SCHUL-STEREOMETRIE

VON

H. WESTERMANN,

LEHRER AN DER VORSCHULE DES POLYTECHNIKUMS ZU RIGA.

RIGA,

VERLAG VON N. KYMMEL.

1883.

Zuzulassen in den mittleren
Lehranstalten des dorpater
Lehrbezirks durch Verfügung
des Curatorischen Conseils
v. 25. Febr 1885.

SCHUL-STEREOMETRIE

VON

H. WESTERMANN,

LEHRER AN DER VORSCHULE DES POLYTECHNIKUMS ZU RIGA.

RIGA,

VERLAG VON N. KYMMEL.

1883.

Von der Censur erlaubt. Riga, 2. Juni 1883.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Der erste Zweck jedes Unterrichts ist, den Lernenden durch eigene Anschauung Thatsachen kennen zu lehren und die hierbei gewonnenen Begriffe in brauchbare Verbindungen zu bringen. Daher darf absolute Strenge der Beweisführung, auch bei dem mathematischen Unterricht, nicht als unter allen Umständen wichtigstes Erfordernis hingestellt werden. In der Regel wird der Beweis überall dort sogar störend sein, wo die eigene Anschauung unmittelbar das Richtige zeigt. So ist ein Beweis für den Lehrsatz des Pythagoras, auf der zweiten Stufe der planimetrischen Beschäftigungen, unerläßlich; aber beweisen wollen, daß alle rechten Winkel gleich sind, oder daß die Summe zweier Seiten eines Dreiecks größer sein muß als die dritte — das ist entschieden thöricht.

Überdies verdeckt die Beweissucht die Thatsache, daß wirklich Alles sich so wenig beweisen, wie erklären läßt. Denn wie jede Erklärung Worte benutzt, die, wenn nicht verstanden, selbst erklärt werden müssen, und so fort ohne Ende; in gleicher Weise benutzt jeder Beweis irgend welche Wahrheiten, welche, wenn nicht allgemein zugegeben, selbst bewiesen werden müssen, und so fort ohne Ende.

Jeder Beweis ist demnach immer nur für diejenige Gruppe von Wesen zwingend, von denen jedes gewisse Wahrheiten unmittelbar zu erkennen im stande ist, oder mit anderen Worten: für solche Wesen, deren innere Erfahrungen sie auf die Erkenntnis derselben

Thatsachen führen, die allen ihren Beweisführungen als Grundlage dienen.

Wer z. B. nicht im stande ist, unmittelbar einzusehen, daß die Grenze weniger Merkmale haben muß als das von ihr begrenzte Gebilde, daß, vom stereometrischen Körper ausgehend, man den Übergang zur Grenze nur dreimal ausführen kann, weil man dann schon den ausdehnungslosen Punkt erreicht hat; wer sich nicht vorstellen kann, daß es nur verschiedene Ausdrucksweisen für dieselbe Thatsache sind, wenn man sagt: der Punkt ist formlos oder der Punkt hat alle beliebigen Formen u. s. w. — mit dem kann über stereometrische Fragen nicht gesprochen werden.

Wem es nicht unmittelbar anschaulich ist, daß zwei Gerade im Raume sich im allgemeinen nicht schneiden, daß dagegen die drei Schnittlinien dreier Ebenen sich in einem Punkte schneiden müssen — dem nützen Beweise nichts; denn er kann mit wie ohne Beweis doch nur auswendig Gelerntes nachsprechen.

So wollen die Begriffe Raum, Zeit, Richtung zwar wohl gelernt sein; daß aber diese Begriffe von allen Wesen gleichartig entwickelt werden, ist von uns weder zu erzwingen, noch zu verhüten; das tritt bei uns Menschen von selbst ein.

Wenn es demnach unvermeidlich ist, daß alle, auch die wissenschaftlichen, Betrachtungen von etwas allgemein Anerkanntem als Gegebenem auszugehen haben — warum sollte es notwendig sein, daß dieses Gegebene nur Eines sein darf? Im Gegenteil! je Mehrerlei sich unmittelbar als wahr, uns Allen übereinstimmend, aufzwingt, um so besser! Denn hierbei ist schon ohne Beweis das erreicht, was aller Beweisführung Zweck ist.

Entsprechend diesen Thatsachen hat der Verfasser es versucht, unbekümmert um Euklidische Systematik, jeden Begriff dort zu entwickeln, wo sich derselbe möglichst unmittelbar aus der Anschauung ergab; oder, um mit Fröbel zu sprechen, der Verfasser ist bemüht gewesen, die „Sproßpunkte“ der Begriffe zu beachten.

So weit es dem Verfasser nur irgend zweckdienlich schien, ist seine Betrachtungsweise eine deduktive; so wird z. B. die Parallelität als ein Spezialfall des Schneidens vorgetragen.

Dieser Art der Betrachtungsweise entspricht auch die Ausdrucksweise, welche stets so gewählt ist, daß in erster Reihe an die allgemeinen Fälle und nicht an die Spezialfälle zu denken ist. Wie Niemand, wenn von einem Dreieck die Rede ist, sich gerade ein rechtwinkliges Dreieck vorstellen darf, ebensowenig darf man bei dem Satze, daß drei Ebenen sich in drei Geraden schneiden, an den Spezialfall denken, daß diese drei Ebenen durch dieselbe Gerade gehen! Und aus der Möglichkeit dieses Spezialfalles darf nicht gefolgert werden, daß man das Recht habe, den allgemeinen Satz zu verneinen; vielmehr hat man umgekehrt in der einen Geraden dieses Spezialfalles drei Gerade zu erkennen.

Und so in allen ähnlichen Fällen.

Die in diesem Buche gebrauchten Benennungen sind die folgenden:

Jeder Punkt wird mit einem großen Buchstaben benannt, z. B. A; seine Projektion auf eine gegebene Ebene heißt dann A' und seine Umklappung in diese Ebene (A).

Jede unendliche Gerade wird entweder mit zwei großen Buchstaben benannt, oder mit einem kleinen Buchstaben, aber aus der Mitte des Alphabetes, z. B. AB oder l.

Jede Strecke wird mit zwei großen Buchstaben benannt, die aber überstrichen werden; oder mit einem kleinen Buchstaben vom Anfang oder Ende des Alphabetes; mit dem letzteren ist auch immer die Maßzahl gemeint. Geschrieben z. B. $\overline{AB}$ oder a.

Jeder Linienwinkel hat eine der folgenden Benennungen: $\sphericalangle ABC$ oder B oder $(l\,k)$ oder auch einen kleinen Buchstaben des griechischen Alphabetes. Die Einzelbuchstaben geben gleichzeitig auch die Maßzahl an.

Eine Ebene wird benannt entweder durch einen einzelnen großen Buchstaben, welcher aber von einer eckigen Klammer umgeben ist, oder durch solche zwei Gerade, welche die Ebene bestimmen. Geschrieben: $[E]$ oder $[lk]$.

Die Benennungen des Flächenwinkels sind die folgenden: $\widehat{EF}$ oder $\hat{l}$ oder $\hat{A}$. Hierbei bedeuten E und F die beiden Schenkelebenen, l die Scheitellinie und A den Maßwinkel dieses Flächenwinkels.

Der Kantenwinkel wird benannt mit $\hat{a}$ oder nach Art der Linienwinkel.

Über den Gebrauch dieser Benennungen ist noch Folgendes zu bemerken.

Entweder schreibe ich: die Ebene E; oder ich schreibe nur $[E]$ und lese dieses Zeichen mit denselben Worten; entweder schreibe ich: der Kantenwinkel a; oder $\hat{a}$ und lese dieses Zeichen mit denselben Worten u. s. f. Man übersehe nicht, daß wenn geschrieben steht P dieses zu lesen ist: der Punkt P u. s. f.

Nicht am Schreibtisch, sondern in den Unterrichtsstunden selbst, ist diejenige Behandlungsweise der Stereometrie entstanden, welche dieses Lehrbuch zeigt. So aus Bedürfnissen des Schulunterrichts unmittelbar herausgewachsen und seit Jahren beim Unterricht benutzt, führt dieses Lehrbuch wohl mit Recht seinen Titel „Schul-Stereometrie“.

Inhalt.

Einleitung.

§ 1. Das Messen der Körper zu lehren, ist der Zweck desjenigen Wissenszweiges, der hier abgehandelt werden soll — so gibt wenigstens der Name desselben an.

Das Messen ist eine Thätigkeit, mit welcher schon die Planimetrie bekannt macht. Wir wissen von daher, daß das Messen ein Vergleichen ist, welches den Zweck hat, die Frage zu beantworten, wie viel mal eine Größe in einer anderen enthalten ist. Diejenige Größe, mit der viele andere Größen verglichen werden, heißt Maßeinheit; das Resultat des Messens ist eine Zahl. Maßzahl genannt. Da man sich die gemessene Größe aus der Maßeinheit durch Summation entstanden zu denken hat, so folgt, daß die gemessene Größe und ihre Maßeinheit von gleicher Art sein müssen.

Die wirkliche Ausführung einer Messung ist stets ein mechanischer Vorgang. Man nennt das Messen einen mechanischen Vorgang, weil man zum Messen Werkzeuge braucht; z. B. Maßstab und Transporteur oder Diopterlineal und Meßkette nebst Stäben, Zirkel u. s. w. Nun aber kann kein Meßinstrument fehlerlos gearbeitet sein und keines kann fehlerlos benutzt werden; bei jeder Messung werden sich daher die Fehler des Instruments und die Fehler bei seiner Benutzung in irgend einer Weise summieren und dadurch das Resultat ungenau machen. Der Betrag, um wie viel das Resultat der Messung von dem richtigen Werte abweicht, heißt der „mechanische Fehler“. Durch Aufmerksamkeit und fleißiges Üben muß man bemüht sein, den mechanischen Fehler einer Messung auf einen möglichst kleinen Betrag herabzudrücken — ganz vermeiden läßt derselbe sich nie.

Ferner lehrt die Planimetrie, daß die genauesten Resultate bei der Messung gerader Längen und bei Winkelmessungen erhalten werden; daher hat die Planimetrie die Aufgabe zu lehren, wie man das direkte Messen von gekrümmten Längen und von ebenen Flächen vermeiden kann, indem man dasselbe ersetzt durch das Messen gerader Längen und Winkel nebst Rechnungen.

Sollen Rechnungen dazu dienen, aus gegebenen Längen-[1]) und Winkelmaßzahlen die Maßzahlen für Gebilde anderer Art herzuleiten, so genügt es nicht, daß die gemessenen Längen und Winkel so gewählt sind, daß durch dieselben das betreffende Gebilde genügend bestimmt ist, sondern es muß auch noch die Maßeinheit des neuen Gebildes einen bekannten Zusammenhang mit den für die Winkel- und Längenmessungen benutzten Maßeinheiten haben.

Wenn wir demnach in der Stereometrie zu denjenigen Kapiteln gelangen, die von der Messung der Körper handeln, so werden wir zuerst festzustellen haben, welche Maßeinheiten wir zu benutzen gedenken, und dann wird jeder Lehrsatz uns sagen müssen, welche Längen und Winkel der betreffenden Körperform zu messen seien, und was für Rechnungsoperationen mit den hierbei gewonnenen Maßzahlen vorzunehmen sind, um aus ihnen die gewünschte Maßzahl der vorliegenden Körperform abzuleiten.

§ 2. Es gibt keine Vorstellung, zu deren Bildung wir häufiger Veranlassung finden, als diejenige, welche das praktische Leben mit dem Namen „Körper" belegt hat. Wir gehen bei unseren gegenwärtigen Betrachtungen von ihr aus.

Zunächst ist festzuhalten, daß der Körper im Sinne der Stereometrie mit dem Körper im Sinne des praktischen Lebens nicht übereinstimmt (mathematischer Körper; physischer Körper).

Der mathematische Körper (*m. K.*) hat weniger Merkmale, als der physische Körper (*ph. K.*); z. B. keine bestimmte Farbe, keine bestimmte Temperatur, keine Rauhigkeit u. s. w.

Um von der Vorstellung des *ph. K.* zu der Vorstellung des *m. K.* zu gelangen, muß man demnach von einer großen Menge von Merkmalen der *ph. K.* absehen und seine Aufmerksamkeit nur auf ganz bestimmte Merkmale derselben ausschließlich richten. Diese Thätigkeit unseres Geistes wird das Abstrahieren genannt.

Das Resultat jeder Abstraktion ist ein Abstraktum und heißt Begriff.

Das Abstrahieren ist das erste, was wir lernen 1), und in der Kunst des Abstrahierens uns immer mehr zu vervollkommnen, darnach sollten wir alle streben.

§ 3. Von jedem Reiz, der auf unsere Sinne ausgeübt wird, bleibt uns ein Erinnerungsbild, sodaß wir im stande sind, bei Wiederholung desselben Reizes, ihn als solchen wiederzuerkennen; und zwar gibt die Wiederholung desselben Reizes seinem Erinnerungsbilde immer mehr Dauer und Klarheit.

Jedes Erinnerungsbild ist im allgemeinen sehr verwickelter Natur, wie schon aus dem Umstande erhellt, daß derselbe Gegenstand der Außenwelt auf verschiedene unserer Sinne gleichzeitig

---

[1]) Hinfort soll unter Länge immer eine gerade Länge verstanden sein.

wirkt. Da aber die Eindrücke, welche verschiedene Sinne uns zuführen, uns als durchaus gesonderte erscheinen, so sind wir es, die das einheitlich gegebene Objekt der Außenwelt in einzelne Merkmale zerreißen. Außer uns gibt es nur einheitliche Komplexe von Merkmalen; jedes einzelne Merkmal für sich gesondert hat nur in uns seine Existenz. Wir sind es also, welche das Merkmal von seinem Objekte trennen.

Durch unsere Sinne sind für uns die Gattungsunterschiede der Merkmale bedingt (z. B. Farben und Töne). Doch auch unter den Erinnerungsbildern, welche durch denselben Sinn uns vermittelt werden, nehmen wir noch höchst bedeutungsvolle Artunterschiede wahr (z. B. rot und blau). Auf das Abtrennen auch der Merkmale gleicher Art von den Objekten selbst werden wir dadurch mit Notwendigkeit geführt, daß die verschiedenen Objekte der Außenwelt immer nur teilweise Übereinstimmung ihrer Merkmale zeigen 2).

Alle diese Erinnerungsbilder werden durch Abstraktion gewonnen — es sind Begriffe.

Da alle Erfahrungen dafür sprechen, daß sogar zwei solche Personen, welche mit ganz gleichen Sinnen begabt, nachdem sie in genau derselben Außenwelt aufgewachsen sind, doch in ihren Begriffen und deren gegenseitigem Zusammenhang keine vollständige Übereinstimmung zeigen würden — so ist klar, daß die Gestaltung unserer Begriffe von dreierlei abhängig ist: von der Außenwelt; von unseren Sinnen; von unserem Geiste. Denn seine ersten Begriffe gewinnt jeder Mensch dadurch, daß die Außenwelt durch seine Sinne auf ihn wirkt; und alle Begriffe, die er später bildet, stehen in Abhängigkeit von diesen ersten.

Benutzt man schon vorhandene Begriffe, um aus ihnen durch Abstraktion neue Begriffe zu bilden, so werden die letzteren, Begriffe höherer Ordnung genannt.

Wir haben den Umfang eines Begriffes von seinem Inhalte wohl zu unterscheiden. Zu dem Inhalte eines Begriffes gehören alle diejenigen Merkmale, an welche man notwendig denken muß, um den betreffenden Begriff richtig gedacht zu haben. Der Umfang eines Begriffes wird dagegen bestimmt durch die Anzahl der Fälle, welche Veranlassung bieten ihn zu bilden. Z. B. zur Bildung des Begriffes „Stein“ finden wir häufiger Veranlassung, als zur Bildung des Begriffes „Diamant“; folglich hat der Begriff Stein den größeren Umfang. Wenn aber sowohl Diamant, als auch Granit u. s. w. die Bildung des Begriffes Stein veranlassen, so kann der Begriff „Stein“ nur solche Merkmale enthalten, welche dem Diamanten und dem Granit u. s. w. gemeinsam sind. Es gilt demnach der Satz: je größer der Umfang eines Begriffes, um so kleiner sein Inhalt.

Da derjenige Begriff der einfachere genannt wird, der den kleineren Inhalt hat, so werden die Begriffe um so einfacher sein, je größer ihr Umfang ist.

§ 4. Aus dem vorhergehenden Paragraphen müssen wir die wichtige Folgerung ziehen, daß jeder Streit in erster Reihe ein Wortstreit ist. Die beiden streitenden Personen verstehen einander in der Regel nicht, da den gleichen Worten, die sie gebrauchen, doch nicht solche Begriffe entsprechen, die an Inhalt und Umfang gleich sind 3). Erklärungen helfen wenig, denn auch diese werden wieder durch Worte gegeben und die Worte, die wir gebrauchen, nennen nie das wirkliche Objekt, sondern immer nur das Bild, das wir von ihm haben — daher Personen von verschiedenem Bildungsgrade sich besonders schwer verständigen können. Ein vollständiges Verstehen kann erst zwischen solchen Personen eintreten, die alles ganz verstehen. Erreicht wird dieses Ziel nie; wir nähern uns demselben durch die Wissenschaft.

Da es keinen Begriff gibt, der nach Inhalt und Umfang in den Köpfen aller Menschen genau übereinstimmt, so sucht die Wissenschaft nach solchen Begriffen, welche die bestmögliche Übereinstimmung zeigen, um diese zum Ausgangspunkt ihrer Betrachtungen zu wählen.

Es wird die Übereinstimmung der Begriffe eine um so bessere sein müssen, je kleiner ihr Inhalt ist; denn würde es einen absolut einfachen Begriff geben, d. h. einen solchen, der nur ein einziges Merkmal hat, so würde für diesen Begriff die Möglichkeit des Mißverstehens aufgehört haben.

