EESTI NSV TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

MATEMAATILISED TEADUSED 2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

H. JAAKSON

SUR LA LÉGITIMITÉ D'UNE MÉTHODE DE FOURIER

СО СВОДКОЙ:
О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ФУРЬЕ

RK „TEADUSLIK KIRJANDUS"
TARTU, 1946

TRÜ MATEMAATILISE ANALÜÜSI KATEEDER
JUHATAJA: prof. H. JAAKSON

SUR LA LÉGITIMITÉ D'UNE MÉTHODE DE FOURIER.

Il s'agit ici de la méthode de Fourier qui permet, dans certains cas, de résoudre des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

Voici l'idée essentielle de cette méthode:

Soit donné un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues x_h:

$$c_i = \sum_{h=1}^{\infty} a_{ih} x_h \quad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Pour trouver une solution du système (1), on calcule la solution

$$x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots\ x_h^{(n)},\ \ldots\ x_n^{(n)} \tag{2}$$

du système réduit correspondant

$$c_i = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_h \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n), \tag{3}$$

on passe à la limite pour $n \to \infty$ et l'on prend pour les valeurs des inconnues x_h du système (1) les limites a_h des $x_h^{(n)}$:

$$x_h = a_h = \lim_{n \to \infty} x_h^{(n)}. \tag{4}$$

On peut se demander quelles sont les conditions d'après lesquelles ce procédé nous conduira au but en fournissant une solution du système (1).

1. — Pour préciser la question posée, convenons d'entendre sous une solution du système (1) tout ensemble des valeurs des inconnues qui satisfont à ce système en rendant absolument convergentes toutes les séries qui y figureront.

Supposons:

(a) que le système réduit (3) ait une solution bien déterminée (2);

(b) que, pour $n \to \infty$, les $x_h^{(n)}$ tendent vers des limites finies et bien déterminées a_h (4);

(c) et que les a_h substitués dans les séries du système (1) rendent absolument convergentes toutes ces séries.

Cela étant, démontrons la proposition suivante: La condition nécessaire et suffisante pour que les a_h constituent une solution du système (1) consiste en ce que soit

$$(A) \qquad \left| \sum_{h=m+1}^{n} a_{ih} x_h^{(n)} \right| < \varepsilon \quad \text{pour } m > M(i) \text{ et } n > N(i, m),$$

ε étant une quantité positive choisie arbitrairement à l'avance, i un entier positif quelconque, $M(i)$ et $N(i, m)$ des entiers positifs assez grands.

En effet, désignons

$$(5) \qquad \begin{cases} s_m = \sum_{h=1}^{m} a_{ih} a_h, \\ \sigma_m^{(n)} = \sum_{h=1}^{m} a_{ih} x_h^{(n)}. \end{cases}$$

La série

$$(6) \qquad \sum_{h=1}^{\infty} a_{ih} a_h$$

étant absolument convergente aura une somme bien déterminée S:

$$\lim_{m \to \infty} s_m = S = \sum_{h=1}^{\infty} a_{ih} a_h.$$

Pour que cette somme soit c_i:

$$S = c_i,$$

il faut et il suffit évidemment que l'on ait

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sigma_m^{(n)} = c_i$$

ou

$$(7) \qquad \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} (c_i - \sigma_m^{(n)}) = 0,$$

s_m étant la limite de $\sigma_m^{(n)}$ pour $n \to \infty$:

$$(8) \qquad s_m = \lim_{n \to \infty} \sigma_m^{(n)}.$$

Donc, d'après (7) et (8)

$$\lim_{n \to \infty} \left(c_i - \sigma_m^{(n)}\right) = c_i - s_m$$

et

$$\lim_{m \to \infty} (c_i - s_m) = 0,$$

d'où l'on tirera immédiatement que

$$\left| \left(c_i - \sigma_m^{(n)}\right) - (c_i - s_m) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } n > N(i, m)$$

et

$$|c_i - s_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } m > M(i),$$

ε étant un nombre positif quelconque, $N(i, m)$ et $M(i)$ des nombres entiers positifs assez grands, dont le premier $N(i, m)$ dépendra en général de m.

