

## Elektron relativistliku elektrodünaamika vaatenurgast

Näide arvuti kasutamisest teoreetilises füüsikas

Ülo Uder

III osa

### Sissejuhatus

II osas kasutasime Besseli funktsioonidest  $J_0$  ja  $J_1$  koosnevat rida I osas toodud diferentsiaalvõrrandite lahendamisel. Saime suhteliselt paremaid tulemusi kui I osas kasutatud Fourier ridadega. Ettekandes 15. veebruaril 2022 TÜ teoreetilise füüsika labori seminaril sai mainitud matemaatikast tuntud meetodit käsitletud tüüpi diferentsiaalvõrrandite lahendamisel. Kirjutatakse võrrandi andmetest lähtuvad karakteristikud võrrandid, lahendatakse need, saadakse lahendruumis nn karakteristikud jooned. Mööda neid jooni integraale võrrandi vabast liikmest arvatades saadaksegi lahendid. Seda on võimalik teha juhul, kui osatuletistega diferentsiaalvõrrandi tuletiste kordajad ja vaba liige on antud teadaolevate funktsioonidega. Võis küll arvutada vabd liikmed aga osatuletiste kordajad olid samuti otsitavad. Neid oleks võinud ka ette võtta mingite mudelite järgi, mida sai ka proovitud. Kuid karakteristiklike joonte saamine ja nende järgi lahendilähendi leidmine osutus liialt ligikaudseks ja arvutusaega nõudvaks, mistõttu sai kõrvale jäetud. Nüüd, kui II osas saadi suhteliselt paremad lahendid kiiruste jaoks, on sama täpselt teada ka dif-võrrandi osatuletiste kordajad. Seetõttu tekkis mõte proovida ka lahendusmeetodit karakteristiklike võrrandite kasutamisega. Ka oleks see varem saadud lahendite kontrollimiseks kasutatav.

Meetodi lühikirjeldust võib leida käsiraamatu G. Korn ja T. Korn Mathematical Handbook 1974. aastal väljaantud venekeelse tõlke lk 301. Palju üksikasjalikumat esitust võib leida üliõpilastele mõeldud väljaandest

The Notebook Series. First order partial differential equations by R. S. Johnson, Professor of Applied Mathematics. School of Mathematics & Statistics. University of Newcastle upon Tyne 2010.

Enne seda esitame veel kolmanda samade dif-võrrandite lahendamise, mis erineb II osas esitatust **nelja** asja poolest. **Jõtame ära** II osas kasutatud kiiruskomponentide ja jaotusfunktsioonide **laiendamise**, mis sai ette võetud lootuses vähendada välja äärtel tekkivaid lahendusvigu funktsionaalridade kasutamisel, kui ei ole võimalik kasutada küllalt pikki ridu. Järgnev proovimine näitas, et Besseli funktsioonide  $J_0$  ja  $J_1$  baasil koostatud rida annab peaaegu sama hea lähenduse laiendamata välja puhul, kuigi "eksperimentaalpunktide" arvu vähenemine piirab enam kasutatava rea pikkust. **Teiseks**, tekkis idee ümber kirjutada väljatugevuste integraalsummade arvutamise programm. Autori kasutuses olev lau arvuti kiirus võimaldas endise programmiga leida väljatugevused  $17 \times 17 \times 17$  punktis 117 minutiga. Uus võimaldab sama teha 9 minutiga. Eelmine arvestas ebapiisavalt seda aja kokkuhoidmise põhimõtet, et peab viima miinimumini samade arvude korduva arvutamise, mis põhimõtteliselt programmi töö käigus ei muutu. Aja võit on 13 kordne. **Kolmandaks**, kogemused kahe eelneva arvutusega andis võimaluse valida **parema algmudeli** varem kasutatud tasapinnaliste kiiruskomponentide ja ühtlase jaotusfunktsiooniga mudeli asemele. **Neljandaks**, sama kogemus nõudis ka üldlahenditele esitatavate "ääretingimuste" modifitseerimise. Neidki esitan jutumärkides, sest nad on poolikud – näiteks ei räägi midagi lahendite märkidest, kus nad peaks olema positiivsed, kus negatiivsed. Põhjuseks on see, et hälvetesumma ei olene hälbe märgist – arvutatakse ruutude summana. See tekitab vajaduse saadud lahendeid **parandada**, mida põhjendame füüsikaliste arusaamdega,

Alustamegi kahe viimasega, ääretingimuste loomisest ja nende abil algmudeli kirjutamisest.

## 1. Äretingimused ja algmudel

Äretingimusi on 4 – kolm kiiruse komponentidele ja üks laengu jaotusfunktsioonile. Nende abil esitame algmudeli kiirused ja jaotuse, mille oleme nimetanud solenoidaalseks.

Alustame programmi algusosaga, mis määrab silindrilises vaateväljas kasutatavad koordinaadid ja nende väärtuste piirid. Silindriline vaateväli sama läbimõõdu ja pikkusega  $\rho 1m$  jaotatakse 2 punktidesüsteemiks nimega **integreerimispunktid** ja **vaatluspunktid**, kus ühed asuvad teiste vahel, et vältida singulaarsuste tekkimist jagamisel punktidevahelise kaugusega integraalsummades, mis arvutavad väljatugevusi. Mõõtmel on võetud angströmid ja arvutused tehakse Gaussi süsteemis.  $kr$  on sellest tulenev konstant integraalavaldistes. Hilisemates arvutustes kasutatakse  $10^4$  korda suuremaid koordinaate  $r$  ja  $z$ .

Integreerimispunktide arv ( $im+2 \times im+2 \times im/2+2$ ) ja koordinaadid ( $iv$  peab olema paarisarv):

$$iv := 16 \quad n := 2 \quad im := n \cdot iv \quad im = 32 \quad \rho 10 := 0 \quad \rho 1m := 1.60985653409092 \times 10^{-4}$$

$$\Delta \rho 1 := \frac{\rho 1m - \rho 10}{im + 1} \quad \Delta \varphi 1 := \frac{2 \cdot \pi}{im + 1} \quad \zeta 1m := 2 \cdot \rho 1m \quad \Delta \zeta 1 := \frac{\zeta 1m}{im + 1} \quad km := im \quad i := 0..im + 1$$

$$\rho 1_i := \rho 10 + \Delta \rho 1 \cdot i \quad j := 0..im + 1 \quad \varphi 1_j := \Delta \varphi 1 \cdot j \quad k := 0..km + 1 \quad \zeta 1_k := \Delta \zeta 1 \cdot k - \frac{\zeta 1m}{2}$$

Vaatluspunktide arv ( $iv+1 \times iv+1 \times iv+1$ ) ja koordinaadid:  $i := 0..iv \quad v := 0..iv \quad \kappa := 0..iv$

$$\Delta \rho := n \cdot \Delta \rho 1 \quad \Delta \varphi := n \cdot \Delta \varphi 1 \quad \Delta \zeta := n \cdot \Delta \zeta 1 \quad \rho 1_i := \rho 10 + \frac{\Delta \rho 1}{2} + \Delta \rho \cdot i \quad ka := 17..33$$

$$\varphi 1_v := \frac{\Delta \varphi 1}{2} + \Delta \varphi \cdot v \quad \zeta 1_\kappa := \frac{\Delta \zeta 1}{2} + \Delta \zeta \cdot \kappa - \frac{\zeta 1m}{2} \quad kr := 3.54875670306443 \times 10^{12}$$

$$R(\rho, \varphi, \zeta, \rho 1, \varphi 1, \zeta 1) := \sqrt{\rho^2 - 2 \cdot \rho \cdot \rho 1 \cdot \cos(\varphi - \varphi 1) + \rho 1^2 + (\zeta - \zeta 1)^2} \quad r_i := \rho 1_i \cdot 10^4 \quad z_k := \zeta 1_k \cdot 10^4$$

Võtame paaritute astmetega astmerea, mis poolel vaateväljal ( $z < 0$ ) rahuldaks  $z$ -suunal tingimusi:

$$A(z) = a \cdot z^5 + b \cdot z^3 + c \cdot z \quad a \cdot (z_0)^5 + b \cdot (z_0)^3 + c \cdot z_0 = 0 \quad a \cdot (z_8)^5 + b \cdot (z_8)^3 + c \cdot z_8 = -1$$

$$A'(z) = a \cdot 5 \cdot z^4 + b \cdot 3 \cdot z^2 + c \quad a \cdot 5 \cdot (z_8)^4 + b \cdot 3 \cdot (z_8)^2 + c = 0$$

$$M := \begin{bmatrix} (z_0)^5 & (z_0)^3 & z_0 \\ (z_8)^5 & (z_8)^3 & z_8 \\ 5 \cdot (z_8)^4 & 3 \cdot (z_8)^2 & 1 \end{bmatrix} \quad D := |M| \quad M1 := \begin{bmatrix} 0 & (z_0)^3 & z_0 \\ -1 & (z_8)^3 & z_8 \\ 0 & 3 \cdot (z_8)^2 & 1 \end{bmatrix} \quad D1 := |M1| \quad a := \frac{D1}{D}$$

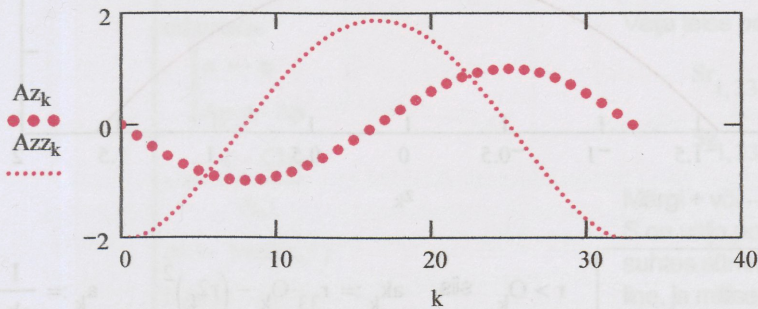
$$M2 := \begin{bmatrix} (z_0)^5 & 0 & z_0 \\ (z_8)^5 & -1 & z_8 \\ 5 \cdot (z_8)^4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D2 := |M2| \quad M3 := \begin{bmatrix} (z_0)^5 & (z_0)^3 & 0 \\ (z_8)^5 & (z_8)^3 & -1 \\ 5 \cdot (z_8)^4 & 3 \cdot (z_8)^2 & 0 \end{bmatrix} \quad D3 := |M3| \quad b := \frac{D2}{D}$$

$$c := \frac{D3}{D} \quad \kappa := 0..16 \quad Az_\kappa := a \cdot (z_\kappa)^5 + b \cdot (z_\kappa)^3 + c \cdot z_\kappa \quad Az_{33-\kappa} := -Az_\kappa$$

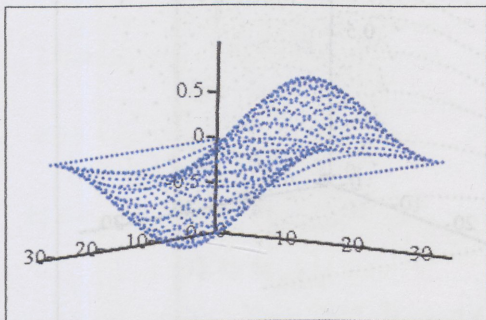
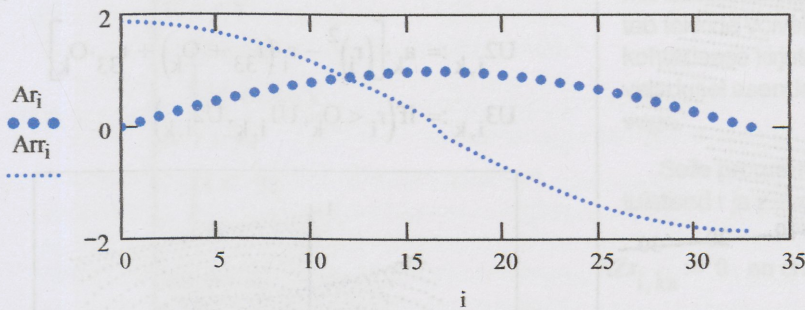
$$i := 0..16 \quad Ar_i := a \cdot (r_i)^5 + b \cdot (r_i)^3 + c \cdot r_i \quad Ar_{33-i} := Ar_i \quad AR_{i,k} := Ar_i \cdot Az_k$$

$$AR \text{ osatuletised } r \text{ ja } z \text{ järgi: } Arr_i := a \cdot 5 \cdot (r_i)^4 + b \cdot 3 \cdot (r_i)^2 + c \quad Arr_{33-i} := -Arr_i$$

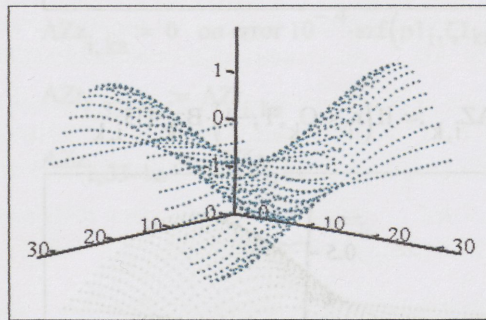
$$AZZ_k := a \cdot 5 \cdot (z_k)^4 + b \cdot 3 \cdot (z_k)^2 + c \quad AZZ_{33-k} := AZZ_k \quad ARr_{i,k} := Arr_i \cdot Az_k \quad ARz_{i,k} := Ar_i \cdot AZZ_k$$



Need on ääretingimused radiaalsele kiiruse komponendile vp.



AR



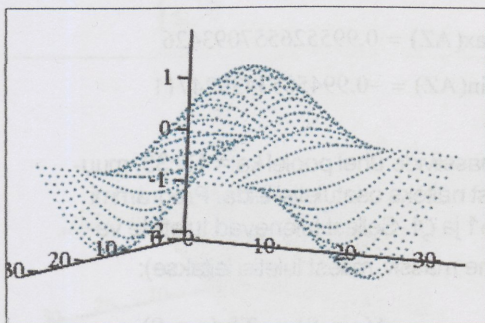
ARr

Teisiti leiame ääretingimused AZ kiiruse z-suunalisele komponendile vz.

$$r1 := 0.5 \cdot (r_{16} + r_{17})$$

$$O_k := -0.5 \cdot r1 \cdot \left( \frac{z_k}{z_0} \right)^2 + r1 \quad r2_k := 0.5 \cdot (r_{33} + O_k)$$

$$Bz_k := Ar_k \quad Cz_{i,k} := \text{if}(r_i < O_k, 1, -1) \cdot Bz_k$$

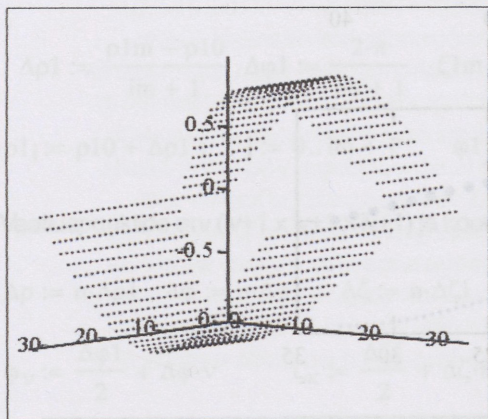
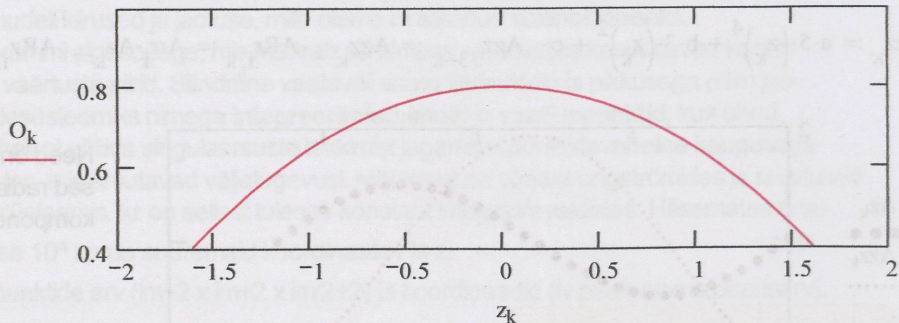


ARz

$$\text{siis } Ul_{i,k} := \frac{O_k - r_i}{O_k} \cdot \left( 1 + \frac{r_i}{O_k} \right)$$

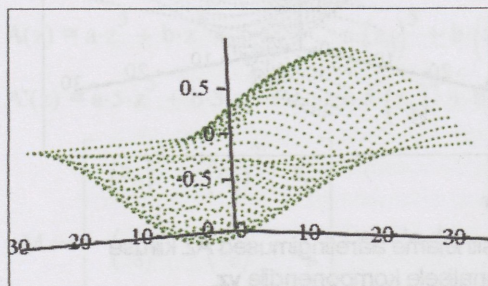
On paraboolne joon, mis algudel jooks

määrab vz jaoks koha, kus see muudab märki r suunas liikumisel ( kohal  $r_i = O_k$ ). Seda edaspidi muudetakse programmis, kui on saadud uus väärtus vzu, määrates märgimuutuse koha vzu-s. See nõuab ka sealAZ, AZr ja AZz uut määramist.



Cz

$$AZ_{i,k} := \text{if}(r_i < O_k, 1, -1) \cdot Bz_k \cdot U3_{i,k}$$

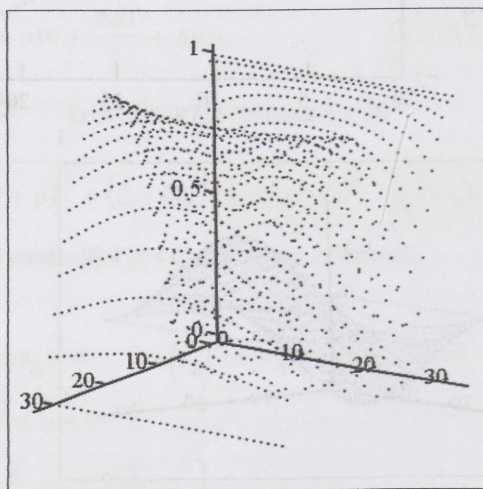


AZ

$$r > O_k \text{ siis } ak_k := r_{33} \cdot O_k - (r_{2k})^2 \quad a_k := \frac{1}{ak_k}$$

$$U2_{i,k} := a_k \cdot \left[ (r_i)^2 - r_i \cdot (r_{33} + O_k) + r_{33} \cdot O_k \right]$$

$$U3_{i,k} := \text{if}(r_i < O_k, U1_{i,k}, U2_{i,k})$$



U3

$$\max(AZ) = 0.995526557093426$$

$$\min(AZ) = -0.994585343924711$$

Järgmine programm Tfu() töötab 34x34 mõõtmeliste massiivide ühel poolel ka = 17..33, muutes need pidevateks funktsioonideks. See võimaldab neist näiteks osatuletisi leida. Programmi sisendis olevad r ja z tähendavad tegelikult koordinaate  $\rho_1$  ja  $\zeta_1$ . Sellest tulenevad tuletiste valemites arvud  $10^{-4}$ . See toimub järgmiselt (S on konkreetne massiv, millest tuletisi leitakse):

$$Tfu(r, z, m) := \begin{cases} s \leftarrow \frac{r}{\Delta\rho_1} \\ \Delta p \leftarrow \text{mod}(s, 1) \\ p \leftarrow s - \Delta p \end{cases}$$

$$sf(r, z, S) := Tfu(r, z, S)$$

$$srf(r, z, S) := \frac{d}{dr} sf(r, z, S)$$

```

if p < 0
  | p ← 0
  | Δp ← s
if p > 32
  | p ← 32
  | Δp ← s - p
otherwise
  | p ← p
  | Δp ← Δp
  s ←  $\frac{z - \zeta_{10}}{\Delta\zeta_1}$ 
Δl ← mod(s, 1)
l ← s - Δl
if l < 17
  | l ← 17
  | Δl ← s - l
if l > 32
  | l ← 32
  | Δl ← s - l
otherwise
  | l ← l
  | Δl ← Δl
f0 ← mp,1
f1 ← mp+1,1
f2 ← mp+1,l+1
f3 ← mp,l+1
fx ← [f0 + (f1 - f0)·Δp]·(1 - Δl)
fx ← fx + [f3 + (f2 - f3)·Δp]·Δl
fx

```

$$szf(r, z, S) := \frac{d}{dz} sf(r, z, S)$$

$$Sr_{i,ka} := 0 \text{ on error } 10^{-4} \cdot srf(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, S)$$

$$Sz_{i,ka} := 0 \text{ on error } 10^{-4} \cdot szf(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, S)$$

Välja teise poole võib täita valemitega

$$Sr_{i,33-ka} := Sr_{i,ka}$$

$$Sz_{i,33-ka} := -Sz_{i,ka}$$

Märgi + või - valik oleneb sellest, kas S on välja pooli lahutava tasandi  $z = 0$  suhtes sümmeetriline või assümmeetriline, ja millise sümmeetriaga peaks olema leitud osatuletised. "on error" välis- tab tekkida võivaid tõrkeid. Nendes- se kohtadesse kirjutatakse 0. Nulli võib vajadusel asendada ka mõne muu ar- vuga.

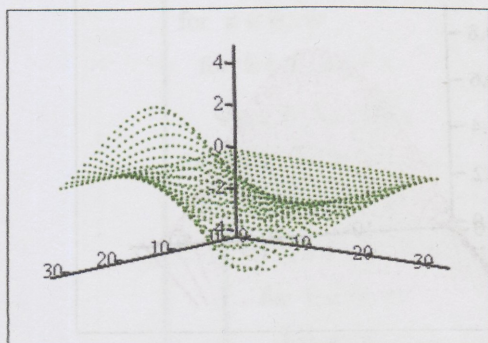
Selle programmiga saame leida AZ tuletised r ja z järgi:

$$AZr_{i,ka} := 0 \text{ on error } 10^{-4} \cdot srf(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, AZ)$$

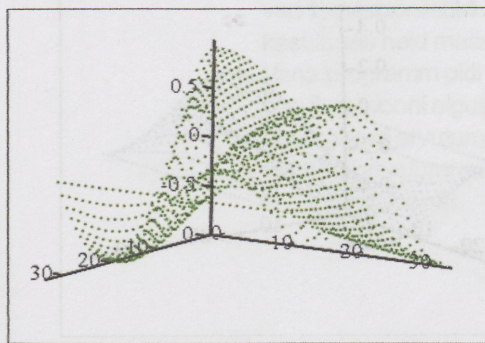
$$AZz_{i,ka} := 0 \text{ on error } 10^{-4} \cdot szf(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, AZ)$$

$$AZr_{i,33-ka} := AZr_{i,ka}$$

$$AZz_{i,33-ka} := -AZz_{i,ka}$$



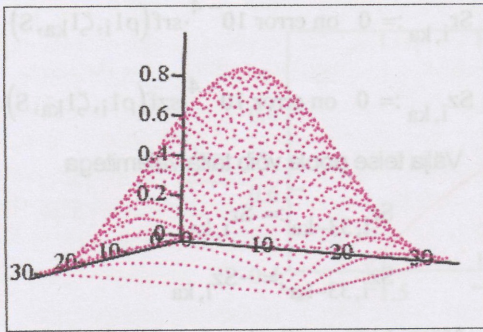
AZr



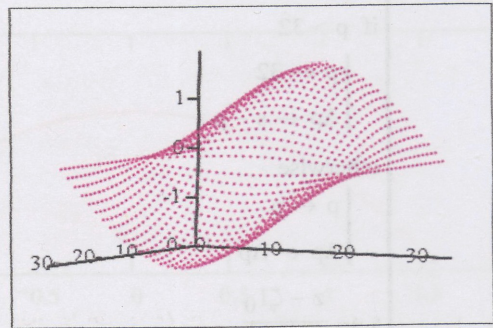
AZz

AR juures saadud avaldistega saame teha ka AJ ehk kiiruskomponendi  $v\varphi$  ääritingimused.

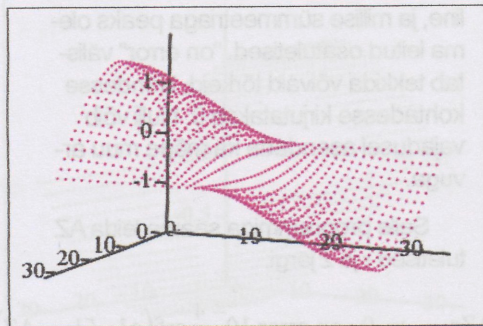
$AJ_{i,k} := Ar_i \cdot Bz_k$  Ka osatuletised:  $Bzz_k := Arr_k$   $AJr_{i,k} := Arr_i \cdot Bz_k$   $AJz_{i,k} := Ar_i \cdot Bzz_k$



AJ



AJr



AJz

Samade seostega saame tuletada ka solenoidaalse algmudeli kiiruskomponendid ja laengu jaotusfunktsiooni. Seejuures võtame kiiruse  $v\varphi$  maksimumi relativistlikust piirist 1 mõnevõrra madalama 0.9,  $v\varphi$  maksimumi 0.5 suuruse ja  $vza$  temast 2x väiksema 0.25 (see kõik varem kogemuse põhjal).

Algmudeli jaotusfunktsiooni  $\tau_a$  kirjutame põhimõttel, et laengut on seal rohkem, kus kiirus on väiksem. Sellisel juhul on laengu tihedus kõige suurem välispiiril. Kiirustele rakendatud ääritingimused muudavad kiiruse seal 0-ks.

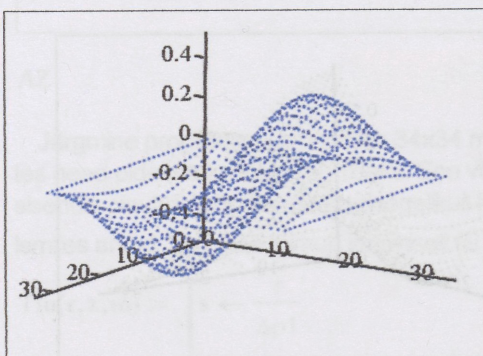
$v\varphi_a := AR$	$mx := \max(AR)$	$mx = 0.995526557093426$	$v\varphi_a := \frac{0.5}{mx} \cdot AR$	$\max(v\varphi_a) = 0.5$
$v\varphi_a := AJ$	$mx := \max(AJ)$	$mx = 0.99107312587829$	$v\varphi_a := \frac{0.9}{mx} \cdot AJ$	$\max(v\varphi_a) = 0.9$
$vza := AZ$	$mx := \max(AZ)$	$mx = 0.995526557093426$	$vza := \frac{0.25}{mx} \cdot AZ$	$\max(vza) = 0.25$

Kas moodul ei ületa relativistlikku piiri?

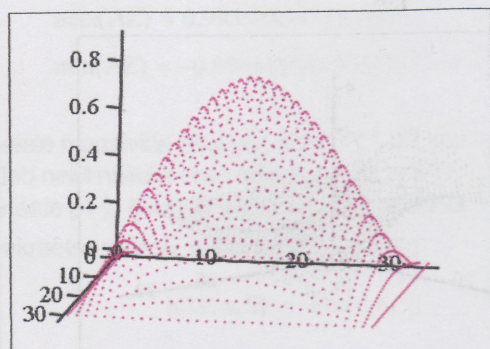
$\max(vma) = 0.901643637339743$

$$vma_{i,k} := \sqrt{(v\varphi_{a,i,k})^2 + (v\varphi_{i,k})^2 + (vza_{i,k})^2}$$

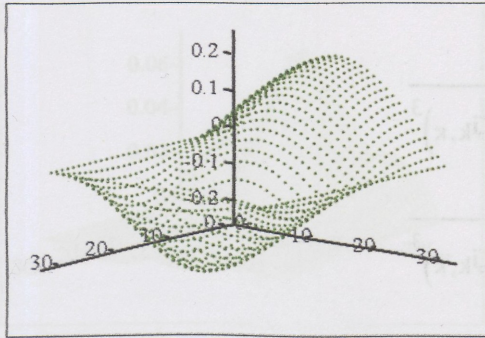
$$\tau_{a,i,k} := 0.9 - vma_{i,k}$$



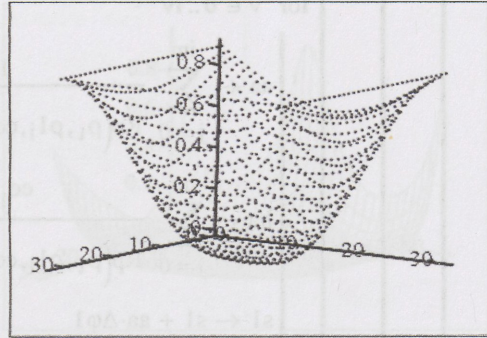
$v\varphi_a$



$v\varphi$



vza



taa

Kui programm on leidnud võrrandite lahendamisega uued kiiruskomponendid  $v_{\rho u}$ ,  $v_{\varphi u}$ ,  $v_{z u}$  ja jaotusfunktsiooni  $\tau_u$ , need salvestatakse failidesse ja loetakse siin üleval (kus toimub uute väärtuste sisestamine) endiste asemele. Algab järgmine "iteratsioon". Seda korratakse niikaua kui saadud tulemused jäävad praktiliselt muutumatuks.

$\tau_{aa}$  vajab normeerimist. Seda saab teha mõni lehekülj allpool esitatud programmiga ja siia algusse (punkti 3) tuua. Iteratsiooni lõpust üles toodav  $\tau_u$  normeeritakse seal lõpus. Üksikut arvu  $A_{\tau}$  saab käsitsi üles tuua copy-paste meetodil.

## 2. Väljatugevuste arvutamise programmi see osa, mis ei olene laengu kiirusest ja laengujaotusest

Programm arvutab kaks arvumassiivi A ja B, mis ei muutu järkjärgulise lähendamise protsessis dif-võrranditele lahendite otsimisel. Programm arvestab valitud arvutuse omapära, et lahendid ei olene nurgakoordinaatidest  $\varphi$  ja  $\varphi_1$ , st kogu laengusüsteem on telgsümmeetriline. Nendest koordinaatidest sõltuvaid tegureid integreeritavates avaldistes keskmistatakse üle väärtustevahemiku  $0..2\pi$ . Telg on koordinaattelg z (algused koordinaadid  $\zeta$  ja  $\zeta_1$ ) silindrilises teljestikus. A ja B on neljamõõtmelised massiivid, indeksitega i, k,  $\iota$  ja  $\kappa$  (kaks viimast kreeka tähed). Mathcad tunnistab kuju (ainult programmides, töölehel mitte):

$(A_{i,k})_{\iota,\kappa}$  Esialgu anname punktidevahelisele kaugusele  $R()$  teistsuguse kuju. Kui  $co = \cos(\varphi - \varphi_1)$   $\zeta_i = \zeta - \zeta_1$  on programmis arvatavad kaheindeksilised suurused, siis:

$$Rp(\rho, \rho_1, co, \zeta_i) := \sqrt{\rho^2 - 2 \cdot \rho \cdot \rho_1 \cdot co + \rho_1^2 + \zeta_i^2}$$

Edasist selgitust loe punktist 4.

```

S0 := | for j ∈ 0..im
      |   for v ∈ 0..iv
      |     coj,v ← cos(φv - φ1j)
      |   for κ ∈ 0..iv
      |     for k ∈ 0..im + 1
      |       ζi,k,κ ← ζk - ζ1k
      |   for i ∈ 0..im + 1
      |     for k ∈ 0..im + 1
      |       for ι ∈ 0..iv
      |         for κ ∈ 0..iv
      |           s1 ← 0
      |           s2 ← 0

```

$$A := S0_0 \quad B := S0_1$$

Väljatugevusi arvutava programmi järgnevad osad asuvad iteratsioonitsükli sees, kasutades neid massiive. Vana programm pidi iga uue iteratsiooni alguses need uuesti arvutama, mis võttis kõige suurema aja kogu iteratsioonist.

```

for v ∈ 0..iv
  aa ← ∑j=0im  $\frac{1}{Rp(\rho_l, \rho_{1i}, co_{j,v}, \zeta_{ik}, \kappa)^3}$ 
  ba ← ∑j=0im  $\frac{co_{j,v}}{Rp(\rho_l, \rho_{1i}, co_{j,v}, \zeta_{ik}, \kappa)^3}$ 
  s1 ← s1 + aa·Δφ1
  s2 ← s2 + ba·Δφ1
  Aat,κ ←  $\frac{1}{iv+1} \cdot s1$ 
  Bat,κ ←  $\frac{1}{iv+1} \cdot s2$ 
  Ai,k ← Aa
  Bi,k ← Ba
vä0 ← A
vä1 ← B
vä

```

### 3. Iteratsiooniprotsess algab siit

Esimesel tsükliil, nummerdame selle 500-ga, sisestatakse algmudeli andmed:

$$v\varphi = v\varphi_a \quad v\varphi = v\varphi_a \quad v_z = v_z_a \quad \tau_a = \tau_{aa} \quad A\tau = 8.16907704373994 \times 10^{34}$$

Järgmistel tsükliitel loetakse need failidest, kuhu uued salvestati eelmise tsükli lõpus. Ar tuuakse üles copy-paste meetodil. Programmi väljatrükkis on näha viimane iteratsioon 517.

v $\varphi$  :=

 C:\..\lvru517


v $\varphi$  :=

 C:\..\lvju517

v $z$  :=

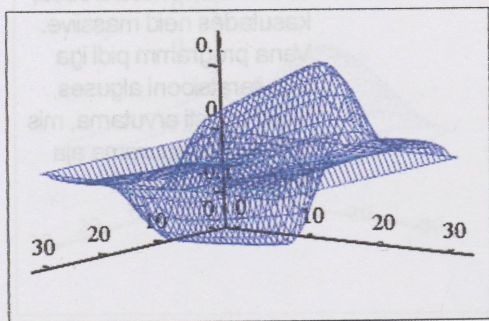
 C:\..\lvzu517

$\tau_a$  :=

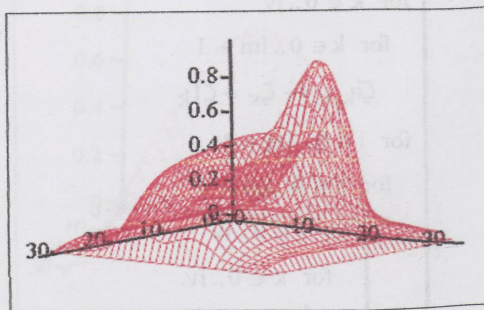
 C:\..\ltu517

$$A\tau := 5.12259316663844 \times 10^{35}$$

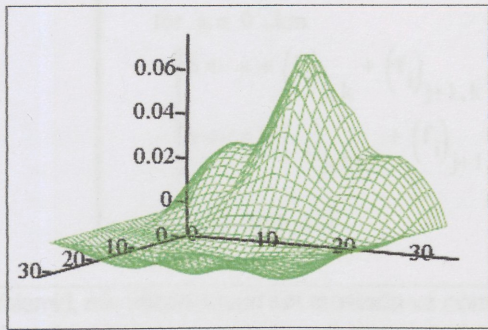
$\varphi$  joonisel on  $\varphi$  teelg suunatud alla. Kui  $v\varphi$  näib siin negatiivne, siis on tal r,  $\varphi$ , z koordiaadistikus positiivne väärtus. Siin näitame siiski ainult arväärtust.



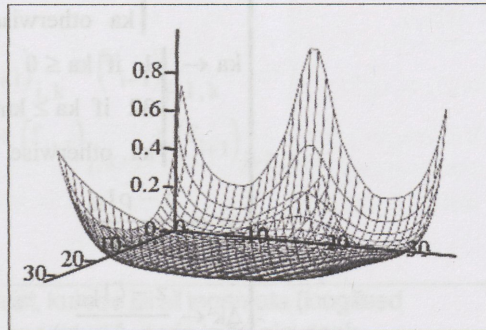
v $\varphi$



v $\varphi$



vz



tau

Siin on kirjas normeerimiskonstandi  $A\tau$  muutumine tsüklite 500..517 jooksul.

500.	$8.16907704373994 \times 10^{34}$	509.	$3.05556137881296 \times 10^{35}$
501.	$1.28253273978656 \times 10^{35}$	510.	$3.52778472032995 \times 10^{35}$
502.	$1.97967735593606 \times 10^{35}$	511.	$3.5286909493908 \times 10^{35}$
503.	$2.73032860064488 \times 10^{35}$	512.	$3.94027935710498 \times 10^{35}$
504.	$2.85992536811034 \times 10^{35}$	513.	$4.14317267462174 \times 10^{35}$
505.	$2.81328979469237 \times 10^{35}$	514.	$4.55795026112716 \times 10^{35}$
506.	$2.87213700907272 \times 10^{35}$	515.	$5.15200171061452 \times 10^{35}$
507.	$2.6958640173986 \times 10^{35}$	516.	$5.60921791539232 \times 10^{35}$
508.	$2.70960276278728 \times 10^{35}$	517.	$5.12259316663844 \times 10^{35}$

Nendele vastavaid  $v\rho$ ,  $v\varphi$ ,  $vz$  ja  $\tau a$  väärtusi vaata Lisast.

Väljatugevuste arvutamisel kasutame arvumassiivide "m" pidevaks funktsiooniks muutmise programmi:

```
Gfu(r, z, m, im, km) :=
  r1 ← ρ1
  r1im+1 ← r1im + Δρ1
  r1im+2 ← r1im+1 + Δρ1
  ia ← -1
  for i ∈ 0..im + 1
    ia ← | i if r1i ≤ r < r1i+1
          | ia otherwise
  ia ← | 1 if ia ≤ 0
        | 32 if ia ≥ im + 1
        | ia otherwise
  z1 ← ζ1
  z1km+1 ← z1km + Δζ1
  z1km+2 ← z1km+1 + Δζ1
  ka ← -1
  for k ∈ 0..km + 1
    ka ← | k if z1k ≤ z < z1k+1
```

muudab massivi m, millel indeksid i ja k muutuvad 0..im ja 0..km piires pidevaks funktsiooniks. im on 32 ja km 32, mitte 33 ja 33.

**NB!** neid funktsioone peab hiljem uuesti defineerima kui on muudetud argumentides mitte näidatud konstante  $\rho1_0$ ,  $\Delta\rho1$ ,  $\zeta1_0$  ja  $\Delta\zeta1$  ning muidki.

