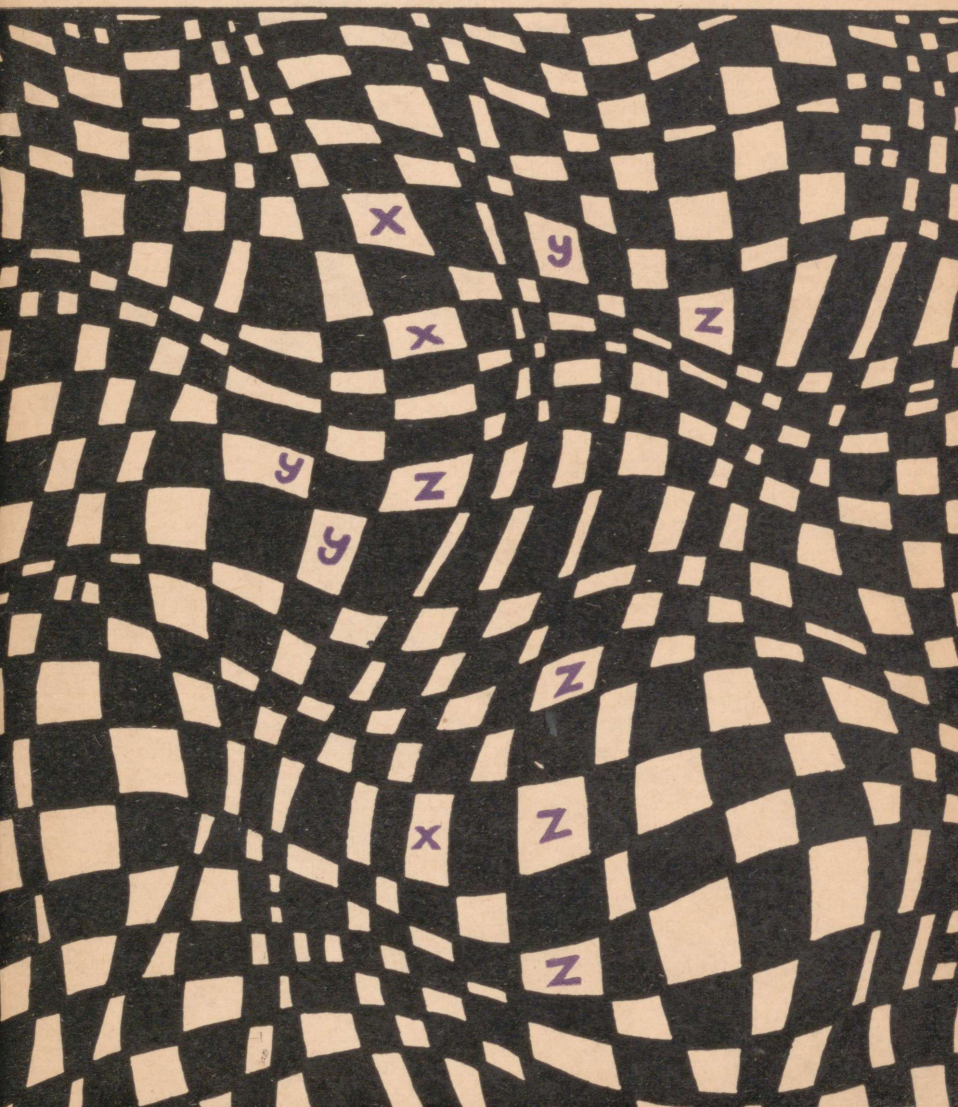


I. GELFAND, J. GLAGOLEVA,  
A. KIRILLOV

# KOORDINAATIDE MEETOD

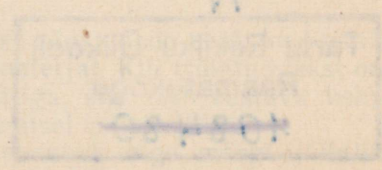


N/A A-28331

I. GELFAND, J. GLAGOLEVA, A. KIRILLOV

030

# KOORDINAATIDE MEETOD



KIRJASTUS „VALGUS“ · TALLINN 1967

ARIIIVKOGU

Originaali tiitel: Математика  
Библиотечка физико-математической школы  
Выпуск I

И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов  
МЕТОД КООРДИНАТ

Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической  
литературы  
Москва 1965

Tõlkinud A. Jägel

Kunstiliselt kujundanud J. Arrak



TARTU ÜLIKOOLI  
RAAMATUKOGU

See raamatuke, esimene «Füüsika-matemaatika kooli raamatukogu» matemaatilises seerias, on pühendatud koordinaatide meetodile. Ta ei nõua mingeid erilisi, kooliprogrammi üheksanda klassi raamidest kaugemale ulatuvaid teadmisi. Brošüür pole aga siiski kirjutatud kiireks lugemiseks, vaid süstemaatiliseks õppimiseks. Seepärast ei ole seda võib-olla kerge lugeda. Et kergendada teie «raamatutekkonda», paigutame lehekülgede äärtele liiklusmärgid. Lugemisel pöörake neile tähelepanu.

Märgiga «Parkimiskoht» on tähistatud tekst, mis sisaldab edasise mõistmiseks vajalikke definitsioone, valemeid jne. Nii-suguse märgi juures on tarvis peatuda, see koht mitu korda läbi lugeda ja kindlalt meelde jätta.



Märk «Järsk tõus» asub seal, kus sisaldub raskem materjal. Kui trükitud tekst on peenikese šriftiga, siis võib vastava koha esimesel lugemisel vahele jätta.



Eriti tähelepanelik olge märgi «Ohtlik kurv» juures. Sageli asub see kohal, kus esimesel pilgul tundub kõik olevat kerge ja lihtne. Kui aga aru saadakse valesti, mitte nii nagu peab, võib see edaspidi viia tõsisetele vigadele.



Väga suurt tähtsust omistame ülesannete lahendamisele. Ülesanded ja küsimused on paigutatud osadesse «Harjutused», kuid mõnikord esinevad ka tekstis. Lahendage need kindlasti!

Soovime teile edukat õppimist!

*Autorid*

Eessõna . . . . .	3
Sissejuhatus . . . . .	5

## I PEATÜKK

§ 1. Punkti koordinaadid sirgel . . . . .	7
1. Arvtelg . . . . .	7
2. Arvu absoluutväärtus . . . . .	9
3. Kahe punkti vaheline kaugus . . . . .	11
§ 2. Punkti koordinaadid tasandil . . . . .	13
4. Koordinaattasand . . . . .	13
5. Koordinaatidevahelised seosed . . . . .	16
6. Kahe punkti vaheline kaugus . . . . .	18
7. Kujundite esitamine . . . . .	21
8. Alustame ülesannete lahendamist . . . . .	25
9. Teised koordinaatide süsteemid . . . . .	28
§ 3. Punkti koordinaadid ruumis . . . . .	31
10. Koordinaatteljed ja -tasandid . . . . .	31
11. Kujundite esitamine ruumis . . . . .	35

## II PEATÜKK

§ 1. Sissejuhatus . . . . .	40
1. Mõningaid üldisi arutlusi . . . . .	40
2. Geomeetria aitab arvutada . . . . .	41
3. Neljamõõtmelise ruumi sissetoomise vajalikkusest . . . . .	44
4. Neljamõõtmelise ruumi iseärasused . . . . .	45
5. Veidi füüsikat . . . . .	47
§ 2. Neljamõõtmeline ruum . . . . .	48
6. Koordinaatteljed ja -tasandid . . . . .	49
7. Mõningaid ülesandeid . . . . .	54
§ 3. Neljamõõtmeline kuup . . . . .	56
8. Sfääri ja kuubi definitioonid . . . . .	56
9. Neljamõõtmelise kuubi ehitus . . . . .	58
10. Ülesandeid kuubist . . . . .	65

Kui te loete ajalehest teadet uue tehiskaaslase väljalennutamise kohta, siis pöörake tähelepanu sõnadele: «Sputnik lennutati orbiidile, mis on lähedane ettearvestatule». Mõelge: kuidas on võimalik ette arvestada, s. o. arvudes uurida sputniku orbiiti — mingit joont. On ju selleks vaja osata tõlkida arvude keelde geomeetrilisi mõisteid ja esmajärjekorras osata arvude abil määrata punkti asukohta ruumis (või tasandil, või Maa pinnal).

Koordinaatide meetod — see on punkti või keha asukoha määramise viis arvude või teiste sümbolite abil.

Arve, mille abil määratakse punkti asukoht, nimetatakse punkti *koordinaatideks*.

Teile hästi tuttavad geograafilised koordinaadid määravad punkti asendi pinnal (Maa pinnal) — Maa pinna igal punktil on kaks koordinaati: laius ja pikkus.

Et määrata punkti asukohta ruumis, on vaja juba mitte kahte, vaid kolme arvu. Näiteks et määrata sputniku asendit, võib näidata tema kõrguse Maa pinnast, aga samuti punkti laiuse ja pikkuse, mille kohal ta asetseb.

Kui on teada sputniku trajektoor, s. o. joon, mida mööda ta liigub, siis selleks, et määrata sputniku asukohta sellel joonel, on piisav näidata üks arv, näiteks võib näidata vahemaa, mille sputnik läbib mingist trajektoori punktist alates.<sup>1</sup>



<sup>1</sup> Mõnikord öeldakse, et joonel on üks mõõde, pinnal kaks mõõdet ja ruumil kolm. Seejuures mõõdete arvu all mõeldakse koordinaatide arvu, mis määravad punkti asukoha.

Täpselt samal viisil kasutatakse koordinaatide meetodit punkti asukoha määramiseks raudteeliinil: näidatakse kilomeetriposti number. See number ongi raudteeliini punkti koordinaadiks.

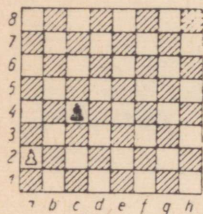
Omapäraseid koordinaate kasutatakse males, kus iga malendi asukoht laual määratakse tähe ja arvu abil. Ruutude vertikaalread tähistatakse ladina tähestiku tähtedega, horisontaalread aga arvudega. Igale malelaua ruudule vastab täht, mis näitab vertikaalrida, millel ruut asetseb, ja number, mis näitab horisontaalrida. Meie joonisel (joon. 1) asetseb valge ettur ruudul  $a2$ , must ettur ruudul  $c4$ . Seega võib valge etturi koordinaatideks lugeda  $a2$ , musta etturi koordinaatideks aga  $c4$ .

Koordinaatide kasutamine males võimaldab mängida malet üleskirjutise järgi. Ka käigu teatamiseks pole vajadust üles joonistada malelauda ja malendite asetust. Piisab, kui näiteks öelda: «Suurmeister mängis  $e2—e4$ », ja juba on kõigile selge, kuidas alustati partiid.

Matemaatikas kasutatavad koordinaadid võimaldavad arvude abil määrata ruumi või tasandi või joone suvalise punkti asukoha. See annab võimaluse «šifreerida» igat liiki kujundeid, neid arvude abil üles kirjutada. Ühe näite sellisest šifreeringust leiame punkti 4 harjutuses 1.

Eriti tähtis on koordinaatide meetod selle poolest, et see võimaldab kasutada kaasaegseid arvutusmasinaid mitte ainult igat liiki arvutusteks, vaid ka geomeetriseliste ülesannete lahendamiseks, suvaliste geomeetriseliste objektide ja nende vaheliste seoste uurimiseks.

Me alustame matemaatikas kasutatavate koordinaatidega tutvumist kõige lihtsama juhu analüüsist: punkti asukoha määramisest sirgel.



Joon. 1

## § 1. Punkti koordinaadid sirgel

### 1. Arvtelg

Et määrata punkti asukoht sirgel, toimatakse järgmiselt. Sirgel valitakse *lähtepunkt* (mingi punkt  $O$ ), *mõõtkava ühik* (lõik  $e$ ) ja *suund*, milline loetakse positiivseks (joonisel 2 näidatud noolekesega).

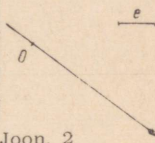
Sirget, millel on valitud lähtepunkt, mõõtkava ühik ja positiivne suund, nimetatakse *arvteljeks*.

Punkti asukoha määramiseks sirgel on piisav nimetada üks arv, näiteks  $+5$ . See näitab, et punkt paikneb positiivses suunas viie ühiku kaugusel lähtepunktist.

Arvu, mis määrab punkti asukoha arvteljel, nimetatakse punkti *koordinaadiks* sellel teljel.

Punkti koordinaat arvteljel on võrdne selle punkti ja lähtepunkti vahelise kaugusega, mis on avaldatud valitud mõõtkava ühikuis ja võetud märgiga pluss, kui punkt asub lähtepunktist positiivses suunas, ja märgiga miinus vastupidisel juhul. Lähtepunkti nimetatakse tihti *koordinaatide alguspunktiks*. Lähtepunkti (punkti  $O$ ) koordinaat on võrdne nulliga.

Kasutatakse tähistusi:  $M(-7)$ ,  $A(x)$  jne. Esimene neist tähistab punkti  $M$ , mille koordinaat on miinus seitse, teine punkti  $A$ , mille koordinaat on  $x$ . Sageli öeldakse lühidalt: «punkt miinus seitse», «punkt  $x$ » jms.



Joon. 2



Tuues sisse koordinaadi mõiste, lõime vastavuse arvude ja sirge punktide vahel. Seejuures on täidetud tähelepanuväärne omadus: sirge igale punktile vastab kindel arv ja igale arvule vastab kindel punkt sirgel.

Võtame kasutusele spetsiaalse termini: vastavust kahe hulga vahel nimetatakse *üksüheseks*, kui esimese hulga igale elemendile vastab teise hulga üks element ja (samas vastavuses) teise hulga iga element vastab mingile esimese hulga elemendile. Esimesel pilgul näib täiesti lihtne korraldada üksühest vastavust sirge punktide ja arvude vahel. Kuid kui matemaatikud sügavamalt järele mõtlesid selle üle, siis ilmnes, et sellesse fraasi kuuluvate sõnade mõtte täpseks mõistmiseks oli vaja luua suur ja keeruline teooria. Kohe kerkivad kaks «lihtsat» küsimust, millele on raske vastata: mis on arv ja mida mõista punkti all?

Need küsimused kuuluvad niinimetatud geomeetria alustesse ja arvude aksiomaatikasse. Hiljem, teistes meie väljaannetes vaatleme neid küsimusi veidi üksikasjalikumalt.

Vaatamata sellele et küsimus punkti asukoha määramisest sirgel on äärmiselt lihtne, on vaja seda sügavalt mõista, et harjuda arvudevahelistes seostes nägema geometrilisi seoseid ja vastupidi.

Kontrollige ennast.

Kui te õigesti mõistsite § 1, siis tulete raskuseta toime teile esitatavate harjutustega. Kui te aga harjutusi ei suuda lahendada, siis see tähendab, et jätsite midagi vahele või ei saanud aru. Sel juhul pöörduge tagasi ja lugege see paragrahv uuesti läbi.

## Harjutused

1. a) Joonistage arvteljele punktid

$$A(-2), B\left(\frac{13}{3}\right), K(0).$$

b) Joonistage arvteljele punkt  $M(2)$ . Leidke arvteljel kaks punkti  $A$  ja  $B$ , mis asuvad punktist  $M$  kolme ühiku kaugusel. Millega võrduvad punktide  $A$  ja  $B$  koordinaadid?

2. a) On teada, et punkt  $A(a)$  on punk-

tist  $B(b)$  paremal<sup>1</sup>. Milline arv on suurem:  $a$  või  $b$ ?

b) Punkte arvteljele joonistamata öelge, kumb punktidest on paremal:  $A(-3)$  või  $B(-4)$ ,  $A(3)$  või  $B(4)$ ,  $A(-3)$  või  $B(4)$ ,  $A(3)$  või  $B(-4)$ ?

3. Kumb punktidest on paremal:  $A(a)$  või  $B(-a)$ ? (*Vastus.* Ei tea. Kui  $a$  on positiivne arv, siis  $A$  on punktist  $B$  paremal, kui aga  $a$  on negatiivne arv, siis  $B$  on punktist  $A$  paremal).

4. Mõelge, kumb punktidest on paremal: a)  $M(x)$  või  $M(2x)$ ; b)  $A(c)$  või  $B(c+2)$ ; c)  $A(x)$  või  $B(x-a)$ ; (*Vastus.* Kui  $a$  on suurem nullist, siis on paremal  $A$ ; kui  $a$  on väiksem nullist, siis on paremal  $B$ . Kui  $a=0$ , siis  $A$  ja  $B$  ühtivad.) d)  $A(x)$  või  $B(x^2)$ .

5. Joonistage arvteljele punktid  $A(-5)$  ja  $B(7)$ . Leidke lõigu  $AB$  keskpunkti koordinaadid.

6. Märkige arvteljel punase pliiatsiga punktid, mille koordinaadid on: a) täisarvud; b) positiivsed arvud.

7. Märkige arvteljel kõik punktid  $x$ , mille puhul: a)  $x < 2$ ; b)  $x \geq 5$ ; c)  $2 < x < 5$ ; d)  $-3\frac{1}{4} \leq x \leq 0$ .

## 2. Arvu absoluutväärtus

Arvu  $x$  absoluutväärtuseks (või arvu  $x$  mooduliks) nimetatakse punkti  $A(x)$  kaugust koordinaatide alguspunktist.

Arvu  $x$  moodulit tähistatakse püstkriipsukestega:  $|x|$  —  $x$  moodul.

Näiteks,  $|-3| = 3$ ,  $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ .

<sup>1</sup>. Siin ja edaspidi eeldatakse, et telg on horisontaalne ning positiivseks suunaks on suund vasakult paremale.



Siit järeldub, et

kui  $x > 0$ , siis  $|x| = x$ ,

kui  $x < 0$ , siis  $|x| = -x$ ,

kui  $x = 0$ , siis  $|x| = 0$ .

