TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

U. Kaljulaid

DISKREETSE MATEMAATIKA ELEMENDID

1983

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Algebra ja geomeetria kateeder

U.Kaljulaid

DISKREETSE MATEMAATIKA ELEMENDID

Loenguid võredest ja nende kombinatoorikast

Eesti NSV Kõrg- ja Keskerihariduse Ministeerium lubab kasutada kõrgkoolis õppevahendina matemaatikateaduskonna erialadel

TARTU 1983

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus 21. jaanuaril 1983.a.

SISUKORD

Eessõna

Kombinatoorika e. kombinatoorne analüüs on matemaatikaharu, mis käsitleb elementide paiknemist hulkades, eeskätt lõplike hulkade elementidest moodustatud ühendeid (ENE määratlus). Samalaadse lühiselgitusega algab ka loengukursus [2]. Kasutatava tehnika vaatevinklist tõlgendatakse kombinatoorset analüüsi üsna tihti kui valdkonda, mis on peaaegu täienisti seotud genereerivate funktsioonide kasutamisega mitmesuguste lõpliku iseloomuga ülesannete lahendamisel (näiteks [12]). Laiemalt on kombinatoorika ainet ja ülesandeid püütud määratleda raamatu [15] eessõnas, eriti põhjalikult aga toreda õpiku [6] eessõnas.

Kombinatoorika-alane temaatika on vanimaid matemaatikas. Ja alati on ülesannete mõtestamine ja lahendamine selles valdkonnas tähendanud eri asju erinevatele inimestele sõltuvalt nende eesmärkidest ja ettevalmistusest. Kombinatoorse iseloomuga probleemid on kerkinud ja kerkivad igas teadusharus, ka neis, mis matemaatika abi esialgu vähe või pealiskaudselt kasutavad. Kuid eraldiseisvate (kuigi tähtsate) ülesannete lahendamiseks loodud skeemid kaotavad kiiresti arenguvõime ning nende põhjendus jääb empiirilise selgituse tasemele, kui puuduvad ühendavad kontseptsioonid ja tehnika, kui puudub seos matemaatika põhistruktuuride ja juhtprobleemidega. Sellest, aga mitte niivõrd kombinatoorika noorusest - temaga tegeldakse intensiivselt Leibnizi-aegadest - on tingitud üsna mitmete väljapaistvate matemaatikute tagasihoidlik suhtumine: tunnistatakse kombinatoorika vajalikkust ning probleemide huvitavust ja raskust, kuid eitatakse selle valdkonna süstemaatilisust ja sügavust.

Viimaseil aastakümneil on huvi kombinatoorika vastu suuresti tõusnud. Leidub märke, et ta on kasvamas matemaatiliste teooriate ansambliks. Kujunemas on lähedaste rakendussituatsioonide ühtne käsitlus. Igas konkreetses ülesandes jääb muidugi vajadus sobiva tõlgenduse ja sügavate, asja olemusest tulenevate kaalutluste järele, sest ilma nendeta ei anna ükski teooria soovitud resultaati. Olukord on siin praegu mõneti sarnane situatsiooniga algebralises geomeetrias käesoleva sajandi 40.-50.-ndail aastail, kui mitmed väljapaistvad matemaatikud (O.Zariski, A.Weil, J.-P.Serre) hakkasid rajama algebralise geomeetria üldisi aluseid ning otsima selleks sobivat abstraktset vormi.

Viljakaks ja isegi asendamatuks on kombinatoorika sellises arengus osutunud järjestuse ja võre mõisted, mis algselt leidsid kasutamist geomeetria alustes, seejärel algebras (vt. [1], [3], [10], [13], [14]). Järjestusrelatsioon loob silla ühelt poolt diskreetse matemaatika ülesannete ja teiselt poolt arvuteooria, (lineaar)algebra ja geomeetria vahendite vahel. See kergendab leida lahendusele viivat tehnikat ja annab käsitlusele piisava üldsuse. Seos arvuteooriaga on eriti märkimisväärne, sest diskreetse iseloomuga ülesannete lahendamisel on saadud tihti just matemaatika sellest kõrge arengutasemega valdkonnast juhtivad analoogiad ja meetodid. Liikuda sillal saab aga ka teises suunas - avardub arvuteooria mitmete probleemide mõistmine ning rikastuvad tema meetodid ([5]), samuti puhkevad ootamatult arengule ja uuenevad lineaaralgebra osad, mis levinud arvamuse järgi on vaid püsivaks koolitarkuseks tardunud (vt. [4] seoses matroididega). Selline vaatekoht on nüüd muutumas üsna populaarseks. Ergutust lisab lootus, et teoreetilise füüsika ja arvutiteaduse mitmed probleemid selginevad oluliselt, kui õnnestub luua kombinatoorse iseloomuga teooriad, mis ületavad diskreetse-pideva vastuolu paremini kui olemasolevad. Väärt on asjaolu, et nimetatud seose kaudu uut kasutust leidnud valdkondade oluline koht matemaatikas on meie maal olnud püsiv ja panus neisse fundamentaalne. Lisagem, et Moskva ülikoolis toimus 1981.aastal juba V üleliiduline kombinatoorika-alane konverents, millel muuhulgas esitati väljapaistev tulemus - G.P.Jegorõtšev NSVL TA Siberi Osakonna L.V.Kirenski nim. Füüsikainstituudist lahendas van der Waerdeni probleemi permanentidest.

Anda aimu vaatekohast ja seostest, mis kombinatoorika sellist arengut võimaldavad, oligi TRÜ-s rea aastate vältel autori poolt esitatud loengutsükli ülesanne. Seejuures oli loengukursuses [2] esitatu aluseks nii teemade valikul kui ka piiritlemisel, et saavutada loenguis õiget üleminekut kombinatoorika klassikalistelt ülesannetelt ja tehnikalt tema rohkem tänapäevaste osade juurde.

Käesolev konspekt kujutab endast nende loengute esimest osa, mida on laiendatud ja ümber töötatud. Lugejale püütakse anda võimalus õppida kaasaegse loendamisteooria aluseid - võrede keelt - suunates võreteooria üldisi kontseptsioone kombinatoorikas olulistele näidetele. Lineaaralgebra vahendeid kasutades antakse ühtne käsitlus paljudele kombinatoorikas tuntud arvudele. Konspekt on koostatud õppevahendina kasutamiseks TRÜ matemaatikateaduskonna üliõpilastele. Et aga õppekirjandus loendamisteooria kaasaegsetes küsimustes on vähene (vt. [4], ka [6]), siis võib käesolev, peamises perioodilistele väljaannetele tuginev materjal kujuneda huvipakkuvaks ka neile, kellel loendamisteooria meetodeid oma töös kasutada tuleb. Tundub oluline lisada, et arvudest ja nende omadustest siin näitena vaadeldu katab vaid väikese (kuigi ajalooliselt tähtsa) osa võimalustest, mis tulenevad vaatekoha üldsusest. Loengute teine osa (loendamisteooria üldine meetod ja rakendused ning seosed arvuteooriaga) ilmub eraldi väljaandena.

Loengutsükli mõtte algatas Ü. Kaasik ning see sai teoks tänu Ü. Lumiste stimuleerivale toetusele. Aastate vältel on muutunud nii loengute sisu kui vorm, muutumatuks on jäänud seos võrede ja Möbiuse inversiooniga, mis esmakordselt ilmus G.-C. Rota töödes ja ergutavates kirjades. Oluline on olnud J. Tapferi ja S. Langi efektiivne abi. Käsikirjale mõjus soodsalt V. Fljaišeri, K. Kaarli ja Ü. Kaasiku kriitika, käsikirja trükkis L. Juhansoo.

Kõigile neile autori siiras tänu!

11. mail 1982.a.

§ 1. JÄRJESTATUD HULGAD

1.1. Olgu antud hulgad P ja Q. Anda binaarne seos e. relatsioon $\rho=\rho(P,Q)$ (hulkade P ja Q elementide vahel) tähendab fikseerida teatav alamhulk ρ hulkade P ja Q korrutises $P\times Q$; erijuhul P=Q räägitakse binaarsest seosest hulgal P. Asjaolu, et $(x,y)\in\rho$, tähistatakse ka $x\rho y$. Näiteks iga funktsiooni $f:P\to Q$ võib tõlgendada binaarse seosena $\rho_f=\{(x,y)\in P\times Q \mid f(x)=y\}$. Või näiteks juhul P=Q=R (R - reaalarvud) määrab binaarne seos $\rho=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\leq 25\}$ ringi raadiusega 5 ja keskpunktiga koordinaatide alguspunktis. Kaht liiki binaarsed seosed leiavad eriti tihti kasutamist matemaatikas. Nendeks on ekvivalents (refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne seos) ja järjestus (refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne seos). Järgnevas on hulk sellel fikseeritud järjestusseosega põhimõisteks.

Definitsioon. Öeldakse, et *hulk P on järjestatud* (lühidalt ka, et P on *o-hulk*), kui temal on antud (fikseeritud) mingi binaarne seos ρ, mis rahuldab nõudeid

O1. $\forall x\in P,\ x\rho x$ (refleksiivsus),

O2. $x\rho y\ \&\ y\rho x \Rightarrow x=y$ (antisümmeetria),

O3. $x\rho y\ \&\ y\rho z \Rightarrow x\rho z$ (transitiivsus).

Märgime lahkuminekut üsna levinud terminoloogiast, kus relatsiooni ρ omadustega O1-O3 nimetatakse osaliseks järjestuseks. Käesolevas käsitluses on otstarbekas loobuda täiendsõnast "osaline" ja lisada täiendsõnu teistel vajalikel juhtudel (näit. lineaarne järjestus jms.). Ühel ja samal hulgal P võivad olla korraga antud mitmed huvitavad järjestusseosed ρ, σ, ... (vt. näiteid (2) ja (3) allpool). Juhul, kui hulgal P vaadeldakse korraga vaid üht järjestusseost, siis tähistatakse seda tavaliselt $\leq$. Seejuures $a\leq b$ loetakse "a on väiksem-võrdne kui b", ehk "a eelneb b-le". Sedasama tähendab ka $b\geq a$, mida loetakse "b on suurem-võrdne kui a", ehk "b järgneb a-le". Kui $a\leq b$ ja $a\neq b$, siis kirjutame ka $a<b$ ning loeme, et "a eelneb

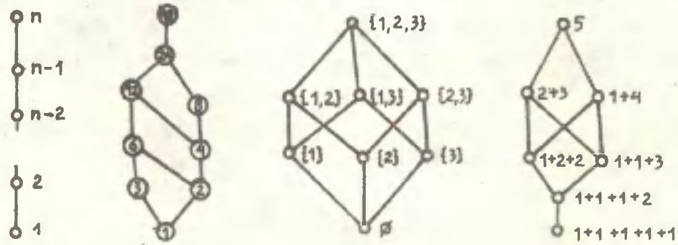
rangelt b-le".

Öeldakse, et *element b katab elementi a*, kui element b rangelt järgneb elemendile a (s.o. $b>a$) ja ei leidu $x\in P$ sellist, et $b>x>a$. See mõiste võimaldab lõpliku o-hulgaga P siduda orienteeritud graafi H(P), o-hulga P *diagrammi*, mille tippudeks tuleb lugeda hulga P elemente ja servadeks neid järjestatud paare (x,y), kus x katab elementi y. Joonisel tähistatakse väikeste ringikestega H(P) tippe ning $x>y$ korral elementi x esindav ringikene asetatakse kõrgemale kui elementi y esindav ringikene.

<u>1.2</u>. <u>Näiteid o-hulkadest</u>. (1) Täisarvud $\mathbb{Z}$ tavalise järjestusega, s.o. $(a\geq b)\Leftrightarrow(a-b\geq 0)$. (2) Naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ ning selle lõplik alamhulk $\mathbf{n}=\{1,2,...,n\}$ neil fikseeritud tavalise järjestusega on o-hulkade näideteks. (3) Naturaalarvud $\mathbb{N}$ jaguvuse kaudu antud järjestusseosega: loeme $a\leq b$, kui arv a jagab arvu b (seda asjaolu tähistame $a|b$). (4) Olgu D_n arvu n, $n\in\mathbb{N}$, kõigi jagajate hulk; järjestuse hulgal D_n anname nagu eelmiseski näites ning saame lõpliku o-hulga. (5) Hulga M kõikide alamhulkade hulk $\mathbb{B}(M)$ on o-hulk, kui temas loeme $(A\leq B)\Leftrightarrow(A\subset B)$; selle o-hulga alamhulka, mille elementideks on hulga M kõik lõplikud alamhulgad, tähistame $B_1(M)$. (6) Rühma G kõigi alamrühmade hulk, milles järjestus on antud alamrühmadel kui hulga G alamhulkadel määratud sisalduvusseose $\subset$ kaudu, on näide o-hulgast. (7) Vektorruumi $V(\mathbb{R})$ kõigi alamruumide hulk, milles järjestus on antud seose $\subset$ kaudu, on o-hulk. Juhul, kui ruumi dimensioon on lõplik ja põhikorpuseks on lõplik korpus $GF(p^m)$, s.o. vaadeldes vektorruumi $V_n(GF(p^m))$, saame lõpliku o-hulga $\Lambda_n(p^m)$. (8) Hulga M kõikvõimalike ekvivalentside hulka $\Pi(M)$ saab vaadelda o-hulgana, sest $\Pi(M)\subset \mathbb{B}(M\times M)$ tõttu indutseerib näites (5) kirjeldatud järjestus hulgal $\mathbb{B}(M\times M)$ järjestuse hulgal $\Pi(M)$: ($\pi\leq\sigma$ hulgas $\Pi(M)$ $\Leftrightarrow$ $((a\pi b\Rightarrow(a\sigma b)$ hulgas M)). Juhul $|M|=n$ saame siin lõpliku o-hulga Π_n. (9) Olgu $\pi:n=p_1+...+p_k$ ja $\sigma:n=s_1+...+s_l$ naturaalarvu n suvalised lahutused naturaalarvuliste liidetavate p_i ja s_j summaks. Loeme $\pi\leq\sigma$, kui lahutuse σ saab lahutusest π selle liidetavate grupeerimise (ja võimalik, et ümberjärjestamise) tulemusena; nõuded O1-O3 on täidetud ning meil on lõplik o-hulk P_n. (10) Antud hulkade X ja Y korral, kus Y on

o-hulk, saab kõikvõimalike funktsioonide $f: X \to Y$ hulka Y^X vaadelda o-hulgana, kui temas lugeda $(f \leq g) \Rightarrow (\forall x \in X,\ f(x) \leq g(x)$ hulgas $Y)$.

Toome mõnede o-hulkade diagrammid. Selguse mõttes on ringikeste sisse (või juurde) kirjutatud elemendid hulgast P, mida need ringikesed esindavad.



(2) (4) : D_{48} (5): $B(\mathbf{3})$ (9): P_5

Joon.1.

1.3. Järjestatud hulgas $B(\mathbf{3})$ on elemendid $\emptyset$ ja $\mathbf{3}$ vastavalt vähim ja suurim: iga $X \in B(\mathbf{3})$ korral $\emptyset \leq X \leq \mathbf{3}$. Üldistades, o-hulga P elementi $\hat{0}$ nimetatakse *vähimaks elemendiks*, kui iga $x \in P$ korral $\hat{0} \leq x$. Vähimat elementi katvaid elemente nimetatakse *aatomeiks*. Elementi $\hat{1} \in P$ nimetatakse *suurimaks elemendiks o-hulgas P*, kui iga $x \in P$ korral $\hat{1} \geq x$. Elemente, mida katab suurim element $\hat{1}$, nimetatakse o-hulga P *koaatomeiks*. Rohkem kui üks vähim element ning rohkem kui üks suurim element üheski o-hulgas leiduda ei saa. Kuid tõkkeid ei tarvitse o-hulgal alati olla - näites (1) vaadeldavas o-hulgas pole ei suurimat ega ka vähimat elementi. Isegi lõplikel o-hulkadel ei pruugi tõkkeid olla: o-hulgas $B(\mathbf{3}) \setminus \{\emptyset\}$ puudub vähim element ning $B(\mathbf{3}) \setminus \{\mathbf{3}\}$ ei oma suurimat elementi. Öeldakse, et *element $\underline{m}$ on minimaalne hulgas P*, kui hulk P ei sisalda elemendile $\underline{m}$ rangelt eelnevaid elemente. *Element $\overline{m}$ on maksimaalne hulgas P*, kui hulgas P pole elemendile $\overline{m}$ rangelt järgnevaid elemente. On selge, et iga lõplik o-hulk sisaldab nii minimaalset kui ka maksimaalset elementi. Juba lõplikud o-hulgad võivad omada mitut minimaalset elementi, näiteks elemendid {1}, {2} ja {3} o-hulgas $B(\mathbf{3}) \setminus \{\emptyset\}$.

Analoogiline on lugu maksimaalsete elementidega.

1.4. Märkame, et o-hulga P iga alamhulk I on ka o-hulk. Alamhulka kujuga $[a,b]=\{x\in P \mid a\le x\le b\}$, kus elemendid $a,b\in P$, $a\le b$, on fikseeritud, nimetatakse *lõiguks* o-hulgas P. Järjestatud hulki, mille kõik lõigud on lõplikud, nimetatakse *lokaalselt lõplikeks o-hulkadeks*. Sellised on muidugi kõik lõplikud o-hulgad, aga ka näiteis (1)-(3) vaadeldud o-hulgad, samuti o-hulgad $B_1(M)$ ja $\Lambda_n(p^m)$.

Alamhulka I o-hulgas P nimetatakse *ideaaliks* , kui iga $y\in P$ korral on õige implikatsioon $((x\in I)\&(y\le x))\Rightarrow(y\in I)$. Seejuures, ideaali I nimetatakse *peaideaaliks*, kui eksisteerib selline $a\in P$, et $I=\{x\in P \mid x\le a\}$. Lisame, et ideaale o-hulgas $(B(M);\subset)$ nimetatakse *simplitsiaalkompleksideks*, peaideaale selles o-hulgas aga *simpleksideks*.

Kui mõnes alamhulgas $M\subset P$ osutuvad iga kaks elementi a, $b\in M$ võrreldavaiks (s.o. kas $a\ge b$ või $b\ge a$ kehtib), siis sellist alamhulka M nimetatakse *ahelaks* o-hulgas P; erijuhul M=P kõneldakse *lineaarselt järjestatud hulgast P*. Ahela alamhulk on ka ahel. Lõpliku ahela $M\subset P$ *pikkuseks* $l(M)$ loetakse arvu n-1, kus $n=|M|$. *Järjestatud hulga P pikkuseks* $l(P)$ loetakse ülemraja $\sup_{M\in A} l(M)$, kus A on tähistatud o-hulga P kõigi ahelate peret; kui $l(P)$ on naturaalarv, räägitakse *lõpliku pikkusega hulgast P*.

Omagu o-hulk P vähimat elementi $\hat{0}$; *elemendi* $x\in P$ *kõrguseks* $h(x)$ nimetatakse $\hat{0}$ ja x vahel leiduvate ahelate pikkuste ülemraja. On selge, et $h(x)=1$ kehtib parajasti siis, kui x on aatom. Kui o-hulk P omab suurimat elementi $\hat{1}$, siis kehtib võrdus $h(\hat{1})=l(P)$.

Räägitakse *gradueeritud o-hulgast P*, kui leidub funktsioon $g:P\to Z$ kahe järgmise omadusega:

Q1. $(x>y)\Rightarrow(g(x)>g(y))$,

Q2. kui x katab elementi y, siis $g(x)=g(y)+1$.

Lõplikus o-hulgas P leidub iga elemendipaari $a<b$ korral vähemalt üks ahel $x_0=a<x_1<\ldots<x_m=b$, mille iga element x_i katab elementi x_{i-1}; sellise omadusega ahelat nimetatakse *tihedaks ahelaks* elementide a ja b vahel. Öeldakse, et *o-hulk rahuldab Jordan-Dedekindi tingimust* (lühidalt, on JD-hulk), kui

kõik tihedad ahelad ühe ja sama elemendipaari vahel on alati ühe ja sama lõpliku pikkusega.

Märkame, et o-hulk P, mille kõik ahelad on lõplikud ja mis omab vähimat elementi $\hat{0}$, on omadusega (JD) parajasti siis, kui kõrgusfunktsioon $h:P\to\mathbf{Z}$ teda gradueerib. Tõepoolest, kui P on kõrguse $h:P\to\mathbf{Z}$ poolt gradueeritud, siis on iga elemendipaari $a<b$ korral kõik tihedad ahelad a ja b vahel ühe ja sama pikkusega $h(b)-h(a)$. Vastupidi, kui P on JD-hulk, siis iga $\hat{0}$ ja x vahelise tiheda ahela pikkuseks on $h(x)$, mistõttu kõrgusfunktsiooni $h:P\to\mathbf{Z}$ korral on täidetud omadus Q2. Omaduse Q1 täidetus tuleneb h definitsioonist.

1.5. Edasises on vajalikud järgmised kolm konstruktsiooni.

Iga o-hulka $(P;\rho)$ saadab nn. *duaalne o-hulk* P^*, mis kui hulk ühtib hulgaga P, kuid järjestusseos σ temas antakse reegliga $(x\sigma y)\Leftrightarrow(y\rho x)$.

Antud o-hulkade $(P;\rho)$ ja $(Q;\sigma)$ *korrutiseks* $P*Q$ nimetatakse kõikvõimalike järjestatud paaride (p,q), $p\in P$, $q\in Q$, o-hulka, milles järjestusseos π on antud reegliga

$$((p,q)\pi(p',q'))\Longleftrightarrow((p\rho p')\,\&\,(q\sigma q')).$$

Analoogiliselt defineeritakse o-hulkade P_i, $i\in I$, korrutis $\prod_{i\in I} P_i$.

Antud o-hulkade $(P;\rho)$ ja $(Q;\sigma)$ *summaks* $P+Q$ nimetatakse disjunktiivset ühendit $P\sqcup Q$ (siin loetakse $P\cap Q=\emptyset$; vajaduse korral tuleb võtta o-hulkade P ja Q disjunktiivsed koopiad), millesse järjestus viiakse reegliga: loetakse $a\pi b$, kui kas

(1) $\{a,b\}\subset P$ ja $a\rho b$ kehtib o-hulgas P või

(2) $\{a,b\}\subset Q$ ja $a\sigma b$ kehtib o-hulgas Q;

juhul, kui elementidest a,b üks kuulub hulka P, teine aga hulka Q, loetakse neid kahte elementi võrreldamatuiks.

1.6. Vaatleme nüüd o-hulga $(P;\rho)$ järjestust säilitavaid kujutusi o-hulka $(Q;\sigma)$, s.o. kujutusi $f:P\to Q$ omadusega: $(a\rho b)\Rightarrow(f(a)\sigma f(b))$. Kõigi taoliste nn. *o-homomorfismide* hulk $H^o(P,Q)$ on ka vaadeldav o-hulgana; vt. näidet (10). Kasutusel on järgmine terminoloogia. Juhul $(P;\rho)=(Q;\sigma)$ kõneldakse *o-endomorfismidest*. Injektiivset o-homomorfismi $P\to Q$ nimetatakse *o-monomorfismiks* e. o-hulga P *täpseks esituseks* o-hulgas Q. Sürjektiivset o-homomorfismi $P \to Q$ nimetatakse *o-epimorfismiks*. Juhul, kui o-homomorfism $P \to Q$ kui hulkade kujutus on üksühene, nimetatakse teda *o-bijektsiooniks*.

Öeldakse, et o-hulgad P ja Q on *isomorfsed*, kui leidub järjestust säilitav bijektiivne kujutus $P \to Q$, mille pöördkujutus on ka järjestust säilitav. Juhul, kui P ja Q^* on isomorfsed, kõneldakse, et P ja Q on *antiisomorfsed*. Kui o-hulk P on isomorfne o-hulgaga P^*, siis nimetatakse o-hulka P *eneseduaalseks*. Edasises kasutame elemendi a kujutise tähistusega f(a) võrdväärselt ka tähistust a^f.

Sulundioperaatoriks (või ka sulundioperatsiooniks) o-hulgal P nimetatakse kujutust $\Delta : P \to P$, millel on järgmised kolm omadust:

G1. $\forall a \in P,\ (a^\Delta)^\Delta = a^\Delta$,

G2. $\forall a \in P,\ a \leq a^\Delta$,

G3. $(a \leq b) \Rightarrow (a^\Delta \leq b^\Delta)$.

Elemente $x \in P$ omadustega $x = x^\Delta$ nimetatakse *Δ-kinnisteks*. Alamhulga $A \subset P$ *Δ-sulund* antakse võrdusega $A^\Delta = \{a^\Delta \mid a \in A\}$. Kujutisi a^Δ ja A^Δ tähistatakse tihti ka vastavalt $\Delta(a)$ ja $\Delta(A)$. Kui kogu arutluse vältel on juttu ühest ja samast sulundioperaatorist Δ o-hulgal P, siis võib Δ-sulundit nimetada lihtsalt *sulundiks* ja tähistada $\overline{A}$ sümboli $\Delta(A)$ asemel. Siin on sobiv üheelemendilist hulka $\{a\}$ tähistada lihtsalt a ja tema sulundit $\overline{a}$.

Oluline klass sulundioperatsioone tekib järgmiselt. Vaatleme nn. *Galois' vastavust o-hulkade P ja Q vahel*, s.o. kujutuste paari

$$f : P \to Q \qquad \text{ja} \qquad g : Q \to P,$$

sellist, et on täidetud kaks nõuet:

(1) $((p_1 \rho p_2) \Rightarrow (p_2^f \sigma p_1^f)) \ \& \ ((q_1 \sigma q_2) \Rightarrow (q_2^g \rho q_1^g))$,

(2) $\forall p \in P \forall q \in Q,\ (p \rho (p^f)^g) \ \& \ (q \sigma (q^g)^f)$.

Vahetu kontroll näitab, et kujutused

$$p \mapsto (p^f)^g \qquad \text{ja} \qquad q \mapsto (q^g)^f$$

on sulundioperaatoreiks o-hulkadel $(P;\rho)$ ja $(Q;\sigma)$ vastavalt, kusjuures o-hulgad, mis moodustuvad kinnistest elementidest hulgas P ja kinnistest elementidest hulgas Q, on antiisomorfsed.

Lisame, et näites (5) vaadeldud o-hulgal $\mathcal{B}(M)$ antud sulundioperaator Δ, mis rahuldab täiendavalt nõudeid:

T2. $\forall A\subset M,\ (|A|=1) \Rightarrow (A^{\Delta}=A)$ ja

T3. $\forall A\subset M\ \forall B\subset M,\ (A\cup B)^{\Delta} = A^{\Delta}\cup B^{\Delta}$,

määrab *topoloogia* hulgal M, mille kinnisteks hulkadeks on Δ-kinnised elemendid o-hulgast $\mathcal{B}(M)$. Osutub, et nõuded G2 ja G3 on seejuures liigsed, kuna (T2&T3)$\Rightarrow$(G2&G3); detailid vt. [10].

Toodud "sõnastik" leiab järgnevates paragrahvides intensiivset kasutamist, seejuures aeg-ajalt täienedes.

§ 2. JÄRJESTATUD HULGA TÜKELDUSED

2.1. Juba need tagasihoidlikud vahendid esimesest paragrahvist annavad mitmeid võimalusi liikumiseks oluliste tulemusteni. Käesolevat paragrahvi võib vaadelda ühe sellise mõtteliini esitusena.

Järjestatud hulga $(P;\rho)$ elemente a ja b, mille korral kehtib $((a,b)\notin\rho)\&((b,a)\notin\rho)$, nimetatakse *võrreldamatuiks*; tähistatakse $a\not\gtrless_{\rho} b$, aga ka $a\asymp b$. Kui mingis alamhulgas $A\subset P$ iga kaks elementi on võrreldamatud (teiste sõnadega, kui $(A\times A)\cap\rho = \{(a,a)\,|\,a\in A\}$), siis kõneldakse o-hulga $(P;\rho)$ *antiahelast A*.

Mõneti ootamatult, elementide arv lõpliku o-hulga antiahelais määrab selle o-hulga ehituse. Selle teesi täpseks väljenduseks on Dilworthi teoreem lõpliku o-hulga ahelaikstükeldustest, mille tõestus (üks paljudest!) tuuakse punktis 2.2. Kõnesoleva teema jätkuks oleks süvenemine Dilworthi teoreemi analoogidesse lõpmatute o-hulkade korral (üht neist vt. [15], lk.90). Kui märgata siin ilmnevat seost M.Suslini kuulsa teesiga (vt. [8], lk.72), tekib täiendavalt ka küsimus piirist, millest algab vastavate väidete sõltumatus (analoogiliselt kontiinuumhüpoteesile).

Järgnevais punktides tuuakse (Dilworthi teoreemi järeldusena) P.Halli teoreem relatsioonil kooskõla olemasolust ja selle tuntud variant transversaalide keeles ning seejärel ka vähetuntud, kuid oluline teoreem rühmal määratud peaaegu perioodilisel funktsioonil invariantse keskmise olemasolust. Peaaegu perioodiliste funktsioonide teooria loodi taani matemaatiku H.Bohri poolt, lähtepunktiks tema uuringud Dirichlet' ridadest ja ζ-funktsioonist; tema 3 tööd ilmusid aastail 1924-1926. Selle funktsioonide klassi tähtsaima alamklassi (kvaasiperioodilised funktsioonid) tõid matemaatikasse Tartu ülikooli kasvandik (1884-1893), läti matemaatik P.Bohl (1893) ja (sõltumatult) prantsuse astronoom E.Esclangon (1904), lähtepunktiks mehhaanika ja astronoomia ülesanded. H.Bohri määratluse kohaselt nimetatakse pidevat funktsiooni $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ peaaegu perioodiliseks, kui $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \sigma=\sigma(\varepsilon)$, nii et igas vahemikus kujuga $(\alpha,\alpha+\sigma)\subset\mathbf{R}$ leidub selline arv τ, et

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x+\tau)-f(x)| < \varepsilon.$$

Sama mõiste annab järgmine (S.Bochneri, 1926) <u>definitsioon</u>: pidevat funktsiooni $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ nimetatakse peaaegu perioodiliseks, kui funktsioonide lõpmatu pere $\{f_h(x)\,|\,f_h(x)\doteq f(x+h),\ h\in\mathbf{R}\}$ on kompaktne reaalsirge $\mathbf{R}^1$ ühtlase koonduvuse topoloogias.

J.Neumann (1934) näitas, et peaaegu perioodiliste funktsioonide teooriat saab laiendada suvalisele rühmale G funktsioonide määramispiirkonnana $\mathbf{R}(+)$ asemel; põhiraskuseks on tõestada invariantse f-keskmise olemasolu. Kuidas seda saab teha, näeb lugeja punktis 2.4.

Tähelepanu väärib asjaolu, et kogu nimetatud faktide ahela koos nende suurepäraste rakendustega ja mitte ainult selle ahela (vt. L.Harper, G.-C.Rota, Adv. in Probability <u>1</u> (1971), 169-213) saab toetada teoreemile lõplike o-hulkade tükeldustest.

<u>2.2</u>. Räägime *hulga tükeldusest*, kui ta on esitatud oma paarikaupa ühisosata alamhulkade, e. *tükkide* (kõneldakse ka *komponentide*) ühendina. Meid huvitavad järgnevas o-hulga ahelaikstükeldused. Triviaalne võimalus selliseks tükelduseks on alati olemas, võttes kõik tükid üheelemendilistena. Kuid milline on minimaalne võimalik tükkide arv sellisel tükeldusel? Kerge on mõista, et see arv ei saa olla väiksem elementide arvust vaadeldava o-hulga ükskõik millises antiahelas. Elementide maksimaalarvu o-hulga P antiahelas nimetame *o-hulga laiuseks* ja tähistame $\omega(P)$.

Teoreem 1 (Dilworth, 1950). Minimaalne võimalik tükkide arv lõpliku o-hulga ahelaikstükeldusel võrdub selle o-hulga laiusega.

Tõestuse anname induktsiooniga o-hulga P elementide arvu järgi. Juht $|P|=1$ on triviaalne. Olgu P suvaline o-hulk laiusega n. Oletame teoreemi väite kehtivust kõigis o-hulkades Q, $|Q|<|P|$. Et o-hulga P ahelaikstükeldused vähem kui n tükiga pole võimalikud, siis piisab ära näidata P selline ahelaikstükeldus, milles on n tükki. Sobiva tükelduse konstrueerime eraldi järgmistel juhtudel a ja b, mis koos ammendavad kõik võimalused:

a) leidub antiahel $A\subset P$, $|A|=n$, mis ei sisalda ei hulga P kõiki minimaalseid ega ka kõiki tema maksimaalseid elemente,

b) iga antiahel $U\subset P$, $|U|=n$, kas sisaldab o-hulga P kõiki maksimaalseid elemente (nende hulka tähistame M-iga) või ta sisaldab P kõiki minimaalseid elemente (viimaste alamhulka o-hulgas P tähistame N).

Juht a). Defineerime hulgad

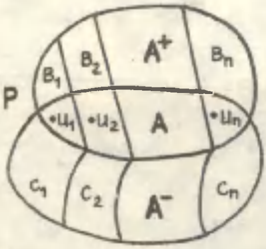
$$A^+=\{x\in P\mid \exists\, u\in A,\ x\geq u\} \quad \text{ja} \quad A^-=\{y\in P\mid \exists\, v\in A,\ y\leq v\}.$$

Osutub, et $A^+\cap A^-=A$ ja $A^+\cup A^-=P$. Tõepoolest, definitsioonidest nähtuvad $A\subset A^+\cap A^-$ ja $A^+\cup A^-\subset P$. Kui seejuures eksisteeriks element $x\in A^+\cap A^-$, $x\notin A$, siis leiduksid $u\in A$ ja $v\in A$, et $u<x<v$, s.o. $u<v$, samal ajal kui A iga kaks elementi peaksid olema võrreldamatud. Elemendi $p\in P$, $p\notin A^+\cup A^-$ olemasolu korral oleks see element võrreldamatu A kõigi elementidega, mistõttu $\{p\}\cup A$ oleks antiahel. Kuid see räägib vastu A maksimaalsusele.

Et $A^+\neq P\neq A^-$ (järeldub tingimusest a)) ja $\omega(A^+)=n=\omega(A^-)$ (konstruktsiooni põhjal), siis tuleneb induktsiooni oletusest, et leiduvad tükeldused

$$A^+=B_1\cup\ldots\cup B_n \quad \text{ja} \quad A^-=C_1\cup\ldots\cup C_n.$$

Sealjuures kõigis ahelais B_i ja C_j võib sisalduda (ja ka peab sisalduma) täpselt üks element antiahelast A. Seetõttu võime lugeda, et antiahela $A=\{u_1,\ldots,u_n\}$ elemendid on nummerdatud kooskõlas nende kuuluvusega ahelaisse B_i ning ahelad C_j nummerdame vajaduse korral ümber kooskõlas elementide u_j kuuluvusega neisse. Nii saavutame, et tükid B_i ja C_j sisaldavad üht ja sedasama elementi $u_i\in A$ (vt. joon.2).



Joon.2.

Vaatleme nüüd hulkasid $B_1 \cup C_1, \ldots B_n \cup C_n$. Esiteks, kõik need hulgad on ahelad. Teiste sõnadega, iga kaks elementi x ja y hulgast $B_i \cup C_i$ on võrreldavad. Kuna B_i ja C_i on ahelad, siis piisab selles veenduda juhul $x \in B_i$ ja $y \in C_i$. Et aga $B_i \subset A^+$ ja $C_i \subset A^-$ ning $(B_i \cup C_i) \cap A = \{u_i\}$, siis saame $x \geq u_i \geq y$, st. $x \geq y$. Teiseks, hulgad $B_i \cup C_i$ katavad kogu P, sest $P = A^+ \cup A^- = (\bigcup_i B_i) \cup (\bigcup_i C_i) = \bigcup_i (B_i \cup C_i)$. Kolmandaks, hulgad $B_i \cup C_i$, $i=1,\ldots,n$, on paarikaupa ühisosata. Tõepoolest, võrduse

$$(B_i \cup C_i) \cap (B_j \cup C_j) = (B_i \cap B_j) \cup (C_i \cap C_j) \cup (B_i \cap C_j) \cup (B_j \cap C_i)$$

tõttu piisab kõigi $i \neq j$ korral veenduda $B_i \cap C_j = \emptyset$ kehtivuses. See väide tõepoolest kehtib, kuna $B_i \cap C_j \subset A^+ \cap A^- = A$ tõttu $B_i \cap C_j \subset B_i \cap A = \{u_i\}$ ja samal ajal ka $B_i \cap C_j \subset A \cap C_j = \{u_j\}$.

Kokkuvõttes oleme tõestanud, et $P = (B_1 \cup C_1) \cup \ldots \cup (B_n \cup C_n)$ on soovitud tükeldus.

