Die Feldmeßkunst.

Bearbeitet

von

G. H. Blaese,
Oberlehrer der Mathematik und Naturwissenschaften an den Forstklassen des Mitauschen Gouv. Gymnasiums, Candidat der Philosophie, Mitglied der Kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst.

Zweite Lieferung.

Mitau,
gedruckt bei J. F. Steffenhagen und Sohn.

1850.

Der Druck wird unter der Bedingung gestattet, daß nach Beendigung desselben die gesetzliche Anzahl von Exemplaren hieher eingängig gemacht werde.

Riga, den 6. Juni 1850.

(L. S.) Dr. E. Haffner, Censor.

V.

Das Winkelkreuz oder die Kreuzscheibe und deren Anwendung.

§. 1. Die Einrichtung und Prüfung der Richtigkeit des Winkelkreuzes.

Das Fig. 20 abgebildete Winkelkreuz besteht aus zwei von Messing oder auch wohl von Holz gefertigten, dünnen, jedoch hinreichend starken Linealen, ab und cd, die sich unter einem rechten Winkel kreuzen. Die messingenen Lamellen m, n, m′, n′, welche auf der, durch die in Rede stehenden Lineale bestimmten Ebene senkrecht stehen, werden Diopter genannt. m und m′ nennt man Okulardiopter, weil man durch die auf denselben durch Punkte angedeuteten Löchelchen (welche auch durch einen schmahlen Längsausschnitt ersetzt werden können) hindurchsieht; n und n′ heißen Objektivdiopter, weil man auf einen ausgespannten, in der Figur durch einen Vertikalstrich angedeuteten Faden derselben sieht. m und n, so wie m′ und n′ werden korrespondirende Diopter genannt. Sie vertreten bei einfachern geodätischen Instrumenten die Stelle der Fernröhre. Sowohl die in einer geraden Linie liegenden Löchelchen in den Diopptern m und m′, als auch die, am Besten von Metall gefertigten und in einem Ausschnitt ausgespannten Fäden der Diopter n und n′ stehen auf der durch die Lineale bestimmten Ebene senkrecht. h ist eine auf der Unterseite, in der Mitte des Kreuzes angebrachte Hülse, um ersteres auf einen Stab p schieben zu können. Der Stab ist an seinem Ende zugespitzt und mit einem Metallbeschlage versehen, um ihn leicht in den Erdboden stecken zu können. Die Ebene des Kreuzes steht auf der Axe des Stabes senkrecht. Durch die Schraube s kann die Drehung des Kreuzes um die Axe des Stabes verhindert werden.

Die beiden Lineale werden zweckmäßiger durch eine kreisförmige Scheibe ersetzt, auf welche die korrespondirenden Diopter diametral einander gegenübergestellt werden.

Aus der vorhergehenden Beschreibung ist klar, daß die Visirebene, welche durch die Löchelchen und den ausgespannten Faden der korrespondirenden Diopter bestimmt wird, auf der in Rede stehenden Ebene der Lineale senkrecht steht. Schneiden sich nun die beiden durch die korrespondirenden Diopter bestimmten Visirebenen unter einem rechten Winkel, so kann man mit einem solchen Winkelkreuze, wenn man den Stab p vertikal in den Erdboden steckt, durch Visiren leicht rechtwinklig sich schneidende Vertikalebenen auf dem Felde abstecken.

Die ideelle Linie, in welcher sich die beiden Visirebenen durchschneiden, steht senkrecht auf der Ebene der Lineale und soll die Axe des Winkelkreuzes heißen.

Das Winkelkreuz, wie wir es so eben beschrieben haben, ist eines der einfachsten Art, und eignet sich, namentlich weil Diopter und Lineale leicht verbogen werden können, weniger zum praktischen Gebrauch als das Fig. 21 dargestellte. Hier sind die beiden Lineale durch einen geraden, hohlen, messingenen Cylinder vertreten, in dessen Wänden vier Paar korrespondirende Diopter eingeschnitten sind. Durch diese vier Paar korrespondirenden Diopter werden aber immer nur zwei, und zwar einander rechtwinklig durchschneidende Visirebenen bestimmt, weil die übereinandergelegenen Fäden und Löchelchen in einer und derselben, auf der Grundfläche des Cylinders senkrechtstehenden Linie einander diametral gegenüber liegen.

Wie in Fig. 20 ist auf der äußern Gründfläche des Cylinders eine Hülse h angebracht, um den Cylinder auf einen unten zugespitzten und beschlagenen Stab p aufsetzen zu können, wo dann die Axe des Stabes und die Axe des Cylinders in einer und derselben Linie liegen müssen. Durch die Schraube s wird die Drehung des Cylinders auch hier verhindert.

Warum vier Paar Diopter angebracht sind, entnimmt man leicht aus der weiter unten angegebenen Prüfungsmethode für die Richtigkeit des Winkelkreuzes.

Je größer die Entfernung der korrespondirenden Diopter ist, mit desto größerer Genauigkeit werden dann offenbar auch die rechtwinklig sich schneidenden Vertikalebenen abgesteckt werden können. Daher denn auch das Winkelkreuz, Fig. 20, weil die Lineale ½ bis 1′ lang sind, abgesehen von ihren Mängeln, genauere Resultate liefern dürfte, als das Fig. 21 abgebildete, wo der Durchmesser des Cylinders höchstens 4″ betragen kann, wenn das Instrument nicht unbequem und beschwerlich, was den Transport anlangt, sein soll.

Die Prüfung der Richtigkeit des Winkelkreuzes geschieht auf folgende Weise: man steckt den Stab p des Winkelkreuzes in einem beliebigen Punkte P vertikal in die Erde, dann muß erstlich die Ebene, in welcher die Lineale liegen, oder die Grundfläche des Cylinders, je nach der Beschaffenheit des Instrumentes dessen Richtigkeit man prüfen will, in jeder beliebigen Stellung horizontal sein, was man durch die Libelle erfährt; läßt hierauf in irgend einem, in der Richtung einer jeden der beiden Visirebenen liegenden Punkte einen vollkommen geraden, cylindrischen Stab D und E, möglichst weit vom Standpunkte P, vertikal einstecken, dann muß zweitens jeder der beiden Stäbe durch den entsprechenden Faden der Diopter bisecirt werden; endlich richtet man die Diopter, vermittelst welcher man etwa den Stab E ausstecken ließ, ohne das Instrument von dem Standpunkte P zu rühren, durch eine Viertelumdrehung des Cylinders um seine Axe auf den Stab D; dann muß drittens der Stab E in der Visirebene des andern Diopterpaares liegen, weil nur in diesem Falle, da zwei Nebenwinkel einander gleich sind, die Visirebenen sich unter einem rechten Winkel schneiden würden.

Jedenfalls ist anzurathen, auch noch die Gleichheit zweier andern Nebenwinkel zu prüfen, um von der Richtigkeit des Instrumentes völlig überzeugt zu sein.

§. 2. Ueber das Errichten und Fällen von Senkrechten und Ziehen von Parallellinien auf dem Felde mit Hülfe des Winkelkreuzes.

Mit einem richtigen Winkelkreuze lassen sich nachfolgende Aufgaben mit Leichtigkeit lösen.

Wir bemerken im Voraus, daß im Nachfolgenden der Kürze wegen die durch zwei Punkte, z. B. M und N, oder durch eine Linie, z. B. CD, ihrer Lage nach bestimmte Vertikalebene „Vertikalebene MN oder CD" genannt werden soll.

1. Aufgabe. Man soll in dem Punkte P der Linie AB, Fig. 22, eine Senkrechte auf letztere errichten, oder eigentlich durch den Punkt P eine Vertikalebene so abstecken, daß sie die der Lage nach gegebene Vertikalebene AB rechtwinklig schneide.

Auflösung. Man stellt das Winkelkreuz in dem Punkte P so auf, daß die Ebene der Lineale, oder die Scheibe, oder die Grundfläche des Cylinders, je nach der Beschaffenheit des Instrumentes, horizontal liegt und die Axe des Winkelkreuzes, verlängert gedacht, durch den in Rede stehenden Punkt P geht, richtet die Visirebene ab in die Linie AB, indem man auf einen, etwa in dem Punkte B befindlichen vertikalen Stab visirt, und läßt in der Richtung der andern Visirebene cd zwei Stäbe C und D vertikal einstecken, so geht offenbar die durch letztere beide Stäbe bestimmte Ebene nicht allein durch den Punkt P, sondern schneidet auch, wie verlangt wurde, die Vertikalebene AB unter einen rechten Winkel.

2. Aufgabe. Man soll von dem Punkte P, Fig. 23, eine Senkrechte auf die Linie AB fällen, oder eigentlich eine Vertikalebene so abstecken, daß sie durch den Punkt P geht und auf der der Lage nach gegebenen Vertikalebene AB senkrecht stehe.

Auflösung. Man wählt nach Augenmaaß in der Linie AB einen Punkt Q, stellt in diesem das Winkelkreuz horizontal auf, richtet die Visirebene ab etwa in die Linie AB, wie aus der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe zu entnehmen ist, und sehe zu, ob in dieser Lage des Winkelkreuzes, durch die andere Visirebene cd, der in dem Punkte P vertikal eingesteckte Stab genau bisecirt wird. Ist dieses nicht der Fall, so verändere man die Lage des Punktes Q so lange, bis man endlich einen Punkt Q' ausfindig macht, wo es der Fall ist; dieser und der Punkt P geben dann die Richtung der verlangten Vertikalebene an.

3. Aufgabe. Man soll durch den Punkt P eine Parallele ziehen, oder eigentlich durch den Punkt P eine Vertikalebene so abstecken, daß sie mit der der Lage nach gegebenen Vertikalebene AB parallel sei.

1. Auflösung. Man bestimmt nach Aufg. 2 den Punkt Q, Fig. 24, in welchem die Linie AB von der, durch den Punkt P gelegten und die Vertikalebene AB rechtwinklig schneidenden Vertikalebene geschnitten wird, mißt die horizontale Entfernung der Punkte P und Q, legt durch einen beliebigen, möglichst weit vom Punkte Q entfernten Punkt Q′ der Linie AB eine die Vertikalebene AB senkrecht schneidende Vertikalebene, und trägt in dieser, vom Punkte $Q^{(1)}$ aus, die horizontale Länge P′Q′ = der horizontalen Entfernung der Punkte Q und P ab, so ist die durch die Punkte P und P′ bestimmte Vertikalebene die verlangte.

Aus dieser Auflösung kann man auch die Auflösung für die Aufgabe entnehmen „man soll eine Ebene so abstecken, daß sie der Vertikalebene AB parallel sei und einen gewissen Abstand von ihr habe.

2. Auflösung Man bestimmt zuerst, wie in Auflösung 1, den Punkt Q, Fig. 25, in welchem die Vertikalebene, welche durch den Punkt P geht und auf der Vertikalebene AB senkrecht steht, die Linie AB schneidet; bestimmt hierauf auch nach der Aufgabe 1, die Vertikalebene PP′, welche auf der Vertikalebene PQ senkrecht steht und durch den Punkt P geht, so ist die Vertikalebene PP′ der Vertikalebene AB parallel.

3. Auflösung. Man nimmt in der Linie AB, Fig. 26, einen beliebigen, jedoch so weit als möglich vom Punkte P entfernten Punkt Q′ an, legt durch diesen, nach Aufgabe 1, eine Vertikalebene Q′C, welche die Vertikalebene AB rechtwinklig schneidet, und bestimmt in der Vertikalebene Q′C, nach Aufgabe 2, einen Punkt P′, durch welchen die durch den Punkt P gelegte und die Vertikalebene Q′C rechtwinklig schneidende Vertikalebene geht, so giebt der Punkt P′ in Gemeinschaft mit dem Punkte P, die Lage der Vertikalebene an, welche der Vertikalebene AB parallel ist.

Diese Auflösung würde namentlich dann in Anwendung zu bringen sein, wenn sich der Punkt Q, Fig. 24, in welchem die Linie AB, von der durch den Punkt P gehenden und die Vertikalebene AB rechtwinklig schneidenden Vertikalebene getroffen wird, wegen der Lokalität nicht bestimmen ließe, was z. B. der Fall ist, wenn der zu bestimmende Punkt Q in einen See zu liegen käme, oder zwischen dem Punkte P und dem zu ermittelnden Punkte Q eine Waldung sich befände, oder andere lokale Hindernisse stattfänden.

Auch würde diese dritte Auflösungsmethode in dem Falle zweckmäßig sein, wenn der Punkt P von der Linie AB eine nur geringe Entfernung hätte.

In Ermangelung eines Winkelkreuzes können auch vermittelst Meßkette und Absteckestäbe Senkrechte errichtet und gefällt, und auch Parallellinien gezogen werden.

Was man eigentlich unter „Senkrechte errichten und fällen, und Parallellinien auf dem Felde ziehen" zu verstehen hat, geht aus den vorhergehenden Aufgaben zur Genüge hervor; daher denn im Nachfolgenden, der Kürze wegen, ohne weitere Erläuterung die Ausdrücke „Senkrechte errichten und fällen, und Parallellinien ziehen" gebraucht werden sollen.

Die gebräuchlichste und zugleich einfachste Methode eine Senkrechte in dem Punkte P der Linie AB mit Hülfe der Meßkette und der Absteckestäbe zu errichten, stützt sich auf den pythagoräischen Lehrsatz. Man steckt zwei Stäbe, den einen in dem gegebenen Punkte P, Fig. 27, den andern in der gegebenen Linie AB in dem Punkte P', 3 Faden von dem Punkte P gelegen, in die Erde; zieht einen der beiden Endringe der Meßkette auf einen der beiden Stäbe, etwa auf den in P befindlichen, auf, befestigt das Ende des neunten Fadens der Meßkette in dem Punkte P' und spannt die Kette so auf dem Boden aus, daß sie ein △ PP'Q bildet, dessen eine Seite PQ 4 Faden, dessen andere Seite P'Q 5 Faden beträgt, dann wird offenbar der Winkel bei P ein rechter sein, weil $5^2 = 3^2 + 4^2$, also $(P'Q)^2 = (PP')^2 + (PQ)^2$ ist.

