

XII A - 414

1

EINE ARITHMETISCHE ANALYSE DES VIERFARBENPROBLEMS

VON

J. NUUT

TARTU 1931

Summa laportaudrege

Autovirt

5. III. 1931.

EINE ARITHMETISCHE ANALYSE DES VIERFARBENPROBLEMS

VON

J. NUUT

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

92530

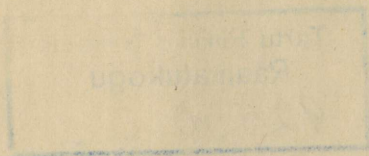
TARTU 1930

EINE ARITHMETISCHE ANALYSE DES
VIERFARBENPROBLEMS

VON

Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis (Dorpatensis) A XX.7.

J. NOUT



0056009500

1. Formale Multiplikation der Farbeninvarianten.

In zwei vorhergehenden Abhandlungen¹⁾ habe ich Ansätze entwickelt, welche es gestatten das Vierfarbenproblem oder Kartenfarbenproblem²⁾ in arithmetischer Fassung zu analysieren. Eine von mir als „Vierfarbenformel“³⁾ bezeichnete Relation ermöglicht es sämtliche „Farbeninvarianten“⁴⁾ eines irreduziblen Normalnetzes⁵⁾ beliebig hoher Ordnung⁶⁾ zu berechnen, sobald die Zahlenwerte der Farbeninvarianten für Netze nächst-niedrigerer Ordnung bekannt sind; dabei sind die Farbeninvarianten der Netze erster Ordnung durch dieselbe Formel implicite mitbestimmt. Sämtliche Farbeninvarianten sind ihrem Wesen nach nichtnegative ganze Zahlen. Der Vierfarbensatz ist bewiesen, sobald es auf Grund der Vierfarbenformel durch vollständige Induktion nachzuweisen gelingt, dass eine Farbeninvariante eines irreduziblen Normalnetzes nur dann verschwindet, wenn die Nebenbedingungen, welchen diese Farbeninvariante unterworfen ist, einen Widerspruch⁷⁾ enthalten. Die letztgenannte Vermutung habe ich als den „allgemeinen Vierfarbensatz“ bezeichnet⁸⁾.

Die zweite der erwähnten Abhandlungen enthält ausführlich entwickelte Richtlinien zum Beweis dieser Vermutung. Werden diese Richtlinien konsequent eingehalten, so gelangt

1) „Über die Anzahl der Lösungen der Vierfarbenaufgabe“, Acta et Comm. Univ. Tartuensis A XV.3 (fernerhin abgekürzt „ALV“); „Über die Vierfarbenformel“, Acta et Comm. Univ. Tartuensis A XV.4 (abgekürzt zitiert „VF“).

2) Vgl. ALV § 1.

3) ALV § 17, Formel (89); VF § 4, Formel (27).

4) ALV § 2.

5) ALV §§ 1, 3.

6) ALV § 3.

7) Über den Begriff des Widerspruchs in den Bedingungen vgl. ALV § 12.

8) ALV § 19.

man zwangsläufig zu einer wesentlichen Vertiefung der hypothetischen Behauptung⁹⁾. In der vorliegenden Arbeit will ich zeigen, auf welches Problem man hierbei notwendigerweise geführt wird, und welche merkwürdige Relationen zwischen den Farbeninvarianten ein und desselben Netzes sicher bestehen. Zur Bewältigung rein technischer Schwierigkeiten soll zunächst die Symbolik durch Verwendung einer formalen Multiplikation übersichtlicher gestaltet werden.

Die Vierfarbenformel lässt sich für eine Auslese¹⁰⁾ vom Typus $(+FR)(+FF)(-F'F')(+RR)(-R'R')$ folgendermassen schreiben¹¹⁾:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{(+FR)(+FF)(-F'F')(+RR)(-R'R')} &= \\ &= 2^f \cdot \prod_{u=1}^n \alpha_{\psi_u} + \tau_u \cdot \prod_{v=1}^f \alpha_{\varrho_v} + \lambda_v - 1 \cdot \\ &\cdot \left\{ 2^{t-1} \dot{N}_{(+RR)(-R'R')(-PR)(+R_0R_1) \dots (+R_t R_{t+1})} \prod_{w=1}^{t+1} \alpha_{\varrho_w} + \mu_w - 1 + \right. \\ &+ 2^t \sum_{j=1}^{t+1} \alpha_{\varrho_j} + \mu_j \dot{N}_{(+RR)(-R'R')(-PR) \dots (-R_{j-1} R_j) \dots} \prod_{\substack{w=1 \\ w \neq j}}^{t+1} \alpha_{\varrho_w} + \mu_w - 1 + \\ &+ \dots + \\ &\left. + \dot{N}_{(+RR)(-R'R')(-PR)(-R_0R_1) \dots (-R_t R_{t+1})} \prod_{w=1}^{t+1} \alpha_{\varrho_w} + \mu_w \right\}. \quad (1) \end{aligned}$$

Hier bedeuten α_x die Vierfarbenkoeffizienten¹²⁾, die mittels

$$\alpha_x = \frac{1}{3} (2^x + \varepsilon^{x-1}), \quad \varepsilon = -1, \quad (2)$$

für jedes ganzzahlige x definiert sind; speziell ist also

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 3, \quad \alpha_4 = 5, \quad \alpha_5 = 11, \dots$$

F, F' resp. R, R' sind Knoten auf dem Fächerrand resp. Residuumrand, P ist das Zentrum der Zerlegung des Netzes i -ter Ordnung in einen Fächer und ein Residuum¹³⁾ von der Ordnung $i-1$, und $(-PR)$ bedeutet den Bedingungskomplex

9) Vgl. hierüber VF § 11.

10) ALV § 12.

11) Vgl. VF § 6, Formel (58).

12) ALV § 6.

13) ALV § 8.

$(-PR_1)(-PR_2)(-PR_3) \dots (-PR_t)$. Die ganzzahligen Argumente ψ, φ, ϱ sind zu den Paaren $(F'F'), (FF) (FR)$ gehörige entsprechende reduzierte Maschenzahlen¹⁴⁾ im Fächer; τ, λ, μ bedeuten die zugehörigen Charakteristiken¹⁵⁾ der ψ, φ, ϱ bezüglich der „negativen“ Paare $(-F'F')$; f ist die Anzahl der Paare $(+FF)$, n die Anzahl der Paare $(-F'F')$.

Die bisherige Schreibweise soll nun vereinfacht werden, indem

1) für die Farbeninvarianten des Residuums einfach $(A)(B) \dots$ statt $\overset{i-1}{N}_{(A)(B)} \dots$ geschrieben wird;

2) die nebeneinandergesetzten Bedingungen $(A)(B) \dots$ hierbei formal wie Faktoren eines Produktes behandelt werden, in welchem das assoziative, kommutative und distributive Gesetz gültig sind.

Bedeutend also p, q Zahlenkoeffizienten, $(A), (B), (C)$ Bedingungen auf dem Residuumsrand, so soll

$$p(A)(B) \pm q(A)(C) = (A)[p(B) \pm q(C)] = [p(B) \pm q(C)](A) \quad (3)$$

gelten. Nach solcher Übereinkunft darf (1) folgendermassen vereinfacht geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+F'F')(+RR)(-R'R')} &= \\ &= 2^f (+RR)(-R'R')(-PR) \prod_{u=1}^n \alpha_{\psi_u + \tau_u} \prod_{v=1}^f \alpha_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \\ &\prod_{w=1}^{t+1} \left\{ 2 \alpha_{\varrho_w + \mu_w - 1} (+R_{w-1} R_w) + \alpha_{\varrho_w + \mu_w} (-R_{w-1} R_w) \right\}. \quad (4) \end{aligned}$$

Die Schleifenklammer in (1) zerfällt dann nämlich formal in ein Produkt aus $t+1$ „Binomen“.

Im einfachsten Falle $i=1$, wo das Residuum auf ein Dreieck zusammenschrumpft, resultiert aus (4):

$$\overset{1}{N}_{(+FF)(-F'F')} = 2^f \cdot \prod_{u=1}^n \alpha_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod_{v=0}^f \alpha_{\varphi_v + \lambda_v - 1}, \quad (5)$$

wobei φ_0 und λ_0 die reduzierte Maschenzahl und Charakteristik des Gesamtnetzes bedeuten¹⁶⁾.

14) ALV § 13, VF § 6.

15) VF § 6.

16) Vgl. VF § 7, Formel (59).

Bei der somit eingeführten formalen Multiplikation treten keine Potenzen der Bedingungen (A), (B) ... auf, weil dem Wesen der Dinge nach $(+XY)(+XY) = (+XY)$ und $(-XY)(-XY) = (-XY)$ ist. Es ist zu beachten, dass ein formales Produkt den Zahlenwert 0 annehmen kann, ohne dass einer der Faktoren 0 zu sein braucht, wie aus

$$(+XY)(-XY) = 0 \quad (6)$$

sofort zu ersehen ist.

Für die absolute Farbinvariante $\overset{i-1}{N}$, welche die Anzahl der wesentlich verschiedenen Vierfarbenbezeichnungen ohne Nebenbedingungen angibt, bedarf man in der neuen Symbolik noch eines besonderen Zeichens. Als solches soll E benutzt werden. E spielt in der formalen Multiplikation gewissermassen die Rolle einer Einheit. Es ist nämlich

$$E(A) = (A)E = (A) \quad (7)$$

bei jedem (A).

Mit Hilfe des Symbols E lässt sich die wichtige Identität¹⁷⁾

$$\begin{aligned} N_{(L)(\pm F_1 R_1)(\pm F_2 R_2)} \dots &= N_{(L)} - \sum_j N_{(L)(\mp F_j R_j)} + \\ &+ \sum_{j, k} N_{(L)(\mp F_j R_j)(\mp F_k R_k)} + \\ &- \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (8)$$

folgendermassen schreiben:

$$(L)(\pm F_1 R_1)(\pm F_2 R_2) \dots = (L) \prod_u \{ E - (\mp F_u R_u) \}. \quad (9)$$

2. Reduktion bei speziellen negativen Bedingungen.

Die Formel (4) zeigt auf der linken Seite keine Bedingungen vom Typus $(-FR)$. Obgleich dies inhaltlich noch keinen Mangel bedeutet, da auf Grund der Relation (8) negative Bedingungen sich allemal auf positive zurückführen lassen, entstehen hierdurch dennoch wesentliche Schwierigkeiten technischen Cha-

17) Vgl. ALV § 12, Formeln (58), (62).

rakters. Gerade die Reduktion bei Bedingungen $(-FR)$ führt zur tieferen Einsicht in das ganze Problem. Es genügt hierbei ausreichend hohe untere Schranken für den Wert von $N_{(L)}(-FR)$ aufzustellen. Die Berechnung solcher Schranken bildet den wesentlichen Inhalt der vorliegenden Abhandlung.

Ich beginne mit dem Spezialfall, wo (L) keine Bedingungen vom Typus $(+FR)$ enthält. Es sei dann $(-FR) = (-F_1R_1)(-F_2R_2) \dots (-F_sR_s)$, wobei die Numeration der Paare einer natürlichen Reihenfolge auf dem Fächerrand resp. Residuumrand entsprechen mag¹⁸⁾. Da der Komplex $(L)(-FR)$ jedenfalls einer Auslese¹⁹⁾ entspricht, so werden die Knoten $R_0, R_1, \dots, R_s, R_{s+1}$ durch die Paare aus (L) untereinander jedenfalls nicht getrennt; dasselbe gilt für die Knoten $F_0, F_1, \dots, F_s, F_{s+1}$. Hierbei bedeuten $F_0 = R_0$ und $F_{s+1} = R_{s+1}$ die beiden Knoten, wo Fächer- und Residuumrand aneinanderstossen. Werden die $(+FF)$ und $(-F'F')$ in Betracht gezogen, so erscheint jedem Fächerbogen $F_{j-1}F_j$ eindeutig eine reduzierte Maschenzahl σ_j zugeordnet; zugleich entspricht demselben Fächerbogen eine eindeutig definierte Charakteristik ν_j in Bezug auf die negativen Paare $(-F'F')$. Es sind σ_j und ν_j nichtnegative ganze Zahlen. Die reduzierten Maschenzahlen resp. Charakteristiken der Paare $(+FF)$, $(-F'F')$ selber seien wie in (4) mittels φ , ψ , resp. λ , τ bezeichnet; f sei, wie früher, die Anzahl der Paare $(+FF)$, n die Anzahl der Paare $(-F'F')$. Der Bedingungskomplex $(+RR)(-R'R')$ werde abgekürzt mittels (H) symbolisiert.

Berechnet man nun $\overset{i}{N}_{(L)}(-FR)$ auf Grund von (8) und (4), so ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FF)(-F'F')(+RR)(-R'R')(-FR)} = \\ &= 2^f (H) \left[2\alpha_{\sigma_1} + \dots + \sigma_{s+1} + \nu_1 + \dots + \nu_{s+1} - 1 (+R_0R_{s+1}) + \right. \\ & \quad \left. + \alpha_{\sigma_1} + \dots + \sigma_{s+1} + \nu_1 + \dots + \nu_{s+1} (-R_0R_{s+1}) + \right. \\ & - \sum_{j=1}^s (-PR_j) \left\{ 2\alpha_{\sigma_1} + \dots + \sigma_j + \nu_1 + \dots + \nu_j - 1 (+R_0R_j) + \right. \\ & \quad \left. + \alpha_{\sigma_1} + \dots + \sigma_j + \nu_1 + \dots + \nu_j (-R_0R_j) \right\} \\ & \quad \left. \left\{ 2\alpha_{\sigma_{j+1}} + \dots + \sigma_{s+1} + \nu_{j+1} + \dots + \nu_{s+1} - 1 (+R_jR_{s+1}) + \right. \right. \end{aligned}$$

18) Vgl. ALV § 13.

19) ALV §§ 12, 13.

$$\begin{aligned}
& + \alpha_{\sigma_{j+1}} + \dots + \sigma_{s+1} + \nu_{j+1} + \dots + \nu_{s+1} (-R_j R_{s+1}) \} + \\
& + \sum_{\substack{j=1 \\ k=2 \\ j < k}}^s (-PR_j) (-PR_k) \{ 2 \alpha_{\sigma_1} + \dots + \sigma_j + \nu_1 + \dots + \nu_j - 1 (+R_0 R_j) + \\
& + \alpha_{\sigma_1} + \dots + \sigma_j + \nu_1 + \dots + \nu_j (-R_0 R_j) \} \\
& \{ 2 \alpha_{\sigma_{j+1}} + \dots + \sigma_k + \nu_{j+1} + \dots + \nu_k - 1 (+R_j R_k) + \\
& + \alpha_{\sigma_{j+1}} + \dots + \sigma_k + \nu_{j+1} + \dots + \nu_k (-R_j R_k) \} \\
& \{ 2 \alpha_{\sigma_{k+1}} + \dots + \sigma_{s+1} + \nu_{k+1} + \dots + \nu_{s+1} - 1 (+R_k R_{s+1}) + \\
& + \alpha_{\sigma_{k+1}} + \dots + \sigma_{s+1} + \nu_{k+1} + \dots + \nu_{s+1} (-R_k R_{s+1}) \} + \\
& - \dots \dots \dots + \\
& + (-1)^s \prod_{w=1}^{s+1} (-PR_w) \{ 2 \alpha_{\sigma_w} + \nu_w - 1 (+R_{w-1} R_w) + \\
& + \alpha_{\sigma_w} + \nu_w (-R_{w-1} R_w) \} \prod_{u=1}^n a_{\psi_u + \tau_u} \prod_{v=1}^f a_{\varphi_v + \lambda_v} - 1. \quad (10)
\end{aligned}$$

Hierbei ist in Betracht gezogen, dass $(-PR_{s+1})$ immer identisch erfüllt ist, da P und R_{s+1} benachbarte Knoten bedeuten.

Der Ausdruck in der eckigen Klammer auf der rechten Seite von (10) ist offenbar eine Vierfarbenfunktion²⁰⁾ der ganzzahligen Argumente

$$\sigma_1 = \sigma_1 + \nu_1, \sigma'_2 = \sigma_2 + \nu_2, \dots, \sigma'_{s+1} = \sigma_{s+1} + \nu_{s+1}. \quad (11)$$

Um dies anzudeuten, schreibe ich $\overset{i}{N}_{\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_{s+1}}$ oder noch kürzer $\overset{i}{N}_{\sigma'}$ statt $\overset{i}{N}_{(+FF)(-F'F')(+RR)(+R'R')(-F'R')}$. Sämtliche Werte von $\overset{i}{N}_{\sigma'}$ sind bekannt, sobald man ein System von Fundamentalwerten²¹⁾ kennt.

20) Über den Begriff der Vierfarbenfunktion s. VF § 3.

21) VF § 4.

Für $\sigma'_j \geq 0$ ist $N_{\sigma'}$ notwendigerweise eine nichtnegative ganze Zahl. Ein System nichtnegativer unterer Schranken für die Fundamentalwerte liefert sofort auch eine nichtnegative untere Schranke für $N_{\sigma'}$ in jedem Gitterpunkt (σ') bei $\sigma'_j \geq 0$ ²²⁾.

3. Diagonalspolynome.

Ist der Wert einer Koordinate σ'_j im Gitterpunkt (σ') gleich 0, so bedeutet dies $\sigma_j = 0$, $\nu_j = 0$. Es ist also dann auf dem Fächerbogen $F_{j-1} F_j$ überhaupt kein negatives Paar $(-F' F')$ gelegen, zugleich ist wegen $(+FF)$ die Forderung $F_{j-1} = F_j$ gestellt. Die Bedingung $(-F_j R_j)$ darf daher in diesem Falle auch durch $(-F_{j-1} R_j)$ ersetzt werden. Ist zugleich noch $j=1$, so reduziert sich $(-F_j R_j)$ auf $(-R_0 R_1)$, was schon unter (H) Aufnahme finden dürfte und daher hier kein Interesse bietet. Entsprechendes gilt bei $j=s+1$. Ich beschränke mich demnach auf die Annahmen $\sigma'_1 \neq 0$, $\sigma'_{s+1} \neq 0$.

Als einfachsten extremen Spezialfall fixiere ich die Fundamentalecke

$$\sigma'_1 = 1, \quad \sigma'_2 = 0, \quad \sigma'_3 = 0, \quad \dots, \quad \sigma'_s = 0, \quad \sigma'_{s+1} = 1. \quad (12)$$

Für diesen Spezialfall folgt aus (10):

$$\begin{aligned} N_{1, 0, 0, \dots, 0, 1} &= 2^f(H) \left[2 (+R_0 R_{s+1}) + (-R_0 R_{s+1}) + \right. \\ &\quad - \sum_j (-PR_j)(-R_0 R_j)(-R_j R_{s+1}) + \\ &\quad + \sum_{\substack{j, k \\ j < k}} (-PR_j)(-PR_k)(-R_0 R_j)(+R_j R_k)(-R_k R_{s+1}) - \dots + \\ &\quad \left. + (-1)^s (-PR_1) \dots (-PR_s)(-R_0 R_1)(+R_1 R_2) \dots (+R_{s-1} R_s)(-R_s R_{s+1}) \right] \\ &\quad \prod_u \alpha_{\psi_u + \tau_u} \prod_v \alpha_{\varphi_v + \lambda_v - 1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Benutzt man hier nun zur Entfernung sämtlicher negativer Bedingungen die Relation (9), so verwandelt sich der Ausdruck

²²⁾ Auf Grund der Formel (18) VF § 3.

in der eckigen Klammer, den ich abkürzend durch das Symbol $\overline{PR_0 R_1 \dots R_{s+1}}$ bezeichnen will, in

$$\begin{aligned}
 & E + (+R_0 R_{s+1}) - \sum_j \{E - (+PR_j)\} \{E - (+R_0 R_j)\} \\
 & \quad \{E - (+R_j R_{s+1})\} + \\
 & + \sum_{\substack{j, k \\ j < k}} (+R_j R_k) \{E - (+PR_j)\} \{E - (+PR_k)\} \{E - (+R_0 R_j)\} \\
 & \quad \{E - (+R_k R_{s+1})\} + \\
 & - \dots + \\
 & + (-1)^s (+R_1 R_2) \dots (+R_{s-1} R_s) \{E - (+PR_1)\} \dots \\
 & \dots \{E - (+PR_s)\} \{E - (+R_0 R_1)\} \{E - (+R_s R_{s-1})\}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck liefert formale Produkte von der Gestalt $(+R_j R_k) (+R_k R_l) (+R_l R_m) \dots$; für ein solches Produkt soll die Abkürzung $(+R_j R_k R_l R_m \dots)$ benutzt werden. Es bedeutet offenbar $(+R_j R_k R_l R_m \dots)$ die beim Färben des Netzes zu berücksichtigende Nebenbedingung

$$R_j \equiv R_k \equiv R_l \equiv R_m \equiv \dots$$

Es ist allgemein

$$(+A_1 A_2 \dots A_k) \prod_{x=1}^k \{E - (+PA_x)\} = (+A_1 A_2 \dots A_k) \{E - (+PA_1)\}, \quad (15)$$

wie man leicht daran erkennt, dass infolge $(+A_1 A_2 \dots A_k)$ notwendigerweise $(+PA_x)$ mit $(+PA_1)$ gleichbedeutend wird. Mit Hilfe von (15) lässt sich (14) nun zunächst in

$$\begin{aligned}
 & E + (+R_0 R_{s+1}) - \sum_j \{E - (+PR_j)\} \{E - (+R_0 R_j)\} \{E - (+R_j R_{s+1})\} + \\
 & + \sum_{\substack{j, k \\ j < k}} (+R_j R_k) \{E - (+PR_j)\} \{E - (+R_0 R_j)\} \{E - (+R_k R_{s+1})\} + \\
 & - \dots + \\
 & + (-1)^s (+R_1 R_2 \dots R_s) \{E - (+PR_1)\} \{E - (+R_0 R_1)\} \{E - (+R_s R_{s+1})\} \\
 & \quad (16)
 \end{aligned}$$

umformen. Dieser Ausdruck besteht hauptsächlich aus Gliedern von der Form

$$(-1)^h (+R_{w_1} R_{w_2} \dots R_{w_h}) \{E - (+PR_{w_1})\} \{E - (+R_0 R_{w_1})\} \\ \{E - (+R_{w_h} R_{s+1})\}, \quad (17)$$

wobei $w_1 < w_2 < \dots < w_h$. Führt man in einem solchen Glied die geforderte formale Multiplikation aus, so ergibt sich hierfür

$$(-1)^h (+R_{w_1} R_{w_2} \dots R_{w_h}) + (-1)^{h+1} (+PR_{w_1} R_{w_2} \dots R_{w_h}) + \\ + (-1)^{h+1} (+R_0 R_{w_1} R_{w_2} \dots R_{w_h}) + (-1)^{h+1} (R_{w_1} R_{w_2} \dots R_{w_h} R_{s+1}) + \\ + (-1)^{h+2} (+R_0 R_{w_1} R_{w_2} \dots R_{w_h} R_{s+1}) + \\ + (-1)^{h+2} (+PR_0 R_{w_1} R_{w_2} \dots R_{w_h}) + \\ + (-1)^{h+2} (+PR_{w_1} R_{w_2} \dots R_{w_h} R_{s+1}) + \\ + (-1)^{h+3} (+PR_0 R_{w_1} R_{w_2} \dots R_{w_h} R_{s+1}) \dots \quad (18)$$

Die 3 letzten Summanden in (18) verschwinden identisch, da $(+PR_0)$ und $(+PR_{s+1})$ Widersprüche bedeuten; man denke sich trotzdem alle 8 Summanden zunächst ausgeschrieben, um das Bildungsgesetz von $\boxed{PR_0 R_1 \dots R_{s+1}}$ in symmetrischer Gestalt zu erfassen. Führt man die Ausdrücke (18) in (16) ein, so erkennt man, dass $\boxed{PR_0 R_1 \dots R_{s+1}}$ in der Hauptsache aus Gliedern vom Typus $(-1)^h (+A_1 A_2 \dots A_h)$ besteht, wo $A_1, A_2, \dots, A_h$ eine beliebige Kombination von h Elementen der $s+3$ Elemente enthaltenden Knotengruppe $P, R_0, R_1, \dots, R_{s+1}$ bedeutet. Für jedes der Forderung $2 < h \leq s+3$ genügende h kommt in (16) die entsprechende Kombination genau einmal vor. Nur für $h=2$ fehlen scheinbar die Kombinationen PR_0 und PR_{s+1} , — da aber identisch $(+PR_0)=0$ und $(+PR_{s+1})=0$ gilt, so dürfen diese beiden Paare ohne weiteres hinzugenommen werden. Ausser den Kombinationen $(-1)^h (+A_1 A_2 \dots A_h)$ kommt in $\boxed{PR_0 R_1 \dots R_{s+1}}$ nur noch E vor, und zwar einmal mit dem

Vorzeichen plus und s mal mit dem Vorzeichen minus; zusammen ergibt dies also einen Summanden $(1-s)E$. Einige der $(+A_1A_2 \dots A_h)$ verschwinden identisch, — jedesmal nämlich, sobald die Kombination $A_1, A_2, \dots, A_h$ zwei benachbarte Knoten enthält. Dieser Umstand spielt aber nur eine nebensächliche Rolle, weil man ja die verschwindenden Summanden ohne Schaden ausschreiben darf. Das aus Farbeninvarianten zusammengesetzte Polynom $\overline{PR_0R_1 \dots R_{s+1}}$ ist auf Grund des soeben erkannten Bildungsgesetzes offenbar symmetrisch in Bezug auf den Knotenkomplex $P, R_0, R_1, \dots, R_{s+1}$, — es ist daher gleichgültig, in welcher Reihenfolge die betreffenden Knoten im Symbol genannt werden.