Juht b). Vaatleme suvalist antiahelat U, $|U| = n$, ning olgu näiteks $M \subset U$ (seose $N \subset U$ korral on arutlused analoogilised). Fikseerinud mingi elemendi $b \in M$, vaatleme o-hulka $P_b = \{x \in P \mid x \leq b\}$ ja selles suvalist minimaalset elementi a. Siis $a \leq b$ ning kerge on taibata, et $a \in N$. Tähistame $D_1 = \{a\} \cup \{b\}$ ja $Q = P \setminus D_1$. Seos $\omega(Q) \leq \omega(P)$ on $Q \subset P$ tõttu ilmne. Et oletus $\omega(Q) = n$ viiks juba läbivaadatud juhu a) juurde, siis peab kehtima $\omega(Q) \leq n-1$. Seejuures sisaldab antiahel $U \cap Q$ täpselt n-1 elementi, mistõttu Q laiuseks on n-1. Induktsiooni oletuse kohaselt leidub o-hulga Q ahelaikstükeldus $Q = D_2 \cup \ldots \cup D_n$. Siis aga $P = D_1 \cup D_2 \ \ldots \cup D_n$ on soovitud tükelduseks o-hulgale P. ∎

Hoopis lihtsam on veenduda, et kehtib Dilworthi teoreemiga duaalne väide.

<u>Teoreem 2</u> *(L.Mirsky, 1971). Kui o-hulgas puuduvad (n+1)-elemendilised ahelad, siis see o-hulk on tükelduv n antiahelaks.*

<u>Tõestuse</u> saame induktsiooniga n järgi. Tähistame teoreemi väidet $\mathcal{E}(n)$. Väide $\mathcal{E}(1)$ on ilmne. Oletame väidete $\mathcal{E}(2), \ldots, \mathcal{E}(n-1)$ kehtivust ning olgu P selline o-hulk, milles puuduvad (n+1)-elemendilised ahelad. Tähistagu M o-hulga P kõigi maksimaalsete elementide alamhulka; on kerge mõista, et M on anti-

ahel. Vaatleme o-hulka $Q=P\setminus M$ ning oletame, et ta sisaldab ahelat $a_1<a_2<\ldots<a_n$. Vastavalt teoreemi tingimusele on see ahel maksimaalne o-hulgas P. Sellest järeldub $a_n\in M$, vastuolus tingimusega $Q\cap M=\emptyset$. Järelikult puuduvad o-hulgas Q n-elemendilised ahelad, mistõttu induktsiooni oletusest tuleneb, et Q tükeldub n-1 antiahelaks. See tükeldus koos antiahelaga M annab soovitud tükelduse o-hulgal P. Oleme tõestanud $\mathcal{E}(n)$ kehtivuse.$\blacksquare$

2.3. Järjestatud hulga laiuse praktiline leidmine ei ole alati kerge ülesanne; lugeja veendub selles, kui ta püüab näidata, et $\omega(B(n))=\binom{n}{[n/2]}$. Siiski, punktis 2 tõestatud teoreemil on märkimisväärseid rakendusi. Järgnevalt tutvume ühega neist.

Iga binaarse seose $\rho\subset A\times B$ korral määrab element $a\in A$ hulga B alamhulga $\rho(a)$,

$$\rho(a)=\{b\in B \mid (a,b)\in\rho\},$$

mille nimetame *elemendi a* ρ*-naabruseks* ning elemente hulgast $\rho(a)$ - tema ρ*-naabreiks*. Üldisemalt, võib rääkida *alamhulga* $K\subset A$ ρ*-naabrusest* $\rho(K)$,

$$\rho(K)=\bigcup_{a\in K}\rho(a)$$

Öeldakse, et *binaarne seos* ρ *sisaldab kooskõla* μ, kui leidub binaarne seos $\mu\subset A\times B$, $\mu\subset\rho$, nii et hulga A igal elemendil on täpselt üks μ-naaber ja A erinevail elementidel pole ühiseid μ-naabreid.

<u>Teoreem 3</u> *(P.Hall, 1935). Lõplike ühisosata hulkade A ja B korral sisaldab binaarne seos* $\rho\subset A\times B$ *kooskõla parajasti siis, kui hulga A iga alamhulga K korral on täidetud tingimus* $|\rho(K)|\geq|K|$.

<u>Tõestus</u>. Teoreemis toodud tingimuse *tarvilikkus* on ilmne, sest kui ρ sisaldab kooskõla, siis iga alamhulga $K\subset A$ korral

$$|\rho(K)|\geq|\mu(K)|=|\bigcup_{a\in K}\mu(a)|=\sum_{a\in K}|\mu(a)|=|K|.$$

Piisavuse tõestamiseks märkame, et hulka $P=A\cup B$ võib vaadelda o-hulgana, lugedes temas $p\geq p$ kõigi $p\in P$ korral ning $a\geq b$, kui element $b\in B$ on ρ-naabriks elemendile $a\in A$. Seejuures on antiahela B elementide arv o-hulga P laiuseks. Tõepoolest, leidugu antiahel $Q\subset P$, $|Q|>|B|$. Märkame, et $\rho(Q\cap A)\subset B\setminus(Q\cap B)$, kuna vastasel korral sisaldaks antiahel Q (seose $\leq$ suhtes) võrreldavaid elemente. Sellest tuleneb $|\rho(Q\cap A)|\leq|B\setminus(Q\cap B)|$.

Samal ajal, et $Q=(Q\cap A)\cup(Q\cap B)$, siis on õige ka võrratus

$|Q|\le|Q\cap A|+|Q\cap B|$, mistõttu $|B\setminus(Q\cap B)|=|B|-|Q\cap B|\le|B|-|Q|+$ $+|Q\cap A|<|Q\cap A|$; siin viimane võrratus kehtib $|Q|>|B|$ tõttu. Kokkuvõttes näeme, et $|\rho(Q\cap A)|<|Q\cap A|$, mis on aga vastuolus teoreemis toodud (ning käesolevas tõestuse pooles kehtiva) tingimusega.

Teoreemi 1 põhjal saab o-hulga P tükeldada kõige vähem $|B|$ ahelaks. Igaühes neist peab sisalduma täpselt üks element antiahelast B. Samal ajal ka hulga A iga element asub ühes neist $|B|$ ahelast, kusjuures vastavad ahelad peavad siis olema kaheelemendilised - tulenevalt seose "$\le$" definitsioonist ja faktist, et B on antiahel. Need kaheelemendilised ahelad kõigi $a\in A$ jaoks koos määravadki kooskõla μ, $\mu\subset\rho$.⌑

Olgu antud hulga B alamhulkade pere $\mathcal{L}=\{B_a/a\in A\}$. Öeldakse, et alamhulk $T\subset B$ on *transversaalike perele* $\mathcal{L}$, kui eksisteerib bijektsioon $\mu\colon T\to A$ nii, et $t\in B_{\mu(t)}$ kõigi $t\in T$ korral.

Transversaali mõiste võimaldab teoreemile 3 anda järgmise sõnastuse.

P.Halli teoreem. Lõpliku hulga B alamhulkade lõplik pere $\mathcal{L}=\{B_a/a\in A\}$ omab transversaali parajasti siis, kui kõigi alamhulkade $K\subset A$ korral kehtib tingimus

$$\Big|\bigcup_{a\in K} B_a\Big|\ge|K|.$$

Tõepoolest, hulga B alamhulkade pere $\mathcal{L}=\{B_a/a\in A\}$ määrab binaarse seose $\rho\subset A\times B$, kus $(a,b)\in\rho$, kui $b\in B_a$. Sealjuures, $\rho(a)=B_a$ ja iga $K\subset A$ korral $\rho(K)=\bigcup_{a\in K}B_a$ ning kooskõla μ seose ρ tarvis pole midagi muud, kui pere $\mathcal{L}$ transversaali T määrava bijektsiooni μ graafik hulgas $A\times B$. Ka vastupidi, iga binaarne seos $\rho\subset A\times B$ määrab hulga B alamhulkade pere $\mathcal{L}$, kus $B_a=\rho(a)$, $a\in A$. Seejuures, kooskõla μ projektsioon hulgale B annab pere $\mathcal{L}$ transversaali.⌑

2.4. Suvalises rühmas G võib iga alamhulga $T\subset G$ ja elementide $a,b\in G$ korral vaadelda *alamhulga T nihet* $aTb=\{axb/x\in T\}$. See võimaldab rühma G (kui hulga) iga tükeldusega $\pi=\{T_i/i\in n\}$ siduda nn. *nihutatud tükelduse* $a\cdot\pi\cdot b=\{aT_ib/i\in n\}$. Tõepoolest, suvalise $x\in G$ korral leidub selline $\kappa\in n$, et $a^{-1}xb^{-1}\in T_\kappa$, millest $x=a(a^{-1}xb^{-1})b\in aT_kb$, s.o. $G\subset\bigcup_{k=1}^{n}aT_kb$. Sealjuures, kui $i\ne j$ korral leiduks element $x\in(aT_ib)\cap(aT_jb)$, siis leiduksid sellised elemendid $y\in T_i$ ja $z\in T_j$, et $ayb=x=azb$, millest $y=z\in T_i\cap T_j$.

Viimane on vastuolus faktiga, et π on tükeldus.

Olgu funktsioon $f:G \to \mathbb{C}$ ja reaalarv $\varepsilon>0$ suvalised. Rühma G (lõplikku) tükeldust $\pi=\{T_i/i\in n\}$ nimetame *ε-tükelduseks funktsiooni f jaoks*, kui on täidetud tingimus

$$\forall i\in n,\ \sup_{x',x''\in T_i} |f(x')-f(x'')| < \varepsilon\ ; \tag{1}$$

sel korral tähistame $\pi=\pi(f,\varepsilon)$. Tükeldust $\pi(f,\varepsilon)$ nimetame *lähendavaks ε-tükelduseks f jaoks*, kui suvaliste $a,b\in G$ korral on nihutatud tükeldus $a\cdot\pi(f,\varepsilon)\cdot b$ ka ε-tükelduseks f jaoks ning $\pi(f,\varepsilon)$ omab antud funktsiooni f ε-tükelduste seas minimaalset võimalikku tükkide arvu.

Peaaegu perioodiliseks funktsiooniks rühmal G nimetame sellist funktsiooni $f:G\to\mathbb{C}$, mille jaoks suvalise $\varepsilon>0$ korral leidub rühma G lõplik ε-tükeldus $\pi(f,\varepsilon)$, nii et iga nihutatud tükeldus $a\cdot\pi(f,\varepsilon)\cdot b$, $a,b\in G$, on jällegi ε-tükelduseks f jaoks.

<u>Teoreem 4</u> *(J.Neumann). Iga peaaegu perioodiline funktsioon f rühmal G omab nn. f-keskmist, s.o. funktsioonile f vastab kompleksarv $\mu(f)$ ning see vastavus on järgmiste omadustega:*

(1) arv $\mu(f)$ on üheselt määratud kuhjumispunkt kompleksarvude hulgale $\{\frac{1}{|A|}\sum_{x\in A} f(axb)\,|\,A\subset G,\ |A|<\infty\}$, kusjuures $\mu(f)$ väärtus ei sõltu parameetrite $a,b\in G$ valikust.

(2) vastavus μ on nihkeinvariantne, s.t. $\mu(f)=\mu(f_a)$ kõigi $a\in G$ korral; siin funktsiooni f <u>nihe</u> $f_a:G\to\mathbb{C}$ on antud valemiga $f_a(x)=f(ax)$.

<u>Tõestus</u>. Funktsiooni f peaaegu perioodilisusest tulenevalt leiduvad lähendavad ε-tükeldused f jaoks; olgu $\pi=\pi(f,\varepsilon)=\{T_i/i\in n\}$ üks neist. Iga esindajate hulga $\{t_i/t_i\in T_i,\ i\in n\}$ korral tähistame

$$\mu(\pi,\{t_i\}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i). \tag{2}$$

Tükelduse π rakkudes võetud esindajate suvaliste kahe hulga $\{t_i'\}$ ja $\{t_i''\}$ jaoks kehtib võrratus

$$|\mu(\pi,\{t_i'\}) - \mu(\pi,\{t_i''\})| < \varepsilon. \tag{3}$$

Tõepoolest,

$$|\mu(\pi,\{t_i'\})-\mu(\pi,\{t_i''\})| = \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(f(t_i')-f(t_i''))\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|f(t_i')-f(t_i'')| < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon = \varepsilon.$$

Tõestame nüüd, et igal kahel ühe ja sama tükkide arvuga lähendaval ε-tükeldusel $\pi=\{T_i/i\in n\}$ ja $\sigma=\{S_i/i\in n\}$ leidub ühiseid esindajate hulki. Selleks vaatleme binaarset seost $\rho\subset\{T_1,\ldots,T_n\}\times\{S_1,\ldots,S_n\}$, mis antakse reegliga $(T_i,S_j)\in\rho \Leftrightarrow T_i\cap S_j\neq\emptyset$. Osutub, et binaarne seos ρ sisaldab kooskõla.

Tõepoolest, vastasel juhul (tulenevalt teoreemist 3) mingi $k\in n$ korral leidub selline k-elemendiline alamhulk hulgas $\{T_1,\ldots,T_n\}$, mille ρ-naabrus hulgas $\{S_1,\ldots,S_n\}$ sisaldab vähem kui k elementi. Tähistuste lihtsuse huvides (kuid aruttluse üldsust kitsendamata) eeldame, et selleks alamhulgaks on $\{T_1,\ldots,T_k\}$ ja tema ρ-naabruseks $\{S_1,\ldots,S_r\}$, $r<k$. Et σ-tükkidega $S_{r+1},\ldots,S_n$ pole π-tükkidel $T_1,\ldots,T_k$ enam ühiseid elemente, siis tükelduse mõistest endast tulenevalt saame

$$T:=\bigcup_{i=1}^{k}T_i\subset\bigcup_{j=1}^{r}S_j\,.$$

Märkame nüüd, et

$$\pi':=\{T\cap S_1,\ldots,T\cap S_r;T_{k+1},\ldots,T_n\}$$

on hulga G tükeldus, kusjuures nii π' ise kui ka kõigi $a,b\in G$ korral nihked $a\cdot\pi'\cdot b$ on ε-tükeldusteks f jaoks; esimene väide nähtub π' konstruktsioonist ja sellest, et π on hulga G tükeldus, teine väide aga sellest, et tükelduse nihe on tükeldus ning σ ja π on lähendavad ε-tükeldused f jaoks. Et aga $r+(n-k)<n$, siis on ε-tükeldusel π' vähem rakke kui ε-tükeldusel π, mis on vastuolus asjaoluga, et π on lähendav ε-tükeldus.

Sellega on kooskõla μ, $\mu\subset\rho$ olemasolu tõestatud. Vajaduse korral tükid $S_1,\ldots,S_n$ ümber tähistatud, võib järelikult lugeda, et kõik $T_i\cap S_i$ on mittetühjad hulgad. Fikseerinud iga $i\in n$ korral mingi elemendi $e_i\in T_i\cap S_i$, saamegi soovitud ühiste esindajate hulga $\{e_i/i\in n\}$.

Suvaliste lähendava ε-tükelduse π, tema nihke $a\cdot\pi\cdot b$ ning nende esindajate hulkade $\{t_i\}$ ja $\{\bar{t}_i\}$ korral vastavalt kehtib

$$\forall a,b\in G,\ |\mu(\pi,\{t_i\})-\mu(a\cdot\pi\cdot b,\{\bar{t}_i\})|<2\varepsilon. \tag{4}$$

Tõepoolest, et lähendava ε-tükelduse π kõik nihked on ilmsesti sama rakkude arvuga lähendavaiks ε-tükeldusteks, järeldub ülal tõestatud väitest ühiste esindajate hulga $\{e_i\}$ olemasolu kohta π ja $a\cdot\pi\cdot b$ jaoks. Seos (2) näitab, et

$$\mu(\pi,\{e_i\}) = \mu(a\cdot\pi\cdot b,\{e_i\}),$$

mistõttu (Δ-võrratust ja seost (3) kasutades) saame

$$\begin{aligned}
&|\mu(\pi,\{t_i\}) - \mu(a\cdot\pi\cdot b, \{\tilde{t}_i\})| = \\
&= |\mu(\pi,\{t_i\}) - \mu(\pi,\{e_i\}) + \mu(a\cdot\pi\cdot b,\{e_i\}) - \mu(a\cdot\pi\cdot b,\{\tilde{t}_i\})| \leq \\
&\leq |\mu(\pi,\{t_i\}) - \mu(\pi,\{e_i\})| + |\mu(a\cdot\pi\cdot b,\{e_i\}) - \mu(a\cdot\pi\cdot b,\{\tilde{t}_i\})| < \\
&< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Näitame nüüd, et suvaliste kahe lähendava ε-tükelduse π ja σ ning nende esindajate hulkade $\{t_i\}$ ja $\{s_j\}$ korral vastavalt kehtib võrratus

$$|\mu(\pi,\{t_i\}) - \mu(\sigma,\{s_j\})| < 4\varepsilon. \tag{5}$$

Tähistame tükelduste π ja σ tükkide arve vastavalt n ja m. Äsja tõestatud võrratus (4) näitab, et

$$\forall j \in m, \ |\mu(\pi,\{t_i\}) - \mu(\pi\cdot s_j, \{t_i s_j\})| < 2\varepsilon.$$

Liites need võrratused pooliti ja jagades arvuga m, saame

$$\frac{1}{m}\sum_{j\in m} |\mu(\pi,\{t_i\}) - \mu(\pi\cdot s_j, \{t_i s_j\})| < 2\varepsilon. \tag{6}$$

Et võrratuse (6) vasak pool on (Δ-võrratuse tõttu) mitte väiksem kui

$$|\mu(\pi,\{t_i\}) - \frac{1}{m}\sum_{j\in m} \mu(\pi\cdot s_j, \{t_i s_j\})|$$

siis saame

$$|\mu(\pi,\{t_i\}) - \frac{1}{m}\sum_{j\in m} \mu(\pi\cdot s_j, \{t_i s_j\})| < 2\varepsilon. \tag{7}$$

Analoogiliselt võib veenduda võrratuse

$$|\mu(\sigma,\{s_j\}) - \frac{1}{n}\sum_{i\in n} \mu(t_i\sigma, \{t_i s_j\})| < 2\varepsilon \tag{8}$$

kehtivuses. Kuid seosest (2) nähtub, et

$$\frac{1}{m}\sum_{j\in m} \mu(\pi\cdot s_j, \{t_i s_j\}) = \frac{1}{n}\sum_{i\in n} \mu(t_i\sigma, \{t_i s_j\}),$$

mis koos Δ-võrratuse ja võrratustega (7) ja (8) annabki soovitud tulemuse:

$$\begin{aligned}
&|\mu(\pi,\{t_i\}) - \mu(\sigma,\{s_j\})| = \\
&= |\mu(\pi,\{t_i\}) - \frac{1}{m}\sum_{j\in m}\mu(\pi\cdot s_j,\{t_i s_j\}) + \frac{1}{n}\sum_{i\in n}\mu(t_i\sigma,\{t_i s_j\}) - \mu(\sigma,\{s_j\})| \leq \\
&\leq |\mu(\pi,\{t_i\}) - \frac{1}{m}\sum_{j\in m}\mu(\pi\cdot s_j,\{t_i s_j\})| + |\frac{1}{n}\sum_{i\in n}\mu(t_i\sigma,\{t_i s_j\}) - \mu(\sigma,\{s_j\})| < \\
&< 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tõestatud võrratusest (5) nähtub, et eksisteerib (ja on siis ka üheselt määratud) piirväärtus $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mu(\pi,\{t_i\})$, mille tähistamegi $\mu(f)$. Konstruktsiooni kohaselt on vastavus $f \to \mu(f)$ teoreemis näidatud omadusega (1).

Veendume, et iga $a \in G$ korral ka $\mu(f_a)=\mu(f)$. Selleks märkame, et Δ-vórratuse tóttu

$$|\mu(f_a)-\mu(f)| - |\mu(\pi,\{t_i\}) - \mu(a\cdot\pi,\{a\cdot t_i\})| \leqslant$$
$$\leqslant |\mu(f_a)-\mu(f) + \mu(\pi,\{t_i\}) - \mu(a\cdot\pi,\{a\cdot t_i\})|,$$

millest omakorda saame

$$|\mu(f_a)-\mu(f)| \leqslant |\mu(\pi,\{t_i\}) - \mu(a\cdot\pi,\{a\cdot t_i\})| +$$
$$+ |\mu(f_a) - \mu(a\cdot\pi,\{at_i\})| + |\mu(f) - \mu(\pi,\{t_i\})|.$$

Piirprotsessis $\varepsilon \to 0$ viimase vórratuse parem pool $\to 0$, kuna esimene liidetav $\to 0$ vórratuse (4) tóttu, ülejäänud kaks liidetavat aga $\to 0$ kompleksarvude $\mu(f_a)$ ja $\mu(f)$ määratluse kohaselt. Siis aga $\to 0$ ka viimase vórratuse parem pool, s.o. näeme, et $\mu(f_a)=\mu(f)$. ⌑

§ 3. VÓRE MÓISTE

3.1. Järjestatud hulka, milles igal elemendipaaril on alamraja ja ülemraja, on hakatud vóreks nimetama. Vóre móiste toodi matemaatikasse (1897.a.) R.Dedekindi poolt. Levinud arvamuse kohaselt (mida jagas isegi E.Noether) olid Dedekindi vastavad tööd näiteks varasest aksiomaatilisest uuringust, ei enam. Vóre móiste rakenduslik väärtus hakkas ilmnema täie selgusega peale K.Mengeri ja eriti G.Birkhoffi töid käesoleva sajandi 30. aastail. Sellest ajast peale on vóreteooria osa matemaatikas ja selle rakendustes kasvanud; asjade sellise käigu kohta täpsemalt vt. G.Birkhoff, The role of algebra in computing, SIAM-AMS Proceedings, Providence, 1971. Kombinatoorika paljude teooriate alustoeks kujunesid vóred kahel viimasel aastakümnel eriti tänu G.-C.Rota ja tema koolkonna tegevusele.

Käesolevas paragrahvis antakse vóre kui o-hulga definitsioon ning seejärel näidatakse vóimalus vaadelda vóret kui algebralist struktuuri. Kombinatoorikas leiavad olulist kasutamist mólemad vóimalused. Tósi, selles konspektis arvude süstematiseerimisel on vajalik vaid esimene neist. Esitame ka móned kaasnevad mõisted, mis hiljem kasutamist leiavad.

3.2. Alustame järgmisest tähelepanekust. Naturaalarvude a ja b suurim ühistegur $d=SÜT(a,b)$ määratakse kahe omadusega:

(1) $d|a$ & $d|b$,

(2) kui veel mingi $c \in \mathbb{N}$ korral $(c|a)\&(c|b)$, siis ka $c|d$.

Duaalselt, arvude a ja b väikseim ühiskordne $v=VÜK(a,b)$ määratakse omadustega:

(1') $a|v$ & $b|v$,

(2') kui veel mingi $u \in \mathbb{N}$ korral $(a|u)\&(b|u)$, siis ka $v|u$.

Et hulka $\mathbb{N}$ võib vaadelda o-hulgana (vt. näidet (3) punktis 1.2), jõuame (üldistades) järgmiste mõisteteni suvalises o-hulgas P.

Element $a \in P$ on alamhulgas $S \subset P$ *alamtõke* (tähistame $a \in \bot S$), kui $a \leq s$ iga $s \in S$ korral. On selge, et mõnel alamhulgal $S \subset P$ võib olla korraga mitmeid alamtõkkeid, mõnel teisel alamhulgal aga ei ühtki alamtõket.

Element $a \in P$ on alamhulga $S \subset P$ *alamraja* (tähistame $a = \wedge S$ või ka $a = \inf S$), kui $a \in \bot S$, ning S iga teise alumise tõkke a' korral $a \geq a'$.

Element $a \in P$ on alamhulga $S \subset P$ *ülemtõke* (tähistame $a \in \top S$), kui $a \geq s$ iga $s \in S$ korral. Alamhulga $S \subset P$ *ülemrajaks* nimetatakse hulga S sellist ülemtõket a, et S iga teise ülemtõkke a' korral $a \leq a'$. Asjaolu, et element $a \in P$ on alamhulga $S \subset P$ ülemrajaks, tähistatakse $a = \vee S$ või ka $a = \sup S$. Kaheelemendilise alamhulga $S=\{a,b\}$ alamraja tähistatakse enamasti $a \wedge b$ ja ülemraja $a \vee b$.

On selge, et o-hulga alamhulgal saab olla ülimalt üks alamraja ja ülimalt üks ülemraja.

Definitsioon. Järjestatud hulka, kus igal kaheelemendilisel alamhulgal on olemas nii alamraja kui ülemraja, nimetatakse *võreks*.

Punktis 1.2 näiteis (3), (4) ja (5) vaadeldud o-hulgad $(\mathbb{N};|)$, $(D_n;|)$ ja $(\mathcal{B}(M);\subset)$ on võred: kahes esimeses neist tuleb lugeda $a \wedge b = SÜT(a,b)$ ja $a \vee b = VÜK(a,b)$, viimases aga $A \wedge B = A \cap B$ ja $A \vee B = A \cup B$.

Olulise klassi näiteid võredest annavad o-hulkadel määratud sulundioperaatorid; vt. punkti 1.6. Nimelt, kui o-hulk P, millel sulundioperaator Δ antud on, realiseerub o-hulgana $(B(M);\subset)$ või selle alamhulgana, mis on kinnine temasse kuuluvate M alamhulkade lõplike ühisosa ja ühendi suhtes, siis P Δ-kinnistel elementidel tekib võre. Tõepoolest, et suvalise kahe elemendilise alamhulga $\{A,B\}\subset P$ korral võime lugeda elemente A ja B vaadeldaval juhul hulga M alamhulkadeks, siis sulundioperaatori Δ omadusi kasutades nähtub alamraja ja ülemraja definitsioonidest vahetult, et $A\wedge B=A\cap B$ ja $\dot{A}\dot{\vee}B=(A\cup B)^{\Delta}$. Nii näiteks vektorruumi $V_n(R)$ igale (lõplikule) alamhulgale A selle lineaarse katte $\lambda(A)$, afiinse katte $\alpha(A)$ või kumera katte $\gamma(A)$ vastavusse seadmine annab kolm sulundioperaatorit $V_n(R)$ (lõplikel) alamhulkadel ning vastavalt ülaltoodule tekib 3 võret.

3.3. *Teoreem 5. Igas võres P rahuldavad alamraja $\wedge$ ja ülemraja $\vee$ järgmisi samasusi:*

V1. $a\wedge a=a$, $\quad a\vee a=a$;

V2. $a\wedge b=b\wedge a$, $\quad a\vee b=b\vee a$;

V3. $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$, $\quad (a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$;

V4. $a\wedge(a\vee b)=a$, $\quad a\vee(a\wedge b)=a$.

Tõestus. Piisab vasakpoolsete võrduste kontrollimisest; parempoolseid kontrollitakse duaalsete arutlustega (*duaalne arutlus* saadakse, kui antud arutluses märgid $\wedge$ ja $\vee$ ning $\leq$ ja $\geq$ vastavalt teineteisega vastastikku asendada kõikjal, kus nad esinevad).

V1: Järjestuse refleksiivsusest $a\leq a$. Kui mõne $b\in P$ korral kehtib $b\leq a$, siis $a\geq b$. Sellest $a\wedge a=a$.

V2: See samasus järeldub alamraja definitsioonist, kuna elemendid a ja b esinevad seal (hulgana $S=\{a,b\}$) sümmeetriliselt.

V3: Alamraja definitsioonist tulenevad seosed

$$(a\wedge b)\wedge c \leqslant a\wedge b \leqslant a,$$
$$(a\wedge b)\wedge c \leqslant a\wedge b \leqslant b,$$
$$(a\wedge b)\wedge c \leqslant c.$$

Järjestuse transitiivsuse tõttu tuleneb võrratuste teisest reast, et $(a\wedge b)\wedge c\leq b$, mis koos $(a\wedge b)\wedge c\leq c$ annab $(a\wedge b)\wedge c\leq b\wedge c$.

Samal ajal $(a\wedge b)\wedge c\leq a$, mistõttu $(a\wedge b)\wedge c\leq a\wedge(b\wedge c)$. Analoogiliselt veendume seose $a\wedge(b\wedge c)\leq(a\wedge b)\wedge c$ kehtivuses. Järjestusseose antisümmeetria tõttu on tulemuseks $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$.

V4: Ühelt poolt alamraja definitsioonist $a\wedge(a\vee b)\leq a$. Teiselt poolt, et $a\in\perp\{a,a\vee b\}$, siis $a\leq a\wedge(a\vee b)$, sest viimase võrratuse parem pool on hulga $\{a,a\vee b\}$ suurim alumine tõke. Oleme saanud $a\leq a\wedge(a\vee b)\leq a$, millest tuleneb vajalik võrdus. ¤

Teoreemist 5 tuleneb, et iga võret võib vaadelda hulgana, millel on antud kaks binaarset algebralist operatsiooni (tähistame neid operatsioone samuti $\wedge$ ja $\vee$), mis rahuldavad samasusi V1-V4, st. algebralise struktuurina. Nii näiteks on võre $(B(M);\subset)$ vaadeldav algebralise struktuurina tehetega $\cap$ ja $\cup$ vastavalt $\wedge$ ja $\vee$ osas; on üldtuntud fakt, et samasused V1-V4 seejuures kehtivad.

Märkame ka, et hulga M suvaliste alamhulkade A ja B jaoks on nii tingimus $A\cap B=A$ kui ka tingimus $A\cup B=B$ ekvivalentsed tingimusega $A\subset B$. Järelikult saab vaadeldavas võres tehteid $\cap$ ja $\cup$ anda üheainsa binaarse relatsiooni kaudu ja selleks relatsiooniks on järjestus $\subset$. Osutub, et analoogiline võimalus eksisteerib kõigis võredes.

<u>Teoreem 6</u>. *Hulka P, millel antud binaarsed algebralised operatsioonid $\wedge$ ja $\vee$ rahuldavad samasusi V1-V4, saab vaadelda o-hulgana, kui temas relatsioon $\leq$ määrata tingimusega*

$$a\leq b \Leftrightarrow a\wedge b=a,$$

(või siis võrdusega $a\wedge b=a$ samaväärse võrdusega $a\vee b=b$). Nii saadud o-hulk on võre, milles kehtivad samasused

$$\inf(a,b)=a\wedge b \qquad \text{ja} \qquad \sup(a,b)=a\vee b.$$

<u>Tõestuseks</u> märkame, et võrdused $a\wedge b=a$ ja $a\vee b=b$ kehtivad samaaegselt. Tõepoolest, $a\wedge b=a$ korral $a\vee b=(a\wedge b)\vee b=b\vee(a\wedge b)=b$. Duaalselt, $a\vee b=b \Rightarrow a\wedge b=a$.

Defineerime hulgas P relatsiooni $\leq$, lugedes $a\leq b$, kui kehtib $a\wedge b=a$ (või, ekvivalentselt, kui kehtib $a\vee b=b$). Näitame, et sellega antakse hulgal P järjestus, kusjuures selle järjestuse puhul kehtivad samasused $\sup(a,b)=a\vee b$ ja $\inf(a,b)=a\wedge b$.

Kõigepealt kontrollime, et binaarne relatsioon, mille hulgal P defineerisime, on järjestus.

O1 kehtib, sest $a\wedge a=a$ kehtib samasuse V1 tõttu.

O2: Seosest $a \le b$ saame $a \wedge b = a$, seosest $b \le a$ aga järeldub $b \wedge a = b$. Samasuse V2 tõttu $a \wedge b = b \wedge a$, millest ka $a = b$.

O3: Seosest $a \le b$ saame $a \wedge b = a$, seosest $b \le c$ järeldub $b \wedge c = b$. Seetõttu $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$. Saime $a \wedge c = a$, millest ka $a \le c$.

Tõestame nüüd, et $\sup(a,b) = a \vee b$; samasus $\inf(a,b) = a \wedge b$ tõestatakse duaalse arutlusega. Selleks märkame, et võrdusest $a \wedge (a \vee b) = a$ tuleneb $a \le a \vee b$ ning võrdusest $b \wedge (b \vee a) = b$ tuleneb $b \le a \vee b$, mistõttu ka $a \vee b \in T\{a,b\} \ge \sup(a,b) = c$. Teiselt poolt, $c = \sup(a,b)$ definitsioonist tuleneb $c \ge a$ ja $c \ge b$, mistõttu $c \vee a = c$ ja $c \vee b = c$. Järelikult $c = c \vee a = (c \vee b) \vee a = c \vee (b \vee a)$ ning seetõttu $c \ge b \vee a$. Et $b \vee a = a \vee b$, siis oleme saanud $c \ge a \vee b$. Kokkuvõttes aga $a \vee b \ge c \ge a \vee b$, seega $c = a \vee b$. ⌑

Teoreemid 5 ja 6 näitavad, et võredest võib rääkida nii järjestuse kui ka algebraliste tehete keeles.

3.4. Järgnevalt kirjeldame võrede mõningaid üldisi omadusi.

Lause 1. Võreoperatsioonid $\wedge$ ja $\vee$ säilitavad teoreemis 6 vaadeldud järjestust, s.t.

$$\forall a, (b \le c) \Rightarrow ((a \wedge b \le a \wedge c) \,\&\, (a \vee b \le a \vee c)).$$

Tõestus. Piisab implikatsiooni $(b \le c) \Rightarrow (a \wedge b \le a \wedge c)$ õigsuse kontrollimisest; teine saadakse duaalse arutlusega. Et $b \le c$ annab $b = b \wedge c$, siis saame

$$a \wedge b = (a \wedge a) \wedge (b \wedge c) \overset{}{\underset{V2,V3}{=}} (a \wedge b) \wedge (a \wedge c),$$

millest $a \wedge b \le a \wedge c$ nähtubki. ⌑

Lause 2. Suvalises võres kehtivad nn. *distributiivsuse võrratused*, s.o. võrratus $a \wedge (b \vee c) \ge (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ja sellega duaalne võrratus $a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Tõestus. Kasutades lauset 1, saame seosest $b \ge a \wedge b$, et $b \vee c \ge (a \wedge b) \vee c \ge (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Teiselt poolt, seoste $a \ge a \wedge b$ ja $a \ge a \wedge c$ tõttu $a \ge (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Näeme, et $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \in \perp\{a, b \vee c\}$, mistõttu $a \wedge (b \vee c) \ge (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Duaalse võrratuse kehtivust tõestab tooduga duaalne arutlus. ⌑

Lause 3. Suvalises võres kehtib nn. *modulaarsuse võrratus*

$$a \le c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge c.$$

Tõestus. Et $a \le a \vee b$ ja $a \le c$, s.t. $a \in \perp\{a \vee b, c\}$, siis ka $a \le (a \vee b) \wedge c$. Samuti märkame, et $b \wedge c \le b \le a \vee b$ ja $b \wedge c \le c$ tõttu $b \wedge c \in \perp\{a \vee b, c\}$, millest $b \wedge c \le (a \vee b) \wedge c$. Kokkuvõttes, näeme $(a \vee b) \wedge c \in$

$\in \mathcal{T}\{a, b\wedge c\}$, millest tuleneb $a\vee(b\wedge c)\leq(a\vee b)\wedge c$ ülemraja definitsiooni kohaselt. ¤

3.5. Võre P *alamvõreks* nimetatakse alamhulka $S\subset P$, mis koos iga kahe oma elemendiga a ja b sisaldab ka elemente inf(a,b) ja sup(a,b). Näiteks, kui $N\subset M$, siis $(B(N);\subset)$ on alamvõreks võres $(B(M);\subset)$.

Võrede A ja B korrutiseks A&B* nimetatakse A ja B kui o-hulkade korrutist (vt. punktis 1.5); vahetu kontroll näitab, et võrede A ja B kui o-hulkade korrutis on võre, milles kehtivad

$$\inf((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = (\inf(a_1,a_2), \inf(b_1,b_2))$$
ja
$$\sup((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = (\sup(a_1,a_2), \sup(b_1,b_2)).$$

Olgu antud võred A ja B; o-homomorfismi (vt. punktis 1.6) $\theta: A\to B$ nimetatakse *võrede homomorfismiks*, kui kehtivad samasused

$$\theta(\inf(a_1,a_2)) = \inf(\theta(a_1), \theta(a_2))$$
ja
$$\theta(\sup(a_1,a_2)) = \sup(\theta(a_1), \theta(a_2)).$$

Lisame, et nende võrduste vasakutes pooltes inf ja sup tähistavad vastavalt alamraja ja ülemraja võres A, paremal aga needsamad inf ja sup - alamraja ja ülemraja võres B.

Alamhulka $\emptyset\neq I\subset P$ nimetatakse *võre P ideaaliks*, kui on täidetud tingimused

$$(a, b\in \mathcal{I}) \Rightarrow (\sup(a,b)\in \mathcal{I})$$
ja
$$((a\in \mathcal{I}) \& (x\leq a)) \Rightarrow (x\in \mathcal{I}).$$

Võre P duaalse ideaali mõiste defineeritakse duaalsel viisil. Võres $(B(M);\subset)$ kannab duaalne ideaal *filtri* nime.

Lugejal on kerge kõiki toodud mõisteid ümber sõnastada ka võres kui algebralises struktuuris antud operatsioonide $\vee$ ja $\wedge$ keeles.

§ 4. POOLMODULAARSED VÕRED

4.1. Käesolevas paragrahvis tuuakse poolmodulaarse võre mõiste ja mõned kombinatoorikas tähtsad näited sellistest võredest. See võrede klass, mille võttis kasutusele G.Birkhoff (1933), annab õiged raamid võreteoreetilisel lähenemisel paljudele kombinatoorika valdkondadele.

Öeldakse, et *võre on lõpliku pikkusega,* kui ta kui o-hulk omab lõplikku pikkust (vt. punktis 1.4). *Poolmodulaarseks* nimetame lõpliku pikkusega võret V, mis rahuldab nõuet

(PM) Kui võre V elemendid a ja b, $a\neq b$, mõlemad katavad mingit elementi $c \in V$, siis element $a \vee b$ katab nii elementi a kui ka elementi b.