Absolut einfache Begriffe gibt es nicht; daher suchen wir nach solchen Begriffen, welche möglichst arm an Inhalt sind. Da aber der Inhalt eines Begriffes sehr schwer zu bestimmen ist 4), so benutzen wir den Lehrsatz über die Abhängigkeit des Inhaltes vom Umfange, d. h. wir suchen nach solchen Begriffen, die unter allen zu dem betreffenden Zweck benutzbaren Begriffen den größten Umfang haben. Demnach wird die Stereometrie mit der Betrachtung solcher Merkmale der Körper zu beginnen haben, welche Merkmale, wenn möglich, allen Körpern ausnahmslos zukommen.

Solche Merkmale gibt es; dieselben werden in der Physik allgemeine Eigenschaften genannt. Z. B. Ausdehnung, Undurchdringlichkeit, Porosität, Schwere, Bewegbarkeit, Farbe u. s. w. u. s. w.

Der *m. K.* hat nur solche Merkmale, welche den allgemeinen Eigenschaften der *ph. K.* entsprechen. Wir haben demnach nur noch die Frage zu entscheiden, welche der allgemeinen Eigenschaften der *ph. K.* auch dem *m. K.* zukommen.

§ 5. Jeder Körper ist ausgedehnt; oder mit anderen Worten: jeder Körper nimmt einen bestimmten Raum ein, er hat eine bestimmte Größe.

Die letzte Ausdrucksweise erinnert uns in erster Reihe an das Vergleichen der Körper untereinander, also an das Messen; wogegen die zweite Ausdrucksweise uns in erster Reihe die Form des Körpers vor Augen stellt.

Form und Größe eines Körpers sind bestimmt durch seine Grenzen. Unter der Grenze eines Körpers verstehen wir die Gesamtheit der Orte, wo ein Körper aufhört und unmittelbar ein anderer beginnt, woraus sofort gefolgert werden muß, daß die Grenze notwendig weniger Merkmale haben muß, als das von ihr begrenzte Gebilde. Somit ist die Grenze eines Körpers nicht wieder ein Körper, sondern ein neues Gebilde.

Auch der *m. K.* hat Ausdehnung.

§ 6. Unter Undurchdringlichkeit versteht man diejenige Erscheinung, daß zwei *ph. K.* niemals zu gleicher Zeit an demselben Orte sich befinden können.

Dem *m. K.* kommt diese Eigenschaft nicht zu.

Unter Porosität versteht man diejenige Erscheinung, daß kein *ph. K.* den Raum, den er einnimmt, auch vollständig ausfüllt. Infolge dessen ist jeder *ph. K.* zusammendrückbar.

Der *m. K.* ist absolut porös, denn er füllt von dem Raume, den er einnimmt, gar nichts aus und kann daher auf Nichts zusammengedrückt werden.

Unter Schwere versteht man diejenige Erscheinung, daß jeder *ph. K.*, der nicht unterstützt ist, fällt.

Der *m. K.* hat keine Schwere.

§ 7. Die Schwere bietet uns am häufigsten die Gelegenheit, uns den Begriff Bewegung zu bilden; es ist nämlich das Fallen eine ganz bestimmte Art der Bewegung. Denn unter Bewegung versteht man diejenige Erscheinung, daß jeder Körper zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten sich befinden kann.

Bei jeder Bewegung fragt man nach der Richtung und Geschwindigkeit derselben.

Die Richtung ist ein aus der Planimetrie bekannter Begriff.

Die Geschwindigkeit ist selbst wieder zusammengesetzt und zwar aus Weg und Zeit 5).

Der Begriff Weg kann ohne den Begriff Raum nicht gedacht werden; demnach führt uns der Begriff Bewegung wieder zum Begriff Raum zurück. Ja die Bewegung ist es, aus welcher wir zuerst die Begriffe Raum und Zeit gelernt haben.

Auch der *m. K.* ist bewegbar.

§ 8. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß dem Körper im Sinne der Stereometrie nur die drei Merkmale zukommen: Ausdehnung, Porosität, Bewegbarkeit. Da die Porosität keine Unterschiede der einzelnen *m. K.* bedingt, so werden wir es im folgenden nur mit denjenigen Begriffen zu thun haben, welche in den beiden Begriffen Ausdehnung und Bewegbarkeit enthalten sind.

Häufig sagt man: der *m. K.* sei der vollständig umgrenzte Raum. Diese Erklärung ist richtig, sobald man vom Begriffe Raum alles fernhält, was auf die Ausfüllung des Raumes Bezug hat. Man muß stets bedenken, daß auch die Umkehrung dieses Satzes wahr zu sein hat, nämlich: der Raum ist ein *m. K.* ohne Grenzen.

§ 9. Um vom Körper im Sinne der äußeren Wirklichkeit zum Körper im Sinne der Stereometrie zu gelangen, mußten wir abstrahieren. Doch auch vom *m. K.* ausgehend können wir zu noch weiteren Abstraktionen vorschreiten. Wir richten nämlich unsere Aufmerksamkeit nur auf diejenigen Merkmale, welche zur Grenze des *m. K.* gehören; wir nennen das neue Gebilde: Fläche. Dann können wir von der Fläche aussagen, daß sie weniger Merkmale als der Körper hat; und zwar ist sie in Bezug auf ihre Ausdehnungsmerkmale beschränkter als der Körper.

Soll die Fläche einen bestimmten endlichen Raum umgrenzen, so muß sie selbst begrenzt sein. Die Grenze der Fläche heißt Linie. Dann können wir von der Linie aussagen, daß sie weniger Merkmale als die Fläche hat; und zwar ist sie in bezug auf ihre Ausdehnungsmerkmale beschränkter als die Fläche.

Soll die Linie eine bestimmte endliche Fläche begrenzen, so muß sie selbst begrenzt sein. Die Grenze der Linie heißt Punkt. Dann können wir von dem Punkt aussagen, daß er weniger Merkmale hat, als die Linie und daß er in bezug auf seine Ausdehnungsmerkmale beschränkter ist als die Linie.

Dieser Übergang zur Grenze läßt sich so oft wiederholen, bis man endlich zu einem Gebilde kommt, das in bezug auf die Ausdehnung gar keine Merkmale mehr hat. D i e E r f a h r u n g l e h r t, d a ß d e r P u n k t s c h o n d i e s e s G e b i l d e i s t. Es ist eine Thatsache der inneren Erfahrung, daß wir den Übergang zur Grenze, vom *m. K.* ausgehend, nur dreimal ausführen können.

Der Punkt ist ausdehnungslos; folglich kann seine Größe mit keiner anderen Größe verglichen werden. Er ist formlos, d. h. ihm kommt ebensogut gar keine, wie jede Form zu. Es unterscheiden sich die verschiedenen Punkte somit nur noch durch ihre Lage im Raume; der Punkt ist bewegbar.

Da der Punkt ausdehnungslos ist, so kann er nur für ein solches Gebilde die Grenze sein, welches an jedem Orte nur eine einzige ganz bestimmte Richtung hat, woraus erhellet, daß der Punkt und auch die Linie der Stereometrie dieselben Gebilde sind, welche die Planimetrie mit den gleichen Namen belegt hat.

Da stets zwei Punkte zur Grenze einer Linie gehören, so kann der Spezialfall eintreten, daß diese beiden Punkte zusammenfallen; in diesem Falle nennt man die Linie eine geschlossene. Bei einer geschlossenen Linie kann jeder ihrer Punkte als Grenzpunkt angesehen werden.

§ 10. Der Punkt ist das abstrakteste Gebilde der Stereometrie. Wir wählen daher, von ihm beginnend, für unsere Betrachtungen den umgekehrten Gang: wir determinieren. D. h. wir fügen zu den vorhandenen Merkmalen neue Merkmale hinzu und lassen auf diese Weise aus einem gegebenen Gebilde ein neues Gebilde entstehen.

Z. B. der bewegte Punkt erzeugt ein neues Gebilde; denn indem der Punkt sich bewegt, kommen zu ihm neue Merkmale hinzu, und zwar müssen diese neuen Merkmale solche sein, welche mit der Ausdehnung in unmittelbarer Beziehung stehen (§ 7). Demnach ist das neue Gebilde in bezug auf seine Ausdehnungsmerkmale reicher als der Punkt und seine Grenzen sind Punkte. Da wir ferner von diesem neuen Gebilde wissen, daß es an jedem Orte nur eine einzige ganz bestimmte Richtung haben kann, nämlich diejenige, welche durch die augenblickliche Bewegungsrichtung des Punktes sich ergibt — so folgt, daß dieses neue Gebilde die Linie ist. Wir haben somit den Satz: der bewegte Punkt erzeugt eine Linie.

Da wir uns die Bewegung eines Punktes ohne Anfang und ohne Ende denken können, so sehen wir uns zu der Anschauung unbegrenzter, unendlicher Linien gedrängt.

Ferner liefert die angegebene Entstehung der Linie uns eine vortreffliche Handhabe zur Zusammenfassung der verschiedenen Linienformen in Gruppen. Und zwar können wir die erzeugten Gebilde auf zweierlei Weise gruppieren: entweder nach dem Charakter des erzeugenden Gebildes, oder nach dem Charakter der Bewegung.

Da es Punkte von verschiedenem Charakter nicht gibt, so fällt für die Linien der erste Einteilungsgrund fort.

Nach dem Charakter der Bewegung unterscheidet man zunächst zwei große Gruppen: die geraden Linien und die gekrümmten. Eine gerade Linie entsteht, sobald ein Punkt sich so bewegt, daß er während seiner ganzen Bewegung immer dieselbe Richtung beibehält. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß jede Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist und daß alle geraden Linien kongruent sein müssen. Es ist somit jede neue Gerade nur ein neues Exemplar derselben Form.

Die verschiedenen Geraden unterscheiden sich nur noch in ihrer Lage von einander, ähnlich wie die Punkte.

Punkte in verschiedenen Lagen bestimmen Abstände; Geraden in verschiedenen Lagen bestimmen Winkel.

Eine gekrümmte Linie entsteht, wenn der Punkt sich so bewegt, daß er an jedem Orte die Richtung seiner Bewegung ändert. Auch in der Stereometrie gilt es als Kennzeichen einer gekrümmten Linie, daß sie von einer Geraden in mehr als einem Punkte geschnitten werden kann. Für Sekante, Sehne, Bogen nnd Tangente sind die Erklärungen der Planimetrie auch hier unmittelbar anwendbar 6).

Alle diejenigen Merkmale, welche durch seine Bewegung zu dem bewegten Gebilde hinzukommen, fassen wir mit dem Namen

Dimension zusammen. Dann sagt der Satz: die Linie ist ein Gebilde von einer Dimension, genau dasselbe aus, was die in diesem Paragraphen abgehandelte Entstehung der Linie uns lehrt.

§ 11. An jeder Linie unterscheidet man zwei Seiten, und zwar heißt die eine konkav die andere konvex. Bei einem Kreise z. B. ist die innere, dem Mittelpunkt zugewandte Seite die konkave. Im allgemeinen gilt die Erklärung, daß diejenige Seite konvex heißt, auf welcher die Tangente liegt.

Da jede Tangente an eine Gerade mit dieser ganz zusammenfällt 7), so sind die beiden Seiten der Geraden weder konvex noch konkav, oder beides zugleich. D. h. die Gerade ist unter allen Linien einzig dadurch ausgezeichnet, daß ihre beiden Seiten keine Unterschiede zeigen. Daher man auch jede Gerade mit jeder anderen Geraden, in sonst beliebiger Weise, schon dadurch zur Deckung bringen kann, daß man irgend zwei Punkte dieser Geraden zum Zusammenfallen bringt. Insbesondere ist es wichtig, auf das folgende Experiment zu achten.

Sind zwei sich deckende Gerade l und l' gegeben und man wählt auf ihnen die Punkte A und B, und A' und B', doch so daß A mit A' und B mit B' zusammenfallen — so kann man allemal diese beiden Geraden auch in der Lage miteinander zu vollständiger Deckung bringen, daß der Punkt A mit dem Punkt B' und B mit A' zusammenfällt. Dieses ist möglich wegen der gegenseitigen Kongruenz der beiden Seiten einer Geraden. Die Thatsache, welche dieses Experiment uns lehrt, drückt man wohl auch folgendermaßen aus: eine Gerade kann, auch nachdem man sie umgekehrt hat, doch mit ihrer alten Lage zur Deckung gebracht werden.

§ 12. Wenn der bewegte Punkt eine Kreislinie erzeugt, so sagt man, daß er rotiert.

Wird von einem gegebenen Punkte verlangt, daß er rotieren soll, so hat diese Aufgabe unzählig viele Lösungen. Selbst wenn auch noch der Mittelpunkt des gewünschten Rotationskreises gegeben wird, so ist doch nur die Größe desselben, aber noch nicht seine Lage bestimmt. Der Mittelpunkt eines Rotationskreises heißt auch das Rotationszentrum.

Wählt man den Halbmesser eines Rotationskreises gleich Null, so erzeugt der bewegte Punkt keine Linie mehr, sondern bewegt sich in sich selbst.

Wenn ein Punkt rotiert, so bewegt er sich so, daß zu gleichen Längen auf seiner Bahn gleiche Richtungsänderungen gehören. Stellt man dagegen die Bedingung umgekehrt, nämlich ein Punkt solle sich so bewegen, daß zu gleichen Weglängen seiner Bahn gleiche Richtungsänderungen gehören — so ist es nicht notwendig, daß der so bewegte Punkt eine Kreisbahn beschreibt; sondern es erscheint hierbei der Kreis als ein Spezialfall der Schraubenlinie.

Um sich von der Schraubenlinie eine richtige Anschauung zu verschaffen, führe der Schüler folgendes Experiment aus. Über die ganze Fläche eines Quartblattes Papier zeichne der Schüler einen geraden, aber sonst beliebigen, deutlichen Strich; hierauf rolle er das Quartblatt so zusammen, daß der eine Rand desselben einen kleinen Kreis bildet — der früher gerade Strich wird hierbei zur Schraubenlinie.

§ 13. Die bewegte Linie erzeugt ein neues Gebilde. Von diesem neuen Gebilde wissen wir, daß seine Grenzen Linien sind und daß es an Ausdehnungsmerkmalen reicher ist, als die Linie. Hierdurch sehen wir uns zu der Behauptung veranlaßt, daß dieses neue Gebilde die Fläche sei. Die Wahrheit dieser Behauptung wird sich dadurch erweisen, daß alle Folgerungen, die wir auf dieselbe stützen, zu giltigen Resultaten führen.

Die Fläche ist ein Gebilde von zwei Dimensionen, d. h. die Fläche entsteht durch die Bewegung eines Gebildes von einer Dimension.

Gewiß ist es denkbar, daß eine Linie sich so bewegt, daß sie nicht eine Fläche, sondern wieder nur eine Linie erzeugt. Dann sagt man, die betreffende Linie habe sich in sich selbst bewegt. Es kann eine solche Bewegung nur bei drei Linienformen vorkommen: bei der Geraden; bei dem Kreise; bei der Schraubenlinie. Man erkennt sofort, daß in einem solchen Falle das erzeugte Gebilde mit dem erzeugenden identisch ist. Es ist demnach eine solche Bewegung einer Linie, bei welcher sie keine Fläche erzeugt, ein seltener Ausnahmefall.

Da die Bewegung einer Linie ohne Anfang und ohne Ende sein kann, so sehen wir uns zu der Anschauung unbegrenzter, unendlicher Flächen geführt.

§ 14. Die verschiedenen Flächenformen können wir in Gruppen zusammenfassen, sowohl nach dem Charakter der Bewegung, als auch nach dem Charakter der erzeugenden Linien.

Alle diejenigen Flächen, welche durch Bewegung einer G e r a d e n erzeugt werden k ö n n e n, führen den Namen R e g e l f l ä c h e n. Z. B. ein fester Punkt ist gegeben und eine feste Kurve; die erzeugende Gerade soll stets durch den festen Punkt gehen und stets die gegebene Kurve schneiden. Die auf diese Art erzeugte Fläche heißt K e g e l f l ä c h e; der feste Punkt ist ihr Zentrum und die feste Kurve heißt Leitlinie (Fig. 1). Zu beachten ist, daß durch ihr Zentrum und durch ihre Leitlinie jede Kegelfläche ohne Zweideutigkeit bestimmt ist.

Denken wir uns als Zentrum einer Kegelfläche einen unendlich entfernten Punkt gegeben, so entsteht die C y l i n d e r f l ä c h e (Fig. 2). Es ist demnach die Cylinderfläche ein Spezialfall der Kegelfläche.

Alle Lagen, welche die Erzeugende einer Cylinderfläche annehmen kann, sind untereinander parallel.

Bei den Regelflächen wird jede Gerade, die man auf ihnen ziehen kann, eine Mantellinie genannt.

Alle Mantellinien einer Kegelfläche schneiden sich in einem Punkte; alle Mantellinien einer Cylinderfläche sind untereinander parallel.

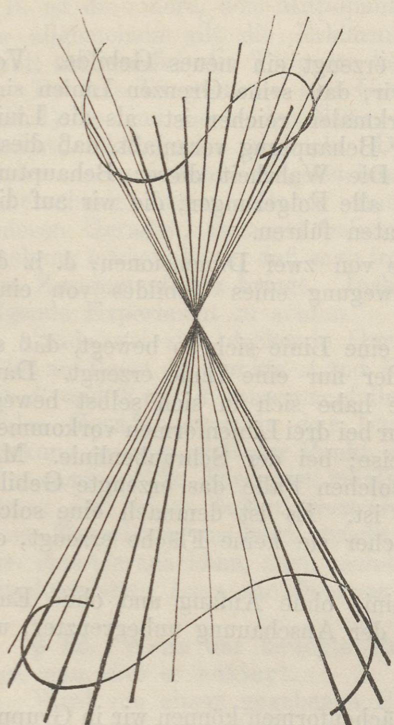


Fig. 1.

Man nennt eine Kegelfläche nach ihrer Leitlinie. Ist z. B. die Leitlinie eine Parabel, so heißt die Kegelfläche eine parabolische. Kreiskegelflächen und Kreiscylinderflächen sind für die Stereometrie von besonderer Wichtigkeit.

