli tähtaeg?*

Lahendus. *Telliti* x *märki. Tähtaeg oli* y *päeva. Valmistades* 180 *märki päevas, saaks tähtajaks valmis* $180y$ *märki, mis on* 600 *võrra vähem kui tellitud märkide arv, seega* 600 *võrra vähem kui* x *ehk* $x-600$.

Saame võrrandi

$$x-600=180y.$$

Valmistades aga 210 *märki päevas, saaks tähtajaks valmis* $210y$ *märki, mis on andmete põhjal* 300 *võrra suurem kui* x, *seega*

$$x+300=210y.$$

Nii oleme saanud võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x-600=180y \\ x+300=210y \end{cases}$$

Lahendame selle võrrandisüsteemi, teisendades ta esmalt normaalkujuliseks:

$$\begin{cases} x-180y=600 \\ x-210y=-300 \end{cases} \Big| \cdot(-1) \Big| \begin{array}{r} x-180y=600; \\ -x+210y=300; \\ \hline 30y=900; \\ y=30 \text{ (päeva)} \end{array}$$

$x-180\cdot 30=600;$
$x-5400=600;$
$x=6000$ (*märki*)

Kontroll. *Kui tehas valmistaks päevas* 180 *märki, siis* 30 *päevaga valmiks* $30\cdot 180=5400$ *märki. Vajalikust märkide arvust* 6000 *jääks seega puudu* $6000-5400=600$ *märki.*

Kui tehas valmistaks päevas aga 210 *märki, siis* 30 *päevaga valmiks* $30 \cdot 210 = 6300$ *märki, mis on* $6300 - 6000 = 300$ *märgi võrra rohkem kui vajati. Ülesanne on lahendatud õigesti.*

V a s t u s. *Töökojalt telliti* 6000 *märki tähtajaga* 30 *päeva.*

1180. Lennuk lendas pärituult kiirusega 365 km tunnis, vastutuult aga kiirusega 211 km tunnis. Leia lennuki kiirus tuulevaikse ilmaga ja tuule kiirus.

1181. Aerutaja liikus jõel pärivoolu kiirusega 15 km tunnis ja vastuvoolu kiirusega 10 km tunnis. Arvuta aerutaja liikumise kiirus seisvas vees ja jõe voolu kiirus.

1182. Klassis on 32 õpilase jaoks 25 pinki. Osa neist on kaheistmelised, osa üheistmelised. Vabu kohti pole. Kui palju on kaheistmelisi ja kui palju üheistmelisi pinke?

1183. Rahakotis on 16 metallraha, 20- ja 5-kopikalised, kokku 185 kopikat. Mitu 20- ja mitu 5-kopikalist on rahakotis?

1184. Õe ja venna vanus on kokku 50 aastat. 10 aastat tagasi oli vend 2 korda nii vana kui õde. Kui vanad on nad praegu?

1185. Isa ja ema vanus on kokku 87 aastat. 15 aasta eest oli isa 2 korda vanem kui ema. Arvuta isa ja ema vanus.

1186. Kahekohalise arvu ristsumma on 11. Kui numbrite järjekorda muuta, tekib arv, mis on eelmisest 63 võrra väiksem. Mis arv see on?

1187. Kahekohalise arvu ristsumma on 12. Kui selle arvu numbrite kohad vahetada, siis saame arvu, mis on eelmisest 18 võrra suurem. Leia see arv.

1188. Postkaardid margistatakse 25-kopikase ja kirjad 40-kopikase postmargiga. Asutus saatis välja kokku 15 postkaarti ja kirja, millele tuli postmarke panna 5,55 rubla eest. Mitu postkaarti ja mitu kirja asutus saatis?

1189. Sulepea on 2 kop. kallim kui pliiats. Ühe rubla eest saab osta 5 sulepead ja 4 pliiatsit. Kui kallis on sulepea ja kui kallis on pliiats?

1190. 3 hõõglambi ja 8 meetri juhtmetraadi eest maksti 11,50 rubla, 5 hõõglambi ja 12 meetri juhtmetraadi eest maksti aga 18,50 rubla. Leia hõõglambi ja juhtmetraadi meetri hind.

1191. Kolme aasta pärast on ema 3 korda vanem tütrest, seitsme aasta eest oli ema aga 7 korda vanem tütrest. Kui vana on ema ja kui vana on tütar?

1192. 2 kg peensuhkrut ja 4 kg tükksuhkrut maksab 54 rubla, kuid 4 kg peensuhkrut ja 2 kg tükksuhkrut maksab 51 rubla. Arvuta peensuhkru ja tükksuhkru kilogrammi hind.

1193. 1 kg riisi ja 2 kg jahu maksab 12,50 rbl. Kui aga osta 2 kg riisi ja 3 kg jahu, siis tuleb maksta 22,35 rbl. Arvuta riisi ja jahu kilogrammi hind.

1194. 1 kg makarone ja 3 kg odratangu maksab 8,60 rbl. Ema ostis 2 kg makarone ja 8 kg odratangu ja maksis 20,20 rbl. Kui palju maksis kilogramm makarone ja kui palju kilogramm odratangu?

1195. Kilogramm juustu maksab 1,20 rbl. rohkem kui kilogramm võid. Kilogramm juustu ja kilogramm võid maksab kokku 56,80 rbl. Arvuta juustu ja või kilogrammi hind.

1196. Kui ristkülikukujulise aia pikkust vähendada 10 m võrra ja laiust suurendada 5 m võrra, siis aia pindala väheneb 350 m^2 võrra. Kui aga laius jätta muutmata ja pikkust suurendada 10 m võrra, siis aia pindala suureneb 800 m^2 võrra. Leia aia pikkus ja laius.

1197. Elamu põhiplaanil on ristküliku kuju. Kui maja pikkust vähendada 1 m võrra ja laiust suurendada 1 m võrra, siis elamu põhipindala suureneb 3 m^2 võrra. Kui pikkust suurendada aga 1 m võrra ja laiust samapalju vähendada, siis see pindala väheneb 5 m^2 võrra. Arvuta plaanis ette nähtud elamu pikkus ja laius.

1198. Poisil on 2 korda rohkem õdesid kui vendi, igal õel aga on niisama palju vendi kui õdesid. Mitu last on perekonnas?

1199. Kolmnurgas ABC on tipu C juures olev välisnurk 111°. Nurk A on nurgast B 10° võrra suurem. Arvuta kolmnurga ABC nurgad.