Teoreemist 7 (punktis 4.2) nähtub võimalus kasutada vähimat elementi omavates poolmodulaarsetes võredes elemendi kõrguse mõistet. Viimane, olles üheaegseks üldistuseks hulga võimsuse, tükelduse komponentide arvu ja alamruumi dimensiooni mõistetele, viib meid järgnevais paragrahvides laialdast kasutamist leidnud arvude (binoomkordajad, Stirlingi ja Belli arvud, Gaussi ja Galois' arvud) paljude omaduste uue, ühtse käsitluse juurde.

Tähtsaima näite poolmodulaarsetest võredest annavad geomeetrilised võred, kus lisandub veel nende *atomaarsuse nõue* — sellise võre iga element moodustub tehte $\vee$ abil aatomeist, nii nagu iga hulk on üheelemendiliste alamhulkade ühend, või siis iga vektorruum moodustub ühemõõtmelistest alamruumidest. Teoreemist 8 (samas punktis 4.2) järelduvale vahetatavusaksioomile tugineb võimalus lineaarse sõltuvuse ja baasi mõistete oluliseks laiendamiseks kaugele väljaspoole lineaaralgebra piire, viies matroidide (sealhulgas ka kombinatoorsete geomeetriate) juurde. Punktis 4.4 näiteina toodud vektormatroidid ja funktsionaalmatroidid annavad olulisel erijuhul sama matroidide klassi, kandes sellega abstraktsemale tasemele duaalsuse vektorruumi ja tema kaasruumi vahel. Nagu näitab teoreem 10 (punktis 4.4), on kõige tihedam seos geomeetriliste võrede ja kombinatoorsete geomeetriate vahel.

Kõikvõimalikud tükeldused antud n-elemendilisel hulgal moodustavad geomeetrilise võre Π_n. Seda olulist konkreetset näidet kirjeldatakse punktis 4.5. Osutub, et iga võre on isomorfne alamvõrega sobivalt valitud hulga tükelduste võres; lõpmatute võrede korral oli see teada ammu (P.Whiteman, Bull. Amer. Math. Society 52 (1946), 507-522), lõpliku võre sobiva lõpliku hulga tükelduste võresse sisestamise võimalus oli kaua hüpoteesiks, mille hiljuti tõestasid P.Pudlak ja J.Tůma (Algebra Universalis 10 (1980), 74-95). See rakendustes oluline küsimus on lahendatud siiski vaid põhimõtteliselt, sest nimetatud autorite konstruktsioon võib isegi üsna väikeste võrede korral nõuda astronoomilise võimsusega hulga tükelduste vaatlemist.

4.2. *Teoreem 7. Igas poolmodulaarses võres V on täidetud Jordan-Dedekindi tingimus.*

Tõestus. Naturaalarvu n jaoks tähistagu P(n) väidet "kui võres V kehtib $a<b$ ja leidub tihe ahel $\alpha: a=x_0 \lessdot x_1 \lessdot \ldots \lessdot x_n=b$, mille pikkuseks on n, siis iga teine tihe ahel elementide a ja b vahel omab ka pikkust n". Märkame kõigepealt, et P(1) kehtib, sest $n=1$ korral $a \lessdot b$, kusjuures element b katab elementi a, mistõttu teisi ahelaid elementide a ja b vahel polegi.

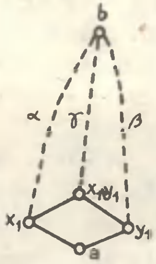
Näitame nüüd, et väite P(n-1) kehtivusest tuleneb väite P(n) kehtivus. Leidugu peale pikkust n omava ahela α veel teine tihe ahel $\beta: a=y_0 \lessdot y_1 \lessdot \ldots \lessdot y_m=b$, $m \neq n$. Siis peab $x_1 \neq y_1$ kehtima, sest vastasel korral elemente $x_1=y_1$ ja b seoksid kaks tihedat ahelat erinevate pikkustega $(n-1 \neq m-1)$, mis on vastuolus oletusega P(n-1) õigsusest. Et võre V rahuldab nõuet (PM), siis element $u_2 := x_1 \vee y_1$ katab elemente x_1 ja y_1. Lisaks, kehtib $u_2 \leq b$, sest $u_2 \vee b = (x_1 \vee y_1) \vee b = x_1 \vee (y_1 \vee b) = x_1 \vee b = b$. Et võre V on lõpliku pikkusega, siis leidub lõplik tihe ahel γ elementide u_2 ja b vahel. Märkame, et $l(\gamma)=n-2$. Tõepoolest, et ahela $x_1 \lessdot \ldots \lessdot x_n=b$ pikkus on n-1, siis on ka ahela (x_1, γ) pikkuseks n-1. Samasuguse pikkusega on ka ahel (y_1, γ), millest P(n-1) tõttu järeldub, et ka ahela $y_1 \lessdot \ldots \lessdot y_m=b$ pikkuseks on n-1, s.t. $m-1=n-1$. Väide on tõestatud matemaatilise induktsiooni meetodiga. ◻

Lõpliku pikkusega võret V nimetatakse *alt poolmodulaarseks*, kui ta rahuldab nõuet

(PM') Kui võre V elemente a ja b, $a \neq b$, mõlemaid kaetakse mingi $c \in V$ poolt, siis nii element a kui ka b katavad elementi $a \wedge b$.

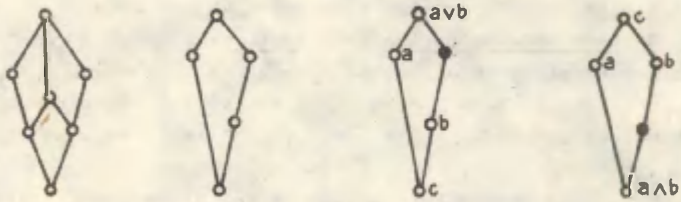
Teoreemi 7 tõestuseks toodud arutlustega duaalsed arutlused näitavad, et tingimus (JD) on täidetud ka igas alt poolmodulaarses võres. Illustratsiooni vt. joonisel 3. ◻

Iga lõik poolmodulaarses võres on ka poolmodulaarne võre,



Joon.3.

samuti on poolmodulaarne poolmodulaarsete võrede korrutis. Samal ajal poolmodulaarse võre alamvõre ei pruugi olla poolmodulaarne. Nii sisaldab joonisel 4 toodud poolmodulaarne võre V alamvõret W, mis ei rahulda tingimust (PM) ega ka tingimust (PM').



võre V alamvõre W ⌐(PM) võres W ⌐(PM') võres W

Joon.4.

Teoreem 8. *Lõpliku pikkusega gradueeritud võre V on poolmodulaarne parajasti siis, kui suvaliste $a,b \in V$ korral kehtib võrratus*

$$(H) \quad h(a)+h(b) \geq h(a\vee b)+h(a\wedge b).$$

Duaalselt, lõpliku pikkusega gradueeritud võre V on alt poolmodulaarne parajasti siis, kui suvaliste $a,b \in V$ korral kehtib võrratus

$$(H') \quad h(a)+h(b) \leq h(a\vee b)+h(a\wedge b).$$

Tõestus. Näitame, et lõpliku pikkusega gradueeritud võres V on õige implikatsioon (H)$\Rightarrow$(PM). Olgu elemendid $a,b,c \in V$ sellised, et $a\neq b$ ja nad mõlemad katavad elementi c. Sel korral $h(a)=h(c)+1$ ja $h(b)=h(c)+1$, millest nõude (H) täidetuse tõttu järeldame $2h(c)+2\geq h(a\vee b)+h(c)$ ehk $h(a)+1=h(b)+1\geq h(a\vee b)$. Viimane seos on täidetud võrdusena. Tõepoolest, võrratusest $h(a)+1>h(a\vee b)$ järelduks $h(a\vee b)\leq h(a)$. Et vastupidine võrratus on ilmne, siis $h(a\vee b)=h(a)$, millest $a\leq a\vee b$ tõttu järelduks $a=a\vee b$, s.o.

8

$a\geq b$. Näeksime, et $a>b$, mistõttu mõlemad elemendid a ja b korraga ei saaks katta elementi c. Vastuolu. Seega, kehtivad võrdused $h(a)+1=h(a\vee b)=h(b)+1$, millest nähtub, et $a\vee b$ katab elemente a ja b. Lähtunud nõude (H) kehtivusest võres V, oleme näidanud nõude (PM) kehtivuse selles võres.

Õige on ka implikatsioon (PM) $\Rightarrow$ (H). Et $a\wedge b\leq a$ ning võre V on poolmodulaarne, siis leidub lõplik tihe ahel $a\wedge b=a_0<a_1<\ldots<$ $<a_m=a$. Analoogiliselt, leidub lõplik tihe ahel $a\wedge b=b_0<b_1<\ldots<$ $<b_n=b$. Märkame, et võrdustest $a_0\vee b_1=b_0\vee b_1=b_1$, $a_1\vee b_0=a_1\vee a_0=a_1$ ja $a_0\vee b_0=(a\wedge b)\vee(a\wedge b)=a_0=b_0$ nähtub, et elemendid $a_0\vee b_1$ ja $a_1\vee b_0$ katavad elementi $a_0\vee b_0$. Nõudest (PM) nähtub nüüd, et element $a_1\vee b_1=(a_0\vee b_1)\vee(a_1\vee b_0)$ katab elemente $a_0\vee b_1$ ja $a_1\vee b_0$.

Näitame induktsiooniga i+j järgi, et element $a_i\vee b_j$ "ülimalt katab" elemente $a_{i-1}\vee b_j$ ja $a_i\vee b_{j-1}$ (s.t. element $a_i\vee b_j$ kas võrdub või katab $a_i\vee b_{j-1}$ ning $a_i\vee b_j$ kas võrdub või katab $a_{i-1}\vee b_j$). Oletame, et elemendid $a_{i-1}\vee b_j$ ja $a_i\vee b_{j-1}$ ülimalt katavad elementi $a_{i-1}\vee b_{j-1}$. Märgates, et $a_i\vee b_j=(a_{i-1}\vee a_i)\vee(b_j\vee b_{j-1})=(a_{i-1}\vee b_j)\vee$ $\vee(a_i\vee b_{j-1})$, järeldame kergesti, et $a_i\vee b_j$ ülimalt katab elemente $a_{i-1}\vee b_j$ ja $a_i\vee b_{j-1}$. Tõepoolest, juhtudel, kus $a_{i-1}\vee b_j$ või $a_i\vee b_{j-1}$ ühtivad elemendiga $a_{i-1}\vee b_{j-1}$, on meie väide triviaalne. Juhul, kui $a_{i-1}\vee b_j$ ja $a_i\vee b_{j-1}$ mõlemad katavad elementi $a_{i-1}\vee b_{j-1}$, kasutame tingimust (PM) ning saame soovitud tulemuse. Võttes tulemuses i=m, veendume, et kõigi j=1,2,...,n korral element $a\vee b_j$ ülimalt katab elementi $a\vee b_{j-1}$. Seetõttu

$$\forall j\in n,\ h(a\vee b_j)-h(a\vee b_{j-1})\leq 1.$$

Summeerides need võrratused üle kõigi $j\in n$, saame võrratuse

$$h(a\vee b_n)-h(a\vee b_0)\leq n.$$

Märkame veel, et saadud võrratuse vasakul poolel seisab $h(a\vee b)-$ $-h(a)$, paremal aga $h(b)-h(a\wedge b)$. Sellest nähtub $h(b)+h(a)\geq$ $\geq h(a\vee b)+h(a\wedge b)$, m.o.t.t..

Duaalsed arutlused näitavad, et tingimusest (H') tuleneb tingimus (PM') ja vastupidi. ¤

Teoreemil 8 on mitmeid huvitavaid järeldusi.

Järeldus 1 (G.Birkhoff). Lõpliku pikkusega võre on poolmodulaarne parajasti siis, kui ta rahuldab nõuet

(B) Kui element a katab elementi $a\wedge b$, siis element $a\vee b$ katab elementi b.

Tõepoolest, olgu lõpliku pikkusega võre V poolmodulaarne.

Kui element a katab elementi $a\wedge b$, siis $h(a)-h(a\wedge b)=1$ ning teoreemist 8 tulenevalt $h(a)-h(a\wedge b)\geq h(a\vee b)-h(b)$. Seetõttu $h(a\vee b)-h(b)\in\{0,1\}$. Kui $h(a\vee b)-h(b)=0$, siis $a\vee b=b$, aga koos sellega ka $a\wedge b=a$, mis võrduse $h(a)-h(a\wedge b)=0$ tõttu on võimatu. Järelikult $h(a\vee b)-h(a)=1$, mis aga tähendab, et element $a\vee b$ katab elementi a.

Vastupidi, kehtigu lõpliku pikkusega võres V tingimus (B). Siis sellest, et nii element a kui element b katavad elementi $a\wedge b=b\wedge a$, tuleneb, et $a\vee b=b\vee a$ katab nii elementi b kui ka elementi a, s.o. kehtib nõue (PM). ¤

Järeldus 2. Igas vähimat elementi omavas poolmodulaarses võres V kehtib nn. *"vahetatavusaksioom"*

Kui p ja q on aatomid võres V ja $a<a\vee p\leq a\vee q$, siis $a\vee p=a\vee q$.

Tõesti, olgu p ja q aatomid poolmodulaarses võres V ja kehtigu $a<a\vee p\leq a\vee q$. Lähtume seosest $a\wedge q\leq q$. Kui siin oleks $a\wedge q=q$, siis $q\leq a$, millest tuleneks $q\vee a\leq a\vee a$, s.o. $q\vee a\leq a$, mis räägib vastu eeldusele $a<a\vee q$. Seetõttu $a\wedge q<q$, millest $a\wedge q=\hat{0}$, sest q on aatom. Teoreemist 8 tuleneb nüüd, et $h(a\vee q)\leq h(q)+h(a)=1+h(a)$. Et võre V sisaldab elementi $\hat{0}$ ja rahuldab tingimust (JD) (teoreem 7), siis kõrgusfunktsioon h gradueerib o-hulka V (vt. punkti 1.4), mistõttu seosest $a\vee q>a$ järeldub $h(a\vee q)>h(a)$, ehk mis sama, $h(a\vee q)\geq h(a)+1$. Koos eespool saadud vastupidise võrratusega annab see $h(a\vee q)=h(a)+1$. Seostest $a<a\vee p\leq a\vee q$ tuleneb nüüd $a\vee p=a\vee q$. ¤

4.3. Poolmodulaarne võre V, milles iga element on V kui o-hulga aatomite sobivalt valitud komplekti ülemrajaks, kannab *geomeetrilise võre nime*. Näite saame järgmiselt. Olgu $S=S_n(K)$ n-mõõtmeline afiinne ruum üle korpuse K, s.o. hulk $S=\{a,b,\dots\}$ (mille elemente nimetatakse *punktideks*) koos kompositsiooniga "+": $S\times V_n\to S$ (vektorruumi $V_n=V_n(K)$ elemente interpreteeritakse hulga S *nihetena*), mis rahuldab nõudeid:

(1) $a+(\bar{x}+\bar{y})=(a+\bar{x})+\bar{y}$,

(2) $a+\bar{0}=a$,

(3) suvaliste $a,b\in S$ jaoks leidub parajasti üks vektor $\bar{x}\in V_n$ nii, et $a+\bar{x}=b$.

Punktihulki $T\subset S$ kujuga $T=\{a+\bar{w}/\bar{w}\in W\}$, kus punkt $a\in S$ ja alamruum $W\leq V_n$ on fikseeritud, nimetatakse *tasandeiks* ruumis S;

täiendavalt loeme, et tühi hulk $\emptyset\subset S$ on ka tasand. Igale alamhulgale $T\subset S$ seame vastavusse vähima tasandi $\tau(T)$, mis hulka T sisaldab. Tekib sulundioperaator $\tau\colon \mathcal{B}(S)\to\mathcal{B}(S)$, mille korral kinnisteks alamhulkadeks on ruumi S tasandid ning viimaste koguhulk $AG_n(K)$ moodustab geomeetrilise võre tehete

$$T_1\wedge T_2 := T_1\cap T_2 \quad \text{ja} \quad T_1\vee T_2 := \tau(T_1\cup T_2)$$

suhtes. Vaadeldaval operaatoril $\tau\colon \mathcal{B}(S)\to\mathcal{B}(S)$ on kaks täiendavat omadust. Esiteks, iga alamhulga $T\subset S$ korral võib leida sellise lõpliku punktihulga T_f, $|T_f|\leqslant n+1$, et $\tau(T_f)=\tau(T)$. Teiseks, S suvaliste selliste punktide a ja b ning tasandi T korral, et $a\notin T$, kuid $a\in\tau(T\cup b)$, kehtib ka $b\in\tau(T\cup a)$. Juhul, kui korpuseks K on Galois' korpus $GF(p^m)$, on $AG_n(K)$ näol tegemist lõpliku võrega. Kui vaadelda vaid fikseeritud punkti läbivate tasandite alamhulka $PG_{n-1}(K)$, saame alamvõre võres $AG_n(K)$, mida nimetatakse *(n-1)-mõõtmeliseks projektiivseks geomeetriaks üle korpuse K*.

Üldisemalt, kui mingi hulga S korral on o-hulgal $(\mathcal{B}(S);\subset)$ antud sulundioperaator Δ, siis räägitakse *sulundiruumist* $(S;\Delta)$. Seejuures, kui sulundiruum $(S;\Delta)$ täidab nõudeid:

(V) Kõigi $a,b\in S$ ja $A\subset S$ korral, kui $a\in\Delta(A\cup\{b\})$ ja $a\notin\Delta(A)$, siis $b\in\Delta(A\cup\{a\})$

ning

(LB) Iga $A\subset S$ jaoks leidub lõplik $A_f\subset A$, nii et $\Delta(A)=\Delta(A_f)$,

siis nimetatakse teda *eelgeomeetriaks* e. (rohkem levinud terminoloogias) *matroidiks* ja tähistatakse $G(S;\Delta)$, aga ka lihtsalt $G(S)$; nõudeid (V) ja (LB) nimetatakse vastavalt (Steinitz-MacLane'i) *Vahetatavusaksioomiks* ja *Lõpliku Baasi aksioomiks*. Kui veel ka $\Delta(\emptyset)=\emptyset$ ja $\Delta(\{a\})=\{a\}$ iga $a\in S$ korral, siis nimetatakse eelgeomeetriat $G(S;\Delta)$ *kombinatoorseks geomeetriaks* ja tähistatakse $G_0(S;\Delta)$. Geomeetria Δ-kinnisi alamhulkasid nimetatakse *tasandeiks* ning nad moodustavad selle geomeetria nn. *tasandite võre* $L_0(S;\Delta)$, kus võreteheteks on $T_1\wedge T_2 := T_1\cap T_2$ ja $T_1\vee T_2 := \Delta(T_1\cup T_2)$. Matroidi mõiste võttis kasutusele H.Whitney (1935), lähtepunktiks analoogia baaside omadustes vektorruumides ja graafides.

4.4. Matroidide näitega tutvusime faktiliselt juba eelmise punkti alguses. Traditsioonilise näite (nn. *vektormatroidi*) genereerib iga vektorite lõplik hulk S vektorruumis V(K). Soovitud omadustega sulundiruum $(S;\Delta)$ tekib, kui operaatori Δ osas vaadelda vastavust, kus igale vektorite hulgale A, $A\subset S$ vastab S alamhulk $S \cap \lambda_K(A)$; siin $\lambda_K(A)$ tähistab vektorite hulga A lineaarset katet (üle korpuse K). Seda näidet saab üldistada.

Olgu fikseeritud mingi lõplik alamhulk S moodulis M üle integriteetkonna (s.t. kommutatiivse, ühikuga ja ilma nulliteguriteta ringi) K; vajaduse korral võib siin M osas mõelda näiteks Abeli rühma kui moodulit üle täisarvude ringi $\mathbb{Z}$, huvipakkuvaks erijuhuks on ka $M=PG_{n-1}(K)$. Sulundiruumi $(S;\Delta)$ saamiseks seame igale $A\subset S$ vastavusse alamhulga $\bar{A}\subset S$, kus $\bar{A}$ olgu kõigi selliste elementide $x\in S$ hulk, millel leidub A elementide kaudu lineaarselt avalduv nullist erinev kordne:

$$\exists\,(0\neq \kappa\in K),\ \kappa x=\sum_{i=1}^{t} l_i a_i\ ;\ l_i\in K\ ,\ a_i\in A.$$

Vastavus Δ: $A\to\bar{A}$ annab sulundioperaatori hulgal S. Tõepoolest, $\bar{A}$ definitsioonist nähtub $A\subset\bar{A}$ (ringis K on ühik). Olgu nüüd A ja B alamhulgad hulgas S ning $A\subset\bar{B}$ ja $x\in\bar{A}$. Et iga element a_i, $i=1,\dots,t$ on $\bar{B}$ element, siis leidub a_i tarvis selline $0\neq k_i\in K$, et kordne $k_i a_i$ avaldub lineaarselt B elementide kaudu. Järelikult avaldub element $(k_1\cdot\ldots\cdot k_t)\cdot(kx)=(k_1\cdot\ldots\cdot k_t k)x$ lineaarselt B elementide kaudu (ring K on kommutatiivne!); sealjuures on element $k_1\ldots k_t k$ nullist erinev, sest ringis K puuduvad nullitegurid. Oleme tõestanud $x\in\bar{B}$. Toodud arutlusest nähtub, et paar $(S;\Delta)$ on sulundiruum.

Aksioom (LB) on sulundiruumis $(S;\Delta)$ täidetud automaatselt, sest hulk S on valitud lõplikuna. Jääb kontrollida nõuet (V). Olgu $y\notin\bar{A}$ ja $y\in\overline{A\cup x}$. Siis K mingi elemendi $q\neq 0$ korral $qy=px+\sum_j' p_j a_j'$, kus $a_j'\in A$ ning $p,p_j\in K$. Et tingimusest $y\notin\bar{A}$ tuleneb $p\neq 0$, siis saadud võrdusest $px=qy+\sum_j'(-p_j)a_j'$ nähtub $x\in\overline{A\cup y}$. ⌘

Viimast näidet veelgi üldistades jõuame nn. funktsionaalmatroidide juurde. Olgu S lõplik hulk ja X - suvaline rühm (antud aditiivses kirjapildis). *Funktsionaalruumiks* hulgal S nimetame funktsioonide $f:S\to X$ iga niisugust hulka F, mis täidab tingimusi:

(F1) Kui $f,g\in F$, siis ka $f-g\in F$; siin $f-g$ on kujutus $S\to X$, mille korral $(f-g)(s)=f(s)-g(s)$ iga $s\in S$ jaoks.

(F2) Kui mõnede $s \in S$, $A \subset S$ korral leidub selline $g \in F$, et $g(s) \neq 0$, aga $g(a)=0$ kõigi $a \in A$ korral, siis iga sellise $x \in X$ korral, mis on mõne funktsiooni $h \in F$ väärtuseks punktis s, leidub ka selline funktsioon $f \in F$, et $x=f(s)$ ja $f(a)=0$ kõigi $a \in A$ jaoks.

Funktsionaalruumi F hulgal S nimetame *täpseks*, kui F *lahutab S elemente*, s.o. on täidetud tingimus

$$\forall (s_1, s_2) \in S \times S, \ (s_1 \neq s_2) \exists f \in F, \ f(s_1) = 0 \neq f(s_2)$$

Olgu lõplikul hulgal S antud mingi funktsionaalruum F. Iga $A \subset S$ korral defineerime *alamhulga A annulaatori*

$$\mathrm{Ann}(A) = \{f \in F \mid f(a)=0 \text{ kõigi } a \in A \text{ jaoks}\}$$

ning iga $B \subset F$ korral *alamhulga B tuuma*

$$\mathrm{Ker}(B) = \{s \in S \mid f(s)=0 \text{ kõigi } f \in B \text{ korral}\}.$$

Lihtne kontroll näitab, et kehtivad järgmised seosed:

$$(1) \ (A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mathrm{Ann}(A_1) \supset \mathrm{Ann}(A_2)) \,\&\, (B_1 \subset B_2 \Rightarrow \mathrm{Ker}(B_1) \supset \mathrm{Ker}(B_2)),$$

ja

$$(2) \ \forall A \subset S, B \subset F, \ (A \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Ann}(A))) \,\&\, (B \subset \mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}(B))).$$

Sellest nähtub, et kujutuste paar (Ann,Ker) on Galois' vastavus o-hulkade $(B(S);\subset)$ ja $(B(F);\subset)$ vahel ning kujutused $A \mapsto \mathrm{Ker}(\mathrm{Ann}(A))$ ja $B \mapsto \mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}(B))$ on sulundioperaatoreiks vastavalt hulkadel $B(S)$ ja $B(F)$; vt. punkti 1.6.

<u>Teoreem 9</u>. *Sulundiruum (S;Ann•Ker) on matroid. Kui funktsionaalruum F on täpne hulgal S, siis sulundiruum (S;Ann•Ker) on kombinatoorne geomeetria.*

Esimese väite <u>tõestuseks</u> piisab näidata, et sulundioperaator Ann•Ker: $B(S) \to B(S)$ rahuldab aksioomi (V). Oletame väitevastaselt, et $s \notin \bar{A}$ ja $s \in \overline{A \cup t}$ korral on võimalik $t \notin \overline{A \cup s}$. Seosest $s \notin \bar{A}$ tuleneb sellise $h \in F$ olemasolu, et $h(A)=0$ ja $h(s) \neq 0$; tähistame $x=h(t)$. Seosest $t \notin \overline{A \cup s}$ järeldub aga sellise $g \in F$ olemasolu, et $g(A \cup s)=0$ ja $g(t) \neq 0$. Tingimuse (F2) täidetuse tõttu leidub selline $f \in F$, et $f(A \cup s)=0$ ja $f(t)=x$. Olgu $r=h-f$; (F1) tõttu $r \in F$. Märkame, et $r(A \cup t)=0$, kuid $r(s)=h(s)-f(s)=h(s)-0=h(s) \neq 0$. Saadud seose $r \in \mathrm{Ann}(A \cup t)$ tõttu peab tingimusest $s \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Ann}(A \cup t))$ tulenema $r(s)=0$. Vastuolu.

Olgu nüüd funktsionaalruum F täpne; sel korral $\mathrm{Ker}(F)=\emptyset$.

Et $Ann(\emptyset)=F$ tuleneb annulaatori definitsioonist, siis $Ker(Ann(\emptyset))=\emptyset$, s.o. $\bar{\emptyset}=\emptyset$. Tõestame, et $\bar{a}=a$. Seos $a\in Ker(Ann(a))$ on ilmne. Kui leiduks element $s\in Ker(Ann(a))$, $s\neq a$, siis võrdus $f(s)=0$ kehtiks kõigi selliste $f\in F$ korral, et $f(a)=0$. Kuid sellisel juhul ruum F ei lahuta elemendipaari $(a,s)\in S\times S$. Vastuolu. ⌘

Lugejal võib tekkida õigustatud küsimus, kas täpsed funktsionaalruumid eksisteerivad? Olgu $H=Hom_K(V_n(K),K)$ kõigi lineaarfunktsionaalide ruum n-mõõtmelisel vektorruumil üle korpuse K. Suvalise lõpliku alamhulga $S\subset V_n(K)$ korral annab kõigi "kitsendite" hulk $F_{(S)}=\{f_{|S}\mid f\in H\}$ meile (täpse) funktsionaalruumi näite. Teoreemis 9 vaadeldud matroide nimetatakse *funktsionaalmatroidideks*. Jätame huvitunud lugejale kontrollida, et erijuhul, kui rühmaks X on mingi integriteetkonna K aditiivne rühm, saame siin matroidid, millest oli juttu eelmises näites.

Osutub, et kombinatoorsed geomeetriad on kõige tihedamas seoses geomeetriliste võredega.

<u>Teoreem 10</u> *(G.Birkhoff, H.Whitney). Iga (lõpliku) geomeetrilise võre P korral aatomite hulgaga S tekitab vastavus $\Delta:A\to\bar{A}$, kus $\bar{A}\subset S$ defineeritakse valemiga*

$$\bar{A}=\{a\in S\mid a\leq \sup A\}$$

kombinatoorse geomeetria $G=G_0(S;\Delta)$, mille tasandite võre $L_0(G)$ on isomorfne võrega P.

<u>Tõestame</u> algul, et kujutus $\Delta:B(S)\to B(S)$, mis iga $A\in B(S)$ korral antakse võrdusega $\Delta(A)=\bar{A}$, on sulundioperaator. Märkame, et iga $A\subset S$ ja $a\in A$ korral kehtib $a\leq\sup A$. Sellest järeldub $A\subseteq\bar{A}$. Olgu nüüd $A,B\subset S$ sellised, et $A\subset\bar{B}$. Tulenevalt $\bar{B}$ definitsioonist, iga $a\in A$ korral $a\leq\sup B$, mistõttu ka $\sup A\leq\sup B$. Sellest $\bar{A}\subset\bar{B}$ ning näeme, et $(S;\Delta)$ on sulundiruum.

Näitame nüüd, et sulundiruum $(S;\Delta)$ on kombinatoorne geomeetria. Et nõue (LB) on täidetud automaatselt (hulk S on lõplik!) ning seosed $\bar{\emptyset}=\emptyset$ ja $\bar{a}=a$ on ilmsed, piisab siin kontrollida nõude (V) täidetust. Olgu $a,b\in S$ ja $A\subset S$ sellised, et $a\notin\bar{A}$ ja $a\in\overline{A\cup b}$. Tähistame $x=\sup A$; seosest $a\notin\bar{A}$ tuleneb $a\not\leq x$. Seetõttu $x\neq x\vee a$, kuid samal ajal $x\leq x\vee a$ kehtib. Järelikult kehtib $x<x\vee a$. Seosest $a\in\overline{A\cup b}$ tuleneb $a\leq\sup(A\cup b)=x\vee b$, s.o. $a\leq x\vee b$, millest

$$x\vee a\leq x\vee(x\vee b)=x\vee b.$$

Seega kehtib $x < x \vee a \leq x \vee b$. Järeldusest 2 teoreemile 8 tuleneb, et $x \vee a = x \vee b$; viimane võrdus on näha ka vahetult, sest element $x \vee b$ katab elementi x, tulenevalt võre P poolmodulaarsusest ja sellest, et (aatom) b katab elementi $x \wedge b = \hat{0}$.

On selge definitsioonist, et aatomite hulk A, $A \subset S$, on kinnine parajasti siis, kui A kujutab endast võre P kõigi nende aatomite hulka, mis on väiksemad võre P mingist elemendist. Et aga P on geomeetriline võre, kus iga element aatomite ühendiks (sup), siis eksisteerib o-isomorfism ψ hulga S kinniste alamhulkade ja o-hulga P elementide vahel. Kuid hulga S kinnised alamhulgad ongi parajasti kombinatoorse geomeetria G tasandeiks. Vahetu kontroll näitab, et vastavus ψ on kooskõlas võreoperatsioonidega ning on seega isomorfismiks geomeetria G tasandite võre ja võre P vahel. ⌘

Teoreemi 10 väide on õige ka lõpmatute geomeetriliste võrede P korral. Me eeldasime P lõplikkust, et vältida lõpmatu S korral aksioomi (LB) kontrollil kerkivaid peensusi seoses vajadusega kasutada valiku aksioomi (õigemini, sellega samaväärset Cermelo teoreemi hulgateooriast).

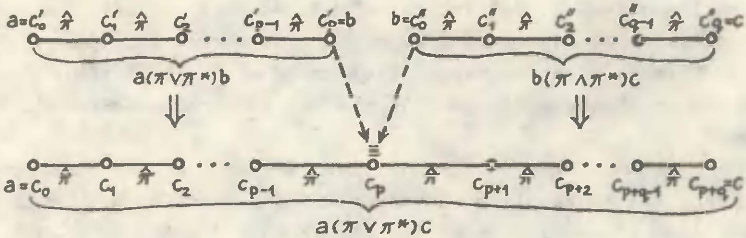
4.5. Hulgal S antud ekvivalentside π ja π^* korral loeme $\pi \leq \pi^*$, kui S kõigi elementide a ja b korral seosest $a\pi b$ järeldub alati seos $a\pi^* b$. Nii tekib hulga S kõigi ekvivalentside o-hulk $\Pi(S)$, mis osutub võreks. Tõepoolest, binaarne relatsioon $\pi \wedge \pi^*$, mis määratakse reegliga

$$\forall a, b \in S, \quad a(\pi \wedge \pi^*)b \Leftrightarrow ((a\pi b) \,\&\, (a\pi^* b)),$$

on ekvivalents ning vahetult definitsioonidest tuleneb $\pi \wedge \pi^* = \inf\{\pi, \pi^*\}$. Hulga S elementide a ja b korral loeme $a(\pi \vee \pi^*)b$, kuid vähemalt ühel viisil saab valida elementide $c_i \in S$ lõpliku jada nii, et

$$(a = c_0) \,\&\, (c_0 \hat{\pi} c_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (c_{p-1} \hat{\pi} c_p) \,\&\, (c_p = b),$$

kus konjunktsiooni igas lülis $\hat{\pi}$ osas esineb kas ekvivalents π või ekvivalents π^*. Veendume nüüd, et selle reegliga hulgal S antud binaarne relatsioon $\pi \vee \pi^*$ on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne. Esiteks, et π kui ekvivalents on refleksiivne, siis kõigi $a \in S$ korral kehtib $a\pi a$, mistõttu ka $a(\pi \vee \pi^*)a$ kehtib (siin loeme $c_0 = c_1 = a$ ja $\hat{\pi} = \pi$). Teiseks, olgu $a(\pi \vee \pi^*)b$. Et relatsiooni $\pi \vee \pi^*$ määrava konjunktsiooni igas lülis esineb kas ekvivalents π või ekvivalents π^*, mis on sümmeetrilised, siis kehtib ka $(b=c_o)\&(c_p\hat{\pi}c_{p-1})\&\ldots\&(c_1\hat{\pi}c_o)\&(c_o=a)$, millest nähtub seose $b(\pi\vee\pi^*)a$ kehtivus. Kolmandaks, relatsiooni $\pi\vee\pi^*$ transitiivsust aitab mõista joonisel 5 toodud skeem (arutluse formalisatsiooni jätame lugejale):



Joon.5.

Lõpuks veendume, et $\pi\vee\pi^*=\sup\{\pi,\pi^*\}$. Seos $\pi\vee\pi^*\in\mathcal{T}\{\pi,\pi^*\}$ on ilmne. Olgu σ suvaline ekvivalents hulgal S, nii et $\pi\leq\sigma$ ja $\pi^*\leq\sigma$ Olgu ka $a(\pi\vee\pi^*)b$; siis leidub elementide $c_i\in S$ lõplik jada, selline, et $(a=c_o)\&(c_o\hat{\pi}c_1)\&\ldots\&(c_{p-1}\hat{\pi}c_p)\&(c_p=b)$. Seejuures, et igas lülis on $\hat{\pi}$ osas kas π või π^*, ja need mõlemad on $\leq\sigma$, siis kehtib ka konjunktsioon $(a=c_o)\&(c_o\sigma c_1)\&\ldots\&(c_{p-1}\sigma c_p)\&(c_p=b)$. Kuid ekvivalents σ on transitiivne, mistõttu kehtib seos $a\sigma b$. Järelikult ka $\pi\vee\pi^*\leq\sigma$. Kokkuvõttes, oleme tõestanud, et o-hulk $\Pi(S)$ on võre. Võret $\Pi(S)$ nimetame *hulga S ekvivalentside võreks.*

Võrest $\Pi(S)$ võib rääkida ka hulga S tükelduste keeles, sest hulgal S antud ekvivalents π määrab hulga S tükelduse π,

$$\pi=\{\,S_i\mid i\in I_\pi;\ S_i\subset S;\ S_i\cap S_j=\emptyset,\ \text{kui } i\neq j;\ S=\bigcup_{i\in I_\pi}S_i\,\},$$

mille tükkideks S_i on parajasti π-klassid, ja vastupidi. Tükelduste keeles tähendab $\pi\leq\pi^*$, et iga π-tükk sisaldub mingis π^*-tükis. Ekvivalentsile $\pi\wedge\pi^*$ vastab tükeldus, mille annavad π-tükkide kõikvõimalikud lõiked π^*-tükkidega. Ekvivalentsile $\pi\vee\pi^*$ vastab peenim selline tükeldus τ hulgal S, et iga alamhulk, mis saadakse omavahel lõikuvate π-tüki ja π^*-tüki hulgateoreetilise ühendina, sisaldub mingis τ-tükis. Võret $\Pi(S)$ võib seetõttu nimetada ka *hulga S tükelduste võreks.*

Vaatleme nüüd võret $\Pi(S)$ juhul, kui hulk S on lõplik. Olgu $|S|=n$ ning tähistagu $n(\pi)$ kõigi π-tükkide arvu hulgal S. Asjaolu, et ekvivalents σ katab ekvivalentsi π, tähendab tükelduste keeles, et tükeldus σ on tükeldusest π saadud viimase kõigi tükkide säilitamisega (s.o. ümbernimetamisega σ-tükkideks) peale mingite kahe π-tüki, mis ühendatakse üheks uueks σ-tükiks hulgal S. Sellest nähtub $n(\pi)=n(\sigma)+1$, millest induktsiooniga saame $h(\pi)=n-n(\pi)$ kõigi $\pi\in\Pi(S)$ korral; vt. punkti 1.4. Võre $\Pi(S)$ aatomeiks on tükeldused, milles kõik tükid peale ühe on üheelemendilised, ja see üks tükk on kaheelemendiline.