Wie man bei jeder Kurve von ihrer konkaven und ihrer konvexen Seite spricht, so hat man auch bei den Kegel- und Cylinderflächen ihre beiden Seiten als konkav und konvex von einander zu unterscheiden. Die konkave Seite der Fläche entspricht der konkaven Seite ihrer Leitlinie.

Eine andere Art, Regelflächen entstehen zu lassen, ist die folgende. Es sind zwei Kurven als Leitlinien gegeben und die erzeugende Gerade soll sich so bewegen, daß ihre Schnittpunkte mit den beiden Leitlinien sich auf diesen mit konstanten Geschwindigkeiten bewegen. Zu den auf diese Weise entstehenden Regelflächen lassen sich leicht Modelle anfertigen; was der Schüler notwendig thun muß.

Es ist gut, sofort darauf zu achten, daß diese mit Hilfe zweier Leitlinien erzeugten Regelflächen sich sehr bedeutungsvoll von den Kegel- und Cylinderflächen unterscheiden. Alle Mantellinien der Kegel- und Cylinderflächen schneiden sich gegenseitig; während bei den zuletzt besprochenen Flächen keine Mantellinie irgend eine andere schneidet.

§ 15. Die einfachste aller Regelflächen wird diejenige Kegelfläche sein, deren Leitlinie eine Gerade ist. Diese Fläche führt den Namen gerade Kegelfläche oder Ebene.

Durch einen Punkt und eine Gerade ist eine Ebene ohne Zweideutigkeit bestimmt. Zwei Ebenen, deren Zentren und Leitlinien zusammenfallen, müssen demnach ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen. Das Zentrum und noch zwei Punkte bestimmen eine Ebene.

Die beiden Seiten einer Ebene zeigen keinerlei Verschiedenheit, entsprechend ihrer Leitlinie; daher auch jede Ebene den Raum hälftet und jede Ebene, nachdem man sie umgekehrt hat, doch mit ihrer alten Lage zur Deckung gebracht werden kann. Hierbei wird man, nach der Umkehrung der ganzen Ebene, diese wohl in eine solche Lage bringen können, daß die neue Lage der Leitlinie mit der alten Lage derselben zusammenfällt — dann aber wird das Zentrum in seiner neuen Lage nicht mit dem Zentrum in seiner alten Lage zusammenfallen — und doch ergibt sich dieselbe Ebene, ob ich die erste oder die zweite Lage des Zentrums wähle. Da in seiner zweiten Lage das Zentrum mit irgend einem Punkte der Ebene zusammenfällt, so folgt hieraus, daß jeder Punkt einer Ebene zu ihrem Zentrum gewählt werden darf.

Das Zentrum einer Ebene ist durch gar keine besonderen Eigenschaften vor irgend einem anderen ihrer Punkte ausgezeichnet.

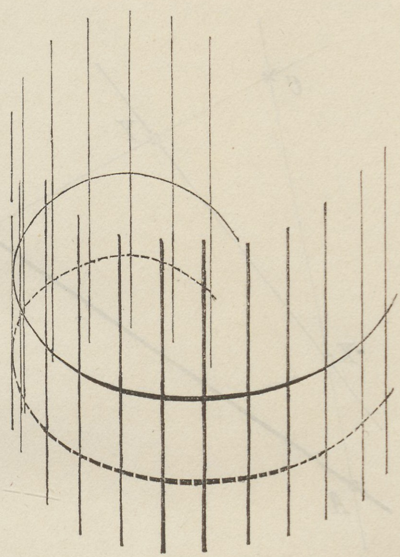


Fig. 2.

Daraus ergibt sich sofort, daß durch irgend drei Punkte eine Ebene bestimmt ist, so daß zwei Ebenen, welche drei Punkte gemeinschaftlich haben, ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen müssen.

Ebenso ist eine Ebene durch eine Gerade und irgend einen Punkt, ebenso durch zwei sich schneidende Gerade, also auch durch zwei parallele Gerade, ohne Zweideutigkeit bestimmt.

Lehrsatz 1. Jede Gerade, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemeinschaftlich hat, muß ganz in diese Ebene fallen.

Beweis: Die Ebene sei durch einen Punkt und eine Gerade gegeben; dann kann man diesen Punkt als ihr Zentrum C und diese Gerade als ihre Leitlinie l ansehen (Fig. 3). Wählt man nun auf dieser Ebene $C\,l$ zwei Punkte X und Y, so muß bewiesen werden, daß die Gerade $X\,Y$ mit allen Punkten in der Ebene $C\,l$ liegt. Zu dem Zwecke denke man sich an der Erzeugenden die beiden Lagen CX und CY. Als Lagen der Erzeugenden müssen diese beiden Geraden die Leitlinie l schneiden; das geschehe in den Punkten A und B. Nun haben wir zwei Ebenen, nämlich CAB und CXY. Da diese beiden Ebenen aber zwei sich schneidende Gerade gemeinschaftlich haben, nämlich CA und CB, so müssen sie ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen — wodurch bewiesen ist, daß alle Punkte der Geraden XY in die Ebene Cl zu liegen kommen.

Lehrsatz 2. Zwei Gerade, die auf derselben Ebene liegen, müssen sich notwendig schneiden.

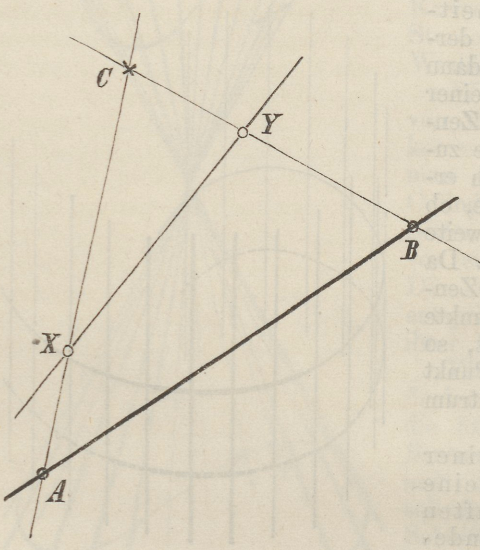


Fig. 3.

Beweis: Von den beiden Geraden kann ich die eine zur Leitlinie wählen und die andere als eine Lage der Erzeugenden betrachten — und als solche muß sie die Leitlinie schneiden.

Hat eine Gerade mit einer Ebene nur einen Punkt gemeinschaftlich, so sagt man, die Gerade schneidet die Ebene (Fig. 4).

Lehrsatz 3. Liegt eine Gerade nicht in einer Ebene, so schneidet sie dieselbe.

Beweis: Die gegebene Ebene hälftet den Raum und die beliebig gegebene unendliche Gerade wird im allgemeinen nicht ganz in nur einer dieser Hälften liegen. Von der einen dieser Raumhälften in die andere übertretend, muß die Gerade die Ebene durchstoßen, d. h. mit ihr einen Punkt gemeinschaftlich haben (Fig. 4).

Ob der besondere Fall eintreten kann, daß eine Gerade mit allen ihren Punkten in einer vorher bestimmten Hälfte des Raumes zu liegen kommt, und wann derselbe eintritt — soll später untersucht werden. Jedenfalls würde das Nichtschneiden die Ausnahme sein; das Schneiden die Regel.

Lehrsatz 4. Zwei Ebenen schneiden sich immer und zwar ist ihr Schnittgebilde eine Gerade.

Beweis: Zieht man in der einen der beiden Ebenen eine Gerade, so hat diese mit der zweiten Ebene einen Punkt gemeinschaftlich. Solcher Geraden kann man in der ersten Ebene unzählig viele ziehen — folglich haben die beiden Ebenen unzählig viele Punkte gemeinschaftlich. Würden aber auch nur drei dieser gemeinschaftlichen Punkte nicht in einer Geraden liegen, so müssten die beiden Ebenen ganz zusammenfallen — was wider die Voraussetzung ist.

Durch eine gegebene Gerade eine Ebene legen, heißt, die Ebene so wählen, daß die gegebene Gerade mit allen Punkten in dieser Ebene liegt. Legt man durch dieselbe Gerade zwei Ebenen, so ist diese Gerade die Schnittlinie der beiden Ebenen.

Lehrsatz 5. Drei Ebenen haben drei Schnittlinien.

Beweis: Die drei Ebenen seien I, II, III. Dann geben die Ebenen II und III die Schnittgerade 1; die Ebenen III und I die Schnittgerade 2; die Ebenen I und II die Schnittgerade 3. Daß diese drei Schnittgeraden in eine zusammenfallen können, ist ein Spezialfall, der dem allgemeinen Fall nicht widerspricht.

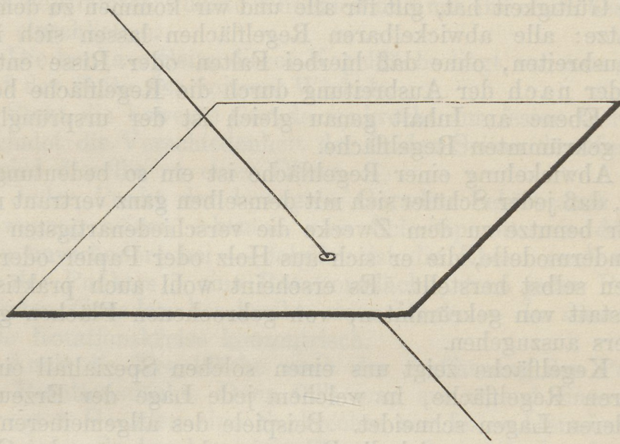


Fig. 4.

Lehrsatz 6. Die drei Schnittgeraden dreier Ebenen schneiden sich in einem Punkte.

Beweis: Aus dem unten folgenden Schema erhellet, daß je zwei dieser Schnittgeraden in einer Ebene liegen; es muß somit jede der drei Geraden jede andere schneiden.

2

I II III

3 1

Es liegen die Geraden 3 und 1 beide in der Ebene II; die Gerade 2 muß jede dieser Geraden schneiden, kann aber die Ebene II doch nur in einem Punkte treffen — folglich müssen die Geraden 2 und 3 beide durch diesen Punkt gehen.

§ 16. Unter den Regelflächen unterscheidet man die abwickelbaren und die windschiefen.

Abwickelbar werden diejenigen Regelflächen genannt, welche durch eine derartige Bewegung einer Geraden erzeugt werden können, daß jede folgende Lage der Erzeugenden die nächstvorhergegangene Lage schneidet.

Alle anderen Regelflächen heißen windschief.

Kegel- und Cylinderflächen gehören zu den abwickelbaren Regelflächen.

Betrachten wir drei auf einander folgende Lagen der Erzeugenden irgend einer abwickelbaren Regelfläche, so haben wir zwei Winkel mit einem gemeinschaftlichen Schenkel. Infolge dessen sind wir im stande, diese beiden Flächenelemente der gekrümmten Regelfläche auf einer Ebene zu summieren. Was für zwei solche Flächenelemente Gültigkeit hat, gilt für alle und wir kommen zu dem wichtigen Satze: alle abwickelbaren Regelflächen lassen sich in eine Ebene ausbreiten, ohne daß hierbei Falten oder Risse entstehen, so daß der nach der Ausbreitung durch die Regelfläche bedeckte Teil der Ebene an Inhalt genau gleich ist der ursprünglich gegebenen gekrümmten Regelfläche.

Die Abwickelung einer Regelfläche ist ein so bedeutungsvoller Vorgang, daß jeder Schüler sich mit demselben ganz vertraut machen muß. Er benutze zu dem Zwecke die verschiedenartigsten Kegel- und Cylindermodelle, die er sich aus Holz oder Papier oder Fäden am besten selbst herstellt. Es erscheint wohl auch praktisch zunächst, statt von gekrümmten, von gebrochenen Flächen gleichen Charakters auszugehen.

Die Kegelfläche zeigt uns einen solchen Spezialfall einer abwickelbaren Regelfläche, in welchem jede Lage der Erzeugenden alle anderen Lagen schneidet. Beispiele des allgemeineren Falles erhält man, wenn man sich die Bewegung der erzeugenden Geraden dadurch geregelt denkt, daß dieselbe stets Tangente an eine gegebene Raumkurve bleibt. Wählt man als Leitkurve die Schraubenlinie, so kann man sich aus Fäden das Modell einer abwickelbaren Schraubenfläche herstellen.

§ 17. Die Rotationsflächen sind durch den Charakter der Bewegung gekennzeichnet, durch welche sie erzeugt werden können.

Man sagt von einem Gebilde „es rotiert“ (zu deutsch: es führt eine drehende Bewegung aus), wenn jeder Punkt des bewegten Gebildes einen Kreis beschreibt. Diese Forderung kann nur erfüllt werden, wenn die Mittelpunkte aller dieser Kreise auf einer festen Geraden liegen. Diese Gerade führt den Namen Rotationsaxe und alle Kreise heißen Rotationskreise.

Zur Entwickelung der hierher gehörigen Anschauungen gehen wir von der Rotation einer Ebene um eine in ihr liegende Gerade aus. D. h. ich setze voraus, daß jeder Schüler sich an einem Modell diejenige Bewegung einer Ebene wirklich vorführt, welche noch möglich ist, nachdem eine bestimmte Gerade dieser Ebene unveränderlich fest gelegt ist.

Das Modell zeigt:

1) Es ist eine Bewegung der Ebene möglich.

2) Jede Gerade auf der Ebene behält auch während der Bewegung der Ebene ihren Schnittpunkt mit der festen Geraden unverändert bei; jede Gerade auf der Ebene erzeugt somit eine Kegelfläche.

3) Jede Gerade auf der Ebene bildet, trotz der Bewegung der Ebene, mit der Rotationsaxe unverändert denselben Winkel. Wir können somit die entstehende Kegelfläche als den geometrischen Ort für solche Gerade auffassen, die eine gegebene feste Gerade in einem bestimmten Punkte schneiden und mit ihr einen bestimmten Winkel einschließen.

4) Die konkave Seite dieser Kegelfläche liegt zur Axe gewandt; also auf der Seite des spitzen Winkels.

5) Steht die bewegte Gerade senkrecht zur festen Geraden, so verschwindet die Verschiedenheit der beiden Seiten der Kegelfläche — es wird dieselbe zu einer Ebene.

6) Jeder Punkt der bewegten Geraden behält auch während der Bewegung seinen Abstand vom Schnittpunkt mit der festen Geraden unverändert bei — folglich ist die Ebene nach der Auffassung des Punktes 5 eine Rotationsfläche; denn jeder Punkt der erzeugenden Geraden beschreibt einen Kreis. — In diesem Falle sind alle Rotationskreise konzentrisch.

7) Auch die Kegelfläche nach der Auffassung des Punktes 2 ist eine Rotationsfläche. Denn fällt man aus irgend einem Punkte der bewegten Geraden eine Senkrechte zur festen Geraden, so beschreibt diese Senkrechte eine Ebene und somit der betreffende Punkt einen Kreis.

8) Jeder Punkt der Ebene unseres Modells beschreibt einen Kreis — unsere Ebene rotiert. Und wirklich ist die feste Gerade der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Rotationskreise — was von der Rotationsaxe behauptet wurde.

§ 18. Aus dem Vorhergehenden schließen wir, daß die Forderung, ein gegebenes Gebilde solle um eine gegebene Axe rotieren, stets erfüllt werden kann, und zwar nur in einer Weise.

So ist z. B. auch die Forderung, ein einzelner Punkt solle um eine Axe rotieren, nur in einer Weise erfüllbar. Der Punkt beschreibt denjenigen Kreis, dessen Radius man findet, wenn man von ihm eine Senkrechte auf die Axe fällt. Alle Radien dieses Kreises stehen in demselben Punkte senkrecht zur Axe; dieselbe Eigenschaft zeigt jeder Rotationskreis.

Stereometrisch ist es also möglich, daß in demselben Punkte einer Geraden unzählig viele andere Gerade zu ihr senkrecht stehen.

Wenn man die Ebene als eine Rotationsfläche auffaßt, so gehört zu ihr eine Axe. Die Axe einer Ebene ist durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß alle Geraden, die man in der Ebene so zieht, daß sie durch den Schnittpunkt der Axe mit der Ebene gehen, zu der Axe senkrecht stehen. Infolge dieser Eigenschaft nennt man die Rotationsaxe einer Ebene ein Lot. Dann hat man den Satz: Jede Ebene steht lotrecht zu ihrer Rotationsaxe.

Die Ebene ist nicht nur die einfachste Regelfläche, sondern gleichzeitig auch die einfachste Rotationsfläche.

Sind irgend zwei beliebige Ebenen gegeben, so wird man doch jedesmal die folgenden Konstruktionen ausführen können. Man bestimme die Schnittlinie beider Ebenen, wähle auf der einen der beiden Ebenen irgend einen Punkt P und drehe diese Ebene um ihre Schnittlinie mit der anderen. Dann wird es allemal auf dieser anderen Ebene einen Punkt geben, der so liegt, daß man den Punkt P mit ihm zum Zusammenfallen bringen kann — dann müssen aber diese beiden Ebenen ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen. Daraus folgt, daß man jede Ebene mit jeder andern zur Deckung bringen kann und daß somit die verschiedenen Ebenen sich nur durch ihre Lagen im Raume von einander unterscheiden. Alle Ebenen haben gleiche Form und Größe.

§ 19. Wenn als rotierendes Gebilde eine Gerade gegeben ist, welche die Rotationsaxe schneidet, so entsteht eine Kegelfläche, welche den Namen führt: gerade Kreiskegelfläche.

Schneidet die rotierende Gerade die Rotationsaxe nicht, so entsteht eine windschiefe Regelfläche (einmanteliges Rotationshyperboloid). Die Anschauung dieser Fläche muß der Schüler sich wieder durch Modelle vermitteln.

Tritt der besondere Fall ein, daß die rotierende Gerade parallel zur Rotationsaxe liegt, so wird aus dem Hyperboloid eine Cylinderfläche (gerade Kreiscylinderfläche).

Eine solche gerade Kreiscylinderfläche kann auch definirt werden als der geometrische Ort solcher Punkte, welche alle von derselben Geraden denselben Abstand haben.

Schneidet man eine Rotationsfläche durch eine solche Ebene, welche durch die Rotationsaxe gelegt ist, so wird der hierbei erhaltene Schnitt ein Meridian genannt.