En se servant de l'inégalité

$$\left|c_i - \sigma_m^{(n)}\right| - \left|c_i - s_m\right| \leqslant \left| \left(c_i - \sigma_m^{(n)}\right) - \left(c_i - s_m\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

on obtiendra donc

$$\left|c_i - \sigma_m^{(n)}\right| < \left|c_i - s_m\right| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Or, d'après (2), (3) et (5)

$$\sigma_n^{(n)} = c_i$$

et, par suite,

$$c_i - \sigma_m^{(n)} = \sigma_n^{(n)} - \sigma_m^{(n)} = \sum_{h=m+1}^{n} a_{ih} x_h^{(n)}.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante (7) s'exprimera bien sous la forme suivante :

$$\left| \sum_{h=m+1}^{n} a_{ih} x_h^{(n)} \right| < \varepsilon \quad \text{pour } m > M(i) \text{ et } n > N(i, m).$$

On obtiendra évidemment une condition suffisante en exigeant de plus que l'on ait

$$\left| \sum_{h=m+1}^{n} a_{ih} x_h^{(n)} \right| < \varepsilon \quad \text{pour } m > M(i) \text{ et } n > N(i),$$

$N(i)$ étant supposé indépendant de m.

En ajoutant la condition (A) aux conditions (a), (b), (c), on obtiendra donc un système de conditions nécessaires et suffisantes, pour que la méthode de Fourier fournisse une solution du système (1), cette solution satisfaisant à la convention faite ci-dessus.

2. — Etant donné un système (1) dont on se propose de calculer une solution par la méthode de Fourier, on aura donc à étudier non seulement si les trois conditions (a,) (b,) (c) sont remplies, mais en outre si la condition (A) le sera elle aussi.

Or, la condition (A) est d'une nature tout à fait analogue à la condition générale de convergence des séries due à Cauchy. Par suite, pour reconnaître si la condition (A) est remplie, on n'aura qu'à procéder d'une manière tout analogue comme dans le cas où il s'agit de la convergence d'une série donnée, en appliquant le plus souvent des critères divers moins généraux, mais plus commodes dans la pratique.

Tous ces critères spéciaux auront au fond pour base commune la proposition évidente suivante:

(B) Si les modules des termes de la somme

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_h^{(n)} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

restent pour $h > H(i)$ inférieurs aux modules des termes correspondants d'une série absolument convergente

$$\sum_{h=1}^{\infty} v_{ih}:$$

$$\left| a_{ih} x_h^{(n)} \right| < \left| v_{ih} \right| \text{ pour } h > H(i),\ n > N(i),$$

la condition (A) sera remplie, $H(i)$ et $N(i)$ étant des entiers positifs quelconques.

Il en résulte, en particulier, que la condition (A) sera remplie, si les séries

$$(C) \qquad \sum_{h=1}^{\infty} a_{ih} a_h \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

sont absolument convergentes et si les modules des $x_h^{(n)}$ tendent vers $|a_h|$ en croissant.

3. — Dans certains cas, il est commode de se servir du critère suivant:

La condition (A) sera remplie, si l'on peut faire correspondre à une quantité positive $p(i) < 1$ des nombres entiers positifs $H(i)$ et $N(i)$ tels que

$$(D) \qquad \left|\frac{\mu_{h+1}}{\mu_h}\right| < p(i) < 1 \text{ pour } h > H(i) \text{ et } n > N(i)$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots),$$

où

$$\mu_h = a_{ih} x_h^{(n)}.$$

En effet, d'après (D) on aura pour $h_0 > H(i)$ et $n > N(i)$:

$$|\mu_{h_0+1}| < p(i) \, |\mu_{h_0}|,$$

$$|\mu_{h_0+2}| < p^2(i) \, |\mu_{h_0}|,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$|\mu_{h_0+k}| < p^k(i) \, |\mu_{h_0}|,$$

c'est-à-dire les modules des termes de la somme

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_h^{(n)}, \text{ où } h = h_0 + k,$$

resteront pour $h_0 > H(i)$ et $n > N(i)$ inférieurs aux termes correspondants de la série géométrique convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} p^k(i) \, |\mu_{h_0}|.$$

Donc, la condition (B) et, par suite, la condition (A) elle aussi seront bien remplies.

4. — En particulier, le critère précédent (D) permet de vérifier aisément que la condition (A) sera remplie pour tous les systèmes réduits généralisés auxquels nous avons appliqué la méthode de Fourier dans notre travail*) „Sur certains types de systèmes d'équations linéaires". . . , en ne tenant compte que des conditions (a), (b) et (c).