Kuna punktid  $a$  ja  $-a$  asetsevad võrdsetel kaugustel koordinaatide alguspunktist, siis arvude  $a$  ja  $-a$  absoluutväärtused on võrdsed:  $|a| = |-a|$ .

### Harjutused

1. Millised väärtused võivad olla avaldisel  $\frac{|x|}{x}$ ?

2. Kuidas kirjutada mooduli märgita avaldised: a)  $|a^2|$ ; b)  $|a - b|$ , kui  $a > b$ ; c)  $|a - b|$ , kui  $a < b$ ; d)  $|-a|$ , kui  $a$  on negatiivne arv?

3. On teada, et  $|x - 3| = x - 3$ . Missugune võib olla  $x$ ?

4. Kus kohal arvteljel asuvad punktid  $x$ , mille korral

a)  $|x| = 2$ ; b)  $|x| > 3$ ?

*Lahendus.* Kui  $x$  on positiivne arv, siis  $|x| = x$ , järelikult  $x > 3$ ? Kui  $x$  on negatiivne arv, siis  $|x| = -x$ ; siis võrratusest  $-x > 3$  järeldub, et  $x < -3$ . (*Vastus.* Kõik punktid, mis asetsevad punktist  $-3$  vasakul, ja kõik punktid, mis asetsevad punktist  $3$  paremal. Selle vastuse võime saada kiiremini, kui arvestada, et  $|x|$  on punkti  $x$  kaugus koordinaatide alguspunktist. Siis on selge, et otsitavad punktid asuvad koordinaatide alguspunktist kaugusel, mis on suurem kui  $3$ . Vastuse saame jooniselt.)

c)  $|x| \leq 5$ ; d)  $3 < |x| < 5$ ?

e) Näidake, kus asuvad punktid, mille korral

$$|x - 2| = 2 - x.$$

5. Lahendage võrrandid: a)  $|x - 2| = 3$ ; b)  $|x + 1| + |x + 2| = 1$ . (*Vastus.* Võrrandil on lõpmata palju lahendeid: kõikide lahendite hulk täidab lõigu  $-2 \leq x \leq -1$ , s. o.



võrrandit rahuldab iga suvaine arv, mis on suurem või võrdne kui  $-2$  ja väiksem või võrdne kui  $-1$ .)

### 3. Kahe punkti vaheline kaugus

Alustame harjutusest. Leidke punktide

a)  $A(-7)$  ja  $B(-2)$ ,

b)  $A\left(-3\frac{1}{2}\right)$  ja  $B(-9)$

vaheline kaugus. Nende ülesannete lahendamise on lihtne, kuna punktide koordinaatide järgi saame määrata, milline punkt on parempoolne, milline vasakpoolne, kuidas asuvad punktid koordinaatide alguspunkti suhtes jne. Seda teades on aga täiesti lihtne mõista, kuidas arvutatakse otsitav vahemaa.

Nüüd teeme teile ettepaneku tuletada arvtelje kahe punkti vahelise kauguse üldvalem, s. o. lahendada järgmine ülesanne.

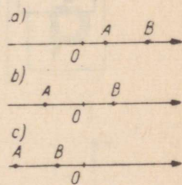
Ülesanne. On antud punktid  $A(x_1)$  ja  $B(x_2)$ . Leida nende punktide vaheline kaugus<sup>1</sup>.

Lahendus. Kuna nüüd punktide koordinaatide konkreetset väärtust on tundmatud, siis on vaja läbi vaadata kolme punkti  $A$ ,  $B$  ja  $O$  (koordinaatide alguspunkt) vastastikuse asetuse kõikvõimalikud juhud.

Selliseid juhte on kuus. Kõigepealt vaatleme juhte, kus  $B$  on punktist  $A$  paremal. Selliseid juhte on 3 (joon. 3, *a*, *b*, *c*).

Esimesel neist (joon. 3, *a*) on punktide vaheline kaugus  $q(A, B)$  võrdne punktide  $B$  ja  $A$  kauguste vahega koordinaatide alguspunktist. Kuna sel juhul  $x_1$  ja  $x_2$  on positiivsed, siis

$$q(A, B) = x_2 - x_1.$$



Joon. 3

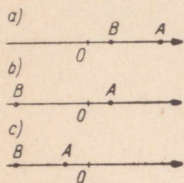
<sup>1</sup> Harilikult kasutatakse kauguse tähistamiseks kreeka tähte  $q$  («roo»). Avaldis  $q(A, B)$  tähistab punktide  $A$  ja  $B$  vahelist kaugust

Teisel juhul (joon. 3, *b*) on punktidevaheline kaugus võrdne punktide *B* ja *A* kauguste summaga koordinaatide alguspunktist, s. o. endiselt

$$q(A, B) = x_2 - x_1,$$

kuna sel juhul  $x_2$  on positiivne ja  $x_1$  negatiivne.

Näidake, et ka kolmandal juhul (joon. 3, *c*) määratakse punktidevaheline kaugus sama valemiga.



Joon. 4

Ülejäänud kolm juhtu (joon. 4) erinevad läbivaadatuist vaid selle poolest, et punktid *A* ja *B* on vahetanud oma osad. Iga juhu korral võib aga kontrollida, et punktide *A* ja *B* vaheline kaugus on määratav valemiga

$$q(A, B) = x_1 - x_2.$$

Seega kõigil juhtudel, kui  $x_2 > x_1$ , on punktidevaheline kaugus  $q(A, B)$  võrdne  $x_2 - x_1$ , ja kõigil juhtudel, kui  $x_1 > x_2$ , on see kaugus võrdne  $x_1 - x_2$ . Meenutades mooduli definitsiooni, võime punktidevahelise kauguse kirjutada ühtse valemiga, mis on sobiv kõigil kuuel juhul:

$$q(A, B) = |x_2 - x_1|.$$

Soovi korral võib selle valemi esitada ka kujul

$$q(A, B) = |x_1 - x_2|.$$

Kui olla pedant, siis on vaja läbi vaadata veel juht, mil  $x_2 = x_1$ , s. o. kui punktid *A* ja *B* langevad kokku. On selge, et sel juhul

$$q(A, B) = |x_2 - x_1|.$$

Seega on püstitatud ülesanne lahendatud täielikult.

## Harjutused

1. Märkige arvteljel punktid  $x$ , mille korral a)  $q(x, 7) < 3$ ; b)  $|x - 2| > 1$ ; c)  $|x + 3| = 3$ .

2. Arvteljel on antud kaks punkti  $A(x_1)$  ja  $B(x_2)$ . Leida lõigu  $AB$  keskpunkti koordinaadid. (Märkus. Selle ülesande lahendamisel peate läbi vaatama punktide  $A$

**P**

ja  $B$  kõik võimalikud asetused arvteljel või kirjutama lahendi, mis sobib korraga kõigi juhtude jaoks.)

3. Leida arvteljel sellise punkti koordinaadid, mis asub punktile  $A(-9)$  kolm korda lähemal kui punktile  $B(-3)$ .

4. Lahendage nüüd alapunkti 2 harjutuse 5 võrrandid a) ja b), kasutades kahe punkti vahelise kauguse mõistet.

5. Lahendage järgmised võrrandid:

a)  $|x + 3| + |x - 1| = 5$ ;

b)  $|x + 3| + |x - 1| = 4$ ;

c)  $|x + 3| + |x - 1| = 3$ ;

d)  $|x + 3| - |x - 1| = 5$ ;

e)  $|x + 3| - |x - 1| = 4$ ;

f)  $|x + 3| - |x - 1| = 3$ .

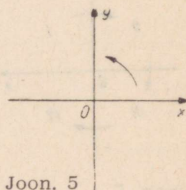
## § 2. Punkti koordinaadid tasandil

### 4. Koordinaattasand

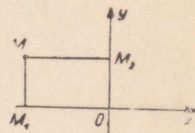
Et määrata punkti koordinaate tasandil, tõmbame sel tasandil kaks teineteisega ristuvat arvtelge. Üht telgedest nimetatakse abstsissiteljeks ehk  $x$ -teljeks, teist ordinaatteljeks ehk  $y$ -teljeks.

Telgede suunad valitakse tavaliselt nii, et  $x$  ja  $y$  positiivsed poolteljed ühtiksid, kui pöörata  $x$ -telge  $90^\circ$  võrra vastu kellaosuti liikumise suunda (joon. 5). Telgede lõikepunkti nimetatakse *koordinaatide alguspunktiks* ja tähistatakse tähega  $O$ . See punkt on lähtepunktiks mõlemale teljele  $x$  ja  $y$ . Mõõtkava ühik neil telgedel valitakse reeglina ühesugune.

Võtame tasandil mingi punkti  $M$  ja tõmbame sellest punktist  $x$ - ja  $y$ -teljele ristsirge (joon. 6). Nende ristsirgete ja telgede lõikepunkte  $M_1$  ja  $M_2$  nimetatakse punkti  $M$  *projektsioonideks* koordinaattelgedel.



Joon. 5



Joon. 6

Punkt  $M_1$  on  $x$ -teljel, mistõttu vastab talle kindel arv  $x$  — tema koordinaat sellel teljel. Täpselt samuti vastab punktile  $M_2$  kindel arv  $y$  — tema koordinaat  $y$ -teljel.

**P**

Seega seatakse tasandil igale punktile  $M$  vastavusse kaks arvu  $x$  ja  $y$ , mida nimetatakse punkti  $M$  ristkoordinaatideks. Arvu  $x$  nimetatakse punkti  $M$  abstsissiks, arvu  $y$  aga ordinaadiks.

Vastupidi, igale kahele arvule  $x$  ja  $y$  võime seada vastavusse tasandi mingi punkti, mille abstsissiks on  $x$  ja ordinaadiks  $y$ .



Nüüd on kindlaks tehtud üksühene vastavus<sup>1</sup> tasandi punktide ja arvupaaride  $x$  ja  $y$  vahel, mis järgnevad kindlas järjekorras (esvalt  $x$ , seejärel  $y$ ).

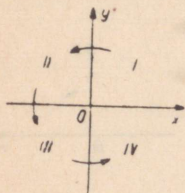
**P**

Seega nimetatakse tasandi punkti ristkoordinaatideks selle punkti projektsioonide koordinaate koordinaattelgedel.

Punkti  $M$  koordinaadid kirjutatakse tavaliselt järgmiselt:  $M(x, y)$ . Esimesele kohale kirjutatakse abstsiss, teisele ordinaat. Mõnikord öeldakse lühiduse mõttes «punkt koordinaatidega  $(3, -8)$ » asemel «punkt  $(3, -8)$ ».

Koordinaatteljed jaotavad tasandi neljaks veerandiks (kvadrandiks). Esimeseks veerandiks loetakse  $x$  positiivse pooltelje ja  $y$  positiivse pooltelje vahelist tasandi osa. Edasi nummerdatakse veerandid järjekorras vastupidiselt kellaosuti liikumise suunale (joon. 7).

Et harjuda koordinaatidega tasandil, tehke mõned harjutused.



Joon. 7

<sup>1</sup> Üksühene vastavus tasandi punktide ja arvupaaride vahel on vastavus, mille korral igale punktile vastab üks kindel arvupaar ja igale arvupaarile üks kindel punkt, kusjuures erinevatele punktidele vastavad erinevad arvupaarid.

Kõigepealt esitame teile mõned lihtsad ülesanded.

1. Millised tähed on siin šifreeritud?  
 (6, 2), (9, 2), (12, 1), (12, 0), (11, -2),  
 (9, -2), (4, -2), (2, -1), (1, 1), (-1, 1),  
 (-2, 0), (7, 1), (2, 1), (5, 2), (5, 0), (9, 1),  
 (10, -2), (9, -1), (7, 0), (2, 2), (-2, 2),  
 (-2, 1), (-2, -1), (0, 0), (2, 0), (2, -2),  
 (4, -1), (12, -1), (12, -2), (11, 3),  
 (7, 2), (4, 0), (9, 0), (4, 2), (10, 3),  
 (-2, -2), (4, 1), (6, 0), (12, 2), (6, -1),  
 (7, -2).

2. Punkti  $A(1, -3)$  konstrueerimata õelge, millises veerandis see punkt asetseb.

3. Millistes veerandites võib punkt asetseada, kui tema abstsiss on positiivne?

4. Missuguste märkidega on teise veerandi punktide koordinaadid? kolmanda veerandi punktide koordinaadid? neljanda veerandi punktide koordinaadid?

5.  $x$ -teljel on võetud punkt koordinaadiga  $-5$ . Missugused on tema koordinaadid tasandil? (*Vastus.* Abstsiss on  $-5$ , ordinaat 0.)

Ja veidi raskemad ülesanded.

6. Joonestage punktid  $A(4, 1)$ ,  $B(3, 5)$ ,  $C(-1, 4)$  ja  $D(0, 0)$ . Kui joonestasite need punktid õigesti, siis saite ruudu tipud. Missugune on selle ruudu külje pikkus? pindala<sup>1</sup>? Leidke ruudu külgede keskpunktide koordinaadid. Kas te ei saaks tõestada, et  $ABCD$  on ruut? Leidke veel neli punkti (näidake nende koordinaadid) nii, et need oleksid ruudu tippudeks.

7. Joonestage korrapärane kuusnurk  $ABCDEF$ . Võtke punkt  $A$  koordinaatide alguspunktiks, abstsissitelg suunake punktist  $A$  punkti  $B$ , mõõtkava ühikuks võtke

---

<sup>1</sup> Pindala mõõduühikuks valime ruudu pindala, mille külg on võrdne mõõtkava ühikuga telgedel.

lõik  $AB$ . Leidke selle kuusnurga kõigi tip-pude koordinaadid. Mitu lahendit on üles-andel?

8. Tasandil on antud punktid  $A(0, 0)$ ,  $B(x_1, y_1)$  ja  $D(x_2, y_2)$ . Missugused peavad olema punkti  $C$  koordinaadid, et nelinurk  $ABCD$  oleks rööpkülik?

## 5. Koordinaatidevahelised seosed

Kui on teada punkti mõlemad koordi-naadid, siis on tema asend tasandil täie-likult määratud. Mida võib öelda punkti asendi kohta, kui on teada ainult üks tema koordinaatidest? Näiteks: kus asuvad kõik punktid, mille abstsiss on 3? Kus asuvad kõik punktid, mille üks koordinaat (kuid milline, ei tea) on 3?

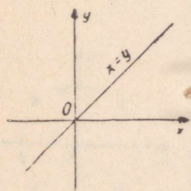
Kahest koordinaadist ühe etteandmine määrab üldiselt öeldes mingi joone. Sel-lel faktil põhineb isegi Jules Verne'i romaani «Kapten Granti lapsed» süžee. Raamatu kangelased teadsid ainult üht laevahuku koordinaatidest (laiust), mis-tõttu (selleks et läbi käia kõik võimalikud kohad) nad olid sunnitud rändama ümber maakera mööda paralleeli — mööda joont, mille iga punkti laius oli  $37^{\circ}11'$ .

Koordinaatidevahelised seosed määra-vad kõige sagedamini mitte ühe punkti, vaid teatava hulga (kogumi) punkte. Näiteks, kui märkida ära kõik punktid, mille abstsiss on võrdne ordinaadiga, s. o. punktid, mille koordinaadid rahulda-vad võrrandit

$$x = y,$$

siis saame sirge — esimese ja kolmanda veerandi poolitaja (joon. 8).

Mõnikord öeldakse «punktide hulk» ase-mel «punktide geomeetriline koht». Näi-teks, nende punktide geomeetriline koht, mille koordinaadid rahuldavad seost  $x = y$ , on (nagu me äsja ütlesime) esimese ja kol-manda veerandi poolitaja.



Joon. 8

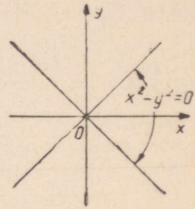


Ei maksa aga mõelda, et igasugune koordinaatidevaheline seos määrab tingimata joone tasandil. Te võite näiteks kergesti veenduda, et seos  $x^2 + y^2 = 0$  määrab üheainsa punkti — koordinaatide alguspunkti. Seost  $x^2 + y^2 = -1$  ei rahulda aga ühegi punkti koordinaadid tasandil (ta määrab niinimetatud «tühja» hulga).

Seos

$$x^2 - y^2 = 0$$

määrab tasandil ühe paari ristuvaid sirgeid (joon. 9). Seos  $x^2 - y^2 > 0$  määrab aga terve piirkonna (joon. 10).



Joon. 9

## Harjutused

1. Selgitage, millised punktihulgad määratakse alljärgnevate seostega:

a)  $|x| = |y|$ ;

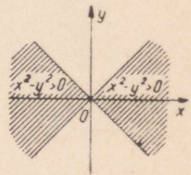
b)  $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$ ;

c)  $|x| + x = |y| + y$ ;

d)  $[x] = [y]$ ;<sup>1</sup>

e)  $x - [x] = y - [y]$ ;

f)  $x - [x] > y - [y]$ . (Vastus ülesandele 1f on antud joonisega lk. 67.)



Joon. 10

2. Sirge tee eraldab heinamaa põllust.

Jalakäija liigub mööda teed kiirusega  $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ,

mööda heinamaad kiirusega  $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , mööda

põldu kiirusega  $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Algmomendil seisab

jalakäija teel. Joonistage piirkond, mis koosneb neist punktidest, kuhu jalakäija võib sattuda ühe tunni möödudes.