Eine zweite Methode, um in dem Punkte P einer gegebenen Linie AB eine Senkrechte zu errichten, ist die, daß man beiderseits von P aus, Fig. 28, auf der Linie AB die beiden gleichen, höchstens 4 Faden langen Stücke PP′ und PP″ abmißt, hierauf in dem Punkte P′ den einen Endring der Meßkette, in dem Punkte P″ den andern Endring mittelst eines Stabes an den Boden heftet, endlich die Meßkette in der Mitte faßt und auf dem Boden ausspannt; dann wird durch den Halbirungspunkt der Kette auf dem Boden offenbar ein Punkt Q der Art bestimmt, daß die Verbindungslinie PQ senkrecht auf AB ist.

Eine dritte Methode endlich, um in dem Punkte P einer gegebenen Linie AB eine senkrechte zu errichten, beruht auf den Satz „jeder Peripheriewinkel, der auf dem Durchmesser steht, ist ein rechter.“ Man steckt also den einen Endring der Meßkette in dem Punkte P, Fig. 29, mittelst eines Stabes fest, befestigt den andern Endring in dem übrigens beliebig gewählten, jedoch höchstens 6 Faden vom Punkte P entfernten Punkt P′ der Linie AB, faßt jetzt die Meßkette in der Mitte und spannt sie auf dem Boden aus, so bestimmt die Mitte der Meßkette auf dem Boden einen Punkt Q′ in welchem man mittelst eines Stabes die Kette an den Boden heftet. Macht man nun das Ende der Meßkette bei P frei und zieht den freien Theil in der Richtung, welche die Punkte P′ und Q′ angeben, auf dem Boden aus, so gibt das Ende des freien Theiles der Meßkette einen Punkt Q an, der so liegt, daß die Verbindungslinie PQ auf AB senkrecht steht; denn offenbar ist nach dem obigen Verfahren PQ′ = P′Q′ = QQ′, mithin liegen die Punkte P, P′, Q auf der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt Q′, dessen Radius PQ′ und dessen Durchmesser QP′ ist, und folglich ist der Winkel QPP′ ein rechter, also PQ auf AB senkrecht.

Soll von dem Punkte P mit Hülfe der Meßkette und Absteckestäbe eine Senkrechte auf die der Lage nach gegebene Linie AB gefällt werden, so kann solches auf folgende Weise erreicht werden:

a) Der Abstand des Punktes P ist geringer als die Länge der Meßkette. In diesem Falle steckt man den einen Endring der Meßkette in dem Punkte P, Fig. 30, fest und bestimmt ein Mal rechts, das andere Mal links vom Punkte P die beiden Punkte M und N, in welchen der andere Endring der auf dem Erdboden straff ausgezogenen Meßkette in der gegebenen Linie AB zu liegen kommt. Halbirt man jetzt die Länge MN, so ist der Halbirungspunkt Q der Fußpunkt der von dem Punkte P auf die Linie AB zu fällenden Senkrechten.

b) Der Abstand des Punktes P ist größer als die Länge der Meßkette. In diesem Falle errichtet man zuerst in einem beliebigen Punkte Q′ der Linie AB, Fig. 31, eine Senkrechte Q′C, so aber, daß der Abstand des Punktes P von dieser geringer ist, als die Länge der Meßkette, bestimmt jetzt (nach a) den Fußpunkt P′ der von P auf Q′C gefällten Senkrechten, mißt das Stück PP′ und trägt von Q′ auf der Linie AB ein Stück Q′Q = P′P ab, dann ist Q der Fußpunkt der von dem Punkte P auf die Linie AB gefällten Senkrechten.

Um mit der gegebenen Linie AB, vermittelst Meßkette und Absteckestäbe, eine Parallellinie A′B′ zu ziehen, die einen gewissen Abstand von der Linie AB habe, braucht man nur in den beliebig gewählten Punkten P und P′ der Linie AB, Fig. 32, nach einer der angeführten Methoden Senkrechten von der Länge des gegebenen Abstandes zu errichten. Die Endpunkte Q und Q′ der Senkrechten bestimmen die Richtung der zu ziehenden Parallellinie A′B′.

Soll die mit der gegebenen Linie AB parallel zu ziehende Linie A′B′ durch einen gegebenen Punkt P gehen, so verfährt man am Besten auf folgende Weise: man steckt von P aus, Fig. 33, eine beliebig gelegene Linie PQ bis zum Punkte Q, welcher in der gegebenen Linie AB liegt, ab und mißt die Linie PQ. Hierauf mißt man auch von C aus, dem Halbirungspunkte der Linie PQ, bis zu einem beliebigen Punkte Q′ der gegebenen Linie AB die Entfernung des letztern von C, verlängert die Linie CQ′ über C hinaus und macht die

Verlängerung $CP' = CQ'$, dann ist offenbar durch den gegebenen Punkt P und den so eben gefundenen Punkt P' die Richtung der zu ziehenden Parallellinie A'B' gegeben.

Der Punkt C braucht gerade nicht der Halbirungspunkt der Linie PQ zu sein; dann muß aber die Verlängerung $CP' = \frac{CQ'.CP}{CQ}$ gemacht werden, welches aus der nothwendigen Aehnlichkeit der Dreiecke QCQ' und PCP' folgt, denn diese geben die Proportion $CQ : CP = CQ' : CP'$. Die Längen CP, CQ, CQ' werden unmittelbar gemessen.

Es mag als Beschluß dieses § noch die nachfolgende, zu Anfang des Kap. IV, pag. 31, angedeutete Aufgabe hier Platz finden.

4. Aufgabe. Man soll mit Hülfe des Winkelkreuzes eine Waldung in der durch die beiden Punkte P und Q, Fig. 34, bestimmten Richtung, von denen der eine der Punkte auf der einen, der andere auf der andern Seite der Waldung gelegen ist, durchhauen lassen.

Auflösung. Die Aufgabe wird offenbar gelöst sein, wenn man noch einen dritten Punkt P' in der Richtung der Punkte P und Q so bestimmt, daß er entweder von P oder von Q aus gesehen werden kann. Angenommen, man wolle ihn so bestimmen, daß er von P aus zu sehen sei, dann läßt man die Waldung zuerst in einer beliebigen, jedoch ohngefähr auf den Punkt Q hinauslaufenden und durch den Punkt P gehenden Richtung PC aushauen, fällt von Q auf die Linie PC eine Senkrechte QQ' und mißt diese; bestimmt ferner auch die Entfernung der Punkte P und Q', und die Entfernung eines in der Linie PC beliebig gewählten Punktes C' vom Punkte P; errichtet in C′ auf PC eine Senkrechte, und trägt endlich auf dieser eine Länge vom Punkte C′ ab, die $= \frac{QQ' \cdot PC'}{PQ'}$ ist, dann ist der Endpunkt derselben der verlangte Punkt P′. (Der Punkt C′ muß natürlich so gewählt werden, daß P′ von P aus gesehen werden kann, also außerhalb der Waldung; läßt sich zwischen den Punkten P und C kein solcher Punkt finden, wie es z. B. der Fall ist, wenn P zu nahe an der Waldung liegt, so nehme man in der über P hinaus verlängerten Linie PC den Punkt C′ an, trage von diesem aber die in Rede stehende Länge in entgegengesetzter Richtung ab, wie ebenfalls aus Fig. 34 zu ersehen ist, dann ist 2c.) Jetzt ist nur noch die Waldung in der Richtung, den die beiden Punkte P und P′ angeben, auszuhauen.

Der Beweis ist leicht geführt. Angenommen, der Endpunkt der vom Punkte C′ aus abgetragenen Länge liege nicht in der Richtung der gegebenen Punkte P und Q, so mag etwa der Punkt M in der in Rede stehenden Richtung und zugleich in der in C′ errichteten Senkrechten liegen; dann aber ist offenbar $\triangle PQQ' \backsim \triangle PMC'$, es verhält sich also $PQ' : QQ' = PC' : MC'$, woraus folgt, daß $MC' = \frac{QQ' \cdot PC'}{PQ'}$ ist; nun war aber nach unserer Auflösung auch die von C′ aus abgetragene Senkrechte $C'P' = \frac{QQ' \cdot PC'}{PQ'}$, daher ist $MC' = P'C'$, also der Punkt P′ mit dem Punkte M identisch und folglich auch in der Richtung der Punkte P und Q gelegen.

Es sei $QQ' = 30^\circ\, 5'$, $PQ' = 165^\circ\, 3'$ und $PC' = 24^\circ$ ausgemessen worden, so muß in C′ eine Senkrechte errichtet werden, um die Lage des Punktes P′ zu erhalten, welche $= \frac{(30 . 7 + 5) . 24 . 7}{165 . 7 + 3}$ Fuß, d. h. $= 4^\circ\, 3'\, 2''$ ist.

Daß diese Art der Auflösung mit Hülfe des Winkelkreuzes nur im Nothfalle, wenn keine andere, geeignetere Instrumente bei der Hand sind, zu wählen ist, wird aus einem spätern Kapitel hervorgehen, wo ein Verfahren angegeben werden soll, welches eine größere Genauigkeit gewährt, und bei dem die Waldung nicht zwei Mal durchgehauen zu werden braucht. Auch muß bemerkt werden, daß, falls ein Durchhau durch die Waldung schon existirt, dieser sich in den meisten Fällen dazu wird benutzen lassen, um einen durch die beiden Punkte P und Q gehenden Durchhau zu machen, ohne die Waldung noch besonders durchhauen zu müssen. Freilich wird das vorher angegebene Verfahren etwas abgeändert werden müssen; das Wie ist aus Fig. 35 zu beantworten.

§. 3. Ueber das Bestimmen von Winkeln vermittelst des Winkelkreuzes.

Die in diesem § gegebenen Aufgaben sind nur in dem Falle mit Hülfe des Winkelkreuzes zu lösen, wenn ein winkelmessendes Instrument fehlt, denn das Winkelkreuz ist eigentlich kein winkelmessendes Instrument zu nennen.

1. Aufgabe. Es ist ein Winkel ACD auf dem Felde durch zwei sich in C schneidende Linien AB und DE, gegeben; man soll denselben so verzeichnen, daß sein Scheitel C in dem Punkte c der gegebenen Linie ab zu liegen kommt, und sein Schenkel AC mit der Linie ab zusammenfällt. Eigentlich sollte die Aufgabe lauten „es schneiden sich zwei Vertikalebenen AB und DE auf dem Felde; man soll den Neigungswinkel ACD derselben verzeichnen, so daß dessen Scheitel C in den Punkt c der gegebenen Linie ab, und sein Schenkel AC mit der

Linie ab zusammenfällt.“ Aus der letztern Fassung der Aufgabe geht hervor, daß der zu verzeichnende Winkel ACD ein Horizontalwinkel ist; es sind daher alle in der nachfolgenden Auflösung gemessenen Entfernungen von Punkten horizontale Entfernungen.

Auflösung. A. Der Winkel ACD ist spitz. Man nimmt in der Linie DE, Figur 36, einen beliebigen Punkt P an (je weiter von C entfernt desto besser), fällt von diesem, mit Hülfe des Winkelkreuzes, auf AB die Senkrechte PQ und mißt entweder die Entfernungen a) PQ und CQ, oder b) CQ und CP, oder c) CP und PQ.

a) Hat man PQ und CQ gemessen, so trägt man auf ab, Fig. 36, von c aus $cq = \frac{CQ}{n}$ ab (n ist eine Zahl, welche die, übrigens willkührlich gewählte lineäre Verkleinerung, von der in der ersten Lieferung, pag. 11, die Rede ist, angiebt); errichtet in q eine Senkrechte auf ab und trägt auf ersterer von q aus ein Stück $pq = \frac{PQ}{n}$ ab, so bildet die Verbindungslinie der Punkte p und c mit ab einen Winkel pcq, der dem auf dem Felde gegebenen Winkel PCQ oder ACD gleich ist, denn das rechtwinklige Dreieck PCQ auf dem Felde ist dem auf Papier verzeichneten Dreieck pcq ähnlich, weil die den rechten Winkel einschließenden Seiten PQ, QC und pq, qc proportional ($pq : qc = \frac{PQ}{n} : \frac{CQ}{n} = PQ : CQ$), in ähnlichen Dreiecken aber die den proportionalen Seiten gegenüberstehenden Winkel einander gleich sind. Das Abtragen von $cq = \frac{CQ}{n}$ und $pq = \frac{PQ}{n}$ geschieht mittelst des hundertheilingen Maaßstabes. Es seien z. B. die Längen $CQ = 64^{o}\ 5'$ und $PQ = 86^{o}\ 4'$ gemessen worden, und man nehme $n = 16800$ an, d. h. drücke 16800

Faden oder Fuß oder Zoll ꝛc. auf dem Felde resp. durch 1 Faden, 1 Fuß, 1 Zoll ꝛc. in der Zeichnung aus, so ist $cq = \frac{(64.7 + 5)\,12}{16800}$ Zoll $= 0''\ 3{,}2'''$ und $pq = \frac{(86.7 + 4)\,12}{16800}$ Zoll $= 0''\ 4{,}3'''$ im verlangten Sinne abzutragen.

b) Hat man CQ und CP gemessen, so trägt man auf ab, Fig. 37, von c aus $cq = \frac{CQ}{n}\,ab$, errichtet in q eine unbegrenzte Senkrechte, und beschreibt mit einem Radius $= \frac{CP}{n}$ aus c einen Bogen; dieser treffe die Senkrechte in p, so bildet die Verbindungslinie der Punkte p und c mit der Linie ab einen Winkel pcq, der dem auf dem Felde gegebenen Winkel PCQ oder ACD gleich ist. Der Beweis ist leicht geführt: Die Dreiecke pcq, PCQ sind bei q und Q rechtwinklig, die Seiten cq, cp und CQ, CP proportional, man hat also: $cp : cq = CP : CQ$, oder $(cp)^2 : (cq)^2 = (CP)^2 : (CQ)^2$, oder $(cp)^2 - (cq)^2 : (cq)^2 = (CP)^2 - (CQ)^2 : (CQ)^2$, oder $(pq)^2 : (pq)^2 = (PQ)^2 : (CQ)^2$, oder $pq : cq = PQ : CQ$, folglich sind die Dreiecke pcq, PCQ, weil die die rechten Winkel einschließenden Seiten proportional sind, einander ähnlich, folglich die den gleichnamigen Seiten gegenüberliegenden Winkel derselben einander gleich, also $\angle pcq = \angle PCQ$.

c) Hat man CP und PQ gemessen, so errichtet man in c, Fig. 38, auf ab eine Senkrechte $cf = \frac{PQ}{n}$, zieht durch f mit ab eine Parallellinie und beschreibt aus c mit einem Radius $= \frac{CP}{n}$ einen Bogen, so bildet die Verbindungslinie des Punktes c und des Durchschnittspunktes p des beschriebenen Bogens mit der Parallellinie einen Winkel pca mit der Linie ab, der dem Winkel PCQ oder ACD gleich ist. Der Beweis ist leicht nach dem für den Fall b) gegebenen zu führen.