1200. Trapetsi kesklõigu pikkus on 8 cm, üks alus on teisest 2 cm võrra pikem. Leia trapetsi alused.

1201. Meres ujuvast jääpangast ulatub välja 2000-kuupmeetrine osa. Jää erikaal on 0,9 ja merevee erikaal 1,03. Leia jäätüki ruumala ja kaal.

1202. Kivi külge seoti nii suur korgitükk, et nad vees üheskoos ei vaju põhja ega kerki ka pinnale. Kivi erikaal on 3 ja korgi erikaal 0,24. Kui palju kaalub kivi ja kui palju kaalub kork, kui kokku kaaluvad nad 11,5 kg?

1203. Kui otsitavat arvu jagada 7-ga, siis jääk on 6. Kui otsitavat arvu jagada 11-ga, siis jääk on 1, kuid jagatis on eelmisest jagatisest 5 võrra väiksem. Leia see arv.

1204. Kui murru lugejat suurendada 1 võrra ja nimetajat vähendada 1 võrra, siis murd saab võrdseks 1-ga. Kui lugejat vähendada 1 võrra ja nimetajat suurendada 1 võrra, siis murd saab võrdseks $\frac{1}{2}$-ga. Mis murd see on?

1205. Tükk hõbeda ja tina sulamit kaalub 10 g. Selle sulami erikaal on 9. Hõbeda erikaal on 10,2 ja tina erikaal 7,3. Kui palju hõbedat ja kui palju tina on selles sulamis?

1206. Ühel riiulil oli 7 korda rohkem raamatuid kui teisel. Esimeselt riiulilt võeti 12 raamatut ära ja teisele riiulile pandi 8 raamatut juurde, mistõttu nüüd esimesel riiulil on 3 korda rohkem raamatuid kui teisel. Mitu raamatut oli enne kummalgi riiulil?

1207. Kahest sadamast, millede vahemaa on 660 km, väljusid samaaegselt teineteisele vastu kaks aurikut. 8 tunni pärast oli aurikute vahemaa 396 km. Leia kummagi auriku liikumise kiirus, teades, et üks aurik liikus tunnis 3 km rohkem kui teine.

1208. Tallinnast väljus kaubarong Tartu poole, samaaegselt väljus reisirong Tartust Tallinna poole. Need rongid kohtusid 2 tunni pärast. Leia kummagi rongi keskmine kiirus, teades, et Tallinnast Tartusse on raudteed mööda 200 km ja et reisirong läbis tunnis 40 km võrra rohkem kui kaubarong.

1209. Lahenda alljärgnevad ülesanded kahel viisil: kahe tundmatu abil ja ühe tundmatu abil.

a) Kahe arvu summa on 183, nende arvude vahe on 9. Leia need arvud.

b) Leia kaks niisugust arvu, mille summa on 63 ja vahe 11.

c) Kahe arvu summa on 44. Kahekordse suurema arvu ja kolmekordse väiksema arvu summa on 109. Leia need arvud.

d) Kahe arvu summa on 45. Kui suurendaksime ühte neist 2 korda ja teist 5 korda, siis oleks nende summa 165. Mis arvud need on?

1210. Tugitool ja diivan maksavad kokku 2081 rbl. Diivan on tugitoolist 4 korda kallim. Kui palju maksab diivan ja kui palju tugitool?

1211. Ühes piimanõus on 2 korda rohkem piima kui teises. Kui kummastki nõust valada ära 20 liitrit piima, siis jääb suure-

masse nõusse 3 korda rohkem piima kui väiksemasse. Mitu liitrit piima oli algul kummaski nõus?

1212. Ühes klassis müüdi teatrietendusele 20 kallimat ja 16 odavamat piletit, kokku 230 rubla eest. Teises klassis müüdi aga 18 kallimat ja 24 odavamat piletit, kokku 255 rubla eest. Arvuta piletite hinnad.

1213. On olemas 90-protsendilist ja 70-protsendilist hapet. Kui palju tuleb võtta ühte ja kui palju teist, et saada 1 kg a) 75-protsendilist hapet? b) 80-protsendilist hapet?

1214. Taheti osta 3 vaipa ja 2 põrandariiet, mis maksid kõik kokku 1170 rubla. Kuid vaiba hinda alandati 10% ja põrandariide hinda 15% ning sama ostu eest tuli maksta 1047 rbl. Kui palju maksis vaip ja kui palju põrandariie enne hinnaalandamist? Kui palju maksid need esemed pärast hinnaalandamist?

1215. On hõbedat prooviga 850 ja prooviga 720. Kui palju tuleb võtta hõbedat kummastki liigist, et saada 1 kg 40 g hõbedat prooviga 800?

1216. Keldrist pumbatakse vett välja kahe pumbaga. Kui üks pump oli töötanud 2 tundi ja teine 3 tundi, siis oli veehulk keldris vähenenud 1020 m^3 võrra. Pärast seda kui esimene pump oli töötanud veel 1 tund ja teine $2\frac{1}{2}$ tundi, oli veehulk keldris vähenenud veel 690 m^3 võrra. Mitu kuupmeetrit vett pumpab välja kumbki pump tunnis?

1217. Gaasiarve järgi tuli ühel kuul maksta 173 m^3 gaasi eest koos mõõtja üüriga kokku 35,60 rbl., teisel kuul aga 121 m^3 gaasi eest koos mõõtja üüriga 25,20 rbl. Arvuta ühe kuupmeetri gaasi hind ja mõõtja ühe kuu üür.

1218. Arvuta x ja y, teades, et

$$(x+y):(x+1):(9-y)=3:2:1.$$

Näpunäide. *Võrrete reast*

$$a:b:c=k:m:n$$

saab kirjutada välja võrded, nagu

$$a:b=k:m \text{ ja } b:c=m:n.$$

1219. Leia x ja y väärtused, kui

$$(3x-7):(y+7):(x-y)=5:3:1.$$

1220. Üks traktorist künnab vahetuses 2 hektarit rohkem kui teine. Töötades koos 5 vahetust, kündsid nad 80 hektarit. Mitu hektarit kündis kumbki traktorist ühes vahetuses?

1221. Noortepargi basseini täidetakse veega kahe kraani kaudu. Ühest kraanist voolab tunnis 4 m^3 vett rohkem kui teisest. Kui mõlemad kraanid avada 4-ks tunniks, siis voolab basseini 400 m^3 vett. Mitu kuupmeetrit vett voolab kummastki kraanist ühes tunnis?

11. ÜLDISEKS KORDAMISEKS.

