

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

M. TAMM

LINEAARALGEBRA
JA
LINEAARPROGRAMMEERIMINE

II

TALLINN 1962

Tallinna Polütehniline Instituut

Matemaatika teosed

M. Tamm

LINEAARALGEBRA JA LINEAARPROGRAMMEERIMISE

konспект

TPI raamatupidamise eriala üliõpilastele

II osa

— Lineaarprogrammeerimine

Tallinn, 1962

Таллинский политехнический институт

Таллин, ул.Калинина д.101

М.Тамм

Конспект по линейной алгебре и
линейному программированию для
студентов бухгалтерской специальности ТПИ

Часть II

На эстонском языке

2



Vastutav toimetaja T. Tammi

TPI rotaprint, 1962. Trükipoognaid 7,25

Tiraaž 500. MB-00684. Tell.nr. 255

Hind rbl.-22

II. LINEAARPROGRAMMEERIMINE.

8. Näiteid lineaarprogrammeerimise

ülesannetest.

a) Sotsialistliku tootmise planeerimise ja organiseerimise parandamine, tööjaotuse edasine arendamine ja kapitaalvahutuste majandusliku efektiivsuse tõstmine on meie majanduselus suure tähtsusega. Tänapäeva tööstuse tehniline keerulisus, mitmesuguste tehnoloogiate kasutamise võimalus, rahvamajandusharude vastastikune sõltuvus jt. majanduslikud probleemid teevad eespool toodud küsimused väga raskeks. Nende ülesannete lahendamisel on suur abi matemaatilistest meetoditest ja uuest arvutustehnikast.

Viimasel paaril aastakümnel on eriti intensiivselt uuritud matemaatika rakendamise võimalusi keeruliste ja seni lahendamata majanduslike probleemide uurimisel. Seda soodustas uue arvutustehnika areng ja levimine.

b) Meie tutvume uue ainega - l i n e a a r p r o g r a m m e e r i m i s e g a ehk l i n e a a r p l a n e e r i m i s e g a. Lineaarprogrammeerimises tegeldakse ülesannetega, kus tuleb mitmele üksteisest lineaarselt sõltuvalle otsitavale leida sellised väärtused, mis ühe lineaarse mitme muutuja funktsiooni teevad maksimaalseks (või mõnel juhul minimaalseks), s.t. tegeldakse lineaarsete lisatingimustega ekstreemumülesannetega, kus ka funktsioon on lineaarne.

c) Alguseks sõnastame ja formuleerime matemaatiliselt mõned LP ülesanded (s.o. lineaarprogrammeerimise ülesanded).

toodetakse kahte liiki väetisi A ja B. Väetise A valmistamiseks vajatakse nelja tsehhi tööd, väetise B jaoks aga kolme tsehhi tööd. Tabelis 1 on antud aeg tundides, mis kulub ühe tonni kummagi väetise töötlemisele igas tsehhis, näiteks kulub väetise B töötlemisele II tsehhis 2 h/t. Peale selle on tabelis toodud igas tsehhis väetiste töötlemiseks päevas kasutada olev aeg tundides ja päevaplaan tonnides kummagi väetise jaoks.

Väetis Tsehh	A	B	Tööaeg h/d
I	2	3	49
II	1	2	28
III	3	0	35
IV	2	1	42
Plaan t/d	10	8	
Otsitavad t/d	x	y	

Ülesandes nõutakse organiseerida väetiste A ja B tootmine nii, et päevaplaan oleks täidetud või ületatud, et ületunde ei tehtaks ja et päeva kogutoodang (tonnides) oleks maksimaalne.

Formuleerime selle ülesande matemaatiliselt. Selleks valime kõigepealt otsitavad. Vaja on teada, kui palju toota väetist A ja kui palju B. Tähistame x -ga väetise A päevatoodangu tonnides ja y -ga väetise B päevatoodangu tonnides (vt. tabeli 1 viimast rida).

Arvestades plaani saame võrratused

$$x \geq 10 \quad \text{ja} \quad y \geq 8.$$

x tonni väetise A töötlemiseks I tsehhis kulub $2x$ tundi, y tonni väetise B töötlemiseks I tsehhis kulub $3y$ tundi. Kokku kulub väetiste töötlemiseks I tsehhis $2x + 3y$ tundi, võimalik on aga kulutada kuni 49 tundi. Viimase lause saame väljendada võrratusega

$$2x + 3y \leq 49.$$

Analoogiliselt saame ülejäänud tsehhide tööaja jaoks võrratused:

$$x + 2y \leq 28,$$

$$3x \leq 35,$$

$$2x + y \leq 42.$$

Kui leiame arvud x ja y nii, et nad rahuldavad koostatud võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} x & \geq 10 \\ y & \geq 8 \\ 2x + 3y & \leq 49 \\ x + 2y & \leq 28 \\ 3x & \leq 35 \\ 2x + y & \leq 42, \end{cases}$$

siis saaks päevaplaan täidetud või ületatud ja ületunde ei tehtaks. Ülesanne nõuab aga võrratusesüsteemile niisuguse lahendi $(x; y)$ leidmist, mis teeks päeva kogutoodangu maksimaalseks, s.t. $x + y$ maksimaalseks.

Saime ülesandele matemaatilise formulatsiooni:
leida võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} x & \geq 10 \\ y & \geq 8 \\ 2x + 3y & \leq 49 \\ x + 2y & \leq 28 \\ 3x & \leq 35 \\ 2x + y & \leq 42 \end{cases}$$

rahuldavate reaalarvupaaride $(x; y)$ hulgast niisugune, mille puhul $x + y$ on suurim.

N ä i d e 28. Tehas toodab kahte liiki elektrimootoreid. Ühe esimest liiki mootori valmistamiseks kulub 30 tundi ja 4 kg limiteeritud toorainet (vasktraati), ühe teist liiki mootori jaoks vastavalt 50 tundi ja 2 kg vasktraati. Mootorite tootmiseks on kasutada 12 000 tundi kuus ja 1125 kg vasktraati kuus. Mootorite hinnad on 400 ja 350 rubla vastavalt.

Kui palju peaks tehas tootma kumbagi liiki mootoreid, et kuutoodang oleks (rublades) maksimaalne, kusjuures ületunde ei tehtaks ja vasktraadi ülekulu ei oleks?

Tähistame kuus toodetavate esimest liiki mootorite arvu x -ga ja teist liiki mootorite arvu y -ga. Ilmselt peavad x ja y olema mittenegatiivsed täisarvud, s.t. täisarvud, mis rahuldavad võrratuse

$$x \geq 0 \text{ ja } y \geq 0.$$

x esimest liiki mootori valmistamiseks kulub $30x$ tundi ja

4x kg vasktraati.

y teist liiki mootori valmistamiseks kulub 50y tundi ja 2y kg vasktraati.

Kõigi mootorite valmistamiseks kulub $30x + 50y$ tundi ja $4x + 2y$ kg vasktraati, tohib aga kuluda ülimalt 12 000 tundi ja 1125 kg vasktraati, seega

$$30x + 50y \leq 12\,000,$$

$$4x + 2y \leq 1\,125.$$

Kuutoodang z rbl. on arvutatav x ja y kaudu:

$$z = 400x + 350y.$$

Tuleb leida z_{\max} .

Seega saime ülesandele järgmise formulatsiooni:

leida võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 1200 \\ 4x + 2y \leq 1125 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

täisarvuliste lahendite (x; y) hulgast niisugune, mille puhul funktsioon

$$z = 400x + 350y$$

on maksimaalne.

N H i d e 29. Õlletehas peab kiiresti täitma tellimuse 100-le hektoliitrile 4% alkoholisaldusega õllele. Laos on nelja liiki õlut, kuid mitte 4%-list, nagu näitab tabel 2.

Tabel 2.

	Olemasolev õlu					Tellitud õlu
	I	II	III	IV	V (vesi)	
Alkoholisaldus %	2,5	3,7	4,5	5,8	0	4
Laoseis hektoliitrites	150	60	30	120	∞	0
Hektoliitri hind rublades	22	25	32	45	0	

Segades olemasolevaid õllesorte ja vett valmistatakse tel-

litud kogus 4% -list õlut. Kuidas tuleb segu koostada, et laos olemasolevast õllest ja veest saada kõige odavamini 100 hektoliitrit 4% -list õlut?

Otsitavaks x_1 võtame 1-ndat liiki õlle hulga segus (möödetuna hektoliitrites, kusjuures $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Seega peab olema

$$x_1 \leq 150, \quad x_2 \leq 60; \quad x_3 \leq 30; \quad x_4 \leq 120$$

ning

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100.$$

x_1 hektoliitris I liiki õlles on $0,025 x_1$ hektoliitrit ehk $2,5 x_1$ liitrit alkoholi, analoogiliselt on segu ülejäänud koostisosades $3,7 x_2$; $4,5 x_3$; $5,8 x_4$ ja $0 \cdot x_5$ liitrit alkoholi.

Tellitud 100 hektoliitrist peab 4% olema alkoholi, s.t. 400 liitrit alkoholi. Nii saame võrrandi

$$2,5x_1 + 3,7x_2 + 4,5x_3 + 5,8x_4 = 400.$$

100 hektoliitri segu hind z rbl. koosneb segu koostisosade hindadest kui summa:

$$z = 22x_1 + 25x_2 + 32x_3 + 45x_4.$$

z tuleb teha minimaalseks.

Matemaatilises keeles kõlab meie ülesanne seega nii:

leida võrratusesüsteemi

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 100 \\ 2,5x_1 + 3,7x_2 + 4,5x_3 + 5,8x_4 & = & 400 \\ x_1 & \leq & 150 \\ & x_2 & \leq 60 \\ & & x_3 & \leq 30 \\ & & & x_4 & \leq 120 \end{array} \right.$$

mittenegatiivsete lahendite $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$ hulgast niisugune, mille puhul funktsioon

$$z = 22x_1 + 25x_2 + 32x_3 + 45x_4$$

omandab minimaalse väärtuse.

N ä i d e 30. Tsehhis valmistatakse kahte toodet, mille jaoks kulutatakse kahte (olulisemat) liiki faktorit. Tootmist võib tsehhis organiseerida viie erineva tehnoloogia järgi. Tabelis 3 on toodud toodang (positiivsed arvud) ja kulutused (negatiivsed arvud), kusjuures ühikuks on t/d (tonni päevas).

Tabel 3.

Tehnoloogia nr.	Toodang ja kulutused vastavalt tehnoloogiale			
	1. toode	2. toode	1. faktor	2. faktor
I	5	2	- 1	- 3
II	5	2	- 3	- 1
III	2	7,75	- 7,25	- 1
IV	2	6	- 1	- 4
V	2	7	- 5	- 2

Esimest faktorit tohib nädalas, s.t. 6 päeva jooksul kulutada ülimalt 17 tonni, teist 10 tonni. Nädalases kogutoodangus peab esimest ja teist toodet olema vahekorras 2 : 3. Kasutades järgemööda erinevaid tehnoloogiaid, tuleb tsehhi nädalatöö organiseerida nii, et nädalane kogutoodang (tonnides) oleks maksimaalne.

Tähistame x_1 -ga i-nda tehnoloogia järgi töötamise aja päevades $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Siis

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 6.$$

Esimest toodet valmistame nädalas

$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 \text{ tonni.}$$

Teist toodet valmistame nädalas

$$2x_1 + 2x_2 + 7,75x_3 + 6x_4 + 7x_5 \text{ tonni.}$$

Seega

$$\frac{2}{3} = \frac{5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5}{2x_1 + 2x_2 + 7,75x_3 + 6x_4 + 7x_5}$$

ehk

$$4x_1 + 4x_2 + 15,5x_3 + 12x_4 + 14x_5 = 15x_1 + 15x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_5$$

ehk

$$11x_1 + 11x_2 - 9,5x_3 - 6x_4 - 8x_5 = 0.$$

Esimese faktori kulutamist piirab võrratus

$$x_1 + 3x_2 + 7,25x_3 + x_4 + 5x_5 \leq 17,$$

teise faktori kulutamist võrratus

$$3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 \leq 10.$$

Maksimaalseks tuleb teha kogutoodang

$$z = (5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5) + (2x_1 + 2x_2 + 7,75x_3 + 6x_4 + 7x_5)$$

ehk

$$z = 7x_1 + 7x_2 + 9,75x_3 + 8x_4 + 9x_5.$$

Kokkuvõte:

leida võrratusesüsteemile

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 6 \\ 11x_1 + 11x_2 - 9,5x_3 - 6x_4 - 8x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 7,25x_3 + x_4 + 5x_5 \leq 17 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 \leq 10 \end{cases}$$

niisugune mittenegatiivne lahend, mille puhul z väärtus on suurim, kus

$$z = 7x_1 + 7x_2 + 9,75x_3 + 8x_4 + 9x_5.$$

N ä i d e 31. Kolmes laos on briketti vastavalt 300, 400 ja 530 tonni, kokku 1230 tonni. Sellest briketikogusest tuleb rahuldada nelja tarbija vajadused, mis on vastavalt 220, 350, 250 ja 410 tonni, seega kokku ka 1230 tonni. Teada on ühe tonni briketi veokulu rublades igast laost igale tarbijale:

Tabel 4.

Tarbija \ Ladu	1	2	3	4
1	2,3	2,7	1,6	1,8
2	1,2	1,7	2,0	5,1
3	2,2	2,8	1,2	3,2

Ülesandeks on varustada kõik tarbijad briketiga nii, et kogu veokulu oleks minimaalne.

Otsitavaks x_{ik} võtame i-ndast laost k-ndale tarbijale vee-tava briketikoguse tonnides, kus $i = 1, 2, 3$ ja $k = 1, 2, 3, 4$. Ladudes olevate briketikoguste ja tarbijate vajaduste arvesse-võtmine annab võrrandid:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 400 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 530 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 220 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 350 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 250 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 410. \end{array} \right.$$

Sellele seitsmest võrrandist koosnevale süsteemile tuleb leida niisugune mittenegatiivne lahend, mis teeb koguveokulu z minimaalseks, kusjuures

$$\begin{aligned} z = & 2,3x_{11} + 2,7x_{12} + 1,6x_{13} + 1,8x_{14} + \\ & + 1,2x_{21} + 1,7x_{22} + 2,0x_{23} + 5,1x_{24} + \\ & + 2,2x_{31} + 2,8x_{32} + 1,2x_{33} + 3,2x_{34}. \end{aligned}$$

9. Lineaarprogrammeerimise ülesanne

(üldjuhtum).

a) Kõigis eelmise paragrahvi näidetes tuleb lahendada lineaarvõrratustest ja -võrranditest koosnev süsteem. Kõigil juhtudel otsitakse süsteemile ainult mittenegatiivseid lahendeid.

Kõigis ülesandeis on lisaks veel formuleeritud lineaarfunktsioon z . Süsteemi üldiselt paljude mittenegatiivsete lahendite hulgast tuleb leida niisugune lahend või niisugused lahendid, mille puhul z väärtus on parim ehk o p t i m a a l n e

(konkreetselt maksimaalne või minimaalne).

b) Ülesande tingimustes sisalduvad lineaarvõrratused on otstarbekas teisendada lineaarvõrranditeks. Selleks liidame võrratuse väiksemale poolele uue mittenegatiivse tundmatu, millele otsime niisugust väärtust, mis teeb võrratuse võrduseks.

N ä i d e 32. Teisendame näite 29 võrratused (vt. lk. 7) võrranditeks:

$$\begin{cases} x_1 + x_6 = 150 \\ x_2 + x_7 = 60 \\ x_3 + x_8 = 30 \\ x_4 + x_9 = 120. \end{cases}$$

Uued tundmatud x_6, x_7, x_8, x_9 tähendavad vastavalt I, II, III, IV liiki õlle ülejääki hektoliitrites.

c) Ülesandes esinevat lineaarfunktsiooni z võib avaldada kõigi tundmatute funktsioonina, kirjutades välja ka liikmed kordajatega null.

N ä i d e 33. Täiendame näite 29 funktsiooni

$$z = 22x_1 + 25x_2 + 32x_3 + 45x_4$$

avaldist ülejäänud otsitavatega x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 . z tähendas valmistatava õllekoguse hinda, kasutatud vesi (x_5) ja ülejäänud õlu (x_6, x_7, x_8, x_9) seda hinda ei mõjuta. Seega

$$z = 22x_1 + 25x_2 + 32x_3 + 45x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9.$$

d) Nüüd võime formuleerida LP ülesande üldjuhtumil järgmiselt:

leida lineaarvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{20} \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = a_{m0} \end{cases}$$

mittenegatiivsete lahendite hulgast niisugune, mis teeb funktsiooni

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

maksimaalseks (või minimaalseks).

e) Tähistades m -dimensionaalseid vektoreid

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = P_1, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = P_2, \dots, \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = P_n, \quad \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{pmatrix} = P_0$$

saame LP ülesande formuleerida üldjuhtumil nii:

leida niisugused mittenegatiivsed arvud

x_1, x_2, \dots, x_n , et

$$P_0 = x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_nP_n$$

ja et $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ omandaks maksimaalse (või minimaalse) väärtuse.

10. Lineaarprogrammeerimise ülesannete graafiline lahendamine.

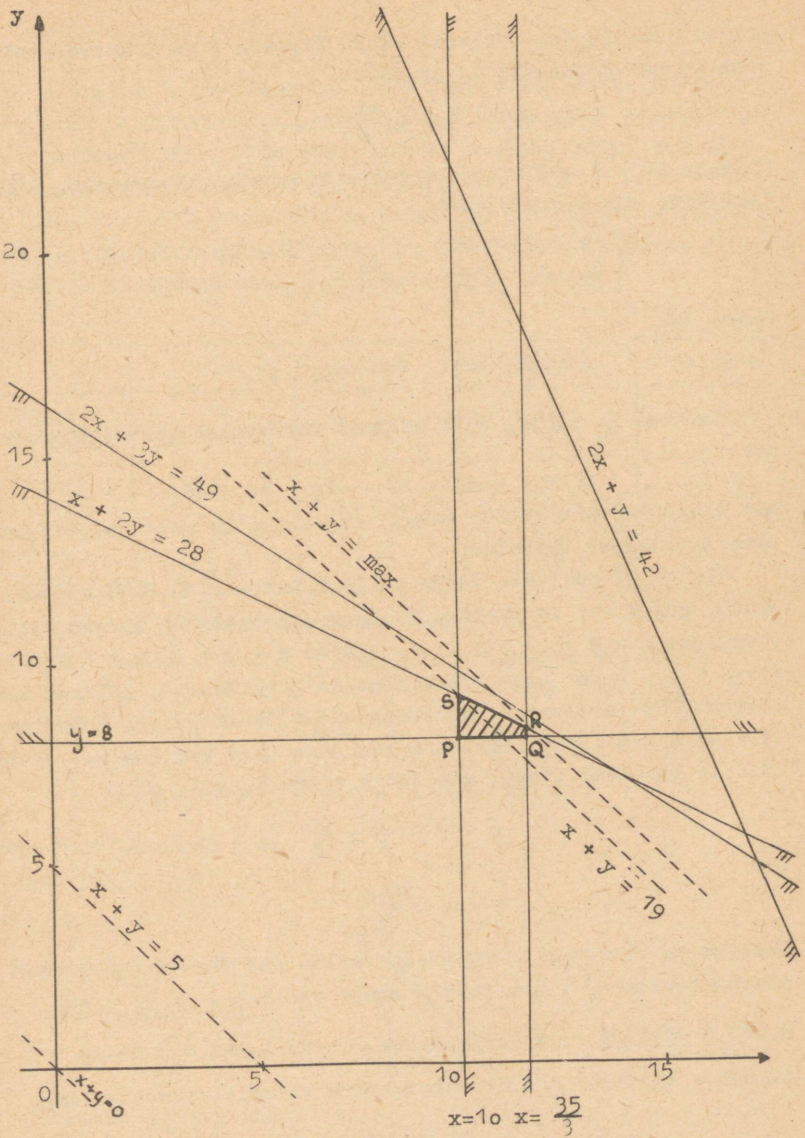
a) Kui LP ülesande võrratusesüsteemis on ainult kaks otsitavat, võime selle süsteemi lahendada graafiliselt. Nii saadud hulknurga punktide hulgast tuleb siis otsida need, mis LP ülesande funktsiooni z teevad maksimaalseks (või minimaalseks).

N ä i d e 34. Lahendame näites 27 formuleeritud LP ülesande graafiliselt.

Kõigepealt leiame hulknurga, mida esitab võrratusesüsteem

$$x \geq 10; \quad y \geq 8; \quad 2x + 3y \leq 49; \quad x + 2y \leq 28; \quad 3x \leq 35; \\ 2x + y \leq 42.$$

Selle võrratusesüsteemi lahendid moodustavad (joonise 14



Joon. 14

põhjal) täisnurkse trapetsi PQRS. Tippude P ja Q koordinaadid saab lugeda jooniselt 14 täpselt:

$$P(10;8) \quad \text{ja} \quad Q\left(\frac{35}{3}; 8\right).$$

Tippude R ja S ordinaate on parem arvutada täpsustada. Selle lahendamise võrrandisüsteemid

$$\begin{cases} x + 2y = 28 \\ 3x = 35 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x + 2y = 28 \\ x = 10. \end{cases}$$

Saame, et

$$R\left(\frac{35}{3}; \frac{49}{6}\right) \quad \text{ja} \quad S(10;9).$$

Joonise 14 põhjal võib sellest võrratusesüsteemist võrrat

sed

$$2x + y \leq 42 \quad \text{ja} \quad 2x + 3y \leq 49$$

kui üleaarused ära jätta. Samuti on lahendite mittenegatiivsus nõue iseenesest täidetud.

Näites 27 nõutakse leida sellest trapetsist PQRS niisugune punkt, kus $x + y$ on suurim. Tõmbame joonisele 14 sirged, mille punktides $z = 0$ ja $z = 5$, s.t. sirged $x + y = 0$ ja $x + y = 5$. Sirge $x + y = \max$ peab olema nendega paralleelne, lõikama trapetsit PQRS ja olema I veerandis võimalikult kaugel koordinaatide algusest (sest ilmselt z suureneb 0-st kaugenedes). Neid nõudeid rahuldab sirge, mis läbib tippu R, s.t. sirge

$$x + y = \frac{35}{3} + \frac{49}{6}$$

ehk

$$x + y = \frac{119}{6}.$$

Sellelega on ülesanne lahendatud. Vastus on: väetisetehas peab päevas tootma $\frac{35}{3}$ t ehk 11,667 tonni väetist A ja $\frac{49}{6}$ t ehk 8,167 t väetist B; siis saadakse päevas kokku $\frac{119}{6}$ t ehk 19,833 t väetisi, mis on maksimaalne võimalik päevatoodang.