Nous y avons montré que, pour ces systèmes, les trois conditions (a), (b) et (c) sont remplies; donc, si de plus on s'assure de ce que la

---

*) Acta et Commentationes Universitatis Dorpatensis A. $VIII_1$, 1925.

condition (A) le sera elle aussi, on en conclura immédiatement qu'il a été, en effet, légitime d'y appliquer la méthode de Fourier.

Nous allons le vérifier maintenant en examinant de près les trois types dans lesquels rentrent nos systèmes réduits généralisés.

5. — Les systèmes réduits généralisés que l'on trouve dans le Chapitre I („Sur certains types . . .") rentrent dans le type suivant:

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^i x_h \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

où

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad \text{et}$$

$$\left| \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h} \right| \geqq p > 1 \quad \text{pour} \quad h \geqq N, \tag{10}$$

N étant un entier positif quelconque.

Prenons le système réduit correspondant sous la forme suivante:

$$-\lambda_1^i = \sum_{h=2}^{n+1} \lambda_h^i \left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Par un calcul simple on obtiendra („Sur certains . . .", p. 16)

$$\left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} = (-1)^{h-1} \frac{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{h-1}}{\lambda_h^{h-2}} \cdot \prod_{k=2}^{h-1} \frac{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_k}}{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_h}} \cdot \prod_{k=h+1}^{n+1} \frac{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_k}}{1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_k}}.$$

Donc, en désignant

$$\mu_h = \lambda_h^i \left(\frac{x_h}{x_1}\right)^{(n)} \quad \text{et} \quad \mu_{h+1} = \lambda_{h+1}^i \left(\frac{x_{h+1}}{x_1}\right)^{(n)},$$

on aura

$$\frac{\mu_{h+1}}{\mu_h} = -\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)^{h-i-1} \cdot \prod_{k=1}^{h-1} \frac{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_h}}{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{h+1}}} \cdot \prod_{k=h+2}^{n+1} \frac{1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_k}}{1 - \frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_k}}.$$

Désignons enfin

$$P(h) = \prod_{k=1}^{N-1} \frac{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_h}}{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{h+1}}}$$

et remarquons que $\lim\limits_{h \to \infty} P(h) = 1$.

Il est aisé de voir que pour $h \geqq N$ et $n > h-1$

$$\left|\frac{\mu_{h+1}}{\mu_h}\right| < \left(\frac{1}{p}\right)^{h-i-1} |P(h)| \cdot \left\{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{p^k}}{1-\frac{1}{p^k}}\right\}^2$$

et que

$$\lim_{h\to\infty} \left|\frac{\mu_{h+1}}{\mu_h}\right| = 0;$$

par suite, étant donné une quantité positive $p(i) < 1$, on peut assigner évidemment un entier positif $H(i) \geqq N$ tel que

$$\left|\frac{\mu_{h+1}}{\mu_h}\right| < p(i) < 1$$

pour $h > H(i)$, quelle que soit la valeur entière et positive de

$$n > h - 1 \geqq H(i).$$

Donc, d'après le critère (D), la condition (A) est bien remplie pour tous les systèmes (9) sous l'hypothèse (10).

6. — Les systèmes réduits généralisés du Chapitre II („Sur certains types ...") sont du type suivant:

$$c_i = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h^i x_h \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

où

$$(12)\quad \begin{cases} 1^0 & c_i = 0 \text{ pour } i \neq k,\ c_k \neq 0,\ k \text{ étant un entier positif quelconque ou zéro,} \\ 2^0 & \left|\dfrac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h}\right| \geqq p \geqq 4 \quad (h = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

(voir „Sur certains stype ...", n° 37).