3. Tasand jaotatakse koordinaattelgedega neljaks veerandiks. Mööda I ja III veerandit (koordinaatteljed kaasa arva-

<sup>1</sup> Sümboliga  $[x]$  tähistatakse arvu  $x$  täisosa, s. o. suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu  $x$ . Näiteks,  $[3,5] = 3$ ,  $[5] = 5$ ,  $[-2,5] = -3$ .

tud) saab liikuda kiirusega  $a$ , mööda II ja IV veerandit (koordinaatteljed välja arvatud) aga kiirusega  $b$ . Joonistage punktide hulk, kuhu võib koordinaatide alguspunkti sattuda teatud aja möödudes, kui seejuures:

a) kiirus  $a$  on kaks korda suurem kui kiirus  $b$ ,

b) kiiruste vahel kehtib seos

$$a = b\sqrt{2}.$$

## 6. Kahe punkti vaheline kaugus

Me oskame nüüd teiega rääkida punktide arvude keeles. Näiteks pole meil enam vaja selgitada: võtke punkt, mis asub  $y$ -teljest kolme ühiku võrra paremal ja  $x$ -teljest viie ühiku võrra allpool. Piisab, kui lihtsalt öelda: võtke punkt  $(3, -5)$ .

Me juba mainisime, et see loob teatud eelised. Nii võime telegraafi teel edasi anda punktidest koostatud joonise, selle teatavaks teha arvutusmasinale, mis üldse ei mõista jooniseid, arve aga hästi.

Eelmises punktis andsime arvudevaheliste seoste abil mõningad punktihulgad tasandil. Nüüd proovime järk-järgult tõlkida arvude keelde teised geomeetrilised mõisted ja faktid.

Alustame lihtsast ja tavalisest ülesandest: leida tasandi kahe punkti vaheline kaugus.

Nagu alati, eeldame, et punktid on antud oma koordinaatidega. Siis seisneb meie ülesanne selles, et leida reegel, mille põhjal saab punktide koordinaatide järgi leida punktidevaheline kaugus. Selle reegli tuletamisel on muidugi lubatud kasutada joonise abi, kuid reegel ise ei tohi sisaldada mitte mingisuguseid viiteid joonisele, vaid ta peab ainult näitama, milliseid tehteid ja millises järjekorras on vaja teha antud arvudega (punktide koordinaatidega), et

saada otsitav arv (punktidevaheline kaugus).

Võib-olla näib mõnele lugejale see lähenemisviis ülesande lahendamiseks imelikuna ja kunstlikuna. Mis on lihtsam, ütlevad nad, punktid on antud, olgu kas või koordinaatidega. Joonestage need punktid, võtke joonlaud ja mõõtke nendevaheline kaugus.

See moodus polegi mōnikord nii halb. Kuid kujutage endale ette, et teil on tege- mist arvutusmasinaga. Selles ei ole joon- lauda ja ta ei joonesta, arvutada aga oskab ta niivõrd kiiresti<sup>1</sup>, et see ei tekita talle mingit probleemi. Pange tähele, et meie ülesanne on püstitatud nii, et punktide- vahelise kauguse arvutamise reegel koos- neks käskudest, mida masin on võimeline täitma.

Püstitatud ülesannet on parem esialgu lahendada erijuhul, kui üks antud punkti- dest asub koordinaatide alguspunktis. Alustage mõningaist arvulistest näidetest. Leidke punktide (12, 5); (−3, 15) ja (−4, −7) kaugus koordinaatide algus- punktist.

*Nõuanne.* Kasutage Pythagorase teo- reemi.

Nüüd kirjutage välja üldine valem punkti kauguse leidmiseks koordinaatide alguspunktist.

*Vastus.* Punkti  $M(x, y)$  kaugus koordi- naatide alguspunktist määratakse valemiga

$$q(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

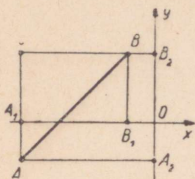
Ilmselt selle valemiga antud reegel rahuldab eespool püstitatud nõudeid. Eriti võib teda kasutada arvutamisel masina- tega, mis on võimelised arve korrutama, neid liitma ja siis ruutjuuri leidma.

Nüüd lahendame üldise ülesande.

---

<sup>1</sup> Kaasaegne arvutusmasin teeb kümneid tuhan- deid liitmis- ja korrutamistehteid sekundis.

Ülesanne. On antud tasandi kaks punkti  $A(x_1, y_1)$  ja  $B(x_2, y_2)$ . Leida nende punktide vaheline kaugus  $q(A, B)$ .



Joon. 11

Lahendus. Tähistame tähtedega  $A_1, B_1, A_2, B_2$  (joon. 11) punktide  $A$  ja  $B$  projektsioonid koordinaattelgedel. Sirgete  $AA_1$  ja  $BB_2$  lõikepunkti tähistame tähega  $C$ . Täisnurksest kolmnurgast  $ABC$  saame Pythagorase teoreemi põhjal<sup>1</sup>

$$q^2(A, B) = q^2(A, C) + q^2(B, C). \quad (*)$$

Kuid lõigu  $AC$  pikkus on võrdne lõigu  $A_2B_2$  pikkusega. Punktid  $A_2$  ja  $B_2$  asuvad  $y$ -teljel ja nende koordinaadid on vastavalt  $y_1$  ja  $y_2$ . Punktis  $C$  saadud valemi põhjal on nende vaheline kaugus  $|y_1 - y_2|$ .

Analoogiliselt arutledes saame, et lõigu  $BC$  pikkus on  $|x_1 - x_2|$ . Asendades leitud  $AC$  ja  $BC$  väärtused valemisse (\*), saame

$$q^2(A, B) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Seega leitakse punktide  $A(x_1, y_1)$  ja  $B(x_2, y_2)$  vaheline kaugus  $q(A, B)$  valemist

$$q(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Märgime, et kõik meie arutlused kehtivad mitte ainult joonisel 11 toodud punktide asetuse korral, vaid ka iga teise asetuse puhul.



<sup>1</sup> Sümboliga  $q^2(A, B)$  tähistame kauguse  $q(A, B)$  ruudu.

<sup>2</sup> Me kasutame asjaolu, et

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

(mõeldakse juure aritmeetilist väärtust). Selle reegli ebatäpne kasutamine (mõnikord loetakse ekslikult, et  $\sqrt{x^2} = x$ ) võib viia ebaõigetele järeldustele. Näiteks toome järelduste ahela, mis sisaldab seda liiki ebatäpsuse, ja teeme teile ettepaneku avastada see:

$$\begin{aligned} 1 - 3 = 4 - 6 &\rightarrow 1 - 3 + \frac{9}{4} = 4 - 6 + \frac{9}{4} \rightarrow \\ &\rightarrow \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} \rightarrow 1 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} \rightarrow 1 = 2. \end{aligned}$$



Tehke joonis (võttes näiteks punkti  $A$  esimeses veerandis, punkti  $B$  aga teises) ja veenduge, et kõiki arutlusi võib sõna-sõnalt korrata, isegi punktide tähistusi pole vaja muuta.

Märgime veel, et punktis 3 leitud valem, mis väljendab punktidevahelist kaugust sirgel (vt. lk. 11), võib kirjutada analoogilisel kujul (vt. allmärkus 2, lk. 20):

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.$$

## Harjutused

1. Tasandil on antud kolm punkti  $A(3, -6)$ ,  $B(-2, 4)$  ja  $C(1, -2)$ . Tõestada, et need kolm punkti asuvad ühel sirgel. (Nõuanne. Näidake, et «kolmnurga»  $ABC$  üks külgedest on võrdne kahe teise külje summaga.)

2. Kasutage punktidevahelise kauguse valemit, et tõestada teile tuntud teoreemi: rööpküliku külgede ruutude summa on võrdne diagonaalide ruutude summaga. (Nõuanne. Võtke üks rööpküliku tippudest koordinaatide alguspunktiks ja kasutage punkti 4 ülesande 3 tulemusi. Te näete, et teoreemi tõestus taandub lihtsa algebralise samasuse kontrollile. Millise?)

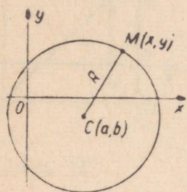
3. Tõestage koordinaatide meetodi abil järgmine teoreem: kui  $ABCD$  on ristkülik, siis iga suvalise punkti  $M$  korral kehtib võrdsus  $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$ . Kuidas on kasulik paigutada koordinaatteljed?

## 7. Kujundite esifamine

Punktis 5 tõime mitu näidet koordinaatidevahelistest seostest, mis määravad teatud kujundid tasandil. Õpime veel veidi geomeetriliste kujundite esitamist arvudevaheliste seoste abil.

Kuna me vaatleme iga kujundit kui punktide hulka, millest ta koosneb, siis

kujundi esitamine tähendab anda meetod, mille järgi oleks võimalik teada saada, kas see või teine punkt kuulub vaadeldavale kujundile või mitte.



Joon. 12

Et leida selline meetod näiteks ringjoone tarvis, kasutame definitsiooni ringjoonest kui punktide hulgast, mille kaugus mingist punktist  $C$  (ringjoone keskpunktist) on võrdne arvuga  $R$  (raadiusega). Tähen­dab, et punkt  $M(x, y)$  (joon. 12) oleks ring­joonel keskpunktiga  $C(a, b)$ , on tarvilik ja piisav, et  $q(M, C)$  oleks võrdne raadiu­sega  $R$ .

Tuletame meelde, et punktidevaheline kaugus määratakse valemi järgi

$$q(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Järelikult, tingimus selleks, et punkt  $M(x, y)$  asuks ringjoonel keskpunktiga  $C(a, b)$  ja raadiusega  $R$ , väljendub seosega  $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$ , mille võib ümber kirjutada kujul:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (A)$$

Seega, et leida, kas mingi punkt asub antud ringjoonel, on vaja kontrollida, kas selle punkti korral on rahuldatud seos (A). Selleks on vaja asendada seoses (A)  $x$  ja  $y$  vaadeldava punkti koordinaatidega. Kui saame samasuse, siis punkt asub ringjoo­nel, vastasel juhul aga see punkt ei asu sellel ringjoonel. Seega, teades võrran­dit (A), võime tasandi iga punkti kohta öelda, kas ta asub antud ringjoonel või mitte. Seepärast nimetatakse võrrandit (A) *ringjoone võrrandiks* keskpunktiga  $C(a, b)$  ja raadiusega  $R$ .

## Harjutused

1. Kirjutage ringjoone võrrand, kui ring­joone keskpunkt on  $C(-2, 3)$  ja raadius 5. Kas see ringjoon läbib punkti  $(2, -1)$ ?

2. Näidake, et võrrand

$$x^2 + 2x + y^2 = 0$$

määrab tasandil mingi ringjoone. Leidke selle ringjoone keskpunkt ja raadius.

(Nõuanne. Esitage võrrand kujul

$$(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 1 \text{ ehk}$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1.)$$

3. Millise punktide hulga määrab seos

$$x^2 + y^2 \leq 4x + 4y^2$$

(Lahendus. Kirjutame selle võrratuse kujul

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \leq 8$$

ehk

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 8.$$

Nagu nähtub saadud võrratusest, on otsitava hulga iga punkti kaugus punktist  $(2, 2)$  väiksem või võrdne kui  $\sqrt{8}$ . Ilmselt seda tingimust rahuldavad punktid täidavad ringi, mille raadius on  $\sqrt{8}$  ja keskpunkt on  $(2, 2)$ . Kuna seoses on lubatud võrdus, siis ka ringi rajajoon kuulub otsitavasse hulka.)

Me veendusime selles, et ringjoont tasandil saab esitada teatava võrrandi abil. Samal viisil saame esitada ka teisi jooni, ainult et võrrandid näevad muidugi välja teistsugused.

Eespool nimetasime (vt. lk. 17), et võrrand  $x^2 - y^2 = 0$  esitab sirgete paari. Peatume sellel veidi üksikasjalikumalt. Kui  $x^2 - y^2 = 0$ , siis  $x^2 = y^2$  ja järelikult  $|x| = |y|$ . Vastupidi, kui  $|x| = |y|$ , siis  $x^2 - y^2 = 0$ ; seega on need seosed samaväärsed. Kuid punkti abstsissi absoluutväärtus on ju punkti kaugus  $y$ -teljest ja punkti ordinaadi absoluutväärtus — punkti kaugus  $x$ -teljest. Tähendab, punktid, mille korral  $|x| = |y|$ , asuvad kõik võrdsel kaugusel koordinaattelgedest, s. o. asuvad nende telgede poolt moodustatud nurkade poolitajail. On selge ka vastupidine, et nende kummagi nurgapoolitaja suvalise punkti koordinaadid rahuldavad seost  $x^2 = y^2$ .

Seepärast nimetame võrrandit  $x^2 - y^2 = 0$  nende nurgapoolitajate ühiseks võrrandiks.

Te muidugi teate veel teisi näiteid joonte esitamisesest võrrandite abil. Näiteks, võrrandit  $y = x^2$  rahuldavad tipuga koordinaatide alguspunktis asuva parabooli kõik punktid ja ainult selle parabooli punktid. Võrrandit  $y = x^2$  nimetatakse selle parabooli võrrandiks.

Üldiselt nimetatakse mingi joone võrrandiks võrrandit, mis muutub iga kord samasuseks, kui  $x$  ja  $y$  asemele panna selle joone suvalise punkti koordinaadid, ja mis pole rahuldatud, kui  $x$  ja  $y$  asemele panna sellel joonel mitte asuva punkti koordinaadid.

Näiteks, kui me isegi ei tea, millise joone esitab võrrand

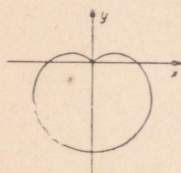
$$(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2, \quad (*)$$

võime siiski öelda, et see joon läbib koordinaatide alguspunkti, kuna arvud  $(0, 0)$  rahuldavad antud võrrandit, punkt  $(1, 1)$  aga ei asu sellel kõveral, sest  $(1^2 + 1^2 + 1)^2 \neq 1^2 + 1^2$ .

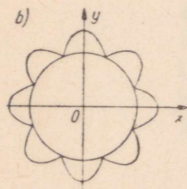
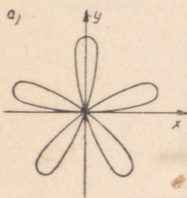
Kui teid huvitab, missugune näeb välja selle võrrandiga esitatud kõver, vaadake joonist 13. Seda kõverat nimetatakse kardioidiks, sest tal on südame kuju.

Nii et kui arvutusmasin võiks tunda sümpaatiat kellegi vastu, siis tõenäoliselt annaks ta tolele võrrandina esitatud südame joonise, võib-olla aga kingiks ta matemaatilise «lillekimbu» — joonisel 14 kujutatud kõverate võrrandid. Nagu näete, on need kõverad tõepoolest sarnased lilledega. Nende matemaatiliste lillede võrrandid esitame teile hiljem, kui tutvute teist liiki koordinaatidega, nn. polaarkoordinaatidega.

P



Joon. 13



Joon. 14

## 8. Alustame ülesannete lahendamist

Tõlkides geomeetrilised mõisted koordinaatide keelde, saame võimaluse geomeetriliste ülesannete asemel vaadelda algebralisi. Osutub, et pärast sellist tõlkimist taandub suurem osa sirgete ja ringjoontega seotud ülesandeid esimese ja teise astme võrranditele, selliste võrrandite lahendamiseks on aga olemas lihtsad üldvalemid. (Peab märkima, et XVII sajandiks, kui võeti kasutusele koordinaatide meetod, oli algebraliste võrrandite lahendamisel saavutatud küllalt kõrge tase. Selleks ajaks olid matemaatikud õppinud lahendama näiteks mistahes kolmanda ja neljanda astme võrrandeid. Seepärast prantsuse teadlane R. Descartes, kes oli koordinaatide meetodi looja, ütles: «Ma lahendasin kõik ülesanded», mõeldes selle all tole aja geomeetrilisi ülesandeid.)

Toome lihtsa näite geomeetriliste ülesannete taandamisest algebralistele.

**Ülesanne.** On antud kolmnurk  $ABC$ ; leida selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt.

**Lahendus.** Võtame punkti  $A$  koordinaatide alguspunktiks, abstsissitelje suuna punktist  $A$  punkti  $B$ . Siis punkti  $B$  koordinaadid on  $(c, 0)$ , kus  $c$  on lõigu  $AB$  pikkus. Olgu punkti  $C$  koordinaadid  $(q, h)$  ja otsitava ringjoone keskpunkti koordinaadid  $(a, b)$ . Tähistame ringjoone raadiuse tähega  $R$ . Kirjutame koordinaate kasutades, et punktid  $A(0, 0)$ ,  $B(c, 0)$  ja  $C(q, h)$  asuvad otsitaval ringjoonel:

$$a^2 + b^2 = R^2,$$

$$(c - a)^2 + b^2 = R^2,$$

$$(q - a)^2 + (h - b)^2 = R^2.$$

Igäüks neist tingimustest väljendab fakti, et punktide  $A(0, 0)$ ,  $B(c, 0)$  ja  $C(q, h)$  kaugus ringjoone keskpunktist  $(a, b)$  on võrdne raadiusega. Neid tingimusi on lihtne saada ka otsitava ringjoone

võrrandist, kui see välja kirjutada (ringjoone keskpunkt on punktis  $(a, b)$  ja raadius on  $R$ ), s. o.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

ja seejärel selles võrrandis  $x$  ja  $y$  asemele asetada punktide  $A, B$  ja  $C$  koordinaadid.