Es sei r die Anzahl der im Symbol genannten Knoten, im betrachteten Falle also $r = s + 3$. Der Koeffizient bei E in der entwickelten Form des Polynoms war $1-s$, also $4-r$. Ich definiere demnach ganz allgemein für einen beliebig gewählten Komplex von Randknoten $A_1, A_2, \dots, A_r$ eines irreduziblen Normalnetzes:

$$\begin{aligned} \overline{A_1A_2 \dots A_r} = & (4-r)E + \sum_{\substack{j, k \\ j < k}} (+A_jA_k) - \sum_{\substack{j, k, l \\ j < k < l}} (+A_jA_kA_l) + \\ & + \sum_{\substack{j, k, l, m \\ j < k < l < m}} (A_jA_kA_lA_m) - \dots + (-1)^r (+A_1A_2 \dots A_r). \end{aligned} \quad (19)$$

Aus der Definition (19) ergeben sich die Spezialfälle

$$\begin{aligned} \overline{A_1} &= 3E \\ \overline{A_1A_2} &= 2E + (+A_1A_2) \\ \overline{A_1A_2A_3} &= E + (+A_1A_2) + (+A_2A_3) + (+A_3A_1) - (+A_1A_2A_3). \end{aligned}$$

Laut (13) ist

$$N_{1,0,0,\dots,0,1}^i = 2^f(H) \overline{PR_0R_1 \dots R_{s+1}} \prod_u \alpha_{\psi_u + \tau_u} \prod_v \alpha_{\varphi_v + \lambda_v - 1}. \quad (20)$$

Das in (19) enthaltene Bildungsgesetz lässt sich in übersichtlicher Form bildlich darstellen, dabei so, dass überflüssige Summanden von vornherein ausscheiden. Man denke sich den

Rand des Netzes auf ein konvexes einfaches ebenes Polygon topologisch ähnlich abgebildet. Die Ecken des Bildpolygons seien mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie die entsprechenden Randknoten des abgebildeten Netzrandes. Die Fig. 1 zeigt ein solches Bildpolygon. Die den Knoten $A_1, A_2, \dots, A_r$ entsprechenden Ecken des Bildpolygons (in der Fig. 1 sind es die Ecken $P, R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$) verbinde man auf jede mögliche Weise durch Diagonalen. Jedem nicht identisch verschwindenden Summanden $(+A_j A_k)$ in (19) entspricht dann eine

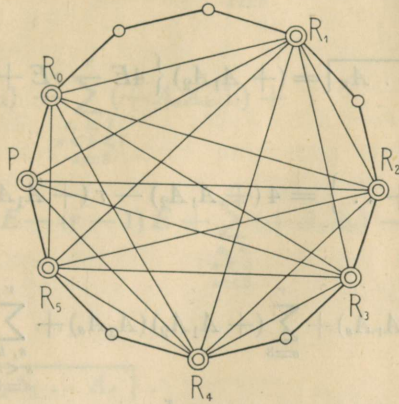


Fig. 1.

Diagonale (ein Diagonalenzweieck) im Bildpolygon, jedem Summanden $(+A_j A_k A_l)$ ein Diagonalendreieck, jedem Summanden $(+A_j A_k A_l A_m)$ ein einfaches Diagonalenviereck usw., und umgekehrt. Die in (19) notwendig aufzunehmenden Kombinationen lassen sich hiernach allesamt aus dem Diagonalsystem des Bildpolygons direkt ablesen; identisch verschwindende Glieder fallen automatisch fort. In der Fig. 1 zählt man solcherweise 18 Diagonalenzweiecke, 21 Diagonalendreiecke, 10 Diagonalenvierecke, 2 Diagonalenfünfecke; das zugehörige Polynom $\overline{PR_0 R_1 R_2 R_3 R_4 R_5}$ enthält demnach in diesem Falle ausser $-3E$ noch 28 positive und 23 negative nicht identisch verschwindende Summanden.

Auf Grund der soeben angeführten bildlichen Interpretation will ich fernerhin $\overline{A_1 A_2 \dots A_r}$ als das zum Komplex $A_1, A_2, \dots, A_r$ gehörige Diagonalpolynom bezeichnen.

4. Eigenschaften der Diagonalpolynome.

Das Diagonalpolynom $\overline{A_1 A_2 \dots A_r}$ vereinfacht sich, sobald ein Bedingungskomplex (H) , mit welchem das Diagonalpolynom eventuell formal zu multiplizieren ist, explizite oder implizite die Forderung $(+A_1 A_2)$ enthält. Es ist nämlich

$$(+A_1 A_2) \overline{A_1 A_2 \dots A_r} = (+A_1 A_2) \overline{A_2 \dots A_r}. \quad (22)$$

Man überzeugt sich hiervon am sichersten durch direkte Entwicklung:

$$\begin{aligned} (+A_1 A_2) \overline{A_1 A_2 \dots A_r} &= (+A_1 A_2) \left\{ 4E - rE + \sum_{\substack{s, k \\ s < k \\ s=1}}^r (+A_s A_k) + \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{s, k, l \\ s < k < l \\ s=1}}^r (+A_s A_k A_l) + \dots \right\} = 4(+A_1 A_2) - r(+A_1 A_2) + (+A_1 A_2) + \\ &\quad + \sum_{s=3}^r (+A_1 A_2)(+A_1 A_s) + \sum_{s=3}^r (+A_1 A_2)(A_2 A_s) + \sum_{\substack{s, k \\ s < k \\ s=3}}^r (+A_1 A_2)(A_s A_k) + \\ &\quad - \sum_{s=3}^r (+A_1 A_2)(+A_1 A_2 A_s) - \sum_{\substack{s, k \\ s < k \\ s=3}}^r (+A_1 A_2)(+A_1 A_s A_k) + \\ &\quad - \sum_{\substack{s, k \\ s < k \\ s=3}}^r (+A_1 A_2)(+A_2 A_s A_k) - \sum_{\substack{s, k, l \\ s < k < l \\ s=3}}^r (+A_1 A_2)(+A_s A_k A_l) + \\ &\quad + \dots = \\ &= 4(+A_1 A_2) - (r-1)(+A_1 A_2) + 2 \sum_{s=3}^r (+A_1 A_2 A_s) + \\ &\quad + \sum_{\substack{s, k \\ s < k \\ s=3}}^r (+A_1 A_2)(+A_s A_k) - \sum_{s=3}^r (+A_1 A_2 A_s) - 2 \sum_{\substack{s, k \\ s < k \\ s=3}}^r (+A_1 A_2 A_s A_k) + \\ &\quad - \sum_{\substack{s, k, l \\ s < k < l \\ s=3}}^r (+A_1 A_2)(+A_s A_k A_l) + \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4(+A_1A_2) - (r-1)(+A_1A_2) + \sum_{s=3}^r (+A_1A_2A_s) + \\
&+ \sum_{\substack{s, k \\ s < k \\ s=3}}^r (+A_1A_2)(+A_sA_k) - \sum_{\substack{s, k \\ s < k \\ s=3}}^r (+A_1A_2A_sA_k) - \sum_{\substack{s, k, l \\ s < k < l \\ s=3}}^r (+A_1A_2)(+A_sA_kA_l) + \\
&+ \dots = \\
&= (+A_1A_2) \left\{ 4E - (r-1)E + \sum_{s=3}^r (+A_2A_s) + \sum_{\substack{s, k \\ s < k \\ s=3}}^r (+A_sA_k) + \right. \\
&- \sum_{\substack{s, k \\ s < k \\ s=3}}^r (+A_2A_sA_k) - \sum_{\substack{s, k, l \\ s < k < l \\ s=3}}^r (+A_sA_kA_l) + \dots \left. \right\} = \\
&= (+A_1A_2) \left\{ 4E - (r-1)E + \sum_{\substack{s, k \\ s < k \\ s=2}}^r (+A_sA_k) - \sum_{\substack{s, k, l \\ s < k < l \\ s=2}}^r (+A_sA_kA_l) + \right. \\
&+ \dots \left. \right\} = \\
&= (+A_1A_2) \overline{A_2A_3 \dots A_r} .
\end{aligned}$$

Da $(+A_1A_1)$ stets von selbst erfüllt ist, so hat man als Spezialfall von (22):

$$\overline{A_1A_1A_2A_3 \dots A_r} = \overline{A_1A_2A_3 \dots A_r} . \quad (23)$$

Eine Wiederholung eines und desselben Knotens im Symbol des Diagonalpolynoms übt also keinen Einfluss auf den Zahlenwert dieses Symbols aus, m. a. W., im Symbol des Diagonalpolynoms braucht man nur die voneinander verschiedenen Knoten zu erwähnen. Allgemeiner ergibt sich aus (22), dass bei einer formalen Multiplikation eines Diagonalpolynoms mit einem Bedingungskomplex (H) im Diagonalpolynom nur diejenigen Knoten ausdrücklich genannt zu werden brauchen, die unter Bezugnahme auf (H) noch verschieden gefärbt angenommen werden dürfen. Es ist hiernach z. B.

$$\begin{aligned}
(+A_1A_2A_3) \overline{A_1A_2A_3} &= (+A_1A_2A_3) \overline{A_1} = (A_1A_2A_3) 3E = \\
&= 3(+A_1A_2A_3) . \quad (24)
\end{aligned}$$

Das Diagonalpolynom besteht im allgemeinen aus positiven und negativen Summanden, so dass es auf den ersten Blick scheinbar schwer fällt, ein Urteil über das endgültige Vorzeichen des Zahlenwertes von $\overline{A_1 \dots A_r}$ zu fällen. Eine leichte Überlegung zeigt aber, dass $(H) \overline{A_1 \dots A_r}$ niemals negativ sein kann, also, bei $(H) = E$, dass auch $\overline{A_1 \dots A_r}$ für sich allein sicher nichtnegativ ist. Enthält nämlich der Komplex $A_1, \dots, A_r$ einen Knoten P , der mit zwei anderen Knoten desselben Komplexes, R_0 und R_{s+1} , benachbart ist, so lässt sich das formale Produkt $(H) \overline{A_1 \dots A_r}$ laut (20) als Zahlenwert einer Farbeninvariante in einem gewissen Netz nächsthöherer Ordnung auffassen, — dieses Produkt ist daher sicher nichtnegativ. Ist aber ein solcher Knoten P im Komplex nicht vorhanden, so kann man zum Komplex eventuell zwei neue Knoten R_0, R_{s+1} hinzufügen, um zum eben erledigten Fall zu gelangen. Bei jeder Erweiterung des Komplexes um einen neuen Knoten kann sich der Zahlenwert des formalen Produktes nur verkleinern. Die Richtigkeit dieser soeben aufgestellten Behauptung folgt sofort aus der Identität

$$\begin{aligned}
 (H) \overline{A_1 \dots A_r A_{r+1}} &= (H) \overline{A_1 \dots A_r} - (H) \left\{ E - \sum_{s=1}^r (+A_s A_{r+1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{s, k \\ s < k \\ s=1}}^r (+A_s A_k A_{r+1}) - \dots \dots \dots \right\} = \\
 &= (H) \overline{A_1 \dots A_r} - (H) (-A_1 A_{r+1}) (-A_2 A_{r+1}) \dots (-A_r A_{r+1}), \quad (25)
 \end{aligned}$$

die sich aus der Definition (19) mittels (8) leicht ableiten lässt. Da $(H) (-A_1 A_{r+1}) (-A_2 A_{r+1}) \dots (-A_r A_{r+1})$ jedenfalls einen nichtnegativen Zahlenwert hat, so ergibt sich aus (25) zwingend

$$(H) \overline{A_1 \dots A_r A_{r+1}} \geq (H) \overline{A_1 \dots A_r}. \quad (26)$$

Dass ein formales Produkt $(H) \overline{A_1 \dots A_r}$ also jedenfalls nichtnegativ ist, wird hieraus sofort ersichtlich.

Nimmt man den hypothetischen allgemeinen Vierfarbensatz als richtig an, so lassen die Schlussfolgerungen sich verschärfen.

Ein Faktor $a_{\psi+\tau}$ resp. $a_{\varphi+\lambda-1}$ in (20) verschwindet dann und nur dann, wenn die Forderung $(+FF') (-F'F')$ im Netz i -ter Ordnung schon einen Widerspruch enthält²³⁾. Ist letzteres nicht der Fall, und ist die Forderung (H) , d. h. $(+RR) (-R'R')$, ebenfalls widerspruchsfrei, so enthält auch die Gesamtforderung $(+FF') (-F'F') (+RR) (-R'R') (-FR)$ auf dem Rande des Netzes i -ter Ordnung sicher keinen Widerspruch. Sollte der allgemeine Vierfarbensatz also für Netze i -ter Ordnung jedenfalls noch richtig sein, so darf, infolge (20), das formale Produkt $(H) \overline{A_1 \dots A_r}$ im Netz $(i-1)$ -ter Ordnung nicht den Wert 0 haben. Man erhält somit, von der Hypothese des allgemeinen Vierfarbensatzes ausgehend, zwangsläufig den folgenden hypothetischen Satz, den ich als den „speziellen Diagonalensatz“ bezeichnen möchte:

In der sicher richtigen Relation

$$(H) \overline{A_1 \dots A_r} \geq 0 \quad (27)$$

gilt das Gleichheitszeichen **nur** dann, wenn (H) einen Widerspruch enthält.

Dass das Gleichheitszeichen dann auch tatsächlich gilt, ist evident, da nach Ausführung der Multiplikation in jedem Summanden der Widerspruch (H) auftritt.

In allen bisherigen Betrachtungen ist stillschweigend vorausgesetzt, dass der Bedingungskomplex (H) explicite nur solche Paare enthält, die keine zwei Knoten des Komplexes $A_1, \dots, A_r$ auf dem Rande des Netzes voneinander trennen, — sonst würden nach der Ausmultiplikation als einzelne Summanden Farbeninvarianten entstehen, die sich nicht mehr ausschliesslich auf Auslesen beziehen. Genügt (H) der eben ausgesprochenen Bedingung, so sage ich, der Bedingungskomplex (H) sei mit dem Faktor $\overline{A_1 \dots A_r}$ konform.

Wählt man $(H) = E$ und nimmt jeden Randknoten im Komplex $A_1, \dots, A_r$ auf, so erhält man aus dem speziellen Diagonalensatz die von mir schon in einer früheren Arbeit²⁴⁾ angegebene Ungleichung:

23) Vgl. VF § 7, I.

24) VF § 11, Formel (97).

$$(4-r)E + \Sigma(+A_j A_k) - \Sigma(+A_j A_k A_l) + \Sigma(+A_j A_k A_l A_m) - \dots > 0. \quad (28)$$

Hier bedeutet r die Anzahl der Randknoten des Netzes. Die Anzahl der Summanden in der Summe $\Sigma(+A_{w_1} A_{w_2} \dots A_{w_h})$ beträgt

$$\frac{r}{h} \binom{r-h-1}{h-1} = \frac{r(r-h-1)(r-h-2) \dots (r-2h+1)}{h!}, \quad (29)$$

wobei die identisch verschwindenden Glieder nicht mitgezählt sind

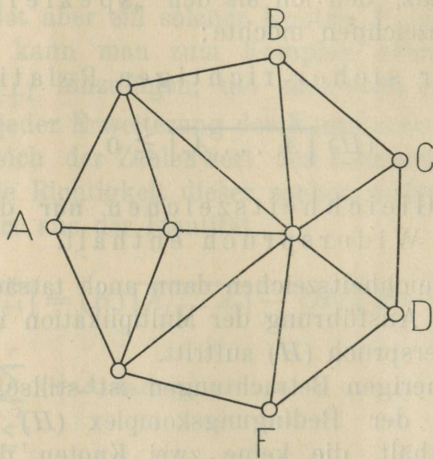


Fig. 2.

Es ist bemerkenswert, dass die Gültigkeit der Relation (27) wesentlich durch das Auftreten des Koeffizienten 4 in der Definition (19) bedingt ist. Ersetzt man $(4-r)E$ durch $(3-r)E$, so wird das formale Produkt in vielen Fällen negativ. So zeigt sich z. B. für das in Fig. 2 dargestellte Netz:

$$(-AB)(-AF) = 23$$

$$(-AB)(-AF)(+BD) = (-AB)(-AF)(+CF) = 10$$

$$(-AB)(-AF)(+BF) = 8$$

$$(-AB)(-AF)(+AC) = (-AB)(-AF)(+AD) = 1,$$

mithin ist

$$\begin{aligned} & (-AB)(-AF) \{ 4E - 5E + (+AC) + (+AD) + \\ & \quad + (+BD) + (+BF) + (+CF) \} = \\ & = 4 \cdot 23 - 5 \cdot 23 + 1 + 1 + 10 + 8 + 10 = +7; \end{aligned}$$

dagegen wird

$$\begin{aligned} & (-AB)(-AF) \{ 3E - 5E + (+AC) + (+AD) + \\ & \quad + (+BD) + (+BF) + (+CF) \} = \\ & = (-AB)(-AF) \overline{[ABCDF]} - (-AB)(-AF) = 7 - 23 = -16 < 0. \end{aligned}$$

Durch die Gesamtheit der irreduziblen Normalnetze ist die grösste Zahl ξ definiert, die der Forderung

$$(H) \overline{[A_1 \dots A_r]} - (H) \xi \geq 0 \quad (30)$$

für jedes irreduzible Netz, jeden Komplex $A_1, A_2, \dots, A_r$ und jede konforme Bedingung (H) genügt. Es dürfte von Interesse sein, die Zahl ξ tatsächlich zu ermitteln. Nach (27) ist jedenfalls $\xi \geq 0$; andererseits zeigt das soeben behandelte Beispiel: $\xi \leq \frac{7}{23} < 0,31$. Es ist also sicher

$$0,31 > \xi \geq 0. \quad (31)$$

Ob etwa die Vermutung $\xi = 0$ richtig ist, kann ich zurzeit nicht entscheiden.

Der spezielle Diagonalensatz enthält eo ipso den allgemeinen Vierfarbensatz, da bei $r = 1$ aus dem speziellen Diagonalensatz die noch speziellere Behauptung

„Bei widerspruchsfreiem (H) ist $3(H) > 0$ “ folgt.

Einige Grössenbeziehungen seien hier noch erwähnt.

Aus der Identität

$$\begin{aligned} (H) (\pm XY) \overline{[A_1 \dots A_r]} &= \{ (H) - (H) (\mp XY) \} \overline{[A_1 \dots A_r]} = \\ &= (H) \overline{[A_1 \dots A_r]} - (H) (\mp XY) \overline{[A_1 \dots A_r]} \end{aligned} \quad (32)$$

folgt mit Hilfe von (27)

$$(H) (\pm XY) \left[A_1 \dots A_r \right] \leq (H) \left[A_1 \dots A_r \right], \quad (33)$$

und durch vollständige Induktion allgemeiner

$$(H) (G) \left[A_1 \dots A_r \right] \leq (H) \left[A_1 \dots A_r \right]. \quad (34)$$

Speziell ist demnach

$$(H) \left[A_1 \dots A_r \right] \leq \left[A_1 \dots A_r \right]. \quad (35)$$

Besitzt ein Netz genau r Randknoten $A_1, A_2, \dots, A_r$ und bedeutet $w_1, w_2, \dots, w_h$ eine beliebige Auswahl aus der Menge $1, 2, 4, \dots, r$, so ist, wegen (26):

$$\left[A_1 A_2 \dots A_r \right] \leq \left[A_{w_1} A_{w_2} \dots A_{w_h} \right]. \quad (36)$$

Jede Auslese (H) bestimmt eindeutig die Menge derjenigen Randpunkte $A_1, A_2, \dots, A_h$ des Netzes, die durch die Paare aus (H) nicht untereinander getrennt werden. Bedeutet $w_1, w_2, \dots, w_k$ eine beliebige Teilmenge der Indizes $1, 2, \dots, h$, so gilt infolge (26) allgemein

$$(H) \left[A_1 A_2 \dots A_h \right] \leq (H) \left[A_{w_1} A_{w_2} \dots A_{w_k} \right]. \quad (37)$$

Die Relationen (34), (37) ermöglichen die Berechnung minimaler Zahlenwerte für Diagonalepolynome und formale Produkte.

5. Diagonalepolynome der Netze erster Ordnung.

Für irreduzible Normalnetze erster Ordnung lässt sich der Zahlenwert des formalen Produktes $(H) \left[A_1 \dots A_r \right]$ bei jedem beliebigen r verhältnismässig einfach berechnen.

Es sei $(H) = (+AA)(-A'A')$ auf dem Rande eines irreduziblen Normalnetzes erster Ordnung fixiert, desgleichen ein mit (H) konformer Komplex von Randknoten $A_1, A_2, \dots, A_r$ gegeben. Es seien φ_v, λ_v , und ψ_w, τ_w , wo v von 1 bis f und w von 1 bis n

läuft, reduzierte Maschenzahlen und zugehörige Charakteristiken der Paare $(+A_4A)$ und $(-A'A')$. Ich schreibe zur Abkürzung φ'_v für $\varphi_v + \lambda_v$ und ψ'_u für $\psi_u + \tau_u$. Der Randbogen A_jA_{j+1} resp. A_rA_1 enthalte noch χ_j resp. χ_r ungezählte Maschen, und $\varkappa_j$ resp. $\varkappa_r$ sei die Charakteristik dieses Bogens in Bezug auf die negativen Paare des Systems (H) . Ich schreibe abkürzend η_j resp. η_r statt $\chi_j + \varkappa_j$ resp. $\chi_r + \varkappa_r$. Ist nun $j, k, \dots, l$, wo $j < k \dots < l$, eine aus h Elementen bestehende Kombination der Ordnungszahlen $1, 2, 3, \dots, r$, so ergibt sich nach (5):

$$\begin{aligned} (H)(+A_jA_k \dots A_l) &= \\ &= 2^{f+h-1} \cdot a_{\eta_j + \eta_{j+1} + \dots + \eta_{k-1}-1} \cdot a_{\eta_k + \eta_{k+1} + \dots -1} \cdot \dots \cdot \\ &\dots \cdot a_{\eta_l + \dots + \eta_r + \eta_1 + \dots + \eta_{j-1}-1} \cdot \prod_{u=1}^n a_{\psi'_u} \cdot \prod_{v=1}^f a_{\varphi'_v-1}. \quad (38) \end{aligned}$$

Es ist daher laut (19):

$$\begin{aligned} (H) \left[\overline{A_1 \dots A_r} \right] &= (4-r)(H) + \sum (H)(+A_jA_k) + \\ &- \sum (H)(+A_jA_kA_l) + \dots = \\ &= (H) + \left[3(H) - r(H) + \sum (H)(+A_jA_k) - \dots \right] = \\ &= 2^f \cdot \prod_u a_{\psi'_u} \cdot \prod_v a_{\varphi'_v-1} \cdot \left\{ a_{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_r -1} + \right. \\ &+ \left[3a_{\eta_1 + \dots + \eta_r -1} - ra_{\eta_1 + \dots + \eta_r -1} + \right. \\ &+ \sum_{\substack{j, k \\ j < k}} 2a_{\eta_j + \eta_{j+1} + \dots + \eta_{k-1}-1} \cdot a_{\eta_k + \dots + \eta_r + \eta_1 + \dots + \eta_{j-1}-1} + \\ &- \sum_{\substack{j, k, l \\ j < k < l}} 2^2 a_{\eta_j + \dots + \eta_{k-1}-1} \cdot a_{\eta_k + \dots + \eta_{l-1}-1} \cdot \\ &\cdot a_{\eta_l + \dots + \eta_r + \eta_1 + \dots + \eta_{j-1}-1} + \\ &+ \dots + (-1)^r \cdot 2^{r-1} \cdot a_{\eta_1-1} \cdot a_{\eta_2-1} \cdot \dots \cdot a_{\eta_r-1} \left. \right\} = \\ &= 2^f \cdot \prod_u a_{\psi'_u} \cdot \prod_v a_{\varphi'_v-1} \cdot \left\{ a_{\eta_1 + \dots + \eta_r -1} + S_{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r} \right\}. \quad (39) \end{aligned}$$

Die hier mittels $S_{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r}$ abgekürzt bezeichnete Summe stellt eine Vierfarbenfunktion der Argumente $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ dar. Ich werde zeigen, dass sie sich in eine Summe nichtnegativer Glieder umformen lässt. In den einfachsten Fällen ersieht man dies direkt. Es ist für $r=1$ der Ausdruck $S_{\eta_1} = 2 a_{\eta_1-1}$. Für $r=2$ wird

$$S_{\eta_1, \eta_2} = a_{\eta_1 + \eta_2 - 1} + 2 a_{\eta_1 - 1} a_{\eta_2 - 1} = a_{\eta_1} a_{\eta_2} + 4 a_{\eta_1 - 1} a_{\eta_2 - 1}, \quad (40)$$

auf Grund des Additionstheorems der Vierfarbennoeffizienten²⁵⁾. Analog folgt für $r=3$:

$$\begin{aligned} S_{\eta_1, \eta_2, \eta_3} &= 2 a_{\eta_1 - 1} a_{\eta_2 + \eta_3 - 1} + 2 a_{\eta_2 - 1} a_{\eta_3 + \eta_1 - 1} + \\ &+ 2 a_{\eta_3 - 1} a_{\eta_1 + \eta_2 - 1} - 4 a_{\eta_1 - 1} a_{\eta_2 - 1} a_{\eta_3 - 1} = \\ (40) \quad &= 2 a_{\eta_1 - 1} a_{\eta_2} a_{\eta_3} + 4 a_{\eta_1 - 1} a_{\eta_2 - 1} a_{\eta_3 - 1} + \\ &+ 2 a_{\eta_2 - 1} a_{\eta_3} a_{\eta_1} + 4 a_{\eta_2 - 1} a_{\eta_3 - 1} a_{\eta_1 - 1} + \\ &+ 2 a_{\eta_3 - 1} a_{\eta_1} a_{\eta_2} + 4 a_{\eta_3 - 1} a_{\eta_1 - 1} a_{\eta_2 - 1} + \\ &- 4 a_{\eta_1 - 1} a_{\eta_2 - 1} a_{\eta_3 - 1} = \\ &= 2 a_{\eta_1 - 1} a_{\eta_2} a_{\eta_3} + \\ &+ 2 a_{\eta_1} a_{\eta_2 - 1} a_{\eta_3} + 2 a_{\eta_1} a_{\eta_2} a_{\eta_3 - 1} + \\ &+ 8 a_{\eta_1 - 1} a_{\eta_2 - 1} a_{\eta_3 - 1}. \end{aligned} \quad (41)$$