B. Der Winkel ACD ist stumpf. Man bestimmt in diesem Falle entweder den Nebenwinkel BCD des Winkels ACD, Fig. 39, oder den Ueberschuß DCF des Winkels ACD über 90°, Fig. 40, welche beide spitze Winkel sind, und verzeichnet entweder den einen oder den andern im verlangten Sinne, was nach dem Vorhergehenden weiter keine Schwierigkeiten hat.

Wie man sieht, kommt es also bei der Bestimmung der Winkel vermittelst des Winkelkreuzes lediglich auf die Bestimmung eines spitzen Winkels an. Lassen sich die zu seiner Verzeichnung erforderlichen Größen, wegen lokaler Umstände, nicht auf seinen Schenkeln bestimmen, so suche man sie auf indirektem Wege zu ermitteln, indem man sie bei dem zugehörigen Scheitelwinkel oder bei dem Ergänzungswinkel zu 90° erforscht.

In Fig. 41 verhindert z. B. ein Fluß sowohl die direkte Bestimmung der den Winkel ACD bestimmenden Größen, wie etwa PQ und CQ, als auch die indirekte auf den Schenkeln des zugehörigen Scheitelwinkels BCE, daher man denn die fraglichen Größen bei dem Ergänzungswinkel PCQ′ des Winkels ACD zu 90° ermitteln muß. Man errichtet zu dem Zwecke in dem Punkte C eine Senkrechte CF auf der Linie AB, fällt hierauf von einem in der Linie CD beliebig angenommenen Punkte P eine Senkrechte PQ′ auf CF und mißt die beiden Linien CQ′ und PQ′. Die Verzeichnung des Winkels PCQ′, wodurch man zugleich mittelbar den Winkel ACD graphisch erhalten würde, wäre nach dem Vorhergehenden leicht, doch braucht man diese nicht auszuführen, sondern kann die Längen CQ′ und PQ′ dazu benutzen, um, auf kürzerem Wege, unmittelbar den gegebenen Winkel ACD zu verzeichnen. Zu dem Ende trägt man die Länge $\frac{PQ'}{n}$, Fig. 42, von c aus auf der Linie ab, mit welcher der eine Schenkel des zu verzeichnenden Winkels zusammenfallen soll, ab, errichtet in dem Endpunkte q der abgetragenen Länge eine Senkrechte auf ab, und macht sie $= \frac{CQ'}{n}$, verbindet endlich den Endpunkt p der Senkrechten mit dem Punkte c durch eine gerade Linie, so bildet diese mit der Linie ab einen Winkel pcq, welcher dem Winkel ACD auf dem Felde gleich ist und die verlangte Lage hat.

Daß man aus den gemessenen Längen PQ und CQ, oder CQ und CP, oder CP und PQ, Fig. 36, 37, 38 und 40, den Winkel ACD in Graden und Minuten, freilich nicht mit der Genauigkeit, welche ein winkelmessendes Instrument gewährt, durch Rechnung finden kann, geht aus den nachfolgenden Beispielen hervor.

Es seien, Fig. 36, $PQ = 64^\circ\ 4'$, $CQ = 82^\circ\ 5'$ gemessen worden, so ist $\frac{PQ}{CQ} = \frac{64.7+4}{82.7+5} = \frac{452}{579} = \text{tang. ACD}$; der log. $\frac{452}{579}$ ist nach den trigonometrischen Tafeln aber 9,8924598 und gibt in den Tangenten-Tafeln einen Winkel von $37^\circ 58'\ 39''$, welcher der fragliche Winkel ACD ist.

Es seien, Fig. 37, $CQ = 58^\circ\ 2'$, $CP = 112^\circ\ 3'$ gemessen worden, so ist $\frac{CQ}{CP} = \frac{58.7+2}{112.7+3} = \frac{408}{787} = \text{cos. ACD}$; der log. $\frac{408}{787}$ ist nach den trigonometrischen Tafeln aber 9,7146855 und gibt in den Cosinus-Tafeln einen Winkel von $58^\circ\ 46'\ 21''$, welcher der fragliche Winkel ACD ist.

Es seien, Fig. 38, $CP = 98^\circ\ 4'$, $PQ = 42^\circ$ gemessen worden, so ist $\frac{PQ}{CP} = \frac{42.7}{98.7+4} = \frac{294}{690} = \text{sin. ACD}$; der log. $\frac{294}{690}$

ist nach den trigonometrischen Tafeln aber 9,6294982 und gibt in den Sinus-Tafeln einen Winkel von 25° 13′ 10″, welcher der fragliche Winkel ACD ist.

Es sei der Ueberschuß DCF des stumpfen Winkels ACD über 90°, Fig. 40, durch die Linien $P'Q' = 76° 2'$ und $CQ' = 65° 3'$ bestimmt, so hat man $\frac{P'Q'}{CQ'} = \frac{76 . 7 + 2}{65 . 7 + 3} = \frac{534}{458}$ = tang. DCF; der log. $\frac{534}{458}$ ist nach den trigonometrischen Tafeln aber 0,0666758, und gibt in den Tangenten-Tafeln einen Winkel von 49° 22′ 52″, welcher zu 90° addirt den auf dem Felde gegebenen Winkel ACD = 139° 22′ 52″ gibt.

Man kann den auf dem Felde gegebenen Winkel ACD den Graden ꝛc. nach auch bestimmen, wenn man den ihm gleichen verzeichneten Winkel vermittelst des Transporteurs ausmißt (1. Lief. pag. 14).

2. Aufgabe. Es ist ein Winkel gegeben, man soll auf dem Felde eine Linie abstecken, welche mit der der Lage nach gegebenen Linie AB den in Rede stehenden Winkel bildet und durch einen in der Linie AB gegebenen Punkt C geht. Diese Aufgabe sollte eigentlich lauten: es ist ein Winkel gegeben, man soll auf dem Felde eine Vertikalebene bestimmen, welche durch einen Punkt C geht und die durch die Linie AB bestimmte Vertikalebene unter einem Winkel schneidet, welcher dem in Rede stehenden Winkel gleich ist. Wie man sieht, ist diese Aufgabe geradezu die Umkehrung der Aufgabe 1 dieses §.

Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe zerfällt offenbar in zwei Theile, indem der Winkel a) seinen Graden ꝛc. nach, oder b) graphisch gegeben sein kann.

a) Der Winkel ist in Graden gegeben. Der Winkel ist kleiner als 90°. Man denke sich die Aufgabe gelöst, so daß also $\angle$ ACD, Fig. 43, den auf dem Felde abzusteckenden Winkel vorstellt, und in einem beliebigen Punkte Q des Schenkels CA eine Senkrechte PQ auf letztern errichtet; dann hat für eine bestimmte Entfernung des Punktes Q vom gegebenen Punkte C auch PQ einen bestimmten Werth; PQ ist nämlich $= CQ \cdot \text{tang. } ACD$. Gibt man nun CQ einen gewissen Zahlenwerth, berechnet hiernach PQ, mißt auf dem Felde auf der Linie AB, vom Punkte C aus, die beliebig angenommene Länge CQ ab, errichtet im Endpunkte derselben eine Senkrechte, welche man der berechneten Länge PQ gleich macht, so bildet offenbar die durch den Endpunkt P der letztern und den Punkt C bestimmte Vertikalebene mit der durch die Linie AB gelegten Vertikalebene einen Winkel, der dem gegebenen Winkel gleich ist. Es sei z. B. $CQ = 10^o$, der auf dem Felde abzusteckende Winkel ACD betrage $34^o\ 20'$, so ist nach der obigen Formel die senkrecht abzutragende Länge $PQ = 6{,}83^o = 6^o\ 5'\ 9{,}7''$, wie aus der nachfolgenden Rechnung hervorgeht:

$$\begin{array}{ll} \log.\ 10^o = 1. & 0{,}83^o = 0{,}83 \times 7' = 5{,}81' \\ \log.\ \text{tang.}\ 34^o\ 20' = 9.8344249 & \\ \hline & 0{,}81' = 0{,}81 \times 12'' = 9{,}72'' \\ \log.\ PQ = 0.8344249 & \\ PQ = 6{,}83^o = 6^o\ 5'\ 9{,}7''. & \text{also } 0{,}83^o = 5'\ 9{,}7''. \end{array}$$

Wäre das Abtragen der Längen CQ und PQ zwischen den Punkten C und A wegen der Lokalität unmöglich, so müßte man $CQ = CQ' = 10^o$, Fig. 43, auf AB von C nach B hin abtragen, die Senkrechte $PQ = P'Q' = 6^o\ 5',\ 9{,}7''$ aber unterhalb der Linie AB im Punkte Q' errichten; offenbar bildet dann die über C hinaus erweiterte Vertikalebene P'CD mit der Vertikalebene AB einen Winkel ACD, welcher dem gegebenen gleich ist und die verlangte Lage hat, denn der Winkel ACD ist als Scheitelwinkel dem Winkel P′CQ′ gleich, dieser letztere aber dem gegebenen Winkel 34° 20′ gleich gemacht worden.

Ist auch diese Art der Auflösung nicht ausführbar, so würde man zu folgender schreiten müssen: man errichtet in dem gegebenen Punkte C der Linie AB eine Senkrechte CF, Fig. 44, auf dieselbe, mißt von C aus auf CF die Länge CQ″ = PQ = 6° 5′ 9,7″ ab, errichtet in Q″ auf CF eine Senkrechte P″Q″ die man CQ, also 10 Faden, gleich macht, dann bildet die Vertikalebene P″C, wie leicht bewiesen wird, mit der Vertikalebene AB einen Winkel ACP″, welcher dem gegebenen gleich ist, also 34° 20′ beträgt.

Ist der abzusteckende Winkel größer als 90°, so zieht man von demselben 90° ab, der Rest sei = ε; errichtet hierauf in dem auf dem Felde gegebenen Punkte C, Fig. 45, auf AB eine Senkrechte CF, mißt von C aus auf der letztern eine beliebige Länge CQ ab und errichtet auch in Q eine Senkrechte PQ, die man der durch Rechnung gefundenen Länge CQ . tang. ε gleich macht; der Endpunkt P der Senkrechten gibt dann in Gemeinschaft mit dem Punkte C die Richtung der abzusteckenden Vertikalebene an. Der Winkel, den die fragliche Vertikalebene mit der Vertikalebene AB bilden soll, betrage z. B. 138° 20′, dann ist ε = 48° 20′; nimmt man nun CQ 10 Faden an, so ergibt sich PQ = 11,236° = 11° 1′ 7,9″, wie aus dieser Rechnung hervorgeht:

$$
\begin{array}{ll}
\log.\ 10 = 1. & 0{,}2369^\circ = 0{,}2369 \times 7' = 1{,}6583' \\
\log.\ \text{tang.}\ 48^\circ 20' = 10.0506469 & \\
\hline
\log.\ PQ = 1.0506469 & 0{,}6583' = 0{,}6583 \times 12'' = 7{,}8996'' \\
PQ = 11{,}2369^\circ = 11^\circ\ 1'\ 7{,}9'' & 0{,}2369^\circ = 1'\ 7{,}8996''.
\end{array}
$$

Einfacher wird offenbar das Verfahren, wenn man statt des Ueberschußwinkels über 90° den Ergänzungswinkel zu 180°

nimmt. Wie dann zu verfahren ist, wird man leicht angeben können.

Hat man trigonometrische Tafeln nicht bei der Hand, oder will den in Graden ꝛc. gegebenen Winkel, ohne Trigonometrie anzuwenden, auf dem Felde abstecken, so verzeichne man zuerst den gegebenen Winkel mit Hülfe des Transporteurs (s. Lief. 1 pag. 16); nehme auf einem der Schenkel, etwa ac, Fig. 42, des verzeichzeichneten Winkels acd, einen beliebigen Punkt q an, errichte in diesem auf ac eine Senkrechte, welche den andern Schenkel cd, in p etwa, treffen wird, messe sowohl pq als auch cq mittelst des hunderttheiligen Maaßstabes, so geben ihre Zahlenwerthe ein Verhältniß, welches zwischen den analogen Längen PQ und CQ, Fig. 43, auf dem Felde stattfinden muß, wenn der abzusteckende Winkel QCP oder ACD dem in Graden ꝛc. gegebenen Winkel gleich sein soll. Es sei z. B. der auf dem Felde abzusteckende Winkel 33° 45′; man nehme auf dem Schenkel ac des verzeichneten Winkels acd, Fig. 46, $cq = \frac{400'''}{10}$ an, dann findet man $pq = \frac{265'''}{10}$; es müssen demnach die analogen Längen CQ und PQ auf dem Felde, wenn der Winkel QCP, Fig. 47, 33° 45′ betragen soll, sich verhalten wie 400 : 265 oder wie 80 : 53; was der Fall sein wird, wenn man auf dem Felde von C aus auf der Linie AB die Länge CQ = 80 Faden abgemessen, und der in dem Endpunkte Q auf AB Senkrechten PQ die Länge von 53 Faden gegeben hat.

Wie man zu verfahren hat, wenn b) der Winkel von Hause aus graphisch gegeben ist, geht aus dem Vorhergehenden zur Genüge hervor.