Veendume, et võre $\Pi_n=\Pi(S)$, kus $|S|=n$, on poolmodulaarne. Piisab, kui kontrollida tingimust (PM). Selleks olgu π, σ ja τ suvalised elemendid võrest Π_n, nii et tükeldused π ja σ katavad mõlemad tükeldust τ. Olgu näiteks $\tau=S_1\sqcup S_2\sqcup\ldots\sqcup S_t$, $S_i\subset S$. Nüüd, et π ja σ katavad tükeldust τ, peab olema $\pi=(S_1\cup S_2)\sqcup\sqcup S_3\sqcup\ldots\sqcup S_t$ ja $\sigma=S_1\sqcup S_2\sqcup(S_3\cup S_4)\sqcup\ldots\sqcup S_t$ või $\sigma=(S_1\cup S_3)\sqcup\sqcup S_2\sqcup S_4\sqcup\ldots\sqcup S_t$; siin oleme konkreetsuse mõttes (ilma seejuures üldsust kitsendamata) lugenud, et esimesed kaks τ-tükki on ühendatud üheks π-tükiks. Kui realiseerub esimest tüüpi võimalus σ jaoks, siis $\pi\vee\sigma=(S_1\cup S_2)\sqcup(S_3\cup S_4)\sqcup\ldots\sqcup S_t$, teisel juhul aga $\pi\vee\sigma=(S_1\cup S_2\cup S_3)\sqcup\ldots\sqcup S_t$. Mõlemal juhul on vahetult näha, et tükeldus $\pi\vee\sigma$ katab tükeldusi π ja σ. Järelikult kehtib tingimus (PM).Π

Ülalöeldust tuleneb, et ekvivalentside võre Π_n on lõplik geomeetriline võre.

§ 5. MODULAARSED VÕRED

5.1. Võret P, milles kehtib tingimus

(M) $\quad x\leq z \Rightarrow x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge z,$

nimetatakse *modulaarseks*; tingimust (M) nimetatakse ka *Modulaarsuse tingimuseks*.

Punktis 5.2. tõestatakse tulemused, mis iseloomustavad modulaarsete võrede klassi kui (päris)alamklassi poolmodulaarsete võrede klassis ning antakse ka nende võrede iseloomustus kõrgusfunktsiooni termineis (teoreem 12; kõrgusfunktsiooni definitsiooni vt. punktis 1.4).

Käesoleva paragrahvi kolmandas punktis on kirjeldatud tähtsamaid näiteid modulaarsetest võredest. Üheks selliseks on vektorruumi alamruumide võre, mida on eri viisidel iseloomustatud juba möödunud sajandil alanud töödes (von Staudt jt.), nii nagu on mitmeti kirjeldatud ka hulga alamhulkade (Boole'i) võret. Sealjuures on ammu märgatud ka analoogiat nimetatud kahe võre omadustes (arvuteoorias, spetsiaalsete funktsioonide teoorias, jm.). Selle analoogia üks väljendusvorme on suur sarnasus binoomkordajate ja Gaussi arvude omadustes (lähemaid selgitusi vt. § 9). Tema väljendusvormiks on ka ammune soov arendada nn. modulaarset loogikat, mis oleks modulaarsete võredega seotud samamoodi nagu seda on klassikaline loogika distributiivsete võredega; vt. G.Birkhoff, J.Neumann, Annals of Mathematics, 37 (1936), 823-843, klassikalise seose kohta vt. [11], ptk.3. Kõnesolnud näitega on tihedasti seotud ka samas punktis 5.3 vaadeldav projektiivse ruumi alamruumide võre $L(X;S)$. Nende võrede korrutisena (definitsiooni vt. punktis 3.4) avaldub iga modulaarne geomeetriline võre. See G.Birkhoffi poolt 1935.a. tõestatud fakt on modulaarsete võrede kombinatoorikas olulise tähtsusega, kuna temast tulenevalt asetub raskuspunkt modulaarsete geomeetriliste võrede uurimisel suurel määral nende projektiivsete tasandite klassifitseerimisele, mis *Desargues'i nõuet* (vt. punktis 5.3) ei rahulda.

5.2. *Teoreem 11 (R.Dedekind). Modulaarses võres on kujutused* $\Phi_a:[b,a\vee b]\to[a\wedge b,a]$, $\Phi_a(x)=x\wedge a$ *ja* $\Psi_b:[a\wedge b,a]\to[b,a\vee b]$, $\Psi_b(y)=y\vee b$ *järjestust säilitavad ja teineteise pöördkujutused, olles seega o-isomorfismideks näidatud lõikude vahel.*

Tõestus. Olgu võetud elemendid x ja x' lõigult $[b,a\vee b]$ nii et $x\le x'$. Lause 3.1 põhjal

$$\varphi_a(x)=x\wedge a\leqslant x'\wedge a=\varphi_a(x') \text{ s.o. } \varphi_a(x)\leqslant\varphi_a(x').$$

Analoogiliselt, kui $y\le y'$ on mingite $y,y'\in[a\wedge b,a]$ korral, siis

$$\psi_b(y)=y\vee b\leqslant y'\vee b=\psi_b(y') \text{ s.o. } \psi_b(y)\leqslant\psi_b(y').$$

Seega kujutused Φ_a ja Ψ_b on järjestust säilitavad.

Suvalise $x\in[b,a\vee b]$ korral

$$\Psi_b(\Phi_a(x)) = (x\wedge a)\vee b = b\vee(a\wedge x) =$$
$$= (b\vee a)\wedge x = (a\vee b)\wedge x = x,$$

s.o. $\Psi_b(\Phi_a(x))=x$, ehk $\Psi_b\Phi_a=1$. Duaalselt, suvalise $y\in[a\wedge b,a]$ korral $\Phi_a(\Psi_b(y))=(y\vee b)\wedge a=y\vee(b\wedge a)=y\vee(a\wedge b)=y$; seega $(\Phi_a\Psi_b)(y)=y$, ehk $\Phi_a\Psi_b=1$. Näeme, et Φ_a ja Ψ_b on teineteise pöördkujutused. ¤

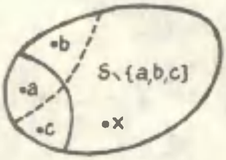
Järeldus. Modulaarses võres on täidetud tingimused (PM) ja (PM').

Tõepoolest, olgu võres P antud elemendid $a\neq b$, mis katavad elementi $c\in P$. Sel korral $c=a\wedge b$, mistõttu lõik $[a\wedge b,b]$ on o-isomorfne o-hulgaga $\mathbf{2}$. Kuid teoreemi 11 alusel on lõik $[a\wedge b,b]$ võres P o-isomorfne lõiguga $[a,a\vee b]$. Resultaadiks on o-isomorfism $[a,a\vee b]\cong\mathbf{2}$, mis näitab, et $a\vee b$ katab elementi a. Analoogiliste mõttekäikudega saab veenduda, et $a\vee b$ katab ka elementi b. Näeme, et võres P on täidetud tingimus (PM). Duaalsete arutlustega saame näidata tingimuse (PM') kehtivuse võres P. ¤

Oluline on lisada, et leiduvad poolmodulaarsed võred, mis pole modulaarsed. Tõepoolest, vaatleme tükelduste võret hulgal S, $|S|\geq 4$. Fikseerinud erinevad elemendid a, b ja c hulgas S, vaatleme tema tükeldusi

$$\pi=\{a,b\}\sqcup(S\setminus\{a,b\}) \quad \text{ja} \quad \sigma=\{a,c\}\sqcup(S\setminus\{a,c\}).$$

Et iga elemendi $x\in S\setminus\{a,b,c\}$ korral $(x\sigma b)\,\&\,(b\pi a)\,\&\,(a\sigma c)$, siis järeldame, et $\pi\vee\sigma=\hat{1}$. Samal ajal nähtub π ja σ definitsioonidest vahetult (vt. ka joonist 6), et $\pi\wedge\sigma=\{a\}\sqcup\{b\}\sqcup\{c\}\sqcup(S\setminus\{a,b,c\})$. Näeme, et tükeldus $\pi\vee\sigma$ katab nii tükeldust π kui ka tükeldust σ, aga samal ajal ei kata tükeldused π ja σ tükeldust $\pi\wedge\sigma$. Seega tingimus (PM') ei ole võrede $\Pi_n (n\geq 4)$ korral täidetud. Teoreemi 11 järeldusest tulenevalt ei saa ekvivalentside võred $\Pi_n (n\geq 4)$ olla modulaarsed. ¤



Joon.6.

Teoeem 12. Lõpliku pikkusega võres P, mis omab vähimat elementi, on ekvivalentsed järgmised tingimused:

(1) võre P on modulaarne;

(2) võre P on nii poolmodulaarne kui ka alt poolmodulaarne;

(3) võres P on täidetud Jordan-Dedekindi tingimus ja kõr-

gusfunktsioon h selles võres rahuldab nõuet

$$h(u)+h(v)=h(u\vee v)+h(u\wedge v).$$

Tõestus. Implikatsioon (1)$\Rightarrow$(2) on teoreemi 11 järelduse sisuks. Implikatsioon (2)$\Rightarrow$(3) järeldub teoreemidest 4.7 ja 4.8, kui arvestada punktis 1.4 tehtud märkust kõrgusfunktsiooni gradueeriva omaduse kohta võres, mis täidab tingimust (JD).

Jääb põhjendada implikatsioon (3)$\Rightarrow$(1). Järgnev põhjendus tugineb printsiibil, et seos $a\leq b$ koos võrdusega $h(a)=h(b)$ vähimat elementi omavas lõpliku pikkusega võres annab $a=b$.

Olgu võres P võetud elemendid x, y ja z, nii et $x\leq z$. Lausest 3.4.3 järeldame, et $x\vee(y\wedge z)\leq(x\vee y)\wedge z$.

Veendume, et $h(x\vee(y\wedge z))=h((x\vee y)\wedge z)$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}
h(x\vee(y\wedge z)) &\underset{(3)}{=} h(x)+h(y\wedge z)-h(x\wedge(y\wedge z)) \underset{(x\leq z)}{=\!=}\\
&= h(x)+h(y\wedge z)-h(x\wedge y)=\\
&= [h(x)-h(x\wedge y)]+h(y\wedge z) \underset{(3)}{=} h(x\vee y)-h(y)+\\
&+h(y\wedge z) \underset{(3)}{=} h(x\vee y)+h(z)-h(y\vee z) \underset{(x\leq z)}{=\!=}\\
&= h(z)+h(x\vee y)-h((x\vee y)\vee z) \underset{(3)}{=}\\
&= h((x\vee y)\wedge z)\ , \quad \text{m.o.t.t.}
\end{aligned}$$

Vastavalt põhjenduse alguses toodud printsiibile järeldame, et kehtib võrdus $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge z$. Sellega oleme tõestanud, et võres P on modulaarsuse tingimus täidetud. ⌘

Lisame, et teoreemi 12 tõestuses kasutatud printsiipi kahel erijuhul on lugeja korduvalt kasutanud: 1) kui üks antud kahest lõplikust hulgast sisaldub teises ja neil hulkadel on ühesugune võimsus, siis need hulgad on võrdsed; 2) kui vektorruumi $V_n(K)$ antud kahest alamruumist üks sisaldub teises ja nende alamruumide dimensioonid on võrdsed, siis need kaks alamruumi ühtivad.

5.3. Näiteid modulaarsetest võredest. (1) Suvalise rühma G normaaljagajad moodustavad modulaarse võre.

Tõepoolest, vaatleme kujutust $\Delta:\mathcal{B}(G)\to\mathcal{B}(G)$, mis igale alamhulgale $T\subset G$ seab vastavusse vähima alamhulka T sisaldava normaaljagaja $\Delta(T)$ rühmas G; kujutus Δ on sulundioperaator ning Δ-kinnised elemendid pole midagi muud kui rühma G normaaljagajad. Vastavalt punkti 3.2 lõpuosas tehtud märkusele moodustavad Δ-kinnised elemendid (s.o. G normaaljagajad; nende hulga tähistame $\mathbb{N}(G)$) võre operatsioonide $A \wedge B = A \cap B$ ja $A \vee B = \Delta(A \cup B)$ suhtes.

Osutub, et suvaliste $A, B \in \mathbb{N}(G)$ korral $\Delta(A \cup B) = \{ab \mid a \in A, b \in B\} = AB$; sellest, muuhulgas, tuleneb $AB = \Delta(A \cup B) = \Delta(B \cup A) = BA$. Et seda väidet põhjendada, märkame kõigepealt, et hulk AB on alamrühmaks rühmas G. Tõesti, suvaliste $a, a_1 \in A$ ja $b, b_1 \in B$ korral

$$(ab)(a_1b_1)^{-1} = abb_1^{-1}a_1^{-1} = \underbrace{aa_1^{-1}}_{\in A} \cdot \underbrace{a_1 \cdot bb_1^{-1} \cdot a_1^{-1}}_{\in B} \in AB.$$

Kuid alamrühm AB on ka normaaljagajaks rühmas G, sest suvaliste $g \in G$, $a \in A$, $b \in B$ korral $g^{-1} \cdot ab \cdot g = g^{-1}ag \cdot g^{-1}bg \in AB$. Siit tuleneb $AB = \Delta(AB) \supset \Delta(A \cup B)$, kuna kehtib $AB \supset A \cup B$ seoste $a = a \cdot 1 \in AB$ ja $b = 1 \cdot b \in AB$ tõttu. Et normaaljagaja $\Delta(A \cup B)$ sisaldab muuhulgas ka oma elementide korrutisi, siis näeme, et $AB \subset \Delta(A \cup B)$. Võrdus $\Delta(A \cup B) = AB$ on põhjendatud.

Veendume nüüd võre $\mathbb{N}(G)$ modulaarsuses. Olgu A, B, C normaaljagajad rühmas G, nii et $A \subset C$. Lausest 3.4.3 tuleneb $A \vee (B \wedge C) \subset (A \vee B) \wedge C$. Et tõestada vastupidist kuuluvust, võtame suvalise elemendi $x \in \Delta(A \cup B) \cap C$. Et $x \in \Delta(A \cup B)$, siis leiduvad elemendid $a \in A$, $b \in B$, nii et $x = ab$; sealjuures $x \in C$. Siit tuleneb $b = a^{-1}x \in AC \subset C$, s.o. $b \in C$. Et ka $b \in B$, siis näeme nüüd, et $b \in B \cap C$. Neist tähelepanekuist tuleneb $x = ab \in A \cdot (B \cap C) = \Delta(A \cup (B \cap C))$. ■

(2) Definitsioonidest järeldub vahetult, et modulaarse võre alamvõre on ka modulaarne. See tähelepanek võimaldab näite (1) baasil saada seeria uusi olulisi näiteid. Nii näiteks, suvalise vektorruumi $V(F)$ alamruumid, moodustades alamvõre (aditiivse) Abeli rühma $V(+)$ alamrühmade võres $\mathbb{N}(V(+))$, on modulaarse võre $\Lambda(V(F))$ elementideks. Kombinatoorika seisukohalt pakub siin erilist huvi järgmine erijuht. Fikseerime suvalised algarvu p, naturaalarvud m ja n ning tähistame $q = p^m$. Olgu F - lõplik korpus, milles on q elementi, s.o. olgu F Galois' korpus $GF(p^m)$ ning V_n - n-mõõtmeline vektorruum üle korpuse F. Ruumi V_n kõigi alamruumide hulk Λ_n (täpsemas tähistuses $\Lambda_{n,q}$ või Λ_{n,p^m}) on o-hulk relatsiooni $\subset$ suhtes ja isegi võre, sest eksisteerivad $A \wedge B = A \cap B$ ja $A \vee B = \lambda(A \cup B)$ (vt. punktis 1.2 toodud näidet (7) ja punkti 3.2). Ülalöeldu alusel on võre Λ_n modu-

laarne.

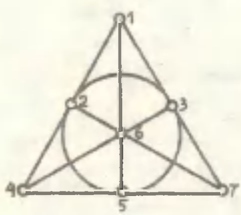
(3) Klassikalise definitsiooni kohaselt nimetatakse *projektiivseks ruumiks* hulka X (mille elemente nimetatakse *punktideks*) koos tema alamhulkade fikseeritud perega $S \subset \mathcal{B}(X)$ (neid alamhulki nimetatakse *sirgeteks*), mis rahuldavad nõudeid:

P1. Kaks erinevat punkti asuvad parajasti ühel sirgel (punktide x ja y poolt määratud sirget tähistame siin [xy]);

P2. Kui kolm punkti ei asu ühel ja samal sirgel (s.t. vastavalt nõudele P1 nad moodustavad kolmnurga) ja mingi sirge omab ühispunkte selle kolmnurga kahe küljega ning seejuures pole nendeks ühispunktideks ükski kolmest antud punktist, siis see sirge omab ühispunkti ka kolmnurga kolmanda küljega;

P3. Igal sirgel asub vähemalt kolm erinevat punkti.

Märkame, et projektiivse ruumi definitsioon on väga üldise iseloomuga. Nii rahuldavad lõplik hulk X={1,2,3,4,5,6,7} ja tema alamhulkade pere S={(124),(235),(346),(457),(561),(672),(713)} nõudeid P1-P3; illustratsiooni vt. joonisel 7. ☐



Joon. 7.

Projektiivse ruumi saame ka, kui hulgaks X loeme üle (kald)korpuse K võetud (n+1)-mõõtmelise vektorruumi $V_{n+1}(K)$ kõikide ühemõõtmeliste alamruumide hulga ning süsteemiks S selle vektorruumi kõikide kahemõõtmeliste alamruumide hulga. Tõepoolest, nõue P1 on täidetud, sest kaks erinevat ühemõõtmelist alamruumi P ja Q määravad lineaarselt sõltumatu vektorite paari $(\bar{p},\bar{q})$, $\bar{p} \in P$, $\bar{q} \in Q$ ning see paar, olles baasiks alamruume P ja Q sisaldavale kahemõõtmelisele alamruumile, määrab viimase üheselt. Et kontrollida nõuet P2, olgu meil antud kolm ühemõõtmelist alamruumi P, Q ja R baasivektoritega vastavalt $\bar{p}$, $\bar{q}$, ja $\bar{r}$. Tingimuse kohaselt moodustavad P, Q ja R kolmnurga, mistõttu peavad vektorid $\bar{p}$, $\bar{q}$ ja $\bar{r}$ olema lineaarselt sõltumatud. Omagu mingi sirge T ühispunkte sirgetega [PQ] ja [QR]; teiste sõnadega, leidugu kahemõõtmelises alamruumis T vektorid $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ ning kaldkorpuses K skalaarid α, β, γ ja δ, nii et

$$\bar{u} = \alpha\bar{p} + \beta\bar{q} \quad \text{ja} \quad \bar{v} = \gamma\bar{q} + \delta\bar{r}.$$

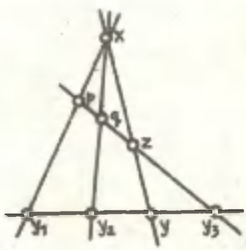
Et nendeks ühispunktideks pole P, Q ega R, siis erinevad kõik nimetatud 4 skalaari nullist. Järeldame, et

$$\beta^{-1}\bar{u} - \gamma^{-1}\bar{v} = (\beta^{-1}\alpha)\bar{p} - (\gamma^{-1}\delta)\bar{r} \in T \cap [PR].$$

Sellest tuleneb, et (nullist erineva) vektori $\beta^{-1}\bar{u}-\gamma^{-1}\bar{v}$ poolt määratud ühemõõtmeline alamruum sisaldub lõikes $T \cap [PR]$. Nõue P3 kehtib samuti, sest iga kahemõõtmelise alamruumi T mingi baasi vektorid $\bar{p}$ ja $\bar{q}$ koos vektoriga $\bar{p}+\bar{q}$ määravad 3 erinevat ühemõõtmelist alamruumi, mis kõik sisalduvad alamruumis T. ∎

Alamhulka $Y \subset X$, mis koos oma iga kahe erineva punktiga sisaldab ka kogu nende punktide poolt määratud sirget, nimetatakse *alamruumiks*.

Sama mõistet saab defineerida ka induktiivselt. Loeme punkte *alamruumideks dimensiooniga 0*. Olgu *alamruumid dimensiooniga* m ($m \leq \kappa$) juba defineeritud. Kui Y on mingi alamruum dimensiooniga κ ja punkt $x \in X$ ei kuulu sellesse alamruumi, siis Y punktid koos punktidega kõigilt sirgetelt, millest igaüks määratakse punkti x ja Y mingi punkti poolt, annavad meile definitsiooni kohaselt *alamruumi dimensiooniga* $\kappa+1$; seda punktihulka tähistame Y^x. Et niimoodi konstrueeritud hulgad Y^x tõesti alamruumid on, tuleneb nõudest P2 (seda kaks korda rakendades); arutlusi illustreerib joonis 8.



Joon. 8.

Kui X ise on (lõpliku) dimensiooniga n, siis räägitakse *n-mõõtmelisest projektiivsest ruumist (X;S)*, erijuhul n=2 aga *projektiivsest tasandist*. Eespool näidetena vaadeldud projektiivsed ruumid on dimensioonidega vastavalt 2 ja n.

Vaatleme nüüd kujutust $\Delta : B(X) \to B(X)$, mis igale alamhulgale $A \subset X$ seab vastavusse projektiivse ruumi (X;S) kõigi nende alamruumide ühisosa, mis sisaldavad hulka A. Vahetult on näha, et Δ on sulundioperaatoriks o-hulgal $(B(X);\subset)$ ning Δ-kinnisteks alamhulkadeks hulgas X on parajasti projektiivse ruumi (X;S) alamruumid. Järelikult (vt. punktis 3.2) moodustavad ruumi (X;S) kõik alamruumid võre, mida nimetatakse *projektiivse* *ruumi (X,S) alamruumide võreks* ja tähistatakse L(X,S).

Tõestame nüüd, et projektiivse ruumi alamruumide võre on modulaarne. Olgu antud ruumi (X;S) suvalised alamruumid A, B ja C nii, et $A \le C$. Et igas võres (lause 3.4.3 põhjal) kehtib võrratus $A \vee (B \wedge C) \le (A \vee B) \wedge C$, siis piisab veenduda vastupidise kuuluvuse õigsuses, s.t. tõestada

$$\Delta(A \cup B) \cap C \subset \Delta(A \cup (B \cap C)).$$

Olgu punkt $x \in \Delta(A \cup B) \cap C$ suvaline. Kui sealjuures $x \in A \cup B$, siis ka $x \in \Delta(A \cup (B \cap C))$. Vaatleme juhtu $x \notin A \cup B$. Et samal ajal $x \in \Delta(A \cup B)$, siis peavad leiduma punktid $a \in A$, $a \notin B$ ja $b \in B$, $b \notin A$, nii et $x \in [ab]$. Märkame ka, et $A \subset C$ tõttu kuulub sirge $[ax]$ alamruumi C. Kuna punktid a ja x kuuluvad sirgele $[ab]$, siis järeldub aksioomist P1, et $[ab]=[ax]$ ja seega $[ab] \subset C$. Sellest tuleneb $b \in C$. Järelikult $x \in [ab] \subset \Delta(A \cup (B \cap C))$.$\square$

5.4. Juhul, kui projektiivne ruum (X;S) on lõplikumõõtmeline, järeldub vahetult definitsioonist, et võre L(X,S) on geomeetriline. Seega on meil tegemist modulaarsete geomeetriliste (alamruumide e. *tasandite*) võredega ka punktis 5.3 näidetena vaadeldud mõlema projektiivse ruumi korral; teises neist näidetest seda võret me tähistasime $PG_n(K)$ (vt. punktis 4.3). Projektiivse geomeetria klassikalise tulemuse kohaselt on juhul $n \ge 3$ iga n-mõõtmelise projektiivse ruumi alamruumide võre isomorfne võrega $PG_n(K)$ sobivalt valitud (kald)korpuse K korral. Analoogiline väide on õige projektiivse tasandi jaoks parajasti siis, kui sellel tasandil kehtib *Desargues'i teoreem* (vt. sõnastust ja selgitusi raamatus [14], lk.376-381); vastavaid projektiivseod tasandeid nimetatakse *desargilisteks*.

Siinkohal märgime, et projektiivne tasand (X;S) on desargiline parajasti siis, kui vastav võre L(X,S) rahuldab nõuet

(Des) $(x_0 \vee y_0) \wedge (x_1 \vee y_1) \wedge (x_2 \vee y_2) \le (x_0 \wedge (z \vee x_1)) \vee (y_0 \wedge (z \vee y_1))$,

kus $z = (x_0 \vee x_1) \wedge (y_0 \vee y_1) \wedge [((x_0 \vee x_2) \wedge (y_0 \vee y_2)) \vee ((x_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee y_2))]$;

vt. B.Jónsson, Mathematica Scandinavica (Copenhagen), 1954, 2, 295-314. Asjaolu, et nõude tüüpi $u \le v$ saab võres asendada ekvivalentse nõudega $u \vee v = v$, lubab tingimusele (Des) anda samasuse kuju. Seoses sellega on oluline lisada, et ka võre modulaarsuse nõudele saab anda samasuse kuju.

Osutub, et tingimus (M) võres V on ekvivalentne samasusega

$$\text{(M')} \qquad x \vee [y \wedge (x \vee z)] = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

aga ka samasusega

$$\text{(M'')} \qquad x \wedge [y \vee (x \wedge z)] = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Tõepoolest, kehtib (M)$\Rightarrow$(M'), sest $x \leq x \vee z$ tõttu

$$x \vee [y \vee (x \vee z)] \underset{(M)}{=} (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Õige on ka (M')$\Rightarrow$(M), sest $x \leq z$ korral $z = x \vee z$, mistõttu $x \vee (y \wedge z) = x \vee [y \wedge (x \vee z)] = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z$, m.o.t.t.

Tingimuste (M) ja (M'') samaväärsus tõestatakse duaalsete arutlustega. ☐

See tähelepanek näitab, et modulaarsed võred moodustavad (teatud liiki universaalalgebrate) muutkonna (asjaolu, mis ei paista välja, kui piirduksime tingimusega (M)), ja siin saab kasutada mõtteskeeme ja tulemusi üldisest muutkondade teooriast.

Mittedesargiliste projektiivsete tasanditega on palju tegeldud, kuid nende klassifikatsioon puudub. Väga keerukaks on osutunud isegi küsimus, kas leidub lõplik projektiivne tasand, mille üks sirgetest koosneb 11 punktist; selle küsimuse konteksti vt. raamatust [15], lk. 238-248.

§ 6. DISTRIBUTIIVSED VÕRED

6.1. Võret $(V;\wedge,\vee)$ nimetatakse *distributiivseks*, kui lisaks samasusestele V1-V4 on võretehete $\wedge$ ja $\vee$ jaoks täidetud veel samasus

$$\text{(D)}: \qquad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Samasust (D) nimetatakse seejuures *Distributiivsuse samasuseks*.

Distributiivsete võrede klass, ise sisaldudes modulaarsete võrede klassis, sisaldab Boole'i võred alamklassina. Distributiivseid võresid on hästi uuritud ning nad leiavad olulist rakendust kombinatoorikas.

Käesolevas paragrahvis (punktis 6.2) antakse mõned lihtsamad näited sellistest võredest (alamhulkade võre, ahelate võre) ja tõestatakse mõned nende üldised omadused (laused 1-3). Seejärel antakse ka Boole'i võre ja Boole'i algebra mõisted ja selgitatakse nende vahekord. Järgmises punktis 6.3 tuuakse lõpliku kasvuga distributiivse võre mõiste ning näidatakse võimalus selliste võrede esituseks nende alt taandumatute elementide o-hulga lõplike ideaalide võredena. Selle tulemuse punktis 6.4 toodud järelduste seas pakub võrede kombinatoorikale huvi eriti järeldus 4. Mitmed kombinatoorikas tuntud arvud (binoomkordajad, Catalani arvud, Fibonacci arvud, jt.) on vaadeldavad lõpliku kasvuga distributiivsete võrede arvuliste karakteristikutena. See tingib järgnevais punktides 6.5-6.7 mõnede konkreetsete distributiivsete võrede (Pascali võre, Fibonacci võre ja Youngi võre) detailsema käsitluse.

Mainime siin üht distributiivsete võredega seotud probleemi. Algebra standardsed kaalutlused (vt. [15], lk.61-65) näitavad, et eksisteerib n moodustajaga vaba distributiivne võre D_n. Saab tõestada, et kõik võred D_n, $n \in \mathbb{N}$, on lõplikud; raamatus [7], lk.63, ül.4 on toodud arvud $|D_n|$, $n \leq 7$. Oleks oluline leida arvude $|D_n|$ eksponentsiaalne genereeriv funktsioon.

6.2. Distributiivse võre näiteks on hulga M alamhulkade võre $(\mathcal{B}(M); \cap, \cup)$, sest siin on distributiivsuse samasus täidetud hulgateoorias tuntud samasusena $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

Olulise klassi näiteid distributiivsetest võredest annavad ahelad suvalises o-hulgas. Selle fakti põhjendamiseks märkame kõigepealt, et ahel on võre, kuna ahelas igal kaheelemendilisel alamhulgal on olemas nii alamraja kui ülemraja. Täidetud on ka distributiivsuse samasus. Tõepoolest, olgu A ahel o-hulgas P ja elemendid $a,b,c \in A$ suvalised. Kui osutub, et $a \in T\{b,c\}$, siis $a \geq b \vee c$, millest $a \wedge (b \vee c) = b \vee c$. Et kehtivad veel võrdused $a \wedge b = b$ ja $a \wedge c = c$, siis saame soovitud võrduse $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Kui aga osutub $a \notin T\{b,c\}$, siis läbi vaadanud siin võimalikud 4 juhtu ($a \leq b \& b \leq c$; $a < b \& b > c$; $a \leq c \& b \leq c$; $a \leq c \& b \leq c$) ja kasutanud aksioomi V4, märkame, et soovitud seos (D) kehtib siin võrdusena $a=a$. ⌘

Vahetu kontroll näitab, et distributiivse võre alamvõred on ka distributiivsed, distributiivse võre duaalne võre on samuti distributiivne ning distributiivne on ka distributiivsete võrede korrutis.

Lause 1. Igas võres on samasus

(D) $\quad x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

ekvivalentne temaga duaalse samasusega

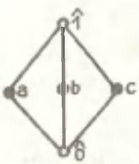
(D') $\quad x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z).$

Tõestus. Näitame, et (D) $\Rightarrow$ (D'); implikatsiooni (D') $\Rightarrow$ (D) annavad duaalsuse kaalutlused. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}(x\vee y)\wedge(x\vee z) &\underset{D}{=} [(x\vee y)\wedge x]\vee[(x\vee y)\wedge z]=\\ &\underset{V2}{=}[x\wedge(x\vee y)]\vee[z\wedge(x\vee y)]\underset{V4}{=} x\vee[z\wedge(x\vee y)]=\\ &\underset{D}{=}x\vee[(z\wedge x)\vee(z\wedge y)]\underset{V3}{=}[x\vee(z\wedge x)]\vee(z\wedge y)=\\ &=x\vee(z\wedge y)\underset{V2}{=}x\vee(y\wedge z)\end{aligned}$$. ¤

Järeldus. Iga distributiivne võre on ka modulaarne.

Tõestus. Tulenevalt lausest 1 piisab näidata, et (D') $\Rightarrow$ (M); nõude (M) kohta vt. punktis 5.1. Tõepoolest, olgu distributiivses võres võetud suvalised elemendid x, y ja z, nii et $x\le z$. Siis $z=x\vee z$, millest järeldub $x\vee(y\wedge z)\underset{D'}{=}(x\vee y)\wedge(x\vee z)=(x\vee y)\wedge z$. ¤



Joon. 9.

Samal ajal, leiduvad modulaarsed mittedistributiivsed võred. Üks neist omab diagrammi, mis on toodud joonisel 9. Vahetu kontroll näitab, et see võre on modulaarne; kontrollida võib seejuures näiteks samasuse (M'') kehtivust (viimase kohta vt. punktis 5.4). Vaadeldava võre distributiivsuse korral peaks kehtima võrdus $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$, s.o. $a=\hat{0}$, mis on võimatu. ¤

Lause 2. Distributiivses võres on õige väide

$$\forall a,(a\wedge x=a\wedge y \;\&\; a\vee x=a\vee y)\Rightarrow(x=y).$$

Tõestus. Kasutades antud võrdusi ning samasusi V1-V4 ja (D), saame

$$\begin{aligned}x&=x\vee(x\wedge a)=x\vee(y\wedge a)=(x\vee y)\wedge(x\vee a)=\\ &=(x\vee y)\wedge(y\vee a)=(y\vee x)\wedge(y\vee a)=y\vee(x\wedge a)=\\ &=y\vee(y\wedge a)=y.\end{aligned}$$ ¤

Vaatleme võret V, mis sisaldab suurimat ja vähimat elementi. Öeldakse, et *element* a sellises võres *omab täiendeid*, kui leidub elemente $x \in V$, nii et

$$a \wedge x = \hat{0} \quad \text{ja} \quad a \vee x = \hat{1} \quad ;$$

iga sellist elementi nimetatakse *elemendi a täiendiks.*

Lause 3. Distributiivses võres V, mis sisaldab suurimat ja vähimat elementi, omab iga element ülimalt ühe täiendi (seetõttu on loomulik elemendi a ainsat täiendit (selle olemasolu korral) tähistada a') ning täiendeid omavad elemendid moodustavad niisuguses võres alamvõre.

Tõestus. Olgu x ja y elemendi a täiendeiks võres V. Siis kehtivad võrdused $a \wedge x = \hat{0} = a \wedge y$ ja $a \vee x = \hat{1} = a \vee y$, millest lause 2 põhjal tuleneb $x = y$.

Teise väite põhjendamiseks piisab näidata, et täiendit omavate elementide alamhulk võres V on kinnine võretehete suhtes. Omagu võre V elemendid a ja b täiendeid, s.t. võres V leidugu elemendid a' ja b', nii et

$$a \wedge a' = \hat{0} = b \wedge b' \quad \text{ja} \quad a \vee a' = \hat{1} = b \vee b' .$$

Siis märkame, et

$$(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') \underset{D}{=} (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge b') =$$
$$= [(a \wedge a') \wedge b] \vee [a \wedge (b \wedge b')] = \hat{0}$$

ja

$$(a \wedge b) \vee (a' \vee b') = (a' \vee b') \vee (a \wedge b) \underset{D}{=}$$
$$= (a' \vee b' \vee a) \wedge (a' \vee b' \vee b) =$$
$$= [(a' \vee a) \vee b'] \wedge [a' \vee (b' \vee b)] = \hat{1}$$

ning duaalselt,

$$(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = \hat{1} \quad \text{ja} \quad (a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = \hat{0} .$$

Sellest nähtub, et elemendid $a \wedge b$ ja $a \vee b$ omavad samuti täiendeid ning neiks täiendeiks on $a' \vee b'$ ja $a' \wedge b'$ vastavalt. ⌑

Boole'i võreks nimetatakse distributiivset võret, mis sisaldab suurimat ja vähimat elementi ning mille kõik elemendid omavad täiendeid. Tuntuimaks näiteks on võre $(B(M); \cap, \cup)$.

Osutub, et Boole'i võred on väga tihedas seoses Boole'i algebratega. Viimaseid tuleb lugeda algebra struktuuride klassikaliseks näiteks, kuna nad said tuntuks juba möödunud sajandi keskel ja sellest ajast peale on leidnud laialdast kasutamist.

Boole'i algebraks nimetatakse hulka koos sellel antud kahe binaarse algebralise tehtega - korrutamine (·) ja liitmine (+) - ning ühe unaarse algebralise tehtega ('), mis täidavad järgmisi arvutusseadusi:

B1.	$a\cdot a=a$,	$a+a=a$;
B2.	$a\cdot b=b\cdot a$,	$a+b=b+a$;
B3.	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$,	$(a+b)+c=a+(b+c)$;
B4.	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$,	$a+b\cdot c=(a+b)\cdot(a+c)$;
B5.	$(a')'=a$,	
B6.	$(a\cdot b)'=a'+b'$,	$(a+b)'=a'\cdot b'$;
B7.	$a\cdot a'+b=b$,	$(a+a')\cdot b=b$.

Tuntuima näite saame, kui antud hulga M kõigi alamhulkade hulgal vaatleme tehete ·, + ja ' osas vastavalt $\cap$, $\cup$ ja alamhulga täiendi võtmist (hulga M suhtes).