In allen diesen Spezialfällen genügt $S_{\eta_1, \eta_2, \dots}$ der Hypothese:

$$\begin{aligned} S_{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r} &= 2^r a_{\eta_1 - 1} \dots a_{\eta_r - 1} + \\ &+ 2^{r-2} \sum_{\substack{j, k \\ j < k}} a_{\eta_1 - 1} \dots a_{\eta_{j-1} - 1} a_{\eta_j} a_{\eta_{j+1} - 1} \dots a_{\eta_{k-1} - 1} a_{\eta_k} a_{\eta_{k+1} - 1} \dots a_{\eta_r - 1} + \\ &+ 2^{r-4} \sum_{\substack{j, k, l, m \\ j < k < l < m}} a_{\eta_1 - 1} \dots a_{\eta_j} \dots a_{\eta_k} \dots a_{\eta_l} \dots a_{\eta_m} \dots a_{\eta_r - 1} + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Die allgemeine Gültigkeit von (42) ergibt sich durch vollständige Induktion. Es werde (42) für $S_{\eta_1, \dots, \eta_r}$ als richtig anerkannt und hierauf $S_{\eta_1, \dots, \eta_{r+1}}$ gebildet. Stützt man sich hierbei auf die Identität (25), so folgt zunächst aus (39), wenn man den Knoten A_{r+1} auf dem Randbogen $A_r A_1$ eingeschaltet denkt,

25) ALV § 6, Formel (32).

wobei η'_r und η'_{r+1} dann den Randbögen $A_r A_{r+1}$ und $A_{r+1} A_1$ entsprechen ($\eta'_r + \eta'_{r+1} = \eta_r$):

$$\begin{aligned}
 (H) \left[\overline{A_1 \dots A_r A_{r+1}} \right] &= 2^f \cdot \prod_u a_{\psi'_u} \cdot \prod_v a_{\varphi'_v - 1} \cdot \\
 &\cdot \left\{ a_{\eta_1} + \dots + a_{\eta_{r-1}} + \eta'_r + \eta'_{r+1} - 1 + S_{\eta_1}, \dots, \eta_{r-1}, \eta'_r, \eta'_{r+1} \right\} = \\
 &= (H) \left[\overline{A_1 \dots A_r} \right] - (H) (-A_1 A_{r+1}) (-A_2 A_{r+1}) \dots (-A_r A_{r+1}) = \\
 &= 2^f \cdot \prod_u a_{\psi'_u} \cdot \prod_v a_{\varphi'_v - 1} \cdot \left\{ a_{\eta_1} + \dots + a_{\eta_r - 1} + S_{\eta_1}, \dots, \eta_r \right\} + \\
 &- 2^f \cdot \prod_u a_{\psi'_u} \cdot \prod_v a_{\varphi'_v - 1} \cdot a_{\eta'_{r+1}} a_{\eta_1 + 1} a_{\eta_2 + 1} \dots a_{\eta_{r-1} + 1} a_{\eta'_r}.
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 S_{\eta_1}, \dots, \eta_{r-1}, \eta'_r, \eta'_{r+1} &= a_{\eta_1} + \dots + a_{\eta_r - 1} + \\
 - a_{\eta_1} + \dots + a_{\eta_{r-1}} + \eta'_r + \eta'_{r+1} - 1 + S_{\eta_1}, \dots, \eta_r + \\
 - a_{\eta_1 + 1} a_{\eta_2 + 1} \dots a_{\eta_{r-1} + 1} a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}} &= \\
 = S_{\eta_1}, \dots, \eta_r - a_{\eta_1 + 1} a_{\eta_2 + 1} \dots a_{\eta_{r-1} + 1} a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}}.
 \end{aligned}$$

Wird hier nun (42) eingeführt und beachtet, dass nach dem Additionstheorem die Umformungen

$$\begin{aligned}
 a_{\eta_r} &= a_{\eta'_r} + \eta'_{r+1} = a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}} + 1 + 2 a_{\eta'_r - 1} a_{\eta'_{r+1}} = \\
 &= a_{\eta'_r} (a_{\eta'_{r+1}} + 2 a_{\eta'_{r+1} - 1}) + 2 a_{\eta'_r - 1} a_{\eta'_{r+1}} = \\
 &= a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}} + 2 a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1} - 1} + 2 a_{\eta'_r - 1} a_{\eta'_{r+1}}, \\
 2 a_{\eta_r - 1} &= 2 a_{\eta'_r} + \eta'_{r+1} - 1 = 2 a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}} + 4 a_{\eta'_r - 1} a_{\eta'_{r+1}} - 1
 \end{aligned} \tag{43}$$

statthaft sind, so folgt:

$$\begin{aligned}
 S_{\eta_1}, \dots, \eta_{r-1}, \eta'_r, \eta'_{r+1} &= 2^r a_{\eta_1 - 1} \dots a_{\eta_{r-1} - 1} a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}} + \\
 &+ 2^{r+1} a_{\eta_1 - 1} \dots a_{\eta_{r-1} - 1} a_{\eta'_r - 1} a_{\eta'_{r+1} - 1} + \\
 &+ 2^{r-2} \sum_{\substack{j, k \\ j < k \\ j=1}}^{r-1} a_{\eta_1 - 1} \dots a_{\eta_j} \dots a_{\eta_k} \dots a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2^{r-1} \sum_{\substack{j, k \\ j < k \\ j=1}}^{r-1} a_{\eta_1-1} \dots a_{\eta_j} \dots a_{\eta_k} \dots a_{\eta'_r-1} a_{\eta'_{r+1}-1} + \\
& + 2^{r-2} \sum_{j=1}^{r-1} a_{\eta_1-1} \dots a_{\eta_j} \dots a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}} + \\
& + 2^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} a_{\eta_1-1} \dots a_{\eta_j} \dots a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}-1} + \\
& + 2^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} a_{\eta_1-1} \dots a_{\eta_j} \dots a_{\eta'_r-1} a_{\eta'_{r+1}} + \\
& + \dots \dots \dots + \\
& - a_{\eta_1+1} a_{\eta_2+1} \dots a_{\eta_{r-1}+1} a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}}. \quad (44)
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
& a_{\eta_1+1} a_{\eta_2+1} \dots a_{\eta_{r-1}+1} a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}} = \\
& = a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}} \cdot \{ a_{\eta_1} + 2 a_{\eta_1-1} \} \cdot \{ a_{\eta_2} + 2 a_{\eta_2-1} \} \cdot \dots = \\
& = 2^{r-1} a_{\eta_1-1} a_{\eta_2-1} \dots a_{\eta_{r-1}-1} a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}} + \\
& + \sum_{j=1}^{r-1} 2^{r-2} a_{\eta_1-1} \dots a_{\eta_j} \dots a_{\eta_{r-1}-1} a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}} + \dots \dots \dots + \\
& + \dots \dots \dots + a_{\eta_1} a_{\eta_2} \dots a_{\eta_{r-1}} a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}}.
\end{aligned}$$

Setzt man dies in (44) ein, so folgt:

$$\begin{aligned}
S_{\eta_1, \dots, \eta_{r-1}, \eta'_r, \eta'_{r+1}} & = 2^{r+1} a_{\eta_1-1} \dots a_{\eta_{r-1}} a_{\eta'_r-1} a_{\eta'_{r+1}-1} + \\
& + 2^{r-1} a_{\eta_1-1} a_{\eta_2-1} \dots a_{\eta_{r-1}-1} a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}} + \\
& + 2^{r-1} \sum_{\substack{j, k \\ j < k \\ j=1}}^{r-1} a_{\eta_1-1} \dots a_{\eta_j} \dots a_{\eta_k} \dots a_{\eta_{r-1}-1} a_{\eta'_r-1} a_{\eta'_{r+1}-1} + \\
& + 2^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} a_{\eta_1-1} \dots a_{\eta_j} \dots a_{\eta'_r} a_{\eta'_{r+1}-1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} a_{\eta_1-1} \dots a_{\eta_j} \dots a_{\eta'_r-1} a_{\eta'_{r+1}} + \\
 & + 2^{r-3} \sum \dots \dots \dots = \\
 & = 2^{r+1} a_{\eta_1-1} \dots a_{\eta'_{r+1}-1} + 2^{r-1} \sum_{\substack{j, k \\ j < k \\ j=1}}^{r+1} a_{\eta_1-1} \dots a_{\eta_j} \dots a_{\eta_k} \dots a_{\eta'_{r+1}-1} + \\
 & + 2^{r-3} \sum \dots \dots \dots ,
 \end{aligned}$$

was vom selben Typus ist, wie (42). Damit ist die allgemeine Gültigkeit von (42) erwiesen.

Die in (39) auftretende Summe $a_{\eta_1} + \dots + a_{\eta_r-1} + S_{\eta_1, \dots, \eta_r}$ verschwindet bei nichtnegativen Koordinatenwerten η_j nur dann, wenn $\eta_1 + \dots + \eta_r = 1$; in allen übrigen Fällen ist sie positiv. Die Summe der nichtnegativen Koordinaten wird aber nur dann gleich 1, wenn eine Koordinate den Wert 1 annimmt, während alle übrigen verschwinden. Wie man sich leicht überzeugt, fordert in einem solchen Falle (H) eine identische Färbung für zwei benachbarte Randknoten, d. h. (H) enthält dann einen Widerspruch. Ein Faktor $a_{\psi'_u}$ resp. $a_{\varphi'_v-1}$ verschwindet gleichfalls nur dann, wenn (H) einen Widerspruch aufweist. Die Relation (39) bezeugt somit, dass der spezielle Diagonalsatz für irreduzible Normalnetze erster Ordnung richtig ist.

Aus (42) ist ersichtlich, dass die Fundamentalwerte der Vierfarbenfunktion $S_{\eta_1, \dots, \eta_r}$ gleich 1 oder gleich 0 sind, je nachdem in der entsprechenden Fundamentalecke des Punktgitters (η) die Koordinate 1 in gerader oder in ungerader Anzahl vorkommt. Dem durch (37) definierten Minimalwert von (H) $\left[A_1 \dots A_r \right]$ entspricht diejenige extreme Fundamentalecke, wo jede Koordinate gleich 1 ist; dieser Minimalwert beträgt also

$$2^f \cdot \prod_u a_{\psi'_u} \cdot \prod_v a_{\varphi'_v-1} \cdot a_{r-1}, \text{ wenn } r \text{ ungerade,}$$

$$2^f \cdot \prod_u a_{\psi'_u} \cdot \prod_v a_{\varphi'_v-1} \cdot \{ a_{r-1} + 1 \}, \text{ wenn } r \text{ gerade.}$$

Eine für die Theorie der Vierfarbenkoeffizienten interessante Folgerung möchte ich hier, indem ich vom eigentlichen Thema abweiche gleich noch erwähnen.

Es heisse $h = \eta_1 + \dots + \eta_r$ die Höhe der Fundamentalecke (η) . Einer geraden Höhe entspricht der Wert 1, einer ungeraden Höhe der Wert 0 von $S_{\eta_1}, \dots, \eta_r$. Der Fundamentalwert $S_{\eta}^{(h)}$ von $S_{\eta_1}, \dots, \eta_r$ für eine gegebene Höhe h lässt sich mit Bezugnahme auf (39) folgendermassen umformen:

$$\begin{aligned} S_{\eta}^{(h)} = & (3-h) a_{h-1} + 2 \sum_{u_1+u_2=h} \delta_{u_1, u_2} \cdot a_{u_1-1} a_{u_2-1} + \\ & - 4 \sum_{u_1+u_2+u_3=h} \delta_{u_1, u_2, u_3} \cdot a_{u_1-1} a_{u_2-1} a_{u_3-1} + \dots + \\ & + (-1)^k \cdot 2^{k-1} \sum_{\sum u=h} \delta_{u_1, u_2, \dots, u_k} \cdot a_{u_1-1} a_{u_2-1} \dots a_{u_k-1} + \\ & + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Hier bedeuten die $\delta_{u_1, u_2, \dots, u_k}$ bestimmte nichtnegative ganzzahlige Koeffizienten, die durch die Kombination der positiven ganzen Zahlen $u_1, u_2, \dots, u_k$ (ohne Rücksicht auf die Anordnung) eindeutig bestimmt sind. Da bei $u=1$ der Faktor a_{u-1} gleich Null ist, so darf man sich offenbar auf die Annahme $u_1 > 0, u_2 > 0, \dots$ beschränken. Die Berechnung der $\delta_{u_1, u_2, \dots, u_k}$ kann auf Grund der Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \delta_{u_1, u_2, \dots, u_k} = & \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_k}{k} \cdot \beta_{u_1, u_2, \dots, u_k}, \\ \beta_{u_1, u_2, \dots, u_k} = & \beta_{u_2, \dots, u_k} + \beta_{u_1, u_3, \dots, u_k} + \dots + \\ & + \beta_{u_1, u_2, \dots, u_{d-1}, u_{d+1}, \dots, u_k}, \\ \beta_{u_1} = & 1 \end{aligned} \quad (46)$$

erfolgen. Hierbei ist unter $u_1, u_2, \dots, u_d$ die Menge der untereinander verschiedenen Zahlen in der Kombination $u_1, u_2, \dots, u_k$ verstanden; in der Kombination 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5 hätte man also z. B. für $u_1, u_2, \dots, u_d$ die Menge 2, 3, 4, 5.

Die Zahlen $\delta_{u_1}, \dots, u_k$ lassen sich geometrisch einfach interpretieren: es ist $\delta_{u_1}, \dots, u_k$ die Anzahl derjenigen einfachen aus Diagonalen gebildeten k -ecke im konvexen einfachen h -eck, wo die Diagonalen entsprechend Streckenzüge von $u_1, u_2, \dots, u_k$ Seiten vom h -eck abschneiden, gleichviel in welcher Reihenfolge dies geschieht. Aus dieser Interpretation folgt u. a., dass bei vorgeschriebenem k und h die Beziehung

$$\sum_{\Sigma u = h} \beta_{u_1, u_2, \dots, u_k} = \binom{h-k-1}{k-1} \quad (47)$$

besteht.

Auf Grund des früher Erkannten ist nun der Wert des Polynoms (45) gleich 1 oder 0, je nachdem h gerade oder ungerade ist.

Es gilt demnach z. B. für $h = 10$ die Identität

$$\begin{aligned} & - 7 a_9 + 20 a_1 a_7 + 20 a_2 a_6 + 20 a_3 a_5 + 10 a_4 a_4 - 40 a_1 a_1 a_5 + \\ & - 80 a_1 a_2 a_4 - 40 a_1 a_3 a_3 - 40 a_2 a_2 a_3 + 80 a_1 a_1 a_1 a_3 + \\ & + 120 a_1 a_1 a_2 a_2 - 32 a_1 a_1 a_1 a_1 a_1 = 1, \end{aligned}$$

die durch

$$\begin{aligned} & - 7 \cdot 171 + 20 \cdot 43 + 20 \cdot 21 + 20 \cdot 3 \cdot 11 + 10 \cdot 5 \cdot 5 - 40 \cdot 11 + \\ & - 80 \cdot 5 - 40 \cdot 3 \cdot 3 - 40 \cdot 3 + 80 \cdot 3 + 120 - 32 = 1 \end{aligned}$$

direkt verifiziert wird.

6. Diagonalaggregate.

In den nun folgenden Entwicklungen treten aus Diagonalpolynomen zusammengesetzte kompliziertere Gebilde auf, die ich Diagonalaggregate nennen werde.

Das einfachste Diagonalaggregat ist das Diagonalpolynom selbst.

Die allgemeine Erklärung eines Diagonalaggregats lässt sich unter Bezugnahme auf ein Bildpolygon folgendermassen geben:

Es sei auf dem Rande des Netzes eine Folge von Knoten $A_1, A_2, \dots$ fixiert. In diese Folge der A_j werde noch eine Folge neuer Randknoten $D_1, D_2, \dots$ eingeschaltet. Der Netzrand sei auf ein einfaches konvexes Polygon abgebildet und die Bildpunkte

der Knoten D_k im Bildpolygon seien durch sich nicht kreuzende Diagonalen solcherweise verbunden, dass das Bildpolygon in eine Summe aufeinanderfolgender Teilpolygone zerfällt (Fig. 3). Die Teilpolygone lassen sich dann der Aufeinanderfolge entsprechend numerieren. Die Figur 3 zeigt eine Zerfällung in 5 Teilpolygone.

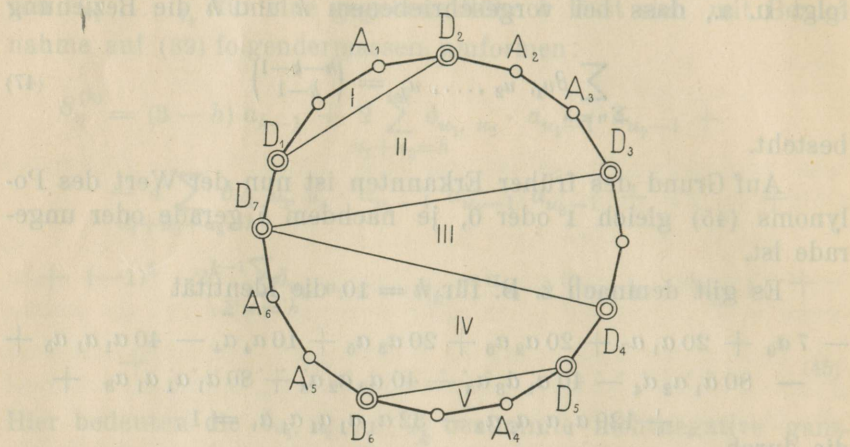


Fig. 3.

Die Gesamtheit der A_j , D_k verteilt sich auf die Ränder der einzelnen Teilpolygone, wobei jeder Knoten A_j nur einem Teilpolygon, jeder Knoten D_k aber mindestens zwei Teilpolygone angehört. Zählt man entsprechenderweise die D_k mehrfach, so lassen sich aus den A_j , D_k Teilkomplexe bilden, die aus den zum ersten, zweiten usw. Teilpolygon gehörigen A_j , D_k bestehen. Entsprechend der Numeration der Teilpolygone seien diese Teilkomplexe mittels $X_1 X_2, \dots, X_h$ bezeichnet. Unter $X_j X_{j+1} \dots X_k$ sei die Gesamtmenge der in $X_j, X_{j+1}, \dots, X_k$ eingehenden Knoten verstanden. $\overline{X_j}$ sei eine abgekürzte Bezeichnung für das durch die Knoten aus X_j definierte Diagonalpolynom; entsprechend sei die Bedeutung von $\overline{X_j X_{j+1} \dots X_k}$. Es bedeute ferner $\overline{X_j} \overline{X_k}$ das formale Produkt der Diagonalpolynome $\overline{X_j}$ und $\overline{X_k}$ usw.

Ein mittels $\overline{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{h-1} \times X_h}$ symbolisiertes Diagonalaggregat definiere ich nun durch die Vorschrift

$$\begin{aligned}
& |\overline{X_1} \times \overline{X_2} \times \dots \times \overline{X_{h-1}} \times \overline{X_h}| = (-1)^{h-1} |\overline{X_1 X_2 \dots X_h}| + \\
& + (-1)^{h-2} \sum_{j=1}^{h-1} |\overline{X_1 X_2 \dots X_j}| |\overline{X_{j+1} \dots X_h}| + \\
& + (-1)^{h-3} \sum_{\substack{j=1 \\ j < k}}^{h-1} |\overline{X_1 X_2 \dots X_j}| |\overline{X_{j+1} \dots X_k}| |\overline{X_{k+1} X_{k+2} \dots X_h}| + \\
& + \dots \dots \dots + \\
& + |\overline{X_1}| |\overline{X_2}| \dots |\overline{X_h}|. \quad (48)
\end{aligned}$$

Es ist also z. B.

$$\begin{aligned}
|\overline{X_1} \times \overline{X_2}| &= |\overline{X_1}| |\overline{X_2}| - |\overline{X_1 X_2}|, \\
|\overline{X_1} \times \overline{X_2} \times \overline{X_3}| &= |\overline{X_1}| |\overline{X_2}| |\overline{X_3}| - |\overline{X_1}| |\overline{X_2 X_3}| + \\
&- |\overline{X_1 X_2}| |\overline{X_3}| + |\overline{X_1 X_2 X_3}|. \quad (49)
\end{aligned}$$

Aus der Definition (48) folgt die Rekursion:

$$\begin{aligned}
|\overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_h} \times \overline{X_{h+1}}| &= |\overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_h}| |\overline{X_{h+1}}| + \\
&- |\overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_h X_{h+1}}| = |\overline{X_1}| |\overline{X_2} \times \dots \times \overline{X_{h+1}}| + \\
&- |\overline{X_1 X_2} \times \overline{X_3} \times \dots \times \overline{X_{h+1}}|. \quad (50)
\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion lässt diese Rekursionsformel sich verallgemeinern:

$$\begin{aligned}
|\overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_h}| &= |\overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_j}| |\overline{X_{j+1} \times \dots \times X_h}| + \\
&- |\overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_{j-1}} \times \overline{X_j X_{j+1}} \times \overline{X_{j+2} \times \dots \times X_h}|. \quad (51)
\end{aligned}$$

Ferner folgt aus der Definition (48):

$$\begin{aligned}
|\overline{X_1} \times \overline{X_2} \times \dots \times \overline{X_{h-1}} \times \overline{X_h}| &= \\
&= |\overline{X_h} \times \overline{X_{h-1}} \times \dots \times \overline{X_2} \times \overline{X_1}|. \quad (52)
\end{aligned}$$

Es ist also gleichgültig, welche der zwei möglichen Reihenfolgen bei der Numeration der Teilkomplexe eingehalten wird.

Auf Grund von (22) erkennt man, dass in den Teilkomplexen nur tatsächlich voneinander verschiedene Knoten

genannt zu werden brauchen. Entsprechendes gilt auch dann, wenn das Diagonalaggregat nicht alleinstehend, sondern mit einem konformen Bedingungskomplex (H) multipliziert auftritt. Die Forderung der Konformität ist in letzterem Falle so zu verstehen, dass (H) keine Paare enthalten soll, die irgend zwei Knoten des Gesamtkomplexes $X_1 X_2 X_3 \dots$ voneinander trennen.

Besteht speziell X_h aus nur 2 Knoten P, Q , die dann beide notwendigerweise auch in den Teilkomplex X_{h-1} eingehen, so folgt aus (50):

$$(H) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_{h-1}} \times \overline{PQ} \right| = (H) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_{h-1}} \right| + \\ + (H) (+PQ) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_{h-1}} \right|, \quad (53)$$

also in dem noch spezielleren Falle, wo P mit Q zusammenfällt,

$$(H) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_{h-1}} \times \overline{P} \right| = 2 (H) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_{h-1}} \right|. \quad (54)$$

Es sei B ein auf dem h -ten (letzten) Teilpolygon fixierter Knoten und $X_h B$ die um den Knoten B bereicherte Teilmenge X_h ; es bedeute ferner $(-BX_j)$ die Forderung der Verschiedenfarbigkeit des Knotens B mit jedem Knoten des Teilkomplexes X_j . Aus (49) und (25) ergibt sich zunächst

$$(H) \left| \overline{X_1} \times \overline{X_2 B} \right| = (H) \left| \overline{X_1} \right| \left| \overline{X_2 B} \right| - (H) \left| \overline{X_1 X_2 B} \right| = \\ = (H) \left| \overline{X_1} \right| \left| \overline{X_2} \right| - (H) (-BX_2) \left| \overline{X_1} \right| - (H) \left| \overline{X_1 X_2} \right| + \\ + (H) (-BX_1) (-BX_2) = \\ = (H) \left| \overline{X_1} \times \overline{X_2} \right| - (H) (-BX_2) \{ \left| \overline{X_1} \right| - (-BX_1) \} = \\ = (H) \left| \overline{X_1} \times \overline{X_2} \right| - (H) (-BX_2) \left| \overline{X_1 B} \right|, \quad (55)$$

und hieraus, mittels vollständiger Induktion, mit Hilfe von (50) die Verallgemeinerung:

$$(H) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_{h-1}} \times \overline{X_h B} \right| = \\ = (H) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_{h-1}} \times \overline{X_h} \right| + \\ - (H) (-BX_h) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_{h-1}} \right|. \quad (56)$$

7. Diagonalaggregate als Fundamentalwerte.

Ich kehre nun zur Bestimmung der Fundamentalwerte der durch die Formel (10) § 2 bestimmten Vierfarbenfunktion $N_{\sigma'}^i$ zurück.

Es sollen zunächst zwei Einschränkungen gemacht werden:

I. Jedesmal, wenn $\sigma'_j = 1$, $2 \leq j \leq s+1$, soll in der Formel (10) der Bedingungskomplex (H) explicite oder implicite die Forderung $R_{j-1} \equiv R_j$ enthalten.

II. Ist $\sigma'_j = 1$, so soll gleichzeitig $\sigma'_{j-1} = 0$, $\sigma'_{j+1} = 0$ sein, sobald j von 1 und $s+1$ verschieden ist; dabei soll, wie früher, $\sigma'_1 = 1$, $\sigma'_{s+1} = 1$ gelten.

Infolge der Einschränkung I darf man bei $\sigma'_j = 1$, $2 \leq j \leq s+1$ statt (H) $(-F_{j-1}R_{j-1})(-F_jR_j)$ auch (H) $(-F_{j-1}R_{j-1})(-F_jR_{j-1})$ schreiben, m. a. W., man darf auf der rechten Seite von (10) für jedes solche j den Knoten R_j durch R_{j-1} ersetzen. Auf die Einschränkungen I und II Bezug nehmend, sage ich dann, R_{j-1} sei ein zur Koordinate 1 gehöriger Knoten. In der Menge $R_1, R_2, \dots, R_s$ sind die zur Koordinate 1 gehörigen Knoten unzweideutig bestimmt; es seien dies die Knoten $R_{w_1}, R_{w_2}, \dots, R_{w_k}$, ($w_1 < w_2 \dots < w_k$).