1222. Leia 8,4% avaldise $3\frac{1}{6}+2\frac{3}{4}:1\frac{1}{2}$ väärtusest.

1223. Mitu protsenti moodustab avaldise $2\frac{3}{8}-3\cdot0{,}75$ väärtus avaldise $2\frac{3}{8}+3\cdot0{,}75$ väärtusest?

1224. Leia arv, millest 17% võrdub avaldise $1{,}45-0{,}25:\frac{5}{12}$ väärtusega.

1225. Mitu protsenti moodustab arvude 5 ja 7 ruutude summa samade arvude summa ruudust?

1226. Arvuta avaldiste väärtus.

a) $4{,}2-3\frac{3}{4}\cdot(5{,}4-4\frac{1}{3})$

b) $4\frac{3}{8}:(6{,}5-2{,}2\cdot1\frac{4}{11})$

c) $\dfrac{3+4{,}2:0{,}1}{\left(1:0{,}3-2\frac{1}{3}\right)\cdot0{,}3125}$

d) $\dfrac{(18{,}305:7-0{,}38:4)\cdot(6{,}35+4{,}65)}{28{,}08:6+7{,}38:9}$

1227. Leia võrde tundmatu liige.

a) $x:12=4\frac{3}{4}:7\frac{1}{8}$

b) $3\frac{1}{2}:0{,}4=x:1\frac{1}{7}$

c) $1\frac{7}{8}:1{,}5=x:0{,}24$

d) $0{,}8:x=4\frac{2}{3}:\frac{5}{6}$

1228. Kolmepäevasest automatkast osavõtjad sõitsid esimesel

päeval 30% kogu teekonnast, teisel päeval $\frac{3}{8}$ ülejäänud teeosast ja kolmandal päeval viimased 189 km. Kui pikk oli teekond?

1229. Kinoetendusel oli õpilasi kolmest koolist võrdeliselt arvudega $2\frac{1}{3}$, $1\frac{3}{4}$ ja $1\frac{1}{6}$. Mitu õpilast oli igast koolist, kui esimesest ja teisest koolist oli neid kokku 364?

1230. Jaota arv 2,38 kolmeks osaks x, y ja z nii, et $x : y = 3 : 5$ ja $y : z = 8 : 11$.

1231. Kolhoosil oli 1. oktoobril sügiskündi teha veel 630 ha. Sellest künti oktoobrikuu esimesel poolel 23% ja sama kuu teisel poolel $\frac{8}{11}$ ülejäänud pindalast. Mitu hektarit jäi künda novembrikuuks?

1232. 31. oktoobril 1959. aastal saavutas nõukogude lendur G. Mossolov ühe turboreaktiivmootoriga lennukil E-66 keskmiseks kiiruseks ühel lennulõigul 2504 kilomeetrit tunnis. Kui kaua vältab sellise kiirusega reis ümber Maa (Maa raadius on 6371 km)?

1233. Mitu pööret minutis peab tegema veduriratas, mille läbimõõt on 1,65 m, et rongi kiirus oleks 60 km tunnis?

1234. Taskukella minutiosuti pikkus on 2,8 cm, tunniosuti pikkus 2,1 cm. Kui palju on minutiosuti otsa poolt ööpäevas läbitud tee pikem tunniosuti otsa poolt sama ajavahemiku vältel läbitud teest?

1235. On vaja tapeetida 6,5 m pikkune, 4 m laiune ja 3 m kõrgune tuba. Toal on uks mõõtmetega 2,5 m × 1 m ja kaks akent mõõtmetega 2 m × 1 m. Seina ülemine osa vastu lage jääb 0,35 m kõrguselt tapeetimata.

Mitu rulli tapeeti on vaja osta, kui igas rullis on tapeeti 12 meetrit ja tapeedi laius on 0,5 m?

1236. Lihtsusta avaldised.

a) $(3x-4)(3x+4)-(3x-4)^2+32$

b) $(2a+0{,}3b)(2a-0{,}3b)-(2a+0{,}3b)^2+1{,}2ab$

c) $(3a-1)^2-5(a+2)(a-2)-2a(2a+3)$

d) $(2a-1)^3-(2a+1)^3$

e) $(3x-2a)^3-(3x+2a)(9x^2-6ax+4a^2)$

1237. a) Missuguseid nurki nimetatakse kõrvunurkadeks?

b) Missuguseid nurki nimetatakse tippnurkadeks?

1238. Kui palju kaalub 4 m pikkune terasest võll, mille läbimõõt on 10 cm ja erikaal on 7,8?

1239. Missugused on kahe sirge paralleelsuse tunnused?

1240. Mitu tonni bensiini sisaldab silindrikujuline tsistern, mille pikkus on 4,6 m ja läbimõõt 1,8 m, kui bensiini erikaal on 0,75?

1241. Arvuta kumera kaheksanurga sisenurkade summa. Kui suur on sama kaheksanurga välisnurkade summa?

1242. Koonuse põhja raadius on 3,9 cm ja koonuse moodustaja 8 cm. Arvuta koonuse külgpindala.

1243. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y=0{,}6x-2$ ja leia saadud joonise abil järgmiste võrrandite lahendid:

$0{,}6x-2=1{,}6$; $0{,}6x-2=4$;
$0{,}6x-2=-4$; $0{,}6x-2=-0{,}8$.

1244. Mitu autokoormat liiva sisaldab koonusekujuline liivahunnik, mille põhja ümbermõõt on 12 m ja kõrgus 2 m, kui igasse koormasse mahub 1,5 m^3 liiva?

1245. Leia hulkliikmete jagatis.

a) $(a^6+2a^5+a^4):(a^2+a)$
b) $(x^5+x^3y^3+x^2y^2+y^5):(x^3+y^2)$

1246. Leia võrrandist

$$2x-5y=17$$

y väärtus, kui $x=2$; 6; 10; 16.

Mida võid öelda y väärtuse kohta, kui

$$2<x<16?$$

1247. Selgita graafiliselt, missugusel alljärgnevatest võrrandisüsteemidest on üksainus lahend, missugusel lahend puudub ja missugusel on lõpmatu hulk lahendeid.

$\begin{cases} x-2y=6 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{3}=-2 \\ x-2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x+1\frac{1}{2}y=3. \end{cases}$

1248. Lahenda graafiliselt võrrandisüsteemid.

a) $\begin{cases} 2x-3y=12 \\ x+2y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=y \\ 3x+y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

1249. Gloobuse läbimõõt on 50 cm. Kui suur on selle gloobuse pindala ja ruumala?

1250. Kui raske on klaasist kera erikaaluga 2,5, kui kera läbimõõt on 12 cm?

1251. Kera mahub parajasti kuubikujulisse kasti, mille seesmise serva pikkus on 20 cm. Kui palju jääb sellesse kasti veel tühja ruumi?