Lehrsatz 7. Alle Meridiane derselben Rotationsfläche sind unter einander kongruent.

Beweis: Wählen wir die Rotationsaxe zur Abscissen-Axe, so ist dieselbe allen Meridianen gemeinschaftlich und bei allen Meridianen gehören zu den gemeinschaftlichen Abscissen gleiche Ordinaten.

Demnach kann jede Rotationsfläche durch die Rotation einer solchen Kurve erzeugt werden, welche mit der Rotationsaxe in einer Ebene liegt.

Welche Form haben die Meridiane der Kreiscylinderfläche? Welche Form zeigen die Meridiane des Rotationshyperboloids? Demnach kann das Rotationshyperboloid als der geometrische Ort solcher Punkte aufgefaßt werden, die welchen Bedingungen entsprechen? Warum heißt unser Rotationshyperboloid „einmantelig"?

§ 20. Die wichtigste Rotationsfläche ist die Kugelfläche. Dieselbe entsteht, wenn ein Kreis um einen seiner Durchmesser rotiert.

Die Kugelfläche ist somit der geometrische Ort solcher Punkte, welche alle von einem gegebenen Punkte denselben Abstand haben. Aus dieser Auffassung folgt unmittelbar, daß jede Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Kugelfläche geht, dieselbe in einem Kreise schneiden muß, dessen Radius gleich ist dem Radius der Kugelfläche. Ferner ergibt sich, daß jeder Durchmesser der Kugelfläche zur Rotationsaxe gewählt werden darf; was auch schon daraus erhellet, daß kein Durchmesser vor dem anderen durch besondere Eigenschaften ausgezeichnet sein kann.

Lehrsatz 8. Schneidet eine Ebene eine Kugelfläche, so ist die Schnittlinie ein Kreis.

Beweis: Man kann stets einen solchen Durchmesser finden, welcher so liegt, daß der Schnitt der betreffenden Ebene mit der Kugelfläche, in Bezug auf ihn, zu einem Rotationskreise wird.

Lehrsatz 9. Die Schnittlinie zweier Kugelflächen ist ein Kreis.

Beweis: Jeder Punkt der Schnittlinie ist der dritte Eckpunkt eines solchen Dreiecks, dessen andere Eckpunkte die beiden Mittelpunkte sind; es stimmen somit alle diese Dreiecke in ihren drei Seiten überein. Wir können somit die Centrale als Rotationsaxe auffassen und jedes dieser Dreiecke als einen Meridianschnitt. Dann beschreibt der dritte Eckpunkt dieser Dreiecke einen Rotationskreis — das ist die Schnittlinie der beiden Kugelflächen.

§ 21. Da jeder Punkt der Kugelfläche als der eine Endpunkt einer Rotationsaxe angesehen werden kann, so gehören zu jedem Punkte einer Kugelfläche unzählig viele Meridianschnitte. Denkt man sich in diesem Punkte an jeden einzelnen der Meridiankreise seine Tangente gelegt, so stehen alle diese Tangenten in demselben Punkte zu derselben Geraden senkrecht — bilden somit eine Ebene. Diese Ebene heißt die Berührungsebene oder Tangentialebene an die Kugelfläche in dem betreffenden Punkte.

Lehrsatz 10. Ist eine Berührungsebene an eine Kugelfläche gegeben und man führt eine zweite Ebene, sonst beliebig, aber durch den Berührungspunkt, so muß die Schnittgerade dieser zweiten

Ebene mit der Berührungsebene Tangente sein an den Schnittkreis dieser zweiten Ebene mit der Kugelfläche.

Beweis: Die Schnittgerade hat mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemeinschaftlich; denselben und keinen anderen hat sie aber auch mit dem betreffenden Schnittkreise gemein, folglich muß dieser Punkt ein Doppelpunkt sein und sie somit eine Tangente.

Aus obigem erkennen wir die notwendige und genügende Definition der Tangentialebene. Dieselbe heißt: Die Berührungsebene ist der geometrische Ort aller Berührungsgeraden, die man in dem betreffenden Punkte an die gekrümmte Fläche konstruieren kann.

Sollte der geometrische Ort aller dieser Tangenten die Form einer Kegelfläche annehmen — ja dann gibt es für diesen Punkt der betreffenden gekrümmten Fläche keine Berührungsebene, sondern nur einen Berührungskegel.

§ 22. Gibt es für jeden Punkt einer beliebigen Kegelfläche eine Berührungsebene?

Ja! Jedoch haben alle diejenigen Punkte, welche auf derselben Mantellinie liegen, dieselbe Berührungsebene. Durch das Zentrum gehen unzählig viele Berührungsebenen, denn jede Berührungsebene an eine Kegelfläche muß durch das Zentrum derselben gehen.

Die Richtigkeit der obigen Behauptungen ergibt sich aus den folgenden Betrachtungen.

Die gegebene Kegelfläche sei durch ihr Zentrum und ihre Leitlinie bestimmt; dann gehört zu dem gegebenen Punkte, im allgemeinen, eine Mantellinie — diese denken wir uns gezogen. Diese Mantellinie gehört selbst auch zu den unzählig vielen Kurven, an welche wir die Tangenten zu konstruieren haben, um die Berührungsebene zu finden. Eine Tangente an eine Gerade ist aber diese Gerade selbst — folglich muß die durch den Berührungspunkt bestimmte Mantellinie in der Berührungsebene liegen. Wir erkennen hieraus sofort, daß dieselbe Regel für jede Regelfläche Giltigkeit hat. Speziell für die Kegelfläche folgt hieraus, daß jede Berührungsebene durch das Zentrum geht.

Schneidet man eine Kegelfläche mit einer beliebigen Ebene, so bestimmt diese ebene Schnittkurve, als Leitlinie benutzt, mit dem alten Zentrum dieselbe Kegelfläche. Das benutzen wir, um die gegebene Leitlinie durch eine solche ebene Kurve zu ersetzen, welche durch den gegebenen Berührungspunkt geht. Dann haben wir den Satz: Diejenige Gerade, welche diese neue Leitlinie in dem gegebenen Punkte berührt, bestimmt mit der Mantellinie dieses Punktes die gesuchte Berührungsebene.

Um die letzte Behauptung recht anschaulich zu machen, wollen wir die gesuchte Tangentenebene aus einer Sekantenebene entstehen lassen. Daß wir zu diesem Zweck nur eine solche Sekantenebene benutzen können, welche durch diejenige Mantellinie geht, auf welcher der Berührungspunkt liegt — das wissen wir schon; aber eine solche Ebene schneidet die Kegelfläche nur noch in einer oder mehreren Geraden — wir haben nur auf eine derselben unsere Aufmerksamkeit zu richten, ja, zu sicherer Begrenzung unserer Anschauungen wollen wir zunächst nur an eine Kreiskegelfläche denken.

Die Sekantenebene schneidet die Kegelfläche in zwei Mantellinien; diese Mantellinien schneiden den Leitkreis in zwei Punkten und bestimmen hierdurch eine Sekante zu diesem Leitkreise; dann können wir auch sagen, daß diese Sekantenlinie mit dem Zentrum die Sekantenebene bestimmt.

Drehen wir diese Sekantenebene um die Mantellinie des Berührungspunktes, so wird dann aus der schneidenden eine berührende Ebene werden, wenn die zweite Mantellinie mit der ersten zusammenfällt — das aber geschieht, wenn die entsprechende Sekante zur Tangente an den Leitkreis geworden ist. Es bestimmt somit diese Tangente mit dem Zentrum die Berührungsfläche, welche somit wirklich eine Ebene ist.

Aus der letzten Entwickelung ergibt sich noch die bedeutungsvolle Anschauung, daß eine Kegelfläche von einer Ebene nicht nur in einem Punkte, sondern längs einer ganzen Geraden berührt wird.[1])

Für eine Cylinderfläche wird in ganz gleicher Weise die Berührungsebene eines bestimmten Punktes gefunden.

In bezug auf Berührungsebenen an Regelflächen hat sich der Schüler seine Anschauungen, wiederum mit Hilfe von Modellen, gehörig zu befestigen.

Der Punkt, die Gerade und die Ebene sind die drei Elementargebilde der Stereometrie; nächst ihnen finden die Kugelfläche, die gerade Kreiskegelfläche und die gerade Kreiscylinderfläche die häufigste Anwendung.

§ 23. Setzen wir ein begrenztes Flächenstück in Bewegung, so entsteht ein neues Gebilde und zwar eines von drei Dimensionen. Die Grenzen dieses Gebildes sind Flächen — es ist der stereometrische Körper.

Eine unbegrenzte Fläche erzeugt, in Bewegung gesetzt, den unendlichen Raum; und zwar erzeugt jede, bei jeder Art Bewegung[2]), immer denselben unendlichen Raum. Wir sind demnach bei den Gebilden von drei Dimensionen nicht im stande, eine Einteilung derselben auf ihre Entstehung zu bauen.

---

[1]) Gilt das für alle Regelflächen?

[2]) Mit Ausnahme der wenigen Bewegungen in sich selbst.

In gleicher Weise geht uns jedes Verständnis ab für diejenigen Gebilde, welche durch Bewegung eines stereometrischen Körpers entstehen; wir müßten diesen Gebilden vier Dimensionen geben — und doch erscheinen sie uns immer wieder als stereometrische Körper, d. h. den unendlichen Raum können wir nur, als in sich selbst bewegt, uns denken.

Die Behauptungen dieses Paragraphen können nicht bewiesen werden; es hat jeder die Richtigkeit derselben aus seiner eigenen Erfahrung zu entnehmen.

Erster Abschnitt.

Über die Lagenbeziehung je zweier Elementargebilde.

§ 24. Über zwei Punkte wissen wir schon aus der Planimetrie, daß dieselben eine Gerade bestimmen. Ferner spricht man von ihrem Abstande und versteht darunter die geradlinige Strecke, welche durch diese beiden Punkte begrenzt wird.

§ 25. Ein Punkt und eine Gerade bestimmen eine Ebene. Der Punkt und die Ebene bilden somit auch nur ein planimetrisches Gebilde.

Wenn man von dem Abstande des Punktes von der Geraden spricht, so versteht man darunter die kürzeste Strecke, welche zwischen irgend einem Punkte der Geraden und dem gegebenen Punkte möglich ist. Bekanntlich liegt dieser Abstand auf einer solchen Geraden, welche senkrecht zur gegebenen Geraden steht.

§ 26. Zwei gerade Linien schneiden sich im allgemeinen nicht; in diesem Falle sagt man von ihnen, daß sie sich kreuzen.

Haben zwei Gerade einen Punkt gemeinschaftlich, so bestimmen sie eine Ebene; liegt ihr Schnittpunkt im Unendlichen, so nennt man die Geraden parallel.

Lehrsatz 11. Zwei Gerade, die zu einer dritten Geraden parallel liegen, sind auch untereinander parallel.

Beweis: Aus der Planimetrie wissen wir, daß, in unendlicher Entfernung, jede Gerade nur einen Punkt hat. Wenn daher die Geraden 1 und 2 die Gerade 3 in ihrem unendlich entfernten Punkte schneiden, so müssen die Geraden 1 und 2 sich auch schneiden; und da das erst im Unendlichen geschieht, so sind sie parallel.

Lehrsatz 12. Winkel, deren Schenkel auf parallelen Geraden liegen, sind entweder gleich oder supplementär. Der zweite Fall tritt ein, wenn das eine Paar Schenkel in entgegengesetzten Richtungen auf den parallelen Geraden liegt.

Beweis: Man nehme zunächst den Fall der gleichgerichteten Lage der beiden Schenkelpaare (Fig. 5). Man mache $\overline{SA} = \overline{TK}$ und $\overline{SB} = \overline{TL}$ u. s. w., so erkennt man leicht, daß die Dreiecke ASB und KTL kongruent sein müssen.

Man spricht auch von den Winkeln zweier sich kreuzenden Geraden und versteht darunter diejenigen, welche man erhält, sobald man durch irgend einen Punkt der einen Geraden eine Parallele zur anderen zieht. Daß es hierbei gleichgültig ist, welchen Punkt welcher der Geraden man wählt, um durch ihn die Parallele zur anderen Geraden zu legen, das beweist der vorhergehende Lehrsatz.

Man spricht von dem Abstande zweier sich kreuzenden Geraden und versteht darunter die kürzeste unter allen denjenigen Strecken, welche durch irgend zwei Punkte der beiden Geraden begrenzt sind.

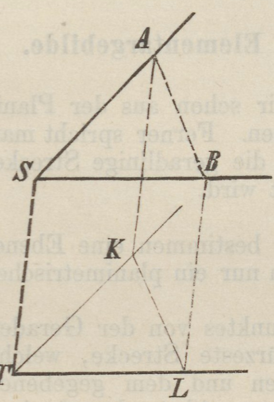


Fig. 5.

Lehrsatz 13. Der Abstand zweier Geraden muß auf einer solchen dritten Geraden liegen, welche zu beiden gegebenen Geraden senkrecht steht.

Beweis: So lange das nicht der Fall ist, läßt sich immer noch eine kürzere Strecke konstruieren.

Daß eine Gerade gleichzeitig zu zwei anderen Geraden senkrecht steht, setzt uns nicht mehr in Erstaunen, da wir aus der Einleitung wissen, daß eine Gerade sogar zu unzählig vielen anderen Geraden gleichzeitig senkrecht stehen kann.

§ 27. Wenn ein Punkt und eine Ebene gegeben sind, so spricht man von dem Abstande des Punktes von der Ebene und versteht darunter die kürzeste unter allen denjenigen Strecken, welche durch irgend einen Punkt der Ebene einerseits und durch den gegebenen Punkt andererseits begrenzt sind.

Lehrsatz 14. Der Abstand eines Punktes von einer Ebene liegt auf einer solchen Geraden, welche mit allen Geraden in der Ebene rechte Winkel bildet.

Beweis: Vorausgesetzt, die Gerade, auf welcher der Abstand des Punktes P von der Ebene E liegt, sei gefunden und der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene sei F genannt; so ist PF der Abstand. Die Mehrzahl der Geraden, die man in der Ebene E ziehen kann, werden durch den Punkt F nicht gehen, d. h. sie werden die Gerade PF kreuzen. Zur Bestimmung des Winkels einer solchen Geraden mit der Geraden PF hat man nach § 26 zu verfahren, und wir benutzen hierbei geschickter Weise den Punkt F. Da man zu jeder Geraden auf $[E]$ durch F eine Parallele ziehen kann, so wird PF mit allen Geraden auf $[E]$ rechte Winkel bilden, sobald sie nur zu denjenigen Geraden senkrecht steht, die durch F gehen.

Würde aber PF zu irgend einer Geraden, welche auf $[E]$ liegt und durch F geht, nicht senkrecht stehn, so könnte man sofort einen kürzeren Abstand als PF konstruieren.

In der Geraden PF erkennen wir ein Lot; der Punkt F heißt Fußpunkt.

Ein Lot soll auf unzählig vielen Geraden gleichzeitig senkrecht stehen! Unzählig vielen Bedingungen kann aber ein bestimmtes Gebilde nur dann genügen, wenn diese Bedingungen untereinander in Abhängigkeit stehen, sodaß es eine Minimalzahl von Bedingungen gibt, durch deren Erfüllung alle übrigen miterfüllt sind. Das zeigt für unseren Fall der folgende Lehrsatz.

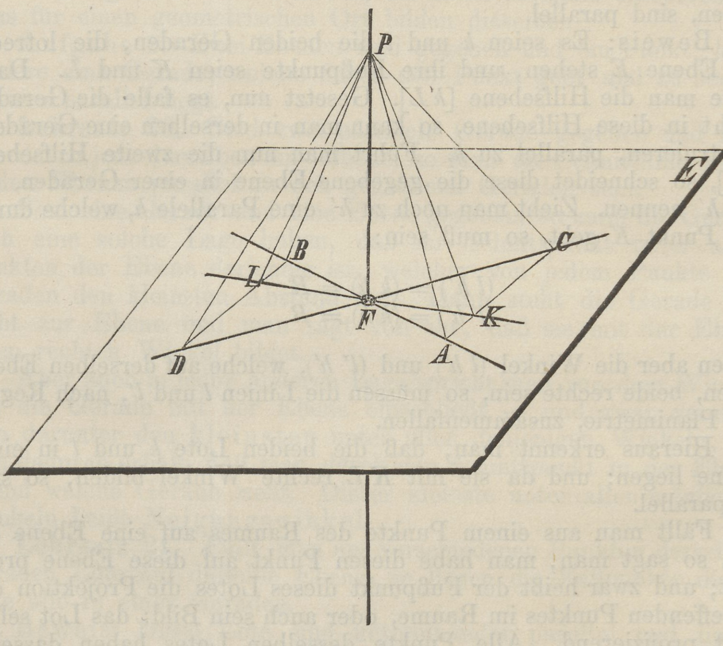


Fig. 6.

Lehrsatz 15. Jede Gerade, welche zu zwei Geraden einer Ebene senkrecht steht, ist ein Lot zu dieser Ebene.

Beweis: Es genügt, solche Gerade zu betrachten, welche durch den Fußpunkt des behaupteten Lotes gehen. Zu beweisen ist dann, daß die Gerade des Raumes PF, weil sie auf zweien durch F gehenden und auf der Ebene E liegenden Geraden senkrecht steht, auch zu jeder dritten Geraden, die man durch F in der Ebene E zieht, senkrecht stehen muß.

Zwei Gerade stehen senkrecht zu einander, wenn die Nebenwinkel, die sie bilden, gleich sind; die Gleichheit zweier Winkel wird am häufigsten durch die Kongruenz solcher Dreiecke bewiesen, in denen diese Winkel enthalten sind — so auch hier. Siehe Fig. 6.

Lehrsatz 16. Aus jedem Punkte des Raumes gibt es auf eine bestimmte Ebene nur ein Lot.

Beweis: Zwei Lote aus demselben Punkte würden eine Ebene bestimmen und da diese Hilfsebene die gegebene Ebene in einer Geraden schneiden müßte, so würde hierdurch ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen — was nicht sein kann.