Ich behaupte nun:

Gelten die Einschränkungen I und II, so ist

$$N_{1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1}^i = 2^f \cdot \prod a_{\psi_u} + \tau_u \cdot \prod a_{\varphi_v} + \lambda_v - 1 \cdot$$

$$\cdot (H) \overline{PR_0 R_1 \dots R_{w_1}} \times \overline{PR_{w_1} R_{w_1+2} \dots R_{w_2}} \times \dots \times \overline{PR_{w_k} R_{w_k+2} \dots R_s R_{s+1}}.$$

(57)

Dass $PR_0 R_1 \dots R_{w_1}$, $PR_{w_1} \dots R_{w_2}$, ..., $PR_{w_k} \dots R_{s+1}$ tatsächlich Teilkomplexe von der im vorigen Paragraphen beschriebenen Art sind, ist evident; die Diagonalen, die das Bildpolygon in $k+1$ aufeinanderfolgende Teilpolygone spalten, sind PR_{w_1} , PR_{w_2} , ..., PR_{w_k} , — der Knoten P ist sämtlichen Teilpolygone gemeinsam.

Ist überhaupt kein zur Koordinate 1 gehöriger Knoten R_{w_j} vorhanden, so reduziert sich das Diagonalaggregat in (57) auf

das Diagonalpolynom $\overline{PR_0R_1 \dots R_s R_{s+1}}$; andererseits ist aber dann in der betreffenden Fundamentalecke jede Koordinate, ausser der ersten und letzten, gleich 0, — die Relation (57) geht also in die schon bewiesene Formel (20) über. Die allgemeine Gültigkeit von (57) lässt sich durch vollständige Induktion beweisen. Die Rechnung vereinfacht sich merklich, wenn man zunächst beachtet, welche Modifikation die Formel (10) erleidet, sobald auf der linken Seite eine positive Forderung $(+GT)$ hinzukommt, derart, dass G ein Knoten auf dem Fächerbogen $F_s F_{s+1}$ und T ein Knoten auf dem Residuumrandbogen $R_s R_{s+1}$ ist. Geht man auf die Formel (4) zurück und bildet mit ihrer Hilfe den Ausdruck

$$N^i(+FF)(-F'F')(+RR)(-R'R')(-F_1R_1)(-F_2R_2) \dots (-F_sR_s)(+GT),$$

so zeigt sich vor allem als gemeinschaftlicher Faktor

$$2^f \cdot \prod \alpha_{\psi_u} + \tau_u \cdot \prod \alpha_{\varphi_v} + \lambda_v - 1 \cdot (H)(-PT) \left\{ 2\alpha_\varrho + \mu - 1 (+TR_{s+1}) + \alpha_\varrho + \mu (-TR_{s+1}) \right\}, \quad (58)$$

wenn ϱ und μ entsprechend die reduzierte Maschenzahl und die Charakteristik des Fächerbogens GF_{s+1} bedeuten. Dieser Faktor (58) ist dann noch mit einem Ausdruck formal zu multiplizieren, der sich von der eckigen Klammer in (10) nur dadurch unterscheidet, dass erstens überall T an Stelle von R_{s+1} tritt, und zweitens σ_{s+1} resp. ν_{s+1} die reduzierte Maschenzahl resp. Charakteristik des Fächerbogens $F_s G$, nicht aber wie früher des Fächerbogens $F_s F_{s+1}$, zu bedeuten haben; letzterer Umstand kann auch dahin gedeutet werden, dass bei der Bildung der eckigen Klammer der Knoten G an Stelle von F_{s+1} zu treten hat. Die $\alpha_{\psi_u} + \tau_u$ und $\alpha_{\varphi_v} + \lambda_v - 1$ werden vom Hinzukommen des Paares $(+GT)$ nicht beeinflusst.

Nun beweise ich (57) in zwei Schritten.

1) Ich bezeichne zur Abkürzung die Teilkomplexe $PR_0R_1 \dots R_{w_1}$, $PR_{w_1} \dots R_{w_2}$, ..., $PR_{w_k} \dots R_{s+1}$ entsprechend mittels $X_1, X_2, \dots, X_{k+1}$ und verwende auch im übrigen die abkürzenden Notationen des § 6. Die Relation (57) gelte als bewiesen für den Fall, dass k einen festen Wert nicht übersteigt,

wobei $X_1, X_2, \dots, X_k$ beliebig viele Knoten enthalten dürfen, X_{k+1} aber höchstens a Knoten enthält. Es soll gezeigt werden, dass (57) dann unter denselben übrigen Bedingungen auch sicher noch gilt, wenn X_{k+1} einen Knoten mehr, also $a+1$ Knoten enthält.

Es sei T der zu X_{k+1} hinzugekommene $(a+1)$ -te Knoten. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, darf angenommen werden, dass T hierbei zum Residuumrandbogen $R_s R_{s+1}$ gehört. T sei mit dem Knoten G auf dem Fächerrand negativ gepaart; die Hinzunahme von T bedeutet, dass zu dem früheren Bedingungskomplex im Netz i -ter Ordnung noch die neue Forderung $(-GT)$ hinzukommt. Da die Konformität selbstverständlich mitgefordert ist, so muss G dem Fächerbogen $F_s F_{s+1}$ angehören.

Es ist aber nach (8):

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N} (+FF)(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_sR_s)(-GT) = \\ & = \overset{i}{N} (+FF)(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_sR_s) + \\ & - \overset{i}{N} (+FF)(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_sR_s)(+GT). \end{aligned} \quad (59)$$

Da k nicht grösser werden durfte, muss für den Fächerbogen $F_s G$ die Summe aus reduzierter Maschenzahl und Charakteristik gleich 0 sein; es müssen also für diesen Fächerbogen reduzierte Maschenzahl und Charakteristik einzeln verschwinden. Dies bedeutet, dass $(+FF)(-F'F')$ explicite oder implicite die Forderung $F_s \equiv G$ enthält²⁶⁾. Für den Fächerbogen GF_{s+1} ist die Summe aus reduzierter Maschenzahl und Charakteristik ebenso gross, wie für den Fächerbogen $F_s F_{s+1}$, also gleich 1. Berechnet man den Subtrahenden auf der rechten Seite von (59), so hat man demnach in (58) $q + \mu = 1$ zu setzen; der Bedingungskomplex $(-F_{w_k+1}R_{w_k})(-F_{w_k+2}R_{w_k+2}) \dots (-F_sR_s)(+GT)$ darf ausserdem durch den Komplex

$$(-TR_{w_k})(-TR_{w_k+2}) \dots (-TR_s)(+GT)$$

26) Weil der Fächerbogen $F_s G$ dann von positiven Paaren $(+FF)$ überdeckt ist.

ersetzt werden, da $\sigma'_{w_k+2} = \sigma'_{w_k+3} = \dots = \sigma'_s = 0$, daher also infolge $(+FF)(-F'F')$ die Forderung

$$F_{w_k+1} \equiv F_{w_k+2} \equiv \dots \equiv F_s \equiv G \equiv T$$

besteht. Man hat demnach:

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FF)(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_sR_s)(+GT)} = \\ = & \overset{i}{N}_{(+FF)(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_{w_k}R_{w_k})(+GT)(-TR_{w_k}) \dots (-TR_s)}. \end{aligned} \quad (60)$$

Hierin ist $(-TR_{w_k})(-TR_{w_k+2}) \dots (-TR_s)$ nun ein Bedingungs-komplex auf dem Residuumrand, — nach (4) lässt sich dieser Bedingungskomplex daher bei der Reduktion formal als gemeinsamer Faktor herausheben. Es verbleibt dann nur noch der Ausdruck für

$$\overset{i}{N}_{(+FF)(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_{w_k}R_{w_k})(+GT)}.$$

In diesem ist die Summe aus reduzierter Maschenzahl und Charakteristik für den Fächerbogen $F_{w_k}G$ gleich derselben Summe für $F_{w_k}F_{w_k+1}$, also gleich 1. Man findet daher den Ausdruck, indem man den Faktor (58), der im vorliegenden Falle gleich

$$2^f \cdot \prod \alpha_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod \alpha_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot (H)(-PT)(-TR_{s+1})$$

wird, heraushebt und im übrigen nach der Vorschrift (57) verfährt, dabei allerdings R_{s+1} durch T ersetzt. M. a. W., es ist

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FF)(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_sR_s)(+GT)} = \\ & = 2^f \cdot \prod \alpha_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod \alpha_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\ & \cdot (H)(-TR_{w_k})(-TR_{w_k+2}) \dots (-TR_s)(-PT)(-TR_{s+1}) \cdot \\ & \cdot \left| \overline{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{k-1} \times PR_{w_{k-1}} R_{w_{k-1}+2} \dots R_{w_k} T} \right| = \\ & = 2^f \cdot \prod \alpha_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod \alpha_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\ & \cdot (H)(-TX_{k+1}) \left| \overline{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{k-1} \times X_k T} \right|. \end{aligned} \quad (61)$$

Für den Minuenden der rechten Seite von (59) folgt nach (57):

$$\begin{aligned} N_{(+FF)(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_sR_s)} &= \\ &= 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\ &\cdot (H) \left[\overline{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \times X_{k+1}} \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

Aus (59), (61), (62), (56) ergibt sich jetzt für die betreffende Fundamentalecke:

$$\begin{aligned} N_{(+FF)(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_sR_s)(-GT)} &= \\ &= 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\ &\cdot (H) \left\{ \left[\overline{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \times X_{k+1}} \right] + \right. \\ &- (-TX_{k+1}) \left[\overline{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{k-1} \times X_k T} \right] \Big\} = \\ &= 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\ &\cdot (H) \left[\overline{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \times X_{k+1} T} \right], \end{aligned} \quad (63)$$

d. h. die Formel (57) gilt bei fixiertem k auch für jede beliebige Anzahl von Knoten im Teilkomplex X_{k+1} .

2) Es sei nun die Gültigkeit von (57) für ein fixiertes k anerkannt, ohne Einschränkung der Knotenzahl in den Teilkomplexen $X_1, X_2, \dots, X_{k+1}$. Ich habe zu zeigen, dass dann bei der Vergrößerung von k um eine Einheit die Beziehung (57) immer noch gültig bleibt.

Zuerst eine Vorbemerkung:

Die Mindestzahl der in X_j vorhandenen verschiedenen Knoten beträgt 2, nämlich P und R_{w_j} , resp. P und $R_{w_{j-1}}$, wobei $R_{w_{j-1}}$ mit R_{w_j} zusammenfallen kann. In X_{k+1} hat man im allgemeinen zwar mindestens 3 Knoten (P, R_{w_k}, R_{s+1}), doch auch hier ist es prinzipiell denkbar, dass R_{w_k} mit R_{s+1} zusammenfällt oder wenigstens identisch gefärbt erscheint.

Nun wende ich mich der Beweisführung zu. Es werde ein Bedingungskomplex fixiert, wo k um eine Einheit grösser

ist, was dadurch seinen Ausdruck finde, dass X_{k+2} auftritt. Es soll nun aber X_{k+2} die Mindestzahl von Knoten, also 3 (resp. 2) Knoten enthalten. X_{k+2} besteht dann aus P , $R_{w_{k+1}}$, R_{s+1} , wobei die zwei letztgenannten Knoten auch zusammenfallen dürfen. Offenbar ist jetzt $R_{w_{k+1}}$ mit R_s identisch, weil sonst R_s ja auch noch dem Teilkomplex X_{k+2} zuzuzählen wäre. Andererseits ist R_s als $R_{w_{k+1}}$ mit R_{s-1} identisch gefärbt, weil $R_{w_{k+1}}$ zur Koordinate 1 gehört. Dass hierbei $\sigma'_s = 1$, $\sigma'_{s+1} = 1$ scheinbar gegen die Einschränkung II verstösst, braucht nicht in Betracht gezogen zu werden, da man die Forderung ($-F_s R_s$) stets doppelt zählen und zwischen σ'_s und σ'_{s+1} eine überzählige Koordinate mit dem Wert 0 einschalten darf.

Nun ist wegen (8)

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FF)(-F'F')(H)(-F_1 R_1) \dots (-F_{s-1} R_{s-1})(-F_s R_s)} = \\ & = \overset{i}{N}_{(+FF)(-F'F')(H)(-F_1 R_1) \dots (-F_{s-1} R_{s-1})} + \\ & - \overset{i}{N}_{(+FF)(-F'F')(H)(-F_1 R_1) \dots (-F_{s-1} R_{s-1})(-F_s R_s)} . \quad (63) \end{aligned}$$

Infolge von $\sigma'_s = 1$, $\sigma'_{s+1} = 1$ entspricht dem Fächerbogen $F_{s-1} F_{s+1}$ als Summe aus reduzierter Maschenzahl und Charakteristik die Zahl 2. Der Minuend auf der rechten Seite von (63) ist demnach für den Gitterpunkt

$$\begin{aligned} \sigma'_1 = 1, \sigma'_2 = 0, \dots, \sigma'_{w_1} = 0, \sigma'_{w_1+1} = 1, \dots, \sigma'_{w_k+1} = 1, \\ \sigma'_{w_k+2} = 0, \dots, \sigma'_{s-1} = 0, \sigma'_s = 2 \end{aligned} \quad (64)$$

zu bilden. Drückt man den Wert der Vierfarbenfunktion $\overset{i}{N}_{\sigma'}$ auf Grund der Formel²⁷⁾

$$\overset{i}{N}_{1,0,\dots,0,2} = 2 \overset{i}{N}_{1,0,\dots,0,0} + \overset{i}{N}_{1,0,\dots,0,1}$$

durch ihre Fundamentalwerte aus, so zeigt sich auf Grund von Überlegungen, die den unter 1) durchgeführten analog sind, für den Gitterpunkt (64):

²⁷⁾ VF § 3, Formel (18).

$$\begin{aligned}
& \overset{i}{N}_{(+FF)}(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_{s-1}R_{s-1}) = \\
& = \overset{i}{N}_{1,0,\dots,0,2} = \\
& = 2 \cdot 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\
& \cdot (H) (-R_{s+1}X_{k+1}) \left| \overline{X_1} \times \overline{X_2} \times \dots \times \overline{X_k R_{s+1}} \right| + \\
& + 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\
& \cdot (H) \left| \overline{X_1} \times \overline{X_2} \times \dots \times \overline{X_k} \times \overline{X_{k+1}R_{s+1}} \right|. \quad (65)
\end{aligned}$$

Bei der Aufstellung dieser Formel ist in Betracht gezogen, dass $(-PR_{s+1})$ stets von selbst erfüllt ist, dass daher

$$\begin{aligned}
& (-R_{s+1}R_{w_k}) (-R_{s+1}R_{w_k+2}) \dots (-R_{s+1}R_{w_{k+1}}) = \\
& = (-R_{s+1}X_{k+1})
\end{aligned}$$

gesetzt werden darf.

Auf Grund von (56) hat man:

$$\begin{aligned}
& (-R_{s+1}X_{k+1}) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k R_{s+1}} \right| = \\
& = \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k} \times \overline{X_{k+1}} \right| + \\
& - \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k} \times \overline{X_{k+1}R_{s+1}} \right|;
\end{aligned}$$

wird dies in (65) eingeführt, so resultiert nach einigen Vereinfachungen, da $X_{k+1}R_{s+1}$ mit $X_{k+1}X_{k+2}$ gleichbedeutend ist:

$$\begin{aligned}
& \overset{i}{N}_{(+FF)}(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_{s-1}R_{s-1}) = \\
& = 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\
& \cdot (H) \left\{ 2 \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k} \times \overline{X_{k+1}} \right| + \right. \\
& \left. - \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k} \times \overline{X_{k+1}X_{k+2}} \right| \right\}. \quad (66)
\end{aligned}$$

Für den Subtrahenden in (63) findet man auf Grund ähnlicher Überlegungen:

$$\begin{aligned}
 & \overset{i}{N}_{(+FF)}(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_{s-1}R_{s-1})(+F_sR_s) = \\
 & = 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\
 & \cdot (H)(-R_{w_{k+1}}P)(-R_{s+1}R_{w_{k+1}}) \left[\overline{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \times X_{k+1}} \right].
 \end{aligned} \tag{67}$$

Setzt man die Ausdrücke (66) und (67) in (63) ein, so folgt:

$$\begin{aligned}
 & \overset{i}{N}_{(+FF)}(-F'F')(H)(-F_1R_1) \dots (-F_{s-1}R_{s-1})(-F_sR_s) = \\
 & = 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\
 & \cdot (H) \left\{ 2 \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_k \times X_{k+1}} \right] - \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_k \times X_{k+1} X_{k+2}} \right] + \right. \\
 & \left. - (-PR_{w_{k+1}})(-R_{s+1}R_{w_{k+1}}) \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_k \times X_{k+1}} \right] \right\} = \\
 & = 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\
 & \cdot (H) \left\{ \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_{k+1}} \right] \left[2E - E + (+PR_{w_{k+1}}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (+R_{s+1}R_{w_{k+1}}) \right] - \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_k \times X_{k+1} X_{k+2}} \right] \right\} = \\
 & = 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\
 & \cdot (H) \left\{ \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_{k+1}} \right] \left[\overline{X_{k+2}} \right] + \right. \\
 & \left. - \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_k \times X_{k+1} X_{k+2}} \right] \right\} = \\
 & = 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\
 & \cdot (H) \left[\overline{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \times X_{k+1} \times X_{k+2}} \right].
 \end{aligned}$$

Damit ist (57) von k auf $k+1$ übertragen, unter der Annahme, dass X_{k+2} nicht mehr als 3 verschiedene Knoten enthält. Die Beweisführung ist offenbar unabhängig davon, ob $R_{w_{k+1}}$ mit R_{s+1} zusammenfällt oder nicht; X_{k+2} dürfte also eventuell auch nur 2 Knoten enthalten.

Nach 1) ist aber nun (57) auch für den Fall einer beliebigen Anzahl von Knoten in X_{k+2} richtig. Da (57) in dem einfachsten Falle $k=0$ auf die schon bewiesene Formel (20) zurückgeht, so ist hiermit die Richtigkeit von (57) allgemein sichergestellt.

8. Erweiterte Form des hypothetischen Diagonalensatzes.

Von der Einschränkung II des vorigen Paragraphen, die fordert, dass der Koordinatenwert 1 immer nur vereinzelt, zwischen Koordinatenwerten 0 eingelagert, auftreten darf, kann man sich sofort befreien. Im Falle $\sigma'_j = 0$ darf man stets F_{j-1} mit F_j zusammenfallend denken, weil dann ja die Forderung $(+FF)(-F_{j-1}R_{j-1})(-F_jR_j)$ infolge von $F_{j-1} \equiv F_j$ mit $(+FF)(-F_{j-1}R_{j-1})(-F_{j-1}R_j)$ gleichbedeutend ist. Tritt nun noch $R_{j-1} \equiv R_j$ hinzu, d. h. darf wegen (H) auch R_{j-1} als mit R_j identisch gefärbt angenommen werden, so reduziert sich die Forderung $(+FF)(H)(-F_{j-1}R_{j-1})(-F_jR_j)$ auf $(+FF)(H)(-F_{j-1}R_{j-1})$, und die Koordinate σ'_j fällt überhaupt fort. Auf diese Weise kann natürlich eine ganze Reihe aufeinanderfolgender 0-Koordinaten in Wegfall treten. Folgen nun zwei oder mehr 1-Koordinaten unmittelbar nacheinander, so kann man dies immer so auffassen, dass eine Reihe dazwischengelegener 0-Koordinaten durch Zusammenfallen der entsprechenden R_j zum Ver-

schwinden gebracht worden ist. Die Funktion $N_{\sigma'}^i$ lässt sich dann offenbar immer noch auf Grund derselben Formel (57) berechnen, nur hat man dort eine gewisse Anzahl von Knoten R_j als zusammenfallend anzusehen und dementsprechend mehrfach zu zählen. Es bietet grundsätzlich keine Schwierigkeiten, das Prinzip in geschlossener Form für den Fall genau e aufeinanderfolgender 1-Koordinaten zu formulieren; da dies aber für den hier verfolgten Gedankengang keine wesentliche Bedeutung hat, so will ich davon absehen und mich mit der Feststellung begnügen, dass (57) auch dann anwendbar bleibt, wenn die Einschränkung II fortfällt.

Ist die Einschränkung I nicht erfüllt, so lässt sich mit Hilfe von (57) stets eine untere Schranke des Wertes von $N_{\sigma'}^i$ bilden. Ist nämlich $\sigma'_j = 0$, aber $R_{j-1} \equiv R_j$ durch (H) nicht gefordert, oder sogar verpönt, weil (H) explizite oder implizite $(-R_{j-1}R_j)$ enthält, so kann man zu den Forderungen $(-F_{j-1}R_{j-1})(-F_jR_j)$ jedenfalls widerspruchsfrei noch die Forderung $(-F_jR_{j-1})$ hinzufügen. Durch die Hinzunahme dieser neuen Forderung wird $N_{\sigma'}^i$ jedenfalls nicht grösser. Im solchermassen

erweiterten Bedingungskomplex ist aber die Einschränkung I an der Stelle R_{j-1} nun jedenfalls erfüllt. Durch vollständige Induktion erkennt man hieraus, dass ein Bedingungskomplex, welcher der Einschränkung I nicht Folge leistet, durch Hinzunahme neuer ergänzender widerspruchsfreier Bedingungen in einen Komplex umgewandelt werden kann, wo die Einschränkung I erfüllt ist, also (57) anwendbar wird. Da der Wert der

Farbeninvarianten N_{σ} bei der Hinzunahme neuer Bedingungen höchstens kleiner werden kann, so liefert nun (57) jedenfalls eine nichtnegative untere Schranke für den ursprünglichen Wert von N_{σ} . Auf Grund der Schlussbemerkung des § 2 ist hiermit gleichzeitig stets eine nichtnegative untere Schranke für den Wert von N_{σ} in jedem beliebigen Gitterpunkt (σ) gegeben.

Aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen, speziell aus der Identität (57), folgt zwingend

$$(H) \quad |\overline{PR_0 R_1 \dots R_{w_1}} \times \overline{PR_{w_1} \dots R_{w_2}} \times \dots \times \overline{PR_{w_k} \dots R_{s+1}}| \geq 0. \quad (68)$$

Die auf der linken Seite von (68) auftretenden Teilkomplexe sind nicht ganz allgemeiner Natur, da sie allesamt einen gemeinsamen Knoten, nämlich P , enthalten. Die Diagonalen in der Fig. 3 müssen hier also alle in einer Ecke des Bildpolygons zusammenlaufen. Ausserdem enthält (68) scheinbar noch eine Einschränkung: im ersten und letzten Teilkomplex tritt sicher je ein Paar benachbarter Knoten auf, nämlich P, R_0 resp. P, R_{s+1} . Von dieser zuletzt genannten Einschränkung kann man sich aber mit Hilfe von (56) sofort befreien. Setzt man nämlich in (56) R_{s+1} für B , so folgt:

$$\begin{aligned} (H) \quad & |\overline{PR_0 \dots R_{w_1}} \times \dots \times \overline{PR_{w_k} \dots R_{s+1}}| = \\ & = (H) \quad |\overline{PR_0 \dots R_{w_1}} \times \dots \times \overline{PR_{w_k} \dots R_s}| + \\ & - (H) \quad (-R_{s+1} P) (-R_{s+1} R_{w_k}) \dots (-R_{s+1} R_s) \\ & \quad |\overline{PR_0 \dots R_{w_1}} \times \dots \times \overline{PR_{w_{k-1}} \dots R_{w_k} R_{s+1}}|. \quad (69) \end{aligned}$$

Hierin ist nun nach (68) die linke Seite jedenfalls nichtnegativ, desgleichen ist der Subtrahend auf der rechten Seite sicher nichtnegativ, — es wird daher sicherlich auch der Minuend nichtnegativ. In diesem Minuenden ist aber der letzte Teilkomplex von der Einschränkung frei. Auf analoge Weise entfernt man auch die Einschränkung aus dem ersten Teilkomplex. Damit ist bewiesen:

Sind $X_1, X_2, \dots, X_k$ Teilkomplexe mit einem *allen* gemeinsamen Knoten, so ist jedenfalls

$$(H) \left| \overline{X_1} \times \overline{X_2} \times \dots \times \overline{X_k} \right| \geq 0, \quad (70)$$

wenn (H) mit der Knotenmenge $X_1 X_2 \dots X_k$ konform ist.

In den weiteren Betrachtungen werde ich die hier ausdrücklich erwähnte Forderung der Konformität für (H) als selbstverständlich ansehen und nicht mehr besonders erwähnen.

Enthält (H) einen Widerspruch, d. h. gilt $(H) = 0$, so ist in (70) sicher das Gleichheitszeichen richtig. Ist aber $(H) > 0$, so muss zugegeben werden, dass prinzipiell sowohl das Zeichen $>$, als auch das Zeichen $=$ in Betracht kommen könnte. Gehen wir von der Hypothese des allgemeinen Vierfarbensatzes aus, so folgt mit Hilfe von (57), (69) aber sofort, dass nur das Zeichen $>$ gelten kann. Der allgemeine Vierfarbensatz reduziert sich somit zwangsläufig auf die Behauptung:

Sind $X_1, X_2, \dots, X_k$ Teilkomplexe mit einem *allen* gemeinsamen Knoten, und ist $(H) > 0$, so ist auch das formale Produkt

$$(H) \left| \overline{X_1} \times \overline{X_2} \times \dots \times \overline{X_k} \right| > 0. \quad (71)$$

(70) ist bewiesen, (71) dagegen ist nur eine Vermutung.

Einige Konsequenzen aus (70) resp. (71) sollen gleich noch erwähnt werden.