See kolme võrrandi ja kolme tundmatuga võrrandisüsteem on kergesti lahenduv ja me saame:

$$a = \frac{c}{2}, \quad b = \frac{q^2 + h^2 - cq}{2h},$$

$$R = \frac{\sqrt{(q^2 + h^2)[(q - c)^2 + h^2]}}{2h}.$$

Ülesanne on lahendatud, kuna oleme leidnud keskpunkti koordinaadid.<sup>1</sup>

Märgime, et ühtlasi saime valemi kolmnurga ümberringjoone raadiuse arvutamiseks. Seda valemit võib lihtsustada, arvestades, et  $\sqrt{q^2 + h^2} = \varrho(A, C)$ ,  $\sqrt{(q - c)^2 + h^2} = \varrho(B, C)$  ja arv  $h$  on võrdne kolmnurga  $ABC$  tipust  $C$  tõmmatud kõrgusega. Kui tähistada kolmnurga külgede  $BC$  ja  $AC$  pikkused vastavalt tähtedega  $a$  ja  $b$ , siis raadiuse valem omandab lihtsa ja mugava kuju:

$$R = \frac{ab}{2h}.$$

Võib veel märkida, et  $hc = 2S$ , kus  $S$  on kolmnurga  $ABC$  pindala, ja siis kirjutada saadud valem ümber kujul:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Nüüd tahame teile näidata ülesannet, mis on huvitav selle poolest, et tema geometriline lahendamine on küllaltki raske; kui aga tõlkida ta koordinaatide keelde, siis ülesande lahendamine muutub täiesti lihtsaks.

---

<sup>1</sup> Pange tähele, et selle ülesande lahendamisele me ei kasutanud joonist.

Ülesanne. Tasandil on antud punktid  $A$  ja  $B$ ; leida punktist  $A$  kaks korda kaugemal kui punktist  $B$  asetsevate punktide  $M$  geomeetriline koht.

Lahendus. Valime koordinaatide süsteemi tasandil nii, et koordinaatide alguspunkt langeks punkti  $A$  ja abstsisside positiivne pooltelg läheks mööda lõiku  $AB$ . Mõõtkava ühikuks võtame lõigu  $AB$ . Punkti  $A$  koordinaadid on siis  $(0, 0)$  ja punkti  $B$  koordinaadid  $(1, 0)$ . Punkti  $M$  koordinaadid tähistame  $(x, y)$ . Tingimuse  $q(A, M) = 2q(B, M)$  saame kirjutada koordinaatides järgmiselt:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Saame otsitava punktide geomeetrilise koha võrrandi. Et aru saada, millist punktide hulka kirjeldab see võrrand, teisen-dame teda nii, et see omandaks teile tut-tava kuju. Tõstes võrrandi mõlemad pooled ruutu, avades sulud ja koondades sarnas-ed liikmed, saame võrduse

$$3x^2 - 8x + 4 + 3y^2 = 0.$$

Selle võrduse võib ümber kirjutada nii:

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} + y^2 = \frac{4}{9}$$

ehk

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Nagu juba teate, on see võrrand ringjoone võrrand keskpunktiga punktis  $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$  ja raadiusega  $\frac{2}{3}$ . Seega punktide  $M$  geomeetriline koht on ringjoon.

Kuna lahendatud ülesande puhul polnud oluline, et  $q(A, M)$  on nimelt kaks korda suurem kaugusest  $q(B, M)$ , siis tegelikult lahendasime palju üldisema ülesande. Nimelt tõestasime, et *punktide  $M$  geomeet-riline koht, mille kauguste suhe antud punktidest  $A$  ja  $B$  on konstantne:*

$$\frac{Q(A, M)}{Q(B, M)} = k \quad (*)$$

( $k$  — antud positiivne arv, mis ei võrdu arvuga 1), on ringjoon.<sup>1</sup>

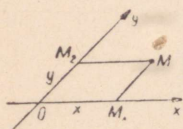
Et veenduda koordinaatide meetodi võimsuses, proovige see ülesanne lahendada geomeetriliselt. (Nõuanne. Tõmmake punktist  $M$  kolmnurga  $AMB$  sise- ja välisnurga poolitaja. Olgu punktid  $K$  ja  $L$  nende nurgapoolitajate lõikepunktid sirgega  $AB$ . Tõestage, et punktide  $K$  ja  $L$  asend ei sõltu punkti  $M$  valikust otsitaval punktide geomeetrilisel kohal. Tõestage, et nurk  $KML$  on võrdne  $90^\circ$ .)

Märgime, et taolistest ülesannetest oskavad jagu saada juba vanad kreeklased. Selle ülesande geomeetriline lahendus on antud vana-kreeka matemaatiku Apolloniuse (II saj. e. m. a.) traktaadis «Ringidest».

Lahendage nüüd järgmine ülesanne.

Leida punktide  $M$  geomeetriline koht, mille kauguste ruutude vahe kahest antud punktist  $A$  ja  $B$  on võrdne antud suurusega  $c$ . Missuguste  $c$  väärtuste korral on ülesanne lahenduv?

## 9. Teised koordinaatide süsteemid



Joon. 15

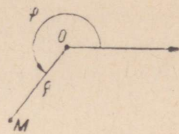
Paralleelselt ristkoordinaadistikuga kasutatakse tasandil ka teisi koordinaatide süsteeme. Joonisel 15 on kujutatud kaldkoordinaadistik. Jooniselt on näha, kuidas määratakse punkti koordinaadid selles süsteemis. Mõningail juhtumel osutub vajalikuks võtta koordinaattelgedel erinevad mõõduühikud.

On koordinaate, mis veelgi olulisemalt erinevad ristkoordinaatidest. Selliste koordinaatide näiteks on polaarkoordinaadid, missuguseid me juba eespool mainisime.

Punkti polaarkoordinaadid tasandil määratakse järgmiselt.

<sup>1</sup> Me jätsime kõrvale juhu  $k = 1$ . Te kindlasti teate, et sel juhul geomeetriline koht (\*) on sirge (punkt  $M$  on võrdse kaugusel punktidest  $A$  ja  $B$ ). Tõestage see analüütiliselt.

Tasandil võetakse arvtegel (joon. 16). Selle telje koordinaatide alguspunkti (punkti  $O$ ) nimetatakse *pooluseks*, telge ennast aga *polaarteljeks*. Punkti  $M$  asendi määramiseks on piisav näidata kaks arvu:  $\rho$  — *polaarraadius* (punkti  $M$  kaugus poolusest) ja  $\varphi$  — *polaarnurk*<sup>1</sup> (pöördenurk polaarteljest kiireni  $OM$ ). Meie joonisel polaarraadius  $\rho = 3,5$  ja



Joon. 16

polaarraadius  $\varphi = 225^\circ$  ehk<sup>2</sup>  $\frac{5\pi}{4}$ . Seega polaar-koordinaadistikus määratakse punkti asendid tasandil kahe arvuga, millest üks näitab punkti asukoha suunda ja teine kaugust selle punktini. Selline koha näitamise viis on lihtne ja seda kasutatakse sageli. Näiteks, et juhatada teed metsas eksinud inimesele, öeldakse talle: «Pölenud männi juurest (poolus) pöörduge itta (suund), minge selles suunas paar kilomeetrit (kaugus) ja jõuategi metsavahi majani (punkt).»

Kes on õppinud matkasektsioonides, mõistab kergesti, et liikumine asimuudi järgi põhineb samal põhimõttel.

Ka polaarkoordinaatide abil saab esitada tasandil mitmesuguseid punktide hulki. Väga lihtne on näiteks ringjoone võrrand keskpunktiga pooluses. Kui ringjoone raadius on  $R$ , siis ringjoone suvalise punkti (ja ainult vaadeldava ringjoone punktide) polaarraadius on samuti  $R$ . Tähendab, selle ringjoone võrrand on

$$\rho = R,$$

kus  $R$  on mingi konstantne suurus.

Milline punktide hulk saadakse, kui vaadelda võrrandit  $\varphi = \alpha$ , kus  $\alpha$  on mingi konstantne suurus

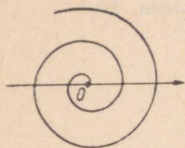
näiteks  $\frac{1}{2}$  või  $\frac{3\pi}{2}$ ? Vastus on ilmne: punktid,

<sup>1</sup>  $\varphi$  — kreeka täht, loetakse «fii».

<sup>2</sup> Nurkade  $\varphi$  mõõtmiseks polaarkoordinaadistikus kasutame kraadimõõdu kõrval ka nn. *radiaanmõõtu*. Viimases võetakse nurga mõõduühikuks 1 radiaan, s. o. kesknurk, mis toetub ringjoone kaarele, mille pikkus on 1 (eeldatakse, et ringjoone raadius on 1). Täispöördele  $360^\circ$  (toetub tervele ringjoonele) vastab seega radiaanmõõdus  $2\pi$ , sirg-nurgale  $180^\circ$  vastab  $\pi$ , täisnurgale  $90^\circ$  vastab  $\frac{\pi}{2}$ , nurgale  $45^\circ$  vastab  $\frac{\pi}{4}$  jne. Radian on võrdne  $\frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3,14} \approx 57^\circ 17' 45''$ . Osutub, et paljude küsimuste puhul (mõningatest neist tuleb juttu meie järgmistes väljaannetes) on radiaanmõõt tunduvalt mugavam kui kraadimõõt.



mille jaoks  $\varphi$  on konstantne ja võrdne  $\alpha$ -ga, täidavad kiire, mis väljub poolusest polaartelje suhtes nurga  $\alpha$  all. Näiteks, kui  $\alpha = \frac{1}{2}$ , siis moodustab kiir polaarteljega ligikaudu  $28^\circ$  nurga<sup>1</sup>, kui aga  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ , siis kiir on suunatud vertikaalselt alla, s. o. polaartelje positiivse suuna ja kiire vaheline nurk on  $270^\circ$ .



Joon. 17a

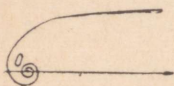
Vaatleme veel kahte näidet. Võrrand

$$\varrho = \varphi$$

kujutab teatavat spiraali (joon. 17a). Tõepoolest,  $\varphi = 0$  puhul ka  $\varrho = 0$  (poolus),  $\varphi$  kasvamisel  $\varrho$  samuti kasvab, nii et punkt, pööreldes ümber pooluse (vastu kellaosuti liikumise suunda) samal ajal eemaldub sellest. Teise spiraali kujutab võrrand

$$\varrho = \frac{1}{\varphi}$$

(joon. 17b). Siin nullile lähedase  $\varphi$  korral on  $\varrho$  suur,  $\varphi$  kasvamisel  $\varrho$  kahaneb, suure  $\varphi$  puhul on  $\varrho$  aga väga väike. Seepärast  $\varphi$  tõkestamatul kasvamisel spiraal nagu kerib ennast punkti  $O$  ümber.



Joon. 17b

Kõverate võrrandid polaarkoordinaatide süsteemis on teile raskesti mõistetavad peamiselt seetõttu, et te pole veel õppinud trigonomeetriat. Kui olete aga trigonomeetriaga veidi tuttav, siis proovige mõistatada, milliseid punktide hulki kujutavad seosed:

$$\varrho = \sin \varphi, \quad \varrho (\cos \varphi + \sin \varphi) + 1 = 0.$$

Polaarkoordinaadistik on mõningail juhtumel mugavam kui ristkoordinaadistik. Vaat kuidas näeb näiteks välja kardioidi võrrand polaarkoordinaatides (vt. punkt 7):

$$\varrho = 1 - \sin \varphi.$$

Kui tunnete veidi trigonomeetriat, siis selle võrrandi järgi kujutate endale kergemini ette kõverat kui tema ristkoordinaatides antud võrrandi järgi. Ja need ilusad lilled, mis on kujutatud joonisel 14, antakse lihtsate võrranditega:

$$\varrho = \sin 5\varphi \quad (\text{joon. 14, a})$$

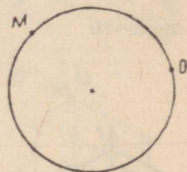
$$(\varrho - 2)(\varrho - 2 - |\cos 3\varphi|) = 0 \quad (\text{joon. 14, b}).$$

Me pole midagi rääkinud üksühesest vastavusest tasandi punktide ja polaarkoordinaatide vahel. See

<sup>1</sup> Tuletame meelde, et arvu, mis on koordinaadiks  $\varphi$ , on vaja tõlgendada nagu nurga radiaanmõõtu (vt. allmärkust 2, lk. 29). Nurk  $\frac{1}{2}$  radiaani on ligikaudu  $28^\circ$ , nurk  $\frac{3\pi}{2}$  radiaani on täpselt  $270^\circ$ .

on seletatav sellega, et sellist üksühest vastavust lihtsalt pole. Tõepoolest, kui te lisate nurgale  $\varphi$  suvaline täisarv korda  $2\pi$  (s. o. täisarv korda  $360^\circ$ ), siis kiire suund ilmselt ei muutu. Teiste sõnadega, punktid polaarkoordinaatidega  $\varrho, \varphi$  ning  $\varrho, \varphi + 2k\pi$ , kus  $\varrho > 0$  ja  $k$  on suvaline täisarv, ühtivad. Toome veel ühe näite, kus puudub üksühene vastavus.

Sissejuhatuses rääkisime sellest, et joontel võib määrata koordinaate ja esimeses paragrahvis vaatlusimegi koordinaate kõige lihtsamal joonel — sirgel. Nüüd näitame, kuidas saab koordinaate kasutada ringjoonel. Selleks (nagu ka § 1) valime ringjoonel mingi punkti koordinaatide alguspunktiks (punkt  $O$  joonisel 18). Positiivseks liikumise suunaks loeme, nagu tavaliselt, liikumise vastu kellaosuti pöörlemise suunda. Mõõduühiku ringjoonel võime samuti valida loomulikul viisil: valime selleks ringjoone raadiuse. Siis ringjoone punkti  $M$  koordinaadiks on kaare  $OM$  pikkus, mis on võetud märgiga pluss, kui liikumine punktist  $O$  punkti  $M$  toimub positiivses suunas, ja märgiga miinus vastupidisel juhul.



Joon. 18

Kohe torkab silma nende koordinaatide oluline erinevus punktide koordinaatidest sirgel: siin pole üksühest vastavust arvude (koordinaatide) ja punktide vahel. On ilmne, et igale arvule vastab üks kindel punkt ringjoonel. Olgu näiteks antud arv  $a$ . Et leida sellele vastavat punkti ringjoonel (s. o. punkti koordinaadiga  $a$ ), on vaja paigutada ringjoonele positiivses suunas kaar pikkusega  $a$  raadiust, kui  $a$  on positiivne, ja negatiivses suunas, kui  $a$  on negatiivne. Seejuures ühtib näiteks punkt koordinaadiga  $2\pi$  koordinaatide alguspunktiga. Seega punkti  $O$  saame, kui koordinaat on võrdne nulliga või kui koordinaat on võrdne  $2\pi$ . Seega pole vastupidine vastavus enam ühene, s. o. ühele ja samale punktile vastab mitu erinevat arvu. Lihtne on näha, et ringjoone igale punktile vastab lõpmata hulk arve.<sup>1</sup>

### § 3. Punkti koordinaadid ruumis

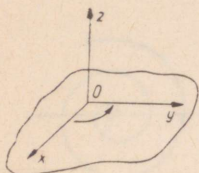
#### 10. Koordinaatfeljed ja -tasandid

Punkti asendi määramiseks ruumis on vaja võtta mitte kaks arvtelge (nagu

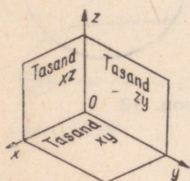
<sup>1</sup> Nagu te märkate, ühtivad siin defineeritud ringjoone punkti koordinaadid nurkadega  $\varphi$  polaarkoordinaadistikus, kui viimaseid mõõta radiaanides. Seetõttu illustreeritakse siin veel kord polaarkoordinaatide mitteühest vastavust.

# P

tasandi korra), vaid kolm:  $x$ -telg — *abstsissstelg*,  $y$ -telg — *ordinaattelg*,  $z$ -telg — *aplikaattelg*. Need teljed võetakse läbi ühe ja sama punkti — *koordinaatide alguspunkti*  $O$  — nii, et iga kaks telge neist oleks omavahel risti. Tavaliselt valitakse telgede suunad selliselt, et  $z$ -telje positiivse pooltelje poolt vaadatuna ühtiks  $x$ -telje positiivne pooltelg  $y$ -telje positiivse poolteljega, kui pöörata  $x$ -telge  $90^\circ$  võrra vastu kellaosuti liikumise suunda (joon. 19). Ruumis on peale koordinaattelgede otstarbekas vaadelda veel *koordinaattasandeid*, s. o. tasandeid, mis läbivad kaht mingit koordinaattelge. Selliseid tasandeid on kolm (joon. 20):



Joon. 19



Joon. 20

$xy$ -tasand (läbib  $x$ - ja  $y$ -telge) — punktide  $(x, y, 0)$  hulk, kus  $x$  ja  $y$  on suvalised arvud;

$xz$ -tasand (läbib  $x$ - ja  $z$ -telge) — punktide  $(x, 0, z)$  hulk, kus  $x$  ja  $z$  on suvalised arvud;

$yz$ -tasand (läbib  $y$ - ja  $z$ -telge) — punktide  $(0, y, z)$  hulk, kus  $y$  ja  $z$  on suvalised arvud.

Nüüd võib iga ruumipunkti  $M$  jaoks leida kolm arvu  $x$ ,  $y$  ja  $z$ , mis on tema koordinaatideks.

Et leida esimest arvu  $x$ , võtame läbi punkti  $M$  tasandi, mis on paralleelne  $yz$ -tasandiga (võetud tasand on samaaegselt risti  $x$ -teljega). Selle tasandi lõikepunkt  $x$ -teljega (punkt  $M_1$  joonisel 21,  $a$ ) määrabki sellel teljel koordinaadi  $x$ . Arvu  $x$  (punkti  $M_1$  koordinaat  $x$ -teljel) nimetatakse punkti  $M$  *abstsissiks*.

Et leida teist koordinaati, võetakse läbi punkti  $M$  tasand, mis on paralleelne  $xz$ -tasandiga (risti  $y$ -teljega), ja leitakse  $y$ -teljel punkt  $M_2$  (joon. 21,  $b$ ). Arvu  $y$  (punkti  $M_2$  koordinaat  $y$ -teljel) nimetatakse punkti  $M$  *ordinaadiks*.