Programmi võib näiteks kasutada osatuletise leidmisel massiviga m esitatavast funktsioonist punktis  $(\rho1_i, \zeta1_k)$ :

$$\frac{d}{d\rho1} Gfu(\rho1_i, \zeta1_k, m, im, km)$$

```

| ka otherwise
ka ← | 1 if ka ≤ 0
      | 32 if ka ≥ km + 1
      | ka otherwise
Δi ←  $\frac{r - \rho 1_{ia}}{\Delta \rho 1}$ 
Δk ←  $\frac{z - \zeta 1_{ka}}{\Delta \zeta 1}$ 
for κ ∈ 0..2
| f0 ← mia-1,ka-1+κ
| f1 ← mia,ka-1+κ
| f2 ← mia+1,ka-1+κ
| a ←  $\frac{f2 - 2 \cdot f1 + f0}{2}$ 
| b ←  $\frac{f2 - f0}{2} - 2 \cdot ia \cdot a$ 
| c ←  $\frac{f0 + f1 + f2}{3} - a \cdot \left( ia^2 + \frac{2}{3} \right) - b \cdot ia$ 
| hκ ← a · (ia + Δi)2 + b · (ia + Δi) + c
a ←  $\frac{h_2 - 2 \cdot h_1 + h_0}{2}$ 
b ←  $\frac{h_2 - h_0}{2} - 2 \cdot ka \cdot a$ 
c ←  $\frac{h_0 + h_1 + h_2}{3} - a \cdot \left( ka^2 + \frac{2}{3} \right) - b \cdot ka$ 
h ← a · (ka + Δk)2 + b · (ka + Δk) + c

```

Järgmine on tõenäosus-funktsiooni normeerimise programm, võimaldades vajadusel seda teha ka tsükli alguses. Sisseloetu τa on juba tsükli lõpus normeeritud.

```

Jnt(T) := | for i ∈ 0..im + 1
           | for j ∈ 0..im
           |   for k ∈ 0..km + 1
           |     flj,k ← Gfu(ρ1i, ζ1k, T, 32, 32) · ρ1i
           |   for k ∈ 0..km + 1
           |     flim+1,k ← fl0,k
           |   fi ← fl
           | s ← 0
           | for i ∈ 0..im
           |   for j ∈ 0..im

```

```

for k ∈ 0..km
  s ← s + (fi)j,k + (fi)j+1,k + (fi+1)j,k + (fi+1)j+1,k
  s ← s + (fi)j,k+1 + (fi)j+1,k+1 + (fi+1)j,k+1 + (fi+1)j+1,k+1
s ←  $\frac{s}{8} \cdot \Delta\rho_1 \cdot \Delta\varphi_1 \cdot \Delta\zeta_1$ 

```

Valemid, mis võimaldavad siin teostada  $\tau$ a normeerimist, kui see jäi all tegemata (loogilised võrdused = tuleb siis asendada omistamismärgiga := ja arvatud  $A_{\tau p}$  väärtus):

$$\tau = \text{Jnt}(\tau a) \quad A_{\tau p} = \frac{10^{24}}{\tau} \quad A_{\tau p} = \dots$$

#### 4. Veel mõningaid vajaminevaid sümmeetreerimise, silumise jt programme

```

Sü(M) := | m ← M
          | for i ∈ 0..33
          |   for k ∈ 0..16
          |     mi,k ←  $\frac{1}{2} \cdot (m_{i,k} + m_{i,33-k})$ 
          |     mi,33-k ← mi,k
          |   vä ← m
As(M) := | m ← M
          |   for i ∈ 0..33
          |     for k ∈ 0..16
          |       mi,k ←  $\frac{1}{2} \cdot (m_{i,k} - m_{i,33-k})$ 
          |       mi,33-k ← -mi,k
          |     vä ← m

```

Paraboolne ekstrapoolimise programmid kohale  $i = 0$  ja  $i = 33$ :

```

Ex(M) := | m ← M
          |   for k ∈ 0..33
          |     a ←  $3 \cdot (m_{1,k} - m_{2,k})$ 
          |     m0,k ← a + m3,k
          |   vä ← m

```

Ühemõõtmelise funktsiooni puhul või massiivis mõõda ühte rida või veergu silumise programm, koostatud Mathcadi programmi **loess** baasil:

```

Sm(f, x, μ, nm) := | for n ∈ 0..nm
                   |   wxn ← xn
                   |   wyn ← fn
                   |   bs ← loess(wx, wy, μ)
                   |   for n ∈ 0..nm
                   |     sfn ← interp(bs, wx, wy, xn)
                   |   sf

```

```

Ex1(M) := | m ← M
           |   for k ∈ 0..33
           |     a ←  $3 \cdot (m_{32,k} - m_{31,k})$ 
           |     m33,k ← a + m30,k
           |   vä ← m

```

$\mu = 0.25..1, 2, 3, \dots$

```

Smrv(m, μi, μk) := | for i ∈ 0..33
                   |   for k ∈ 0..33
                   |     vxk ← ζ1k
                   |     vyk ← mi,k
                   |     as ← loess(vx, vy, μk)
                   |   for k ∈ 0..33

```

Massiivi  $m$  silumine ridade ja veergude kaupa.  $\mu_i = 0.25..1, 2, 3, \dots$  veerus,  $\mu_k$  sama reas.



$$A(\rho, \varphi, \zeta, \rho1, \zeta1) = \sum_{j=0}^{im} \frac{1}{R(\rho, \varphi, \zeta, \rho1, \varphi1j, \zeta1)^3} \quad B(\rho, \varphi, \zeta, \rho1, \zeta1) = \sum_{j=0}^{im} \frac{\cos(\varphi - \varphi1j)}{R(\rho, \varphi, \zeta, \rho1, \varphi1j, \zeta1)^3}$$

Kuidas need olenevad  $\varphi$ -st? Kui kõik kasutatavad füüsikalised suurused ei olene nurgakoordi naatidest, ei peaks ka lõpptulemus – integraalide väärtused sellest olenema. Ligikaudsel arvutusel nad muidugi olenevad. St tuleks veel keskmistada üle kõikvõimalike  $\varphi$  väärtuste. Nii saame:

$$A(\rho, \zeta, \rho1, \zeta1) = \frac{1}{iv+1} \cdot \sum_{v=0}^{iv} \sum_{j=0}^{im} \frac{1}{R(\rho, \varphi_v, \zeta, \rho1, \varphi1j, \zeta1)^3}$$

$$B(\rho, \zeta, \rho1, \zeta1) = \frac{1}{iv+1} \cdot \sum_{v=0}^{iv} \sum_{j=0}^{im} \frac{\cos(\varphi_v - \varphi1j)}{R(\rho, \varphi_v, \zeta, \rho1, \varphi1j, \zeta1)^3}$$

Need ongi ülalpool tsüklite ees arvatud neljaindeksiliste massiividena A ja B ja ei nõua korduvat arvutamist.

Elektriväljatugevuse komponentide  $E_\rho$  ja  $E_z$  arvutusprogramm on ( $E_\varphi = 0$  valitud sümmeetria tõttu):

```

Se(A,B,ta) :=
  for i ∈ 0..im + 1
    for k ∈ 0..im + 1
      for v ∈ 0..iv
        for κ ∈ 0..iv
          α0 ← ρv · (Ai,k)v,κ - ρ1v · (Bi,k)v,κ
          epv,κ ← α0
          α1 ← (ζκ - ζ1κ) · (Ai,k)v,κ
          ezv,κ ← α1
          a0i,k ← ep
          a1i,k ← ez
        for v ∈ 0..iv
          for κ ∈ 0..iv
            for i ∈ 0..im + 1
              for k ∈ 0..im
                b0i,k ← τai,k · (a0i,k)v,κ + τai,k+1 · (a0i,k+1)v,κ
                b1i,k ← τai,k · (a1i,k)v,κ + τai,k+1 · (a1i,k+1)v,κ
              B0i ← ∑k=0im b0i,k
              B1i ← ∑k=0im b1i,k

```

$$\alpha_3 \leftarrow \sum_{i=0}^{im} (\rho_{1i} \cdot B_{0i} + \rho_{1i+1} \cdot B_{0i+1})$$

$$\alpha_4 \leftarrow \sum_{i=0}^{im} (\rho_{1i} \cdot B_{1i} + \rho_{1i+1} \cdot B_{1i+1})$$

$$E_{\rho_{1,\kappa}} \leftarrow \alpha_3$$

$$E_{z_{1,\kappa}} \leftarrow \alpha_4$$

$$\Delta S \leftarrow \frac{1}{4} \cdot \Delta \rho_1 \cdot \Delta \zeta_1$$

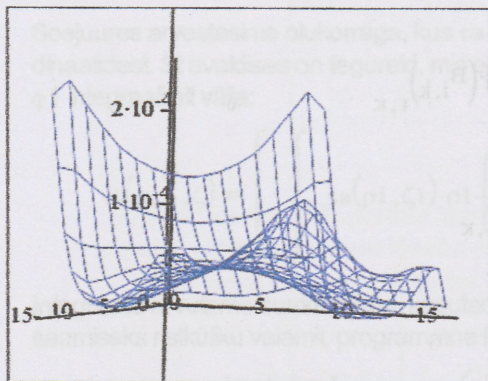
$$v_{\alpha_0} \leftarrow E_{\rho} \cdot \Delta S$$

$$v_{\alpha_1} \leftarrow E_z \cdot \Delta S$$

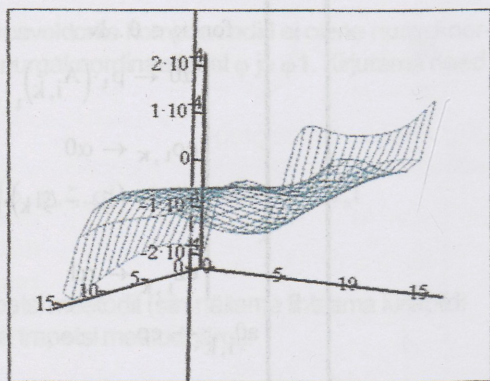
$$v_{\alpha}$$

Ülalõeldud nimetused on õiged positiivse laengusüsteemi puhul. Siin nad tähendavad tegelikult negatiivsele laenguühikule mõjuvat jõudu. Seda tuleks arvestada jooniste lugemisel suuruste märke hinnates.

$$se := Se(A, B, \tau_a) \quad E_{\rho k} := se_0 \quad E_{z k} := se_1$$



$E_{\rho k}$



$E_{z k}$

Mingisuguse asjaolu tõttu printer lisab mõnikord oma vertikaalse sirge, mida arvuti ekraanil ei leidu.

Järgnevalt arvutame magnetväljatugevuste komponendid  $H_{\rho}$ ,  $H_{\varphi}$  ja  $H_z$ .

$$Sh(A, B, v_{\rho}, v_{\varphi}, v_z, \tau_a) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..im + 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..im + 1 \\ \quad \quad \text{for } l \in 0..iv \\ \quad \quad \quad \text{for } \kappa \in 0..iv \\ \quad \quad \quad \quad \alpha_0 \leftarrow (\zeta_{\kappa} - \zeta_{l\kappa}) \cdot (B_{i,k})_{l,\kappa} \\ \quad \quad \quad \quad h_{\rho_{l,\kappa}} \leftarrow \alpha_0 \\ \quad \quad \quad \quad \alpha_1 \leftarrow \rho_{1i} \cdot (A_{i,k})_{l,\kappa} - \rho_{1i} \cdot (B_{i,k})_{l,\kappa} \\ \quad \quad \quad \quad h_{\varphi_{l,\kappa}} \leftarrow \alpha_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} h\varphi_{i,\kappa} \leftarrow \alpha_0 \\ \alpha_2 \leftarrow \rho_{i+1} \cdot (A_{i,\kappa})_{i,\kappa} - \rho_i \cdot (B_{i,\kappa})_{i,\kappa} \\ hz_{i,\kappa} \leftarrow \alpha_2 \end{cases}$$

$$a_{0,i,\kappa} \leftarrow h\rho$$

$$a_{1,i,\kappa} \leftarrow h\varphi_1$$

$$a_{2,i,\kappa} \leftarrow h\varphi_2$$

$$a_{3,i,\kappa} \leftarrow hz$$

for  $i \in 0..iv$

for  $\kappa \in 0..iv$

for  $i \in 0..im + 1$

for  $k \in 0..im$

$$b_{01,i,\kappa} \leftarrow \tau_{i,k} \cdot v\varphi_{i,k} \cdot (a_{0,i,\kappa})_{i,\kappa}$$

$$b_{0,i,\kappa} \leftarrow b_{01,i,\kappa} + \tau_{i,k+1} \cdot v\varphi_{i,k+1} \cdot (a_{0,i,k+1})_{i,\kappa}$$

$$b_{11,i,\kappa} \leftarrow \tau_{i,k} \cdot v\varphi_{i,k} \cdot (a_{1,i,\kappa})_{i,\kappa}$$

$$b_{1,i,\kappa} \leftarrow b_{11,i,\kappa} + \tau_{i,k+1} \cdot v\varphi_{i,k+1} \cdot (a_{1,i,k+1})_{i,\kappa}$$

$$b_{21,i,\kappa} \leftarrow \tau_{i,k} \cdot v\rho_{i,k} \cdot (a_{2,i,\kappa})_{i,\kappa}$$

$$b_{2,i,\kappa} \leftarrow b_{21,i,\kappa} + \tau_{i,k+1} \cdot v\rho_{i,k+1} \cdot (a_{2,i,k+1})_{i,\kappa}$$

$$b_{31,i,\kappa} \leftarrow \tau_{i,k} \cdot v\varphi_{i,k} \cdot (a_{3,i,\kappa})_{i,\kappa}$$

$$b_{3,i,\kappa} \leftarrow b_{31,i,\kappa} + \tau_{i,k+1} \cdot v\varphi_{i,k+1} \cdot (a_{3,i,k+1})_{i,\kappa}$$

$$B_{0,i} \leftarrow \sum_{k=0}^{im} b_{0,i,k}$$

$$B_{1,i} \leftarrow \sum_{k=0}^{im} b_{1,i,k}$$

$$B_{2,i} \leftarrow \sum_{k=0}^{im} b_{2,i,k}$$

$$B_{3,i} \leftarrow \sum_{k=0}^{im} b_{3,i,k}$$

$$\alpha_0 \leftarrow \sum_{i=0}^{im} (\rho_{i+1} \cdot B_{0,i} + \rho_{i+1} \cdot B_{0,i+1})$$

$$\alpha_1 \leftarrow \sum_{i=0}^{im} (\rho_{1i} \cdot B_{1i} + \rho_{1i+1} \cdot B_{1i+1})$$

$$\alpha_2 \leftarrow \sum_{i=0}^{im} (\rho_{1i} \cdot B_{2i} + \rho_{1i+1} \cdot B_{2i+1})$$

$$\alpha_3 \leftarrow \sum_{i=0}^{im} (\rho_{1i} \cdot B_{3i} + \rho_{1i+1} \cdot B_{3i+1})$$

$$H\rho_{t,\kappa} \leftarrow \alpha_0$$

$$H\varphi_{t,\kappa} \leftarrow \alpha_1 - \alpha_2$$

$$H_z_{t,\kappa} \leftarrow \alpha_3$$

$$\Delta S \leftarrow \frac{1}{4} \cdot \Delta\rho_1 \cdot \Delta\zeta_1$$

$$v\ddot{a}_0 \leftarrow H\rho \cdot \Delta S$$

$$v\ddot{a}_1 \leftarrow H\varphi \cdot \Delta S$$

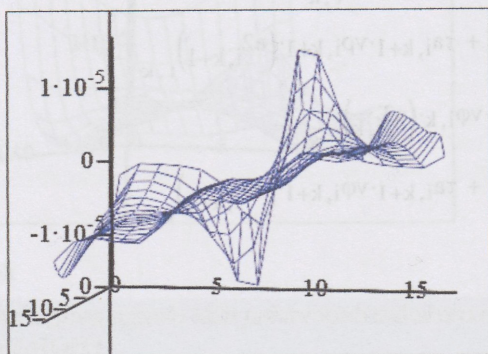
$$v\ddot{a}_2 \leftarrow H_z \cdot \Delta S$$

vä

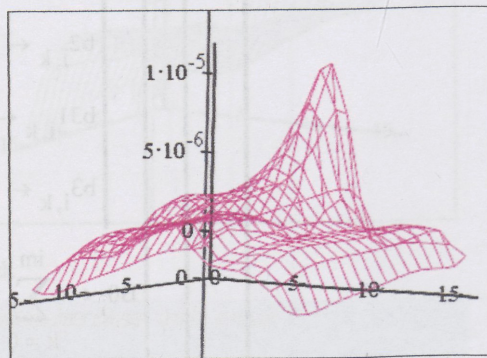
$$sh := Sh(A, B, v\rho, v\varphi, v_z, \tau a) \quad H\rho_k := sh_0$$

$$H\varphi_k := sh_1$$

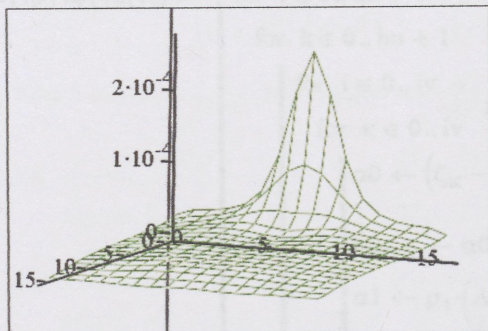
$$H_z k := sh_2$$



H\rho\_k



H\varphi\_k



H\_z k

$$A_j := A\tau \cdot 10^{-8} \quad A_j = 5.12259316663844 \times 10^{27}$$

Selline kordaja tuleb integreeritud väärtustele juurde kirjutada, et saada  $E\rho$ ,  $E\varphi$ ,  $H\rho$ ,  $H\varphi$  ja  $H_z$  väärtusi CGS süsteemis.  $A\tau$  on jaotuse  $\tau a$  normeerimistedur ja  $10^{-8}$  teisendab angstromides arvatud integraali aluse avaldise cm-teks. Neid integreerimisel ei arvestatud.  $A_j$  on arvestatud allpool üldkordajas  $K$ .

Kiirused on antud  $34 \times 34$  mõõtmelistena. Laiendame väljatugevusi ja arvutame ka dif-võrrandite vabade liikmete (jõudude) massiivid sellistena.

```

Pf(r, z, m, um, km) := | t0 ← 0
                        | for i ∈ 0..um - 1
                        |   t0 ← | i if ρi ≤ r ≤ ρi+1
                        |       | t0 otherwise
                        | t0 ← | 15 if r > ρum
                        |     | t0 otherwise
                        | κ0 ← 0
                        | for κ ∈ 0..km - 1
                        |   κ0 ← | κ if ζκ ≤ z ≤ ζκ+1
                        |       | κ0 otherwise
                        | κ0 ← | 15 if z > ζkm
                        |     | κ0 otherwise
                        | m1 ← mt0, κ0
                        | m2 ← mt0, κ0+1
                        | m3 ← mt0+1, κ0
                        | m4 ← mt0+1, κ0+1
                        | h1 ← m2 +  $\frac{m1 - m2}{\zeta_{\kappa0} - \zeta_{\kappa0+1}} \cdot (z - \zeta_{\kappa0+1})$ 
                        | h2 ← m4 +  $\frac{m3 - m4}{\zeta_{\kappa0} - \zeta_{\kappa0+1}} \cdot (z - \zeta_{\kappa0+1})$ 
                        | h3 ← m3 +  $\frac{m1 - m3}{\rho_{t0} - \rho_{t0+1}} \cdot (r - \rho_{t0+1})$ 
                        | h4 ← m4 +  $\frac{m2 - m4}{\rho_{t0} - \rho_{t0+1}} \cdot (r - \rho_{t0+1})$ 
                        | h12 ← h2 +  $\frac{h1 - h2}{\rho_{t0} - \rho_{t0+1}} \cdot (r - \rho_{t0+1})$ 
                        | h34 ← h4 +  $\frac{h3 - h4}{\zeta_{\kappa0} - \zeta_{\kappa0+1}} \cdot (z - \zeta_{\kappa0+1})$ 
                        | h ←  $\frac{1}{2} \cdot (h12 + h34)$ 
                        | h

```

$E_{\rho k}$ , ..  $H_{\phi k}$  on 17 x 17 mõõ-  
 metega massiivid. Massivi m  
 indeksid i ja κ muutuvad 0..m  
 ja 0..km piires. Pf() teisendab  
 need piiresse indeksitega k=  
 0..im, i= 0.. km. Tähistustes  
 $E_{\rho l}$ .. $H_{z l}$  on viimane täht el-  
 laiendatud.

$$E_{\rho l, k} := Pf(\rho_{l i}, \zeta_{l k}, E_{\rho k}, 16, 16)$$

$$E_{z l, k} := Pf(\rho_{l i}, \zeta_{l k}, E_{z k}, 16, 16)$$

$$H_{\rho l, k} := Pf(\rho_{l i}, \zeta_{l k}, H_{\rho k}, 16, 16)$$

$$H_{\phi l, k} := Pf(\rho_{l i}, \zeta_{l k}, H_{\phi k}, 16, 16)$$

$$H_{z l, k} := Pf(\rho_{l i}, \zeta_{l k}, H_{z k}, 16, 16)$$

Mathcadi programmi  
**medsmooth(f,n)** baasil mööda  
 k = const ja i = const jooni silu-  
 miseks koostame programmi  
 Sim(). m on silutav 34x34-mas-  
 siiv ja ni = 1, 3, 5, 7,... i-suuna-  
 lise ning nk = 1, 3, 5,... k-suua-  
 nalise silumise järk. sa = 0 tä-  
 hendab pärastist sümmeetreeri-  
 mist sü(), 1 – assümmeetreeri-  
 mist as() ja 2 – kumbagi ei toi-  
 mu.

```

Sim(m, ni, nk, sa) := | for k ∈ 0..33
                        |   for i ∈ 0..33
                        |     fi ← mi, k
                        |     fp ← medsmooth(f, ni)
                        |     for i ∈ 0..33

```

Sümmeetreerime kõiki arvatud väljatuge-  
 vusi Sim() abil. Algselt tuli igal iteratsioonil  
 kontrollida viimase parameetri valimise õig-  
 sust. Võib ka mitte siluda märgi := välja-  
 lülitamisega (asendades omistamismärgi  
 loogilise võrdusega).

```

fsi,k ← fpi
for i ∈ 0..33
  for k ∈ 0..33
    gk ← fsi,k
    gp ← medsmooth(g,nk)
    for k ∈ 0..33
      gsi,k ← gpk
gs ← Sü(gs) if sa = 0
gs ← As(gs) if sa = 1
gs ← gs otherwise
gs

```

```

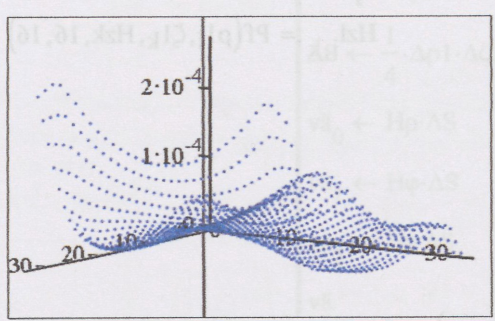
Epl := Sim(Epl,5,3,0)  Ezl := Sim(Ezl,3,3,1)
Hpl := Sim(Hpl,3,3,1)  Hzl := Sim(Hzl,3,3,0)
Hϕl := Sim(Hϕl,3,3,0)  Aalolevate joo-
niste järgi.

```

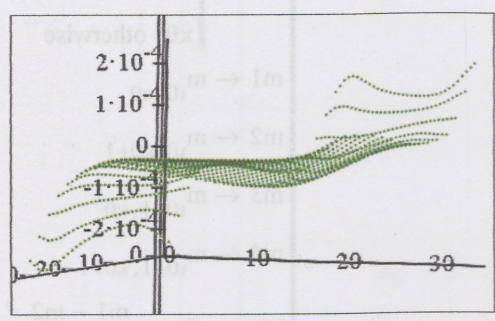
```

Epl0,k := 0  Hϕl0,k := 0  Hpl0,k := 0

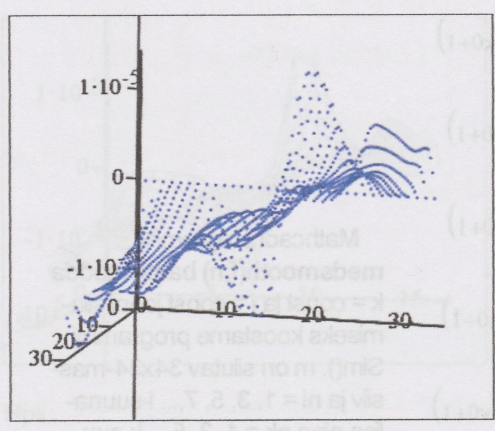
```



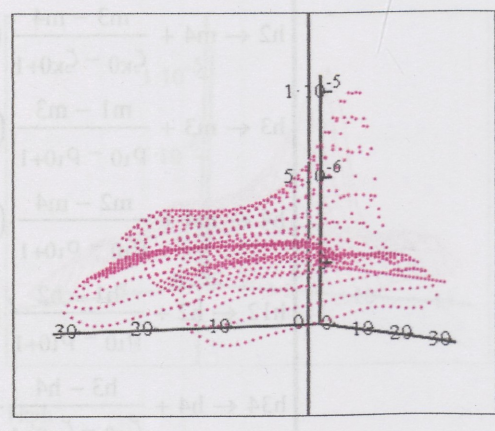
Epl



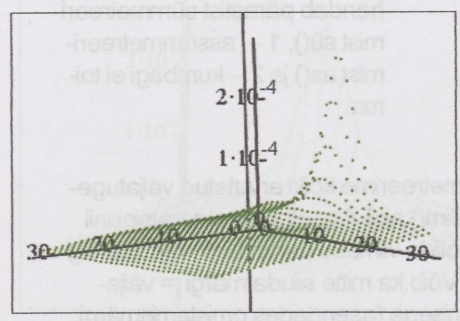
Ezl



Hpl



Hϕl



Hzl

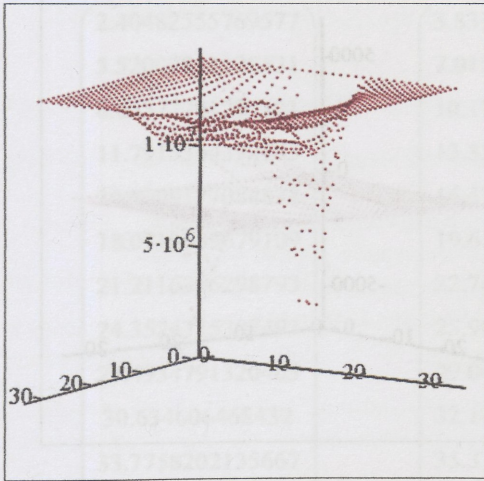
### 6. Diferentsiaalvõrrandid ja nende lahendamisviis

Tähistame dif-võrrandite süsteemi kuuluvad avaldised:

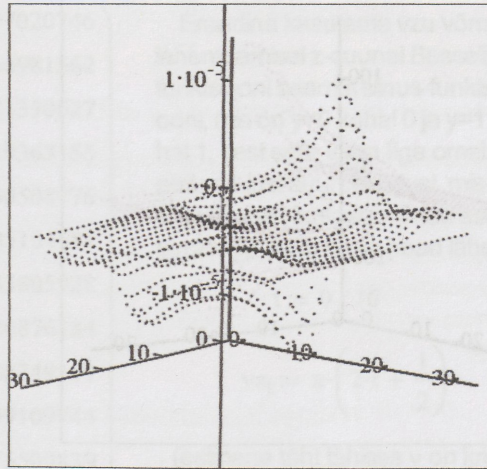
$$K_{i,k} := \frac{A_j \cdot 10^{-8}}{kr} \cdot \sqrt{1 - (v\varphi_{i,k})^2 - (v\varphi_{i,k})^2 - (vz_{i,k})^2}$$

$$vE_{i,k} := v\varphi_{i,k} \cdot Epl_{i,k} + vz_{i,k} \cdot Ezl_{i,k}$$

Ja kirjutame ka süsteemi enda kujul, kus kõigi võrrandite vasakud pooled on identse kujuga.



K



vE

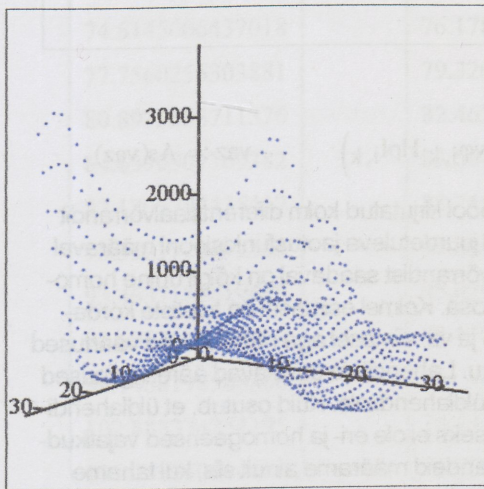
$$v\rho \cdot \frac{d}{d\rho} v\rho u + v_z \cdot \frac{d}{d\zeta} v\rho u = K \cdot (E\rho l - v\rho \cdot vE) + K \cdot (v\varphi \cdot Hzl - v_z \cdot H\varphi l) + \frac{v\varphi^2}{\rho}$$

$$v\rho \cdot \frac{d}{d\rho} v\varphi u + v_z \cdot \frac{d}{d\zeta} v\varphi u = -K \cdot v\varphi \cdot vE + K \cdot (v_z \cdot H\rho l - v\rho \cdot Hzl) - \frac{v\rho}{\rho} \cdot v\varphi \quad E\varphi l = 0$$

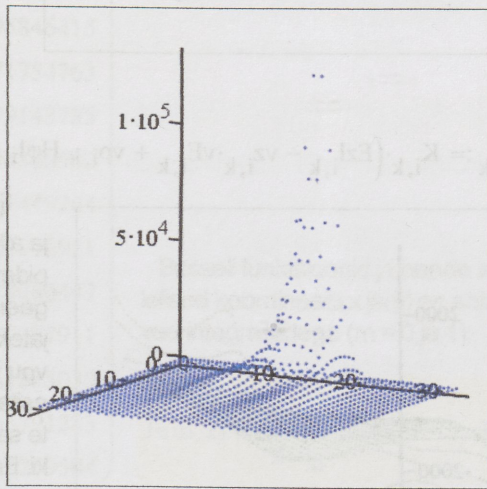
$$v\rho \cdot \frac{d}{d\rho} v_z u + v_z \cdot \frac{d}{d\zeta} v_z u = K \cdot (Ez l - v_z \cdot vE) + K \cdot (v\rho \cdot H\varphi l - v\varphi \cdot H\rho l)$$

Arvutame vabad liikmed sisendkiruste väärtusi kasutades.

$$v\rho v_{i,k} := K_{i,k} \cdot (E\rho l_{i,k} - v\rho_{i,k} \cdot vE_{i,k} + v\varphi_{i,k} \cdot Hzl_{i,k} - v_z_{i,k} \cdot H\varphi l_{i,k}) \quad v\varphi_{i,k} := \frac{(v\varphi_{i,k})^2}{\rho l_i}$$



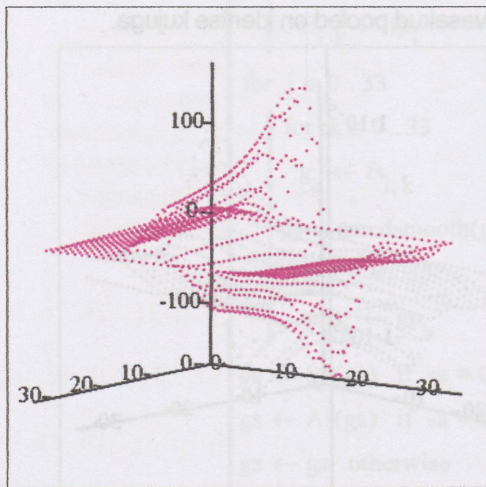
v\rho v



v\varphi

$$v\varphi v_{i,k} := K_{i,k} \cdot (-v\varphi_{i,k} \cdot vE_{i,k} + v_z_{i,k} \cdot H\rho l_{i,k} - v\rho_{i,k} \cdot Hzl_{i,k}) \quad i l := 1..33 \quad v\rho j_{i1,k} := \frac{v\rho_{i1,k}}{\rho l_{i1}}$$

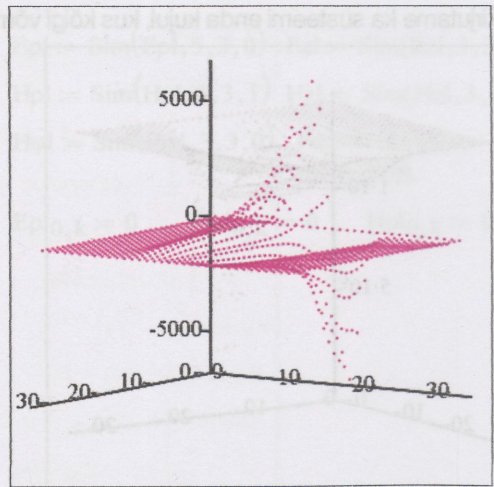
$$v\rho j := \text{Ex}(v\rho j) \quad v\varphi_{i,k} := -v\rho j_{i,k} \cdot v\varphi_{i,k}$$



vaphv

$$vap := vapv + vapi$$

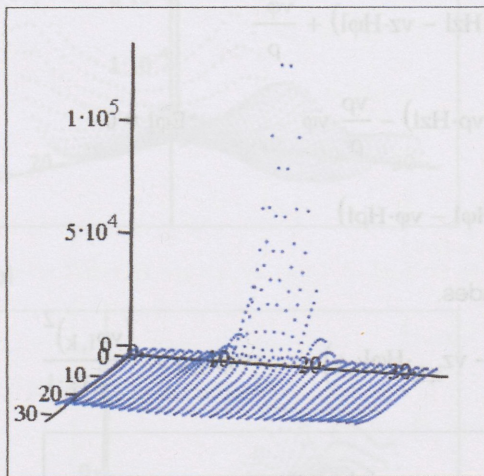
$$vap := \text{Sü}(vap)$$



vafi

$$va\phi := vaphv + vafi$$

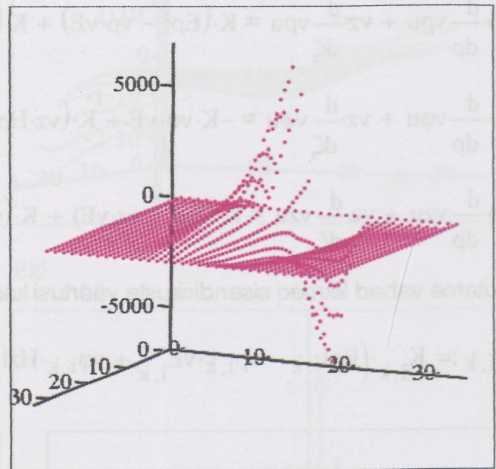
$$va\phi := \text{As}(va\phi)$$



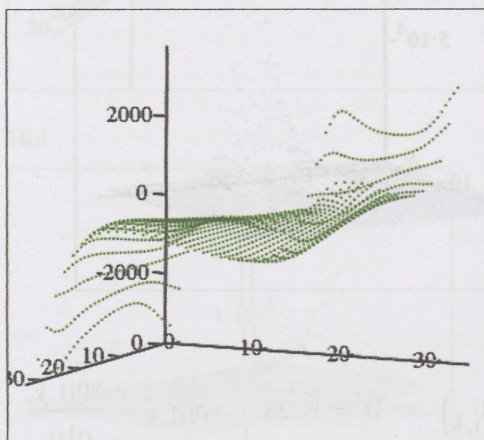
vap

$$vaz_{i,k} := K_{i,k} \cdot (Ez_{i,k} - vz_{i,k} \cdot vE_{i,k} + v\phi_{i,k} \cdot H\phi_{i,k} - v\phi_{i,k} \cdot H\phi_{i,k})$$

$$vaz := \text{As}(vaz)$$



va\phi



vaz

Ülalpool kirjutatud kolm diferentsiaalvõrrandit ja allpool juurdetuleva jaotusfunktsiooni määraval pidevusvõrrandist saadaval on kõigil ühine homogeenne osa. Kolmel esimesel on tuletiste kordajateks  $v\phi$  ja  $vz$ , viimasel aga nende uued väärtused  $v\phi_u$  ja  $vz_u$ . Lahenditele esitatavad ääritingimused esitame üldlahenditele. Kuid osutub, et üldlahendite saamiseks ei ole eri- ja homogeensed vajalikudki. Eri lahendeid määrame ainult siis, kui tahame veenduda, kui hästi need võrdsustavad dif-võrrandite vaba liiget võrrandi vasaku poolega.

Otsitavad kiirused ja jaotusfunktsiooni arendame kahemõõtmelisse ritta. Nii nagu II osas koosnevad need Besseli funktsioonidest  $J_0$  ja  $J_1$ . See kord kasutame neid nii, et sätime nende 0-kohad just vaatevälja piirile, kus ka lähendatav funktsioon

peab nullistuma. O0 ja O1 on funktsioonide nullkohtade tabelid.

O0 :=

2.40482555769577
5.52007811028631
8.65372791291101
11.7915344390143
14.9309177084878
18.0710639679109
21.2116366298793
24.3524715307493
27.4934791320403
30.634606468432
33.7758202135667
36.917098353664
40.0584257646283
43.1997917131769
46.341188371662
49.4826098973968
52.624051841115
55.76551075502
58.9069839260809
62.0484691902272
65.1899648002069
68.3314693298569
71.4729816035937
74.6145006437018
77.7560256303881
80.8975558711376
84.0390907769382
87.1806298436412
90.3221726372105
93.4637187819449
96.6052679509968
99.7468198586806
102.888374254195
106.029930916452

rows(O0) = 34

O1 :=

3.83170597020746
7.01558666981562
10.1734681350627
13.3236919363155
16.4706300508776
19.6158585104682
22.7600843805928
25.9036720876184
29.0468285349169
32.1896799109744
35.3323075500839
38.4747662347716
41.6170942128145
44.7593189976528
47.9014608871857
51.0435351835717
54.1855536410613
57.327525437901
60.4694578453475
63.6113566984812
66.7532267340986
69.8950718374958
73.0368952255731
76.1786995846415
79.3204871754763
82.4622599143735
85.6040194363502
88.7457671449264
91.8875042516951
95.0292318080447
98.1709507307911
101.312661823039
104.454365791283
107.596063259504

rows(O1) = 34

Erandina kasutame vzu võrrandi lahendamisel z-suunal Besseli funktsiooni asemel siinus-funktsiooni, mis on y=0 kohal 0 ja y=1 kohal 1, sest selle vaba liige omab piiril y=1 just suurt väärtust, mistõttu Besseli funktsiooni nulli asetamine sinna ei anna head lähendit:

$$t := 0..16$$

$$vz_t := \pi \cdot \left( 2 \cdot t + \frac{1}{2} \right)$$

(esimene täht tähises v on kreeka täht nü)

$$Zi(y) := \sin(y)$$

$$Ziy(y) := \cos(y)$$

Neid kasutame peamises arvutusprogrammis **W(U)** tunnuse tuz=1 puhul

$$Ji(nz, \mu z_t y)$$

asemel kujus

$$Zi(vz_t y)$$

Osatuletis y järgi on siis

$$vz_t \cdot Ziy(vz_t y)$$

Besseli funktsioonid ja nende tuletised koordinaadi x järgi on antavad integraalidega (m = 0 ja 1):

$$Ji(m, x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(m \cdot t - x \cdot \sin(t)) dt$$

Osatuletis argumenti x järgi:

$$\frac{dJi}{dx} \text{ on } Jix(m, x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(m \cdot t - x \cdot \sin(t)) \cdot \sin(t) dt$$

Lahendit otsime kujul:

$$Rf(x, y, nr, nz, \mu_r, \mu_z, C) = \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot J_i(nr, \mu_r \cdot x) \cdot J_i(nz, \mu_z \cdot y) \quad nr \text{ ja } nz \text{ on } 0 \text{ või } 1$$

$\mu_r$  ja  $\mu_z$  on kasutatava J nullkohad O0 või O1.