<u>*Teoreem 13.*</u> *Boole'i võret $(A;\wedge,\vee)$ võib vaadelda Boole'i algebrana, kui võretehteid $\wedge$ ja $\vee$ vaadelda vastavalt tehete · ja + osas hulgal A ning tehteks ' hulgal A lugeda unaarset tehet, mis võre A igale elemendile seab vastavusse tema täiendi. Vastupidi, Boole'i algebrat (A; ·, +, ') saab vaadelda Boole'i võrena, kui tehteid · ja + algebras A tõlgendada võretehetena $\wedge$ ja $\vee$ hulgal A.*

<u>Tõetus</u>. Kui antud Boole'i võre $(A;\wedge,\vee)$ korral toimida teoreemi esimeses pooles näidatud viisil, siis saame hulga A koos tehetega ·, + ja '. Sealjuures tulenevalt teoreemist 3.3.5 on täidetud samasuste paarid (B1)-(B3). Esimene samasus nõudest B4 on uueks interpretatsiooniks (Boole'i võres kehtivale) samasusele (D), teine samasus paaris (B4) aga uueks tõlgenduseks samasusele(D'), mis kehtib võres A lausest 1 tulenevalt. Samasuste paar (B5) kehtib uue tõlgendusena võres A õigele samasusele $(a')'=a$, paar (B6) on aga uueks interpretatsiooniks samasustele $(a\vee b)'=a'\wedge b'$ ja $(a\wedge b)'=a'\vee b'$, mille kehtivuses me veendusime lauset 3 tõestades. Samasused (B7) on uueks tõlgenduseks Boole'i võres õigetele samasustele $(a\vee a')\wedge b=b$ ja $(a\wedge a')\vee b=b$.

Vastupidi, kui antud Boole'i algebra (A; · ,+,') korral toimida teoreemi sõnastuse teises pooles näidatud viisil, siis saame hulga A koos sellel antud kahe binaarse tehtega $\wedge$ ja $\vee$, mis samasustest (B1)-(B3) tulenevalt rahuldavad nóudeid (V1)-(V3). Et Boole'i algebras A kehtivad vórdused

$$a\cdot(a+b)\underset{B4}{=} a\cdot a + a\cdot b \underset{B4}{=} a + a\cdot b \underset{B1}{=} a\cdot b + a \underset{B7}{=}$$
$$= a\cdot b + a\cdot(b+b')\underset{B4}{=} a\cdot b + (a\cdot b + a\cdot b')\underset{B3}{=}$$
$$=(a\cdot b + a\cdot b) + a\cdot b' \underset{B1}{=} a\cdot b + a\cdot b' =$$
$$\underset{B4}{=} a\cdot(b+b')\underset{B7}{=} a,$$

siis rahuldab hulk A koos temal antud tehetega $\wedge$ ja $\vee$ ka nóuet (V4) ning on teoreemist 3.3.6 tulenevalt vóre. Nóude (B4) esimese samasuse uus tólgendus näitab, et saadud vóre $(A;\wedge,\vee)$ on distributiivne. Samasustest (B7) nähtub, et vórdused $a+a'=b+b'$ ja $a\cdot a'=b\cdot b'$ kehtivad antud Boole'i algebra suvaliste elementide a ja b korral. Seetóttu iga $x\in A$ korral

$$(a+a')+x=(x+x')+x=(x'+x)+x=x'+(x+x)=x'+x=$$
$$=x+x'=a+a',$$

mis uues tólgenduses tähendab (vt. teoreemi 3.3.6), et $a+a'\geq x$. Analoogiliselt saame, et $a\cdot a'\leq x$. Siit näeme, et elemendid $\hat{0}=a\cdot a'$ ja $\hat{1}=a+a'$ on vastavalt vähimaks ja suurimaks elemendiks vóres A. Ühtlasi järeldame siit, et vaadeldavas vóres omavad kóik elemendid täiendeid. Kokkuvóttes näeme, et vóre $(A;\wedge,\vee)$ on Boole'i vóre. ·

Märkame ka, et toodud tóestuse esimeses osas saadud Boole'i algebrale vastav Boole'i vóre langeb kokku esialgselt antud vórega ning tóestuse teises osas saadud Boole'i vórele vastav Boole'i algebra ühtib antud algebraga. ⌑

6.3. Vóre V elementi p nimetatakse *alt taandumatuks*, kui vórdusest $p=x\vee y$ tuleneb $p=x$ vói $p=y$; duaalsel viisil defineeritakse *elemendi ülalt taandumatus*.

Lause 4. Kui distributiivses vóres V on element p alt taandumatu ning $p\leq x_1\vee\ldots\vee x_n$, siis leidub $i\in n$, nii et $p\leq x_i$.

Tóestus. Erijuhul $n=2$ tuleneb tingimusest $p\leq x_1\vee x_2$, et $p=p\wedge(x_1\vee x_2)=(p\wedge x_1)\vee(p\wedge x_2)$. Et aga element p on alt taandumatu, siis $p=p\wedge x_1$ vói $p=p\wedge x_2$. Teiste sónadega, kehtivad seosed $p\leq x_1$ vói $p\leq x_2$, m.o.t.t. Üldjuhu $(n>2)$ saame (triviaalse) induktsiooniga n järgi. ⌑

Definitsioon. Öeldakse, et *distributiivne vóre V on lópliku kasvuga*, kui o-hulk V omab vähimat elementi, on lokaalselt lõplik ning kõrguse iga valitud väärtuse korral oı. antud kõrgust omavate o-hulga V elementide arv lõplik.

Kuna lõpliku kasvuga distributiivses võres on kõik lõigud $[\hat{0},x]$, $x \in V$, lõplikud, siis on sellises võres kõigil elementidel lõplik kõrgus.

Lause 5. Lõpliku kasvuga distributiivse võre iga element on ülemrajaks selle võre kõigi alt taandumatute elementide alamhulga P mingile, antud elemendi poolt üheselt määratud lõplikule antiahelale.

Tõestus. Et lõpliku kasvuga võre V iga elemendi x jaoks on lõik $[\hat{0},x]$ lõplik, siis võib elementi x vaadelda ülemrajana mingile lõplikule alamhulgale o-hulgast P, millest liigsete elementide väljajätmisega võib saada alt taandumatute elementide lõpliku antiahela.

Tõestame vaadeldava antiahela ühesuse. Selleks oletame väitevastaselt, et leiduvad alt taandumatute elementide kaks erinevat antiahelat $\{p_1, \ldots, p_n\}$ ja $\{q_1, \ldots, q_m\}$ nii, et

$$\bigvee\{p_1, \ldots, p_n\} = x = \bigvee\{q_1, \ldots, q_m\}.$$

Fikseerime suvalise $i \in m$; et

$$q_i = q_i \wedge x \quad , \text{siis} \quad q_i = \bigvee_{j=1}^{n} (q_i \wedge p_j) \quad .$$

Viimasest võrdusest ja elemendi q_i alt taandumatusest tulenevalt leidub selline $j \in n$, et $q_i = q_i \wedge p_j$. Seega, iga $i \in m$ jaoks leidub selline $j \in n$, $j = j(i)$, et $q_i \leq p_j$. Toodud arutlusest p ja q osi vahetades näeme, et iga $j \in n$ jaoks leidub selline $\kappa = \kappa(j)$, et $p_j \leq q_\kappa$. Järelikult $q_i \leq q_\kappa$, mis antiahelas $\{q_1, \ldots, q_m\}$ saab kehtida vaid juhul $i = \kappa$. Siis aga $q_i = p_j$ ning toodud arutlust kõigi $i \in m$ jaoks korrates näeme, et $\{q_1, \ldots, q_m\} \subset \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Analoogiliselt võib veenduda, et $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset \{q_1, \ldots, q_m\}$. ◻

Räägime *lõpliku kasvuga o-hulgast P*, kui hulga P iga element sisaldub P kui o-hulga mingis lõplikus ideaalis ja iga $\kappa \in \mathbb{N}$ korral omab võimsust κ vaid lõplik arv o-hulga P ideaale.

Lause 6. Lõpliku kasvuga o-hulga P kõigi lõplike ideaalide hulk $I^*(P)$ on lõpliku kasvuga distributiivne võre tehete $I_1 \wedge I_2 \doteq I_1 \cap I_2$ ja $I_1 \vee I_2 \doteq I_1 \cup I_2$ suhtes.

Tõestus. Loeme $\emptyset \in I^*(P)$. Olgu I_1 ja I_2 suvalised lõplikud ideaalid o-hulgas P. Kui $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, siis suvaliste $x \in I_1 \cap I_2$ ja $y \in P$, $y \leq x$ korral $y \in I_1$ ja $y \in I_2$, s.o. $y \in I_1 \cap I_2$. Sellest tuleneb $I_1 \cap I_2 \in I^*(P)$. Analoogiliselt, suvaliste $x \in I_1 \cup I_2$ ja $y \in P$, $y \le x$ korral $y \in I_1$ või $y \in I_2$, s.o. $y \in I_1 \cup I_2$, millest järeldub $I_1 \cup I_2 \in I^*(P)$. Toodud arutlus näitab, et $(I^*(P); \wedge, \vee)$ on alamvõre alamhulkade võres $(B(P); \cap, \cup)$, olles seetõttu ka distributiivne.

Võre $I^*(P)$ on lõpliku kasvuga. Tõepoolest, ta sisaldab vähimat elementi $\emptyset$ ning suvaliste $I_1, I_2 \in I^*(P)$, $I_1 \subset I_2$ korral, tulenevalt I_2 kui lõpliku hulga alamhulkade arvu lõplikkusest, on lõik $[I_1, I_2]$ o-hulgas $I^*(P)$ lõplik. Jääb veenduda, et antud kõrgust $\kappa \in N$ omavate o-hulga $I^*(P)$ elementide arv on lõplik. Näitame, et elemendi $I \in I^*(P)$ kõrgus ühtib I kui hulga P alamhulga võimsusega, mistõttu soovitud tulemus järeldub sellest, et lõpliku kasvuga o-hulgas P vaid lõplik arv ideaale omab antud võimsust $\kappa \in N$. Seos $h(I) \le |I|$ on ilmne, kuna $I_1 \le I_2$ kehtib võres $I^*(P)$ parajasti siis, kui $I_1 \subset I_2$ leiab aset hulgas P. Et tõestada võrratust $h(I) \ge |I|$, piisab veenduda P ideaalide tiheda, pikkust $\kappa = |I|$ omava ahela $\emptyset = I_0 < I_1 < \ldots < I_\kappa = I$ olemasolus. See aga nähtub faktist, et o-hulga P ideaalist I viimase mingi maksimaalse elemendi eemaldamine annab o-hulga P uue ideaali, kuid ühe võrra väiksema võimsusega, kui on I. Nimetatud fakti saab vahetult kontrollida, kasutades tõsiasja, et I on ideaal o-hulgas P ja (o-hulga I) maksimaalse elemendi definitsiooni (vt. punktis 1.3). $\square$

<u>Teoreem 14</u> *(G.Birkhoff). Olgu V lõpliku kasvuga distributiivne võre ning P selle võre kõigi alt taandumatute elementide hulk. Siis on võre V isomorfne o-hulga P lõplike ideaalide võrega $I^*(P)$ ja o-hulk P on lõpliku kasvuga.*

<u>Tõestus</u>. Seame igale elemendile $x \in V$ vastavusse ideaali $I(x)$ o-hulgas P, $I(x) = \{p \in P \mid p \le x\}$; et antud elemendist vähemaid elemente on o-hulgas V lõplik arv, siis on $I(x)$ lõplik.

Saadud kujutus $\iota : V \to I^*(P)$ osutub üksüheseks. Märkame, et o-hulga P iga lõpliku ideaali I kui o-hulga kõigi maksimaalsete elementide hulk A on lõplikuks antiahelaks o-hulgas P ja A ülemraja $x \in V$ poolt ülalkirjeldatud viisil määratud ideaal $I(x)$ ühtib ideaaliga I. Lisaks, lausest 5 tulenevalt vastavad erinevaile elementidele x ja x' erinevad (nende elementide poolt üheselt määratud) antiahelad $A(x)$ ja $A(x')$. Järeldame, et $I(x) \ne I(x')$.

Tõestame, et kujutus ι ja tema pöördkujutus on järjestust säilitavad. Ühelt poolt, elementide $x,y \in V$, $x \leq y$ ja iga elemendi $p \in I(x)$ korral $p \leq x \leq y$, millest $p \in I(y)$. Näeme, et seosest $x \leq y$ tuleneb $I(x) \leq I(y)$. Teiselt poolt, seosest $I(x) \leq I(y)$ järeldub iga $u \in A(x)$ jaoks $u \leq y$, millest (võretehte $\vee$ monotoonsuse ja idempotentsuse tõttu) saame $x = \bigvee_{u \in A(x)} u \leq y$. Kokkuvõttes näeme, et võre V on isomorfne võrega $I^*(P)$.

Lõpuks veendume selles, et o-hulk P on lõpliku kasvuga. Esiteks, iga element $p \in P$ sisaldub lõplikus ideaalis $I(p)$. Teiseks, tulenevalt võre V lõplikust kasvust on iga $\kappa \in \mathbb{N}$ korral kõrgust κ omavaid V elemente lõplik arv. Sama on aga siis õige ka võrega V isomorfse võre $I^*(P)$ jaoks. Et aga $I \in I^*(P)$ korral $h(I) = |I|$, siis näeme, et iga $\kappa \in \mathbb{N}$ korral omab võimsust κ vaid lõplik arv o-hulga P ideaale. ⌘

6.4. Teoreemist 14 tulenevad vahetult järgmised kaks väidet.

Järeldus 1. Iga lõplik distributiivne võre on isomorfne selle võre alt taandumatute elementide hulga kõigi ideaalide võrega.

Järeldus 2. Kaks lõpliku kasvuga distributiivset võret on isomorfsed parajasti siis, kui nende alt taandumatute elementide o-hulgad on isomorfsed.

Järeldus 3. Kui lõpliku kasvuga distributiivse võre mingi element on ülemrajaks n alt taandumatust elemendist koosnevale antiahelale, siis see element katab täpselt n elementi vaadeldavas võres.

Tõestus. Teoreemi 14 alusel on antud võre V isomorfne lõplike ideaalide võrega $I^*(P)$. Vastaku seejuures elemendile $x \in V$ lõplik ideaal $I = I(x)$ ning olgu p suvaline maksimaalne element o-hulgas I. Vahetu kontroll näitab, et $I_p = I \setminus \{p\}$ on ideaal o-hulgas P. Võres $I^*(P)$ kui o-hulgas katab ideaali I_p ideaal I. Kui mingi ideaali J korral $J \subsetneq I$, siis o-hulga I vähemalt üks maksimaalne element (tähistame teda näiteks p) ei sisaldu hulgas J (vastasel korral saaksime $J = I$), mistõttu $J \subseteq I_p$. Kui seejuures I katab ideaali J, siis $J = I_p$. Sellest arutelust nähtub, et I katab niipalju ideaale o-hulgast P, kui on maksimaalseid elemente o-hulgas I. Teoreemi 14 tõestusest tuleneb, et o-hulga I maksimaalsete elementide arv on võrdne arvuga $|A(x)|$, mis eelduse kohaselt on n. Seega, $I(x)$ katab täpselt n ideaali o-hulgast P. Sellest ja isomorfismist $V=I^*(P)$ tulenevalt katab element x täpselt n elementi võres V. ∎

Järeldus 4. Iga naturaalarvu n korral on lõpliku distributiivse võre diagrammis H nende tippude arv, millest igaüks on n orienteeritud serva alguspunktiks, võrdne diagrammi H nende tippude arvuga, millest igaüks on n orienteeritud serva lõpupunktiks. Muuhulgas (juht n=1) on lõplikus distributiivses võres ülalt taandumatuid elemente samapalju kui alt taandumatuid elemente.

Tõestus. Järeldus 1 lubab antud võret V tõlgendada kui kõigi ideaalide võret $I(P)$, kus P on kõigi alt taandumatute elementide alamhulk o-hulgas V ning duaalset võret V^* võrena $I(Q)$, kus Q on kõigi ülalt taandumatute elementide hulk võres V. Kujutus $\sigma: I \to P\setminus I$ on antiisomorfism o-hulkade $I(P)$ ja $I(P^*)$ vahel. Et ka V ja V^* on antiisomorfsed, siis näeme, et o-hulgad $I(Q)$ ja $I(P^*)$ on isomorfsed. Öeldust tuleneb, et n ülalt taandumatust elemendist koosnevaid antiahelaid on samapalju kui n alt taandumatust elemendist koosnevaid antiahelaid. ∎

Osutub, et paljudel siin vaadeldavail distributiivsetel võredel on olemas *juurdekasvu mõõt*, s.o. eksisteerib funktsioon $f(\kappa,n)$ nii, et alati kui mingi kõrgust κ omav element katab n elementi antud võres, siis tuleneb sellest, et vaadeldavat elementi ennast kaetakse $f(\kappa,n)$ antud võre elemendi poolt. Kui seejuures funktsiooni $f(\kappa,n)$ väärtused ei sõltu arvust κ (tähistame teda siis lihtsalt $f(n)$), kõneldakse *kõrgusest sõltumatu juurdekasvuga* võrest. Täiendav informatsioon vt. R.Stanley, Fibonacci Quart. 13 (1975), 215-232.

6.5. Olgu $\mathbb{N}$ naturaalarvude o-hulk arvude tavalise järjestuse suhtes, $P \doteq \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$ ja $Q \doteq \mathbb{N} \dot{\times} \mathbb{N}$; o-hulkade summa ja korrutise definitsioone vt. punktis 1.5. Osutub, et o-hulk P on lõpliku kasvuga ja $I^*(P)=Q$.

Kõigepealt, summa definitsioonist lähtudes on kerge mõista, et o-hulk P on lõpliku kasvuga. Tõestame, et võred $I^*(P)$ ja Q on isomorfsed. Selleks märkame, et o-hulga P ideaal I määrab üheselt komponendid I_1 ja I_2 ning $I=I_1 \cup I_2$. Seame lõplikule ideaalile I vastavusse naturaalarvude paari (i_1, i_2), kus i_α on komponendis I_α $(\alpha=1,2)$ mittesisalduvaist naturaalarvudest vähim. Kerge on mõista, et kirjeldatud vastavus o-hulga P lõplike ideaalide I ja naturaalarvude paaride $(i_1, i_2) \in \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ vahel on bijektsioon. Lisaks märkame, et o-hulgas $I^*(P)$ kehtib $I \subset J$ parajasti siis, kui $(i_1, i_2) \leq (j_1, j_2)$ kehtib o-hulgas Q.

Öeldust järeldub, et võred $I^*(P)$ ja Q on isomorfsed. Tulenevalt lausest 6 on võre $I^*(\mathbb{N}\oplus\mathbb{N})$ lõpliku kasvuga distributiivne võre, mida nimetame *Pascali võreks*.

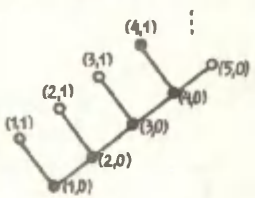
6.6. Arvupaaride hulka

$$\Phi \doteq \{(n,m) \mid n \in \mathbb{N},\ m \in \{0,1\}\}$$

vaatleme o-hulgana, lugedes temas

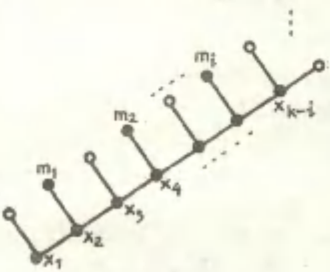
$$(n', m') \leq (n, m),$$

kui kas n'=n ja m'=m või siis m'=0 ja n'≤n; o-hulga Φ diagrammi vt. joonisel 10. Näiteks, (3,1)≤(3,1), (3,0)≤(4,1), kuid (3,0)≰(2,1), (3,1)≰(2,1). Osutub, et o-hulk Φ on lõpliku kasvuga. Esiteks, (iga) element $(n,m) \in \Phi$ sisaldub o-hulga Φ lõplikus ideaalis $I_{(n,m)}$, $I_{(n,m)} = \{(n',m') \mid (n',m') \in \Phi,\ (n',m') \leq (n,m)\}$; näiteks on joonisel 10 toodud ideaal $I_{(4,1)}$, millesse kuuluvad Φ elemendid on kujutatud rasvaselt.



Joon. 10.

Teiseks, antud võimsust $\kappa \in \mathbb{N}$ omab vaid lõplik arv o-hulga Φ ideaale. Tõepoolest, omagu ideaal I võimsust κ. Tähistanud $x_j \doteq (j,0) \in \Phi$, j=1,2,... , olgu i vähim selline täisarv, et $x_{\kappa-i} \in I$. Siis on kerge mõista, et elemendid $x_1, x_2, \ldots, x_{\kappa-i}$ sisalduvad vaadeldavas ideaalis I ning selle ideaali ülejäänud i elementi omavad tingimata kuju $(m_j, 1)$, j=1,2,...,i , kus $\{m_1, m_2, \ldots, m_i\} \subset \subset \{1,2,\ldots,\kappa-i\}$; illustratsiooni vt. joonisel 11, kus ideaali I elemendid on kujuta-



Joon. 11.

tud rasvaselt. Seega, κ elementi sisaldava ideaali määrab täienisti ära alamhulga $\{m_1,\ldots,m_i\}$ valik $(\kappa-i)$-elemendilises naturaalarvude hulgas $\{1,2,\ldots,\kappa-i\}$. Siis nähtub, et võimsust $\kappa \in \mathbb{N}$ omavate o-hulga Φ ideaalide arvuks F_κ on

$$\sum_{i=0}^{\kappa}\binom{\kappa-i}{i} < \infty .$$

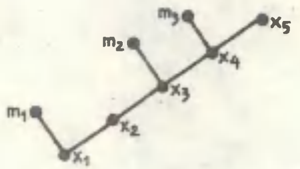
Loeme veel, et $F_0=F_1=1$. Seos $F_\kappa=F_{\kappa-1}+F_{\kappa-2}$ $(\kappa\geq 2)$ järeldub saadud tulemusest vahetu arvutusega ja näitab, et arvu F_κ näol on meil tegemist κ-nda Fibonacci arvuga.

Tulenevalt lausest 6 on võre $F \doteq I^*(\Phi)$ lõpliku kasvuga distributiivne võre, mida nimetatakse *Fibonacci võreks*.

Paari (I,σ), mille esimeseks komponendiks on lõplik ideaal I o-hulgas Φ ja teiseks komponendiks o-hulga I mingi o-bijektsioon σ o-hulka $\{1,2,\ldots,|I|\}$, nimetatakse *Fibonacci tabeliks*; seejuures ideaali I nimetatakse selle *tabeli vormiks*, arvu $|I|$ – *tabeli suuruseks*. Näiteks, vaadeldes joonisel 12 toodud ideaali I ja o-bijektsiooni

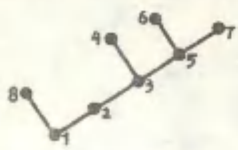
$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & m_2 & m_4 & m_3 & x_5 & m_1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

saame Fibonacci tabeli, mis on toodud joonisel 13.



Joon. 12.

Eksisteerib 1-1-vastavus $\blacktriangle$ suurust κ omavate Fibonacci tabelite (I,σ) ja järku 2 omavate κ-substitutsioonide s vahel. Tõepoolest, iga $z=(n,m)\in I$ korral tähistame $z' \doteq (n,1-m)$; soovitud 1-1-vastavus tekib, kui substitutsioon s anda seostega



Joon. 13.

$$(I,\sigma)^{\blacktriangle} = s \quad , \text{ kus } \quad s(\sigma(z)) = \begin{cases} \sigma(z), & \text{kui } z' \notin I, \\ \sigma(z'), & \text{kui } z' \in I. \end{cases}$$

Meie poolt vaadeldud näites (vt. joonist 13) on vastavaks substitutsiooniks $s=(18)(2)(34)(56)(7)$; siin on substitutsioon s antud tsüklite korrutisena.

Samuti eksisteerib 1-1-vastavus $\square$ üht ja sama vormi ja suurust κ omavate Fibonacci tabelite (järjestatud komponentidega) paaride $((I,\sigma);(I,\tau))$ hulga ning kõigi κ-substitutsioonide s hulga S_κ vahel. Kui substitutsioon s defineerida seostega

$$((I,\sigma);(I,\tau))^{\square} = s \quad , \text{ kus } \quad s(\sigma(z)) = \begin{cases} \tau(z), & \text{kui } z' \notin I, \\ \tau(z'), & \text{kui } z' \in I, \end{cases}$$

tekib soovitud 1-1-vastavus, millel on järgmised omadused:

(1) kui $((I,\sigma);(I,\tau))^{\square} = s$, siis $((I,\tau);(I,\sigma))^{\square} = s^{-1}$,

ja

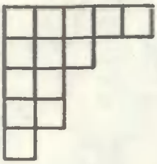
(2) $$((I,\sigma);(I,\sigma))^{\square} = (I,\sigma)^{\blacktriangle}.$$

Ülesanne kontrollida, et kirjeldatud viisil antud kujutused $s:\kappa \to \kappa$ on substitutsioonideks (esimesel juhul täiendava omadusega $s^2=e$, kus e on ühiksubstitutsioon) ning et vastavused $\blacktriangle$ ja $\square$ on tõepoolest bijektsioonideks, jääb lugejale.

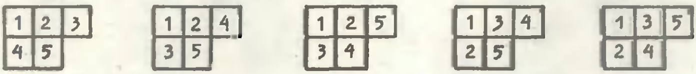
6.7. Tähistagu Y kõigi selliste jadade $\nu=(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_i,\dots)$ hulka, mille komponentideks ν_i on mittenegatiivsed täisarvud, mis esinevad jadas mittekasvavas järjekorras ning nende seas on vaid lõplik arv nullist erinevaid. Tähistame $\kappa(\nu)=\sum\nu_i$. Kui mingi jada $\mu=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_i,\dots)$ puhul $\nu_i \le \mu_i$ kõigi $i\in\mathbb{N}$ jaoks, siis loeme $\nu\le\mu$ hulgas Y.

Osutub, et võre Y on isomorfne võrega $I^*(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. Tõepoolest, igale jadale $\nu=(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_i,\dots)$, kus $\nu_r>\nu_{r+1}=0=\dots=0=\dots$, võib seada vastavusse ideaali $I(\nu)\subset I^*(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ järgmiselt: loeme $(i,j)\in I(\nu)$ parajasti siis, kui $1\le i\le r$ ja $1\le j\le\nu_i$. Antud definitsioonist tuleneb, et $I(\mu)\subset I(\nu)$, kui $\kappa(\mu)\le\kappa(\nu)$ ja kõigi $i\in\{1,2,\dots,\kappa(\mu)\}$ korral kehtib $\mu_i\le\nu_i$. Sellest nähtub, et Y ja $I^*(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ on isomorfsed kui o-hulgad ning seetõttu ka kui distributiivsed võred. Võret $Y\cong I^*(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ nimetatakse *Youngi võreks*.

Youngi võre elementi $\nu=(\nu_1,\nu_2,\dots)$ saab skemaatiliselt esitada ruudukeste massiivina, mis kõigis oma ridades algab ühes ja samas veerus, ν_i ruudukest i-ndas reas; saadavat ruudukeste massiivi nimetatakse *Youngi diagrammiks vormiga* ν ja tähistatakse $[\nu]$. Näiteks, elemendile $\nu=(5,3,4,2,1,0,\dots)$ vastav diagramm [5,3,2,2,1] on toodud joonisel 14. Rühmade esituste teoorias selle algpäevist peale leiavad olulist kasutamist nn. Youngi tabelid. *Vormi* ν *omav Youngi standardne tabel* kujutab endast Youngi diagrammi $[\nu]$ ruudukeste täidet arvudega hulgast $\{1,2,\ldots,\kappa(\nu)\}$ nii, et igasse ruudukesse on kirjutatud arv nimetatud arvuhulgast ja et igas reas ja veerus arvud moodustavad kasvava jada. Näiteks, on olemas 5 Youngi standardset tabelit vormiga [3,2] (vt. joonist 15):



Joon. 14.



Joon. 15.

§ 10 näeme, et Youngi standardsed tabelid vormiga ν on üksüheses vastavuses tihedate ahelatega o-hulga Y elementide $\hat{0}$ ja ν vahel.

§ 7. TÜKELDUSTE VÕREGA SEOTUD ARVUDEST

7.1. *Stirlingi arvud (esimest ja teist liiki)* saavad traditsioonilise määratluse seostest vastavalt

$$(x)_n = \sum_{\kappa=1}^{n} s(n,\kappa)x^{\kappa} \quad \text{ja} \quad x^n = \sum_{\kappa=1}^{n} S(n,\kappa)(x)_{\kappa} \; ;$$

siin $(x)_{\kappa} = x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-\kappa+1)$. *Belli arvud* antakse valemiga

$$B_n = \sum_{\kappa=1}^{n} S(n,\kappa).$$

Käesolevas paragrahvis defineeritakse nimetatud arvud tükelduste võre Π_n arvuliste karakteristikutena ning lineaaralgebra vahenditega leitakse nende omadused; võre Π_n kohta vt. punktis 4.5. Esmakordselt realiseerus niisugune vaatekoht G.-C. Rota töös (Amer. Math. Monthly 71 (1964), 499-504).

7.2. Fikseerime n-elemendilise hulga S ning vaatleme kõikvõimalikke funktsioone $f:S\to X$ väärtustega lõplikus hulgas X, $|X|=n$. Kõigi selliste funktsioonide hulga tähistame X^S, elemente hulgas X^S on x^n tükki. Iga funktsioon $f:S\to X$ määrab hulgal S teatava ekvivalentsi $\pi:(s\sim s'(\pi)$ hulgal $S)\Leftrightarrow(f(s)=f(s')$ hulgas X); nimetatakse seda ekvivalentsi *funktsiooni f tuumaks* ja tähistatakse Ker f.

Küsime, kui paljudel erinevail funktsioonidel $f\in X^S$ on üks ja seesama tuum? Tähistagu $n(\pi)$ ekvivalentsile π vastava tükelduse tükkide arvu. Märkame, et tuuma π omaval funktsioonil on väärtuspiirkonnas $n(\pi)$ erinevat elementi; tõesti, omandab ju selline funktsioon tervel π-tükil üht ja sedasama väärtust hulgast X. Järelikult, küsimus redutseerub selliseks: kui palju on $n(\pi)$-elemendilise hulga injektsioone hulka X? See uus küsimus on aga samaväärne niisuguse küsimusega: kui paljudel eri viisidel saab hulgast X valida $n(\pi)$-elemendilist märgistatud alamhulka (selle alamhulga elemendid on injektsiooni väärtusteks vastavalt esimesel, teisel,..., $n(\pi)$-ndal tükil)? Vastus on teada - valida saab $(x)_{n(\pi)}$ viisil.

Et iga ekvivalents π hulgal S on teatava funktsiooni $f:S\to X$ tuumaks, siis saame võrduse

$$\sum_{\pi\in\Pi_n}(x)_{n(\pi)}=x^n. \qquad (1)$$

Seos (1) kehtib lõpmata paljude naturaalarvude x korral. Järelikult, teda võib vaadelda kahe polünoomi võrdusena.

7.3. Tutvume arvude $B_n\doteq|\Pi_n|$ omadustega, võttes käsitluse aluseks eelmises punktis saadud seose (1).

Et polünoomid $p_u(x)\doteq(x)_u$, $u=0,1,2,\ldots$ moodustavad ratsionaalarvuliste kordajatega polünoomide vektorruumi $\mathbb{Q}[x]$ baasi, määravad valemid

$$L((x)_u)=1\ ,\quad u=0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

üheselt teatava lineaarfunktsionaali $L:\mathbb{Q}[x]\to\mathbb{Q}$. Rakendanud L seose (2.1) mõlemale poolele ning arvestanud definitsioone (1) ja $B_n=|\Pi_n|$, saame

$$B_n=\sum_{\pi\in\Pi_n}1=\sum_{\pi\in\Pi_n}L((x)_{n(\pi)})=L(x^n). \qquad (2)$$

Tuginedes seosele $B_n=L(x^n)$, leiame kõigepealt rekurrentse valemi arvude B_n jaoks. Selleks märkame, et suvalise polünoomi $p(x) \in Q[x]$ korral kehtib seos

$$L(p(x)) = L(x \cdot p(x-1)). \qquad (3)$$

Tõepoolest, olgu $p(x) = \sum_{i\geq 0} p_i(x)_i$, $p_i \in Q$. Ühelt poolt,

$$L(p(x)) = L(\sum_{i\geq 0} p_i (x)_i) = \sum_{i\geq 0} p_i L((x)_i) = \sum_{i\geq 0} p_i .$$

Teiselt poolt,

$$L(x \cdot p(x-1)) = L(\sum_{i\geq 0} p_i x \cdot (x-1)_i) = L(\sum_{i\geq 0} p_i (x)_{i+1}) = \sum_{i\geq 0} p_i .$$

Saadud tulemused on võrdsed, millest ka (3) õigsus.

Konkretiseerime $p(x)=(x+1)^n$ seoses (3),

$$L((x+1)^n) = L(x \cdot ((x-1)+1)^n). \qquad (4)$$

Võrduse (4) vasakut poolt teisendame

$$L((x+1)^n) = L(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} L(x^i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i .$$

Võrduse (4) paremal poolel saame

$$L(x \cdot ((x-1)+1)^n) = L(x^{n+1}) = B_{n+1} .$$

Olemegi saanud rekurrentse valemi

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k . \qquad \text{Ħ} \qquad (5)$$

Saadud valem (5) koos algtingimustega $B_1=1$ ja $B_2=2$ näitab, et arvude B_n näol on meil tegemist *Belli arvudega (e. eksponentsiaalsete arvudega)*; vt. [12].

Leiame eksponentsiaalse genereeriva funktsiooni Belli arvude jaoks, $B(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n$. Selleks märkame, et

$$B(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{L(x^n)}{n!} t^n = L(\sum_{n\geq 0} \frac{(tx)^n}{n!}) = L(e^{tx}).$$

Võtame $1+z=e^t$ ning leiame

$$L(e^{tx}) = L((1+z)^x) = L(\sum_{n\geq 0} \frac{(x)_n}{n!} z^n) = \sum_{n\geq 0} \frac{L((x)_n)}{n!} z^n =$$
$$= \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z = e^{(e^t-1)} .$$

Saime soovitud tulemuse

$$B(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n = e^{(e^t-1)} \qquad (6)$$

Funktsionaali L võib toodud arutlusest elimineerida ning tema kasutamist siin tuleb vaadelda kiire vahendina koefitsientidevaheliste seoste saamiseks kahe (formaalse) rea võrdlemisel. Ħ

Lähedaste võtetega tuletame nn. Dobinski valemi Belli arvudele:

$$B_{n+1} = \frac{1}{e}\left(1^n + \frac{2^n}{1!} + \frac{3^n}{2!} + \dots\right). \tag{7}$$

Selleks märkame kõigepealt, et

$$e = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} = \sum_{k\geq n} \frac{1}{(k-n)!} = \sum_{k\geq n} \frac{(k)_n}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(k)_n}{k!},$$

millest näeme, et funktsionaal L rahuldab seost

$$L((x)_n) = 1 = \frac{1}{e}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{(k)_n}{k!}\right).$$

Seetõttu suvalise polünoomi $p(x) = \sum_{n\geq o} p_n (x)_n$ korral

$$L(p(x)) = \sum_{n\geq 0} p_n\left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{e}\frac{(k)_n}{k!}\right) = \frac{1}{e}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\left(\sum_{n\geq 0} p_n (k)_n\right)\right) = \frac{1}{e}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{p(k)}{k!}\right).$$

Konkretiseerides $p(x) = x^{n+1}$ saadud võrduses, jõuame soovitud valemini

$$L(x^{n+1}) = \frac{1}{e}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{k^{n+1}}{k!}\right). \quad \#$$

7.4. Tähistagu δ_{ij} *Kroneckeri sümbolit*, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i=j, \\ 0, & \text{kui } i\neq j. \end{cases}$ Valemid

$$L_k(p_u(x)) = \delta_{u,k}, \quad u = 0,1,2,\dots \tag{1}$$

määravad üheselt lineaarsed funktsionaalid $L_k : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}$, $k=0,1,2,\dots$. Seosest (2.1) saame arvude $S(n,k) \doteq |\{\pi \in \Pi_n \mid n(\pi) = k\}|$ jaoks järgmise määratluse

$$S(n,k) = \sum_{\pi\in\Pi_n,\, n(\pi)=k} 1 = L_k(x^n). \tag{2}$$

Tuginedes seosele (2), tuletame arvude $S(n,k)$ omadused.