Daß sich die in diesem § gegebenen Auflösungen auch mit der Meßkette, freilich aber nicht mit der Leichtigkeit und Präcision, wie mit dem Winkelkreuze, bewerkstelligen lassen, geht aus der Möglichkeit hervor, auch mit der Meßkette Senkrechte zu errichten und zu fällen; jedoch scheint mir die nachfolgende Auflösungsmethode der Aufgabe 1 dieses § für die Meßkette geeigneter zu sein. Man mißt vom Scheitel C des gegebenen Winkels ACD, Fig. 48, aus auf den Schenkeln AC, CD des letztern die beiden beliebigen Längen CR, CS ab, mißt hierauf auch die Entfernung der Punkte R und S und konstruirt mit den verjüngten Längen $\frac{CR}{n}$, $\frac{CS}{n}$, $\frac{RS}{n}$ ein Dreieck rcs, so wird dieses offenbar dem Dreiecke RCS auf dem Felde ähnlich, folglich der Winkel c dem gegebenen Winkel C gleich sein. Man habe z. B. CR $= 25^{\circ}\ 4'$ und CS $= 36^{\circ}\ 3'$ abgemessen und RS $= 40^{\circ}\ 5'$ gefunden; nimmt man nun $n = 840$ an, wo dann in der Zeichnung offenbar $1'' = \frac{840}{84}$ d. h. $= 10^{\circ}$ sein wird (siehe Lief. 1 pag. 12), so sind $\frac{CR}{n}$, $\frac{CS}{n}$, $\frac{RS}{n}$ resp. $\frac{25\frac{4}{7}}{10}$ Zoll, $\frac{36\frac{3}{7}}{10}$ Zoll, $\frac{40\frac{5}{7}}{10}$ Zoll, oder $2''\ 5{,}6'''$, $3''\ 6{,}4'''$ und $4''\ 0{,}7'''$; man trägt nun von c aus, indem man sich dabei des hundertheiligen Maaßstabes bedient, auf ab, Fig. 49, cr $= 2''\ 5{,}6''$ ab, beschreibt aus c als Mittelpunkt einen Bogen mit dem Radius $3''\ 6{,}4'''$ und aus r als Mittelpunkt einen Bogen mit dem Radius $4''\ 9{,}7'''$, so gibt der Durchschnittspunkt s der beiden Bogen in Gemeinschaft mit den Punkten c und r ein Dreieck rcs, dessen Winkel c dem Winkel C auf dem Felde gleich ist. Den verzeichneten Winkel kann man jetzt, wenn es verlangt wird, auch seinen Graden ꝛc. nach mittelst des hunderttheiligen Maaßstabes oder des Transporteurs bestimmen, und auf diese Weise auch die Größe des gegebenen Winkels C erfahren.

Falls lokale Hindernisse stattfinden sollten, welche das Abtragen von CR und CS auf den Schenkeln des gegebenen Winkels ACD, oder das Ausmessen von RS unmöglich machen, so versteht sich von selbst, daß man, wie auch schon im Vorhergehenden geschah, den Scheitel-, oder den Ergänzungswinkel zu 90° bestimmen und verzeichnen muß, um so mittelbar wenigstens den gegebenen Winkel verzeichnet zu erhalten. Ist der gegebene Winkel ACD stumpf, so ist stets sein spitzer Nebenwinkel zu bestimmen und zu verzeichnen.

Wir schließen diesen § mit der Bemerkung, daß Abtragungen und Ausmessungen von Längen und Linien stets, wenn nicht das Gegentheil gesagt ist, im Vorhergehenden sowohl, als auch im Nachfolgenden, in der Horizontalebene geschehen müssen.

§. 4. Von der Bestimmung unzugänglicher Entfernungen mittelst des Winkelkreuzes und mit der Kette.

In Ermangelung eines winkelmessenden Instrumentes, wie z. B. der Boussole, des Astrolabiums, und auch des Meßtisches, von deren Einrichtung und Gebrauch in den nachfolgenden Kapiteln die Rede sein soll, können Entfernungen, die sich nicht unmittelbar mit der Meßkette oder einem andern Längenmaaße messen lassen, auch mit Hülfe des Winkelkreuzes mittelbar bestimmt werden. Es sei also folgende Aufgabe zu lösen:

1. Aufgabe. Es sind auf dem Felde zwei Punkte A und B gegeben; ein Fluß oder ein Sumpf oder andere Umstände

verhindern aber die unmittelbare Messung der Entfernung der in Rede stehenden beiden Punkte; man soll nun die Entfernung mit Hülfe des Winkelkreuzes auf mittelbarem Wege bestimmen.

Auflösung. Die Aufgabe, also auch die Auflösungsmethode, zerfällt offenbar in drei Theile, und zwar je nachdem a) beide Punkte A und B, oder b) nur einer derselben, oder c) keiner von beiden zugänglich ist.

a) Beide Punkte A und B sind zugänglich.

Wenn der Umweg, der gemacht werden muß, um von A nach B zu gelangen, nicht sehr beträchtlich ist, so errichtet man in A eine Senkrechte AF auf AB, Fig. 50, hierauf auch in einem beliebigen Punkte C der Senkrechten AF auf dieselbe eine Senkrechte CG, fällt endlich von B auf CG die Senkrechte BD und mißt die Entfernung der Punkte C und D, welche offenbar auch die fragliche der Punkte A und B sein wird. Mißt man auch die Linien AC und BD und findet AC = BD, so kann man überzeugt sein, daß wirklich die gemessene Entfernung der Punkte C und D die der gegebenen Punkte A und B ist.

Ist der Umweg zu groß, so lassen sich die Auflösungsmethoden für den Fall b) in Anwendung bringen, indem es ja frei steht, nur den einen Punkt zugänglich anzunehmen.

b. Nur einer der Punkte A und B, etwa der Punkt A, ist zugänglich.

1) Man errichtet in dem Punkte A, Fig. 51, eine Senkrechte AF auf der zu messenden Linie AB; nimmt in der Senkrechten AF die beliebigen Punkte C und D an; errichtet hierauf auch in C auf AF eine Senkrechte CG und bestimmt deren Durchschnittspunkt E mit der Linie BD; endlich mißt man die Längen AD, CD und CE mit der Meßkette, oder

einem andern Längenmaaß, und berechnet die Länge der Linie AB durch die Gleichung $AB = \frac{AD \cdot CE}{CD}$, welche aus der Proportion $AB : AD = CE : CD$ sich ergibt. Es sei $AD = 40^0\ 4'$, $CD = 17^0\ 3'$ und $CE = 10^0\ 2'$ gemessen worden, so gibt die obige Gleichung für AB den Zahlenwerth $\frac{284 \cdot 72}{122}$ Fuß, d. i. $23^0\ 6'\ 7''$.

2) Man errichtet im Punkte A der zu messenden Linie AB, Fig. 52, und in dem auf der Verlängerung von AB beliebig gewählten Punkte C auf AB die Senkrechten AF, CG; nimmt auf CG einen Punkt D an, und bestimmt den Durchschnittspunkt E der Senkrechten AF mit der Linie BD, so erhält man aus der Proportion $AB : AE = EH : HD$ oder, was dasselbe ist, $AB : AE = AC : CD - AE$, welche aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BAE und EHD sich ergibt, für AB den Ausdruck $\frac{AE \cdot AC}{CD - AE}$. Es seien $AC = 10^0$, $CD = 15^0$ und $AE = 8^0$ gemessen worden, so ist $AB = \frac{8.10}{15-8} = \frac{80}{7} = 11^0\ 3'$.

3) In dem Punkte A der zu messenden Linie AB, Fig. 53, errichtet man eine Senkrechte AF auf dieselbe; nimmt in der Senkrechten AF die beliebigen Punkte C und E an, errichtet in dem erstern auf dieselbe die Senkrechte CG, bestimmt den Durchschnittspunkt D dieser letztern mit der Linie BE, und mißt mit der Meßkette AE, EC und CD. Die Proportion $AB : AE = CD : CE$ gibt für AB den Ausdruck $\frac{AE \cdot CD}{CE}$. Man habe $AE = 12^0$, $CD = 8^0$ und $CE = 18^0$ gemessen, so ist $\frac{12.8}{18} = 5^0\ 2'\ 4''$. Wird $AE = CE$ angenommen, so ist $CD = AB$.

c. Keiner der beiden Punkte A und B ist zugänglich.

1) Man errichtet in dem in der Verlängerung der zu messenden Linie AB beliebig angenommenen Punkte C, Fig. 54, auf dieselbe eine Senkrechte CF; nimmt in letzterer die beiden

Punkte D und E an; errichtet in D auf CF eine Senkrechte DJ, bestimmt die Durchschnittspunkte G und H derselben mit den Linien EA und EB, so geben die Proportionen BC : CE = DH : DE und AC : CE = DG : DE für BC und AC resp. die Ausdrücke $\frac{CE \cdot DH}{DE}$ und $\frac{CE \cdot DG}{DE}$, so daß $AB = BC - AC = \frac{CE}{DE}(DH - DG) = \frac{CE \cdot GH}{DE}$ ist; man hat also zur Bestimmung von AB nur die Linien CE, GH und DE zu messen. Es seien $CE = 24°$, $GH = 4°$ und $DE = 11°$ gemessen worden, so ist $AB = \frac{24 \cdot 4}{11} = 8° \, 5' \, 1''$. Ist D der Halbirungspunkt der Linie CE, also $CE = 2\,DE$, so ist $2\,GH = AB$.

2) Man steckt eine beliebige Linie A′B′, Fig. 55, ab, ermittelt in dieser die Fußpunkte C und D der von den Punkten A und B gefällten Senkrechten, nimmt rechts von D den Punkt E, links von C den Punkt F, beide in der Linie A′B′ an, und bestimmt hierauf die Durchschnittspunkte G und H der Linien BD, AE und AC, BF; endlich mißt man mit der Meßkette CD, DE, CF, CH, DG. Aus den ähnlichen Dreiecken BDF und HCF hat man die Proportion $BD : CD + CF = CH : CF$, und aus dieser erhält man $BD = \frac{(CD + CF)\,CH}{CF}$; aus den ähnlichen Dreiecken ACE und GDE hat man die Proportion $AC : CD + DE = DG : DE$, aus der sich $AC = \frac{(CD + DE)\,DG}{DE}$ ergibt. Denkt man sich nun AJ senkrecht auf BD gezogen, so ist $AJ = CD$; $BJ = BD - AC = \frac{(CD + CF)\,CH}{CF} - \frac{(CD + DE)\,DG}{DE}$;

$$\text{folglich } AB = \sqrt{(CD)^2 + \left[\frac{(CD + CF)\,CH}{CF} - \frac{(CD + DE)\,DG}{DE}\right]^2}$$

Hat man DE = 7°, CF = 8° angenommen und CD = 22°, CH = 9°, DG = 6° gemessen, so ist AB nach der letzten Formel

$$= \sqrt{(22)^2 + \left[\frac{30 \cdot 9}{8} - \frac{29 \cdot 6}{7}\right]^2} = \sqrt{484 + \frac{1890 - 1392}{56}}$$

$$= \sqrt{492{,}8928} = 22{,}201 \text{ Faden oder } 22^\circ\ 1'\ 4{,}8''.$$

Man kann die drei Fälle der vorhergehenden Aufgabe auch ganz zweckmäßig mit der Meßkette und mit Stäben, wie folgt, auflösen.

Wenn A und B zugänglich sind und der Umweg, um von A nach B zu gelangen, nicht zu groß ist, so wählt man einen Punkt C, Fig. 56, so, daß man die Linien CA und CB mit der Meßkette messen kann, und mißt dieselben; auf CA und CB, oder auf ihren Verlängerungen über C hinaus, trägt man von C aus die Stücke CD = n.CA und CE = n.CB ab, wo n jeden beliebigen Zahlenwerth haben kann, wenn nur die Messung der Linie DE dabei möglich ist, und mißt endlich die Entfernung der Punkte D und E; dann ist $\frac{DE}{n}$ die fragliche Entfernung der Punkte A und B. Es sind nämlich die Dreiecke CAB, CDE einander ähnlich, weil in beiden Dreiecken ein gleicher Winkel von proportionalen Seiten eingeschlossen wird, man hat also die Proportion AB : AC = DE : CD, oder AB : AC = DE : n . AC, woraus folgt AB = $\frac{DE}{n}$. Es sei z. B. CA = 18°, CB = 27° gemessen worden, und man nehme n = $\frac{1}{3}$ an, so ist nach dem Obigen CD = 6°, CE = 9° abzutragen; fände man nun DE = 12°, so muß AB = $\frac{12}{\frac{1}{3}}$ d. h. 36° betragen. Wird n = 1 angenommen, d. h. werden die gemessenen Längen selbst der Linien CA, CB auf den Verlängerungen von

CA und CB abgetragen, so ist die gemessene Linie DE gerade zugleich der fraglichen Entfernung AB.

Ist der Umweg beträchtlich, so würde man die nachfolgende Auflösungsmethode für den Fall, wo nur einer der Punkte A und B zugänglich ist, ähnlich wie beim Winkelkreuz, zur Ermittelung der Entfernung AB mit Vortheil benutzen können.

Wenn nur einer der Punkte A und B, etwa A, zugänglich ist, so nimmt man in der Verlängerung von AB, über A hinaus, Fig. 57, einen Punkt C an, wählt außerhalb AB einen Punkt D von solcher Lage, daß sich ungehindert von D nach A und C hin messen läßt, und mißt die beiden Linien DA und DC. Schneidet man jetzt auf DA und DC resp. die Stücke $DE = n \,.\, DA$ und $DF = n \,.\, DC$ ab, so ist die Linie EF, nach einem bekannten geometrischen Satze der Linie AC, also auch AB parallell, und man hat, wenn G der Durchschnittspunkt der Linie FEH mit DB ist, die Proportion $AB : AD = EG : DE$, oder $AB : AD = EG : n \,.\, DA$, aus welcher $AB = \frac{EG}{n}$ folgt.

Den Punkt C kann man auch, wenn das Terrain es erlaubt, auf AB selbst, wie aus Fig. 58 zu ersehen ist, wählen. Die Stücke DE, DF können auch auf den Verlängerungen von DA und DC, über D hinaus, abgetragen werden. n kann an sich jede beliebige ganze oder gebrochene Zahl sein, nur müssen die Punkte F, E, G dabei eine solche Lage erhalten, daß die Linie EG ohne Hinderniß mit der Meßkette oder einem andern Längenmaaß gemessen werden kann. Es sei z. B. $DA = 30^0$, $DC = 45^0$

gemessen worden; nimmt man nun $n = \frac{1}{5}$ an, so hat man abzutragen $DE = 6^\circ$, $DF = 9^\circ$; wird $EG = 8^\circ$ gefunden, so beträgt die Entfernung der Punkte A und B von einander nach der obigen Formel $\frac{8}{\frac{1}{5}}$ d. i. 40°.