Et vältida rea kordajate määrmise lineaarvõrrandite süsteemis lineaarselt üksteisest sõltuvaid võrrandeid, saab kasutada ainult üht vaatevälja poolt. Kasutame  $z > 0$  poolt.  $z$ -telje suunas võtame koordinaadiks (valemites oleva  $x$  asemel)  $y$ , mis  $z = 0$  kohal omab väärtust 0 ja piiril  $z = z_{33}$  väärtuse 1.  $r$ -telje suunas kasutame  $x$ , mis  $r = 0$  kohal on samuti 0 ja piiril  $r = r_{33}$  väärtus 1. Nii saame garanteerida, et reaksarenduse igas liikmes olevate Besseli funktsioonide üks 0-kohtadest satub alati vaatevälja piirile  $x=1$  või  $y=1$ , kus ka lähendatav peab omama väärtust 0.

### 7. Kõigepealt lahendame $v_p$ võrrandi

Võrrand on:  $v_p \cdot \frac{d}{dr} v_{pu} + v_z \cdot \frac{d}{dz} v_{pu} = v_{ab} \quad v_{ab, i, k} := 10^{-4} \cdot v_{ap, i, k}$

( $10^4 - r, x, z$  ja  $y$  on reaalsetest mõõtmetest sedavõrd suuremad)

Koordinaatide  $r$  ja  $z$  puhul on punktidevahelised kaugused:  $\Delta r := 10^4 \cdot \Delta \rho 1 \quad \Delta z := 10^4 \cdot \Delta \zeta 1$

Nüüd kasutame  $x_i := \frac{r_i}{r_{33}} \quad \kappa := 0..16 \quad y_\kappa := \frac{\kappa}{16}$  Milline on  $y$  ja  $z$  seos? Alas  $z > 0$  kasu-

tasime ka indeksit  $ka := 17..33$  Selle abil saame valemi  $y_{ka-17} = \frac{z_{ka} - z_{17}}{z_{33} - z_{17}} = \frac{z_{ka} - z_{17}}{16 \cdot \Delta z}$  mis annab samad väärtused kui  $y$  omad. Sellest

$\Delta y = \frac{\Delta z}{16 \cdot \Delta z} \quad \frac{d}{dz} v = \frac{1}{16 \cdot \Delta z} \cdot \frac{d}{dy} v \quad \text{Analoogselt} \quad \Delta r = r_{33} \cdot \Delta x \quad \frac{d}{dr} v = \frac{1}{r_{33}} \cdot \frac{d}{dx} v$

Algne  $v_p$  võrrand saab kuju:  $\frac{v_p}{r_{33}} \cdot \frac{d}{dx} v_p + \frac{v_z}{16 \cdot \Delta z} \cdot \frac{d}{dy} v_p = v_{ab} \quad (1) \quad \text{Üldlahendit otsime kujul:}$

$v_{pu} = AR \cdot Rf(x, y, nr, nz, \mu_r, \mu_z, C) \quad (2) \quad (2)$  asetamisel võrrandisse (1) saame (AR ja Rf tähisele liituv kolmas täht  $x$  või  $y$  tähendab osatuletist  $x$  või  $y$  järgi):

$\frac{v_p}{r_{33}} \cdot AR \cdot Rfx + \frac{v_z}{16 \cdot \Delta z} \cdot AR \cdot Rfy + \left( \frac{v_p}{r_{33}} \cdot ARx + \frac{v_z}{16 \cdot \Delta z} \cdot ARy \right) \cdot Rf = v_{ab} \quad \text{Tähistame kordajad:}$

$v_{pü} = \frac{v_p}{r_{33}} \cdot AR \quad v_{zü} = \frac{v_z}{16 \cdot \Delta z} \cdot AR \quad v_{öü} = \frac{v_p}{r_{33}} \cdot ARx + \frac{v_z}{16 \cdot \Delta z} \cdot ARy = v_p \cdot ARr + v_z \cdot ARz \quad \text{sest}$

$ARr = \frac{d}{dr} AR = \frac{1}{r_{33}} \cdot \frac{d}{dx} AR \quad ARx = r_{33} \cdot ARr \quad \text{Analoogselt} \quad ARy = 16 \cdot \Delta z \cdot ARz$

Siis võrrand on:  $v_{pü} \cdot Rfx + v_{zü} \cdot Rfy + v_{öü} \cdot Rf = v_{ab} \quad \text{Rea osatuletised on:}$

$$Rfx(x, y, nr, nz, \mu_r, \mu_z, C) = \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot \mu_r^j \cdot J_{ix}(nr, \mu_r \cdot x) \cdot J_i(nz, \mu_z \cdot y)$$

$$Rf_y(x, y, nr, nz, \mu_r, \mu_z, C) = \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot J_i(nr, \mu_r \cdot x) \cdot \mu_z \cdot J_i(nz, \mu_z \cdot y)$$

Asetamisel võrrandisse (ilma C ja summa märkideta):

$$\left( \nu \rho_{i, \kappa} \cdot \mu_r \cdot J_i(nr, \mu_r \cdot x_i) + \nu \omega_{i, \kappa} \cdot J_i(nr, \mu_r \cdot x_i) \right) \cdot J_i(nz, \mu_z \cdot y_\kappa) + \dots$$

$$\dots + \nu z_{i, \kappa} \cdot \mu_z \cdot J_i(nr, \mu_r \cdot x_i) \cdot J_i(nz, \mu_z \cdot y_\kappa) = \text{vab}_{i, \kappa+17} \quad \text{Tähistades vasaku poole} \quad (FF_{j, t})_{i, \kappa}$$

saame võrrandi üleskirjutada nii:

st võrrand on kirjutatud iga välja punkti  $(x_i, y_\kappa)$  kohta eraldi. Sel-

$$\sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot (FF_{j, t})_{i, \kappa} = \text{vab}_{i, \kappa+17}$$

lise süsteemi lahendamine tähendab reaksarenduse kordajate C leidmist. Kasutame võrrandi vasaku ja parema poole vahe ruutude summa miinimumi määramise meetodit.

$$SU(C) = \sum_{i=0}^{33} \sum_{\kappa=0}^{16} \left[ \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot (FF_{j, t})_{i, \kappa} - \text{vab}_{i, \kappa+17} \right]^2$$

Leitakse osatuletised  $\frac{d}{dC} SU(C)$  iga komponendi  $C_{j1+(jm+1) \cdot t1}$  järgi ja võrrutatakse need 0-ga.

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{33} \sum_{\kappa=0}^{16} \left[ \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot (FF_{j, t})_{i, \kappa} - \text{vab}_{i, \kappa+17} \right] \cdot (FF_{j1, t1})_{i, \kappa} = 0 \quad \text{Sellest saame}$$

$$M_{j1+(jm+1) \cdot t1, j1+(jm+1) \cdot t1} = \sum_{i=0}^{33} \sum_{\kappa=0}^{16} (FF_{j, t})_{i, \kappa} \cdot (FF_{j1, t1})_{i, \kappa} \quad j1 \text{ ja } t1 \text{ omavad samu väärtusi, mis } j \text{ ja } t$$

$$V_{j1+(jm+1) \cdot t1} = \sum_{i=0}^{33} \sum_{\kappa=0}^{16} \text{vab}_{i, \kappa+17} \cdot (FF_{j1, t1})_{i, \kappa} \quad \text{Saame lineaarse võrrantite süsteemi, kus võrrandite arv on } jm+(jm+1) \text{ tm:}$$

$jm := 10 \quad tm := 10 \quad jm + (jm + 1) \cdot tm = 120$  Antud Besseli funktsioonide nullkohtade arv 34 võimaldab  $jm, tm$  väärtusi kuni 33, mis annab arvuks  $33 + (33 + 1) \cdot 33 = 1155$  Kuid pooles

vaateväljas on meil punkte  $17 \cdot 34 = 578$  St me saame  $jm$  ja  $tm$  maksimaalselt võtta 23.  $23 + (23 + 1) \cdot 23 = 575$  Tegelikult on veerus punkte 34, reas 17. Loomulik oleks võtta maksimaalseks rea pikkuseks  $jm = 33 \quad tm = 16 \quad jm + (jm + 1) \cdot tm = 577$  st punkte muutes tuleks  $jm$  ja  $tm$  jagada suhtes 2/1. Hälvetesumma ja kiirusepildi järgi saab määrata, milline oleks lähendusrea optimaalne pikkus. Kasutusse läks variant  $jm = 30$  ja  $tm = 15$ .

Besseli funktsioonide indekseid  $m$  (0 või 1) valime nii (põhiliselt määratav kiiruste ja  $\tau$  järgi, olulisemaks osutus siiski vaba liikme ruumiline jaotus):

- 1)  $r$  ehk  $x$  suunas – kui teljel  $r=0$  peab olema suur väärtus, siis 0, väike või 0, siis 1.
- 2)  $z$  ehk  $y$  suunas – kui teljel  $z=0$  peab olema suur väärtus, siis 0, väike või 0 puhul 1.
- 3) **parim viis** on siiski katsetamine – milline valik annab väiksema hälvetesumma. Su

või ka määratava kiiruse või jaotusfunktsiooni ääretingimustele parima vastavuse järgi. Valiku 0 korral on  $nr$  või  $nz = 0$  ja  $\mu_r$  või  $\mu_z = 00, 1$  korral  $nr$  või  $nz$  ka 1 ja  $\mu_r$  või  $\mu_z = 01$ . Kui süsteemi determinant annab ületäitumise, tuleb kogu võrrandsüsteemi kordajaid vähendada teguriga "ko". Liialt väikse puhul determinant = 0 ja rea kordajad C jäävad määramata – ko tuleb suurendada. Mathcad annab väljastamisel suurusele väärtuse 0 kui see on  $< 10^{-15}$ . 0 näitamise juhul ei ole teada, kas see on päris 0 või mitte. ko valisime nii, et D oleks järguga 10.

Saadud tulemusi on tarvis **parandada ja siluda**. Siluda seepärast, et arvutusprotsess on ligikaudne ja seda sooritatakse kõigi väljapunktide kohta eraldi ning keskmistatakse. Parandamine on vajalik seetõttu, et "ääretingimused" ei määra otsitavate väärtuste märki vaid suuruse jaotust ja peamiselt ikkagi 0 väärtusi välja piiridel.

Suurem osa vajalikest järgnevatest arvutustehetest on asetatud programmi **Cs0()** ja **W(U)**.

Nende sisendisse annavad ülaltoodud valemid kordajad:

$$vp_{i,k} := \frac{vp_{i,k+17}}{r_{33}} \cdot AR_{i,k+17}$$

$$vz_{i,k} := \frac{vz_{i,k+17}}{16 \cdot \Delta z} \cdot AR_{i,k+17} \quad \text{vo}_{i,k} := vp_{i,k+17} \cdot AR_{i,k+17} + vz_{i,k+17} \cdot AR_{i,k+17}$$

```

Cs0(M, va, sp) :=
  for p2 ∈ 0..sp      if va0 ≠ 0
  |
  | b ← M
  | for p1 ∈ 0..sp
  |   bp1,p2 ← vap1
  |   Cp2 ←  $\frac{|b|}{|M|}$ 
  |
  | otherwise
  |   for p3 ∈ 0..sp - 1
  |     |
  |     | vap3 ← vap3+1
  |     | for p4 ∈ 0..sp - 1
  |     |   Mp3,p4 ← Mp3+1,p4+1
  |     |
  |     | for p2 ∈ 0..sp - 1
  |     |   |
  |     |   | b ← M1
  |     |   | for p1 ∈ 0..sp - 1
  |     |   |   bp1,p2 ← vap1
  |     |   |   Cp2 ←  $\frac{|b|}{|M1|}$ 
  |     |   |
  |     |   | for p2 ∈ 0..sp
  |     |   |   Cp2 ← if(p2 = 0, 0, C1 p2-1)
  |     |   |
  |     |   | C
  |

```

See on lineaarse võrrandsüsteemi lahendamise programm, kui on teada vabade liikmete vektor *va* ja süsteemi maatriks *M*. Programmil on 2 alamjuhtu – kui *va<sub>0</sub>* ei ole 0 ja kui on. Teisel juhul jääb *C<sub>0</sub>* väärtuseks ka 0.

Teine programm arvutab rea kordajad *C* ja muud vajalikud suurused.

Kuna sisestatavaid suurusi on palju, pakime nad ühte massiivi *U*. Eraldi argumentidena näidates ei saaks suure laiuse tõttu programmi ühele leheküljele trükkida.

```

W(U) :=
  | vpü ← U0
  | vzü ← U1
  | voü ← U2
  | nr ← U3
  | nz ← U4
  | μr ← U5
  | μz ← U6

```

tuz ← U<sub>7</sub>

vz ← U<sub>8</sub>

ko ← U<sub>9</sub>

jm ← U<sub>10</sub>

tm ← U<sub>11</sub>

va ← U<sub>12</sub>

si ← U<sub>13</sub>

μ ← U<sub>14</sub>

for i ∈ 0..33

$x_i \leftarrow \frac{i}{33}$

for κ ∈ 0..16

$y_\kappa \leftarrow \frac{\kappa}{16}$

D0<sub>i,κ</sub> ← voü<sub>i,κ</sub>

D1<sub>i,κ</sub> ← vϕü<sub>i,κ</sub>

D2<sub>i,κ</sub> ← vzü<sub>i,κ</sub>

d0<sub>i,κ</sub> ← D0<sub>i,κ</sub> · va<sub>i,κ+17</sub>

d1<sub>i,κ</sub> ← D1<sub>i,κ</sub> · va<sub>i,κ+17</sub>

d2<sub>i,κ</sub> ← D2<sub>i,κ</sub> · va<sub>i,κ+17</sub>

for i ∈ 0..33

for j ∈ 0..jm

co1<sub>i,j</sub> ← Ji(nr, μr<sub>j</sub> · x<sub>i</sub>)

si1<sub>i,j</sub> ← μr<sub>j</sub> · Jix(nr, μr<sub>j</sub> · x<sub>i</sub>)

for κ ∈ 0..16

for t ∈ 0..tm

co2<sub>κ,t</sub> ←  $\begin{cases} J_i(nz, \mu z_t \cdot y_\kappa) & \text{if } tuz = 0 \\ Z_i(vz_t \cdot y_\kappa) & \text{otherwise} \end{cases}$

si2<sub>κ,t</sub> ←  $\begin{cases} \mu z_t \cdot J_{ix}(nz, \mu z_t \cdot y_\kappa) & \text{if } tuz = 0 \\ vz_t \cdot Z_{iy}(vz_t \cdot y_\kappa) & \text{otherwise} \end{cases}$

for j1 ∈ 0..jm

for t1 ∈ 0..tm

V<sub>j1,t1</sub> ← 0

```

for i ∈ 0..33
  for κ ∈ 0..16
    V1 ← (d0i,κ · co1i,j1 + d1i,κ · si1i,j1) · co2κ,t1 + d2i,κ · co1i,j1 · si2κ,t1
    Vj1,t1 ← Vj1,t1 + V1
  Vvj1+(jm+1)·t1 ← Vj1,t1
for j ∈ 0..jm
  for t ∈ 0..tm
    for i ∈ 0..33
      for κ ∈ 0..16
        Fi,κ ← (D0i,κ · co1i,j + D1i,κ · si1i,j) · co2κ,t + D2i,κ · co1i,j · si2κ,t
      FFj,t ← F
for j ∈ 0..jm
  for t ∈ 0..tm
    for j1 ∈ 0..jm
      for t1 ∈ 0..tm
        Mj+(jm+1)·t,j1+(jm+1)·t1 ← ∑i=033 ∑κ=016 (FFj,t)i,κ · (FFj1,t1)i,κ
pm ← jm + (jm + 1) · tm
if Vv0 = 0
  for p3 ∈ 0..pm - 1
    valp3 ← Vvp3+1
    for p4 ∈ 0..pm - 1
      M1p3,p4 ← Mp3+1,p4+1
  pm1 ← pm - 1
otherwise
  M1 ← M
  val ← Vv
  pm1 ← pm
D ← |ko·M1|
for p2 ∈ 0..pm1
  for p1 ∈ 0..pm1
    for p3 ∈ 0..pm1
      bp1,p3 ← M1p1,p3
    for p1 ∈ 0..pm1
      bp1,p2 ← valp1
  C1p2 ←  $\frac{|ko·b|}{D}$ 

```

for  $p2 \in 0..pm$  if  $Vv_0 = 0$

$Ch_{p2} \leftarrow \text{if}(p2 = 0, 0, C1_{p2-1})$

$Ch \leftarrow C1$  otherwise

for  $i \in 0..33$

for  $\kappa \in 0..16$

$vas_{i,\kappa} \leftarrow \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} Ch_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot (FF_{j,t})_{i,\kappa}$

if  $si = 1$

for  $\kappa \in 0..16$

$f_{\kappa} \leftarrow vas_{i,\kappa}$

$\psi_{\kappa} \leftarrow y_{\kappa}$

$vass \leftarrow Sm(f, \psi, \mu, 16)$

for  $\kappa \in 0..16$

$vas_{i,\kappa} \leftarrow vass_{\kappa}$

$vas \leftarrow vas$  otherwise

for  $\kappa \in 0..16$

if  $si = 1$

for  $i \in 0..33$

$f_i \leftarrow vas_{i,\kappa}$

$\xi_i \leftarrow x_i$

$vass \leftarrow Sm(f, \xi, \mu, 33)$

for  $i \in 0..33$

$vas_{i,\kappa} \leftarrow vass_i$

$vas \leftarrow vas$  otherwise

for  $i \in 0..33$

for  $k \in 0..16$

$rf_{i,k} \leftarrow \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} Ch_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot col_{i,j} \cdot co2_{k,t}$

$ja \leftarrow 34 \cdot 17 \cdot (34 \cdot 17 - 1)$

$Su \leftarrow \sqrt{\frac{1}{ja} \sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{16} (vas_{i,k} - va_{i,k+17})^2}$

$v\ddot{a}_0 \leftarrow Ch$

$v\ddot{a}_1 \leftarrow vas$

$v\ddot{a}_2 \leftarrow Su$

$v\ddot{a}_3 \leftarrow D$   
 $v\ddot{a}_4 \leftarrow M1$   
 $v\ddot{a}_5 \leftarrow rf$   
 $v\ddot{a}$

Nüüd saab alustada vp-võrrandi lahendamisega. nr := 1 μr := 01 nz := 0 μz := 00

tuz := 0 Kui tunnus tuz = 0, siis kasutatakse reaksarenduses z ehk y suunal Besseli funktsiooni, 1 või mõne muu väärtuse puhul sinust.

ko := 24.604 jm := 30 tm := trunc( $\frac{1}{2} \cdot jm$ ) tm = 15 pm := jm + (jm + 1) · tm pm = 495

p := 0..pm on rea kordajate C indeksite vahemik. si := 1 μ := 0.5 si – siluda ridu ja veerge, kui si = 1. Pakime W argumentid ühte mssivi U:

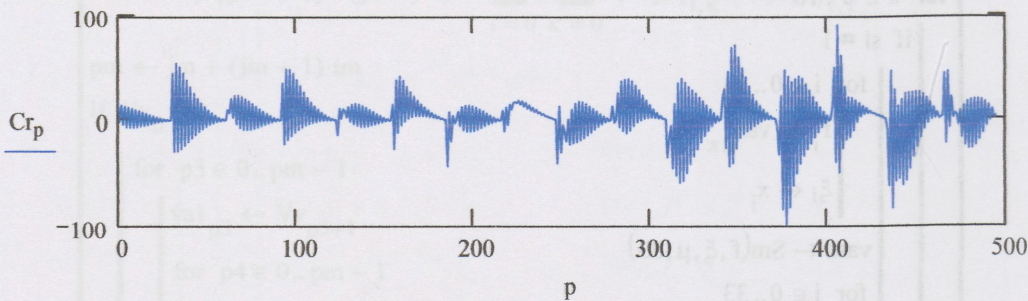
U<sub>0</sub> := vpü U<sub>1</sub> := vzü U<sub>2</sub> := voü

U<sub>3</sub> := nr U<sub>4</sub> := nz U<sub>5</sub> := μr U<sub>6</sub> := μz U<sub>7</sub> := tuz U<sub>8</sub> := vz U<sub>9</sub> := ko U<sub>10</sub> := jm

U<sub>11</sub> := tm U<sub>12</sub> := vab U<sub>13</sub> := si U<sub>14</sub> := μ wp := W(U) Cr := wp<sub>0</sub> vas := wp<sub>1</sub> Su := wp<sub>2</sub>

D := wp<sub>3</sub> M1 := wp<sub>4</sub> rf := wp<sub>5</sub> D = 9.88433083042251 ko valimiseks: kop := 24.604

|kop · M1| = 9.88433083042251

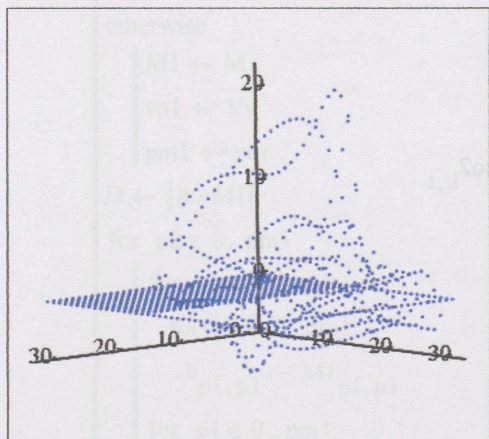


$vp_{i,ka} := AR_{i,ka} \cdot rf_{i,ka-17}$

**parandused ja silumine:**

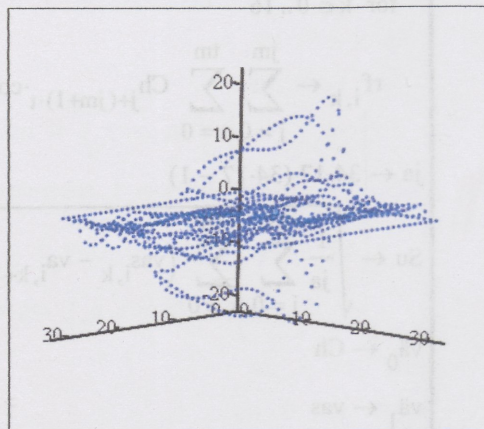
$vp_{i,ka} := \text{if}(vp_{i,ka} < 0, -vp_{i,ka}, vp_{i,ka})$

$vp_{i,33-ka} := -vp_{i,ka}$  Silumisele kuuluv:



vpu

$vpu := \text{Smrv}(vpu, 0.5, 0.5)$



vpu

Silumine rikub ääreväärtuste nullisid:

$$vpu_{33,k} := 0 \quad vpu_{i,0} := 0 \quad vpu_{i,33} := 0 \quad vpu_{0,k} := 0$$

$$vpu_{i,33-ka} := -vpu_{i,ka}$$

Säilitame sisendkiiruse suuruse:

$$\mu := \frac{\max(vp) - \min(vp)}{\max(vpu) - \min(vpu)}$$

$$vpu := \mu \cdot vp$$

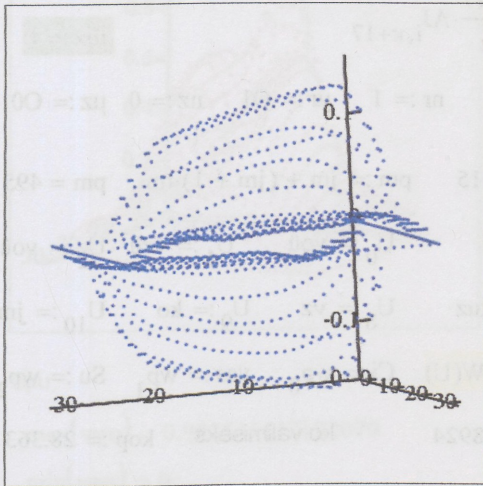
$$\mu = 0.015$$

Keskmistame sisendväärtusega

$$vpu := 0.5 \cdot (vpu + vp)$$

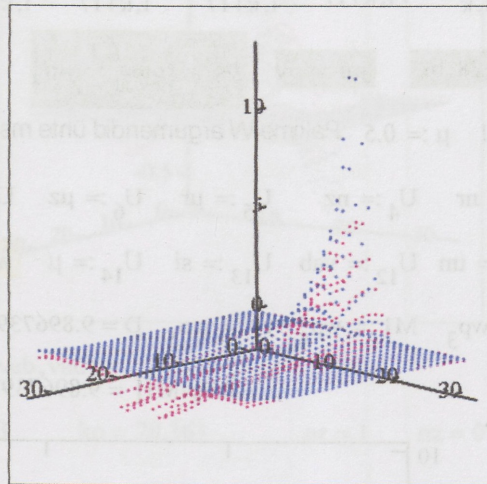
$$vpu := As(vpu)$$

Selline keskmistamine vähendab tekkinud muutusi, mis takistab koondumisprotsessi "laiali-looksmist", kuigi koondumine sel juhul ka aeglustub.



Võrrandi poolte kokkulangevus:

$$vau_{i,ka} := vas_{i,ka-17} \quad vau_{i,33-ka} := vau_{i,ka}$$



vpu

$$\max(vpu) = 0.146761106120564$$

$$\min(vpu) = -0.146761106120564$$

vab, vau

$$Su = 0.031731315589408$$

$$\mu = 0.015$$

$$ko = 24.604$$

$$nr = 1 \quad nz = 0$$

500:	0.017193614442957	0.104	0.9809
501:	0.02240935554767	0.085	1.1809
502:	0.018983243819785	0.081	1.4313
503:	0.016746126570133	0.252	1.7958
504:	0.015267045880466	0.406	2.7421
505:	0.024981403815386	0.074	4.5774
506:	0.020745650853844	0.091	10.19
507:	0.015627210882557	0.123	14.966
508:	0.02265549561325	0.037	8.138
509:	0.022780128200374	0.036	13.735
510:	0.023662146389822	0.019	20.597
511:	0.028940161992745	0.015	38.073
512:	0.030569920276268	0.014	51.82
513:	0.031166884011188	0.014	50.504
514:	0.031505715086265	0.014	45.751

Kokkulangevus r-telje otste juures on halvem seetõttu, et väikse punktidearvu tõttu peame lähendusrea pikkust piirama. Täpsema tulemuse annaks lõppmatu rida (kui aritmeetilised arvutusvead saaks välja jätta).

515:	0.03171762079221	0.014	33.262
516:	0.03155020721298	0.015	21.369
517:	0.031731315589408	0.015	24.604

### 8. Teisena lahendame vφu võrrandi

$$vab_{i,k} := 10^{-4} \cdot v\varphi_{i,k}$$

Vajalikud suurused üldlahendi vφu leidmisprogrammile on:

$$v\ddot{p}u_{i,\kappa} := \frac{v\dot{p}_{i,\kappa+17}}{r_{33}} \cdot AJ_{i,\kappa+17}$$

$$vz\ddot{u}_{i,\kappa} := \frac{vz_{i,\kappa+17}}{16 \cdot \Delta z} \cdot AJ_{i,\kappa+17}$$

$$tuz := 0$$

$$vo\ddot{u}_{i,\kappa} := v\dot{p}_{i,\kappa+17} \cdot AJr_{i,\kappa+17} + vz_{i,\kappa+17} \cdot AJz_{i,\kappa+17} \quad nr := 1 \quad \mu r := 01 \quad nz := 0 \quad \mu z := 00$$

$$ko := 28.363$$

$$jm := 30$$

$$tm := \text{trunc}\left(\frac{1}{2} \cdot jm\right)$$

$$tm = 15$$

$$pm := jm + (jm + 1) \cdot tm$$

$$pm = 495$$

si := 1    μ := 0.5    Pakime W argumendid ühte mssivi U:

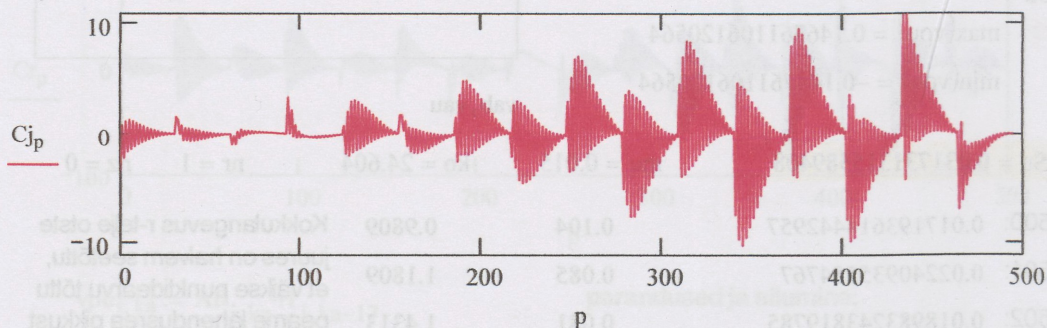
$$U_0 := v\ddot{p}u \quad U_1 := vz\ddot{u} \quad U_2 := vo\ddot{u}$$

$$U_3 := nr \quad U_4 := nz \quad U_5 := \mu r \quad U_6 := \mu z \quad U_7 := tuz \quad U_8 := vz \quad U_9 := ko \quad U_{10} := jm$$

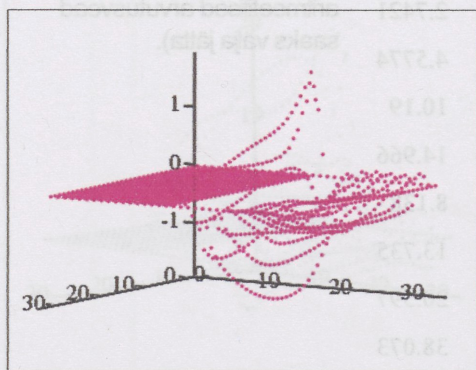
$$U_{11} := tm \quad U_{12} := vab \quad U_{13} := si \quad U_{14} := \mu \quad wp := W(U) \quad C_j := wp_0 \quad vas := wp_1 \quad Su := wp_2$$

$$D := wp_3 \quad M1 := wp_4 \quad rf := wp_5 \quad D = 9.89673979298924 \quad ko \text{ valimiseks: } kop := 28.363$$

$$|kop \cdot M1| = 9.89673979298924$$



$$v\varphi_{i,ka} := AJ_{i,ka} \cdot rf_{i,ka-17}$$



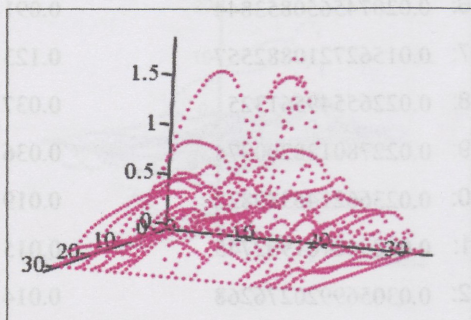
vφu

$$v\varphi u := \text{Smrv}(v\varphi u, 0.5, 0.5)$$

parandused ja silumine:

$$v\varphi_{i,k} := \text{if}(v\varphi_{i,k} < 0, -v\varphi_{i,k}, v\varphi_{i,k})$$

$$v\varphi_{i,33-ka} := v\varphi_{i,ka} \quad \text{Silumisele kuuluv:}$$



vφu

Silumine rikub ääreväärtuste nullisid:

$$v\varphi_{33,k} := 0 \quad v\varphi_{i,0} := 0 \quad v\varphi_{i,33} := 0 \quad v\varphi_{0,k} := 0$$

$$v\varphi_{i,k} := \text{if}(v\varphi_{i,k} < 0, -v\varphi_{i,k}, v\varphi_{i,k})$$

Säilitame sisendkiiruse suuruse:

$$\mu := \frac{\max(v\varphi) - \min(v\varphi)}{\max(v\varphi) + \min(v\varphi)}$$

$$v\varphi := \mu \cdot v\varphi$$

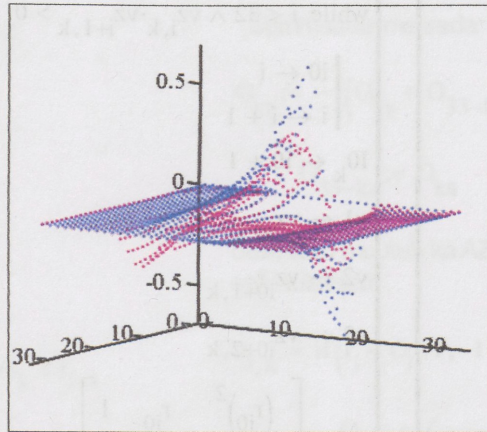
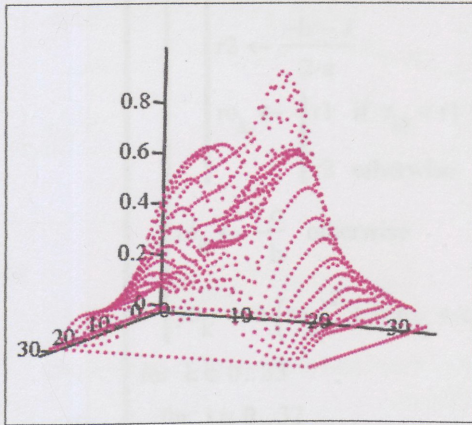
Keskmistame sisendiga

$$v\varphi := 0.5 \cdot (v\varphi + v\varphi)$$

$v\varphi := \text{Sü}(v\varphi)$  Võrrandi poolte kokkulangevus:

$$vau_{i,ka} := \text{vas}_{i,ka-17}$$

$$vau_{i,33-ka} := -vau_{i,ka}$$



$v\varphi$

$$\max(v\varphi) = 0.987515543182079$$

$$\min(v\varphi) = 0$$

$vab, vau$

$$Su = 2.23531664012676 \times 10^{-3}$$

$$\mu = 1.013$$

$$ko = 28.363$$

$$nr = 1$$

$$nz = 0$$

$$500: 9.01834905457875 \times 10^{-4}$$

$$0.242$$

$$1.3529$$

$$501: 1.94988001883796 \times 10^{-3}$$

$$0.242$$

$$1.4029$$

$$502: 1.43922154903842 \times 10^{-3}$$

$$0.421$$

$$1.8924$$

$$503: 1.02063872925609 \times 10^{-3}$$

$$0.47$$

$$2.3958$$

$$504: 9.66496763835294 \times 10^{-4}$$

$$1.198$$

$$3.441$$

$$505: 2.06107128217776 \times 10^{-3}$$

$$0.279$$

$$5.5867$$

$$506: 1.74455161355644 \times 10^{-3}$$

$$0.427$$

$$12.034$$

$$507: 8.07817402879846 \times 10^{-4}$$

$$0.755$$

$$17.479$$

$$508: 8.24690700019288 \times 10^{-4}$$

$$0.792$$

$$9.446$$

$$509: 2.53991254723705 \times 10^{-3}$$

$$1.144$$

$$26.548$$

$$510: 9.21611854755532 \times 10^{-4}$$

$$1.073$$

$$23.268$$

$$511: 1.3008462756519 \times 10^{-3}$$

$$1.073$$

$$42.758$$

$$512: 1.62641911174257 \times 10^{-3}$$

$$1.073$$

$$58.168$$

$$513: 1.82786424687131 \times 10^{-3}$$

$$1.073$$

$$56.677$$

$$514: 1.85382204429505 \times 10^{-3}$$

$$1.073$$

$$51.281$$

$$515: 1.82222999327876 \times 10^{-3}$$

$$1.305$$

$$24.735$$

$$516: 1.91833759151644 \times 10^{-3}$$

$$1.305$$

$$24.735$$

$$517: 2.23531664012676 \times 10^{-3}$$

$$1.013$$

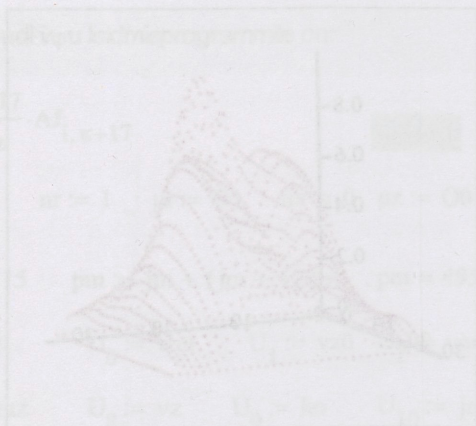
$$28.363$$

### 9. Kolmanda ehk vzu võrrandi lahenduskäik

Alates 2. iteratsioonist hakkame algmudelis paika pandud vzu nulljoone (kus  $r$  või  $x$  suunal vzu muudab märki) asukohta märkivat  $O_k$  muutma vastavaks eelmisel iteratsioonil saadud uue väärtuse vzu nulljoonega. Selle muutmise nõuab ka ääritingimuse AZ ja selle osatuletiste muutmist. Selleks on tarvilik II osas kirjutatud programm Rop():

```

Rop(vz) := for k ∈ 0..33
  i ← 0
  while i < 32 ∧ vzi,k · vzi+1,k > 0
    i0 ← i
    i ← i + 1
    i0k ← i0 + 1
    v1 ← vzi0,k
    v2 ← vzi0+1,k
    v3 ← vzi0+2,k
    M ←  $\begin{bmatrix} (r_{i0})^2 & r_{i0} & 1 \\ (r_{i0+1})^2 & r_{i0+1} & 1 \\ (r_{i0+2})^2 & r_{i0+2} & 1 \end{bmatrix}$ 
    Ma ←  $\begin{pmatrix} v1 & r_{i0} & 1 \\ v2 & r_{i0+1} & 1 \\ v3 & r_{i0+2} & 1 \end{pmatrix}$ 
    Mb ←  $\begin{bmatrix} (r_{i0})^2 & v1 & 1 \\ (r_{i0+1})^2 & v2 & 1 \\ (r_{i0+2})^2 & v3 & 1 \end{bmatrix}$ 
    Mc ←  $\begin{bmatrix} (r_{i0})^2 & r_{i0} & v1 \\ (r_{i0+1})^2 & r_{i0+1} & v2 \\ (r_{i0+2})^2 & r_{i0+2} & v3 \end{bmatrix}$ 
    a ←  $\frac{|Ma|}{|M|}$ 
    b ←  $\frac{|Mb|}{|M|}$ 
    c ←  $\frac{|Mc|}{|M|}$ 
  
```



```

if a ≠ 0
  Ja ← b2 - 4·a·c
  J ← if(Ja < 0, 0, √Ja)
  r1 ←  $\frac{-b + J}{2 \cdot a}$ 
  r2 ←  $\frac{-b - J}{2 \cdot a}$ 
  rok ←  $\begin{cases} r1 & \text{if } r_{i0} < r1 \leq r_{i0+2} \\ r2 & \text{otherwise} \end{cases}$ 
  rok ←  $-\frac{c}{b}$  otherwise
  y0k ← a·(rok)2 + b·rok + c

for k ∈ 0..33
  for i ∈ 0..32
    ropk ←  $\begin{cases} 0.5 \cdot (r_i + r_{i+1}) & \text{if } r_i \leq ro_k < r_{i+1} \\ \text{continue} & \text{otherwise} \end{cases}$ 

vä0 ← ro
vä1 ← y0
vä2 ← I0
vä3 ← rop
vä

op := Rop(vz)
ou := op3   ou33 := ou0
O := Sm(ou, z, 0.75, 33)

Sümmeetreme seda:
Oka :=  $\frac{1}{2} \cdot (O_{ka} + O_{33-ka})$ 
O33-ka := Oka

Selle tõttu muutub ka AZ ja selle tuletsed:
Czi,k := if(ri < Ok, 1, -1) · Bzk
U1i,k :=  $\frac{O_k - r_i}{O_k} \cdot \left(1 + \frac{r_i}{O_k}\right)$ 

Kui r > Ok, siis
akk := r33 · Ok - (r2k)2
ak :=  $\frac{1}{ak_k}$ 

```

$$U2_{i,k} := a_k \cdot \left[ (r_i)^2 - r_i \cdot (r_{33} + O_k) + r_{33} \cdot O_k \right]$$

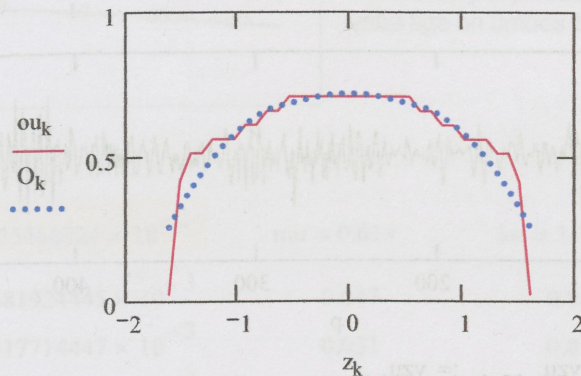
$$U3_{i,k} := \text{if}(r_i < O_k, U1_{i,k}, U2_{i,k})$$

$$AZ_{i,k} := \text{if}(r_i < O_k, 1, -1) \cdot Bz_k \cdot U3_{i,k}$$

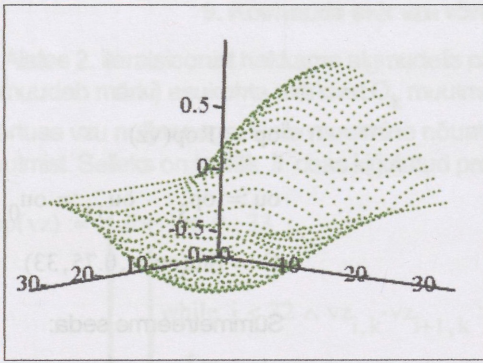
$$AZ_{r_{i,ka}} := 0 \text{ on error } 10^{-4} \cdot \text{srf}(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, AZ)$$

$$AZ_{z_{i,ka}} := 0 \text{ on error } 10^{-4} \cdot \text{szf}(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, AZ)$$

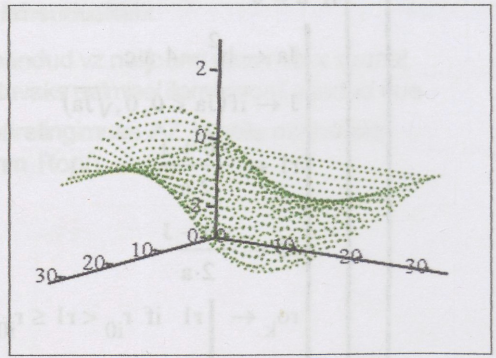
$$AZ_{r_{i,33-ka}} := AZ_{r_{i,ka}} \quad AZ_{z_{i,33-ka}} := -AZ_{z_{i,ka}}$$



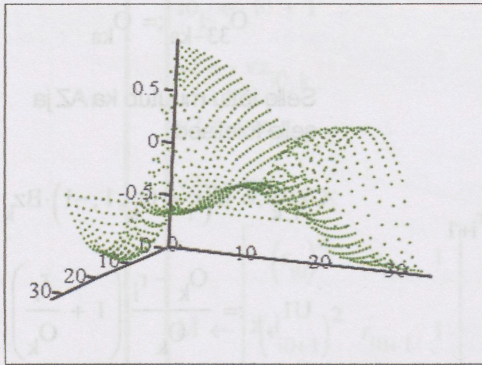
See on O uus väärtus ja all uued ääritingimused ning nende osatuletised r ja z järgi.