Da aus ähnlichen Gründen in einem bestimmten Punkte einer Ebene nur ein Lot zu ihr errichtet werden kann, so sagt man: das Lot bestimmt die Stellung der Ebene.

Lehrsatz 17. Zwei Gerade, die zu derselben Ebene lotrecht stehen, sind parallel.

Beweis: Es seien k und l die beiden Geraden, die lotrecht zur Ebene E stehen, und ihre Fußpunkte seien K und L. Dann führe man die Hilfsebene $[k L]$. Gesetzt nun, es falle die Gerade l nicht in diese Hilfsebene, so kann man in derselben eine Gerade l' konstruieren, parallel zu k. Führt man nun die zweite Hilfsebene $[l\, l']$, so schneidet diese die gegebene Ebene in einer Geraden, die wir h' nennen. Zieht man noch zu h' eine Parallele h, welche durch den Punkt K geht, so muß sein:

$$(l\, h') = (k\, h) = R$$
$$(l'\, h') = (k\, h) = R$$

Sollen aber die Winkel $(l\, h')$ und $(l'\, h')$, welche auf derselben Ebene liegen, beide rechte sein, so müssen die Linien l und l', nach Regeln der Planimetrie, zusammenfallen.

Hieraus erkennt man, daß die beiden Lote k und l in einer Ebene liegen; und da sie mit KL rechte Winkel bilden, so sind sie parallel.

Fällt man aus einem Punkte des Raumes auf eine Ebene ein Lot, so sagt man, man habe diesen Punkt auf diese Ebene projiziert; und zwar heißt der Fußpunkt dieses Lotes die Projektion des betreffenden Punktes im Raume, oder auch sein Bild; das Lot selbst heißt projizierend. Alle Punkte desselben Lotes haben dasselbe Bild. Heißt ein Punkt im Raume P, so heißt sein Bild P'.

§ 28. Man sagt, Gerade und Ebene bestimmen einen Punkt, nämlich denjenigen, den sie gemeinschaftlich haben. Rückt dieser Schnittpunkt ins Unendliche hinaus, so nennt man die Gerade der Ebene parallel.

Lehrsatz 18. Sind zwei parallele Gerade gegeben, so ist jede Ebene, welche man durch eine dieser Geraden legt, parallel zur anderen Geraden.

Lehrsatz 19. Ist eine Gerade einer Ebene parallel und man legt durch diese Gerade Hilfsebenen, so müssen diese Hilfsebenen die gegebene Ebene in solchen Geraden schneiden, welche alle zur gegebenen Geraden und folglich auch untereinander parallel sind.

Aufgabe 1. Eine Ebene und ein Punkt sind gegeben; man soll durch den Punkt eine Gerade ziehen, welche parallel zur Ebene liegt.

Lösung: Man führe durch den Punkt eine beliebige Ebene, so wird diese die gegebene Ebene in einer Geraden schneiden; zu dieser Schnittlinie konstruiere man, nach planimetrischen Regeln, eine Parallele, welche durch den gegebenen Punkt geht.

Diese Aufgabe hat unzählig viele Lösungen, da man durch den Punkt unzählig viele Hilfsebenen legen kann.

Wie liegen wohl alle Geraden, die dieser Aufgabe entsprechen? Was für einen geometrischen Ort bilden dieselben?

Aufgabe 2. Zwei Ebenen sind gegeben und ein Punkt; konstruiere eine Gerade, welche durch den Punkt geht und zu beiden Ebenen parallel liegt.

Lehrsatz 20. Sind zwei parallele Gerade gegeben und man legt durch jede derselben eine Ebene, so muß die Schnittlinie dieser beiden Ebenen parallel zu den gegebenen Geraden sein.

Sind eine Gerade und eine Ebene gegeben, so kann die Gerade auch eine solche Lage haben, daß ihr Schnittpunkt unter allen Punkten der Ebene derjenige ist, welcher von jedem Punkte der Geraden den kleinsten Abstand hat. Dann steht die Gerade lotrecht zur Ebene und man sagt von ihr, daß sie mit der Ebene einen rechten Winkel bildet.

Aber auch in jeder anderen Lage spricht man von dem Winkel, den die Gerade mit der Ebene einschließt — und zwar versteht man darunter den kleinsten unter allen denjenigen Winkeln, die man dadurch erhält, daß man durch den Schnittpunkt in der Ebene irgend welche Gerade zieht. Dieser kleinste unter allen möglichen Winkeln heißt Neigungswinkel.

Lehrsatz 21. Fällt man aus verschiedenen Punkten derselben Geraden Lote auf dieselbe Ebene, so liegen die Fußpunkte dieser Lote alle in einer Geraden.

Beweis: Diese Lote sind untereinander parallel und liegen somit alle in einer Ebene[1]); der Schnitt dieser neuen Ebene mit der gegebenen Ebene ist der geometrische Ort aller Fußpunkte, dieser ist also eine Gerade.

Diese Hilfsebene, welche durch die projizierenden Lote erzeugt wird, heißt selbst auch projizierend und ihre Schnittlinie mit der gegeben Ebene heißt die Projektion der Geraden des Raumes auf die Ebene.

---

[1]) Parallele Verschiebung und Drehung um einen unendlich entfernten Punkt sind nur verschiedene Ausdrucksweisen für dieselbe Anschauung.

Lehrsatz 22. Der Neigungswinkel ist derjenige, den die Gerade mit ihrer Projektion auf die Ebene bildet.

Beweis: Zu beweisen ist, daß derjenige Winkel, den die Gerade mit ihrer Projektion einschließt, der kleinste unter allen ist. Zu dem Zwecke hat man die Thatsache zu benutzen, daß die Projektion der Geraden gefunden wird, indem man aus irgend einem Punkte P der Geraden ein Lot auf die Ebene fällt und den Fußpunkt P' dieses Lotes mit dem Schnittpunkt S der Geraden und Ebene verbindet. Dann ist zu beweisen, daß der Winkel PSP' der kleinste unter allen möglichen ist. Zieht man zu diesem Zwecke in der Ebene irgend eine Gerade durch S und trägt auf ihr ein Stück $SK = SP'$ ab, so ergibt sich aus dem Vergleich der Dreiecke PSK und PSP' sofort die Richtigkeit der Behauptung.

Lehrsatz 23. Eine Ebene, eine Gerade im Raume und ihre Projektion auf die Ebene sind gegeben. Zieht man jetzt in der Ebene durch den Schnittpunkt zwei gerade Linien so, daß sie mit der Projektion gleiche Winkel bilden, so müssen diese Linien auch mit der Geraden im Raume gleiche Winkel einschließen.

Beweis: Analog dem Beweise des vorhergehenden Lehrsatzes.

Infolge derjenigen Eigenschaft der Projektion einer Geraden, welche der Lehrsatz 23 aussagt, führt diese auch den Namen Symmetralaxe. Eine Gerade in der Ebene senkrecht zur Symmetralaxe heißt Indifferenzaxe.

Lehrsatz 24. Die Indifferenzaxe steht nicht nur senkrecht zur Projektion, sondern auch zur Geraden des Raumes.

Beweis: Dieser Lehrsatz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem vorhergehenden.

Lehrsatz 25. Die Indifferenzaxe ist ein Lot zur projizierenden Ebene ihrer Geraden.

§ 29. Zwei Ebenen schneiden sich ausnahmslos in einer Geraden. Jedoch kann der besondere Fall eintreten, daß die Schnittgerade zweier Ebenen, von irgend einem bestimmten Punkte der einen oder der anderen Ebene aus gemessen, in unmeßbare Entfernung hinausgerückt ist — dann nennt man die Ebenen parallel.

Lehrsatz 26. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so müssen die beiden Schnittlinien zu einander parallel sein.

Beweis: Die beiden Schnittlinien liegen in einer Ebene und müssen sich demnach schneiden; da ihr Schnittpunkt aber auch ein gemeinschaftlicher Punkt der beiden gegebenen Ebenen ist, so muß er im Unendlichen liegen.

Lehrsatz 27. Wenn in zwei Ebenen zwei Paare paralleler Geraden möglich sind (welche Paare nicht selbst untereinander parallel laufen), so müssen auch die Ebenen zu einander parallel liegen.

Beweis: Die zwei Paare paralleler Geraden bestimmen zwei Punkte der Schnittlinie beider Ebenen. Da beide diese Punkte im Unendlichen liegen, so bestimmen sie eine Gerade, welche auch ganz im Unendlichen liegt 7).

Daraus ergeben sich die folgenden Anschauungen und Ausdrucksweisen.

Alle unendlich entfernten Punkte einer Ebene liegen auf einer Geraden. Sobald von einer bestimmten Ebene noch irgend ein bestimmter Punkt ins Unendliche hinausgeschoben wird, so muß die ganze Ebene in unendliche Entfernung hinausrücken. Alle unendlich entfernten Punkte des stereometrischen Raumes sind demnach als auf einer Ebene liegend zu denken; oder auch, mit anderen Worten, als liegend auf einer Kugelfläche, deren Halbmesser unmeßbar groß ist. Jeder Punkt des Raumes kann als Mittelpunkt dieser Kugelfläche angesehen werden.

Aufgabe 3. Ein Punkt ist gegeben und eine Ebene; man soll durch den Punkt eine zweite Ebene so führen, daß dieselbe parallel zur gegebenen Ebene liegt.

Lösung: Durch zweimalige Anwendung der Aufgabe 1.

Aufgabe 4. Zwei Gerade sind gegeben; durch die eine Gerade soll eine Ebene geführt werden, parallel zur zweiten.

Aufgabe 5. Zwei Ebenen sind gegeben; zeichne auf denselben zwei solche Gerade, welche untereinander parallel sind.

Lehrsatz 28. Sind zwei beliebige Gerade gegeben und es werden dieselben durch drei untereinander parallele Ebenen geschnitten, so entstehen auf den Geraden proportionale Teile (Fig. 7).

Beweis: Zieht man $AH \mathrel{+\!\!\!\!=} KM$, so muß $FL \mathrel{+\!\!\!\!=} HM$ werden (Lehrsatz 26). Und nun zeigt die Figur die Zurückführung des stereometrischen Lehrsatzes auf den entsprechenden planimetrischen.

Man sagt von jeder Ebene, welche durch ein Lot geführt ist, daß sie senkrecht zur Grundebene steht, oder auch, daß sie mit der Grundebene einen rechten Winkel bildet. Die Umkehrung dieses Satzes lautet: Sind zwei Ebenen gegeben, die senkrecht zu einander stehen, und man fällt aus irgend einem Punkte der einen Ebene ein Lot auf die zweite, so muß der Fußpunkt dieses Lotes in die Schnittlinie beider Ebenen fallen.

Aber auch in jedem anderen Falle spricht man von einem Winkel, den zwei Ebenen einschließen. Man nennt denselben einen Flächenwinkel.

Sobald zwei Ebenen gegeben sind, so entstehen allemal vier Flächenwinkel (Scheitellinie, Schenkelebenen). In ihrer gegenseitigen Lage zu einander unterscheidet man auch hier Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

Um sich das Messen der Flächenwinkel zu erleichtern, konstruiert man solche Linienwinkel, deren Maßzahlen den Maßzahlen der betreffenden Flächenwinkel gleich sind; solche Linienwinkel heißen Maßwinkel.

Um zu einem gegebenen Flächenwinkel seinen Maßwinkel zu erhalten, führt man zur Scheitellinie eine lotrechte Ebene. Die

Schnittlinie dieser Hilfsebene mit den Schenkelebenen sind die Schenkellinien des Maßwinkels.

Zunächst ist klar, daß alle Maßwinkel desselben Flächenwinkels untereinander gleich sind. Ebenso müssen die Maßwinkel gleicher Flächenwinkel selbst auch gleich sein; denn gleiche Flächenwinkel können immer in eine solche Lage gebracht werden, daß ihre Schenkelebenen parallel liegen — wodurch die Schenkel der Maßwinkel auch parallel werden.

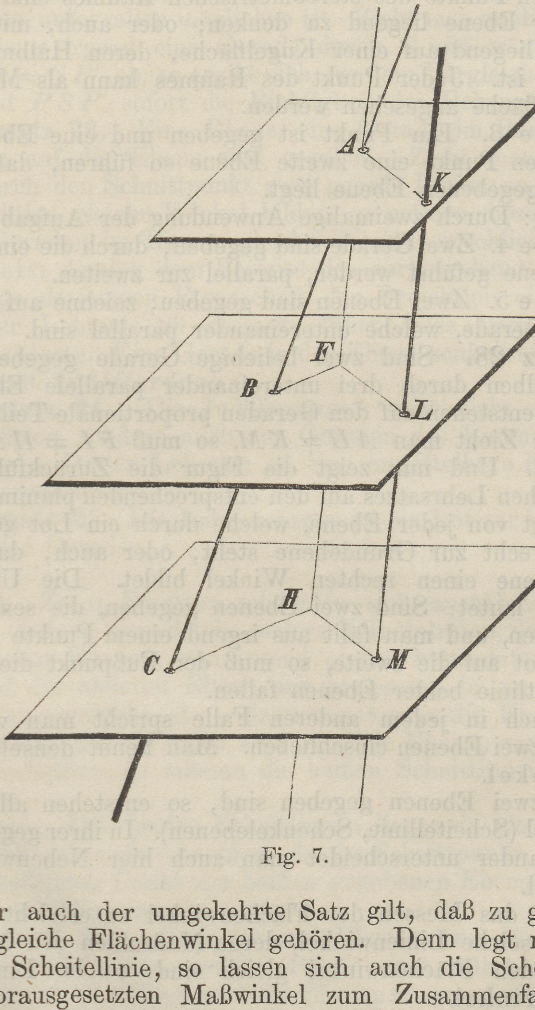


Fig. 7.

Aber auch der umgekehrte Satz gilt, daß zu gleichen Maßwinkeln gleiche Flächenwinkel gehören. Denn legt man Scheitellinie auf Scheitellinie, so lassen sich auch die Schenkel der als gleich vorausgesetzten Maßwinkel zum Zusammenfallen bringen; dann haben aber die entsprechenden Schenkelebenen der beiden Flächenwinkel je zwei sich schneidende Gerade gemeinschaftlich, folglich müssen diese Schenkelebenen zusammenfallen und somit die Flächenwinkel gleich sein.

Aufgabe 6. Hälfte einen Flächenwinkel.

Lösung: Konstruiere den Maßwinkel und hälfte diesen, so wird seine Hälftungslinie mit der Scheitellinie des gegebenen Flächenwinkels die gesuchte Halbierungsebene bestimmen.

Lehrsatz 29. Sind eine Ebene und ein Lot zu ihr gegeben und führt man durch dieses Lot irgend eine zweite Ebene, so bildet diese zweite Ebene mit der Grundebene einen solchen Flächenwinkel, dessen Maßwinkel ein rechter ist.

Beweis: Man ziehe in der Grundebene durch den Fußpunkt des Lotes eine Gerade senkrecht zur Scheitellinie des entstandenen Flächenwinkels, dann bildet diese mit dem Lote den Maßwinkel, welcher somit ein rechter ist. Demnach wird auch unter einem rechten Flächenwinkel derjenige verstanden, der seinem Nebenwinkel gleich ist und wir erkennen, daß die auf Seite 27 gegebene Erklärung des rechten Flächenwinkels mit der erst später festgestellten Bedeutung des Maßwinkels zusammenstimmt.

Lehrsatz 30. Fällt man aus irgend einem Punkte des Raumes Lote auf die beiden Schenkelebenen eines gegebenen Flächenwinkels, so entsteht ein Linienwinkel, der entweder dem Maßwinkel des gegebenen Flächenwinkels gleich ist, oder sein Supplement sein muß.

Lehrsatz 31. Stehen zwei Ebenen senkrecht zu derselben dritten Ebene, so ist ihre Schnittlinie ein Lot.

Beweis: Man errichte in den beiden Ebenen Lote zur Grundebene, so müssen dieselben untereinander parallel sein und folglich auch der Schnittlinie beider Ebenen (vergl. Aufgabe 5).

Lehrsatz 32. Ist eine Ebene gegeben und eine Gerade in ihr und man führt zu dieser Geraden eine zweite Ebene lotrecht, so entsteht ein rechter Flächenwinkel.

Lehrsatz 33. Sind beliebig viele Gerade, aber auf derselben Ebene liegend, gegeben und man führt zu jeder dieser Geraden eine lotrechte Ebene, so schneiden sich diese lotrechten Ebenen gegenseitig in parallelen Geraden.

Aufgabe 7. Zwei Gerade sind gegeben, führe durch die eine Gerade eine Ebene lotrecht zur zweiten.

Lösung: Diese Aufgabe ist nur für eine ganz bestimmte Lage der beiden Geraden zu einander lösbar; welche Lage ist das?

Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern der Stereometrie.

§ 30. Die einfachsten Körperformen sind: die Pyramide, das Prisma, der Kreiskegel, der Kreiscylinder, die Kugel.

Da die Kugelfläche eine in sich geschlossene ist, so hat man mit der Anschauung der Kugelfläche auch die des Kugelkörpers.

Der Kegelkörper entsteht aus der halben Kegelfläche, sobald man den von ihr umgrenzten Raum durch eine Ebene abschließt. Das Zentrum wird jetzt Spitze genannt; das ebene Begrenzungsstück heißt Grundfläche; das Lot aus der Spitze auf die Grundfläche heißt Höhe; und trifft das Höhenlot den Mittelpunkt des Grundkreises, so heißt der Kegel ein gerader. Der gerade Kreiskegel ist ein Rotationskörper.

Der Kreiscylinder entsteht aus der Kreiscylinderfläche dadurch, daß man den von ihr umgrenzten Raum mit Hilfe zweier paralleler Ebenen abschließt. Diese beiden ebenen Begrenzungsstücke heißen Grundflächen oder auch Grund- und Deckfläche; der Abstand der beiden Grundflächen heißt Höhe; die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte der beiden Grundkreise heißt Axe; und steht die Axe lotrecht zu den Grundflächen, so seißt der Cylinder ein gerader.

