

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA- INFORMAATIKATEADUSKOND
Rakendusmatemaatika instituut
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite õppetool

Evelin Avi

**Esimest liiki integraalvõrrandite lahendamine
tuumafunktsioone baasina kasutava
kollokatsioonimeetodiga**

Magistritöö

Juhendaja: Uno Hämarik

Tartu 2004

Sisukord

Sissejuhatus	2
1 Mittekorrektssed ülesanded	7
1.1 Korrektsselt ja mittekorrektsselt seatud ülesanded	7
1.2 Regularisaatori mõiste	8
1.3 Näiteid regulariseerimismeetoditest	9
1.3.1 Tihhonovi meetod	9
1.3.2 Iteratsioonimeetodid	9
1.3.3 Projektsioonimeetodid	10
1.4 Regulariseerimisparameetri valik	11
2 Spetsiaalne kollokatsioonimeetod esimest liiki integraalvõrrandite lahendamiseks täpsete andmete juhul	13
2.1 Esimest liiki integraalvõrrandid kui mittekorrektssed ülesanded . . .	13
2.2 Kvaasitšebõševi tuumad	13
2.3 Integraalvõrrandi normaallahendi aproksimeerimisest	15
2.4 Spetsiaalse kollokatsioonimeetodi kirjeldus	16
2.5 Kollokatsioonimeetodi koonduvus	18
2.6 Kollokatsioonipunktide optimaalsest valikust	19
2.7 Reprodutseeriva tuumaga Hilberti ruum	21
2.8 Meetodi koonduvus reprodutseeriva tuumaga Hilberti ruumis, koon- duskiiruse hinnangud	23
2.9 Pidevalt diferentseeruva lahendi juht	26
2.10 Kvaasilahendiga ülesanne	28
3 Spetsiaalne kollokatsioonimeetod ligikaudsete andmete juhul	29
3.1 Meetodi koonduvus kollokatsioonipunktide aprioorse valiku korral .	29
3.2 Diferentseerimisülesande lahendamine kollokatsioonimeetodiga . . .	33
3.3 Diskretiseerimistasemed	34
3.4 Lähilahendi vea monotoonsuse tingimus	35
3.5 Diskretiseerimistaseme valiku aposterioorsed valikureeglid	37
3.5.1 Hälbeprintsip	38
3.5.2 Monotoonse vea reegel	38
3.6 Monotoonse vea reegli regulariseerimisomadustest	38
4 Numbrilised tulemused	41
4.1 Näiteülesannete kirjeldus	41
4.2 Lähteandmete häirimine	41

4.3	Numbriliste tulemuste esitamine tabelite ja graafikutena	42
4.4	Programmi kirjeldus	43
4.4.1	Protseduur kordaja	43
4.4.2	Protseduur viga	43
4.4.3	Protseduurid n_{ME} ja $n_{ME-\text{delta}-i}$	43
4.4.4	Protseduur hälbeprintsip	44
4.5	Arvulised tulemused tabelite ja graafikutena	45
4.5.1	Ülesanne 1	45
4.5.2	Ülesanne 2	46
4.5.3	Ülesanne 3	49
4.5.4	Ülesanne 4	50
4.5.5	Ülesanne 5	51
4.6	Numbriliste tulemuste interpretatsioon	52
Summary		54
Viited		56
Lisa 1. Tabelid ja graafikud		59
L1.1	Ülesanne 1	59
L1.1	Ülesanne 2	60
L1.1	Ülesanne 3	61
L1.1	Ülesanne 4	62
L1.1	Ülesanne 5	63
L1.6	Ülesanne 6	64
L1.7	Ülesanne 7	65
L1.8	Ülesanne 8	66
L1.9	Ülesanne 9	67
L1.10	Ülesanne 10	68
Lisa 2. Programmi tekst		69

Sissejuhatus

Käesolevas magistritöös vaatleme esimest liiki integraalvõrrandite lahendamist. Need võrrandid on mittekorrektsest seadusest ülesanded, kuna lahend ei pruugi leiduda, lahend ei pruugi olla ühene ja ei pruugi sõltuda pidevalt ülesande lähteandmetest. Käesoleva töö enamuses on lahendi olemasolu eeldatud.

Korrektsete ülesannete lahendamisel koonduvad diskretiseerimismeetodid avaratel tingimustel. Kui mittekorrektse ülesande lahendamisel otsitakse lähislahendit standardsete baasfunktsioonide (näiteks splineide) lineaarkombinatsioonina, on lähislahendite koonduvus baasfunktsioonide arvu lõpmatusel lähenemisel garanteeritud vaid oluliselt kitsendavate lisatingimuste täidetuse korral.

Käesolevas töös vaadeldakse spetsiaalset kollokatsioonimeetodit esimest liiki integraalvõrrandite lahendamiseks. Vaatleme integraalvõrrandeid tuumadega, kus esimese argumendi asendamisel kollokatsioonipunktidega saadavad teise argumendi funktsioonid on lineaarselt sõltumatud. Need funktsioonid ongi baasfunktsioonid, mille lineaarkombinatsioonina lähislahendit otsime. Baasfunktsioonide kordajad leiame kollokatsioonitingimustest. Osutub, et saadav lähend on kollokatsioonitingimusi rahuldavate kõikvõimalike lähislahendikandidaatide hulgas minimaalse L_2 -normiga. Saadava lähislahendi teiseks oluliseks omaduseks on, et lähislahend on võrrandi lahendile parim lähend antud baasfunktsioonide lineaarkombinatsioonina esituvate lähendite hulgas, kui võrrandi vabaliige on täpselt teada. Täpsete andmete juhul on näidatud lähislahendi koondumine täpselt lahendiks avaratel tingimustel. Vaadeldud on ka kollokatsioonipunktide optimaalse paigutamise küsimusi.

Mittekorrektsete ülesannete korral on oluline vaadelda ligikaudselt antud lähteandmete juhtu. Nende ülesannete lahendamiseks sobib meetod, mis garanteerib täpsete lähteandmete korral lähendite koonduvuse täpselt lahendiks ning mis võtab ebatäpsete lähteandmete korral arvesse lähteandmete veataset viisil, mis garanteerib lähislahendite koondumise täpselt lahendiks veataseme koondumisel nulliks. Sellises regulariseerivas algoritmis esineb teatav regulariseerimisparameeter, mille sobiv valik sõltuvalt ülesande lähteandmete veatasemest peabki garanteerima lähislahendite koonduvuse.

Käesolevas magistritöös vaadeldavas spetsiaalses kollokatsioonimeetodis on regulariseerimisparameetriks diskretiseerimistase n . Eeldatakse, et igale naturaalarvule n on mingi fikseeritud eeskirja alusel vastavusse seatud kollokatsioonipunktide komplekt, seejuures n suurenedes iga järgnev komplekt sisaldab eelmist. Töös

näidatakse, et kui võrrandi vabaliige on täpselt teada, siis n kasvades vastavate lähislahendite viga väheneb monotoonselt ja koondub nulliks, kui kollokatsioonipunktide hulk on piirtihe vastaval lõigul. Ligikaudselt teadaoleva vabaliikme juhuks on tuletatud kontrollitav tingimus, mille täidetuse korral lähislahendi u_n viga on väiksem kui lähendil u_{n-1} . Tuletatud tingimuse alusel on formuleeritud monotoonse vea reegel arvu n_{ME} kui regulariseerimisparameetri valikuks: valime $n_{ME} = n_* + 1$, kus n_* on viimane arvudest $n = 1, 2, \dots$, mille korral mainitud tingimus on rahuldatud. Käesoleva töö olulisimaks tulemuseks on punktis 3.6 sisalduv teoreem 3.4, mis näitab, et monotoonse vea reegel diskretiseerimistaseme valikuks muudab vaadeldava kollokatsioonimeetodi regulariseerimismeetodiks.

Teisi aposterioorseid regulariseerimisparameetri n valikueeskirju antud kollokatsioonimeetodi jaoks pole seni pakutud. Käesolevas töös on formuleeritud teistes regulariseerimismeetodites traditsiooniliselt kasutatav hälbeprintsip $n = n_{D,b}$ valikuks, aga siin on ebaselge nii konstandi b valik kui ka lähislahendite koonduvus.

Magistritöö viimases osas ja lisas 1 on nii monotoonse vea reeglit kui hälbeprintsipi katsetatud numbriliselt, lahendades kahte esimest liiki Fredholmi integraalvõrrandit ning kaheksat numbrilise diferentseerimise mudelülesannet kui esimest liiki Volterra integraalvõrrandit. Kollokatsioonipunktideks $t_i \in [0, 1]$ ($i = 1, \dots, m$) on valitud lõigu $[0, 1]$ keskpunkti $1/2$ suhtes sümmeetriliselt paiknevad võrdsete vahemikega punktid. Nende arv diskretiseerimistasemetel $n = 1, 2, \dots$ on $m = m(n) = 2^n - 1$. Võrrandi paremale poolele on lisatud häire $\delta \cdot f_1(t)$ või $\delta \cdot f_2(t)$, kus $f_1(t) = \sin(M \cdot t)$ ja $f_2(t)$ on teatav konstrueeritud funktsioon, mille väärtusteks kollokatsioonipunktides on $-1, 1$ või 0 . Siin δ näitab veataset ja M on konstant. Tabelites on esitatud lähislahendite vead ja hälbed erinevate δ väärtuste ning diskretiseerimistasemete n korral. Eraldi on välja toodud iga δ korral n_{opt} , n_{ME} , $n_{D,1.5}$ ja $n_{D,5}$ väärtused, seejuures n_{opt} on antud δ korral vähima vea andnud n väärtus. Lähislahendite vigade kohta on esitatud ka graafikud.

Numbrilised tulemused kinnitasid teoreetilist tulemust $n_{ME} \leq n_{opt}$, seejuures n_{ME} ei olnud oluliselt väiksem optimaalsest väärtusest. Kõigis eksperimentides $n_{opt} - 3 \leq n_{ME} \leq n_{opt}$. Ootustekohaselt oli n_{ME} lähedasem väärtusele n_{opt} , kui info lähteandmete vigade kohta oli täielikum: kui ülesande parema poole häire sõlmedes t_i oli täpselt δ või kui eeldasime igas sõlmes t_i konkreetse erineva veataseme $\delta_i = \delta |\sin(M \cdot t_i)|$ teadmist.

Peatükis 1 ja punktis 2.1 toodud materjal on üldtuntud (vt. [4–6, 10, 11,

17, 20, 24 – 26]). Punktides 2.2 – 3.2 on laiendatud ja ühtlustatud teiste autorite üsna erineva lähenemisega käsitusi. Kasutatud kirjandusallikateks on vastavalt: 2.2 – [28], 2.3, 2.6 – [13], 2.4, 2.5 – [27], 2.7 – 2.10 – [1 – 4, 11, 15, 16, 23], 3.1, 3.2 – [1]. Punktides 3.3 – 3.5 on laiendatud oma artikli [9] tulemusi, punktis 3.6 saadud põhitulemus on publitseerimata. Peatükis 4 esitatud arvuliste tulemuste saamiseks on käesoleva töö autor iseseisvalt Maple V keskkonnas koostanud programmi ning viinud läbi numbrilised eksperimendid.

1 Mittekorrektseid ülesanded

1.1 Korrektsest ja mittekorrektsest seatud ülesanded

Ülesande seade korrektsuse mõiste on üks keskseid mõisteid matemaatikas. Selle tõi 20. sajandi algul sisse prantsuse matemaatik J. Hadamard. Mittekorrektsete ülesannetega hakati tõsisemalt tegelema umbes 40 aastat tagasi, teoreetiliste aluste loojateks on A. N. Tihhonov, V. K. Ivanov ja M. M. Lavrentjev.

Vaatleme ülesannet

$$Au = f, \quad (1.1)$$

kus A on operaator, mis tegutseb Banachi ruumist E Banachi ruumi F , vabaliige $f \in F$ on antud ning $u \in E$ on otsitavaks funktsiooniks. Rakendusülesannetes on sageli võrrandi täpse parema poole $f \in F$ asemel teada tema lähend.

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et ülesanne (1.1) on korrektsest seatud ruumide paaril E ja F ehk korrektne Hadamard'i mõttes, kui on täidetud tingimused:

- (a) sellel ülesandel leidub lahend $u \in E$ iga vabaliikme $f \in F$ korral;
- (b) lahend $u \in E$ on ühene;
- (c) lahend $u \in E$ sõltub pidevalt võrrandi (1) vabaliikmest, st. vabaliikmete koondumisest $f_n \rightarrow f$ meetrika F mõttes järeldub alati vastavate lahendite koondumine $u_n \rightarrow u$ meetrika E mõttes.

Teisisõnu, kui ülesandes (1.1) operaator $A : E \rightarrow F$ on pidev lineaarne operaator ning sellel ülesandel leidub ühene lahend $u \in E$ iga vabaliikme $f \in F$ korral, siis ülesanne (1.1) on korrektne. Sel juhul operaatoril $A : E \rightarrow F$ eksisteerib pidev lineaarne pöördoperaator $A^{-1} : F \rightarrow E$ ning järgnevast hinnangust

$$\|u_n - u\|_E \leq \|A^{-1}\| \|f_n - f\|_F$$

järeldub lahendi $u \in E$ pidev sõltuvus vabaliikmest $f \in F$. Tähistega $\|u_n\|_E$ ja $\|f\|_F$ märgime norme Banachi ruumides E ja F . Kui vähemalt üks neist kolmest tingimusest (a) – (c) ei ole täidetud, siis öeldakse, et ülesanne (1.1) on Hadamard'i mõttes mittekorrektsest seatud ehk mittekorrektne ruumide paaril E ja F .

Edaspidi vaatleme vaid mittekorrektseid ülesandeid, kus ruumid E ja F on Banachi ruumid ning A on pidev lineaarne operaator, mis tegutseb ruumist E ruumi F , st. $A \in L(E, F)$. Kujul (1.1) olevate mittekorrektsete ülesannete korral võib võrrandi (1.1) vabaliikme f kuitahes väike häiritus kaasa tuua lahendi u

kuitahes suure häirituse eeldusel, et lahend üldse eksisteerib.

Põhjalikuma käsitluse mittekorrektsetest ülesannetest võib leida raamatutest [4, 6, 20, 24, 25].

1.2 Regularisaatori mõiste

Mittekorrektsete ülesannete lahendamisel kasutatakse regulariseerimismeetodeid, mille korral konstrueeritakse regularisaator ja selle rakendamisel ülesande vabaliikmele leitakse lähislahendid.

Vaatleme võrrandit (1.1), milles A on pidev lineaarne operaator Banachi ruumist E Banachi ruumi F . Me ei eelda selle võrrandi lahendi olemasolu iga vabaliikme $f \in F$ korral ega ka selle ühesust. Võrrand (1.1) on lahenduv parajasti siis, kui $f \in \mathcal{R}(A)$. Siin $\mathcal{R}(A)$ tähistab operaatori A väärtuste piirkonda ning sümboliga $A^{-1}f$ tähistame võrrandi (1.1) kõigi lahendite hulka antud $f \in \mathcal{R}(A)$ korral.

Tavaliselt me ei tea ülesande vabaliiget f päris täpselt, vaid teame tema teatavat lähendit f_δ . Eeldame, et $f_\delta \in F$ ja $\|f_\delta - f\|_F \leq \delta$, siin δ on teatav parameeter. Järgnevas vaatleme olukorda, kus võrrandis (1.1) on täpse vabaliikme f asemel teada vaid tema lähend f_δ ning toome sisse regularisaatori mõiste.

Definitsioon 1.2. Ülesande (1.1) regularisaatoriks nimetatakse sellist parameetrist δ sõltuvat operaatorite $R_\delta : F \rightarrow E$ ($0 < \delta \leq \delta_0$) üheparameetrilist peret, kus iga $f \in \mathcal{R}(A)$ korral protsessis $\delta \rightarrow 0$ kehtib seos

$$\sup_{f_\delta \in F, \|f_\delta - f\| \leq \delta} \inf_{u \in A^{-1}f} \|R_\delta f_\delta - u\| \rightarrow 0.$$

Kui me oskame konstrueerida vaadeldava mittekorrektse ülesande regularisaatori, siis saame leida ülesande kuitahes täpse lähislahendi $R_\delta f_\delta$, kui vaid teame küllalt täpselt vabaliikme f lähendit f_δ ($0 < \delta \leq \delta_0$).

Definitsioon 1.3. Regularisaatorit nimetatakse pidevaks (lineaarseks), kui iga operaator R_δ ($0 < \delta \leq \delta_0$) on pidev (lineaarne). Ülesannet (1.1) nimetatakse regulariseeruvaks (pidevalt regulariseeruvaks, lineaarselt regulariseeruvaks), kui tema jaoks leidub vähemalt üks regularisaator (pidev regularisaator, lineaarne regularisaator).

On teada (vt. [25]), et esimest liiki integraalvõrrandil

$$Au(t) \equiv \int_a^b \mathcal{K}(t, s)u(s)ds = f(t), \quad a \leq t \leq b$$

sileda tuumaga $\mathcal{K}(t, s)$, kus operaator $A : C[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$, regularisaatorit ei leidu. Regularisaatori leidumine on garanteeritud juhul, kui ruum F on refleksiivne. Vastavate ruumide näiteks on ruumid $L^p(a, b)$, $1 < p < \infty$.

Regularisaatori olemasolu lubab suvalise $f \in \mathcal{R}(A)$ korral, mis on teada ligikaudse täpsusega δ ($0 < \delta \leq \delta_0$), leida lähislahendi, mis koondub täpseks lahendiks u piirprotsessis $\delta \rightarrow 0$. Reaalsetes ülesannetes reeglina piirprotsessi $\delta \rightarrow 0$ teostada ei ole võimalik. Paljudes rakendusülesannetes osutub $R_\delta f_\delta$ ($0 < \delta \leq \delta_0$) siiski küllalt heaks lähendiks täpsele lahendile.

Välja on töötatud terve rida regulariseerimismeetodeid – eeskirju lähislahendite $R_\delta f_\delta$ arvutamiseks. Kõigis neis meetodites esineb teatav parameeter, nn. regulariseerimisparameeter, mille sobiv valik sõltuvalt veatasemest δ tagab lähislahendite koonduvuse.

1.3 Näiteid regulariseerimismeetoditest

1.3.1 Tihhonovi meetod

1963. aastal võttis vene matemaatik A. N. Tihhonov kasutusele regularisaatori mõiste ning pakkus välja ühe efektiivse meetodi mittekorrektsete ülesannete lahendamiseks. Tihhonovi meetodi lihtsaima variandi puhul leitakse ülesande (1.1) lähislahend kui funtsionaali

$$\Phi_\alpha(u) = \alpha \|u\|_H^2 + \|Au - f\|_F^2,$$

miinimumkoht. Siin α on väike positiivne regulariseerimisparameeter, E ja F on reaalsed Hilberti ruumid, operaator $A : E \rightarrow F$, vabaliige $f \in F$ ning $u \in E$ on otsitavaks funktsiooniks. Kirjeldatud miinimumülesanne on samaväärne võrrandi

$$(A^*A + \alpha I)u_\alpha = A^*f_\delta$$

lahendi u_α leidmisega. Siin A^* on operaatori A kaasoperaator ning I tähistab ühikoperaatorit.

1.3.2 Iteratsioonimeetodid

Mittekorrektse ülesande (1.1) lahendamisel kasutatakse ka iteratsioonimeetodeid (nii ilmutatud kui ilmutamata iteratsioonimeetodeid). Ilmutatud iteratsioonimeetodiks on näiteks Richardsoni meetod ((vt.[21], lk.250) sageli nimetatakse seda

meetodit ka Landweberi meetodiks)

$$u_n = u_{n-1} - \mu A^*(Au_{n-1} - f), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

mis korrektse ülesande puhul koondub suvalise alglähendi $u_0 \in E$ korral, kui $0 < \mu < \frac{2}{\|A\|^2}$. Mittekorrektse ülesande puhul kasutatakse seda regulariseerimismeetodina, kus regulariseerimisparameetri rollis on iteratsioonide arv. Kasutatakse ka ilmutamata iteratsioonimeetodit kujul

$$\alpha u_n + A^* A u_n = \alpha u_{n-1} + A^* f, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

kus α on positiivne konstant. Iteratsioonimeetodites (1.2) ja (1.3) saadavad lähislahendid avalduvad kujul

$$u_m = (I - A^* A g_m(A^* A)) u_0 + g_m(A^* A) A^* f,$$

milles funktsioonideks $g_m(\lambda)$ on vastavalt $g_m(\lambda) = \frac{1}{\lambda} [1 - (1 - \alpha\lambda)^m]$ ja $g_m(\lambda) = \frac{1}{\lambda} [1 - (\frac{\alpha}{\alpha+\lambda})^m]$, kus $0 \leq \lambda < \|A\|^2$ ning $m \geq 1$ on naturaalarv.

1.3.3 Projektsioonimeetodid

Toome sisse iseregulariseerimise mõiste. Oletame, et peale lähtevõrrandi (1.1) vahetut diskretiseerimist oleme saanud üheselt lahenduva n - mõõtmelise võrrandi $A_n u_{n(\delta)} = f_\delta$. Leidku täpsete andmete korral aset koondumine $u_n \rightarrow u$ protsessis $n \rightarrow \infty$. Sel juhul on ligikaudselt antud parema poole f_δ korral võimalik valida $n = n(\delta)$ sõltuvalt veatasemest δ selliselt, et saame regulariseeriva algoritmi regulariseerimisparameetriga n , s.t $u_n \rightarrow u$ protsessis $\delta \rightarrow 0$. Sellist diskretiseerimismeetodiga regulariseerimist nimetatakse iseregulariseerimiseks.

Järgnevas vaatleme projektsioonimeetodeid võrrandi (1.1) jaoks, milles operaator $A \in L(H, F)$ ning H, F on Hilberti ruumid. Seda ülesannet saab lahendada mitmete projektsioonimeetoditega. Olgu $H_n \subset H$ ja $F_n \subset F$ alamruumid dimensiooniga n ning P_n ja Q_n vastavad ortoprojektorid. Projektsioonimeetodites otsime lähislahendit $u_n \in H_n$, mis rahuldab projekteeritud võrrandit $A_n u_n = Q_n f$, kus operaator $A_n \in L(H_n, F_n)$ on määratud seosega $A_n v_n = Q_n A v_n$ iga $v_n \in H_n$ korral. Projektsioonimeetodite näideteks on vähimruutude meetod, milles $F_n = A H_n$ ning vähima vea meetod, kus $H_n = A^* F_n$. Juhul $F = H$ ning $A = A^* > 0$ võime kasutada ka Galjorkini meetodit, milles $F_n = H_n$. Nende meetodite koonduvustingimusi täpsete andmete ($f_\delta = f$) korral ja dimensiooni n kui regulariseerimisparameetri valikureegleid ebatäpsete andmete korral võib leida artiklitest [9, 17, 26, 27].

1.4 Regulariseerimisparameetri valik

Mittekorrektse ülesande lahendamisel regulariseerimismeetodiga on oluliseks küsimuseks regulariseerimisparameetri valik sõltuvalt veatasemest δ . See valik peab olema täpsuse ja stabiilsuse kompromiss: Tihhonovi meetodis regulariseerimisparameetri α väärtuse vähenedes täpsete algandmete korral ($\delta = 0$) aproksimatsioonitäpsus suureneb, kuid ebatäpsete algandmete korral ($\delta > 0$) stabiilsus andmevigade suhtes väheneb. Kui lahendi siledus suureneb, siis on võimalik täpset lahendit täpsemalt aproksimeerida ning optimaalne parameeter α väheneb. Iteratsioonimeetodites on regulariseerimisparameetri rollis peatumisindeks n . Lähislahendi veas domineerib väikese n korral aproksimeerimisviga, suure n korral ebatäpsest vabaliikmest ($f_\delta \neq f$) tingitud viga.

Lähislahendile vähimat võimalikku viga garanteerivaid optimaalseid parameetreid saab leida vaid mudelülesannetes kus täpne lahend on teada. Siiski on ka täpset lahendit teadmata mõnede parameetriveraliku eeskirjade korral võimalik tagada, et valitud parameetri korral lähislahendi viga ei ole oluliselt suurem kui optimaalse parameetri korral. Sobiva parameetri leidmiseks on välja töötatud mitmeid regulariseerimisparameetri valikureegleid. Vastavad reeglid jagunevad apriorseteks (kogemuseelseteks) ja aposterioorseks (kogemusjärgseteks) valikuteks. Apriorne parameetriveralik toimub konkreetse ülesande lähteandmeid A ja f_δ kasutamata, aposterioorsel parameetriveralikul seevastu valitakse parameeter pärast arvutuste teostamist. Arvutustes kasutatakse konkreetseid lähteandmeid A ja f_δ .

Tuntuimaks aposterioorseks parameetriveraliku eeskirjaks on hälbeprintsip (vt. [24, 25]), mille kohaselt valitakse Tihhonovi meetodis parameeter α võrdusest

$$\| Au_\alpha - f_\delta \| = b \delta, \quad b = \text{const} \geq 1.$$

Iteratsioonimeetodites valitakse hälbeprintsipi korral parameetriks n esimene arvudest $n = 1, 2, \dots$, mille korral

$$\| Au_n - f_\delta \| \leq b \delta, \quad b = \text{const} \geq 1.$$

Hiljuti on neis regulariseerimismeetodites välja pakutud ja uuritud uut aposterioorset regulariseerimisparameetri valikureeglit. Selle reegli kohaselt leitakse Tihhonovi meetodis vähim α_* , mille korral on teada, et kehtib hinnang

$$\| u_{\alpha_*} - u \| < \| u_\alpha - u \|, \quad \forall \alpha > \alpha_*.$$

Seda reeglit nimetatakse monotoonse vea reegliks ehk ME- reegliks, kus lühend ME tuleneb ingliskeelsetest sõnadest " monotone error " (vt. [7] ja [8]).