N ä i d e 35. Tehas toodab kahte liiki veekraane. Esimese liiki kraanile kulub 0,4 kg vaske ja 0,2 kg erisulamit, teist

liiki kraanile 0,3 kg kapronit ja 0,2 kg erisulamit. Toorainet n tehasel piiratud hulgal, nimelt 14 t vaske, 9 t kapronit ja t erisulamit. Kui palju peaks tootma kumbagi liiki kraane, t kraanide kogutoodang oleks maksimaalne?

Ühele kraanile kulub 0,4 kg vaske, 10 000 kraanile seega t vaske. Sobiv on võtta ühikuks 10 000 kraani. Ülesande tinimused ja otsitavad saab korrastada tabelisse:

Tabel 5

	Vask	Kapron	Erisulam	Otsitavad
I liiki kraanid	$4 \frac{t}{10\ 000\ tk.}$	-	$2 \frac{t}{10\ 000\ tk.}$	$x \cdot 10\ 000\ tk.$
II liiki kraanid	-	$3 \frac{t}{10\ 000\ tk.}$	$2 \frac{t}{10\ 000\ tk.}$	$y \cdot 10\ 000\ tk.$
Tooraine varud	14 t	9 t	9 t	

Formuleerime ülesande matemaatiliselt:

leida $x \geq 0$ ja $y \geq 0$, mis rahuldavad võrratusi

$$\begin{cases} 4x \leq 14 \\ 3y \leq 9 \\ 2x + 2y \leq 9 \end{cases} \text{ ehk } \begin{cases} x \leq 3,5 \\ y \leq 3 \\ x + y \leq 4,5 \end{cases}$$

ning teevad $z = x + y$ maksimaalseks.

Lahendame ülesande graa-

iliselt. Jooniselt 15

äeme, et

$$z_{\max} = 4,5,$$

.t. maksimaalne kogu-

oodang on 45 000 kraa-

1.

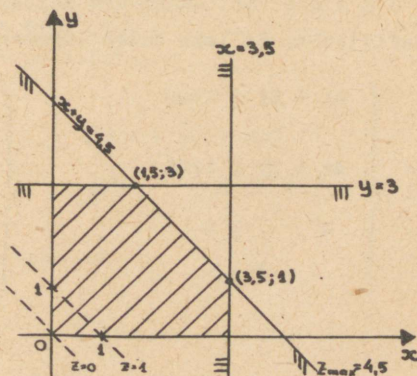
Väärtuse 4,5 omandab

viirutatud hulknurga

ippe (1,5; 3) ja (3,5; 1)

hendava külje kõigis

unktides (x; y).



Joon. 15

Teoreemi 9 põhjal (I osa, lk. 28 - 29)

$$\begin{cases} x = 1,5 \gamma + 3,5 (1 - \gamma) \\ y = 3 \gamma + 1 - \gamma \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} x = 3,5 - 2\gamma \\ y = 1 + 2\gamma \end{cases} \quad \text{kus } 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Et kraanid on tükikaup, siis sobivad lahendiks niisugused x ja y , mille puhul 10 000 x ja 10 000 y on täisarvud. Seega võib γ omandada väärtused 0; 0,00005; 0,00010; 0,00015; ... 0,99995; 1, s.t. 20 001 erinevat väärtust. Nii on ka 20 001 võimalust maksimaalse kogutoodangu, s.o. 45 000 kraani saamiseks:

Tabel 6.

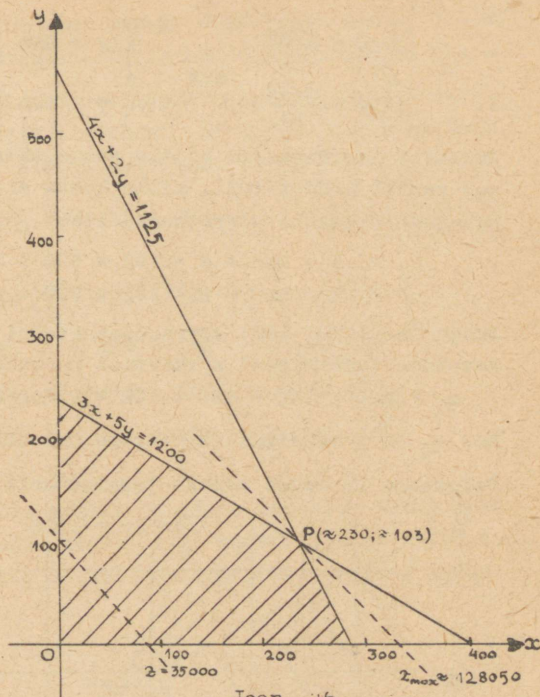
x	3,5	3,4999	3,4998	3,4997	...	1,5001	1,
y	1	1,0001	1,0002	1,0003	...	2,9999	3

Missugust neist lahendeist kasutada, seda tuleb otsustada arvestades muid (seni arvesse võtmata) asjaolusid.

N ä i d e 36. Lahendame näites 28 püstitatud ülesande graafiliselt. Selleks tuleb lahendada süsteem:

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 1200 \\ 4x + 2y \leq 1125 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} \frac{x}{400} + \frac{y}{240} \leq 1 \\ \frac{x}{281,25} + \frac{y}{562,5} \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Joonisel 16 on selle võrratusesüsteemi kõigi lahendite hulk viirutatud. Kanname joonisele 16 sirge $400x + 350y = 35000$, mille punktides funktsioon z omandab väärtuse 35000. Nihutame seda sirget iseendaga paralleelselt koordinaatide algusest eemale kuni tal on veel viirutatud hulknurgaga ühiseid punkte. Viimane niisugune punkt on viirutatud nelinurga tipp P , mille koordinaatideks on (ligikaudu) (230; 103). Seega on



$$z_{\max} \approx 400 \cdot 230 + 350 \cdot 103 = 128050.$$

Täpsustame tulemust, arvutades kõigepealt tippu P täpsed koordinaadid. Selleks tuleb lahendada võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1200 \\ 4x + 2y = 1125. \end{cases}$$

Elimineerides x -i saame

$$\begin{cases} x + \frac{5}{3}y = 400 \\ -\frac{14}{3}y = -475 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x + \frac{5}{3}y = 400 \\ y = \frac{1425}{14}, \end{cases}$$

millest y elimineerides leiame, et

$$\begin{cases} x = \frac{3225}{14} \\ y = \frac{1425}{14} \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x = 230 \frac{5}{14} \\ y = 101 \frac{11}{14} \end{cases}$$

Funkti P koordinaadid ei ole seega täisarvud. Ümardades saame uue punkti Q(230; 102), mille kohta ei ole enam teada, kas ta rahuldab ülesande võrratusesüsteemi. Kontrollime seda:

$$3 \cdot 230 + 5 \cdot 102 = 690 + 510 = 1200,$$

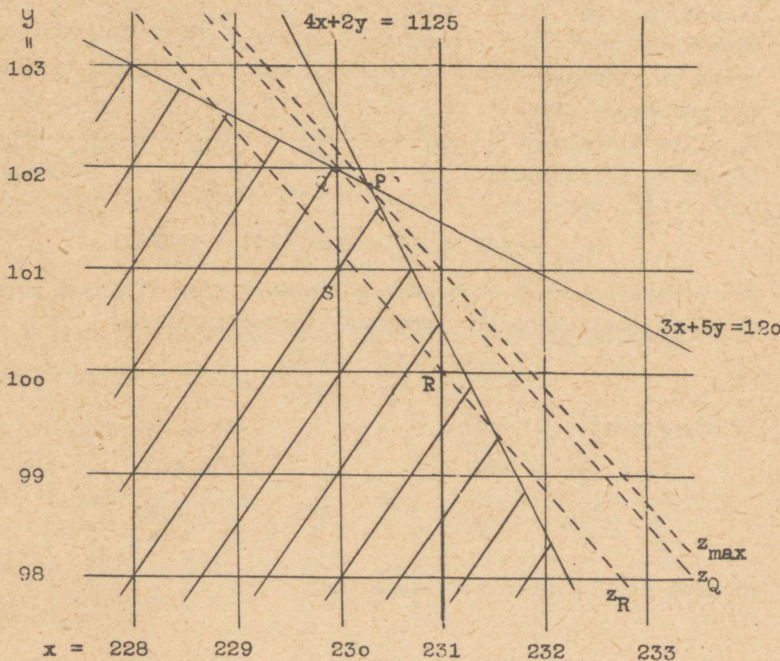
$$4 \cdot 230 + 2 \cdot 102 = 920 + 204 = 1124 < 1125.$$

Seega on Q(230; 102) võrratusesüsteemi täisarvuline lahend. Arvutame funktsiooni z väärtuse punktis Q:

$$z_Q = 400 \cdot 230 + 350 \cdot 102 = 92000 + 35700 = 127700.$$

Kas z_Q on z maksimaalne väärtus täisarvuliste lahendite puhul?

Selgitame küsimust esmalt joonise abil. Joonisel 17 on esita-



Joon. 17

tud punkti P ümbrus. Nihutame punkti P läbivat sirget, millel $z = z_{\max}$, iseendaga paralleelselt koordinaatide alguse poole. Esimene täisarvuliste koordinaatidega punkt viirutatud piirkonnast, mida läbib sirge $z = \text{const}$, on Q(230; 102), sellele järgnevad R(231; 100), S(230; 101) jne. Seega

$$z_{\max} > z_Q > z_R > z_S > \dots$$

Tõepoolest,

$$z_{\max} = 400 \cdot 230 \frac{5}{14} + 350 \cdot 101 \frac{11}{14} = 127\,767 \frac{6}{7},$$

$$z_Q = 400 \cdot 230 + 350 \cdot 102 = 127\,700,$$

$$z_R = 400 \cdot 231 + 350 \cdot 100 = 127\,400,$$

$$z_S = 400 \cdot 230 + 350 \cdot 101 = 127\,350,$$

jne.

Järelikult saime ülesandele järgmise vastuse: tehas peab tootma 230 esimest ja 102 teist liiki mootorit kuus, siis kuu- toodang on 127 700 rbl., millest rohkem pole võimalik antud tingimustes saada.

b) Majandusliku sisuga LP ülesannetes esineva võrratuse- süsteemi kõigi lahendite hulk on polüeedrid (kui ülesanne on mõistlikult püstitatud), nagu selle paragrahvi näideteski (siin saime kahe tundmatuga lineaarvõrratuste süsteemide kõigi lahendite hulkadeks hulknurgad, s.t. polüeedrid kahedimensio- naalses ruumis).

LP ülesande lahendamiseks tuleb niisugusest lahendite polü- eedrist leida kõik niisugused punktid (ehk lahendid), kus lineaarfunksioon z omandab maksimaalse väärtuse. Kahedimensionaal- sel juhul nägime, et z saab maksimaalseks kas hulknurga ühes tipus (näide 34) või hulknurga ühel küljel (näide 35); mõeldav on veel, et $z = z_{\max}$ kogu hulknurgal (kui $z = \text{const}$). Seda asjaolu saab üldistada. Vaatleme kõigepealt üht näidet kolme tundmatuga.

N ä i d e 37. Lahendame mitu LP ülesannet võttes näites 23 (I osa) lahendatud võrratusesüsteemile juurde erinevaid

funktsioone u .

$$1) u = x + y.$$

Vaatleme kõikvõimalikke tasapindu $x + y = \text{const.}$, mis lõikavad hulktahukat (joonis 10, I osa). Kõik need tasapinnad on üksteisega paralleelsed, kusjuures võrrandi paremal poolel seisev const. (s.o. u väärtus) suureneb koordinaatide algusest eemaldudes. $u_{\max} = 3,5$ annab seega tasapind $x + y = 3,5$, mis läbib hulktahuka tippu $(2; \frac{3}{2}; 0)$.

Seega saab funktsioon maksimaalseks meie hulktahuka ühes tipus.

$$2) u = x + 2z.$$

Talitades analoogiliselt eelmise juhuga näeme, et u saab maksimaalseks hulktahuka kahte tippu $(2; 0; 1)$ ja $(0; 0; 2)$ ühendaval serval, sealjuures $u_{\max} = 4$.

$$3) u = 3x + 4y + 6z.$$

Sel juhul saab u maksimaalseks hulktahuka ühel tahul, $u_{\max} = 12$.

$$4) u = 1962.$$

Et $u = \text{const.}$, siis $u_{\max} = 1962$, seega on hulktahuka kõigis punktides $u = u_{\max}$.

Võib tõestada, et kehtib

t e o r e e m :

kui lineaarvõrratuste süsteemi kõigi lahendite hulk on polüeedri, siis lineaarfunktsioon saab maksimaalseks selle polüeedri ühes või mitmes tipus ning ühtlasi nende tippudega määratud kumera polüeedri kõigis punktides.

Järelikult võib LP ülesande lahendamisel piirduda ainult lineaarvõrratuste süsteemi lahendite polüeedri tippude uurimisega. Nii talitatakse **s i m p l e k s m e e t o d i** puhul: algul leitakse polüeedri ükskõik missugune tipp T_0 ning arvutatakse z väärtus z^0 selles tipus; siis kontrollitakse nn. **s i m p l e k s k r i t e e r i u m i** abil, kas $z^0 = z_{\max}$; kui $z^0 \neq z_{\max}$, s.t. $z^0 < z_{\max}$, siis minnakse polüeedri üht serv

kus kõik vabaliikmed on mittenegatiivsed, s.t.

$$a_{10} \geq 0, \quad a_{20} \geq 0, \quad \dots, \quad a_{m0} \geq 0.$$

Saab tõestada, et niisuguse võrratusesüsteemi kõigi mittenegatiivsete lahendite hulga kui polüeedri mingi tipu saamiseks tuleb

1) võrratusesüsteem teisendada uute mittenegatiivsete tundmatute $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ liitmise teel võrrandisüsteemiks:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & = a_{20} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & + x_{n+m} & = a_{m0} \end{cases} \quad (1)$$

2) kirjutada välja süsteemi (1) järgmise kujuline erilahend

$$\begin{cases} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \\ \text{---} & \text{---} \\ x_n & 0 \\ x_{n+1} & = a_{10} \\ x_{n+2} & = a_{20} \\ \text{---} & \text{---} \\ x_{n+m} & = a_{m0} \end{cases}$$

ehk

$$\vec{x}^0 = (0, 0, \dots, 0, a_{10}, a_{20}, \dots, a_{m0}),$$

mis ongi algprogramm, sest saab tõestada, et

$$T^0(0, 0, \dots, 0, a_{10}, a_{20}, \dots, a_{m0})$$

on kõnesoleva polüeedri tipp.

Juhtumeid, kus LP ülesande matemaatilisel formuleerimisel saadakse algul osa tingimusi lineaarvõrrandina või kus osa võrratuseid on vastupidised, käsitleme hiljem (vt. lk. 42, 53, 55, 68 jt.)

c) Olgu vaadeldava LP ülesande funktsioon

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1} + c_{n+2}x_{n+2} + \dots + c_{n+m}x_{n+m}.$$

Algprogrammi \vec{x}^0 puhul omandab z väärtuse z^0 , kus

$$z^0 = c_{n+1}a_{10} + c_{n+2}a_{20} + \dots + c_{n+m}a_{m0}.$$

Meil on tarvis kriteeriumi, mis võimaldaks otsutada, kas

$z^0 = z_{\max}$ või $z^0 < z_{\max}$. Viimasel juhul on tarvis leida uus

$p r o g r a m m \vec{x}^1$, s.t. võrrandisüsteemi
 (1) mittenegatiivsete lahendite polüeedri
 tipp nii, et funktsiooni z uus väärtus
 $z^1 = z(\vec{x}^1)$ oleks suurem-võrdne vanaga, s.t.
 $z^1 \geq z^0$; sel juhul ütleme, et programm
 \vec{x}^1 on parem kui \vec{x}^0 .

Võrratusi $\vec{x}^1 \geq 0$ ja $z^1 \geq z^0$ püüame ra-
 huldada juhtrea ja juhtveeru sobiva vali-
 kuga tundmatute täielikul elimineerimisel.

c) Juhtrea valiku reegel. Võrrandisüs-
 teemile (1) saime lahendi \vec{x}^0 väga kerges-
 ti selle tõttu, et m tundmatut x_{n+1} ,
 x_{n+2}, \dots, x_{n+m} esinesid selles süsteemis
 elimineerituina. Ühe lahendi \vec{x}^1 saamiseks
 elimineerime võrrandisüsteemist (1) täie-
 liku elimineatsiooni valemite järgi mingi
 tundmatu x_j , $j \neq n+1, n+2, \dots, n+m$,
 võttes juhtvõrrandiks r -nda võrrandi. Siis
 omandab võrrandisüsteem (1) kuju:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 a'_{11} x_1 + \dots + a'_{1j-1} x_{j-1} + a'_{1j+1} x_{j+1} + \dots + a'_{1n} x_n + x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{n+r} = a'_1 \\
 a'_{r-1,1} x_1 + \dots + a'_{r-1,j-1} x_{j-1} + a'_{r-1,j+1} x_{j+1} + \dots + a'_{r-1,n} x_n + x_{n+r-1} x_{n+r} = a'_{r-1,0} \\
 a'_{r,1} x_1 + \dots + a'_{r,j-1} x_{j-1} + a'_{r,j+1} x_{j+1} + \dots + a'_{r,n} x_n + a'_{r,n+r} x_{n+r} = a'_{r,0} \\
 a'_{r+1,1} x_1 + \dots + a'_{r+1,j-1} x_{j-1} + a'_{r+1,j+1} x_{j+1} + \dots + a'_{r+1,n} x_n + a'_{r+1,n+r} x_{n+r} + x_{n+r+1} = a'_{r+1,0}
 \end{array} \right\} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 a'_{m1} x_1 + \dots + a'_{mj-1} x_{j-1} + a'_{mj+1} x_{j+1} + \dots + a'_{mn} x_n + a'_{m,n+r} x_{n+r} + x_{n+m} = a'_{m0}
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Siit võime välja lugeda, et võrrandisüsteemi (1) üheks lahendiks on

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \text{---} \\ x_{j-1} = 0 \\ x_j = a'_{r0} \\ x_{j+1} = 0 \\ \text{---} \\ x_n = 0 \\ x_{n+1} = a'_{10} \\ \text{---} \\ x_{n+r-1} = a'_{r-1,0} \\ x_{n+r} = 0 \\ x_{n+r+1} = a'_{r+1,0} \\ \text{---} \\ x_{n+m} = a'_{m0} \end{array} \right.$$

ehk

$$\vec{x}^1 = (0, \dots, 0, a'_{r0}, 0, \dots, 0, a'_{10}, \dots, a'_{r-1,0}, 0, 0, a'_{r+1,0}, \dots, a'_{m0}).$$

Et lahend \vec{x}^1 oleks programm, peab ta olema mittenegatiivne, s.t. $\vec{x}^1 \geq 0$, ja vastama polüeedri tipule. Viimast asjaolu saab tõestada. Püüame nüüd juhtrida, s.t. $r-1$, nii valida, et \vec{x}^1 oleks mittenegatiivsete koordinaatidega vektor. \vec{x}^1 nullist erineva võivad koordinaadid a'_{i0} , $i = 1, \dots, r, \dots, m$, on võrrandisüsteemi vabaliikmed ning on arvutatud täieliku eliminatsiooni valemite järgi:

$$\begin{aligned} a'_{10} &= a_{10} - \frac{a_{1j} a_{r0}}{a_{rj}}, \\ \text{---} \\ a'_{r-1,0} &= a_{r-1,0} - \frac{a_{r-1,j} a_{r0}}{a_{rj}}, \\ &\quad (2) \\ a'_{r+1,0} &= a_{r+1,0} - \frac{a_{r+1,j} a_{r0}}{a_{rj}}, \\ \text{---} \\ a'_{m0} &= a_{m0} - \frac{a_{mj} a_{r0}}{a_{rj}} \end{aligned}$$

ja

$$a'_{r0} = \frac{a_{r0}}{a_{rj}}$$

Et $a_{r0} \geq 0$, siis peab a'_{r0} mittenegatiivsuseks olema $a_{rj} > 0$. See tähendab, et

juhtelemendiks võib simpleksmeetodi puhul olla ainult positiivne arv, $a_{rj} > 0$.

Et $a_{10} \geq 0, \dots, a_{m0} \geq 0$ ja $a_{rj} > 0$, siis on mittepositiivse a_{1j} puhul alati

$$a'_{10} = a_{10} - \frac{a_{1j} a_{r0}}{a_{rj}} \geq 0.$$

Järelikult on a'_{10} mittenegatiivsuse garanteerimine probleem ainult nende i väärtuste puhul, kus $a_{1j} > 0$. Et juhtrida, s.t.r, oli seni vabalt võetud, siis võime r nii valida, et

$$\frac{a_{r0}}{a_{rj}} = \min_{\substack{i \\ a_{1j} > 0}} \frac{a_{10}}{a_{1j}} = \ominus_j, \quad (3)$$

s.t. et $\frac{a_{r0}}{a_{rj}}$ võrduks väikseimaga kõigist võimalikest jagatistest $\frac{a_{10}}{a_{1j}}$, mille nimetaja on positiivne. (Tähistasime

$\min_{\substack{i \\ a_{1j} > 0}} \frac{a_{10}}{a_{1j}} = \ominus_j$.) Siis on ka kõik need $a'_{10} \geq 0$, mille puhul

$a_{1j} > 0$. Tõepoolest, r valiku järgi

$$\frac{a_{r0}}{a_{rj}} \leq \frac{a_{10}}{a_{1j}},$$

mida võime korrutada positiivse arvuga a_{1j} :

$$\frac{a_{1j} a_{r0}}{a_{rj}} \leq a_{10}$$

ehk millest

$$a_{10} - \frac{a_{1j} a_{r0}}{a_{rj}} \geq 0.$$

Sõnastame nüüd juhtreavaliku reegli:

tundmatu x_j elimineerimisel tuleb juhtreaks võtta see riida, milles vabaliikme ja x_j kordaja jagatis on väiksem, kusjuures jagatakse ainult x_j positiivsete kordajatega;

kui juhtrida ei ole selle reegluga üheselt määratud, s.t. kui

$$\frac{a_{r0}}{a_{rj}} = \frac{a_{p0}}{a_{pj}} = \dots = \frac{a_{s0}}{a_{sj}} = \ominus_j,$$

siis tuleb nende ridade hulgast, s.t. r-nda, p-nda, ... , s-nda hulgast, valida juhtrida uute jagatiste järgi, milles jagatavaiks on võetud tundmatu x_{n+1} kordajad, jagajaiks aga ikka x_j kordajad; nii talitatakse analoogiliselt kuni juhtrida on üheselt määratud.