Kõigepealt, kehtib võrdus

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + k\cdot S(n,k). \tag{3}$$

Selleks veendume, et seos

$$L_k(x\cdot p(x)) = L_{k-1}(p(x)) + k\cdot L_k(p(x)) \tag{4}$$

on õige suvalise $p(x)\in \mathbb{Q}[x]$ korral. Funktsionaalide lineaarsuse tõttu piisab (4) kontrollida ruumi $\mathbb{Q}[x]$ baaspolünoomidel:

$$L_k(x\cdot p_u(x)) = L_{k-1}(p_u(x)) + kL_k(p_u(x)). \tag{5}$$

Ühelt poolt,

$$\begin{aligned} L_k(x\cdot p_u(x)) &= L_k((x-u)\cdot p_u(x) + u\cdot p_u(x)) = \\ &= L_k(p_{u+1}(x)) + u\cdot L_k(p_u(x)) = \\ &= \delta_{k,u+1} + u\cdot \delta_{k,u}. \end{aligned}$$

Teiselt poolt, võrduse (5) paremal poolel seisab arv $\delta_{k-1,u} + k\cdot\delta_{k,u}$. Vaadanud läbi kolm juhtu ($u=k$; $u=k-1$; $u\neq k, k-1$), veendume, et võrdus $\delta_{k,u+1} + u\cdot\delta_{k,u} = \delta_{k-1,u} + k\cdot\delta_{k,u}$ kehtib. Spetsialiseerides $p(x)=x^n$ tõestatud seoses (4) ja arvestades (2), saame (3). ⌑

Tõestame nüüd seose

$$S(n+1,\kappa)=\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}\cdot S(i,\kappa-1). \tag{6}$$

Märkame, et definitsioon (2) lubab sellele seosele anda kuju

$$L_\kappa(x^{n+1})=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}L_{\kappa-1}(x^i)$$

ehk

$$L_\kappa(x\cdot((x-1)+1)^n)=L_{\kappa-1}((x+1)^n). \tag{7}$$

Osutub, et suvalise $q(x)\in\mathbb{Q}[x]$ korral kehtib

$$L_\kappa(x\cdot q(x-1))=L_{\kappa-1}(q(x)). \tag{8}$$

Tõepoolest, avaldanud $q(x)$ baaspolünoomi kaudu, $q(x)=\sum_{i\geq 0}q_i p_i(x)$, $q_i\in\mathbb{Q}$, leiame, et

$$L_{\kappa-1}(q(x))=q_{\kappa-1} \quad \text{ja} \quad L_\kappa(x\cdot q(x-1))=$$
$$=L_\kappa\Big(\sum_{i\geq 0}q_i(x\cdot p_i(x-1)\Big)=L_\kappa\Big(\sum_{i\geq 0}q_i p_{i+1}(x)\Big)=q_{\kappa-1},$$

millest järeldubki (8). Konkretiseerides $q(x)=(x+1)^n$ seoses (8), saame (7) ja seega ka (6). ⌑

Leiame eksponentsiaalse genereeriva funktsiooni $S_\kappa(t)=\sum_{n\geq 0}\frac{S(n,\kappa)}{n!}t^n$ arvudele $S(n,\kappa)$ fikseeritud indeksi κ korral, kasutades definitsiooni (2). Selleks märkame, et

$$\sum_{n\geq 0}\frac{S(n,\kappa)}{n!}t^n=\sum_{n\geq 0}\frac{L_\kappa(x^n)}{n!}t^n=\sum_{n\geq 0}L_\kappa\Big(\frac{(xt)^n}{n!}\Big)=L_\kappa\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{(xt)^n}{n!}\Big)=L_\kappa(e^{xt}).$$

Olgu $1+z=e^t$, siis $e^{xt}=(1+z)^x=\sum_{n\geq 0}\binom{x}{n}z^n$, mistõttu

$$L_\kappa(e^{xt})=L_\kappa\Big(\sum_{n\geq 0}\binom{x}{n}z^n\Big)=L_\kappa\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{(x)_n}{n!}z^n\Big)=\sum_{n\geq 0}\frac{L_\kappa((x)_n)}{n!}z^n=$$
$$=\sum_{n\geq 0}\frac{\delta_{\kappa,n}}{n!}z^n=\frac{z^\kappa}{\kappa!}=\frac{1}{\kappa!}(e^t-1)^\kappa;$$

vt. ka märkust valemi (3.6) järel. Näeme, et

$$S_\kappa(t)=\frac{1}{\kappa!}(e^t-1)^\kappa. \tag{9}$$

⌑

Arvestades, et $S(n,0)=0$ ja $S(n,1)=1$, järeldame seosest (3), et arvude $S(n,\kappa)$ näol on tegemist *Stirlingi teist liiki arvudega;* vt. [2], lk. 32.

Stirlingi teist liiki arvude määratlus tükelduste võre kaudu (vt. seost (2)) võimaldab anda vahetu kombinatoorse tõestuse mitmetele tuntud valemitele, näiteks valemile

$$\sum_{\kappa=0}^{n} \binom{n}{\kappa} S(\kappa,i)\cdot S(n-\kappa,j) = \binom{i+j}{i}\cdot S(n,i+j) \qquad (10)$$

Tõepoolest, olgu S lõplik n-elemendiline hulk. Fikseerime arvu κ, $1\le\kappa\le n$ ning tükeldame hulga S nii, et $S=S_1\sqcup S_2$, $|S_1|=\kappa$, $|S_2|=n-\kappa$. Alamhulgad S_1 ja S_2 tükeldame edasi vastavalt i ja j tükiks. Et hulka S_1 saab $S(\kappa,i)$ eri viisil tükeldada i tükiks, hulka S_2 aga $S(n-\kappa,j)$ eri viisil j tükiks, siis κ-elemendilise alamhulga $S_1\subset S$ antud valiku korral (hulk $S_2=S\setminus S_1$ on S_1 valikuga juba üheselt määratud!) on $S(\kappa,i)\cdot S(n-\kappa,j)$ erinevat, vaadeldavat tüüpi tükeldust hulgal S. Kuid hulga S κ-elemendilist alamhulka S_1 saab valida $\binom{n}{\kappa}$ eri viisil, mistõttu fikseeritud κ korral on hulgal S võimalik teostada $\binom{n}{\kappa}S(\kappa,i)\cdot S(n-\kappa,j)$ vaadeldud tüüpi (e. kahekordset) tükeldust. Üldse kokku on hulgal S võimalik teostada

$$\sum_{\kappa=0}^{n}\binom{n}{\kappa}S(\kappa,i)\cdot S(n-\kappa,j)$$

kahekordset tükeldust. Sellega on antud kombinatoorne interpretatsioon võrduse (10) vasakule poolele.

Teiselt poolt, n-elemendilise hulga S saab $S(n,i+j)$ eri viisil tükeldada i+j komponendiks ning iga sellise tükelduse korral võib saadava komponentide hulga $\binom{i+j}{i}$ eri viisil tükeldada kaheks klassiks - ühes i, teises j komponenti. Seetõttu on hulgal S võimalik teostada $\binom{i+j}{i}\cdot S(n,i+j)$ kahekordset tükeldust. On saadud kombinatoorne interpretatsioon võrduse (10) paremale poolele.

Et mõlemal juhul loendati ühe ja sama hulga elemente (kahekordseid tükeldusi n-elemendilisel hulgal S), siis on saadud arvud

$$\sum_{\kappa=0}^{n}\binom{n}{\kappa}S(\kappa,i)\cdot S(n-\kappa,j) \quad \text{ja} \quad \binom{i+j}{i}\cdot S(n,i+j)$$

võrdsed. ⌑

7.5. Vaatleme n eristatava järjestatud objekti paigutusi x eristatavasse järjestatud pesasse. Selliste paigutuste üldarvuks on $x^{(n)}=x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)$; vt. [12], lk.118. Teiselt poolt, iga vaadeldavat tüüpi paigutusi saab tõlgendada kompositsioonina $S\xrightarrow{f'}S\xrightarrow{f''}X$, kus f' on bijektsioon ning f" on kujutus hulgast S hulka X. Iga bijektsioon $f':S\to S$ määrab aga üheselt S tükelduse tsükliteks ja vastupidi; vt. [2], art. 5.2. Et antud tükeldust π tuumaks omavate funktsioonide $f'':S\to X$ arvuks on $x^{n(\pi)}$, siis jõuame võrduseni

$$x^{(n)} = \sum_{\pi \in \Pi_n^*} x^{n(\pi)} , \tag{1}$$

kus Π_n^* tähistab hulga S kõikvõimalike erinevate tsükliteks tükelduste hulka. Siinjuures, et hulka X saab valida lõpmata paljudel eri viisidel, siis (1) on x-polünomiaalne võrdus.

Saadud võrdus (1) võimaldab uut viisi tõestada arvude $c(n,\kappa) \doteq |\{\pi \in \Pi_n^* | n(\pi)=\kappa\}|$ omadusi; definitsioonist nähtub, et arvu $c(n,\kappa)$ võib käsitleda kui selliste n-substitutsioonide arvu, millel on täpselt κ tsüklit.

Võtame kasutusele lineaarfunktsionaalid $T_\kappa : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}$, $\kappa = 1,2,\ldots$, kus T_κ on defineeritud võrdustega

$$T_\kappa(x^u) = \delta_{\kappa,u} \quad , \quad u = 0,1,2,\ldots . \tag{2}$$

Rakendanud funktsionaali T_κ võrduse (1) pooltele, saame

$$T_\kappa(x^{(n)}) = \sum_{\pi \in \Pi_n^*, n(\pi)=\kappa} 1 = c(n,\kappa). \tag{3}$$

Saadud võrdust $c(n,\kappa)=T_\kappa(x^{(n)})$ käsitleme kui arvude $c(n,\kappa)$ definitsiooni ja tõestame valemi

$$c(n,\kappa) = c(n-1,\kappa-1) + (n-1)\cdot c(n-1,\kappa). \tag{4}$$

Tõepoolest, seoseid (3) kasutades saab valemile (4) anda kuju

$$T_\kappa(x^{(n)}) = T_{\kappa-1}(x^{(n-1)}) + (n-1)\cdot T_\kappa(x^{(n-1)})$$

ehk

$$T_\kappa((x+n-1)x^{(n-1)}) = T_{\kappa-1}(x^{(n-1)}) + (n-1)\cdot T_\kappa(x^{(n-1)}).$$

Osutub, et iga vektori $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ korral kehtib

$$T_\kappa((x+n-1)\cdot p(x)) = T_{\kappa-1}(p(x)) + (n-1)\cdot T_\kappa(p(x)). \tag{5}$$

Seost (5) piisab kontrollida vektorruumi $\mathbb{Q}[x]$ baasi $\{x^u | u=0,1,2,\ldots\}$ korral

$$T_\kappa((x+n-1)x^u = T_{\kappa-1}(x^u) + (n-1)\cdot T_\kappa(x^u),$$

s.o.

$$\delta_{\kappa,u+1} + (n-1)\delta_{\kappa,u} = \delta_{\kappa-1,u} + (n-1)\delta_{\kappa,u} . \tag{6}$$

Vaadanud läbi võimalikud juhud ($u=\kappa$, $u=\kappa-1$, $u\neq\kappa$ & $u\neq\kappa-1$), veendume, et võrdus (6) kehtib tõepoolest. ⌘

Arvud $c(n,\kappa)$ võimaldavad seose (1) anda rohkem tuntud kujul

$$x^{(n)} = \sum_\kappa c(n,\kappa)\, x^\kappa , \tag{7}$$

mis jääb õigeks, kui temas teha asendus $x \to (-x)$:

$$(-1)^n \cdot x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)=\sum_\kappa (-1)^\kappa c(n,\kappa)\,x^\kappa$$

ehk

$$(x)_n = \sum_\kappa (-1)^{n+\kappa}\cdot c(n,\kappa)\cdot x^\kappa\,. \tag{8}$$

Tähistame $s(n,\kappa) \doteq (-1)^{n+\kappa}\cdot c(n,\kappa)$. Rakendanud funktsionaali T_κ seose (8) pooltele, saame vahetu määratluse arvudele $s(n,\kappa)$: $s(n,\kappa)=T_\kappa((x)_n)$.

Tõestame rekurrentse valemi

$$s(n+1,\kappa)=s(n,\kappa-1)-n\cdot s(n,\kappa). \tag{9}$$

Kasutades arvude $s(n,\kappa)$ määratlust funktsionaali T_κ kaudu, saame (9) anda kujul

$$T_\kappa((x)_{n+1})=T_{\kappa-1}((x)_n)-nT_\kappa((x)_n)$$

ehk, mis sama,

$$T_\kappa((x-n)\cdot(x)_n)=T_{\kappa-1}((x)_n)-nT_\kappa((x)_n). \tag{10}$$

Osutub, et üldisemalt, on õige seos

$$T_\kappa((x-n)\cdot p(x)) = T_{\kappa-1}(p(x))-nT_\kappa(p(x)) \tag{11}$$

iga $p(x)\in \mathbb{Q}[x]$ korral. Piisab, kui viimast võrdust kontrollida baasi $\{x^u \mid u=0,1,2,\ldots\}$ korral, s.o. piisab veenduda seose

$$T_\kappa((x-n)x^u)=T_{\kappa-1}(x^u)-nT_\kappa(x^u) \tag{12}$$

õigsuses. Definitsioonidest (2) nähtub, et (12) on samaväärne võrdusega $\delta_{\kappa,u+1}-n\delta_{\kappa,u}=\delta_{\kappa-1,u}-n\cdot\delta_{\kappa,u}$, mis kehtib tõepoolest; piisab läbi vaadata juhud $u=\kappa$, $u=\kappa-1$, $u\neq\kappa$ & $u\neq\kappa-1$. ⌘

Lisanud valemile (9) rajatingimused $s(n,0)=0$ ja $s(1,1)=1$ järeldame, et arvude $s(n,\kappa)$ näol on tegemist *Stirlingi esimest liiki arvudega*; vt. [2], lk.31.

§ 8. ALAMRUUMIDE VÕREGA SEOTUD ARVUDEST

8.1. Fikseerime *lõpliku (e. Galois') korpuse F*, milles olgu $q=p^m$ elementi (p - algarv); Galois' korpuste kohta detailsemalt vt. [9], lk.158. Mõõtega n vektorruumi $V_n=V_n(F)$ kõigi alamruumide lõpliku võre*) (vt. punktis 5.3) Λ_n elementide

*) Juhul, kui on vaja rõhutada, et põhikorpuses F on q elementi, tähistame vektorruumi $V_n(q)$ ja võret $\Lambda_n(q)$.

koguarvu tähistame G_n, kõrgust κ omavate elementide arvu aga $[{n \atop \kappa}]$. Seega,

$$[{n \atop \kappa}] = |\{A \in \Lambda_n \mid \dim_F A = \kappa\}| \text{ ja } G_n = |\Lambda_n| = \sum_{\kappa=0}^{n} [{n \atop \kappa}]. \qquad (1)$$

Arvud $[{n \atop \kappa}]$ (vahel tähistatakse neid ka $({n \atop \kappa})_q$) olid arvuteoorias *q-polünoomidena (s. Gaussi polünoomidena)* tuntud ammu (C.F.Gauss, Werke, 2, 1863), teada oli ka enamus nende käesolevas paragrahvis vaadeldavaist omadustest. Lineaaralgebra põhitõdedele tuginev meetod, mida kasutasime eelmises paragrahvis Belli ja Stirlingi arvude omaduste leidmisel, töötab siin *Galois' arvude* G_n ja *Gaussi arvude* $[{n \atop \kappa}]$ korral; vt. J. Goldman, G.-C.Rota, Studies in Applied Math. 49 (1970), 239-258.

8.2. Olgu antud suvaline lõplikumõõtmeline vektorruum X üle korpuse F; tähistame $x \doteq |X|$. Vaatleme kõikvõimalikke lineaarkujutusi ruumist V_n ruumi X ja leiame nende hulga H(X) võimsuse kahel erineval viisil.

Selleks fikseerime ruumis V_n suvalise baasi $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$. Iga kujutus $P \in H(X)$ on üheselt määratud oma väärtustega baasivektoreil, aga erinevaid võimalikke väärtuste komplekte kujutuse P jaoks on x^n tükki.

Seega, $|H(X)| = x^n$.

Teiselt poolt, kasutades lineaarkujutuse tuumaruumi mõistet ja võimalust alamruumi baasi täiendamiseks kogu ruumi V_n baasini, saab ka leida arvu $|H(X)|$. Tõepoolest, olgu alamruum $N \leq V_n$, $\dim_F N = \kappa$, fikseeritud. Valime ruumis V_n baasi $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_\kappa, \bar{e}_{\kappa+1}, \ldots, \bar{e}_n\}$, mille esimesed κ vektorit moodustavad alamruumi N baasi. Valitud baasi seisukohalt tähendab lineaarkujutuse P tuumaruumi ühtimine alamruumiga N seda, et on rahuldatud järgmised kaks tingimust: (1) $P(\bar{e}_i) = \bar{0}$, $i = 1, 2, \ldots,$ ja (2) operaator P ei kujuta nullvektoriks ühtki mittetriviaalset lineaarset kombinatsiooni ülejäänud baasivektoreist $\bar{e}_{\kappa+1}, \ldots, \bar{e}_n$. Seda arvestades saab kergesti loendada neid lineaarkujutusi $P \in H(X)$, mille tuumaruumiks on alamruum N. Selleks märkame, et P võib kujutada: baasivektori $\bar{e}_{\kappa+1}$ igaks nullist erinevaks vektoriks ruumis X - selliseid võimalusi on $x-1$; baasivektori $\bar{e}_{\kappa+2}$ igaks vektoriks ruumis X, mis ei asu $P(\bar{e}_{\kappa+1})$

poolt määratud sirgel, s.o. mis pole $P(\bar{e}_{\kappa+1})$ kordne - võimalusi $x-q$, vektori $\bar{e}_{\kappa+3}$ igaks vektoriks ruumis X, mis ei asu $P(\bar{e}_{\kappa+1})$ ja $P(\bar{e}_{\kappa+2})$ poolt määratud F-tasandil - võimalusi on $x-q^2$, jne. Kokkuvõttes, võimalikke väärtuskomplekte $P(\bar{e}_{\kappa+1})$, $\ldots, P(\bar{e}_n)$ on $(x-1)\cdot(x-q)\cdot\ldots\cdot(x-q^{n-\kappa-1})$ tükki. Et ruumis V_n on κ-mõõtmelisi alamruume $\left[{n \atop \kappa}\right]$ tükki ja iga $\kappa \in \{0,1,\ldots,n\}$ korral on igaüks neist teatava lineaarkujutuse $P \in H(X)$ tuumaruumiks, siis

$$|H(X)| = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \left[{n \atop \kappa}\right] (x-1)(x-q)\ldots(x-q^{n-\kappa-1}) + 1. \tag{1}$$

Arvestades eespool saadut, näeme,

$$x^n = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \left[{n \atop \kappa}\right] (x-1)(x-q)\ldots(x-q^{n-\kappa-1}) + 1. \quad \square \tag{2}$$

Et seos (2) kehtib lõpmata paljude $x \in \mathbb{N}$ korral (vektorruumi X valikut saab varieerida), siis võib teda tõlgendada kahe polünoomi võrdusena.

Tähistame

$$p_0(x) \doteq 1 \quad \text{ja} \quad p_u(x) \doteq (x-1)(x-q)\cdot\ldots\cdot(x-q^{u-1}), \quad u = 1,2,\ldots.$$

Asjaolust $\deg p_u(x) = u$ tuleneb, et polünoomide jada $\{p_u(x) \mid u = 0,1,2,\ldots\}$ on ratsionaalarvuliste kordajatega polünoomide vektorruumi $W = \mathbb{Q}[x]$ baasiks. Seetõttu on iga lineaarne funktsionaal $W \to \mathbb{Q}$ üheselt määratud oma väärtustega polünoomidel $p_u(x)$, $u=0,1,2,\ldots$. Vaatleme lineaarfunktsionaali $L: W \to \mathbb{Q}$, mis antakse valemitega

$$L(p_u(x)) = 1, \quad u = 0,1,2,\ldots \tag{3}$$

ja lineaarfunktsionaale $L_\kappa: W \to \mathbb{Q}$, $\kappa=0,1,2,\ldots$, kus iga L_κ antakse valemiga

$$L_\kappa(p_u(x)) = \delta_{\kappa,u}, \quad u = 0,1,2,\ldots \tag{4}$$

Rakendanud võrduse (2) mõlemale poolele funktsionaali L, saame

$$L(x^n) = \sum_{\kappa=0}^{n} \left[{n \atop \kappa}\right] = G_n. \tag{5}$$

Summeerimisindeksi ja -järjekorra muutmisega saab võrdusele (2) anda kuju

$$x^n = \sum_{\kappa=0}^{n} \left[{n \atop n-\kappa}\right] \cdot p_\kappa(x) \tag{2'}$$

Rakendanud võrduse (2') mõlemale poolele funktsionaali L_κ, saame

$$\left[{n \atop n-\kappa}\right] = L_\kappa(x^n). \tag{6}$$

8.3. Kehtib järgmine rekurrentne valem

$$G_{n+1} = 2G_n + (q^n-1)\cdot G_{n-1}. \tag{1}$$

Tõepoolest, seosed (2.5) lubavad valemile (1) anda kuju

$$L(x^{n+1}) = 2L(x^n) + (q^n-1)\cdot L(x^{n-1}). \tag{2}$$

Kasutame nüüd *polünoomi p(x) Euleri tuletist* - lineaaroperaatorit $D_q: W \to W$, mis määratakse valemiga

$$D_q p(x) = \frac{1}{x}[p(qx) - p(x)]. \tag{3}$$

Leiame, et

$$D_q x^u = \frac{(qx)^u - x^u}{x} = (q^u-1)\cdot x^{u-1} \tag{4}$$

ja

$$\begin{aligned} D_q p_u(x) &= \frac{1}{x}\left[(qx-1)(qx-q)\ldots(qx-q^{u-1}) - (x-1)\cdot\ldots\cdot(x-q^{u-1})\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[q^{u-1}(qx-1)\cdot p_{u-1}(x) - (x-q^{u-1})\cdot p_{u-1}(x)\right] = \\ &= (q^u-1)\cdot p_{u-1}(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Kasutades võrdust (4), saab tõestatavale valemile (2) anda kuju

$$L(x\cdot x^n) = 2L(x^n) + L(D_q x^n). \tag{6}$$

Kuid $\{x^n | n \geq 0, n \in \mathbb{Z}\}$ on vektorruumi W baas, mistõttu (operaatori D_q ja funktsionaali L lineaarsust kasutades) valemist (6) tuleneb

$$\forall p(x) \in W, \ L(x\cdot p(x)) = 2L(p(x)) + L(D_q p(x)). \tag{7}$$

Näitame, et seos (7), millest spetsialisatsiooniga tuleneb (2), tõepoolest kehtib. Lähtume ühelt poolt seosest

$$p_{n+1}(x) + q^n\cdot p_n(x) = x\cdot p_n(x).$$

Funktsionaali L rakendamine selle võrduse pooltele annab

$$1 + q^n = L(x\cdot p_n(x)). \tag{8}$$

Teiselt poolt, lähtume võrdusest (5). Liidame tema pooltele $2p_{n-1}(x)$ ning seejärel saadud võrdusele rakendame funktsionaali L:

$$L(D_q p_n(x)) + 2L(p_n(x)) = q^n + 1. \tag{9}$$

Seosed (8) ja (9) näitavad, et

$$L(x\cdot p_n(x)) = 2L(p_n(x)) + L(D_q p_n(x)).$$

Et viimane võrdus kehtib ruumi W baasi $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ vektorite jaoks, siis on ta õige ka iga $p(x) \in W$ korral $p_n(x)$ osas. ∎

Leiame genereeriva funktsiooni *Galois' arvude* G_n jaoks; seejuures otsime nn. *Euleri genereerivat funktsiooni* arvudele G_n,

$$G(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{G_n t^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} . \qquad (10)$$

Tõestame, et otsitava formaalse rea annab valem

$$G(t) = \prod_{k \geq 0} \frac{1}{(1-q^k t)^2} . \qquad (11)$$

Lähtume seosest (7), kus asendame $p(x)$ polünoomiga $D_q p(x)$. Saame

$$\forall p(x) \in W, \; L(x \cdot D_q p(x)) = 2L(D_q p(x)) + L(D_q^2 p(x)).$$

Spetsialiseerides $p(x) = x^n$ ja arvestades seoseid (4), leiame

$$L[x \cdot (q^n - 1)x^{n-1}] = 2L[(q^n-1)x^{n-1}] + L[(q^n-1)(q^{n-1}-1)x^{n-2}],$$

millest (L lineaarsuse tõttu) tuleneb

$$q^n L(x^n) - L(x^n) = 2(q^n-1)L(x^{n-1}) + (q^n-1)(q^{n-1}-1)L(x^{n-2})$$

ehk

$$q^n G_n = G_n - 2(1-q^n)G_{n-1} + (1-q^n)(1-q^{n-1})G_{n-2} .$$

Korrutame viimase võrduse vasakut ja paremat poolt avaldisega

$$\frac{t^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}$$

ja summeerime üle kõigi mittenegatiivsete täisarvude n. Saame

$$G(qt) = G(t) - 2t \cdot G(t) + t^2 \cdot G(t).$$

Saadud valemist näeme, et

$$G(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \cdot G(qt)$$

$$G(qt) = \frac{1}{(1-qt)^2} \cdot G(q^2 t)$$

$$G(q^2 t) = \frac{1}{(1-q^2 t)^2} \cdot G(q^3 t)$$

....

jne.

milles asendused noolte suunas viivadki meid valemini (11). ∎

8.4. Lähtunud seosest (2.6), leiame arvude $[{n \atop \kappa}]$ mõned omadused.

Kehtib valem

$$\left[{n \atop n-\kappa}\right] = \frac{q^n-1}{q^\kappa-1}\cdot\left[{n-1 \atop n-\kappa}\right]. \tag{1}$$

Tõestuseks veendume, et suvalise polünoomi $p(x) \in W$ korral

$$(q^\kappa-1)L_\kappa(p(x)) = L_{\kappa-1}(D_q p(x)). \tag{2}$$

Tänu funktsionaali L_κ ja operaatori D_q lineaarsusele piisab, kui seost (2) kontrollida baaspolünoomidel $p_u(x)$:

$$(q^\kappa-1)L_\kappa(p_u(x)) = L_{\kappa-1}(D_q p_u(x)). \tag{3}$$

Kui arvestada seost (3.5) ja definitsioone (2.4), võtab (3) kuju

$$(q^\kappa-1)\cdot\delta_{\kappa,u} = (q^u-1)\delta_{\kappa-1,u-1}. \tag{4}$$

Vaadanud läbi siin võimalikud juhud $u=\kappa$ ja $u\neq\kappa$, veendume, et seos (4) tõesti kehtib, millega on põhjendatud ka (2). Spetsialiseerides $p(x)=x^n$ seoses (2), saame

$$(q^\kappa-1)L_\kappa(x^n) = L_{\kappa-1}(D_q x^n),$$

millest definitsiooni (2.6) ja võrduse (3.4) tõttu tulenebki (1). ∎

Valemit (1) rekursiooniseosena tõlgendades leiame

$$\left[{n \atop n-\kappa}\right] = \frac{q^n-1}{q^\kappa-1}\cdot\left[{n-1 \atop n-\kappa}\right] = \frac{q^n-1}{q^\kappa-1}\cdot\left[{n-1 \atop (n-1)-(\kappa-1)}\right] =$$

$$= \dots = \frac{q^n-1}{q^\kappa-1}\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q^{\kappa-1}-1}\cdot\ldots\cdot\frac{q^{n-(\kappa-1)}-1}{q-1}\cdot\left[{n-\kappa \atop n-\kappa}\right].$$

Kuid $[{n-\kappa \atop n-\kappa}]=1$. Oleme saanud

$$\left[{n \atop n-\kappa}\right] = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{n-\kappa+1}-1)}{(q^\kappa-1)(q^{\kappa-1}-1)\cdot\ldots\cdot(q-1)} \quad . ∎ \tag{5}$$

Viimasest valemist nähtub $[{n \atop \kappa}]=[{n \atop n-\kappa}]$ (fakt, mis tuleneb ka võre Λ_n eneseduaalsusest).

Tõepoolest, ühelt poolt

$$\left[{n \atop n-\kappa}\right] = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{n-\kappa+1}-1)}{(q^\kappa-1)(q^{\kappa-1}-1)\cdot\ldots\cdot(q-1)}\cdot\frac{(q^{n-\kappa}-1)\cdot\ldots\cdot(q-1)}{(q^{n-\kappa}-1)\cdot\ldots\cdot(q-1)}.$$

Teiselt poolt,märkame

$$[{n \atop \kappa}]=[{n \atop n-(n-\kappa)}]=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{\kappa+1}-1)}{(q^{n-\kappa}-1)(q^{n-\kappa-1}-1)\cdot\ldots\cdot(q-1)}\cdot\frac{(q^\kappa-1)\cdot\ldots\cdot(q-1)}{(q^\kappa-1)\cdot\ldots\cdot(q-1)}.$$

Saadud murdavaldistel on ühesugused lugejad ja ka ühesugused nimetajad, millest tulenebki $[{n \atop n-\kappa}]=[{n \atop \kappa}]$. ¤

See tähelepanek näitab, et arvud $[{n \atop \kappa}]$ vóib defineerida ka vórduste

$$[{n \atop \kappa}] = L_\kappa(x^n) \tag{6}$$

abil (vórduste (2.6) asemel). Seda asjaolu kasutame hiljem arvude $[{n \atop \kappa}]$ móningate täiendavate omaduste leidmisel. Lisaks on meil nüüd valem

$$[{n \atop \kappa}] = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{n-\kappa+1}-1)}{(q^\kappa-1)(q^{\kappa-1}-1)\cdot\ldots\cdot(q-1)}. \tag{7}$$

Kehtib nn. *Pascali q-valem*

$$[{n \atop \kappa}] = [{n-1 \atop \kappa-1}] + q^\kappa\cdot[{n-1 \atop \kappa}]. \tag{8}$$

Tóestatud vórdus (6) lubab valemi (8) esitada kujul

$$L_\kappa(x\cdot x^{n-1}) = L_{\kappa-1}(x^{n-1}) + q^\kappa L_\kappa(x^{n-1}). \tag{9}$$

Osutub, et iga polünoomi $p(x)\in Q[x]$ korral kehtib seos

$$L_\kappa(x\cdot p(x)) = L_{\kappa-1}(p(x)) + q^\kappa L_\kappa(p(x)), \tag{10}$$

milles spetsialisatsioon $p(x)=x^{n-1}$ annab soovitud vórduse. Tóepoolest, lineaarsuse kaalutlused näitavad, et seost (10) piisab kontrollida baaspolünoomide $p_u(x)$ korral:

$$L_\kappa(x\cdot p_u(x)) = L_{\kappa-1}(p_u(x)) + q^\kappa\cdot L_\kappa(p_u(x))$$

ehk, mis seose $x\cdot p_u(x)=p_{u+1}(x)+q^u\cdot p(x)$ tóttu sama,

$$L_\kappa(p_{u+1}(x))+q^u\cdot L_\kappa(p_u(x))=q^\kappa L_\kappa(p_u(x))+L_{\kappa-1}(p_u(x)).$$

Funktsionaalide L_κ definitsioonist nähtub, et viimane seos kujutab endast vórdust

$$\delta_{\kappa,u+1} + q^u\cdot\delta_{\kappa,u} = q^\kappa\,\delta_{\kappa,u} + \delta_{\kappa-1,u}. \tag{11}$$

Vaadanud siin läbi kóik kolm vóimalikku juhtu ($u=\kappa-1$; $u=\kappa$; $u\neq\kappa,\ \kappa-1$) veendume, et (11) kehtib. Ülalöeldut arvestades on sellega ühtlasi ka valem (8) póhjendatud. ¤

8.5. Tähistagu $N(\kappa,1)$ kóigi nende κ-móótmeliste alamruumide arvu n-móótmelises vektorruumis $V_n(F)$ üle q-elemendilise korpuse F, mis sisaldavad ruumi V_n fikseeritud ühemóótmelist alamruumi. Kehtib valem

$$N(\kappa,1)=\left[{n-1 \atop n-\kappa}\right]=\frac{\left[{n \atop \kappa}\right]\cdot\left[{\kappa \atop 1}\right]}{\left[{n \atop 1}\right]}. \tag{1}$$

Tõepoolest, olgu I kõnesolev ühemõõtmeline alamruum ruumis V_n. Alamruumide võre Λ_n eneseduaalsust kasutades märkame, et

$$N(\kappa,1)=|\{W \mid W\leqslant V_n,\ \dim W=\kappa,\ I\leqslant W\}|=$$
$$=|\{W^* \mid W^*\leqslant V_n,\ \dim W^*=n-\kappa,\ W^*\leqslant I^*\}|=\left[{n-1 \atop n-\kappa}\right].$$

Et tõestada valemi (1) teist võrdust, võtame kasutusele (kahealuselise) graafi $\mathcal{G}$ tipuhulgaga $V(\mathcal{G})=V^{(1)}\cup V^{(\kappa)}$, $V^{(1)}\cap V^{(\kappa)}=\emptyset$, kus $V^{(1)}$ on ruumi V_n kõigi 1-mõõtmeliste alamruumide hulk ja $V^{(\kappa)}$ on ruumi V_n kõigi κ-mõõtmeliste alamruumide hulk ning loeme, et paar (A,B), kus $A\in V^{(1)}$ ja $B\in V^{(\kappa)}$ on graafi $\mathcal{G}$ servaks, kui $A\leqslant B$; vajalikud mõisted graafiteooriast vt. [21]. Servade hulga $E(\mathcal{G})$ saab loendada kahel erineval viisil, kasutades graafi $\mathcal{G}$ kahealuselisust. Tõepoolest, et iga tipu $B\in V^{(\kappa)}$ lokaalne aste $\ell(B)$ on $\left[{\kappa \atop 1}\right]$ (sisuliselt - ühemõõtmeliste alamruumide arv fikseeritud κ-mõõtmelises alamruumis B) ning $|V^{(\kappa)}|=\left[{n \atop \kappa}\right]$, siis ühelt poolt

$$|E(\mathcal{G})|=\sum_{B\in V^{(\kappa)}}\ell(B)=\left[{n \atop \kappa}\right]\cdot\left[{\kappa \atop 1}\right].$$

Teiselt poolt, iga tipu $A\in V^{(1)}$ lokaalne aste on $N(\kappa,1)$ ja selliseid tippe on $|V^{(1)}|=\left[{n \atop 1}\right]$ tükki, millest

$$|E(\mathcal{G})|=\sum_{A\in V^{(1)}}\ell(A)=\left[{n \atop 1}\right]\cdot N(\kappa,1).$$

Saadud tulemuste ühendamine annab soovitud võrduse.

Arvude $\left[{n \atop \kappa}\right]$ määratlus alamruumide võre Λ_n kaudu võimaldab kergesti tõestada ka *Vandermonde'i q-valemi*, mille kohaselt suvaliste mittenegatiivsete täisarvude r, s ja κ korral kehtib võrdus

$$\left[{r+s \atop \kappa}\right]=\sum_{i=0}^{\kappa}\left[{s \atop i}\right]\cdot\left[{r \atop \kappa-i}\right]\cdot q^{i(r-\kappa+i)} \tag{2}$$

Tõepoolest, olgu V_{r+s} $(r+s)$-mõõtmeline vektorruum üle Galois' korpuse GF(q). Ning V_r olgu ruumi V_{r+s} mingi r-mõõtmeline alamruum, mille fikseerime kogu järgnevaks arutluseks. Asjaolu, et võrduse (2) vasak pool näitab ruumi V_{r+s} kõigi κ-mõõtmeliste alamruumide arvu, viib mõttele interpreteerida samas vaimus ka võrduse (2) paremat poolt. Selleks vaatleme iga $i \in \{0,1,\dots,k\}$ jaoks ruumi V_{r+s} kõigi selliste k-mõõtmeliste alamruumide W hulka $\mathcal{W}_i$, mille korral $\dim_{GF(q)}(V_r \cap W)=i$. Tähistame $n_i \doteq |\mathcal{W}_i|$ ning olgu $\mathcal{W}=\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{W}_i$. On selge, et

$$\left[{r+s \atop k}\right] = |\mathcal{W}| = \left|\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{W}_i\right| = \sum_{i=0}^{k} n_i .$$

Lisaks, osutub õigeks võrdus

$$n_i = \left[{r \atop i}\right]\cdot\left[{s \atop k-i}\right]\cdot q^{(r-i)(k-i)}, \tag{3}$$

millest saame

$$\left[{r+s \atop k}\right] = \sum_{i=0}^{k} n_i = \sum_{i=0}^{k} \left[{r \atop k-i}\right]\left[{s \atop i}\right] q^{(r-k+i)i}, \qquad \text{m.o.t.t.}$$

Jääb põhjendada võrdus (3). Märkame, et i lineaarselt sõltumatut vektorit $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_i$ saab alamruumis V_r valida

$$(q^r-1)(q^r-q)\cdot\ldots\cdot(q^r-q^{i-1})$$

eri viisil. Iga taolise valiku korral saab ülejäänud k-i lineaarselt sõltumatut vektorit $\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_{k-i}$ valida

$$(q^{r+s}-q^r)\cdot(q^{r+s}-q^{r+1})\cdot\ldots\cdot(q^{r+s}-q^{r+k-i-1})$$

viisil nii, et vektorite komplekt $\{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_i;\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_{k-i}\}$ oleks mingi alamruumi $W \in \mathcal{W}$ baasiks. Seejuures saab

$$(q^i-1)(q^i-q)\cdot\ldots\cdot(q^i-q^{i-1})$$

viisil valida vektorite komplekti $\{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_i\}$ nii, et need määraksid ühe ja sama lõike $V_r \cap W$ ja iga sellise valiku korral

$$(q^k-q^i)(q^k-q^{i+1})\cdot\ldots\cdot(q^k-q^{i+(k-i)-1})$$

viisil ülejäänud k-i vektorit $\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_{k-i}$, et saadavad komplektid $\{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_i;\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_{k-i}\}$ määraksid ühe ja sellesama k-mõõtmelise alamruumi $W \in \mathcal{W}$. kokkuvõttes näeme, et

$$n_i = \frac{(q^r-1)(q^r-q)\ldots(q^r-q^{i-1})(q^{r+s}-q^r)(q^{r+s}-q^{r+1})\ldots(q^{r+s}-q^{r+k-i-1})}{(q^i-1)(q^i-q)\ldots(q^i-q^{i-1})(q^k-q^i)(q^k-q^{i+1})\ldots(q^k-q^{i+(k-i)-1})} =$$

$$= \frac{q^{r(k-i)}\cdot(q^s-1)(q^s-q)\,\ldots\ldots\,(q^s-q^{k-i-1})}{q^{i(k-i)}\cdot(q^{k-i}-1)(q^{k-i}-q)\ldots(q^{k-i}-q^{k-i-1})}\cdot\left[{r \atop i}\right] =$$

$$= \left[{r \atop i}\right]\left[{s \atop k-i}\right]\cdot q^{(r-i)(k-i)} .$$

Võrdus (3) on tõestatud ja koos sellega ka valem (2). ∎

Tõestame veel *Gaussi q-samasused*

$$\sum_{\kappa=0}^{2m} (-1)^\kappa \begin{bmatrix} 2m \\ \kappa \end{bmatrix} = (1-q)(1-q^3)\cdot\ldots\cdot(1-q^{2m-1}), \qquad (4)$$
$$\sum_{\kappa=0}^{2m+1} (-1)^\kappa \begin{bmatrix} 2m+1 \\ \kappa \end{bmatrix} = 0.$$

Asjaolu, et $\kappa>s$ korral $\begin{bmatrix} s \\ \kappa \end{bmatrix}=0$, lubab seostele (4) anda kompaktsema kuju (5), kui kasutada funktsionaali $G=\sum_{\kappa\geq 0}(-1)^\kappa L_\kappa$, $G:\mathbb{Q}[x]\to\mathbb{Q}$. Saame seosed

$$G(x^{2m})=(1-q)(1-q^3)\ldots(1-q^{2m-1}), \quad G(x^{2m+1})=0. \qquad (5)$$

Et veenduda (5) õigsuses, piisab näidata, et

$$\forall\, u\in\mathbb{N},\ G(x^{u+2})=(1-q^{u+1})\cdot G(x^u). \qquad (6)$$

Tõepoolest, baaspolünoomide $p_u(x)$ korral $G(p_u(x))=(-1)^u$, mistõttu

$$(-1)^1=G(p_1(x))=G(x-1)=G(x)-1 \implies G(x)=0$$

ja

$$(-1)^2=G(p_2(x))=G((x-1)(x-q))=G(x^2)+q \implies G(x^2)=1-q.$$

Saadud võrdused $G(x)=0$ ja $G(x^2)=1-q$ lubavad valemile (6) tuginedes saada seosed (5).