AZ



AZr



AZz

$$vab_{i,k} := 10^{-4} \cdot vaz_{i,k}$$

Vajalikud suurused üldlahendi vzu leidmisprogrammile on:

$$vpü_{i,k} := \frac{vp_{i,k+17}}{r_{33}} \cdot AZ_{i,k+17}$$

$$vzü_{i,k} := \frac{vz_{i,k+17}}{16 \cdot \Delta z} \cdot AZ_{i,k+17}$$

$$voü_{i,k} := vp_{i,k+17} \cdot AZr_{i,k+17} + vz_{i,k+17} \cdot AZz_{i,k+17}$$

$$nr := 1 \quad \mu r := 01$$

$$tuz := 1$$

$$ko := 2.3535$$

$$jm := 30$$

$$tm := \text{trunc}\left(\frac{1}{2} \cdot jm\right)$$

$$tm = 15$$

$$pm := jm + (jm + 1) \cdot tm \quad pm = 495$$

p := 0..pm si := 1 μ := 0.5 Pakime W argumendid ühte mssivi U:

$$U_0 := vpü \quad U_1 := vzü$$

$$U_2 := voü \quad U_3 := nr \quad U_4 := nz \quad U_5 := \mu r \quad U_6 := \mu z \quad U_7 := tuz \quad U_8 := vz \quad U_9 := ko$$

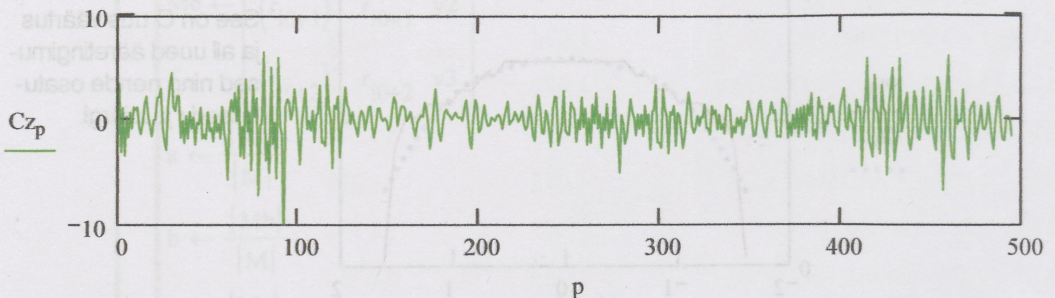
$$U_{10} := jm \quad U_{11} := tm \quad U_{12} := vab \quad U_{13} := si \quad U_{14} := \mu \quad wp := W(U) \quad Cz := wp_0 \quad vas := wp_1$$

$$Su := wp_2 \quad M1 := wp_4 \quad rf := wp_5 \quad D := wp_3 \quad D = 9.92626473302642$$

ko valimiseks:

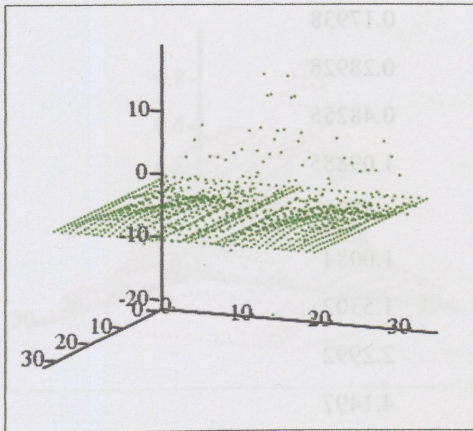
$$kop := 2.3535$$

$$|kop \cdot M1| = 9.92626473302642$$

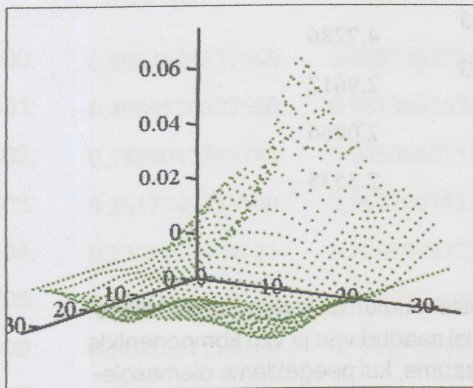


$$vzu_{i,ka} := AZ_{i,ka} \cdot rf_{i,ka-17}$$

$$vzu_{i,33-ka} := vzu_{i,ka}$$



vzu



vzu

parandused ja silumine:

$$vzu_{i,k} := \text{if}(vzu_{i,k} < 0 \wedge r_i < O_k, -vzu_{i,k}, vzu_{i,k})$$

$$vzu_{i,k} := \text{if}(vzu_{i,k} > 0 \wedge r_i > O_k, -vzu_{i,k}, vzu_{i,k})$$

Silumie:  $vzu := \text{Smrv}(vzu, 0.5, 0.5)$

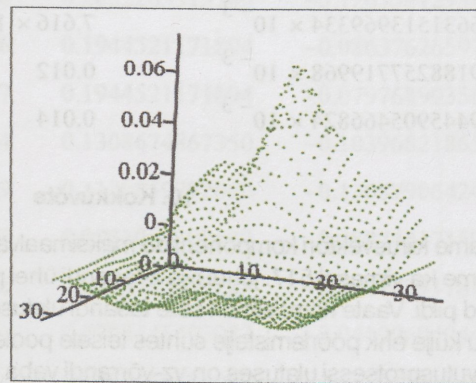
Silumine rikub ääreväärtuste nullisid.

$$vzu_{i,0} := 0 \quad vzu_{i,33} := 0 \quad vzu_{33,k} := 0$$

Säilitame sisendi suuruse

$$\mu := \frac{\max(vz) - \min(vz)}{\max(vz) + \min(vz)} \quad vzu := vzu - \mu v$$

Keskmistame sisendiga:  $vzu := 0.5 \cdot (vzu + vz)$



Võrrandi poolte kokkulangevus:

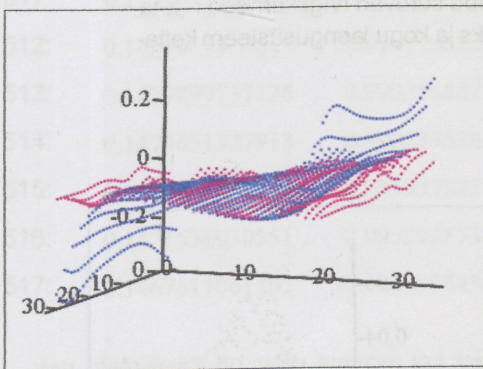
$$vau_{i,ka} := vas_{i,ka-17}$$

$$vau_{i,33-ka} := -vau_{i,ka}$$

$$vzu := S\ddot{u}(vzu)$$

$$\max(vzu) = 0.071697034806224$$

$$\min(vzu) = -0.01303612562707$$



vab, vau

Pilt näitab, et lähendus on teistest halvem. vaz ei ole hea lähendada Besseli funktsiooniga. Natu-ke paraneb see, kui z-suunas asendada Besseli funktsioon siinusega. Teistest väiksem hälvetesumma on põhjendatav asjaoluga, et vz-võrrandi vaba liige on umbes 100x väiksem teiste omast.

$$Su = 3.69445905466824 \times 10^{-3}$$

$$\mu = 0.014$$

$$ko = 2.3535$$

$$nr = 1$$

$$500: 4.44577681924445 \times 10^{-3}$$

$$0.047$$

$$0.056354$$

$$1$$

$$501: 4.85969417714447 \times 10^{-3}$$

$$0.031$$

$$0.08463$$

$$1$$

$$502: 4.65398778820352 \times 10^{-3}$$

$$0.027$$

$$0.12927$$

$$1$$

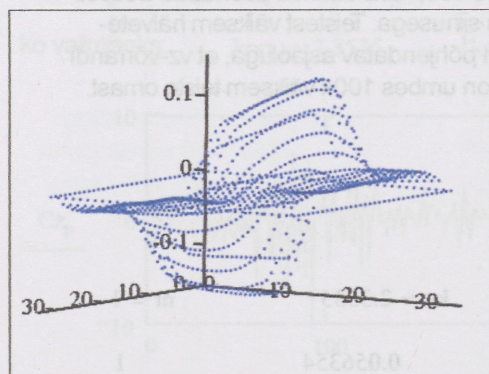
503:	$4.48645616273857 \times 10^{-3}$	0.059	0.17938
504:	$4.45201999992585 \times 10^{-3}$	0.025	0.28928
505:	$4.53509798545436 \times 10^{-3}$	0.019	0.48255
506:	$4.50913235201811 \times 10^{-3}$	0.012	1.09885
507:	$4.35156971213895 \times 10^{-3}$	0.012	1.6728
508:	$4.59451427530854 \times 10^{-3}$	0.01	1.0084
509:	$4.70246110192756 \times 10^{-3}$	$8.489 \times 10^{-3}$	1.5302
510:	$4.49399568760535 \times 10^{-3}$	$3.041 \times 10^{-3}$	2.2992
511:	$4.17904211735296 \times 10^{-3}$	$1.592 \times 10^{-3}$	4.1497
512:	$4.00691697838924 \times 10^{-3}$	$8.294 \times 10^{-4}$	5.4822
513:	$3.85664746367397 \times 10^{-3}$	$2.774 \times 10^{-3}$	5.6455
514:	$4.02193174849373 \times 10^{-3}$	$8.533 \times 10^{-3}$	4.7286
515:	$3.96631513969334 \times 10^{-3}$	$7.616 \times 10^{-3}$	2.9612
516:	$3.89188257719968 \times 10^{-3}$	0.012	2.0066
517:	$3.69445905466824 \times 10^{-3}$	0.014	2.3535

### 10. Kokkuvõte

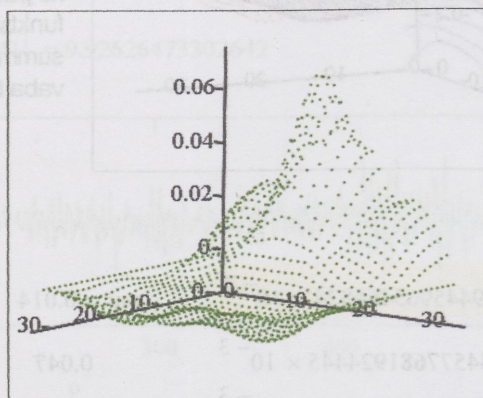
Siin näitame kiirusvektori komponentide maksimaalväärtuste muutumist iteratsioonide käigus ja joonistame ka viimasel 517. juhul r- ja z-tasandi ühel poolel saadud v<sub>pu</sub> ja v<sub>zu</sub> komponentide poolt antud pildi. Vaate kogu silindri selle tasandi ulatuses saame, kui peegeldame olemasolevat vasaku külje ehk pöörlemistele suhtes teisele poole.

Kogu arvutusprotsessi ulatuses on vz-võrrandi vaba liige vaz umbes 100 x väiksem v<sub>p</sub>-võrrandi omast vap. See ütles, et ilmselt peab v<sub>zu</sub> olema väiksem kui v<sub>pu</sub>. Seepärast sai juba algmudeli korral võetud vz amplituudi 2 korda väiksemaks, võrreldes v<sub>p</sub> omaga, et vaadeldaval pildil tekiks ringliikumisele lähedane pilt. Selliseks jätsime kogu protsessi vältel v<sub>zu</sub> ja v<sub>pu</sub> amplituudide suhte. Seda reguleerisime siin, kui eespoolne seda muutis. Et pilt ei jäänud ringjoonte kujuliseks, tähendab magnetiliste tõmbejõudude mõju – nad suruvad ringliikumised r-z-tasandil kokku nii, et ringliikumine muutub pika ovaali kujuliseks ja kogu laengusüsteem ketta-kujuliseks.

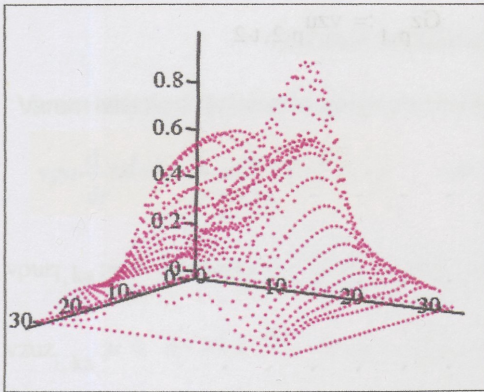
$$v_{zu} := \frac{0.5 \cdot \max(v_{pu})}{\max(v_{zu})} \cdot v_{zu} \quad \frac{\max(v_{zu})}{\max(v_{pu})} = 0.5$$



v<sub>pu</sub>



v<sub>zu</sub>



$v_{\phi u}$

$v_{\phi u}$  suurust muudame allpool nii, et süsteemi impulsimoment saaks võrdseks elektroni spinniga. Selles on ka erinevus II osa arvutusega. Seal muutsime mainitud eesmärgil kogukiiruse amplituudi, kuid see ei ole põhjendatud, sest  $v_{\phi u}$  ega  $v_{z u}$  ei mõjuta impulsimomendi z-telje suunalist komponenti.

$v_{\phi u}$  võtsime alati positiivse. Selle väärtus pöörlemisteljel peab olema 0 ja ei saa ka omada negatiivseid väärtusi.

$$\min(v_{\phi u}) = 0$$

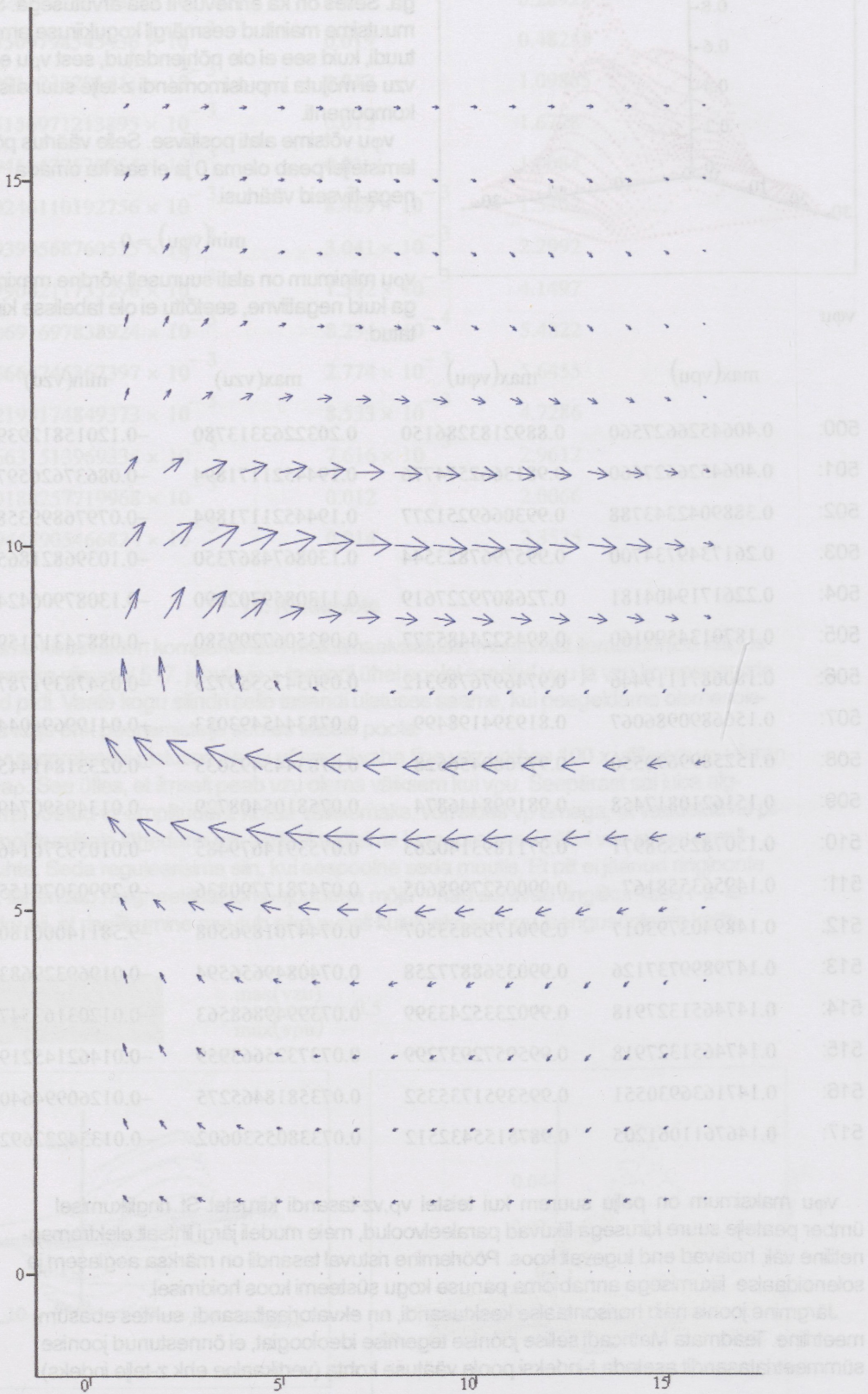
$v_{\phi u}$  miinimum on alati suuruselt võrdne maximumiga kuid negatiivne, seetõttu ei ole tabelisse kirjutatud.

	$\max(v_{\phi u})$	$\max(v_{\phi u})$	$\max(v_{z u})$	$\min(v_{z u})$
500:	0.4064526627560	0.8892183286150	0.2032263313780	-0.1201581293995
501:	0.4064526627560	0.9813662574776	0.1944521171894	-0.0863762659765
502:	0.3889042343788	0.9930669251277	0.1944521171894	-0.0797689935877
503:	0.2617349734700	0.9957967823544	0.1308674867350	-0.103968218654
504:	0.2261719404181	0.7268079227619	0.1130859702090	-0.1308790642451
505:	0.1870134599160	0.8945224485377	0.0935067299580	-0.0887431715964
506:	0.1806871119446	0.9746976789312	0.0903435559723	-0.0547839178753
507:	0.1566890986067	0.819394198499	0.0783445493033	-0.0419969404467
508:	0.1525899690550	0.977080456528	0.0783445493033	-0.0233184144563
509:	0.1516210817458	0.981998446874	0.0758105408729	-0.0134959074986
510:	0.1507829358971	0.9711893140263	0.0753914679485	-0.0105957614611
511:	0.149563558167	0.9900527998605	0.0747817790836	$-9.299030791557 \times 10^{-3}$
512:	0.1489403793017	0.9901795853507	0.0744701896508	$-9.581140001804 \times 10^{-3}$
513:	0.1479899737126	0.9903568877258	0.0740849656594	-0.0196932968382
514:	0.1474651327918	0.9902335243399	0.0739949868563	-0.0120316354793
515:	0.1474651327918	0.9959572937299	0.0737325663959	-0.0146214521948
516:	0.1471636930551	0.9953951735352	0.0735818465275	-0.0126099464052
517:	0.1467611061205	0.9875155432512	0.0733805530602	-0.0133422269256

$v_{\phi u}$  maksimum on palju suurem kui teistel  $v_{\phi}$ ,  $v_z$ -tasandi kiirustel. St ringliikumisel ümber peatelje suure kiirusega liikuvad paraleelvoolud, meie mudeli järgi lihtsalt elektromagnetiline väli, hoiavad end tugevalt koos. Pöörlemine ristuv tasandil on märksa aeglasem ja solenoidaalse liikumisega annab oma panuse kogu süsteemi koos hoidmisel.

Järgmine joonis näib horisontaalse kesktasandi, nn ekvatoriaaltasandi, suhtes ebasümmeetriline. Teadmata Mathcadi sellise joonise tegemise ideoloogiat, ei õnnestunud joonise sümmeetrilist asetada t-indeksi poole väärtuse kohta (vertikaalne ehk z-telje indeks).

$p := 1..16$     $t := 1..16$     $Gr_{p,t} := vpu_{p,2,t,2}$     $Gz_{p,t} := vzu_{p,2,t,2}$



(Gr, Gz)

## 11. Edasi tuleb lahendada $\tau$ võrrand

Varem tuletatud võrrand on (programmi srf()) ja szf() kohta vaata selgitusi 4. punktist):

$$vpu \cdot \frac{d}{dr} \ln(\tau) + vzu \cdot \frac{d}{dz} \ln(\tau) = \text{var} \quad \text{var} = \frac{d}{dr} vpu - \frac{d}{dz} vzu - \frac{vpu}{r} \quad \text{Arvutame vaba liikme:}$$

$$vpu_{i,ka} := 0 \text{ on error } 10^{-4} \cdot \text{srf}(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, vpu) \quad vpu_{i,33-ka} := -vpu_{i,ka}$$

$$vzuz_{i,ka} := 0 \text{ on error } 10^{-4} \cdot \text{szf}(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, vzu) \quad vzuz_{i,33-ka} := -vzuz_{i,ka} \quad v\rho_{j1,k} := \frac{vpu_{i1,k}}{r_{i1}}$$

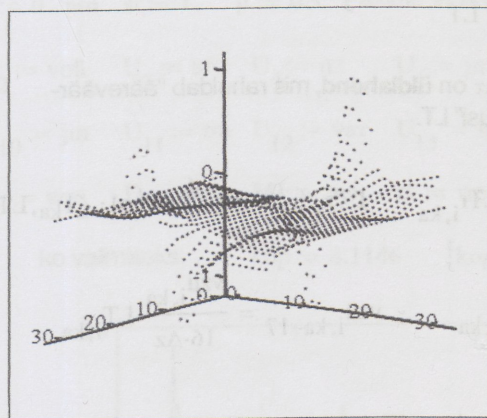
$$v\rho_j := \text{Ex}(v\rho_j) \quad \text{var}_{i,k} := -vpu_{i,k} - vzuz_{i,k} - v\rho_{j1,k} \quad \text{Kõik liidetavad on assümmeetrilised}$$

ja kuna  $z = 0$  pinnal esineb järske hüppeid, on Smrv() silumisel soovitatav teha silutav esmalt sümmeetriliseks, siluda ja pärast seda muuta tulemus tagasi assümmeetriliseks.

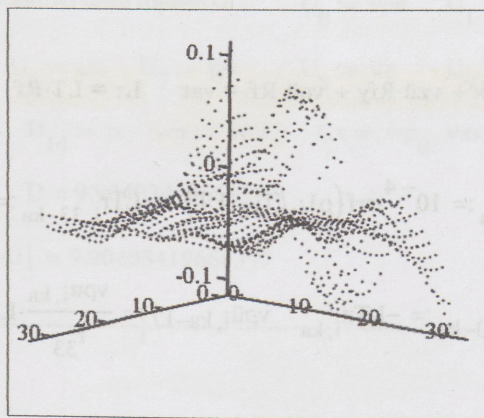
$$\text{var}_{i,ka} := \text{var}_{i,33-ka}$$

$$\text{var} := \text{Smrv}(\text{var}, 0.75, 0.75)$$

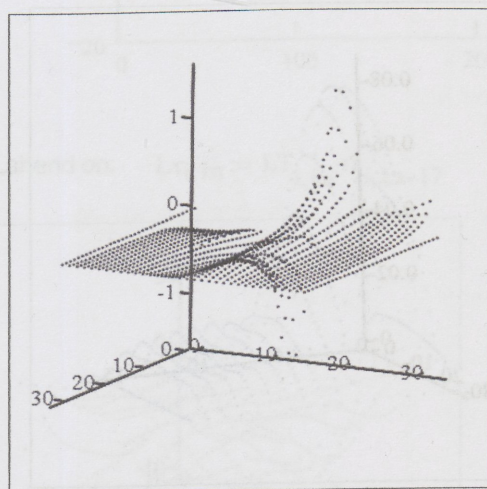
$$\text{var}_{i,ka} := -\text{var}_{i,33-ka}$$



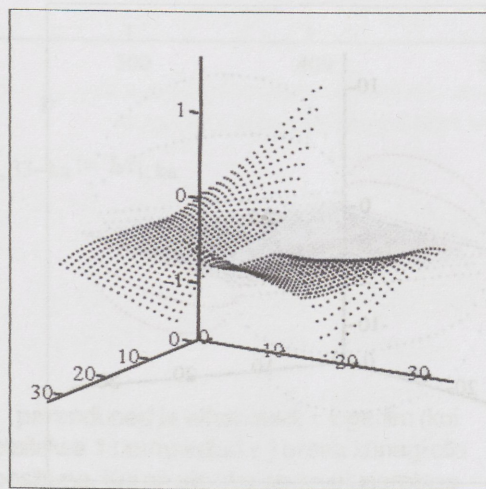
vpur



vzuz



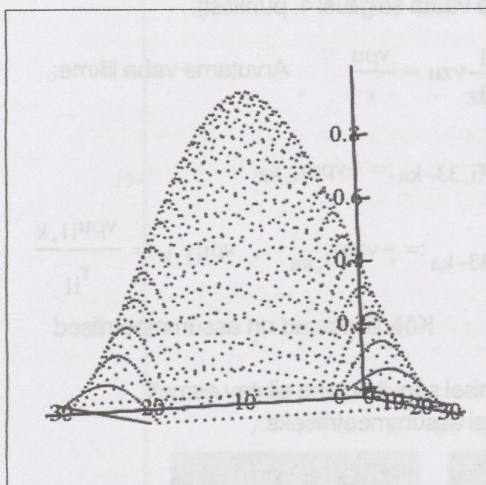
v\rho\_j



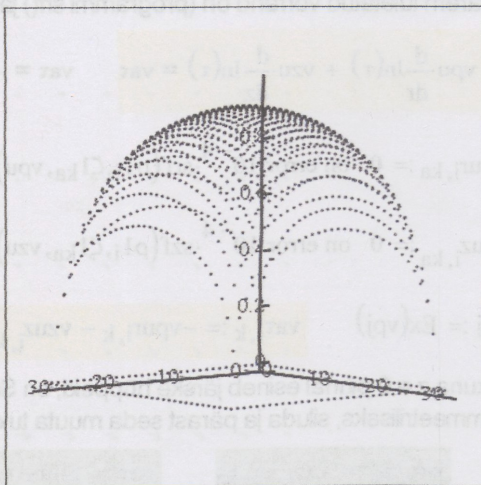
var

$L_\tau = \ln(\tau)$ -le ääritingimusi annme AJ logaritmiga. Kuna 0 logaritm on määramatu, asendame selle mingi sobiva negatiivse arvuga. Sobivamaks osutus -2.

$$LT_{i,k} := -2 \text{ on error } \ln(AJ_{i,k}) + 4 \quad mn := \min(LT) \quad LT := LT - mn \quad LT := \frac{LT}{\max(LT)}$$



AJ



LT

$$vpü \cdot Rfx + vzü \cdot Rfy + voü \cdot Rf = var$$

$$L\tau = LT \cdot Rf$$

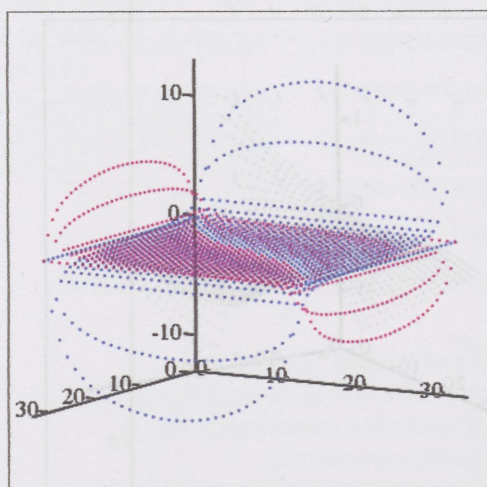
$L\tau$  on üldlahend, mis rahuldab "ääreväärtus" LT.

$$LTr_{i,ka} := 10^{-4} \cdot srf(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, LT) \quad LTr_{i,33-ka} := LTr_{i,ka} \quad LTz_{i,ka} := 10^{-4} \cdot szf(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, LT)$$

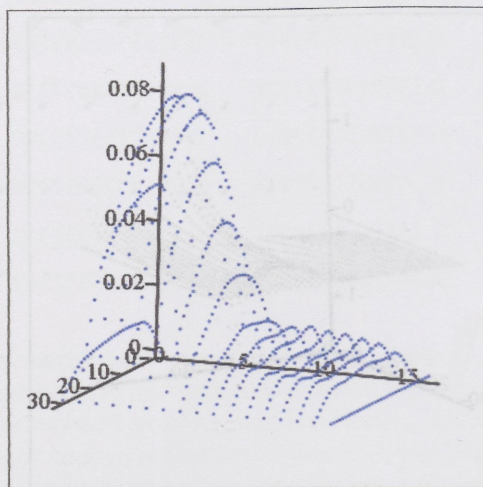
$$LTz_{i,33-ka} := -LTz_{i,ka} \quad vpü_{i,ka-17} := \frac{vpü_{i,ka}}{r_{33}} \cdot LT_{i,ka} \quad vzü_{i,ka-17} := \frac{vzu_{i,ka}}{16 \cdot \Delta z} \cdot LT_{i,ka}$$

$$voü_{i,ka-17} := vpü_{i,ka} \cdot LTr_{i,ka} + vzu_{i,ka} \cdot LTz_{i,ka}$$

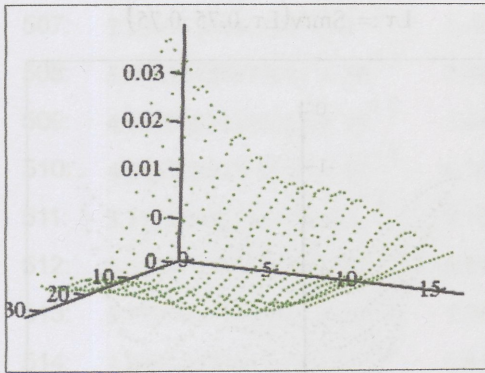
$$ka - 17 = \kappa$$



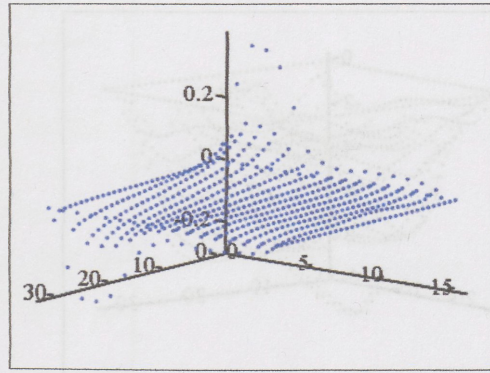
LTr, LTz



vpü



vzü



voü

Määrame funktsioonide numbrid LT järgi:

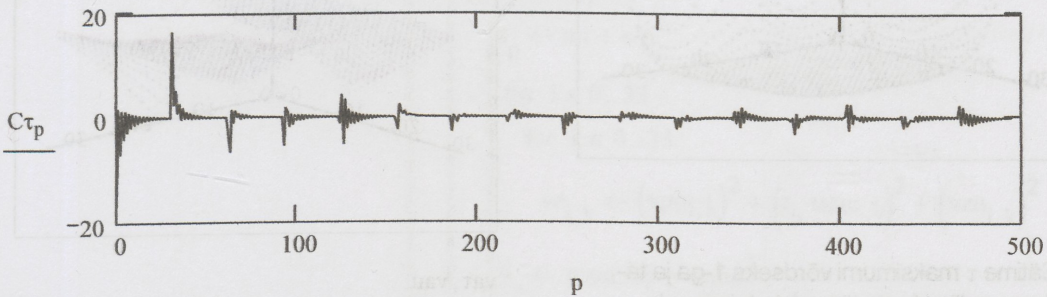
```
ko := 4.1146  jm := 30  tm := trunc(1/2 * jm)
```

```
nr := 1  μr := 01  nz := 0  μz := 00  tuz := 0
```

```
tm = 15  pm := jm + (jm + 1) * tm  pm = 495
```

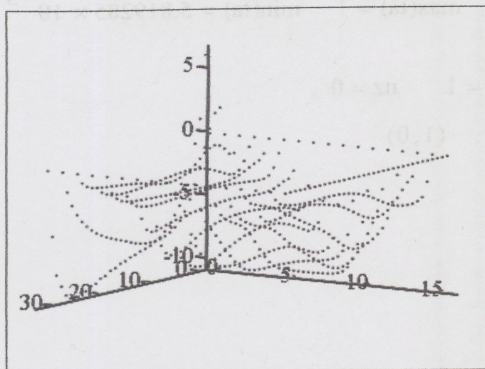
```
p := 0..pm  si := 1  μ := 0.5  Pakime W argumentid ühte mssivi U:  U0 := vpü  U1 := vzü
U2 := voü  U3 := nr  U4 := nz  U5 := μr  U6 := μz  U7 := tuz  U8 := vz  U9 := ko
U10 := jm  U11 := tm  U12 := var  U13 := si  U14 := μ  wp := W(U)  Cτ := wp0  vas := wp1
Su := wp2  D := wp3  M1 := wp4  rf := wp5  D = 9.90403419666397
```

```
ko valimiseks:  kop := 4.1146  |kop·M1| = 9.90403419666397
```