Tuletatud reegel võimaldab lähtudes mingist olemasolevast programmist, millel on m mittenegatiivset koordinaati ja n mulliga võrduvad koordinaati, saada uut programmi, mille kõik koordinaadid on mittenegatiivsed, kusjuures ülimalt m on neist positiivsed.

Järgmiseks tuleb lahendada küsimus, kuidas garanteerida, et uus programm oleks vanast programmist parem, kui see on võimalik. Seda püüame saavutada juhttundmatu, s.t. j sobiva valikuga.

d) Simplekskriteerium ja juhtveeru valiku reegel. Et uus

programm \vec{x}^1 oleks parem kui algprogramm \vec{x}^0 , peab $z^1 \geq z^0$, kus

$$z^1 = c_j a'_{r0} + c_{n+1} a'_{10} + \dots + c_{n+r-1} a'_{r-1,0} + c_{n+r+1} a'_{r+1,0} + \dots + c_{n+m} a'_{m0}$$

ehk valemite (2) ja (3) järgi

$$z^1 = c_j \ominus_j + c_{n+1} (a_{10} - a_{1j} \ominus_j) + \dots + c_{n+r-1} (a_{r-1,0} - a_{r-1,j} \ominus_j) + c_{n+r+1} (a_{r+1,0} - a_{r+1,j} \ominus_j) + \dots + c_{n+m} (a_{m0} - a_{mj} \ominus_j)$$

ehk

$$z^1 = (c_{n+1}^{a_{10}+...+c_{n+r-1}^{a_{r-1,0}} + c_{n+r+1}^{a_{r+1,0}} + ... + c_{n+m}^{a_{m0}}) - \\ - \ominus_j (c_{n+1}^{a_{1j}+...+c_{n+r-1}^{a_{r-1,j}} + c_{n+r+1}^{a_{r+1,j}} + ... + c_{n+m}^{a_{mj}} - c_j)$$

z^1 avaldise esimene sulgavaldis erineb z^0 -st ainult liikme $c_{n+r}^{a_{r0}}$ võrra. Edasiste lihtsustuste saamiseks on seega otsustarbikas liita z^1 avaldisele null, mis on kirjutatud kujul

$$c_{n+r}^{a_{r0}} - c_{n+r}^{a_{r0}}$$

ehk

$$c_{n+r}^{a_{r0}} - c_{n+r} \frac{a_{r0}}{a_{rj}} a_{rj}$$

ehk (3) põhjal

$$c_{n+r}^{a_{r0}} - c_{n+r}^{a_{rj}} \ominus_j$$

Siis saame z^1 avaldisele kuju:

$$z^1 = z^0 - \ominus_j [(c_{n+1}^{a_{1j}+...+c_{n+r-1}^{a_{r-1,j}} + c_{n+r}^{a_{rj}} + \\ + c_{n+r+1}^{a_{r+1,j}} + ... + c_{n+m}^{a_{mj}}) - c_j].$$

Tähistades siin ümarsulgudes seisva summa z_j -ga, s.t.

$$z_j = c_{n+1}^{a_{1j}} + c_{n+2}^{a_{2j}} + ... + c_{n+m}^{a_{mj}}, \quad (4)$$

saame, et

$$z^1 = z^0 - \ominus_j (z_j - c_j). \quad (5)$$

Siit näeme, et $z^1 > z^0$ kui

$$-\ominus_j (z_j - c_j) > 0.$$

Võrduse juhul $z^1 = z^0$. Seega võime edaspidi eeldada, et

$\ominus_j > 0$, mistõttu võime jagada $-\ominus_j$ - ga, saame

$$z_j - c_j \leq 0.$$

Seega on z^1 suurem kui z^0 siis ja ainult siis, kui $z_j - c_j < 0$ ja $\ominus_j > 0$. Juhtveerg ehk juhtundmatu x_j tuleb valida nii, et $z_j - c_j < 0$, kui see on üldse võimalik. Kui kõik $z_k - c_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n + m$, siis ei ole uut paremat programmi enam

võimalik saada, sest siis iga k puhul $z^1 \leq z^0$.

Seega võime sõnastada **s i m p l e k s k r i t e e - r i u m i**:

kui kõik vahed $z_k - c_k$ on mittenegatiivsed, siis on algprogramm \vec{x}^0 juba optimaalne ja LP ülesande lahendamine on lõpetatud, s.t. $z^0 = z_{\max}$;

kui aga vahede $z_k - c_k$ hulgas leidub negatiivseid, siis on programmi \vec{x}^0 võimalik parandada, s.t. $z^1 \geq z^0$.

Parema programmi saamiseks tuleb juhttundmatu x_j valida sobivalt, nagu seda nõuab **j u h t v e e r u v a l i k u r e e g e l**:

juhttundmatu x_j võib valida nii, et vastav vahe $z_j - c_j$ oleks negatiivne ja kõige väiksem:

$$z_j - c_j = \min_k (z_k - c_k);$$
$$z_k - c_k < 0$$

kui juhttundmatu ei ole selle reeglga üheselt määratud, s.t. kui

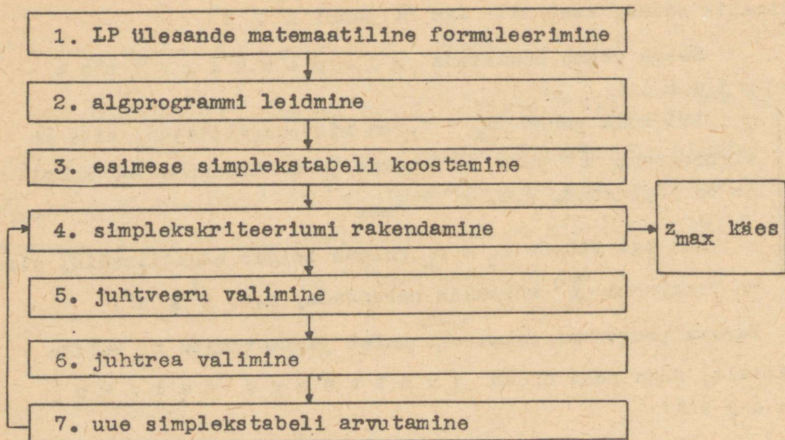
$$z_j - c_j = z_h - c_h = \dots = z_g - c_g = \min_k (z_k - c_k),$$
$$z_k - c_k < 0$$

siis võetakse juhttundmatuks neist vasakpoolseim.

Tõepoolest, siis $-(z_j - c_j)$ on kõige suurem ning seega

(5) põhjal $z^1 \geq z^0$.

e) Simpleksmeetodi skeem. LP ülesande lahendamine simpleksmeetodil toimub põhiliselt järgmise skeemi järgi:



Selle skeemi selgituseks märgime, et 3. ja 7. sammul koostatavate tabelite kaju toome esimese konkreetse ülesande lahendamisel.

f) $z_k - c_k$ arvutamine uue tabeli jaoks. Uues simplekstabelis peavad esinema ka uued vahed $z'_k - c_k$, sest muidu ei saa rakendada simplekskriteeriumi. Definiitsiooni (4) järgi on z_k funktsiooni z väärtus, mis saadakse algprogrammile analoogilise vektori

$$\vec{x}_k^0 = (0, 0, \dots, 0, a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk})$$

pühal:

$$z_k = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 + c_{n+1} a_{1k} + c_{n+2} a_{2k} + \dots + c_{n+m} a_{mk}. \quad (4)$$

Et u

$$\vec{x}^1 = (0, \dots, 0, a_{r0}^j, 0, \dots, 0, a_{10}^i, \dots, a_{r-1,0}^i, 0, c, a_{r+1,0}^i, \dots, a_{m0}^i)$$

siis tuleb z'_k saamiseks kasutada vektorit

$$\vec{x}_k^1 = (0, \dots, 0, a_{rk}^i, 0, \dots, 0, a_{1k}^i, \dots, a_{r-1,k}^i, 0, a_{r+1,k}^i, \dots, a_{mk}^i).$$

Seega

$$z'_k = c_1 \cdot 0 + \dots + c_{j-1} \cdot 0 + c_j a_{rk}^i + c_{j+1} \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 + c_{n+1} a_{1k}^i + \dots + c_{n+r-1} a_{r-1,k}^i + c_{n+r} \cdot 0 + c_{n+r+1} a_{r+1,k}^i + \dots + c_{n+m} a_{mk}^i,$$

millest

$$z'_k - c_k = c_j a_{rk} + c_{n+1} a_{1k} + \dots + c_{n+r-1} a_{r-1,k} + c_{n+r+1} a_{n+1,k} + \dots + c_{n+m} a_{mk} - c_k$$

ehk asendades a'_{1k}, \dots, a'_{mk} nende avaldistega täieliku elimi-
natsiooni valemitest (I osa, lk. 18):

$$z'_k - c_k = c_j \frac{a_{rk}}{a_{rj}} + c_{n+1} \left(a_{1k} - \frac{a_{1j} a_{rk}}{a_{rj}} \right) + \dots + c_{n+r-1} \left(a_{r-1,k} - \frac{a_{r-1,j} a_{rk}}{a_{rj}} \right) +$$

$$+ c_{n+r+1} \left(a_{r+1,k} - \frac{a_{r+1,j} a_{rk}}{a_{rj}} \right) + \dots + c_{n+m} \left(a_{mk} - \frac{a_{mj} a_{rk}}{a_{rj}} \right) - c_k$$

ehk avades sulud, gruppeerides ja liites $0 = c_{n+r} a_{rk} - c_{n+r} a_{rk}$:

$$z'_k - c_k = c_{n+1} a_{1k} + \dots + c_{n+r-1} a_{r-1,k} + c_{n+r} a_{rk} + c_{n+r+1} a_{n+1,k} +$$

$$\dots + c_{n+m} a_{mk} - c_k - \frac{a_{rk}}{a_{rj}} \left(c_{n+1} a_{1j} + \dots + c_{n+r-1} a_{r-1,j} + c_{n+r} a_{rj} + \right.$$

$$\left. + c_{n+r+1} a_{r+1,j} + \dots + c_{n+m} a_{mj} - c_j \right)$$

ehk

$$z'_k - c_k = (z_k - c_k) - \frac{(z_j - c_j) a_{rk}}{a_{rj}}, \quad k = 1, 2, \dots, n+m. \quad (6)$$

Tuletatud valemi (6) võime sõnastada järgmiselt:

uue vahe $z'_k - c_k$ saamiseks tuleb vanast vahest $z_k - c_k$ lahutada murd, mille nimetajas on juhtelement ja mille lugejas on tundmatu x_k kordaja juhtvõrrandist korrutatud juhtveerust võetud vahega $z_j - c_j$.

Tähendab, uue programmi \vec{x}^1 hindamiseks vajalikud vahed $z'_k - c_k$ saame ka arvutada täieliku eliminatsiooni valemitest järgi nagu kogu võrrandisüsteemi uued kordajadki.

12. Maksimaalse kogutoodangu Ulesande

lahendamine simpleksmeetodil.

a) Vardatsehh. Tsehhis toodetakse kolme liiki vardaid, mis erinevad ainult diameetri poolest: 1,25 cm, 1,00 cm ja 0,75 cm. Toormaterjaliks on 1,33 cm jämedune traat. Varraste valmistamise tehnoloogia koosneb kolmest sammust: traadi lõõmatamine, traadi venitamine, varraste lõikamine ja pakkimine. Ajakulu igale operatsioonile iga vardaliigi puhul, kasum igalt vardaliigilt ja tsehhi võimsus (efektiivne tööaeg) operatsioonide kaupa on antud tabelites 7 ja 8.

Tabel 7.

Varda liik (diameeter)	Operatsioon	Ajakulu h/t	Kasum rbl./t
I (1,25cm)	Lõõm.	10	210
	Venit.	5	
	Pakk.	7	
II (1,00cm)	L.	23	480
	V.	13	
	P.	9	
III (0,75cm)	L.	26	600
	V.	22	
	P.	11	

Tabel 8.

Operatsioon	Tööaeg h/dek.	Efektiivne tööaeg %	Efektiivne tööaeg h/dek.
L	800	87,5	700
V	640	85,9	550
P	480	93,7	450

Nendel andmetel püstitame mitu ulesannet.

b) Maksimaalse kogutoodangu Ulesanne. Kui palju peab vardatsehh tootma iga liiki vardaid, et dekaadi kogutoodang tonnis oleks maksimaalne? Sealjuures ei tohi teha ületunde ega pooltooteid (näiteks lõõmatatud ja venitatud, aga lõikamata-pakkimata traati).

Otsitavaiks võtame esimest liiki varraste toodangu x_1 t/dek., teist liiki varraste toodangu x_2 t/dek. ja kolmandat liiki var-

raste toodangu x_3 t/dek., millega väldime pooltoodete arvessevõtmist.

Siis

$$z = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{t/dek.}$$

on kogutoodang, mis tuleb teha maksimaalseks, $z_{\max} = ?$. Sealjuures peavad x_1, x_2, x_3 olema niisugused mittenegatiivsed arvud, mis rahuldavad võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} 700 \geq 10x_1 + 23x_2 + 26x_3 \\ 550 \geq 5x_1 + 13x_2 + 22x_3 \\ 450 \geq 7x_1 + 9x_2 + 11x_3, \end{cases}$$

sest siis väldime ületunde. Sellega on ülesanne matemaatiliselt formuleeritud.

c) Algprogrammi leidmine. Selleks täiendame võrratusesüsteemi võrrandisüsteemiks uute tundmatute juurdelisamise teel, saame

$$\begin{cases} 700 = 10x_1 + 23x_2 + 26x_3 + x_4 \\ 550 = 5x_1 + 13x_2 + 22x_3 + x_5 \\ 450 = 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + x_6, \end{cases} \quad (1)$$

millest algprogramm

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 700, x_5 = 550, x_6 = 450$$

ehk

$$\vec{x}^0 = (0, 0, 0, 700, 550, 450).$$

Tundmatuid x_1, x_2, x_3 nim. edaspidi s t r u k t u u r s e t e k s ja juurdevõetud tundmatuid x_4, x_5, x_6 v a b a d e k s.

V a b a d e k s tundmatutel on ilmselt järgmine tähendus:

x_4 h/dek. jääb lõõmutusseadmete efektiivsest tööajast
varraste tootmisel kasutamata,

x_5 h/dek. jääb venituspinkide efektiivsest tööajast
varraste tootmisel kasutamata,

x_6 h/dek. jääb pakkimisautomaatide efektiivsest tööajast
varraste tootmisel kasutamata.

Seega tuleks algprogrammi \vec{x}^0 järgi tööd organiseerides jätta kõik seadmed kogu dekaadiks seisma.

d) Esimese simplekstabeli koostamine. Võrrandisüsteemi ja funktsiooni z kordajad paigutame nn. esimesesse simplekstabelisse (tabel 9). Selleks tähistame tundmatu x_k kordajate veeruvektorit võrrandisüsteemist P_k -ga, $k = 1, 2, \dots, n + m$, ja vabaliikmete veeruvektorit P_0 -ga. Vabade tundmatute kordajate vektorid kirjutame vasakule nii, et tekiks ruuttabel, mille diagonaalil on ühed ja mujal nullid. Lisame veel kontrollveeru S , mille elementideks on tabeli vastavas reas asetsevate elementide summad. Funktsiooni z kordajad c_k paigutame tabeli esimesse ritta samas järjekorras mis vektorid P_k -gi. Programmiveergu märgime need P_k , millele vastavad x_k väärtused erinevad algprogrammis nullist ja seisavad veerus P_0 just selles reas. Kordajate c_k veergu kirjutame programmis esinevatele tundmatutele vastavad kordajad c_k .

I simplekstabel

Tabel 9.

c_k	Prog- ramm	P_0	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3	S	Θ_j
0	P_4	700	1	0	0	10	23	26	760	70
0	P_5	550	0	1	0	5	13	22	591	110
0	P_6	450	0	0	1	7	9	11	478	64,29
$z_k - c_k$		0	0	0	0	-1	-1	-1	-3	

II simplekstabel (optimaalne)

0	P_4	57,1	1	0	-1,429	0	10,14	10,29	77,1
0	P_5	228,6	0	1	-0,715	0	6,57	14,15	249,6
1	P_1	64,29	0	0	0,143	1	1,286	1,571	68,29
z_{max}		64,29	0	0	0,143	0	0,286	0,571	68,29

Esimese simplekstabeli koostamise lõpetame viimase rea, s.o. vahede $z_k - c_k$ rea täitmisega. Et definitsiooni (4) järgi

$$z_k = c_{n+1} a_{1k} + c_{n+2} a_{2k} + \dots + c_{n+m} a_{mk},$$

siis praegu

$$z_k = c_4 a_{1k} + c_5 a_{2k} + c_6 a_{3k},$$

s.t. z_k saamiseks tuleb c_k -de veeruvektor korrutada skalaarselt vektoriga P_k (vt. I osa, lk. 14). Vahe $z_k - c_k$ saamiseks tuleb veel lahutada P_k kohal seisev c_k .

Veergu P_0 viimasesse ritta kirjutame sama tüüpi skalaarkorrutise (lahutada ei ole midagi), mis on tegelikult funktsiooni z väärtus algprogrammi korral z^0 .

e) Simplekskriteeriumi rakendamine. Et vahede $z_k - c_k$ hulgas on esimeses simplekstabelis negatiivseid, siis algprogramm \vec{x}^0 ei ole optimaalne programm ja $z^0 = 0$ ei ole funktsiooni z maksimaalne väärtus.

Järgnevalt parandame algprogrammi.

f) Juhtveeru valimine. Et kõik negatiivsed vahed $z_k - c_k$ on praegu võrdsed, siis tuleb juhtveeru valikul rakendada reegli teist poolt, seega saame juhtveeruks P_1 , s.t. $j = 1$. Juhtveeru P_1 tõstame tabelis 9 muudest joontest erinevate joontega esile.

g) Juhtrea valimine. Et $j = 1$, siis tuleb arvutada

$$\ominus_1 = \min_{\substack{1 \\ a_{11} > 0}} \frac{a_{10}}{a_{11}}.$$

Vajalikud jagatised kirjutame tabeli viimasesse veergu vastasse ritta. Võrreldes saadud jagatisi, saame

$$\ominus_1 = \frac{a_{30}}{a_{31}} = 64,29,$$

s.t. juhtreaks on kolmas rida. Tõstame juhtrea esile ning määrame juhtelemendi.

Juhtrea pea $0, P_6$, mis näitab muuseas, et selles võrrandis

on x_6 kordaja 1 ning et teistes võrrandites x_6 puudub, tuleb uues simplekstabellis asendada juhtveeru peaga 1, P_1 , sest nüüd elimineerime x_1 . Seda vahetust tähistame nooltega I ja II simplekstabellis.

Muus osas on II simplekstabeli pea sama mis I.

h) II simplekstabeli arvutamine. Täieliku eliminatsiooni valemuid kasutades on otstarbekas kõigepealt arvutada juhtrea uued elemendid vanade elementide jagamise teel juhtelemendiga.

Edasi rakendame I osa lk. 20 - 21 toodud reeglid erijuh-tude jaoks:

α) Täidame juhtveeru ülejäänud kohad II tabelis nullidega.

β) Veerud P_4 ja P_5 võib ümber kirjutada, sest juhtreas on nende veergude kohad nullid.

γ) Ühtegi rida ei saa muutmatult ümber kirjutada, sest juhtveerus on I tabelis kõik elemendid nullist erinevad.

I osa lk. 18 toodud reegli teist poolt võime ümber formuleerida, kui võtame arvesse, et juhtritta on uued elemendid juba arvutatud ja et viimase rea uusi elemente võib arvutada samade valemite järgi (vt. lk. 31); seega saame reeglile kuju:

simplekstabeli mingisse ritta (mitte juhtritta) mingi uue elemendi saamiseks tuleb vastavast vanast elemendist lahutada selle vana elemendiga juhtreas kohakuti asetseva uue elemendi korrutis selles mingis reas juhtveerus asetseva elemendiga.

Selle reegli järgi arvutades täidame kõigepealt veeru P_0 :

$$700 - 64,29 \cdot 10 = 700 - 642,9 = 57,1;$$

$$550 - 64,29 \cdot 5 = 550 - 321,45 = 228,6;$$

$$0 - 64,29 \cdot (-1) = 64,29.$$

Analoogiliselt arvutades täidame II tabeli ülejäänud tühjad kohad, ka veeru S. Kontrolliks arvutame S elemendid kui summad.

1) Simplekskriteeriumi rakendamine. Et II simplekstabeli viimases reas on kõik arvud mittenegatiivsed, s.t. $z_k - c_k \geq 0$, $k = 1, \dots, 6$, siis on ülesanne lahendatud.

j) Vastus. Et selgitada, kuidas saab II simplekstabelist lugeda välja programmi ja z_{\max} , selleks kirjutame II tabeli põhjal välja teisenenud võrrandisüsteemi (1):

$$\begin{cases} 57,1 = x_4 & - 1,429x_6 & + 10,14 x_2 + 10,29 x_3 \\ 228,6 = & x_5 - 0,7145x_6 & + 6,57 x_2 + 14,15 x_3 \\ 64,29 = & & 0,1429x_6 + x_1 + 1,286x_2 + 1,571x_3. \end{cases}$$

Kasutades sama võtet, mis algprogrammi leidmisel, võime öelda, et

$$\begin{cases} x_1 = 64,29 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 57,1 \\ x_5 = 228,6 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\vec{x}^1 = (64,29; 0; 0; 57,1; 228,6; 0)$$

ehk ümardatult

$$\vec{x}^1 = (64,3; 0; 0; 57; 229; 0).$$

Praktiliselt ei ole tarvis teisenenud süsteemi välja kirjutada, vaid tuleb II tabeli programmiveerust võtta tundmatute indeks ja P_0 -veerust väärtus ning ülejäänud tundmatud võrrutada nulliga.