Analoogiliselt, võttes läbi punkti  $M$

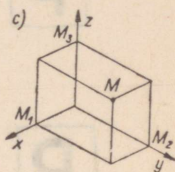
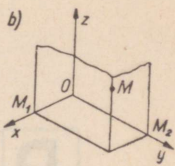
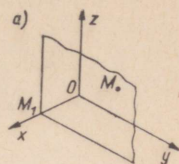
tasandi, mis on paralleelne  $xy$ -tasandiga (risti  $z$ -teljega), leitakse arv  $z$  — punkti  $M_3$  koordinaat  $z$ -teljel (joon. 21, c). Arvu  $z$  nimetatakse punkti  $M$  aplikaadiks.

Nii oleme igale ruumipunktile seadnud vastavusse kindla arvude kolmiku — tema koordinaadid: abstsissi, ordinaadi ja aplikaadi. Vastupidi, igale punktide kolmikule ( $x, y, z$ ), mis on antud kindlas järjekorras (esiteks  $x$ , seejärel  $y$ , siis  $z$ ), võib seada vastavusse kindla ruumipunkti  $M$ . Selleks on vaja kasutada kirjeldatud konstruktsiooni, alustades seda lõpust: märkida koordinaattelgedel punktid  $M_1, M_2$  ja  $M_3$ , mille koordinaadid neil telgedel on vastavalt  $x, y$  ja  $z$ , ning seejärel võtta läbi nende punktide tasandid, mis on paralleelsed koordinaattasanditega. Tasandite lõikepunkt ongi otsitavaks punktiks  $M$ . On ilmne, et arvud ( $x, y, z$ ) on punkti  $M$  koordinaadid.

Seega on meil kindlaks tehtud üksühene vastavus<sup>1</sup> ruumi punktide ja korrastatud arvukolmikute (nende punktide koordinaatide) vahel.

Ruumipunkti koordinaate on teil kindlasti raskem tundma õppida kui punkti koordinaate tasapinnal, sest selleks on vaja veidi teada ruumigeomeetriat — stereomeetriat. Nimelt saavad ruumipunkti koordinaatide mõistmiseks vajalikud teadmised (millistest te kergesti aru saate nende lihtsuse ja näitlikkuse tõttu) stereomeetria kursuses veidi rangema aluse.

Nii tõestatakse stereomeetria kursuses, et punktid  $M_1, M_2$  ja  $M_3$ , mis on konstrueeritud kui koordinaattelgede lõikepunktid punkti  $M$  läbivate koordinaattasanditega, on punkti  $M$  projektsioonid koordinaattelgedel, s. t. et need on punktist  $M$  koordinaattelgedele tõmmatud ristsirgete aluspunktideks. Seega võib ruumipunkti koordinaatidele anda definit-



Joon. 21

<sup>1</sup> Üksühese vastavuse definitsiooni vt. lk. 8.

siooni, mis on analoogiline punkti koordinaatide definitsiooniga tasandil, ja nimelt: ruumpunkti  $M$  koordinaatideks nimetakse selle punkti projektsioonide koordinaate koordinaattelgedel.

Saab näidata, et paljusid valemeid, mis me tuletasime tasandilise juhu tarvis, on vaja ainult veidi muuta, et need kehtiksid ka ruumilise juhu puhul. Nii arvutatakse näiteks kaugust kahe punkti  $A(x_1, y_1, z_1)$  ja  $B(x_2, y_2, z_2)$  vahel valemi järgi

**P**

$$\begin{aligned} \varrho(A, B) &= \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \end{aligned}$$

(Selle valemi tuletamine on täiesti sarnane analoogilise valemi tuletamisega tasandi jaoks. Proovige seda teha!)

**P**

Punkti  $A(x, y, z)$  kaugus koordinaatide alguspunktist väljendub valemiga

$$\varrho(O, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

## Harjutused

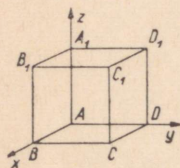
1. Võtame kaheksa punkti:  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, -1)$ ,  $(1, -1, 1)$ ,  $(1, -1, -1)$ ,  $(-1, 1, 1)$ ,  $(-1, 1, -1)$ ,  $(-1, -1, 1)$ ,  $(-1, -1, -1)$ . Milline punkt on kõige kaugemal punktist  $(1, 1, 1)$ ? Leidke selle punkti ja punkti  $(1, 1, 1)$  vaheline kaugus. Millised punktid on kõige lähemal punktile  $(1, 1, 1)$ ? Kui kaugel on need punktid punktist  $(1, 1, 1)$ ?

2. Joonistage kuup. Võtke koordinaatteljed väljuvatena kuubi ühest tipust ja suundugu nad piki kuubi servi. Ühikuks võtke kuubi serv. Tähistage kuubi tipud tähtedega  $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$  (joon. 22).

a) Leidke kuubi tippude koordinaadid.  
b) Leidke külje  $CC_1$  keskpunkti koordinaadid.

c) Leidke tahu  $AA_1B_1B$  diagonaalide lõikepunkti koordinaadid.

3. Millega on võrdne ülesandes 1 antud



Joon. 22

kuubi tipu  $(0, 0, 0)$  ja tahu  $BB_1C_1C$  diagonaalide lõikepunkti vaheline kaugus?

4. Millised punktidest  $A(1, 0, 5)$ ,  $B(3, 0, 1)$ ,  $C\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right)$ ,  $D\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ,  $E\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$  on ülesandes 1

antud kuubi sees, millised väljaspool kuupi?

5. Kirjutage üles seosed, mida rahuldavad ülesandes 1 antud kuubi sees ja tema pinnal asuvate punktide koordinaadid.

(Vastus. Vaadeldava kuubi sees ja tema pinnal asuvate punktide koordinaadid  $x, y, z$  võivad omandada arvulisi väärtusi nullist kuni üheni (need kaasaarvatult), s. o. rahuldavad seoseid:

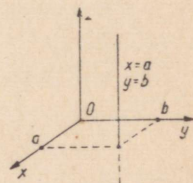
$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 1,$$

$$0 \leq z \leq 1.)$$

## 11. Kujundite esitamine ruumis

Nagu tasandil, nii annavad ka koordinaadid ruumis meile võimaluse arvude ja arvuliste seoste abil esitada mitte ainult punkte, vaid ka jooni, pindasid ja teisi punktide hulki. Vaatleme näiteks, milline punktide hulk saadakse, kui ette anda ainult kaks koordinaati, kolmas lugeda aga suvaliseks. Tingimused  $x = a$ ,  $y = b$ , kus  $a$  ja  $b$  on antud arvud (näiteks,  $a = 5$ ,  $b = 4$ ), annavad ruumis sirge, mis on paralleelne  $z$ -teljega (joon. 23). Selle sirge kõigil punktidel on üks ja sama abstsiss ning ordinaat. Koordinaat  $z$  võib omandada suvalisi väärtusi.



Joon. 23

Analoogiliselt määravad tingimused

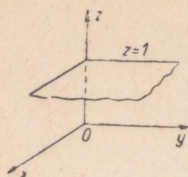
$$y = b, \quad z = c$$

sirge, mis on paralleelne  $x$ -teljega; tingimused

$$z = c, \quad x = a$$

aga sirge, mis on paralleelne  $y$ -teljega.

Milline punktide hulk saadakse, kui ette



Joon. 24

anda ainult üks koordinaatidest, näiteks  $z = 1$ ?

Vastus selgub jooniselt 24: see on tasand, mis on paralleelne  $xy$ -koordinaattasandiga (s. o. tasandiga, mis läbib  $x$ - ja  $y$ -telge) ja on sellest ühiku kaugusel  $z$ -telje positiivsel poolel.

Vaatleme veel mõningaid näiteid, mis demonstreerivad, kuidas ruumis võrrandite ja teiste koordinaatidevaheliste seoste abil saab esitada mitmesuguseid punktihulki.

1. Vaatleme võrrandit

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (*)$$

Kuna punkti  $(x, y, z)$  kaugus koordinaatide alguspunktist väljendub avaldisega  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , siis on selge, et seos (\*), tõlgituna geomeetrilisse keelde, tähendab, et seda seost rahuldav punkt koordinaatidega  $(x, y, z)$  asetseb koordinaatide alguspunktist kaugusel  $R$ . Tähendab, punktide hulk, mille jaoks on täidetud seos (\*), on kera pind e. sfäär keskpunktiga koordinaatide alguspunktis ja raadiusega  $R$ .

2. Kus asetsevad punktid, mille koordinaadid rahuldavad seost

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1?$$

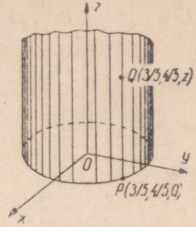
Vastus. Kuna antud seos tähendab, et punkti  $(x, y, z)$  kaugus koordinaatide alguspunktist on väiksem ühikust, siis otsitavaks punktide hulgaks on punktid, mis asetsevad niisuguse kera sees, mille keskpunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ja mille raadius võrdub ühikuga.

3. Milline punktide hulk esitatakse võrrandiga

$$x^2 + y^2 = 1? \quad (**)$$

Vaatleme kõigepealt ainult  $xy$ -tasandi punkte, mis rahuldavad seda seost, s. o. punkte, mille puhul  $z = 0$ . Siis antud võrrand, nagu me eespool (lk. 22) nägime, esitab ringjoone, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja mille raadius on 1.

Igal neist punktidest on koordinaat  $z$  võrdne nulliga, koordinaadid  $x$  ja  $y$  rahuldavad aga seost (\*\*). Näiteks punkt  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$  rahuldab antud võrrandit (joon. 25). Seda üht punkti teades saame leida lõpmata palju teisi punkte, mis rahuldavad sedasama võrrandit. Tõepoolest, kuna võrrandis (\*\*) koordinaati  $z$  ei esine, siis ka punkt  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 10\right)$  rahuldab antud võrrandit, samuti punkt  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -5\right)$ , üldiselt kõik punktid  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, z\right)$ , kus koordinaadi  $z$  väärtus on täiesti suvaline. Kõik need punktid asuvad sirgel, mis läbib punkti  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$  ja on paralleelne  $z$ -teljega.



Joon. 25

Samal viisil võime sellel  $xy$ -tasandil asuva ringjoone igast punktist  $(x^*, y^*, 0)$  saada lõpmata palju punkte, mis rahuldavad võrrandit (\*\*). Selleks tõmbame läbi ringjoone iga punkti sirge, mis on paralleelne  $z$ -teljega. Nende sirgete igal punktil on koordinaadid  $x$  ja  $y$  samad mis ringjoone vastaval punktil, koordinaat  $z$  võib olla aga suvaline arv, s. o. need punktid on kujul  $(x^*, y^*, z)$ . Kuid kuna koordinaati  $z$  võrrandis (\*\*) pole, arvud  $(x^*, y^*, 0)$  aga rahuldavad võrrandit, siis ka arvud  $(x^*, y^*, z)$  rahuldavad võrrandit (\*\*). On selge, et sel viisil võib saada kätte iga punkti, mis rahuldab võrrandit (\*\*). Seega punktide hulk, mis määratakse võrrandiga (\*\*), saadakse järgmisel viisil: võtame  $xy$ -tasandil ringjoone, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja raadius on 1, ja läbi selle ringjoone iga punkti tõmbame sirge, mis on paralleelne  $z$ -teljega. Saame nn. *silindrilise pinna* (joon. 25).

4. Nägime, et üks võrrand esitab ruumis üldiselt mingi pinna. Kuid alati pole see

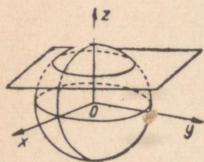
nii. Näiteks rahuldavad võrrandit  $x^2 + y^2 = 0$  ainult sirge ( $z$ -telje) punktid, sest võrrandist järeldub, et  $x$  ja  $y$  on võrdsed nulliga, kõik punktid aga, mille puhul need koordinaadid on võrdsed nulliga, asuvad  $z$ -teljel. Võrrand  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  kujutab punkti (koordinaatide alguspunkti), kuid võrrandile  $x^2 + y^2 + z^2 = -1$  vastab tühi hulk.

5. Missugust hulka kujutavad punktid, mille koordinaadid rahuldavad mitte üht võrrandit, vaid võrrandite süsteemi?

Vaatleme süsteemi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases} \quad (***)$$

Esimest võrrandit rahuldavad punktid asetsevad sfääril, mille raadius on 2 ja mille keskpunktiks on koordinaatide alguspunkt. Teist võrrandit rahuldavad punktid asetsevad tasandil, mis on paralleelne  $xy$ -tasandiga ja asub sellest ühiku kaugusel  $z$ -telje positiivsel poolel. Seega punktid, mis rahuldavad nii esimest kui ka teist võrrandit, peavad asuma nii sfääril  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  kui ka tasandil  $z = 1$ , s. o. asuvad nende lõikejoonel. Niisiis esitab see süsteem ringjoone, mis on sfääri ja tasandi lõikejooneks (joon. 26).



Joon. 26

Näeme, et süsteemi kumbki võrrand esitab pinna, kuid mõlemad võrrandid koos esitavad joone.

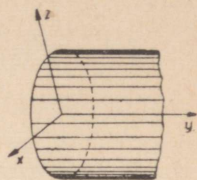
*Küsimus.* Missugused allpool toodud punktidest asuvad esimesel pinnal, missugused teisel ja missugused nende lõikejoonel:

$$A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1), C(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}), \\ D(1, \sqrt{3}, 0), E(0, \sqrt{3}, 1), F(-1, -\sqrt{2}, 1)?$$

6. Kuidas esitada ruumilist ringjoont, mis asuks  $xz$ -tasandil keskpunktiga koor-

dinaatide alguspunktis ja mille raadius oleks 1?

Võrrand  $x^2 + z^2 = 1$  määrab ruumis, nagu te juba nägite, silindrilise pinna. Et saada vajaliku ringjoone punkte, tuleb sellele võrrandile lisada tingimus  $y = 0$ , valides sellega kõigist silindri punktidest välja need, mis asuvad  $xz$ -tasandil (joon. 27).



Saame süsteemi

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Joon. 27

## Harjutused

1. Millised punktide hulgad esitatakse ruumis seostega:

- a)  $z^2 = 1$ ; b)  $y^2 + z^2 = 1$ ;  
c)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ?

2. On antud kolm võrrandisüsteemi:

a) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0. \end{cases}$$

Missugused neist määravad ühe ja sama joone ning missugused erinevad?

3. Kuidas esitada ruumis nurga  $xOy$  poolitaja? Millise hulga esitab ruumis võrrand  $x = y$ ?

# II PEATÜKK

---

## § 1. Sissejuhatus

Nüüd te teate juba üht-teist koordinaatide meetodist ja me võime teile jutustada huvitavamatest asjadest, mis on rohkem seotud kaasaegse matemaatikaga.

### 1. Mõningaid üldisi arutlusi

Algebra ja geomeetria, mida enamuse kooliõpilasi omandab praegu kui täiesti erinevaid teadusi, on tegelikult väga lähedased. Koordinaatide meetodi abil oleks võimalik esitada kogu kooligeomeetria kursus ilma ühegi jooniseta, kasutades ainult arve ja algebralisi operatsioone. Plani-meetria kursus algaks sõnadega: «Nime-tame punktiks arvude paari  $(x, y) \dots$ ». Seejärel võiks määrata ringjoone kui punktide hulga, mis rahuldab võrrandit  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ . Sirgeks nimeta-takse punktide hulka, mis rahuldab võr-randit  $ax + by + c = 0$  jne. Kõik geomeet-ria teoreemid muutuksid seejuures mingi-teks algebralisteks seosteks. Meie järgne-vates väljaannetes jutustame lähemalt, kuidas seda tehakse.

Algebra ja geomeetria vahelise seose kindlakstegemine oli oma olemuselt revolutsiooniks matemaatikas, sest see taastas matemaatika kui ühtse teaduse, milles pole

«hiina müüri» tema erinevate osade vahel. Koordinaatide meetodi loojaks loetakse prantsuse filosoofi ja matemaatikut René Descartes'i (1596—1650). Tema 1637. aastal ilmunud suure filosoofilise traktaadi viimases osas antakse koordinaatide meetodi kirjeldus ja selle rakendus geomeetriliste ülesannete lahendamiseks. Descartes'i idee edasiarendamine viis matemaatika uue haru tekkimisele, mida praegu nimetatakse analüütiliseks geomeetriaks. See nimetus ise väljendab teooria põhiideed. Nimelt on analüütiline geomeetria matemaatika osa, mis lahendab geomeetrilisi ülesandeid analüütiliste (s. o. algebraliste) vahenditega. Olgugi et analüütiline geomeetria on praegu juba täiesti välja arendatud ja lõpetatud, on ideed, mis peituvad tema alustes, tekitanud uusi matemaatika harusid. Nii on tekkinud ja areneb algebraline geomeetria, mis uurib algebraliste võrranditega esitatud joonte ja pindade omadusi. Seda matemaatika osa ei saa mitte kuidagi lugeda lõpetatuks. Just viimastel aastatel on saadud seal uusi põhilisi tulemusi, millel on suur mõju ka matemaatika teistele harudele.

## 2. Geomeetria aitab arvutada

Geomeetriliste ülesannete lahendamisel kerkib kõigepealt esile koordinaatide meetodi üks külg — geomeetriliste mõistete analüütiline tõlgitsemine, geomeetriliste kujutuste ja seoste tõlkimine arvude keelde. Kuid koordinaatide meetodi teine külg — arvude ja arvudevaheliste seoste geomeetiline interpretatsioon — pole siiski mitte väiksema tähtsusega. Kuulus matemaatik German Minkovski (1864—1909) kasutas geomeetrilist lähenemisviisi võrrandite täisarvuliseks lahendamiseks ja tema kaasaegsed matemaatikud olid raba-

tud sellest, kui võrd lihtsateks ja arusaadavateks osutused seejuures mõningad enne väga rasketena tunduvad arvude teooria küsimused.