§ 31. Denken wir uns drei oder mehr Ebenen in solcher Lage, daß ihre Schnittlinien sich alle gegenseitig in demselben Punkte schneiden, so entsteht ein pyramidaler Raum.

Wenn der gemeinschaftliche Schnittpunkt aller Schnittlinien von drei oder mehr Ebenen ins Unendliche hinausrückt, so geht der pyramidale Raum in den prismatischen Raum über.

Die Schnittlinien werden in beiden Fällen Kantenlinien genannt.

Der pyramidale Raum ist von lauter Winkeln umgrenzt, welche den Namen Kantenwinkel führen oder auch Seiten des pyramidalen Raumes heißen. Je zwei aufeinander folgende Seiten eines pyramidalen Raumes bilden einen Flächenwinkel, und jeder Flächenwinkel eines pyramidalen Raumes muß kleiner als zwei rechte sein. Der pyramidale Raum hat ein Zentrum.

Der prismatische Raum ist durch ebene Parallelstreifen umgrenzt, die seine Seiten heißen. Zwei aufeinander folgende Seiten bilden einen Flächenwinkel und jeder Flächenwinkel eines prismatischen Raumes muß kleiner als zwei rechte sein.

§ 32. Sobald man den halben pyramidalen Raum durch eine Ebene abgrenzt (Fig. 32), so ensteht die Pyramide. Die Pyramide ist demnach ein Körper, welcher lauter Dreiecke zu Seitenflächen und ein Polygon zur Grundfläche hat. Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide ist wieder ein Dreieck. Der Abstand der Spitze von der Grundfläche heißt Höhe. Hat das Polygon der Grundfläche einen Mittelpunkt und fällt der Fußpunkt der Höhe mit diesem Mittelpunkt zusammen, so heißt die Pyramide eine gerade; ist gleichzeitig die Grundfläche ein regelmäßiges Polygon, so heißt die Pyramide selbst auch regelmäßig.

Sobald man den prismatischen Raum durch zwei parallele Ebenen abgrenzt (Fig. 33), so entsteht das Prisma. Das Prisma ist somit ein Körper, welcher lauter Parallelogramme zu Seitenflächen und zwei parallelliegende, kongruente Polygone zu Grundflächen hat. Stehen die Kantenlinien lotrecht zu den Grundflächen, so heißt das Prisma gerade; sind gleichzeitig die Grundflächen regelmäßige Polygone, so heißt das Prisma selbst auch regelmäßig.

Hat ein Prisma zu seinen Grundflächen Parallelogramme und ist dasselbe somit nur von Parallelogrammen umgrenzt, so heißt es Parallelepipedon.

Sind alle Seiten eines Parallelepipedons Quadrate, so heißt dasselbe Würfel oder Kubus.

§ 33. Werden die genannten Körper (ausgenommen die Kugel) durch irgend eine Ebene in zwei Teile zerlegt, so entstehen die sogenannten schief abgestumpften Körper; und zwar wird die Pyramide in eine Pyramide und in eine schief abgestumpfte Pyramide zerlegt, dagegen das Prisma in zwei schief abgestumpfte Prismen u. s. w. Wird die schneidende Ebene parallel zu den Grundflächen geführt, so entstehen gerade abgestumpfte Körper.

Durch gerade Abstumpfung werden Prisma und Cylinder nur in zwei Körper derselben Art zerlegt; dagegen ist die gerade abgestumpfte Pyramide ein Körper, der von lauter Trapezen als Seitenflächen und von zwei parallel liegenden ähnlichen Polygonen als Grundflächen umgrenzt ist. Der gerade abgestumpfte Kegel hat einen Kegelflächenstreifen zur Seitenfläche und zwei parallel liegende Kreise zu Grundflächen.

Wir werden es nur mit den gerade abgestumpften Körpern zu thun haben.

Der Schüler hat sich mit Hilfe von Modellen diejenigen planimetrischen Formen zur Anschauung zu bringen, welche entstehen, wenn die Mantelflächen von Kreiskegeln und Kreiscylindern abgewickelt werden. Hierbei empfiehlt es sich, zunächst die Seitenflächen von Pyramiden und Prismen abzuwickeln.

Die abgewickelte Mantelfläche eines geraden Kreiscylinders gibt ein Rechteck; die abgewickelte Mantelfläche eines geraden Kreiskegels wird zum Kreissektor.

Dritter Abschnitt.

Aufgaben.

A. Stereometrische Konstruktionsaufgaben, welche nur in Gedanken zu lösen sind.

§ 34. Die sieben Aufgaben im ersten Abschnitt gehören auch zu den Gedankenkonstruktionen.

Gleich den Aufgaben der Planimetrie setzen auch die Aufgaben der Stereometrie voraus, daß die Hilfsmittel vorhanden seien, um gewisse Konstruktionen unmittelbar ausführen zu können, sodaß auf der Möglichkeit der Erfüllung dieser Forderung die Ausführung aller anderen Aufgaben beruht.

So setzt z. B. die Planimetrie voraus, daß alle Punkte derjenigen Geraden bekannt seien, von welcher zwei Punkte gegeben waren oder gefunden wurden. Diese Forderung stellt die Stereometrie auch und fügt noch die analoge Forderung hinzu, daß jeder Punkt derjenigen Ebene als bekannt zu betrachten sei, von welcher drei Punkte gegeben sind.

Denselben Sinn haben die Sätze, daß durch eine Gerade und einen Punkt, oder auch durch zwei sich schneidende Gerade eine Ebene bestimmt ist.

Die Voraussetzung, daß durch zwei Gerade ein Punkt bestimmt ist, fällt für die Stereometrie fort; dagegen wird vorausgesetzt, daß wenn eine Gerade und eine Ebene bekannt sind, dann auch ihr Schnittpunkt unmittelbar auffindbar sei; desgleichen wird die Schnittlinie zweier Ebenen als gegeben betrachtet, sobald die Ebenen gegeben sind.

An die Stelle der Kreislinie tritt die Kugelfläche; auch die Benutzung des Rotationskegels und des Rotationscylinders ist der Stereometrie eigentümlich.

§ 35. Aufgabe 8. Eine Ebene ist gegeben und ein Punkt; das Lot aus diesem Punkte auf diese Ebene soll gefunden werden.

Lösung: Da das Lot eine Gerade ist und eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist, so genügt es, den Fußpunkt des gesuchten Lotes zu finden.

Zu dem Zwecke beschreibe man mit einem genügend großen Halbmesser eine Kugelfläche, so wird diese von der Ebene in einem Kreise geschnitten; der Mittelpunkt dieses Kreises ist der gesuchte Fußpunkt.

Diese Konstruktion ist praktisch unbrauchbar; wie wird man dieselbe für praktische Zwecke geschickter einrichten?

Auch folgendermaßen läßt sich diese Aufgabe lösen. Man führe durch den gegebenen Punkt P eine beliebige Ebene H; die Schnittlinie dieser Hilfsebene mit der gegebenen Ebene E sei x. Zieht man jetzt aus P eine Senkrechte zu x (das sei h) und durch ihren Schnittpunkt mit x eine zweite Gerade h', welche in der $[E]$ liegt und auch senkrecht zu x steht — so muß die $[h\,h']$, weil sie lotrecht zu x ist, senkrecht zur Grundebene sein. Folglich liegt der Fußpunkt des Lotes aus P auf der Geraden h'. Dieselbe Konstruktion kann man mit einer zweiten Hilfsebene G wiederholen und erhält dann eine Gerade g' als zweiten geometrischen Ort des gesuchten Fußpunktes.

Liegt der gegebene Punkt auf der gegebenen Ebene, dann werden sich die angegebenen Konstruktionen in welcher Weise ändern?

Aufgabe 9. Eine Ebene ist gegeben und eine Gerade; man soll durch die Gerade eine Ebene so führen, daß diese zweite Ebene senkrecht zur ersten steht.

Lösung: Siehe die Erklärung auf Seite 27 Absatz 9.

Aufgabe 10. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene lotrecht zu einer gegebenen Geraden zu führen.

Lösung: Punkt und Gerade bestimmen eine Ebene; in dieser fälle man aus dem Punkt eine Senkrechte zur Geraden; der Schnittpunkt beider sei F. Legt man jetzt durch die gegebene Gerade eine beliebige Hilfsebene und errichtet in ihr durch F eine zweite Senkrechte zur gegebenen Geraden, so bestimmen die beiden Senkrechten die gesuchte Ebene.

Man beachte, daß man zur Lösung stereometrischer Aufgaben sich am liebsten planimetrischer Konstruktionen bedient.

Aufgabe 11. Vier Punkte sind gegeben; durch einen bestimmten derselben eine Ebene so zu führen, daß die anderen drei Punkte von ihr gleiche Abstände haben. (Vier Lösungen.)

Aufgabe 12. Auf einer gegebenen Ebene denjenigen Punkt zu bestimmen, der von drei im Raume gegebenen Punkten gleiche Abstände hat.

Lösung: Im Mittelpunkte des durch die drei Punkte bestimmten Kreises errichte ein Lot zur Ebene dieses Kreises u. s. w.

Aufgabe 13. In einer gegebenen Ebene eine Gerade so zu ziehen, daß sie von zwei Punkten A und B des Raumes die Abstände a und b hat.

Lösung: Um A mit dem Halbmesser a und um B mit dem Halbmesser b beschreibe Kugelflächen; diese schneiden die gegebene Ebene in zwei Kreisen; eine gemeinschaftliche Tangente an diese Kreise ist die Lösung.

Aufgabe 14. Ein Punkt ist gegeben und zwei Gerade; gesucht ist diejenige Gerade, welche durch den Punkt geht und beide Gerade schneidet.

Lösung: Der Punkt bestimmt mit jeder der Geraden eine Ebene; die Schnittlinie dieser beiden Hilfsebenen ist die gesuchte Gerade.

Aufgabe 15. Konstruiere solche Gerade, welche drei gegebene Gerade schneiden.

Lösung: Man erhält eine windschiefe Regelfläche; der Schüler mache sich von derselben ein Modell.

Aufgabe 16. Zwei Gerade und eine Ebene sind gegeben; gesucht ist eine dritte Gerade, welche die beiden gegebenen Geraden schneidet und lotrecht zur Ebene steht.

Lösung: Man führe durch die beiden gegebenen Geraden zwei Ebenen senkrecht zur gegebenen Ebene; die Schnittlinie dieser beiden Hilfsebenen ist die gesuchte Gerade.

Aufgabe 17. Zwei sich kreuzende Gerade k und l sind gegeben; man bestimme ihren Abstand.

Lösung: Man lege durch k eine Ebene parallel zu l; dann fälle man aus irgend einem Punkte von l ein Lot auf diese Hilfsebene; durch den Fußpunkt dieses Lotes ziehe man eine Hilfsgerade parallel zu l; wo diese Hilfsgerade die gegebene Gerade k schneidet, dort ist einer der Punkte, welche den gesuchten Abstand bestimmen. Siehe Figur 8.

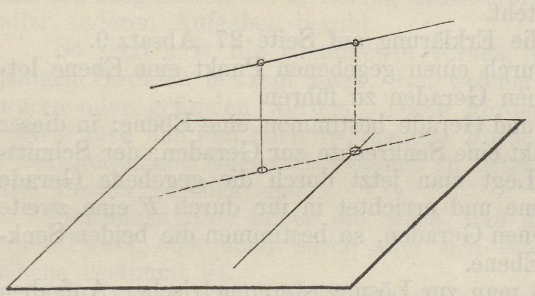


Fig. 8.

Aufgabe 18. Zwei Punkte sind gegeben; konstruiere den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte, welche so liegen, daß jeder derselben von den beiden gegebenen Punkten gleiche Abstände hat.

Lösung: Diejenige Ebene, welche den Abstand der beiden Punkte lotrecht hälftet.

Aufgabe 19. Konstruiere den geometrischen Ort solcher Punkte, welche von zwei Ebenen gleiche Abstände haben.

Lösung: Das sind die beiden Ebenen, welche die Flächenwinkel hälften.

Aufgabe 20. Zwei sich schneidende Gerade sind gegeben; gesucht ist der geometrische Ort solcher Punkte, von denen jeder von beiden Geraden gleiche Abstände hat.

Dieselbe Aufgabe kann auch mit folgenden Worten gestellt werden: Zwei sich schneidende Gerade sind gegeben; gesucht sind solche gerade Linien, welche mit den gegebenen Geraden gleiche Winkel bilden.

Aufgabe 21. Drei durch denselben Punkt gehende Gerade sind gegeben; gesucht sind solche Punkte, welche von allen drei Geraden gleiche Abstände haben.

Oder mit anderen Worten?

Lösung: Es ergeben sich vier gerade Linien; jede erscheint als die Schnittlinie dreier Ebenen, von denen jede den Bedingungen der vorhergehenden Aufgabe entspricht.

Aufgabe 22. Ein Punkt und eine Gerade sind gegeben; gesucht ist der geometrische Ort solcher Punkte, welche von beiden gleiche Abstände haben.

Lösung: Die planimetrische Lösung ist eine Parabel; benutze diese als Leitlinie für eine Gerade, die stets lotrecht zur gegebenen Ebene bleibt; so ergibt sich eine gerade parabolische Cylinderfläche.

Aufgabe 23. Ein Punkt und eine Ebene sind gegeben; konstruiere den geometrischen Ort solcher Punkte, welche von dem Punkt und von der Ebene gleiche Abstände haben.

Lösung: Führe durch den Punkt eine Hilfsebene senkrecht zur gegebenen Ebene und löse in ihr die Aufgabe planimetrisch u. s. w. Die Lösung ist ein Rotationsparaboloid.

Aufgabe 24. Zwei Gerade k und l sind gegeben und der Punkt P; bestimme auf k denjenigen Punkt, der von l und P gleiche Abstände hat.

Lösung: Es ist die Gerade k für den gesuchten Punkt ein geometrischer Ort; die Bedingung der gleichen Abstände vom Punkte und von der Geraden l liefert einen zweiten geometrischen Ort (siehe Aufgabe 22); die zwei Schnittpunkte dieser beiden geometrischen Orte sind die Lösungen.

Da wir den wohlbegründeten Wunsch haben, alle unsere Konstruktionen möglichst elementar zu halten, d. h. keine anderen Hilfsmittel anzuwenden, als nur diejenigen, welche den unvermeidlichen stereometrischen Grundforderungen entsprechen, in Verbindung mit den elementar-planimetrischen Konstruktionen — so ist die angegebene Lösung der Aufgabe 24 unseren Wünschen nicht entsprechend.

Für unsere Zwecke geschickter ist die folgende Lösung. Durch P und l lege man eine Ebene; dann projiziere man die Gerade k auf diese Ebene, wodurch man die Gerade k' erhält; jetzt löse man die gestellte Aufgabe in bezug auf P, k' und l nach Regeln der Planimetrie; der hierdurch auf k' gefundene Punkt X' ist die Projektion des gesuchten Punktes.

Aufgabe 25. Ein Punkt ist gegeben und eine Ebene; verlangt ist der geometrische Ort solcher Geraden, welche durch den gegebenen Punkt gehen und mit der gegebenen Ebene alle denselben bestimmten Winkel einschließen.

Lösung: Eine gerade Kreiskegelfläche, deren Axe lotrecht zur Ebene steht.

Aufgabe 26. Eine Ebene ist gegeben und ein gerader Kreiskegel, der mit seiner Grundfläche auf ihr steht; man soll Berührungsebenen an diesen Kegel legen und die Flächenwinkel messen, welche diese Berührungsebenen mit der gegebenen Ebene bilden.

Lösung: Alle diese Berührungsebenen bilden mit der Grundebene denselben Flächenwinkel, denn für alle erhält man Maßwinkel von gleicher Größe; derselbe ist gleich dem Neigungswinkel aller Mantellinien des gegebenen Rotationskegels.

Man nennt in diesem Falle die Kegelfläche die Umhüllungsfläche derjenigen Ebenen, welche alle durch denselben Punkt gehen und alle denselben Flächenwinkel mit der gegebenen Ebene bilden.

In gleicher Auffassung ist die Kugelfläche die Umhüllungsfläche solcher Ebenen, welche alle denselben Abstand von einem gegebenen Punkte haben.

Die gerade Kreiscylinderfläche ist die Umhüllungsfläche solcher Ebenen, welche alle von derselben Geraden denselben Abstand haben.

Die gerade Kreiscylinderfläche kann auch aufgefaßt werden als die Umhüllungsfläche solcher Kugelflächen, welche alle mit demselben Halbmesser beschrieben sind, während ihre Mittelpunkte auf einer gegebenen Geraden liegen.

Aufgabe 27. Welche Form hat die Umhüllungsfläche solcher Ebenen, welche zwei gegebene Kugeln berühren?

Aufgabe 28. Ein Punkt ist gegeben und eine Kegelfläche; s ist durch den Punkt eine Berührungsebene an den Kegel zu führen.

Lösung: Man führt durch den Punkt eine Ebene: diese schneidet die Kegelfläche in einer Kurve. Nun ziehe man von dem gegebenen Punkte aus Tangenten an diese Schnittkurve. Jede dieser Tangenten bestimmt eine Berührungsebene mit Hilfe derjenigen Mantellinie, die zu ihrem Berührungspunkte gehört.

Aufgabe 29. Ein Punkt ist gegeben und ein Kegelkörper; man soll durch den Punkt eine Ebene führen, welche die Mantelfläche des Kegelkörpers berührt.

Lösung: Man könnte hier genau wie bei der vorhergehenden Aufgabe verfahren; jedoch ist der folgende Weg geschickter.

Denken wir uns die Ebene des Grundkreises erweitert, so wird die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit der Spitze des Kegels diese Ebene schneiden; da dieser Schnittpunkt auch der gesuchten Berührungsebene angehört, so haben wir dieselbe Situation wie bei der Lösung der vorhergehenden Aufgabe erreicht.

Aufgabe 30. Eine Gerade ist gegeben und eine Kugelfläche; man lege durch die Gerade eine Berührungsebene an die Kugel.