Iteratsioonimeetodites valitakse selle reegli alusel peatumisindeksiks $n = n_{ME}$ kui esimene arvudest $n = 1, 2, \dots$, mille korral $d_{ME}(n) \leq \delta$. Siin $d_{ME}(k)$ märgib niisugust funktsiooni, et kui kehtib võrratus $d_{ME}(k) > \delta$, siis sellest järeldeb, et $\|u_{k+1} - u\| \leq \|u_k - u\|$. Kuna $k = 1, 2, \dots, n_{ME} - 1$ korral $d_{ME}(k) > \delta$, siis kehtib hinnang

$$\|u_n - u\| \leq \|u_{n-1} - u\| \quad (n = 1, 2, \dots, n_{ME}).$$

Viimaste seoste alusel ongi ME- reegel oma nimetuse saanud.

Märgime veel, et punktis 1.3.2 vaadeldud iteratsioonimeetodites (1.2) ja (1.3) on omadust $d_{ME}(k) > \delta$ rahuldavateks funktsioonideks vastavalt

$$d_{ME}(n) = \frac{(r_n + r_{n+1}, r_n)}{\|r_n\|}, \quad d_{ME}(n) = \frac{(r_n + r_{n+1}, r_{n+1})}{\|r_{n+1}\|},$$

kus $r_n = Au_n - f_\delta$ (vt. [7]).

2 Spetsiaalne kollokatsioonimeetod esimest liiki integraalvõrrandite lahendamiseks täpsete andmete juhul

2.1 Esimest liiki integraalvõrrandid kui mittekorrektssed ülesanded

Vaatleme esimest liiki Fredholmi integraalvõrrandit

$$(Au)(t) \equiv \int_a^b \mathcal{K}(t, s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [c, d], \quad (2.1)$$

kus $\mathcal{K}(t, s)$ on tuum, $u(s)$ on otsitav funktsioon ja $f(t)$ on vabaliige (kõik nad on reaalsete väärtustega). Olgu tuum $\mathcal{K}(t, s)$ pidev ristkülikus

$$R = \{(t, s) \mid c \leq t \leq d, a \leq s \leq b\}.$$

Siis operaator A on täielikult pidev lineaarne operaator, kui teda vaadelda tegutsevana ruumist $E = L_2[a, b]$ ruumi $F = L_2[c, d]$. Selliste ruumide paaride korral pöördoperaator A^{-1} pole määratud kogu ruumil F ning on tõkestamata, seejuures operaatori A väärtuste hulk $\mathcal{R}(A) = AE$ ei ole kinnine ruumis F . Järelikult ülesanne (2.1) on mittekorrektne, kuna ta pole lahenduv iga vabaliikme $f \in F$ korral ning vabaliikme väikestele vigadele võivad vastata lahendi kuitahes suured vead.

2.2 Kvaasitšebõševi tuumad

Toome lõigu $[a, b]$ jaoks sisse jaotuse

$$a < t_1 < \dots < t_m \leq b. \quad (2.2)$$

Vaatleme integraalvõrrandi (2.1) tuumas $\mathcal{K}(t, s)$ esimese argumendi fikseeritud väärtuste $\{t_i \in (a, b)\}_{i=1}^m$ kasutamisel tekkivat argumendi $s \in (a, b)$ funktsioonide süsteemi

$$\{\mathcal{K}(t_1, s), \dots, \mathcal{K}(t_m, s)\}. \quad (2.3)$$

Käesolevas töös vaatleme esimest liiki integraalvõrrandi (2.1) lahendamist kollokatsioonimeetodiga, esitades lähislahendi süsteemi (2.3) funktsioonide lineaarkombinatsioonina.

Definitsioon 2.1. Süsteemi (2.3) nimetatakse lineaarselt sõltumatuks, kui iga fikseeritud $s \in (a, b)$ korral seosest

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathcal{K}(t_i, s) = 0 \quad (2.4)$$

järeldub $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$.

Kui süsteem (2.3) on lineaarselt sõltumatu iga $s \in (a, b)$ korral, siis vaadeldavas spetsiaalses kollokatsioonimeetodis saame lähislahendi avaldises esinevate kordajate leidmiseks lineaarselt sõltumatute võrrandite süsteemi.

Definitsioon 2.2. (vt. [28]) Tuuma $\mathcal{K}(t, s)$ nimetatakse kvaasitšebõševi tuumaks, kui süsteem (2.3) on lineaarselt sõltumatu iga jaotuse (2.2) ja iga $s \in (a, b)$ korral.

Monograafias [28] on toodud ka näiteid vastavate tuumade kohta. Kvaasitšebõševi tuumadeks on Gaussi tuum, mis avaldub kujul $e^{-(t-s)^2}$, Cauchy tuum $(t+s)^{-1}$ ning tuumad kujul $|t-s|^{-\alpha}$, kus $0 < \alpha < 1$.

Järgnevas vaatleme Volterra tuumi $\mathcal{K}(t, s)$, s.o tuumi omadusega $\mathcal{K}(t, s) \equiv 0$ piirkonnas $t < s$, ning formuleerime järgneva teoreemi.

Teoreem 2.1. *Kui Volterra tuumal $\mathcal{K}(t, s)$ vaadelduna suvalise $t \in (a, b)$ korral argumenti s funktsioonina osalõigul $[a, t)$ ei ole nulliga võrduvaid väärtusi, siis on ta kvaasitšebõševi tuum.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et tuum $\mathcal{K}(t, s)$ ei ole kvaasitšebõševi tuum. Siis leidub jaotus $a < t_1 < \dots \leq t_m \leq b$ ning leiduvad konstandid $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$, mis ei ole samaaegselt nullid, nii et on täidetud tingimus (2.4). Olgu $j \geq 2$ maksimaalne indeks, mille korral konstant $\alpha_j \neq 0$. Siis

$$\mathcal{K}(t_j, s) = - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \mathcal{K}(t_i, s).$$

Volterra tüüpi tuuma korral $\mathcal{K}(t_i, s) = 0$, kui $1 \leq i \leq m-1$ ja $t_i < s \leq b$, järelikult $\mathcal{K}(t_j, s) = 0$ tingimusel $t_{j-1} < s \leq b$. Saadud tulemus on vastuolus eeldusega, mille kohaselt funktsioonil $\mathcal{K}(t_j, s)$ ei ole nulliga võrduvaid väärtusi vahemikus (t_{j-1}, t_j) . Teoreem on tõestatud.

Järgmiste teoreemide 2.2 ja 2.3 tõestused võib leida monograafiast [28].

Teoreem 2.2. *Selleks, et võrrand (2.1) oleks lahenduv Sobolevi ruumis $H^r[a, b]$ ($r \geq 1$) iga sellise vabaliikme $f \in C[c, d]$ korral, mille puhul seosest $\sum_{i=1}^m \alpha_i f(t_i) = 0$ järeldeb $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ suvalise jaotuse (2.2) korral, on tarvilik ja piisav, et tuum $\mathcal{K}(t, s)$ oleks kvaasitšebõševi tuum.*

Kui tuum $\mathcal{K}(t, s)$ ei ole kvaasitšebõševi tuum, siis teatud juhtudel on võimalik garanteerida süsteemi (2.3) lineaarne sõltumatus, lisades kitsendused diskretiseerimissammule.

Teoreem 2.3. Olgu tuum kujul $\mathcal{K}(t-s)$ selline, et funktsioon $\mathcal{K}(s)$ on paaris-funktsioon, monotoonne ning summeeruv vahemikus $(-\infty, \infty)$ ja paiknegu sõlmed $t_1, \dots, t_m$ selliselt, et nendevaheline kaugus ei ole väiksem kui $\tau > 0$, mille korral

$$\int_0^{\frac{\tau}{2}} |\mathcal{K}(s)| ds > \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} |\mathcal{K}(s)| ds.$$

Siis funktsioonid $\mathcal{K}(t_i, s) = \mathcal{K}(t_i - s)$ ($i = 1, \dots, m$) on lineaarselt sõltumatud suvalisel lõigul $[a, b]$.

2.3 Integraalvõrrandi normaallahendi aproksimeerimisest

Olgu antud lõigu $[a, b]$ jaotus (2.2) ja selle poolt genereeritud funktsioonide süsteem (2.3). Siinkohal me ei eelda selle süsteemi lineaarselt sõltumatust. Järgnevas näitame, kuidas leida L_2 -normis funktsioonide süsteemi (2.3) lineaarkombinatsioonina esituvat parimat lähendit võrrandi (2.1) minimaalse L_2 -normiga lahendile u , ilma et me seda lahendit teaksime.

Võtame kasutusele tähise $\mathcal{K}_t$, mis on defineeritud seosega $\mathcal{K}_t(s) := \mathcal{K}(t, s)$ iga $t \in [0, 1]$ korral ning formuleerime järgneva teoreemi.

Teoreem 2.4. Olgu u võrrandi (2.1) minimaalse L_2 -normiga lahend. Siis normi $\|u - \sum_{j=1}^m c_j \mathcal{K}_{t_j}\|$ miinimum üle kõikide konstantide $c_1, \dots, c_m$ saavutatakse juhul, kui vektor $c = (c_1, \dots, c_m)^T$ on lineaarse võrrandisüsteemi $Dc = b$ lahend. Seejuures $d_{ij} = (\mathcal{K}_{t_i}, \mathcal{K}_{t_j})$ ($i, j = 1, \dots, m$) ning $b = (f(t_1), \dots, f(t_m))^T$, kus $(\cdot, \cdot)$ tähistab skalaarkorrutist ruumis $L_2[0, 1]$ ning T märgib transponeerimist. Kui süsteemil $Dc = b$ on mitu lahendit $(c^1, c^2, \dots)$, siis vastavad lähislahendid $u_m = \sum_{j=1}^m c_j^i \mathcal{K}_{t_j}$ ($i = 1, 2, \dots$) langevad kokku.

Tõestus. Hilberti ruumide teooriast on teada, et normi $\|u - \sum_{j=1}^m c_j \mathcal{K}_{t_j}\|$ miinimum saavutatakse, kui konstandid c_j ($j = 1, \dots, m$) valida selliselt, et $\sum_{j=1}^m c_j \mathcal{K}_{t_j}$ on normaallahendi u ortogonaalne projektsioon alamruumile $\text{span}\{\mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m}\}$. Vastav vektor $c = (c_1, \dots, c_m)^T$ on võrrandi $Dc = b$ lahend, seejuures vabaliikmete vektori b komponentideks on skalaarkorrutised $b_i = (u, \mathcal{K}_{t_i})$. Kuna võrduse (2.1) põhjal kehtib seos

$$(u, \mathcal{K}_{t_i}) = \int_0^1 u(s) \mathcal{K}_{t_i}(s) ds = \int_0^1 \mathcal{K}(t_i, s) u(s) ds = f(t_i),$$

on teoreemi esimene väide tõestatud. Vaatleme juhtu, kui süsteemil $Dc = b$ on mitu lahendit $c^1, c^2, \dots$. Näitame, et siis vastavad lähislahendid $u_m^1 = \sum_{j=1}^m c_j^1 \mathcal{K}_{t_j}$

ja $u_m^2 = \sum_{j=1}^m c_j^2 \mathcal{K}_{t_j}$, langevad kokku, s.t. $u_m^1 = u_m^2$. Tõepoolest, iga $i = 1, \dots, m$ korral

$$\begin{aligned} (u_m^1 - u_m^2, \mathcal{K}_{t_i}) &= \sum_{j=1}^m c_j^1 (\mathcal{K}_{t_j}, \mathcal{K}_{t_i}) - \sum_{j=1}^m c_j^2 (\mathcal{K}_{t_j}, \mathcal{K}_{t_i}) = \\ &= f(t_i) - f(t_i) = 0. \end{aligned}$$

Kuna nii u_m^1 kui u_m^2 mõlemad kuuluvad lineaarkattesse $\text{span}\{\mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m}\}$, siis saamegi, et $u_m^1 = u_m^2$. Teoreem on tõestatud.

Märgime, et sümmeetriline $m \times m$ maatriks D teoreemis 2.4 on Grami maatriks. Tema determinant on nullist erinev parajasti siis, kui süsteem (2.3) on lineaarselt sõltumatu. Teoreemi 2.4 kohaselt saab integraalvõrrandi (2.1) lahendit edukalt lähendada süsteemi (2.3) lineaarkombinatsiooniga ka juhul, kui see süsteem on lineaarselt sõltuv. Vastavat singulaarset võrrandisüsteemi $Dc = b$ on praktikas siiski ebamugavam lahendada kui lineaarselt sõltumatule süsteemile (2.3) vastavat süsteemi, millisel juhul maatriks D on positiivselt määratud ning võrrand $Dc = b$ on üheselt lahenduv.

2.4 Spetsiaalse kollokatsioonimeetodi kirjeldus

Vaatleme esimest liiki integraalvõrrandit (2.1) lõigul $[a, b] = [0, 1]$ operaatoriga $A : H \rightarrow L_2[0, 1]$ ja vabaliikmega $f \in C[0, 1]$. Eeldame, et ülesanne (2.1) on lahenduv, s.t. $f \in \mathcal{R}(A)$ ning $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, s.t. lahend on ühene. Olgu antud m sõlmest koosnev sõlmpunktide komplekt $\{t_1, \dots, t_m\}$, kus $t_i \in [0, 1]$ ($i = 1, \dots, m$) ja $t_i \neq t_j$, kui $i \neq j$. Sõltuvalt ruumi H valikust eristame järgnevas kahte olukorda.

A. Esiteks vaatleme juhtu kui $H = L_2[0, 1]$.

Me aproksimeerime võrrandi (2.1) täpset lahendit u funktsiooniga $u_m \in \text{span}\{\mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m}\}$, mis minimiseerib normi $\|u_m - u\|_{L_2[0, 1]}$. Normi $\|u_m - u\|_{L_2[0, 1]}$ miinimumtingimuse tõttu kehtivad võrdused

$$(u_m - u, \mathcal{K}(t_i, s)) = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Täpne lahend u rahuldab seose (2.1) tõttu tingimusi

$$(u, \mathcal{K}(t_i, s)) = \int_0^1 \mathcal{K}(t_i, s) u(s) ds = f(t_i) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.5)$$

Me otsime lähilahendit u_m , mis rahuldab samasuguseid seoseid

$$\int_0^1 \mathcal{K}(t_i, s) u_m(s) ds = f(t_i) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.6)$$

Seega, lähislahendi esituses

$$u_m(s) = \sum_{j=1}^m c_j \mathcal{K}(t_j, s) \quad (2.7)$$

sisalduvate kordajate $\{c_j\}_{j=1}^m$ leidmiseks saame võrduse (2.7) asendamisel seostesse (2.6) lineaarse algebralise võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m c_j \int_0^1 \mathcal{K}(t_j, s) \mathcal{K}(t_1, s) ds = f(t_1), \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^m c_j \int_0^1 \mathcal{K}(t_j, s) \mathcal{K}(t_m, s) ds = f(t_m). \end{cases} \quad (2.8)$$

Eeldame järgnevas, et iga naturaalarvulise $m \in \mathbb{N}$ korral hulk $\{\mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m}\}$ on lineaarselt sõltumatu ruumis $L_2[0, 1]$, kus $\mathcal{K}_{t_i}(s) = \mathcal{K}(t_i, s)$. Meie eeldus ei ole väga range kitsendus, sest kui leiduksid konstandid $c_1, \dots, c_m$, mis ei ole samaaegselt nullid ja mille puhul $\sum_{i=1}^m c_i \mathcal{K}_{t_i} = 0$ iga $s \in [0, 1]$ korral, saaksime seose (2.5) põhjal iga $f \in \mathcal{R}(A)$ korral $\sum_{i=1}^m c_i f(t_i) = 0$. Hulga $\{\mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m}\}$ lineaarselt sõltumatuse tingimusi käsitlesime põhjalikumalt alapunktis 2.2.

B. Teise võimalusena käsitleme Sobolevi ruumi juhtu, $H = H^r[0, 1] = W_2^r[0, 1]$ ($r \geq 1$).

Me aproksimeerime võrrandi (2.1) täpset lahendit u funktsiooniga $u_m \in \text{span}\{G\mathcal{K}_{t_1}, \dots, G\mathcal{K}_{t_m}\}$, mis minimiseerib normi $\|u_m - u\|_r$. Siin G on operaator, mille korral

$$(u, v) = (Gu, v)_r$$

ning

$$(u, v)_r = \int_0^1 [uv + u^{(r)} v^{(r)}] ds$$

on skalaarkorrutis Sobolevi ruumis $H^r[0, 1]$.

Saab näidata, et $G = L^{-1}$, kus L on diferentseerimisoperaator, mis on defineeritud seosega $Lu = u + (-1)^r u^{(2r)}$ ja määramispiirkonnaga

$$\mathcal{D}(L) = \{u \mid u \in H^{2r}[0, 1], u^{(k)}(0) = u^{(k)}(1) = 0, k = r, \dots, 2r - 1\}.$$

Normi $\|u_m - u\|_r$ miinimumtingimuse tõttu kehtivad seosed

$$(u_m - u, G\mathcal{K}(t_i, s))_r = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Täpne lahend u rahuldab seose (2.1) tõttu tingimusi (2.5). Lähislahendi u_m määramiseks kasutame tingimust (2.6). Seega saame lähislahendi esituses

$$u_m(s) = \sum_{j=1}^m c_j G\mathcal{K}(t_j, s) \quad (2.9)$$

sisalduvate kordajate $\{c_j\}_{j=1}^m$ määramiseks lineaarse algebralise võrrandi-süsteemi

$$\sum_{j=1}^m c_j \int_0^1 \mathcal{K}(t_j, s) G\mathcal{K}(t_i, s) ds = f(t_i) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.10)$$

Järgnevas alapunktis uurime meetodi koonduvust.

Märgime, et artiklis [19] on välja pakutud algoritmi $\{(2.7), (2.8)\}$ modifikatsioon, kus kollokatsiooni-punktide komplekt $\{t_i, i = 1, \dots, m\}$ ning baasfunktsioonides $\{\mathcal{K}(\sigma_i, s), i = 1, \dots, k\}$ kasutatud punktikomplektid $\{\sigma_i, i = 1, \dots, k\}$ võivad olla erinevad. Selles töös on tehtud numbrilisi eksperimente ning hinnatud maatriksite konditsiooniarve.

2.5 Kollokatsioonimeetodi koonduvus

Formuleerime ja tõestame järgmised koonduvusteoreemid:

Teoreem 2.5. *Olgu $u \in L_2[0, 1]$ võrrandi (2.1) vähima L_2 -normiga lahend ja kehtigu tingimused:*

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\mathcal{K}(t, s)|^2 ds &\leq c = \text{const} \quad (0 \leq t \leq 1), \\ \int_0^1 |\mathcal{K}(t', s) - \mathcal{K}(t, s)|^2 ds &\rightarrow 0 \quad \text{juhul } t' \rightarrow t \quad (0 \leq t, t' \leq 1). \end{aligned}$$

Siis seostega (2.7) ja (2.8) määratud lähislahend u_m koondub:

$$\lim_{\Delta_m \rightarrow 0} \|u_m - u\|_{L_2[0,1]} = 0,$$

kus Δ_m on defineeritud seosega

$$\Delta_m := \sup_{t \in [0,1]} \inf_{1 \leq i \leq m} |t - t_i|. \quad (2.11)$$

Tõestus. Vaatleme võrrandit (2.1) operaatoriga $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$. Olgu P_m ja P_∞ ortoprojektorid ruumis $L_2[0, 1]$, mis projekteerivad vastavalt alamruumile $\text{span}\{\mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m}\}$ ja $L_2[0, 1] \ominus \mathcal{N}(A) = L_2[0, 1] \cap \mathcal{N}(A)^\perp$. Siis suvalise $u \in L_2[0, 1]$ korral

$$\|P_m u - P_\infty u\|_{L_2[0,1]} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty),$$

kui

$$h \equiv \max_{1 \leq i \leq m} |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Eelduse tõttu $f \in \mathcal{R}(A) \subset C[0, 1]$. Seega juhul kui $f \in A L_2[0, 1]$ ja on tegu täpsete andmetega ($f_\delta = f$), lähislahend $u_m = P_m u$ koondub L_2 -normi mõttes võrrandi (2.1) L_2 -normaallahendiks. Teoreem on tõestatud.

Teoreem 2.6. Olgu $u \in H^r[0, 1]$ ($r \geq 1$) võrrandi (2.1) vähima H^r -normiga lahend ja kehtigu tingimused:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\mathcal{K}(t, s)| ds &\leq c = \text{const} \quad (0 \leq t \leq 1), \\ \int_0^1 |\mathcal{K}(t', s) - \mathcal{K}(t, s)| ds &\rightarrow 0 \quad \text{juhul } t' \rightarrow t \quad (0 \leq t, t' \leq 1). \end{aligned}$$

Siis seostega (2.9) ja (2.10) määratud lähislahend u_m koondub:

$$\lim_{\Delta_m \rightarrow 0} \|u_m - u\|_r = 0,$$

kus Δ_m on defineeritud seosega (2.11).

Tõestus. Iga $u \in H^r[0, 1]$ korral protsessis $h \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) kehtib $\|P_m u - P_\infty u\|_r \rightarrow 0$, kus P_m ja P_∞ on nüüd ortoprojektorid ruumis $H^r[0, 1]$, mis projekteerivad vastavalt alamruumidele $\text{span}\{G\mathcal{K}_{t_1}, \dots, G\mathcal{K}_{t_m}\}$ ja $H^r[0, 1] \ominus \mathcal{N}(A)$. Juhul $f \in AH^r[0, 1]$ lähislahend $u_m = P_m u$ koondub H^r -normis võrrandi (2.1) H^r -normaallahendiks, s.o võrrandi (2.1) selliseks lahendiks, mille H^r norm on vähim. Teoreem on tõestatud.

2.6 Kollokatsioonipunktide optimaalsest valikust

Järgnevas vaatleme, kuidas valida sõlmpunktide komplekt $\{t_1, \dots, t_m\}$ selliselt, et saada ülesande (2.1) minimaalse normiga lahendile u parim lähend

$u_m = \sum_{j=1}^m c_j \mathcal{K}(t_j, s)$. Vaatleme esmalt juhtu $m = 1$ ning rakendame teoreemi 2.4. Saame, et

$$u_1(t) = \frac{f(t_1)}{(\mathcal{K}(t_1, s), \mathcal{K}(t_1, s))} \mathcal{K}(t_1, s)$$

on parim lähend lahendile u L_2 -normi mõttes antud väärtuse t_1 korral eeldusel, et $\mathcal{K}(t_1, s) \neq 0$. Järelikult on meil vaja määrata t_1 väärtus, mis minimiseerib normi

$$\left\| u - \frac{f(t_1)}{(\mathcal{K}(t_1, s), \mathcal{K}(t_1, s))} \mathcal{K}(t_1, s) \right\|.$$

Fakti $(u, \mathcal{K}(t_1, s)) = f(t_1)$ kasutades saame, et

$$\begin{aligned} \left\| u - \frac{f(t_1)}{(\mathcal{K}(t_1, s), \mathcal{K}(t_1, s))} \mathcal{K}(t_1, s) \right\|^2 &= \|u\|^2 - 2 \frac{(f(t_1))^2}{\|\mathcal{K}(t_1, s)\|^2} + \\ &+ \frac{(f(t_1))^2}{\|\mathcal{K}(t_1, s)\|^2} = \|u\|^2 - \frac{(f(t_1))^2}{\|\mathcal{K}(t_1, s)\|^2}. \end{aligned}$$

Märgime, et täpne lahend u ei ole teada, ent see ei sega minimiseerimisülesande lahendamist. Tuleb leida t_1 väärtus, mis maksimiseerib suuruse $\frac{(f(t_1))^2}{\|\mathcal{K}(t_1, s)\|^2}$. Toome konkreetse näite.

Näide 2.1. Olgu antud integraalvõrrand kujul

$$(Au)(t) \equiv \int_0^1 (t-s)u(s)ds = 5t-3 \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (2.12)$$

Võrdust $\mathcal{N}(A^\perp) = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ (vt. [18]) kasutades saame

$$\mathcal{N}(A^\perp) = \overline{\mathcal{R}(A^*)} = \overline{\text{span}\{(t-s), 0 \leq t \leq 1\}} = \text{span}\{1, s\},$$

seega vaadeldava integraalvõrrandi minimaalse normiga lahend avaldub kujul $u(s) = c_1 + c_2 \cdot s$. Viimases võrduses sisalduvate kordajate c_1 ja c_2 leidmiseks asendame $u(s)$ avaldise lähtevõrrandisse (2.12), millest integreerimise järel saame võrduse $(c_1 + c_2/2)t - (c_1/2 + c_2/3) = 5t - 3$, mis kehtib iga $t \in [0, 1]$ korral. Muutuja t kordajate võrdsus ja vabaliikmete võrdsus annavad süsteemi kujul $\{c_1 + c_2/2 = 5, c_1/2 + c_2/3 = 3\}$, mille lahenditeks on $c_1 = 2, c_2 = 6$. Seega võrrandi (2.12) minimaalse normiga lahendiks on $u(s) = 2 + 6s$.

Näitame, et funktsiooni $\frac{(f(t_1))^2}{\|\mathcal{K}(t_1, s)\|^2}$ maksimum lõigul $[0, 1]$ saavutatakse, kui $t_1 = 0$. Tõepoolest, kuna $(f(t_1))^2 = (5t_1 - 3)^2$ ($0 \leq t_1 \leq 1$) ja

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(t_1, s)\|^2 &= \int_0^1 \mathcal{K}(t_1, s)^2 ds = \int_0^1 (t_1 - s)^2 ds = \left(t_1^2 s - t_1 s^2 + \frac{s^3}{3}\right) \Big|_0^1 = \\ &= t_1^2 - t_1 + \frac{1}{3} \quad (0 \leq t_1 \leq 1), \end{aligned}$$

siis lihtne diferentsiaalarvutus näitab, et funktsiooni $(5t_1 - 3)^2/(t_1^2 - t_1 + \frac{1}{3})$ ainsaks ekstreemumiks on maksimumkoht $t_1 = -\frac{1}{3}$ ning seega $t_1 > -\frac{1}{3}$ korral t_1 väärtuse suurenedes see funktsioon kahaneb. Seega, maksimumkohaks lõigul $[0, 1]$ on $t_1 = 0$. Järelikult, parimaks lähendiks minimaalse normiga lahendile u kujul $(f(t)/\|\mathcal{K}(t, s)\|^2)\mathcal{K}(t, s)$ esituvate funktsioonide hulgas on $(f(0)/\|\mathcal{K}(0, s)\|^2)\mathcal{K}(0, s) = 9s$. Siis $\|u\| = \sqrt{\int_0^1 (2 + 6s)^2 ds} = \sqrt{28}$ ja $\|u - u_1\| = \sqrt{\int_0^1 (2 + 6s - 9s)^2 ds} = 1$.