Vaatleme siin üht lihtsat näidet selle kohta, kuidas geomeetria aitab lahendada algebralisi ülesandeid.

Ülesanne. Vaatleme võrratust

$$x^2 + y^2 \leq n,$$

kus  $n$  on mingi täisarv. Küsitakse, kui palju täisarvulisi lahendeid on sellel võrratusel?

Väikeste  $n$  väärtuste korral on sellele küsimusele lihtne vastata. Näiteks  $n = 0$  korral on ainult üks lahend:  $x = 0, y = 0$ .  $n = 1$  korral lisandub selle lahendile veel neli:  $x = 0, y = 1$ ;  $x = 1, y = 0$ ;  $x = 0, y = -1$  ja  $x = -1, y = 0$ . Täheleb,  $n = 1$  korral on kokku viis lahendit.

$n = 2$  korral on peale loetletute veel neli lahendit:  $x = 1, y = 1$ ;  $x = -1, y = 1$ ;  $x = 1, y = -1$ ;  $x = -1, y = -1$ . Kokku on seega  $n = 2$  korral 9 lahendit. Jätkates sellisel viisil lahendite leidmist, võime koostada tabeli:

Arv $n$	Lahendite arv $N$	Suhe $N/n$	Arv $n$	Lahendite arv $N$	Suhe $N/n$
0	1	—	5	21	4,2
1	5	5	10	37	3,7
2	9	4,5	20	69	3,45
3	9	3	50	161	3,22
4	13	3,25	100	317	3,17

Näeme, et lahendite arv  $N$  kasvab  $n$  kasvamisega, kuid  $N$  muutumise täpset seaduspärasust on küllaltki raske kindlaks teha. Võib eeldada, vaadates tabeli parempoolset veergu, et suhe  $N/n$  läheneb  $n$  kasvamisega mingile arvule.

Näitame nüüd geomeetrilise interpretat-

siooni abil, et see on tõepoolest nii ja et suhe  $N/n$  läheneb arvule  $\pi = 3,14159265 \dots$

Vaatleme arvude paari  $(x, y)$  kui tasandi punkti (abstsissiga  $x$  ja ordinaadiga  $y$ ). Võrratus  $x^2 + y^2 \leq n$  tähendab, et punkt  $(x, y)$  on raadiusega  $\sqrt{n}$  ja keskpunktiga koordinaatide alguspunktis asuva ringi  $K_n$  sees (joon. 28). Seega on meie võrratusel nii palju täisarvulisi lahendeid, kui palju täisarvuliste koordinaatidega punkte satub ringi  $K_n$ .

Geomeetriselt on kohe näha, et täisarvuliste koordinaatidega punktid on «tasandil jaotatud ühtlaselt» ja et pindala ühikule tuleb üks punkt. Seepärast on selge, et lahendite arv peab olema ligikaudu võrdne ringi pindalaga. Seega saame ligikaudse valemi:

$$N \approx \pi n.$$

Toome selle valemi lühikese tõestuse. Jaotame tasandi ühikruutudeks sirgetega, mis on paralleelsed koordinaattelgedega. Olgu täisarvulised punktid nende ruudukeste tippudeks. Ringi  $K_n$  sees olgu  $N$  täisarvulist punkti. Seame igale neist punktist vastavusse ühikruudu, millele see punkt on parempoolseks ülemiseks tipuks. Nendest ruutudest moodustunud kujundi tähistame sümboliga  $A_n$  (joon. 29, kujund  $A_n$  on viirutatud). On ilmne, et  $A_n$  pindala on võrdne arvuga  $N$  (s. o. seda kujundit moodustavate ruutude arvuga).

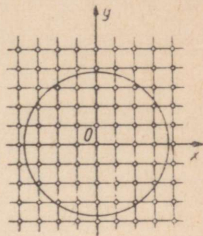
Võrdleme  $A_n$  pindala ringi  $K_n$  pindalaga. Koos ringiga  $K_n$  vaatleme veel kaht ringi keskpunktiga koordinaatide alguspunktis: ringi  $K'_n$  raadiusega  $\sqrt{n} - \sqrt{2}$  ja ringi  $K''_n$  raadiusega  $\sqrt{n} + \sqrt{2}$ . Kujund  $A_n$  tervikuna asub ringi  $K''_n$  ja sisaldab endas ringi  $K'_n$  (tõestage see ise, kasutades teoreemi, et kolmnurga üks külge on väiksem kahe teise külje summast). Seetõttu  $A_n$  pindala on suurem  $K'_n$  pindalast ja väiksem  $K''_n$  pindalast, s. o.

$$\pi(\sqrt{n} - \sqrt{2})^2 < N < \pi(\sqrt{n} + \sqrt{2})^2.$$

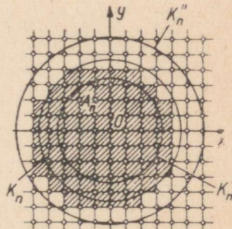
Siit saame oma ligikaudse valemi  $N \approx \pi n$  koos tema vea hinnanguga:

$$|N - \pi n| < 2\pi(\sqrt{2n} + 1).$$

Nüüd püstitame analoogilise ülesande



Joon. 28



Joon. 29

kolme tundmatu jaoks: kui palju täisarvulisi lahendeid on võrratusel

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq n?$$

Vastuse leiame kiiresti, kui kasutame jälle geomeetrilist interpretatsiooni. Ülesande lahendite arv on ligikaudu võrdne kera ruumalaga, mille raadius on  $\sqrt[3]{n}$ , s. o.  $\frac{4}{3}n\sqrt[3]{n}$ . Saada sellist tulemust puhtalgebraliselt oleks palju raskem.

### 3. Neljamõõtmelise ruumi sissetoomise vajalikkusest

Kuid mida teha, kui meilt nõutakse leida võrratuse

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq n$$

täisarvuliste lahendite hulk? Selle ülesande lahendamisel kahe ja kolme tundmatu puhul kasutasime geomeetrilist interpretatsiooni. Kahe tundmatuga võrratuse lahendit (s. o. arvude paari) vaatlesime kui punkti tasandil; kolme tundmatuga võrratuse lahendit (s. o. arvude kolmikut) aga kui punkti ruumis. Kas seda meetodit ei saaks kasutada ka edasi? Siis arvude nelikut  $(x, y, z, u)$  tuleks lugeda mingi nelja mõõdet omava ruumi (*neljamõõtmelise ruumi*) punktiks. Võrratust  $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq n$  võib sel korral vaadelda kui tingimust, et punkt  $(x, y, z, u)$  asub raadiusega  $\sqrt[4]{n}$  ja keskpunktiga koordinaatide alguspunktis neljamõõtmelise kera sees. Edasi on vaja neljamõõtmeline ruum jaotada neljamõõtmelisteks kuubikesteks. Lõpuks on meil vaja arvutada neljamõõtmelise kera ruumala.<sup>1</sup> Teiste sõnadega, me

---

<sup>1</sup> Me ei hakka siin tegelema neljamõõtmelise kera ruumala arvutamise valemi tuletamisega, vaid lihtsalt anname selle. Neljamõõtmelise kera ruumala

peaksime hakkama arendama neljamõõtmelise ruumi geomeetriat.

Kõike seda käesolevas väljaandes tegema me ei hakka. Püüame vaid avada veidi ust neljamõõtmelisse ruumi ja tutvustada teid lihtsaima kujundiga selles — neljamõõtmelise kuubiga.

Arvatavasti huvitavad teid küsimused: kuivõrd tõsiselt võib kõnelda sellest kujutletavast neljamõõtmelisest ruumist, kui suures ulatuses saab selle ruumi geomeetriat üles ehitada analoogia põhjal tavalise geomeetriaga, milles on kolmemõõtmelise ja neljamõõtmelise geomeetria vaheline sarnasus ja erinevus. Uurides neid küsimusi, said matemaatikud sellise vastuse.

Jah, sellist geomeetriat arendada on võimalik, ta on paljus sarnane tavalisega. Veelgi enam, ta sisaldab endas tavalise geomeetria kui koostisosa, sarnaselt sellega, nagu stereomeetria (geomeetria ruumis) sisaldab endas planimeetria. Kuid muidugi on neljamõõtmelise ruumi geomeetrial ka palju olulisi erinevusi. Väga huvitavalt neist neljamõõtmelise maailma iseärasustest jutustas ühes oma jutustuses kirjanik-fantast Herbert Wells.

Näitame nüüd, et oma olemuselt on need iseärasused väga sarnased nendega, mille poolest kolmemõõtmelise ruumi geomeetria erineb kahemõõtmelise tasandi geomeetriast.

#### 4. Neljamõõtmelise ruumi iseärasused

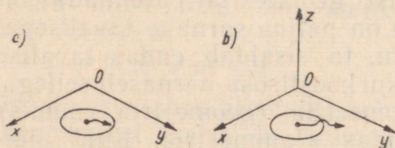
Joonistage tasandile ring ja kujutlege ennast kahemõõtmelise maailma kujutle-

---

on  $\frac{\pi^2 R^4}{2}$ . Võrdluseks märgime veel, et viiemõõtmelise kera ruumala on  $\frac{8\pi^2 R^5}{15}$ , kuuemõõtmelise  $\frac{\pi^3 R^6}{6}$ , seitsmemõõtmelise  $\frac{16\pi^3 R^7}{105}$ .

tava olendina — punktina, mis võib liikuda mööda tasandit, kuid millel pole õigust väljuda ruumi. (Te isegi ei tea, et ruum eksisteerib, ja ei oska seda endale ette kujutada.) Siin ringi piirjoon (ringjoon) on teie jaoks ületamatuks tõkkeks: te ei saa väljuda ringist, sest ringjoon tõkestab kõikjal teie tee (joon. 30, a).

Nüüd kujutlege, et see tasand koos joonistatud ringiga on paigutatud kolmemõõtmelisse ruumi ja et te aimasite kolmanda mõõtme olemasolu. Nüüd saate muidugi raskusteta väljuda ringist, näiteks astute lihtsalt üle ringjoone (joon. 30, b).



Joon. 30

Oletame nüüd, et te olete kolmemõõtmelise ruumi olend (loeme teid endiselt, kui te vastu ei vaidle, punktiks; muide, see on täiesti ebaoluline) ning paiknete kera sees, mille piirpind (sfäär) on teie jaoks läbitamatu. Siis te ei saa väljuda sellest kerast. Kui aga kera on paigutatud neljamõõtmelisse ruumi ja te aimasite neljanda mõõtme olemasolu, siis kerast väljuda saate ilma igasuguste pingutusteta.

Mitte midagi müstilist selles pole — lihtsalt kolmemõõtmelise kera piirpind (sfäär) ei jaota neljamõõtmelist ruumi kaheks osaks, ehkki kolmemõõtmelise ruumi ta jaotab. See on täiesti analoogiline sellega, et ringi piirjoon (ringjoon) ei jaota kolmemõõtmelist ruumi kaheks osaks, ehkki tasandi (millel ta asub) ta jaotab.

Veel üks näide: on selge, et asandil kaht teineteise suhtes sümmeetrilist kujundit ühtima viia ei saa, kui neid lubatakse ümber paigutada ainult tasandil, sellelt väljumata. Kuid istuv ööliblikas võib tiivad kokku panna, viies need horisontaalsest tasandist vertikaalsesse. Samuti ei saa ka kolmemõõtmelises ruumis sümmeetrilisi ruumilisi kujundeid ühtima viia. Näiteks ei saa, ükskõik kuidas ka pöörata, vasaku käe kinnast muuta parema käe kindaks, kuigi nad on võrdsed geomeetrilised kujundid. Neljamõõtmelises ruumis aga saab kolmemõõtmelisi sümmeetrilisi kujundeid ühtima viia sarnaselt sellega, nagu tasandilised sümmeetrilised kujundid ühtivad, kui viia need kolmemõõtmelisse ruumi.

Seepärast pole selles midagi imelikku, kui eespool mainitud Wells'i jutustuse kangeline pärast oma reisi neljamõõtmelisse ruumi osutus ümberpööratuks, sümmeetriliseks iseenda suhtes (süda oli tal näiteks paremal pool). See toimus sellepärast, et väljudes neljamõõtmelisse ruumi, ta pöörus selles pahempidi.

## 5. Veidi füüsikat

Neljamõõtmeline geomeetria osutus erakordselt kasulikuks ja lihtsalt asendamatuks aparaadiks kaasaegsele füüsikale. Ilma kujutletava mitmemõõtmelise geomeetria oleks väga raske esitada ja kasutada sellist kaasaegse füüsika tähtsat osa nagu Albert Einsteini relatiivsusteooriat.

Iga matemaatik võib kadestada Minkovskit, kes, pärast seda, kui ta edukalt kasutas geomeetria arvude teorias, oskas veel kord näitlike geomeetriliste kaalutluste abil tuua selgust rasketesse matemaatilistesse küsimustesse — seekord

relatiivsusteooriasse puutuvaisse. Relatiivsusteooria aluseks on idee ruumi ja aja pidevast seosest. Seepärast on loomulik lugeda ajamomenti, mil toimub mingi sündmus, selle sündmuse neljandaks koordinaadiks kõrvuti kolme esimese koordinaadiga, mis määravad ruumipunkti, milles sündmus toimub.

Selliselt saadud neljamõõtmelist ruumi nimetatakse Minkovski ruumiks. Selle ruumi kirjeldusega algab praegu iga relatiivsusteooria kursus. Minkovski avastus seisneb selles, et relatiivsusteooria põhilised valemid, Lorentzi valemid, kirjutatuna selle spetsiaalse neljamõõtmelise ruumi koordinaatide keeles, on erakordselt lihtsad.

Kaasaegsele füüsikale osutus seega suureks õnneks, et relatiivsusteooria avastamise ajaks olid matemaatikud valmistanud ette mugava, kompaktselt ja kena mitmemõõtmelise geomeetria aparatuuri, mis real juhtumel tunduvalt lihtsustab ülesannete lahendamist.

## § 2. Neljamõõtmeline ruum

Lõpuks jutustame teile, nagu eespool lubasime, veidi neljamõõtmelise ruumi geomeetriast.

Geomeetria ülesehitamisel sirgel, tasandil ja kolmemõõtmelises ruumis on meil kaks võimalust: kas esitada materjal näitlike kujundite abil (see meetod on iseloomulik koolikursusele, mistõttu on raske endale ette kujutada geomeetria õpikut ilma joonisteta) või (selle võimaluse annab meile koordinaatide meetod) puhtanalüütiliselt, nimetades näiteks planeetria kursuses tasandi punktiks arvude paari (selle punkti koordinaate), ruumi punktiks aga arvude kolmikut.

Neljamõõtmelise ruumi puhul meil esimene moodus puudub. Me ei saa vahetult kasutada näitlikke geomeetrilisi kujundeid, kuna meid ümbritseval ruumil on ainult kolm mõõdet. Kuid teine tee pole meile suletud. Tõepoolest, me määrame ju sirge punkti kui arvu, tasandi punkti kui arvude paari, kolmemõõtmelise ruumi punkti kui arvude kolmiku. Seepärast on täiesti loomulik ehitada neljamõõtmelise ruumi geometria üles, defineerides selle kujutletava ruumi punkti kui arvude neliku. Sellises ruumis tuleb geomeetriliste kujundite all mõista teatavaid punktide hulki (nagu ka tavalise geometria puhul). Anname nüüd geomeetriliste mõistete täpsed definitsioonid neljamõõtmelises ruumis.

## 6. Koordinaatteljed ja -tasandid

**Definitsioon.** Neljamõõtmelise ruumi *punktiks* nimetatakse korrastatud<sup>1</sup> punktide nelikut  $(x, y, z, u)$ .

Mida lugeda neljamõõtmelises ruumis koordinaattelgedeks ja kui palju neid on? Et vastata sellele küsimusele, pöördume veidikeseks ajaks tagasi tasandile ja kolmemõõtmelisse ruumi.

Koordinaatteljed tasandil (s. o. kahe mõõtmelises ruumis) — need on punktide hulgad, kus punkti üks koordinaatidest on suvaline arv, teine aga võrdub nulliga. Nii on abstsissstelg  $(x, 0)$ -kujuliste punktide hulk, kus  $x$  on suvaline arv. Näiteks asuvad punktid  $(1, 0)$ ,  $(-3, 0)$ ,  $(2\frac{1}{3}, 0)$  abstsisssteljel, punkt  $(\frac{1}{5}, 2)$  aga ei asu abstsisssteljel. Tasandi ordinaattelg on  $(0, y)$ -



<sup>1</sup> Me ütleme «korrastatud», kuna ühtede ja samade arvude erineval asetusel nelikus saadakse erinevad punktid: näiteks, punkt  $(1, -2, 3, 8)$  on erinev punktist  $(3, 1, 8, -2)$ .

kujuliste punktide hulk, kus  $y$  on suvaline arv.

Kolmemõõtmelises ruumis on kolm telge:  
 $x$ -telg — see on  $(x, 0, 0)$ -kujuliste punktide hulk, kus  $x$  on suvaline arv;

$y$ -telg — see on  $(0, y, 0)$ -kujuliste punktide hulk, kus  $y$  on suvaline arv;

$z$ -telg —  $(0, 0, z)$ -kujuliste punktide hulk, kus  $z$  on suvaline arv.

Neljamõõtmelises ruumis, mis koosneb kõigist  $(x, y, z, u)$ -kujulistest punktidest, kus  $x, y, z, u$  on suvalised arvud, on loomulik lugeda koordinaattelgedeks selliseid punktide hulki, kus punkti üks koordinaatidest omandab suvalisi arvulisi väärtusi, ülejäänud on aga võrdsed nulliga. Siis on selge, et neljamõõtmelises ruumis on neli koordinaattelge:

$x$ -telg —  $(x, 0, 0, 0)$ -kujuliste punktide hulk, kus  $x$  on suvaline arv;

$y$ -telg —  $(0, y, 0, 0)$ -kujuliste punktide hulk, kus  $y$  on suvaline arv;

$z$ -telg —  $(0, 0, z, 0)$ -kujuliste punktide hulk, kus  $z$  on suvaline arv;

$u$ -telg —  $(0, 0, 0, u)$ -kujuliste punktide hulk, kus  $u$  on suvaline arv.