1252. Puust silindri kõrgus ja põhja läbimõõt on kumbki 2 dm. Sellest silindrist treitakse võimalikult suur kera. Mitu protsenti puitu tuleb maha treida?

1253. Arvu a jagamisel arvuga b saadi jagatiseks täisarv q ja jäägiks r. Avalda

1) arv a arvude b, q ja r kaudu;
2) arv b arvude a, q ja r kaudu;
3) arv q arvude a, b ja r kaudu;
4) arv r arvude a, b ja q kaudu.

Sõnasta seos, mis näitab, kuidas jagatav avaldub jagaja, jagatise ja jäägi kaudu.

1254. Kahe arvu summa on 33. Kui suurem nendest arvudest jagada väiksemaga, siis saame jagatiseks 4 ja jäägiks 3. Leia need arvud.

1255. Lahenda süsteemid.

a) $\begin{cases} 2x+3y=9\frac{1}{2} \\ 2x-3y=2\frac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-9y=26 \\ x-y=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+2y=2x+3y+5 \\ 7x-6y=6x-7y+21 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3\frac{1}{4}x+4\frac{2}{3}y=84\frac{2}{3} \\ 2\frac{4}{5}x-1\frac{1}{4}y=36\frac{1}{20} \end{cases}$

e) $x:y:(x+4)=1:2:3$
f) $x:y:(y+3)=2:3:4$

g) $\begin{cases} \frac{4x-5y+12}{6}-\frac{7x-8y+4}{7}=1 \\ \frac{5x-4y+7}{4}+\frac{6x+y-4}{10}=7 \end{cases}$

1256. Taanda murrud.

a) $\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}$ b) $\frac{3x-3}{x^2-2x+1}$

c) $\frac{7a+7}{a^2+2a+1}$ d) $\frac{x^2-1}{ax-a}$

e) $\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$ f) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

1257. Lihtsusta avaldised.

a) $\frac{5x-3}{15}+\frac{3x-5}{10}$ b) $\frac{2a+5}{8}+\frac{3a-7}{12}$

c) $\frac{a-1}{4}+\frac{2a-3}{6}-\frac{3a+1}{9}$ d) $\frac{3x-7}{12}-\frac{2x-1}{16}-\frac{x-3}{18}$

1258. a) Nimeta neli kolmnurkade võrdsuse tunnust.

b) Joonesta võrdhaarne kolmnurk, mille haar on 4,5 cm ja alusnurk on 45°.

c) Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks külge ja suurema külje vastasnurk.

1259. Tõesta, et rombi diagonaalid jaotavad rombi neljaks võrdseks kolmnurgaks. Mis liiki need kolmnurgad on?

1260. Rombi diagonaal moodustab ühe küljega nurga 37°40′. Leia rombi kõik nurgad.

1261. Tõesta, et rööpkülik, mille diagonaalid on teineteisega risti, on romb.

1262. Tõesta, et kolmnurgad, milledeks diagonaalid jaotavad ristküliku, on võrdhaarsed.

1263. 7 tooli ja 3 tugitooli maksid enne hinnaalandust kokku 1792 rbl. Kuna tooli hinda alandati 18% võrra ja tugitooli hinda 15% võrra, siis pärast hinnaalandust tuli samade esemete eest maksta kokku 1499,05 rbl. Leia tooli hind ja tugitooli hind enne hinnaalandust.

1264. Kahe arvu summa on 145,6. Üks arv moodustab 0,12 teisest arvust. Leia need arvud.

1265. Krohvija koos oma õpilasega sai 308 rbl. töötasu. Krohvija töötas 8 päeva, õpilane aga ainult 35% sellest ajast. Krohvija päevapalk oli õpilase päevapalgast 40% kõrgem. Arvuta krohvija päevapalk ja õpilase päevapalk.

1266. Kahe arvu summa on 95. Samade arvude vahe on 3 korda väiksem väiksemast liidetavast. Leia need arvud.

1267. Kahe arvu summa on 96. Kui väiksemat liidetavat suurendada 6 võrra, suuremat aga niisama palju vähendada, siis saame võrdsed arvud. Leia need arvud.

1268. Kui klassi igale õpilasele anda 3 sulge, siis jääb karbitäiest sulgedest 4 sulge järele. Kui aga igale õpilasele anda 4 sulge, siis tuleb võtta veel 28% teise samasuuruse karbi sulgedest. Mitu õpilast on klassis ja mitu sulge on karbis?

1269. Lihtsusta avaldisi.

a) $\frac{4x}{1-x^2}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x+x^2}$

b) $\frac{5-3x}{x^2-9}+\frac{5}{x^2-3x}$

c) $\frac{2x-5}{2x^2+5x}-\frac{2x+5}{2x^2-5x}+\frac{40}{4x^2-25}$

d) $x-\frac{x^2}{x-1}-\frac{x}{x+1}$

e) $a+\frac{a}{a-1}-\frac{a^2}{a+1}$

1270. Kolmnurga üks külg on teisest kaks korda pikem ja kolmas külg esimesest küljest 16 cm pikem. Kolmnurga ümbermõõt on 108 cm. Kui pikad on kolmnurga küljed?

1271. Millised on kolmnurga pikima külje tõkked, kui sama kolmnurga kaks lühemat külge on 17,8 cm ja 24,6 cm?

1272. Klassis on 15 poissi ja 21 tüdrukut. Mitme protsendi võrra on tüdrukuid rohkem kui poisse? Mitme protsendi võrra on poisse vähem kui tüdrukuid?

1273. a) Arv x on 25% arvust y. Mitu protsenti on arv y arvust x?

b) Arv u on 64% arvust v. Mitu protsenti on arv v arvust u?

1274. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on teisest 25% võrra suurem. Kui suured on need nurgad?

1275. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on 30% võrra suurem kui tipunurk. Kui suured on kolmnurga nurgad?

1276. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 40% võrra suurem kui alusnurk. Kui suured on kolmnurga nurgad?

1277. Ehita kolmnurk, mille küljed on 4 cm, 6 cm ja 7 cm, ning leia punkt, mis asetseb võrdsetel kaugustel kõige pikema külje otspunktidest ja võrdsetel kaugustel kõige väiksema nurga haaradest.

1278. Ehita võrdhaarne trapets, mille pikem alus on 6 cm, kõrgus 2 cm ja haar 2,5 cm.

1279. Ehita romb, mille külg on 3,5 cm ja üks diagonaal on 2 cm.

1280. Kuidas tuleb ümardada

a) ligikaudsete arvude summat ja vahet?

b) ligikaudsete arvude korrutist ja jagatist?