Lahend on:  $L\tau_{i,ka} := L\tau_{i,ka} \cdot rf_{i,ka-17}$

$L\tau_{i,33-ka} := L\tau_{i,ka}$

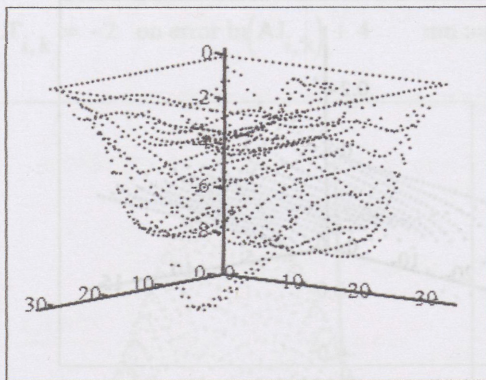


rf

**parandused ja silumised:**  $\tau$  logaritm (kui otsitakse 1 normeeritud  $\tau$ ) ei saa kunagi olla positiivne. Kui on siis see on arvutusprotsessi märgiveast tingitud.

$$L\tau_{i,k} := \text{if}(L\tau_{i,k} > 0, -L\tau_{i,k}, L\tau_{i,k})$$

Silumisele kuuluv on:

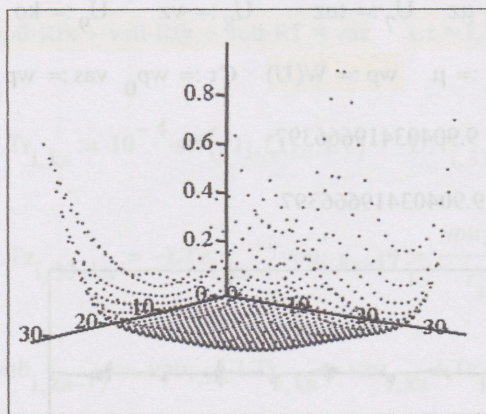
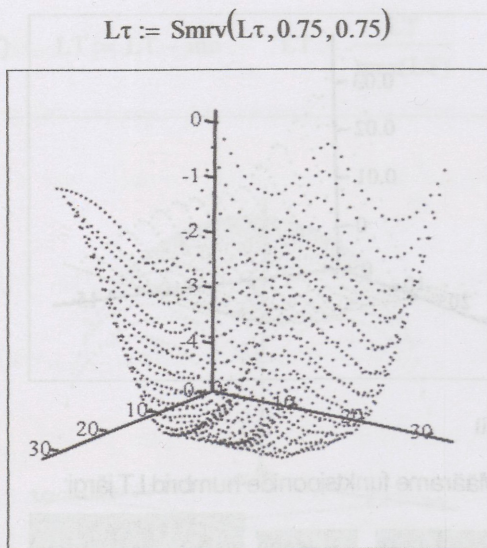


Lτ

$$C1 := -\max(L\tau) \quad \tau_{i,k} := e^{L\tau_{i,k} + C1}$$

$$\tau := \text{Sü}(\tau) \quad \min(\tau) = 8.19081869320241 \times 10^{-3} \quad L\tau$$

Keskmine sisendiga.  $\tau := 0.5 \cdot (\tau + \tau_a)$



τ

Sätime τ maksimumi võrdseks 1-ga ja tähistame sellise ta-ga järgmiste toimingute jaoks.

$$\tau_m := \max(\tau) \quad \tau_a := \frac{\tau}{\tau_m} \quad \tau_{i,k} := \text{if}(\tau_{i,k} < 0, 0, \tau_{i,k}) \quad \max(\tau_a) = 1 \quad \min(\tau_a) = 5.819285 \times 10^{-3}$$

$$Su = 6.64104779235438 \times 10^{-3} \quad ko = 4.1146 \quad nr = 1 \quad nz = 0$$

500: 0.022817119979614 0.21923 (1,0)

501: 0.027758836525663 0.21923

502: 0.029532169128147 0.21923

503: 0.015425773449584 0.5408

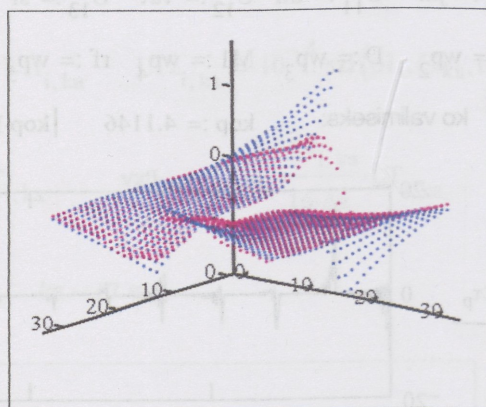
504: 0.013212952070356 0.88035

505:  $9.53137925262298 \times 10^{-3}$  1.8989

506:  $6.59951800099258 \times 10^{-3}$  2.7496

Võrrandi poolte kokkulangevus:

$$\text{vau}_{i,ka} := \text{vas}_{i,ka-17} \quad \text{vau}_{i,33-ka} := -\text{vau}_{i,ka}$$



vat, vau

507:	$7.1343136531234 \times 10^{-3}$	1.4847
508:	$5.49433486477041 \times 10^{-3}$	2.4616
509:	$4.58960634310055 \times 10^{-3}$	3.6482
510:	$4.64612362710757 \times 10^{-3}$	6.7077
511:	$5.1110268543677 \times 10^{-3}$	9.1057
512:	$5.52487048891994 \times 10^{-3}$	8.8903
513:	$5.75774994765314 \times 10^{-3}$	7.9693
514:	$5.80962076482296 \times 10^{-3}$	5.8473
515:	$6.38179870246539 \times 10^{-3}$	3.8386
516:	$6.49041870327783 \times 10^{-3}$	4.408
517:	$6.64104779235438 \times 10^{-3}$	4.1146

## 12. Laengusüsteemi impulsimomendi sättimine võrreldavaks elektroni spinniga

Järgmine programm arvutab kordaja  $tx$ , millega tuleks  $v\varphi$  korrutada, et selle amplituud saaks võrdseks sinisega märgitud väärtusega. Käsitsi on seda raske teha. Käsitsi reguleerime ainult sinise arvu viimaseid kümnendkohti. See on vajalik süsteemi impulsimomendi reguleerimiseks nii, et järgmine programm **võrdlus()** annaks suhtele elektroni spinniga 1 lähedase väärtuse.

```
vquamuuut(tun, vemu, mi, mx, pm) :=
  if tun = 1
    s ←  $\frac{mx - mi}{pm}$ 
    for p ∈ 0..pm
      tp ← mi + s·p
      for i ∈ 0..33
        for k ∈ 0..33
          vei,k ←  $(v\varphi_{i,k})^2 + (t_p \cdot v\varphi_{i,k})^2 + (vzu_{i,k})^2$ 
          yp ← max(ve) - vemu2
    av ← 1 otherwise
    for p ∈ 1..pm - 1
      if yp·yp+1 < 0
        a ←  $\frac{1}{2 \cdot s^2} \cdot (y_{p+1} - 2 \cdot y_p + y_{p-1})$ 
        b ←  $\frac{y_{p+1} - y_{p-1}}{2 \cdot s} - 2 \cdot a \cdot t_p$ 
        c ← yp - a·(tp)2 - b·tp
        tx ←  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ 
```

```

| px ← p
| av ← 2 otherwise

```

```

for i ∈ 0..33

```

```

  for k ∈ 0..33

```

$$ve_{i,k} \leftarrow \sqrt{(v\rho u_{i,k})^2 + (tx \cdot v\varphi u_{i,k})^2 + (vzu_{i,k})^2}$$

```

vä0 ← y

```

```

vä1 ← tx

```

```

vä2 ← px

```

```

vä3 ← max(ve)

```

```

vä

```

vemu := 0.9999999999874

tun := 1 yp := vϕuamut(1, vemu, 0.75, 2.5, 100) tx := yp<sub>1</sub>

tx = 1.00973912436985

vem := yp<sub>3</sub>

vem = 0.9999999999874

vϕu := tx · vϕu

Kas ei tekkinud imaginaarsust? Kontroll:

$$ve_{i,k} := (v\rho u_{i,k})^2 + (v\varphi u_{i,k})^2 + (vzu_{i,k})^2$$

$$ju_{i,k} := \text{Im}(\sqrt{1 - ve_{i,k}})$$

$$\max(ju) = 0$$

$$\min(ju) = 0$$

Vajalikud arvutused, mis on seotud süsteemi impulsimomendi ja elektroni spinni suhte määramisega, kaasa haaratud ka "ta" normeerimine, on vormistatud programmina "võrdlus".

**Konstant ko avaldises muutub, kui välja mõõtmised muutuvad!**

võrdlus(ta, vρ, vϕ, vz) :=

$$ko \leftarrow \frac{2.730969971695}{\sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{33} ta_{i,k} \cdot \rho 1_i}$$

$$kor \leftarrow ko \cdot 10^{-25}$$

$$su \leftarrow \sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{33} \frac{ta_{i,k} \cdot v\varphi_{i,k} \cdot (\rho 1_i)^2}{\sqrt{1 - (v\rho_{i,k})^2 - (v\varphi_{i,k})^2 - (vz_{i,k})^2}}$$

$$\text{Imz} \leftarrow kor \cdot su$$

$$h \leftarrow 6.626176 \cdot 10^{-27}$$

$$\text{spip} \leftarrow \frac{4 \cdot \pi}{h}$$

$$\text{suhspi} \leftarrow \text{spip} \cdot \text{Imz}$$

$$vä_0 \leftarrow ko$$

$$vä_1 \leftarrow \text{spip}$$

$$vä_2 \leftarrow su$$

$$vä_3 \leftarrow \text{suhspi}$$

|vä

vä := võrdlus(ta, v<sub>pu</sub>, v<sub>φu</sub>, v<sub>zu</sub>)

$$vä = \begin{pmatrix} 274.827810496366 \\ 1.89647401674196 \times 10^{27} \\ 1.93679514238159 \times 10^{-5} \\ 1.00946499129324 \end{pmatrix}$$

kor ilma astmeta 10<sup>-25</sup>.

spip, spinni pöördväärtus

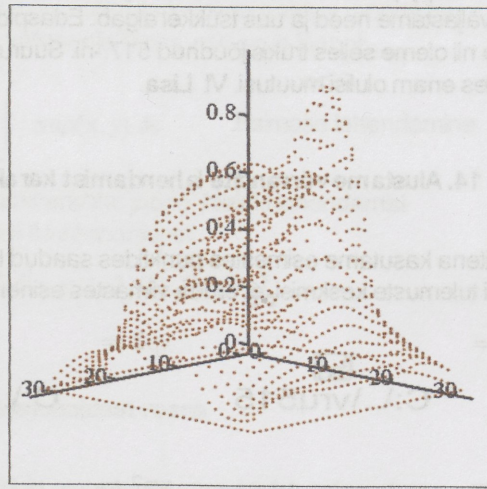
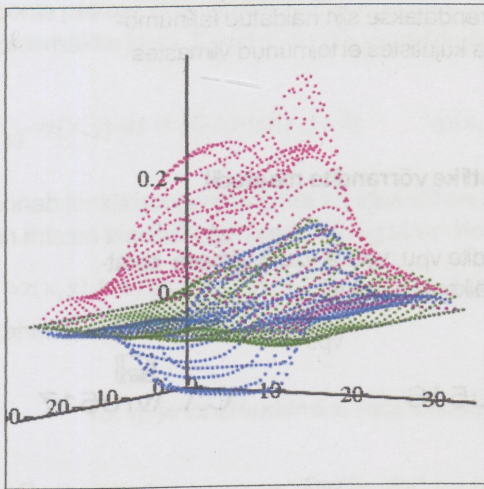
su, kahekordne summa

suhspi juhul, kui tegu on käesoleva läbijooksu kiiruste ja jaotusega.

	suhspi	vm			
500:	8.24923271662659 × 10 <sup>-3</sup>	0.999	algmudel ei võimaldanud suhspi 1 lähedale tõsta.		
501:	0.315714320566285	0.99999999999999			
502:	1.00083957708316	0.99999999999863	kiiruse moodul reguleeritud nii, et shsp tuleks 1 lähedale v <sub>φu</sub> muutmisega. Täpselt üheks reguleerimisele ei ole mingit mõistlikku selgitust		
503:	1.00623858938283	0.99999999999939			
504:	1.00681369880523	0.99999999999936	511:	1.0031738317497	0.9999999999901
505:	1.00927247361518	0.99999999999947	512:	1.00000336224666	0.9999999999938
506:	1.00361219492716	0.99999999999969	513:	1.00192983311716	0.9999999999956
507:	1.00388958167369	0.99999999999942	514:	1.00156275354826	0.9999999999946
508:	1.00389823005051	0.99999999999999	515:	1.00692348044467	0.9999999999935
509:	1.00022472246545	0.99999999999825	516:	1.00467856947133	0.9999999999926
510:	1.00144201130117	0.99999999999875	517:	1.00946499129324	0.99999999999874

$$vm_{i,k} := \sqrt{(v_{pu_{i,k}})^2 + (v_{\phi_{i,k}})^2 + (v_{zu_{i,k}})^2}$$

$$\max(vm) = 0.99999999999874$$



v<sub>pu</sub>, v<sub>φu</sub>-0.4, v<sub>zu</sub>-2

vm

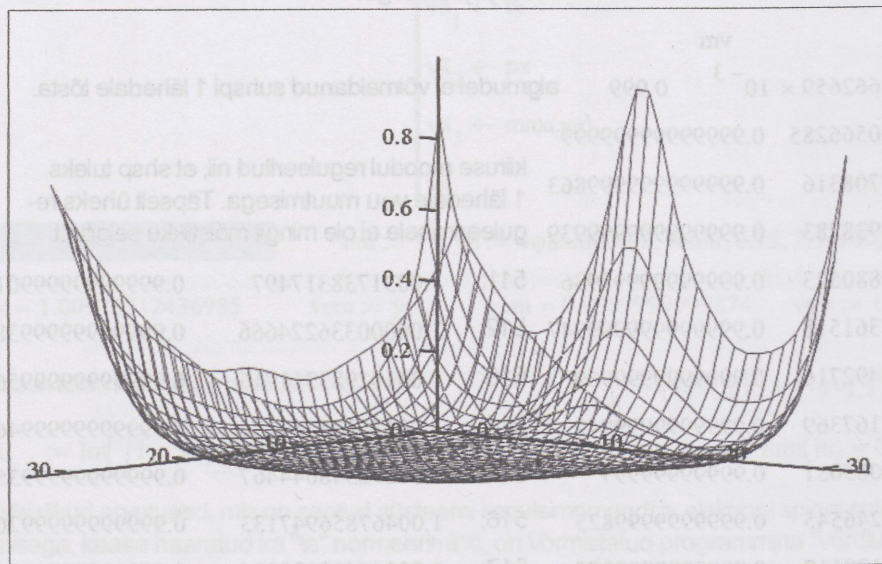
NB! v<sub>φu</sub> on kujutatud vähendatult (punane) ja v<sub>zu</sub> suurendatult (roheline).

### 13. $\tau$ normeerimine, tulemuste väljastamine ja siirdumine tagasi 3. punkti

$$I\tau := Jn\tau(ta) \quad A\tau := \frac{10^{24}}{I\tau} \quad I\tau = 2.30120554308749 \times 10^{-12} \quad \text{Nii on siis nüüd } \tau(\rho, \zeta) \text{ valemiks}$$

$$\tau(\rho, \zeta) = A\tau \cdot Gfu(\rho, \zeta, ta, im, km) \quad A\tau = 4.3455483713911 \times 10^{35}$$

$$\text{Arvutame ilma üldkordajata} \quad \tau_{i,k} := Gfu(\rho_{1i}, \zeta_{1k}, ta, im, km) \quad \min(\tau) = 5.8193 \times 10^{-3}$$



$\tau$

Väljastame tulemused ( $v_{\rho u}$ ,  $v_{\varphi u}$ ,  $v_{z u}$ ,  $ta$ ) failidesse **vru501**, **vju501**, **vzu501**, **tu501** alates ja võtame copy-paste meetodil  $A\tau$  kaasa ja läheme iteratsiooniprotsessi algusesse **punkti 3**. Seal väljastame need ja uus tsükkel algab. Edaspidi suurendatakse siin näidatud failinumbreid ja nii oleme selles trükkis jõudnud 517.-ni. Suurustes ja kujutistes ei toimunud viimastes tsükklites enam olulisi muutusi. Vt **Lisa**.

### 14. Alustame võrrandite lahendamist karakteristlike võrrandite meetodil










Näitena kasutame esimestes punktides saadud lahendite  $v_{\rho u}$ ,  $v_{\varphi u}$  ja  $v_{z u}$  3 viimase iteratsiooni tulemuste keskmisi, et siluda viimastes esinenud väikseid muutusi.

$$v_{\rho 1} := \text{C:\..lvru515} \quad v_{\rho 2} := \text{C:\..lvru516} \quad v_{\rho 3} := \text{C:\..lvru517}$$

$$v_{\varphi 1} := \text{C:\..lvju515} \quad v_{\varphi 2} := \text{C:\..lvju516} \quad v_{\varphi 3} := \text{C:\..lvju517}$$

$$v_{z 1} := \text{C:\..lvzu515} \quad v_{z 2} := \text{C:\..lvzu516} \quad v_{z 3} := \text{C:\..lvzu517}$$

Ja võrrandite vabad liikmed olid:

vap1 :=		vap2 :=		vap3 :=	
	C:\..\var515		C:\..\var516		C:\..\var517
vap1 :=		vap2 :=		vap3 :=	
	C:\..\vaj515		C:\..\vaj516		C:\..\vaj517
vaz1 :=		vaz2 :=		vaz3 :=	
	C:\..\vaz515		C:\..\vaz516		C:\..\vaz517

Arvutame 3 keskmise:

$$vp := \frac{1}{3} \cdot (vp1 + vp2 + vp3) \quad v\varphi := \frac{1}{3} \cdot (v\varphi1 + v\varphi2 + v\varphi3) \quad vz := \frac{1}{3} \cdot (vz1 + vz2 + vz3)$$

$$vap := \frac{1}{3} \cdot (vap1 + vap2 + vap3) \quad va\varphi := \frac{1}{3} \cdot (va\varphi1 + va\varphi2 + va\varphi3) \quad vaz := \frac{1}{3} \cdot (vaz1 + vaz2 + vaz3)$$

Konkreetsuse mõttes võtame ette vp võrrandi (karakteristikud on kõigil samad):

$$\frac{vp}{r_{33}} \cdot \frac{d}{dx} vp + \frac{vz}{16 \cdot \Delta z} \cdot \frac{d}{dy} vp = vab$$

$$vab_{i,k} := 10^{-4} \cdot vap_{i,k}$$

Lineaarse osatuletistega dif-võrrandi karakteristikud võrrandid kirjutatakse järgmiselt:

$$r_{33} \cdot \frac{dx}{vp} = 16 \cdot \Delta z \cdot \frac{dy}{vz} = \frac{dvp}{vab} = ds$$

Need on täisdiferentsiaalsed võrrandid, milledest esimese

võrduse lahendamiseks leitakse karakteristikud jooned ja viimases võrduses on ds nende joonte pikkuse diferentsiaal ning see võrdus võimaldab vp määrata joonintegraaliga mööda karakteristiklike jooni. Tulemus annab vp väärtuse selle väljapunkti jaoks, mis asub joonel:

$$r_{33} \cdot vz(x,y) \cdot dx = 16 \cdot \Delta z \cdot vp(x,y) \cdot dy \quad vp(x,y) = \int vap(x,y) ds \quad \text{Esimese lahendamine}$$

annab funktsiooni  $y = y(x)$ , mis x,y tasandil annab karakteristikliku joone. Neidki lahendamisi on lihtsam teostada, kui arendada vp ja vz ritta Besseli funktsioonidest.

$$vz(x,y) = Rf(x,y,0,0,00,00,Cz) \quad vp(x,y) = Rf(x,y,1,0,01,00,Cp)$$

Lahenduskäiku selgitame allpool.

### 15. vp ja vz arendamine ritta Besseli funktsioonidest reana

Reaksarendus on sama, mis ülevalgi kasutatud. Kuid arvutusprogramm tuleb mõnevõrra lihtsam, sest rida võrdub vp-ga ja määratavaks jäävad realikmete kordajad C. Määramisviis on sama – hälvetesumma peab saavutama miinimumi ( $v = vp$  või  $vz$ ).

$$Wv(jm, tm, nr, nz, \mu r, \mu z, ko, v) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..33 \\ \text{for } j \in 0..jm \\ Si_{i,j} \leftarrow Ji(nr, \mu r_j \cdot x_i) \end{cases}$$

for ka ∈ 17..33

for t ∈ 0..tm

$$C_{i,ka-17,t} \leftarrow J_i(nz, \mu z_t y_{ka-17})$$

for j1 ∈ 0..jm

for t1 ∈ 0..tm

$$V_{j1+(jm+1)\cdot t1} \leftarrow \sum_{i=0}^{33} \sum_{ka=17}^{33} v_{i,ka} \cdot Si_{i,j1} \cdot Ci_{ka-17,t1}$$

for j ∈ 0..jm

for t ∈ 0..tm

for j1 ∈ 0..jm

for t1 ∈ 0..tm

$$n \leftarrow j + (jm + 1) \cdot t$$

$$n1 \leftarrow j1 + (jm + 1) \cdot t1$$

$$a \leftarrow \sum_{i=0}^{33} \sum_{ka=17}^{33} Si_{i,j} \cdot Ci_{ka-17,t} \cdot Si_{i,j1} \cdot Ci_{ka-17,t1}$$

$$M_{n,n1} \leftarrow a$$

nm ← jm + (jm + 1) · tm

D ← |ko · M|

for p2 ∈ 0..nm

for p1 ∈ 0..nm

for p3 ∈ 0..nm

$$b_{p1,p3} \leftarrow M_{p1,p3}$$

for p1 ∈ 0..nm

$$b_{p1,p2} \leftarrow V_{p1}$$

$$C_{p2} \leftarrow \frac{|ko \cdot b|}{D}$$

for i ∈ 0..33

for ka ∈ 17..33

$$vL_{i,ka} \leftarrow \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1)\cdot t} \cdot Si_{i,j} \cdot Ci_{ka-17,t}$$

ja ← 34 · 17 · (34 · 17 - 1)

$$Su \leftarrow \sqrt{\frac{1}{ja} \sum_{i=0}^{33} \sum_{ka=17}^{33} (vL_{i,ka} - v_{i,ka})^2}$$

vā<sub>0</sub> ← M

vā<sub>1</sub> ← D

vä<sub>2</sub> ← C  
 vä<sub>3</sub> ← vL  
 vä<sub>4</sub> ← Su  
 vä<sub>5</sub> ← V  
 vä

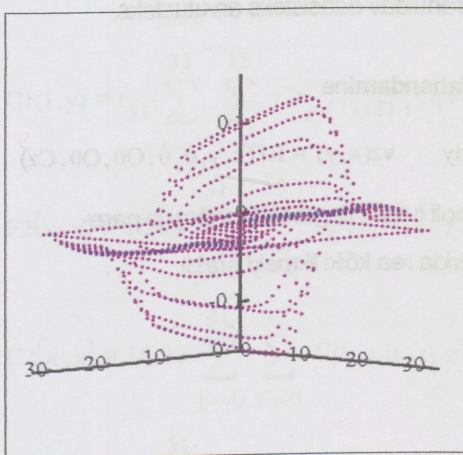
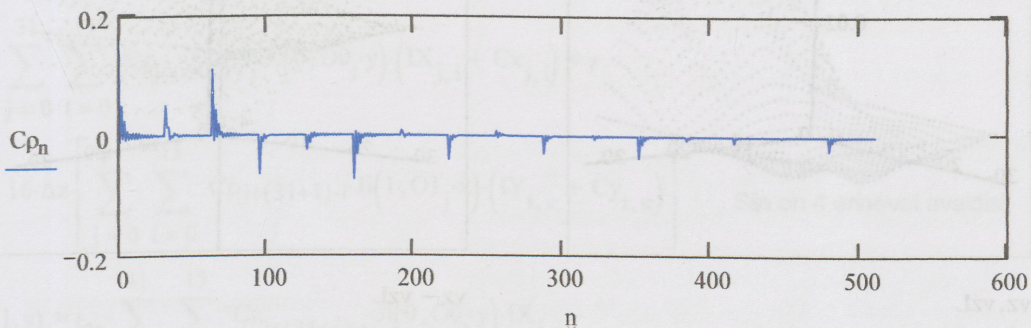
jm := 31 tm := 15 nr := 1 μr := 01 nz := 0 μz := 00 nm := jm + (jm + 1)·tm

ko := 2.03 w := Wv(jm, tm, nr, nz, μr, μz, ko, vp) M := w<sub>0</sub> D := w<sub>1</sub> Cp := w<sub>2</sub>

ko := 2.03 D := |ko·M| D = 9.18271264997992 ilma ko näitaks 0, ko näitab, et ei ole.

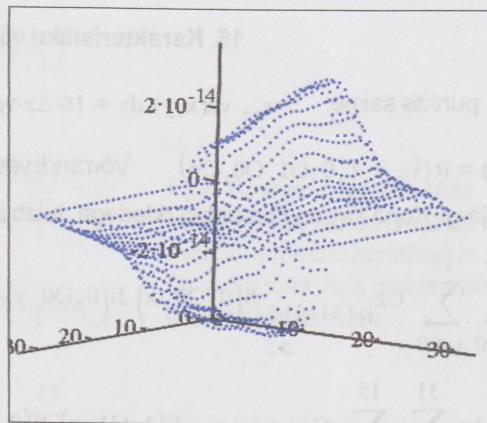
vpL := w<sub>3</sub> vpL<sub>i,33-ka</sub> := -vpL<sub>i,ka</sub> Su := w<sub>4</sub> Su = 0

n := 0..nm Su·10<sup>15</sup> = 0.704470937875549 Ruutkeskmise hälve on väiksem kui 10<sup>-15</sup>!



v<sub>p</sub>, v<sub>pL</sub>

Erinevusi üksikutes punktides näitab joonis:



v<sub>p</sub> - v<sub>pL</sub>

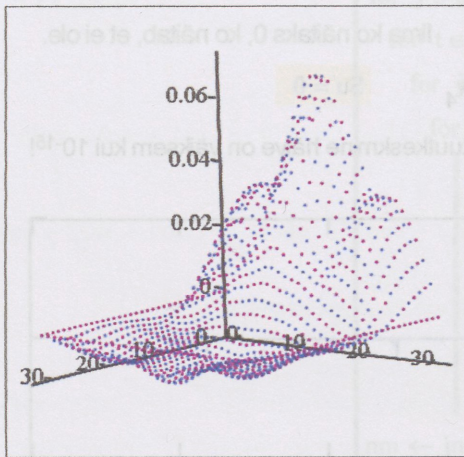
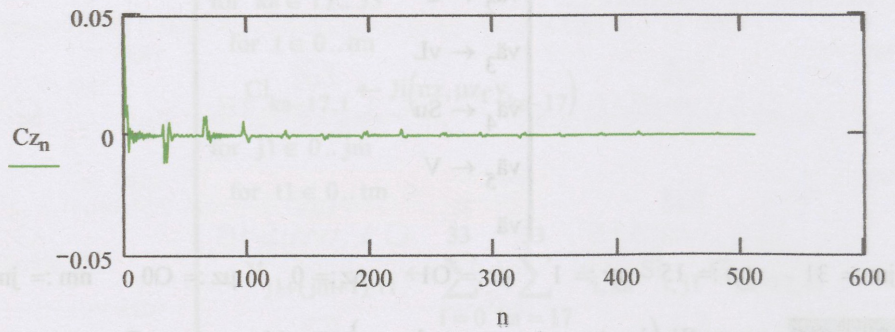
**Teeme sama kiirusega vz.**

jm := 31 tm := 15 nr := 0 nz := 0 μr := 00 μz := 00 nm := jm + (jm + 1)·tm

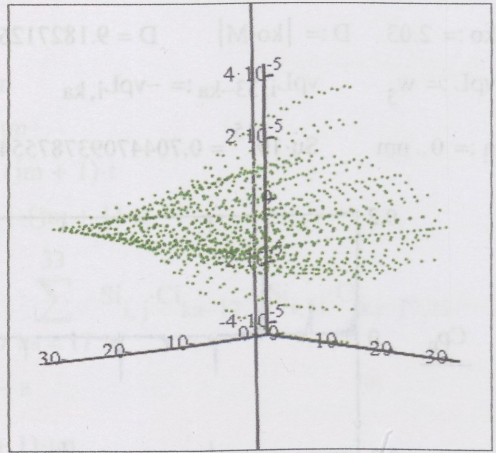
ko := 1.7506 w := Wv(jm, tm, nr, nz, μr, μz, ko, vz) M := w<sub>0</sub> D := w<sub>1</sub> Cz := w<sub>2</sub>

ko := 1.7506 D := |ko·M| D = 9.97625550619855

vzL := w<sub>3</sub> vzL<sub>i,33-ka</sub> := vzL<sub>i,ka</sub> Su := w<sub>4</sub> Su = 4.95666433493486 × 10<sup>-7</sup>



vz, vzL



vz - vzL

Sellel juhul on kokkulangemine märksa kesisem, kuid siiski rahuldav edasisteks arvutusteks.

### 16. Karakteristliku võrrandi lahendamine

14. punktis saime:  $r_{33} \cdot v_z(x, y) \cdot dx = 16 \cdot \Delta z \cdot v_p(x, y) \cdot dy$   $v_z(x, y) = Rf(x, y, 0, 0, 0, 0, 0, C_z)$

$v_p(x, y) = Rf(x, y, 1, 0, 0, 1, 0, 0, C_p)$  Võrrandi vasakut poolt tuleb integreerida x järgi ja paremat y järgi. Kuna kiirused on antud ridadega, tuleb integreerida rea kõiki liikmeid eraldi.

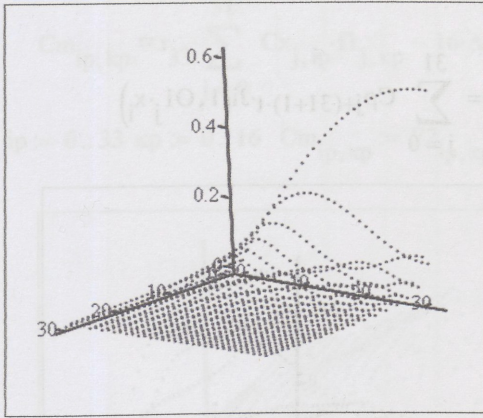
$$r_{33} \cdot \sum_{j=0}^{31} \sum_{t=0}^{15} C_{z_{j+(31+1) \cdot t}} \cdot J_i(0, 0, 0, j, x) \cdot J_i(0, 0, 0, t, y) \cdot dx = \blacksquare$$

$$\blacksquare = 16 \cdot \Delta z \cdot \sum_{j=0}^{31} \sum_{t=0}^{15} C_{p_{j+(31+1) \cdot t}} \cdot J_i(1, 0, 1, j, x) \cdot J_i(0, 0, 0, t, y) \cdot dy$$

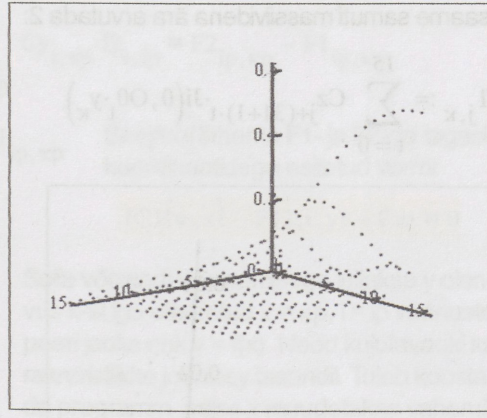
Sellised integraalid saab ka arvutada:

$$j := 0..31 \quad I_x(j, x) := \int_0^x J_i(0, 0, 0, j, x) dx \quad I_{X_{j,i}} := I_x(j, x_i)$$

$$t := 0..15 \quad I_y(t, y) := \int_0^y J_i(0, 0, 0, t, y) dy \quad I_{Y_{t,k}} := I_y(t, y_k)$$



IX



IY

Üldjuhul tuleks igale integraalile lisada ka esialgu määratud konstant  $C_x$  ja  $C_y$ , mis oleks iga väljapunkt juures esialgu oma väärtusega. Nii saame võrduse

$$r_{33} \cdot \sum_{j=0}^{31} \sum_{t=0}^{15} C_{z_{j+(31+1) \cdot t}} \cdot J_i(0, 00_t \cdot y) \cdot (IX_{j,i} + C_{x_{j,i}}) = \blacksquare$$

$$\blacksquare = 16 \cdot \Delta z \cdot \left[ \sum_{j=0}^{31} \sum_{t=0}^{15} C_{\rho_{j+(31+1) \cdot t}} \cdot J_i(1, 01_j \cdot x) \cdot (IY_{t,\kappa} + C_{y_{t,\kappa}}) \right] \quad \text{Siin on 4 erinevat avaldist}$$

$$F1(i, y) = r_{33} \cdot \sum_{j=0}^{31} \sum_{t=0}^{15} C_{z_{j+(31+1) \cdot t}} \cdot J_i(0, 00_t \cdot y) \cdot IX_{j,i}$$

$$C1(i, y) = r_{33} \cdot \sum_{j=0}^{31} \sum_{t=0}^{15} C_{z_{j+(31+1) \cdot t}} \cdot J_i(0, 00_t \cdot y) \cdot C_{x_{j,i}}$$

$$F2(\kappa, x) = 16 \cdot \Delta z \cdot \sum_{j=0}^{31} \sum_{t=0}^{15} C_{\rho_{j+(31+1) \cdot t}} \cdot J_i(1, 01_j \cdot x) \cdot IY_{t,\kappa}$$

$$C2(\kappa, x) = 16 \cdot \Delta z \cdot \sum_{j=0}^{31} \sum_{t=0}^{15} C_{\rho_{j+(31+1) \cdot t}} \cdot J_i(1, 01_j \cdot x) \cdot C_{y_{t,\kappa}}$$

F1 ja F2 saab arvutada kõigi väljapunktide jaoks, C1 ja C2 mitte tundmatute konstantide  $C_x$  ja  $C_y$  tõttu. Aga miskis mõttes lihtsustada saab:

$$F1(i, y) = r_{33} \cdot \sum_{j=0}^{31} IX_{j,i} \cdot f1(j, y) \quad f1(j, y) := \sum_{t=0}^{15} C_{z_{j+(31+1) \cdot t}} \cdot J_i(0, 00_t \cdot y)$$

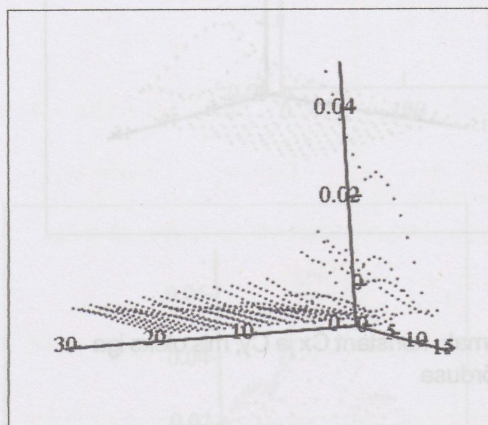
$$F2(\kappa, x) = 16 \cdot \Delta z \cdot \sum_{t=0}^{15} IY_{t,\kappa} \cdot f2(t, x) \quad f2(t, x) := \sum_{j=0}^{31} C_{\rho_{j+(31+1) \cdot t}} \cdot J_i(1, 01_j \cdot x)$$

$$C1(i, y) = r_{33} \cdot \sum_{j=0}^{31} C_{x_{j,i}} \cdot f1(j, y) \quad C2(\kappa, x) = 16 \cdot \Delta z \cdot \sum_{t=0}^{15} C_{y_{t,\kappa}} \cdot f2(t, x)$$

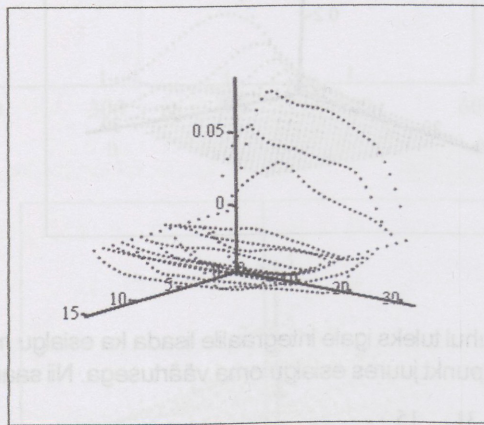
Neist saame samuti massiivide nära arvutada 2:

$$f1_{j,k} := \sum_{t=0}^{15} Cz_{j+(31+1) \cdot t} \cdot Ji(0,00_t \cdot y_k)$$

$$f2_{t,i} := \sum_{j=0}^{31} Cp_{j+(31+1) \cdot t} \cdot Ji(1,01_j \cdot x_i)$$



f1



f2

Nende abil:

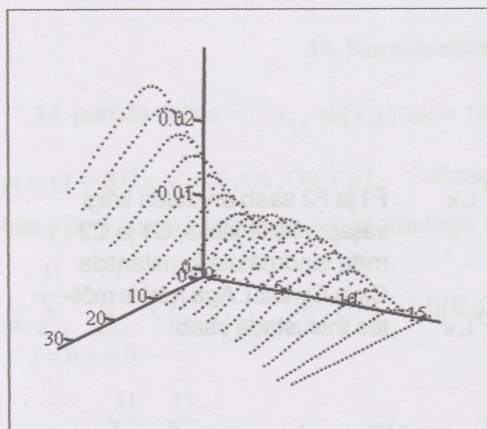
$$F1_{i,k} := r_{33} \cdot \sum_{j=0}^{31} IX_{j,i} \cdot f1_{j,k}$$

$$F2_{i,k} := 16 \cdot \Delta z \cdot \sum_{t=0}^{15} IY_{t,k} \cdot f2_{t,i}$$

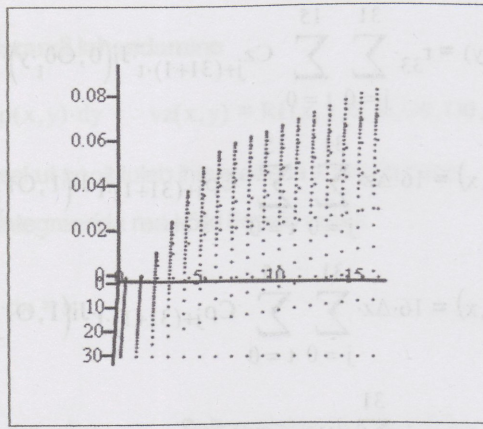
$$C1_{i,k} = r_{33} \cdot \sum_{j=0}^{31} Cx_{j,i} \cdot f1_{j,k}$$

$$C2_{i,k} = 16 \cdot \Delta z \cdot \sum_{t=0}^{15} Cy_{t,k} \cdot f2_{t,i}$$

Esimestest saame massiivid:



F1



F2

Karakteristik võrand saab kuju:

$$F1_{i,k} + r_{33} \cdot \sum_{j=0}^{31} Cx_{j,i} \cdot f1_{j,k} = F2_{i,k} + 16 \cdot \Delta z \cdot \sum_{t=0}^{15} Cy_{t,k} \cdot f2_{t,i}$$