Kolmemõõtmelises ruumis on peale koordinaattelgede veel *koordinaattasandid*. Need on tasandid, mis läbivad mingit kaht koordinaattelge. Näiteks,  $yz$ -tasand on tasand, mis läbib  $y$ - ja  $z$ -telge. Kolmemõõtmelises ruumis on kokku kolm koordinaattasandit:

$xy$ -tasand —  $(x, y, 0)$ -kujuliste punktide hulk, kus  $x$  ja  $y$  on suvalised arvud;

$yz$ -tasand —  $(0, y, z)$ -kujuliste punktide hulk, kus  $y$  ja  $z$  on suvalised arvud;

$xz$ -tasand —  $(x, 0, z)$ -kujuliste punktide hulk, kus  $x$  ja  $z$  on suvalised arvud.

Neljamõõtmelises ruumis on loomulik nimetada *koordinaattasandeiks* punktide hulki, kus punkti kaks koordinaati (neljast) omandavad suvalisi arvulisi väärtusi,

ülejäänud kaks on aga võrdsed nulliga. Näiteks hakkame  $(x, 0, z, 0)$ -kujuliste punktide hulka nimetama neljamõõtmelise ruumi  $xz$ -koordinaattasandiks. Kui palju on üldse selliseid tasandeid?

Seda pole raske leida. Kirjutame need kõik lihtsalt välja:

$xy$ -tasand —  $(x, y, 0, 0)$ -kujuliste punktide hulk,

$xz$ -tasand —  $(x, 0, z, 0)$ -kujuliste punktide hulk,

$xu$ -tasand —  $(x, 0, 0, u)$ -kujuliste punktide hulk,

$yz$ -tasand —  $(0, y, z, 0)$ -kujuliste punktide hulk,

$yu$ -tasand —  $(0, y, 0, u)$ -kujuliste punktide hulk,

$zu$ -tasand —  $(0, 0, z, u)$ -kujuliste punktide hulk.

Iga niisuguse tasandi korral võivad muutuvad koordinaadid omandada suvalisi väärtusi, nende hulgas ka väärtust null. Näiteks kuulub punkt  $(5, 0, 0, 0)$  samaaegselt  $xy$ -tasandile ja  $xu$ -tasandile (millisele veel?). Siis on lihtne näha, et näiteks  $yz$ -tasand «läbib»  $y$ -telge selles mõttes, et  $y$ -telje iga punkt kuulub sellele tasandile. Tõepoolest,  $y$ -telje suvaline punkt, s. o.  $(0, y, 0, 0)$ -kujuline punkt, kuulub  $(0, y, z, 0)$ -kujuliste punktide hulka, s. o. kuulub  $yz$ -tasandile.

*Küsimus.* Millise hulga moodustavad punktid, mis kuuluvad samaaegselt  $yz$ - ja  $xz$ -tasandile?

*Vastus.* Otsitav hulk koosneb kõigest  $(0, 0, z, 0)$ -kujulistest punktidest, s. t. on lihtsalt  $z$ -teljeks.

Niisiis, neljamõõtmelises ruumis eksisteerivad punktide hulgad, mis on analoogilised kolmemõõtmelise ruumi koordinaattasanditega. Neid on kuus. Igaüks neist koosneb punktidest, mille (nagu ka kolmemõõtmelise ruumi koordinaattasandite

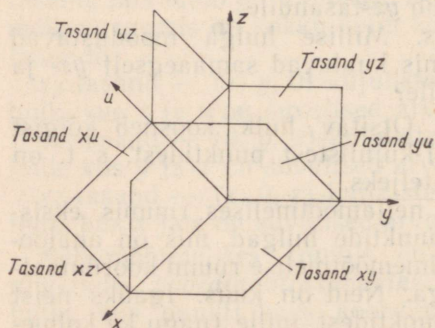


punktidel) kaks mingit koordinaati võivad omandada suvalisi arvulisi väärtusi, ülejäänud kaks on aga võrdsed nulliga. Igaüks neist koordinaattasandest «läbib» kaht koordinaattelge: näiteks  $yz$ -tasand läbib  $y$ - ja  $z$ -telge. Teiselt poolt läbib iga telge kolm koordinaattasandit. Nii näiteks läbivad  $x$ -telge  $xy$ -,  $xz$ - ja  $xu$ -tasand. Me ütleme, et  $x$ -telg on nende tasandite lõige. Kõik kuus koordinaattasandit sisaldavad ühe ühise punkti. See on punkt  $(0, 0, 0, 0)$  — koordinaatide alguspunkt.

*Küsimus.* Milline punktide hulk on  $xy$ - ja  $yz$ -tasandite lõikepunkt?  $xy$ - ja  $zu$ -tasandite lõikepunkt?

Näeme, et pilt saadakse täiesti analoogiline sellega, mis on kolmemõõtmelises ruumis. Proovime nüüd isegi teha skemaatilise joonise, mis aitaks luua neljamõõtmelise ruumi koordinaattasandite ja -telgede asetusest mingi näitliku pildi. Joonisel 31 on koordinaattasandid kujutatud rööpkülikutena ja koordinaatteljed sirgetena, kõik täpselt nii, nagu seda tegime kolmemõõtmelise ruumi puhul joonisel 20.

Kuid neljamõõtmelises ruumis on veel punktide hulki, mida võib nimetada koordinaattasandideks. Seda oligi muide oodata:



Joon. 31

sirgel on ainult koordinaatide alguspunkt; tasandil on nii koordinaatide alguspunkt kui ka koordinaatteljed; kolmemõõtmelises ruumis on peale alguspunkti ja telgede veel koordinaattasandid. On loomulik, et neljamõõtmelises ruumis ilmuvad uued hulgad, mida hakkame nimetama kolmemõõtmelisteks koordinaattasandideks.

Need on hulgad, mis koosnevad kõigist punktidest, mille mingid kolm koordinaati neljast omandavad kõikvõimalikke arvulisi väärtusi, neljas koordinaat on aga võrdne nulliga. Selline on näiteks  $(x, 0, z, u)$ -kujuliste punktide hulk, kus  $x, z, u$  omandavad kõikvõimalikke väärtusi. Seda hulka hakkame nimetama kolmemõõtmeliseks  $xzu$ -koordinaattasandiks. On kerge mõista, et neljamõõtmelises ruumis on neli kolmemõõtmelist koordinaattasandit:

$xyz$ -tasand —  $(x, y, z, 0)$ -kujuliste punktide hulk,

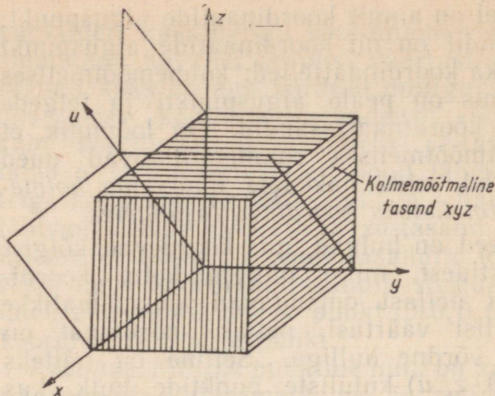
$xyu$ -tasand —  $(x, y, 0, u)$ -kujuliste punktide hulk,

$xzu$ -tasand —  $(x, 0, z, u)$ -kujuliste punktide hulk,

$yzu$ -tasand —  $(0, y, z, u)$ -kujuliste punktide hulk.

Võib samuti öelda, et iga kolmemõõtmeline koordinaattasand «läbib» koordinaatide alguspunkti ja kolme koordinaattelge (sõna «läbib» kasutame siin selles mõttes, et koordinaatide alguspunkt ja koordinaattelgede iga punkt kuulub tasandile). Näiteks läbib kolmemõõtmeline  $xyu$ -tasand  $x$ -,  $y$ - ja  $u$ -telge. Analoogiliselt võib öelda, et iga kahemõõtmeline koordinaattasand on kahe kolmemõõtmelise koordinaattasandi lõige. Näiteks on  $xy$ -tasand kolmemõõtmelise  $xyz$ -tasandi ja kolmemõõtmelise  $xyu$ -tasandi lõige, s. o. koosneb kõigist punktidest, mis kuuluvad samaaegselt nii ühte kui teise hulka.

Vaadake joonist 32, mis erineb jooni-



Joon. 32

sest 31 selle poolest, et siin on välja joonistatud kolmemõõtmeline  $xyz$ -koordinaattasand. See tasand on kujutatud rööptahukana. On näha, et ta sisaldab  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -telje ning  $xy$ -,  $xz$ - ja  $yz$ -tasandi.

## 7. Mõningaid ülesandeid

Katsume nüüd aru saada sellest, mis mõttes võib neljamõõtmelises ruumis rääkida punktidevahelisest kaugusest.

Käesoleva väljaande I peatüki punktides 3, 6 ja 9 näitasime, et koordinaatide meetod annab võimaluse geomeetrilistele kujunditele toetumata määrata punktidevahelist kaugust. Tõepoolest, kaugus arvutatakse sirge punktide  $A(x_1)$  ja  $B(x_2)$  puhul valemi järgi

$$Q(A, B) = |x_1 - x_2|$$

ehk

$$Q(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2};$$

tasandi punktide  $A(x_1, y_1)$  ja  $B(x_2, y_2)$  puhul valemi järgi

$$Q(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

kolmemõõtmelise ruumi punktide

$A(x_1, y_1, z_1)$  ja  $B(x_2, y_2, z_2)$  puhul valemi järgi

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Loomulik on defineerida ka neljamõõtmelise ruumi puhul kaugus analoogilisel viisil. Teeme seda.

**Definitsioon.** Neljamõõtmelise ruumi punktide  $A(x_1, y_1, z_1, u_1)$  ja  $B(x_2, y_2, z_2, u_2)$  vaheliseks *kauguseks* nimetatakse arvu  $\varrho(A, B)$ , mis arvutatakse valemi järgi

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (u_1 - u_2)^2}.$$

Erijuhul järgneb siit, et punkti  $A(x, y, z, u)$  kaugus koordinaatide alguspunkti avaldub valemiga

$$\varrho(O, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + u^2}.$$

Selle definitsiooni põhjal saab juba lahendada neljamõõtmelise geomeetria ülesandeid, mis on täiesti sarnased koolis lahendatavate ülesannetega.

## Harjutused

1. Tõestage, et kolmnurk tippudega  $A(4, 7, -3, 5)$ ,  $B(3, 0, -3, 1)$  ja  $C(-1, 7, -3, 0)$  on võrdkülgne kolmnurk.

2. On antud neli neljamõõtmelise ruumi punkti:  $A(1, 1, 1, 1)$ ,  $B(-1, -1, 1, 1)$ ,  $C(-1, 1, 1, -1)$  ja  $D(1, -1, 1, -1)$ . Tõestage, et need neli punkti on üksteisest võrdsel kaugusel.

3. Olgu  $A, B$  ja  $C$  neljamõõtmelise ruumi punktid. Nurga  $ABC$  võime määrata järgmisel viisil. Kuivõrd me oskame arvutada neljamõõtmelises ruumis punktidevahelist kaugust, siis leiame  $\varrho(A, B)$ ,  $\varrho(B, C)$  ja  $\varrho(A, C)$ , s. o. kolmnurga  $ABC$  «külgede pikkused». Konstrueerime nüüd tavalisel kahemõõtmelisel tasandil kolmnurga  $A'B'C'$  nii, et tema külgede  $A'B'$ ,  $B'C'$  ja  $C'A'$  pikkused oleksid vastavalt võrdsed pikkustega  $\varrho(A, B)$ ,  $\varrho(B, C)$  ja  $\varrho(A, C)$ . Selle



P

kolmnurga nurka  $A'B'C'$  hakkamegi nime-  
tama *nurgaks*  $ABC$  neljamõõtmelises  
ruumis. Tõestage, et kolmnurk tippu-  
dega  $A(4, 7, -3, 5)$ ,  $B(3, 0, -3, 1)$  ja  
 $C(1, 3, -2, 0)$  on täisnurkne.

4. Võtame harjutusest 1 punktid  $A$ ,  $B$   
ja  $C$ . Arvutage kolmnurga  $ABC$  nurgad  
 $A$ ,  $B$  ja  $C$ .

### § 3. Neljamõõtmeline kuup

#### 8. Sfääri ja kuubi definitsioonid

Hakkame nüüd vaatlema geomeetrilisi  
kujundeid neljamõõtmelises ruumis. Geo-  
meetrilise kujundi all mõistame nagu tava-  
liselt mingit punktide hulka.

Võtame näiteks sfääri definitsiooni:  
sfäär on mingist punktist ühel ja samal  
kaugusel asuvate punktide hulk. Seda defi-  
nitsiooni saab kasutada ka sfääri definee-  
rimiseks neljamõõtmelises ruumis, sest mis  
on punkt ja punktidevaheline kaugus, me  
juba teame. Annamegi nüüd sfääri definit-  
siooni, tõlkides selle arvude keelde (liht-  
suse mõttes, nagu ka kolmemõõtmelise  
ruumi puhul, võtame sfääri keskpunktiga  
koordinaatide alguspunktis).

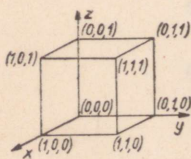
Definitsioon. Punktide  $(x, y, z, u)$   
hulka, mis rahuldavad seost

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2,$$

nimetatakse *neljamõõtmeliseks sfääriks*  
keskpunktiga koordinaatide alguspunktis  
ja raadiusega  $R$ .

Jutustame nüüd veidi neljamõõtmelisest  
kuubist. Nimetuse järgi otsustades on see  
kujund analoogiline teile tuttava kolme-  
mõõtmelise kuubiga (joon. 33a). Tasandil  
on olemas samuti kujund, mis on analoo-  
giline kuubiga — see on ruut. Analoogia  
nende vahel tuleb eriti ilmekalt esile, kui  
vaadelda kuubi ja ruudu analüütilisi defi-  
nitsioone.

P



Joon. 33a

Tõepoolest, nagu te juba teate (I ptk., p. 10, harj. 4) võib kuubile anda sellise definitsiooni:

*kuubiks* nimetatakse punktide  $(x, y, z)$  hulka, mis rahuldavad seoseid:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1, \\ 0 &\leq y \leq 1, \\ 0 &\leq z \leq 1. \end{aligned} \quad (*)$$

See kuubi «aritmeetiline» definitsioon ei vaja enam mingit joonist, kuid ta vastab täiesti kuubi geomeetrilisele definitsioonile.<sup>1</sup>

Ruudule võib samuti anda aritmeetilise definitsiooni:

*ruuduks* nimetatakse punktide  $(x, y)$  hulka, mis rahuldavad seoseid (joon. 33b):

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1, \\ 0 &\leq y \leq 1. \end{aligned}$$

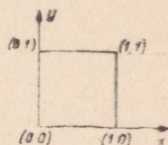
Võrreldes neid kahte definitsiooni, on kerge mõista, et tegelikult on ruut kuubi nn. kahedimensionaalne analoog. Edaspidi nimetamegi ruutu mõnikord «kahedimensionaalseks kuubiks».

Samuti võib vaadelda kuubi analoogi ka ühemõõtmelises ruumis — sirgel. Saame punktide  $x$  hulka, mis rahuldavad seost:

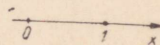
$$0 \leq x \leq 1.$$

On selge, et selliseks «ühedimensionaalseks kuubiks» on lõik (joon. 33c).

Loodame, et nüüd paistab teile täiesti loomulikuna järgmine definitsioon.



Joon. 33b



Joon. 33c

<sup>1</sup> Muidugi on ruumis ka teisi kuupe. Näiteks on punktide hulk, mis määratakse seostega  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $-1 \leq z \leq 1$ , samuti kuup. See kuup paikneb väga hästi koordinaattelgede suhtes: koordinaatide alguspunkt on tema keskpunktiks, koordinaatteljed ja -tasandid on aga tema telgedeks ja sümmeetria tasapindadeks. Ent me otsustasime lugeda põhikuubiks seostega (\*) määratud kuubi, mida me mõnikord nimetame ka ühikuubiks, et eristada teda teistest kuupidest.

P

Definitsioon. Neljamõõtmeliseks kuubiks nimetatakse punktide  $(x, y, z, u)$  hulka, mis rahuldavad seoseid

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 1,$$

$$0 \leq z \leq 1,$$

$$0 \leq u \leq 1.$$

Neljamõõtmelise kuubi joonise esitame teile hiljem. (Ärge imestage, et saab joonistada neljamõõtmelist kuupi: joonistame ju kolmemõõtmelist kuupi tasandilisel paberilehel.) Selleks on vaja kõigepealt kindlaks teha, kuidas on see kuup «ehitatud», milliseid elemente saab temas eristada.

## 9. Neljamõõtmelise kuubi ehitus

Vaatleme järjestikku erinevate mõõdete arvuga «kuupe», s. o. lõiku, ruutu ja tavalist kuupi.

Lõik, mis on määratud seostega  $0 \leq x \leq 1$ , on väga lihtne kujund. Tema kohta võib vahest ainult öelda, et tema raja koosneb kahest punktist: 0 ja 1. Lõigu ülejäänud punkte nimetame edaspidi sisepunktideks.

Ruudu raja koosneb neljast punktist (tipust) ja neljast lõigust. Seega on ruudu rajal kaht liiki elemente: punkte ja lõike. Kolmemõõtmelise kuubi raja sisaldab kolme liiki elemente: tippe — neid on 8, servi (lõigud) — neid on 12 ja tahke (ruudud) — neid on 6.