Järgnevas formuleerime üldise tulemuse eeldusel $m \geq 1$.

Teoreem 2.7. Selleks, et minimiseerida norm $\|u - \sum_{j=1}^m c_j \mathcal{K}(t_j, s)\|$ üle kõikide konstantide $c_1, \dots, c_m$ ja sõlmede $t_1, \dots, t_m$, on vaja lahendada järgnev ülesanne: maksimiseerida avaldis $\sum_{j=1}^m c_j f(t_j)$ üle kõikide sõlmede $t_1, \dots, t_m$, seejuures kordajate vektor c rahuldab võrrandit $Dc = b$, milles $d_{ij} = (\mathcal{K}_{t_i}, \mathcal{K}_{t_j})$ ($i, j = 1, \dots, m$) ja $b = (f(t_1), \dots, f(t_m))^T$.

Tõestus. Vaatleme lähislahendit kujul $u_m = \sum_{j=1}^m c_j \mathcal{K}(t_j, s)$, milles c on võrrandi $Dc = b$ lahend ning olgu u võrrandi (2.1) minimaalse normiga lahend. Vastaval kujul esituv lähend u_m on minimaalse normiga lahendi u ortogonaalne projektsioon alamruumile $\text{span}\{\mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m}\}$, seega $(u - u_m, u_m) = 0$. Siis

$$\begin{aligned} \|u - u_m\|^2 &= (u - u_m, u - u_m) = (u - u_m, u) - (u - u_m, u_m) = \\ &= (u - u_m, u) = \|u\|^2 - (u_m, u) = \\ &= \|u\|^2 - \sum_{j=1}^m c_j (\mathcal{K}_{t_j}, u) = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^m c_j f(t_j). \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

Teoreem 2.7 näitab teoreetiliselt, kuidas kollokatsioonipunktide optimaalse paigutamise ülesannet lähislahendi täpsuse maksimiseerimiseks saab taandada teisele ülesandele. Paraku on avaldise $\sum_{j=1}^m c_j f(t_j)$ maksimiseerimine tingimustel $Dc = b$ komplitseeritud ülesanne.

Käesolevas töös vaadeldud näiteülesannetes on diskretiseerimistasemel n kollokatsioonipunktid paigutatud ühtlaselt valemi $t_i = i/2^n$ ($i = 1, \dots, m = 2^n - 1$) alusel. Seega kihtides $n = 1, \dots, 4$ paiknevad kollokatsioonipunktid järgneva tabeli kohaselt.

Kihi number	Kollokatsioonipunktid														
1	$\frac{1}{2}$														
2	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{3}{4}$								
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$								
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$

2.7 Reprodutseeriva tuumaga Hilberti ruum

Ettevalmistuseks järgnevatele alapunktidele toome sisse artiklis [6, 11] kasutatud reprodutseeriva tuumaga Hilberti ruumi mõiste.

Olgu H Hilberti ruum skalaarkorrutisega $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ning olgu funktsionaalid temas lõigul $[0, 1]$ reaalse väärtustega.

Definitsioon 2.3. Öeldakse, et funktsioon Q on ruudus $[0, 1] \times [0, 1]$ reprodutseeriv tuum Hilberti ruumi H jaoks, kui $Q_s(t) := Q(s, t)$ kuulub ruumi H

iga $s, t \in [0, 1]$ korral ja seos

$$g(s) = \langle g, Q_s \rangle \quad (2.13)$$

kehtib iga $s \in [0, 1]$ puhul ja iga $g \in H$ korral.

Definitsioon 2.4. Öeldakse, et ruum H_Q on Hilberti ruum reprodutseeriva tuumaga Q , kui funktsionaalid $g \mapsto g(s)$ on pidevad iga $s \in [0, 1]$ korral.

Saab näidata, et Hilberti ruum H on reprodutseeriva tuumaga siis ja ainult siis, kui funktsionaalid $g \mapsto g(s)$ on tõkestatud iga $s \in [0, 1]$ korral (vt. [11]).

Seose (2.13) tõttu

$$Q(s, t) = \langle Q_s, Q_t \rangle, \quad s, t \in [0, 1]. \quad (2.14)$$

Olgu edaspidi H_Q reprodutseeriva tuumaga Hilberti ruum reprodutseeriva tuumaga Q ja skalaarkorrutisega $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$. Olgu vastava skalaarkorrutise poolt ruumis H_Q indutseeritud norm $\| \cdot \|_Q$, s.t. $\| g \|_Q^2 = \langle g, g \rangle_Q$. Kui ruumis H_Q leiab aset koondumine $g_n \rightarrow g$, siis iga $s \in [0, 1]$ korral saame seost (2.13) kasutades

$$\begin{aligned} |g_n(s) - g(s)| &= | \langle g_n, Q_s \rangle_Q - \langle g, Q_s \rangle_Q | = | \langle g_n - g, Q_s \rangle_Q | \leq \\ &\leq \| g_n - g \|_Q \| Q_s \|_Q. \end{aligned}$$

Seega vastavast koondumisest ruumis H_Q järgeldub punktiviisi koonduvus. Seoste (2.13) ja (2.14) põhjal $\| Q_s \|_Q^2 = \langle Q_s, Q_s \rangle_Q = Q(s, s)$, $s \in [0, 1]$, s.t

$$\| Q_s \|_Q = \sqrt{Q(s, s)} \quad (2.15)$$

ja järelikult $Q(s, s)$ on pidev ning koondumisest ruumis H_Q järgeldub ühtlane koonduvus. Seos (2.13) näitab, et nõrgast ehk w -koondumisest ruumis H_Q järgeldub punktiviisi koonduvus. Tõepoolest, kui $g_n \xrightarrow{w} g$ ruumis H_Q (tähisega $\xrightarrow{w}$ märgime nõrka ehk w -koondumist), siis seose (2.13) põhjal

$$g_n(s) = \langle g_n, Q_s \rangle_Q \rightarrow \langle g, Q_s \rangle_Q = g(s) \quad \forall s \in [0, 1].$$

Märgime, et ruum $L_2[0, 1]$ ei ole reprodutseeriva tuumaga Hilberti ruum, kuna koondumisest ruumis $L_2[0, 1]$ ei järgeldu punktiviisi koonduvus.

Vaatleme Fredholmi integraaloperaatorit $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, mis on defineeritud seosega (2.1). Eeldame, et iga $s, t \in [0, 1]$ korral $\mathcal{K}_t(\cdot) := \mathcal{K}(t, \cdot) \in L_2[0, 1]$ ja $\mathcal{K}_s^*(\cdot) := \mathcal{K}(\cdot, s) \in L_2[0, 1]$ ning olgu seosega

$$Q(t, t') = (\mathcal{K}_t, \mathcal{K}_{t'}) = \int_0^1 \mathcal{K}(t, s) \mathcal{K}(t', s) ds \quad (2.16)$$

defineeritud tuum $Q(t, t')$ pidev ruudus $[0, 1] \times [0, 1]$. Märgime, et $Q(t, t')$ on operaatori A^*A tuum.

Lemma 2.1. (Nashed- Wahba (vt. [1, 6, 16])) *Operaatori A väärtuste piirkond $\mathcal{R}(A)$ on reprodutseeriva tuumaga Hilberti ruum H_Q , kus reprodutseeriv tuum Q on määratud seosega (2.16) ja ruumi H_Q skalaarkorrutis on defineeritud alljärgnevalt:*

$$\langle f, g \rangle_Q = (A^+ f, A^+ g). \quad (2.17)$$

Siin A^+ tähistab operaatori A Moore- Penrose'i üldistatud pöördoperaatorit (vt. [23]), mis rahuldab seoseid

$$\begin{cases} A^+ A u = u \text{ iga } u \in \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^*) \text{ korral;} \\ A^+ v = 0 \text{ iga } v \in \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*) \text{ korral;} \\ \text{iga } v_1 \in \mathcal{R}(A) \text{ ja } v_2 \in \mathcal{N}(A^*) \text{ korral } A^+(v_1 + v_2) = A^+ v_1 + A^+ v_2. \end{cases} \quad (2.18)$$

Moore- Penrose' i üldistatud pöördoperaatorite põhjalikuma käsitluse võib leida raamatutest [6, 23]. Lemma 2.1 tõestus on esitatud artiklis [16].

2.8 Meetodi koonduvus reprodutseeriva tuumaga Hilberti ruumis, koonduvuskiiruse hinnangud

Vaatleme integraalvõrrandit (2.1) operaatoriga $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$. Eeldame, et ülesanne (2.1) on lahenduv, s.t $f \in \mathcal{R}(A) = H_Q$. Normaallahend u esitub kujul $u = A^+ f$. Olgu antud m sõlmest koosnevad sõlmpunktide komplektid $T_m \equiv \{t_1, \dots, t_m\}$. Me aproksimeerime võrrandi (2.1) lahendit u funktsiooni-
ga u_m , mis rahuldab võrrandit (2.1) kollokatsioonipunktides $\{t_i\}_{i=1}^m$, s.t me otsime m võrrandist koosneva süsteemi

$$\int_0^1 \mathcal{K}(t_i, s) u_m(s) ds = f(t_i) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (2.19)$$

lahendit.

Defineerime operaatori $A_m : L_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ja vektori $F_m \in \mathbb{R}^m$ seostega

$$\begin{aligned} A_m u_m &= ((u_m, \mathcal{K}_{t_1}), \dots, (u_m, \mathcal{K}_{t_m}))^T, \\ F_m &= (f_1, \dots, f_m)^T, \end{aligned}$$

kus $f_i = f(t_i)$ ($i = 1, \dots, m$). Kasutades neid tähiseid saame süsteemi (2.19) asendada ekvivalentsete seostega

$$A_m u_m = F_m. \quad (2.20)$$

Eelduse $f \in \mathcal{R}(A)$ tõttu on võrrand (2.20) lahenduv, kuid üldiselt mitte üheselt. Vaadeldava kollokatsioonimeetodi korral me otsime võrrandi (2.20) lahendit

u_m kujul $u_m = A_m^+ F_m$. Siin $A_m^+ : L_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ on operaatori A_m Moore–Penrose’i üldistatud pöördoperaator.

Operaatori $A_m : L_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ väärtuste piirkond $\mathcal{R}(A_m)$ on lõplikumõõtmeline, seega Moore–Penrose’i üldistatud pöördoperaator A_m^+ eksisteerib ruumis $\mathbb{R}^m$ ja võrrandi (2.20) kõigi lahendite hulk avaldub seosega $\mathcal{P}_m := A_m^+ F_m \oplus \mathcal{N}(A_m)$, kus tähis $\oplus$ märgib ortogonaalsummat. Võrrandi (2.20) kõigi lahendite hulk $\mathcal{P}_m$ ühtib võrrandi $A_m^* A_m v = A_m^* F_m$ kõigi lahendite v hulgaga. Siin kaasoperaator A_m^* on määratud seosega $A_m^* y = \sum_{i=1}^m y_i \mathcal{K}_{t_i}$, kus $y = (y_1, \dots, y_m)^T$. Viimane seos järeldub võrdustest

$$\begin{aligned} (A_m x, y) &= \sum_{i=1}^m (x, \mathcal{K}_{t_i}) y_i = \sum_{i=1}^m y_i \int_0^1 \mathcal{K}(t_i, s) x(s) ds, \\ (x, A_m^* y) &= \int_0^1 x(s) A_m^* y ds = \int_0^1 [x(s) \sum_{i=1}^m y_i \mathcal{K}(t_i, s)] ds = \\ &= \sum_{i=1}^m y_i \int_0^1 \mathcal{K}(t_i, s) x(s) ds = (A_m x, y). \end{aligned}$$

Operaator $A_m^* A_m : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ ning tema väärtuste piirkond $\mathcal{R}(A_m^* A_m)$ on lõplikumõõtmeline alamruum ruumis $L_2[0, 1]$. Seejuures $\mathcal{R}(A_m^* A_m) = \mathcal{R}(A_m^*) = \text{span}\{\mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m}\}$. Võrrandil (2.20) eksisteerib operaatori A_m^* väärtuste piirkonnas $\mathcal{R}(A_m^*)$ ühene minimaalse L_2 -normiga lahend u_m selline, et

$$u_m(s) = A_m^+ F_m = \sum_{i=1}^m c_i \mathcal{K}(t_i, s).$$

Asendades viimase seose võrrandisse (2.20), saame kordajate $\{c_j\}_{j=1}^m$ määramiseks võrrandisüsteemi kujul

$$\sum_{i=1}^m (\mathcal{K}_{t_i}, \mathcal{K}_{t_j}) c_j = f_i \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.21)$$

Kordajate vektori c võib kirja panna kujul $(c_1, \dots, c_m) = F_m Q_m^+$, kus Q_m on $m \times m$ maatriks, mille (i, j) -s element on määratud seosega

$$Q(t_i, t_j) = (\mathcal{K}_{t_i}, \mathcal{K}_{t_j}) = \int_0^1 \mathcal{K}(t_i, s) \mathcal{K}(t_j, s) ds. \quad (2.22)$$

Seega võrduse (2.21) põhjal avaldub lahend u_m kujul

$$u_m = (f_1, \dots, f_m) Q_m^+ (\mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m})^T \quad (2.23)$$

Punktis 2.2 vaatlesime süsteemi $\{\mathcal{K}_{t_i}\}_{i=1}^m$ lineaarse sõltumatuse tingimust. Veendusime, et tegu pole väga ränga kitsendusega. Kuna Grami maatriks Q_m ,

mille elemendid on määratud seosega (2.22), ei ole singulaarne, siis esituses (2.23) sisalduva Moore–Penrose üldistatud pöördmaatriksi Q_m^+ võime asendada pöördmaatriksiga Q_m^{-1} . Esituse (2.23) saame kirja panna kujul

$$u_m = (f_1, \dots, f_m) Q_m^{-1} (\mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m})^T. \quad (2.24)$$

Järgnevalt uurime koondumist $\{u_m\} \rightarrow A^+ f$. Olgu Δ_m defineeritud seosega (2.11). Kui $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0$, siis $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} T_m$ on tihe lõigul $[0, 1]$. Formuleerime koonduvusteoreemi.

Teoreem 2.8. (Nashed–Wahba (vt. [1, 16])) *Olgu Δ_m , A ja u_m defineeritud vastavalt seostega (2.11), (2.1) ja (2.24). Olgu tuum $Q(t, s)$ pidev ruudus $[0, 1] \times [0, 1]$ ning $f \in \mathcal{R}(A) = H_Q$. Kui $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0$, siis $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - A^+ f\| = 0$.*

Tõestus. Olgu $Q_t(\cdot)$ funktsioon, mis lõigul $[0, 1]$ on defineeritud seosega $Q_t(\cdot) := Q(t, \cdot)$. Sellise definitsiooni põhjal on $Q(t, \cdot)$ reprodutseeriv tuum. Arvestades reprodutseeriva tuuma definitsiooni ja seost (2.13) saame, et $Q_t \in H_Q$ iga $t \in [0, 1]$ korral ning $\langle g, Q_t \rangle_Q = g(t)$ iga $g \in H_Q$ puhul ja iga $t \in [0, 1]$ korral. Viimaste seoste põhjal hulk $\{Q_t \mid t \in [0, 1]\}$ katab H_Q ning kehtib võrdus (2.14): $\langle Q_t, Q_s \rangle_Q = Q(t, s)$. Järelikult leidub lineaarne isomeetria (tähistame $\sim$) H_Q ja V vahel, kus $V = \overline{\text{span}\{\mathcal{K}_t, t \in [0, 1]\}}$, isomeetria on defineeritud seosega

$$Q_t \in H_Q \sim \mathcal{K}_t \in V. \quad (2.25)$$

Tõepoolest, märgime et seoste (2.14) ja (2.16) põhjal

$$\langle Q_t, Q_s \rangle_Q = Q(t, s) = (\mathcal{K}_t, \mathcal{K}_s), \quad t, s \in [0, 1]$$

ning $Q_t = A\mathcal{K}_t$, mistõttu $A^+ Q_t = \mathcal{K}_t$. Järelikult $\mathcal{K}_t \in V$ ja $f \in H_Q \sim u \in V$ seose (2.25) põhjal siis ja ainult siis kui $f = Au$, kus $u = A^+ f$. Seega $f \in H_Q$ korral

$$\|u_m - A^+ f\| = \|f - P_{T_m} f\|_Q, \quad (2.26)$$

kus $P_{T_m} f$ on määratud seosega

$$P_{T_m} f = Au_m = (f_1, \dots, f_m) Q_m^{-1} (Q_{t_1}, \dots, Q_{t_m})^T.$$

Viimase võrdusega määratud operaator P_{T_m} on projektor, kusjuures $P_{T_m} : H_Q \rightarrow V$. Kui $Q(t, s)$ on pidev ruudus $[0, 1] \times [0, 1]$ ja $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0$, siis $\text{span}\{Q_t \mid t \in \bigcup_m T_m\}$ on tihe ruumis H_Q . Tõepoolest, kui $Q(t, s)$ on pidev,

siis on pidev ka iga $f \in H_Q$. Järelikult, kui $f \in H_Q$ on ortogonaalne iga funktsiooniga Q_{t_i} ($i = 1, \dots, m$). Sel juhul $f(t_i) = \langle f, Q_{t_i} \rangle_Q = 0$ ($i = 1, \dots, m$), mistõttu, kui $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0$, siis $f = 0$. Neil tingimustel $\text{span}\{Q_t \mid t \in \bigcup_m T_m\}$ on tihe ruumis H_Q . Seega $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - P_{T_m} f\|_Q = 0$ ning kasutades võrdust (2.26) saame, et kehtib seos $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - A^+ f\| = 0$. Teoreem on tõestatud.

Koonduvuskiiruse hinnangu saame järgnevast teoreemist.

Teoreem 2.9. Olgu $f \in \mathcal{R}(A)$ ja $A^+ f \in \mathcal{R}(A^*)$. Rahuldagu seosega $Q(t, s) := \int_0^1 \mathcal{K}(t, \tau) \mathcal{K}(s, \tau) d\tau$ määratud reprodutseeriva tuum $Q(t, s)$ järgnevaid sileduse tingimusi

- (i) $\frac{\partial^j Q(t, s)}{\partial t^j}$ leidub ja on pidev piirkonnas $[0, 1] \times [0, 1]$ juhul $t \neq s$, $j = 0, 1, \dots, 2p$,
- (ii) $\frac{\partial^j Q(t, s)}{\partial t^j}$ leidub ja on pidev piirkonnas $[0, 1] \times [0, 1]$ juhul $j = 0, 1, \dots, 2p - 2$,
- (iii) $\lim_{t \rightarrow s^-} \frac{\partial^{2p-1} Q(t, s)}{\partial t^{2p-1}}$ ja $\lim_{t \rightarrow s^+} \frac{\partial^{2p-1} Q(t, s)}{\partial t^{2p-1}}$ leiduvad ning on pidevad iga $s \in [0, 1]$ korral.

Siis

$$\|u_m - A^+ f\| \leq c (\Delta_m)^p,$$

kus Δ_m on defineeritud seosega (2.11).

Teoreemi 2.9 tõestuse võib leida artiklist [16]. Märgime, et teoreemide 2.8, 2.9 mõningaid laiendusi võib leida artiklist [14].

2.9 Pidevalt diferentseeruva lahendi juht

Koonduvusteoreemi 2.8 praktilise rakendusena vaatleme juhtu, kui $u = A^+ f$ on lõigul $[0, 1]$ pidevalt diferentseeruv funktsioon. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $u(0) = 0$. Kui $u(0) = a \neq 0$, võime esialgse võrrandi asemel lahendada võrrandi kujul $\int_0^1 \mathcal{K}(t, s) \bar{u}(s) ds = \bar{f}(t)$, kus $\bar{u} = u - a$ ning $\bar{f} = f - a \int_0^1 \mathcal{K}(t, s) ds$. Eesmärgiks on leida $u_m(s)$, mis minimiseerib $\int_0^1 (u'(s))^2 ds$ tingimustel

$$\int_0^1 \mathcal{K}(t_i, s) u(s) ds = f(t_i), \quad t_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, m.$$

Näitame, et püstitatud ülesannet saab vaadelda ka reprodutseeriva tuumaga Hilberti ruumides ning saavutada $\{u_m\}$ koonduvus vastavalt teoreemile 2.8.

Olgu H_R hulk, mis koosneb lõigul $[0, 1]$ absoluutselt pidevatest reaalkärvadest funktsioonidest f , mille tuletised kuuluvad ruumi $L_2[0, 1]$ ning $f(0) = 0$. Selliselt defineeritud ruum H_R on reprodutseeriva tuumaga Hilberti ruum, milles skalaarkorrutis on määratud alljärgnevalt:

$$\langle f_1, f_2 \rangle_R = \int_0^1 f_1'(s) f_2'(s) ds \quad (2.27)$$

ning reprodutseeriv tuum R avaldub kujul $R(s, s') = \min(s, s')$. Tähistame

$$\eta_t(s) := \int_0^1 \mathcal{K}(t, t') R(s, t') dt'$$

ja näitame, et iga $u \in H_R$ korral kehtib seos

$$\int_0^1 \mathcal{K}(t, s) u(s) ds = \langle \eta_t, u \rangle_R. \quad (2.28)$$

Selleks märgime, et

$$\eta_t(s) = \int_0^1 \mathcal{K}(t, t') \min(s, t') dt' = \int_0^s t' \mathcal{K}(t, t') dt' + s \int_s^1 \mathcal{K}(t, t') dt';$$

$$\frac{d}{ds} \eta_t(s) = s \mathcal{K}(t, s) + \int_s^1 \mathcal{K}(t, t') dt' - s \mathcal{K}(t, s) = \int_s^1 \mathcal{K}(t, t') dt'.$$

Eelnevat arvestades saame ositi integreerides, võrdust $\frac{d}{ds} \int_s^1 \mathcal{K}(t, t') dt' = -\mathcal{K}(t, s)$ ning eeldust $u(0) = 0$ kasutades seose (2.28):

$$\begin{aligned} \langle \eta_t, u \rangle_R &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \eta_t(s) u'(s) ds = \left(\frac{d}{ds} \eta_t(s) \right) u(s) \Big|_0^1 + \int_0^1 u(s) \mathcal{K}(t, s) ds = \\ &= \int_0^1 \mathcal{K}(t, s) u(s) ds. \end{aligned}$$

Minimaalse H_R normiga element, mis rahuldab seost $\langle \eta_t, u \rangle_R = f(t)$, $t \in T_m$, avaldub kujul

$$u_m(s) = (\eta_{t_1}(s), \dots, \eta_{t_m}(s)) Q_m^{-1} (f(t_1), \dots, f(t_m))^T,$$

kus Q_m on $m \times m$ maatriks, mille (i, j) -s element on määratud seosega

$$Q(t_i, t_j) = \langle \eta_{t_i}, \eta_{t_j} \rangle_R = \int_0^1 \frac{d}{ds} \eta_{t_i}(s) \frac{d}{ds} \eta_{t_j}(s) ds.$$

Eeldame, et viimase võrdusega määratud reprodutseeriv tuum $Q(t, t')$ on pidev ja $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0$, kus Δ_m on defineeritud seosega (2.11). Analooiliselt koonduvusteoreemiga 2.8 saame, et $\|u_m - u\|_R \rightarrow 0$ protsessis $m \rightarrow \infty$. Järelikult seost (2.27) arvestades saame

$$\langle u_m - u, u_m - u \rangle_R = \int_0^1 (u_m'(s) - u'(s))^2 ds \rightarrow 0.$$

Näitame punktiviisi koonduvust ruumis H_R . Arvestades seoseid (2.13) ja (2.15), saame $\|R_s\|_R^2 = R(s, s) = \min(s, s) = s$,

$$\begin{aligned} |u_m(s) - u(s)| &= |\langle u_m, R_s \rangle_R - \langle u, R_s \rangle_R| = |\langle u_m - u, R_s \rangle_R| \leq \\ &\leq \|u_m - u\|_R \|R_s\|_R = \|u_m - u\|_R \sqrt{s} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2.10 Kvaasilahendiga ülesanne

Järgnevas vaatleme olukorda, kui $f \notin \mathcal{R}(A)$, $f \in \mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$ ning uurime koonduvust $u \rightarrow A^+ f$. Märgime, et $A^+ f$ on ka võrrandi $A^* Au = A^* f$ minimaalse normiga lahend, kui $f \in \mathcal{D}(A^+)$. Seoste (2.18) tõttu kehtib võrdus $(A^* A)^+ A^* f = A^+ f$. Kui $f \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(K^*)$, siis $A^* f \in \mathcal{R}(A^* A)$. Seetõttu võime vaadelda järgnevas operaatori A ja vabaliikme f asemel vastavalt $\bar{Q} := A^* A$ ja $g := A^* f$. Siin operaatori $\bar{Q}$ tuum avaldub kujul

$$\bar{Q}(s, s') = (\mathcal{K}_s^*, \mathcal{K}_{s'}^*) = \int_0^1 \mathcal{K}(t, s) \mathcal{K}(t, s') dt.$$

Olgu u_m minimaalse $L_2[0, 1]$ normiga element, mis minimiseerib $\sum_{i=1}^m [(\bar{Q}u)(s_i) - g(s_i)]^2$, kus $S_m = \{s_1, \dots, s_m\} \subset [0, 1]$.