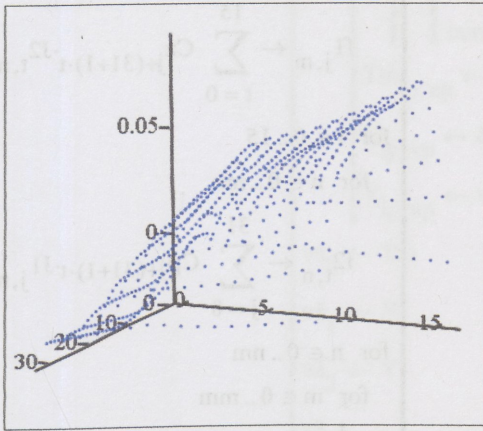
Sellest saame leida tundmatuid konstante sisaldavate avaldiste vahe iga vaatevälja punkti (i,p,kp) jaoks:

$$C_{m,ip, \kappa p} = r_{33} \cdot \sum_{j=0}^{31} Cx_{j,ip} \cdot fl_{j, \kappa p} - 16 \cdot \Delta z \cdot \sum_{t=0}^{15} Cy_{t, \kappa p} \cdot f2_{t,ip} = F2_{ip, \kappa p} - F1_{ip, \kappa p}$$

$$ip := 0..33 \quad \kappa p := 0..16 \quad C_{m,ip, \kappa p} := F2_{ip, \kappa p} - F1_{ip, \kappa p}$$

Seejärel läheme F1- ja F2-ga tagasi koordinaatidega esitatud vormi:

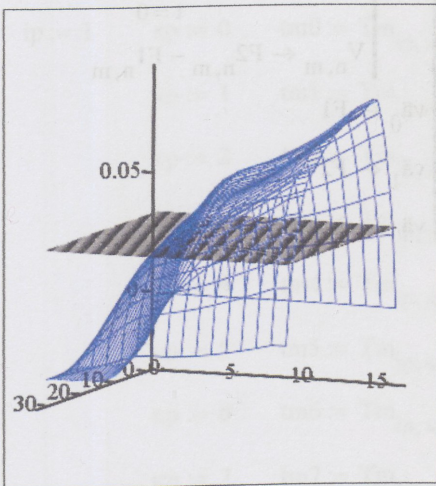
$$F21(\kappa, x) - F11(i, y) - C_m = 0$$



Cm

tasandi mingi ip ja κp väärtusega Cm poolt antud kõrgusel:

$$ip := 17 \quad \kappa p := 5 \quad T_{i, \kappa} := C_{m,ip, \kappa p}$$



V, T

$$nm := 500 \quad n := 0..nm \quad mm := 325$$

$$m := 0..mm \quad pi := Pi(nm, mm)$$

$$F1p := pi_0 \quad F2p := pi_1$$

$$Vp := F2p - F1p \quad \text{ja siis tasandi}$$

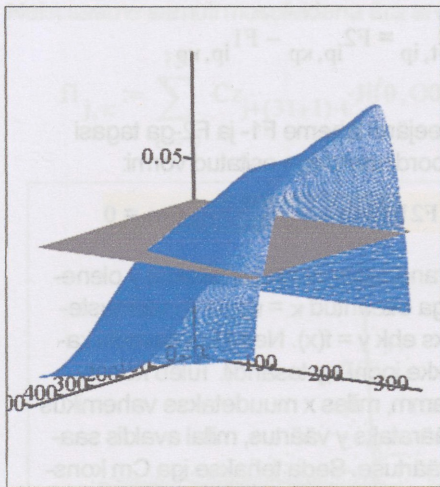
$$\text{omad:} \quad Tu_{n,m} := C_{m,ip, \kappa p}$$

Selle võrrandi lahendamiseks leitakse y olenevus x-st iga etteantud  $\kappa = \kappa p$ ,  $i = ip$  väärtuste paari jaoks ehk  $y = f(x)$ . Need kujutavadki karakteristilikke jooni x,y tasandil. Tuleb koostada programm, milles x muudetakse vahemikus 0..1 ja määratakse y väärtus, millal avaldis saavutab 0 väärtuse. Seda tehakse iga Cm konstantse väärtuse puhul. Karakteristik peaks läbima väljapunkti  $(y_{\kappa p}, x_{ip})$ . Esialgu valime x ja y väärtusteks vaatevälja punktid  $x_j$  ja  $y_{\kappa}$  ning arvutame kahe esimese liikme vahe:

$$V := F2 - F1 \quad \text{ja lisame sellele joonisele}$$

Nende kahe pinna lõikejoon ongi otsitav **karakteristilikk joon**. Et saaks lõikumisi täpsemalt määrata, arvutame pindadele punkte palju tihedamalt. Arvutusaja vähendamiseks, teeme vastava programmi. Esiteks arvutame pinnapunktid:

$$Pi(nm, mm) := \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..31 \\ \quad \text{for } n \in 0..nm \\ \quad \quad \xi_n \leftarrow \frac{n}{nm} \\ \quad \quad J1_{j,n} \leftarrow Ji(1, 01_j, \xi_n) \\ \quad \text{for } t \in 0..15 \\ \quad \quad \text{for } m \in 0..mm \\ \quad \quad \quad \psi_m \leftarrow \frac{m}{mm} \\ \quad \quad \quad J2_{t,m} \leftarrow Ji(0, 00_t, \psi_m) \\ \quad \text{for } j \in 0..31 \\ \quad \quad \text{for } n \in 1..nm \\ \quad \quad \quad I1_{j,n} \leftarrow \int_0^{\xi_n} Ji(0, 00_j, \xi) d\xi \\ \quad \text{for } t \in 0..15 \\ \quad \quad \text{for } m \in 1..mm \end{array}$$



Vp, Tu

Järgmise programmiga arvutame lõkejoone punktid. Pinnapunktide koordinaadid on nüüd x ja y asemel  $\xi$  ja  $\psi$ . Seda teeme kõigi vateväljapunktidele (ip, κp) vastavate Cm väärtuste jaoks.

```

XY0(Cm, Vp, nm, mm) :=
  for ip ∈ 0..33
  for κp ∈ 0..16
  t ← 0
  for n ∈ 0..nm
  ξn ← n/nm
  for m ∈ 0..mm
  ψm ← m/mm
  Tu ← Cmip, κp
  An, m ← Vpn, m - Tu
  for μ ∈ 0..mm - 1
  a1 ← An, μ
  a2 ← An, μ+1

```

$$I2_{t,m} \leftarrow \int_0^{\psi_m} J_i(0, 0, 0_t \cdot \psi) d\psi$$

for j ∈ 0..31

for m ∈ 0..mm

$$f1_{j,m} \leftarrow \sum_{t=0}^{15} C_{z_{j+(31+1) \cdot t}} \cdot J2_{t,m}$$

for t ∈ 0..15

for n ∈ 0..nm

$$f2_{t,n} \leftarrow \sum_{j=0}^{31} C_{p_{j+(31+1) \cdot t}} \cdot J1_{j,n}$$

for n ∈ 0..nm

for m ∈ 0..mm

$$F1_{n,m} \leftarrow r_{33} \cdot \sum_{j=0}^{31} I1_{j,n} \cdot f1_{j,m}$$

$$F2_{n,m} \leftarrow 16 \cdot \Delta z \cdot \sum_{t=0}^{15} I2_{t,m} \cdot f2_{t,n}$$

$$V_{n,m} \leftarrow F2_{n,m} - F1_{n,m}$$

vä<sub>0</sub> ← F1

vä<sub>1</sub> ← F2

vä

```

if (a1 ≥ 0 ∧ a2 < 0) ∨ (a1 ≤ 0 ∧ a2 > 0)
  ψ0t ←  $\frac{\psi_{\mu+1} \cdot a1 - \psi_{\mu} \cdot a2}{a1 - a2}$ 
  ξ0t ← ξn
  t ← t + 1
continue otherwise
Tmip, kp ← t - 1
Xip, kp ← ξ0
Yip, kp ← ψ0
vä0 ← Tm
vä1 ← X
vä2 ← Y
vä

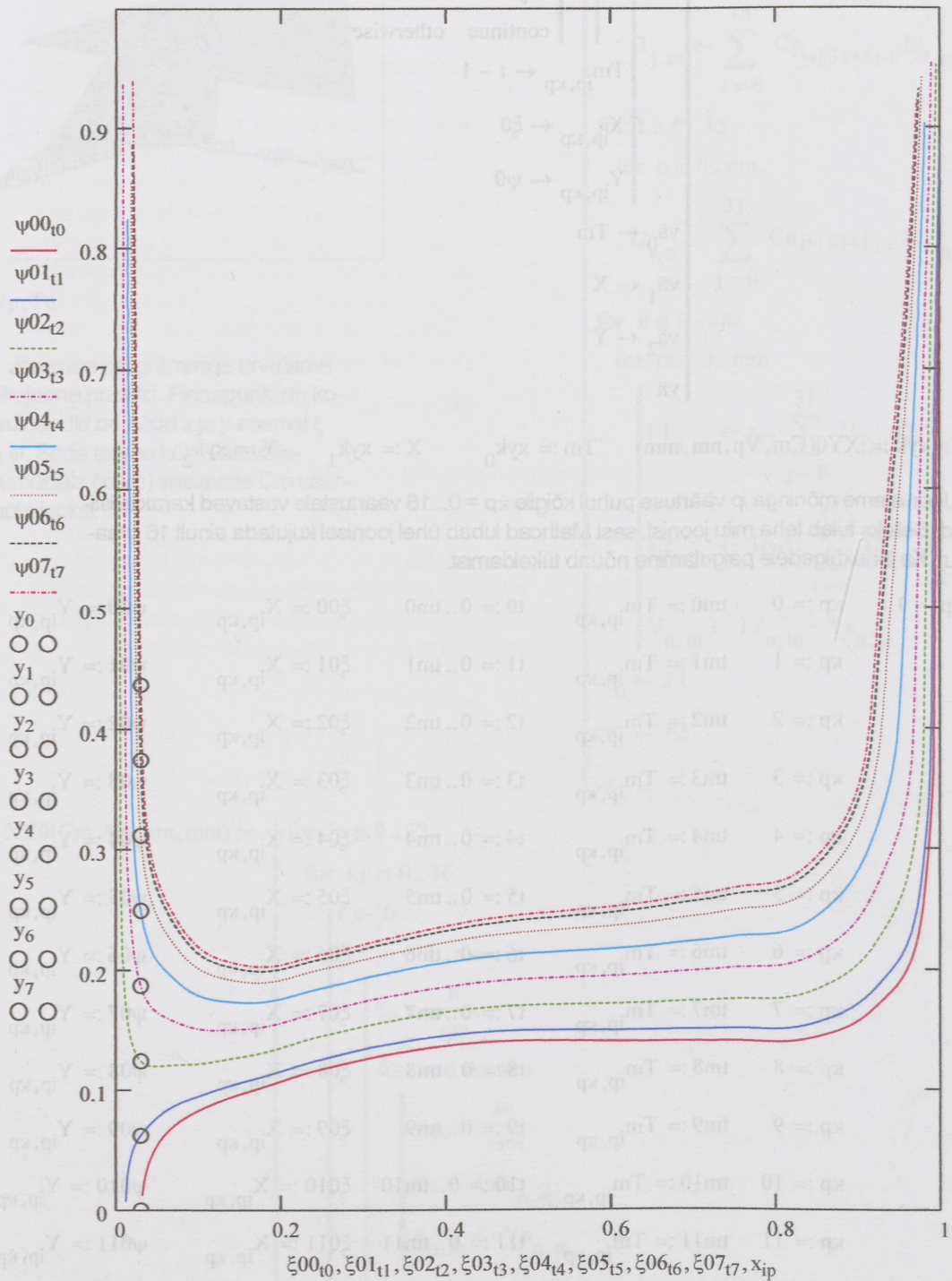
```

xyk := XY0(Cm, Vp, nm, mm)    Tm := xyk<sub>0</sub>    X := xyk<sub>1</sub>    Y := xyk<sub>2</sub>

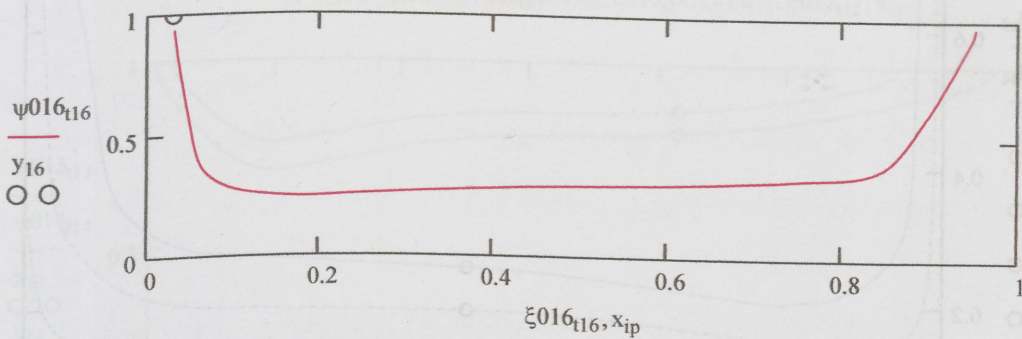
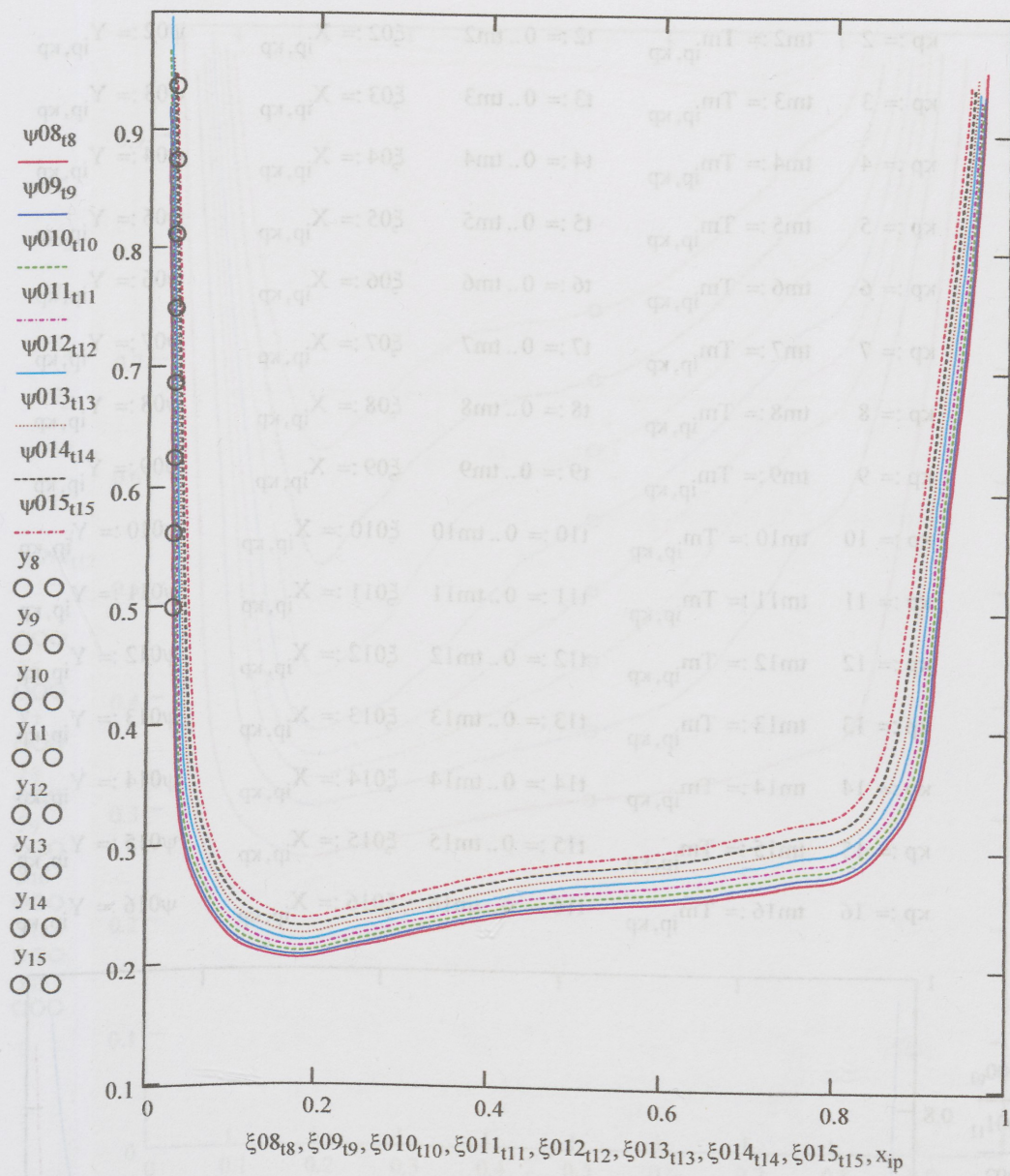
Joonistame mõninga ip väärtuse puhul kõigile kp = 0...16 väärtustele vastavad karakteristikud. Selleks tuleb teha mitu joonist, sest Mathcad lubab ühel joonisel kujutada ainult 16 graafikut. Ka lehekülgedele paigutamine nõuab tükeldamist.

ip := 1	kp := 0	tm0 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t0 := 0..tm0	ξ00 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ00 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 1	tm1 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t1 := 0..tm1	ξ01 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ01 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 2	tm2 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t2 := 0..tm2	ξ02 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ02 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 3	tm3 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t3 := 0..tm3	ξ03 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ03 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 4	tm4 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t4 := 0..tm4	ξ04 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ04 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 5	tm5 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t5 := 0..tm5	ξ05 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ05 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 6	tm6 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t6 := 0..tm6	ξ06 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ06 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 7	tm7 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t7 := 0..tm7	ξ07 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ07 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 8	tm8 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t8 := 0..tm8	ξ08 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ08 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 9	tm9 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t9 := 0..tm9	ξ09 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ09 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 10	tm10 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t10 := 0..tm10	ξ010 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ010 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 11	tm11 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t11 := 0..tm11	ξ011 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ011 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 12	tm12 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t12 := 0..tm12	ξ012 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ012 := Y <sub>ip, kp</sub>
	kp := 13	tm13 := Tm <sub>ip, kp</sub>	t13 := 0..tm13	ξ013 := X <sub>ip, kp</sub>	ψ013 := Y <sub>ip, kp</sub>

$\kappa p := 14$     $tm_{14} := Tm_{ip, \kappa p}$     $t_{14} := 0..tm_{14}$     $\xi_{014} := X_{ip, \kappa p}$     $\psi_{014} := Y_{ip, \kappa p}$   
 $\kappa p := 15$     $tm_{15} := Tm_{ip, \kappa p}$     $t_{15} := 0..tm_{15}$     $\xi_{015} := X_{ip, \kappa p}$     $\psi_{015} := Y_{ip, \kappa p}$   
 $\kappa p := 16$     $tm_{16} := Tm_{ip, \kappa p}$     $t_{16} := 0..tm_{16}$     $\xi_{016} := X_{ip, \kappa p}$     $\psi_{016} := Y_{ip, \kappa p}$



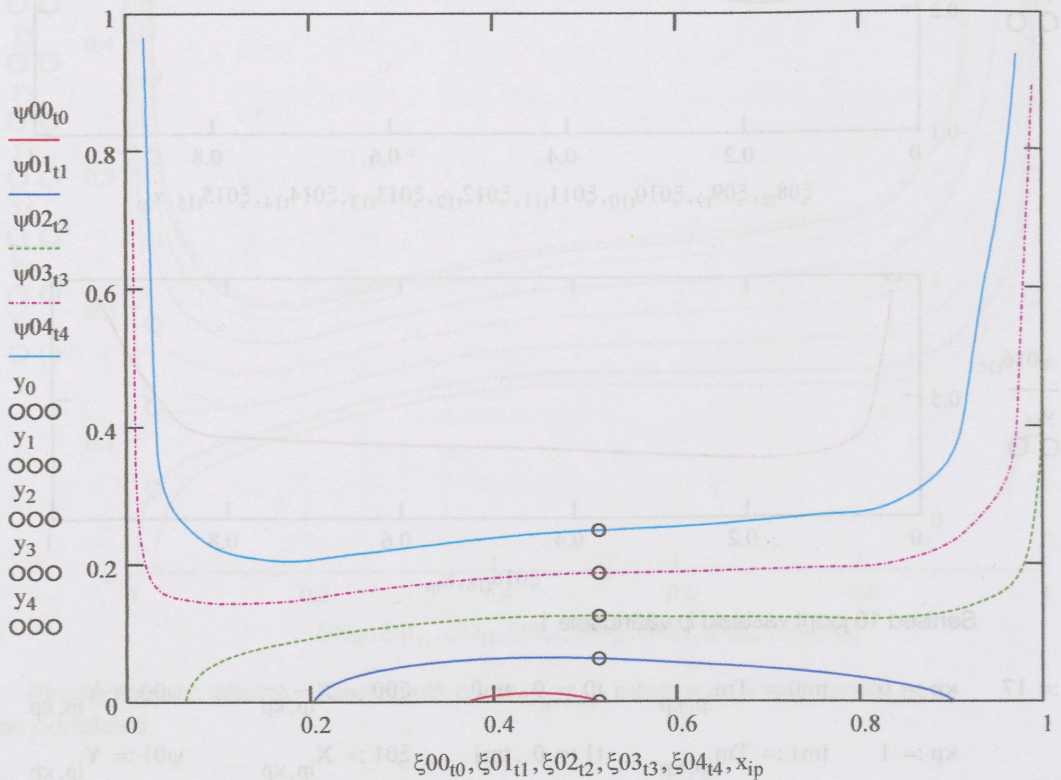
Ringikestega on tähistatud karakteristik punkt ( $x_{ip}, y_{\kappa p}$ ), millele vastav karakteristik joon on joonistatud..

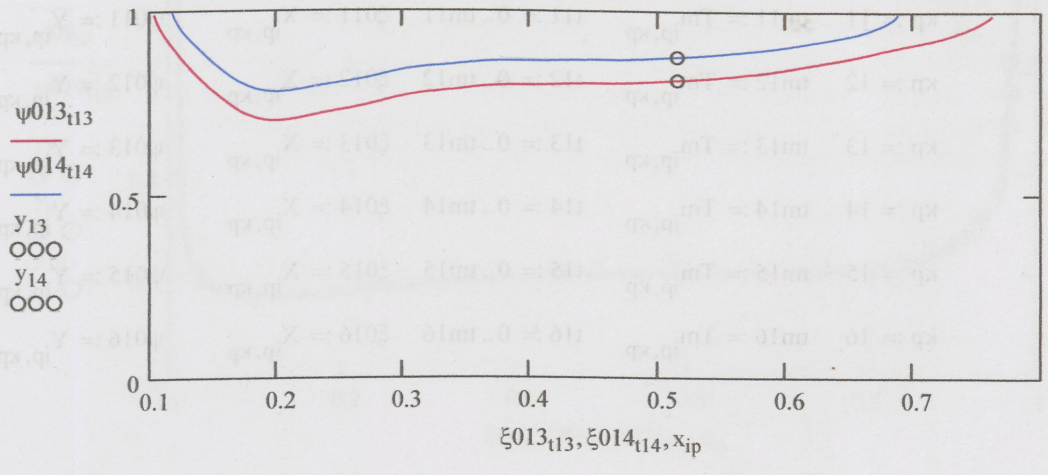
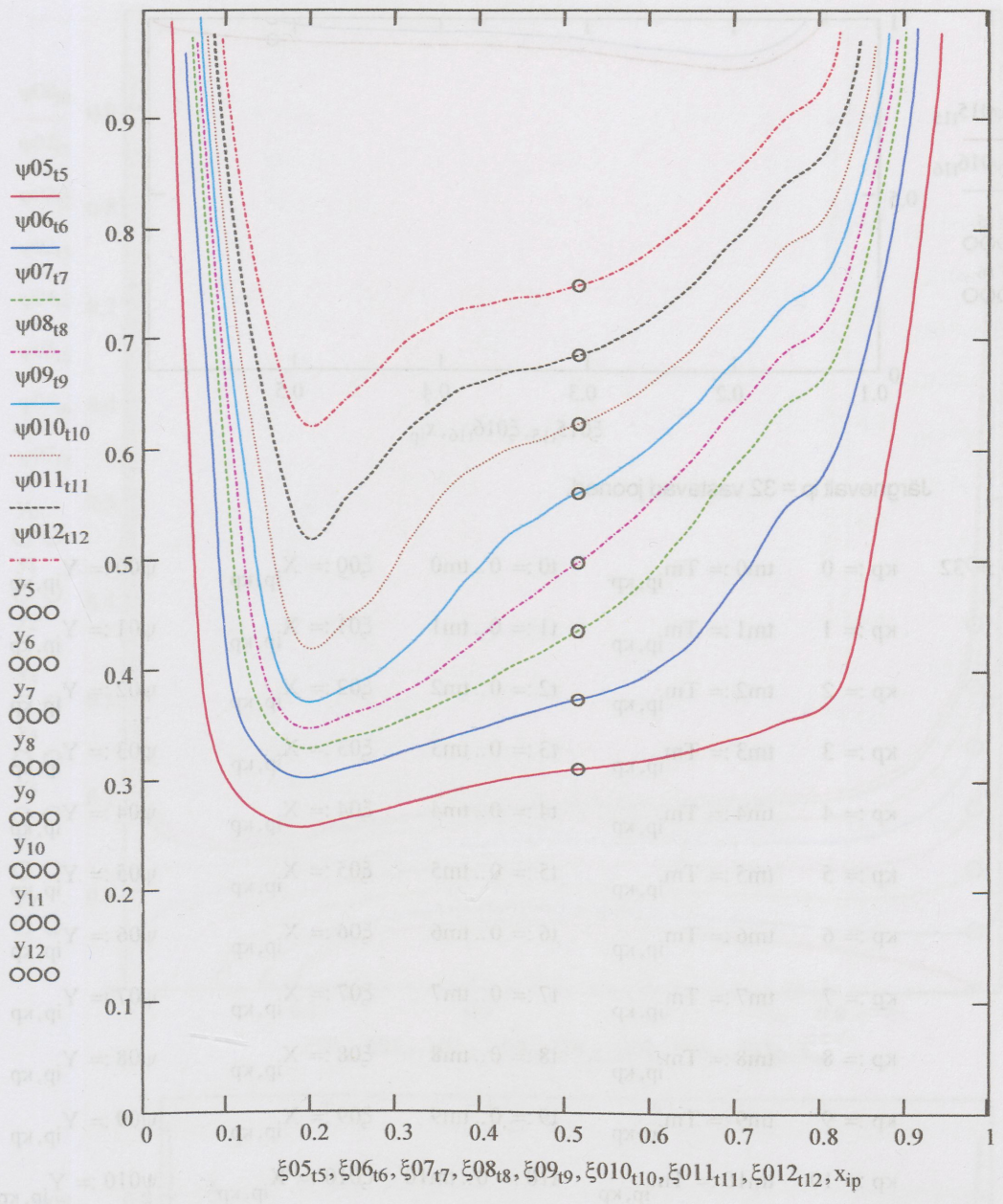


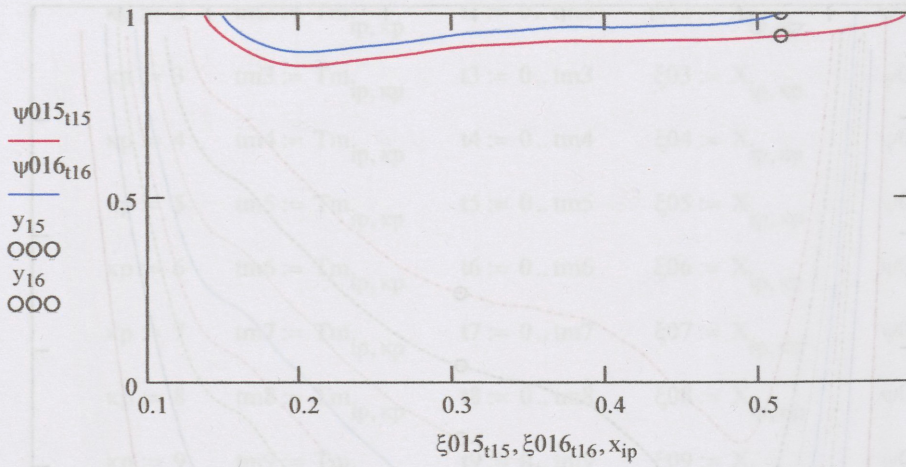
Senised 16 joont vastasid ip väärtusele 1.

$ip := 17$      $kp := 0$      $tm0 := Tm_{ip, kp}$      $t0 := 0..tm0$      $\xi00 := X_{ip, kp}$      $\psi00 := Y_{ip, kp}$   
 $kp := 1$      $tm1 := Tm_{ip, kp}$      $t1 := 0..tm1$      $\xi01 := X_{ip, kp}$      $\psi01 := Y_{ip, kp}$

$\kappa p := 2$	$tm_2 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_2 := 0..tm_2$	$\xi_{02} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{02} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 3$	$tm_3 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_3 := 0..tm_3$	$\xi_{03} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{03} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 4$	$tm_4 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_4 := 0..tm_4$	$\xi_{04} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{04} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 5$	$tm_5 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_5 := 0..tm_5$	$\xi_{05} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{05} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 6$	$tm_6 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_6 := 0..tm_6$	$\xi_{06} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{06} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 7$	$tm_7 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_7 := 0..tm_7$	$\xi_{07} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{07} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 8$	$tm_8 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_8 := 0..tm_8$	$\xi_{08} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{08} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 9$	$tm_9 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_9 := 0..tm_9$	$\xi_{09} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{09} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 10$	$tm_{10} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{10} := 0..tm_{10}$	$\xi_{010} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{010} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 11$	$tm_{11} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{11} := 0..tm_{11}$	$\xi_{011} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{011} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 12$	$tm_{12} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{12} := 0..tm_{12}$	$\xi_{012} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{012} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 13$	$tm_{13} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{13} := 0..tm_{13}$	$\xi_{013} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{013} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 14$	$tm_{14} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{14} := 0..tm_{14}$	$\xi_{014} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{014} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 15$	$tm_{15} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{15} := 0..tm_{15}$	$\xi_{015} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{015} := Y_{ip, \kappa p}$
$\kappa p := 16$	$tm_{16} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{16} := 0..tm_{16}$	$\xi_{016} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{016} := Y_{ip, \kappa p}$

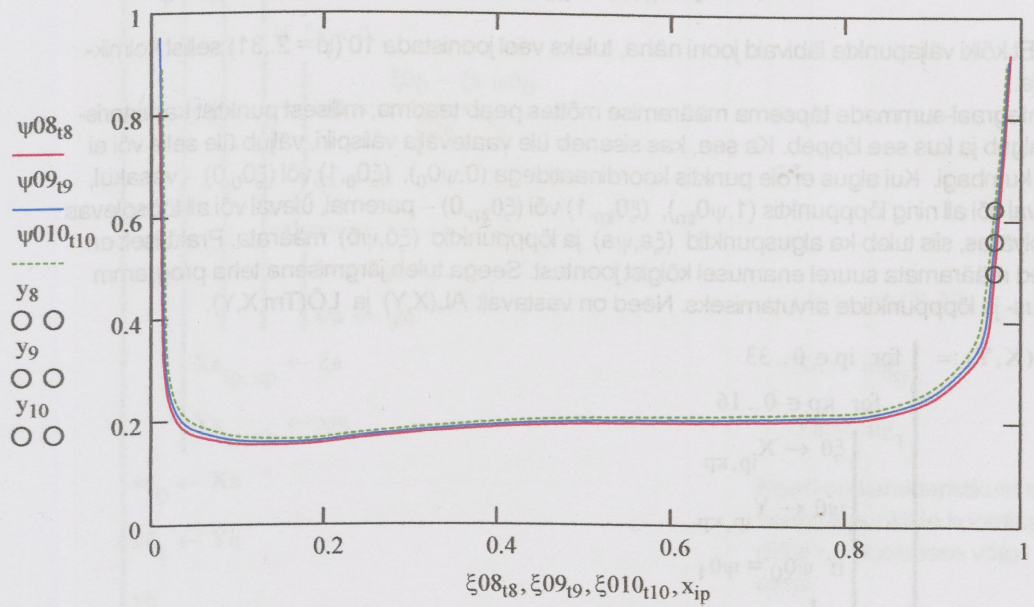
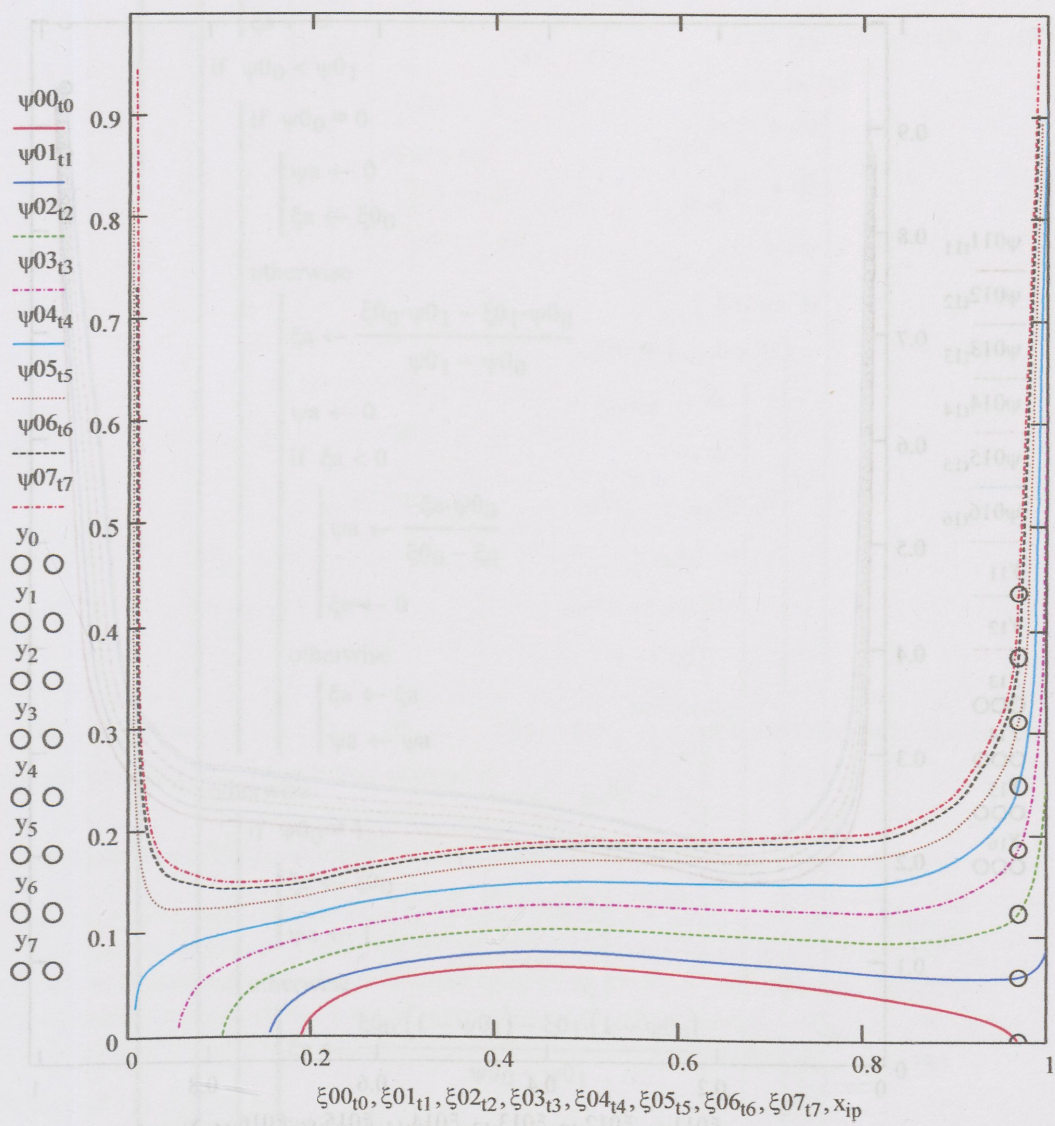


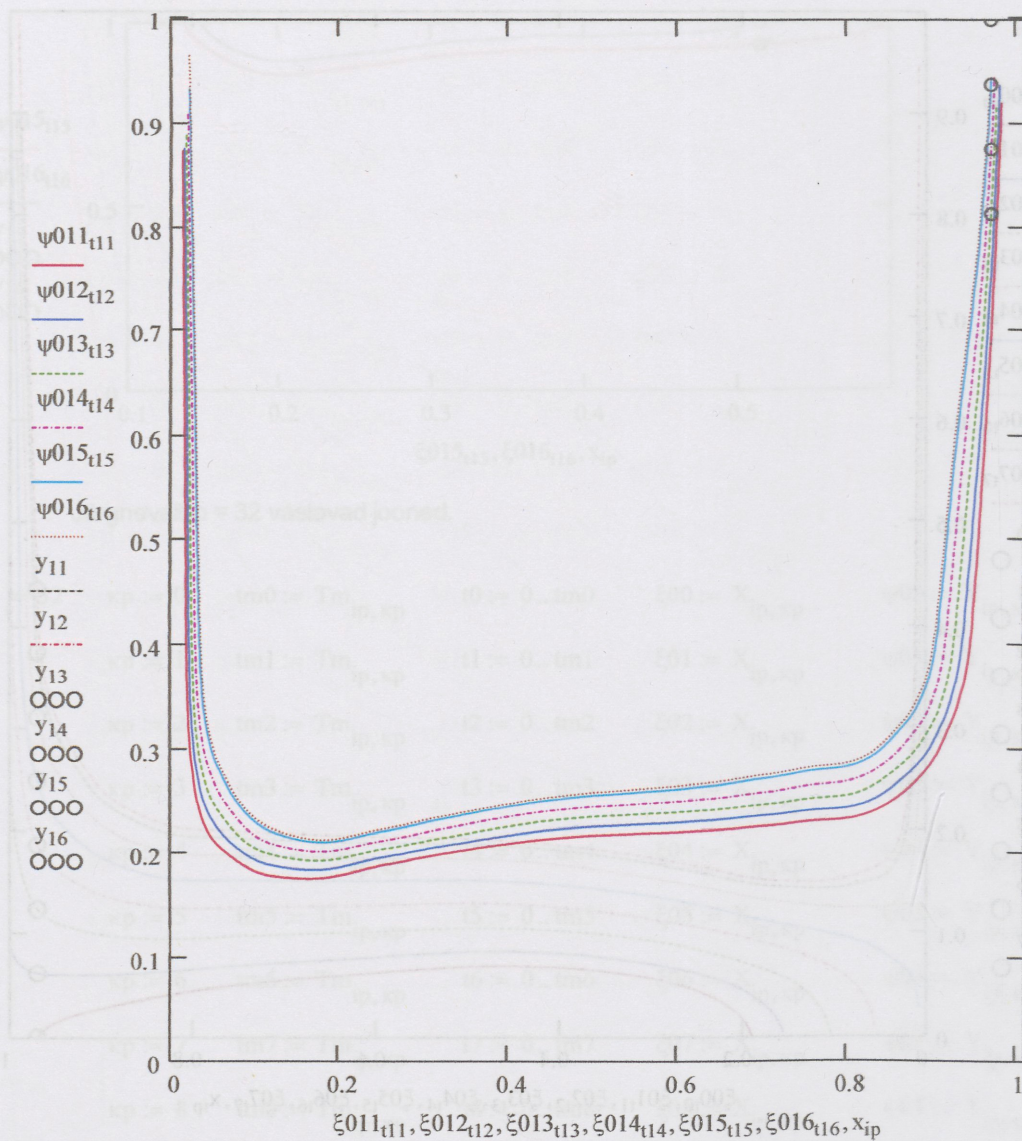




Järgnevalt ip = 32 vastavad jooned.

ip := 32	$\kappa p := 0$	$tm_0 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_0 := 0..tm_0$	$\xi_{00} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{00} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 1$	$tm_1 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_1 := 0..tm_1$	$\xi_{01} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{01} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 2$	$tm_2 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_2 := 0..tm_2$	$\xi_{02} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{02} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 3$	$tm_3 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_3 := 0..tm_3$	$\xi_{03} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{03} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 4$	$tm_4 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_4 := 0..tm_4$	$\xi_{04} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{04} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 5$	$tm_5 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_5 := 0..tm_5$	$\xi_{05} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{05} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 6$	$tm_6 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_6 := 0..tm_6$	$\xi_{06} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{06} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 7$	$tm_7 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_7 := 0..tm_7$	$\xi_{07} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{07} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 8$	$tm_8 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_8 := 0..tm_8$	$\xi_{08} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{08} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 9$	$tm_9 := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_9 := 0..tm_9$	$\xi_{09} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{09} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 10$	$tm_{10} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{10} := 0..tm_{10}$	$\xi_{010} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{010} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 11$	$tm_{11} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{11} := 0..tm_{11}$	$\xi_{011} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{011} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 12$	$tm_{12} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{12} := 0..tm_{12}$	$\xi_{012} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{012} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 13$	$tm_{13} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{13} := 0..tm_{13}$	$\xi_{013} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{013} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 14$	$tm_{14} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{14} := 0..tm_{14}$	$\xi_{014} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{014} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 15$	$tm_{15} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{15} := 0..tm_{15}$	$\xi_{015} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{015} := Y_{ip, \kappa p}$
	$\kappa p := 16$	$tm_{16} := Tm_{ip, \kappa p}$	$t_{16} := 0..tm_{16}$	$\xi_{016} := X_{ip, \kappa p}$	$\psi_{016} := Y_{ip, \kappa p}$





Et kõiki väljapunkte läbivaid jooni näha, tuleks veel joonistada 10 ( $ip = 2..31$ ) sellist kolmik-sarja..