Kirjutame need andmed tabelina.

Kujundi raja koosseis	Punkte (tippe)	Lõike (külgi, servi)	Ruute (tahke)
Lõik	2	—	—
Ruut	4	4	—
Kuup	8	12	6

Selle tabeli võib ümber kirjutada lühemalt, kui leppida kokku, et kujundi nimetuse asemel kirjutada arv  $n$ , mis on võrdne tema mõõdete arvuga: lõigu puhul  $n = 1$ , ruudu puhul  $n = 2$ , kuubi puhul  $n = 3$ . Raja elementide nimetuse asemel võib kirjutada aga vastava elemendi mõõdete arvu: tahu puhul  $n = 2$ , serva puhul  $n = 1$ . Seejuures punkti (tippu) on mugav lugeda nullise mõõduga elemendiks ( $n = 0$ ). Siis eelnev tabel omandab järgmise kuju.

Raja mõõdete arv Kuubi mõõdete arv	0	1	2
1	2	—	—
2	4	4	—
3	8	12	6
4			

Meie ülesanne on täita selle tabeli neljas rida. Selleks vaatleme veel kord, kuid nüüd juba analüütiliselt<sup>1</sup>, läbi lõigu, ruudu ja kuubi raja ning analoogia põhjal püüame taibata, kuidas on ehitatud neljamõõtmelise kuubi raja.

Lõigu  $0 \leq x \leq 1$  raja koosneb kahest punktist:  $x = 0$  ja  $x = 1$ .

Ruudu  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  raja sisaldab neli tippu:  $x = 0, y = 0$ ;  $x = 0, y = 1$ ;  $x = 1, y = 0$  ja  $x = 1, y = 1$ , s. o. punktid  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  ja  $(1, 1)$ .

Kuubil  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$  on kaheksa tippu. Igaüks neist kujutab punkti  $(x, y, z)$ , milles  $x, y, z$  asendatakse kas nulli või ühega. Saadakse järgmised kaheksa punkti:  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$ .

<sup>1</sup> s. o. puhtaritmeetiliselt.

P

Neljamõõtmelise kuubi

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 1,$$

$$0 \leq z \leq 1,$$

$$0 \leq u \leq 1$$

tippudeks nimetatakse punkte  $(x, y, z, u)$ , mille koordinaadid  $x, y, z$  ja  $u$  asendatakse kas nulli või ühega.

Selliseid tippe on 16, sest on võimalik koostada 16 erinevat nelikut, mis koosnevad nullidest ja ühtedest. Tõepoolest, võtame kolmemõõtmelise kuubi tippude koordinaatidest moodustatud kolmikud (neid on 8) ja kirjutame igale sellisele kolmikule juurde algul 0, seejärel 1. Seega igast kolmikust saame kaks nelikut, kokku tuleb nelikuid  $8 \cdot 2 = 16$ . Niisiis oleme neljamõõtmelise kuubi tipud kokku lugenud.

Mõtleme nüüd, mida nimetada neljamõõtmelise kuubi servaks. Kasutame jälle analoogiat. Ruudu servad (küljed) määratakse järgmiste seostega (vt. joon. 33b):

$$0 \leq x \leq 1, \quad y = 0 \quad (\text{serv } AB);$$

$$x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (\text{serv } BC);$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad y = 1 \quad (\text{serv } CD);$$

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (\text{serv } DA).$$

Nagu näeme, on ruudu servade puhul iseloomulik, et antud serva kõigi punktide ühel koordinaadil on kindel arvuline väärtus: 0 või 1, teine koordinaat omandab aga kõiki väärtusi 0 ja 1 vahel.

Edasi vaatleme kuubi (kolmemõõtmelise) servi (vt. joon. 33a):

$$x = 0, \quad y = 0, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (\text{serv } AA_1);$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad y = 0, \quad z = 1 \quad (\text{serv } A_1B_1);$$

$$x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = 1 \quad (\text{serv } B_1C_1)$$

jne.

Analoogia põhjal saame järgmise definitsiooni.

**Definitsioon.** Neljamõõtmelise kuubi servadeks nimetatakse selliste punktide

hulki, mille kõik koordinaadid, peale ühe, on konstantsed (kas 0 või 1), neljas omandab aga kõikvõimalikke väärtusi nullist üheni.



Näiteid servadest:

- 1)  $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1, \quad 0 \leq u \leq 1;$
- 2)  $0 \leq x \leq 1, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad u = 1;$
- 3)  $x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = 0, \quad u = 0$

jne.

Loeme nüüd kokku, kui palju on neljamõõtmelisel kuubil servi, s. o. kui palju saab selliseid ridu kirjutada. Et mitte segi minna, loeme neid kindlas järjekorras. Eelkõige eristame neli servade rühma: esimese rühma puhul olgu muutuvaks koordinaadiks  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ),  $y, z$  ja  $u$  omandagu aga kõikvõimalikes kombinatsioonides konstantseid väärtusi 0 ja 1. Kuna me juba teame, et on olemas 8 erinevat nullist ja ühest koosnevat kolmikut (meenutage, kui palju tippe on kolmemõõtmelisel kuubil), siis esimese rühma servi on 8 (mille puhul muutuvaks koordinaadiks on  $x$ ). Ka teise rühma servi, mille puhul muutujaks on  $y$ , mitte  $x$ , on 8. Siit saame järeldada, et üldse on neljamõõtmelisel kuubil  $4 \cdot 8 = 32$  serva.

Nüüd on lihtne välja kirjutada neid servi määravad seosed, kartmata, et mõne vahele jätame.

Esimene rühm:

$$0 \leq x \leq 1$$

$y$	$z$	$u$
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Teine rühm:

$$0 \leq y \leq 1$$

$x$	$z$	$u$
0	0	0
0	0	1
0	1	0
...	...	...

Kolmas  
rühm:

$$0 \leq z \leq 1$$

$x$	$y$	$u$
0	0	0
0	0	1
...	...	...

Neljas rühm:

$$0 \leq u \leq 1$$

$x$	$y$	$z$
0	0	0
0	0	1
...	...	...

Kolmemõõtmelisel kuubil on peale tipude ja servade veel tahud. Igal tahul kaks koordinaati muutuvad (omandavad kõikvõimalikke väärtusi nullist üheni) ja üks on konstantne (0 või 1). Näiteks määratakse tahk  $ABB_1A$  (joon. 33a) seostega:

$$0 \leq x \leq 1, \quad y = 0, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Anname nüüd analoogia põhjal järgmise definitsiooni.

**Definitsioon.** Neljamõõtmelise kuubi *kahemõõtmeliseks tahuks*<sup>1</sup> nimetatakse selliste punktide hulka, mille kaks mingit koordinaati võivad omandada kõikvõimalikke väärtusi 0 ja 1 vahel ja kaks ülejäänut on konstantsed (0 või 1).

Tahu näide:

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = 1, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

### Harjutus

Leidke neljamõõtmelise kuubi tahkude arv. (*Nõuanne.* Me soovitame algul, ilma et kasutaksite joonist, lähtudes vaid analüütilisest (aritmeetilisest) definitsioonist, kirjutada välja kõik tavalise kolmemõõtmelise kuubi kuut tahku määravate seoste read. *Vastus.* Neljamõõtmelisel kuubil on 24 kahemõõtmelist tahku.)

Nüüd võime täita meie tabelis ka neljanda rea.

<sup>1</sup> Vajadust tahu nimetuse (kahemõõtmeline) täpsustamiseks selgitame veidi hiljem.

Raja m <span>õ</span> õdete arv Kuubi m <span>õ</span> õdete arv	0	1	2	3
1	2	—	—	—
2	4	4	—	—
3	8	12	6	—
4	16	32	24	—

Nagu näeme, pole see tabel veel lõpeta-  
tud: selles ei ole parempoolset alumist ele-  
menti. Asi seisneb selles, et tõenõoliselt on  
neljamõõtmelise kuubi jaoks vaja lisada  
veel üks veerg. Tõeepoolest, lõigul oli ainult  
ht tupi raja — punktid (tipud), ruudul  
lisandusid servad, kuubil veel ruudud —  
kahemõõtmelised tahud. On oodata, et  
neljamõõtmelisel kuubil lisandub raja tun-  
tud elementidele veel uus elementide liik,  
mille mõõdete arv on võrdne kolmega.

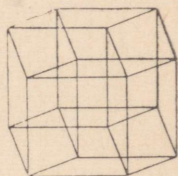
Anname järgmise definitsiooni.

**Definitsioon.** Neljamõõtmelise kuubi  
*kolmemõõtmeliseks tahuks* nimetatakse  
selliste punktide hulka, mille kolm koordi-  
naati omandavad kõikvõimalikke väartusi  
nullist heni ja ks on konstantne (kas 1  
või 0).

Kolmemõõtmeliste tahkude arvu on  
kerge kokku lugeda. Neid on kaheksa, sest  
iga tema nelja koordinaadi jaoks on kaks  
võimalikku väartust: 0 ja 1. Seega saame  
 $2 \cdot 4 = 8$ .

Vaadake nd joonist 34, millel on kuju-  
tatud neljamõõtmeline kuup. Joonisel on  
näha kõik 16 tippu, 32 serva, 24 kahemõõt-  
melist tahku (need on kujutatud rõõpkli-  
kutena) ja 8 kolmemõõtmelist tahku (need  
on kujutatud rõõptahukatena). Jooniselt on  
hästi näha, missugune serv missugusel  
tahul asetseb jne.

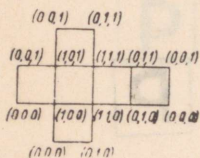
Kuidas on see joonis saadud? Kuid  
mõelge, kuidas joonistatakse paberilehele



Joon. 34

tavalist kuupi. Kujutatakse kolmemõõtmelise kuubi nn. paralleelprojektsioon<sup>1</sup> kahe mõõtmelisele tasandile. Neljamõõtmelise kuubi joonise saamiseks tegime kõigepealt ruumilise mudeli, mis on neljamõõtmelise kuubi projektsioon kolmemõõtmelise ruumi, ja seejärel joonistasime selle. Kui teil on osavad käed, siis võite ise valmistada niisuguse mudeli, kasutades selleks näiteks tikke ja plastiliinist kuulikesi. (Kui palju on teil vaja tikke? plastiliinist kuulikesi? Mitu tikku tuleb torgata igasse kuulikesesse?)

Näitliku kujutluse neljamõõtmelisest kuubist võib saada ka teisel teel. Kujutlege, et me palusime teil meile postiga saata tavalise kolmemõõtmelise kuubi mudeli. Saatmiseks võite muidugi kasutada «kolmemõõtmelist» posti. Kuid kolmemõõtmelisi kujundeid võetakse postkontoris vastu postipakkidena ning see on küllaltki keeruline. Seepärast on parem teha nii: valmistada paberist kuup, võtta see siis liimist lahti ja saata meile, nagu matemaatikud ütlevad, kuubi pinnalaotus. Selline kuubi pinnalaotus on kujutatud joonisel 35. Kuna joonisel on tippude juurde kirjutatud ka tema koordinaadid, siis on lihtne mõista, kuidas seda pinnalaotust kokku liimida, et kuupi saada.



Joon. 35

<sup>1</sup> Stereomeetria kursuses tutvute lähemalt paralleelprojektsiooniga. Et endale ette kujutada, mis-sugune on tavalise kuubi paralleelprojektsioon tasandil, toimige nii: tehke traadist kuup (kuubi mudel) ja vaadake, millise varju heidab see mudel paberilehele või seinale päikesepaistelisel päeval. Kui mudel sobival viisil paigutada, siis varjul saadakse joonis, mida harilikult näete raamatutes. See ongi kuubi paralleelprojektsioon tasandil. Kuubi paralleelprojektsiooni saamiseks on vaja läbi kuubi iga punkti panna samasihilised sirged (päikese kiired on omavahel paralleelsed), mis aga ei tarvitse olla risti tasandiga, millele me projekteerime (ekraaniga). Nende sirgete lõikumisel ekraaniga saadaksegi kujundi paralleelprojektsioon.

1. Kirjutage välja seosed, mis määravad neljamõõtmelise kuubi kõik kolmemõõtmelised tahud.

2. On võimalik valmistada ka neljamõõtmelise kuubi «pinnalaotus». See on mingi kolmemõõtmeline kujund ning ilmselt koosneb ta kaheksast kuubikust. Kui teil õnnestub valmistada või endale ette kujutada seda «pinnalaotust», siis joonistage see ja näidake joonisel iga tema tipu koordinaadid.

## 10. Ülesandeid kuubist

Niisiis, me tutvusime veidi neljamõõtmelise kuubi ehitusega. Proovime nüüd endale ette kujutada tema suurust. Neljamõõtmelise kuubi iga serva pikkus, nagu ka ruudul ja tavalisel kuubil, on võrdne ühega (serva pikkuse all me mõistame ühel serval asuvate tippude vahelist kaugust). Mitte ilmaaegu ei nimetanud me oma «kuupe» ühikulisteks.

1. Arvutage kuubi mitte ühel serval asetsevate tippude vaheline kaugus. (Selleks valige üks tippudest, kõige parem tipp  $(0, 0, 0, 0)$ , ja leidke selle tipu ning kõigi ülejäänud tippude vahelised kaugused. Punktidevahelise kauguse arvutamise valemite teate, samuti ka tippude koordinaate, jääb vaid sooritada lihtsad arvutused.)

2. Lahendanud ülesande 1, näete, et kõik tipud võib jaotada nelja gruppi. Esimese grupi tipud asuvad punktist  $(0, 0, 0, 0)$  kaugusel 1, teise grupi tipud kaugusel  $\sqrt{2}$ , kolmanda grupi tipud kaugusel  $\sqrt{3}$  ja neljanda grupi tipud kaugusel  $\sqrt{4} = 2$ . Kui palju on neljamõõtmelisel kuubil iga grupi tippe?

3. Tipu  $(1, 1, 1, 1)$  kaugus tipust  $(0, 0, 0, 0)$  on kõige suurem, võrdne 2-ga. Seda tippu nimetame neljamõõtmelise kuubi tipu  $(0, 0, 0, 0)$  *vastastipuks* ja neid ühendavat lõiku — neljamõõtmelise kuubi *peadiagonaaliks*. Mida nimetada teiste mõõdetede arvuga kuupide peadiagonaaliks ja millega võrduvad nende peadiagonaalide pikkused?

4. Kujutage nüüd endale ette, et kolmemõõtmeline kuup on tehtud traadist ja tipus  $(0, 0, 0)$  istub sipelgas. Et minna ühest tipust teise, tuleb sipelgal ronida mööda servi. Mitut serva mööda tuleb sipelgal ronida, et saada tipust  $(0, 0, 0)$  tippu  $(1, 1, 1)$ ? Mööda kolme serva. Seejärest tippu  $(1, 1, 1)$  nimetame kolmandat järku tipuks. Tipust  $(0, 0, 0)$  tippu  $(0, 1, 1)$  minekul tuleb sipelgal ronida mööda kaht serva. Sellist tippu nimetame teist järku tipuks. Kuubil on veel esimest järku tippe, s. o. selliseid, millistesse sipelgal tuleb ronida mööda üht serva. Selliseid tippe on kolm:  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$  ja  $(1, 0, 0)$ . Teist järku tippe on kuubil kolm. Kirjutage üles nende koordinaadid (ülesanne 4a). Tipust  $(0, 0, 0)$  igasse teist järku tippu viib kaks teed, mis koosnevad kahest lülist. Näiteks tippu  $(0, 1, 1)$  võib saada läbi tipu  $(0, 0, 1)$  või ka läbi tipu  $(0, 1, 0)$ . Mitut kolmelüulist teed mööda võib saada mingist tipust tema vastastippu (ülesanne 4b)?

5. Võtke neljadimensionaalne kuup keskpunktiga koordinaatide alguspunktis, s. o. punktide hulk, mis rahuldab seoseid:

$$-1 \leq x \leq 1,$$

$$-1 \leq y \leq 1,$$

$$-1 \leq z \leq 1,$$

$$-1 \leq u \leq 1.$$

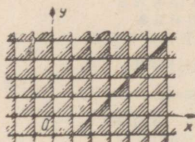
Leidke tipu  $(1, 1, 1, 1)$  ja kõigi ülejäänud tippude vahelised kaugused.

Millised tipud on tipu  $(1, 1, 1, 1)$  suhtes esimest järku tipud? teist järku tipud? kol-

mandat järku tipud? nejäandat järku tipud?

6. Ja viimane küsimus, mis on kontrollküsimuseks neljamõõtmelise kuubi kohta: kui palju on olemas neljalülilisi teid, mis viivad neljadimensionaalse kuubi tipust  $(0, 0, 0, 0)$  vastastippu  $(1, 1, 1, 1)$ , kui liikuda mööda kuubi servi? Kirjutage üksikasjalikult üles iga tee marsruut, näidates järjekorra, missugustest tippudest on vaja läbi liikuda.

Vastus harjutusele lk. 17.



Израиль Гельфанд  
Елена Глаголева  
Александр Кириллов

МЕТОД КООРДИНАТ

На эстонском языке  
Оформление Ю. Аппак  
Издательство «Валгус»  
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

Toimetaja K. Kallaste  
Kunstiline toimetaja H. Keigo  
Tehniline toimetaja E. Toivere  
Korrekторid: H. Kessel ja  
A. Toomaspoeg

Laduda antud 13. IX 1966. Trükkida antud  
16. I 1967. Paber 54×84, 1/16. Trükipoog-  
naid 4,25. Tingtrükipoognaid 3,6. Arvestus-  
poognaid 3,00. Trükiarv 4000. Tellimise nr.  
7714. Trükikoda «Kommunist», Tallinn,  
Pikk t. 2.

Trükipaber nr. 2 — Kohila Paberivabrik.

Hind 8 kop.

8 kop.

A  
28331

6255907

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00625590 7