$z_{\max} = z^1$ asetseb II tabeli viimases reas P_0 -veerus, analoogiliselt z^0 -ga I tabelis, seega

$$z_{\max} = 64,3.$$

Nüüd võime sõnastada ülesande v a s t u s e:

vardatsehh võib dekaadis anda toodangut maksimaalselt 64,3 tonni; selleks tuleb toota ainult esimest liiki vardaid ($x_1 = 64,3t$; $x_2 = 0, x_3 = 0$); sealjuures on pakkimisautomaadid täielikult koormatud (seisuaeg $x_6 = 0$ h/dek), lõõmutusseadmete ja venituspinkide efektiivsest tööajast jääb aga vastavalt 57 h/dek ja 229 h/dek kasutamata ($x_4 = 57$ ja $x_5 = 229$).

13. Seadmete maksimaalse koormamise
ülesande lahendamine simplekssmeetodil.

a) Seadmete maksimaalse koormamise ülesande formuleerime sellesamas vardatsehhis (vt. eelmine paragrahv). Otsitavad ja piiravad tingimused jäävad seega samaks mis eelmises ülesandes, muutub ainult ekstremaliseeritav funktsioon z .

Seadmed on maksimaalselt koormatud, kui nende summaarne seisuaeg on minimaalne, s.t. kui $z^* = x_4 + x_5 + x_6$ on minimaalne, $z_{\min}^* = ?$.

Ülesannet saab lahendada simplekssmeetodil, kui võtame funktsiooniks $z = -z^* = -x_4 - x_5 - x_6$ ja otsime z_{\max} . Siis ilmselt $z_{\min}^* = -z_{\max}$.

b) Paigutame võrrandisüsteemi (1) (vt. paragrahv 12) ja funktsiooni z kordajad simplekstabelisse ja lahendame ülesande simplekssmeetodil.

c) IV simplekstabel annab optimaalse programmi:

$$x_1 = 12,2 \text{ t/dek.}, x_2 = 0, x_3 = 22,2 \text{ t/dek.},$$

seega kogutoodang on 34,4 t/dek., mis absoluutselt maksimaalsest kogutoodangust (vt. lk. 37.) moodustab 53,5%; edasi

$$x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 120 \text{ h/dek.},$$

ja

$$z_{\min}^* = 120 \text{ h/dek.};$$

s.t. minimaalselt 120 h/dek. ehk $\frac{120}{1700} = 7,1\%$ jääb efek-

tiivselt töötajast kasutamata, kusjuures kitsaskohaks on lõõmutus- ja venitusseadmed (s.t. kui nende seadmete efektiivne tööaeg oleks suurem, saaks pakkimisautomaate rohkem koormata ja seega kogu seisuaega vähendada).

Tuleb rõhutada vastusest ilmnevat asjaolu, et masinapargi maksimaalse koormamisega ei kaasne sugugi maksimaalne kogutoodang (tonnides), vaid ainult 53,5% maksimaalsest võimalikust kogutoodangust.

I

Tabel 10

c_k			-1	-1	-1	0	0	0	
	Prog ramm	P_0	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3	Θ_j
-1	P_4	700	1	0	0	10	23	26	26,9
-1	P_5	550	0	1	0	5	13	22	25,0
-1	P_6	450	0	0	1	7	9	11	40,9
$z_k - c_k$	-1700		0	0	0	-22	-45	-59	

II

-1	P_4	50	1	-1,182	0	4,090	7,637	0	6,547
> 0	P_3	25	0	0,04545	0	0,2273	0,5909	1	42,3
-1	P_6	175	0	-0,5000	1	4,500	2,500	0	70
$z_k - c_k$	-225		0	2,682	0	-8,589	-10,137	0	

III

< 0	P_2	6,547	0,1309	-0,1548	0	0,5356	1	0	12,22
0	P_3	21,13	-0,0774	0,137	0	-0,089	0	1	-
-1	P_6	158,63	-0,3273	-0,113	1	3,161	0	0	50,2
$z_k - c_k$	-158,63		1,327	1,113	0	-3,161	0	0	

IV opt.

> 0	P_1	12,22	0,2444	-0,289	0	1	1,867	0
0	P_3	22,22	-0,055	0,111	1	0	0,1662	1
-1	P_6	120,0	-1,099	0,799	0	0	-5,902	0
z_{max}	-120,0		2,099	0,201	0	0	5,902	0

14. Maksimaalse kasumi ülesande lahendamine

simpleksmeetodil.

a) Ka maksimaalse kasumi ülesande formuleerime vardatsehhis. Nagu eelmises paragrahviski, muutub ainult funktsioon z . Tabelist 7 näeme, et 1 tonn I liiki vardaid annab 210 rbl kasumit, analoogiliselt 1 tonn II liiki vardaid 480 rbl. ja 1 tonn III liiki vardaid 600 rbl. Et iga liiki vardaid toodame vastavalt x_1 , x_2 ja x_3 t/dek., siis väljendub kasum z järgmiselt:

$$z = 210 x_1 + 480 x_2 + 600 x_3.$$

Seega tuleb võrrandisüsteemile (1) paragrahvist 12 leida niisugune mittenegatiivne lahend, mis teeb selle funktsiooni z maksimaalseks.

b) Paigutame andmed simplekstabelisse ja lahendame ülesande.

I simplekstabel erineb eelmise ülesande I simplekstabelist (tabel 10) ainult viimase rea poolest (ja tabeli pea poolest). Mõlemas tabelis on juhtveeruks P_3 , järelikul on tabelis 11, I juhtreaks sama rida, mis tabelis 10, I, s.t. P_5 -rida. II simplekstabeli kirjutame tabelist 10, II maha, välja arvatud viimane rida, mille arvutame kas täieliku eliminatsiooni valemite järgi või vahede $z_k - c_k$ arvutuseeskirja järgi (nagu I simplekstabelis) või kontrolliks mõlemal viisil.

Osutub, et ka II simplekstabelis on juhtveerg sama, mis tabelis 10, II, seega on juhtrida ka sama ning arvutada on tarvis ainult III simplekstabeli viimane rida (muu saab maha kirjutada).

Edasi saab ka IV simplekstabeli põhiliselt maha kirjutada.

c) Optimaalne programm on maksimaalse kasumi ülesandel vardatsehhis sama mis seadmete maksimaalse koormamise ülesandel:

$$x_1 = 12,2 \text{ t/dek.}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 22,2 \text{ t/dek.}$$

Maksimaalne kasum

$$z_{\max} = 15\,900 \text{ rbl./dek.}$$

I

Tabel 11.

c_k	Prog- ramm	P_0	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3
0	P_4	700	1	0	0	10	23	26
0	P_5	550	0	1	0	5	13	(22)
0	P_6	450	0	0	1	7	9	11
$z_k - c_k$		0	0	0	0	-210	-480	-600

II

0	P_4	50	1	-1,182	0	4,090	(7,637)	0
600	P_3	25	0	0,04545	0	0,2273	0,5909	1
0	P_6	175	0	-0,5000	1	4,500	2,500	0
$z_k - c_k$		15000	0	27,27	0	-73,62	-125,46	0

III

480	P_2	6,547	0,1309	-0,1548	0	(0,5356)	1	0
600	P_3	21,13	-0,0774	0,137	0	-0,089	0	1
0	P_6	158,63	-0,3273	-0,113	1	3,161	0	0
$z_k - c_k$		15821	16,42	7,853	0	-6,424	0	0

IV opt.

210	P_1	12,24	0,244	-0,289	0	1	1,867	0
600	P_3	22,22	-0,055	0,111	0	0	0,166	1
0	P_6	120,0	-1,099	0,799	1	0	-5,902	0
z_{\max}		15900	17,99	6,00	0	0	11,97	0

15. Täpse plaaniga ülesande lahendamine

simpleksmeetodil.

a) Olgu lisaks paragrahvis 12 toodud tingimustele tarvis täita (mitte ületada) plaan: 10 tonni II liiki vardaid dekaadis, s.t.

$$x_2 = 10.$$

Eesmärgiks olgu seadmete maksimaalne koormamine. Siis on ülesanne matemaatiliselt formuleerituna järgmine:

leida võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 700 = 10 x_1 + 23 x_2 + 26 x_3 + x_4 \\ 550 = 5 x_1 + 13 x_2 + 22 x_3 + x_5 \\ 450 = 7 x_1 + 9 x_2 + 11 x_3 + x_6 \\ 10 = x_2 \end{cases}$$

mittenegatiivsete lahendite hulgast niisugune, mis teeb funktsiooni

$$z = -x_4 - x_5 - x_6$$

maksimaalseks.

Enne lahendamist lihtsustame võrrandisüsteemi elimineerides kolmest esimesest võrrandist x_2 (selleks asendame neljanda võrrandi põhjal $x_2 = 10$), saame:

$$\begin{cases} 470 = 10 x_1 + 26 x_3 + x_4 \\ 420 = 5 x_1 + 22 x_3 + x_5 \\ 360 = 7 x_1 + 11 x_3 + x_6 \end{cases} \quad \text{ja } x_2 = 10.$$

Seega on tarvis veel leida x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 ja z_{\max} .

b) Paigutame andmed simplekstabelisse ja arvutame.

c) II simplekstabel annab vastuse: et täita plaani $x_2 = 10$ t/dek. ja sealjuures koormata seadmeid maksimaalselt,

tuleb vardatsehhis töötada järgmise programmi järgi:

$$x_1 = 0; x_2 = 10 \text{ t/dek.}; x_3 = 18,1 \text{ t/dek.}; x_4 = 0; x_5 = 22,3 \text{ h/dek.}; x_6 = 161,2 \text{ h/dek.}$$

c_k			-1	-1	-1	0	0	
	Prog- ramm	P_0	P_4	P_5	P_6	P_1	P_3	Θ_j
-1	P_4	470	1	0	0	10	26	18,08
-1	P_5	420	0	1	0	5	22	19,1
-1	P_6	360	0	0	1	7	11	32,7
z_k	$-c_k$	-1250	0	0	0	-22	-59	

II^o opt.

0	P_3	18,08	0,0385	0	0	0,385	1
-1	P_5	22,31	-0,846	1	0	-3,461	0
-1	P_6	161,15	-0,423	0	1	2,769	0
z_{\max}		-183,46	2,269	0	0	0,692	0

Siis jääb seadmete efektiivsest tööajast kasutamata

$$z_{\min}^* = 183,5 \text{ h/dek.},$$

millest väiksem seisuaeg antud plaani ($x_2 = 10$) täitmise puhul ei ole võimalik.

Et

$$\frac{183,5}{1700} = 10,8 \%,$$

siis jääb selle plaani ($x_2 = 10$) täitmisel seadmete efektiivsest tööajast 3,7% võrra rohkem kasutamata võrreldes absoluutselt maksimaalse koormamise juhuga (vt. lk. 38).

Kogutoodang on selle programmi puhul 28,1 t/dek. ehk 43,7% absoluutselt maksimaalsest kogutoodangust.

Kasum on nüüd

$$480 \cdot 10 + 600 \cdot 18,1 = 15\,660 \text{ rbl/dek.}$$

ehk 98,5% absoluutselt maksimaalselt kogutoodangust.

d) Pakub kuvi, kas plaani $x_2 = 10$ täitmisel on võimalik saada oluliselt suuremat kogutoodangut kui 28,1 t/dek. Selleks lahendame samade tingimuste puhul ülesande, kus eesmärgiks on maksimaalne kogutoodang : $z^*_{\max} = ?$, kui

$$z^* = x_1 + x_2 + x_3.$$

Et $x_2 = 10$, siis

$$z^* = x_1 + 10 + x_3$$

ehk

$$z - 10 = x_1 + x_3.$$

Tähistame $z - 10 = z^*$, siis ilmselt

$$z_{\max} = z^*_{\max} + 10.$$

Järelikult tuleb lahendada ülesanne:

leida võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 470 = 10x_1 + 26x_3 + x_4 \\ 420 = 5x_1 + 22x_3 + x_5 \\ 360 = 7x_1 + 11x_3 + x_6 \end{cases}$$

mittenegatiivsete lahendite hulgast niisugune, mis teeb funktsiooni

$$z = x_1 + x_3$$

maksimaalseks.

e) Parem reegel juhtveeru valikuks. Koostame esimese simplekstabeli. Juhtveeru valiku reegli järgi (vt.lk. 29) tuleks juhtveeruks võtta veerg P_1 . Kas saame aga sel juhul z väärtust z^0 korraga kõige rohkem suurendada ?

Funktsiooni z uus väärtus

$$z^1 = z^0 - \ominus_j (z_j - c_j),$$

seega

$$z^1 - z^0 = -\ominus_j (z_j - c_j).$$

Meid huvitab

$$\max (z^1 - z^0),$$

s.t.

$$\max_j [-\ominus_j (z_j - c_j)].$$

I

Tabel 13.

c_k			0	0	0	1	1
	Prog- ramm	P_0	P_4	P_5	P_6	P_1	P_3
→0	P_4	470	1	0	0	10	26
0	P_5	420	0	1	0	5	22
0	P_6	360	0	0	1	7	11
$z_k - c_k$		0	0	0	0	-1	-1
Θ_k						47	18,08
$-\Theta_k(x_k - b_k)$						47	18,08

II opt.

→1	P_1	47	0,1	0	0	1	2,6
0	P_5	185	-0,5	1	0	0	9
0	P_6	31	-0,7	0	1	0	-7,2
z_{max}		47	0,1	0	0	0	1,6
Θ_k			470				18,08
$-\Theta_k(x_k - b_k)$			-47				-28,93

III opt. eelnev

→1	P_3	18,08					
0	P_5	22,28					
0	P_6	161,18					
$z_{max.}$ eelnev		18,08					

Siit võime välja lugeda uue parema reegli juhtveeru valikuks:

kõigi veergude P_k jaoks, kus $z_k - c_k < 0$, tuleb arvutada \ominus_k ja $-\ominus_k(z_k - c_k)$; juhtveeruks tuleb võtta veerg P_j nii, et

$$\max_k [-\ominus_k(z_k - c_k)] = -\ominus_j(z_j - c_j).$$

Selle reegli rakendamine vähendab üldiselt simplekstabeli arvu lahenduses, kuid toob iga tabeli puhul arvutustööd juur eriti kui on palju veerge, kus $z_k - c_k < 0$.

Tabelis 13, I on \ominus_k ja $-\ominus_k(z_k - c_k)$ arvutatud ja paigutatud viimasesse ritta. Siin

$\max_k [-\ominus_k(z_k - c_k)] = \max [47; 18,08] = 47 = -\ominus_1(z_1 - c_1)$ seega on juhtveeruks tõepoolest sobiv võtta P_1 .

f) II simplekstabel annab optimaalse programmi (kui arvutada, et $x_2 = 10$):

$$x_1 = 47 \text{ t/dek.}, \quad x_2 = 10 \text{ t/dek.}, \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0;$$

$$x_5 = 185 \text{ h/dek.}, \quad x_6 = 31 \text{ h/dek.},$$

kusjuures saavutatakse selle plaani (10 t/dek. II liiki varda) täitmisel võimalik maksimaalne kogutoodang

$$z_{\max}^* = 57 \text{ t/dek.}$$

ehk 88,6% absoluutselt maksimaalsest kogutoodangust, mis oluliselt parem seadmete maksimaalse koormamise juhul saadud kogutoodangust (vt. c)). Kuid sel korral on seadmete seisuaeg suurem: 216 h/dek. ehk 12,7% seadmete efektiivsest kogutööajast.

Kasum on selle programmi puhul 14 670 rbl/dek. ehk 92,3% absoluutselt maksimaalsest kasumist.

g) Optimaalsele eelnev programm. Nüüd võime püstitada üllande:

leida vardatsehhile niisugune programm, mis garanteeriks plaani $x_2 = 10$ täitmise ja kõiki kolme liiki varraste tootmise ning sealjuures annaks kogutoodangut 80% absoluutselt maksimaalsest kogutoodangust.

Selle ülesande lahendamiseks on kõigepealt tarvis simplekssmeetodil leida programm, mis erineks optimaalsest programmist (s.t. kus $x_3 \neq 0$) ja sealjuures oleks sellest võimalikult vähe halvem. Simplekssmeetodil saab aga leida niisuguseid programme, mis geomeetriliselt vastavad võrratuse süsteemi kõigi lahendite hulga, kui polüeedri tippudele. Praegu on meil tegu võrratuse süsteemiga

$$\begin{cases} 470 \geq 10x_1 + 26x_3 \\ 420 \geq 5x_1 + 22x_3 \\ 360 \geq 7x_1 + 11x_3 \end{cases}$$

ja funktsiooniga

$$z = x_1 + x_3.$$

Polüeedriks on praegu kolmnurk OAB

(joonis 19). Tüüp

A on z_{\max} , tüüp B

aga z_{\max} eelnev,

nagu seda edaspidi

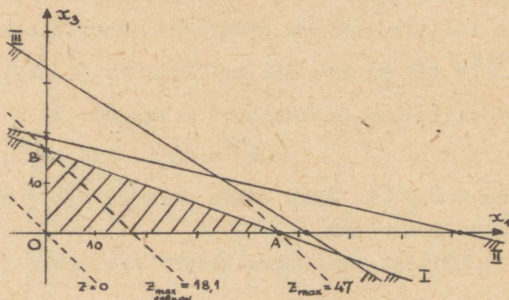
nimetame.

Et optimaalsele eelnevat programmi arvutada, leiame optimaalses simplekstabelis \ominus_k ja $-\ominus_k(z_k - c_k)$ kõigi veergude P_k jaoks, kus $z_k - c_k > 0$ ja valime siis juhtveeru P_j nii, et

$$-\ominus_j(z_j - c_j) = \max_k [-\ominus_k(z_k - c_k)],$$

sest nii saame uue programmi, mis on optimaalsest võimalikult vähe halvem.

Nii saame tabelist 13, III optimaalsele eelneva programmi (arvestades ka, et $x_2 = 10$):



Joon.19

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 10 \text{ t/dek.}; \quad x_3 = 18,1 \text{ t/dek.};$$

$$x_4 = 0; \quad x_5 = 22,3 \text{ h/dek.}; \quad x_6 = 161,2 \text{ h/dek.},$$

mille puhul kogutoodang on 28,1 t/dek. (see programm oli just optimaalne seadmete maksimaalse koormamise juhul, kui $x_2 = 10$

Tabelisse 13, III arvutame ainult P_0 -veeru, sest ülejäänud ei ole enam vaja.

h) Optimaalse ja sellele eelneva programmi vahepealsed programmid. Kahe programmi kui punkti vaheline lõik koosneb tervenisti punktidest, mis on programmid ja mis annavad funktsioonile z väärtuste 28,1 ja 57 vahelised väärtused, $28,1 \leq z \leq 57$. Lõigu punktid avalduvad aga otspunktide koordinaatide kaudu tuntud viisil (vt. I osa, lk. 29, (2)). Seega saame optimaalse ja sellele eelneva programmi vahepealseks programmiks:

$\vec{x}^\gamma = (47\gamma; 10; 18,1 - 18,1\gamma; 0; 22,3 + 162,7\gamma; 161,2 - 120\gamma)$
ja vastavaks funktsiooni z väärtuseks

$$z^\gamma = 28,1 + 28,9\gamma,$$

kus $0 \leq \gamma \leq 1$. Siit võime parameetrit γ muutes saada lõpmata palju programme.

Näiteks püstitame lisaks veel nõude, et $x_3 \geq 5$, s.t. III liiki varraste miinimumplaan olgu 5 t/dek. Seda ülesannet saame lahendada \vec{x}^γ abil:

$$18,1 - 18,1\gamma \geq 5$$

ehk

$$13,1 \geq 18,1\gamma$$

ehk

$$\gamma \leq \frac{13,1}{18,1} = 0,723.$$

Et soovime saada maksimaalset kogutoodangut ja et z^γ on seda suurem, mida suurem on γ , siis tuleb võtta $\gamma = 0,723$ ning vastuseks saame programmi

$$\vec{x}^{0,723} = (34,1; 10; 5; 0; 140; 74,2)$$

mis annab $z^{0,723} = 49,1$ t/dek. Olukorda on selgitatud ka joonisel

Lahendame nüüd \vec{x}^r abil g) algul püstitatud ülesande. Et 80% 64,3-st on 51,43, siis

$$z^r = 28,1 + 28,9 \gamma = 51,43,$$

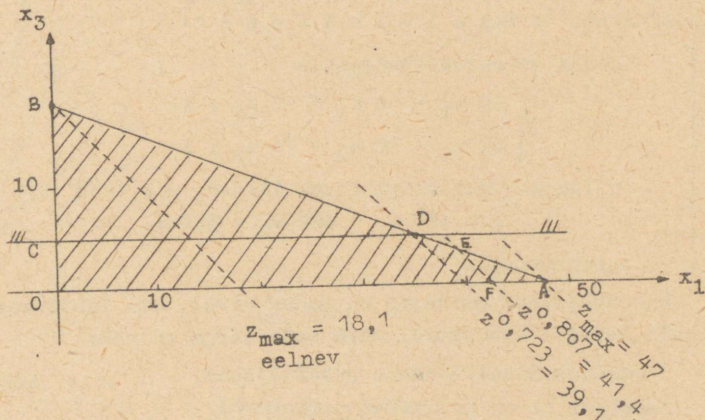
millest

$$\gamma = 0,807.$$

Arvutame vastava programmi:

$$\vec{x}^{0,807} = (37,9; 10; 3,5; 0; 153,6; 64,2).$$

Vastavalt selle programmile täidaks vardatsehhi plaani $x_2 = 10$, toodaks kõiki kolme liiki vardaid ja annaks kogutoodangut 80% absoluutselt maksimaalsest kogutoodangust.