Le système réduit correspondant s'écrit

$$c_i = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h^i x_h^{(n)} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

et l'on aura

$$x_h^{(n)} = (-1)^{h+k-1} c_k \frac{\sum\limits_{(\lambda_h, \lambda_1)}^{(n-1)} \dfrac{1}{\lambda_2\lambda_3 \ldots \lambda_{k+1}}}{\prod\limits_{m=1}^{h-1} \left(\dfrac{\lambda_h}{\lambda_m} - 1\right) \cdot \prod\limits_{m=h+1}^{n} \left(1 - \dfrac{\lambda_h}{\lambda_m}\right)} \quad \text{(n° 30, p. 55),}$$

où l'on entend par

$$\sum_{(\lambda_h,\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{k+1}}$$

la fonction symétrique, entière et homogène, d'ordre k des $n-1$ quantités:

$$\frac{1}{\lambda_1},\ \frac{1}{\lambda_2},\ \ldots\ \frac{1}{\lambda_{h-1}},\ \frac{1}{\lambda_{h+1}},\ \ldots\ \frac{1}{\lambda_n}$$

et du premier degré par rapport à chacune d'elles, tous les termes de ce polynôme ayant le même coefficient numérique $+1$.

Donc,

$$\frac{\mu_{h+1}}{\mu_h} = -\left(\frac{\lambda_h}{\lambda_{h+1}}\right)^{h-i} \cdot \prod_{m=1}^{h-1} \frac{1-\frac{\lambda_m}{\lambda_h}}{1-\frac{\lambda_m}{\lambda_{h+1}}} \cdot \prod_{m=h+2}^{n} \frac{1-\frac{\lambda_h}{\lambda_m}}{1-\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_m}} \cdot \frac{\sum\limits_{(\lambda_{h+1},\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{k+1}}}{\sum\limits_{(\lambda_h,\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_{k+1}}},$$

où

$$\mu_h = \lambda_h^i x_h^{(n)} \quad (h=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n).$$

Il est aisé de voir que

$$\left| \sum_{(\lambda_h,\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m} \right| \leqq \sum_{(\lambda_h,\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{|\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m|} < \sum_{(\lambda_h,\lambda_1)}{}' \frac{1}{|\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m|},$$

où

$$\sum_{(\lambda_h,\lambda_1)}{}' \frac{1}{|\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m|} = \lim_{n\to\infty} \sum_{(\lambda_h,\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{|\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m|} \quad (\text{n}^{\text{os}}\ 33{,}35).$$

D'après cela on aura

$$\left| \sum_{(\lambda_h,\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m} \right| < \frac{15}{8}|A'|,$$

où

$$A' = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{h-1}\lambda_{h+1}\ldots\lambda_m} \quad (\text{pour } h<m),$$

$$= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{m-1}} \quad (\text{pour } h \geqq m) \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 35);$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{8}\,|A'| < \left| \sum_{(\lambda_h,\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_m} \right| < \frac{15}{8}\,|A'| \qquad (\text{n}^\circ\ 36,\ \text{p. } 69).$$

Donc,

$$\left|\frac{\mu_{h+1}}{\mu_h}\right| < 15\left(\frac{1}{p}\right)^{h-i} \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{p^n}}{1-\frac{1}{p^n}} \right\}^2 \qquad \text{pour } h \geqq k+1$$

et

$$\lim_{h\to\infty} \left|\frac{\mu_{h+1}}{\mu_h}\right| = 0.$$

On en conclut immédiatement qu'étant donnée une quantité positive $p(i) < 1$, on peut assigner un nombre entier positif $H(i)$ tel que

$$\left|\frac{\mu_{h+1}}{\mu_h}\right| < p(i) < 1 \quad \text{pour } h > H(i),$$

quelle que soit la valeur entière et positive de $n > h > H(i)$.

D'après le critère (D), la condition (A) sera donc bien remplie pour tous les systèmes (11) sous l'hypothèse (12).

7. — Les systèmes réduits généralisés du Chapitre IV („Sur certains types . . .") sont du type suivant:

$$(13) \qquad \gamma_i = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_i^{h-1} y_h \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

où

$$(14) \qquad \begin{cases} 1^0 & \gamma_i = 0 \text{ pour } i \neq k, \\ 2^0 & \left|\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h}\right| \geqq p \geqq 4 \quad (h = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases} \qquad (\text{n}^\circ\ 65).$$

La valeur de l'inconnue $y_h^{(n)}$ du système réduit correspondant, ne contenant que n équations et autant d'inconnues ($n \geqq k$), s'exprime par

$$y_h^{(n)} = \frac{(-1)^{h+k} \cdot \gamma_k \cdot \sum_{(\lambda_k,\lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_k}}{\prod_{m=1}^{k-1}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_m}-1\right) \cdot \prod_{m=k+1}^{n}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\right)} \qquad (\text{n}^\circ\ 65,\ \text{p. } 115).$$