1281. Kolmas Nõukogude kosmoserakett, mis saadeti välja 4. oktoobril 1959. a., oli sama päeva kella 18-ks eemaldunud Maast 145 000 kilomeetri kaugusele. 5. oktoobril kella 12-ks oli sama kosmoserakett eemaldunud Maast 248 000 kilomeetri kaugusele. Kui suur oli kolmanda Nõukogude kosmoseraketi keskmine kiirus sekundis sellel vahemaal?

TABEL RINGI ÜMBERMÕÕDU JA LÄBIMÕÕDU *d* VAHELISE SÕLTUVUSE KOHTA.

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	3,14	3,17	3,20	3,24	3,27	3,30	3,33	3,36	3,39	3,42
1,1	3,46	3,49	3,52	3,55	3,58	3,61	3,64	3,68	3,71	3,74
1,2	3,77	3,80	3,83	3,86	3,90	3,93	3,96	3,99	4,02	4,05
1,3	4,08	4,12	4,15	4,18	4,21	4,24	4,27	4,30	4,34	4,37
1,4	4,40	4,43	4,46	4,49	4,52	4,56	4,59	4,62	4,65	4,68
1,5	4,71	4,74	4,78	4,81	4,84	4,87	4,90	4,93	4,96	5,00
1,6	5,03	5,06	5,09	5,12	5,15	5,18	5,22	5,25	5,28	5,31
1,7	5,34	5,37	5,40	5,43	5,47	5,50	5,53	5,56	5,59	5,62
1,8	5,65	5,69	5,72	5,75	5,78	5,81	5,84	5,87	5,91	5,94
1,9	5,97	6,00	6,03	6,06	6,09	6,13	6,16	6,19	6,22	6,25
2,0	6,28	6,31	6,35	6,38	6,41	6,44	6,47	6,50	6,53	6,57
2,1	6,60	6,63	6,66	6,69	6,72	6,75	6,79	6,82	6,85	6,88
2,2	6,91	6,94	6,97	7,01	7,04	7,07	7,10	7,13	7,16	7,19
2,3	7,23	7,26	7,29	7,32	7,35	7,38	7,41	7,45	7,48	7,51
2,4	7,54	7,57	7,60	7,63	7,67	7,70	7,73	7,76	7,79	7,82
2,5	7,85	7,89	7,92	7,95	7,98	8,01	8,04	8,07	8,11	8,14
2,6	8,17	8,20	8,23	8,26	8,29	8,33	8,36	8,39	8,42	8,45
2,7	8,48	8,51	8,55	8,58	8,61	8,64	8,67	8,70	8,73	8,77
2,8	8,80	8,83	8,86	8,89	8,92	8,95	8,98	9,02	9,05	9,08
2,9	9,11	9,14	9,17	9,20	9,24	9,27	9,30	9,33	9,36	9,39
3,0	9,42	9,46	9,49	9,52	9,55	9,58	9,61	9,64	9,68	9,71
3,1	9,74	9,77	9,80	9,83	9,86	9,90	9,93	9,96	9,99	10,02
3,2	10,05	10,08	10,12	10,15	10,18	10,21	10,24	10,27	10,30	10,34
3,3	10,37	10,40	10,43	10,46	10,49	10,52	10,56	10,59	10,62	10,65
3,4	10,68	10,71	10,74	10,78	10,81	10,84	10,87	10,90	10,93	10,96
3,5	11,00	11,03	11,06	11,09	11,12	11,15	11,18	11,22	11,25	11,28
3,6	11,31	11,34	11,37	11,40	11,44	11,47	11,50	11,53	11,56	11,59
3,7	11,62	11,66	11,69	11,72	11,75	11,78	11,81	11,84	11,88	11,91
3,8	11,94	11,97	12,00	12,03	12,06	12,10	12,13	12,16	12,19	12,22
3,9	12,25	12,28	12,32	12,35	12,38	12,41	12,44	12,47	12,50	12,53
4,0	12,57	12,60	12,63	12,66	12,69	12,72	12,75	12,79	12,82	12,85
4,1	12,88	12,91	12,94	12,97	13,01	13,04	13,07	13,10	13,13	13,16
4,2	13,19	13,23	13,26	13,29	13,32	13,35	13,38	13,41	13,45	13,48
4,3	13,51	13,54	13,57	13,60	13,63	13,67	13,70	13,73	13,76	13,79
4,4	13,82	13,85	13,89	13,92	13,95	13,98	14,01	14,04	14,07	14,11
4,5	14,14	14,17	14,20	14,23	14,26	14,29	14,33	14,36	14,39	14,42
4,6	14,45	14,48	14,51	14,55	14,58	14,61	14,64	14,67	14,70	14,73
4,7	14,77	14,80	14,83	14,86	14,89	14,92	14,95	14,99	15,02	15,05
4,8	15,08	15,11	15,14	15,17	15,21	15,24	15,27	15,30	15,33	15,36
4,9	15,39	15,43	15,46	15,49	15,52	15,55	15,58	15,61	15,65	15 68
5,0	15,71	15,74	15,77	15,80	15,83	15,87	15,90	15,93	15,96	15,99
5,1	16,02	16,05	16,08	16,12	16,15	16,18	16,21	16,24	16,27	16,30
5,2	16,34	16,37	16,40	16,43	16,46	16,49	16,52	16,56	16,59	16,62
5,3	16,65	16,68	16,71	16,74	16,78	16,81	16,84	16,87	16,90	16,93
5,4	16,96	17,00	17,03	17,06	17,09	17,12	17,15	17,18	17,22	17,25