Joon. 20

Jooniselt 20 on aga näha, et programm $\vec{x}^{0,807}$ (mis vastab punktile E) ei ole ainus, mis neid nõudeid täidab: lõigu EF kõik punktid, välja arvatud F (sest seal $x_3 = 0$), sobiksid vaadeldava ülesande vastuseks. Kui g) algul püstitatud ülesandes nõuda kogutoodangut vähemalt 80% absoluutselt maksimaalsest toodangust, siis sobiksid vastusteks kõik kolmnurga AEF punktid, välja arvatud külg FA (sest seal $x_3 = 0$).

1) z_k tõlgendus. Et kasutada optimaalse simplekstabeli viimases reas esinevaid vahesid $z_k - c_k$, on tarvis koos lähteülesandega:

leida võrratusesüsteemile

$$\begin{cases} 10 x_1 + 26 x_3 \leq 470 \\ 5 x_1 + 22 x_3 \leq 420 \\ 7 x_1 + 11 x_3 \leq 360 \end{cases}$$

niisugune mittenegatiivne lahend, mis teeb

$$z = x_1 + x_3$$

maksimaalseks;

vaadelda nn. d u a a l ü l e s a n n e t:

leida võrratusesüsteemile

$$\begin{cases} 10 u_1 + 5 u_2 + 7 u_3 \geq 1 \\ 26 u_1 + 22 u_2 + 11 u_3 \geq 1 \end{cases}$$

niisugune mittenegatiivne lahend, mis teeb

$$w = 470 u_1 + 420 u_2 + 360 u_3$$

minimaalseks.

Duaalülesande kordajad on samad arvud, mis lähteülesandel ainult teisiti kasutatud, nagu seda kerge on näha.

Lahendame duaalülesande graafiliselt.

Joonisel 21 on kujutatud tasapinnad

$$\frac{u_1}{0,1} + \frac{u_2}{0,2} + \frac{u_3}{0,143} = 1,$$

$$\frac{u_1}{0,04} + \frac{u_2}{0,045} + \frac{u_3}{0,09} = 1$$

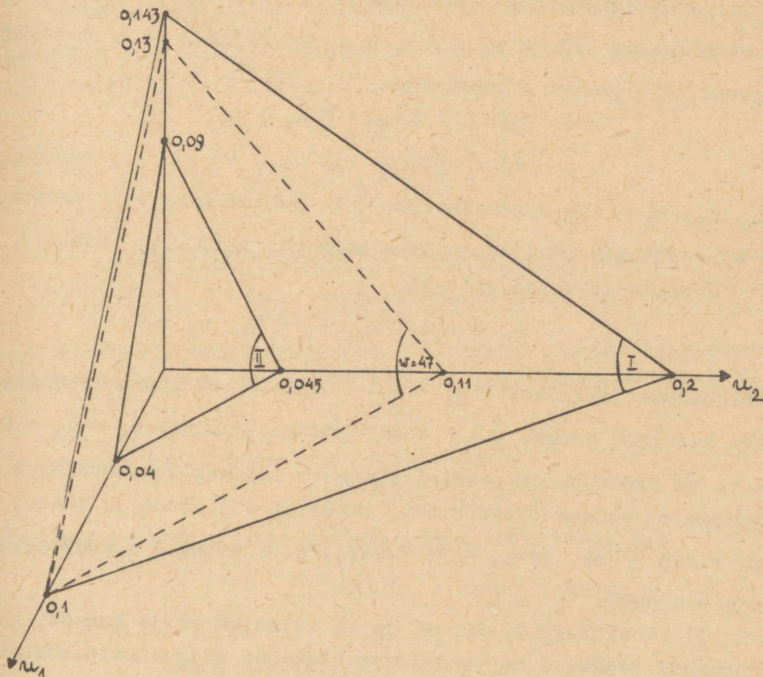
ja

$$47 = 470u_1 + 420u_2 + 360u_3$$

kui I, II ja $w = 47$. Võrratusesüsteemi rahuldav piirkond peab asetsema I ja II tasapinnast ülalpool, s.t. I tasapinnast ülalpool. Seega on $w = 47$ koordinaatide algusele lähim tasapind tasapindade

$$\text{const.} = 470u_1 + 420u_2 + 360u_3$$

hulgast, millel on veel punkte võrratusesüsteemi lahendite



Joon. 21

piirkonnas, s.t.

$$w_{\min}(0,1; 0; 0) = 47.$$

Saab tõestada, et duaalülesande optimaalset programmi

$$\vec{u} = (0,1; 0; 0)$$

võib arvutada lähteülesande optimaalse simplekstabeli vahede $z_k - c_k$ rea esimesest m arvust, liites neile vastavad c_k , s.t.

et

$$\vec{u} = (z_4; z_5; z_6),$$

kus z_4, z_5, z_6 seisavad tabeli 13, II eelviimasel reas vastavates veergudes (tõepoolest, et $c_4 = c_5 = c_6 = 0$, siis

$$z_4 - c_4 = z_4, \quad z_5 - c_5 = z_5, \quad z_6 - c_6 = z_6).$$

Saadud programmi $\vec{u} = (0,1; 0; 0)$ kasutamiseks selgitame

u_1, u_2, u_3 dimensiooniga h/t ja et $z = x_1 + x_3$ kordajad 1 ja 1 on nimeta arvud, siis peavad võrratustes

$$10 u_1 + 5 u_2 + 7 u_3 \geq 1,$$

$$26 u_1 + 22 u_2 + 11 u_3 \geq 1$$

u_1, u_2, u_3 olema dimensiooniga t/h . Kontrolliks võib arvutada w dimensiooni, mis peab tulema sama mis $z-1$, s.t. $t/dek.$.

Järelikult võime vastust

$$u_1 = 0,1 \text{ } t/h; \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0$$

tõlgendada järgmiselt: $u_1 = 0,1 \text{ } t/h$, s.t. et lõõmutusseadmete iga lisatund annaks 0,1 t kogutoodangut juurde; $u_2 = u_3 = 0$, s.t. et venitus- ja pakkimisseadmete lisaaeg kogutoodangut juurde ei annaks (tõepoolest, tabelist 13, II on ju teada, et $x_5 = 185 \text{ } h/dek.$ ja $x_6 = 31 \text{ } h/dek.$, s.t. et neil seadmetel on aja ülejääk).

j) Tabelitest 9, 10, 11 ja 12 võime ka välja lugeda, mis-suguseid seadmeid on vaadeldava ülesande seisukohalt otstarbe kas juurde muretseda või lisavahetuses tööle panna.

Nii leiame, et absoluutselt maksimaalset kogutoodangut saab vardatsehhis suurendada, kui anda pakkimisseadmetele tööaega juurde, nimelt suureneks iga lisatunni arvel kogutoodang 0,143 t võrra (tabel 9, II).

Edasi, seadmeid saaks vardatsehhis rohkem koormata, kui anda lõõmutusseadmetele tööaega juurde, sest iga lisatund vähendaks kogu kasutamata aega $z_4 = 2,1 - 1 = 1,1$ tunni võrra. Venitusseadmete lisatund aga suurendaks kasutamata aega, sest $z_5 = 0,2 - 1 = -0,8$ (tabel 10, IV).

Edasi, vardatsehhi absoluutselt maksimaalset kasumit saaki suurendada, kui anda lõõmutus- ja venitusseadmetele tööaega juurde, seejuures suurendab iga lisatund lõõmutusseadmetel kasumit 18 rbl. võrra ja iga lisatund venitusseadmetel 6 rbl. võrra (tabel 11, IV), s.t. kasulikum on suurendada lõõmutus-

seadmete tööaega.

Viimaks, plaani $x_2 = 10$ täitmisel saab seadmeid rohkem koormata 1,27 tunni võrra iga lisatunni puhul, mis antakse lõõmutusseadmetele (tabel 12, II), sest

$$z_4 - c_4 = 2,27 \text{ ja } c_4 = -1,$$

millest

$$z_4 = 1,27.$$

16. Miinumplaaniga ülesande lahendamine simpleksmeetodil.

a) Olgu lisaks paragrahvis 12 toodud tingimustele tarvis täita või ületada plaan: 30 tonni I liiki vardeid dekaadis, s.t.

$$x_1 \geq 30.$$

Teisendame selle vörratuse vörrandiks:

$$x_1 = 30 + x_7.$$

Eesmärgiks vötame maksimaalse kasumi, $z_{\max}^* = ?$, kui

$$z^* = 210x_1 + 480x_2 + 600x_3.$$

Seega tuleb

leida vörrandisüsteemi

$$\begin{cases} 700 = 10x_1 + 23x_2 + 26x_3 + x_4 \\ 550 = 5x_1 + 13x_2 + 22x_3 + x_5 \\ 450 = 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + x_6 \\ 30 = x_1 - x_7 \end{cases}$$

mittenegatiivsete lahendite hulgast niisugune, mis teeb funktsiooni

$$z^* = 210x_1 + 480x_2 + 600x_3$$

maksimaalseks.

Lihtsustame vörrandisüsteemi ja z^* , asendades $x_1 = 30 + x_7$:

$$\begin{cases} 400 = 10x_7 + 23x_2 + 26x_3 + x_4 \\ 400 = 5x_7 + 13x_2 + 22x_3 + x_5 \\ 240 = 7x_7 + 9x_2 + 11x_3 + x_6 \end{cases}$$

ja

$$z^* - 6300 = 210x_1 + 480x_2 + 600x_3$$

ehk, tähistades $z = z^* - 6300$,

$$z = 210x_1 + 480x_2 + 600x_3.$$

Ilmselt

$$z_{\max}^* = z_{\max} + 6300.$$

b) Seega võime asuda simplekstablelite koostamise ja arvutamise juurde. Sealjuures saab osa II simplekstableli elemente maha kirjutada tabelist 12, II.

I

Tabel 14.

c_k			0	0	0	210	480	600	
	Prog- ramm	P_0	P_4	P_5	P_6	P_7	P_2	P_3	Θ_j
$\leftarrow 0$	P_4	400	1	0	0	10	23	(26)	15,38
0	P_5	400	0	1	0	5	13	22	>15,38
0	P_6	240	0	0	1	7	9	11	>15,38
$z_k - c_k$		0	0	0	0	-210	-480	-600	

II opt.

$\rightarrow 600$	P_3	15,38	0,0385	0	0	0,385	0,885	1	
0	P_5	61,64	-0,846	1	0	-3,461	-6,461	0	
0	P_6	70,82	-0,423	0	1	2,769	-0,731	0	
z_{\max}		9228	23,08	0	0	20,76	50,76	0	

c) Optimaalne programm on seega:

$$x_1 = 30 \text{ t/dek.}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 15,4 \text{ t/dek.}; \quad x_4 = 0;$$

$$x_5 = 61,6 \text{ h/dek.}; \quad x_6 = 70,8 \text{ h/dek.}$$

Tõöd vardatsehis selle programmi järgi organiseerides saame

Võrrandisüsteemis (2) esinevad elimineerituina tundmatud x_4, x_5, x_6, x_7 . Kuid lahendit tuntud viisil moodustades saame

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 700;$$

$$x_5 = 550; \quad x_6 = 450; \quad x_7 = -15000;$$

milles viimane tundmatu omab negatiivse väärtuse, seega ei ole see lahend programm. Hädast aitab meid välja nn. kunstlik tundmatu x_8 , mille liidame (2) viimase võrrandi paremale poolele:

$$\begin{cases} 700 = 10x_1 + 23x_2 + 26x_3 + x_4 \\ 550 = 5x_1 + 13x_2 + 22x_3 + x_5 \\ 450 = 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + x_6 \\ 15000 = 210x_1 + 480x_2 + 600x_3 - x_7 + x_8. \end{cases} \quad (3)$$

Formuleerime nüüd uue LP ülesande (3) abil. Et selle uue ülesande optimaalne programm oleks ühtlasi lähteülesande optimaalne programm, tuleb garanteerida, et kunstlik tundmatu $x_8 = 0$ optimaalses programmis. Selle saavutamiseks võtame uue LP ülesande funktsiooniks

$$z = x_1 + x_2 + x_3 - M x_8, \quad z_{\max} = ?,$$

kus $M > 0$ on väga suur arv (kõigist arvutustes esinevatest arvudest suurem). Tõepoolest, siis iga programm, kus $x_8 = 0$, annab z -le suurema väärtuse, kui mistahes programm, kus $x_8 > 0$. Järelikult saab z maksimaalseks mingi niisuguse programmi korral, kus $x_8 = 0$.

b) Lahendame nüüd simpleksmetodil ülesande:

leida võrrandisüsteemi (3) mittenegatiivsete lahendite hulgast niisugune, mis teeb funktsiooni

$$z = x_1 + x_2 + x_3 - M x_8$$

maksimaalseks.

Simplekstabeleis tuleb meil viimases reas summadena esinevad arvud paigutada ruumipuudusel kahte ritta.

Juhtveeru valimiseks kasutame paremat reeglit. Et $M > 0$ on väga suur, siis ilmselt

$$1500 M + 25 > 14620 M + 30,5 > 13500 M + 64,3 ;$$

s.t. et tabelis 15, I on juhtveeruks P_3 .

Juhtrea valimisel ütleb aga reegel üles: $\theta_3 = 25$ saame P_5 -reas ja P_8 -reas, seega ei ole juhtrida üheselt määratud.

Niisugust juhtu nim. k ö d u n u d j u h u k s. Juhtrea valiku reegli (vt. lk. 27) teine osa on vajalik selleks, et ka kõdunud juhul oleks juhtrida üheselt määratud:

kui

$$\frac{a_{po}}{a_{pj}} = \frac{a_{qo}}{a_{qj}} = \dots = \frac{a_{ro}}{a_{rj}} = \theta_j,$$

siis arvutame

$$\theta'_j = \min \left(\frac{a_{p,n+1}}{a_{pj}}, \frac{a_{q,n+1}}{a_{qj}}, \dots, \frac{a_{r,n+1}}{a_{rj}} \right);$$

kui nüüd üksainus jagatis

$$\frac{a_{r',n+1}}{a_{r'j}} = \theta'_j,$$

siis võtame r' enda rea juhtreaks, vastupidisel juhul raken-dame seda reeglit uuesti kasutades jagatavatena veeru P_{n+2} elemente jne.

Nii tuleb tabelis 15, I selle tõttu, et

$$\frac{a_{20}}{a_{23}} = \frac{550}{22} = 25 = \theta_3 \quad \text{ja} \quad \frac{a_{40}}{a_{43}} = \frac{15000}{600} = 25 = \theta_3,$$

arvutada jagatised

$$\frac{a_{24}}{a_{23}} = \frac{0}{22} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{a_{44}}{a_{43}} = \frac{0}{600} = 0,$$

millest

$$\theta_3 = 0 = \frac{a_{24}}{a_{23}} = \frac{a_{44}}{a_{43}},$$

edasi jagatised

$$\frac{a_{25}}{a_{23}} = \frac{1}{22} \quad \text{ja} \quad \frac{a_{45}}{a_{43}} = \frac{0}{600} = 0,$$

millest

Tabel 15

c_k	Prog- ramm	P_0	P_4	P_5	P_6	$-M$	P_7	P_1	P_2	P_3
0	P_4	700	1	0	0	0	0	10	23	26
0	P_5	550	0	1	0	0	0	5	13	22
0	P_6	450	0	0	1	0	0	7	9	11
$-M$	P_8	15000	0	0	0	1	-1	210	480	(600)
$z_k - c_k$		-15000M	0	0	0	0	M	-210M-1	-480M-1	-600M-1
θ_k	$(z_k - c_k)$							64,3	30,5	25
								+13500M	+14620M	+15000M

II

0	P_4	50	1	0	0	-0,04(3)	0,04(3)	0,9(0)	2,2(0)	0
0	P_5	0	0	1	0	-0,03(6)	0,03(6)	-2,7(0)	-4,6(0)	0
0	P_6	175	0	0	1	-0,015(0)	0,015(0)	(3,15(0))	0,2(0)	0
+1	P_3	25	0	0	0	0,001(6)	-0,001(6)	0,35(0)	0,8(0)	1
$z_k - c_k$		25	0	0	0	M+0,001(6)	-0,001(6)	-0,65(0)	-0,2(0)	0
θ_k	$(z_k - c_k)$							55,(5)	22,(7)	
								36,(1)	4,(5)	

III

0	P_4	0,(0)	1	0	-0,28571	-0,039048	0,039048	0	(2,1429)	0
0	P_5	149,(9)	0	1	0,85714	-0,049526	0,049526	0	-4,4286	0

→ 1	P_1	55, (5)	0	0	0, 31746	-0, 0047619	0, 0047619	1	0, 063492	0
1	P_3	5, (5)	0	0	-0, (1)	0, 00(3)	-0, 00(3)	0	0, (7)	1
$z_k - c_k$		61, (1)	0	0	0, 20635	M-0, 0014286	0, 0014286	0	-0, 15873	0
θ_k	$-\theta_k(z_k - c_k)$								0	0

IV opt.

→ 1	P_2	0, (0)	0	0	-0, 1(3)	-0, 018222	0, 018222	0	1	0
0	P_5	149, (9)	2, 0666	1	0, 2(6)	-0, 13022	0, 13022	0	0	0
← -1	P_1	55, (5)	-0, 029629	0	(0, 32593)	-0, 0036049	0, 0036049	1	0	0
1	P_3	5, (5)	-0, 36296	0	-0, 0074081	0, 017506	-0, 017506	0	0	1
z_{max}		61, (1)	0, 074073	0	0, 18519	M-0, 0043210	0, 0043210	0	0	0
θ_k	$-\theta_k(z_k - c_k)$		0	0	170, 5		0			0

V opt. eelnev

1	P_2	22, 73								
0	P_5	104, 55								
→ 0	P_6	170, 45								
1	P_3	6, 82								
z_{max}	eelnev	29, 55								

$$\Theta_3^n = 0 = \frac{a_{45}}{a_{43}},$$

s.t. juhtreaks tuleb võtta neljas rida.

c) Kõrduvad juhtudel on ülesande lahendus tavaliselt pikem (rohkem simplekstabeleid) kui harilikul juhul. Seepärast tuleb esimeste tabelite elemendid arvutada suurema täpsusega. Tabelis 15, II saame kõik arvud kas täpsed või perioodilised kümnendmurrud, kus perioodis on üksainus number.

Tabelis 15, III võib juhtveeruks olla ainult P_2 , sest $z_B - c_B = M - 0,0014286 > 0$. Tõepoolest, $M > 0$ pidi olema ju suurem kõigist arvutustes esinevatest arvudest.

d) Tabelist 15, IV loeme vastuse:

selleks et vähemalt täita kasumiplaan 15000 rbl./dek. ja saada maksimaalses hulgas kogutoodangut, peab

$x_1 = 55,56$ t/dek.; $x_2 = 0$; $x_3 = 5,56$ t/dek.;

$x_4 = 0$; $x_5 = 150$ h/dek.; $x_6 = 0$; $x_7 = 0$; $x_8 = 0$;

Prog- ramm	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Opt.	55,56	0	5,56	0	150,00	0
Opt.eelnev	0	22,73	6,82	0	104,55	170,45
Opt. eel- nevad $\vec{x} \gamma$	$(1-\gamma) 55,56$	$22,73 \gamma$	$5,56 + 1,26 \gamma$	0	$150 - 45,45 \gamma$	$170,45 \gamma$
$x_2 = 5$ $\rightarrow 0,22$ x	43,33	5,00	5,83	0	140,00	37,50
$x_2 = x_3$ $\rightarrow 0,26$ x	41,11	5,89	5,89	0	138,18	44,32
$x_2 = 10$ $\rightarrow 0,44$ x	31,11	10,00	6,11	0	130,00	75,00

siis $z_{\max} = 61,11$ t/dek., mis on 95,1% absoluutselt maksimaalsest kogutoodangust, kasum on 15000 rbl./dek., mis on 94,3% absoluutselt maksimaalsest kasumist, ja kasutamata efektiivne tööaeg on 150 h/dek. ehk 8,8% kogu efektiivsest tööajast.

e) Saadud programmi ainsaks puuduseks on see, et II liiki vardeid saame 0 t/dek. Selle puuduse kõrvaldamiseks otsime optimaalsele eelneva programmi, kus $x_2 \neq 0$ (tabel 15, V, millest arvutame ainult P_0 -veeru).

Moodustame nüüd optimaalsele eelnevate programmide üldavaldise, nagu lk. 48, milleks korrastame optimaalse ja sellele eelnevad programmid tabelisse 16 (et $x_3 = 0$ juba eelduse järgi, siis jätame selle tabelist 16 välja).

Tabeli 16 viimasesse kolme ritta arvutame näiteks kolm konkreetset eelnevat programmi: esiteks niisuguse, mille puhul $x_2 = 5$, teiseks niisuguse, mille puhul $x_2 = x_3$, ja kolmandaks niisuguse, mille puhul $x_2 = 10$. Analoogiliselt võib \vec{x}^{δ} -st saada muid programme.