Ülaltoodud eelduste tõttu funktsioon $\bar{q}_s(s') := \bar{Q}(s, s')$ tegutseb ruumis $L_2[0, 1]$ iga $s \in [0, 1]$ korral. Eeldame, et hulk $\{\bar{q}_s \mid s \in S_m\}$ on lineaarselt sõltumatu. Siis u_m esitub kujul

$$u_m = (g_1, \dots, g_m) P_m^{-1} (\bar{q}_{s_1}, \dots, \bar{q}_{s_m})^T, \quad (2.29)$$

kus P_m on $m \times m$ maatriks, mille (i, j) -ks elemendiks on $P(s_i, s_j)$. Seejuures

$$P(s, s') = (\bar{q}_s, \bar{q}_{s'}) = \int_0^1 \bar{Q}(s, u) \bar{Q}(s', u) du \quad (2.30)$$

ja $g_i = (A^* f)(s_i)$.

Formuleerime koonduvusteoreemi.

Teoreem 2.10. *Kui seosega (2.30) määratud tuum $P(s, s')$ on pidev ruudus $[0, 1] \times [0, 1]$ ja $f \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$ ning lähend u_m on defineeritud võrdusega (2.29), siis $\lim \|u_m - A^+ f\| = 0$ protsessis $\sup_{s \in [0, 1]} \inf_{1 \leq i \leq m} |s - s_i| \rightarrow 0$.*

Tõestus. Tegu on teoreemi 2.8 analoogiga, kus tuum Q on asendatud tuumaga P , vabaliige $f \in H_Q$ on asendatud vabaliikmega $g \in H_P$. Siin $H_P = \mathcal{R}(A^* A)$ on reprodutseeriva tuumaga Hilberti ruum reprodutseeriva tuumaga P . Märgime, et $g = A^* f$ kuulub ruumi H_P siis ja ainult siis kui $f \in \mathcal{D}(A^+)$. Teoreem on tõestatud.

3 Spetsiaalne kollokatsioonimeetod ligikaudsete andmete juhul

3.1 Meetodi koonduvus kollokatsioonipunktide aprioorse valiku korral

Ükski eelmises peatükis vaadeldud koonduvusteoreem ei anna meile informatsiooni selle kohta, mis juhtub siis, kui tegu on ebatäpsete andmetega. Järgnevas eeldame, et võrrandi (2.20) $A_m u_m = F_m$ täpse parema poole F_m asemel on teada vaid ebatäpne parem pool $\widetilde{F}_m \in \mathbb{R}^m$ kujul

$$\widetilde{F}_m = (\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_m)^T \in \mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A_m). \quad (3.1)$$

Punktides 3.1 ja 3.2 eeldame, et on teada veatase $\widetilde{\delta}_m > 0$ selline, et

$$\|F_m - \widetilde{F}_m\|_m \equiv \left(\sum_{i=1}^m |f_i - \widetilde{f}_i|^2 \right)^{1/2} \leq \widetilde{\delta}_m. \quad (3.2)$$

Seejuures häiritused vektori $\widetilde{F}_m$ erinevates komponentides võivad olla erineva suurusega ja nad on üksteisest sõltumatud.

Vaatleme võrrandi (2.20) asemel ebatäpse parema poolega võrrandit

$$A_m \widetilde{u}_m = \widetilde{F}_m, \quad (3.3)$$

mille minimaalse normiga lahendi tähistame $\widetilde{u}_m$. Eelduse (3.1) tõttu on ülesanne (3.3) lahenduv ning lahendi $\widetilde{u}_m$ võime esitada seosega (2.24) analoogiliselt:

$$\widetilde{u}_m = (\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_m) Q_m^{-1} (\mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m})^T. \quad (3.4)$$

Suurustele $\|u_m - \widetilde{u}_m\|^2$ ja $\|Au_m - A\widetilde{u}_m\|_Q^2$ hinnangu leidmiseks tõestame järgneva lemma.

Lemma 3.1. *Olgu u_m võrrandi (2.20) lahend ja $\widetilde{u}_m$ vastavalt võrrandi (3.3) lahend. Siis kehtib võrdus*

$$\|u_m - \widetilde{u}_m\|^2 = \|Au_m - A\widetilde{u}_m\|_Q^2 = (Q_m^{-1} (F_m - \widetilde{F}_m), u_m - \widetilde{u}_m)_m, \quad (3.5)$$

kus

$$(v, w)_m = \sum_{i=1}^m v_i w_i, \quad v = (v_i), \quad w = (w_i) \in \mathbb{R}^m.$$

Tõestus. Võrduse esimene pool tuleb lihtsalt välja kui arvestades seoseid (2.17) ja (2.18). Tõepoolest

$$\begin{aligned}\| Au_m - A\widetilde{u}_m \|_Q^2 &= \langle A(u_m - \widetilde{u}_m), A(u_m - \widetilde{u}_m) \rangle_Q = \\ &= \langle A^+ A(u_m - \widetilde{u}_m), A^+ A(u_m - \widetilde{u}_m) \rangle = \\ &= \langle u_m - \widetilde{u}_m, u_m - \widetilde{u}_m \rangle = \| u_m - \widetilde{u}_m \|^2.\end{aligned}$$

Seose (3.5) teise võrduse saamiseks märgime, et kehtib seos

$$u_m - \widetilde{u}_m = (F_m - \widetilde{F}_m) Q_m^{-1} (\mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m})^T.$$

Iga $t \in [0, 1]$ korral saame integraaloperaatori A definitsiooni (2.1) ning valemit (2.16) arvestades $A\mathcal{K}_t = Q_t$. Järelikult, kasutades seoseid (3.4) ja (2.24) saame $A(u_m - \widetilde{u}_m) = \sum_{i=1}^m (F_m - \widetilde{F}_m)_i w_i$, kus $w_i = \sum_{k=1}^m r_{ik} Q_{t_k} \in H_Q$. Seega,

$$\| Au_m - A\widetilde{u}_m \|_Q^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (F_m - \widetilde{F}_m)_i (F_m - \widetilde{F}_m)_j \langle w_i, w_j \rangle_Q.$$

Seost (2.14) kasutades saame, et

$$\begin{aligned}\langle w_i, w_j \rangle_Q &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m r_{ik} r_{jl} \langle Q_{t_k}, Q_{t_l} \rangle_Q = \sum_{l=1}^m r_{jl} \sum_{k=1}^m r_{ik} Q(t_k, t_l) = \\ &= \sum_{l=1}^m r_{jl} (Q_m^{-1} Q_m)_{il} = r_{ji}.\end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\| Au_m - A\widetilde{u}_m \|_Q^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (F_m - \widetilde{F}_m)_i (F_m - \widetilde{F}_m)_j r_{ji} = \\ &= (Q_m^{-1} (F_m - \widetilde{F}_m), F_m - \widetilde{F}_m)_m.\end{aligned}$$

Oleme näidanud, et kehtib teine võrdus seosest (3.5). Lemma on tõestatud.

Toome sisse uue tähise λ_m maatriksi Q_m vähima omaväärtuse tähistamiseks. Maatriksi Q_m sümmeetrisuse tõttu $\lambda_m \geq 0$, kvaasitšebõševi tuuma $\mathcal{K}(t, s)$ korral $\lambda_m > 0$. Suurus λ_m sõltub tuumast $\mathcal{K}(t, s)$ ning kollokatsioonipunktide paiknemisest ja on olulisel kohal koonduvusteoreemides.

Koonduvusteoreemide tarbeks vajame veel ühte abitulemust. Tõestame järgneva lemma.

Lemma 3.2. *Olgu u_m võrrandi (2.20) lahend ja $\widetilde{u}_m$ võrrandi (3.3) lahend.*

(i) Kui $\widetilde{\delta}_m$ on defineeritud seosega (3.2), siis kehtib hinnang

$$\|u_m - \widetilde{u}_m\|^2 = \|Au_m - A\widetilde{u}_m\|_Q^2 \leq \widetilde{\delta}_m^2 \cdot \lambda_m^{-1};$$

(ii) eksisteerib vektor $\widetilde{F}_m = (\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_m)^T$, mis rahuldab seost (3.2) ja mille korral võrrandi (3.3) lahendi $\widetilde{u}_m$ jaoks kehtib võrdus

$$\|u_m - \widetilde{u}_m\|^2 = \|Au_m - A\widetilde{u}_m\|_Q^2 = \widetilde{\delta}_m^2 \cdot \lambda_m^{-1}.$$

Tõestus. Lemma 3.1 tõttu kehtib võrdus (vt. normide $\|\cdot\|_Q$ ja $\|\cdot\|_m$ määratlusi (2.15) ning (3.2))

$$\begin{aligned} \|u_m - \widetilde{u}_m\|^2 &= \|Au_m - A\widetilde{u}_m\|_Q^2 = \\ &= \left\| F_m - \widetilde{F}_m \right\|_Q^2 \left(Q_m^{-1} \left(\frac{F_m - \widetilde{F}_m}{\|F_m - \widetilde{F}_m\|_m^2} \right), \left(\frac{F_m - \widetilde{F}_m}{\|F_m - \widetilde{F}_m\|_m^2} \right) \right)_m \leq \\ &\leq \widetilde{\delta}_m^2 \cdot \sup_{\|z\|_m=1} \{(Q_m^{-1} z, z)_m\} = \widetilde{\delta}_m^2 \cdot \lambda_{\max}(Q_m^{-1}) = \widetilde{\delta}_m^2 \cdot \lambda_m^{-1}. \end{aligned}$$

Siin $\lambda_{\max}(Q_m^{-1})$ on pöördmaatriksi Q_m^{-1} suurim omaväärtus. Oleme näidanud, et väide (i) kehtib. Jääb kontrollida seose (ii) kehtivust.

Olgu $z \in \mathbb{R}^m$ selline, et $\|z\|_m = 1$ ning $(Q_m^{-1} z, z)_m = \lambda_m^{-1}$. Kui vali-
me vektori $\widetilde{F}_m := F_m - \widetilde{\delta}_m z$, siis väide (ii) kehtib. Lemma on tõestatud.

Formuleerime nüüd koonduvusteoreemi.

Teoreem 3.1. Olgu $\sum_{i=1}^m (\widetilde{f}_m(t_i) - f(t_i))^2 \leq \widetilde{\delta}_m^2$ ja olgu λ_m maatriksi $Q_m = (Q(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq m}$ vähim omaväärtus. Siis kehtib veahinnang

$$\|\widetilde{u}_m - A^+ f\| \leq \|u_m - A^+ f\| + \frac{\widetilde{\delta}_m}{\lambda_m^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.6)$$

kus u_m on täpsele paremale poolele $f(t)$ vastav lähislahend kujul (2.7). Kui $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0$ ja $\lim_{m \rightarrow \infty} \widetilde{\delta}_m^2 \cdot \lambda_m^{-1} = 0$, siis $\|\widetilde{u}_m - A^+ f\| \rightarrow 0$ protsessis $m \rightarrow \infty$.

Tõestus. Märgime, et kehtib seos

$$\begin{aligned} \|\widetilde{u}_m - A^+ f\| &= \|\widetilde{u}_m - u_m + u_m - A^+ f\| \leq \\ &\leq \|\widetilde{u}_m - u_m\| + \|u_m - A^+ f\|. \end{aligned}$$

Seega, arvestades eespool tõestatud teoreemi 2.8 ja lemmat 3.2 saamegi teoreemi väite.

Diskretiseerimise kvaliteet sõltub sellest, kui hästi me suudame leida võrrandi täpsele lahendile aproksimatsiooni. See tähendab, et diskretiseerimisviga sõltub peale täpse lahendi sileduse ka tuuma siledusest. Mida siledam on võrrandi tuum, seda parem lähend meil õnnestub leida. Teisalt, tuuma sileduse omadus kontrollib ka integraaloperaatori omaväärtuste λ_m käitumist. Siledama tuuma korral kahanevad omaväärtused kiiremini. Seega, kollokatsioonimeetodi puhul saame ebatäpsete lähteandmete korral täpsele lahendile hea lähendi vaid tuumade puhul, mis ei ole väga siledad.

Formuleerime järgneva koonduvusteoreemi.

Teoreem 3.2. *Olgu iga $m \in \mathbb{N}$ korral λ_m matriksi Q_m vähim omaväärtus ja olgu $\widetilde{u}_m$ võrrandi (3.3) lahend. Eeldame, et $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0$ ja $\lim_{m \rightarrow \infty} \widetilde{\delta}_m = 0$, kus Δ_m ja $\widetilde{\delta}_m$ on defineeritud vastavalt seostega (2.11) ja (3.2). Kehtivad järgmised väited:*

- (i) kui $\lim_{m \rightarrow \infty} (\widetilde{\delta}_m^2 \cdot \lambda_m^{-1}) = 0$, siis $(\widetilde{u}_m) \rightarrow A^+ f$ ja $(A\widetilde{u}_m) \rightarrow f$;
- (ii) kui $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup (\widetilde{\delta}_m^2 \cdot \lambda_m^{-1}) < \infty$, siis $(\widetilde{u}_m) \xrightarrow{w} A^+ f$ ja $(A\widetilde{u}_m) \xrightarrow{w} f$;
- (iii) kui $\lim_{m \rightarrow \infty} \inf (\widetilde{\delta}_m^2 \cdot \lambda_m^{-1}) > 0$, siis iga $m \in \mathbb{N}$ korral leidub seost (3.2) rahuldav $\widetilde{F}_m \in \mathbb{R}^m$ nii, et võrrandi (3.3) lahendite $\widetilde{u}_m$ korral $(\widetilde{u}_m) \not\rightarrow A^+ f$ ja $(A^+ \widetilde{u}_m) \not\rightarrow f$;
- (iv) kui $\lim_{m \rightarrow \infty} (\widetilde{\delta}_m^2 \cdot \lambda_m^{-1}) = \infty$, siis iga $m \in \mathbb{N}$ korral leidub seost (3.2) rahuldav $\widetilde{F}_m \in \mathbb{R}^m$ nii, et võrrandi (3.3) lahendite $\widetilde{u}_m$ korral $(\widetilde{u}_m) \not\xrightarrow{\psi} A^+ f$ ja $(A^+ \widetilde{u}_m) \not\xrightarrow{\psi} f$.

Tõestus. Väide (i) järeldub teoreemist 3.1. Väite (ii) tõestus on analoogiline. Põhjendame lühidalt ka väidet (iii). Oletame väitevastaselt, et leiab aset koondumine $(\widetilde{u}_m) \rightarrow A^+ f$. Olgu vektor $\widetilde{F}_m = (\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_m)^T$ ning $\widetilde{u}_m$ konstrueeritud nagu lemma 3.2 väites (ii). Teoreemi 3.1 arvestades on koondumise $(\widetilde{u}_m) \rightarrow A^+ f$ korral tarvilik, et $(u_m - \widetilde{u}_m) \rightarrow 0$. Ent kuna $\|u_m - \widetilde{u}_m\|^2 = \delta_m^2 \cdot \lambda_m^{-1}$, siis oleme saanud vastuolu eeldusega, mille kohaselt leiab aset koondumine. Väite (iv) põhjendus on analoogiline väitele (iii). Teoreem on tõestatud.

Käesolevas punktis vaadeldud kollokatsioonipunktide arvu aprioorne valik nõuab omaväärtuste λ_m ($m \in \mathbb{N}$) leidmist ning ei arvesta lahendi siledust. Praktilisem oleks kollokatsioonipunktide aposterioorne valik, kuid vastavaid

reegleid pole seni välja pakutud. Järgnevates punktides 3.4– 3.6 käsitleme osas 1.4 vaadeldud reegleid (ME- reegel, hälbeprintsip), mis on osutunud efektiivseteks paljudes regulariseerimismeetodites.

3.2 Diferentseerimisülesande lahendamine kollokatsiooni-meetodiga

Vaatleme diferentseerimisülesannet integraalvõrrandi kujul

$$\int_0^t u(s)ds = f(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (3.7)$$

kus vabaliige f on absoluutselt pidev ja $f(0) = 0$. Selle võrrandi lahendiks on $u(t) = f'(t)$. Võrrandi (3.7) võime esitada kujul

$$\int_0^1 \mathcal{K}(t, s)u(s)ds = f(t), \quad \mathcal{K}(t, s) = \begin{cases} 0, & \text{kui } s > t \\ 1, & \text{kui } s < t \end{cases}. \quad (3.8)$$

Arvestades reprodutseeriva tuuma definitsiooni (2.16)

$$Q(t, s) = \int_0^1 \mathcal{K}(t, v)\mathcal{K}(s, v)dv,$$

saame seost (3.8) arvestades, et reprodutseeriv tuum $Q(t, s) = \min(t, s)$, $t, s \in [0, 1]$. Vaatleme m sõlmest koosnevat kollokatsioonipunktide komplekti, milles sõlmed paiknevad võrdsete vahemike tagant: $t_i = \frac{i}{m}$ ($1 \leq i \leq m$). Sel juhul $Q_m = \frac{1}{m}D_m$, kus

$$D_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & m \end{bmatrix}$$

ning mille pöördmaatriks avaldub kujul

$$D_m^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Järelikult $Q_m^{-1} = mD_m^{-1}$. Järgnevas kasutame seost $\lambda_m = \lambda_{max}^{-1}(Q_m^{-1})$: maatriksi Q_m vähim omaväärtus võrdub maatriksi Q_m^{-1} suurima omaväärtuse pöördarvuga. Kuna maatriksi D_m^{-1} suurim omaväärtus on ülalt tõkestatud maksimumiga tema suvalise rea elementide absoluutväärtuste summast, siis $\lambda_{max}(D_m^{-1}) \leq 4$ ja järelikult maatriksi Q_m vähima omaväärtuse λ_m jaoks kehtib võrratus

$$\lambda_m \geq \frac{1}{4m}. \quad (3.9)$$

Toome ruutmaatriksi D_m^{-1} peadiagonaali elementide summa jaoks sisse tähise $tr(D_m^{-1})$. Siis võrratuse $m\lambda_{max}(D_m^{-1}) \geq tr(D_m^{-1}) = 2m - 1$ ja võrduse $Q_m = \frac{1}{m}D_m$ tõttu saame võrratuse

$$\lambda_m \leq \frac{1}{2m - 1}. \quad (3.10)$$

Seoste (3.9) ja (3.10) kokkuvõttes saame $\frac{1}{4m} \leq \lambda_m \leq \frac{1}{2m-1}$, seega juhul $m \rightarrow \infty$ kehtib asümptootika

$$\lambda_m \sim const \cdot m^{-1}. \quad (3.11)$$

Olgu $\widetilde{F}_m \in \mathbb{R}^m$ selline, et on rahuldatud tingimus

$$\left\| \widetilde{F}_m - \left(F(1/m), F(2/m), \dots, F(1) \right) \right\|_m \leq \widetilde{\delta}_m.$$

Tähistame võrrandisüsteemi

$$\int_0^{\frac{i}{m}} u(s) ds = (\widetilde{F}_m)_i \quad (1 \leq i \leq m) \quad (3.12)$$

minimaalse L_2 - normiga lahendi $\widetilde{u}_m$ - ga. Seosest (3.12) saame $i = 1$ korral, et lõigul $[0, 1/m]$ lähend $\widetilde{u}_m = m(\widetilde{F}_m)_1$, järgnevate väärtuste $i = 2, \dots, m$ korral aga lõikudel $[(i-1)m, i/m]$ lähend $\widetilde{u}_m = m[(\widetilde{F}_m)_i - (\widetilde{F}_m)_{i-1}]$. Saadud tükiti konstantne lähislahend on analoogiline funktsiooni numbrilise diferentseerimisega saadud lähendile, mida näitab ka maatriksi D_m^{-1} kuju.

Rakendades teoreemi 3.1 ning seost (3.11) saame, et kui $\lim_{m \rightarrow \infty} (\widetilde{\delta}_m^2 \cdot m) = 0$, siis $\widetilde{u}_m$ koondub lähtevõrrandi (3.7) täpseks lahendiks f' .

3.3 Diskretiseerimistasemed

Järgnevas leiame tingimuse selleks, et kollokatsioonipunktide arvu suurenemisel lähislahendi viga väheneks. Loomulik on võrrelda viga kollokatsioonipunktide selliste komplektide korral, kus järgnev komplekt sisaldab eelmist. Seejuures ei pruugi me m kollokatsioonipunkti sisaldavat komplekti võrrelda $m + 1$

sõlmpunkti sisaldava komplektiga, s.o kollokatsioonipunkte pole tarvis lisada tingimata ühekaupa.

Kui pole teada, et lahend on iseärasustega, tundub loomulik paigutada kollokatsioonipunkte lõigul $[0, 1]$ võrdsete vahemike tagant: näiteks otpunkte 0 ja 1 mittesisaldav valik $t_i = i/(m+1)$ ($i = 1, \dots, m$) või otpunkte 0 ja 1 sisaldav valik $t_i = (i-1)/(m-1)$ ($i = 1, \dots, m$). Moodustades järgmist kollokatsioonipunktide komplekti arvestades, et ta sisaldab eelmist komplekti ning sõlmpunktid paiknevad endiselt võrdsete vahemike tagant, on loomulik lisada seniste punktidega (ning lõigu otpunktidega 0 ja 1) määratud osalõikude keskpunktid. Seega, üleminekul ühelt kollokatsioonipunktide komplektilt järgnevale, punktide arv ligikaudu kahekordistub. Eelnevas näites toodud kollokatsioonipunktide komplektidele järgnevateks komplektideks võiksid olla vastavalt $t_i = i/(2(m+1))$ ($i = 1, \dots, 2m+1$) või $t_i = (i-1)/(2(m-1))$ ($i = 1, \dots, 2m-1$).

Eelnev arutlus motiveerib meid tooma kollokatsioonipunktide arvu m kõrvale teist parameetrit, diskretiseerimistaset n , kus n näitab sõlmpunktide komplekti järjekorranumbrit. Kui käesoleva töö eelnevates punktides kasutasime lähislahendi u_m alaindeksina sõlmede arvu m , siis kõigis järgnevates punktides asendame selle diskretiseerimistasemega n . Ühtlasi jätame edaspidi ligikaudsete andmete korral lähislahendi tähises kirjutamata märgi $\sim$.

Toome diskretiseerimistasemete n ja $n+1$ jaoks sisse indeksite hulga I_n ja I_{n+1} . Eeldame, et järjestikused diskretiseerimistasemed rahuldavad seost

$$I_n \subset I_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.13)$$

Järgnevas alapunktis üritame leida tingimust, mille korral oleks rahuldatud võrratus

$$\| u_{n+1} - u \| \leq \| u_n - u \| . \quad (3.14)$$

3.4 Lähislahendi vea monotoonsuse tingimus

Vaatleme integraalvõrrandit (2.1) operaatoriga $A : L_2 [0, 1] \rightarrow L_2 [0, 1]$. Eeldame, et diskretiseerimistasemetel $n = 1, 2, \dots$ on antud $m = m(n)$ punktist koosnevad sõlmpunktide hulgad $T_m \equiv \{t_i \in [0, 1], i = 1, \dots, m\}$, kus $t_i \neq t_j$, kui $i \neq j$ ning $m(n)$ on monotoonselt kasvav funktsioon. Meenutame punktis 2.4 sissetoodud spetsiaalset kollokatsioonimeetodit. Selles meetodis otsisime võrrandi (2.1) täpsele lahendile lähislahendit $u_n \in \text{span} \{ \mathcal{K}_{t_1}, \dots, \mathcal{K}_{t_m} \}$, mis oleks

minimaalse L_2 - normiga ja minimiseeriks normi $\| u_n - u \|$ ruumis $L_2 [0, 1]$. Sel juhul $(u_n - u, \mathcal{K}_{t_i}) = 0$ ($i = 1, \dots, m$), kui $f_\delta = f$. Võrrandi (2.1) täpne lahend u rahuldab seoseid

$$(u, \mathcal{K}_{t_i}) = \int_0^1 \mathcal{K}(t_i, s) u(s) ds = f(t_i) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.15)$$

Kui täpse parema poole f asemel on teada vaid vigadega andmed f_δ , siis määrame lähislahendi u_n tingimustest

$$(u_n, \mathcal{K}_{t_i}) = \int_0^1 \mathcal{K}(t_i, s) u_n(s) ds = f_\delta(t_i) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.16)$$

Seega lähislahendi u_n esituses

$$u_n = \sum_{j=1}^m c_j \mathcal{K}(t_j, s) \quad (3.17)$$

sisalduvad kordajad $\{c_j\}_{j=1}^m$ määrame lineaarsest algebralisest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^m c_j \int_0^1 \mathcal{K}(t_j, s) \mathcal{K}(t_i, s) ds = f_\delta(t_i) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.18)$$

Eeldame, et süsteem $\{\mathcal{K}(t_i, s)\}_{i=1}^m$ on lineaarselt sõltumatu ruumis $L_2 [0, 1]$ iga $s \in [0, 1]$ korral. Kui eespool oli eeldatud funktsiooni f_δ lähedust täpsele paremale poolele f ruumi $L_2 [0, 1]$ mõttes, siis edaspidi eeldame punktiviisilist lähedust sõlmedes nii, et häire $\varepsilon(t_i) \equiv f_\delta(t_i) - f(t_i)$ sõlmedes t_i rahuldab võrratust

$$|\varepsilon(t_i)| \leq \delta_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (3.19)$$

kus δ_i on teadaolevad küllalt väikesed positiivsed arvud. Märgime, et võrratusega (3.2) määratletud ja punktides 3.1 ja 3.2 kasutatud veatase $\widetilde{\delta}_m$ ning seoses (3.19) sissetoodud punktiviisiline veatase δ_i on seotud võrratusega $\sum_{i=1}^m \delta_i \leq \widetilde{\delta}_m^2$. Seejuures võime seoses (3.2) suuruseks $\widetilde{\delta}_m$ võtta $\sqrt{m} \cdot \max_{1 \leq i \leq m} \delta_i$.