Aus

$$(H) (\pm AB) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k} \right| = (H) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k} \right| + \\ - (H) (\mp AB) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k} \right|$$

folgt wegen (70) mit Sicherheit:

$$(H) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k} \right| \geq (H) (G) \left| \overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k} \right|. \quad (72)$$

Wenn die Vermutung (71) richtig ist, so gilt in (72) bei $(H) > 0$ das Zeichen $>$, sobald (G) ein von (H) unabhängiges Paar²⁸⁾ enthält; widrigenfalls besteht natürlich das Zeichen $=$.

Aus (51) und (70) folgt sicher

$$(H) \quad |X_1 \times \dots \times X_j| \quad |X_{j+1} \times \dots \times X_k| \geq \\ \geq (H) \quad |X_1 \times \dots \times X_k| \geq 0. \quad (73)$$

Sollte (71) richtig sein, so gilt hier bei $(H) > 0$ das Zeichen $>$. Durch vollständige Induktion folgt aus (73) und (51) allgemeiner, bei $0 < a < b < \dots < t < k$:

$$(H) \quad |X_1 \times \dots \times X_a| \quad |X_{a+1} \times \dots \times X_b| \dots |X_{t+1} \times \dots \times X_k| \geq \\ \geq (H) \quad |X_1 \times \dots \times X_k|. \quad (74)$$

Diese Lesart ist sicher richtig; besteht aber die Vermutung (71) zu Recht, so hat man in (74) bei $(H) > 0$ das Zeichen $>$.

Die Relationen (72), (73), (74) sind bewiesen unter der Voraussetzung, dass $X_1, X_2, \dots, X_k$ alle einen gemeinsamen Knoten aufweisen. Ist aber für ein spezielles Netz, resp. für einen speziellen Netztypus (70) oder (71) auch ohne diese Beschränkung als richtig erkannt, so haben für das betreffende Netz, resp. für den betreffenden Netztypus die entsprechenden Folgerungen (72)–(74) auch unbeschränkte Gültigkeit.

Die Vermutung (71) bildet offenbar eine Verallgemeinerung des im § 4 ausgesprochenen speziellen Diagonalensatzes. Der allgemeine Vierfarbensatz ist in (71) als Spezialfall mit enthalten.

9. Diagonalaggregate in Netzen erster Ordnung.

Es soll nun gezeigt werden, wie sich die Werte der Diagonalaggregate für irreduzible Normalnetze erster Ordnung bestimmen lassen. Ich nehme hierbei für Netze erster Ordnung die Teilkomplexe $X_1, X_2, \dots, X_k$ in allgemeiner Gestalt an, ohne die Existenz eines allen gemeinsamen Knotens P zu fordern.

28) Vgl. ALV § 12.

Die Gesamtheit der Teilkomplexe $X_1 X_2 \dots X_k$ bestimmt in zyklischer Anordnung die Menge der in ihnen enthaltenen Knoten $A_1, A_2, \dots, A_p$. Ausser diesen Knoten A_j können noch Knotenpaare $(+FF)(-F'F')$ auf dem Netzrand ausgezeichnet sein, jedoch so, dass die A_j durch diese Knotenpaare nicht untereinander getrennt werden. Es mögen die Bezeichnungen des § 5 beibehalten werden: jedem Randbogen $A_j A_{j+1}$ resp. $A_p A_1$ entspreche nach Berücksichtigung der Paare $(+FF)(-F'F')$ eine reduzierte Maschenzahl χ_j resp. χ_p und eine Charakteristik κ_j resp. κ_p ; die Summe $\chi_j + \kappa_j$ werde mit η_j bezeichnet. Berechnet man nach (5) die einzelnen Farbeninvarianten, in welche $(+FF)(-F'F') [\overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k}]$ zerfällt, so erhält man eine Summe von Produkten vom Typus

$$2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot 2^s \cdot a_{\eta_a + \eta_{a'} + \dots - 1} \cdot a_{\eta_b + \eta_{b'} + \dots - 1} \cdot \dots \cdot a_{\eta_t + \eta_{t'} + \dots - 1}, \quad (75)$$

wobei unter $\eta_a, \eta_{a'}, \dots, \eta_b, \eta_{b'}, \dots, \eta_t, \eta_{t'}, \dots$ gewisse Permutationen der Zahlen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ verstanden sind. Dies zeigt aber ²⁹⁾, dass das formale Produkt $(+FF)(-F'F') [\overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k}]$ hier jedenfalls eine Vierfarbenfunktion der Argumente $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ darstellt. Setzt man demnach für das Netz erster Ordnung

$$(+ FF) (- F' F') [\overline{X_1} \times \dots \times \overline{X_k}] = 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot V_{\eta_1, \dots, \eta_p}, \quad (76)$$

so genügt es die Fundamentalwerte von $V_{\eta_1, \dots, \eta_p}$ (abgekürzt V_η) kennen zu lernen. Die Aufgabe vereinfacht sich bedeutend, wenn man beachtet, dass es ausreichend ist, den Wert von V_η in derjenigen extremen Fundamentalecke zu bestimmen, wo sämtliche Koordinaten η_j gleich 1 sind. Kommt nämlich die Koordinate 0 vor, so ist in dem betreffenden Gitterpunkt sowohl die reduzierte Maschenzahl, als auch die Charakteristik des

29) VF § 2. Formeln (14), (15).

Bogens $A_j A_{j+1}$ gleich 0, d. h. es ist entweder A_j mit A_{j+1} identisch, oder aber $(+FF)$ fordert $A_j \equiv A_{j+1}$; in beiden Fällen braucht man im Diagonalaggregat A_{j+1} nicht besonders zu erwähnen, — die Koordinate η_j kann also einfach fortgelassen werden.

Um die ferneren Entwicklungen kompakter zu schreiben, verwende ich ein zweiwertiges Symbol ξ_t . Es soll $\xi_t = 1$ sein, wenn t ungerade, dagegen $\xi_t = 0$, wenn t gerade ist. Bedeutet ε , wie schon früher, die Zahl -1 , so kann man demnach definieren³⁰⁾:

$$\xi_t = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon^{t-1}) = 1^{t-1} - 1^{t-2} + 1^{t-3} - \dots + \varepsilon^{t-1} 1^0. \quad (77)$$

Die Koordinaten η_j verteilen sich auf die einzelnen Teilkomplexe $X_1, X_2, \dots, X_k$ so, dass η_j zum Teilkomplex X_a gehört, sobald A_j und A_{j+1} beide gleichzeitig X_a angehören. Es sei e_a die Anzahl der zum Teilkomplex X_a gehörigen Koordinaten η_j ; den Zahlenwert von V_η für diejenige Fundamentecke, wo jede Koordinate η_j gleich 1 ist, bezeichne ich durch das Symbol $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. Enthält X_a genau q_a verschiedene Knoten, so ist im allgemeinen

$$e_a = q_a - n_a, \quad (78)$$

wenn n_a die Anzahl der mit X_a benachbarten Teilkomplexe bedeutet; es ist also $n_a = 0$ für das alleinstehende Diagonalpolynom, $n_a = 1$ für X_1 und X_k im Diagonalaggregat (76), endlich $n_a = 2$ für $1 < a < k$ dortselbst.

Im Falle eines alleinstehenden Diagonalpolynoms hat man nach (39) mit Hilfe des Symbols (77):

$$\{e\} = a_{e-1} + \xi_{e-1}. \quad (79)$$

Hierbei ist e_1 durch e ersetzt.

Tritt im Symbol $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ für e_a an einer gewissen Stelle s mal der Reihe nach der Wert 0 auf, so will ich dies nötigenfalls durch die abgekürzte Schreibweise 0^s an der entsprechenden Stelle andeuten, d. h. ich schreibe eventuell

30) Beachtenswert ist die Analogie zwischen der Definition von α_t und ξ_t

$$\{e_1, 0^0, e_2\} \text{ statt } \{e_1, e_2\},$$

$$\{e_1, 0^1, e_3\} \text{ statt } \{e_1, 0, e_3\},$$

$$\{e_1, 0^2, e_4\} \text{ statt } \{e_1, 0, 0, e_4\}, \text{ usw.}$$

Beim Gebrauch der Relation (78) ist auf eine Möglichkeit singulären Charakters achtzugeben: besteht X_a aus nur 2 Knoten, so können diese 2 Knoten eventuell auch zusammenfallen, d. h. es kann der Fall eintreten, dass $X_a = A_1$. Die Fig. 3 (§ 6) zeigt sofort, dass in solchem Falle notwendigerweise gleichzeitig entweder $X_1 = A_1, X_2 = A_1, \dots, X_{a-1} = A_1$, oder aber $X_{a+1} = A_1, X_{a+2}, \dots, X_k = A_1$ bestehen muss. Infolge von (52) sind diese beiden Annahmen nicht wesentlich verschieden, und man darf sich daher auf die letztgenannte beschränken. Bei $X_a = A_1$ ist nun e_a notwendigerweise gleich 0, unabhängig davon, ob $a = k$ oder aber $1 < a < k$ gilt. Ist X_{a-1} ein Teilkomplex mit wenigstens 2 verschiedenen Knoten, dagegen $X_a = A_1$, so ist bei der Berechnung von e_{a-1} der auf Grund der Vorschrift (78) gefundene Wert um mindestens eine Einheit zu vergrössern. Man erkennt die Ausartung daran, dass dann $e_1 = 0$ oder $e_k = 0$ ist, während in normalen Fällen $e_1 \geq 1, e_k \geq 1$ sein muss.

Es gelten die Formeln

$$\begin{aligned} \{e_1, e_2, \dots, e_a, 0^s, 1\} &= \{e_1, e_2, \dots, e_a + 1\} \\ \{e_1, e_2, \dots, e_a, 0^s\} &= 2^s \cdot \{e_1, e_2, \dots, e_a\}. \end{aligned} \quad (80)$$

Die erstere bezieht sich auf einen speziellen, jedoch normalen Fall, während die letztere den ausgearteten Fall betrifft. Man hat zu beachten, dass bei ein und derselben Knotenanzahl in X_a die zweite Formel für e_a einen um 1 grösseren Wert enthält, als die erste.

Die Richtigkeit der Formeln (80) liest man aus (53) und (54) ab, wenn man berücksichtigt, dass in der betreffenden Fundamentalecke $(+PQ) = 0$ gilt, sobald jeder der Teilkomplexe $X_{a+1}, X_{a+2}, \dots, X_k$ nur die zwei verschiedenen Knoten P, Q enthält.

Ich berechne nun $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ auf rekurrentem Wege, indem ich annehme, dass bis zu einem gewissen k die Werte

des Symbols $\{e_1, \dots, e_k\}$ schon bekannt sind, — wie dies ja tatsächlich für $k=1$ der Fall ist, wo das Problem durch die Formel (79) erledigt wird.

Aus (80) ergeben sich zunächst die Spezialfälle $s=0$ resp. $s=1$:

$$\begin{aligned} \{e_1, e_2, \dots, e_k, 1\} &= \{e_1, e_2, \dots, e_k + 1\} \\ \{e_1, e_2, \dots, e_k, 0\} &= 2 \cdot \{e_1, e_2, \dots, e_k\}. \end{aligned} \quad (81)$$

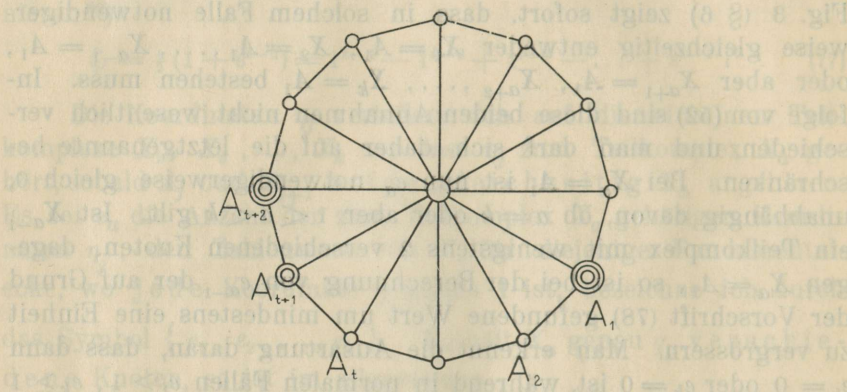


Fig. 4.

Es sei nun $\{e_1, e_2, \dots, e_k, t\}$ bei irgendeinem $t \geq 1$ bekannt und $\{e_1, e_2, \dots, e_k, t+1\}$ gesucht. Zur Erleichterung der Übersicht verweise ich auf die Fig. 4, wo $A_1, A_2, \dots, A_t, A_{t+1}, A_{t+2}$ den Komplex X_{k+1} darstellt (die Paare $(+FF)(-F'F')$ sind unwesentlich und daher fortgelassen). Setzt man in der Identität (56) A_{t+1} an Stelle von B , so folgt:

$$\begin{aligned} & (+FF)(-F'F') \overline{X_1 \times \dots \times X_k \times X_{k+1}} = \\ & = (+FF)(-F'F') \overline{X_1 \times \dots \times X_k \times A_1 A_2 \dots A_t A_{t+2}} + \\ & \quad - (+FF)(-F'F') (-A_{t+1} A_{t+2}) (-A_{t+1} A_t) \dots \\ & \quad \dots (-A_{t+1} A_1) \overline{X_1 \times \dots \times X_k A_{t+1}}. \end{aligned} \quad (82)$$

Hierin ist in X_{k+1} für die Koordinaten η_j das Wertsystem $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_t = \eta_{t+1} = 1$ zu setzen. Im Teilkomplex

$A_1 A_2 \dots A_t A_{t+2}$ hat man dann das Wertsystem $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{t-1} = 1$, $\eta_t = 2$. Im Subtrahenden auf der rechten Seite von (82) liefert der Bedingungskomplex $(-A_{t+1} A_{t+2})(-A_{t+1} A_t) \dots (-A_{t+1} A_1)$ als Beitrag den Faktor $a_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_2 = 1$, während im Teilkomplex $X_k A_{t+1}$ dem Bogen $A_1 A_{t+1}$ die Koordinate $\eta_1 = 1$ und ebenso dem Bogen $A_{t+1} A_{t+2}$ die Koordinate $\eta_2 = 1$ entspricht. Alle übrigen Koordinaten in den Teilkomplexen $X_1, X_2, \dots, X_k$ sind auch auf der rechten Seite von (82) unverändert gleich 1.

Nach der Grundeigenschaft der Vierfarbenfunktionen³¹⁾ berechnet sich der Wert für $\eta_t = 2$ als Summe des Wertes für $\eta_t = 1$ und des doppelten Wertes für $\eta_t = 0$. Letzteren erhält man aber, wenn man η_t einfach weglässt und A_t mit A_{t+2} zusammenfallend denkt.

Wird dies alles in Betracht gezogen, so kann man die Identität (82) nach Entfernung des gemeinsamen Faktors

$$2^f \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_u + \lambda_v - 1}$$

folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} \{e_1, \dots, e_k, t+1\} &= 2 \{e_1, \dots, e_k, t-1\} + \\ &+ \{e_1, \dots, e_k, t\} - \{e_1, \dots, e_k, t+2\}. \end{aligned} \quad (83)$$

Von (81) ausgehend, findet man demnach:

$$\begin{aligned} \{e_1, \dots, e_k, 2\} &= 2 \cdot \{e_1, \dots, e_k, 0\} + \{e_1, \dots, e_k, 1\} + \\ - \{e_1, \dots, e_k, 2\} &= 2^2 \cdot \{e_1, \dots, e_k\} + \{e_1, \dots, e_k, 1\} + \\ &- \{e_1, \dots, e_k, 2\}, \\ \{e_1, \dots, e_k, 3\} &= 2^2 \cdot \{e_1, \dots, e_k\} + 3 \cdot \{e_1, \dots, e_k, 1\} + \\ &- 2 \cdot \{e_1, \dots, e_k, 2\}, \\ \{e_1, \dots, e_k, 4\} &= 2^2 \cdot 3 \cdot \{e_1, \dots, e_k\} + \\ &+ 5 \cdot \{e_1, \dots, e_k, 1\} - 5 \cdot \{e_1, \dots, e_k, 2\}. \end{aligned}$$

31) VF § 3, Formel (20).

Diese Ausdrücke, ebenso wie die Ausdrücke (81), genügen allesamt dem Gesetz

$$\begin{aligned} \{e_1, \dots, e_k, t\} &= 4 a_{t-1} \cdot \{e_1, \dots, e_k\} + \\ &+ a_t \cdot \{e_1, \dots, e_k + 1\} - (a_t - \zeta_t) \cdot \{e_1, \dots, e_k + 2\}. \end{aligned} \quad (84)$$

Durch vollständige Induktion folgt mittels (83) die allgemeine Gültigkeit des Bildungsgesetzes (84), denn es ist

$$\begin{aligned} 8 a_{t-2} + 4 a_{t-1} &= 4 a_{(t+1)-1}, \\ 2 a_{t-1} + a_t &= a_{t+1}, \\ 2(a_{t-1} - \zeta_{t-1}) + (a_t - \zeta_t) + 1 &= a_{t+1} - 2 \zeta_{t-1} - \zeta_t + 1 = \\ &= a_{t+1} - \zeta_{t+1} - \zeta_{t-1} - \zeta_t + 1 = a_{t+1} - \xi_{t+1}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (84) und (79) lässt sich der Fall $k = 1$ leicht erledigen. Schreibt man s statt e_1 , so folgt:

$$\begin{aligned} \{s, t\} &= 4 a_{t-1} \cdot \{s\} + a_t \cdot \{s + 1\} - (a_t - \zeta_t) \cdot \{s + 2\} = \\ &= 4 a_{t-1} (a_{s-1} + \zeta_{s-1}) + a_t (a_s + \zeta_s) - (a_t - \zeta_t) (a_{s+1} + \zeta_{s+1}) = \\ &= 4 a_{t-1} a_{s-1} + 4 a_{t-1} \zeta_{s-1} + a_t a_s + a_t \zeta_s - a_t a_{s+1} - a_t \zeta_{s+1} + \\ &\quad + \zeta_t a_{s+1} + \zeta_t \zeta_{s+1}. \end{aligned}$$

Schreibt man weiterhin ε für -1 und benutzt die leicht zu verifizierenden Relationen

$$\xi_{a+1} = \xi_{a-1}, \quad \xi_a + \xi_{a-1} = 1, \quad \xi_a - \xi_{a-1} = \varepsilon^{a-1}, \quad \varepsilon^a + 2 \xi_a = 1, \quad (85)$$

so folgt durch eine Kette von Umformungen:

$$\begin{aligned} \{s, t\} &= 4 a_{t-1} a_{s-1} + a_t (a_s - a_{s+1}) + a_t (\zeta_s - \zeta_{s-1}) + \\ &\quad + 2(a_t + \varepsilon^t) \zeta_{s-1} + \zeta_t (a_s + 2 a_{s-1}) + \varepsilon^{t-1} + \zeta_{t-1} \zeta_{s-1} = \\ &= 4 a_{t-1} a_{s-1} - 2 a_t a_{s-1} + a_t \varepsilon^{s-1} + 2 a_t \zeta_{s-1} + \\ &\quad + 2 \varepsilon^t \zeta_{s-1} + \zeta_t a_s + 2 \zeta_t a_{s-1} + \varepsilon^{t-1} \zeta_{s-1} + \zeta_{t-1} \zeta_{s-1} = \\ &= 2 a_{s-1} (2 a_{t-1} - a_t) + a_t (\varepsilon^{s-1} + 2 \zeta_{s-1}) + \varepsilon^t \zeta_{s-1} + \\ &\quad + \zeta_t a_s + 2 \zeta_t a_{s-1} + \zeta_{t-1} \zeta_{s-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \varepsilon^t a_{s-1} + a_t + \zeta_t a_s + 2 \zeta_t a_{s-1} + \varepsilon^t \zeta_{s-1} + \zeta_{t-1} \zeta_{s-1} = \\
 &= 2 a_{s-1} (\varepsilon^t + \zeta_t) + a_t + \zeta_t a_s + \varepsilon^t \zeta_{s-1} + \zeta_{t-1} \zeta_{s-1} = \\
 &= 2 a_{s-1} \zeta_{t-1} + a_t + \zeta_t a_s + \varepsilon^t \zeta_{s-1} + \zeta_{t-1} \zeta_{s-1} = \\
 &= (a_s + \varepsilon^s) \zeta_{t-1} + a_t + \zeta_t a_s + \varepsilon^t \zeta_{s-1} + \zeta_{t-1} \zeta_{s-1} = \\
 &= a_s (\zeta_{t-1} + \zeta_t) + a_t + \zeta_{t-1} \varepsilon^s + \varepsilon^t \zeta_{s-1} + \zeta_{t-1} \zeta_{s-1} = \\
 &= a_s + a_t + \zeta_{t-1} \varepsilon^s + \varepsilon^t \zeta_{s-1} + \zeta_{t-1} \zeta_{s-1} = \\
 &= a_s + a_t + f_{s,t} \quad (86)
 \end{aligned}$$

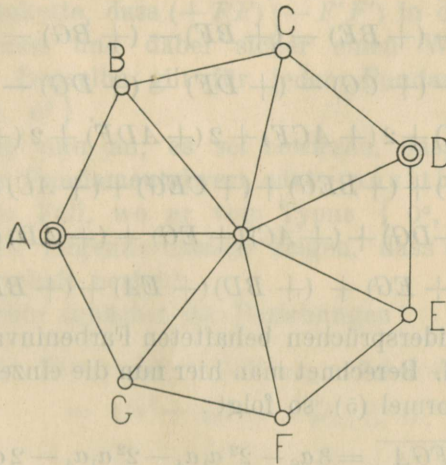


Fig. 5.

Hier ist $f_{s,t}$ dreiwertig, nämlich gleich 0, 3 oder -1 , je nachdem s, t beide ungerade, beide gerade, oder endlich inkongruent nach dem Modul 2 sind. Mit Hilfe von (77) findet man auch

$$f_{s,t} = \frac{1}{4} \cdot [1 + 3(\varepsilon^s + \varepsilon^t) + 5\varepsilon^{s+t}] \quad (87)$$

Für das als Kontrollbeispiel gewählte, in der Fig. 5 dargestellte Netz ergibt sich aus (86):

$$|ABCD \times DEFGA| = \{3, 4\} = a_3 + a_4 - 1 = 3 + 5 - 1 = 7.$$

Andererseits ist nach der Definition (49):

$$\begin{aligned}
 \overline{ABCD \times DEFGA} &= [(+AC) + (+AD) + (+BD)] \\
 &[-E + (+DF) + (+DG) + (+DA) + (+EG) + (+EA) + \\
 &+ (+FA) - (+ADF)] - [-3E + (+AC) + (+AD) + \\
 &+ (+AE) + (+AF) + (+BD) + (+BE) + (+BF) + \\
 &+ (+BG) + (+CE) + (+CF) + (+CG) + (+DF) + \\
 &+ (+DG) + (+EG) - (+ACE) - (+ACF) - (+ADF) + \\
 &- (+BDF) - (+BDG) - (+BEG) - (+CEG)] = \\
 &= 3E - 2(+AC) - 2(+BD) - (+AD) - (+AE) + \\
 &- (+AF) - (+BE) - (+BF) - (+BG) - (+CE) + \\
 &- (+CF) - (+CG) - (+DF) - (+DG) - (+EG) + \\
 &+ 2(+ACE) + 2(+ACF) + 2(+ADF) + 2(+BDF) + \\
 &+ 2(+BDG) + (+BEG) + (+CEG) + (+AC)(+DF) + \\
 &+ (+AC)(+DG) + (+AC)(+EG) + (+AD)(+EG) + \\
 &+ (+BD)(+EG) + (+BD)(+EA) + (+BD)(+FA),
 \end{aligned}$$

wobei die mit Widersprüchen behafteten Farbeninvarianten schon fortgelassen sind. Berechnet man hier nun die einzelnen Summanden nach der Formel (5), so folgt:

$$\begin{aligned}
 \overline{ABCD \times DEFGA} &= 3a_6 - 2^2 a_1 a_4 - 2^2 a_1 a_4 - 2a_2 a_3 - 2a_2 a_3 + \\
 &- 2a_1 a_4 - 2a_2 a_3 - 2a_2 a_3 - 2a_1 a_4 - 2a_1 a_4 - 2a_2 a_3 - 2a_2 a_3 + \\
 &- 2a_1 a_4 - 2a_2 a_3 - 2a_1 a_4 + 2^3 a_1 a_1 a_2 + 2^3 a_1 a_1 a_2 + 2^3 a_1 a_1 a_2 + \\
 &+ 2^3 a_1 a_1 a_2 + 2^3 a_1 a_1 a_2 + 2^2 a_1 a_1 a_2 + 2^2 a_1 a_1 a_2 + 2^2 a_1 a_1 a_2 + \\
 &+ 2^2 a_1 a_1 a_2 + 2^2 a_1 a_1 a_2 + 2^2 a_1 a_1 a_2 + 2^2 a_1 a_1 a_2 + 2^2 a_1 a_1 a_2 = \\
 &= 3a_6 - 2 \cdot 2^2 a_1 a_4 - 5 \cdot 2 a_1 a_4 - 7 \cdot 2 a_2 a_3 + 5 \cdot 2^3 a_1 a_1 a_2 + \\
 &+ 9 \cdot 2^2 a_1 a_1 a_2 = 3 \cdot 21 - 8 \cdot 5 - 10 \cdot 5 - 14 \cdot 3 + 40 + 36 = \\
 &= 63 - 40 - 50 - 42 + 40 + 36 = 7,
 \end{aligned}$$

was vorher auf viel kürzerem Wege gefunden wurde.

Auf die Ausdrücke für die Fundamentalwerte der höheren Diagonallaggregate brauche ich nicht genauer einzugehen; ich

beschränke mich darauf, allgemein zu zeigen, dass sie positiv sind, sobald $(+FF)(-F'F')$ keinen Widerspruch enthält.