Tabel 16

x_7	Kogutoodang z	Kasum	Kasutamata aeg	Toodang	Kasum	Kasutamata aeg
				Abs. max. %	Abs. max. %	Abs. max. %
0	61,11	15000	150	95,1	94,3	8,8
0	29,55	15000	275	46,0	94,3	16,2
0	61,11- -31,56 \checkmark	15000	150+ +125 \checkmark	95,1- -49,1 \checkmark	94,3	8,8+ +7,4 \checkmark
0	54,16	15000	177,50	84,2	94,3	10,4
0	52,90	15000	182,50	82,3	94,3	10,7
0	47,22	15000	205,00	73,4	94,3	12,1

Tabel 17

c_k		P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_1	P_2	P_3
	Prog- ramm	P_0									
-1	P_4	700							10	23	26
-1	P_5	550	1					5	5	13	(22)
-1	P_6	450		1				7	7	9	11
-M	P_7	61,1			1		-1	1	1	1	1
-M	P_8	15100				1			210	480	600
	$z_k - c_k$	-1700 -15161,1M	0	0	0	0	M	M	-22 -211M	-45 -481M	-59 -601M
e_k									61,1	30,4	25
	$-\theta_k (z_k - c_k)$								12880M	14630M	15025M

		P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_1	P_2	P_3
-1	P_4	50	1	-1, (18)					4, (09)	7, (63)	
-0	P_5	25		0,0(45)					0,2(27)	0,5(90)	1
-1	P_6	175		-0,4(9)	1				4,5(0)	2,5(0)	
-M	P_7	36,1		-0,0(45)		1	-1		0,7(72)	0,4(09)	
-M	P_8	100		-27, (27)					(73, (63))	125, (45)	
$z_k - c_k$		-225 -136,1M	0	2,6(81) 27,3(18)M	0	0	M	M	-8,5(90) -74,4(09)M	-10,1(36) -125,8(63)M	0

18. Ülesanne, mis ei oma lahendit.

a) Püüame lõpuks koostada vardatsehhile programmi, mis garanteeriks 95 % nii absoluutselt maksimaalsest kogutoodangust kui ka kasumist. Seega tuleb tavalisele kolmele võrrandile liiksaks kaks võrratust

$$\begin{aligned} 61,1 &\leq x_1 + x_2 + x_3, \\ 15100 &\leq 210x_1 + 480x_2 + 600x_3, \end{aligned}$$

mida võrranditeks teisendades saame

$$\begin{aligned} 61,1 &= x_1 + x_2 + x_3 - x_9, \\ 15100 &= 210x_1 + 480x_2 + 600x_3 - x_{10}. \end{aligned}$$

Simpleksmeetodil lahendamiseks peame nende võrrandite parematele pooltele liitma veel kunstlikud tundmatud x_7 ja x_8 :

$$\begin{aligned} 61,1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_7 - x_9, \\ 15100 &= 210x_1 + 480x_2 + 600x_3 + x_8 - x_{10}. \end{aligned}$$

Eesmärgiks seame seadmete maksimaalse koormamise, seega

$$z = -x_4 - x_5 - x_6$$

ehk arvestades kunstlikke tundmatuid

$$z = -x_4 - x_5 - x_6 - Mx_7 - Mx_8, \quad z_{\max} = ?$$

b) Paigutame nüüd andmed tabelisse ja lahendame ülesannet simpleksmeetodil. Selle ülesande puhul tuleks tabelisse palju nulle kirjutada - selle asemel jätame tabeli kõige suuremas osas nullide kohale tühjad ruudud.

Tabelis 17, III saadud programmi on võimalik parandada ainult P_4 asendamisel P_5 -ga või P_{10} -ga, sest juhtveeruks võime võtta kas P_5 või P_{10} , kusjuures mõlemal juhul peame juhtreaks võtma P_4 - rea.

IV tabelis saadud programmi

$$\begin{aligned} x_1 &= 50,7 \text{ t/dek.}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 7,4 \text{ t/dek.}; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 133,3 \text{ h/dek.} \\ x_6 &= 13,3 \text{ h/dek.}; \quad x_7 = 2,96 \text{ t/dek.}; \quad x_8 = 0; \quad x_9 = 0; \quad x_{10} = 0 \end{aligned}$$

ei ole enam võimalik parandada, sest $(z_k - c_k)$ -reas on kõik vahed mittenegatiivsed. (Tabeli sisu pole vaja arvutada.)

Selgitame tulemust:

võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} 700 = 10x_1 + 23x_2 + 26x_3 + x_4 \\ 550 = 5x_1 + 13x_2 + 22x_3 + x_5 \\ 450 = 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + x_6 \\ 61,1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_7 - x_8 \\ 15100 = 210x_1 + 480x_2 + 600x_3 + x_8 - x_{10} \end{cases} \quad (1)$$

ei ole niisugust mittenegatiivset lahendit, milles $x_7 = x_8 = 0$ ehk, mis on sama, võrratusesüsteemil

$$\begin{cases} 700 \geq 10x_1 + 23x_2 + 26x_3 \\ 550 \geq 5x_1 + 13x_2 + 22x_3 \\ 450 \geq 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 \\ 61,1 \leq x_1 + x_2 + x_3 \\ 15100 \leq 210x_1 + 480x_2 + 600x_3 \end{cases}$$

puuduvad mittenegatiivsed lahendid;

IV tabelis saadud programm on optimaalne, s.t. et plaani jätame selle järgi kõige vähem täitmata. Tõepoolest x_7 ehk puudu jääk kogutoodangu plaanist on 2,96; sama arv esineb ka z_{\max} avaldises:

$$z_{\max} = -146,68 - 2,96 M,$$

maksimumi saavutamiseks peab siin aga - M kordaja olema võimalikult väike.

19. Kokkuvõtte vardatsehhi programmidest.

a) Kõigi vardatsehhis lahendatud ülesannete vastused võtame nende paremaks võrdlemiseks kokku tabelisse 19.

Tabelis 19 töstame absoluutsed maksimumid ja miinimumid ruudukestega esile. Samuti märgime (ringikesega) kitsaskohad, s.t. juhud, kus mingite seadmete kogu efektiivne tööaeg on kasutatud.

	Ühik	Absoluutselt max toodang	Seadmete abs.max koormamine	Absoluutselt max. kasum	Seadmete max koor- mamine, $x_2 = 10$
I liiki vardaid	t/dek.	64,3	12,2	12,2	0
II liiki vardaid	t/dek.	0	0	0	10,0
III liiki vardaid	t/dek.	0	22,2	22,2	18,1
Kogutoodang	t/dek.	64,3	34,4	34,4	28,1
Kasum	rbl/dek	13500	15900	15900	15660
Kasutatud aeg lõõmutuses	h/dek.	642,9	700,0	700,0	700,0
Kasutatud aeg venituses	h/dek.	321,4	550,0	550,0	527,7
Kasutatud aeg pakkimisel	h/dek.	450,0	330,0	330,0	288,8
Kasutamata koguaeg	h/dek.	285,7	120,0	120,0	183,5
<u>Kogutoodang</u> Abs.max toodang	%	100	53,5	53,5	43,7
<u>Kasum</u> Abs.max kasum	%	84,9	100	100	98,5
<u>Kasutamata aeg</u> Efekt.koguaeg	%	16,8	7,1	7,1	10,8
Programmi nr.		1	2	3	4

Tabel 13

Max toodang, $x_2 = 10$	Max toodang, $x_2 = 10, x_3 \geq 5$	80% abs. max toodangust, $x_2 = 10$	Max kasum, $x_1 \geq 30$	Max toodang, kasum ≥ 15000	Max toodang, $x_2 = 5$, kasum ≥ 15000	Max toodang, $x_2 = x_3$, kasum ≥ 15000	Max toodang, $x_2 = 10$, kasum ≥ 15000
47,0	34,1	37,9	30,0	55,6	43,3	41,2	31,1
10,0	10,0	10,0	0	0	5,0	5,9	10,0
0	5,0	3,5	15,4	5,6	5,8	5,9	6,1
57,0	49,1	51,4	45,4	61,1	54,2	52,9	47,2
14670	14960	14860	15530	15000	15000	15000	15000
700,0	700,0	700,0	700,0	700,0	700,0	700,0	700,0
515	410,0	396,4	488,4	400,0	410,0	411,8	420,0
419	375,8	385,8	379,2	450,0	412,5	405,7	375
216	214,2	217,8	132,4	150,0	177,5	182,5	205,0
88,6	76,4	80,0	70,6	95,1	84,2	82,3	73,4
92,3	94,1	93,5	97,7	94,3	94,3	94,3	94,3
12,7	12,6	12,8	7,8	8,8	10,4	10,7	12,1
5	6	7	8	9	10	11	12

b) Vardatsehhile kõige sobivamaks tuleb lugeda programme nr. 10 ja 11, sest sel juhul toodetakse kõiki liiki vardaid ja toodud kolm protsentuaalset näitajat on ühtlaselt head.

20. Alternatiivse optimumi leidmine.

a) Lahendame näites 30 (vt. lk. 8 - 9) toodud ülesande. Selleks tuleb lk. 9 saadud võrratusesüsteem kõigepealt teisendada võrrandisüsteemiks:

$$\begin{cases} 6 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ 0 = 11x_1 + 11x_2 - 9,5x_3 - 6x_4 - 8x_5 + x_7 \\ 17 = x_1 + 3x_2 + 7,25x_3 + x_4 + 5x_5 + x_8 \\ 10 = 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_9 \end{cases}$$

Et x_7 on kunstlik tundmatu, siis

$$z = 7x_1 + 7x_2 + 9,75x_3 + 8x_4 + 9x_5 - Mx_7,$$

kus $z_{\max} = ?$

b) Lahendame ülesande simpleksmeetodil. Arvutame täpselt, s.t. harilikes mürdudes.

Tabelist 19, V loeme optimaalse programmi ja z_{\max}

$$x_1 = 0; x_2 = 2 \text{ d/näd.}; x_3 = 0; x_4 = 1 \text{ d/näd.}; x_5 = 2 \text{ d/näd.};$$

$$x_6 = 1 \text{ d/näd.}; x_7 = 0; x_8 = 0; x_9 = 0; z_{\max} = 40 \text{ t/näd.};$$

s.t. et töötades 2 päeva nädalas II tehnoloogia järgi, 1 päev IV tehnoloogia järgi ja 2 päeva V tehnoloogia järgi on mõlema tootmisfaktori limiit kulutatud, aega jääb üks päev üle, kuid kogutoodang on maksimaalne, nimelt 40 t.

c) Alternatiivse optimum. Kas saadud programm on ainus, mille puhul

$$z = z_{\max} = 40?$$

Ei ole. Simplekskriteerium ütleb, et tabelis 19, V saadud programmi ei ole enam võimalik parandada, küll võib olla aga võimalik teda muuta. Võttes simplekstabelis juhtveeruks P_j nii et $z_j - c_j = 0$, jääb funktsiooni z väärtus muutumatuks, prog-

rammi muutumine sõltub aga veeru P_j ülejäänud elementidest: kui veerus P_j on üksainus nullist erinev element ja see on 1 P_j - reas, siis programm ei muutu; kui veerus P_j on positiivseid elemente teistes ridades, siis saame programmi muuta.

Nii tuleb tabelis 19, V võtta juhtveeruks P_3 -veerg ja juhtreaks (tavalise reegli järgi) P_5 -rida. VI-st tabelist arvutame ainult P_0 -veeru, mis annab uue optimaalse programmi, nn.

a l t e r n a t i i v s e o p t i m u m i :

$$x_1 = 0; x_2 = \frac{442}{219} = 2,02; x_3 = \frac{280}{219} = 1,28;$$

$$x_4 = \frac{367}{219} = 1,67; x_5 = 0; x_6 = \frac{75}{73} = 1,03;$$

$$x_7 = x_8 = x_9 = 0;$$

mille puhul ikka $z = 40$.

Kahest optimaalsest programmist võime saada lõpmata palju optimaalseid programme, nagu saime programme optimaalsest ja optimaalsele eelnevast programmist lk. 48. Et esimesena saadud optimaalses programmis kasutatakse ainult kolme tehnoloogiat, igathte neist täisarv päevi, siis on see programm vastuvõetavam kui alternatiivne optimaalne programm või neist kahest kombineeritavad programmid.

d) V tabeli viimases reas P_8 - ja P_9 - veerus seisvad arvud $\frac{5}{4}$ ja $\frac{15}{8}$ ütlevad, et esimese faktori limiidi suurendamine 1 ühiku võrra suurendab kogutoodangut 1,25 ühiku võrra ja et teise faktori limiidi suurendamine 1 ühiku võrra suurendab kogutoodangut 1,875 ühiku võrra - s.t. et kasulikum on suurema kogutoodangu saamise eesmärgil taotleda teise faktori limiidi suurendamist.

21. Piiratud toorainekogustega seguülesanne.

a) Lahendame näidetes 29, 32 ja 33 formuleeritud õllesegamise ülesande.

Selle ülesande formuleeringus esinevad kaheliikmelised võr-

Tabel 19

I

c_k	Programm	P_0	0	-M	P_7	P_8	0	0	P_9	P_1	7	P_2	7	P_3	8	9
0	P_6	6	1							1		1	1	1	1	1
$\leftarrow -M$	P_7	0		1						(11)		11		$-\frac{19}{2}$	-6	-8
0	P_8	17			1					1		3		$-\frac{29}{4}$	1	5
0	P_9	10					1			3		1		1	4	2
	$z_k - c_k$	0	0	0	0	0	0	0		-11 M	-11 M	-11 M		$\frac{19}{2}$ M	6M	BM
	θ									-7	-7	-7		$-\frac{39}{4}$	-8	-9
										0	0	0	0			

II

0	P_6	6	1	$-\frac{1}{11}$										$\frac{41}{22}$	$\frac{17}{11}$	$\frac{19}{11}$
$\rightarrow 7$	P_1	0		$\frac{1}{11}$				1		1	1			$-\frac{19}{22}$	$-\frac{6}{11}$	8
0	P_8	17		$-\frac{1}{11}$		1				2				$\frac{357}{44}$	$\frac{17}{11}$	$\frac{63}{11}$
$\leftarrow 0$	P_9	10		$-\frac{3}{11}$					1		-2			$\frac{79}{22}$	$\frac{62}{11}$	(46)
	$z_k - c_k$	0	0	$M + \frac{7}{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0		$-\frac{695}{44}$	$-\frac{130}{11}$	$-\frac{155}{11}$
	θ													2,1	1,8	2,4
														33,1	21	33,8

III

0	P_6	$\frac{43}{23}$	1	$\frac{1}{46}$		$-\frac{19}{46}$		$\frac{19}{23}$	$\frac{35}{92}$	$\frac{18}{23}$
7	P_1	$\frac{40}{23}$		$\frac{1}{23}$	1	$\frac{4}{23}$		$\frac{15}{23}$	$-\frac{11}{46}$	$\frac{10}{23}$
\leftarrow 0	P_8	$\frac{76}{23}$		$\frac{13}{46}$	1	$-\frac{63}{46}$		$\frac{109}{23}$	$\frac{147}{46}$	$\frac{142}{23}$
\rightarrow 9	P_5	$\frac{55}{23}$		$-\frac{3}{46}$		$\frac{11}{46}$		11	$\frac{79}{92}$	$\frac{31}{23}$
$z_k - c_k$		$\frac{775}{23}$	0	$M - \frac{13}{46}$	0	$\frac{155}{46}$	0	$-\frac{155}{23}$	$-\frac{85}{23}$	$\frac{165}{23}$
θ_k								0,69	1,06	
								4,7	3,7	

IV

0	P_6	$\frac{141}{109}$	1	$-\frac{3}{109}$	$-\frac{19}{109}$	$-\frac{19}{109}$		$-\frac{77}{436}$	$\frac{32}{109}$
\leftarrow 7	P_1	$\frac{140}{109}$		$\frac{1}{218}$	$-\frac{15}{109}$	$\frac{29}{218}$	1	$-\frac{74}{109}$	$\frac{140}{109}$
\rightarrow 7	P_2	$\frac{76}{109}$		$\frac{13}{218}$	$\frac{23}{109}$	$\frac{63}{218}$		$\frac{147}{218}$	$\frac{142}{109}$
9	P_5	$\frac{297}{109}$		$-\frac{4}{109}$	$\frac{11}{109}$	$-\frac{11}{109}$		$\frac{515}{436}$	$\frac{79}{109}$
$z_k - c_k$		$\frac{4185}{109}$	0	$M + \frac{13}{109}$	$\frac{155}{109}$	$\frac{155}{109}$	0	$\frac{185}{218}$	$-\frac{175}{109}$

V opt.

C_k	Programm	P_0	$-M$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
0	P_6	1	$-\frac{1}{35}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{8}{35}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{140}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{3}{35}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{3}{140}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{3}{140}$
\rightarrow 8	P_4	1	$\frac{1}{280}$	$-\frac{3}{28}$	$-\frac{3}{28}$	$\frac{1}{280}$	$-\frac{109}{140}$	$\frac{79}{280}$	$-\frac{79}{140}$	$\frac{109}{140}$	$-\frac{79}{140}$	$-\frac{109}{140}$	$-\frac{79}{140}$	$-\frac{109}{140}$	1
7	P_2	2	$\frac{9}{140}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{9}{140}$	$-\frac{71}{70}$	$\frac{11}{140}$	$-\frac{71}{70}$	$\frac{71}{70}$	$-\frac{11}{70}$	$-\frac{71}{70}$	$-\frac{11}{70}$	$-\frac{71}{70}$	1
\leftarrow 9	P_5	2	$-\frac{11}{280}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$	$-\frac{11}{280}$	$-\frac{79}{140}$	$-\frac{29}{280}$	$-\frac{79}{140}$	$-\frac{29}{280}$	$-\frac{79}{140}$	$-\frac{29}{280}$	$-\frac{79}{140}$	$-\frac{29}{280}$	$-\frac{79}{140}$
z_{\max}		40	$M + \frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$M + \frac{1}{8}$	$-\frac{15}{8}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{15}{8}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{15}{8}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{15}{8}$	$\frac{5}{4}$	0

VI alt.opt.

0	P_6	$\frac{75}{73}$													
8	P_4	$\frac{367}{219}$													
7	P_2	$\frac{442}{219}$													
\rightarrow $\frac{39}{2}$	F_3	$\frac{280}{219}$													
z_{\max}		40													

ratused, nagu

$$150 \geq x_1$$

ehk võrrandiks teisendatuna

$$150 = x_1 + x_7$$

ehk

$$x_1 = 150 - x_7.$$

Kui nüüd kõigis ülejäänud võrrandis asendada x_1 selle vahega ning siis lahendada ülesannet (ilma võrrandita $x_1 + x_7 = 150$) simplekssmeetodil, saame tundmatule x_7 mittenegatiivse väärtuse, mis võib juhtumisi olla ka suurem kui 150. See aga ütleb, et lähteülesandele saaksime vastuse, kus $x_1 < 0$, mis ei sobi.

Kokkuvõttes saame:

kaheliikmelisi võrratusi, kus positiivne vabaliige on väiksem-võrdne otsitavast, saab süsteemist uue tundmatu abil elimineerida;

vastupidise märgiga kaheliikmelisi võrratusi aga ei saa süsteemist elimineerida, sest sellega võib kaasneda otsitava negatiivsus.

Sama kokkuvõtet võib ka teisiti sõnastada:

miinimumplaane esitavaid kaheliikmelisi võrratusi saab süsteemist elimineerida;

tooraineliimiti esitavaid kaheliikmelisi võrratusi ei ole aga süsteemist võimalik elimineerida.

b) Koostame nüüd simplekstabellid.

Tabellist 20, IV võime välja kirjutada optimaalse programmi

ja z_{\min}^* :

$$x_1 = 0; x_2 = 60 \text{ hl}; x_3 = 30 \text{ hl}; x_4 = 7,41 \text{ hl}; x_5 = 2,59 \text{ hl};$$

$$x_6 = 0; x_7 = 150 \text{ hl}; x_8 = 0; x_9 = 0; x_{10} = 112,59 \text{ hl}$$

ja

$$z_{\min}^* = 2793 \text{ rbl.}$$

Seega saime odavaima õllesegu koostamiseks järgmise juhise:

c_k	P_0	0	$-M$	0	0	0	0	0	0	0	-22	-25	-32	-45
	Prog- ramm	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_1	P_2	P_3	P_4			
0	P_5	100	1					1	1	1	1			1
$-M$	P_6	400	1					2,5	3,7	4,5	<u>5,8</u>			
0	P_7	150		1				1						
0	P_8	60			1				1					
0	P_9	30				1				1				
0	P_{10}	120					1							1
$z_k - c_k$		-400M	0	0	0	0	0	22 - -2,5M	25 - -3,7M	32 - -4,5M	45 - -5,8M			
θ_k								100	60	30	68,97			
								250M	222M	135M	400M			

II

0	P_5	31,03	1	-0,172				0,569	0,362	0,224				
-45	P_4	68,66		0,172				0,431	0,638	0,776			1	
0	P_7	150						1						

IV

c_k			0	-M	0	0	0	0	0	-22	-25	-32	-45
	Programm	P_0	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_1	P_2	P_3	P_4
+0	P_5	2,59	1	-0,172		-0,362	-0,224			0,569			
-45	P_4	7,41		0,172		-0,638	-0,776			0,431			1
0	P_7	150			1					1			
-25	P_2	60				1					1		
-32	P_3	30					1					1	
0	P_{10}	112,59		-0,172		0,638	0,776	1		-0,431			
z_{max}		2793,69	0	M-	0	3,706	2,914	0		2,604	0	0	0
θ_k						60	30			4,55			
						222	87			12			

V

-22	P_1	4,55											
-45	P_4	5,45											
0	P_7	145,45											
-25	P_2	60											
-32	P_3	30											
0	P_{10}	114,55											
$z_{opt. eelnev}$		280554											

võtta 60 hl II liiki õlut,
30 hl III liiki õlut,
7,41 hl IV liiki õlut,
2,59 hl vett,

siis 100 hl 4% alkoholisisaldusega õlut maksab ainult
2793 rbl.

Pakub huvi, kas ilma veeta koostatud segu läheb palju kallimaks - parem on ta ju kindlasti. Seepärast arvutame IV tabelisse veel ühe rea ja määrame juhtveeru ning -rea optimaalsele eelneva programmi saamiseks. Osutub, et just optimaalsele eelnevas programmis on vesi asendatud I liiki õllega.

Tabelist 20, V saame seega välja lugeda, et

kui võtta 4,55 hl I liiki õlut,
60 hl II liiki õlut,
30 hl III liiki õlut,
5,45 hl IV liiki õlut,

siis 100 hl 4% õlut maksab 2805 rbl., s.o. ainult 12 rbl. rohkem kui odavaimal juhul.

Nii võime lugeda parimaks just viimase õllesegu - ilma veeta ja odav (peaaegu kõige odavam).

22. Lõpmatu maksimumi juhtum.

a) Simpleksmeetodi käsitlemise lõpetame juhuga, kus z_{\max} ei ole lõplik.

Vaatleme ülesannet:

leida $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ nii, et

$$\begin{cases} -x + 2y \leq 4 \\ x - 3y \leq 1 \end{cases}$$

ja et funktsioon z saab maksimaalseks, kusjuures

$$z = x + 2y.$$

Et tundmatuid on ainult kolm, x , y , z , siis saame ülesande lahendada graafiliselt. Võrratusesüsteemi kõigi mitte-

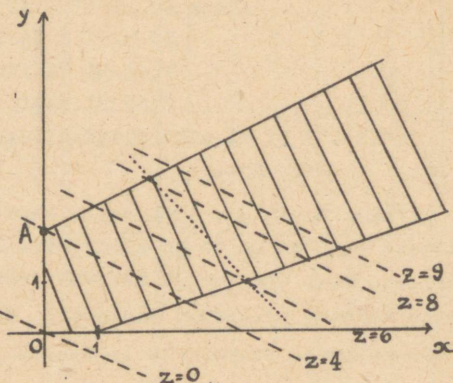
negatiivsete lahendite hulk on ühelt poolt tõkestamata (joonis 22).