Seoste (3.15)–(3.18) abil saame võrdsused

$$(u_n, u) = \sum_{i \in I_n} c_i^n (\mathcal{K}_{t_i}, u) = \sum_{i \in I_n} c_i^n f(t_i), \quad (3.20)$$

$$\|u_n\|^2 = \sum_{i \in I_n} c_i^n (\mathcal{K}_{t_i}, u_n) = \sum_{i \in I_n} c_i^n f_\delta(t_i), \quad (3.21)$$

kus konstandi c_i^n tähises ülaindeks n märgib diskretiseerimistaset. Arvestades seoseid (3.13) ja (3.19)–(3.21) tuleneb, et

$$\begin{aligned}
& \|u_n - u\|^2 - \|u_{n+1} - u\|^2 = \|u_{n+1}\|^2 - \|u_n\|^2 + 2(u_n - u, u_n) - \\
& - 2(u_{n+1} - u, u_{n+1}) = \|u_{n+1}\|^2 - \|u_n\|^2 + 2 \sum_{i \in I_n} c_i^n \varepsilon(t_i) - 2 \sum_{i \in I_{n+1}} c_i^{n+1} \varepsilon(t_i) = \\
& = \|u_{n+1}\|^2 - \|u_n\|^2 - 2 \sum_{i \in I_{n+1}/I_n} c_i^{n+1} \varepsilon(t_i) + 2 \sum_{i \in I_n} (c_i^n - c_i^{n+1}) \varepsilon(t_i) \geq \\
& \geq \|u_{n+1}\|^2 - \|u_n\|^2 - 2 \left[\sum_{i \in I_{n+1}/I_n} |c_i^{n+1}| \delta_i + \sum_{i \in I_n} |c_i^n - c_i^{n+1}| \delta_i \right].
\end{aligned}$$

Saime, et võrratus (3.14) kehtib, kui on täidetud tingimus

$$\|u_{n+1}\|^2 - \|u_n\|^2 \geq 2 \left[\sum_{i \in I_{n+1}/I_n} |c_i^{n+1}| \delta_i + \sum_{i \in I_n} |c_i^n - c_i^{n+1}| \delta_i \right]. \quad (3.22)$$

Viimane võrratus saab olla rahuldatud vaid juhul, kui

$$\|u_{n+1}\|^2 \geq \|u_n\|^2 \quad (3.23)$$

Element u_n on seoseid

$$\int_0^1 \mathcal{K}(t_i, s) u(s) ds = f(t_i) \quad (i \in I_n) \quad (3.24)$$

rahuldavate elementide u hulgas minimaalse normiga. Element u_{n+1} rahuldab seostega (3.24) analoogilisi seoseid, kus kuuluvus $i \in I_n$ on asendatud kuuluvusega $i \in I_{n+1}$. Seega tingimusel (3.13) rahuldavad nii u_n kui ka u_{n+1} seoseid (3.24), aga kuna u_n on eelnimetatud seoseid rahuldavate elementide hulgas minimaalse normiga, siis võrratus (3.23) on rahuldatud. Seose (3.23) kehtivusest järeldub täpsete andmete ($f_\delta = f$) korral tingimuse (3.22) täidetuse, millest omakorda järeldub võrratus (3.14). Võtame toodud arutluse kokku teoreemiks.

Teoreem 3.3. *Olgu tingimus (3.13) rahuldatud iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Siis lähislahendite vigade monotoonsus (3.14) on garanteeritud täpsete andmete ($f_\delta = f$) korral iga $n \in \mathbb{N}$ puhul, ebatäpsete andmete ($f_\delta \neq f$) korral aga juhul, kui kehtib võrratus (3.22).*

3.5 Diskretiseerimistaseme valiku aposterioorsed valiku-reeglid

Kollokatsioonipunktide arvu või diskretiseerimistaseme aposterioorseks valikuks pole kirjanduses seni reegleid pakutud. Järgnevalt sõnastame punktis 1.4 vaadeldud ja paljudes regulariseerimismeetodites parameetri valikuks kasutatud reeglid käesolevas töös vaadeldava spetsiaalse kollokatsioonimeetodi jaoks.

3.5.1 Hälbeprintsiiip

Hälbeprintsiiip Olgu $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ ja olgu fikseeritud konstant $b > 1$. Valime diskretiseerimistaseme $n_{D, b}$ kui esimese arvudest $n = 1, 2, \dots$, mille korral kehtib võrratus

$$\|Au_n - f_\delta\| \leq b\delta.$$

Kuna hälbeprintsiiipi antud meetodi jaoks pole uuritud, on konstandi b valik problemaatiline ning pole teada tingimusi lähislahendi koonduvuse

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_{n_{D, b}} - u\| \rightarrow 0$$

garanteerimiseks.

3.5.2 Monotoonse vea reegel

Monotoonse vea reegel Olgu rahuldatud tingimus (3.13) iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Valime diskretiseerimistaseme n_{ME} kui esimese arvudest $n = 1, 2, \dots$, mille korral kehtib võrratus

$$\|u_{n+1}\|^2 - \|u_n\|^2 \leq 2 \left[\sum_{i \in I_{n+1}/I_n} |c_i^{n+1}| \delta_i + \sum_{i \in I_n} |c_i^n - c_i^{n+1}| \delta_i \right]. \quad (3.25)$$

Siin $\{c_i^n\}_{i \in I_n}$ ja $\{c_i^{n+1}\}_{i \in I_{n+1}}$ on võrrandisüsteemist (3.18) leitavad konstandid. Suurused $\{\delta_i\}_{i \in I_n}$ on seoseid (3.19) rahuldavad veanivood kollokatsioonipunktides ja I_n ning I_{n+1} on indekse hulgad, mis vastavad diskretiseerimistasemetele n ja $n+1$.

Reegli nimetus tuleneb sellest, et kuna $n \leq n_{ME} - 1$ korral kehtib võrratusele (3.25) vastupidine võrratus (3.22), siis teoreemi 3.3 põhjal kehtib seos (3.14):

$$\|u_n - u\| \leq \|u_{n-1} - u\| \quad (n = 2, \dots, n_{ME}). \quad (3.26)$$

3.6 Monotoonse vea reegli regulariseerimisomadustest

Vaatleme nüüd ligikaudsete andmete juhul diskretiseerimistaseme $n = n_{ME}$ valikut monotoonse vea reegli alusel protsessis $\delta \rightarrow 0$ ning huvitume küsimusest, kas $u_{n_{ME}(\delta)} \rightarrow u$ ($\delta \rightarrow 0$).

Teoreem 3.4. *Rahuldagu järjestikused diskretiseerimistasemed seost (3.13) ning olgu kollokatsioonipunktide hulk piirtihe: $\Delta_{m(n)} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Siis vaadeldav kollokatsioonimeetod {2.7, 2.8} integraalvõrrandi (2.1) jaoks koos diskretiseerimistaseme n valikuga monotoonse vea reegli alusel osutub regulariseerimismeetodiks:*

$$\|u_{n_{ME}(\delta)} - u\| \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0).$$

Tõestus. Eelduse $\Delta_{m(n)} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) tõttu on garanteeritud vaadeldava kollokatsioonimeetodi koonduvus täpsete andmete juhul. Protsessis $\delta \rightarrow 0$ on kaks võimalust: (i) kas $\lim_{\delta \rightarrow 0} n_{ME}(\delta) = n_* < \infty$ või (ii) $n_{ME}(\delta) \rightarrow \infty$ ($\delta \rightarrow 0$). Esimene variant on võimalik vaid juhul, kui $u \in \text{span}\{\mathcal{K}_{t_i}, i \in I_{n_*}\}$. Kirjutame veahinnangu (3.6) kujul

$$\|u_{n_{ME}} - u\| \leq \|u_{n_{ME}}^0 - u\| + \delta \lambda_{m(n_{ME}(\delta))}^{-1/2} \sqrt{m(n_{ME})}, \quad (3.27)$$

kus u_n^0 on täpsete andmete ($f = f_\delta$) korral vaadeldava kollokatsioonimeetodi rakendamise tulemusena saadav lähislahend. Juhul (i) saame, et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_{n_{ME}(\delta)}^0 - u\| = \|u_{n_*}^0 - u\| = 0 \text{ ning võrduse}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda_{m(n_{ME}(\delta))}^{-1/2} \cdot \sqrt{m(n_{ME}(\delta))} = \lambda_{m(n_*)}^{-1/2} \cdot \sqrt{m(n_*)} < \infty$$

tõttu koondub protsessis $\delta \rightarrow 0$ nulliks ka veahinnangu (3.27) teine liidetav. Seega juhul (i) kehtib $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_{n_{ME}(\delta)} - u\| = 0$.

Vaatleme nüüd võimalust (ii) ehk peajuhtu $n_{ME}(\delta) \rightarrow \infty$ ($\delta \rightarrow 0$). Kuna täpsete andmete puhul on piirprotsessi $n \rightarrow \infty$ korral koonduvus garanteeritud, siis $\|u_n^0 - u\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), mistõttu ka $\|u_{n_{ME}}^0 - u\| \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$).

Olgu $n_{apr}(\delta)$ suvaline indeks, mis on saadud aprioorse parameetriveraliku eeskirja

$$n_{apr}(\delta) \rightarrow \infty, \quad \delta \cdot \lambda_{m(n_{apr}(\delta))}^{-1/2} \cdot \sqrt{m(n_{apr}(\delta))} \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0) \quad (3.28)$$

põhjal. Veahinnang (3.27) kehtib ka indeksi n_{ME} asendamisel suvalise n -ga ning annab $n = n_{apr}(\delta)$ korral koos seosega (3.28) protsesses ($\delta \rightarrow 0$) koonduvuse $\|u_{n_{apr}(\delta)} - u\| \rightarrow 0$. Juhul $n_{ME}(\delta) \geq n_{apr}(\delta)$ kehtib seose (3.26) tõttu võrratus $\|u_{n_{ME}(\delta)} - u\| \leq \|u_{n_{apr}(\delta)} - u\| \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$). Juhul $n_{ME}(\delta) < n_{apr}(\delta)$ aga annab seos (3.28) veahinnangu (3.27) teise liikme koonduvuse protsessis $\delta \rightarrow 0$, kuna mõlemad δ järel olevad tegurid on argumendi n_{ME} monotoonselt kasvavad funktsioonid. Funktsiooni $m(n)$ monotoonselt kasvamist on varasemas eeldatud (vt. punkt 3.4). Maatriksi $Q_{m(n)}$ minimaalse omaväärtuse pöördväärtuse $\lambda_{m(n)}^{-1}$ monotoonne kasv n kasvades tuleneb järgnevast lemmast 3.3 ning eeldusest (3.13), mistõttu $n_1 < n_2$ korral maatriks $Q_{m(n_1)}$ on maatriksi $Q_{m(n_2)}$ alammaatriks, mis saadakse maatriksist $Q_{m(n_2)}$ sellest $m(n_2) - m(n_1)$ rea ja vastavate veergude eemaldamisel.

Lemma 3.3. (vt. [30], lk.227, teoreem 4.3.15) *Olgu $B_1 = B_1^*$ ja $B_2 = B_2^*$ vastavalt $m_1 \times m_1$ ja $m_2 \times m_2$ maatriksid, seejuures $m_1 < m_2$ ja maatriks B_1*

on saadud matriksist B_2 eemaldades sealt $m_2 - m_1$ rida ja vastavad veerud. Siis matriksite B_1 ja B_2 minimaalsed omaväärtused μ_1 ja μ_2 rahuldavad seost $\mu_1 \geq \mu_2$.

Teoreem 3.4 on tõestatud.

Märkus 3.1. Monotoonse vea reegli alusel valitav indeks n_{ME} on piisavalt suur garanteerimaks koonduvust $\|u_{n_{ME}}^0 - u\| \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$), teisalt aga teame monotoonse vea reegli omaduse (3.26) põhjal, et $n_{ME}(\delta) \leq n_{opt}(\delta)$ iga $\delta \geq 0$ korral, kus $n_{opt}(\delta)$ on suurim arvudest $k = 1, 2, \dots$, mille korral kehtib hinnang $\|u_n - u\| \leq \|u_{n-1} - u\|$ ($n = 2, \dots, k$).

4 Numbrilised tulemused

4.1 Näiteülesannete kirjeldus

Käesolevas töös on vaadeldud katkeva tuumaga võrrandeid, kus

$$\mathcal{K}(t, s) = \begin{cases} \mathcal{K}_1(t, s), & \text{kui } s > t \\ \mathcal{K}_2(t, s), & \text{kui } s < t \end{cases}. \text{ Siin } \mathcal{K}_1(t, s) \text{ ja } \mathcal{K}_2(t, s) \text{ on pidevad}$$

reaalväärtustega funktsioonid vastavates piirkondades $0 \leq t < s \leq 1$ ja $0 \leq s < t \leq 1$. Märkime, et eespool toodud algoritmid sobivad ka teiste kvaasitšebõševi tuumadega esimest liiki integraalvõrrandite lahendamiseks.

Näiteülesannetena on vaadeldud diferentseerimisülesannet esimest liiki integraalvõrrandi kujul. Seejuures ülesannete 1–3 lahendiks on $u(t) = f''(t)$, ülesannete 4–5 lahendiks on $u(t) = -f''(t)$ ning ülesannete 6–10 lahendiks on $u(t) = f'(t)$. Näidetes 1–3 ja 6–10 on ülesanne esitatud Volterra integraalvõrrandina ning näidete 4 ja 5 puhul on tegu Fredholmi integraalvõrrandiga.

4.2 Lähteandmete häirimine

Mudelülesannete lahendamisel on ebatäpsete andmete ($f_\delta \neq f$) korral kasutatud kahte tüüpi häiritust. Näidete 4.5.1 kuni 4.5.5 puhul on täpsele paremale poolele f liidetud häiritus $\delta \cdot f_1(t)$, kus $f_1(t) = \sin(Mt)$. Üldjuhul on valitud $M = 10$, kuna vastava konstandi suurte väärtuste, näiteks $M = 100$ korral mängisid numbrilistes tulemustes olulist rolli arvutusvead. Ülesande 4.5.2 korral on lisaks kasutatud väärtust $M = 1$ ning arvutused on läbi tehtud ka juhul, kui täpsele paremale poolele f on liidetud vaid veatase δ . Vastavas ülesandes on kasutatud konstandi M erinevaid väärtusi, kuna $n = 1$ korral etteantud veataseme δ vähenemisel käitusid hálbed kardinaalselt erinevalt. Diskretisatsioonitaseme $n = 1$ korral, kasutades arvutustes konstanti $M = 10$, oli märgata hálvete kasvu veataseme δ kahanemisel, kuid $M = 1$ puhul toimis protsess vastupidiselt. Teiste mudelülesannete korral vastavat tendentsi ei ilmnenu. Teise võimalusena on vaadeldud juhtu, kus täpsele paremale poolele on liidetud häiritus $\delta \cdot f_2(t)$, kus funktsioon $f_2(t) = \frac{\sin(128/3 \cdot \pi t) + \sin(64 \cdot \pi t)}{\sin(1/3 \cdot \pi)}$ on konstrueeritud nii, et tema väärtusteks arvutustes kasutatud kollokatsioonipunktides on $-1, 1, 0, -1, 1, 0, \dots$. Häirituse $\delta \cdot f_2(t)$ korral on numbrilised eksperimendid läbi tehtud kõigi töös esitatud testülesannete korral.

4.3 Numbriliste tulemuste esitamine tabelite ja graafikutena

Ülesannete järel on toodud vigade $\|u_n - u\|$ graafik ning tabelid vigade, peatumisindeksite n_{opt} , n_{ME} , $n_{D,b}$ ($b \in \{1.5; 5\}$) ning hälvete jaoks. Näiteülesannete 1–5 numbrilised tulemused häirituse $\delta \cdot f_1(t)$ jaoks on esitatud punktides 4.5.1–4.5.5 ning häirituse $\delta \cdot f_2(t)$ kasutamisel saadud tulemused kajastuvad käesoleva töö lisas 1. Näiteülesannete 6–10 puhul on arvutused läbi tehtud vaid häirituse $\delta \cdot f_2(t)$ korral ning vastavad tulemused on esitatud magistritöö lisas 1. Esitatud graafikute legendid on ruumi kokkuhoiu mõttes välja toodud vaid esimese ülesande korral, ülejäänud näidetes kasutatakse sama tähistust.

Sõlmpunktide arv $m = m(n)$ on leitud diskretiseerimistaseme $n = 1, \dots, 7$ väärtuste korral seose $m(n) = 2^n - 1$ põhjal, vastavate kollokatsioonisõlmede leidmisel kasutatakse valemit $t_i = i/2^n$, $i = 1, \dots, 2^n$; $n = 1, \dots, 7$. Graafikute horisontaalteljel on toodud sõlmpunktide arv m , kuid järgnevas tabelis on sõlmpunktide arvu m asemel esitatud peatumisindeksiks osutunud diskretiseerimistaseme väärtused.

Veetasemed δ omandavad väärtusi hulgast

$$\{10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}; 10^{-5}; 0\}. \quad (4.1)$$

Vigade tabelites on kasutatud kolme erinevat värvitooni. Seejuures lilla värviga on tähistatud suurusele n_{opt} vastav lähislahendi viga, tumesinise tooniga on märgitud diskretiseerimistasemele n_{ME} vastav lähislahendi viga ning helesinist värvi on kasutatud juhul, kui $n_{opt} = n_{ME}$.

Teine tabel sisaldab erinevate valikureeglite põhjal leitud diskretiseerimistaseme n väärtusi ning suurust b_{opt} . Eelmainitu on leitud kihinumbrile n_{opt} vastava hälbe ja veetaseme δ jagatisena: $b_{opt} = \|Au_{n_{opt}} - f_\delta\| / \delta$. Selline konstant b_{opt} garanteeriks, et diskretiseerimistaseme n valikul hälbeprintsipi alusel oleks viga minimaalne: $\|u_{n_{D,b_{opt}}} - u\| = \|u_{n_{opt}} - u\|$.

Ülesannete lahendamisel on veetasemele δ antud järjest väärtusi ülaltoodud hulgast (4.1) ning ME- reeglis on arvutatud n_{ME} väärtused kahel juhul. Esimesel juhul on leitud n_{ME} kasutades konstantset veataset $\delta_i = \delta$ ($i \in I_n$; $i \in I_{n+1}$), teisel juhul on valitud $n_{ME\delta_i}$ kasutades veetasemete δ_i erinevaid väärtusi: $\delta_i = \delta \cdot |f_1(t_i)|$ ($i = 1, \dots, m$).

4.4 Programmi kirjeldus

Punktis 4.1 esitatud mudelülesannete lahendamiseks on Maple V keskkonnas koostatud viis erinevat protseduuri. Nende abil leitakse vastavalt võrrandisüsteemi (3.18) kordajad c_j ($i = 1, \dots, m$), lähislahendi viga $\|u_n - u\|$, kihinumbri n_{opt} väärtus, n_{ME} ja $n_{ME\delta_i}$ (kontrollides võrratuse (3.25) kehtivust) ning hälbed $\|Au_n - f_\delta\|$ ja nende põhjal $n_{D, 1.5}$ ning $n_{D, 5}$. Järgnevas toome vastavate protseduuride lühikirjelduse.

4.4.1 Protseduur kordaja

Lähislahendi u_n avaldises (3.17) sisalduvate ning seosega (3.18) määratud konstantide c_j ($i = 1, \dots, m$) leidmiseks on koostatud protseduur *kordaja*. Sisendparameetriteks on:

- n - kihinumber (diskretiseerimistase);
- δ - veatase, mis omandab väärtusi hulgast (4.1);
- f_δ - võrrandi (2.20) vabaliige, millele on lisatud häiritus;
- K_1 - võrrandi tuuma $\mathcal{K}(t, s)$ esimene pool (juht $s > t$);
- K_2 - võrrandi tuuma $\mathcal{K}(t, s)$ teine pool (juht $s < t$).

Protseduur tagastab seose (3.18) abil leitud kordajate c_j ($i = 1, \dots, m$) väärtused.

4.4.2 Protseduur viga

Lähislahendi u_n viga $\|u_n - u\|$ leidmiseks on koostatud protseduur nimega *viga*. Protseduur kasutab sisendandmetena suurusi:

- δ - veatase, mis omandab väärtusi hulgast (4.1);
- f - võrrandi (2.20) vabaliige;
- f_δ - võrrandi (2.20) vabaliige, millele on lisatud häiritus;
- u - täpne lahend;
- K_1 - võrrandi tuuma $\mathcal{K}(t, s)$ esimene pool (juht $s > t$);
- K_2 - võrrandi tuuma $\mathcal{K}(t, s)$ teine pool (juht $s < t$).

Protseduur väljastab kihinumbri n järjestikuste väärtuste $n = 1, \dots, 7$ korral vead $\|u_n - u\|$, kasutatud sõlmpunktide arvu ning lõpptulemusena kihinumbri n_{opt} . Soovi korral saab väljastada ka leitud vigade graafiku.

4.4.3 Protseduurid n_{ME} ja $n_{ME-\delta-i}$

Parameetri n valik monotoonse viga reegli põhjal toimub protseduurides n_{ME} ja $n_{ME-\delta-i}$. Neist esimeses protseduuris kasutame ME- reeglis võrratuse (3.25)

paremas pooles väärtusi $\delta_i = \delta$ ($i = 1, \dots, m$) ning teises kasutame väärtusi $\delta_i = \delta |\sin(M t_i)|$. Siin $\{t_i\}_{i=1}^m$ on kollokatsioonipunktid, mis arvutatakse seose $t_i = i/2^n$, $i = 1, \dots, m = 2^n - 1$ ($n = 1, \dots, 7$) põhjal ja $M \in \{1; 10\}$. Sisendparameetritena kasutame

- δ - veatase, mis omandab väärtusi hulgast (4.1);
- f - võrrandi (2.20) vabaliige;
- f_δ - võrrandi (2.20) vabaliige, millele on lisatud häiritus;
- u - täpne lahend;
- K_1 - võrrandi tuuma $\mathcal{K}(t, s)$ esimene pool (juht $s > t$);
- K_2 - võrrandi tuuma $\mathcal{K}(t, s)$ teine pool (juht $s < t$).

Protseduur väljastab jooksvalt võrratuse (3.25) vasaku ja parema poole väärtused ning lõppväljundiks on kihinumbr n_{ME} .

4.4.4 Protseduur hälbeprintsii

Hälbeprintsii põhjal parameetri n valik toimub protseduuris nimega *hälbeprintsii*. Sisendparameetritena kasutatakse:

- δ - veatase, mis omandab väärtusi hulgast (4.1);
- f - võrrandi (2.20) vabaliige;
- f_δ - võrrandi (2.20) vabaliige, millele on lisatud häiritus;
- u - täpne lahend;
- K_1 - võrrandi tuuma $\mathcal{K}(t, s)$ esimene pool (juht $s > t$);
- K_2 - võrrandi tuuma $\mathcal{K}(t, s)$ teine pool (juht $s < t$).

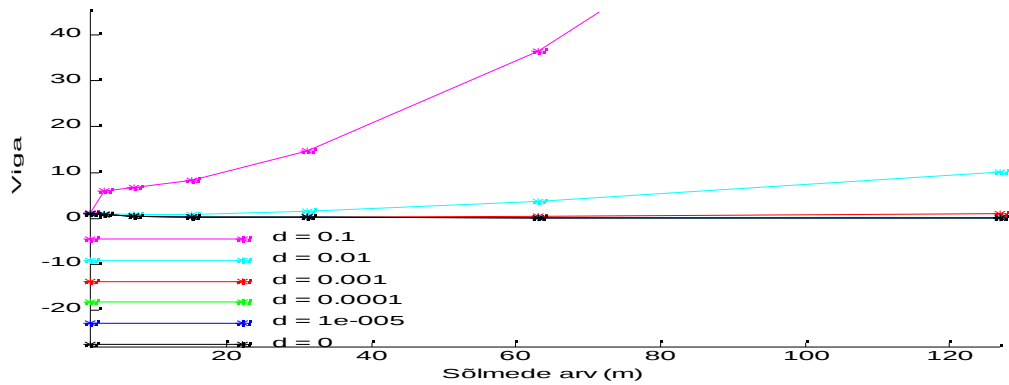
Protseduur väljastab jooksvalt hälbed $\|Au_n - f\|$ ja sõlmpunktide arvu m , lõpptulemuseks on parameetri $n_{D \ 1.5}$ ja $n_{D \ 5}$ väärtus.

Kasutatud protseduuride täielik tekst on toodud lisa 2.