Aus (79) ist ersichtlich, dass $\{e\}$ in allen Fällen positiv ist, ausgenommen $e = 1$. Da ein Netz erster Ordnung sicher mindestens 3 Maschen enthalten muss, so ist der Fundamentalwert $\{1\}$ überhaupt nur so denkbar, dass tatsächlich ein Bedingungskomplex $(+FF)(-F'F')$ auftritt, der vom Gesamt-netz nur eine Masche freilässt, wobei die Randknoten dieser Masche infolge von $(+FF)$ notwendig identisch gefärbt werden müssen, — das bedeutet aber einen Widerspruch, da diese beiden Randknoten benachbart sind.

Aus (86) folgt, dass $\{s, t\}$ positiv ist, ausgenommen die beiden Fälle $\{1, 0\}$ und $\{0, 1\}$. Wieder zeigt aber dieselbe Schlusskette, dass $(+FF)(-F'F')$ in diesem Falle notwendig existieren und dabei sicher einen Widerspruch enthalten muss. Dasselbe gilt für jeden Fundamentalwert vom Typus $\{0^a, 1, 0^b\}$.

Ich nehme nun an, es sei bewiesen, dass bis zu einem gewissen k der Fundamentalwert stets positiv ausfällt, ausgenommen den Fall, wo er vom Typus $\{0^a, 1, 0^b\}$ ist. Es lässt sich dann folgendermassen zeigen, dass auch für $k+1$ dieselbe Eigenschaft besteht:

Man beachte zunächst die Beziehungen

$$\begin{aligned} 4a_{t-1} - 2(a_t - \xi_t) &= 2(2a_{t-1} - a_t) + 2\xi_t = \\ &= 2(\varepsilon^t + \xi_t) = 2\xi_{t-1} \geq 0, \end{aligned}$$

also

$$4a_{t-1} \geq 2(a_t - \xi_t),$$

und (bei nichtnegativem t)

$$a_t \geq a_t - \xi_t \geq 0.$$

Weil nun

$$\{e_1, \dots, e_k\}, \{e_1, \dots, e_k + 1\}, \{e_1, \dots, e_k + 2\}$$

nach der Voraussetzung nichtnegative Zahlen bedeuten, so ist

$$\begin{aligned} \{e_1, \dots, e_k, t\} &= 4a_{t-1} \{e_1, \dots, e_k\} + \\ &+ a_t \{e_1, \dots, e_k + 1\} - (a_t - \xi_t) \{e_1, \dots, e_k + 2\} \geq \\ &\geq (a_t - \xi_t) [2\{e_1, \dots, e_k\} + \{e_1, \dots, e_k + 1\} + \\ &- \{e_1, \dots, e_k + 2\}]. \end{aligned} \quad (88)$$

Hierin ist die eckige Klammer sicher positiv, da dieselbe Formel (84) ergibt:

$$\begin{aligned}
 & 2 \{ e_1, \dots, e_k \} + \{ e_1, \dots, e_k + 1 \} - \{ e_1, \dots, e_k + 2 \} = \\
 & = 8 a_{e_k - 1} \{ e_1, \dots, e_{k-1} \} + 2 a_{e_k} \{ e_1, \dots, e_{k-1} + 1 \} + \\
 & \quad - 2 (a_{e_k} - \xi_{e_k}) \{ e_1, \dots, e_{k-1} + 2 \} + \\
 & \quad + 4 a_{e_k} \{ e_1, \dots, e_{k-1} \} + a_{e_k + 1} \{ e_1, \dots, e_{k-1} + 1 \} + \\
 & \quad - (a_{e_k} + 1 - \xi_{e_k + 1}) \{ e_1, \dots, e_{k-1} + 2 \} + \\
 & \quad - 4 a_{e_k + 1} \{ e_1, \dots, e_{k-1} \} - a_{e_k + 2} \{ e_1, \dots, e_{k-1} + 1 \} + \\
 & \quad + (a_{e_k + 2} - \xi_{e_k + 2}) \{ e_1, \dots, e_{k-1} + 2 \} = \\
 & = (2 \xi_{e_k} + \xi_{e_k - 1} - \xi_{e_k}) \{ e_1, \dots, e_{k-1} + 2 \} = \\
 & = \{ e_1, \dots, e_{k-1} + 2 \} > 0,
 \end{aligned}$$

denn $\{ e_1, \dots, e_{k-1} + 2 \}$ ist sicher nicht vom Typus $\{ 0^a, 1, 0^b \}$. Aus (88) folgt somit, dass bei $t > 1$ der Fundamentalwert $\{ e_1, \dots, e_k, t \}$ positiv ist, denn für $t > 1$ ist der Faktor $(a_t - \xi_t)$ positiv.

Es bleiben noch die zweifelhaften Fälle $t = 0$ und $t = 1$ zu untersuchen. Hier entscheiden sofort die Relationen (81):

Ist $\{ e_1, \dots, e_k \}$ vom Typus $\{ 0^a, 1, 0^b \}$, so gehört sicher auch $\{ e_1, \dots, e_k, 0 \}$ zu demselben Typus, und nach (81) sind beide Fundamentalwerte gleichzeitig 0; ist aber $\{ e_1, \dots, e_k \}$ von diesem Typus verschieden, so gilt dasselbe für $\{ e_1, \dots, e_k, 0 \}$, und beide Fundamentalwerte sind wegen (81) sicherlich positiv. Ist ferner $\{ e_1, \dots, e_k + 1 \}$ zum Typus $\{ 0^a, 1, 0^b \}$ gehörig, so muss $e_1 = e_2 = \dots = e_k = 0$ sein, und $\{ e_1, \dots, e_k, 1 \}$ ist vom Typus $\{ 0^a, 1 \}$; nach (81) ist zugleich $\{ e_1, \dots, e_k, 1 \} = 0$. Ist aber $\{ e_1, \dots, e_k + 1 \}$ vom Typus $\{ 0^a, 1, 0^b \}$ verschieden, so ist auch $\{ e_1, \dots, e_k, 1 \}$ nicht zu

diesem Typus gehörig, und nach (81) sind beide Fundamentalwerte dann positiv. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Hieraus folgt nun aber sofort, dass für jedes irreduzible Normalnetz erster Ordnung die im § 8 formulierte Verallgemeinerung (71) des speziellen Diagonalsatzes richtig ist, und zwar sogar dann noch, wenn von den Teilkomplexen nicht die Existenz eines allen gemeinsamen Knotens P gefordert ist, denn eine solche Einschränkung ist im vorliegenden § 9 nicht gestellt.

Ist nämlich $(H) = (+FF)(-F'F')$ widerspruchsfrei, so kommt nur ein Gitterpunkt (η) in Betracht, der von einer Fundamentalecke vom Typus $\{0^a, 1, 0^b\}$ verschieden ist. Drückt man also $V_{\eta_1}, \dots, \eta_p$ in (76) durch die Fundamentalwerte aus³²⁾, so lässt sich bei $\eta_1 > 1$ jedenfalls eine solche Kombination $a, b, c, \dots$ finden, dass $\alpha_{\eta_2-1} \dots \alpha_{\eta_{a-1}-1} \alpha_{\eta_a} \alpha_{\eta_{a+1}-1} \dots \alpha_{\eta_b} \dots \alpha_{\eta_c} \dots \alpha_{\eta_p-1}$ positiv wird; dann verschwinden sicher nicht die Koeffizienten

$$2^q \alpha_{\eta_1-1} \alpha_{\eta_2-1} \dots \alpha_{\eta_a} \dots \alpha_{\eta_b} \dots \alpha_{\eta_c} \dots \alpha_{\eta_p-1},$$

$$2^{q-1} \alpha_{\eta_1} \alpha_{\eta_2-1} \dots \alpha_{\eta_a} \dots \alpha_{\eta_b} \dots \alpha_{\eta_c} \dots \alpha_{\eta_p-1}$$

in der Darstellung der genannten Vierfarbenfunktion. Da die Fundamentalwerte, mit denen diese Koeffizienten entsprechend zu multiplizieren sind, nicht beide gleichzeitig zum Typus $\{0^a, 1, 0^b\}$ gehören können, so liefert in der Darstellung mindestens eines der beiden entsprechenden Glieder einen positiven Beitrag, während negative Beiträge überhaupt nicht vorkommen. V_η ist daher positiv. Lässt sich aber die Annahme $\eta_1 > 1$ nicht machen, so hat man es mit einer Fundamentalecke zu tun, und dieser Fall ist durch die früheren Betrachtungen schon erledigt. Da ein Faktor $\alpha_{\psi_u} + \tau_u$ resp. $\alpha_{\varphi_v} + \lambda_v - 1$ in (76) nur dann verschwindet, wenn $(+FF)(-F'F')$ einen Widerspruch enthält, so ist die Verallgemeinerung des speziellen Diagonalsatzes hier jedenfalls richtig.

10. Reduktion der Farbeninvariante im allgemeinen Falle.

Es bietet nun prinzipiell keine Schwierigkeiten, nichtnegative untere Schranken für $N_{(L)}^i(-FR)$ auch dann anzugeben, wenn (L) nicht nur, wie im § 2, ausschliesslich Forderungen $(+FF)(-F'F')(+RR)(-R'R')$, sondern auch noch solche vom Typus $(+FR)$ enthält.

Es möge $(+FR)$ aus den Paaren $(+F_1R_1), (+F_2R_2), \dots, \dots, (+F_pR_p)$ bestehen. Die negativen Paare sollen mit Hilfe

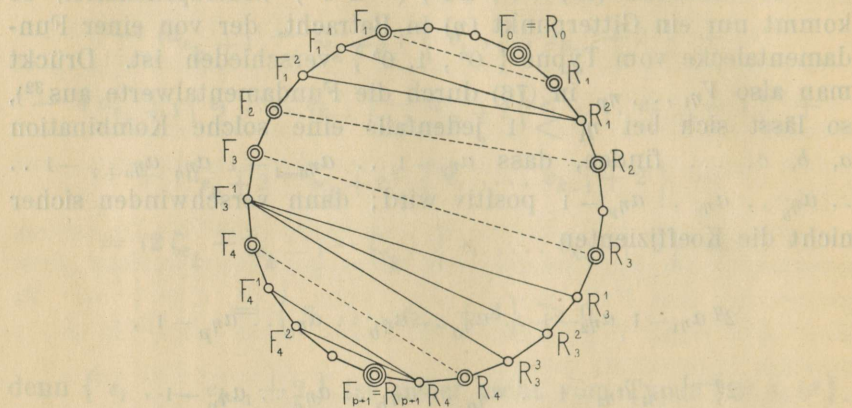


Fig. 6.

zweier Indizes k, j als $(-F_j^k R_j^k)$ bezeichnet werden, und zwar so, dass F_j^k zum Fächerbogen $F_j F_{j+1}$, und R_j^k zum Residuumrandbogen $R_j R_{j+1}$ gehört³³⁾. $F_0 = R_0$ und $F_{p+1} = R_{p+1}$ seien die beiden Knoten, wo Fächer und Residuumrand aneinanderstossen. Man darf annehmen, dass F_j^k von F_j und von F_{j+1} verschieden ist, desgleichen, dass R_j^k von R_j und von R_{j+1} verschieden ist, da widrigenfalls $(-F_j^k R_j^k)$ durch eine Bedingung vom Typus $(-F'F')$ resp. $(-R'R')$ ersetzt werden dürfte. Wohl aber kann F_j^k mit F_{j+1}^k , oder auch R_j^k mit R_{j+1}^k zusammenfallen.

Zur besseren Übersicht der Lagenverhältnisse denke man sich den Netzrand auf ein Bildpolygon abgebildet und die Bindungen zu Paaren durch Diagonalen angedeutet. In der Fig. 6

33) Vgl. VF § 8.

sind positive Bedingungen durch punktierte Diagonalen, negative Bedingungen durch ausgezogene Diagonalen dargestellt, Da ich mich immer nur auf Auslesen³⁴⁾ von Paaren beschränke, so dürfen keine zwei Diagonalen im Bilde sich kreuzen. In der Fig. 6 sind Bedingungen vom Typus $(+FF)(-F'F')(+RR)(-R'R')$ als unwesentlich angesehen und daher nicht angedeutet; im allgemeinen Falle hätte man aber auch solche Bedingungen zu berücksichtigen. Für Diagonalen FR kämen dann nur diejenigen Endpunkte in Betracht, die nicht „unerreichbar“, d. h. nicht von Paaren $(+FF)(-F'F')(+RR)(-R'R')$ überdeckt sind. Redet man entsprechend von „freien“ und „verdeckten“ Knoten, so erscheint es zweckmässig, auch die Knoten $F_0, F_1, F_2, \dots, F_p, F_{p+1}, R_0, R_1, R_2, \dots, R_{p+1}$ als verdeckt anzusehen.

Es kann vorkommen, dass freie Knoten vorhanden sind, die zu neuen Diagonalen vom Typus FR Anlass geben; diese neuen Diagonalen dürfen natürlich die schon vorhandenen nicht kreuzen. Sind jedoch solche freie Knoten nicht zur Verfügung, so sage ich, der Bedingungskomplex sei ein „gesättigter“. Sind passende freie Knoten vorhanden, so lässt sich der beliebig gegebene Komplex durch Hinzunahme neuer Bindungen FR allemal in einen gesättigten verwandeln. Da bei der Hinzunahme neuer Bedingungen der Zahlenwert der Farbeninvariante jedenfalls nicht grösser wird, so liefert der Übergang zu einem gesättigten Bedingungskomplex stets eine nichtnegative untere Schranke für den Wert der ursprünglichen Farbeninvariante

$N_{(L)}^i(-FR)$. Beschränkt man sich beim Sättigungsprozess auf die Hinzunahme neuer ausschliesslich negativer Bedingungen, so kann im gesättigten Bedingungskomplex kein Widerspruch auftreten, der nicht schon im ursprünglichen, ungesättigten Komplex da wäre. Ein Widerspruch könnte nämlich durch neu hinzukommende Diagonalbindungen nur dann entstehen, wenn zwei punktiert verbundene Knoten infolge der neuen Bindungen auch noch durch ausgezogene Diagonalen verbunden erscheinen; da aber die Enden punktierter Diagonalen, der oben getroffenen Übereinkunft gemäss, den verdeckten Knoten zugezählt wurden, so kann eine neue ausgezogene Diagonale FR überhaupt nicht dort münden, wo schon eine punktierte mündet.

34) Vgl. ALV § 12.

Bei der Sättigung mit ausgezogenen Diagonalen kann man sich auch auf einzelne Teilpolygone $F_j R_j R_{j+1} F_{j+1}$ beschränken.

Die Berechnung einer unteren Schranke für $\dot{N}_{(L)}^i(-FR)$ vollzieht sich nun nach folgenden Schema:

Ich nehme zunächst an, dass nur ein einziges Teilpolygon $F_j R_j R_{j+1} F_{j+1}$ überhaupt „negative“ (also ausgezogene) Diagonalen FR enthält. Man sättige dieses einzige Teilpolygon mit negativen Diagonalen FR und wende hierauf die Formeln (8) und (4) an. Dadurch erscheint dann $\dot{N}_{(L)}^i(-FR)$ als eine Summe solcher Glieder dargestellt, die allesamt formal den gemeinsamen Faktor

$$2^f \cdot \prod_u \alpha_{\psi_u} + \tau_u \cdot \prod_v \alpha_{\varphi_v} + \lambda_v - 1 \cdot \\ \cdot (H) \prod_{j=1}^p (-PR_j) \prod_{w=1}^j \{ 2 \alpha_{\varrho_w} + \mu_w - 1 (+ R_{w-1} R_w) + \\ + \alpha_{\varrho_w} + \mu_w (-R_{w-1} R_w) \} \\ \prod_{w=j+2}^{p+1} \{ 2 \alpha_{\varrho_w} + \mu_w - 1 (+ R_{w-1} R_w) + \alpha_{\varrho_w} + \mu_w (-R_{w-1} R_w) \} \quad (89)$$

enthalten. Dieser Komplex ist mit einem gewissen Polynom Q_{j+1} zu multiplizieren, in welchem jedes Glied noch mit dem Faktor $(-PR_j)(-PR_{j+1})$ versehen werden darf, weil letzterer schon in (89) auftritt. Die Berechnung von Q_{j+1} lässt sich genau nach den Methoden der vorhergehenden Paragraphen durchführen, nur ist R_0 jetzt durch R_j , und R_{s+1} durch R_{j+1} zu ersetzen. Die im § 7 implicite benutzten Forderungen $(-PR_0)(-PR_{s+1})$, die dort identisch erfüllt waren, sind hier infolge des explicite auftretenden Faktors $(-PR_j)(-PR_{j+1})$ entsprechenderweise erfüllt. Da es sich um einen gesättigten Bedingungskomplex handelt, hat man es mit einer Fundamentalecke zu tun, wenn man sich nötigenfalls eine genügende Anzahl von Bedingungen $(+FF)(-F'F')$ auf dem Fächerbogen $F_j F_{j+1}$ hinzugenommen denkt, jedoch so, dass dadurch in die früheren Bedingungen kein Widerspruch hineingetragen wird. Es ist daher Q_{j+1} gleich einem gewissen, aus dem Knotenkomplex $P, R_j, R_j^1, R_j^2, \dots, R_{j+1}$ konstituierten Diagonalaggregat:

$$Q_{j+1} = \left| X_{j+1}^1 \times X_{j+1}^2 \times \dots \times X_{j+1}^k \right|. \quad (90)$$

Die untere Schranke für $N_{(L)(-FR)}^i$ ist gleich dem formalen Produkt des Ausdrucks (89) mit dem Diagonalaggregat (90).

Nehme ich nun einen Komplex $(L)(-FR)$, wo genau 2 Teilpolygone „negative“ Diagonalbindungen aufweisen, so kann ich mir diese beiden Teilpolygone gesättigt denken und im übrigen analog verfahren. Mit Hilfe von (8) folgt dann, dass ein Diagonalaggregat vom Typus (90) sicher überall als gemeinsamer Faktor auftritt, während das übrigbleibende Polynom einem neuen Diagonalaggregat gleichwertig ist.

Durch vollständige Induktion gelangt man zu der Erkenntnis, dass eine nichtnegative untere Schranke für $N_{(L)(-FR)}^i$ erhalten wird, wenn man in dem Ausdruck (4) für

$$N_{(L)}^i = N_{(+FF)(-F'F')(+RR)(-R'R')(+F_1R_1)(+F_2R_2)\dots(+F_pR_p)}^i$$

jede Klammer

$$\left\{ 2\alpha_{\varrho_w+\mu_w-1}(+R_{w-1}R_w) + \alpha_{\varrho_w+\mu_w}(-R_{w-1}R_w) \right\}$$

durch je ein gewisses Diagonalaggregat ersetzt, sobald das betreffende Teilpolygon $F_{w-1}R_{w-1}R_wF_w$ überhaupt negative Diagonalen FR aufzunehmen imstande ist. Die betreffende Schleifenklammer wird also sozusagen in ein Diagonalaggregat „aufgelöst“. Eine solche „Auflösung“ ist aber nur dann möglich, wenn für das bezügliche Teilpolygon $\varrho_w + \mu_w > 1$ gilt, denn sonst ständen auf dem Fächerbogen $F_{w-1}F_w$ keine „freien“ Knoten für negative Diagonalbindungen FR zur Verfügung. Die Annahme $\varrho_w + \mu_w = 0$ bietet kein Interesse, da eine der beiden Forderungen $(+F_jR_j)$, $(+F_{j-1}R_{j-1})$ dann in eine Forderung vom Typus $(+RR)$ umgeformt werden kann. Bei der Annahme $\varrho_w + \mu_w = 1$ reduziert sich die Schleifenklammer auf die Forderung $(-R_{w-1}R_w)$. In den Fällen $\varrho_w + \mu_w > 1$, wo dennoch keine negative Diagonalbindung im Teilpolygon möglich ist (weil freie R -Knoten nicht vorhanden sind), gilt sicher

$$(-R_{w-1}R_w) \leq 2\alpha_{\varrho_w+\mu_w-1}(+R_{w-1}R_w) +$$

$$+ \alpha_{\varrho_w+\mu_w}(-R_{w-1}R_w)$$

Die untere Schranke wird dann jedenfalls erniedrigt, wenn man die Schleifenklammer durch $(-R_{w-1}R_w)$ ersetzt; nach dem Vo-

rigen ist diese Schranke demnach immer noch nichtnegativ, da sie der Annahme $q_w + \mu_w = 1$ entspricht.

Fasst man alles Gesagte zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{N}_{(L)}(-FR) &= 2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1} \cdot \\ &\cdot (H) \prod_{j=1}^p (-PR_j) \prod_{j=1}^{p+1} \overline{X_j^1} \times \dots \times \overline{X_j^{k_j}}. \end{aligned} \quad (91)$$

Hierbei kann für gewisse j auch $k_j = 0$ sein, das Diagonalaggregat also in Wegfall kommen. In den Bedingungskomplex (H) geht dann für jede solche Stelle die Forderung $(-R_{j-1}R_j)$ ein.

Es ist nun in (91) zu beachten, dass der Bedingungskomplex $(H) \prod (-PR_j)$ Paare enthält, welche die Knoten des Komplexes $X_1^1 X_1^2 \dots X_j^h \dots X_{p+1}^{k_{p+1}}$ untereinander trennen. Diese Trennung ist aber eine derartige, dass $X_j^1 X_j^2 \dots X_j^{k_j}$ bei jedem j stets nur untereinander nicht getrennte Knoten enthält. Man erkennt daher, dass nach Ausführung der formalen Multiplikation nirgends Farbeninvarianten mit sich „kreuzenden“ Bedingungs-paaren auftreten. In diesem Sinne ist also dennoch der Bedingungskomplex $(H) \prod (-PR_j)$ mit dem in (91) auftretenden Produkt aus Diagonalaggregaten „konform“.

Sämtliche Teilkomplexe $X_1^1, X_1^2, \dots, X_j^h, \dots, X_{p+1}^{k_{p+1}}$ in (91) besitzen offenbar einen gemeinsamen Knoten, nämlich P .

Aus (91) folgt nun

$$(H)(-PR_1)(-PR_2) \dots (-PR_p) \prod_{j=1}^{p+1} \overline{X_j^1} \times \dots \times \overline{X_j^{k_j}} \geq 0, \quad (92)$$

da der links stehende Ausdruck eine gewisse Farbeninvariante im Netz nächsthöherer Ordnung darstellt. $(H)(-PR_1) \dots (-PR_p)$ muss hierbei in der beschriebenen Weise mit den einzelnen Diagonalaggregaten des formalen Produktes konform sein; die Teilkomplexe X_j^h müssen allesamt P als gemeinsamen Knoten besitzen; der Teilkomplex X_j^1 muss die Knoten P und R_{j-1} , der Teilkomplex $X_j^{k_j}$ die Knoten P und R_j enthalten. Als Spezialfall $p=0$ ist in (92) die Relation (70) mitenthalten. (92) bildet eine weitgehende, wenn auch nicht die weiteste, Verallgemeinerung des speziellen Diagonalsatzes, wenn man die Hypothese hin-

zugefügt, dass das Gleichheitszeichen nur dann Geltung hat, falls $(H)(-PR_1)(-PR_2) \dots (PR_p)$ für sich allein stehend schon einen Widerspruch enthält. Diese Verallgemeinerung ergibt sich zwingend aus der Hypothese des allgemeinen Vierfarbensatzes.

11. Kontrollbeispiel.

Zur Verdeutlichung und Kontrolle der abgeleiteten Relationen gebe ich eine Tabelle der Vierfarbenbezeichnungen des in der Fig. 7 dargestellten Netzes zweiter Ordnung. Auf Grund der

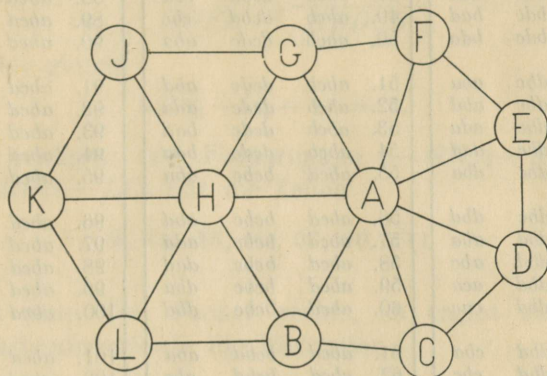


Fig. 7.

Formeln (4) und (5) ist die Gesamtzahl dieser Vierfarbenbezeichnungen gleich $4a_3a_4 + a_4a_5 = 115$.

Das Netz kann auf doppelte Weise in Fächer und Residuum gespalten werden: nimmt man (H) als Zentrum, $GJKLBH$ als Fächer, so haben wir die Zerlegung, die ich abgekürzt als „Fächer links“ bezeichnen werde; A als Zentrum, $GFEDCBA$ als Fächer, liefert die Zerlegung „Fächer rechts“. Jede Berechnung kann sowohl der einen, als auch der anderen Zerlegungsart entsprechend durchgeführt werden; die Endresultate müssen natürlich übereinstimmen. Dieses Prinzip, das ein gutes Mittel zur Kontrolle sämtlicher Rechnungen enthält, gestattet vielleicht, bei entsprechendem Ausbau, das arithmetische Vierfarbenproblem einer gruppentheoretischen Analyse zu unterwerfen, da die Funktionen in den Formeln sich stets gegenüber gewissen Vertauschungen der Argumente invariant verhalten müssen.

Tabelle der Vierfarbenbezeichnungen für
das Netz Fig. 7.