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	17,28	17,31	17,34	17,37	17,40	17,44	17,47	17,50	17,53	17,56
5,6	17,59	17,62	17,66	17,69	17,72	17,75	17,78	17,81	17,84	17,88
5,7	17,91	17,94	17,97	18,00	18,03	18,06	18,10	18,13	18,16	18,19
5,8	18,22	18,25	18,28	18,32	18,35	18,38	18,41	18,44	18,47	18,50
5,9	18,54	18,57	18,60	16,63	18,66	18,69	18,72	18,76	18,79	18,82
6,0	18,85	18,88	18,91	18,94	18,98	19,01	19,04	19,07	19,10	19,13
6,1	19,16	19,20	19,23	19,26	19,29	19,32	19,35	19,38	19,42	19,45
6,2	19,48	19,51	19,54	19,57	19,60	19,63	19,67	19,70	19,73	19,76
6,3	19,79	19,82	19,85	19,89	19,92	19,95	19,98	20,01	20,04	20,07
6,4	20,11	20,14	20,17	20,20	20,23	20,26	20,29	20,33	20,36	20,39
6,5	20,42	20,45	20,48	20,51	20,55	20,58	20,61	20,64	20,67	20,70
6,6	20,73	20,77	20,80	20,83	20,86	20,89	20,92	20,95	20,99	21,02
6,7	21,05	21,08	21,11	21,14	21,17	21,21	21,24	21,27	21,30	21,33
6,8	21,36	21,39	21,43	21,46	21,49	21,52	21,55	21,58	21,61	21,65
6,9	21,68	21,71	21,74	21,77	21,80	21,83	21,87	21,90	21,93	21,96
7,0	21,99	22,02	22,05	22,09	22,12	22,15	22,18	22,21	22,24	22,27
7,1	22,31	22,34	22,37	22,40	22,43	22,46	22,49	22,53	22,56	22,59
7,2	22,62	22,65	22,68	22,71	22,75	22,78	22,81	22,84	22,87	22,90
7,3	22,93	22,97	23,00	23,03	23,06	23,09	23,12	23,15	23,19	23,22
7,4	23,25	23,28	23,31	23,34	23,37	23,40	23,44	23,47	23,50	23,53
7,5	23,56	23,59	23,62	23,66	23,69	23,72	23,75	23,78	23,81	23,84
7,6	23,88	23,91	23,94	23,97	24,00	24,03	24,06	24,10	24,13	24,16
7,7	24,19	24,22	24,25	24,28	24,32	24,35	24,38	24,41	24,44	24,47
7,8	24,50	24,54	24,57	24,60	24,63	24,66	24,69	24,72	24,76	24,79
7,9	24,82	24,85	24,88	24,91	24,94	24,98	25,01	25,04	25,07	25,10
8,0	25,13	25,16	25,20	25,23	25,26	25,29	25,32	25,35	25,38	25,42
8,1	25,45	25,48	25,51	25,54	25,57	25,60	25,64	25,67	25,70	25,73
8,2	25,76	25,79	25,82	25,86	25,89	25,92	25,95	25,98	26,01	26,04
8,3	26,08	26,11	26,14	26,17	26,20	26,23	26,26	26,30	26,33	26,36
8,4	26,39	26,42	26,45	26,48	26,52	26,55	26,58	26,61	26,64	26,67
8,5	26,70	26,73	26,77	26,80	26,83	26,86	26,89	26,92	26,95	26,99
8,6	27,02	27,05	27,08	27,11	27,14	27,17	27,21	27,24	27,27	27,30
8,7	27,33	27,36	27,39	27,43	27,46	27,49	27,52	27,55	27,58	27,61
8,8	27,65	27,68	27,71	27,74	27,77	27,80	27,83	27,87	27,90	27,93
8,9	27,96	27,99	28,02	28,05	28,09	28,12	28,15	28,18	28,21	28,24
9,0	28,27	28,31	28,34	28,37	28,40	28,43	28,46	28,49	28,53	28,56
9,1	28,59	28,62	28,65	28,68	28,71	28,75	28,78	28,81	28,84	28,87
9,2	28,90	28,93	28,97	29,00	29,03	29,06	29,09	29,12	29,15	29,19
9,3	29,22	29,25	29,28	29,31	29,34	29,37	29,41	29,44	29,47	29,50
9,4	29,53	29,56	29,59	29,63	29,66	29,69	29,72	29,75	29,78	29,81
9,5	29,85	29,88	29,91	29,94	29,97	30,00	30,03	30,07	30,10	30,13
9,6	30,16	30,19	30,22	30,25	30,28	30,32	30,35	30,38	30,41	30,44
9,7	30,47	30,50	30,54	30,57	30,60	30,63	30,66	30,69	30,72	30,76
9,8	30,79	30,82	30,85	30,88	30,91	30,94	30,98	31,01	31,04	31,07
9,9	31,10	31,13	31,16	31,20	31,23	31,26	31,29	31,32	31,35	31,38
10,0	31,42									

TABEL RINGI PINDALA JA LÄBIMÕÕDU *d* VAHELISE SÕLTUVUSE KOHTA.