4.5 Arvulised tulemused tabelite ja graafikutena

Ülesanne 1

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{kui } s > t \\ t-s, & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = \frac{t^6}{30} - \frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{6} + \delta \cdot f_1(t); \quad u(t) = t^4 - 2t^3 + t$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	5,1178E-1	5,0164E+0	8,4137E+0	1,0121E+1	1,2568E+1	1,6401E+1	2,2156E+1
1E-02	2,0842E-1	5,1004E-1	8,4206E-1	1,0122E+0	1,2568E+0	1,6401E+0	2,2156E+0
1E-03	2,0311E-1	1,0537E-1	9,0874E-2	1,0195E-1	1,2576E-1	1,6402E-1	2,2156E-1
1E-04	2,0305E-1	9,2805E-2	3,5356E-2	1,5913E-2	1,3301E-2	1,6473E-2	2,2162E-2
1E-05	2,0305E-1	9,2671E-2	3,4351E-2	1,2321E-2	4,5311E-3	2,2499E-3	2,2815E-3
0	2,0305E-1	9,2669E-2	3,4340E-2	1,2279E-2	4,3533E-3	1,5401E-3	5,4460E-4

Peatumisindeksid ja b_opt

d\n	n_opt	n_ME_delta	n_ME_delta_i	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	1	2	1	1,73
1E-02	1	1	1	2	1	3,40
1E-03	3	2	2	2	2	0,13
1E-04	5	3	3	4	3	0,02
1E-05	6	4	5	5	4	0,02

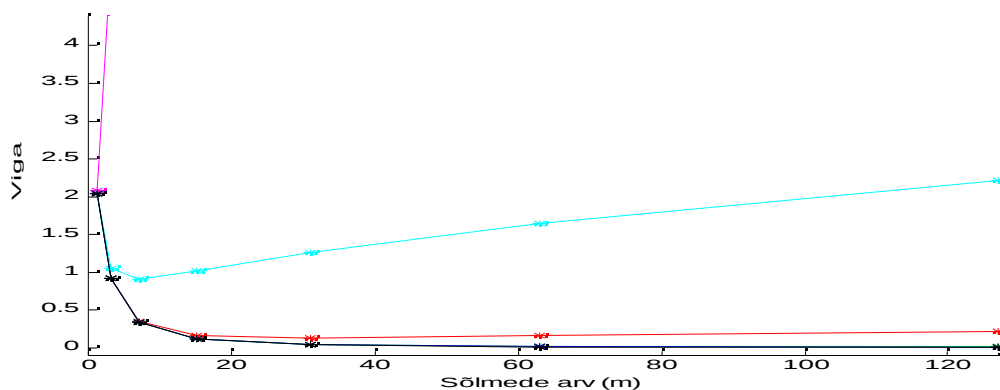
Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,7274E-1	1,2060E-1	1,1970E-2	1,9328E-3	7,1030E-4	2,4554E-4	8,5529E-5
1E-02	3,4050E-2	9,9391E-3	1,0224E-3	1,9578E-4	7,1510E-5	2,4584E-5	8,5544E-6
1E-03	2,1225E-2	1,2176E-3	1,2737E-4	2,8925E-5	7,7963E-6	2,4922E-6	8,5704E-7
1E-04	2,0031E-2	2,2856E-3	2,1272E-4	2,0245E-5	2,0908E-6	3,1746E-7	8,8261E-8
1E-05	1,9913E-2	2,3943E-3	2,2242E-4	2,0010E-5	1,7942E-6	1,6363E-7	1,7133E-8
0	1,9899E-2	2,4064E-3	2,2351E-4	1,9993E-5	1,7724E-6	1,5678E-7	1,3860E-8

Ülesanne 2

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{kui } s > t \\ t-s, & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = \frac{1}{\pi} \sin(t\pi) - t + \delta \cdot f_1(t); \quad u(t) = -\pi \sin(\pi \cdot t)$$

M=10



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	2,0888E+0	5,0998E+0	8,4204E+0	1,0122E+1	1,2568E+1	1,6401E+1	2,2156E+1
1E-02	2,0359E+0	1,0506E+0	9,0739E-1	1,0193E+0	1,2576E+0	1,6402E+0	2,2156E+0
1E-03	2,0353E+0	9,2446E-1	3,5007E-1	1,5796E-1	1,3283E-1	1,6471E-1	2,2162E-1
1E-04	2,0353E+0	9,2312E-1	3,3991E-1	1,2170E-1	4,4774E-2	2,2362E-2	2,2798E-2
1E-05	2,0353E+0	9,2310E-1	3,3981E-1	1,2128E-1	4,2992E-2	1,5289E-2	5,8137E-3
0	2,0353E+0	9,2310E-1	3,3981E-1	1,2127E-1	4,2973E-2	1,5201E-2	5,3750E-3

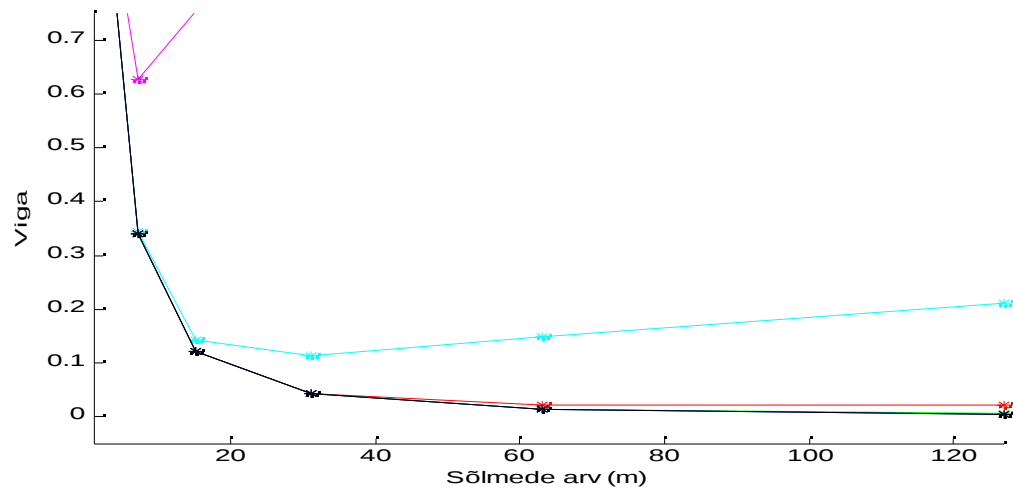
Peatumisindeksid ja b_opt

d\n	n_opt	n ME delta	n ME delta i	n D1.5	n D5	b_opt
1E-01	1	1	1	1	1	1,09
1E-02	3	2	2	3	2	0,33
1E-03	5	3	3	4	3	0,02
1E-04	6	4	5	5	4	0,02
1E-05	>6	5	6	6	5	<0,01

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,0864E-1	1,4661E-1	1,4178E-2	1,9248E-3	7,0494E-4	2,4519E-4	8,5682E-5
1E-02	1,8674E-1	3,6142E-2	3,3431E-3	2,6449E-4	6,8024E-4	2,4278E-5	8,5439E-6
1E-03	1,9834E-1	2,5191E-2	2,3210E-3	1,9680E-4	1,6876E-5	2,6185E-6	8,5357E-7
1E-04	1,9951E-1	2,4101E-2	2,2227E-3	1,9731E-4	1,7304E-5	1,5150E-6	1,5287E-7
1E-05	1,9963E-1	2,3993E-2	2,2129E-3	1,9744E-4	1,7476E-5	1,5468E-6	1,3251E-7
0	1,9964E-1	2,3980E-2	2,2118E-3	1,9746E-4	1,7496E-5	1,5451E-6	1,2873E-7

M=1



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	2,0488E+0	9,9547E-1	6,2793E-1	7,5574E-1	1,0549E+0	1,4899E+0	2,1064E+0
1E-02	2,0355E+0	9,2385E-1	3,4389E-1	1,4238E-1	1,1383E-1	1,4976E-1	2,1070E-1
1E-03	2,0353E+0	9,2311E-1	3,3985E-1	1,2150E-1	4,4247E-2	2,1285E-2	2,1738E-2
1E-04	2,0353E+0	9,2310E-1	3,3981E-1	1,2128E-1	4,2986E-2	1,5274E-2	5,7730E-3
1E-05	2,0353E+0	9,2310E-1	3,3981E-1	1,2127E-1	4,2973E-2	1,5202E-2	5,3791E-3
0	2,0353E+0	9,2310E-1	3,3981E-1	1,2127E-1	4,2973E-2	1,5201E-2	5,3750E-3

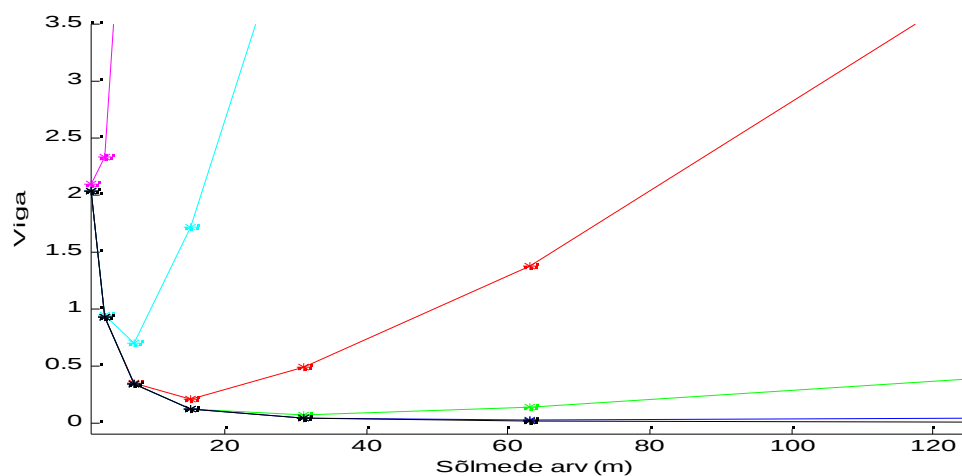
Peatumisindeksid ja b opt

d\n	n opt	n ME delta	n ME delta i	n D1.5	n D5	b opt
1E-01	3	1	1	2	1	0,02
1E-02	5	2	2	3	2	<0,01
1E-03	6	3	3	4	3	<0,01
1E-04	>6	4	4	5	4	<0,01
1E-05	>6	5	6	6	5	<0,01

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	2,1371E-1	2,5192E-2	2,4409E-3	2,9834E-4	7,1731E-5	2,41491E-5	8,5043E-6
1E-02	2,0105E-1	2,4097E-2	2,2292E-3	2,0145E-4	1,9286E-5	2,90974E-6	8,6074E-7
1E-03	1,9978E-1	2,3992E-2	2,2135E-3	1,9777E-4	1,7564E-5	1,57753E-6	1,7015E-7
1E-04	1,9966E-1	2,3982E-2	2,2120E-3	1,9749E-4	1,7501E-5	1,54429E-6	8,9825E-8
1E-05	1,9965E-1	2,3981E-2	2,2118E-3	1,9746E-4	1,7496E-5	1,54667E-6	7,4784E-8
0	1,9964E-1	2,3980E-2	2,2118E-3	1,9746E-4	1,7496E-5	1,54687E-6	1,0834E-7

$$f_{\delta}(t) = \frac{1}{\pi} \sin(t\pi) - t + \delta$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	2,0934E+0	2,3304E+0	6,0713E+0	1,7146E+1	4,8495E+1	1,3716E+2	3,8796E+2
1E-02	2,0359E+0	9,4758E-1	6,9493E-1	1,7188E+0	4,8497E+0	1,3716E+1	3,8796E+1
1E-03	2,0353E+0	9,2335E-1	3,4517E-1	2,1001E-1	4,8685E-1	1,3717E+0	3,8796E+0
1E-04	2,0353E+0	9,2310E-1	3,3986E-1	1,2248E-1	6,4795E-2	1,3800E-1	3,8799E-1
1E-05	2,0353E+0	9,2310E-1	3,3981E-1	1,2129E-1	4,3246E-2	2,0475E-2	3,9166E-2
0	2,0353E+0	9,2310E-1	3,3981E-1	1,2127E-1	4,2973E-2	1,5201E-2	5,3750E-3

Peatumisindeksid ja b_opt

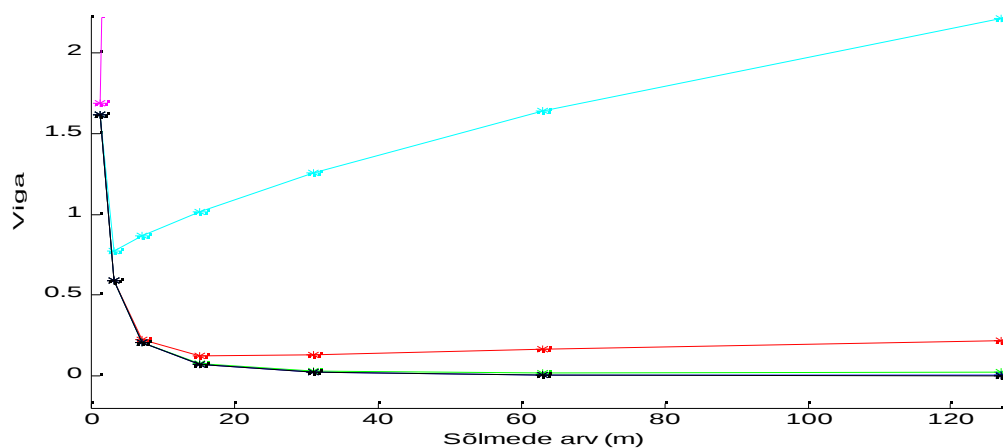
d\n	n_opt	n_ME_delta	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	2	1	2,67
1E-02	3	2	3	2	0,32
1E-03	4	3	4	3	0,26
1E-04	5	4	5	4	0,21
1E-05	>6	5	6	5	<0,06

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	2,6718E-1	4,3104E-2	2,3481E-2	1,6530E-2	1,1688E-2	8,26434E-3	5,8438E-3
1E-02	2,0604E-1	2,4572E-2	3,2191E-3	1,6646E-3	1,1689E-2	8,26435E-4	5,8438E-4
1E-03	2,0028E-1	2,4020E-2	2,2243E-3	2,5750E-4	1,1818E-4	8,26578E-5	5,8438E-5
1E-04	1,9971E-1	2,3984E-2	2,2119E-3	1,9815E-4	2,1041E-5	8,40840E-6	5,8458E-6
1E-05	1,9965E-1	2,3981E-2	2,2118E-3	1,9746E-4	1,7535E-5	1,75612E-6	5,9153E-7
0	1,9964E-1	2,3980E-2	2,2118E-3	1,9746E-4	1,7496E-5	1,54504E-6	1,5139E-7

Ülesanne 3

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{kui } s > t \\ t-s, & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = t^3 - 3t^2 + \delta \cdot f_1(t); \quad u(t) = 6t - 6$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,6869E+0	5,0503E+0	8,4162E+0	1,0121E+1	1,2568E+1	1,6401E+1	2,2156E+1
1E-02	1,6209E+0	7,7545E-1	8,6696E-1	1,0148E+0	1,2571E+0	1,6401E+0	2,2156E+0
1E-03	1,6202E+0	5,9353E-1	2,2542E-1	1,2534E-1	1,2837E-1	1,6427E-1	2,2158E-1
1E-04	1,6202E+0	5,9143E-1	2,0930E-1	7,4628E-2	2,9006E-2	1,8826E-2	2,2395E-2
1E-05	1,6202E+0	5,9140E-1	2,0913E-1	7,3945E-2	2,6171E-2	9,3867E-3	3,9479E-3
0	1,6202E+0	5,9140E-1	2,0913E-1	7,3938E-2	2,6141E-2	9,2423E-3	3,2676E-3

Peatumisindeksid ja b_opt

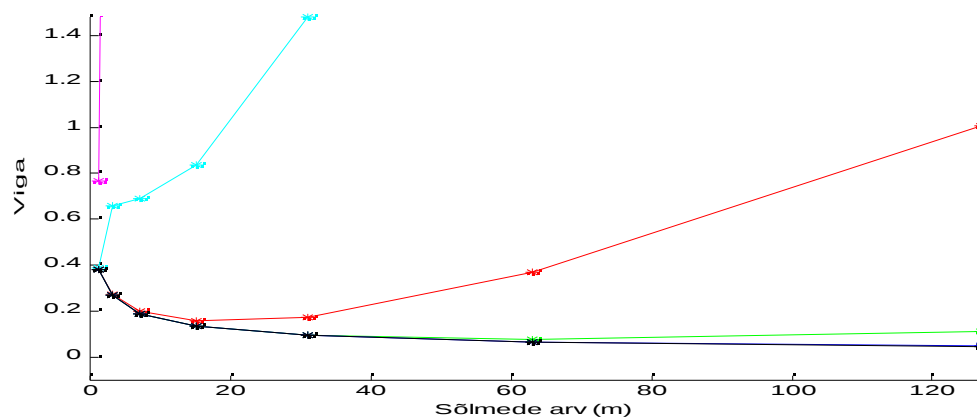
d\n	n_opt	n_ME_delta	n_ME_delta_i	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	1	1	1	0,88
1E-02	2	2	2	3	2	2,76
1E-03	4	3	3	3	3	0,12
1E-04	6	4	5	4	4	0,01
1E-05	>6	5	6	5	5	<0,01

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	8,7768E-2	1,3815E-1	1,3399E-2	1,9248E-3	7,0679E-4	2,4532E-4	8,5517E-5
1E-02	1,4915E-1	2,7593E-2	2,5093E-3	2,1895E-4	6,8667E-5	2,4376E-5	8,5432E-6
1E-03	1,6080E-1	1,6620E-2	1,4722E-3	1,2038E-4	1,0958E-5	2,4407E-6	8,4937E-7
1E-04	1,6199E-1	1,5530E-2	1,3734E-3	1,2029E-4	1,0462E-5	9,2193E-7	1,1195E-7
1E-05	1,6211E-1	1,5421E-2	1,3636E-3	1,2042E-4	1,0625E-5	9,3612E-7	8,2580E-8
0	1,6212E-1	1,5409E-2	1,3626E-3	1,2043E-4	1,0645E-5	9,4089E-7	8,3164E-8

Ülesanne 4

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & \text{kui } s > t \\ s(1-t), & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = \frac{t-t^3}{6} + \delta \cdot f_1(t); \quad u(t) = t$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	7,6630E-1	6,0420E+0	6,6342E+0	8,2692E+0	1,4751E+1	3,6517E+1	1,0056E+2
1E-02	3,8762E-1	6,6069E-1	6,8982E-1	8,3765E-1	1,4782E+0	3,6523E+0	1,0056E+1
1E-03	3,8194E-1	2,7535E-1	2,0120E-1	1,5773E-1	1,7544E-1	3,7129E-1	1,0068E+0
1E-04	3,8188E-1	2,6872E-1	1,9007E-1	1,3458E-1	9,6118E-2	7,6446E-2	1,1121E-1
1E-05	3,8188E-1	2,6865E-1	1,8996E-1	1,3432E-1	9,4991E-2	6,7260E-2	4,8543E-2
0	3,8188E-1	2,6865E-1	1,8996E-1	1,3432E-1	9,4979E-2	6,7161E-2	4,7490E-2

Peatumisindeksid ja b_opt

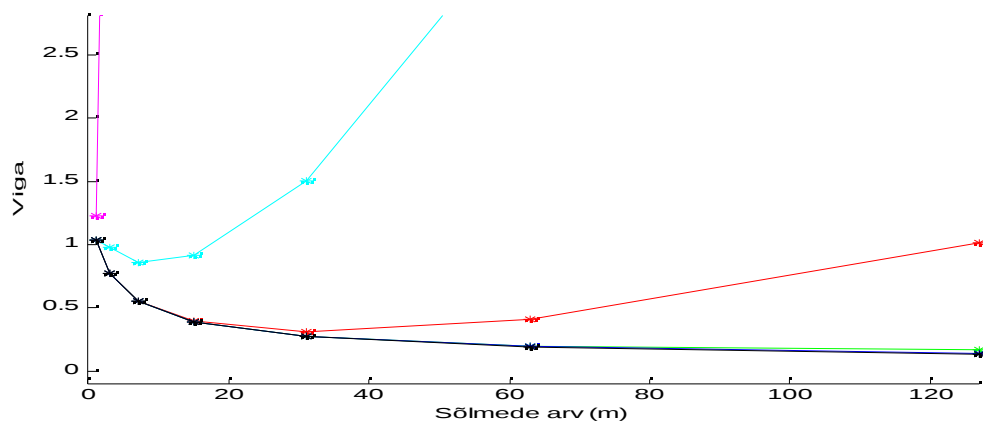
d\n	n_opt	n_ME_delta	n_ME_delta_i	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	1	1	1	1,01
1E-02	1	1	1	1	1	1,41
1E-03	4	2	2	2	2	0,05
1E-04	6	4	5	4	3	0,03
1E-05	>6	6	6	5	4	<0,02

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,0079E-1	2,0289E-2	1,1010E-2	7,3219E-3	5,1070E-3	3,5993E-3	2,5430E-3
1E-02	1,4144E-2	1,5958E-3	9,5736E-4	7,0696E-4	5,0624E-4	3,5914E-4	2,5416E-4
1E-03	7,0426E-3	9,8271E-4	1,1760E-4	4,9377E-5	4,6291E-5	3,5131E-5	2,5277E-5
1E-04	6,5580E-3	1,0959E-3	1,8674E-4	2,8968E-5	3,5916E-6	2,7974E-6	2,3910E-6
1E-05	6,5140E-3	1,1083E-3	1,9515E-4	3,4067E-5	5,7216E-6	8,1989E-7	1,5035E-7
0	6,5092E-3	1,1097E-3	1,9610E-4	3,4666E-5	6,1281E-6	1,0833E-6	1,9150E-7

Ülesanne 5

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & \text{kui } s > t; \\ s(1-t), & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = -e^t + te - t + 1 + \delta \cdot f_1(t); \quad u(t) = e^t$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	7,6630E-1	6,0420E+0	6,6342E+0	8,2692E+0	1,4751E+1	3,6517E+1	1,0056E+2
1E-02	3,8762E-1	6,6069E-1	6,8982E-1	8,3765E-1	1,4782E+0	3,6523E+0	1,0056E+1
1E-03	3,8194E-1	2,7535E-1	2,0120E-1	1,5773E-1	1,7544E-1	3,7129E-1	1,0068E+0
1E-04	3,8188E-1	2,6872E-1	1,9007E-1	1,3458E-1	9,6118E-2	7,6446E-2	1,1121E-1
1E-05	3,8188E-1	2,6865E-1	1,8996E-1	1,3432E-1	9,4991E-2	6,7260E-2	4,8543E-2
0	3,8188E-1	2,6865E-1	1,8996E-1	1,3432E-1	9,4979E-2	6,7161E-2	4,7490E-2

Peatumisindeksid ja b_opt

d\n	n_opt	n_ME_delta	n_ME_delta_i	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	1	1	1	1,09
1E-02	3	1	2	2	1	0,08
1E-03	5	3	3	3	2	0,04
1E-04	>6	4	5	4	4	<0,01
1E-05	>6	6	7	6	5	<0,01

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,0877E-1	1,9906E-2	1,0733E-2	7,2735E-3	5,0984E-3	3,5976E-3	2,5443E-3
1E-02	2,2823E-2	2,9354E-3	7,5295E-4	6,6116E-4	4,9782E-4	3,5773E-4	2,5445E-4
1E-03	1,5337E-2	3,0301E-3	4,8315E-4	6,4458E-5	3,9299E-5	3,3899E-5	2,6136E-5
1E-04	1,4667E-2	3,1034E-3	5,5801E-4	9,4856E-5	1,4235E-5	2,5523E-6	6,7017E-7
1E-05	1,4601E-2	3,1113E-3	5,6593E-4	9,9789E-5	1,7273E-5	5,1564E-6	7,7104E-7
0	1,4594E-2	3,1122E-3	5,6682E-4	1,0035E-4	1,7731E-5	4,2338E-6	3,2531E-6

4.6 Numbriliste tulemuste interpretatsioon

Tabelites toodud numbrilised tulemused kinnitavad, et kõigi veatasemete δ korral annab monotoonse vea reegel sellise indeksi n_{ME} , et $n_{ME} \leq n_{opt}$ ning vead $\|u_n - u\|$ kahanevad monotoonselt, s.t

$$\|u_{n_{ME}} - u\| \leq \|u_{n_{ME}-1} - u\| \leq \dots \leq \|u_1 - u\|.$$

Seejuures n_{ME} ei olnud oluliselt väiksem optimaalsest väärtusest n_{opt} . Kui kasutasime arvutustes esimest tüüpi häiritust, s.t häiritust kujul $\delta \cdot f_1(t)$, siis saime n_{ME} väärtuse, mis erines optimaalsest n väärtusest kuni kolme ühiku võrra. Ent teist tüüpi häirituse, s.t häirituse $\delta \cdot f_2(t)$ kasutamisel saime n_{ME} väärtuse, mis oli lähedasem optimaalsele väärtusele n_{opt} , mõnedes näiteülesannetes isegi võrdus sellega. Ootustekohaselt oli n_{ME} lähedasem väärtusele n_{opt} , kui info lähteandmete vigade kohta oli täielikum: ülesande parema poole häire sõlmedes t_i ($i = 1, \dots, m$) oli täpselt δ või kui eeldasime igas sõlmes t_i konkreetse veataseme $\delta_i = \delta |\sin(M \cdot t)|$ teadmist. Kõigi mudelülesannete puhul kehtis seaduspära $n_{opt} - 3 \leq n_{ME} \leq n_{opt}$.

Numbrilistes eksperimentides rakendasime kõrvuti ME- reegluga hálbeprintsíipi indeksi $n_{D,b}$ leidmiseks. Häirituse $\delta \cdot f_1(t)$ kasutamisel kahanesid hálbed sõlmede arvu suurenemisel oluliselt kiiremini võrreldes häiritusega $\delta \cdot f_2(t)$ ning paljudel juhtudel osutus hálve palju kordi väiksemaks veatasemest δ . Seetõttu on ka vastavalt optimaalsele peatumisindeksile n_{opt} leitud suurused b_{opt} väga väikesed. Häirituse $\delta \cdot f_2(t)$ kasutamisel osutus testülesannetes $0.80 \leq b_{opt} \leq 4.51$, enamikes näiteülesannetes kehtis seaduspära $1.1 \leq b_{opt} \leq 2$.

Peatumisindeksi $n_{D,b}$ väärtuste leidmisel kasutasime konstandi b väärtustena $b = 1.5$, $b = 5$. Ka siin kehtis seaduspära, et häirituse $\delta \cdot f_2(t)$ kasutamisel saime $n_{D,5}$ väärtuse lähedasema n_{opt} väärtusele kui häirituse $\delta \cdot f_1(t)$ korral. Kõigis eksperimentides $n_{opt} - 3 \leq n_{D,5} \leq n_{ME} \leq n_{opt}$. Konstandi $b = 1.5$ korral analoogilist seaduspära leida ei õnnestunud. Mõnede mudelülesannete korral võis täheldada, et $n_{D,1.5}$ väärtus on väga lähedane n_{opt} väärtusele või langes sellega kokku. Teiste näidete korral, olenevalt etteantud veatasemest ja arvutustes kasutatud sõlmpunktide arvust, ilmnes et $n_{D,1.5}$ väärtus võib osutuda ka suuremaks optimaalsest väärtusest n_{opt} .