ABCD EFGH JKL				ABCD EFGH JKL				ABCD EFGH JKL			
1.	abcb	cbcd	aba	41.	abcb	debc	dad	81.	abcd	bdbd	cac
2.	abcb	cbcd	abc	42.	abcb	debc	dba	82.	abcd	bdbd	cba
3.	abcb	cbcd	aca	43.	abcb	debc	dbd	83.	abcd	bdbd	cbe
4.	abcb	cbcd	bac	44.	abcb	debd	aba	84.	abcd	bdbd	aba
5.	abcb	cbcd	bca	45.	abcb	debd	abe	85.	abcd	bdbd	abe
6.	abcb	cbdc	aba	46.	abcb	debd	aca	86.	abcd	bdbd	aca
7.	abcb	cbdc	abd	47.	abcb	debd	cac	87.	abcd	bdbd	bac
8.	abcb	cbdc	ada	48.	abcb	debd	cba	88.	abcd	bdbd	bca
9.	abcb	cbdc	bad	49.	abcb	debd	cbe	89.	abcd	bdbd	aba
10.	abcb	cbdc	bda	50.	abcb	debd	abd	90.	abcd	bdbd	abe
11.	abcb	cbdc	aba	51.	abcb	debd	abd	91.	abcd	bdbd	aca
12.	abcb	cbdc	abd	52.	abcb	debd	ada	92.	abcd	bdbd	bac
13.	abcb	cbdc	ada	53.	abcb	debd	bad	93.	abcd	bdbd	bca
14.	abcb	cbdc	dad	54.	abcb	debd	bda	94.	abcd	bdbd	aba
15.	abcb	cbdc	dba	55.	abcb	debd	aba	95.	abcd	bdbd	abd
16.	abcb	cbdc	dbd	56.	abcb	debd	abd	96.	abcd	bdbd	ada
17.	abcb	cbdc	aba	57.	abcb	debd	ada	97.	abcd	bdbd	bad
18.	abcb	cbdc	abc	58.	abcb	debd	dad	98.	abcd	bdbd	bda
19.	abcb	cbdc	aca	59.	abcb	debd	dba	99.	abcd	bdbd	aba
20.	abcb	cbdc	cac	60.	abcb	debd	dbd	100.	abcd	bdbd	abd
21.	abcb	cbdc	cba	61.	abcb	debd	aba	101.	abcd	bdbd	ada
22.	abcb	cbdc	cbe	62.	abcb	debd	abc	102.	abcd	bdbd	dad
23.	abcb	cbdc	aba	63.	abcb	debd	aca	103.	abcd	bdbd	dba
24.	abcb	cbdc	abc	64.	abcb	debd	cac	104.	abcd	bdbd	dbd
25.	abcb	cbdc	aca	65.	abcb	debd	cba	105.	abcd	bdbd	aba
26.	abcb	cbdc	bac	66.	abcb	debd	cbe	106.	abcd	bdbd	abc
27.	abcb	cbdc	bca	67.	abcb	debd	aba	107.	abcd	bdbd	aca
28.	abcb	cbdc	aba	68.	abcb	debd	abd	108.	abcd	bdbd	cac
29.	abcb	cbdc	abc	69.	abcb	debd	ada	109.	abcd	bdbd	cba
30.	abcb	cbdc	aca	70.	abcb	debd	bad	110.	abcd	bdbd	cbe
31.	abcb	cbdc	bac	71.	abcb	debd	bda	111.	abcd	bdbd	aba
32.	abcb	cbdc	bca	72.	abcb	debd	aba	112.	abcd	bdbd	abc
33.	abcb	cbdc	aba	73.	abcb	debd	abd	113.	abcd	bdbd	aca
34.	abcb	cbdc	abd	74.	abcb	debd	ada	114.	abcd	bdbd	bac
35.	abcb	cbdc	ada	75.	abcb	debd	dad	115.	abcd	bdbd	bca
36.	abcb	cbdc	bad	76.	abcb	debd	dba				
37.	abcb	cbdc	bda	77.	abcb	debd	dbd				
38.	abcb	cbdc	aba	78.	abcb	debd	aba				
39.	abcb	cbdc	abd	79.	abcb	debd	abc				
40.	abcb	cbdc	ada	80.	abcb	debd	aca				

In der Tabelle bedeuten a, b, c, d die 4 Farben. Die Bezeichnungsarten sind in 115 Zeilen gegeben und entsprechend durchnummeriert. Als Ausgangsmasche mit fixierter Bezeichnung³⁵⁾ dient ABC .

Ich greife einige Beispiele heraus.

Erstes Beispiel:

$$\overset{2}{N}_{(- GK)(- KF)(- KE)(- LE)(- LD)(- LC)} \cdot$$

Nimmt man den Fächer links, so ist nach (57) diese Zahl gleich

$$a_2 \cdot \left| \overline{HGFE} \times \overline{HEDCB} \right|,$$

also nach (86) gleich

$$a_2(a_3 + a_4 - 1) = 7.$$

In der Tat genügen den Forderungen $(- GK)(- KF)(- KE)(- LE)(- LD)(- LC)$ nur die Zeilen

$$9, 14, 23, 50, 57, 80, 111$$

der Tabelle.

Nimmt man den Fächer rechts, so ergibt sich für die gesuchte Farbeninvariante die Reduktion

$$(- GK) \left| \overline{ABL} \times \overline{AL} \times \overline{ALK} \times \overline{AKG} \right|.$$

Hierin bezieht sich das Diagonalaggregat auf den Fundamentalwert $\{2, 0, 1, 2\}$ (in der Symbolik des § 9). Nach (84) ist dieser Fundamentalwert aber gleich

$$\begin{aligned} \{2, 0, 1, 2\} &= 4 \cdot \{2, 0, 1\} + \{2, 0, 2\} - \{2, 0, 3\} = \\ &= 4 \cdot \{2, 1\} + 4 \cdot \{2, 0\} + \{2, 1\} - \{2, 2\} + \\ &\quad - 4 \cdot \{2, 0\} - 3 \cdot \{2, 1\} + 2 \cdot \{2, 2\} = \\ &= 2 \cdot \{2, 1\} + \{2, 2\} = \\ &= 2(a_2 + a_1 - 1) + (a_2 + a_2 + 3) = 7, \end{aligned}$$

wie zu erwarten war.

Zweites Beispiel:

$$\overset{2}{N}_{(+ KE)(- JF)(- LD)(- LC)} \cdot$$

35) ALV § 2.

Nimmt man den Fächer links, so ergibt sich hierfür nach (91) die Reduktion

$$N_{(+KE)(-JF)(-LD)(-LC)}^i = (-HE) \left[\overline{HGFE} \right] \left[\overline{HEDCB} \right].$$

Dieses formale Produkt lässt sich in eine Summe von Diagonalaggregaten transformieren. Ich will diese Transformation sofort in etwas allgemeinerer Gestalt durchführen. Es sei

$$\left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a} \right] (-PR) \left[\overline{Y_1 \times \dots \times Y_b} \right]$$

zu transformieren, wobei P und R die beiden den Teilkomplexen X_a und Y_1 gemeinsamen Knoten bedeuten. Mit Hilfe der Relation

$$(-PR) = 3E - \left[\overline{PR} \right] \quad (93)$$

findet man, unter Verwendung von (51):

$$\begin{aligned} & \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a} \right] (-PR) \left[\overline{Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] = \\ & = 3 \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a} \right] \left[\overline{Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] + \\ & - \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a} \right] \left[\overline{PR} \right] \left[\overline{Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] = \\ & = 3 \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a \times Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] + \\ & + 3 \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] + \\ & - \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a} \right] \left[\overline{PR \times Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] + \\ & - \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a} \right] \left[\overline{Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] = \\ & = 2 \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a \times Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] + \\ & + 2 \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] + \\ & - \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a \times PR \times Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] + \\ & - \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a \times Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] = \\ & = 2 \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] + \\ & + \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a \times Y_1 \times \dots \times Y_b} \right] + \\ & - \left[\overline{X_1 \times \dots \times X_a \times PR \times Y_1 \times \dots \times Y_b} \right]. \quad (94) \end{aligned}$$

Als Spezialfall von (94) ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} & (-HE) \overline{HGFE} \overline{HEDCB} = \\ & = 2 \overline{HGFEDCB} + \overline{HGFE \times HEDCB} + \\ & - \overline{HGFE \times HE \times HEDCB}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (79), (86) und (84) folgt hiernach:

$$\begin{aligned} & (-HE) \overline{HGFE} \overline{HEDCB} = 2 a_6 + (a_3 + a_4 - 1) + \\ & - \left[4 a_3 (a_3 + a_0 - 1) + a_4 (a_3 + a_1) - a_4 (a_3 + a_2 - 1) \right] = \\ & = 42 + 7 - 29 = 20. \end{aligned}$$

Die Tabelle zeigt tatsächlich genau 20 Zeilen, die der Forderung $(+KE) (-JF) (-LD) (-LC)$ genügen, nämlich

$$\begin{array}{ccccccc} 3, & 19, & 25, & 27, & 35, & 40, & 52, & 54, & 55, & 59, & 61, & 67, & 72, & 78, & 82, \\ & & & & & 84, & 91, & 107, & 113, & 115. \end{array}$$

Wird der Fächer rechts gewählt, so folgt nach (91), (95), (84), (86):

$$\begin{aligned} & \overset{2}{N}_{(+KE)(-JF)(-LD)(-LC)} = (-AK) \overline{AGJK} \overline{AKL \times ALB} = \\ & = 2 \overline{AGJKL \times ALB} + \overline{AGJK \times AKL \times ALB} + \\ & - \overline{AGJK \times AK \times AKL \times ALB} = \\ & = 2(a_4 + a_2 + 3) + \left[4 a_1 (a_3 + a_1) + a_2 (a_3 + a_2 - 1) - a_2 (a_3 + a_3) \right] + \\ & - \left[4 a_1 (a_3 + a_1) + a_2 (4 a_1 (a_3 + a_0 - 1) + a_2 (a_3 + a_1) - a_2 (a_3 + a_2 - 1)) + \right. \\ & \left. - a_2 (4 a_2 (a_3 + a_0 - 1) + a_3 (a_3 + a_1) - (a_3 - 1) (a_3 + a_2 - 1)) \right] = \\ & = 18 + 13 - 11 = 20. \end{aligned}$$

Dieses Resultat stimmt naturgemäss mit dem früher gefundenen überein.

Drittes Beispiel:

$$\overset{2}{N}_{(+JF)(+LE)(-EC)}.$$

Nimmt man den Fächer links, so ist nach (4) und (5), da $(+FE) = 0$,

$$\begin{aligned}
 \overset{i}{N}_{(+JF)(+LE)(-EC)} &= \\
 &= (-EC)(-HF)(-HE)(-GF)(-FE)(-EB) = \\
 &= a_2 \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_2 = 1.
 \end{aligned}$$

Tatsächlich existiert nur eine Vierfarbenbezeichnung, die der Forderung $(+JF)(+LE)(-EC)$ Folge leistet, nämlich Zeile 36.

Für den Fächer rechts hat man

$$\begin{aligned}
 \overset{2}{N}_{(+JF)(+LE)(-EC)} &= \\
 &= a_2 \cdot (-AJ)(-AL)(-GJ)(-JL)(-LB) = \\
 &= a_2 \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_2 = 1,
 \end{aligned}$$

wie früher.

Viertes Beispiel:

$$\overset{2}{N}_{(+KD)(-JF)(-LC)}.$$

Wird der Fächer links genommen, so folgt:

$$\begin{aligned}
 \overset{2}{N}_{(+KD)(-JF)(-LC)} &= (-HD) \overline{HGFD} \overline{HDCB} = \\
 &= 2 \overline{HGFD} \overline{HDCB} + \overline{HGFD} \times \overline{HDCB} - \overline{HGFD} \times \overline{HD} \times \overline{HDCB}.
 \end{aligned}$$

Der Fall liegt hier insofern komplizierter, als die Diagonalaggregate sich nicht mehr auf eine Fundamentalecke beziehen. Auf Grund der Fundamenteigenschaft der Vierfarbenfunktionen³⁶⁾ findet man:

$$\begin{aligned}
 \overline{HGFD} \overline{HDCB} &= 2 \cdot \{5\} + \{6\} = 2 a_4 + (a_5 + 1) = 22, \\
 \overline{HGFD} \times \overline{HDCB} &= 2 \cdot \{2, 3\} + \{3, 3\} = \\
 &= 2 (a_2 + a_3 - 1) + (a_3 + a_3) = 12.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{HGFD} \times \overline{HD} \times \overline{HDCB} &= 2 \cdot \{2, 0, 3\} + \{3, 0, 3\} = \\
 &= 2 \cdot [4 a_1 \{0, 3\} + a_2 \{1, 3\} - a_2 \{2, 3\}] + \\
 &+ [4 a_2 \{0, 3\} + a_3 \{1, 3\} - (a_3 - 1) \{2, 3\}] = \\
 &= 12 (a_0 + a_3 - 1) + 5 (a_1 + a_3) - 4 (a_2 + a_3 - 1) = 32.
 \end{aligned}$$

36) VF § 3, Formel (18).

Mithin ist

$$\overset{2}{N}_{(+KD)(-JF)(-LC)} = 2 \cdot 22 + 12 - 32 = 24.$$

Diese 24 Vierfarbenbezeichnungen entsprechen den Zeilen

1, 6, 7, 11, 12, 17, 21, 23, 28, 33, 34, 38, 39, 42, 43, 44, 50, 51,
57, 69, 71, 74, 96, 101

der Tabelle.

Wählt man den Fächer rechts, so folgt auf Grund ähnlicher Überlegungen:

$$\begin{aligned} \overset{2}{N}_{(+KD)(-JF)(-LC)} &= 2(-AK)(-KG) \left| \overline{AKLB} \right| + \\ &\quad + (-AK) \left| \overline{AGJK} \right| \left| \overline{AKLB} \right| = \\ &= 2(-AK)(-KG) \left| \overline{AKLB} \right| + 2 \left| \overline{AGJCLB} \right| + \\ &\quad + \left| \overline{AGJK} \times \overline{AKLB} \right| - \left| \overline{AGJK} \times \overline{AK} \times \overline{AKLB} \right| = \\ &= 2 a_2 a_2 (a_3 + 1) + 2 (a_5 + 1) + (a_3 + a_3) + \\ &\quad - \left[4 a_2 (a_3 + a_0 - 1) + a_3 (a_3 + a_1) - (a_3 - 1) (a_3 + a_2 - 1) \right] = \\ &= 8 + 24 + 6 - 14 = 24, \end{aligned}$$

im Einklang mit dem früheren.

12. Der allgemeine Diagonalensatz für Netze erster Ordnung.

Ich will nun zeigen, dass für irreduzible Normalnetze erster Ordnung eine ganz allgemeine Formulation des Diagonalensatzes sicher Geltung hat.

Zur deutlicheren Veranschaulichung der Lagenverhältnisse denke ich mir den Rand des irreduziblen Normalnetzes erster Ordnung auf ein Bildpolygon abgebildet (Fig. 8). Dieses Bildpolygon sei durch eine Folge sich nicht kreuzender Diagonalen $P_1R_1, P_2R_2, \dots$ in eine Folge von Teilpolygonen zerlegt (in der Figur sind hierzu ausgezogene Diagonalen verwendet und die entstandenen Teilpolygone römisch numeriert). Jede solche

Diagonale $P_s R_s$ möge eine Forderung ($\leftarrow P_s R_s$) im Netze ver-
sinnlichen. Die Numeration der Teilpolygone soll der natür-
lichen Reihenfolge entsprechen, so dass die Nummer $j+1$ dem
Teilpolygon $P_j R_j R_{j+1} P_{j+1}$ zukommt. Ein jedes Teilpolygon
wird im allgemeinen an der Begrenzung zwei getrennte Randbo-
genstücke des Bildpolygons aufweisen. In die einzelnen Teilpoly-
gone seien nun noch neue, punktierte Diagonalen eingezeichnet,
jedoch so, dass die beiden Enden einer jeden solchen punktierten
Diagonale auf verschiedenen Randbogenstücken des Teil-

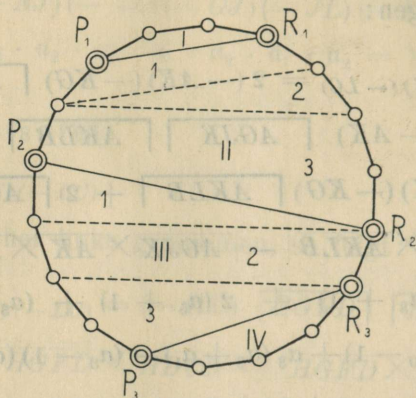


Fig. 8.

polygons zu liegen kommen; auch dürfen keine zwei Diagonalen
sich kreuzen. Die ursprünglichen, primären Teilpolygone zerfallen
nach Hinzunahme der punktierten Diagonalen in sekundäre Teil-
polygone, die sich auf natürliche Weise, in demselben
Sinne wie die primären, numerieren lassen (in der Figur ist
für die sekundären Teilpolygone die arabische Numeration
benutzt).

Jedem sekundären Teilpolygon entsprechend sei ein Teil-
komplex X_j^s von Randknoten gewählt, wobei j die Nummer des
primären, s die Nummer des in ihm enthaltenen sekundären
Teilpolygons bedeuten möge; es soll X_j^s ausschliesslich aus
solchen Knoten bestehen, welche zum Rande des betreffenden
sekundären Teilpolygons gehören, — sämtliche Enden der beiden
begrenzenden Diagonalen sollen aber notwendig in X_j^s eingehen,

sobald dieser Teilkomplex überhaupt einen Knoten enthält. Das Diagonalaggregat

$$|X_j^1 \times X_j^2 \times \dots \times X_j^{k_j}|,$$

wo k_j die Anzahl der im j -ten primären Teilpolygon enthaltenen sekundären Teilpolygone bedeutet, ist dann gewissermassen in das j -te primäre Teilpolygon „eingespannt“. Es kann speziell k_j gleich 1 oder gleich 0 sein; im ersteren Falle sind im betreffenden primären Teilpolygon überhaupt keine punktierten Diagonalen gezogen, und an die Stelle des Diagonalaggregats tritt ein Diagonalpolynom; im zweiten Falle ist auch ein Diagonalpolynom nicht in das Teilpolygon eingespannt, — ich sage dann, das betreffende Teilpolygon sei von Diagonalaggregaten „frei“. Nichtfreie Teilpolygone sind „besetzt“. Unter den besetzten Teilpolygonen hat eines die kleinste, ein anderes die grösste Nummer; diesen 2 primären Teilpolygonen entsprechen die „Rand-Diagonalaggregate“, den übrigen dagegen „innere“ Diagonalaggregate. In jedem der Rand-Diagonalaggregate lässt sich je ein Teilkomplex als „Rand-Teilkomplex“ auszeichnen: sind

$$|X_a^1 \times \dots \times X_a^{k_a}| \text{ und } |X_b^1 \times \dots \times X_b^{k_b}|$$

die Rand-Diagonalaggregate ($a < b$), so bedeuten X_a^1 und $X_b^{k_b}$ die beiden Rand-Teilkomplexe. Alle übrigen Teilkomplexe sind „innere“.

Es möge (H) irgendeinen Bedingungskomplex darstellen, dessen Paare weder die Knoten der Teilkomplexe, noch die Knoten $P_1, P_2, \dots, R_1, R_2, \dots$ untereinander trennen. Nach Hinzunahme von (H) ergibt sich im Netz erster Ordnung in jedem Teilkomplex ein System von Koordinaten η_t , von denen jede gleich ist einer Summe aus reduzierter Maschenzahl und Charakteristik, genau wie im § 9. Ausserdem gehört auch noch zu jedem frei gebliebenen Teilpolygon eine Summe π_j aus reduzierter Maschenzahl und Charakteristik (j ist hierbei die Nummer des betreffenden primären Teilpolygons). Es brauchen hierbei aber nur „innere“ freie Teilpolygone berücksichtigt zu werden, d. h. nur solche, wo man bei einer genügenden Vergrößerung, und ebenso bei einer genügenden Verkleinerung der Nummer, sicher auf mindestens je ein besetztes primäres Teilpoly-

gon stösst. Die übrigen freien Teilpolygone liegen „ausserhalb“ der Besetzung; alle auf ausserhalb liegende Teilpolygone bezüglichlichen Bedingungen können in (H) aufgenommen werden.

Ich berechne nun zunächst

$$(H) (-P_1 R_1) (-P_2 R_2) \dots (-P_j R_j) \dots \prod_j \left[\overline{X_j^1} \times \overline{X_j^2} \times \dots \times \overline{X_j^{k_j}} \right]. \quad (95)$$

Zerlegt man dieses formale Produkt in diejenige Summe von Farbeninvarianten, die es ja eigentlich abkürzend symbolisiert, so zeigt sich bei Anwendung von (5) auf jede einzelne dieser Farbeninvarianten zufolge (H) in jedem Summanden ein gemeinschaftlicher Faktor

$$2^f \cdot \prod a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod a_{\varphi_v + \lambda_v - 1}.$$

Hebt man diesen Faktor heraus, so verbleibt noch eine Summe $W_{\eta, \pi}$, die, wie man auf Grund von Überlegungen, wie sie am Anfang des § 9 durchgeführt sind, erkennt, sich als eine Vierfarbenfunktion der Argumente η_t, π_j erweist. Man braucht daher $W_{\eta, \pi}$ nur für die Fundamentalecken des Gitters (η, π) zu berechnen.

Denkt man sich die Koordinate π_j gewissermassen der Diagonale $P_j R_j$ zugeordnet, so erscheint es als zweckmässig, eine solche Koordinate jeder Diagonale $P_j R_j$ entsprechen zu lassen, wobei aber im Falle, wo das Teilpolygon $P_j R_j R_{j+1} P_{j+1}$ besetzt ist, das betreffende π_j gleich 0 angenommen werden muss. Hierdurch wird eine einheitliche Auffassung erzielt, deren Bedeutung zu Tage tritt, sobald man sich an die Berechnung der Fundamentalwerte von $W_{\eta, \pi}$ macht. Ist nämlich in irgendeiner Fundamentalecke $\pi_j = 1$, so hat man entweder $(+R_j R_{j+1}) = 0$, $(-P_j P_{j+1}) = 0$, oder aber $(-R_j R_{j+1}) = 0$, $(+P_j P_{j+1}) = 0$, mithin

$$\begin{aligned} \text{entweder: } & (-P_j R_j) (-P_{j+1} R_{j+1}) (-R_j R_{j+1}) = \\ & = (-P_j R_j) (-P_j R_{j+1}) \left[\overline{P_j R_j R_{j+1}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder: } & (-P_j R_j) (-P_{j+1} R_{j+1}) (-P_j P_{j+1}) = \\ & = (-P_j R_j) (-P_{j+1} R_j) \left[\overline{R_j P_{j+1} P_j} \right]. \end{aligned}$$

Führt man dies in (95) ein, so erscheint nun das $(j+1)$ -te primäre Teilpolygon, das vorhin als frei vorausgesetzt war, jetzt von einem Diagonalpolynom, nämlich $\overline{P_j R_j R_{j+1} P_{j+1}}$, was mit $\overline{P_j R_j R_{j+1}}$ resp. $\overline{R_j P_{j+1} P_j}$ gleichbedeutend ist, besetzt. Durch diesen Kunstgriff können sämtliche freie Teilpolygone eliminiert werden, — damit erreicht man $\pi_j = 0$ bei jedem j . M. a. W., es genügt die Berechnung der Fundamentalwerte bei der Annahme, dass sämtliche $\pi_j = 0$. Für die η_t genügt es $\eta_t = 1$ anzunehmen (vgl. § 9).

Ich beginne nun mit dem einfachen Spezialfall, wo nur zwei besetzte Teilpolygone auftreten. Es sei also, in einer passend modifizierten Bezeichnung, der Wert von

$$\overline{X_1 \times \dots \times X_a} \quad (-PR) \quad \overline{Y_1 \times \dots \times Y_b}$$

in der Fundamentalecke $\eta_t = 1$, $\pi_j = 0$ gesucht. Ich halte mich an die Symbolik des § 9, verwende aber statt der dort benutzten Zeichen $e_1, e_2, \dots$ die Zeichen $x_1, x_2, \dots, x_a, y_1, y_2, \dots, y_b$, entsprechend den Teilkomplexen $X_1, X_2, \dots, X_a, Y_1, Y_2, \dots, Y_b$. Es bedeutet x_s die Anzahl der zum Teilkomplex X_s gehörigen Koordinaten η_t , wenn $\overline{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_a}$ alleinstehend ist; analog ist die Bedeutung von y_s .

Die arithmetische Multiplikation der Fundamentalwerte zweier Diagonalaggregate soll durch einen Punkt angedeutet werden, dagegen will ich zur Kennzeichnung der formalen Multiplikation mit zu berücksichtigender „Zwischenbedingung“ $(-PR)$ das Symbol $\times 0 \times$ verwenden. Ich schreibe also $\{x_1, \dots, x_a\} \times 0 \times \{y_1, \dots, y_b\}$ im Sinne von $\overline{X_1 \times \dots \times X_a} \quad (-PR) \quad \overline{Y_1 \times \dots \times Y_b}$ für die Fundamentalecke.