Integraal-summade täpsema määramise mõttes peab teadma, millisest punktist karakteristik algab ja kus see lõppeb. Ka see, kas siseneb üle vaatevälja välispiiri, väljub üle selle või ei tee kumbagi. Kui algus ei ole punktis koordinaatidega  $(0, \psi_0)$ ,  $(\xi_0, 1)$  või  $(\xi_0, 0)$  – vasakul, üleval või all ning lõpppunktis  $(1, \psi_{tm})$ ,  $(\xi_{tm}, 1)$  või  $(\xi_{tm}, 0)$  – paremal, üleval või all töösolevas poolväljas, siis tuleb ka alguspunktid  $(\xi_a, \psi_a)$  ja lõpppunktid  $(\xi_õ, \psi_õ)$  määrata. Praktiliselt on need määramata suurel enamusel kõigist joontest. Seega tuleb järgmisena teha programm algus- ja lõpppunktide arvutamiseks. Need on vastavalt  $AL(X, Y)$  ja  $LÕ(Tm, X, Y)$ .

```

AL(X, Y) := | for ip ∈ 0..33
              | for kp ∈ 0..16
              |   | ξ0 ← Xip, kp
              |   | ψ0 ← Yip, kp
              |   | if ψ0 = ψ01
              |   |   | ψa ← ψ00

```

```

|  $\xi_a \leftarrow 0$ 
| if  $\psi_{00} < \psi_{01}$ 
|   | if  $\psi_{00} = 0$ 
|   |   |  $\psi_a \leftarrow 0$ 
|   |   |  $\xi_a \leftarrow \xi_{00}$ 
|   | otherwise
|   |   |  $\xi_a \leftarrow \frac{\xi_{00} \cdot \psi_{01} - \xi_{01} \cdot \psi_{00}}{\psi_{01} - \psi_{00}}$ 
|   |   |  $\psi_a \leftarrow 0$ 
|   |   | if  $\xi_a < 0$ 
|   |   |   |  $\psi_a \leftarrow \frac{-\xi_a \cdot \psi_{00}}{\xi_{00} - \xi_a}$ 
|   |   |   |  $\xi_a \leftarrow 0$ 
|   |   |   | otherwise
|   |   |     |  $\xi_a \leftarrow \xi_a$ 
|   |   |     |  $\psi_a \leftarrow \psi_a$ 
|   | otherwise
|   |   | if  $\psi_{00} = 1$ 
|   |   |   |  $\xi_a \leftarrow \xi_{00}$ 
|   |   |   |  $\psi_a \leftarrow 1$ 
|   |   | otherwise
|   |   |   |  $\xi_a \leftarrow \frac{\xi_{00} \cdot (1 - \psi_{01}) - \xi_{01} \cdot (1 - \psi_{00})}{\psi_{00} - \psi_{01}}$ 
|   |   |   |  $\psi_a \leftarrow 1$ 
|   |   |   | if  $\xi_a < 0$ 
|   |   |   |   |  $\psi_a \leftarrow \frac{\xi_{00} - \xi_a \cdot \psi_{00}}{\xi_{00} - \xi_a}$ 
|   |   |   |   |  $\xi_a \leftarrow 0$ 
|   |   |   |   | otherwise
|   |   |     |  $\xi_a \leftarrow \xi_a$ 
|   |   |     |  $\psi_a \leftarrow \psi_a$ 
|   |  $X_{a,ip,kp} \leftarrow \xi_a$ 
|   |  $Y_{a,ip,kp} \leftarrow \psi_a$ 
|  $v\ddot{a}_0 \leftarrow X_a$ 
|  $v\ddot{a}_1 \leftarrow Y_a$ 
|  $v\ddot{a}$ 

```

$alg := AL(X, Y)$   
 $X_a := alg_0$   
 $Y_a := alg_1$

Need on karakteristikute si-  
 senemispunktide koordinaa-  
 did  $z > 0$  poolsesse välja-  
 ossa.

```

LÖ(Tm,X,Y) := for ip ∈ 0..33
                for kp ∈ 0..16
                    tm ← Tmip,kp
                    ξ0 ← Xip,kp
                    ψ0 ← Yip,kp
                    if tm ≥ 2
                        if ψ0tm-1 = ψ0tm
                            ψδ ← ψ0tm
                            ξδ ← 1
                        if ψ0tm-1 < ψ0tm
                            if ξ0tm = 1
                                ψδ ← ψ0tm
                                ξδ ← 1
                            otherwise
                                ξδ ← 1
                                ja ← ξ0tm - ξ0tm-1
                                lu ← ψ0tm · (1 - ξ0tm-1) - ψ0tm-1 · (1 - ξ0tm)
                                ψδ ←  $\begin{cases} \psi_{0_{tm-1}} & \text{if } ja = 0 \\ \frac{lu}{ja} & \text{otherwise} \end{cases}$ 
                                if ψδ > 1
                                    ψδ ← 1
                                    ξδ ←  $\frac{\xi_{0_{tm}} \cdot (1 - \psi_{0_{tm-1}}) - \xi_{0_{tm-1}} \cdot (1 - \psi_{0_{tm}})}{\psi_{0_{tm}} - \psi_{0_{tm-1}}}$ 
                                otherwise
                                    ξδ ← ξδ
                                    ψδ ← ψδ
                            otherwise
                                if ψ0tm = 0
                                    ξδ ← ξ0tm
                                    ψδ ← 0
                                otherwise
                                    ξδ ←  $\frac{\xi_{0_{tm}} \cdot \psi_{0_{tm-1}} - \xi_{0_{tm-1}} \cdot \psi_{0_{tm}}}{\psi_{0_{tm-1}} - \psi_{0_{tm}}}$ 
                                    ψδ ← 0
                                    if ξδ > 1

```



```

| i2 ← i1 + 1
| a ←  $\frac{1}{x_{i2} - x_{i1}} \cdot \left( \frac{va_{i2, \kappa} - va_{i0, \kappa}}{x_{i2} - x_{i0}} - \frac{va_{i1, \kappa} - va_{i0, \kappa}}{x_{i1} - x_{i0}} \right)$ 
| b ←  $\frac{va_{i1, \kappa} - va_{i0, \kappa}}{x_{i1} - x_{i0}} - a \cdot (x_{i1} + x_{i0})$ 
| c ←  $va_{i0, \kappa} - a \cdot (x_{i0})^2 - b \cdot x_{i0}$ 
|  $\xi\xi \leftarrow x_{i1} \cdot (i2 - u) + x_{i2} \cdot (u - i1)$ 
| var ←  $a \cdot \xi\xi^2 + b \cdot \xi\xi + c$ 
var

```

```

var( $\psi, va, i$ ) :=
| ys ←  $y_1$ 
| v ←  $\frac{\psi}{ys}$ 
| k0 ←  $v - \text{mod}(v, 1)$ 
| if k0 < 1
|   | vav ←  $(va_{i, k0+1} - va_{i, k0}) \cdot v + va_{i, k0}$ 
|   | ko ← 1
| otherwise
|   | if k0 = 16
|   |   | k0 ← 14
|   |   | k1 ← 15
|   |   | k2 ← 16
|   | otherwise
|   |   | k1 ← k0
|   |   | k0 ← k1 - 1
|   |   | k2 ← k1 + 1
|   | a ←  $\frac{1}{y_{k2} - y_{k1}} \cdot \left( \frac{va_{i, k2} - va_{i, k0}}{y_{k2} - y_{k0}} - \frac{va_{i, k1} - va_{i, k0}}{y_{k1} - y_{k0}} \right)$ 
|   | b ←  $\frac{va_{i, k1} - va_{i, k0}}{y_{k1} - y_{k0}} - a \cdot (y_{k1} + y_{k0})$ 
|   | c ←  $va_{i, k0} - a \cdot (y_{k0})^2 - b \cdot y_{k0}$ 
|   |  $\psi\psi \leftarrow y_{k1} \cdot (k2 - v) + y_{k2} \cdot (v - k1)$ 
|   | vav ←  $a \cdot \psi\psi^2 + b \cdot \psi\psi + c$ 
vav

```

```

Ti(ξ, ψ, va) :=
  v ← ψ / y1
  k0 ← v - mod(v, 1)
  u ← ξ / x1
  i0 ← u - mod(u, 1)
  vk ← vai0, k0 if i0 = 33 ∧ k0 = 16           ühes punktis
  vk ← var(ψ, va, i0) if i0 = 33 ∧ k0 < 16    mööda rida im, varieerus ψ
  vk ← vav(ξ, va, k0) if i0 < 33 ∧ k0 = 16    mööda veergu klm, varieerub ξ
  otherwise
    v1 ← vav(ξ, va, k0)
    v2 ← vav(ξ, va, k0 + 1)
    v3 ← var(ψ, va, i0)
    v4 ← var(ψ, va, i0 + 1)
    vr ← (v2 · (ψ - yk0) + v1 · (yk0+1 - ψ)) / (yk0+1 - yk0)
    vv ← (v4 · (ξ - xi0) + v3 · (xi0+1 - ξ)) / (xi0+1 - xi0)
    vk ← 1/2 · (vr + vv)                       keskmine
  vä ← vk

```

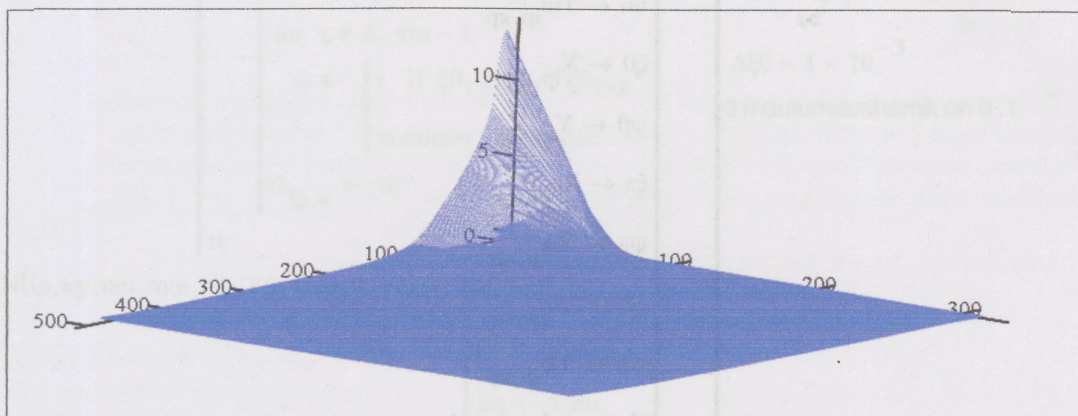
Eradame vbadest liikmetest selle poole, kus pooles väljast on senine töö käinud:

$$vapp_{i, \kappa} := 10^{-4} \cdot v\varphi_{i, \kappa+17} \quad v\varphi_{i, \kappa} := 10^{-4} \cdot v\varphi_{i, \kappa+17} \quad vazp_{i, \kappa} := 10^{-4} \cdot vaz_{i, \kappa+17}$$

Ja laiendame need  $nm+1 \times mm+1$  suurusteks massiivideks:

$$nm = 500 \quad mm = 325$$

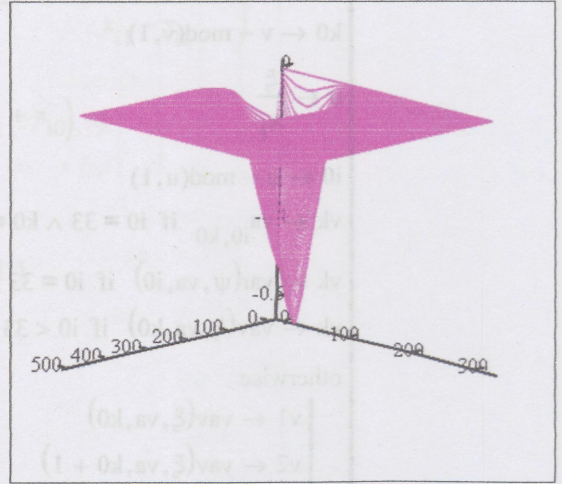
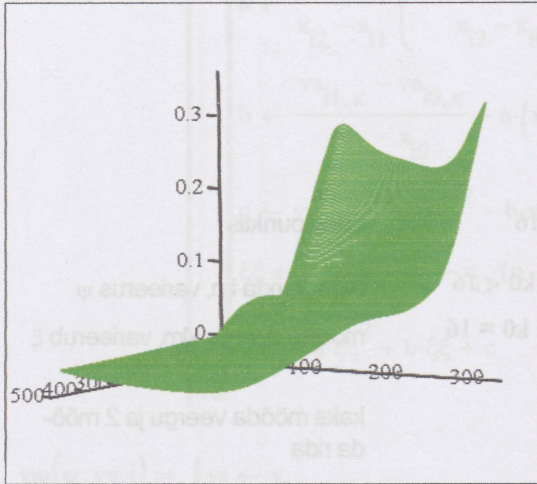
$$n := 0..nm \quad m := 0..mm \quad \xi_n := \frac{1}{nm} \cdot n \quad \psi_m := \frac{1}{mm} \cdot m \quad var_{n, m} := Ti(\xi_n, \psi_m, vapp)$$



var

$$vaj_{n,m} := Ti(\xi_n, \psi_m, va_{pp})$$

$$va\zeta_{n,m} := Ti(\xi_n, \psi_m, vazp)$$



va $\zeta$

vaj

Integraal-summasid igat väljapunkti (ip, kp) läbiva karakteristliku joone puhul arvatav programm on (va on üks äsja arvatud vaba liikme poolvälja osa var, vaj või vaz, mida soovime integreerida) ühe punkti jaoks IN(ip, ..va) ja kõigile korruga INk(nm, .., va). Integreerimine käib mööda karakteristlikku joont selle sisenemispunkti kuni väljapunktini ( $x_{ip}, y_k$ ) või tihendatud skaala järgi ( $\xi_{nk}, \psi_{nk}$ ), nn karakteristliku punktini. Selleks numereerime karakteristliku joone punktid ümber, lisades senisele  $t = 0..tm$  algusesse sisenemispunkti ( $\xi_a, \psi_a$ ) ja lõppu väljumispunkti vaateväljast ( $\xi_{\delta}, \psi_{\delta}$ ). Nii saame indekse vahemiku  $\tau = 0..tm$ , kus  $\tau m = tm + 2$ . Ümbernumereerimist teeb programm  $Tp(Tm..Y\delta)$ . Samuti oleks edaspidi vaja teada, kas kõigil karakteristikutel on algus ja lõpp välispiiril. Selle selgitame välja samas programmis, määrates vastavad tunnused  $tu$ . Seda saab teha sisenemise ja väljumispunkti koordinaadi  $\psi_{0_0}$  ja  $\psi_{0_{tm}}$  järgi:

- $tu = 0$  – sisenemine ja väljumine üle välispiiri,
- $tu = 1$  – sisenemine teisest vaatevälja poolest ja väljumine üle välispiiri,
- $tu = 2$  – sisenemine ja väljumine üle väljapoolte piiri,
- $tu = 3$  – sisenemine üle välispiiri ja väljumine teise poolvälja.

```

Tp(Tm, X, Y, Xa, Ya, X $\delta$ , Y $\delta$ ) :=
  for ip  $\in$  0..33
    for kp  $\in$  0..16
      tm  $\leftarrow$  Tmip, kp
       $\xi_0 \leftarrow$  Xip, kp
       $\psi_0 \leftarrow$  Yip, kp
       $\xi_a \leftarrow$  Xaip, kp
       $\psi_a \leftarrow$  Yaip, kp
       $\xi_{\delta} \leftarrow$  X $\delta$ ip, kp
       $\psi_{\delta} \leftarrow$  Y $\delta$ ip, kp
      for  $\tau \in$  0..tm + 1
        |  $x_0_{\tau} \leftarrow$  if( $\tau = 0, \xi_a, \xi_0_{\tau-1}$ )

```

```

| y0_τ ← if(τ = 0, ψa, ψ0_{τ-1})
| x0_{tm+2} ← ξδ
| y0_{tm+2} ← ψδ
| τm ← tm + 2
| Tmu_{ip, κp} ← τm
| X0_{ip, κp} ← x0
| Y0_{ip, κp} ← y0
| tu_{ip, κp} ← | 1 if y0_0 = 0 ∧ y0_{τm} ≠ 0
|               | 2 if y0_0 = 0 ∧ y0_{τm} = 0
|               | 3 if y0_0 ≠ 0 ∧ y0_{τm} = 0
|               | 0 otherwise
| vä_0 ← Tmu
| vä_1 ← X0
| vä_2 ← Y0
| vä_3 ← tu
| vä

```

$tp := Tp(Tm, X, Y, Xa, Ya, X\delta, Y\delta)$      $Tmu := tp_0$      $X0 := tp_1$      $Y0 := tp_2$      $tu := tp_3$

Integreerimise läbiviimisel tihendatud punktidega massiivide abil on veel tarvis teada karakteristlike punktide  $(x_{ip}, y_{\kappa})$  koordinaate  $(\xi_{\tau k}, \psi_{\tau k})$  ehk nende järjekorra numbrit nk karakteristliku joone numeratsioonis  $\tau = 0 \quad tm+2$ .

$Tk(X0, Tmu) :=$  for  $ip \in 0..im + 1$   
for  $\kappa \in 0..16$

```

| τm ← Tmu_{ip, κ}
| ξ0 ← X0_{ip, κ}
| for τ ∈ 0..τm - 1
|   τk ← | τ if ξ0_τ ≤ x_{ip} < ξ0_{τ+1}
|       | continue otherwise
|   tk_{ip, κ} ← τk

```

tk

$tk := Tk(X0, Tmu)$

Need on määratud poole  $\tau$  muutumise täpsusega,

$$\Delta \xi_0 := \frac{1}{2} \cdot (\xi_2 - \xi_1)$$

$$\Delta \xi_0 = 1 \times 10^{-3}$$

$\xi_0$  muutumisvahemik on 0..1.

$IN(ip, \kappa, nm, mm, X0, Y0, Tmu, tk, va) :=$   $x0 \leftarrow X0_{ip, \kappa}$   
 $y0 \leftarrow Y0_{ip, \kappa}$   
 $\tau m \leftarrow Tmu_{ip, \kappa}$   
 $\tau k \leftarrow tk_{ip, \kappa}$

```

for  $\tau \in 0.. \tau m$ 
|
|  $v \leftarrow x0_{\tau} \cdot nm$ 
|  $dv \leftarrow \text{mod}(v, 1)$ 
|  $n \leftarrow v - dv$ 
|  $n \leftarrow \text{if}(n \geq nm, nm - 1, n)$ 
|  $\mu \leftarrow y0_{\tau} \cdot mm$ 
|  $d\mu \leftarrow \text{mod}(\mu, 1)$ 
|  $m \leftarrow \mu - d\mu$ 
|  $m \leftarrow \text{if}(m \geq mm, mm - 1, m)$ 
|  $vb1 \leftarrow va_{n,m} + (va_{n,m+1} - va_{n,m}) \cdot d\mu$ 
|  $vb2 \leftarrow va_{n+1,m} + (va_{n+1,m+1} - va_{n+1,m}) \cdot d\mu$ 
|  $vb3 \leftarrow va_{n,m} + (va_{n+1,m} - va_{n,m}) \cdot dv$ 
|  $vb4 \leftarrow va_{n,m+1} + (va_{n+1,m+1} - va_{n,m+1}) \cdot dv$ 
|  $vbs \leftarrow \frac{1}{4} \cdot (vb1 + vb2 + vb3 + vb4)$ 
|  $vb_{\tau} \leftarrow vbs$ 
|
| for  $\tau \in 0.. \tau m - 1$ 
|  $\Delta s_{\tau} \leftarrow \sqrt{(x0_{\tau+1} - x0_{\tau})^2 + (y0_{\tau+1} - y0_{\tau})^2}$ 
|  $s1 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot \sum_{\tau=0}^{\tau k-1} (vb_{\tau} + vb_{\tau+1}) \cdot \Delta s_{\tau}$ 
|  $s2 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot \sum_{\tau=\tau k}^{\tau m-1} (vb_{\tau} + vb_{\tau+1}) \cdot \Delta s_{\tau}$ 
|  $v\ddot{a}_0 \leftarrow s1$ 
|  $v\ddot{a}_1 \leftarrow s2$ 
|  $v\ddot{a}$ 

```

Programm sooritab kõigis punktides (ip, kp) arvutused edukalt, välja arvatud osa vaatevälja äärepunktides, mis annavad tõrkeid. Selle asemel, et programmis teha vajalikke parandusi, mis teevad programmi palju keerulisemaks, täidame need ekstrapoolimiste või muude parandamistega. Niisiis edasistes programmides indekseid muutuvad nii: ip = 1..32 ja kp = 1..15.

```

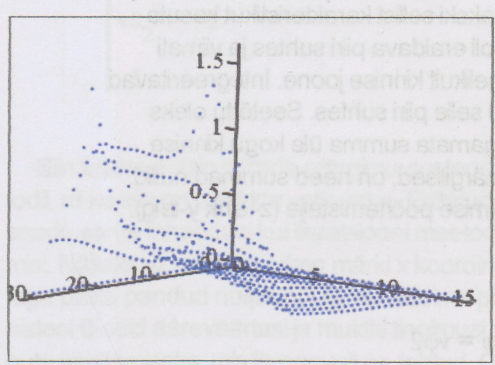
INk(nm, mm, X0, Y0, Tmu, tk, va) := | for ip  $\in$  1..32
| for kp  $\in$  1..15
|  $vr \leftarrow \text{IN}(ip, kp, nm, mm, X0, Y0, Tmu, tk, va)$ 
|  $vr1_{ip, kp} \leftarrow vr_0$ 
|  $vr2_{ip, kp} \leftarrow vr_1$ 

```

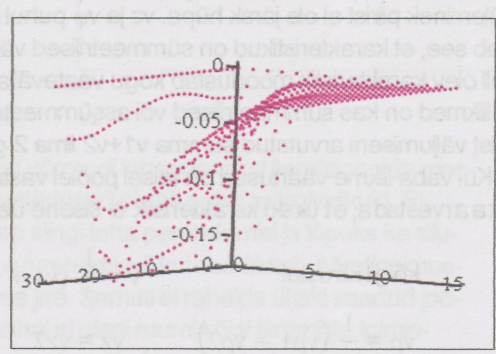
$v\ddot{a}_0 \leftarrow vr1$   
 $v\ddot{a}_1 \leftarrow vr2$   
 $v\ddot{a}$

$vp\ddot{p} := \text{INk}(\text{nm}, \text{mm}, X0, Y0, Tmu, tk, \text{var})$       $v\varphi\ddot{p} := \text{INk}(\text{nm}, \text{mm}, X0, Y0, Tmu, tk, \text{vaj})$

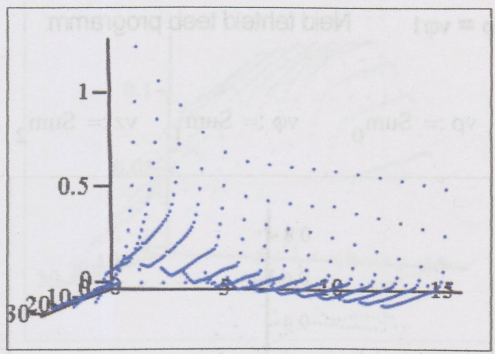
$vp1 := vp\ddot{p}_0$       $vp2 := vp\ddot{p}_1$       $v\varphi1 := v\varphi\ddot{p}_0$       $v\varphi2 := v\varphi\ddot{p}_1$



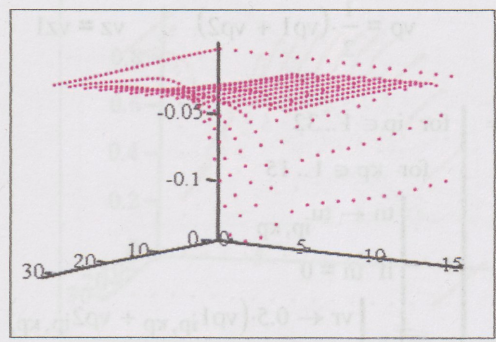
vp1



vφ1



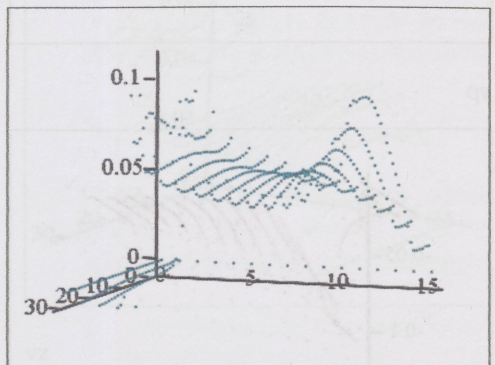
vp2



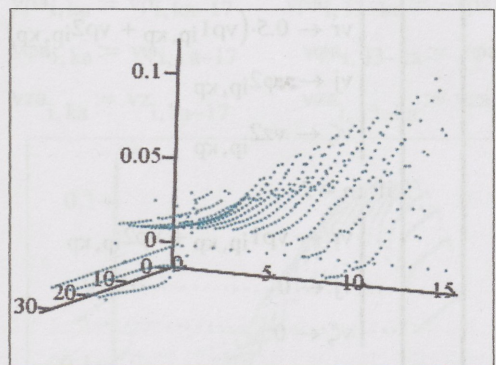
vφ2

$vz\ddot{p} := \text{INk}(\text{nm}, \text{mm}, X0, Y0, Tmu, tk, \text{va}\zeta)$

$vz1 := vz\ddot{p}_0$       $vz2 := vz\ddot{p}_1$



vz1



vz2

Tähisestustes 1 märgib summeerimist sisenemispunktist kuni väljapunktini ( $i_p, \kappa_p$ ) ja 2 väljapunktist kuni väljumiseni väljapoolest, kus kogu töö käib. Need tulemused on õiged ainult juhul, kui määratavad kiirused peavad olema nullid nii sisenemis- kui väljumispunktis. Esimesele

tuleb liita otsitava algväärtus sisenemispunktis ja kui 2 käsitleda integreerimisena väljumispunkti väljapunkti, tuleb sellele liita nõutav väärtus väljumispunktis. Loomulikult peavad mõlemad tulemused andma väljapunkti jaoks sama tulemuse. Õigesti arvutatuna oleks nende keskmistamine hea arvutusvigade vähendamisel. Seetõttu oligi tähtis teada, millisest punktist karakteristik siseneb ja väljub töös olevasse väljapoolde. Näiteks vz korral ei pea see olema 0 nii peamisel pöörlemistel kui ka väljapooli eraldaval piiril ja kuna see on otsitav suurus ei saa me seda ette anda. Tuleb siseneda sealt, kus me saame anda algväärtuse. Kui näiteks on tegu karakteristikuga, mis siseneb üle väljapooli ületava piiri ja ka väljub üle selle ( $tu = 2$ ), siis me saame anda ette väärtused 0 ainult  $v_\rho$  puhul kuna see on assümmeetriline selle piiri suhtes ja üleminek piirist ei ole järsk hüpe. vz ja  $v_\varphi$  puhul ei saakski sellist karakteristikut kasutada. Aitab see, et karakteristikud on sümmeetrilised väljapooli eraldava piiri suhtes ja viimati kõne all olev karakteristik moodustab kogu vaateväljas tegelikult kinnise joone. Integreeritavad vabad liikmed on kas sümmeetrilised või assümmeetrilised selle piiri suhtes. Seetõttu oleks sisendist väljumiseni arvutatud summa  $v_1+v_2$  ilma 2-ga jagamata summa üle kogu kinnise joone. Kui vaba liikme väärtused on teisel poolel vastandmärgilised, on need summad nullid. Tuleb ka arvestada, et ükski karakteristik ei sisene üle peamise pöörlemistelje (z-ehk y-telg).

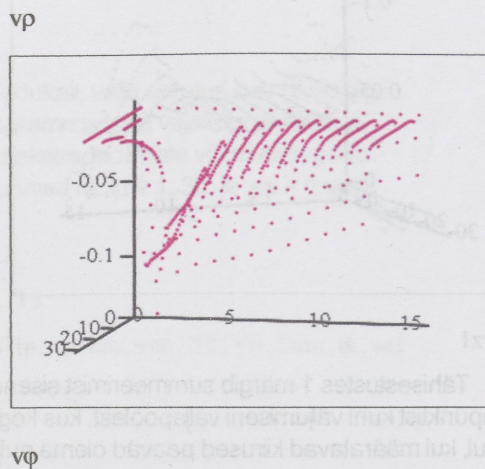
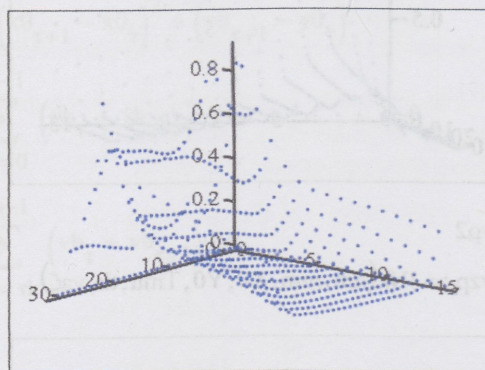
$tu = 0$	kõigil kiirustel	$v = \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2)$		
$tu = 1$	$v_\rho = \frac{1}{2} \cdot (v_{\rho 1} + v_{\rho 2})$	$v_z = v_{z 2}$	$v_\varphi = v_{\varphi 2}$	
$tu = 2$	$v_\rho := v_{\rho 1} + v_{\rho 2}$	$v_z = 0$	$v_\varphi = 0$	
$tu = 3$	$v_\rho = \frac{1}{2} \cdot (v_{\rho 1} + v_{\rho 2})$	$v_z = v_{z 1}$	$v_\varphi = v_{\varphi 1}$	Neid tehteid teeb programm:

```

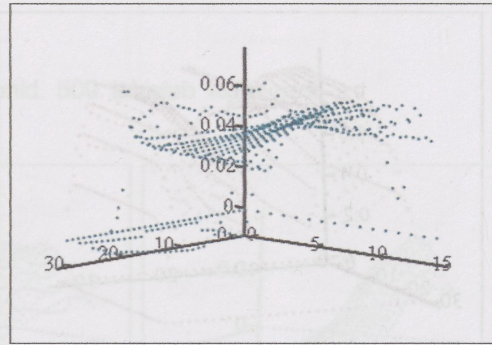
Sum := for ip ∈ 1..32
      for kp ∈ 1..15
        tn ← tuip, kp
        if tn = 0
          vr ← 0.5 · (vρ1ip, kp + vρ2ip, kp)
          vj ← 0.5 · (vφ1ip, kp + vφ2ip, kp)
          vζ ← 0.5 · (vz1ip, kp + vz2ip, kp)
        if tn = 1
          vr ← 0.5 · (vρ1ip, kp + vρ2ip, kp)
          vj ← vφ2ip, kp
          vζ ← vz2ip, kp
        if tn = 2
          vr ← vρ1ip, kp + vρ2ip, kp
          vj ← 0
          vζ ← 0
        otherwise
          vr ← 0.5 · (vρ1ip, kp + vρ2ip, kp)
          vj ← vφ1ip, kp
          vζ ← vz1ip, kp

```

$v_\rho := \text{Sum}_0$      $v_\varphi := \text{Sum}_1$      $v_z := \text{Sum}_2$

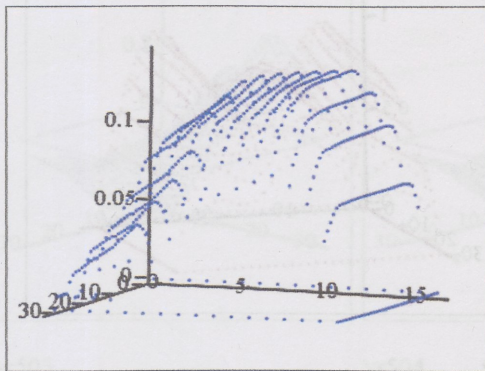


$v\rho_{ip, kp} \leftarrow v\rho$   
 $v\varphi_{ip, kp} \leftarrow v\varphi$   
 $vz_{ip, kp} \leftarrow v\zeta$   
 $v\ddot{a}_0 \leftarrow v\rho$   
 $v\ddot{a}_1 \leftarrow v\varphi$   
 $v\ddot{a}_2 \leftarrow vz$   
 $v\ddot{a}$

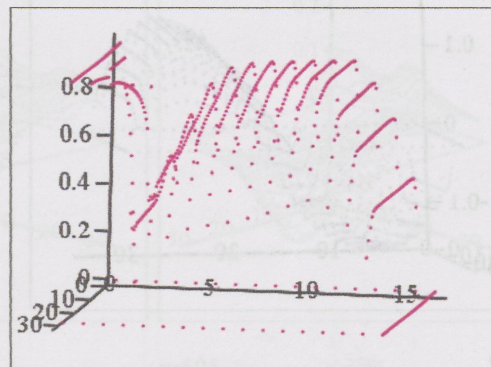


vz

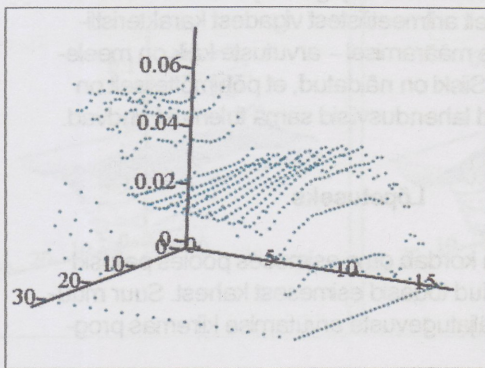
Siin tuleb veel arvestada märgimuutustega. Nagu võrrandi lahendamisel iteratsioonide meetodil, nii ka siin on märkide valik vaba. Esitatud ääreväärtused ei säti paika märgivalikuid. Et saada samu lahendusi kui iteratsiooni meetodil, tuleb siingi teha parandamisi ja lõpuks ka silumisi. Näiteks vz peab muutma märki x koordinaadi suurenemisel, kui see ületab ääritingimustega paika pandud nulljoont  $O_k$ .  $v\varphi$  valisime positiivse jne. Samuti ei rahulda ükski saadud joonistest 0-seid ääreväärtusi ja muidki tingimusi. Siinkohal ei olegi ruumi kõigi järgmiste toimingu segitamiseks, mis järgnevalt on tehtud. Osa neist on esitud jooniste juures näidatuna.



v\rho



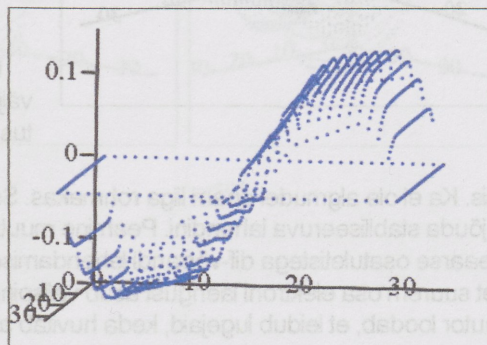
v\varphi



vz

Täidame teise väljapoole sümmeetria abil:

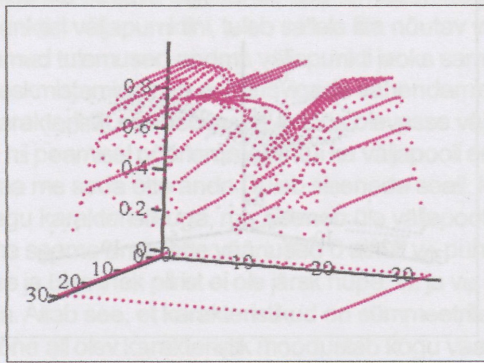
$$\begin{aligned}
 v\rho_{i, ka} &:= v\rho_{i, ka-17} & v\rho_{i, 33-ka} &:= -v\rho_{i, ka} \\
 v\varphi_{i, ka} &:= v\varphi_{i, ka-17} & v\varphi_{i, 33-ka} &:= v\varphi_{i, ka} \\
 vz_{i, ka} &:= vz_{i, ka-17} & vz_{i, 33-ka} &:= vz_{i, ka}
 \end{aligned}$$



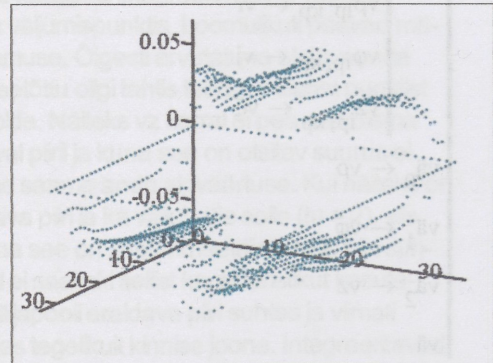
v\rho

Tekitame vz-le märgimuutuse joonel  $O_k$ .

$$vz_{i, k} := \text{if}(r_i > O_k, -vz_{i, k}, vz_{i, k})$$



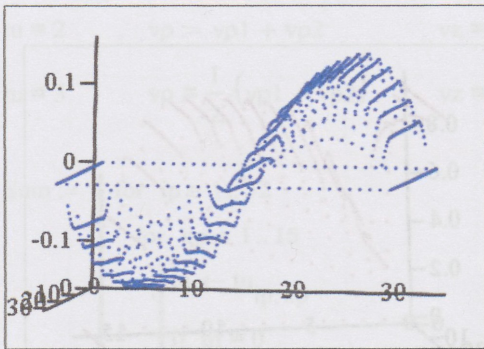
vφa



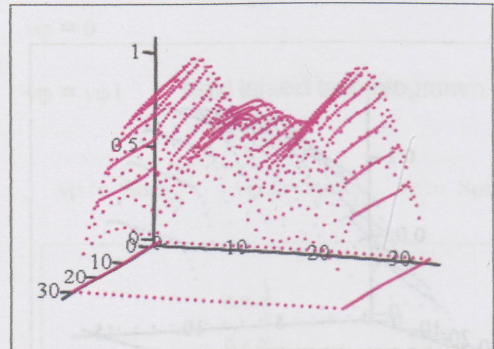
vza

Silume tulemuse ja taastame silumisprogrami rikutud 0-väärtused äärtel:

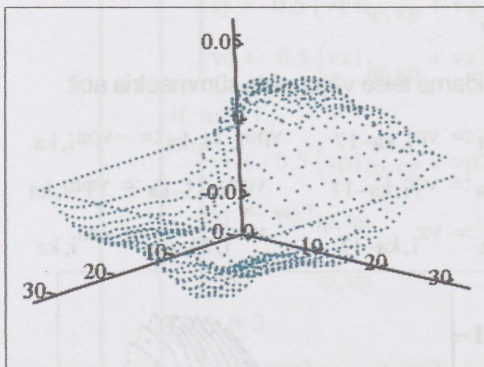
$$\begin{aligned}
 v\varphi &:= \text{Smrv}(v\varphi a, 0.5, 0.5) & v\varphi &:= \text{Smrv}(v\varphi a, 0.5, 0.5) & v z &:= \text{Smrv}(v z a, 0.5, 0.5) & v\varphi_{i,0} &:= 0 \\
 v\varphi_{i,33} &:= 0 & v\varphi_{0,k} &:= 0 & v\varphi_{33,k} &:= 0 & v\varphi_{i,0} &:= 0 & v\varphi_{i,33} &:= 0 & v\varphi_{0,k} &:= 0 & v\varphi_{33,k} &:= 0 \\
 v z_{i,0} &:= 0 & v z_{i,33} &:= 0 & v z_{33,k} &:= 0
 \end{aligned}$$



vφ



vφ



vz

Suurim erinevus oli üldsuurus. Selle erinevuse kustutasime üldkordajaga. Kujundi erinevus tuleb ilmselt aritmeetilistest vigadest karakteristlike joonte määramisel – arvutuste käik on meelelt pikk. Siiski on näidatud, et põhimõtteliselt on mõlemad lahendusviisid sama tulemust andvad.