Kirjandusest (vt.[5, 10]) on teada, et ülesannetele 6–10 vastava integraaloperaatori omaväärtused $\bar{\lambda}_m$ on kujul $\bar{\lambda}_m = \frac{2}{(2m-1)\pi}$, ülesannetele 4, 5 vastava integraaloperaatori omaväärtusteks on $\bar{\lambda}_m = (\pi m)^{-2}$, analoogilise asümptootikaga on ka näidetele 1–3 vastavate integraaloperaatorite omaväärtused. Kuna kujul (2.22)

esituvate elementidega määratud maatriks Q_m vastab operaatori A^*A teatavale diskretiseerimisele, siis protsessis $m \rightarrow \infty$ on Q_m vähima omaväärtuse λ_m asümptootika sama nagu suurusel $\bar{\lambda}_m^2$. Seega protsessis $m \rightarrow \infty$ ülesannetes 6–10 on $\lambda_m^{\frac{1}{2}} \sim m^{-1}$, ülesannetes 1–5 on $\lambda_m^{\frac{1}{2}} \sim m^{-2}$. Vaadeldes numbrilisi tulemusi etteantud veataseme δ suurte väärtuste, näiteks $\delta = 10^{-2}$ korral näeme, et tulemused on kooskõlas veahinnanguga (3.6).

Solution of integral equations of the first kind by collocation method with kernel basis functions

Evelin Avi

Summary

In this work solving of the integral equations $Au = f$ of the first kind by special collocation method is considered. This problem is ill-posed. If ill-posed problem is discretized and solution is approximated using standard basis functions (splines etc) the convergence of approximate solution to exact one is guaranteed only by very restrictive conditions.

We consider integral equations with kernels, where after substituting of the first variable by collocation points these functions of the second variable are linearly independent. The approximate solution is searched in the form of linear combination of these basis functions, coefficients are determined from the collocation conditions. This approximate solution converges to exact one by broad conditions. The problem of optimal allocation of collocation points is considered.

By solving ill-posed problems it is important to investigate the case of approximately given data, where instead of f only f_δ is known with $\|f_\delta - f\| \leq \delta$. A proper approximation method must guarantee the convergence of approximate solution to exact solution by exact data and also by noisy data, if noise level goes to zero. In such regularization algorithm a regularization parameter occurs. The proper choice of this parameter according to the noise level guarantees convergence of approximate solution.

In this special collocation method the regularization parameter is discretization level n . It is assumed, that for every natural number n a set of collocation points is assigned with property that for increasing n every successive set contains the previous set. It is shown, that the errors of the approximate solutions decrease monotonically for increasing n , if exact right hand side of the equation is known. For the case of noisy data the condition is proposed, under which the decrease of error of approximate solution by transition from index n to index $n + 1$ is guaranteed. On the base of this condition a monotone error rule (ME- rule) for choice of index n as the regularization parameter is formulated: choose $n_{ME} = n_* + 1$, where n_* is the last n for which the mentioned condition is fulfilled. The main result of this work is Theorem 3.4, which shows that the ME- rule for choice of

the discretization level turns considered collocation method to the regularization method. The last section of the work and appendix contain numerical results by solving two Fredholm integral equations of the first kind and eight problems of numerical differentiation as the Volterra integral equation of the first kind. The exact right hand side is pertubated by noise in form $\delta \sin(M t)$ with noise level δ and constant M . Errors and discrepancies of approximate solutions are given in tables for various values of δ and n . The discretization level n is choosed by the ME- rule or by the discrepancy principle: $n_{D, 1.5}$, $n_{D, 5}$ are first n for which $\| Au_n - f_\delta \| \leq b \delta$ holds with $b = 1.5$, $b = 5$ respectively.

The theory predicts the inequality $n_{ME} \leq n_{opt}$, where n_{opt} is n with least error by given δ . In all experiments we had $n_{opt} - 3 \leq n_{ME} \leq n_{opt}$, which shows the quality of the ME- rule.

Viited

- [1] Engl, H. W., *On least- squares collocation for solving linear integral equation of the first kind with noisy right- hand side*. Bolletino di Geodesia e Scienze Affini 41 (1982), 3, pp. 291–313.
- [2] Engl, H. W., *On the convergence of regularization methods for ill- posed linear operator equations*. In: Hämmerlin, G., Hoffmann, K. H. (eds.), *Improperly posed problems and their numerical treatment*. Birkhäuser, Basel, 1983, pp. 81– 95.
- [3] Engl, H. W., *Regularization by least- squares collocation*. In: Deuffhard, P., Hairer, E., (eds.) *Numerical treatment of inverse problems in differential and integral equations*. Birkhäuser, Boston, 1983, pp. 345 – 354.
- [4] Engl, H. W., Hanke, M., Neubauer, A., *Regularization of inverse problems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London, 1996.
- [5] Fenyő, S., Stolle, H. W., *Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen*. II. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1983.
- [6] Groetsch, C. W., *The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind*. Pitman, Boston, 1984.
- [7] Hämarik, U., *Monotonicity of error and choice of the stopping index in iterative regularization methods*. In: *Differential and Integral equations: theory and numerical analysis*. Pedas, A., ed., Estonian Math. Society, Tartu, 1999, pp. 15– 30.
- [8] Hämarik, U., Raus, T., *On the a posteriori parameter choice in regularization methods*. Eesti Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika. Matemaatika, 48 (1999), 2, lk. 133– 145.
- [9] Hämarik, U., Avi, E., Ganina, A., *On the solution of ill- posed problems by projection methods with a posteriori choice of the discretization level*. Mathematical Modelling and Analysis 7 (2002), 2, pp. 241- 252.
- [10] Kirss, A., *Aposteriori valitud parameetrite valikureeglid Tihhonovi meetodis ja nende numbriline võrdlemine*. Bakalaureusetöö, TÜ Matemaatikateaduskond, Tartu, 1999.
- [11] Kress, R., *Linear integral equations*. Springer, Berlin 1989.
- [12] Leiger, T., *Operaatorid Hilberti ruumis*. Tartu Riiklik Ülikool, Tartu, 1982.

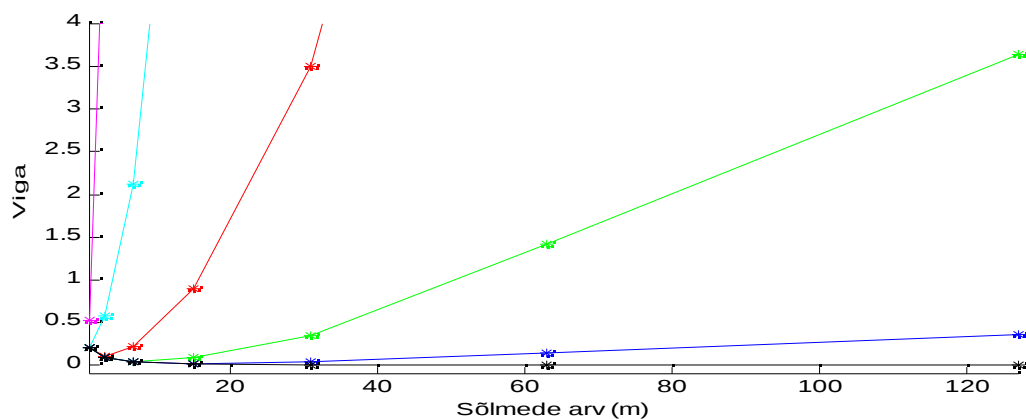
- [13] Luecke, G. R., *Numerical approximation of minimum norm solutions of $Kf = g$ for special K* . Math. Comp. 53 (1989), 188, pp. 563– 569.
- [14] Lukas, M. A., *Convergence rates for moment collocation solutions of linear operator equations*. Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 16 (1995), (5, 6) pp. 743– 750.
- [15] Nashed, M. Z., *On moment discretization and least squares solutions of linear integral equations of the first kind*. J. Math. Anal. Appl. 53 (1976), pp. 359– 366.
- [16] Nashed, M. Z., Wahba, G., *Convergence rates of approximate least squares solutions of linear integral equations of the first kind*. Math. Comp. 28 (1974), 125, pp. 69–80.
- [17] Natterer, F., *Regularisierung schlecht gestellter Probleme durch Projektionsverfahren*. Numerische Mathematik 28 (1977), 329– 341.
- [18] Oja, P., Oja, E., *Funktsionaalanalüüs*. Tartu Ülikool, Tartu, 1991.
- [19] Popa, C., *On numerical solution of first kind Fredholm integral equations*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 45 (2000), 2, pp. 305– 311.
- [20] Tamme, E., *Integraalvõrrandite lahendusmeetodid*. Tartu Riiklik Ülikool, Tartu, 1989.
- [21] Tamme, E., Võhandu, L., Luht, L., *Arvutusmeetodid*. I. Valgus, Tallinn, 1986.
- [22] Wahba, G., *Convergence rates for certain approximate solutions to Fredholm integral equations of the first kind*, J. Approximation Theory 7 (1973), pp. 167– 185.
- [23] Ваарманн, О., *Обобщенные обратные отображения*. Валгус, Таллинн, 1989.
- [24] Вайникко, Г. М., *Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гилбертовых пространствах*. Тартуский Университет, Тарту, 1982.
- [25] Вайникко, Г. М., Веретенников, А. Ю., *Итерационные процедуры в некорректных задачах*. Наука, Москва, 1986.
- [26] Вайникко, Г. М., Хямарик, У. А., *Проекционные методы и саморегуляризация в некорректных задачах*. Изв. вузов. Математика 10 (1985), стр. 3– 17.

- [27] Вайникко, Г. М., Хямарик, У. А., Саморегуляризация при решении некорректных задач проекционными методами. В: Бельтюков, Б. А., Булатов, Б. П., (ред.) Модели и методы исследования операции. Новосибирск, Наука, 1988, стр. 157– 164.
- [28] Горбунов, В. К., Методы редукции неустойчивых вычислительных задач. Илим, Фрунзе, 1984.
- [29] Треногин, Б. А., Функциональный анализ. Наука, Москва, 1980.
- [30] Хорн, Р., Джонсон, У., Матричный анализ. Мир, Москва, 1989.

Lisa 1. Tabelid ja graafikud

Ülesanne 1

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{kui } s > t \\ t-s, & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = \frac{t^6}{30} - \frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{6} + \delta \cdot f_2(t); \quad u(t) = t^4 - 2t^3 + t$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	5,3031E-1	5,6489E+0	2,1161E+1	8,9109E+1	3,5076E+2	1,4206E+3	5,6598E+3
1E-02	2,0888E-1	5,7237E-1	2,1164E+0	8,9109E+0	3,5076E+1	1,4206E+2	5,6598E+2
1E-03	2,0311E-1	1,0853E-1	2,1438E-1	8,9117E-1	3,5076E+0	1,4206E+1	5,6598E+1
1E-04	2,0305E-1	9,2841E-2	4,0337E-2	8,9951E-2	3,5079E-1	1,4206E+0	5,6598E+0
1E-05	2,0305E-1	9,2671E-2	3,4406E-2	1,5172E-2	3,5345E-2	1,4207E-1	5,6598E-1
0	2,0305E-1	9,2669E-2	3,4340E-2	1,2279E-2	4,3533E-3	1,5401E-3	5,4460E-4

Peatumisindeksid ja b_opt

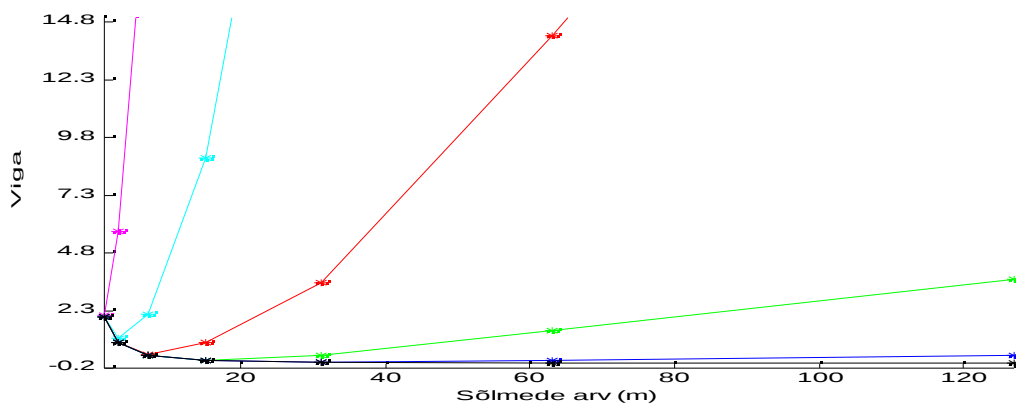
d\n	n_opt	n_ME	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	2	1	1,88
1E-02	1	1	2	1	3,41
1E-03	2	2	3	2	2,41
1E-04	3	3	4	3	2,24
1E-05	4	4	5	4	2,00

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,8840E-1	1,4277E-1	1,4168E-1	1,3906E-1	1,3567E-1	8,2795E-2	5,5773E-3
1E-02	3,4062E-2	1,3499E-2	1,4227E-2	1,3903E-2	1,3567E-2	8,2790E-3	3,6924E-4
1E-03	2,1094E-2	2,1958E-3	1,4958E-3	1,3865E-3	1,3570E-3	8,2782E-4	9,3917E-5
1E-04	2,0015E-2	2,3468E-3	2,9700E-4	1,3612E-4	1,3597E-4	8,2751E-5	3,3574E-6
1E-05	1,9911E-2	2,4001E-3	2,2798E-4	2,1728E-5	1,3963E-5	8,2575E-6	8,6225E-7
0	1,9899E-2	2,4064E-3	2,2351E-4	1,9993E-5	1,7724E-6	1,5678E-7	1,3860E-8

Ülesanne 2

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{kui } s > t \\ t-s, & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi t) - t + \delta \cdot f_2(t); \quad u(t) = -\pi \sin(\pi \cdot t)$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	2,0934E+0	5,7231E+0	2,1164E+1	8,9109E+1	3,5076E+2	1,4206E+3	5,6598E+3
1E-02	2,0359E+0	1,0822E+0	2,1432E+0	8,9117E+0	3,5076E+1	1,4206E+2	5,6598E+2
1E-03	2,0353E+0	9,2483E-1	4,0031E-1	8,9930E-1	3,5079E+0	1,4206E+1	5,6598E+1
1E-04	2,0353E+0	9,2312E-1	3,4047E-1	1,5049E-1	3,5338E-1	1,4207E+0	5,6598E+0
1E-05	2,0353E+0	9,2310E-1	3,3981E-1	1,2160E-1	5,5471E-2	1,4287E-1	5,6600E-1
0	2,0353E+0	9,2310E-1	3,3981E-1	1,2127E-1	4,2973E-2	1,5201E-2	5,3750E-3

Peatumisindeksid ja b_opt

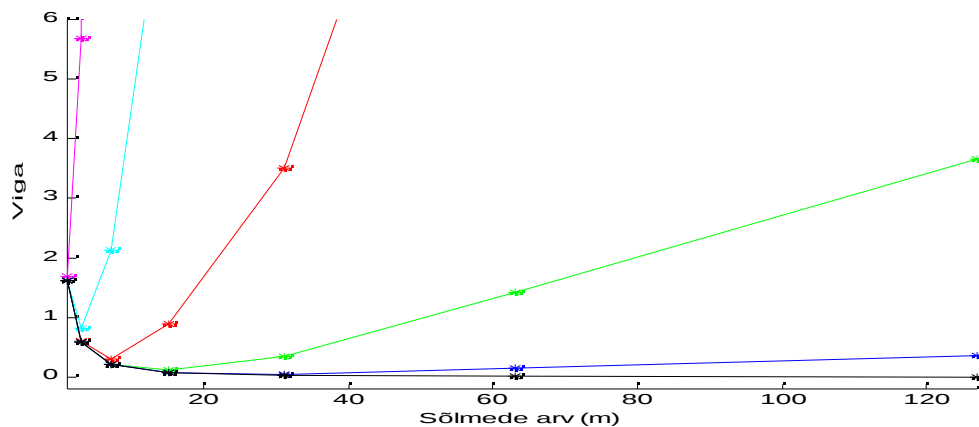
d\n	n_opt	n_ME	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	3	1	1,56
1E-02	2	2	3	2	3,29
1E-03	3	3	4	3	2,26
1E-04	4	4	5	4	2,65
1E-05	5	5	6	5	2,03

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,5587E-1	1,5583E-1	1,4099E-1	1,3911E-1	1,3567E-1	8,2792E-2	4,5259E-3
1E-02	1,8856E-1	3,2933E-2	1,3690E-2	1,3951E-2	1,3564E-2	8,2809E-3	6,5225E-4
1E-03	1,9849E-1	2,4646E-2	2,2575E-3	1,4466E-3	1,3540E-3	8,2772E-4	3,9491E-5
1E-04	1,9953E-1	2,4044E-2	2,1753E-3	2,6511E-4	1,3396E-4	8,3045E-5	3,7292E-6
1E-05	1,9963E-1	2,3987E-2	2,2078E-3	2,0094E-4	2,0332E-5	8,6451E-6	9,8494E-7
0	1,9964E-1	2,3980E-2	2,2118E-3	1,9746E-4	1,7496E-5	1,5471E-6	1,2610E-7

Ülesanne 3

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{kui } s > t \\ t-s, & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = t^3 - 3t^2 + \delta \cdot f_2(t); \quad u(t) = 6t - 6$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,6926E+0	5,6790E+0	2,1162E+1	8,9109E+1	3,5076E+2	1,4206E+3	5,6598E+3
1E-02	1,6209E+0	8,1779E-1	2,1264E+0	8,9112E+0	3,5076E+1	1,4206E+2	5,6598E+2
1E-03	1,6202E+0	5,9410E-1	2,9751E-1	8,9415E-1	3,5077E+0	1,4206E+1	5,6598E+1
1E-04	1,6202E+0	5,9143E-1	2,1020E-1	1,1579E-1	3,5173E-1	1,4206E+0	5,6598E+0
1E-05	1,6202E+0	5,9141E-1	2,0914E-1	7,4473E-2	4,3746E-2	1,4236E-1	5,6599E-1
0	1,6202E+0	5,9140E-1	2,0913E-1	7,3938E-2	2,6141E-2	9,2423E-3	3,2676E-3

Peatumisindeksid ja b_opt

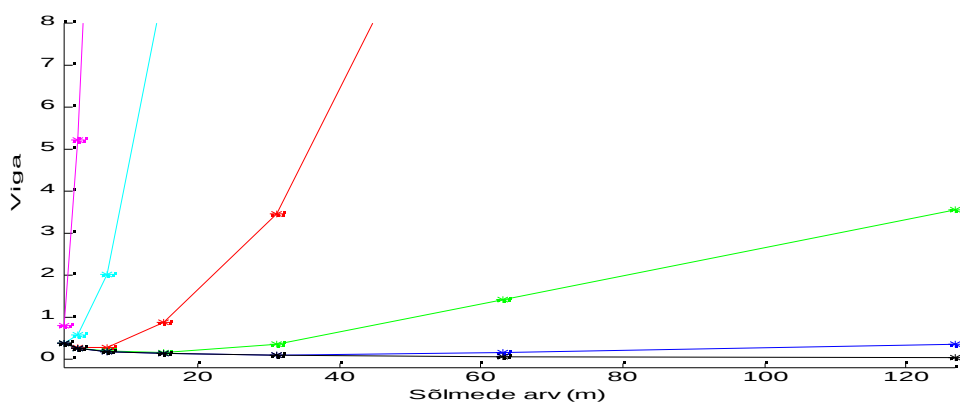
d\n	n_opt	n_ME	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	1	1	1,39
1E-02	2	2	3	2	2,53
1E-03	3	3	4	3	1,66
1E-04	4	4	5	4	2,03
1E-05	5	5	6	5	1,58

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,3850E-1	1,5119E-1	1,4123E-1	1,3909E-1	1,3567E-1	8,2811E-2	9,5115E-3
1E-02	1,5109E-1	2,5268E-2	1,3831E-2	1,3934E-2	1,3565E-2	8,2806E-3	6,0347E-4
1E-03	1,6097E-1	1,6091E-2	1,6590E-3	1,4218E-3	1,3550E-3	8,2829E-4	3,7080E-5
1E-04	1,6201E-1	1,5473E-2	1,3288E-3	2,0281E-4	1,3436E-4	8,2952E-5	4,6640E-6
1E-05	1,6211E-1	1,5415E-2	1,3586E-3	1,2420E-4	1,5832E-5	8,4705E-6	6,2526E-7
0	1,6212E-1	1,5409E-2	1,3626E-3	1,2043E-4	1,0645E-5	9,4089E-7	8,3164E-8

Ülesanne 4

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & \text{kui } s > t \\ s(1-t), & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = \frac{t-t^3}{6} + \delta \cdot f_2(t); \quad u(t) = t$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	7,9110E-1	5,2179E+0	2,0040E+1	8,7385E+1	3,4651E+2	1,4137E+3	5,6430E+3
1E-02	3,8812E-1	5,8627E-1	2,0129E+0	8,7396E+0	3,4652E+1	1,4137E+2	5,6430E+2
1E-03	3,8194E-1	2,7366E-1	2,7612E-1	8,8412E-1	3,4664E+0	1,4138E+1	5,6430E+1
1E-04	3,8188E-1	2,6870E-1	1,9101E-1	1,6024E-1	3,5930E-1	1,4153E+0	5,6432E+0
1E-05	3,8188E-1	2,6865E-1	1,8997E-1	1,3461E-1	1,0110E-1	1,5652E-1	5,6630E-1
0	3,8188E-1	2,6865E-1	1,8996E-1	1,3432E-1	9,4979E-2	6,7161E-2	4,7490E-2

Peatumisindeksid ja b_opt

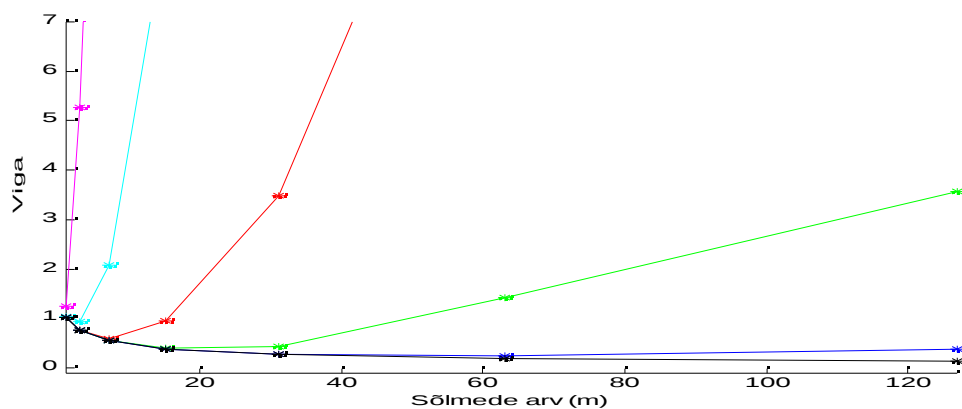
d\n	n_opt	n_ME	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	1	1	1,35
1E-02	1	1	2	1	1,58
1E-03	2	2	3	2	1,64
1E-04	4	4	4	3	1,38
1E-05	5	5	5	4	1,49

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,3537E-1	1,3152E-1	1,3685E-1	1,3619E-1	1,3468E-2	8,1298E-2	4,3695E-3
1E-02	1,5827E-2	1,3102E-2	1,3699E-2	1,3617E-2	1,3468E-2	8,1280E-3	5,7668E-4
1E-03	6,8543E-3	1,6376E-3	1,3955E-3	1,3601E-3	1,3469E-3	8,1290E-4	6,4005E-5
1E-04	6,5321E-3	1,1048E-3	2,4662E-4	1,3837E-4	1,3495E-4	8,1252E-5	8,5747E-6
1E-05	6,5113E-3	1,1085E-3	1,9750E-4	3,6426E-5	1,4917E-5	8,1404E-6	1,1106E-6
0	6,5092E-3	1,1097E-3	1,9610E-4	3,4666E-5	6,1281E-6	1,0833E-6	1,9150E-7

Ülesanne 5

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & \text{kui } s > t \\ s(1-t), & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = -e^t + te - t + 1 + \delta \cdot f_2(t); \quad u(t) = e^t$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,2447E+0	5,2678E+0	2,0047E+1	8,7386E+1	3,4651E+2	1,4137E+3	5,6430E+3
1E-02	1,0364E+0	9,3114E-1	2,0779E+0	8,7472E+0	3,4653E+1	1,4137E+2	5,6430E+2
1E-03	1,0341E+0	7,7343E-1	5,8489E-1	9,5649E-1	3,4760E+0	1,4139E+1	5,6430E+1
1E-04	1,0341E+0	7,7169E-1	5,4985E-1	3,9862E-1	4,4242E-1	1,4271E+0	5,6447E+0
1E-05	1,0341E+0	7,7167E-1	5,4949E-1	3,8902E-1	2,7725E-1	2,4047E-1	5,8082E-1
0	1,0341E+0	7,7167E-1	5,4949E-1	3,8892E-1	2,7507E-1	1,9452E-1	1,3755E-1

Peatumisindeksid ja b_opt

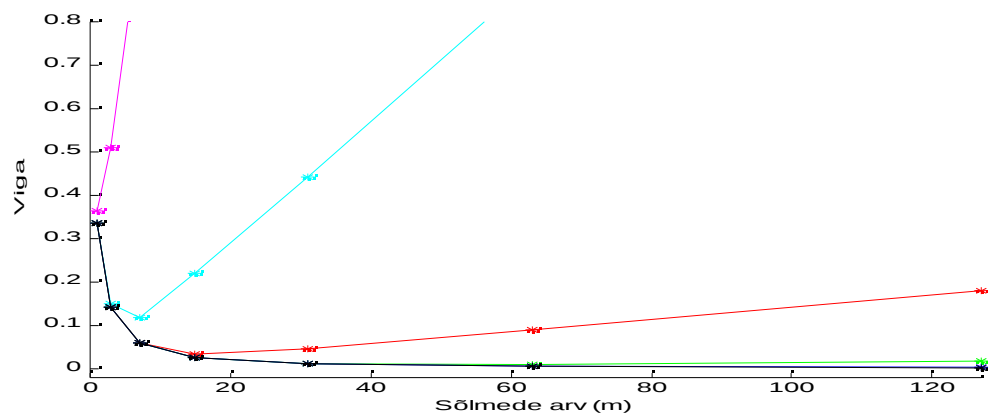
d\n	n_opt	n ME	n D1.5	n D5	b_opt
1E-01	1	1	1	1	1,39
1E-02	2	1	2	1	1,30
1E-03	3	3	4	2	1,54
1E-04	4	4	5	4	1,62
1E-05	6	6	6	5	0,89