Tõestame nüüd valemi (6). Selleks kirjutame ta ümber kujul

$$G(x^2\cdot x^u)=G(x^u)-q\cdot G((qx)^u). \qquad (7)$$

Et $\{x^u\}$ on baasjada ruumis $\mathbb{Q}[x]$, siis on (7) samaväärne valemiga

$$\forall p(x)\in\mathbb{Q}[x],\ G(x^2\cdot p(x))=G(p(x))-q\,G(p(qx)). \qquad (8)$$

Lineaarsuse kaalutlused näitavad, et seost (8) piisab kontrollida baaspolünoomidel $p_u(x)=(x-1)\cdot(x-q)\cdot\ldots\cdot(x-q^{u-1})$. Märkame, et

$$G(xp_u(x))=G[p_{u+1}(x)+q^u\cdot p_u(x)]=\cdots=(-1)^u(q^u-1),$$
$$G(x^2p_u(x))=G[p_{u+2}(x)+(q^u+q^{u+1})p_{u+1}(x)+q^{2u}\cdot p_u(x)]=$$
$$=\cdots=(-1)^u(q^{2u}-q^{u+1}-q^u+1), \text{ ja}$$
$$G(p_u(qx))=G[q^u\cdot p_u(x)+(q^{2u-1}-q^{u-1})\cdot p_{u-1}(x)]=\cdots=$$
$$=(-1)^u\cdot q^{u-1}\cdot(q^u-q-1).$$

Seega tõestatav seos (8) baaspolünoomidel redutseerub võrduseks

$$(-1)^u\cdot(q^{2u}-q^{u+1}-q^u+1)=(-1)^u-q\cdot[(-1)^{u-1}\cdot q^{u-1}\cdot(q^u-q-1)],$$

mis kehtib tõepoolest. Valem (8) on tõestatud ja koos sellega ka (6). ¤

§ 9. GAUSSI ARVUDE TÄIENDAVAID OMADUSI

9.1. Käesolevas paragrahvis vaadeldakse Gaussi arvu $\binom{n}{k}_q$ kui q-polünoomi (vt. avaldist (2.1) allpool) ja antakse nii tema kordajate kui ka tema monoomide kombinatoorne interpretatsioon naturaalarvude aditiivsete lahutuste keeles (teoreemid 15 ja 17). Punktis 9.4 tõestatud fakt, et eksisteerib elementide kõrgust ja järjestust säilitav sürjektiivne kujutus o-hulgast $\Lambda_n(q)$ o-hulka $B(n)$, annab alust arvata, et (lineaaralgebra ja -geomeetria meetoditega uuritava) võre $\Lambda_n(q)$ kombinatoorika on klassikalise (hulgateoreetilise) kombinatoorika seisukohalt fundamentaalse tähtsusega; sellega seoses vt. ka punkti 4 järgmises paragrahvis.

Punktis 9.5 tõestatakse q-binoomvalem ning vaadeldakse tema kaht erijuhtu, mis annab kahe tuntud (Cauchy) q-samasuse põhjenduse. Võre $\Lambda_n(q)$ võimaldab anda kombinatoorse tõlgenduse paljudele q-samasustele, mis olid algselt saadud analüütiliste vahenditega. Ülesanne anda q-samasuste ja neid saatvate analoogiliste binoomiaalsete samasuste ühtne, võrede kombinatoorikast lähtuv interpretatsioon ja tõestus on aktuaalne endiselt. Kulminatsiooniks oleks selle ülesande lahendamine Rogers-Ramanujani q-samasuste korral; nende samasuste kohta leiab materjali raamatust [5], ptk.7.

9.2. Valemit (8.4.8) korduvalt rakendades leiame

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}+q^k\cdot\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{bmatrix}+q^{k-1}\cdot\begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}\right)+$$
$$+q^k\cdot\left(\begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}+q^k\cdot\begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}\right)=q^{2k}\cdot\begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}+(q^k+q^{k-1})\cdot\begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{bmatrix}=\cdots .$$

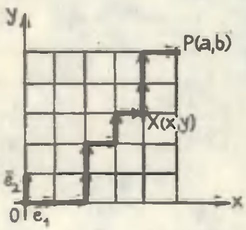
See (piltlikult väljendades) võimaldab meil Gaussi arvude q-kolmnurgas tõusta samm-sammult ülemistele nivoodele, kuni näeme, et arvud $[{n \atop \kappa}]$, mis klassikalise definitsiooniga (8.4.7) on antud kui ratsionaalavaldised suurusest q, osutuvad q-polünoomideks,

$$[{n \atop \kappa}] = \sum_{\alpha=0}^{\kappa\cdot(n-\kappa)} P(n-\kappa, \kappa, \alpha) q^{\alpha}. \qquad (1)$$

Kõrgeima q astme $\kappa\cdot(n-\kappa)$ saame, kui klassikalises valemis (8.4.7) võtame lugeja ja nimetaja q-astmete vahe

$$[n+(n-1)+\dots+(n-\kappa+1)]-[1+2+\dots+\kappa].$$

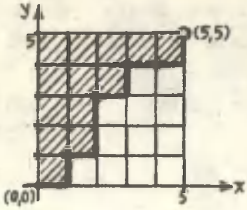
9.3. Naturaalarvu α (*aditiivseks*) *lahutuseks* nimetatakse lõplikku mittekasvavat naturaalarvude jada $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa$, sellist, et $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\kappa=\alpha$. Arve α_i nimetame lahutuse $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa)$ *komponentideks*, arvu κ lahutuse *sügavuseks*. Vaatleme nüüd *Z-võrku tasandil*, s.o. vaid neid tasandi punkte $X(x,y)$, mille koordinaatideks fikseeritud Descartesi reeperis $\{O;\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ on täisarvude paar (x,y); siinkohal huvitab meid Z-võrk vaid põhikvadrandis $(x\geq 0$ & $y\geq 0)$. Punkti $X(x,y)$ liikumise jälge Z-võrgul, kui see punkt liigub igal "taktil" vaid paremale või üles mööda Z-võrgu "tänavaid", nimetame *siksakiks*. Joonisel 16 on toodud üks siksakkidest, mis läheb punktist $O(0,0)$ punkti $P(a,b)$.



Joon.16.

Iga lahutusega $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa)$ saab siduda nn. *Ferreri tabeli* F_α, mille moodustavad Z-võrgu kõik need ühikruudud, mille vasaku alumise tipu $X(x,y) \in Z\times Z$ koordinaadid rahuldavad nõudeid $0\leq y\leq\kappa-1$ ja $0\leq x\leq\alpha_{\kappa-y}-1$. Joonisel 17 on toodud lahutusele $13=(5,3,2,2,1)$ vastav Ferreri tabel; tabeli F_{13} ühikruudud on viirutatud ning nende vasakud alumised tipud tähistatud "•".

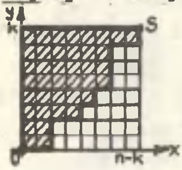
Huvitava kombinatoorse interpretatsiooni arvudele $P(n-\kappa,\kappa,\alpha)$ annab järgmine tulemus.



Joon. 17.

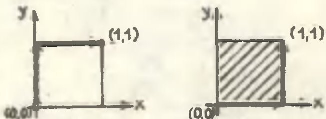
Teoreem 15. *Arv $P(n-\kappa,\kappa,\alpha)$, $\alpha \geq 1$, on võrdne naturaalarvu α selliste aditiivsete lahutuste arvuga, mille sügavus on ülimalt κ ja mille ükski komponent ei ületa arvu $n-\kappa$. Kokkuleppeliselt loetakse $P(n-\kappa,\kappa,0)=1$.*

Tõestus. Kasutades ülalkirjeldatud võimalust siduda iga lahutusega Ferreri tabel, saab teoreemi väitele anda järgmise (ekvivalentse) kuju (*): arv $P(n-\kappa,\kappa,\alpha)$ on võrdne nende siksakkide arvuga, mis kulgevad punktist $O(0,0)$ punkti $S(n-\kappa,\kappa)$ ja mille peal on pindala α. Siinjuures viimane fraas tähendab, et naturaalarvu α tõlgendatakse kui ühikruudukeste arvu Ferreri tabelis F_α, s.o. kujundis, mida piiravad vasakult y-telg, ülalt sirge $y=\kappa$, ning alt ja paremalt siksak $O \to S$.



Joon. 18.

Väite (*) tõestame induktsiooniga n järgi. Induktsiooni baasina vaatleme (esimest sisukat) juhtu: $n=2$, $\kappa=1$, $n-\kappa=1$. Võimalikeks pindala väärtusteks on siis vaid $\alpha=0$ ja $\alpha=1$. Leidub vaid üks siksak $(0,0) \to \ldots \to (1,1)$, mille peal on pindala 0 ning vaid üks siksak $(0,0) \to \ldots \to (1,1)$, mille peal on pindala 1; vt. joonist 19. Järelikult (vastavalt valemile (2.1)),



Joon. 19.

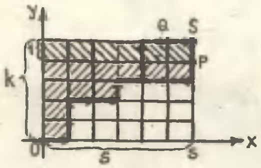
$$\left[{2 \atop 1}\right] = \sum_{\alpha=0}^{1\cdot 1} P(1,1,\alpha)q^\alpha = P(1,1,0)q^0 + P(1,1,1)q^1 = 1\cdot q^0 + 1\cdot q^1 = 1+q\,.$$

Teiselt poolt, vastavalt valemile (8.4.7),

$$\left[{2 \atop 1}\right] = \frac{q^2-1}{q-1} = 1+q\,.$$

Et tulemused langevad kokku, siis on induktsiooni baasväide tõestatud.

Põhjendame nüüd induktsiooni sammu "n-1" $\Rightarrow$ "n". Tähistame seejuures $s=n-\kappa$ ja tugineme tähelepanekule, mis intuitsioonile on täiesti selge: Z-võrgu iga siksak, mis algab punktist $O(0,0)$ ja lõpeb punktis $S(s,k)$, läbib kas punkti $P(s,k-1)$ või punkti $Q(s-1,k)$; vt. joonist 20.



Joon. 20.

Sellest tähelepanekust tuleneb, et $|\{$siksakid $O\to\ldots\to S$, mille peal on pindala $\alpha\}|=|\{$siksakid $O\to\ldots\to Q$, mille peal on pindala $\alpha\}|+|\{$siksakid $O\to\ldots\to P$, mille peal on pindala $\alpha-s\}|$.
Vastavalt induktsiooni oletusele on viimase võrduse paremas pooles esimene liidetav võrdne arvuga $P(s-1,k,\alpha)$ ja teine liidetav - arvuga $P(s,k-1,\alpha-s)$. Näeme, et piisab tõestada võrdus

$$P(s,k,\alpha)=P(s-1,k,\alpha)+P(s,k-1,\alpha-s). \tag{1}$$

Valemist (2.1) näeme, et

$$\left[{n \atop k}\right]=\sum_{\alpha\geq 0} P(s,k,\alpha)q^{\alpha}, \tag{2}$$

$$\left[{n-1 \atop k}\right]=\sum_{\alpha\geq 0} P(s-1,k,\alpha)q^{\alpha}, \tag{3}$$

$$\left[{n-1 \atop k-1}\right]=\sum_{\alpha\geq s} P(s,k-1,\alpha-s)q^{\alpha-s}. \tag{4}$$

Teiselt poolt osutub

$$\left[{n \atop k}\right]=\left[{n-1 \atop k}\right]+q^{s}\cdot\left[{n-1 \atop k-1}\right]. \tag{5}$$

Tõepoolest, arvestades seost (8.4.8), piisab näidata, et

$$0=(1-q^{k})\cdot\left[{n-1 \atop k}\right]+(q^{s}-1)\cdot\left[{n-1 \atop k-1}\right].$$

Kuid viimase seose parem pool on valemi (8.4.7) põhjal tõepoolest võrdne nulliga:

$$(q^{s}-1)\cdot\left[{n-1 \atop k-1}\right]-(q^{k}-1)\cdot\left[{n-1 \atop k}\right]=$$
$$=(q^{s}-1)\cdot\frac{(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{s+1}-1)}{(q-1)(q^{2}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{k-1}-1)}-$$
$$-(q^{k}-1)\cdot\frac{(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{s}-1)}{(q-1)(q^{2}-1)\cdot\ldots\cdot(q^{k}-1)}=0.$$

Äsja põhjendatud valemile (5) lubavad seosed (2)-(4) anda järgmise kuju:

$$\sum_{\alpha\geq 0} P(s,k,\alpha)q^{\alpha}=\sum_{\alpha\geq 0} P(s-1,k,\alpha)q^{\alpha}+q^{s}\cdot\sum_{\alpha\geq s} P(s,k-1,\alpha-s)q^{\alpha-s}$$

Võrreldes viimase võrduse vasakul ja paremal poolel kordajaid

q^{α} ees, veendume (1) õigsuses. ∎

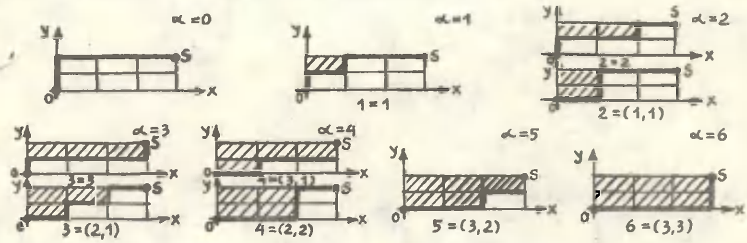
Punkti lõpetuseks illustreerime teoreemi 15 väidet q-polünoomi $[{5 \atop 2}]$ korral. Leiame kõigepealt, et

$$\left[{5 \atop 2}\right]=\left[{4 \atop 2}\right]+q^3\cdot\left[{4 \atop 1}\right]=\left[{3 \atop 2}\right]+q^2\cdot\left[{3 \atop 1}\right]+q^3\cdot\left[{4 \atop 1}\right]=\frac{q^3-1}{q-1}+q^2\cdot\frac{q^3-1}{q-1}+$$
$$+q^3\cdot\frac{q^4-1}{q-1}=(1+q^2)\cdot(q^2+q+1)+q^3\cdot(q^3+q^2+q+1)=$$
$$=1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6.$$

Järelikult saame tabeli

α	0	1	2	3	4	5	6
P(3, 2, α)	1	1	2	2	2	1	1

Selles tabelis toodud arvudele vastavad Ferreri diagrammid on toodud joonisel 21.



Joon.21.

Viimase teoreemiga arvudele P(n-κ,κ,α) antud kombinatoorne interpretatsioon sisaldub J.J.Sylvesteri töös (1884-1886), mistõttu seda tulemust nimetatakse ka Sylvesteri q-teoreemiks.

9.4. Mitte ainult arvudele P(n-κ,κ,α), vaid ka võrduse (2.1) paremal poolel esineva summa liidetavaile P(n-κ,κ,α)$\cdot q^{\alpha}$ saab anda kombinatoorse interpretatsiooni võre $\Lambda_n(q)$ termineis. Seda võimaldab nn. *Knuth'i kujutus* $\nabla:\Lambda_n(q)\to B(n)$, mis esmakordselt võeti kasutusele D.Knuthi poolt (J.Comb. Theory 10 (1971) 178-180).

Teoreem 16 (D.Knuth, 1971). Eksisteerib elementide kõrgusi säilitav o-epimorfism ∇ o-hulgast $\Lambda_n(q)$ o-hulka $B(n)$.

Tõestus. Fikseerime ruumis $V=V_n(q)$ mingi baasi $\{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\}$, misjärel ruumi V vektoreid $\bar{x}$ saab üheselt anda nende koordinaatide $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ kaudu selles baasis. Nüüd on iga κ-mõõtmelise alamruumiga $A \leq V$ ühesel viisil seotud teatav alamhulk $A^{\nabla} \doteq \{\nu_1, \ldots, \nu_\kappa\} \subset \mathbf{n}$, kus naturaalarvud ν_i määratakse rekursiivselt:

$$\nu_1 \doteq max\{j \mid \exists (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A,\ x_j \neq 0\}, \tag{1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\nu_i \doteq max\{j \mid \exists (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A,\ x_{\nu_1} = \cdots = x_{\nu_{i-1}} = 0,\ x_j \neq 0\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Märkame, et

$$n \geq \nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_\kappa \geq 1. \tag{2}$$

Arvude ν_i rekursiivsest definitsioonist nähtub, et kujutus $A \to A^{\nabla}$ säilitab elementide kõrgusi - κ-mõõtmelisele alamruumile A vastab κ-elemendiline alamhulk $A^{\nabla} \subset \mathbf{n}$. Samuti nähtub arvude ν_i definitsioonist, et kujutus ∇ on järjestusseost säilitav - suvaliste alamruumide $A \subset B$ korral ruumis V leiab hulgas $\mathbf{n}$ aset seos $A^{\nabla} \subset B^{\nabla}$.

Et tõestada kujutuse ∇ sürjektiivsust, märkame, et ruumi V igas κ-mõõtmelises ($\kappa \leq n$) alamruumis A saab ühesel viisil fikseerida kanoonilise baasi $\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\kappa\}$ s.t. κ vektorit $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{e}_j$, $i \in \{1, 2, \ldots, \kappa\}$, kus koordinaadid a_{ij} täidavad tingimust

$$\forall i \in \kappa,\ (a_{i\nu_i} = 1) \& ((j > \nu_i) \Rightarrow (a_{ij} = 0)) \& ((\ell < i) \Rightarrow (a_{\ell\nu_i} = 0)); \tag{3}$$

siin on arvud ν_i määratud alamruumiga A eespool kirjeldatud viisil. Kanoonilise baasi olemasolus veendub lugeja kergesti, kui ta, lähtunud alamruumi A suvalisest baasist $\{\bar{a}_1', \ldots, \bar{a}_\kappa'\}$, rakendab $(\kappa \times n)$-maatriksi $\|a_{ij}'\|$ ridadele sobivaid elementaarteisendusi. Et alamruumi A selline baas on üheselt määratud, tuleneb asjaolust, et iga $i \in \{1, 2, \ldots, \kappa\}$ korral on $\bar{a}_i$ ainus selline vektor alamruumis A, et $a_{i\nu_j} = \delta_{ij}$, $j \in \{1, 2, \ldots, \kappa\}$. Faktiliselt määravad kanoonilise baasi üheselt arvud $n, \kappa, \nu_1, \ldots, \nu_\kappa$. Näiteks juhul $n=6$, $\kappa=3$, $\nu_1=5$, $\nu_2=3$, $\nu_3=2$ tingimusi (3) spetsialiseerides näeme, et kanooniline baas omab järgmist kuju:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (a_{11}, 0, 0, a_{14}, 1, 0), \\ \bar{a}_2 &= (a_{21}, 0, 1, 0, 0, 0), \\ \bar{a}_3 &= (a_{31}, 1, 0, 0, 0, 0). \end{aligned} \tag{4}$$

Antud n ja κ korral määrab iga alamhulk $\{\nu_1,\ldots,\nu_\kappa\}\subset \mathbf{n}$ tingimused (3) ja seega ka tabeli tüüpi (4), kus iga $i\in\{1,2,\ldots,\kappa\}$ korral jääb i-ndas "vektoris" $\bar{a}_i$ spetsialiseerimata $(\nu_i-(\kappa-i)-1)$ koordinaati. Nende koordinaatide iga spetsialisatsioon annab κ vektorist koosneva hulga, mille lineaarne kate ruumis V on konstruktsiooni kohaselt selliseks alamruumiks, mis kujutub ∇ abil alamhulgaks $\{\nu_1,\ldots,\nu_\kappa\}$. ☐

Teoreemis 16 kirjeldatud vastavuse omadusi lisab järgmine tulemus.

Teoreem 17. Igale κ-mõõtmelisele alamruumile ruumis $V_n(q)$ vastab üheselt teatav lahutus sügavusega ülimalt κ, mille ükski komponent ei ületa arvu $n-\kappa$. Vastupidi, arvu α igale lahutusele sügavusega ülimalt κ, mille ükski komponent ei ületa arvu $n-\kappa$, vastab q^α κ-mõõtmelist alamruumi ruumis $V_n(q)$.

Tõestus. Eespool nägime, et iga κ-mõõtmeline alamruum $A\le V_n$ määrab üheselt alamhulga $\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\kappa\}\subset \mathbf{n}$, mille elemendid loeme tähistatuks kahanevas järjekorras. Vaatleme arvusid $\alpha_i\doteq\nu_i-(\kappa-i)-1$, $i\in\{1,2,\ldots,\kappa\}$. Et kõigi $i\in\{1,2,\ldots,\kappa-1\}$ korral on $\nu_i>\nu_{i+1}$, siis ka $\nu_i-1\ge\nu_{i+1}$ ja siit $\alpha_i=(\nu_i-1)+i-\kappa\ge$ $\ge\nu_{i+1}+i-\kappa=\alpha_{i+1}$, s.o. $\alpha_i\ge\alpha_{i+1}$. Et kehtib $\nu_\kappa\ge1$, siis $\alpha_\kappa=\nu_\kappa-$ $-(\kappa-\kappa)-1=\nu_\kappa-1$, s.o. $\alpha_\kappa\ge0$. Et kehtib $\nu_1\le n$, siis $\alpha_1=\nu_1-(\kappa-1)-1=$ $=\nu_1-\kappa\le n-\kappa$, s.o. $\alpha_1\le n-\kappa$. Seega arvud ν_i, $n\ge\nu_1>\nu_2>\ldots>\nu_\kappa\ge1$, määravad üheselt arvu $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa$ lahutuse $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{\kappa'})$ sügavusega $\kappa'\le\kappa$ (s.t. $\alpha_{\kappa'+1}=\ldots=\alpha_\kappa=0$), mille kõik komponendid α_i on $\le n-\kappa$.

Vastupidi, olgu antud lahutus $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{\kappa'})$, $\kappa'\le\kappa$, $n-\kappa\ge\alpha_1\ge\alpha_2\ge\ldots\ge\alpha_{\kappa'}\ge0$. Loeme, et $\alpha_{\kappa'+1}=\ldots=\alpha_\kappa=0$ ning võtame kasutusele arvud ν_i, $\nu_i=\alpha_i-i+\kappa+1$. Märkame, et komponentide α_i omadustest tulenevalt $\nu_{i+1}=\alpha_{i+1}-(i+1)+\kappa+1=\alpha_{i+1}-i+\kappa\le\alpha_i-i+\kappa<$ $<\alpha_i-i+\kappa+1=\nu_i$, s.o. $\nu_{i+1}<\nu_i$. Seejuures, $\nu_1=\alpha_1-1+\kappa+1=\alpha_1+\kappa\le$ $\le(n-\kappa)+\kappa=n$, s.o. $\nu_1\le n$ ning ka $\nu_\kappa=\alpha_\kappa-\kappa+\kappa+1=\alpha_\kappa+1\ge1$. Seega igale lahutusele sügavusega ülimalt κ ja kõigi komponentidega $\le n-\kappa$ vastab kanoonilise baasi vektorite skeem baasivektoreis kokku α koordinaadi spetsialiseerimisvõimalusega. See skeem lubab q^α erinevat spetsialisatsiooni korpuses $GF(q)$, millest igaüks määrab teatava (ülejäänuist erineva) κ-mõõtmelise alamruumi ruumis V_n.

Et arvu α lahutusi sügavusega ülimalt κ ja komponentidega

$\leq n-1$ on $P(n-\kappa,\kappa,\alpha)$ tükki, siis arvu α kõigile vaadeldavat tüüpi lahutusele vastab kokku $P(n-\kappa,\kappa,\alpha)\cdot q^{\alpha}$ κ-mõõtmelist alamruumi ruumis $V_n(q)$. ♯

Siit nähtub, et seosele (2.1) on antud uus sisu, mis seisab selles, et võrduse (2.1) paremas pooles esinevaid liidetavaid ei vaadelda siin kui q-monoome, vaid nüüd on ka neile antud kombinatoorne interpretatsioon.

9.5. Teoreem 18. *Olgu x, y ja z - muutujad ning olgu $P_{\kappa}(x,y)=(x-y)\cdot(x-qy)\cdot\ldots\cdot(x-q^{\kappa-1}y)$. Kehtib järgmine valem*

$$P_n(x,z) = \sum_{\kappa=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \kappa \end{bmatrix}\cdot P_{n-\kappa}(x,y)\cdot P_{\kappa}(y,z). \tag{1}$$

Tõestus. Märgime kõigepealt, et muutuja y esineb küll võrduses (1) vaid paremal, kuid ta koondub välja, kui (1) paremat poolt arendada; siiski on ta sobiv sisse tuua.

Asume põhjendama valemit (1). Olgu $V=V_n(GF(q))$, $\dim V=n$ ning olgu X, Y, Z suvalised vektorruumid üle korpuse $GF(q)$ sellised, et $Z\subset Y\subset X$ ja $\dim Z>n$. Et ruumide X, Y ja Z põhikorpus on lõplik, siis sisaldavad vaadeldavad ruumid igaüks lõpliku arvu vektoreid; olgu $|X|=x$, $|Y|=y$ ja $|Z|=z$. Tõestuse idee on selles, et võrduse (1) pooled loendavad selliste regulaarsete lineaarteisenduste $f:V\to X$ arvu, mille puhul $\mathrm{Im}f\cap Z=(O)$ (tehes seda muidugi erinevalt).

Ühelt poolt, olgu $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ ruumi V baas. Loendame, mitmel eri viisil saab neid vektoreid $\bar{e}_i$, $i\in n$ kujutada n lineaarselt sõltumatuks vektoriks ruumis X, niimoodi, et kujutisvektorite lineaarse katte lõige ruumiga Z oleks (O). Seejuures esinevate võimaluste arvu saame loendada nii: vektori $\bar{e}_1$ kujutamiseks on $x-z$ võimalust ($\bar{e}_1$ kujutiseks võib olla ruumi X iga vektor, mis ei kuulu alamruumi Z); vektori $\bar{e}_2$ kujutamiseks on $x-qz$ võimalust ($\bar{e}_2$ kujutiseks võib olla ruumi X iga vektor, mis ei kuulu alamruumi $(\lambda(Z, f(\bar{e}_1))$; viimane kujutab endast alamruumi Z vektorite ja vektori $f(\bar{e}_1)$ lineaarset katet üle korpuse $GF(q)$ ning selles on $z\cdot q$ vektorit); vektori $\bar{e}_3$ kujutamiseks on $x-zq^2$ võimalust - ruumi X iga vektor peale vektorite lineaarsest kattest $\lambda_{GF(q)}(Z, f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2))$. Arvestades, et lineaarkujutus $f:V\to X$ on üheselt määratud oma väärtustega baasivektoreil $\bar{e}_i$, $i\in n$, oleme soovitud omadustega lineaarkujutuste üldarvuks saanud

$$(x-z)\cdot(x-qz)\cdot(x-q^2z)\cdot\ldots\cdot(x-q^{n-1}z)=P_n(x,z).$$

On leitud kombinatoorne tõlgendus q-binoomvalemi vasakule poolele.

Teiselt poolt, loendame jällegi regulaarseid lineaarteisendusi $f:V\to X$, selliseid, et $\mathrm{Im}f\cap Z=(0)$, kuid arvestame nüüd ka alamruumi Imf "positsiooni" ruumi Y suhtes. Olgu $\dim(\mathrm{Im}f\cap Y)=\kappa$. Siis on alamruum $\mathrm{Im}f\cap Y$ ruumi V mõne κ-dimensionaalse alamruumi U kujutiseks tulenevalt kujutuse f regulaarsusest. Sellest arutlusest nähtub, et soovitud omadusega kujutusi $f:V\to X$ saab järgmisel viisil: valinud suvalise $U\in\Lambda(V)$, määrame algul kujutuse $U\to(Y\setminus Z)\cup(0)$ ning seejärel kujutuse $V\setminus U\to(X\setminus Y)\cup(0)$ nii, et tulemuseks oleks regulaarne lineaarteisendus $f:V\to X$. Olgu ruumi V baas $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ valitud selliselt, et esimesed κ vektorit selles moodustavad alamruumi U baasi. Nii nagu käesoleva tõestuse esimeses osas, leiame, et lineaarteisendusi $f:U\to(Y\setminus Z)\cup(0)$, mis kujutavad vektorid $\bar{e}_1,\ldots\bar{e}_\kappa$ lineaarselt sõltumatuiks vektoreiks ruumis Y, nii et $\lambda(\{f(\bar{e}_1),\ldots$ $\ldots,f(\bar{e}_\kappa)\})\cap Z=(0)$, on $P_\kappa(y,z)=(y-z)\cdot(y-qz)\cdot\ldots\cdot(y-q^{\kappa-1}z)$ tükki. Lineaarteisenduse $f:V\to X$ regulaarsuseks on tarvilik, et ruumi V baasi ülejäänud $n-\kappa$ vektorit $\bar{e}_{\kappa+1},\ldots,\bar{e}_n$ kujutuksid regulaarselt hulka $(X\setminus Y)\cup(0)$; see saab toimuda $P_{n-\kappa}(x,y)$ eri viisil. Et suvalisele lineaarselt sõltumatule alamhulgale $S\subset V$ mingi vektori $\bar{v}\in V$, $\bar{v}\notin\lambda(S)$ lisamine viib jällegi lineaarselt sõltumatu alamhulgani $S\cup\{\bar{v}\}$, näeme, et fikseeritud κ-mõõtmelise alamruumi U korral leidub $P_\kappa(y,z)\cdot P_{n-\kappa}(x,y)$ regulaarset lineaarkujutust $f:U\to X$, mille puhul $f(U)\cap((X\setminus Z)\cup(0))=f(U)$. Võttes arvesse ka ruumi U valikuvõimalused, näeme, et regulaarseid lineaarteisendusi $f:V\to X$, mille korral $f(V)\cap Z=(0)$, on $\sum_{\kappa=0}^{n}\left[{n \atop \kappa}\right]\cdot P_{n-\kappa}(x,y)\cdot P_\kappa(y,z)$ tükki. Võrdsustades saadud tulemuse tõestuse esimeses osas saadud arvuga $P_n(x,z)$, saamegi q-binoomvalemi (1). ¤

Huvipakkuvad on q-binoomi kaks erijuhtu, mis (arvatavasti) esmakordselt ilmusid A.L.Cauchy töödes, kus neile on antud formaalalgebraline tõestus.

Esiteks, võttes z=0 ja y=1 valemis (1), saame

$$
\begin{aligned}
x^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x-1)(x-q)\cdot\ldots\cdot(x-q^{n-k-1}) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x-1)(x-q)\cdot\ldots\cdot(x-q^{k-1}).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Teiseks, võttes z=1 ja y=0 valemis (1), saame

$$
\begin{aligned}
(x-1)(x-q)\cdot\ldots\cdot(x-q^{n-1}) &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}\cdot(-1)^k \cdot q^{\binom{k}{2}} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} x^{n-(n-k)}\cdot(-1)^{n-k}\cdot q^{\binom{n-k}{2}} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k}\cdot q^{\binom{n-k}{2}}\cdot x^k.
\end{aligned} \tag{3}
$$

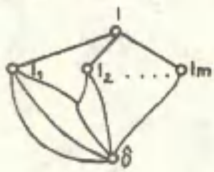
§ 10. DISTRIBUTIIVSETE VÕREDEGA SEOTUD ARVUDEST

10.1. Binoomkordajate arvutamine nn. Pascali kolmnurga järgi on üldtuntud. Seda võtet üldistades jõuame Pascali tabeli üldise mõisteni, mis koos tema täpsustusega Fibonacci ja Youngi võrede korral on toodud punktis 10.3.

Ammu märgatud analoogia binoomkordajate ja Gaussi arvude käitumises viib mõttele selle analoogia võreteoreetilisest loomusest ja saab oma täpse väljenduse (D.Knuthi) teoreemis 16. Võrede $A_n(q)$ ja $B(n)$ vahel leitud seose mõned rakendused on toodud punktis 10.4.

Käesoleva paragrahvi ülejäänud osas vaadeldakse ühetüübiliste lõplike (distributiivsete) võrede jada asümptootilist käitumist ja kirjeldatakse seda nn. Ramsey arvude abil. Punktis 10.5 illustreeritakse Dirichlet' printsiibi rakendamist. Selle printsiibi kohaselt, kui hulk piisavalt suure elementide arvuga tükeldada mitte väga suureks arvuks tükkideks, siis vähemalt ühes tükis on palju elemente. Kaugeleulatuva üldistuse Dirichlet' printsiibile leidis (1930.a.) inglise filosoof ja loogik F.D.Ramsey; vt. teoreeme 19 ja 20 punktis 10.6. Osutub, et ka see temaatika lubab järjestusega seotud üldist tõlgendust. See on esitatud punktis 10.7, kus tuuakse ka kaks järeldust teoreemist 20. Teema edasise arenduse leiab näiteks raamatust [4].

10.2. Olgu antud lõpliku kasvuga distributiivne võre V. Vastavalt teoreemile 6.14 saab võret V vaadelda kui kõigi lõplike ideaalide võret $I^*(P)$ mingi (sobivalt valitud) lõpliku kasvuga o-hulga P jaoks. Tähistame sümboliga $t(I)$ erinevate ahelate arvu o-hulgas $I^*(P)$ tema elementide $(\hat{O})$ ja I vahel.



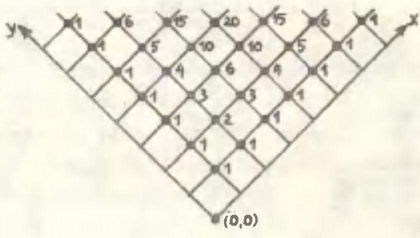
Joon.22.

Märkame, et kui $\{I_1, I_2, \ldots, I_m\} \subset I^*(P)$ on o-hulga $I^*(P)$ kõigi nende elementide alamhulk, mida katab antud element $I \in I^*(P)$, siis (tulenevalt liitmisreeglist; vt. [2], lk.4) kehtib valem

$$t(I) = \sum_{i=1}^{m} t(I_i)\,; \qquad (1)$$

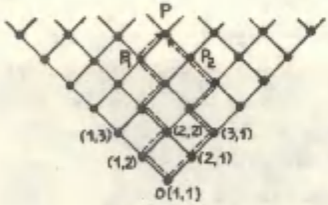
vt. illustratsiooni joonisel 22. Pascali võre $I^*(N \bullet N)$ korral nähtub valemist (1), et funktsiooni $t: I^*(N \bullet N) \to N$ saab anda väljendusrikka tabeliga (joon.23), kus ideaalile $I \in I^*(N \bullet N)$ (isomorfismis $I^*(N \bullet N) \cong N \dot{\times} N$) vastava punkti $(r+1, s+1) \in N \dot{\times} N$ juurde on kirjutatud arv $t(I)$. Vastav tabel on tuntud kui nn. *Pascali kolmnurk binoomkordajate jaoks.*

Joonisel 23 toodud tabelis on arvud $t(I)$ binoomkordajad - arv $t(I)$ võrdub arvuga $\binom{r+s}{r}$. Tõepoolest, tänu isomorfismile $I^*(N \bullet N) \cong N \dot{\times} N$ võib arvu $t(I)$ tõlgendada kui kõikvõimalike erinevate "tõusvate" siksakkide arvu, mis viivad punktist $O(1,1)$ punkti $P(r+1, s+1)$; vt. joonist 24. Tõestame (üheaegse induktsiooniga r ja s järgi), et erinevaid tõusvaid siksakke $O \to \ldots \to P$ on $\binom{r+s}{r}$ tükki.



Joon.23.