Sirget

$$x + 2y = \text{const.}$$

võime tõmmata ükskõik kui suure konstandi puhul ikka nii, et tal on võrratusesüsteemi lahendite piirkonnaga ühiseid punkte. Seega

$$z_{\max} = +\infty.$$



Joon. 22

b) Lahendame nüüd sama ülesannet simplekssmeetodil. Selleks tuleb võrratusesüsteem täiendada võrrandisüsteemiks:

$$4 = -x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$1 = x_1 - 3x_2 + x_4,$$

kus $x_1 = x$ ja $x_2 = y$. Koostame simplekstabeli:

I

Tabel 21.

c_k			0	0	1	2
	Programm	P_0	P_3	P_4	P_1	P_2
$\leftarrow 0$	P_3	4	1	0	-1	②
0	P_4	1	0	1	1	-3
$z_k - c_k$		0	0	0	-1	-2
θ_k	$-\theta_k(z_k - c_k)$				1	2
					1	4

II

$\rightarrow 2$	P_2	2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
0	P_4	7	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
$z_k - c_k$		4	1	0	-2	0

Tabelist 21, I saame programmi

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 1; z^0 = 0,$$

mis vastab punktile 0 joonisel 22.

Tabelist 21, II saame programmi

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 7, z^1 = 4,$$

mis vastab punktile A joonisel 22. Selles tabelis tuleks juhtveeruks võtta P_1 , kuid juhtrida ei saa valida, sest P_1 -veerus ei ole ühtegi positiivset elementi. Seega ei saa tabelis 21, II leitud programmi simpleksmeetodil enam parandada, simplekskriteerium aga ütleb, et funktsioonil z on suuremaid väärtusi kui $z = 4$. S.t. et võrratüüpi lahendite piirkonnal ei ole niisugust tippu, kus $z > 4$, küll aga on selles piirkonnas muid punkte, kus $z > 4$. Jooniselt 22 on näha, et tipust A väljuval serval $z > 4$ ja sealjuures z on seda suurem, mida kaugemale minna. Et selles suunas on lahendite piirkond tõkestamata, siis $z_{\max} = +\infty$.

c) Selle konkreetse ülesande puhul ilmenenud on võimalik üldistada järgmiseks näiteks:

kui simplekstabeli juhtveerus ei ole ühtegi positiivset elementi, siis lahendatava LP ülesande funktsioonil on lõpmatu maksimum.

Majandusliku sisuga ülesannetes tähendab vastuse lõpmatus ülesande puudulikku püstitamist. Niisuguse olukorra kõrvaldamiseks tuleb uusi sisuliselt põhjendatud tingimusi, s.t. võrratüüpi juurde võtta (nagu näiteks $x + y \leq 10$ joonisel 22, mis annaks $z_{\max} = 8$).

23. Parameetriline programmeerimine.

a) Vaatleme sesoonse tootmise ülesannet, kus eesmärgiks on tootmis- ja laondamiskulude miinimum.

Vabrikus toodetakse supeltrikoosid. Kaubandusorganisatsioonid tellisid neid

I	kvartaliks	r_1	ehk	2	tuh. tk.,
II	"	r_2	"	10	" "
III	"	r_3	"	9	" "
IV	"	r_4	"	3	" "

Vabriku laos oli aasta algul s_0 ehk 1 tuh. trikood.

Kvartalitoodangu suurendamine 1000 supeltrikoo võrra ühest kvartalist teise üleminekul maksab a rbl.; 1000 supeltrikoo laondamine maksab b rbl. kvartalis. (Koefitsiente a ja b on raske täpselt määrata, seepärast lähendame ülesande kasutades tähelisi suurusid a ja b ning vastusest loeme muuhulgas välja, kui täpselt on neid koefitsiente teada tarvis.)

Kui palju peab vabrik kaubandusorganisatsioonide tellimistele täitmiseks tootma supeltrikoosid igas kvartalis, et laondamiskulude ja tootmise suurendamise kulude summa oleks aastas minimaalne?

b) Formuleerime ülesande matemaatiliselt. Selleks tähistame kvartalitoodangu tuhandetes tk-des

$$x_i \frac{\text{tuh.tk.}}{\text{kv.}}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

I kv. jaoks saame võrratuse

$$x_1 + s_0 \geq r_1.$$

Teeme selle võrratuse võrrandiks:

$$x_1 + s_0 = r_1 + s_1,$$

kus s_1 tähendab ilmselt I kv. ülejääki tuh. tk. Analooiliselt tähistame kõigi kvartalite ülejääke

$$s_i \frac{\text{tuh.tk.}}{\text{kv.}}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

II kv. jaoks saame võrratuse

$$x_2 + s_1 \geq r_2,$$

millest

$$x_2 + s_1 = r_2 + s_2.$$

Analooiliselt III ja IV kv. jaoks:

$$x_3 + s_2 = r_3 + s_3,$$

$$x_4 + s_3 = r_4 + s_4.$$

Kokku saame võrrandisüsteemi, milles tuntud ja tundmatud suurused on eraldatud:

$$\begin{cases} x_1 - s_1 = r_1 - s_0 \\ x_2 + s_1 - s_2 = r_2 \\ x_3 + s_2 - s_3 = r_3 \\ x_4 + s_3 - s_4 = r_4. \end{cases} \quad (1)$$

Kvartalitoodangute kõikumist mõõdavad arvud

$$x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \quad (2)$$

mis suurenemise juhul on positiivsed, muudel juhtudel aga nullid või negatiivsed. Kulused esitava funktsiooni avaldisse on a -ga korrutatult tarvis ainult positiivseid neist arvudest. Viimaste eraldamiseks arvude (2) hulgast kasutame järgmist võtet: tähistame toodangu suurenemist tuh. tk. i-ndast kvartalilt (1 + 1)-sse üleminekul uue mittenegatiivse tundmatuga

$$y_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

analoogiliselt toodangu vähenemist uue mittenegatiivse tundmatuga

$$z_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

kusjuures y_i ja z_i ei tohi korraga olla nullist erinevad:

$$y_i z_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Siis võime toodangu kõikumist mõõtvaid arvuksid (2) teisiti väljendada vahedena

$$y_1 - z_1, \quad y_2 - z_2, \quad y_3 - z_3. \quad (3)$$

Võrrutades (2) ja (3) vastavad arvud, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = y_1 - z_1 \\ x_3 - x_2 = y_2 - z_2 \\ x_4 - x_3 = y_3 - z_3 \end{cases} \quad (4)$$

Võrranditest (1) ja (4) koosnebki sesoonse tootmise ülesande võrrandisüsteem.

Eesmärgiks on meil minimaalsed tootmise suurendamise ja laondamise kulud, s.t. $z_{\min}^* = ?$, kui

$$z^* = a(y_1 + y_2 + y_3) + b(s_1 + s_2 + s_3 + s_4).$$

Et laondamiskulude koefitsient $b \neq 0$, siis võime temaga jagada:

$$\frac{z^*}{b} = \frac{a}{b} (y_1 + y_2 + y_3) + s_1 + s_2 + s_3 + s_4,$$

ehk, tähistades $z^{**} = \frac{z^*}{b}$ ja $\lambda = \frac{a}{b}$,

$$z^{**} = \lambda (y_1 + y_2 + y_3) + s_1 + s_2 + s_3 + s_4, \quad z_{\min}^{**} = ?$$

Seega võime simplekstabelis a ja b asemel kasutada ühte täheolist kordajat ehk nn. p a r a m e e t r i t λ .

Kohandame ülesande simpleksmeetodil lahendamiseks. Selleks tähistame kõigepealt tundmatud x_i , $i = 1, 2, \dots, 14$:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = s_1, x_6 = s_2, x_7 = s_3, x_8 = s_4,$$

$$x_9 = y_1, x_{10} = y_2, x_{11} = y_3, x_{12} = z_1, x_{13} = z_2, x_{14} = z_3.$$

Edasi on tarvis lisada süsteemi (1) võrrandite vasakutele pooltele kunstlikud tundmatud $x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}$ ning asendada

s_0, r_1, r_2, r_3, r_4 arvudega.

b) Lahendame ülesande simpleksmeetodil, arvestades et funktsiooni z kordajad on lineaarsed avaldised kahest tähel-
sest suurusest M ja λ . M -ga opereerimine on meile juba tut-
tav. Parameeter λ toob aga ülesande lahenduskäiku uusi momen-
te - tegu on nn. p a r a m e e t r i l i s e l i n e a a r -
p r o g r a m m e e r i m i s e g a.

Tabelis 23 on toodud I, II ja VI, VII, VIII, IX, X simpleks
tabel, mooduvad III, IV ja V tabel, mida on üliõpilasel soovi-
tav ise taastada.

Juhtveeru valikuks vajalikud θ_k ja $-\theta_k(z_k - c_k)$ on ta-
belis 23 paigutatud ühe rea asemel kahte ritta (tabelite pare-
maks äramahutamiseks).

Tabelis 23, VI on vahed $z_3 - c_3$ ja $z_4 - c_4$ negatiivsed,
nimelt $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, vahe $z_9 - c_9 = \lambda - \frac{1}{2}$ märki me aga ei tea,
sest parameetri λ kohta pole seni muud eeldatud kui positiiv-
sust. Seetõttu valime juhtveeruks kas P_3 või P_4 (otstarbekamaks
osutub P_3).

Tabelis 23, VII on olukord eelmisega analoogiline.

Tabelis 23, VIII võivad ainult $z_9 - c_9$ ja $z_{10} - c_{10}$ olla
negatiivsed, nimelt siis, kui $\lambda < 1$. Kui aga $\lambda \geq 1$, annab ta-
bel VIII optimaalse programmi.

Analoogiliselt eelmisega annab tabel IX optimaalse program-
mi neil juhtudel, kui $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ ning tabel X neil juhtudel,
kui $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

Järelikult on leitud optimaalsed programmid kõikvõimalike
 λ ehk $\frac{a}{b}$ väärtuste jaoks.

Tabelist 22 näeme, et optimaalsed programmid rahuldavad
nõuet $y_1 z_1 = 0$, $i = 1, 2, 3$ (vt. lk. 81).

Edasi teeme tabelist 22 järelduse, et sesoonse tootmise
ülesandes võivad koefitsiendid a ja b olla antud päris jäme-
dalt. Näiteks s_0, r_1, r_2, r_3, r_4 kasutatud väärtuste puhul on

vaja teada vähemalt seda, kumb on suurem, kas a või b, ja juhul, kui a on väiksem, ka seda, kas a on $\frac{b}{2}$ -st suurem või väiksem.

Veel näeme tabelist 22, et üldiselt on λ -st sõltuvalt ainult kolm erinevat optimaalset programmi. Erijuhtudel aga, kui $\lambda = 1$ ehk $b = a$ ja $\lambda = \frac{1}{2}$ ehk $b = 2a$ saame lõpmata palju optimaalseid programme. Näiteks juhul $a = b$ tuleb optimaalseks üldprogrammiks

$$\vec{x}^* = (2 + \frac{14}{3}\gamma; 9 - \frac{7}{3}\gamma; 9 - \frac{7}{3}\gamma; 3; 1 + \frac{14}{3}\gamma; \frac{7}{3}\gamma; 0; 0;$$

$$7 - 7\gamma; 0; 0; 0; 0; 6 - \frac{7}{3}\gamma),$$

kus $0 \leq \gamma \leq 1$.

c) Võib lahendada LP ülesandeid, kus parameetrist või parameetreist sõltuvad ka P_0 -veeru elemendid. Näiteks võib lahendada LP ülesannet, kus võrrandisüsteemiks on (1) ja (4). Siis tuleb lahenduskäigus vaadelda mitme parameetri s_0, r_1, r_2, r_3, r_4 erinevaid suurusvahemikke ja seega töö läheb palju pikemaks kui käsitletud üheparameetrilisel juhul.

24. Ratsionaalse juurdelõikuse ülesanne.

a) Trükkikoda saab ajalehepaberit standardsetes rullides, mille laius (s.t. silindri kõrgus) on 1,5 m. Rullid on tarvis lõigata osarullideks nii,

et saada 0,7; 0,6 ja 0,45 m laiuse osarulle vastavalt 100, 150 ja 90 tk. Kuidas teha seda nii, et paberi ülejääk (liiga kitsad osarullid) oleks minimaalne?

Kõigepealt selgitame, mitmel viisil on 1,5 m laiust rulli võimalik lõigata soovitud lai-

Tabel 24.

Lõikamisviis	1	2	3	4	5	6
	Osarullid					
70	2	1	1	-	-	-
60	-	1	-	2	1	-
45	-	-	1	-	2	3
Jääk	10	20	35	30	0	15

sega osarullideks.

Tabelist 24 näeme, et kõige parem on 5. lõikamisviis: saame ühe 60 ja kaks 45 cm laiust osarulli ning ülejääki ei ole. Et täita sordimendinõuet, tuleb aga ilmselt kasutada ka mõnda teist lõikamisviisi.

Ülesande lahendamiseks valime kõigepealt otsitavad:

x_1 rulli lõikame katki i -ndal viisil, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Et 70 cm laiusi osarulle on vaja 100 tk, siis saame võrrandi

$$100 = 2x_1 + x_2 + x_3.$$

Analoogiliselt saame 60 ja 45 cm laiuste osarullide jaoks võrrandid

$$150 = x_2 + 2x_4 + x_5,$$

$$90 = x_3 + 2x_5 + 3x_6.$$

Ülejääkide kogulaius cm-tes

$$z^* = 10x_1 + 20x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 15x_6.$$

Seega tuleb

leida niisugused mittenegatiivsed täisarvud x_i , $i = 1, \dots, 6$,

et

$$\begin{cases} 100 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 150 = x_2 + 2x_4 + x_5 \\ 90 = x_3 + 2x_5 + 3x_6 \end{cases}$$

ja et $z^* = z_{\min}^*$, kus

$$z^* = 10x_1 + 20x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 15x_6.$$

Jagades võrrandisüsteemi esimest ja teist võrrandit 2-ga ja kolmandat 3-ga, saame läbi ilma kunstlike tundmatute lisamiseta:

$$\begin{cases} 50 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ 75 = \frac{1}{2}x_2 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ 30 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_5 + x_6 \end{cases}$$

Tahistame $z = -z^*$ ja koostame simplekstabelid.

Tabel 25.

c_k			- 10	- 30	- 15	- 20	- 35	0
	Prog- ramm	P_0	P_1	P_4	P_6	P_2	P_3	P_5
- 10	P_1	50	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
- 30	P_4	75	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
← - 15	P_6	30	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$z_k - c_k$	- 3200	0	0	0	0	+ 25	- 25

II opt.

← - 10	P_1	50	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
- 30	P_4	$\frac{105}{2}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
→ 0	P_5	45	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
	z_{\max}	- 2075	0	0	$\frac{75}{2}$	0	$\frac{75}{2}$	0

III alt. opt.

→ - 20	P_2	100	2	0	0	1	1	0
- 30	P_4	$\frac{5}{2}$	- 1	1	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0
0	P_5	45	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
	z_{\max}	- 2075	0	0	$\frac{75}{2}$	0	$\frac{75}{2}$	0

b) Tabelitest 25, II ja III saame kaks optimaalset programmi, mille põhjal võime koostada optimaalse üldprogrammi:

Tabel 26.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z_{\min}^*
→ x^1	50	0	0	$\frac{105}{2}$	45	0	2075
→ x^2	0	100	0	$\frac{5}{2}$	45	0	2075
→ x^{γ}	50γ	$100 - 100\gamma$	0	$\frac{5}{2} + 50\gamma$	45	0	2075

Programmides \vec{x}^1 ja \vec{x}^2 on neljas koordinaat murruline. Üldprogrammis \vec{x}^r oleks võimalik valida $0 \leq r \leq 1$ nii, et $\frac{5}{2} + 50r$ oleks täisarv. Selleks peab $50r$ olema $\frac{1}{2}$ paaritu- arvuline kordne, siis aga on \vec{x}^r esimene koordinaat murruline. Seega ei ole vaadeldavale ülesandele võimalik leida täisarvu- liste koordinaatidega programmi, mille puhul $z^* = 2075$.

Vastuse saamiseks tuleb võtta mingi optimaalne programm ja seda ümardada ülespoole. Näiteks \vec{x}^1 -st saame

$$x_1 = 50; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 53; \quad x_5 = 45; \quad x_6 = 0,$$

siis z^* väärtuse saamiseks tuleb z^* min-le liita ümardamisel lisatud $\frac{1}{2}$ rulli laius ehk 75 cm, seega ülejääk $z^* = 2150$ cm.

Programmi \vec{x}^2 ümardades saame z^* jaoks samuti 2150 cm.

25. Tööstusharude seosed.

a) Vaatleme masinatööstuse, kergetööstuse, energiatööstuse ja muude tööstusharude seoseid ühe aasta jooksul. Nummerdame need tööstusharud selles järjekorras, $i = 1, 2, 3, 4$. Tähistame x_{ij} rbl. i -nda tööstusharu toodangust seda osa, mida kasutab j -s tööstusharu aasta jooksul, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Iga tööstusharu aastatoodangu tähistame x_i rbl. Edasi tähistame y_i muud nõudmised (laiatarbekaubad, eksport jne.) i -nda tööstusharu toodangule rublades.

Oletades, et kogu aastatoodang jaotatakse tööstusharude ja muude nõudjate vahel, saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + y_1 = x_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + y_2 = x_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + y_3 = x_3 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + y_4 = x_4 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} x_1 - x_{11} - x_{12} - x_{13} - x_{14} = y_1 \\ x_2 - x_{21} - x_{22} - x_{23} - x_{24} = y_2 \\ x_3 - x_{31} - x_{32} - x_{33} - x_{34} = y_3 \\ x_4 - x_{41} - x_{42} - x_{43} - x_{44} = y_4. \end{cases} \quad (1)$$

Olgu teada, et eelmistel aastatel kulus j -nda tööstusharu toodangu iga rubla kohta j -nda tööstusharu toodangut a_{1j} rubla eest. Seega võib eeldada, et ka sellel aastal

$$a_{1j} = \frac{x_{1j}}{x_j}$$

ehk

$$x_{1j} = a_{1j} x_j, \quad 1, j = 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

Asendame leitud avaldised võrrandisüsteemi (1), saame

$$\begin{cases} x_1 - a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - a_{14} x_4 = y_1 \\ x_2 - a_{21} x_1 - a_{22} x_2 - a_{23} x_3 - a_{24} x_4 = y_2 \\ x_3 - a_{31} x_1 - a_{32} x_2 - a_{33} x_3 - a_{34} x_4 = y_3 \\ x_4 - a_{41} x_1 - a_{42} x_2 - a_{43} x_3 - a_{44} x_4 = y_4 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - a_{14} x_4 = y_1 \\ - a_{21} x_1 + (1 - a_{22})x_2 - a_{23} x_3 - a_{24} x_4 = y_2 \\ - a_{31} x_1 - a_{32} x_2 + (1 - a_{33})x_3 - a_{34} x_4 = y_3 \\ - a_{41} x_1 - a_{42} x_2 - a_{43} x_3 + (1 - a_{44})x_4 = y_4. \end{cases} \quad (3)$$

Kui võrrandisüsteemi (3) vabaliikmed y_1, y_2, y_3, y_4 on ette teada, siis tuleb lahendada neljast nelja tundmatuga lineaarvõrrandist koosnev süsteem. Saadav lahend x_1, x_2, x_3, x_4 annab loeteldud tööstusharude aastatoodangu plaanid rublades, valemitest (2) saame siis arvutada tööstusharude seoseid määravad arvud x_{1j} rubla.

Näide 39. Olgu teada koefitsiendid a_{ij} ja y_i :

Tabel 27.

tööstusharu	a_{ij}	1	2	3	4	y_i
masinatööstus	1	0,10	0,20	0,20	0,25	$2 \cdot 10^6$
kergetööstus	2	0,05	0,20	0,02	0,10	$10 \cdot 10^6$
energiatööstus	3	0,30	0,10	0,05	0,20	$0,5 \cdot 10^6$
muud	4	0,15	0,10	0,10	0,15	$1 \cdot 10^6$

Võrrandisüsteem (3) omab kuju:

$$\begin{cases} 0,90x_1 - 0,20x_2 - 0,20x_3 - 0,25x_4 = 2\,000\,000 \\ -0,05x_1 + 0,80x_2 - 0,02x_3 - 0,10x_4 = 10\,000\,000 \\ -0,30x_1 - 0,10x_2 + 0,95x_3 - 0,20x_4 = 500\,000 \\ -0,15x_1 - 0,10x_2 - 0,10x_3 + 0,85x_4 = 1\,000\,000 \end{cases}$$

ehk (kopikatele üle minnes)

$$\begin{cases} 90x_1 - 20x_2 - 20x_3 - 25x_4 = 200\,000\,000 \\ -5x_1 + 80x_2 - 2x_3 - 10x_4 = 1\,000\,000\,000 \\ -30x_1 - 10x_2 + 95x_3 - 20x_4 = 50\,000\,000 \\ -15x_1 - 10x_2 - 10x_3 + 85x_4 = 100\,000\,000. \end{cases}$$

Lahendame selle võrrandisüsteemi täieliku eliminatsiooni meetodil:

I

Tabel 23.

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
200 $\cdot 10^6$	90	-20	-20	-25
← 1000 $\cdot 10^6$	-5	30	-2	(-10)
50 $\cdot 10^6$	-30	-10	95	-20
100 $\cdot 10^6$	-15	-10	-10	95

II

-2300 $\cdot 10^6$	102,5	-220	-15	0
→ -100 $\cdot 10^6$	0,5	-8	0,2	1
← -1950 $\cdot 10^6$	(-20)	-170	99	0
3600 $\cdot 10^6$	-57,5	670	-27	0

III

-12293,75 $\cdot 10^6$	0	-1091,25	492,375	0
-148,75 $\cdot 10^6$	0	-12,25	2,675	1
→ 97,5 $\cdot 10^6$	1	8,5	-4,95	0
← 14206,25 $\cdot 10^6$	0	1158,75	(-311,625)	0

IV

← 10152,47 $\cdot 10^6$	0	(739,602)	0	0
-26,80305 $\cdot 10^6$	0	-2,30325	0	1
-128,15894 $\cdot 10^6$	1	-9,90614	0	0
→ -45,58765 $\cdot 10^6$	0	-3,71841	1	0

V

→ 13,72693 $\cdot 10^6$	0	1	0	0
4,91350 $\cdot 10^6$	0	0	0	1
7,82201 $\cdot 10^6$	1	0	0	0
5,45470 $\cdot 10^6$	0	0	1	0

Arvutame veel x_{ij} valemite (2) põhjal. Saadud vastuse koondame tabelisse 28.