Lösung: Durch den Mittelpunkt der Kugel führe man eine Ebene lotrecht zur Geraden; diese Hilfsebene schneidet die Kugelfläche in einem Kreise, die Gerade in einem Punkte; aus diesem Hilfspunkte führe man an den Hilfskreis Tangenten, dann bestimmen diese beiden Tangenten mit der gegebenen Geraden die beiden möglichen Berührungsebenen.

Aufgabe 31. Durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu führen, so daß sie von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat.

Aufgabe 32. Ein Punkt ist gegeben und eine Cylinderfläche; führe durch den Punkt eine Ebene, welche die Cylinderfläche berührt.

Aufgabe 33. Ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene sind gegeben; führe durch den Punkt eine Ebene parallel zur Geraden und senkrecht zur Ebene.

Aufgabe 34. Vier Punkte sind gegeben; bestimme eine Ebene, welche von allen gleiche Abstände hat.

Aufgabe 35. Drei parallele Gerade sind gegeben; bestimme diejenige vierte Gerade, welche von den drei gegebenen gleiche Abstände hat.

Aufgabe 36. Ein Punkt und eine Gerade sind gegeben; führe durch den Punkt eine Ebene, welche von der Geraden einen gegebenen Abstand hat.

Aufgabe 37. Ein Punkt P ist gegeben und zwei sich kreuzende Gerade l und m. Führe durch P eine Gerade, welche von den Geraden l und m die Abstände λ und μ hat.

Aufgabe 38. Ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene sind gegeben; bestimme auf der Geraden denjenigen Punkt, der von dem gegebenen Punkte und der gegebenen Ebene gleiche Abstände hat.

Aufgabe 39. Drei Kugeln sind gegeben; eine gemeinschaftliche Berührungsebene derselben ist gesucht.

Aufgabe 40. Eine schiefe vierseitige Pyramide soll durch eine Ebene so geschnitten werden, daß die Schnittfigur ein Parallelogramm wird.

B. Stereometrische Konstruktionsaufgaben mit Maßbestimmungen.

§ 36. Die Art und Weise, wie wir die stereometrischen Aufgaben bis hierzu behandelt haben, leidet an dem großen Mangel, daß dieselbe die Anwendung bestimmter Maße nicht gestattet.

Das Messen und messende Konstruieren verlangt die Anwendung von Werkzeugen; mit den Werkzeugen aber kommen Fehler in unsere Operationen hinein. Es gilt daher, die gesamten Operationen so einzurichten, daß dieser unvermeidliche mechanische Fehler so klein als möglich werde.

Unsere gegenwärtigen Betrachtungen beziehen sich auf Gebilde des Raumes; demnach sollten wir unsere Konstruktionen im Raume ausführen, d. h. wir sollten modellieren. Das aber ist (ganz abgesehen von aller Ungenauigkeit) für unsere Zwecke ganz und gar unmöglich.

Gesetzt z. B., wir sollten die Aufgabe lösen: den Abstand eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Ebene zu finden. Dann würden wir die gegebene Ebene wohl durch das Zeichnungspapier eines Reißbrettes darstellen können; aber die Lage des Punktes zur Ebene, wie soll diese festgestellt werden? Es muß zu dem Zwecke in das Reißbrett ein Loch gebohrt werden, um in dasselbe einen Stock zu stecken (im allgemeinen schief), dessen Ende den gegebenen Punkt darstellt. Nun muß eine Kugel modelliert werden und zwar in der Lage, daß ihr Mittelpunkt mit dem Endpunkt unseres Hilfsstockes zusammenfällt. Und wenn das geglückt sein sollte, dann müßte die feste Kugel das feste Reißbrett schneiden — das sind ganz unerfüllbare Forderungen.

Zwar wird man auch bei solchen Aufgaben mit weniger oder mehr Geschicklichkeit verfahren können; z. B. die eben behandelte Aufgabe folgendermaßen lösen. Mit einer genügend langen Strecke als Mantellinie beschreibt man die Mantelfläche eines Kegels, dessen Spitze mit dem gegebenen Punkte zusammenfällt und dessen Grundfläche auf der Ebene liegt; der Umfang dieser Grundfläche ist ein Kreis, der sich leicht beschreiben läßt, u. s. w.

Aber daß solche geschickte Wendungen nur Ausnahmen sein können, ergibt sich mit Notwendigkeit aus dem Umstande, daß schon die Grundforderungen der stereometrischen Konstruktionen mechanisch nicht ausführbar sind. Um durch drei Punkte eine Ebene zu legen, müßte man im allgemeinen Leim gebrauchen oder Nägel; wie soll man zwei Ebenen erweitern, um ihre Schnittlinie zu finden?

Das Modellieren ist zu wissenschaftlichen Konstruktionen, ist zu Maßbestimmungen ganz unbrauchbar.

§ 37. Es muß daher der Versuch gemacht werden, alle Konstruktionen auf eine Ebene zu übertragen; es muß das Modellieren durch das Zeichnen ersetzt werden. Wir haben demnach die Aufgabe zu lösen: die Objekte des Raumes auf einer Ebene so abzubilden, daß wir im stande sind, ihre wirkliche Gestalt und Größe, sowie ihre gegenseitige Lage im Raume, aus ihren Bildern zu erkennen.

Wir haben unsere Bildebene, auch Grund- oder Zeichnungsebene genannt, als eine Koordinatenebene anzusehen, d. h. es wird die Lage aller Objekte in bezug auf sie nach ganz bestimmten Regeln festzustellen sein. Die Wahl dieser Regeln steht uns frei; ihr wesentlichster Teil wird sich auf die drei Elementargebilde Punkt, Gerade und Ebene beziehen.

Sollte irgend ein Gebilde, z. B. die Grundfläche einer Pyramide, auf der Zeichnungsebene selbst liegen, so werden hierdurch für die Ausführung der ganzen Zeichnung bedeutende Vereinfachungen eintreten. Dazu kommt noch, daß in einem solchen Falle die wirkliche Gestalt und Größe dieses Gebildes nicht mehr ermittelt zu werden braucht, denn das Original ist mit seinem Bilde zusammengefallen. Daher wird es bei allen planimetrischen Gebilden immer wieder erwünscht sein, sie in die Zeichnungsebene zu bringen. Das geschieht ausnahmslos dadurch, daß man die Ebene, in der das Gebilde liegt, um ihre Schnittlinie mit der Zeichnungsebene so lange dreht, bis diese Ebene mit der Zeichnungsebene zusammenfällt.

Diesen Vorgang nennt man das Umklappen.

Das Umklappen ist eine Rotationsbewegung einer Ebene um eine Gerade, die auf ihr liegt, als Axe. Jeder Punkt einer umgeklappten Ebene hat demnach einen Kreisbogen beschrieben, dessen Mittelpunkt auf der Schnittlinie dieser Ebene mit der Zeichnungsebene liegt, dessen Halbmesser gleich ist dem Abstande des Punktes von dieser Schnittlinie, und dessen Ebene lotrecht zu dieser Schnittlinie steht (Fig. 9a). Zu beachten ist, daß während dieser Rotationsbewegung die gegenseitige Lage derjenigen Linien und Punkte, die auf der rotierenden Ebene liegen, sich nicht ändert. Demnach hat z. B. ein Punkt nach seiner Umklappung dieselbe Lage zur Rotationsaxe wie vorher.

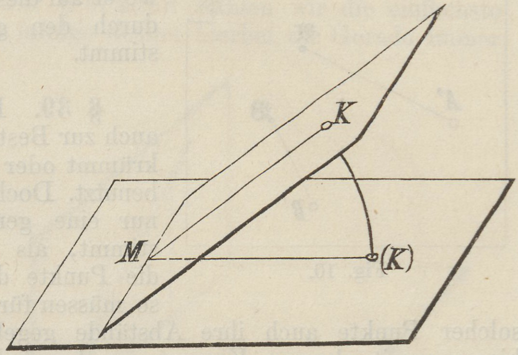


Fig. 9a.

Der Schüler mache sich aus dünnen Brettern Modelle und klappe z. B. ein Dreieck um, wobei es gut ist, die Seiten zu verlängern und auf deren Schnittpunkte mit der Drehungsaxe zu achten.

Soll eine Ebene umgeklappt werden, welche senkrecht zur Zeichnungsebene steht, so tritt der bedeutungsvolle Spezialfall ein, daß der Drehungshalbmesser jedes Punktes gleich ist seinem Abstande von der Zeichnungsebene (Fig. 9b).

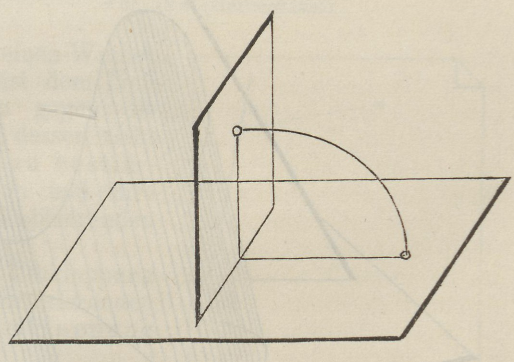


Fig. 9b.

§ 38. Wir bestimmen einen Punkt durch seine Projektion auf die Zeichnungsebene und seinen Abstand von derselben; letzterer ist negativ, wenn der Punkt unterhalb der Zeichnungsebene liegt;

die Zeichnungsebene wird stets horizontal gedacht. Die Art, wie zu zeichnen ist, siehe Fig. 10.

Ist von einem Punkte nur seine Projektion gegeben, so muß er auf demjenigen Lote liegen, welches in der gegebenen Projektion zur Zeichnungsebene errichtet wird; wo er auf diesem Lote liegt, das wird durch den gegebenen Abstand bestimmt.

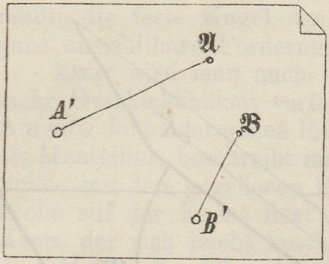


Fig. 10.

§ 39. In gleicher Weise wird auch zur Bestimmung jeder Linie (gekrümmt oder gerade) ihre Projektion benutzt. Doch da die Projektion allein nur eine gerade Cylinderfläche bestimmt, als geometrischen Ort für die Punkte der betreffenden Kurve, so müssen für eine genügende Anzahl solcher Punkte auch ihre Abstände gegeben sein. Weil wir es hier nur mit ebenen Kurven zu thun haben werden, so genügen

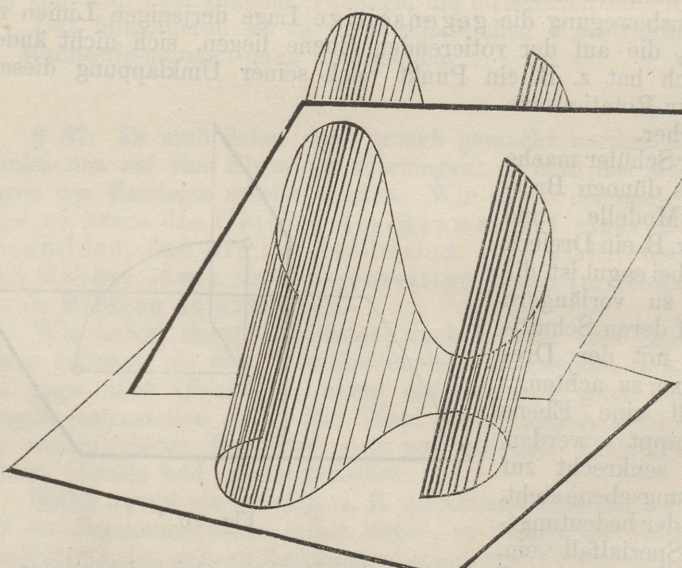


Fig. 11.

drei Abstände; und es erscheint dann die Kurve im Raume als der Durchschnitt einer Cylinderfläche mit einer Ebene (Fig. 11).

Bei einer Geraden genügen schon zwei Punkte zu ihrer Bestimmung, was auch damit stimmt, daß durch jede gerade Linie unzählig viele Ebenen gelegt werden können. In welcher dieser möglichen Ebenen wir uns die Gerade liegend denken, hängt von Umständen ab, und es wird oft vorkommen, daß wir uns dieselbe Gerade bald in der einen, bald in der anderen Ebene liegend werden zu denken haben.

Zur Bestimmung der Geraden wählen wir die einfachste Annahme und stellen uns infolge dessen hierbei die Gerade immer so vor, daß wir sie in ihrer projizierenden Ebene liegend sehen (Fig. 12a).

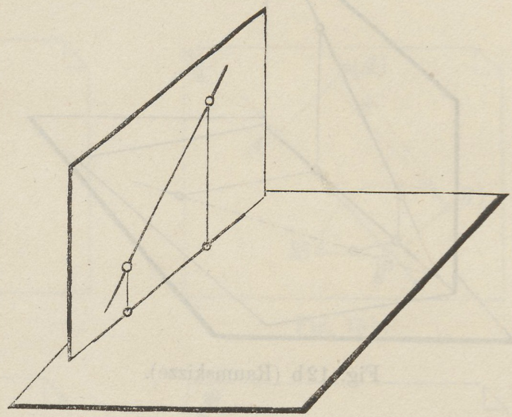
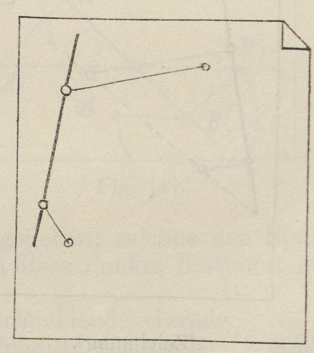


Fig. 12a (Raumskizze).

Leicht ist es, die projizierende Ebene einer Geraden umzuklappen, d. h. die Lage der mit ihr umgeklappten Geraden zu zeichnen (Fig. 12b).

Der Schnittpunkt der Geraden mit ihrer Projektion wird ihr Spurpunkt genannt.

Diese Umklappung der Geraden bildet mit ihrer Projektion einen Winkel, welcher an Größe gleich ist dem Neigungswinkel der Geraden gegen die Zeichnungsebene. Infolge dessen zieht man es vor, eine Gerade zu bestimmen durch ihre Projektion und ihre Umklappung mit ihrer projizierenden Ebene (Fig. 12b).



(Zeichnung).

Wir werden die Umklappung einer Geraden mit ihrer projizierenden Ebene ihre senkrechte Umklappung nennen.

Die senkrechte Umklappung einer Geraden zeichnen wir immer Strich zwei Punkte. Die Projektion und Umklappung sind fein schwarz zu zeichnen; die Abstandslote ganz hell fein.

Aufgabe 41. Zwei Punkte sind gegeben (Fig. 13a oder Fig. 14a); zeichne diejenige Gerade, welche durch dieselben bestimmt ist (Fig. 13b oder Fig. 14b).

Lösung: Sowohl den Gedanken als auch die Ausführung der Lösung soll der Schüler aus den beigefügten Figuren entnehmen.

In bezug auf die angewandten Benennungen sei ausdrücklich bemerkt, daß der Endpunkt des gegebenen Abstandslotes eines Punktes mit den entsprechenden Buchstaben des deutschen Alphabetes bezeichnet wird; dagegen die Umklappung eines Punktes mit einer bestimmten Ebene mit demselben, aber in Klammer gesetzten Buchstaben zu benennen ist.

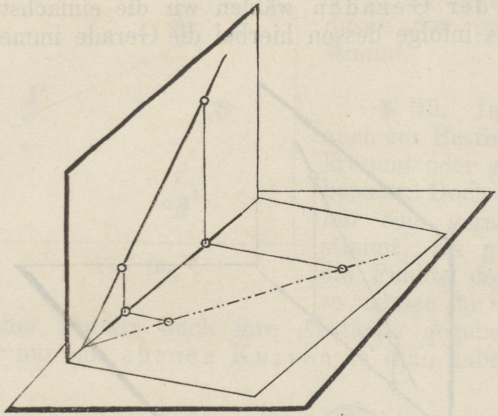


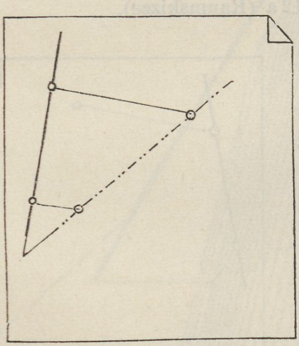
Fig. 12b (Raumskizze).

Aus der Zeichnung erkennen wir sofort die Richtigkeit der Gleichung:

$$(A)\,(B) = \overline{AB}$$

Aufgabe 42. Eine Gerade ist gegeben; wähle auf ihr zwei Punkte, deren Abstand 32 mm beträgt.

Lösung: Ich ziehe auf der Zeichnungsebene mit schwarzer Tusche eine feine Gerade und betrachte sie als die Projektion einer im Raum liegenden Geraden; dann ziehe ich mit derselben Tusche und in derselben Dicke, aber Strich zwei Punkte, auf der Zeichnungsebene eine zweite Gerade, welche ich als die senkrechte Umklappung derselben Geraden des Raumes betrachte; dann habe ich das gezeichnet, was die Voraussetzung meiner Aufgabe verlangt.



(Zeichnung).

Nun wähle ich auf der gezeichneten Projektion einen beliebigen Punkt A' und errichte in ihm zur Projektion eine Senkrechte, welche ganz hell fein zu zeichnen ist; diese Senkrechte schneidet die Umklappung der Geraden im Punkte (A). Hiermit habe ich das gethan, was durch die Worte verlangt wird: wähle einen Punkt auf der gegebenen Geraden.

Jetzt trage ich von (A) aus auf der Umklappung eine Strecke von 32 mm ab und erhalte so den Punkt (B); von dem letzteren aus ziehen wir hell fein die Senkrechte auf die Projektion herab und bestimmen hierdurch den Punkt B'.

Hiermit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Aufgabe 43. Die Projektionen und Abstände der drei Eckpunkte eines Dreiecks sind gegeben; zeichne das Dreieck in wirklicher Gestalt und Größe.

$$\text{Z. B. } A'B' = 25; \quad B'C' = 46; \quad C'A' = 61;$$
$$A'\mathfrak{A} = 33; \quad B'\mathfrak{B} = 14; \quad C'\mathfrak{C} = 47;$$

Lösung: Bestimme die wirkliche Länge der drei Seiten und trage dieselben zum richtigen Dreieck zusammen.