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,79	0,80	0,82	0,83	0,85	0,87	0,88	0,90	0,92	0,93
1,1	0,95	0,97	0,99	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,09	1,11
1,2	1,13	1,15	1,17	1,19	1,21	1,23	1,25	1,27	1,29	1,31
1,3	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,50	1,52
1,4	1,54	1,56	1,58	1,61	1,63	1,65	1,67	1,70	1,72	1,74
1,5	1,77	1,79	1,81	1,84	1,86	1,89	1,91	1,94	1,96	1,99
1,6	2,01	2,04	2,06	2,09	2,11	2,14	2,16	2,19	2,22	2,24
1,7	2,27	2,30	2,32	2,35	2,38	2,40	2,43	2,46	2,49	2,52
1,8	2,54	2,57	2,60	2,63	2,66	2,69	2,72	2,75	2,78	2,81
1,9	2,84	2,87	2,90	2,93	2,96	2,99	3,02	3,05	3,08	3,11
2,0	3,14	3,17	3,20	3,24	3,27	3,30	3,33	3,37	3,40	3,43
2,1	3,46	3,50	3,53	3,56	3,60	3,63	3,66	3,70	3,73	3,77
2,2	3,80	3,84	3,87	3,91	3,94	3,98	4,01	4,05	4,08	4,12
2,3	4,15	4,19	4,23	4,26	4,30	4,34	4,37	4,41	4,45	4,49
2,4	4,52	4,56	4,60	4,64	4,68	4,71	4,75	4,79	4,83	4,87
2,5	4,91	4,95	4,99	5,03	5,07	5,11	5,15	5,19	5,23	5,27
2,6	5,31	5,35	5,39	5,43	5,47	5,52	5,56	5,60	5,64	5,68
2,7	5,73	5,77	5,81	5,85	5,90	5,94	5,98	6,03	6,07	6,11
2,8	6,16	6,20	6,23	6,29	6,33	6,38	6,42	6,47	6,51	6,56
2,9	6,61	6,65	6,70	6,74	6,79	6,83	6,88	6,93	6,97	7,02
3,0	7,07	7,12	7,16	7,21	7,26	7,31	7,35	7,40	7,45	7,50
3,1	7,55	7,60	7,65	7,69	7,74	7,79	7,84	7,89	7,94	7,99
3,2	8,04	8,09	8,14	8,19	8,24	8,30	8,35	8,40	8,45	8,50
3,3	8,55	8,60	8,66	8,71	8,76	8,81	8,87	8,92	8,97	9,03
3,4	9,08	9,13	9,19	9,24	9,29	9,35	9,40	9,46	9,51	9,57
3,5	9,62	9,68	9,73	9,79	9,84	9,90	9,95	10,01	10,07	10,12
3,6	10,18	10,24	10,29	10,35	10,41	10,46	10,52	10,58	10,64	10,69
3,7	10,75	10,81	10,87	10,93	10,99	11,04	11,10	11,16	11,22	11,28
3,8	11,34	11,40	11,46	11,52	11,58	11,64	11,70	11,76	11,82	11,88
3,9	11,95	12,01	12,07	12,13	12,19	12,25	12,32	12,38	12,44	12,50
4,0	12,57	12,63	12,69	12,76	12,82	12,88	12,95	13,01	13,07	13,14
4,1	13,20	13,27	13,33	13,40	13,46	13,53	13,59	13,66	13,72	13,79
4,2	13,85	13,92	13,99	14,05	14,12	14,19	14,25	14,32	14,39	14,45
4,3	14,52	14,59	14,66	14,73	14,79	14,86	14,93	15,00	15,07	15,14
4,4	15,21	15,27	15,34	15,41	15,48	15,55	15,62	15,69	15,76	15,83
4,5	15,90	15,98	16,05	16,12	16,19	16,26	16,33	16,40	16,47	16,55
4,6	16,62	16,69	16,76	16,84	16,91	16,98	17,06	17,13	17,20	17,28
4,7	17,35	17,42	17,50	17,57	17,65	17,72	17,80	17,87	17,95	18,02
4,8	18,10	18,17	18,25	18,32	18,40	18,47	18,55	18,63	18,70	18,78
4,9	18,86	18,93	19,01	19,09	19,17	19,24	19,32	19,40	19,48	19,56
5,0	19,63	19,71	18,79	19,87	19,95	20,03	20,11	20,19	20,27	20,35
5,1	20,43	20,51	20,59	20,67	20,75	20,83	20,91	20,99	21,07	21,16
5,2	21,24	21,32	21,40	21,48	21,57	21,65	21,73	21,81	21,90	21,98
5,3	22,06	22,15	22,23	22,31	22,40	22,48	22,56	22,65	22,73	22,82
5,4	22,90	22,99	23,07	23,16	23,24	23,33	23,41	23,50	23,59	23,67

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54
5,6	24,63	24,72	24,81	24,89	24,98	25,07	25,16	25,25	25,34	25,43
5,7	25,52	25,61	25,70	25,79	25,88	25,97	26,06	26,15	26,24	26,33
5,8	26,42	26,51	26,60	26,69	26,79	26,88	26,97	27,06	27,15	27,25
5,9	27,34	27,43	27,53	27,62	27,71	27,81	27,90	27,99	28,09	28,18
6,0	28,27	28,37	28,46	28,56	28,65	28,75	28,84	28,94	29,03	29,13
6,1	29,22	29,32	29,42	29,51	29,61	29,71	29,80	29,90	30,00	30,09
6,2	30,19	30,29	30,39	30,48	30,58	30,68	30,78	30,88	30,97	31,07
6,3	31,17	31,27	31,37	31,47	31,57	31,67	31,77	31,87	31,97	32,07
6,4	32,17	32,27	32,37	32,47	32,57	32,67	32,78	32,88	32,98	33,08
6,5	33,18	33,29	33,39	33,49	33,59	33,70	33,80	33,90	34,00	34,11
6,6	34,21	34,32	34,42	34,52	34,63	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15
6,7	35,26	35,36	35,47	35,57	35,68	35,78	35,89	36,00	36,10	36,21
6,8	36,32	36,42	36,53	36,64	36,75	36,85	36,96	37,07	37,18	37.28
6,9	37,39	37,50	37,61	37,72	37,83	37,94	38,05	38,16	38,26	38,37
7,0	38,48	38,59	38,70	38,82	38,93	39,04	39,15	39,26	39,37	39,48
7,1	39,59	39,70	39,82	39,93	40,04	40,15	40,26	40,38	40,49	40,60
7.2	40,72	40,83	40,94	41,06	41,17	41,28	41,40	41,51	41,62	41,74
7,3	41,85	41,97	42,08	42,20	42,31	42,43	42,54	42,66	42,78	42,89
7,4	43,01	43,12	43,24	43,36	43,47	43,59	43,71	43,83	43,94	44,06
7,5	44,18	44,30	44,41	44,53	44,65	44,77	44,89	45,01	45,13	45,25
7,6	45,36	45,48	45,60	45,72	45,84	45,96	46,08	46,20	46,32	46,45
7,7	46,57	46,69	46,81	46,93	47,05	47,17	47,29	47,42	47,54	47,66
7,8	47,78	47,91	48,03	48,15	48,27	48,40	48,52	48,65	48,77	48,89
7,9	49,02	49,14	49,27	49,39	49,51	49,64	49,76	49,89	50,01	50,14
8,0	50,27	50,39	50,52	50,64	50,77	50,90	51,02	51,15	51,28	51,40
8,1	51,53	51,66	51,78	51,91	52,04	52,17	52,30	52,42	52,55	52,68
8,2	52,81	52,94	53,07	53,20	53,33	53,46	53,59	53,72	53,85	53,98
8,3	54,11	54,24	54,37	54,50	54,63	54,76	54,89	55,02	55,15	55,29
8,4	55,42	55,55	55,68	55,81	55,95	56,08	56,21	56,35	56,48	56,61
8,5	56,75	56,88	57,01	57,15	57,28	57,41	57,55	57,68	57,82	57,95
8,6	58,09	58,22	58,36	58,49	58,63	58,77	58,90	59,04	59,17	59,31
8,7	59,45	59,58	59,72	59,86	59,99	60,13	60,27	60,41	60,55	60,68
8,8	60,82	60,96	61,10	61,24	61,38	61,51	61,65	61,79	61,93	62,07
8,9	62,21	62,35	62,49	62,63	62,77	62,91	63,05	63,19	63,33	63,48
9,0	63,62	63,76	63,90	64,04	64,18	64,33	64,47	64,61	64,75	64,90
9,1	65,04	65,18	65,33	65,47	65,61	65,76	65,90	66,04	66,19	66,33
9,2	66,48	66,62	66,77	66,91	67,06	67,20	67,35	67,49	67,64	67,78
9,3	67,93	68,08	68,22	68,37	68,51	68,66	68,81	68,96	69,10	69,25
9,4	69,40	69,55	69,69	69,84	69,99	70,14	70,29	70,44	70,58	70,73
9,5	70,88	71,03	71,18	71,33	71,48	71,63	71,78	71,93	72,08	72,23
9,6	72,38	72,53	72,68	72,84	72,99	73,14	73,29	73,44	73,59	73,75
9,7	73,90	74,05	74,20	74,36	74,51	74,66	74,82	74,97	75,12	75,28
9,8	75,43	75,58	75,74	75,89	76,05	76,20	76,36	76,51	76,67	76,82
9,9	76,98	77,13	77,29	77,44	77,60	77,76	77,91	78,07	78,23	78,38
10,0	78,54									

SISUKORD.