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,3864E-1	1,3113E-1	1,3691E-1	1,3618E-1	1,3468E-1	8,1298E-2	6,2539E-3
1E-02	2,2220E-2	1,3003E-2	1,3759E-2	1,3610E-2	1,3469E-2	8,1298E-3	7,8607E-4
1E-03	1,4995E-2	3,1673E-3	1,5388E-3	1,3565E-3	1,3483E-3	8,1327E-4	8,9610E-5
1E-04	1,4629E-2	3,0926E-3	5,9785E-4	1,6172E-4	1,3718E-4	8,1370E-5	8,8882E-6
1E-05	1,4597E-2	3,1100E-3	5,6852E-4	1,0007E-4	2,3070E-5	8,9219E-6	3,1145E-6
0	1,4594E-2	3,1122E-3	5,6682E-4	1,0035E-4	1,7787E-5	4,0207E-6	3,7035E-6

Ülesanne 6

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{kui } s > t \\ 1, & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = t - \frac{t^3}{3} + \delta \cdot f_2(t); \quad u(t) = 1 - t^2$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	3,6496E-1	5,0989E-1	1,0215E+0	2,1910E+0	4,4182E+0	8,9800E+0	1,7996E+1
1E-02	3,3674E-1	1,4962E-1	1,1800E-1	2,2061E-1	4,4197E-1	8,9801E-1	1,7996E+0
1E-03	3,3645E-1	1,4146E-1	6,0237E-2	3,3879E-2	4,5721E-2	8,9972E-2	1,7998E-1
1E-04	3,3644E-1	1,4138E-1	5,9376E-2	2,5934E-2	1,2565E-2	1,0561E-2	1,8196E-2
1E-05	3,3644E-1	1,4138E-1	5,9367E-2	2,5842E-2	1,1771E-2	5,6309E-3	3,2395E-3
0	3,3644E-1	1,4138E-1	5,9367E-2	2,5841E-2	1,1763E-2	5,5588E-3	2,6937E-3

Peatumisindeksid ja b_opt

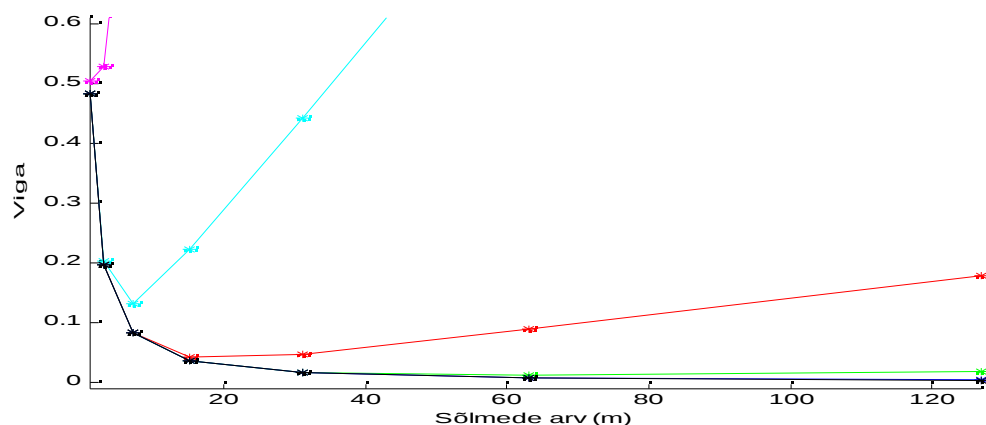
d\n	n_opt	n_ME	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	2	1	2,12
1E-02	3	2	3	2	1,46
1E-03	4	4	4	3	1,49
1E-04	6	5	6	5	0,93
1E-05	>6	7	7	6	0,80

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	2,1224E-1	1,2722E-1	1,3208E-1	1,2546E-1	1,2039E-1	8,6331E-2	1,9834E-2
1E-02	1,1321E-1	2,4815E-2	1,4631E-2	1,2578E-2	1,2057E-2	8,6338E-3	1,9844E-3
1E-03	1,0657E-1	2,1232E-2	4,5744E-3	1,4894E-3	1,2335E-3	8,6469E-4	1,9952E-4
1E-04	1,0596E-1	2,1709E-2	4,1121E-3	8,0182E-4	2,1073E-4	9,3285E-5	2,2152E-5
1E-05	1,0590E-1	2,1168E-2	4,0818E-3	7,9096E-4	1,6058E-4	3,4784E-5	7,9966E-6
0	1,0590E-1	2,1168E-2	4,0786E-3	7,9074E-4	1,5864E-4	3,3507E-5	7,4741E-6

Ülesanne 7

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{kui } s > t \\ 1, & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = \sin\left(\frac{t\pi}{2}\right) + \delta \cdot f_2(t); \quad u(t) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{t\pi}{2}\right)$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	5,0369E-1	5,2816E-1	1,0232E+0	2,1912E+0	4,4182E+0	8,9800E+0	1,7996E+1
1E-02	4,8363E-1	2,0335E-1	1,3158E-1	2,2217E-1	4,4215E-1	8,9804E-1	1,7996E+0
1E-03	4,8343E-1	1,9742E-1	8,3762E-2	4,2913E-2	4,7393E-2	9,0176E-2	1,8000E-1
1E-04	4,8343E-1	1,9736E-1	8,3146E-2	3,6964E-2	1,7710E-2	1,2181E-2	1,8440E-2
1E-05	4,8343E-1	1,9736E-1	8,3139E-2	3,6900E-2	1,7156E-2	8,2790E-3	4,4099E-3
0	4,8343E-1	1,9736E-1	8,3139E-2	3,6899E-2	1,7150E-2	8,2301E-3	4,0260E-3

Peatumisindeksid ja b_opt

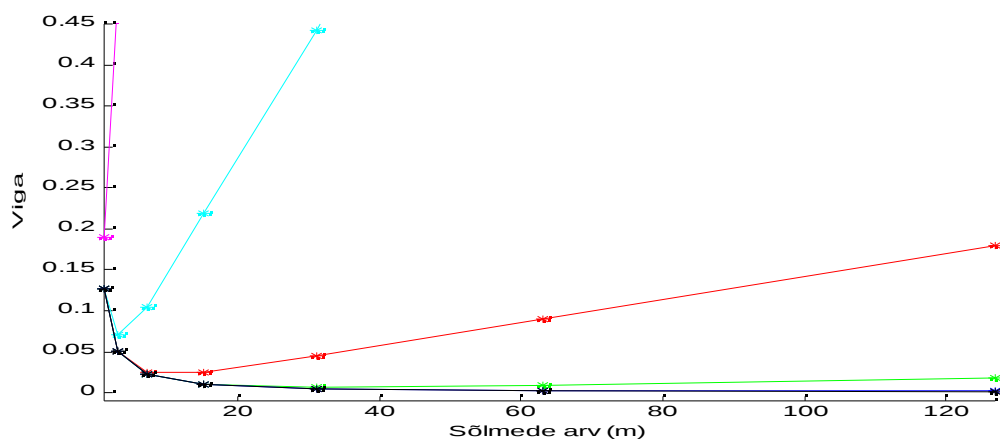
d\n	n_opt	n_ME	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	2	1	2,51
1E-02	3	2	4	2	1,53
1E-03	4	4	5	4	1,65
1E-04	6	5	6	4	0,99
1E-05	>6	7	7	5	1,12

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	2,5066E-1	1,2895E-1	1,3241E-1	1,2547E-1	1,2039E-1	8,6331E-2	1,9835E-2
1E-02	1,5808E-1	3,1552E-2	1,5302E-2	1,2600E-2	1,2063E-2	8,6341E-2	1,9847E-3
1E-03	1,5155E-1	2,8710E-2	5,8550E-3	1,6465E-3	1,2470E-3	8,6550E-4	1,9992E-4
1E-04	1,5094E-1	2,8654E-2	5,4399E-3	1,0629E-3	2,5938E-4	9,9149E-5	2,3694E-5
1E-05	1,5088E-1	2,8651E-2	5,4108E-3	1,0544E-3	2,1817E-4	4,8071E-5	1,1214E-5
0	1,5088E-1	2,8650E-2	5,4077E-3	1,0542E-3	2,1647E-4	4,7123E-5	1,0797E-5

Ülesanne 8

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{kui } s > t; \\ 1, & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_s(t) = \arctan(t) - \frac{t}{2} + \delta \cdot f_2(t); \quad u(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2}$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,8976E-1	4,9253E-1	1,0200E+0	2,1909E+0	4,4181E+0	8,9800E+0	1,7996E+1
1E-02	1,2732E-1	7,0642E-2	1,0438E-1	2,1933E-1	4,4184E-1	8,9800E-1	1,7996E+0
1E-03	1,2654E-1	5,1130E-2	2,4496E-2	2,4226E-2	4,4460E-2	8,9833E-2	1,7996E-1
1E-04	1,2653E-1	5,0897E-2	2,2295E-2	1,0569E-2	6,6503E-3	9,3044E-3	1,8036E-2
1E-05	1,2653E-1	5,0895E-2	2,2272E-2	1,0342E-2	4,9901E-3	2,5956E-3	2,1658E-3
0	1,2653E-1	5,0895E-2	2,2272E-2	1,0340E-2	4,9705E-3	2,4354E-3	1,2052E-3

Peatumisindeksid ja b_opt

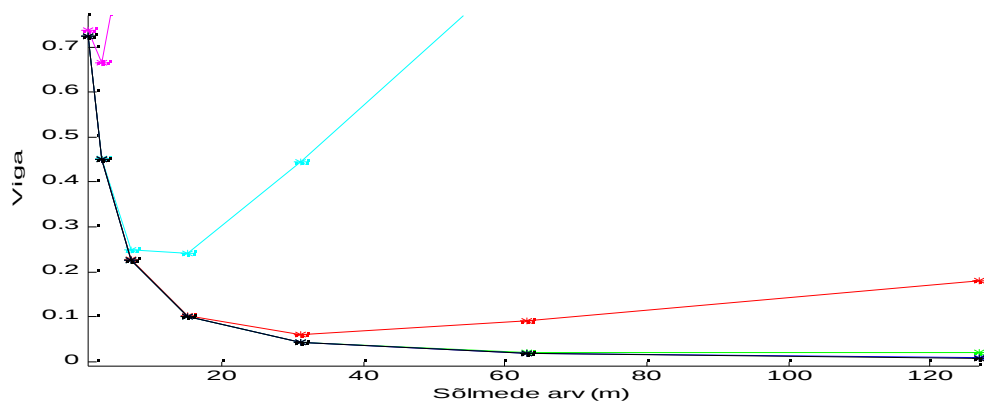
d\n	n_opt	n_ME	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	2	1	1,63
1E-02	2	2	2	1	1,44
1E-03	4	3	4	3	2,01
1E-04	5	4	5	4	1,37
1E-05	>6	6	7	6	1,57

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,6286E-1	1,2536E-1	1,3131E-1	1,2546E-1	1,2037E-1	8,6331E-2	1,9834E-2
1E-02	4,6641E-2	1,4357E-2	1,3431E-2	1,2550E-2	1,2042E-2	8,6332E-3	1,9836E-3
1E-03	3,8773E-2	6,8641E-3	2,0079E-3	1,2831E-3	1,2100E-3	8,6588E-4	1,9862E-4
1E-04	3,8128E-2	6,7183E-3	1,3021E-3	2,8808E-4	1,3740E-4	8,7483E-5	2,0332E-5
1E-05	3,8066E-2	6,7139E-3	1,2708E-3	2,5865E-4	5,8661E-5	1,5687E-5	3,8176E-6
0	3,8059E-2	6,7135E-3	1,2680E-3	2,5823E-4	5,6343E-5	1,2975E-5	3,0979E-6

Ülesanne 9

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{kui } s > t; \\ 1, & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = \frac{1}{4}(t^5 - t^9) + t + \delta \cdot f_2(t); \quad u(t) = \frac{1}{4}(5t^4 - 9t^8) + 1$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	7,3753E-1	6,6557E-1	1,0447E+0	2,1932E+0	4,4183E+0	8,9800E+0	1,7996E+1
1E-02	7,2399E-1	4,5319E-1	2,4866E-1	2,4091E-1	4,4384E-1	8,9818E-1	1,7996E+0
1E-03	7,2385E-1	4,5057E-1	2,2702E-1	1,0255E-1	6,1183E-2	9,1599E-2	1,8013E-1
1E-04	7,2385E-1	4,5054E-1	2,2679E-1	1,0020E-1	4,2554E-2	2,0173E-2	1,9695E-2
1E-05	7,2385E-1	4,5054E-1	2,2679E-1	1,0018E-1	4,2326E-2	1,8087E-2	8,2034E-3
0	7,2385E-1	4,5054E-1	2,2679E-1	1,0018E-1	4,2324E-2	1,8065E-2	8,0036E-3

Peatumisindeksid ja b_opt

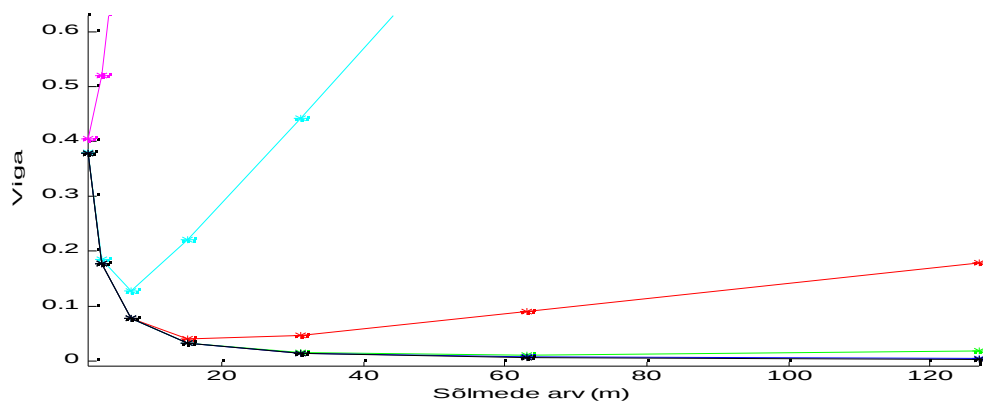
d\n	n_opt	n_ME	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	2	1	2	1	1,43
1E-02	4	3	4	3	1,31
1E-03	5	5	6	4	1,52
1E-04	>6	6	>6	6	1,74
1E-05	>6	>6	>6	>6	1,50

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	3,1090E-1	1,4348E-1	1,3660E-1	1,2553E-1	1,2049E-1	8,6335E-2	1,9840E-2
1E-02	2,2931E-1	7,2339E-2	2,4721E-2	1,3146E-2	1,2178E-2	8,6389E-3	1,9902E-3
1E-03	2,2347E-1	7,1341E-2	1,8335E-2	4,0677E-3	1,5238E-3	8,8055E-4	2,0698E-4
1E-04	2,2296E-1	7,1338E-2	1,8000E-2	3,8654E-3	7,9583E-4	1,7463E-4	3,8954E-5
1E-05	2,2286E-1	7,1338E-2	1,7970E-2	3,7863E-3	7,7044E-4	1,4972E-4	2,9833E-5
0	2,2286E-1	7,1339E-2	1,7967E-2	3,8626E-3	7,6851E-4	1,4920E-4	2,9319E-5

Ülesanne 10

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, & \text{kui } s > t \\ 1, & \text{kui } s < t \end{cases}; \quad f_{\delta}(t) = t \cdot \left(\frac{1}{3}e^{t^2-1} - 1\right) + \delta \cdot f_2(t); \quad u(t) = \frac{1}{3}e^{t^2-1}(2t^2 + 1) - 1$$



Vead

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	4,0490E-1	5,2116E-1	1,0227E+0	2,1911E+0	4,4182E+0	8,9800E+0	1,7996E+1
1E-02	3,7967E-1	1,8441E-1	1,2779E-1	2,2151E-1	4,4204E-1	8,9802E-1	1,7996E+0
1E-03	3,7941E-1	1,7785E-1	7,7684E-2	3,9351E-2	4,6398E-2	9,0027E-2	1,7998E-1
1E-04	3,7940E-1	1,7779E-1	7,7018E-2	3,2761E-2	1,4842E-2	1,1020E-2	1,8243E-2
1E-05	3,7940E-1	1,7778E-1	7,7011E-2	3,2689E-2	1,4176E-2	6,4509E-3	3,4920E-3
0	3,7940E-1	1,7778E-1	7,7011E-2	3,2688E-2	1,4169E-2	6,3881E-3	2,9926E-3

Peatumisindeksid ja b_opt

d\n	n_opt	n_ME	n_D1.5	n_D5	b_opt
1E-01	1	1	1	1	1,37
1E-02	3	3	3	2	1,29
1E-03	4	4	5	4	1,69
1E-04	6	5	6	5	0,96
1E-05	>6	7	>6	6	4,51

Hälbed

d\n	1	2	3	4	5	6	7
1E-01	1,3722E-1	1,2775E-1	1,2972E-1	1,2545E-1	1,2034E-1	8,6329E-2	1,9832E-2
1E-02	1,1437E-1	3,0413E-2	1,2946E-2	1,2588E-2	1,2007E-2	8,6320E-3	1,9816E-3
1E-03	1,1984E-1	2,7882E-2	5,6240E-3	1,6919E-3	1,1926E-3	8,6326E-4	1,9681E-4
1E-04	1,2041E-1	2,7867E-2	5,7734E-3	1,1518E-3	2,3843E-4	9,6094E-5	2,0273E-5
1E-05	1,2046E-1	2,7868E-2	5,8013E-3	1,1460E-3	2,2227E-4	4,5185E-5	9,1313E-6
0	1,2047E-1	2,7868E-2	5,8045E-3	1,1460E-3	2,2366E-4	4,4585E-5	9,2904E-6

Lisa 2

Programmi tekst

Protseduur kordaja

```
> kordaja:=proc(n, delta, f_delta, K1, K2) local A, b, c, i, j, s, t, m, B;
> m:=(2**n)-1;
> b:=array(1..m);
> A:=array(1..m,1..m);
> B:=array(1..m,1..m);
> for i from 1 to m do
>   t[i]:=i/(m+1);
>   b[i]:=evalf(f_delta(t[i],delta));
> od;
> for i from 1 to m do
>   for j from 1 to m do
>     if i=j then
>       A[i,j]:=evalf(int((K2(t[i],s))**2,s=0..t[i])+int((K1(t[i],s))**2,s=t[i]..1));
>     elif i<j then
>       A[i,j]:=evalf(int(K2(t[i],s)*K2(t[j],s),s=0..t[i])+int(K1(t[i],s)*K2(t[j],s),s=t[i]..t[j])+ +int(K1
         (t[i],s)*K1(t[j],s),s=t[j]..1));
>       B[i,j]:=A[i,j];
>     else A[i,j]:=B[j,i];
>   fi;
> od;
> od;
> c:=linsolve(A,b);
> end;
```

Protseduur viga

```
> viga:=proc(delta, f_delta, f, u, K1, K2) local b, viga1, viga2, vead, c, i, t, m, n, n_opt, pilt;
> n:=1;
> viga2:=100000: viga1:=100:
> while viga1 < viga2 do
>   viga2:=viga1;
>   m:=(2**n)-1;
>   c:=kordaja(n,delta,f_delta,K1,K2):
>   for i from 1 to m do
>     t[i]:=i/(m+1):
>     b[i]:=evalf(f_delta(t[i],delta));
>   od;
> viga1:=evalf(sqrt(sum('c[i]*b[i]',i=1..m)-2*sum('c[i]*f(t[i])',i=1..m)+ int((u(s))**2,s=0..1)));
> vead[n]:=viga1;
> print(vead[n],m);
> n:=n+1;
> od;
> n_opt:=n-2;
> print(n_opt);
> pilt:=plot([seq([j,vead[j]],j=1..n)],color=red,style=line,labels=[Osaldõikude_arv,Viga]);
> display(pilt);
> end;
```

Protseduur n_ME_delta_i

```
> n_ME_delta_i:=proc(delta, f_delta, f, u, K1, K2) local a1, a2, b1, b, b2, c1, c2, d1, d2, t1, t2,
  t, n, i, vasak_pool, parem_pool, nME, tME, viga, c, m, m1, m2, j, veatase1, veatase2;
> n:=0:
> vasak_pool:=1000: parem_pool:=1:
> while vasak_pool>=parem_pool do
> n:=n+1:
> c1:=kordaja(n,delta,f_delta,K1,K2);
> c2:=kordaja(n+1,delta,f_delta,K1,K2);
> for i from 1 to (2**n)-1 do
>   t1[i]:=i/(2**n):
>   veatase1[i]:=delta*abs(sin(t1[i]));
> od:
> for i from 1 to (2**(n+1))-1 do
>   t2[i]:=i/(2**(n+1)):
>   veatase2[i]:=delta*abs(sin(t2[i]));
> od:
> a1:=0:
> for i from 1 by 2 to 2**(n+1)-1 do
>   a1:=evalf(a1+abs(c2[i])*veatase2[i]);
> od;
>
> a2:=evalf(sum('abs(c1[i]-c2[2*i])*veatase1[i]',i=1..2**n-1));
> for i from 1 to 2**n-1 do
> d1[i]:=evalf(f_delta(t1[i],delta)):
> od;
> for i from 1 to 2**(n+1)-1 do
> d2[i]:=evalf(f_delta(t2[i],delta)):
> od;
> b1:=evalf(sum('c1[i]*d1[i]',i=1..(2**n)-1));
> b2:=evalf(sum('c2[i]*d2[i]',i=1..(2**(n+1))-1));
>   vasak_pool:=evalf((b2-b1),11);
>   parem_pool:=evalf(2*(a1+a2));
> print(vasak_pool, parem_pool,n);
> nME:=n:
> nME;
> od:
> print(nME);
> end:
```

Protseduur n_ME

```
> n_ME:=proc(delta, f_delta, f, u, K1, K2) local a1, a2, b1, b, b2, c1, c2, d1, d2, t1, t2, t, n, i,
  vasak_pool, parem_pool, nME, tME, viga, c, m, m1, m2, j, veatase1, veatase2;
> n:=0:
> vasak_pool:=1000: parem_pool:=1:
> while vasak_pool>=parem_pool do
> n:=n+1:
> c1:=kordaja(n,delta,f_delta,K1,K2);
> c2:=kordaja(n+1,delta,f_delta,K1,K2);
> for i from 1 to (2**n)-1 do
>   t1[i]:=i/(2**n):
> od:
```

```

> for i from 1 to (2**(n+1))-1 do
>   t2[i]:=i/(2**(n+1)):
> od;
> a1:=0:
> for i from 1 by 2 to 2**(n+1)-1 do
>   a1:=evalf(a1+abs(c2[i])*delta);
> od;
> a2:=evalf(sum('abs(c1[i]-c2[2*i])*delta','i'=1..2**n-1));
> for i from 1 to 2**n-1 do
> d1[i]:=evalf(f_delta(t1[i],delta)):
> od;
> for i from 1 to 2**(n+1)-1 do
> d2[i]:=evalf(f_delta(t2[i],delta)):
> od;
> b1:=evalf(sum('c1[i]*d1[i]','i'=1..(2**n)-1));
> b2:=evalf(sum('c2[i]*d2[i]','i'=1..(2**(n+1))-1));
>   vasak_pool:=evalf((b2-b1),11);
>   parem_pool:=evalf(2*(a1+a2));
> print(vasak_pool, parem_pool,n);
> nME:=n:
> nME;
> od;
> print(nME);
> end:

```

Protseduur h2lbeprintsiiip

```

> h2lbeprintsiiip:=proc(b, delta, f_delta, f, u, K1, K2) local c, h1, h2, h3, h2lve, viga, n, i, t, m,
  h2lbed, nD, viga1, vead;
> n:=1;
> h2lve:=10000:
> while h2lve > b*delta do
>   m:=(2**n)-1;
>   for i from 1 to m do
>     t[i]:=i/(m+1):
>   od;
>   c:=kordaja(n,delta,f_delta,K1,K2);
> h2lve:=sqrt(evalf(int((sum('c[i]*(int(K2(t,s)*K2(t[i],s),s=0..t)+int(K1(t,s)*K2(t[i],s),
  s=t..t[1])+int(K1(t,s)*K2(t[i],s),s=t[1]..t[i])+int(K1(t,s)*K1(t[i],s),s=t[i]..1))','i'=1..m)-f_delta
  (t,delta))**2,t=0..t[1])+sum('int((sum('c[i]*(int(K2(t,s)*K2(t[i],s),s=0..t[i])+
  int(K2(t,s)*K1(t[i],s),s=t[i]..t[1])+int(K2(t,s)*K1(t[i],s),s=t[1]..t)+int(K1(t,s)*K1(t[i],s),
  s=t..t[1+1])+int(K1(t,s)*K1(t[i],s),s=t[1+1]..1))','i'=1..1)+sum('c[i]*(int(K2(t,s)*K2(t[i],s),
  s=0..t[1])+int(K2(t,s)*K2(t[i],s),s=t[1]..t)+int(K1(t,s)*K2(t[i],s),s=t..t[1+1])+int(K1(t,s)*
  K2(t[i],s),s=t[1+1]..t[i])+int(K1(t,s)*K1(t[i],s),s=t[i]..1))','i'=1+1..m)-f_delta(t,delta))**2,
  t=t[1]..t[1+1]'),'i'=1..m1)+int((sum('c[i]*(int(K2(t,s)*K2(t[i],s),s=0..t[i])+int(K2(t,s)*
  K1(t[i],s),s=t[i]..t[m])+
  int(K2(t,s)*K1(t[i],s),s=t[m]..t)+int(K1(t,s)*K1(t[i],s),s=t..1))','i'=1..m)-f_delta(t,delta))**2, t=t
  [m]..1),15));
> h2lbed[n]:=h2lve;
> print(h2lbed[n],m);
> n:=n+1:
> od;
> print(n-1):
> end:

```