Nach (94) und (78) ist nun

$$\begin{aligned} & \{x_1, \dots, x_a\} \times 0 \times \{y_1, \dots, y_b\} = \\ & = 2 \cdot \{x_1, \dots, x_{a-1}, x_a + y_1 - 2, y_2, \dots, y_b\} + \\ & + \{x_1, \dots, x_{a-1}, x_a - 1, y_1 - 1, y_2, \dots, y_b\} + \\ & - \{x_1, \dots, x_{a-1}, x_a - 1, 0, y_1 - 1, y_2, \dots, y_b\}. \quad (96) \end{aligned}$$

Bedeutet $s_1, s_2, \dots, s_p$ eine beliebige Menge nichtnegativer ganzer Zahlen, so folgt durch wiederholte Anwendung der Reduktion (84):

$$\begin{aligned} & \{s_1, \dots, s_p, y_2, y_3, \dots, y_b\} = \\ & = K_0 \cdot \{s_1, \dots, s_p\} + K_1 \cdot \{s_1, \dots, s_p + 1\} + \\ & \quad + K_2 \cdot \{s_1, \dots, s_p + 2\}, \end{aligned} \quad (97)$$

wobei K_0, K_1, K_2 gewisse Koeffizienten darstellen. Ferner folgt aus (83) durch vollständige Induktion:

$$\begin{aligned} & \{s_1, \dots, s_p, t + u - 2\} = \\ & 2 \cdot (\zeta_{u-2} - a_{u-2}) \cdot \{s_1, \dots, s_p, t - 1\} + \zeta_{u-1} \cdot \{s_1, \dots, s_p, t\} + \\ & \quad + (a_{u-1} - \zeta_{u-1}) \cdot \{s_1, \dots, s_p, t + 1\}. \end{aligned} \quad (98)$$

Zur Vereinfachung der Rechnung verwende ich die Abkürzungen

$$\begin{aligned} K_0 a_s + K_1 a_{s+1} + K_2 a_{s+2} &= \sum_t K_t a_{s+t} = A_s \\ K_0 \zeta_s + K_1 \zeta_{s+1} + K_2 \zeta_{s+2} &= \sum_t K_t \zeta_{s+t} = Z_s. \end{aligned} \quad (99)$$

Mit Hilfe von (97), (98), (99) findet man dann:

$$\begin{aligned} & \{x_1, \dots, x_{a-1}, x_a + y_1 - 2, y_2, \dots, y_b\} = \\ & = K_0 \cdot \{x_1, \dots, x_a + y_1 - 2\} + K_1 \cdot \{x_1, \dots, x_a + y_1 - 1\} + \\ & \quad + K_2 \cdot \{x_1, \dots, x_a + y_1\} = \\ & = K_0 \cdot [2 \cdot (\zeta_{y_1-2} - a_{y_1-2}) \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + \\ & \quad + \zeta_{y_1-1} \cdot \{x_1, \dots, x_a\} + (a_{y_1-1} - \zeta_{y_1-1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a + 1\}] + \\ & \quad + K_1 \cdot [2 \cdot (\zeta_{y_1-1} - a_{y_1-1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + \zeta_{y_1} \cdot \{x_1, \dots, x_a\} + \\ & \quad + (a_{y_1} - \zeta_{y_1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a + 1\}] + \\ & \quad + K_2 \cdot [2 \cdot (\zeta_{y_1} - a_{y_1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + \\ & \quad + \zeta_{y_1+1} \cdot \{x_1, \dots, x_a\} + (a_{y_1+1} - \zeta_{y_1+1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a + 1\}] = \\ & = 2 \cdot (Z_{y_1-2} - A_{y_1-2}) \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + \\ & \quad + Z_{y_1-1} \cdot \{x_1, \dots, x_a\} + (A_{y_1-1} - Z_{y_1-1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a + 1\}. \end{aligned}$$

Analog findet man mit Hilfe von (84):

$$\begin{aligned}
 & \{x_1, \dots, x_{a-1}, x_a - 1, y_1 - 1, y_2, \dots, y_b\} = \\
 &= K_0 \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1, y_1 - 1\} + K_1 \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1, y_1\} + \\
 & \quad + K_2 \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1, y_1 + 1\} = \\
 &= K_0 \cdot [4 a_{y_1-2} \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + a_{y_1-1} \cdot \{x_1, \dots, x_a\} + \\
 & \quad + (a_{y_1-1} - \xi_{y_1-1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a + 1\}] + \\
 & \quad + \dots = \\
 &= 4 A_{y_1-2} \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + A_{y_1-1} \cdot \{x_1, \dots, x_a\} + \\
 & \quad - (A_{y_1-1} - Z_{y_1-1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a + 1\},
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \{x_1, \dots, x_{a-1}, x_a - 1, 0, y_1 - 1, y_2, \dots, y_b\} = \\
 &= 4 A_{y_1-2} \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1, 0\} + A_{y_1-1} \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1, 1\} + \\
 & \quad - (A_{y_1-1} - Z_{y_1-1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1, 2\} = \\
 &= 8 A_{y_1-2} \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + A_{y_1-1} \cdot \{x_1, \dots, x_a\} + \\
 & \quad - (A_{y_1-1} - Z_{y_1-1}) \cdot [4 \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + \\
 & \quad + \{x_1, \dots, x_a\} - \{x_1, \dots, x_a + 1\}] = \\
 &= 4 \cdot (2 A_{y_1-2} - A_{y_1-1} + Z_{y_1-1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + \\
 &+ Z_{y_1-1} \cdot \{x_1, \dots, x_a\} + (A_{y_1-1} - Z_{y_1-1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a + 1\}.
 \end{aligned}$$

Der zuletzt gefundene Ausdruck lässt sich einfacher schreiben, da wegen (85)

$$\begin{aligned}
 & 2 A_{y_1-2} - A_{y_1-1} + Z_{y_1-1} = \\
 &= \sum_t K_t (2 a_{y_1+t-2} - a_{y_1+t-1} + \xi_{y_1+t-1}) = \\
 &= \sum_t K_t (\varepsilon^{y_1+t-1} + \xi_{y_1+t-1}) = \\
 &= \sum_t K_t \xi_{y_1+t-2} = Z_{y_1-2}.
 \end{aligned}$$

Es ist demnach

$$\begin{aligned} & \{x_1, \dots, x_{a-1}, x_a - 1, 0, y_1 - 1, y_2, \dots, y_b\} = \\ & = 4 Z_{y_1-2} \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + Z_{y_1-1} \cdot \{x_1, \dots, x_a\} + \\ & \quad - (Z_{y_1-1} - A_{y_1-1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a + 1\}, \end{aligned}$$

d. h. es entsteht

$$\{x_1, \dots, x_a - 1, 0, y_1 - 1, \dots, y_b\}$$

aus

$$\{x_1, \dots, x_a - 1, y_1 - 1, \dots, y_b\}$$

durch Vertauschung von A mit Z .

Werden die gefundenen Ausdrücke nun in (96) eingeführt, so folgt:

$$\begin{aligned} & \{x_1, \dots, x_a\} \times 0 \times \{y_1, \dots, y_b\} = \\ & [4 Z_{y_1-2} - 4 A_{y_1-2} + 4 A_{y_1-2} - 4 Z_{y_1-2}] \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + \\ & \quad + [2 Z_{y_1-1} + A_{y_1-1} - Z_{y_1-1}] \cdot \{x_1, \dots, x_a\} + \\ & \quad + [2 A_{y_1-1} - 2 Z_{y_1-1} - A_{y_1-1} + Z_{y_1-1} - A_{y_1-1} + Z_{y_1-1}] \cdot \\ & \quad \cdot \{x_1, \dots, x_a + 1\} = \\ & = (A_{y_1-1} + Z_{y_1-1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a\}. \end{aligned} \quad (100)$$

Nun ist aber nach (97) und (79):

$$\begin{aligned} \{y_1, \dots, y_b\} &= K_0 \cdot \{y_1\} + K_1 \cdot \{y_1 + 1\} + K_2 \cdot \{y_1 + 2\} = \\ &= K_0 \cdot (a_{y_1-1} + \xi_{y_1-1}) + K_1 \cdot (a_{y_1} + \xi_{y_1}) + \\ & \quad + K_2 \cdot (a_{y_1+1} + \xi_{y_1+1}) = A_{y_1-1} + Z_{y_1-1}; \end{aligned}$$

es folgt demnach aus (100):

$$\begin{aligned} & \{x_1, \dots, x_a\} \times 0 \times \{y_1, \dots, y_b\} = \\ & = \{x_1, \dots, x_a\} \cdot \{y_1, \dots, y_b\}, \end{aligned} \quad (101)$$

m. a. W., die Symbole $\times 0 \times$ und $\cdot$ sind gleichwertig.

Die Identität (101) lässt sich sofort für den Fall beliebig vieler Faktoren verallgemeinern. Man findet für den Fundamentalwert von

$$\overline{X_1^1 \times \dots \times X_1^a} \quad (-P_1 R_1) \quad \overline{X_2^1 \times \dots \times X_2^b} \\ (-P_2 R_2) \quad \overline{X_3^1 \times \dots \times X_3^c}$$

mit Hilfe von (101) und (96), in leicht verständlicher Bezeichnung,

$$\{x_1^1, \dots, x_1^a\} \times 0 \times \{x_2^1, \dots, x_2^b\} \times 0 \times \{x_3^1, \dots, x_3^c\} = \\ = \{x_1^1, \dots, x_1^a\} \cdot \{x_2^1, \dots, x_2^b\} \cdot \{x_3^1, \dots, x_3^c\},$$

und durch vollständige Induktion endlich

$$\{x_1^1, \dots, x_1^{k_1}\} \times 0 \times \{x_2^1, \dots, x_2^{k_2}\} \times 0 \times \dots \times 0 \times \{x_p^1, \dots, x_p^{k_p}\} = \\ = \{x_1^1, \dots, x_1^{k_1}\} \cdot \{x_2^1, \dots, x_2^{k_2}\} \cdot \dots \cdot \{x_p^1, \dots, x_p^{k_p}\}. \quad (102)$$

Durch (102) ist das Problem der Berechnung des Ausdrucks (95) gelöst.

Geht man nun einen Schritt weiter und betrachtet Ausdrücke, die in der Struktur (95) analog sind, mit dem einzigen Unterschied, dass anstatt $(-P_s R_s)$ stellenweise oder auch überall $(+P_s R_s)$ auftritt, so bereitet die Berechnung der Fundamentalwerte nach allen getroffenen Vorbereitungen keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr. Aus (51) und (94) ergibt sich:

$$\overline{X_1 \times \dots \times X_a} \quad (+PR) \quad \overline{Y_1 \times \dots \times Y_b} = \\ = \overline{X_1 \times \dots \times X_b} \quad \overline{Y_1 \times \dots \times Y_b} + \\ - \overline{X_1 \times \dots \times X_a} \quad (-PR) \quad \overline{Y_1 \times \dots \times Y_b} = \\ = \overline{X_1 \times \dots \times X_a \times PR \times Y_1 \times \dots \times Y_b} + \\ - \overline{X_1 \times \dots \times X_a Y_1 \times \dots \times Y_b}. \quad (103)$$

Deutet das Symbol $\times 1 \times$ die formale Multiplikation der Fundamentalwerte unter Berücksichtigung der Zwischenbedingung $(+PR)$ an, so folgt hiernach:

$$\begin{aligned}
& \{x_1, \dots, x_a\} \times 1 \times \{y_1, \dots, y_b\} = \\
& = \{x_1, \dots, x_a - 1, 0, y_1 - 1, \dots, y_b\} + \\
& \quad - \{x_1, \dots, x_a + y_1 - 2, \dots, y_b\} = \\
& = \left\{ 4 Z_{y_1-2} \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + Z_{y_1-1} \cdot \{x_1, \dots, x_a\} + \right. \\
& \quad - (Z_{y_1-1} - A_{y_1-1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a + 1\} + \\
& \quad - 2 (Z_{y_1-2} - A_{y_1-2}) \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} + \\
& \quad \left. - Z_{y_1-1} \cdot \{x_1, \dots, x_a\} - (A_{y_1-1} - Z_{y_1-1}) \cdot \{x_1, \dots, x_a + 1\} \right\} = \\
& = 2 (A_{y_1-2} + Z_{y_1-2}) \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} = \\
& = 2 \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} \cdot \{y_1 - 1, \dots, y_b\}. \quad 104
\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}
& \{x_1^1, \dots, x_1^{k_1}\} \times 1 \times \{x_2^1, \dots, x_2^{k_2}\} \times 1 \times \dots \times 1 \times \{x_p^1, \dots, x_p^{k_p}\} = \\
& = 2^{p-1} \cdot \{x_1^1, \dots, x_1^{k_1} - 1\} \cdot \{x_2^1 - 1, \dots, x_2^{k_2} - 1\} \dots \\
& \quad \dots \{x_p^1 - 1, \dots, x_p^{k_p}\}. \quad (105)
\end{aligned}$$

Es lässt sich (105) mit (102) kombinieren. Versteht man unter $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$ Symbole, die unabhängig voneinander die Werte 0 oder 1 haben, und setzt $\sigma_0 = \sigma_p = 0$, so folgt mittels vollständiger Induktion aus (105) und (102):

$$\begin{aligned}
& \{x_1^1, \dots, x_1^{k_1}\} \times \sigma_1 \times \{x_2^1, \dots, x_2^{k_2}\} \times \sigma_2 \times \dots \\
& \quad \dots \times \sigma_{p-1} \times \{x_p^1, \dots, x_p^{k_p}\} = \\
& = 2^{\zeta_{\sigma_1} + \zeta_{\sigma_2} + \dots + \zeta_{\sigma_{p-1}}} \cdot \prod_{w=1}^p \{x_w^1 - \zeta_{\sigma_{w-1}}, x_w^2, \dots, x_w^{k_w-1}, x_w^{k_w} - \zeta_{\sigma_w}\}. \quad (106)
\end{aligned}$$

Hätte man hier die linke Seite noch formal mit einem Bedingungskomplex (H) zu multiplizieren, so wäre rechts der entsprechende arithmetische Faktor

$$\prod_u a_{\psi_u + \tau_u} \cdot \prod_v a_{\varphi_v + \lambda_v - 1}$$

hinzuzunehmen.

Die arithmetischen Faktoren auf der rechten Seite von (106) sind allesamt jedenfalls nichtnegative Zahlen. Verschwindet ein $\alpha_{\psi u} + \tau_u$ oder ein $\alpha_{\varphi v} + \lambda_v - 1$, so enthält (H) sicher einen Widerspruch, wodurch dann das Nullwerden des Gesamtprodukts im Einklang mit dem allgemeinen Vierfarbensatz erklärlich wird. Ein Faktor $\{x_w^1 - \zeta_{\sigma_{w-1}}, \dots, x_w^{k_w} - \zeta_{\sigma_w}\}$ ist nach § 9 nur dann gleich 0, wenn er zum Typus $\{0^a, 1, 0^b\}$ gehört. Dass in einem solchen Falle der Bedingungskomplex (H) $(\pm P_1 R_1) (\pm P_2 R_2) \dots$ notwendigerweise einen Widerspruch enthält, ist unschwer zu erkennen. Entspricht nämlich $\{x_s^1, \dots, x_s^{k_s}\}$ einem „inneren“ Diagonalaggregat, so ist jedenfalls $x_s^1 \geq 1, x_s^{k_s} \geq 1$, weil P_{s-1} von R_{s-1} , desgleichen P_s von R_s verschieden ist. Ein innerer Faktor vom Typus $\{x_s^1, \dots, x_s^{k_s}\}$ kann also nicht 0 sein. Ist aber $\{x_s^1 - 1, \dots, x_s^{k_s}\}$ oder $\{x_s^1 - 1, \dots, x_s^{k_s} - 1\}$ gleich 0, so entspricht im ersten Falle dem Paar $P_s R_s$ der Koordinatenwert $\eta = 1$, während die übrigen η alle gleich 0 sind, wodurch $P_s \equiv R_s$ bedingt ist, während doch $(-P_s R_s)$ gefordert war; im zweiten Falle müsste die einzige Koordinate 1 einem auf dem Randbogen $R_{s-1} R_s$ oder $P_{s-1} P_s$ gelegenen Knotenpaar entsprechen, — man hätte daher notwendig für die Paare R_{s-1}, R_s , resp. P_{s-1}, P_s eine verschiedene Färbung, während doch, infolge des Nullwerdens der übrigen Koordinaten, im Diagonalaggregat $R_{s-1} \equiv R_s$ resp. $P_{s-1} \equiv P_s$ gelten müsste. Analoges gilt, wenn man einen „Randfaktor“ fixiert.

Diese Schlussfolgerungen beziehen sich zunächst nur auf Fundamentalwerte; sie lassen sich aber auf dem im § 9 S. 53 angedeuteten Wege sofort auch auf beliebige Gitterpunkte übertragen. Es ist demnach im irreduziblen Normalnetz erster Ordnung stets

$$(H) (\pm P_1 R_1) (\pm P_2 R_2) \dots \prod_j \left| X_j^1 \times \dots \times X_j^{k_j} \right| > 0,$$

sofern $(H) (\pm P_1 R_1) (\pm P_2 R_2) \dots > 0$.

Da

$$E = (+P_s R_s) + (-P_s R_s), \quad (107)$$

so kann man noch einen Schritt weiter gehen, und die Resultate auch auf diejenigen Fälle anwenden, wo einige der Bedingungen $(\pm P_s R_s)$, oder alle überhaupt in Wegfall treten. Ein Nullwerden des formalen Produktes wäre zufolge (107) nur dann denkbar, wenn $(H)(+P_s R_s) = 0$ und zugleich $(H)(-P_s R_s) = 0$, also auch $(H)(+P_s R_s) + (H)(-P_s R_s) = (H) = 0$. Bezeichnet man einen Bedingungskomplex $(H)(\pm P_1 R_1)(\pm P_2 R_2) \dots$, wo vielleicht nicht alle, möglicherweise sogar überhaupt keine $(\pm P_s R_s)$ genannt sind, mit (M) , so gelangt man zu dem für irreduzible Normalnetze erster Ordnung sicher richtigen Satz:

Bedeutet (M) eine derartige widerspruchsfreie Auslese, dass die in (M) genannten Paare keine zwei Knoten eines Diagonalaggregats $\overline{X_j^1} \times \dots \times \overline{X_j^{k_j}}$ untereinander trennen, so ist

$$(M) \prod_j \overline{X_j^1} \times \dots \times \overline{X_j^{k_j}} > 0. \quad (108)$$

Diesen Satz möchte ich als den allgemeinen Diagonalensatz bezeichnen. Für Netze höherer Ordnungen hat dieser allgemeine Diagonalensatz vorläufig nur den Wert einer Vermutung. Der allgemeine Vierfarbensatz ist in dieser Vermutung als Spezialfall mitenthalten.

Eine direkte Konsequenz der Gültigkeit des allgemeinen Diagonalensatzes für Netze erster Ordnung ist die Gültigkeit des allgemeinen Vierfarbensatzes für Netze zweiter Ordnung. Hieraus folgt dann weiter, dass noch in jedem Netz fünfter Ordnung der spezielle Vierfarbensatz, d. h. die Behauptung $E > 0$, gültig ist. Wenn nämlich $E > 0$ im Netz fünfter Ordnung richtig sein soll, so ist hierzu die Richtigkeit von $(-AB) > 0$ (wo A, B beliebige verschiedene Randknoten bedeuten) im Netz vierter Ordnung hinreichend. Letztere Forderung ist sicher erfüllt, wenn im Netz dritter Ordnung $\overline{CDBF} > 0$ richtig ist; weil aber $\overline{CDBF} \geq (+CB)$, so genügt $(+CB) > 0$. Reduziert man $(+CB)$ mit Hilfe der

Vierfarbenformel, so ergibt sich hierfür eine Farbinvariante im Netz zweiter Ordnung; da im letzteren Netz der allgemeine Vierfarbensatz gilt, so ist die Behauptung bewiesen.

Es sei übrigens bemerkt, dass auch im Netz sechster Ordnung $E > 0$ sicher gilt; auf den Beweis will ich hier nicht eingehen.

Noch einige Betrachtungen seien hinzugefügt:

Bezeichnet das Symbol $\times$ die formale Multiplikation zweier Fundamentalwerte ohne Zwischenbedingung, so ist, wegen (101) und (105):

$$\{x_1, \dots, x_a\} \times \{y_1, \dots, y_b\} = \{x_1, \dots, x_a\} \cdot \{y_1, \dots, y_b\} + \\ + 2 \cdot \{x_1, \dots, x_a - 1\} \cdot \{y_1 - 1, \dots, y_b\}. \quad (109)$$

Mit Hilfe von (51) und (109) erhält man eine neue, manchmal bequemere Möglichkeit zur Berechnung der Fundamentalwerte von Diagonalaggregaten in Netzen erster Ordnung. So folgt z. B. mittels

$$\{a, b, c\} = \{a, b + 1\} \times \{c + 1\} - \{a, b + c\} = \\ = \{a, b + 1\} \cdot \{c + 1\} + 2 \cdot \{a, b\} \cdot \{c\} - \{a, b + c\}$$

auf Grund von (86) und (79), nach einigen Vereinfachungen:

$$\{a, b, c\} = 2(a_a a_c + a_b) + a_a \xi_c + a_c \xi_a + 2 \varepsilon^a \xi_{b-1} \xi_{c-1} + \\ + 2 \xi_{a-1} \varepsilon^b \xi_{c-1} + 2 \xi_{a-1} \xi_{b-1} \varepsilon^c + \xi_a \xi_b \xi_c, \quad (110)$$

wo

$$\varepsilon = -1, \quad \xi_t = \varepsilon^t + \xi_{t-1}.$$

Es wird ξ_t gleich $+2$ oder -1 , je nachdem t gerade oder ungerade ist. Die 4 letzten Summanden in (110) ergeben zusammen einen fünfwertigen Ausdruck $f_{a,b,c}$, der gleich ist

- -1 , wenn a, b, c alle ungerade;
- $+6$, wenn a, b, c alle gerade;
- -2 , wenn zwei der Zahlen a, b, c gerade, die dritte ungerade;
- $+2$, wenn b gerade, während a und c ungerade;
- 0 , wenn a oder c gerade, während beide andere ungerade.

Wie schon aus (110) ersichtlich ist, werden die Ausdrücke für die Fundamentalwerte beim Übergang zu höheren Stufen rasch recht kompliziert.

Wendet man (101) auf die im § 11 behandelten Beispiele an, so zeigt sich für das zweite Beispiel:

$$\begin{aligned} \overset{2}{N}_{(+KE)(-JF)(-LD)(-LC)} &= \\ &= (-HE) \overline{HGFE} \overline{HEDCB} = \{4\} \times 0 \times \{5\} = \\ &= \{4\} \cdot \{5\} = (a_3 + 1) a_4 = 20, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &= (-AK) \overline{AGJK} \overline{AKL \times ALB} = \\ &= \{4\} \times 0 \times \{2, 2\} = \{4\} \cdot \{2, 2\} = \\ &= (a_3 + 1)(a_1 + a_1 + 3) = 20. \end{aligned}$$

Analog findet man im komplizierteren vierten Beispiel, wenn man $(-HD) \overline{HGFD} \overline{HDCB}$ auf die Fundamentalwerte zurückführt:

$$\begin{aligned} \overset{2}{N}_{(+KD)(-JF)(-LC)} &= \\ &= 2 \cdot [\{3\} \times 0 \times \{4\}] + \{4\} \times 0 \times \{4\} = \\ &= 2 \cdot \{3\} \cdot \{4\} + \{4\} \cdot \{4\} = \\ &= 2 a_2 (a_3 + 1) + (a_3 + 1)^2 = 8 + 16 = 24. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Darstellung dieser Farbinvariante resultiert im Einklang hiermit

$$\overset{2}{N}_{(+KD)(-JF)(-LC)} = 2(a_3 + 1) + (a_3 + 1)^2 = 24.$$

13. Übersicht.

Die prinzipiellen Resultate der vorliegenden Untersuchung möchte ich folgendermassen zusammenfassen:

1. Die Vierfarbenformel führt zwangsläufig von der Betrachtung der Farbinvarianten zum Studium höherer, aus Farbinvarianten zusammengesetzter Komplexe, der Diagonallaggregate.

2. Die Diagonalaggregate sind, wenigstens dann, wenn die konstituierenden Teilkomplexe alle einen gemeinsamen Knoten enthalten, dem Zahlenwerte nach gleich gewissen Farbeninvarianten von Netzen höherer Ordnung. Aus diesem Grunde zeigen diese Diagonalaggregate in ihrem Verhalten eine Analogie mit Farbeninvarianten, die sich u. a. darin äussert, dass die Diagonalaggregate nicht negativ werden.

3. Die eigenartige Struktur der Diagonalaggregate ist zwangsläufig durch die Vierfarbenformel bedingt. Es ist evident, dass die Gesamtheit der Farbeninvarianten eines Netzes schon die Gesamtheit der Farbeninvarianten derjenigen höheren Netze mitbestimmt, die aus dem gegebenen Netz durch Anheften von Maschen entstehen. Einen genauen Einblick, resp. eine genaue arithmetische Formulierung der hierbei waltenden Gesetze ermöglicht aber erst das in der Vierfarbenformel präzierte Entwicklungsprinzip.

4. Jedes Netz höherer Ordnung lässt sich ausgehend von einem irreduziblen Normalnetz erster Ordnung aufbauen. Das Vierfarbenproblem ist daher gleichbedeutend mit der Frage, wie die Gesamtheit der Farbeninvarianten der irreduziblen Normalnetze erster Ordnung beschaffen ist, insbesondere, welche überhaupt noch mögliche Werte für Farbeninvarianten höherer Netze durch diese Gesamtheit potentiell bedingt sind. Das Vierfarbenproblem bildet also eine spezielle Frage aus der Theorie der Vierfarbennoeffizienten.

5. Vom Standpunkt der formalen Multiplikation ist das Vierfarbenproblem gleichbedeutend mit der Frage nach den notwendigen Bedingungen, unter denen ein formales Produkt den Wert 0 annimmt. Die hierbei geforderte Konformität der Faktoren ist ein modifizierter Ausdruck für die Zusammenhängeverhältnisse der Kugelfläche.

6. Für irreduzible Normalnetze erster Ordnung gilt der allgemeine Diagonalsatz:

„Ein konformes formales Produkt aus Diagonalaggregaten und Farbeninvarianten ist im allgemeinen positiv; es verschwindet nur dann, wenn das Produkt der Farbeninvarianten für sich allein schon einen Widerspruch enthält.“

Gilt dieser Satz für Netze von der Ordnung i , so ist der Vierfarbensatz in spezieller Fassung für Netze von der Ordnung $i + 4$ noch richtig.

7. Ist der Vierfarbensatz nicht für jedes i richtig, so existiert eine kleinste Ordnungszahl $i > 1$, für welche der allgemeine Diagonalensatz nicht mehr gilt. Der Weg für weitere Untersuchungen ist vorgezeichnet: man hat mit Hilfe der Vierfarbenformel die Reduktion des allgemeinen formalen Produktes durchzuführen. Sollten bei dieser Reduktion nur Produkte aus Diagonalaggregaten und Farbeninvarianten entstehen (wie dies in den einfachsten Fällen, soweit ich zur Zeit übersehe, tatsächlich der Fall ist), so wird die Entscheidung leicht. Widrigenfalls ist nach weiteren Verallgemeinerungen zu suchen.

80
2.-

XII

A-414

i 47009500