Tabel 28.

i	S e o s e d	Kogu- toodangut x_i	Muudeks nõudmisteks y_i	Masina- tööstusele x_{i1}	Kerge- tööstusele x_{i2}	Energia- tööstusele x_{i3}	Muudele x_{i4}
1	Masinatööstuselt	7 822 000	2 000 000	782 000	2 745 000	1 091 000	1 204 000
2	Kergetööstuselt	13 727 000	10 000 000	391 000	2 745 000	109 000	482 000
3	Energiatööstuselt	5 455 000	500 000	2 346 000	1 373 000	273 000	963 000
4	Muudelt	4 814 000	1 000 000	1 173 000	1 373 000	546 000	722 000

S.t. et näiteks masinatööstuse kogutoodang peab olema 7 822 000 rbl. aastas, mis tuleb jaotada järgmiselt:

782 000 rbl. masinatööstusele,
 2 745 000 rbl. kergetööstusele,
 1 091 000 rbl. energiatööstusele,
 1 204 000 rbl. muudele tööstusharudele,
 2 000 000 rbl. muude nõudmiste rahuldamiseks.

Analoogiliselt võime tabelist 29 välja lugeda kergetööstuse j.t. kogutoodangu jaotuse.

b) Eelmises punktis lahendatud ülesanne ei ole LP ülesanne. Muudame näite 39 ülesannet nii, et saame LP ülesande.

Näide 40. Olgu koefitsiendid a_{ij} samad, mis näites 39. y_1 ärgu olgu teada, vaid otsitavad. Selle asemel olgu aga teada, et vaadeldavate tööstusharude aastatoodangud ei tohi ületada vastavalt 10 miljonit, 12 miljonit, 7 miljonit või 5 miljonit rbl. Ülesandeks on leida tööstusharude aastatoodangud x_1, x_2, x_3, x_4 rbl. nii, et nad rahuldaksid võrrandi-süsteemi (3), eespool loeteldud kitsendusi ja teeksid masinatööstuse ja energiatööstuse kogutoodangu maksimaalseks.

Ülesannet matemaatiliselt formuleerides saame:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -90x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 100y_1 \\ 0 = 5x_1 - 80x_2 + 2x_3 + 10x_4 + 100y_2 \\ 0 = 30x_1 + 10x_2 - 95x_3 + 20x_4 + 100y_3 \\ 0 = 15x_1 + 10x_2 + 10x_3 - 85x_4 + 100y_4 \\ 10 \cdot 10^6 \geq x_1 \\ 12 \cdot 10^6 \geq x_2 \\ 7 \cdot 10^6 \geq x_3 \\ 5 \cdot 10^6 \geq x_4 \end{array} \right.$$

ja

$$z = x_1 + x_3, \quad z_{\max} = ?$$

(Edasises arvutuses on sobiv tähistada

$$y_1 = x_5, \quad y_2 = x_6, \quad y_3 = x_7, \quad y_4 = x_8.)$$

Järgneva töö ülesande lahendamisel jätkame üliõpilastele endile teha.

26. Transportülesanne.

a) Näites 31 formuleeritud LP ülesanne erineb teistest vaadeldud LP ülesannetest võrrandisüsteemi lihtsuse ja korrapärasuse poolest - kõik kordajad on ühed või nullid, kusjuures ühed paiknevad silmnähtavalt seaduspäraselt, ainult vabaliikmeid ja funktsiooni z kordajad on ühest suuremad. Loeteldud asjaolud võimaldavad niisuguste nn. transportülesannete lahendamiseks kasutada simpleksmeetodi lihtsamat, nende ülesannete jaoks kohandatud varianti.

b) Andmete tabuleerimine. Transportülesande lahendamiseks ei ole tarvis koostada võrrandisüsteemi ega z avaldist, tuleb ainult andmed korrastada tabelisse järgmisel viisil:

tabeli peasse vasakule servale kirjutame tootjate võimalused või laoseisud, üles aga tarbijate nõudmised;

kui osutub, et laoseisude summa erineb tarbijate nõudmiste summast, tuleb väiksemale neist arvudest liita puuduv kogus fiktiivse lao või tarbija abil;

tabeli ruudud jaotame diagonaalidega pooleks, ülemistesse pooltesse kirjutame andmed, s.t. kaugused vastavast laost vastava tarbijani (kilomeetrites) või veokulud vastavast laost vastava tarbijani (rubla ees tonni kohta), alumised pooled jäävad otsitavate jaoks, s.t. vastavast laost vastavale tarbijale vedada tuleva koguse jaoks (tonnides).

N ä i d e 41. Koostame näites 31 toodud transportülesande lahendamiseks tabeli eespool kirjeldatud viisil.

Tabel 30.

Tarbija \ Ladu	220	350	250	410	1230
300	2,3	2,7	1,6	1,8	
400	1,2	1,7	2,0	5,1	
530	2,2	2,8	1,2	3,2	
1230					

c) Algprogrammi koostamine. Transportülesandes on tarvis jaotada kogu ladudes olev ühetaoline kaup tarbijate vahel nii, et viimaste kõigi nõudmised oleksid täidetud ja et sealjuures tonn-kilomeetrite arv või veokulud oleksid minimaalsed.

Nagu ikka simpleksmeetodi puhul, tuleb ülesande lahendamist alustada algprogrammi koostamisega. Transportülesande puhul on vahadus suur - algprogrammiks sobib peagu iga programm, mis garanteerib tarbijate nõudmiste täitmise ladudes oleva kaubaga. Seetõttu on transportülesande algprogrammi koostamiseks palju võtteid, anname neist ühe:

valime tabelist ühe kõige väiksema kilomeetrite arvul sellel marsruudil toimugu võimalikul suur vedu, veomarsruudi tähistame rõngaga ümber selle kilomeetrite arvu ja vedada tuleva koguse kirjutame selle ruudu alumise poolde, vastavast laoseisust ja vastavast tarbija nõudmisest lahutame selle koguse;

kui sellesse lattu jäi veel kaupa, jaotame selle järjest kaugemate tarbijate vahel;

kui juhtub, et ladu saab tühjaks ja samaaegselt saab mingi tarbija nõudmine täiesti täidetud, tuleb sellest laost teha üks tühivedu mingil seni rõngaga märkimata marsruudil;

et asi valime tabelist ühe kõige väiksema kilomeetrite arvu, millele vastavast laost pole veel veetud ja millele vastava tarbija nõudmised ei ole veel täiesti täidetud;

jätkame nagu algul jne. kuni kõik laod on tühjad ja kõik tarbijad rahuldatud, sealjuures ei ole vaja viimase laod tühjendamise järel enam teha tühivedu;

kui ladusid on m ja tarbijaid n , siis veomarsruute (koos lisatud tühivedudega) peab tulema täpselt $m + n - 1$;

lõpuks arvutame saadud algprogrammile vastava tonn-kilomeetrite arvu või veokulu (s.o. z väärtuse) liites tabeli igas ruudus oleva kahe arvu korrutised (tühi koht tähendab nulli), tulemuse määrgime tabeli alumisse parempoolsesse nurka.

Näide 42. Tabelis 30 tuleb alustada ühest marsruudist, kus tonni vedu maksab 1,2 rbl., näiteks marsruudist, mis viib teisest laost esimese tarbija juurde. Talitades eespool toodud reeglite järgi saame näites 31 püstitatud transportülesandele algprogrammi, mille puhul veokulud on 2238 rbl.

Tabel 31.

Tarbija		170	250	300
Ladu		0	0	0
	200	2,3	1,3	1,8
	300	2,7	2,0	5,1
	180	1,2	1,2	3,2
	400	2,2	2,8	1,1
	110	220	180	170
	280			250
	530			110

2238

d) Simplekskriteerium. Et otsustada, kas leitud algprogramm on parim või mitte, rakendame simplekskriteeriumi transportülesandele kohandatud kujul:

teisendame algprogrammi tabelis kõik rõngastes asetsevad arvud nulliks liites ruutude üllemistest pooltest koosnevatele ridadele ja veergudele sobivalt valitud arve;

kui pärast seda teisendust tabelis ei ole ühtegi negatiivset arvu, siis on see programm optimaalne, s.t. vastav z väärtus minimaalne;

kui aga tabelis leidub negatiivseid arve, siis programm ei ole veel optimaalne ning järgnevalt tuleb seda parandada.

N ä i d e 43. Et teisendada tabelis 31 kõik rõngastes seisvad arvud nulliks, liidame kolmanda rea kõigile arvudele $-2,8$; siis tekivad arvude $1,2$ ja $3,2$ asemele arvud $-1,6$ ja $0,4$; viimaste arvude nulliks teisendamine toimub kolmanda veeru arvudele $1,6$ ja neljanda veeru arvudele $-0,4$ liitmisega; viimase teisenduse tulemusena tekib arvu $1,8$ kohale $1,4$, mida teisendame nulliks esimesele reale sobivat arvu liites jne. Teisendusteks vajalikud arvud kirjutame tabeli 32 härrtele. Tabelis 33 on tulemus, mis ütleb, et algprogrammi tuleb parandada.

Tabel 32.

2,3	2,7	1,6	(1,8)	-1,4
(1,2)	(1,7)	2,0	5,1	-1,7
2,2	(2,8)	(1,2)	(3,2)	-2,8
0,5		1,6	-0,4	

Tabel 33.

1,4	1,3	0,2	0	
0	0	1,9	3,0	
-0,1	0	0	0	

e) Parema programmi koostamine. Algprogrammist uue parema programmi saamiseks

moodustame kinnise ahela lähtudes kõige väiksemast negatiivsest arvust, liikudes päripäeva vaheldumisi horisontaalselt ja vertikaalselt ja pöörates rõngaste kohal;

kõik ahela pöördepunktid nummerdame alustades negatiivsest arvust, paarisarvulise järjekorranumbriga ruutudest leiame väikseima kaubakoguse, seda kogust nihutame ahelat mööda edasi liites teda paarisarvulistesse ruutudesse ja lahutades paarisarvulistest ruutudest; sealjuures paigutame rõnga nulliks muutunud koguse juurest nullist erinevaks muutunud koguse juurde;

õõasi otsustame simplekscrüteeriumi abil, kas saadud uus programm on optimaalne või vajab veel parandamist;

jne.

N ä i d e 44. Moodustame tabelis 33 kinnise ahela ja nihutame vajalikku kogust mööda ahelat edasi. Saame

tabeli 34.

1,4	1,3	0,2	0	
			300	
		1,9	3,0	-0,1
0	0	0	0	
170	170	250	110	
0,1	0,1			

Teisendame nüüd tabelis 34 kõik rõngas olevad arvud nullideks. Tabeli 35 põhjal võime öelda, et optimaalne programm on käes.

Tabel 35.

1,5	1,4	0,2	0
0	0	1,8	2,9
50	350		
0	0,1	0	0
170		250	110
			300

f) Vastuse koostamine. TransportÜlesande vastuseks kirjutame lähtetabelist ümber kilomeetrid või ühe tonni veokulud ja viimasest tabelist kogused koos marsruudi tähisega (rõngaga). Saadud tabelis teeme juhuslike vigade avastamiseks kontrolli liites kogused ridade ja veergude kaupa ning võrreldes neid lähtetabelist võetud laoseisudega ja tarbijate nõudmistega. Edasi arvutame sellest tabelist z_{\min} , s.t. minimaalse tonn-kilomeetrite arvu või minimaalsed veokulud, nagu me lähtetabelist arvutame z väärtuse.

N ä i d e 45 . Koostame näites 31 püstitatud ülesandele nüüd vastuse kasutades tabeleid 30 ja 35.

Tabel 36.

	Tarbiija				
Ladu		220	350	250	410
		2,3	2,7	1,6	1,8
300					300
		1,2	1,7	2,0	5,1
400		50	350		
		2,2	2,8	1,2	3,2
530		170		250	110

2221

Vastuse võime sõnastada järgmiselt:

kui võtada

esimesest	laost neljandale	tarbijale	300 t	briketti,
teisest	"	esimesele	50 t	" ,
"	"	teisele	350 t	" ,
kolmandast	"	esimesele	170 t	" ,
"	"	kolmandale	250 t	" ,
"	"	neljandale	110 t	" ,

siis on kõik laod tühjad, kõik tarbijad rahuldatud ja sealjuures läbi saadud minimaalse arvu tonn-kilomeetritega, nimelt 2221 tonn-kilomeetriga.

N ä i d e 46 . Lahendame transportülesande: kolmest elevaatorist veetakse kolme leivakombinaati nisu; antud on elevaatorites olevad nisukogused, leivakombinaatide nõudmised tuhandetes tonnides ning veokulud tuhandetes rublades tuhande tonni kohta; nõutakse organiseerida veod minimaalsete kuludega.

Tabel 37.

Kombinaat				
Elevaator	45	60	10	115
55	3	5	1	
50	2	4	3	
35	4	3	6	
140				

Et elevaatorites on nisu kokku 140 ühikut, kombinaadid nõuavad aga kokku ainult 115 ühikut, siis tuleb kasutada fiktiivset tarbijat, kelle nõudmine on 25 000 tonni nisu. Fiktiivsele tarbijale veod tegelikult ei toimu, seepärast on sinna veokulud nullid:

Kombinaat Elevaator	45	60	10	fikt. 25	140
55	3	5	1	0	
50	2	4	3	0	
35	4	3	6	0	
140					

Koostame nüüd algprogrammi, kusjuures fiktiivse tarbija rahuldame viimases järjekorras. Alustame veoga esimesest elevaatorist kolmandasse kombinaati, siis esimesse - sellega on elevaatorist nisu otsas ja samal ajal esimese kombinaadi nõudmised rahuldatud, järelkult tuleb määrata üks tühivevu, näiteks teise kombinaati. Edasi jactame nisu ülejäänud elevaatoritest ja arvutame veokulud. Kontrolli teeme muidugi ka. Siis leiame nulliksteisendamiseks vajalikud arvud, alustades teise veeru viimasest arvust.

Kombinaat Elevaator	0 45	0 10 60	0 10	fikt. 0 25	
0 48 58	(3)	(5)	(1)	0	-2
0 50	2	(4)	3	0	-1
0 28 38	4	(3)	6	(0)	
	-1	-3	1		375

Teisendame nüüd eelmises tabelis kõik rõngas olevad arvud nullideks, saame

0	C	0	-2
45	0	10	
0	C	3	-1
	50		
3	C	7	C
	10		25

Järelikult tuleb programmi parandada:

C	C IV	0	-2		2
45	0	10	I	0	
0	C	3	-1		
	50				
3	0	7	0		
	III	10	II	25	
-2		-2			

ohk pärast teisendust

0	2	0	0
45		10	0
-2	0	1	-1
	50		
1	0	5	0
	10		25

Seega tuleb ka seda programmi veel parandada:

0	2	0	0	III	
II	20 45		10	25 0	
-2	0	VI	1	-1	2
I	25	25 50			
1	0	V	5	0	IV
		35 10		0 25	2
	-2				

ehk pärast teisendust

0	0	0	0
20		10	25
0	0	3	1
25	25		
3	0	7	2
	35		

Oleme saanudki optimaalse programmi:

Kombi- naat Ele- vaator	45	60	10	fikt. 25
55	3	5	1	0
	20		10	25
50	2	4	3	0
	25	25		
35	4	3	6	0
		35		

325

Kuid osutub, et see ei ole ainus programm, mis võimaldab kõik kombinatsioonid varustada nisuga minimaalsete veokuludega, s.t. 325000 rubla eest. Tõepoolest, moodustades üleelmises tabelis kinnise ahela lähtudes ilma rõngata nullist, saame uue programmi:

\odot IV	\odot I	\odot	\odot
0 20	20	10	25
\odot III	\odot II	3	1
45 25	5 25		
3	\odot	7	2
	35		

mis on ilmselt ka optimaalne. Seega ka

Kombi- naat Ele- vaator	45	60	10	fikt. 25
55	3	\odot 5	\odot 1	\odot 0
50	\odot 2	\odot 4	3	\odot 0
35	4	\odot 3	6	\odot 0
		35		

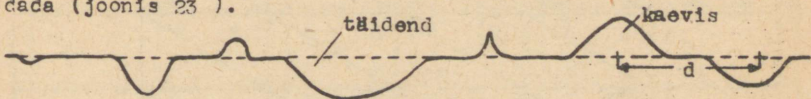
325

Saime ülesandele kaks optimaalset programmi, järeltõlku on sellel transportülesandel (kui LP ülesandel) lõpmata palju optimaalseid programme, mis esitame optimaalse üldprogrammi näol tabelis (x_{1j} tähendus analoogiline näites 31 tooduga):

Prog- ramm	x_{11}	x_{12}	x_{13}	fikt. x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	fikt. x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	fikt. x_{34}	z
I opt.	20	0	10	25	25	25	0	0	0	35	0	0	325
II opt.	0	20	10	25	45	5	0	0	0	35	0	0	325
opt. üld. $0 \leq f \leq 1$	20	20- 20	10	25	45- 20	5+ 20	0	0	0	35	0	0	325

N ä i d e 47. Viimaseks lahendamise transportülesande, kus kõiki nõudmisi ei ole võimalik rahuldada (fiktiivne laenu), kuid ühe tarbija nõudmised on ilmtingimata vaja täita.

Kaantee muldkeha togemisel on tarvis tee pikiprofiili tasandada (joonis 23).



Joon. 23

Selleks veetakse pinnas isekallutajatega kaevistest täidenditesse. Teada on kolmest kaevisest saadaolevad ja nelja täidendisse tarvisminevad pinnasekogused mõõdetuna sadades isekaalutajakoormates, samuti kaugused kaeviste ja täidendite vahel kilomeetrites (tabel 39).

Tabel 39.

Täi- kae- vis \ Täi- dend	70	40	50	20	180
30	6	8	7	5	
40	4	3	5	2	
30	5	2	6	2	
100					

Et kaevistes on 8000 koorma võrra vähem pinnast kui kõigi täiendite jaoks vaja, siis kasutame lahendamisel fiktiivset kaevist mahuga 8000 koormat.

Nõutakse vedada kogu pinnas kaevistest täienditesse minimaalse arvu koorem-kilomeetritega, kusjuures kolmas täiend tuleb tingimata täita. Viimase tingimuse täitmiseks võtame fiktiivse kaevise ja kolmanda täiendini vaheliseks kauguseks M km, kus $M > 0$ on väga suur arv. Analooiliselt toimeksime ka varem simplekmeetodil LP ülesandeid lahendades (vt. §17).

Ülesande lahendus on järgmine:

I

Tabel 40 .

Täi- Kae- vis	0 60 70	0 10 40	0 20 50	0 20	180
0 30	6	8	7	5	M-7
10 20 0 40	4	3	5	2	-4
0 30	5	2	6	2	-3
fikt. 0 20 20	0	0	M	0	
180		1	-M	2	380 + + 20M

II

	M-1	M+2	0	M	
			30		
	0	0	1-M	0	M-1
	2	0	3-M	1	M-1
		30			
	0	1	0	2	
	70 60		10 20		
		1 - M		1 - M	

III

	M-1	3	0	1	
			30		
	M-1	0	0	0	
		0	20	20	
		10	10		
	M+1	0	2	1	
			30.		
	0	2-M	0	3-M	
		I	IV		M-2
	70	10	0	10	
	2-M				

IV opt.

	1	3	0	1	
			30		
	1	0	0	0	
		0	20	20	
	3	0	2	1	
			30		
	0	0	M-2	1	
	70	10			

V vāstus

	70	40	50	20	180
	6	8	7	5	
30			30		
40	4	3	5	2	
		0	20	20	
30	5	2	6	2	
		30			
fikt.	0	0	M	0	
80	70	10			
180					410

Tabelist 40 , V loeme välja järgmise vastuse:

kui vedada

esimesest kaevise	kolmandasse	täidendisse	3000	koormat,
teisest	"	"	2000	" ,
"	"	neljandasse	2000	" ,
kolmandast	"	teise	3000	" ,

siis on kõik kaevised tühjad, kolmas täidend täis ja sealjuures tehtud minimaalne arv koorem-kilomeetreid, nimelt 41 000 koorem-kilomeetrit.

Soovitav oleks veel lisaks arvutada minimaalne koorem-kilomeetrite arv sel juhul, kui kolmanda täidendi täitmise nõuet ei ole. Saadavat tulemust on huvitav võrrelda siinlehtuga.

S i s u k o r d

8. Näiteid lineaarprogrammeerimise ülesannetest	3
9. Lineaarprogrammeerimise ülesanne (üldjuhtum)	10
10. Lineaarprogrammeerimise ülesannete graafilise lahendamise	12
11. Simpleksmeetod	22
b) Algprogrammi moodustamine	22
d) Simplekskriteerium ja juhtveeru valiku reegel	27
e) Simpleksmeetodi skeem	29
f) $z_k - c_k$ arvutamine uue tabeli jaoks	30
12. Maksimaalse kogutoodangu ülesande lahendamise simpleksmeetodil	32
a) Vardatsehh	32
b) Maksimaalse kogutoodangu ülesanne	32
c) Algprogrammi leidmine	33
d) Esimese simplekstabeli koostamine	34
e) Simplekskriteeriumi rakendamine	35
f) Juhtveeru valimine	35
g) Juhtree valimine	35
h) II simplekstabeli arvutamine	36
i) Simplekskriteeriumi rakendamine	36
j) Vastus	37
13. Seadmete maksimaalse koormamise ülesande lahendamise simpleksmeetodil	38
14. Maksimaalse kasumi ülesande lahendamise simpleksmeetodil	40

Hind 22 kop.

A-24758

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00445473 4