Selleks märkame, et juhul $r=s=1$ kehtib ilmne $\binom{1+1}{1}=2$. Kuid ka tõusvaid siksakke punktist O punkti (2,2) on 2 tükki: $(1,1) \to (1,2) \to (2,2)$ ja $(1,1) \to (2,1) \to (2,2)$. Seega induktsiooni baas-



Joon.24.

väide on õige. Induktiivse oletuse kohaselt

tõusvate siksakkide $(1,1)\to\ldots\to(r,s+1)$ arv $=\binom{r+s-1}{r-1}$

ja

tõusvate siksakkide $(1,1)\to\ldots\to(r+1,s)$ arv $=\binom{r+s-1}{r}$.

Induktsiooni sammu õigsuse põhjendamisel võtame aluseks intuitsioonile täiesti selge tõsiasja, et tõusev siksak punktist O punkti P peab läbima üht punktidest $P_1(r,s+1)$ või $P_2(r+1,s)$. Sellest tuleneb, et

$$\begin{aligned}&(\text{tõusvate siksakkide } O\to\ldots\to P \text{ arv}) =\\ &=(\text{tõusvate siksakkide } O\to\ldots\to P_1 \text{ arv}) +\\ &+(\text{tõusvate siksakkide } O\to\ldots\to P_2 \text{ arv}) =\\ &=\binom{r+s-1}{r-1}+\binom{r+s-1}{r}=\binom{r+s}{r};\end{aligned}$$

siin eelviimane võrdus tuleneb induktsiooni oletusest, viimane aga Pascali klassikalisest reeglist. Saadud tulemusest nähtub, et kehtivad valemid

$$\sum_{I,\,|I|=n} t(I) = 2^n \qquad \text{ja} \qquad \sum_{I,\,|I|=n} t(I)^2 = \binom{2n}{n}; \tag{2}$$

vt. [2], ülesanne 2.4.

Lause 1. Lõpliku kasvuga o-hulga P lõplike ideaalide võres $I^*(P)$ kõrgust $\kappa\in\mathbb{N}$ omava ideaali I korral eksisteerib 1-1 vastavus elemendipaari $\emptyset$ ja I võres $I^*(P)$ ühendavate tihedate ahelate

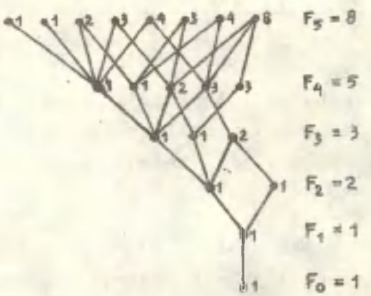
$$\emptyset = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_\kappa = I$$

ja o-bijektsioonide $\sigma: I\to\{1,2,\ldots,\kappa\}$ vahel.

Tõestus. Lause 6.3.6 tõestuse lõpuosas nägime, et $\kappa=|I|$. Seetõttu saame defineerida kujutuse $\sigma':\{1,2,\ldots,\kappa\}\to I$ reegliga $\sigma'(i)\in I_i\setminus I_{i-1}$. Kujutus $\sigma=\sigma'^{-1}: I\to\kappa$ on o-bijektsioon. Tõepoolest, kujutuse σ bijektiivsus järeldub definitsioonist. Näitame, et σ säilitab ka järjestust. Selleks märkame, et iga $x\in I$ korral leidub selline indeks $i=i(x)$, et $x\in I_i\setminus I_{i-1}$ ja siis $\sigma(x)=i$. Seejuures seose $y\leq x$ korral kehtib $i(y)\leq i(x)$, s.o. kujutus σ säilitab järjestust. Kujutuse σ' definitsioonist selgub, et erinevatele tihedatele ahelatele $\emptyset$ ja I vahel vastavad kirjeldatud viisil erinevad o-bijektsioonid $\sigma: I \to \kappa$.

Vaadeldav vastavus tihedate ahelate ja o-bijektsioonide vahel on sürjektiivne. Tõepoolest, vaatleme suvalist o-bijektsiooni $\sigma: I \to \{1,2,\ldots,\kappa\}$. Iga $i \in \kappa$ korral defineerime $\bar{I}_i = \sigma^{-1}(\{1,2,\ldots,i\})$; loeme, et $I_0=\emptyset$. Alamhulgad $\bar{I}_i \subset I$ on ideaalideks o-hulgas P. Tõesti, suvaliste $x \in \bar{I}_i$, $y \in P$, $y\leq x$ korral seoste $\sigma(y)\leq\sigma(x)$ ja $\sigma(x) \in \{1,2,\ldots,i\}$ tõttu kehtib $\sigma(y) \in \{1,2,\ldots,i\}$ ning seega ka $y \in \bar{I}_i$. Seejuures $\bar{I}_i \subset \bar{I}_{i+1}$, kuna iga $x \in \bar{I}_i$ korral $\sigma(x) \in \{1,2,\ldots,i\} \subset \{1,2,\ldots,i,i+1\}$. Kui leiduks ideaal $\bar{I}'$, $\bar{I}_i \subsetneq \bar{I}' \subseteq \bar{I}_{i+1}$, siis tuleneks sellest elemendi $x \in \bar{I}'$, $x \notin \bar{I}_i$ olemasolu. Siis aga seoste $\sigma(x) \in \{1,2,\ldots,i,i+1\}$ ja $\sigma(x) \notin \{1,2,\ldots,i\}$ tõttu $\sigma(x)=i+1$, millest $\bar{I}'=\bar{I}_{i+1}$. Toodud arutlusest nähtub, et $\bar{I}_0 \subset \bar{I}_1 \subset \ldots \subset \bar{I}_\kappa = I$ on o-hulga P ideaalide tihe ahel, mis (nähtuvalt konstruktsioonist) vastab o-bijektsioonile σ. ⌑

10.3. Eelmises punktis toodud tulemused viivad mõttele defineerida üldjuhul *Pascali tabel* kui lõpliku kasvuga distributiivne võre V koos sellel antud funktsiooniga $t: V \to \mathbb{N}$. Arvudel $t(I)$, $I \in I^*(P) \cong V$ on binoomkordajatega vähemalt 3 ühist omadust:



Joon.25.

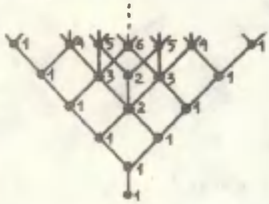
(1) neid võib saada aditiivse rekursiooniga; vt. valemit (2.1),

(2) neid võib interpreteerida kui teatud tüüpi substitutsioonide loendamise tulemust (vt. lauset 1 eelmises punktis),

(3) neid võib interpreteerida kui teatud tüüpi siksakkide loendamise tulemust küllalt suure dimensiooniga $\mathbb{Z}$-võrgus, sest iga lõplikku distributiivset võret saab sisestada sellisesse $\mathbb{Z}$-võrku. Joo-

nistel 25 ja 26 on antud Pascali tabelid vastavalt Fibonacci võre ja Youngi võre jaoks.

Eksisteerib 1-1 vastavus Fibonacci võre $I^*(P)$ elemente ($\hat{0}$) ja I siduvate tihedate ahelate hulga ning kõigi o-bijekt-sioonide $I \to \{1,2,\ldots,|I|\}$ hulga vahel (tulenevalt lausest 2.1).



Joon.26.

Seetõttu nähtub vastavuste ▲ ja □ kohta punkti 6.6 lõpus toodud tulemustest, et kehtivad valemid

$$\sum_{I,\,|I|=n} t(I) = t_n \tag{1}$$

ja

$$\sum_{I,\,|I|=n} t(I)^2 = n!\,,$$

kus t_n oleme tähistanud 2-järku n-substitutsioonide arvu; arvud t_n võib leida siin rekursioonist

$$t_0 = t_1 = 1 \quad \text{ja} \quad t_{k+1} = t_k + k\cdot t_{k-1}\,, \text{ kui } k \geq 1\,. \tag{2}$$

Osutub, et samasugused valemid kehtivad ka Youngi võre korral:

$$\sum_{\nu,\,k(\nu)=n} t(\nu) = t_n \quad \text{ja} \quad \sum_{\nu,\,k(\nu)=n} t(\nu)^2 = n!\,. \tag{3}$$

Milles on selle kokkulangevuse põhjus?

<u>10.4</u>. Distributiivseks võreks, mis siiani kombinatoorikas kõige enam kasutamist on leidnud, on Boole'i võre ($\mathbb{B}(n)$; $\cap$, $\cup$). Selle võrega on seotud arvud

$$\binom{n}{k} = |\{A \subset \mathfrak{n} \mid |A| = k\}|,$$

kõigile tuntud *binoomkordajad*. Rikkalikku materjali nende kohta sisaldub kõigis kombinatoorika õpikutes.

Tõlgendades valemi 8.4.7 paremat poolt ratsionaalfunktsioonina muutujast q, märkame seost

$$\lim_{q\to 1} \left[{n \atop k}\right] = \binom{n}{k} \tag{1}$$

Tõepoolest,

$$\lim_{q\to 1} \left[{n \atop k}\right] = \lim_{q\to 1}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{q^{n-k+1}-1}{q^k-1}\right) =$$
$$= \lim_{q\to 1}\frac{q^{n-1}+\cdots+1}{1}\cdot\lim_{q\to 1}\frac{q^{n-2}+\cdots+1}{q+1}\cdot\ldots \tag{2}$$
$$\cdot\lim_{q\to 1}\frac{q^{n-k}+\cdots+1}{q^k+\cdots+1} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{k} = \binom{n}{k}.$$

See tähelepanek viib järgmise, juba ammu kasutusel oleva (empiirilise) printsiibi juurde: kui mingi (algebraline) seos kehtib Gaussi arvude korral, siis kehtib sama tüüpi seos ka binoomkordajate jaoks. Paragrahvides 8 ja 9 toodud materjal annab võimaluse saada hulgaliselt näiteid selle printsiibi rakendustest: valemist (8.4.1) tuleneb

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{n-k};$$

valemist (8.4.8) tuleneb

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{- Pascali reegel;}$$

Vandermonde'i q-valemist (8.5.2) tuleneb

$$\binom{r+s}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{s}{i}\binom{r}{k-i} \quad \text{- nn. liitmisteoreem;}$$

millest erijuhul $r=s=k=n$ saame

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2;$$

Gaussi q-samasused (8.5.4) annavad

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0;$$

q-binoomvalemist (9.5.1) tuleneb

$$(x-z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(x-y)^{n-k} \cdot (y-z)^k,$$

millest ümbertähistusi a=x-y ja b=y-z kasutades saame tuntud binoomvalemi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k.$$

<u>10.5</u>. Kombinatoorikas võib kohata mitmeid mittetriviaalseid rakendusi järgmisele (ilmsele) tõsiasjale: kui (n^2+1)-elemendiline hulk tükeldada mitte rohkem kui n paarikaupa mittelõikuvaks alamhulgaks, siis vähemalt ühes neist alamhulkadest on mitte vähem kui n+1 elementi. Nimetatud fakt on üsna tuntud kui *postkasti printsiip*: elemendid ≡ kirjad, alamhulgad ≡ postkastid. Et tutvuda selle printsiibiga tegevuses, tõestame järgmise väite.

<u>Lause 2</u>. Lineaarselt järjestatud hulga P igas n^2+1 erinevast elemendist koosnevas jadas on alati võimalik leida n+1 elemendist koosnev alamjada, mis on kas kasvav või kahanev.

Tõestus. Olgu antud jada

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots, a_{n^2+1}. \qquad (1)$$

Selles jadas peame leidma alamjada

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n+1}}, \qquad (2)$$

mille korral on

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_{n+1}} \qquad (3)$$

või

$$a_{i_1} > a_{i_2} > \dots > a_{i_{n+1}}. \qquad (4)$$

Oletame, et jadas (1) puuduvad kahanevad alamjadad pikkusega $\geq n+1$, s.o. jadal (1) pole alamjadasid tüüpi (4).

Fikseerime suvalise elemendi a_i jadas (1) ja vaatleme kõiki selle elemendiga algavaid kahanevaid alamjadasid jadas (1). Nende alamjadade seas vähemalt üks peab olema maksimaalse pikkusega ja selle pikkuse tähistame ℓ_i; vastavalt tehtud oletusele $\ell_i \in \{1,2,\dots,n\}$. Seega iga elemendi a_i jadas (1) oleme taglastanud naturaalarvuga ℓ_i, milleks on selle elemendiga algavate kahanevate alamjadade maksimaalne pikkus. Kui ükski kahanev alamjada ei alga elemendist a_i, siis loeme $\ell_i=1$.

Tähistagu $N(\ell)$ jada (1) nende liikmete arvu, mis on taglastatud naturaalarvuga ℓ. Pole raske mõista, et

$$N(1)+N(2)+\dots+N(n) = n^2+1. \qquad (5)$$

Siit tuleneb sellise $\ell \in \{1,2,\dots,n\}$ olemasolu, et $N(\ell) \geq n+1$. Tõesti, vastasel juhul

$$N(1)+N(2)+\dots+N(n) \leq n+n+\dots+n = n^2,$$

mis on ilmses vastuolus võrdusega (5). Sümboli $N(\ell)$ tähendusest saab selgeks, et jadas (1) leidub vähemalt n+1 elementi (tähistame neid $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n+1}}$, võetuina jadas (1) esinemise järjekorras), millest igaüks on jada (1) kahanevate alamjadade algelemendiks, kusjuures iga a_{i_j} $(j=1,2,\dots,n+1)$ korral temast algavate kahanevate (1) alamjadade maksimaalseks pikkuseks on üks ja seesama arv ℓ.

Osutub, et alamjada $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n+1}}\}$ on kasvav, s.o. tüüpi (3). Tõepoolest, on selge, et $a_{i_k} < a_{i_{k+1}}$, $k=1,\dots,n$; vastasel korral peab $a_{i_k} > a_{i_{k+1}}$ kehtima ning et $a_{i_{k+1}}$ on valiku tõttu algelemendiks teatavale kahanevale (1) alamjadale, näeme, et a_{i_k} on algelemendiks ühele pikkust $\ell+1$ omavale kahanevale (1) alamjadale, vastuolus elemendi a_{i_k} valikuga! ¤

Saadud tulemus ei ole triviaalse iseloomuga. Tõesti, kui lugeda $P \subset \mathbb{Z}$, tuleks meil juhul n=2 vahetult läbi vaadata $5! = 120$ permutatsiooni hulgal $\{1,2,3,4,5\}$, et veenduda igas neist 3-liikmelise kasvava või kahaneva alamjada olemasolus. Juhul n=3 oleks aga lause 2 väite vahetul kontrollimisel vaja läbi vaadata juba $10! = 3628000$ permutatsiooni hulgal $\{1,2,\ldots$ $\ldots,10\}$. Siit võib näha, et tõestuse aluseks olnud postkasti printsiip võib anda tulemusi, mis on praktiliselt kättesaamatud banaalsele kõigi võimaluste järjest läbivaatamisele.

10.6. Kaugeleulatuva üldistuse postkasti printsiibile annavad järgmised teoreemid.

Teoreem 19 (F.Ramsey,1930). Olgu antud suvalised naturaalarv t, lõpmatu hulk S ning tema kõigi m-elemendiliste alamhulkade pere $P_m(S)$ tükeldus

$$P_m(S) = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_t.$$

Siis leiduvad lõpmatu alamhulk S', $S' \subset S$ ning indeks $i \in \{1,2,\ldots,t\}$ nii, et $P_m(S') \subset \mathcal{S}_i$.

Teoreem 20 (F.Ramsey,1930). Olgu antud suvalised naturaalarvud t, $n_1,\ldots,n_t$ ja m selliselt, et $m \le \min(n_1,\ldots,n_t)$. Leidub (minimaalne) selline naturaalarv $N=N(n_1,\ldots,n_t;m)$, et kõigi naturaalarvude $n \ge N$ korral kehtib järgmine väide: suvalise n-elemendilise hulga S ja tema kõigi m-elemendiliste alamhulkade pere $P_m(S)$ tükelduse

$$P_m(S) = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_t$$

korral leiduvad selline $i \in \{1,2,\ldots,t\}$ ja n_i-elemendiline alamhulk S', $S' \subset S$, et $P_m(S') \subset \mathcal{S}_i$.

Teoreemi 20 tõestus. *Esimene samm* - juht t=1. Sel korral on teoreemi väide triviaalne. Tõepoolest, siis $P_m(S) = \mathcal{S}_1$. Seepärast, kui võtta $N(n_1;m)=n_1$, siis $n \ge n_1$ korral leidub igas n-elemendilises hulgas S (seose $m \le n_1$ kehtivuse tõttu) n_1-elemendilisi alamhulkasid S', $S' \subset S$, $P_m(S') \subset \mathcal{S}_1$.

Teine samm - juhu t=3 reduktsioon juhule t=2; teiste sõnadega, kui juhul t=2 Ramsey teoreemi väide kehtib, siis on väide õige ka juhul t=3. Sel korral on meil tükeldus

$$P_m(S) = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_1 \cup (\mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3).$$

Leidub arv $n_2' = N(n_2,n_3;m)$ ja seega ka arv $N(n_1,n_2';m)$. Olgu naturaalarv n, $n \ge N(n_1,n_2';m)$ ja hulk S, $|S|=n$ suvalised. Võimalikud on 2 juhtu:

(1) leidub n_1-elemendiline alamhulk $S' \subset S$, et $P_m(S') \subset \mathcal{S}_1$ või

(2) leidub n_2'-elemendiline alamhulk $S' \subset S$, et $P_m(S') \subset \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$.

Reduktsiooni põhjendamiseks piisab vaadelda juhtu (2). Sel korral võtame hulga S' hulga S osas baashulgana. Et kehtib $|S'| \geq N(n_2, n_3; m)$, siis arvu $N(n_2, n_3; m)$ definitsioonist tulenevalt kas leidub n_2-elemendiline alamhulk $S'' \subset S'$, mille korral $P_m(S'') \subset \mathcal{S}_2 \cap P_m(S') \doteq \mathcal{S}_2'$, või siis leidub n_3-elemendiline alamhulk $S'' \subset S'$, mille korral $P_m(S'') \subset \mathcal{S}_3 \cap P_m(S') \doteq \mathcal{S}_3'$. Et $S'' \subset S' \subset S$ ja $\mathcal{S}_2' \subset \mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3' \subset \mathcal{S}_3$, siis näeme, et teoreemi väide kehtib ka juhul t=3, <u>tingimusel</u>, et ta kehtib juhul t=2.

Kolmas samm - tõestuse skeem. Reduktsiooni $t=3 \rightsquigarrow t=2$ võib vaadelda kui näidist analoogseteks reduktsioonideks ja niimoodi saab üles ehitada reduktsioonide ahela

$$t=n \rightsquigarrow t=n-1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow t=2.$$

Neljas samm - juht t=2. Kehtivad seosed

$$N(n_1, n_2; 1) = n_1 + n_2 - 1, \tag{1}$$

$$N(n_1, m; m) = n_1, \tag{2}$$

$$N(m, n_2; m) = n_2. \tag{3}$$

Seose (1) tõestus. Olgu antud suvalised naturaalarvud n_1 ja n_2 ning (n_1+n_2-1)-elemendiline hulk S ja tema tükeldus $P_1(S) = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Vaadeldaval juhul (m=1) on üsna ilmne, et kas leidub n_1-elemendiline alamhulk $S' \subset S$, mille korral $P_1(S') = S' \subset \mathcal{S}_1$, või siis leidub n_2-elemendiline alamhulk $S' \subset S$, mille korral $P_1(S') = S' \subset \mathcal{S}_2$. Toodud arutlusest nähtub, et $N(n_1, n_2; 1) \geq n_1+n_2-1$. Vastupidine võrratus on ilmne. Tõesti, oletanud $N(n_1, n_2; 1) = n_1+n_2-\kappa$, $\kappa \geq 2$, saaksime vastuolu, sest (n_1+n_2-2)-elemendilise hulga S iga tükelduse $P_1(S) = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ korral, kus $|\mathcal{S}_1| = n_1-1$ ja $|\mathcal{S}_2| = n_2-1$, ei saa hulgas S valida ei n_1-elemendilist alamhulka, mis sisalduks hulgas $\mathcal{S}_1$, ega ka n_2-elemendilist alamhulka, mis sisalduks hulgas $\mathcal{S}_2$.

Seose (2) tõestus. Olgu m ja n_1 naturaalarvud, nii et $m \leq n_1$. Edasi, olgu antud naturaalarv n, $n \geq n_1$, n-elemendiline hulk S ja suvaline tükeldus $P_m(S) = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Juhul $\mathcal{S}_2 \neq \emptyset$ leidub m-elemendiline alamhulk $S' \subset S$, $S' \in \mathcal{S}_2$, s.o. soovitud väide kehtib. Juhul $\mathcal{G}_2=\emptyset$ leidub n_1-elemendiline alamhulk $S'\subset S$, mille korral $P_m(S')\subset P_m(S)=\mathcal{G}_1$, s.t. $P_m(S')\subset\mathcal{G}_1$. Neist arutlustest nähtub $N(n_1,m;m)\le n_1$. Oletame, et $N(n_1,m;m)<n_1$. Võtnud suvalise $N(n_1,m;m)$-elemendilise hulga S ja tükelduse $\mathcal{G}_1=$ $=P_m(S)$, $\mathcal{G}_2=\emptyset$ näeme, et ei saa valida ei n_1-elemendilist alamhulka $S'\subset S$ nii, et $P_m(S')\subset\mathcal{G}_1$, ega ka m-elemendilist alamhulka $S'\subset S$, mille korral $P_m(S')\subset\mathcal{G}_2$. Vastuolu. Võrdus (2) on tõestatud. Seose (3) tõestus on analoogiline seose (2) tõestusele.

Viies samm - induktsiooni baas ja väide (ikka selsamal juhul t=2). Täpsustame kõigepealt induktsiooni baasi.

Seosed (1)-(3) lubavad eeldada, et kehtib

$$m < \min(n_1, n_2).$$

Eeldame arvude $N(n_1-1,n_2;m)=p_1$ ja $N(n_1,n_2-1;m)=p_2$ leidumist. Eeldame ka arvude $N(n_1',n_2';m-1)$ leidumist juhtudel $1<m-1\le$ $\le\min(n_1',n_2')$. Sellest tuleneb, et eksisteerib arv $N(p_1,p_2;m-1)$.

Kirjeldatud eeldustel tahame näidata, et eksisteerib arv $N(n_1,n_2;m)$; täpsemini, me tõestame, et

$$N(n_1,n_2;m)\le N(p_1,p_2;m-1)+1. \tag{4}$$

Kuues samm - induktsiooni läbiviimine. Olgu antud suvalised naturaalarv n, mis rahuldab tingimust $n\ge N(p_1,p_2;m-1)+1$ ning n-elemendiline hulk S ja tükeldus $P_m(S)=\mathcal{G}_1\cup\mathcal{G}_2$. Fikseerime mingi elemendi $x\in S$ ja olgu $S=T\cup\{x\}$. Antud tükeldusega hulga S m-elemendiliste alamhulkade hulgal $P_m(S)$ saame siduda uue tükelduse

$$P_{m-1}(T)=\mathcal{G}_1^-\cup\mathcal{G}_2^- \tag{5}$$

järgmiselt: suvalise (m-1)-elemendilise alamhulga $R\subset T$ korral kui $R\cup\{x\}\subset\mathcal{G}_1$, siis loeme $R\in\mathcal{G}_1^-$, kui aga $R\cup\{x\}\subset\mathcal{G}_2$, siis loeme $R\in\mathcal{G}_2^-$. Konstruktsioonist on selge, et $|T|\ge N(p_1,p_2;m-1)$. Seega kas

a) T sisaldab p_1-elemendilist alamhulka, mille kõik (m-1)-elemendilised alamhulgad on perest $\mathcal{G}_1^-$

või

b) T sisaldab p_2-elemendilist alamhulka, mille kõik (m-1)-elemendilised alamhulgad on perest $\mathcal{G}_2^-$.

Järgnevas analüüsime juhtu a). Seega, leidub p_1-elemendiline alamhulk $T' \subset T$, et $P_{m-1}(T') \subset \mathcal{S}_1^-$. Et aga $p_1=N(n_1-1,n_2;m)$, siis leidub selline alamhulk $T'' \subset T'$, et kas

$$|T''|=n_1-1 \quad \text{ja} \quad P_m(T'') \subset \mathcal{S}_1 \cap P_m(T') \tag{6}$$

või

$$|T''|=n_2 \quad \text{ja} \quad P_m(T'') \subset \mathcal{S}_2 \cap P_m(T'). \tag{7}$$

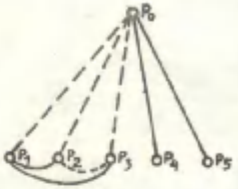
Oletame algul, et juht (7) leiab aset. Siis $T'' \subset T' \subset S$, $|T''|=n_2$ ja $P_m(T'') \subset \mathcal{S}_2$ näitavad, et täidetud on kõik nõuded ning sellel "liinil" on väide (4) tõestatud.

Oletame nüüd, et juht (6) leiab aset. Siis on meil $T'' \subset T'$, $|T''|=n_1-1$ ja $P_m(T'') \subset \mathcal{S}_1$. Olgu $T^*=T'' \cup x$, siis $|T^*|=n_1$. Näitame, et $P_m(T^*) \subset \mathcal{S}_1$. Selleks vaatame suvalist m-elemendilist alamhulka $M \subset T^*$. Kui osutub, et $x \notin M$, siis $M \subset T''$, millest järeldub $M \in \mathcal{S}_1$ seoste (6) tõttu. Kui aga $x \in M$, siis $M=x \cup M'$, kus $M' \subset T''$, $|M'|=m-1$. Et $T'' \subset T'$, siis $P_{m-1}(T'') \subset P_{m-1}(T') \subset \mathcal{S}_1^-$; siin viimane sisalduvus tuleneb sellest, et vaatluse all on juht a). Seega, kehtib $P_{m-1}(T'') \subset \mathcal{S}_1^-$, millest $M' \in \mathcal{S}_1^-$, ning siit, tükelduse $\mathcal{S}_1^- \cup \mathcal{S}_2^-$ definitsiooni arvestades, omakorda tuleneb, et $M=M' \cup x \in \mathcal{S}_1$. Kokkuvõttes, oleme tõestanud, et nii juhul (6) kui (7) kehtib $M \in \mathcal{S}_1$, millega on põhjendatud ka seos $P_m(T^*) \subset \mathcal{S}_1$. Järelikult, alamhulk $T^* \subset S$ on soovitud omadustega: $|T^*|=n_1$, $P_m(T^*) \subset \mathcal{S}_1$.

Väite (4) tõestus juhul a) on seega ammendatud.

Väite (4) tõestus juhul b) on analoogiline. ⌘

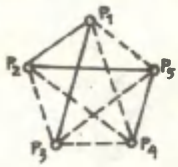
Arvutame näitena $N(3,3;2)$. Vastavat ülesannet vaatleme konkreetses interpretatsioonis. Olgu antud graaf, millel on 6 tippu. Iga tipupaar olgu seotud servaga, mis võib olla kas punane või sinine. Näitame, et selline graaf sisaldab monokromaatilist kolmnurka. Arutleme selleks järgmiselt (vt. joonist 27). Fikseerime tipu P_0 nende kuue seas ja vaatleme servade $P_0P_1, P_0P_2, \ldots, P_0P_5$ hulka. Et on ainult kaks värvi, siis mingid kolm nende viie serva seas peavad olema üht värvi; olgu nendeks P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3 ning olgu nad punased. Kui nüüd kasvõi üks servadest P_1P_2, P_1P_3



Joon.27.

või P_2P_3 on punane, siis punane kolmnurk oleks meil käes; näiteks, kui P_2P_3 on punane, siis $\Delta P_0P_2P_3$ oleks ka punane. Seega, peame eeldama, et kõik servad P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3 on sinised. Aga siis oleme leidnud sinise kolmnurga $\Delta P_1P_2P_3$.

Toodud arutlus näitab, et $N(3,3;2) \le 6$. Joonisel 28 on toodud 5 tippu omav täielik graaf ja antud tema servade hulga tükeldus, mis näitab, et $N(3,3;2) > 5$. Kokkuvõttes oleme saanud $N(3,3;2)=6$.



Joon.28.

Toome ära teadaolevate Ramsey arvude $N(n_1,n_2;2)$ tabeli:

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	6	9	14	18	23	[27/30]	[36/37]	
4	4	9	18	[25/28]	[34/35]				
5	5	14	[25/28]	[38/55]	[38/94]				
6	6	18	[34/45]	[38/94]	[102/178]				

Asjaolu $a \le N(n_1,n_2;2) \le b$ on selles tabelis tähistatud sümboliga [a/b] n_1-le vastava rea ja n_2-le vastava veeru ristumiskohas.

10.7. Vaatleme nüüd lõpliku pikkusega o-hulkasid, mis omavad vähimat elementi ja rahuldavad Jordan-Dedekindi tingimust. Vastavalt punktis 1.4 toodud märkusele gradueerib iga sellist o-hulka S tema kõrgusfunktsioon h. Kasutame tähistust $S[m]=\{x \in S \mid h(x)=m\}$.

Olgu antud ülalkirjeldatud tüüpi o-hulkade jada $\mathcal{S} = \{S_n \mid n=0,1,2,\dots\}$, kus o-hulga S_n pikkuseks on n ning naturaalarvud m,ℓ ja t, $m \le \ell$. Öeldakse, et *jada* $\mathcal{S}$ *on omadusega* $R(m,\ell,t)$, kui on olemas vähim naturaalarv $N=N_{\mathcal{S}}(m,\ell,t)$, nii et iga $n \ge N$ ja suvalise kujutuse $\nu: S_n[m] \to \{1,\dots,t\}$ jaoks leidub $i \in \{1,\dots,t\}$ ja $a \in S_n[\ell]$, mille korral $\{x \in S_n[m] \mid x \le a\} \subset \nu^{-1}(i)$.

Arvusid $N_{\mathcal{S}}(m,\ell,t)$ nimetatakse *jada $\mathcal{S}$ Ramsey arvudeks. Jada $\mathcal{S}$ on* definitsiooni kohaselt *Ramsey jada*, kui tal on omadused $R(m,\ell,t)$ parameetrite m, ℓ ja t kõigi naturaalarvuliste väärtuste korral, kus vaid $m\leq\ell$.

Teoreemis 20 kirjeldatud situatsioon juhib järgmise üldise mõiste juurde. Olgu antud naturaalarvud t; $n_1,\ldots,n_t$ ja m, $m\leq\min(n_1,\ldots,n_t)$. Öeldakse, et *jada $\mathcal{S}$ on omadusega* $R(n_1,\ldots,n_t;m)$, kui on olemas vähim naturaalarv $N=N_{\mathcal{S}}(n_1,\ldots,n_t;m)$, nii et iga $n\geq N$ ja suvalise kujutuse $\nu:S_n[m]\to\{1,\ldots t\}$ jaoks leiduvad $i\in\{1,\ldots,t\}$ ja $a\in S_n[n_i]$, mille korral $\{x\in S_n[m]\mid x\leqslant a\}\subset\nu^{-1}(i)$. Arvusid $N_{\mathcal{S}}(n_1,\ldots,n_t;m)$ nimetatakse ka *jada $\mathcal{S}$ Ramsey arvudeks*.

Neist definitsioonidest nähtub, et jada $\mathcal{S}$, millel on omadus $R(n_1,\ldots,n_t;m)$ parameetrite t; $n_1,\ldots,n_t$ ja m kõigi (mõeldavate) naturaalarvuliste väärtuste korral, on Ramsey jada. Kehtib ka vastupidine väide. See nähtub samuti definitsioonidest, kui võtta $\ell=\max(n_1,\ldots,n_t)$ ja märgata, et seosest $\ell\leq\ell^*$ tuleneb implikatsiooni $R(m,\ell^*,t)\Rightarrow R(m,\ell,t)$ õigsus. Need märkused lubavad teoreemi 20 sõnastada kui väidet, et jada $\mathbb{B}=\{\mathbb{B}(n)\mid n=0,1,2,\ldots\}$ on Ramsey jada.

Tõestame nüüd kaks järeldust teoreemist 20.

<u>Järeldus 1</u> (I.Schur). Olgu fikseeritud naturaalarvud ℓ ja t. Iga $x\in\mathbb{N}$ jaoks on olemas vähim naturaalarv $I=I(x,\ell,t)$ nii, et suvaliste $n\geq I$ ja kujutuse $\mu:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,t\}$ jaoks leidub $i\in\{1,\ldots,t\}$, mille korral hulga $\mathbf{n}$ alamhulk $\mu^{-1}(i)$ sisaldab arvusid $x_1,\ldots,x_{\ell-1}$ ja $x_\ell=\sum_{j=1}^{\ell-1}x_j$.

<u>Tõestus</u>. Piisab tõestada arvu $I(x,\ell,t)$ olemasolu, sest igast mittetühjast naturaalarvude hulgast saab valida välja seal sisalduva vähima arvu.

Olgu $n>N_{\mathbb{B}}(\underbrace{\ell,\ldots,\ell}_{x\text{ korda}};2)$ ja $\mu:\mathbf{n}\to\mathbf{t}$ suvalised. Defineerime kujutuse $\nu:\mathbb{B}_2(\mathbf{n})\to\mathbf{t}$ reegliga: $\{a,b\}\subset\mathbf{n}$ korral loeme $\{a,b\}\in\nu^{-1}(i)$ kehtivaks parajasti siis, kui $|a-b|\in\mu^{-1}(i)$, $i=1,2,\ldots,t$. Teoreemist 20 tulenevalt leiduvad alamhulk[*)] $M=\{y_1,\ldots,y_\ell\}\subset\mathbf{n}$ ja $i\in\mathbf{t}$ nii, et $\{y_j,y_k\}\in\nu^{-1}(i)$ kõigi $1\leq j<k\leq\ell$ korral. Arvud $x_j=y_{j+1}-y_j$, $j=1,\ldots,\ell-1$ ja $x_\ell=y_\ell-y_1$ sisalduvad

---

*) Ei kitsenda üldsust, kui loeme M elemendid tähistatuiks nii, et $y_1<y_2<\ldots<y_\ell$.

kõik ühes ja samas alamhulgas $\mu^{-1}(i) \subset n$ ning kehtib ka seos $x_\ell = \sum_{j=1}^{\ell-1} x_j$. ⌑

<u>Järeldus 2</u>. Tükelduste võrede jada $\Pi = \{\Pi_n \mid n=1,2,\ldots\}$ on Ramsey jada.

<u>Tõestus</u>. Olgu naturaalarvud m, ℓ ja t, $m \leq \ell$ ja $n \geq 2N_B(m,\ell,t)-1$ ning kujutus $\nu: \Pi_{n+1}[m] \to \{1,\ldots,t\}$ suvalised. Vaatleme tükeldust $\pi \in \Pi_{n+1}$, mis koosneb $N_B(m,\ell,t)$ kaheelemendilisest tükist ja $n-2N_B(m,\ell,t)+1$ üheelemendilisest tükist. Märkame, et tükeldused σ, $\sigma \leq \pi$, sisalduvad lõigus $[\hat{0},\pi]$. Kuna iga tükeldus σ, $\sigma \leq \pi$, saadakse tükelduse π $N_B(m,\ell,t)$ kaheelemendilise tüki hulgas mõnede tükkide väljavalimise ja seejärel nende väljavalitud tükkide üheelemendilisteks tükeldamise tulemusena, siis järeldame, et o-hulk $[\hat{0},\pi]$ on o-isomorfne o-hulgaga $B(\{1,2,\ldots,N_B(m,\ell,t)\})$. Näeme, et järelduses 2 sisalduv väide tuleneb teoreemist 20. ⌑

KIRJANDUS

1. Hion,J. Elementaarmatemaatika kõrgemalt vaatekohalt, I. - Trt.: TRÜ Rotaprint, 1962.
2. Kaasik,Ü. Kombinatoorika. - Trt.: TRÜ Rotaprint, 1978.
3. Lumiste,Ü. Geomeetria alused. - Trt.: TRÜ Rotaprint, 1964.
4. Aigner,M. Combinatorial theory. - Berlin: Springer Verlag, 1979.
5. Andrews,G. The theory of partitions. - Reading: Addison-Wesley, 1976.
6. Berge,C. Principles of combinatorics. - New York: Academic Press, 1971.
7. Birkhoff,G. Lattice theory. - Providence: AMS Coll. Publ., 1979.
8. Биркгоф Г. Теория структур. - М.: ИЛ, 1952.
9. ван дер Варден В.Л. Алгебра. - М.: Наука, 1976.
10. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. - М.: ФМ, 1962.
11. Плоткин Б.И. Алгебраические структуры. - Рига: МО, 1973.
12. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. - М.: ИЛ, 1963.
13. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. - М.: Наука, 1970.
14. Холл М. Теория групп. - М.: ИЛ, 1962.
15. Холл М. Комбинаторика. - М.: Мир, 1970.
16. Уилсон Р. Введение в теорию графов. - М.: Мир, 1977.

Уно К а л ь ю л а й д.
ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ.
Лекции о решетках и их комбинаторике.
Учебное пособие для студентов математического факультета.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, I8.
Vastutav toimetaja K. Kaarli.
Paljundamisele antud 17.02.1983.
Formaat 60x84/16.
Kirjutuspaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 5,81.
Arvestuspoognaid 4,89. Trükipoognaid 6,25.
Trükiarv 300.
Tell .nr. 190.
Hind 15 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Pälsoni t. 14.

15 kop.