Ist endlich weder B noch A, Fig. 59, zugänglich, so nimmt man einen Punkt C an, und bestimmt die Länge der Linien CA und CB durch das vorhergehende Verfahren, indem ja der eine Endpunkt C derselben zugänglich ist. Trägt man jetzt von C aus auf CA und CB, oder auf ihren Verlängerungen über C hinaus, resp. die Stücke $CD = n \,.\, CA$ und $CE = n \,.\, CB$ ab, so ist die Linie DE der Linie AB parallel, und man hat die Proportion $AB : AC = DE : DC$, oder $AB : AC = DE : n \,.\, AC$, woraus sich ergibt $AB = \frac{DE}{n}$. Hat man $CA = 36^\circ$, CB $= 28^\circ$ gefunden, und nimmt $n = \frac{1}{4}$ an, so hat man abzutragen $CD = 9^\circ$, $CE = 7^\circ$; mißt man nun die Linie DE und findet sie 10° lang, so ist die fragliche Entfernung $AB = \frac{10}{\frac{1}{4}} = 40^\circ$.

§. 5. Von der Aufnahme einer Oertlichkeit vermittelst des Winkelkreuzes und mit der Kette.

Unter „eine Oertlichkeit aufnehmen" verstehen wir, wie bereits in Lief. 1, pag. 10, gesagt ist, die horizontale Projektion derselben bestimmen, also, um dies noch näher zu erklären, solche Größen ermitteln, die es möglich machen mit Hülfe eines verjüngten Maaßstabes eine ähnliche Zeichnung zu entwerfen. Diese Größen sollen nun vermittelst des Winkelkreuzes bestimmt werden.

Um eine bessere Uebersicht zu gewähren, sollen die Hauptfälle, die vorkommen können, hier in eizelnen Aufgaben durchgenommen werden.

1. Aufgabe. Es ist auf dem Felde ein geradliniges Dreieck ABC gegeben, man soll dasselbe aufnehmen und eine nach einem gegebenen verjüngten Maaßstabe entworfene Zeichnung anfertigen.

Auflösung. Man ermittelt auf bekannte Weise mit Hülfe des Winkelkreuzes den Fußpunkt D, der von der Spitze C, Fig. 60, des gegebenen Dreiecks auf die Gegenseite AB gefällten Senkrechten, und mißt, so genau als möglich, die Linien AD, BD und CD mit der Meßkette oder einem andern Längenmaaße. Wenn nun $\frac{1}{n}$ die lineäre Verkleinerung ausdrückt, und man trägt von dem in der auf dem Papier gegebenen Linie mn angenommenen Punkt d beiderseits die Stücke $da = \frac{AD}{n}$ und $db = \frac{BD}{n}$ ab, errichtet hierauf in dem Punkte d eine Senkrechte $dc = \frac{CD}{n}$ auf mn, so ist das durch die drei Punkte a, b, c bestimmte Dreieck abc dem auf dem Felde gegebenen Dreieck ABC nicht allein ähnlich, sondern seine Seiten sind auch, wie verlangt wurde, n mal kleiner als die entsprechenden Seiten des Dreiecks ABC; es ist nämlich nach der Konstruktion $\triangle acd \backsim \triangle ACD$; $\triangle bcd \backsim \triangle BCD$, also augenscheinlich auch $\triangle abc \backsim \triangle ABC$.

2. Aufgabe. Es ist auf dem Felde ein geradliniges Vieleck ABCDE.... gegeben, man soll dasselbe aufnehmen und eine nach einem gegebenen verjüngten Maaßstabe entworfene Zeichnung liefern.

1. Auflösung. Man zerlegt, Fig. 61, das gegebene Vieleck zuerst auf eine zweckmäßige Weise durch Diagonalen in Dreiecke, so daß man nämlich vermittelst des Winkelkreuzes nicht

allein in den einzelnen Dreiecken den Durchschnittspunkt der Höhe mit der Grundlinie bestimmen, sondern auch die Höhe und die beiden Abschnitte, also z. B. in dem Dreieck ABJ die Linien JL, AL, BL messen kann. Hierauf werden die einzelnen Dreiecke nach dem zum Grunde gelegten Maaßstabe, wie aus Aufg. 1 zu ersehen ist, verzeichnet, wobei natürlich die gehörige Zusammenfügung berücksichtigt werden muß, so daß z. B. das dem Dreieck BCJ ähnliche Dreieck bei der Zeichnung nicht etwa an die Seite ai, oder wo anders placirt, sondern an die Seite bi angetragen wird; dann ist, wie aus den Elementen der Geometrie folgt, das Vieleck abcdefgha dem gegebenen Vieleck ABCDEFGHA ähnlich.

Man belegt diese Art der Aufnahme, wo also zuerst die Oertlichkeit in Dreiecke zerlegt und dann die einzelnen Dreiecke aufgenommen werden, möge nun die Aufnahme mit dem Winkelkreuze oder irgend einem andern Instrumente geschehen, mit dem Namen des Triangulirens. Die Gesammtheit der Dreiecke, in welche die auf dem Felde gegebene Figur zerlegt worden ist, nennt man ein Dreiecksnetz oder schlechtweg Netz. Das Trianguliren wird hauptsächlich dann angewandt, wenn eine ausgedehntere Oertlichkeit aufgenommen werden soll, wo eine Zertheilung derselben in kleinere Partien nothwendig wird. Mithin werden durch das Trianguliren also eigentlich nur die Hauptpunkte, wie A, B, C, ... bestimmt; das Bestimmen der zwischenliegenden Punkte geschieht besser durch das in der folgenden Auflösung gegebene Verfahren.

2. Auflösung. Man steckt zuerst zwei Linien XY und X'Y', Fig. 62, so ab, daß sie erstlich durch einen innerhalb des gegebenen Vielecks beliebig angenommenen Punkt O gehen, zweitens sich rechtwinklig durchschneiden und drittens in ihrer

ganzen Länge mit der Meßkette ausgemessen werden können; benennt man nun die rechten Winkel, welche durch die Linien OX und OX′, OX′ und OY, OY und OY′, OY′ und OX gebildet werden, resp. durch I, II, III, IV, die Eckpunkte aber des aufzunehmenden Vielecks, indem man bei I beginnt und darauf die in II, III, IV befindlichen Punkte folgen läßt, der Reihe nach mit A, B, C, D, E u. s. w.; bestimmt dann etwa zuerst auf der Linie OX die Fußpunkte l, b, m, a, p, n, r aller aus den in I und IV befindlichen resp. Punkten L, B, M, A, P, N, R auf die Linie OX gefällten Senkrechten; ebenso auf der Linie OX′ die Fußpunkte f, c, a′, e, b′, d aller aus den in I und II befindlichen resp. Punkten F, C, A, E, B, D auf die Linie OX′ gefällten Senkrechten und, auf diese Weise fortfahrend, auch auf den Linien OY und OY′ die Fußpunkte aller Senkrechten, welche resp. aus den in II und III und III und IV gelegenen Punkten des gegebenen Vielecks gefällt werden, so wird man dadurch in den Stand gesetzt, das Vieleck nach irgend einem beliebigen Maaßstabe zu verzeichnen.

Wir wollen uns begnügen nur die in einem der rechten Winkel, etwa in II, gelegenen Punkte des Vielecks zu verzeichnen, unter der Voraussetzung, daß auch schon dieses genügen werde, das bei Verzeichnung der übrigen Punkte zu beobachtende Verfahren deutlich zu machen.

Man mißt auf den Linien OX′ und OY resp. die Entfernung der Fußpunkte f, c, e, d und c′, d′, f′, e′ vom Punkte O, also Of, Oc, Oe, Od und Oc′, Od′, Of′, Oe′, und vermerkt in einem sogenannten Feldbuche, in welches man nach dem Augenmaaße das aufzunehmende Vieleck ABC.... mit den beiden Linien XY, X′Y′ (also ein sogenanntes Brouillon) verzeichnet, die gefundenen Zahlenwerthe. Oc nennt man die Abscisse, Oc′, oder auch Cc die Ordinate des Punktes C; ebenso Od die Abscisse und Od′ oder Dd die Ordinate des Punktes D; Oe die Abscisse und Oe′ oder Ee die Ordinate des Punktes E u. s. w. OX′ heißt die Axe der Abscissen, OY die Axe der Ordinaten. Abscisse und Ordinate zusammen nennt man Coordinaten. Die Coordinaten eines Punktes bestimmen offenbar diesen vollständig seiner Lage nach, und so hat denn die Verzeichnung der in II gelegenen Punkte C, D, E, F, weiter keine Schwierigkeiten. Nachdem man auf dem Papier beliebig zwei sich rechtwinklig im Punkte O durchschneidende Linien XY, X′Y′ gezogen hat, trägt man auf OX′ von O aus die verjüngten Abscissen, also $\frac{Of}{n} = \mathfrak{Of}$, $\frac{Oc}{n} = \mathfrak{Oc}$, $\frac{Oe}{n} = \mathfrak{Oe}$, $\frac{Od}{n} = \mathfrak{Od}$ und auf OY von O aus die verjüngten Ordinaten, also $\frac{Oc'}{n} = \mathfrak{Oc}'$, $\frac{Od'}{n} = \mathfrak{Od}'$, $\frac{Of'}{n} = \mathfrak{Of}'$, $\frac{Oe'}{n} = \mathfrak{Oe}'$ ab. Errichtet man nun durch die Endpunkte f, c, e, d der abgetragenen verjüngten Abscissen auf OX′ Senkrechte, ebenso auch durch die Endpunkte f′, c′, e′, d′ der abgetragenen verjüngten Ordinaten auf OY Senkrechte, so werden sich diese, genugsam verlängert, schneiden, und man erhält in dem Durchschnittspunkt der in f und f′ errichteten Senkrechten einen Punkt F, welcher offenbar dem Punkte F auf dem Felde entspricht; in gleicher Weise geben die in c und c′, e und e′, d und d′ errichteten Senkrechten resp. die Durchschnittspunkte C, E, D, welche den Punkten C, E, D auf dem Felde entsprechen.

Durch dasselbe Verfahren, durch welches die in II gelegenen Punkte C, E, D, F verzeichnet worden sind, geschieht nun auch die Verzeichnung der übrigen Punkte G, H, J, ... , und man erhält auf diese Weise graphisch ein Vieleck (eine sogenannte **Reinkarte**, im Gegensatz zum Brouillon im Feldbuch) 𝔄𝔅ℭ𝔇𝔈𝔉 ...., welches dem Vieleck auf dem Felde A B C D E F .... nicht allein ähnlich, sondern auch im verlangten Sinne verjüngt ist.

Das so eben angegebene Verfahren wird nicht allein bei der Aufnahme eines Vielecks mit dem Winkelkreuze, sondern auch irgend beliebig gelegener Punkte einer Oertlichkeit angewandt, zumal der Feldmesser sich im Allgemeinen nur auf den Linien OX, OX', OY, OY' zu bewegen braucht, und nur in einzelnen Fällen genöthigt sein wird, diese zu verlassen. Dieses letztere wird namentlich dann nothwendig, wenn ein Punkt, z. B. C, nur von einer der Linien aus, etwa OX', zu sehen ist, weil die Länge seiner Ordinate, da sich weder die Senkrechte von C auf OY fällen, noch auch ihr Fußpunkt bestimmen läßt, nicht auf der Linie OY gemessen werden kann, sondern auf der im Endpunkte c der Abscisse Oc errichteten Senkrechten ermittelt werden muß, indem man die Entfernung der Punkte c und C mißt.

Gestattet es nicht die Oertlichkeit zwei aufeinander senkrechte Linien abzustecken, so können dieselben sich auch unter einem beliebigen Winkel durchschneiden. Das obige Verfahren bleibt dasselbe, nur muß man den Winkel, welchen die Linien XY, X'Y' bilden, vermittelst des Winkelkreuzes oder der Kette (2. Lief. §. 3) bestimmen, und die analogen Linien 𝔛𝔜, 𝔛'𝔜' auf dem Papier sich unter dem gleichen Winkel schneiden lassen.

Wenn zwei Linien nicht hinreichen sollten, um alle Punkte einer Oertlichkeit aufzunehmen, so kann man auch mehrere Linien OX, OY, OZ, OV,...., Fig. 63, abstecken, und in Bezug auf diese die Coordinaten der einzelnen Punkte der Oertlichkeit bestimmen. Bei der Verzeichnung werden auch hier zuerst die

Linien $\mathfrak{OX}$, $\mathfrak{OY}$, $\mathfrak{OZ}$, $\mathfrak{OV}$, ..., und zwar so gezogen, daß sie mit einander die nämlichen Winkel bilden, wie die entsprechenden Linien OX, OY, OZ, OV, ... auf dem Felde; dann wird zur Abtragung der verjüngten Abscissen und Ordinaten geschritten.

3. Auflösung. Kann das Innere des aufzunehmenden Vielecks nicht übersehen werden, weil es z. B. bewaldet ist, so ist das sogenannte Aufnehmen aus dem Umfange, oder, wie es auch genannt wird, die Perimetermethode oder das Peripherisiren anzuwenden. Am einfachsten ist es, die Winkel A, B, C, D, ..., Fig. 64, vermittelst des Winkelkreuzes zu bestimmen (§. 3), und die Seiten AB, BC, CD, ... des Vielecks zu messen. Die Verzeichnung des auf dem Felde gegebenen Vielecks ABCD .... geschieht auf folgende Weise: man zieht auf dem Papier eine gerade Linie, und trägt auf dieser die nach dem zum Grunde gelegten Maaßstabe verjüngte Länge AB, also $ab = \frac{AB}{n}$ von einem beliebig angenommenen Punkte a aus ab; im Punkte b setzt man einen Winkel $abr = \angle B$ an, trägt auf br von b aus das Stück $bc = \frac{BC}{n} ab$, setzt an c einen Winkel $bcs = \angle C$ an, trägt auf cs von c aus das Stück $cd = \frac{CD}{n} ab$, und verfährt so weiter bis die Figur abcd .... geschlossen ist. Die Zahl n drückt offenbar die lineäre Verkleinerung aus.