D'après cela, en désignant $\mu_h = \lambda_i^{h-1} y_h^{(n)}$,

on aura

$$\left|\frac{\mu_{h+1}}{\mu_h}\right| = \left|\lambda_i \frac{\sum\limits_{(\lambda_k, \lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{h+1}}}{\sum\limits_{(\lambda_k, \lambda_1)}^{(n-1)} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_h}}\right| < 15 \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_{h+1}}\right|$$

et, par suite,

$$\lim_{h \to \infty} \left|\frac{\mu_{h+1}}{\mu_h}\right| = 0,$$

d'où l'on déduira, tout comme ci-dessus (nos 5 et 6), que la condition (A) sera bien remplie pour tous les systèmes (13) sous l'hypothèse (14).

О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ФУРЬЕ.

Сводка.

В некоторых случаях решения систем линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных получаются при помощи известного метода Фурье.

Этот метод состоит в том, что в соответствии с данной бесконечной системой

$$c_i = \sum_{h=1}^{\infty} a_{ih} x_h \quad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

составляется конечная редуцированная система

$$c_i = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_h \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{2}$$

исчисляется решение системы (2):

$$x_1^{(n)}, \quad x_2^{(n)}, \ldots x_n^{(n)},$$

определяются пределы

$$a_h = \lim_{n \to \infty} x_h^{(n)},$$

и эти последние принимаются за значения неизвестных в данной системе (1):

$$x_h = a_h \quad (h = 1, 2, 3, \ldots).$$

Спрашивается, при каких условиях метод Фурье действительно даёт решения для данной бесконечной системы (1)?

Для уточнения вопроса условимся понимать под решением системы (1) такую совокупность значений неизвестных x_h, при которой все ряды

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_{ih} x_h \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

окажутся абсолютно сходящимися.

Имея это в виду и предполагая:

(a) существование решения редуцированной системы (2),

(b) существование a_h и

(c) абсолютную сходимость рядов:

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_{ih} a_h \quad (i=1, 2, 3, \ldots),$$

можно доказать следующее предложение:

Необходимое и достаточное условие, чтобы a_h составляли решение данной бесконечной системы (1), состоит в том, чтобы было

$$(A) \qquad \left| \sum_{h=m+1}^{n} a_{ih} x_h^{(n)} \right| < \varepsilon \text{ при } m > M(i) \text{ и } n > N(i, m),$$

где ε означает произвольно выбранное положительное число, i — любое целое положительное число, а $M(i)$ и $N(i,m)$ — достаточно большие целые положительные числа.

В частных случаях, для удобства практического применения, этот общий критерий (A) может быть заменён различными специальными критериями.

Так, например, в некоторых случаях можно пользоваться специальным критерием:

Условие (A) выполнено, если для положительной величины $p(i) < 1$ можно указать такие соответствующие целые положительные числа $H(i)$ и $N(i)$, чтобы было

$$\left| \frac{\mu_{h+1}}{\mu_h} \right| < p(i) < 1 \text{ при } h > H(i) \text{ и } n > N(i) \quad (i=1, 2, 3, \ldots),$$

$$\text{где } \mu_h = a_{ih} x_h^{(n)}.$$

При помощи этого специального критерия проверяется, что условие (A) в частности выполнено для всех тех обобщённых редуцированных систем, к которым автор применял метод Фурье в своей работе: „Sur certains types de systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Sur l'interpolation“ (Acta et Comment. Universitatis Dorpatensis A VIII$_1$, 1925), и этим подтверждается правильность полученных там результатов.

Vastutav toimetaja G. Kangro. Tehniline toimetaja H. Kohu. Korrektorid L. Vaganay ja B. Pravdin. Ladumisele antud 4. III 1946. Trükkimisele antud 11. IV 1946. Paberi kaust 67×95 1/16. Trükipoognaid 1. Autoripoognaid 0,63. Arvestuspoognaid 0,63. MB 01588. Laotihedus trpg. 37500. Tiraaž 2200. Trükikoja tellimus nr. 404. Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4. Hind rbl. 1.—

О применимости метода Фурье.

На французском языке. Эгосиздат „Научная Литература“, Тарту.