1. Kordamiseks. 3
2. Algebraline murd. 10
Üksliikmete suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne 10
Algebralise murru mõiste 13
Murru põhiomadus 14
Murru taandamine 15
Murdude teisendamine ühenimelisteks 17
Murdude liitmine ja lahutamine 19
Murdude korrutamine 26
Murru astendamine 29
Murdude jagamine 30
Kordamiseks 34

3. Hulkliikmete lahutamine tegureiks. 37
Hulkliikmete tegureiks lahutamine ühise teguri sulgude ette toomisega . 37
Hulkliikmete tegureiks lahutamine valemite kasutamisega 40
Hulkliikmete tegureiks lahutamine liikmete rühmitamise võttega . . . 43
Hulkliikmete tegureiks lahutamine mitme võttega 45
Hulkliikmete suurima ühisteguri leidmine 46
Hulkliikmete väiksema ühiskordse leidmine 47
Hulkliikmeliste liikmetega murrud 48
Murru taandamine 48
Murru laiendamine 50
Murdude teisendamine ühenimelisteks 51
Murdude liitmine ja lahutamine 52
Murdude korrutamine 55
Murdude jagamine 57
Kõik tehted murdudega 58
Kordamiseks 61

4. Sirgete lõikumine ja paralleelsus. 65
Matemaatilised laused 65
Teoreemi koostis 67
Järeldamisharjutusi 69
Kõrvunurgad 70
Võrrand 71
Tippnurgad 72

Kahe sirge lõikamine sirgega 73
Kahe sirge paralleelsus 74
Kahe paralleelse sirge lõikamine sirgega 78
Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad 79
Vastavalt ristuvate haaradega nurgad 80
Kordamiseks 81

5. Kolmnurkade ja nelinurkade tähtsamad omadused 83
Kolmnurga nurkade summa 83
Kumer hulknurk 84
Kumera hulknurga nurkade summa 86
Kolmnurga kahe külje summa ja vahe võrdlemine kolmanda küljega . 87
Kolmnurga külgede ja nurkade vahelised seosed 89
Rööpküliku omadused 91
Rööpküliku tunnused 94
Rööpküliku eriliigid 96
Ristküliku omadused 97
Rombi omadused 98
Ruudu omadused 101
Trapets 102
Kolmnurga kesklõik. Trapetsi kesklõik 104
Kolmnurga mediaanide lõikumine 108
Kordamiseks 109

6. Tehted ligikaudsete arvudega 111
Arvude ümardamine ja sellest tekkiv viga 111
Arvu alamtõke ja ülemtõke 113
Täpsed ja ligikaudsed arvud 115
Ligikaudsete arvude liitmine 116
Ligikaudsete arvude lahutamine 121
Ligikaudsete arvude korrutamine 124
Ligikaudsete arvude jagamine 130
Ülesandeid 134
Kordamiseks 138

7. Ringjoon. Silinder. Koonus. Kera. 140
Kõõluga ristuv diameeter 140
Kolmnurga ümberringjoon 142
Kolmnurga kõrguste lõikumine 144
Punkti ja ringjoone vastastikune asend 145
Sirge ja ringjoone vastastikune asend 146
Piirdenurk 150
Kolmnurga siseringjoon 157
Korrapärane puutujahulknurk 159
Ringjoone pikkus 161
Ringi pindala 169
Silinder 173
Silindri pinnalaotus ja pindala 177
Silindri ruumala 179

Koonus 182
Koonuse pinnalaotus 183
Koonuse pindala 184
Koonuse ruumala 186
Kera 189
Kera pindala 193
Kera ruumala 195

8. Ühe tundmatuga lineaarsed võrrandid 200
Samasus 200
Võrrandi lahendid 203
Võrrandi põhiomadused 204
Võrrandite liike 208
Lineaarsete võrrandite koostamine ja lahendamine 210
Võrrandid, mis sisaldavad tundmatut murru nimetajas 216
Täheliste kordajatega võrrandid 223
Ülesannete lahendamine võrrandi abil 225

9. Suuruste sõltuvuse graafiline kujutamine 231
Asukoha määramise ülesandeid 231
Tasapinna punkti koordinaadid 233
Ülesandeid koordinaatide kasutamise kohta 235
Suuruste muutumise graafiline kujutamine 237
Võrdeline sõltuvus 241
Võrdelise sõltuvuse graafik 243
Lineaarne sõltuvus 249
Lineaarse sõltuvuse graafik 251
Pöördvõrdeline sõltuvus 254
Pöördvõrdelise sõltuvuse graafik 256

10. Kahe tundmatuga lineaarsed võrrandisüsteemid 259
Kahe tundmatuga võrrandi lahendi mõiste 259
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafik 263
Kahe tundmatuga lineaarne võrrandisüsteem 266
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi graafiline lahendamine . . 267
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendite arv 270
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine liitmisvõttega . 272
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine asendusvõttega 275
Ülesannete lahendamine võrrandisüsteemi abil 280

11. Üldiseks kordamiseks 286
Tabel ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu *d* vahelise sõltuvuse kohta . . . 293
Tabel ringi pindala ja läbimõõdu *d* vahelise sõltuvuse kohta 295

Этверк Элмар Германович
Линц Алфред Юханович
Вихман Арнольд Юрьевич
МАТЕМАТИКА ДЛЯ VII КЛ.
На эстонском языке
Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja K. Kallaste
Tehniline toimetaja I. Vahtre
Korrektorid E. Kask ja H. Nassar

Ladumisele antud 7. VI 1960. Trükkimisele antud 29. VII 1960. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 18.75. Arvutuspoognaid 14,19. Trükiarv 13 000. Tellimise nr. 5921. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. I.

Hind rbl. 2.60 (26 kop.)

6—6

Rbl. 2.60
1961. a. — 26 kop.