Man kann auch folgendes Verfahren anwenden, um ein Vieleck mit dem Winkelkreuze aus dem Umfange aufzunehmen. Nachdem man von dem aufzunehmenden Vieleck ABCD ...., Fig. 65, ein Brouillon entworfen hat, was bei jeder komplicirtern Aufnahme geschehen muß, fällt man vom Eckpunkte C, welcher der äußerste ist, wenn man von A nach B in der Richtung von AB fortgeht, eine Senkrechte CN auf die Verlängerung von AB, und verlängert CN über C hinaus; hierauf fällt man von den Eckpunkten D, E, F, von denen der letztere der äußerste ist, wenn man von N nach C, in der Richtung von NC fortgeht, die Senkrechten Da, Eb, FO auf die Verlängerung von NC, und verlängert FO über F hinaus; jetzt fällt man von den Eckpunkten G, H, J, K, L, von denen der letztere auch wieder der äußerste ist, wenn man von O nach F in der Richtung von OF fortgeht, die Senkrechten Gc, Hd, Je, Kf, LP auf FO und ihre Verlängerung, und verlängert LP über L hinaus; endlich fällt man vom Eckpunkte M auf die Verlängerung von LP die Senkrechte Mg. Zu gleicher Zeit mißt man AB, BN und CN, Ca und Da, ab und Eb, bO und FO, Fc und Gc, cd und Hd, de und Je, ef und Kf, fP und LP, Lg und Mg, und bemerkt die Maaße im Brouillon an den resp. Linien. Die Verzeichnung des auf dem Felde gegebenen Vielecks ABCD .... geschieht nun auf folgende Weise: man zieht auf dem Papier eine beliebige gerade Linie xy, Fig. 66, nimmt in derselben einen Punkt A′ an, trägt von diesem linkwärts auf xy das Stück $A'B' = \frac{AB}{n}$, von B′ aus das Stück $B'N' = \frac{BN}{n}$, wo n die gegebene lineäre Verkleinerung ausdrückt, ab; errichtet in N′ auf xy eine Senkrechte, und trägt auf dieser von N′ aus $N'C' = \frac{NC}{n}$, von C′ aus $C'a' = \frac{Ca}{n}$ ab, und errichtet in a′ auf die Verlängerung von N′C′ eine Senkrechte $D'a' = \frac{Da}{n}$, so haben die Punkte A′, B′, C′, D′ auf dem Papier offenbar eine ähnliche Lage, wie die Punkte A, B, C, D auf dem Felde. Verfährt man bei der Verzeichnung der übrigen Punkte

E, F, G, ... auf dem Felde auf dieselbe Weise, wie wir an den Punkten A, B, C, D gezeigt haben, und verbindet in der Zeichnung die Punkte A' und B', B' und C', C' und D' u. s. w. bis die Figur geschlossen ist durch gerade Linien, so ist offenbar das Vieleck A'B'C'D' .... dem Vieleck ABCD .... ähnlich und nach dem zum Grunde gelegten Maaßstabe verjüngt.

Die auf dem Felde abgesteckte Figur NOPQ ist offenbar ein Rechteck; je mehr Eckpunkte des Vielecks ABCD ... in den Seiten des Rechtecks zu liegen kommen, desto mehr wird die Arbeit erleichtert.

S o l l e i n a u f d e m F e l d e g e g e b e n e s V i e l e c k A B C D .... i n e i n e n s c h o n f e r t i g e n P l a n e i n g e t r a g e n w e r d e n, so bestimmt man die Lage des Vielecks gegen eine Linie MN und einen Punkt P in ihr, welche beide sich auch in dem Plane verzeichnet finden, und resp. durch mn und p bezeichnet sind, indem man die Abscisse und Ordinate der Eckpunkte, etwa A und B, des Vielecks mißt und dann durch gehöriges Abtragen der verjüngten Abscissen und Ordinaten, nach dem zum Grunde gelegten Maaßstabe des in Rede stehenden Planes, die den Eckpunkten A und B auf dem Felde entsprechenden Eckpunkte a und b des in den Plan einzutragenden Vielecks abcd .... findet. Die Punkte a und b geben die Lage der Seite ab und somit auch die Lage des Vielecks abcd .....

Da die Umrisse der Gegenstände einer Oertlichkeit gewöhnlich krumme Linien sind, so soll in den Auflösungen der beiden nachfolgenden Aufgaben gezeigt werden, wie eine n i c h t g e s c h l o s s e n e k r u m m e L i n i e und eine g e s c h l o s s e n e k r u m m e L i n i e, also eine krummlinige Figur, mit dem Winkelkreuze aufgenommen werden können.

3. Aufgabe. Man soll eine nicht geschlossene krumme Linie, z. B. die eine Seite eines Weges, aufnehmen, und eine nach einem gegebenen verjüngten Maaßstabe angefertigte Zeichnung liefern.

Auflösung. Nachdem man in der aufzunehmenden krummen Linie (Curve) eine Anzahl von Punkten A, B, C, D, ..., Fig. 67, so angenommen und, wie bekannt, durch Absteckestäbe, Meßfahnen, oder andere geeignete Gegenstände bezeichnet hat, daß die aus den geradlinigen Elementen AB, BC, CD, ... bestehende gebrochene Linie sich der aufzunehmenden Curve so nahe als möglich anschließt, nimmt man die Punkte A, B, C, D, ... am zweckmäßigsten nach der Methode auf, welche in der zweiten Auflösung der vorhergehenden Aufgabe entwickelt worden ist. Hierauf begiebt man sich nach der aufzunehmenden Curve hin, fällt von den Punkten a, b, c, d, ... der Curventheile A𝔄B, B𝔅C, C𝔈D, ... der aufzunehmenden Curve auf die ihnen entsprechenden geradlinigen Elemente (Sehnen) AB, BC, CD, ... Senkrechte aa′, bb′, cc′, ... ff′, gg′, ..., so daß die Curvenstückchen Aa, ab, bc, cd, ... gerade Linien, wenn sie verzeichnet würden, darstellen, und mißt sowohl die Abscissen Aa′, Ab′, Ac′, ... Bf′, Bg′, ... als auch die Ordinaten aa′, bb′, cc′, ... Bei dieser Arbeit ist das früher erwähnte Feldbuch ganz unerläßlich, da man in dasselbe nach dem Augenmaaße eine Zeichnung (Brouillon) der aufzunehmenden Curve und der geradlinigen Elemente AB, BC, CD, ... einzutragen, und die Zahlenwerthe der gemessenen Abscissen und Ordinaten zu vermerken, namentlich aber auch, damit keine Irrungen stattfinden, anzugeben hat, nach welcher Seite der gebrochenen Linie ABCD ... die Ordinaten liegen, was am besten auf die Weise geschieht, daß man allen auf die eine Seite fallenden Ordinaten das Vorzeichen + (plus), allen auf die andere Seite fallenden Ordinaten das Vorzeichen — (minus) gibt. Hat man z. B. aa′, bb′, cc′, dd′, ee′ mit + bezeichnet, so müssen Ordinaten wie ff′, gg′, hh′,.... durch — bezeichnet werden.

Wie man bei der Anfertigung einer der auf dem Felde aufgenommenen Curve ähnlichen Zeichnung nach dem zum Grunde gelegten verjüngten Maaßstabe zu verfahren hat, wird Jedem von selbst einleuchten, wenn er das Verfahren in den vorhergehenden Aufgaben dieses § gehörig verstanden hat. Bemerkt muß jedoch werden, daß, nachdem man die Punkte a, b, c, d,.... vermittelst ihrer Abscissen und Ordinaten verzeichnet hat, diese Punkte aus freier Hand durch ganz kurze gerade Linien zu verbinden sind.

Anfänger erschweren sich die Arbeit bei der Aufnahme einer krummen Linie gewöhnlich dadurch, daß sie zu viele Punkte a, b, c, d,.... in der letztern annehmen. Ist z. B. der verjüngte zu Grunde gelegte Maaßstab durch den Bruch $\frac{1}{16800}$ gegeben, und die größte senkrechte Entfernung der Punkte p, q, r, ... eines Curventheiles E℮F z. B. der aufzunehmenden krummen Linie von dem entsprechenden geradlinigen Elemente EF beträgt 1°, oder gar weniger als 1°, so bildet der ganze fragliche Curventheil in der Zeichnung eine gerade Linie, weil auf dem Felde gemessene Ordinaten, die = oder < 1° sind, nach dem obigen Maaßstabe nicht mehr abgetragen werden können, also alle Punkte des Bogentheiles E℮F verzeichnet in die Verjüngung der geraden Linie EF fallen. Man kann daher als Regel feststellen bei einem Maaßstabe, wo 1″ in der Zeichnung = 200° auf dem Felde ist ($\frac{1}{16800}$), nur in denjenigen Curventheilen Abscissen mit ihren Ordinaten zu bestimmen, in denen der größte senkrechte Abstand des Curventheiles von der entsprechenden Sehne mehr als 1°

beträgt. Ist der Maaßstab durch den Bruch $\frac{1}{4200}$ gegeben, so daß also $1'' = 50^{o}$, so sind offenbar nur in allen denjenigen Curventheilen Abscissen und Ordinaten zu bestimmen, wo die senkrechte Entfernung mehr beträgt als $\frac{1}{4}^{o}$; u. s. w.

4. Aufgabe. Man soll eine geschlossene krumme Linie, wie z. B. das Ufer eines Sees oder eines Teiches, aufnehmen, und eine nach einem gegebenen verjüngten Maaßstabe angefertigte Zeichnung liefern.

Auflösung. Das Verfahren bei der Aufnahme einer von einer Curve ganz eingeschlossenen Figur bleibt das nämliche, wie das bei der Aufnahme einer nicht geschlossenen krummen Linie entwickelte; nur sei im Allgemeinen bemerkt, daß man bei geschlossenen krummen Linien am besten thut sämmtlichen innerhalb der bei der Aufnahme zu Grunde gelegten geradlinigen Figur fallenden Ordinaten das — Zeichen, hingegen allen Ordinaten, welche außerhalb der in Rede stehenden geradlinigen Figur zu liegen kommen, das + Zeichen zu geben.

Bei der Aufnahme des krummlinigen Umfanges eines Waldes mittelst des Winkelkreuzes, ist die zu Grunde gelegte geradlinige Figur, welche sich so nahe als möglich der krummlinigen anschließt, zuerst, wie aus Auflösung 3 der zweiten Aufgabe dieses § zu ersehen ist, durch Peripheristren aufzunehmen, im Uebrigen aber so zu verfahren, wie im Vorhergehenden.

Mit Hülfe der Auflösungen der vier vorhergehenden Aufgaben läßt sich nun leicht eine ganze Oertlichkeit, die Häuser, Felder, Wiesen, Wege, Flüsse, Moräste, Seen, Wälder ꝛc. enthält, vermittelst des Winkelkreuzes aufnehmen. Wege und Flüsse, die einen Wald durchziehen, und andere im Walde gelegene

Gegenstände, können mit dem Winkelkreuze, weil sie nicht erblickt werden können, nicht aufgenommen werden. Ueberhaupt läßt sich eine Oertlichkeit nur dann mit Vortheil durch das Winkelkreuz aufnehmen, wenn sie nicht bergigt und nicht bewaldet ist; im entgesetzten Falle ist das Winkelkreuz nur als Hülfsinstrument zu gebrauchen.

In Ermangelung des Winkelkreuzes kann ein Dreieck ABC mit der Kette aufgenommen werden, indem man die drei Seiten AB, AC, BC des in Rede stehenden Dreiecks mißt, und mit ihren, nach einem gegebenen Maaßstabe berechneten Verjüngungen $\frac{AB}{n}$, $\frac{AC}{n}$, $\frac{BC}{n}$ ein Dreieck abc konstruirt (siehe Lief. 2, pag. 57), welches dem auf dem Felde gegebenen ABC ähnlich ist.

Ein Vieleck wird vermittelst der Kette aufgenommen, indem man dasselbe in Vielecke zerlegt, hierauf die drei Seiten eines jeden einzelnen Dreiecks mißt, und endlich ein Vieleck konstruirt, das aus Dreiecken besteht, welche resp. den auf dem Felde gegebenen ähnlich sind und ähnliche Lage haben.

Die Aufnahme einer nicht geschlossenen und geschlossenen krummen Linie vermittelst der Kette, geschieht auf dieselbe Weise, wie in der Auflösung der dritten und vierten Aufgabe angegeben ist; nur werden hier mit Hülfe der Kette Winkel gemessen und Senkrechte errichtet und gefällt.

§. 6. Von der unmittelbaren Bestimmung des Flächeninhaltes der Ackerstücke vermittelst des Winkelkreuzes und mit der Kette.

Der wichtigste Gebrauch, den man von dem Winkelkreuze macht, ist die unmittelbare Bestimmung des Flächeninhaltes einer Oertlichkeit, ohne nöthig zu haben diese erst besonders aufzunehmen und zu verzeichnen. Die nachfolgenden Aufgaben geben in ihren Auflösungen die wichtigsten Methoden zur Flächenbestimmung eines geradlinigen Dreiecks, eines geradlinigen Vielecks und einer beliebigen krummlinigen Figur vermittelst des Winkelkreuzes.

1. Aufgabe. Es ist ein geradliniges Dreieck ABC auf dem Felde gegeben, man soll den Flächeninhalt desselben, d. h. seiner horizontalen Projektion, bestimmen.