### Lõpetuseks

III osa kordab oma esimeses pooles paljusid väljaõeldud tõesid esimesest kahest. Suur muutus on väljatugevuste arvutamise kiiremas prog-

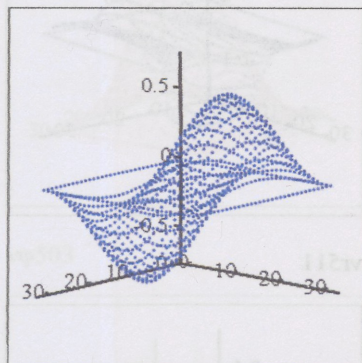
rammis. Ka ei ole algmudel enam liiga rohkakas. See võimaldab väiksema arvu iteratsioonidega jõuda stabiilseeruva lahendini. Peamine muutus on ka ülevaade karakteristliku võrrandiga lineaarse osatulestistega dif-võrrandi lahendamise käigust. Laengu jaotusfunktsioonid näitavad, et suurem osa elektroni laengust asub välispinna läheduses.

Auutor loodab, et leidub lugejaid, keda huvitab arvuti kasutamine Mathcadiga teoreetiliste ülesannete lahendamisel või vähemalt võimaluste väljasegitamisel, mis on võimalik, mis mitte.

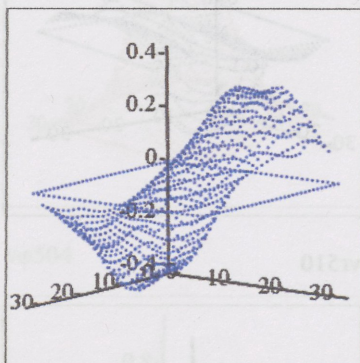
Ülo Uder, ylo.uder@mail.ee, 5652030

### Lisa

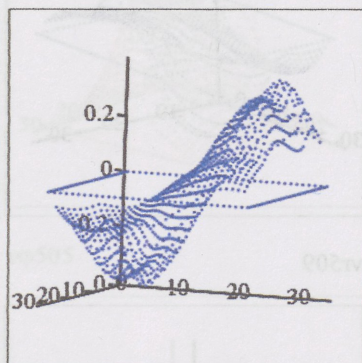
Kõigi iteratsioonide sisendkiirused ja jaotusfunktsioonid. 500 tähistab algmudelit.



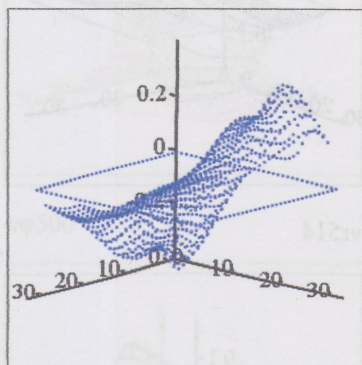
vr500



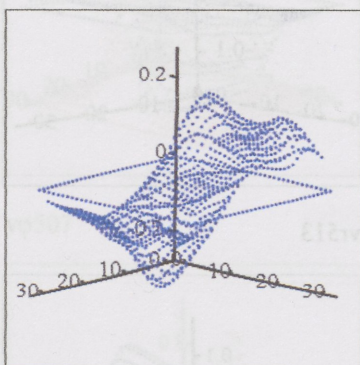
vr501



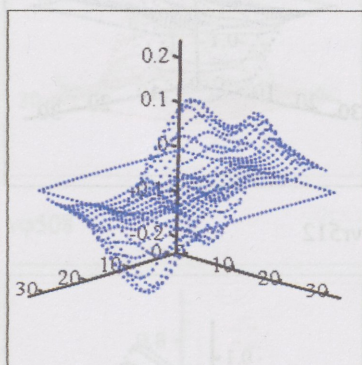
vr502



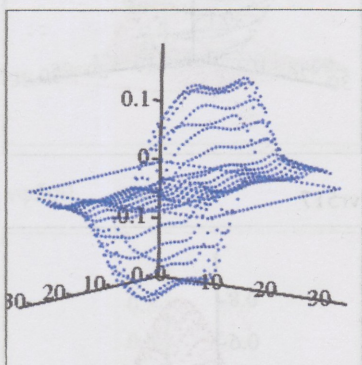
vr503



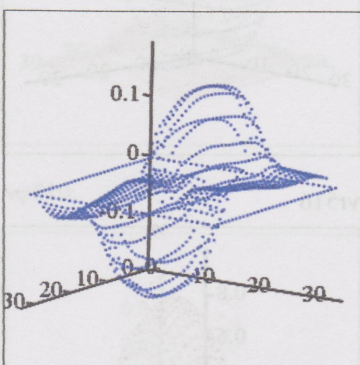
vr504



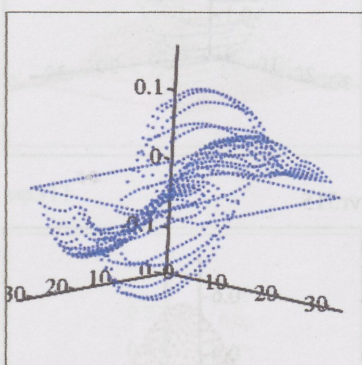
vr505



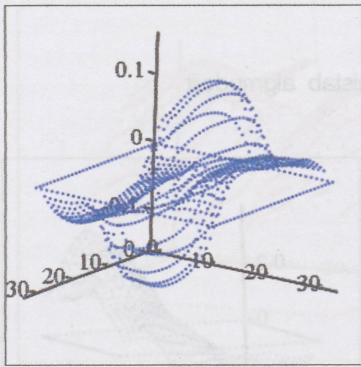
vr506



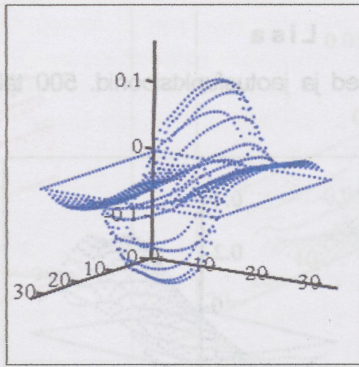
vr507



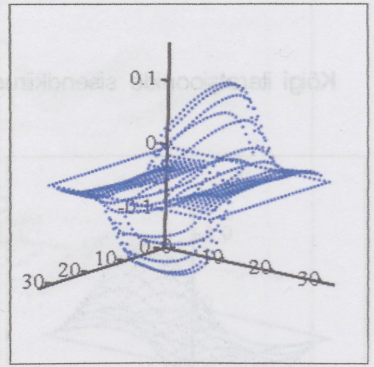
vr508



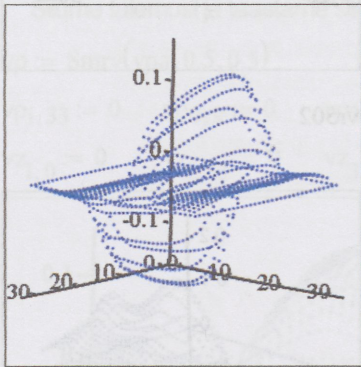
vr509



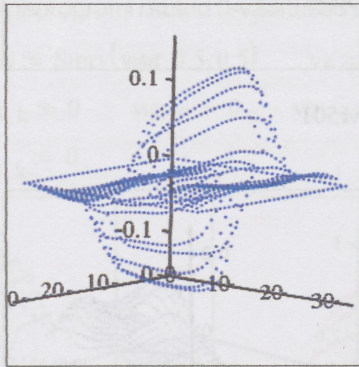
vr510



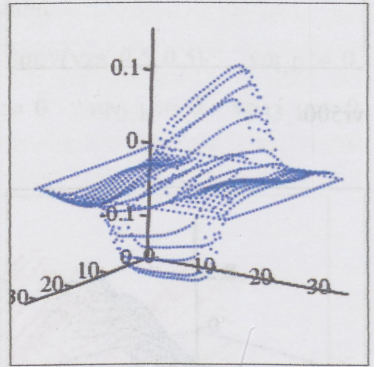
vr511



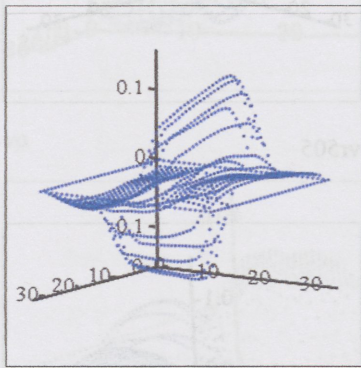
vr512



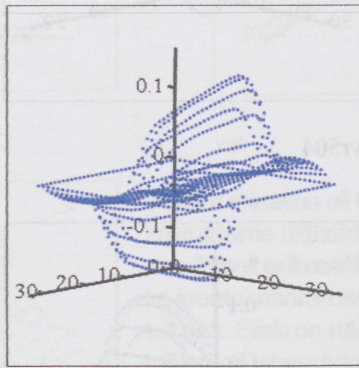
vr513



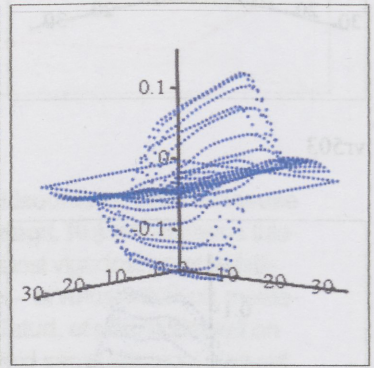
vr514



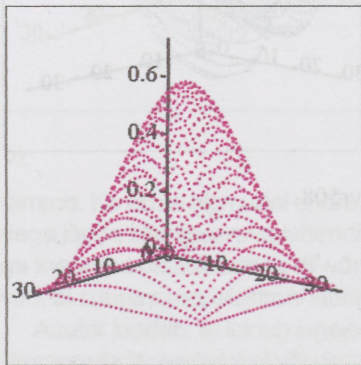
vr515



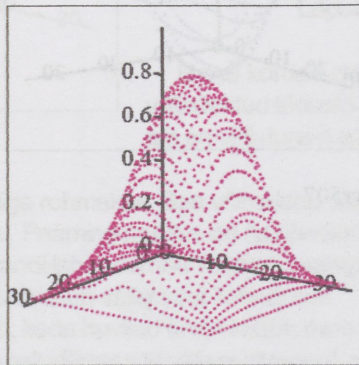
vr516



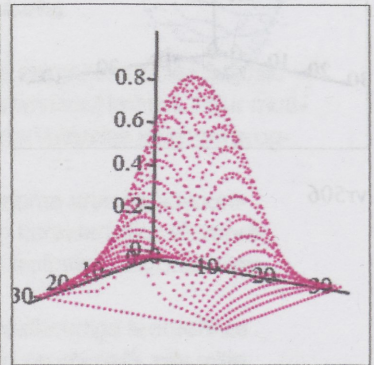
vr517



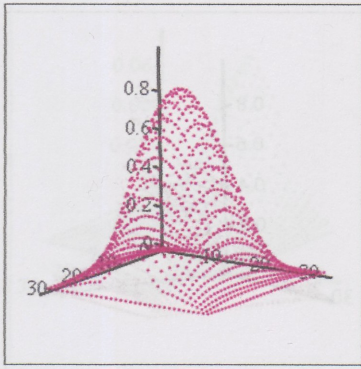
vp500



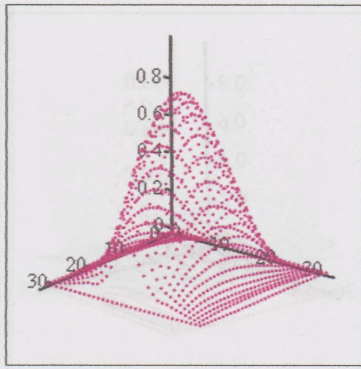
vp501



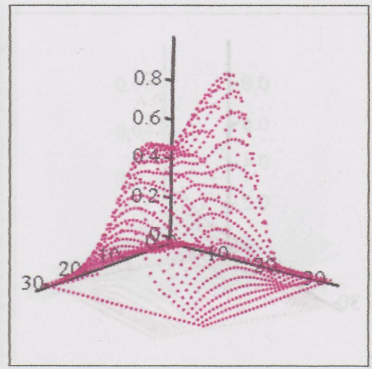
vp502



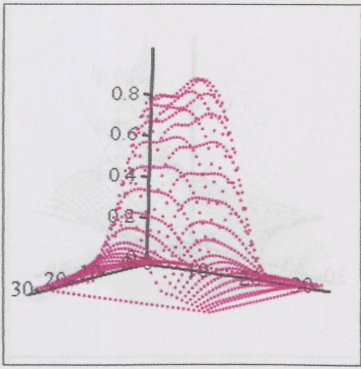
vφ503



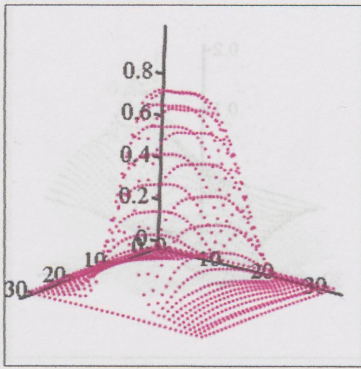
vφ504



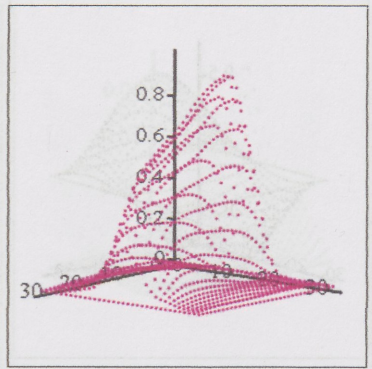
vφ505



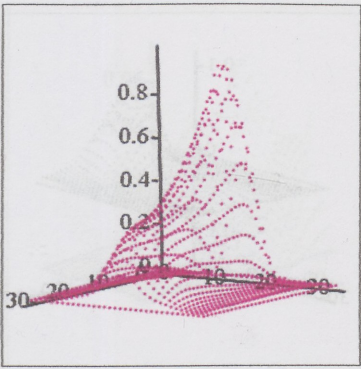
vφ506



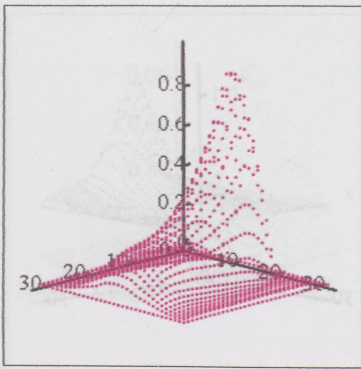
vφ507



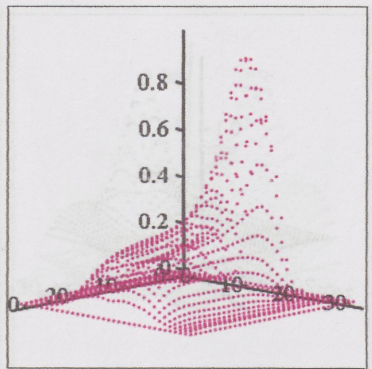
vφ508



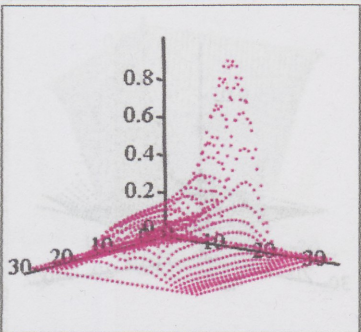
vφ509



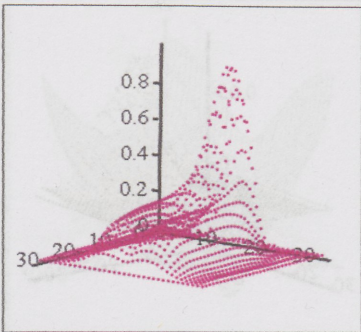
vφ510



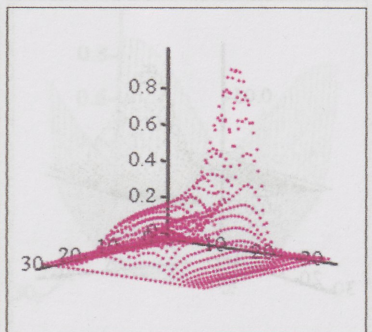
vφ511



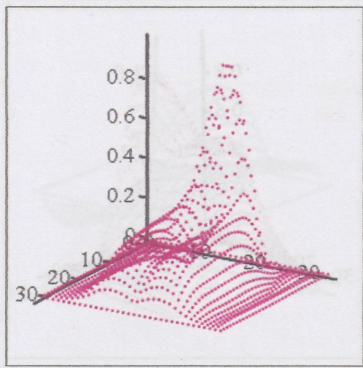
vφ512



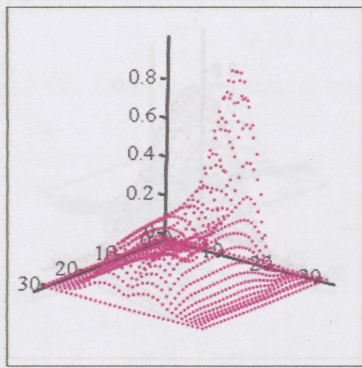
vφ513



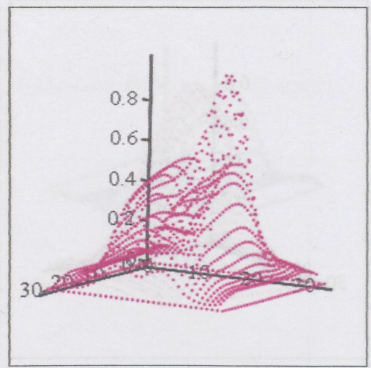
vφ514



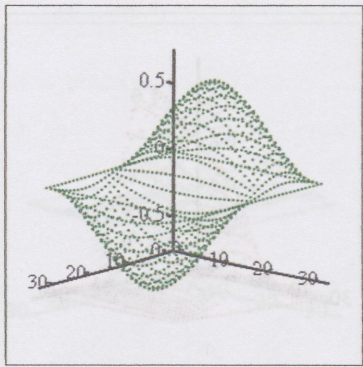
vp515



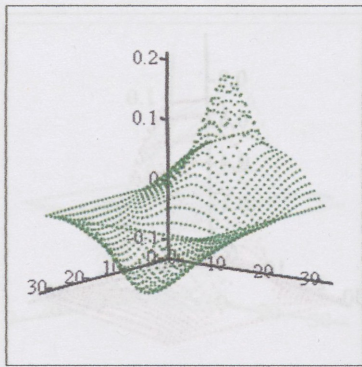
vp516



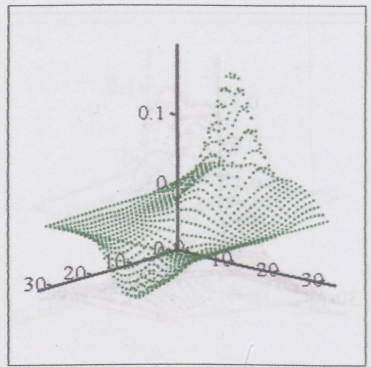
vp517



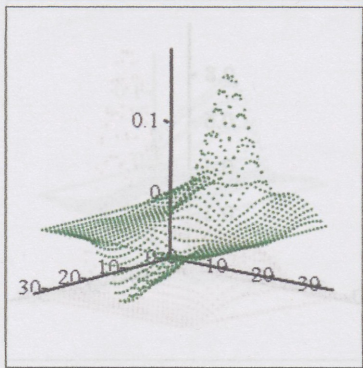
vz500



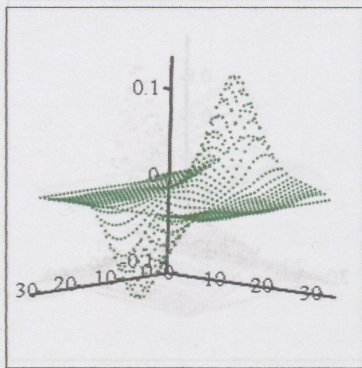
vz501



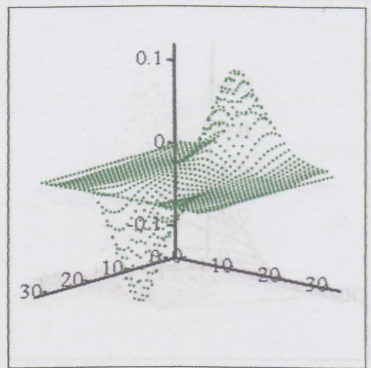
vz502



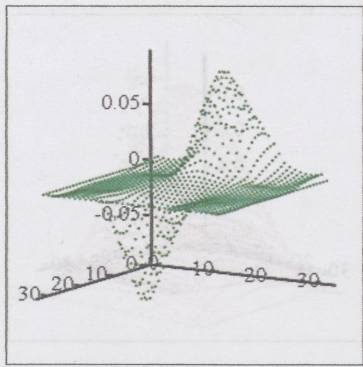
vz503



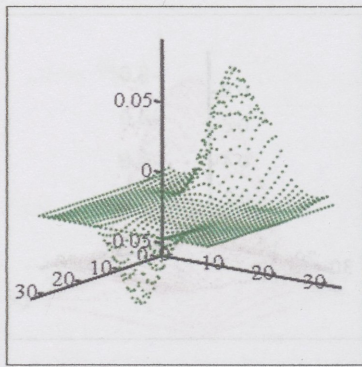
vz504



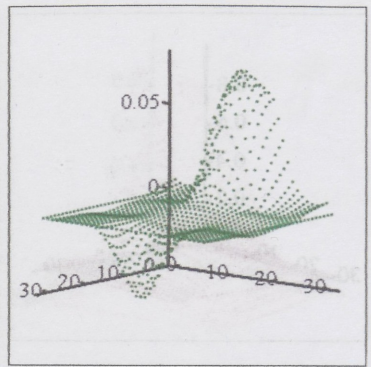
vz505



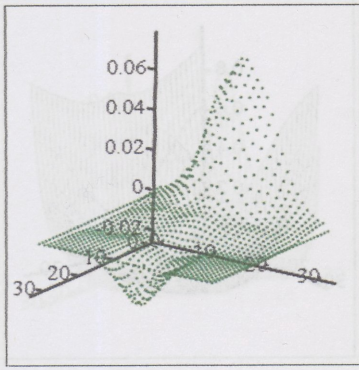
vz506



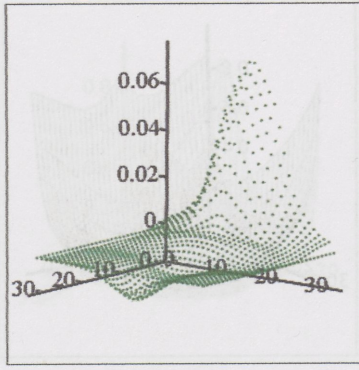
vz507



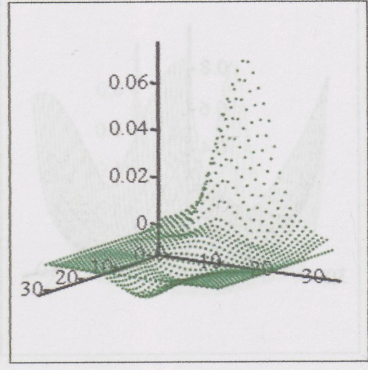
vz508



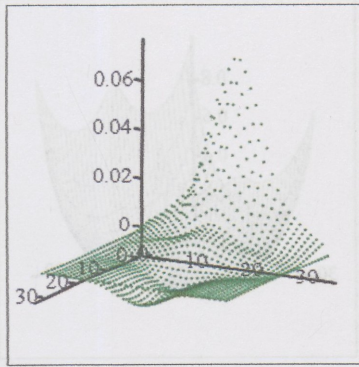
vz509



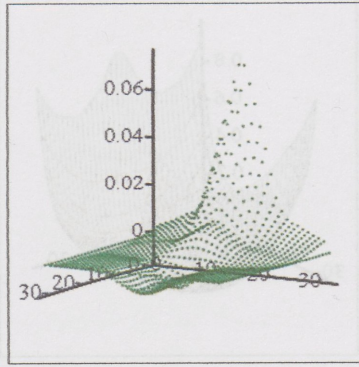
vz510



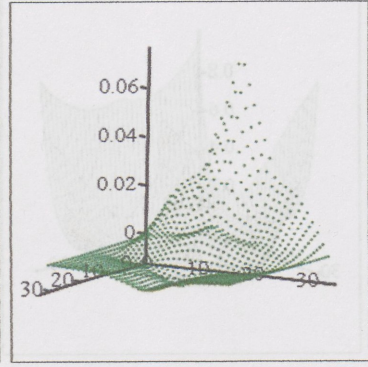
vz511



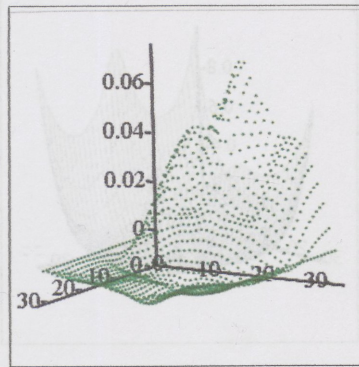
vz512



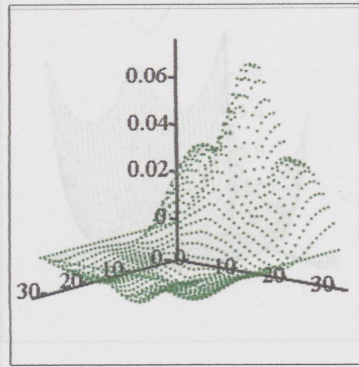
vz513



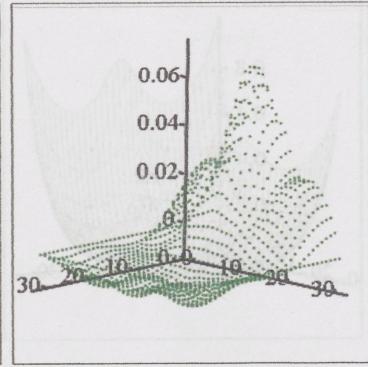
vz514



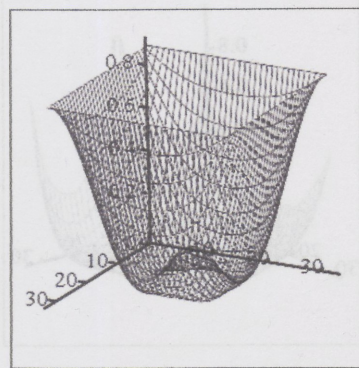
vz515



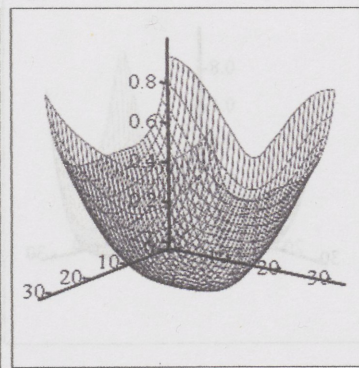
vz516



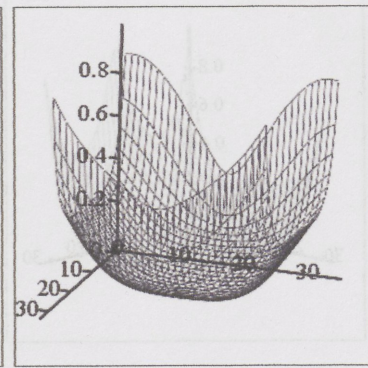
vz517



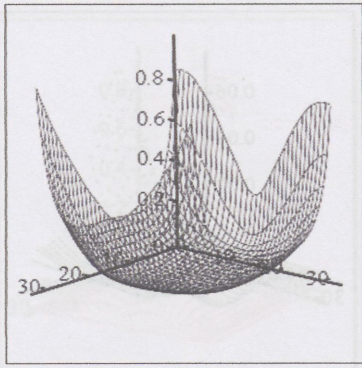
та500



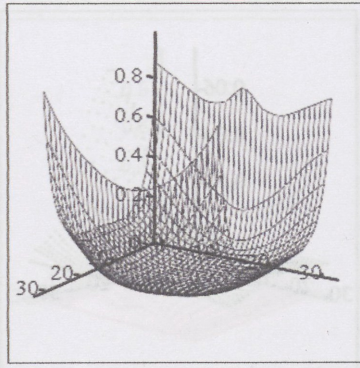
та501



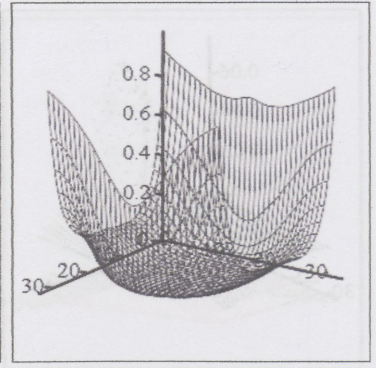
та502



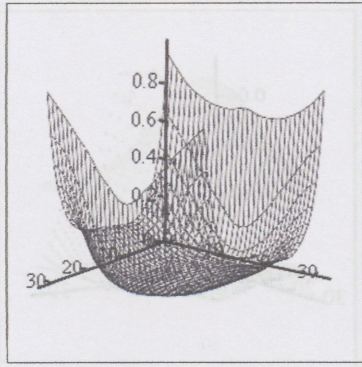
ra503



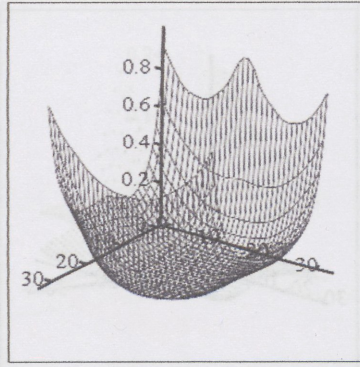
ra504



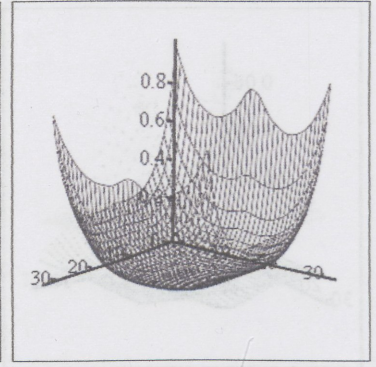
ra505



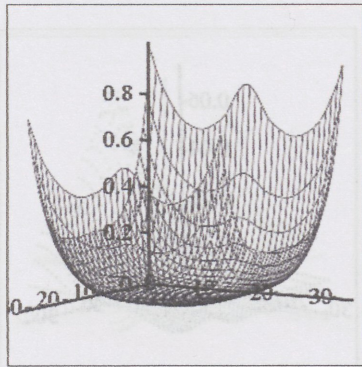
ra506



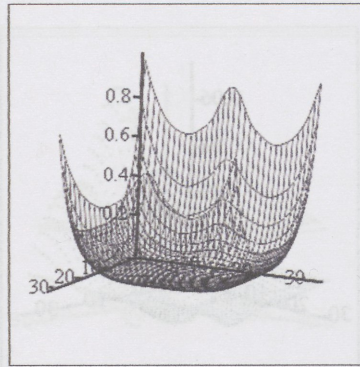
ra507



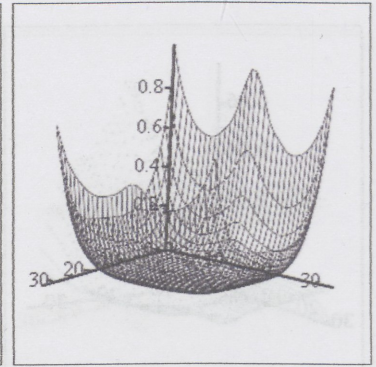
ra508



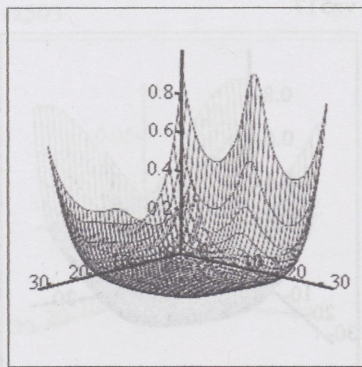
ra509



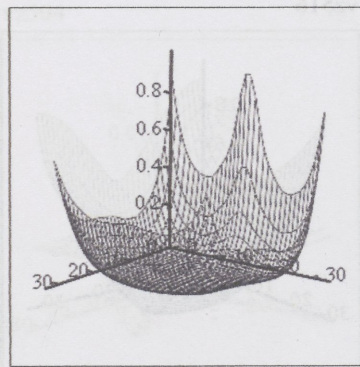
ra510



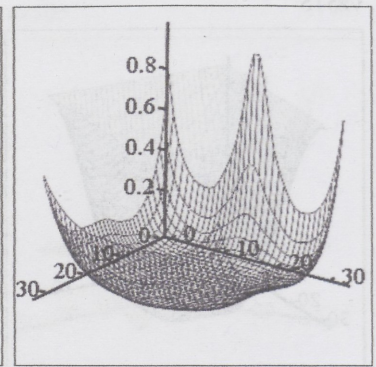
ra511



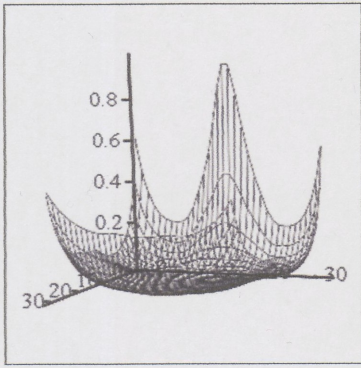
ra512



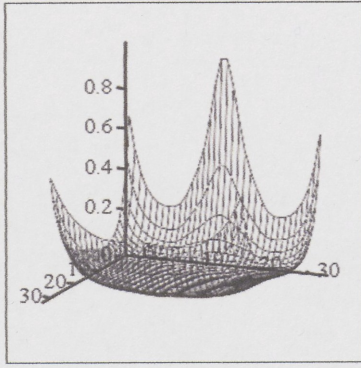
ra513



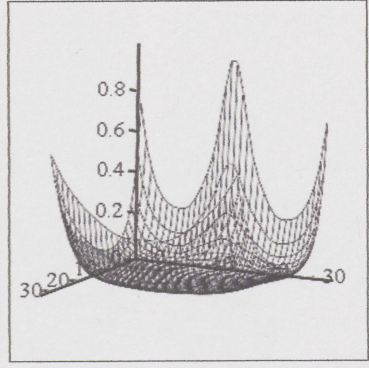
ra514



τα515



τα516



τα517