Auflösung. Man wählt irgend eine der Seiten, etwa AB, des Dreiecks ABC, Fig. 68, als Grundlinie, bestimmt in dieser den Fußpunkt D der von der Spitze C des Dreiecks auf die besagte Grundlinie gefällten Senkrechten (pag. 41), und mißt die Grundlinie AB und die Senkrechte oder Höhe CD des Dreiecks mit der Kette; das halbe Produkt der gefundenen Zahlenwerthe giebt den verlangten Flächeninhalt. Wenn F den Flächeninhalt, H die Höhe, G die Grundlinie des Dreiecks ABC bedeutet, so ist $F = \frac{1}{2} G . H$. Es sei z. B. $H = 20^{\circ}\ 4'\ 3''$, $G = 28^{\circ}\ 3'\ 6''$, so ist F in Quadratfaden

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{(20.84 + 4.12 + 3)\ (28.84 + 3.12 + 6)}{84.84}\right]$$

$$= 293\ \square^{\circ}\ 31\ \square'\ 135\ \square''.$$

Es muß bemerkt werden, daß man, um ein genaues Resultat zu erhalten 1) das Winkelkreuz sorgfältig in der Richtung der Grundlinie des auszumessenden Dreiecks aufstellen, 2) die Grundlinie und Höhe genau ausmessen, und endlich 3) solche Fälle zu vermeiden suchen muß, wo die Grundlinie im Verhältniß zur Höhe sehr groß ist; welches letztere dadurch erreicht wird, daß man das auszumessende Dreieck in zwei oder mehr Dreiecke auf eine zweckmäßige Weise zerlegt; natürlich muß man dann auch den Flächeninhalt eines jeden Theildreiecks nach der obigen Angabe bestimmen, und die Summe des Flächeninhalts der Theildreiecke bilden, um den Flächeninhalt des Dreiecks ABC zu erhalten. Wenn man die obigen drei Punkte wohl berücksichtigt, so braucht man weniger Sorgfalt auf die Ermittelung des Fußpunktes D zu verwenden.

2. Aufgabe. Es ist ein geradliniges Vieleck ABCD.... auf dem Felde gegeben, man soll den Flächeninhalt desselben, d. h. seiner horizontalen Projektion, bestimmen.

1. Auflösung. Man zerlegt das auszumessende Vieleck ABCD..... auf eine zweckmäßige Weise in Dreiecke, bestimmt den Flächeninhalt eines jeden einzelnen Dreicks, wie es in der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe angegeben ist, und summirt den Flächeninhalt aller Dreiecke, so giebt die erhaltene Summe offenbar den fraglichen Flächeninhalt des Vielecks ABCD..... Daß man, falls es sonst zweckmäßig ist, eine und dieselbe Diagonale des Vielecks als Grundlinie der beiden an derselben liegenden Dreiecke annimmt, versteht sich von selbst, indem nämlich dadurch die Arbeit erleichtert wird, weil man für je zwei Dreiecke immer nur eine Grundlinie zu messen hat.

2. Auflösung. Man steckt auf dem Felde vier Linien NQ, NO, OP, PQ, Fig. 65, so ab, daß sie mit einander ein Rechteck NOPQ bilden, und kein Eckpunkt des auszumessenden Vielecks ABCD..... außerhalb des abgesteckten Rechtecks zu liegen kommt; je mehr Eckpunkte A, B, C, F, L aber in den Seiten des Rechtecks sich befinden, desto mehr wird die Arbeit erleichtert. Hierauf bestimmt man auf der Seite NO die Fußpunkte a und b der aus den Eckpunkten D und E des Vielecks ABCD.... auf die fragliche Seite gefällten Senkrechten;

ebenso ermittelt man die Fußpunkte c, d, e, f der aus den Eckpunkten G, H, J, K auf OP gefällten Senkrechten, und endlich auch den Fußpunkt g der aus dem Eckpunkte M auf die Seite PQ gefällten Senkrechten. Nachdem man in dem Feldbuche nach dem Augenmaaß eine Zeichnung des Vielecks ABCD ...., und des abgesteckten Rechtecks NOPQ entworfen, auch die Fußpunkte der gefällten Senkrechten angegeben hat, mißt man die Linien NO und NQ, NB und NC, Ca und aD, ab und bE, bO und OF, Fc und cG, cd und dH, de und eJ, ef und fK, fP und PL, Lg und gM, gQ und QA und vermerkt die Zahlenwerthe an den resp. Linien des Brouillons. Die gemessenen Linien benutzt man jetzt auf nachfolgende Weise zur Flächeninhaltsbestimmung des Rechtecks NOPQ und der außerhalb des auszumessenden Vielecks ABCD ...., aber innerhalb des Rechtecks gelegenen Dreiecke und Trapeze:

Der Flächeninhalt des Rechtecks NOPQ ist $= NQ \,.\, NO$; $\triangle\, NBC = \frac{NB \,.\, NC}{2}$; $\triangle\, CaD = \frac{Ca \,.\, aD}{2}$; Trapez ab ED $= \left(\frac{aD + bE}{2}\right) ab$; Trapez bOFE $= \left(\frac{bE + OF}{2}\right) bO$; $\triangle\, FcG = \frac{Fc \,.\, cG}{2}$; Trapez cdHG $= \left(\frac{cG + dH}{2}\right) cd$; Trapez deJH $= \left(\frac{dH + eJ}{2}\right) de$; Trapez efKJ $= \left(\frac{eJ + fK}{2}\right) ef$; Trapez fPLK $= \left(\frac{fK + PL}{2}\right) fP$; $\triangle\, LgM = \frac{Lg \,.\, gM}{2}$; Trapez gQAM $= \left(\frac{gM + QA}{2}\right) gQ$. Nun ist aber der Flächeninhalt des auszumessenden Vielecks ABCD .... augenscheinlich gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks NOPQ weniger den Flächenräumen aller so eben aufgeführten Dreiecke und Trapeze, man hat also, wenn F den Flächeninhalt des auszumessenden Vielecks bedeutet:

$$F = NQ \, . \, NO - \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} NB \, . \, NC + Ca \, . \, aD + Fc \, . \, cG + Lg \, . \, gM \\ + (aD + bE)\, ab + (bE + OF)\, bO + \\ (cG + dH)\, cd + (dH + eJ)\, de + (eJ + fK)\, ef \\ + (fK + PL)\, fP + (gM + QA)\, gQ \end{array} \right\}$$

Aus dieser Formel läßt sich leicht eine allgemeine Regel für die Flächeninhaltsbestimmung eines geradlinigen Vielecks ableiten.

3. Auflösung. Man steckt der größten Länge des auszumessenden Vielecks ABCD.... nach eine gerade Linie XY, Fig. 69, ab, und bestimmt vermittelst der Kreuzscheibe die Fußpunkte a, k, b, c, i, ... der von den Eckpunkten A, K, B, C, J,.... des Vielecks auf die Linie XY gefällten Senkrechten; mißt hierauf die Linien ab, bc, cd, de, ef, ebenso auch die Linien ak, ki, ih, hg und die Senkrechten bB, cC, dD, eE, fF, und aA, kK, iJ, hH, gG, und benutzt dieselben, wie nachfolgend gezeigt wird, zur Bestimmung des Flächeninhalts des auszumessenden Vielecks ABCD.....

Um zunächst den Flächeninhalt des $\triangle$ bMB zu berechnen, muß bM gefunden werden, welches auf folgende Weise geschieht: es verhält sich $aA : bB = aM : bM$, also auch $aA + bB : bB = ab : bM$, woraus sich ergibt $bM = \frac{bB \, . \, ab}{aA + bB}$; der Flächeninhalt des $\triangle$ bMB ist demnach $= \frac{bB^2 \, . \, ab}{2(aA + bB)}$; der des Trapezes $bBCc = \frac{(bB + cC)\, bc}{2}$; der des Trapezes $cCDd = \frac{(cC + dD)\, cd}{2}$; der des Trapezes $dDEe = \frac{(dD + eE)\, de}{2}$; der des Trapezes $eEFf = \frac{(eE + fF)\, ef}{2}$. Der Flächeninhalts des $\triangle$ fNF ist

$= \frac{fF^2 . fg}{2(fF + gG)}$, indem hierbei die Grundlinie fN durch eine ähnliche Proportion gefunden wird, wie die Grundlinie bM des $\triangle$ bMB; der Flächeninhalt des Trapezes ak KA ist $= \frac{(aA + kK)\,ak}{2}$; der des Trapezes ki JK $= \frac{(iJ + kK)\,ik}{2}$; der des Trapezes ihHJ $= \frac{(hH + iJ)\,hi}{2}$; endlich der des Trapezes hg GH $= \frac{(gG + hH)\,gh}{2}$. Summirt man die Flächenräume der beiden Dreiecke bMB, fNF und aller angeführten Trapeze, so muß man von der erhaltenen Summe augenscheinlich noch die Flächenräume der beiden Dreiecke aMA, gNG abziehen, um den fraglichen Flächeninhalt des Vielecks ABCD . . . . . zu erhalten.

Die Flächenräume der Dreiecke aMA und gNG werden aber leicht wie folgt gefunden. Es verhält sich aA : bB = aM : bM, also auch aA + bB : Aa = ab : aM; also ist aM $= \frac{Aa . ab}{aA + bB}$, folglich der Flächeninhalt des $\triangle$ aMA $= \frac{Aa^2 . ab}{2(aA + bB)}$. Es verhält sich gG : fF = gN : fN, also auch gG + fF : gG = fg : gN; also gN $= \frac{gG . fg}{fF + gG}$; folglich der Flächeninhalt des $\triangle$ gNG $= \frac{gG^2 . fg}{2(fF + gG)}$. Wenn also F den Flächeninhalt des Vielecks ABCD . . . bedeutet, so ist

$$F = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} \left(\frac{bB^2 - Aa^2}{aA + bB}\right) ab + \left(\frac{fF^2 - gG^2}{fF + gG}\right) fg + (bB + cC)\,bc \\ + (cC + dD)\,cd + (dD + eE)\,de + (eE + fF)\,ef \\ + (gG + hH)\,gh + (hH + iJ)\,hi + (iJ + kK)\,ik \\ + (aA + kK)\,ak \end{array}\right\}$$

Wir wollen uns nicht weiter bei der Umformung dieser Gleichung aufhalten, um das Gesetz, nach welchem die Berechnung des Flächeninhalts eines Vielecks geschieht, in die Augen springender zu machen, sondern gehen zu der letzten Aufgabe dieses § über.

3. Aufgabe. Es ist auf dem Felde eine krummlinige Figur gegeben, man soll den Flächeninhalt derselben bestimmen.

Auflösung. Daß in der Aufgabe nur von einer näherungsweisen Flächeninhaltsbestimmung der krummlinigen Figur die Rede sein kann, versteht sich von selbst, denn nur in dem besondern Falle, wo die sie umschließende krumme Linie nach einem bestimmten Gesetze gekrümmt ist, ließe sich der Flächeninhalt der krummlinigen Figur genau angeben. Das Verfahren ist einfach. Nachdem man zuerst eine geradlinige Figur ABCDEFGA, Fig. 70, abgesteckt hat, deren Umfang sich so nahe als möglich an den krummlinigen Umfang anschließt, bestimmt man den Flächeninhalt der geradlinigen Figur nach einer der in den Auflösungen der Aufgabe 2 angegebenen Methoden. Hierauf bestimmt man auch, und hier eben nur annäherungsweise die Flächenräume der krummlinigen Segmente Aa, aB, bB, bC, CD, cD, cE, dE, de, eF, Ff, AG, indem man hierbei die kleinern, wie Aa, cD, cE, AG, als geradlinige Dreiecke betrachtet, die größern aber, wie aB, Bb, bC, ..., nachdem man mehrere Senkrechte von dem entsprechenden Bogen auf die zugehörige geradlinige Sehne gefällt, wie z. B. beim Segmente CD, als aus geradlinigen Dreiecken und Trapezen bestehend ansieht. Die zur Bestimmung der Flächenräume der krummlinigen Segmente, so wie des Flächeninhalts des Vielecks ABCD.... erforderlichen Größen werden im Feldbuche vermerkt, und auch in demselben angegeben, ob das Segment außerhalb oder innerhalb des zu Grunde gelegten Vielecks ABCD.... liegt. Nun ist augenscheinlich der Flächeninhalt der auszumessenden krummlinigen Figur gleich dem Flächeninhalte des zu Grunde gelegten Vielecks vermehrt um die Summe der Flächenräume aller außerhalb des in Rede stehenden geradlinigen Vielecks, und vermindert um die Summe der Flächenräume aller innerhalb desselben befindlichen Segmente, folglich hat man, wenn F den Flächeninhalt der krummlinigen Figur bedeutet, F = Vieleck ABCDEFGA + Segment Aa + Seg. Bb + Seg. CD + Seg. cE + Seg. dE + Seg. eF + Seg. AG — Seg. aB — Seg. bC — Seg. cD — Seg. de — Seg. Ff. Man habe z. B. den Flächeninhalt des geradlinigen Vielecks ABCDEFGA = 1648 □°, Seg. Aa 1,5 □°, Seg. Bb = 6 □°, Seg. CD = 6,5 □°, Seg. cE = 2 □°, Seg. dE = 1,75 □°, Seg. eF = 3,25 □°, Seg. AG = 1,25 □°; ferner Seg. aB = 3,75 □°, Seg. bC = 4 □°, Seg. cD = 1,5 □°, Seg. de = 3,75 □°, Seg. Ff = 6,25 □° berechnet, so ist F = 1648 □° + 1,5 □° + 6 □° + 6,5 □° + 2 □° + 1,75 □° + 3,25 □° + 1,25 □° — 3,75 □° — 4 □° — 1,5 □° — 3,75 □° — 6,25 □° = 1648 □° + 22,25 □° — 19,25 □° = 1651 □°.

Mit der Kette wird der Flächeninhalt F eines Dreiecks bestimmt, wenn man die drei Seiten a, b, c des Dreiecks mißt, ihren Zahlenwerth in die aus der theoretischen Geometrie bekannte Formel

$$F = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$$

wo $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ist, setzt, und den Werth von F berechnet.

§. 7. Von dem Spiegel- oder Taschenwinkelkreuze.

Aus der Physik ist bekannt, daß, wenn ein Lichtstrahl auf eine spiegelnde, ebene Fläche (Spiegel) fällt, er unter einem gleichen Winkel als der ist, unter welchem er auf den Spiegel trifft, zurückgeworfen (reflektirt) wird. Wenn mn, Fig. 71, also den Spiegel vorstellt, der im Punkte t vom sogenannten einfallenden Lichtstrahl st getroffen wird, so ist der Winkel lts′ (der Reflexionswinkel), den der reflektirte Strahl s′t mit lt (dem Einfallsloth) bildet, gleich dem Winkel lts (dem Einfallswinkel). Ferner ist bekannt, daß der einfallende Strahl st, der reflektirte Strahl s′t und das Einfallsloth lt in einer und derselben Ebene liegen.

Denkt man sich nun zwei ebene Spiegel mn, m′n′, Fig. 72, die einen beliebigen Winkel trt′ $= \alpha$, welcher jedoch nicht größer als 180° sein darf, mit einander bilden, auf einer Platte senkrecht befestigt, so wird der unter dem Einfallswinkel stq $= \beta$ den Spiegel mn treffende Lichtstrahl st in der Richtung tt′ auf den Spiegel m′n′ hin reflektirt, der reflektirte Strahl tt′ aber wiederum vom Spiegel m′n′ in der Richtung t′s′ zurückgeworfen. Der Winkel t′ps nun, den der einfallende Strahl st mit dem zum zweiten Male reflektirten Strahle s′t′ macht, ist, wie leicht gezeigt werden kann, doppelt so groß als der Winkel α, also $\angle t'ps = 2 \angle \alpha$. Man hat nämlich:

$\angle t'ps = \angle s't't + \angle stt'$.

$\angle stt' = 2 \angle \beta$.

$\angle s't't = 2 \angle l't't$,

$\angle l't't = 90° - \angle rt't$, $2 \angle l't't = 180° - 2 \angle rt't$,

$\angle rt't = 180° - \angle \alpha - \angle rtt'$, $2 \angle rt't = 360° - 2 \angle \alpha - 2 \angle rtt'$;

$\angle s't't = 180° - 360° + 2 \angle \alpha + 2 \angle rtt'$,

$\angle rtt' = 90° - \angle \beta$, $2 \angle rtt' = 180° - 2 \angle \beta$;

$\angle s't't = 180° - 360 + 2 \angle \alpha + 180° - 2 \angle \beta$
$= 2 \angle \alpha - 2 \angle \beta$;

$\angle t'ps = 2 \angle \alpha - 2 \angle \beta + 2 \angle \beta$
$= 2 \angle \alpha$.

Wenn $\alpha = 45^\circ$ ist, so ist $\angle t'ps = 90^\circ$; es steht also dann die Richtung des zum zweiten Male reflektirten Strahles auf der Richtung des ursprünglich einfallenden Strahles senkrecht.

Den so eben bewiesenen Satz der Optik hat man in der Feldmeßkunst dazu angewandt, um Senkrechte auf dem Felde zu errichten und zu fällen, indem man ein Instrument, Spiegelwinkelkreuz genannt, konstruirt hat, welches nur dadurch von dem oben beschriebenen Spiegelapparat sich unterscheidet, daß der Winkel $\alpha = 45^\circ$ ist, und daß die obere Hälfte der beiden Spiegel, welche ohngefähr 1'' bis 1½'' lang und hoch sind, keinen Spiegelbeleg hat, so daß man also nicht allein den reflektirten Gegenstand, sondern auch Gegenstände, die in der Richtung des reflektirten Strahles auf dem Felde sich befinden, durch das Spiegelglas hindurch wahrnehmen kann.

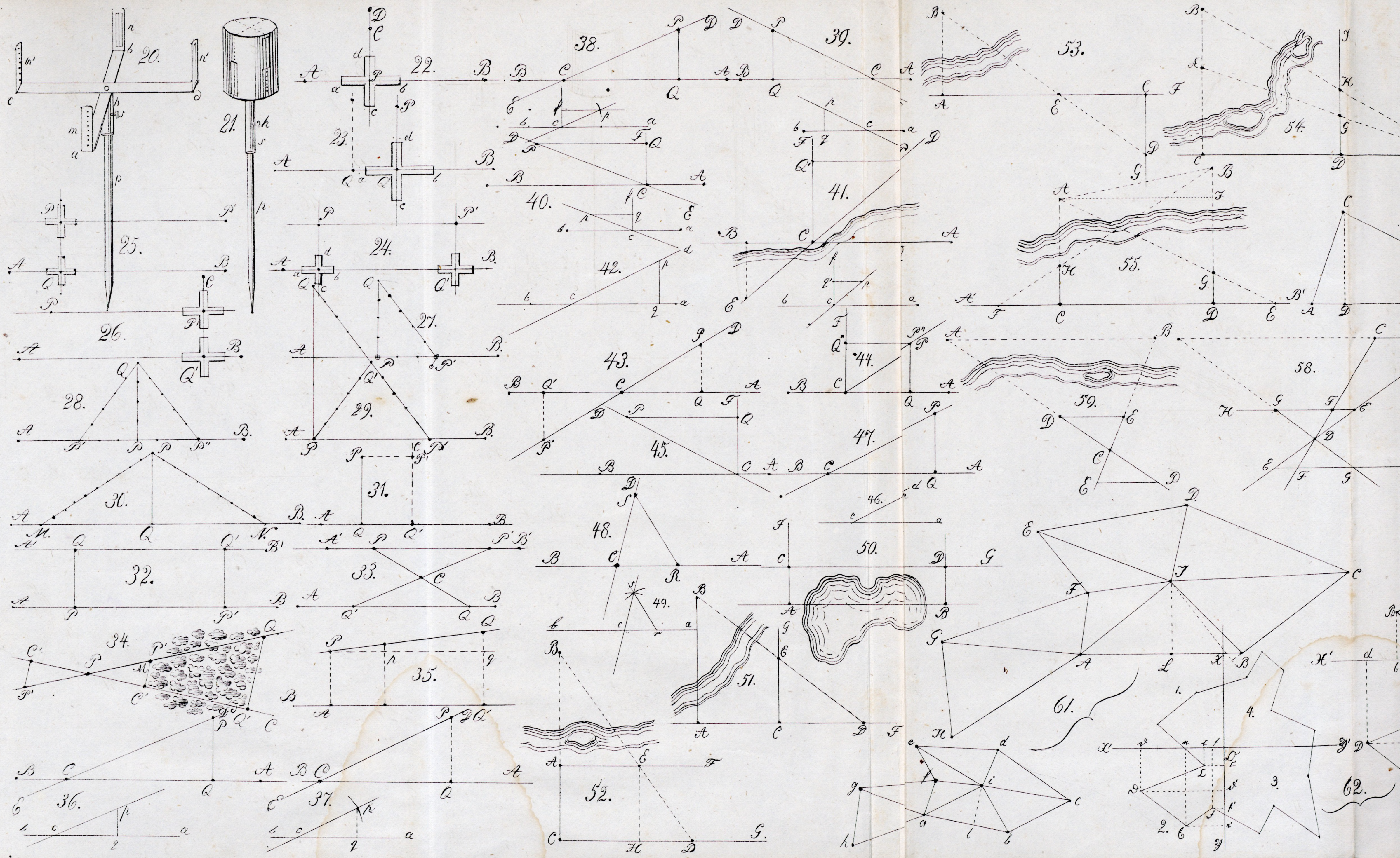
Um vermittelst des beschriebenen Spiegelwinkelkreuzes eine Senkrechte auf die Linie AB, welche durch zwei in den Punkten A und B vertikal eingesteckte Stäbe, oder durch zwei andere geeignete Gegenstände ihrer Lage nach gegeben ist, in dem Punkte C zu errichten, stellt man sich in dem Punkte C hin, und gibt dem Spiegelwinkelkreuz, Fig. 73, dasselbe vor sich haltend, nach und nach eine solche Lage, daß man in dem Spiegel m'n' das Bild des in A eingesteckten Stabes wahrnimmt, so ist offenbar die durch das Bild von A und den Standpunkt C angegebene Richtung auf der Linie AB senkrecht; man braucht also nur in ersterer, indem man durch den unbelegten Theil des Spiegels m'n' sieht, einen vertikalen Stab D ausstecken zu lassen, oder in derselben einen Gegenstand sich zu merken, um die verlangte Senkrechte zu fixiren.

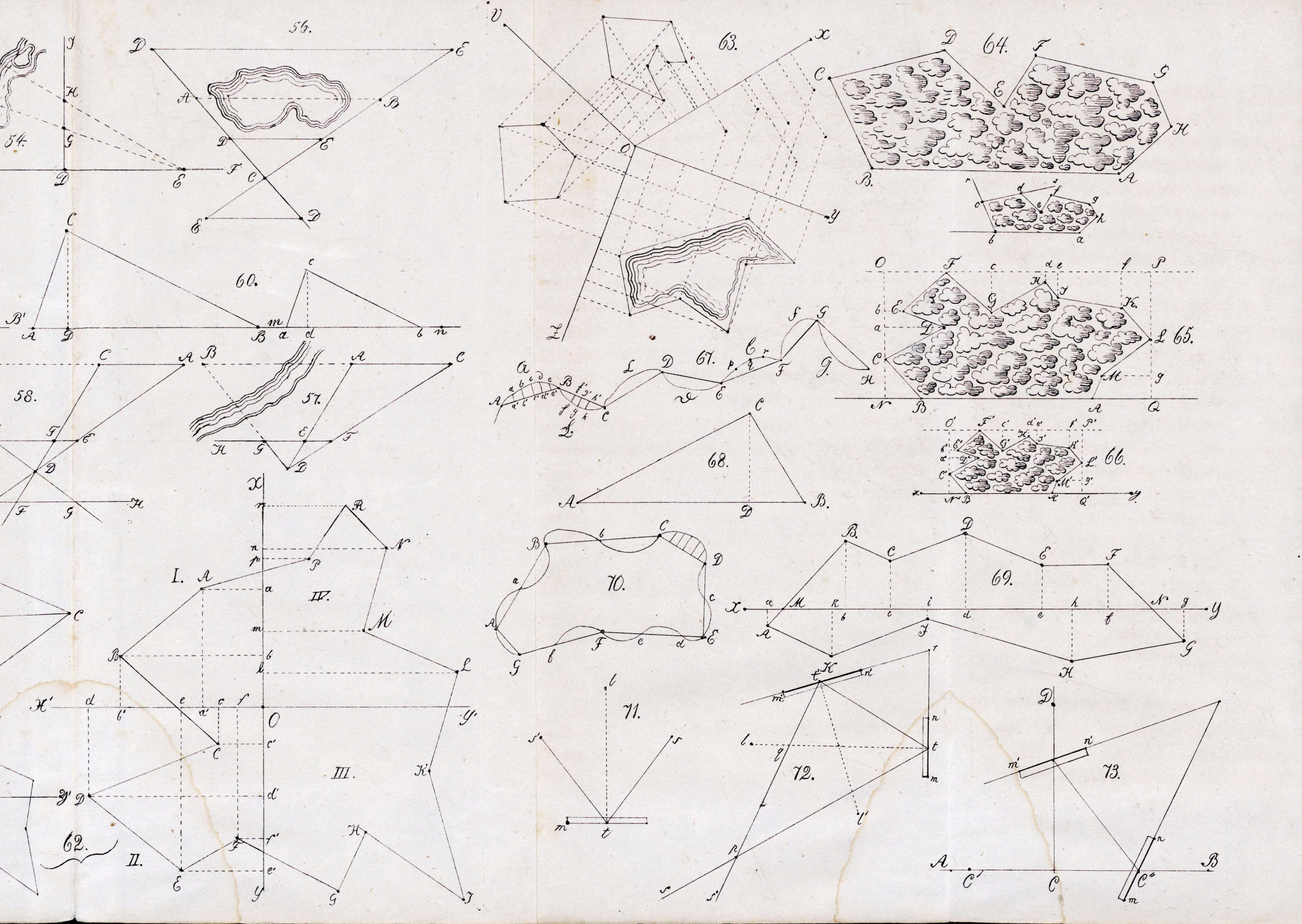
Um vermittelst des Spiegelwinkelkreuzes von dem Punkte D, Fig. 73, auf die Linie AB eine Senkrechte zu fällen, stellt man sich auf der Linie AB in dem Punkte C′, welchen man nach Augenmaaß für den Fußpunkt der aus D auf AB gefällten Senkrechten hält, hin, und gibt dem vor sich gehaltenen Spiegelwinkelkreuze nach und nach eine solche Lage, daß man in dem Spiegel m′n′ den im Punkte A befindlichen Gegenstand, also das Bild von A, erblickt; liegt nun auch der im Punkte D befindliche Gegenstand in derselben, d. h. in der durch das Bild von A und den Standpunkt C′ bestimmten Richtung, so ist offenbar C′ der Fußpunkt der vom Punkte D auf die Linie AB zu fällenden Senkrechten; ist dieses aber nicht der Fall, so wählt man nach und nach in der Linie AB die Standpunkte C″, C‴, ... , bis man einen Standpunkt C ausfindig macht, von dem aus man das Bild von A und den Gegenstand in D in derselben Richtung liegend erblickt. Daß man im Vorhergehenden anstatt den in A befindlichen Gegenstand zu spiegeln, ebenso gut den Gegenstand in B hätte spiegeln können, versteht sich von selbst und bedarf wohl kaum einer Erwähnung.

Das Spiegelwinkelkreuz steht, was Genauigkeit anlangt, dem Winkelkreuze nach.

Druckfehler und Berichtigungen in Lief. 1 und 2.

Seite	15	Zeile	16	von oben lies: logarithmischen statt trigonometrischen.
„	21	„	1	von oben setze hinter A′X′ „haben."
„	30	„	5	von oben lies: sehr statt ehr.
„	40	„	14	von unten füge hinter „Winkelkreuz" die Worte „und mit der Kette" hinzu.
„	42	„	8	von oben setze: Q′ statt Q(1).
„	45	„	13	von oben lies: zu fällenden statt gefällten.
„	48	„	14	von oben füge hinter „Winkelkreuz" noch die Worte „und mit der Kette" hinzu.
„	48	„	1	von unten füge hinter „ab" noch die Worte „zu liegen kommt" hinzu.
„	50	„	11	von unten setze beim letzten $(pq)^2 : c$ statt p.
„	52	„	4	von unten setze: 24 statt 21.
„	52	„	5	und 10 v. unten lies: logarithmischen statt trigonometrischen.
„	53	„	1	und 7 von oben lies: logarithmischen statt trigonometrischen.
„	66	„	8	von unten lies: meist statt eigentlich.


20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
58.
59.
61.
62.



56.
54.
60.
58.
57.
62.
I.
II.
III.
IV.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.