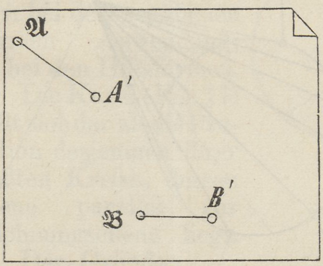


Fig. 13 a.

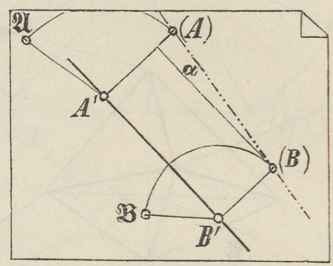


Fig. 13 b.

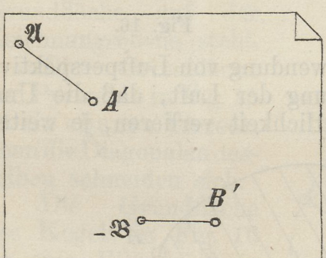


Fig. 14 a.

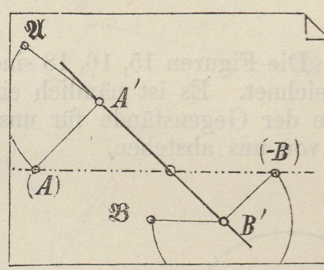


Fig. 14 b.

Aufgabe 44. Zwei Punkte sind gegeben; zeichne den Spurpunkt derjenigen Geraden, welche durch diese Punkte bestimmt ist. (Vergleiche die Figuren 13 und 14).

Aufgabe 45. Zeichne zwei sich schneidende Gerade.

Aufgabe 46. Zeichne durch den Schnittpunkt zweier Geraden eine dritte Gerade, welche parallel zur Zeichnungsebene liegt.

Aufgabe 47. Eine Gerade ist gegeben und ein Punkt; zeichne durch den Punkt eine zweite Gerade, welche der ersten parallel ist.

Aufgabe 48. Zeichne einen Kreis, welcher parallel zur Zeichnungsebene liegt.

Lösung: Alle Figuren, welche in Ebenen parallel zur Zeichnungsebene liegen, projizieren sich in wirklicher Gestalt und Größe.

Aufgabe 49. Zeichne einen rechten Winkel in solcher Lage, daß der eine seiner Schenkel parallel zur Zeichnungsebene liegt.

Lösung: Die Projektion eines rechten Winkels kann jede beliebige Größe zwischen 0^0 und 180^0 haben; liegt aber der eine Schenkel parallel zur Zeichnungsebene, so projiziert sich der rechte Winkel immer als rechter.

Es ist dieses ein sehr bemerkenswerter Spezialfall.

§ 40. Die Körper werden durch ihre Umrisse dargestellt (siehe die Figuren 15, 16, 17, 18).

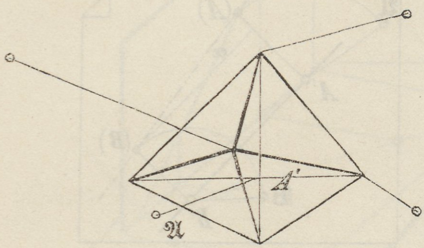


Fig. 15.

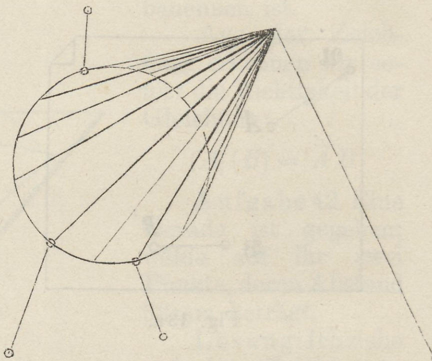


Fig. 16.

Die Figuren 15, 16, 18 sind mit Anwendung von Luftperspektive gezeichnet. Es ist nämlich eine Wirkung der Luft, daß die Umrisse der Gegenstände für uns an Deutlichkeit verlieren, je weiter sie von uns abstehen.

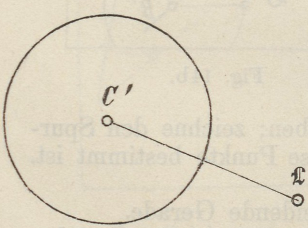


Fig. 17.

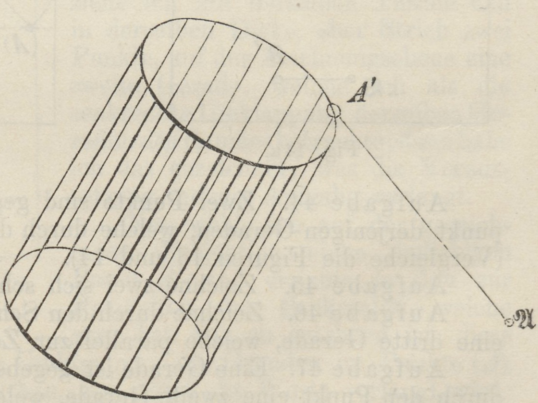


Fig. 18.

Streng genommen gehört die Luftperspektive gar nicht in unsere Zeichnungen hinein; denn unsere Zeichnungen sind planimetrische Hilfskonstruktionen zu stereometrischen Zwecken. Nicht Anschaulichkeit ist der Zweck unserer Zeichnungen, sondern mathematische Verwertbarkeit; daher ist äußerlich von unseren Zeichnungen nur Sauberkeit und Genauigkeit zu fordern.

Da aber Anschaulichkeit das Verständnis der Zeichnungen bedeutend erleichtert, so wird sie so weit in Anwendung gebracht, als sie die mathematische Brauchbarkeit der Zeichnung nicht schädigt. Infolge dessen finden die Veranschaulichungsmittel vorherrschend bei den Resultaten und wohl auch bei den gegebenen Formen Anwendung; nie bei den Hilfsformen.

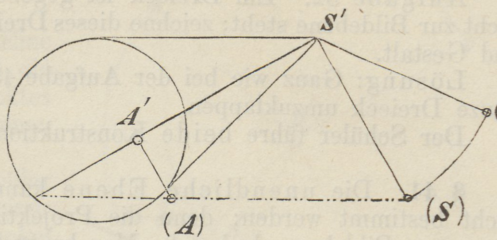


Fig. 19.

Die Kugel (Fig. 17) stellt sich dar als die Projektion desjenigen ihrer größten Kreise, dessen Ebene parallel zur Zeichnungsebene liegt.

Der Cylinder (Fig. 18) ist so gezeichnet, daß er mit seiner Grundfläche auf der Zeichnungsebene steht.

Die Grundfläche der Pyramide in Fig. 15 ist ein ebenes Viereck, denn die Diagonalen desselben schneiden sich.

Die Grundfläche des Kegels in Fig. 16 ist eine Ellipse, denn sie ist eine ebene Kurve, deren Projektion ein Kreis ist.

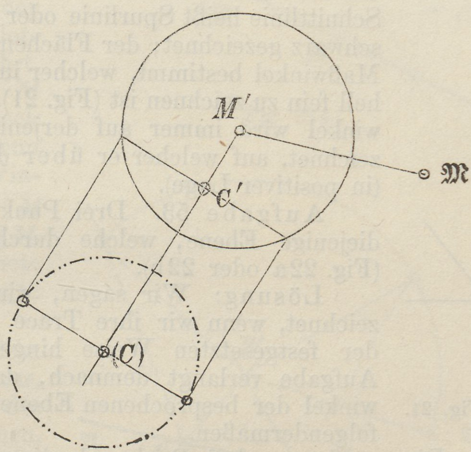


Fig. 20.

Aufgabe 50. Ein Kreiskegel ist gegeben, der mit seiner Grundfläche auf der Zeichnungsebene steht; ferner ist die Projektion eines Punktes der Mantelfläche dieses Kegels bekannt; man soll den zugehörigen Abstand bestimmen (Fig. 19).

Aufgabe 51. Eine Kugel ist gegeben und die Projektion eines solchen Kreises auf ihr, dessen Ebene senkrecht zur Bildebene steht. Man soll diesen Kreis umklappen (Fig. 20).

Lösung: Jeder Kreis, wie er auch im Raume liegen mag, wird immer einen solchen Durchmesser haben, der parallel zur Bildebene liegt und der sich somit in wirklicher Größe projiziert. In unserem Falle gibt die Länge der Sehne, in welcher der gegebene Kugelkreis sich projiziert, die wahre Länge seines Durchmessers an. Da ferner der Mittelpunkt unseres Kugelkreises denselben Abstand von der Zeichnungsebene hat wie der Mittelpunkt der Kugel selbst, so können wir die gewünschte Umklappung zeichnen, indem wir $M'\,C'$ senkrecht zur Sehne ziehen und $C'\,(C) = \overline{M'\,\mathfrak{M}}$ machen.

Aufgabe 52. Ein Dreieck ist gegeben, dessen Ebene senkrecht zur Bildebene steht; zeichne dieses Dreieck in wirklicher Größe und Gestalt.

Lösung: Ganz wie bei der Aufgabe 43. Hübscher ist es, das ganze Dreieck umzuklappen.

Der Schüler führe beide Konstruktionen aus.

§ 41. Die unendliche Ebene kann durch ihre Projektion nicht bestimmt werden; denn die Projektion jeder Ebene würde die ganze Bildebene decken.[1]) Man benutzt daher zur Bestimmung der Lage einer Ebene in bezug auf die Zeichnungsebene die Schnittlinie beider und ihren Flächenwinkel. Diese Schnittlinie heißt Spurlinie oder Trace und sie wird dick schwarz gezeichnet; der Flächenwinkel wird durch seinen Maßwinkel bestimmt, welcher in umgeklappter Lage ganz hell fein zu zeichnen ist (Fig. 21). Der umgeklappte Maßwinkel wird immer auf derjenigen Seite der Trace gezeichnet, auf welcher er über der Zeichnungsebene liegt (in positiver Lage).

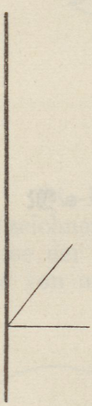


Fig. 21.

Aufgabe 53. Drei Punkte sind gegeben; zeichne diejenige Ebene, welche durch dieselben bestimmt ist (Fig. 22a oder 22b).

Lösung: Wir sagen, wir haben eine Ebene gezeichnet, wenn wir ihre Trace und ihren Maßwinkel in der festgesetzten Weise hingezeichnet haben. Unsere Aufgabe verlangt demnach, daß wir Trace und Maßwinkel der besprochenen Ebene auffinden. Das geschieht folgendermaßen.

Die gegebenen drei Punkte bestimmen drei Gerade, welche ganz in der gesuchten Ebene liegen; folglich sind die Spurpunkte dieser Hilfsgeraden notwendiger Weise Punkte der gesuchten Trace. Da zwei dieser Spurpunkte die Trace schon bestimmen, so bietet die Lage des dritten Spurpunktes eine Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung.

Indem wir uns nun durch einen der gegebenen Punkte, z. B. C, eine Ebene geführt denken lotrecht zur gefundenen Trace, und den Schnittpunkt beider mit M benennen, so erhalten wir im Raume das rechtwinkelige Dreieck $C\,C'\,M$. Dieses Dreieck hat bei M den gesuchten Maßwinkel; man klappe es um.

---

[1]) Mit welcher Ausnahme? Bemerkenswert ist es, daß jedes Gebilde durch das Projizieren eine Dimension verlieren kann, nie mehr.

Eine solche Gerade auf einer Ebene (wie CM), welche der zweite Schenkel des Maßwinkels dieser Ebene ist, wird die Linie des Gefälles dieser Ebene genannt.

Die Trace einer Ebene steht immer senkrecht zur Projektion ihrer Linie des Gefälles.

Aufgabe 54. Eine Ebene ist gegeben und die Projektion eines Punktes dieser Ebene; zeichne seinen Abstand.

Lösung: Der Schüler zeichne sich die Trace einer Ebene und deren Maßwinkel und dann wähle er die Projektion A'. Durch diese Projektion A' denke sich der Schüler eine Hilfsebene lotrecht zur Trace geführt, wodurch das Dreieck $A\,A'\,M$ entsteht. Dieses Dreieck kann man zeichnen, denn man kennt den rechten Winkel bei A', die Kathete $\overline{A'\,M}$ und den spitzen Winkel bei M. Die gefundene Kathete $\overline{A'\,(M)}$ ist der gesuchte Abstand.

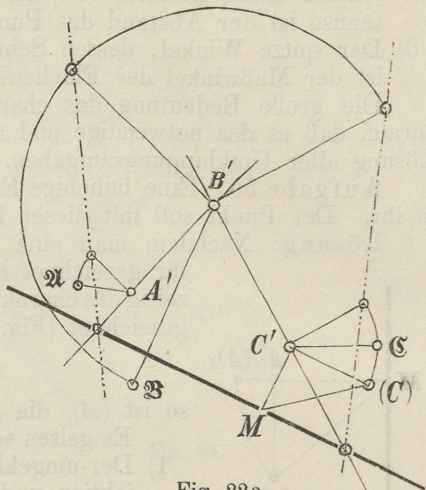


Fig. 22a.

Der Schüler führe diese Konstruktion wiederholt aus, indem er die Projektion des Punktes bald auf der einen, bald auf der anderen Seite derselben Trace wählt.

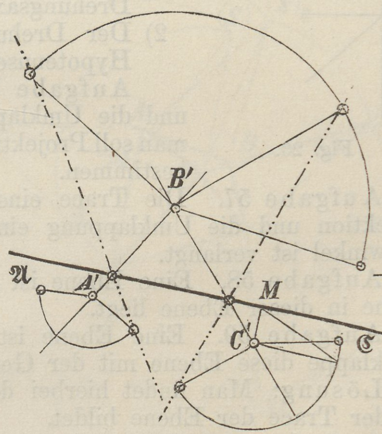


Fig. 22b.

§ 42. Dieses eben benutzte Dreieck $C\,C'\,M$ ist durch seine Beziehung zur Ebene und zum Punkte auf der Ebene von ganz besonderer Bedeutung. Daher führt dieses Dreieck auch einen eigenen Namen; man nennt es das charakteristische Dreieck.

Man merke sich sofort:

1) Jedes charakteristische Dreieck bezieht sich auf eine bestimmte Ebene und einen bestimmten Punkt in ihr.

2) Die eine Kathete des charakteristischen Dreiecks ist immer der Abstand des Punktes auf der Ebene im Raume von der Zeichnungsebene; die zweite Kathete ist der Abstand der Projektion dieses Punktes von der Trace der Ebene; die Hypotenuse ist der Abstand des Punktes selbst von der Trace.
3) Der spitze Winkel, dessen Scheitelpunkt auf der Trace liegt, ist der Maßwinkel des Flächenwinkels der Ebene.

Die große Bedeutung des charakteristischen Dreiecks beruht darauf, daß es das notwendige und ausreichende Hilfsmittel ist zur Lösung aller Umklappungsaufgaben. Z. B.

Aufgabe 55. Eine beliebige Ebene ist gegeben und ein Punkt in ihr. Der Punkt soll mit dieser Ebene umgeklappt werden.

Lösung: Nachdem man eine Ebene und einen Punkt A in ihr gezeichnet hat (Aufgabe 54), so ist gleichzeitig das charakteristische Dreieck $A\,A'\,M$ auch gezeichnet (Fig. 23). Macht man jetzt:

$$\overline{M\,(A)_1} = \overline{M\,(A)}$$

so ist $(A)_1$ die gesuchte Umklappung.

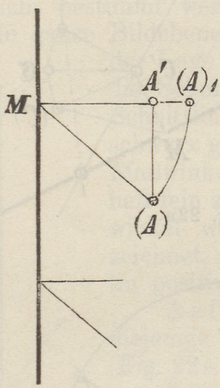


Fig. 23.

Es gelten somit die folgenden Beziehungen:
1) Der umgeklappte Punkt liegt mit der Projektion und mit dem Drehungsmittelpunkt in einer Geraden, welche senkrecht zur Drehungsaxe steht.
2) Der Drehungshalbmesser ist gleich der Hypotenuse des charakteristischen Dreiecks.

Aufgabe 56. Eine Ebene ist gegeben und die Umklappung eines Punktes derselben; man soll Projektion und Abstand dieses Punktes bestimmen.

Aufgabe 57. Die Trace einer Ebene ist gegeben und die Projektion und die Umklappung eines Punktes dieser Ebene; ihr Maßwinkel ist verlangt.

Aufgabe 58. Eine Ebene ist gegeben; zeichne eine Gerade, welche in dieser Ebene liegt.

Aufgabe 59. Eine Ebene ist gegeben und eine Gerade in ihr; klappe diese Ebene mit der Geraden um.

Lösung: Man findet hierbei den Winkel, den diese Gerade mit der Trace der Ebene bildet.

Aufgabe 60. Zwei sich schneidende Gerade sind gegeben; zeichne ihren Winkel in wirklicher Größe.

Aufgabe 61. Eine vierseitige Pyramide steht mit ihrer Grundfläche auf der Zeichnungsebene; man soll ihre Seitenflächen zeichnen.

Lösung: Da man die Grundlinien aller Seitendreiecke kennt, so hat man nur noch die wirkliche Länge der vier Seitenkanten zu ermitteln, was durch Umklappung der Dreiecke wie $S\,S'\,C$ glückt (siehe Figur 24).

Oder hübscher in folgender Weise. Klappt man das Dreieck SAD um (Fig. 25), so liegt die Umklappung von S, hier $(S)_4$, in derjenigen Geraden, welche von S' aus senkrecht zu AD steht. Benutzt man noch das charakteristische Dreieck $SS'M$, wodurch man findet:

$$\overline{M(S)_1} = \overline{M(S)},$$

so hat man das Seitendreieck $D(S)_1A$ gefunden. Zur Auffindung der übrigen Seitendreiecke benutzt man, daß

$$\overline{A(S)_2} = \overline{A(S)_1}$$

sein muß u. s. w.

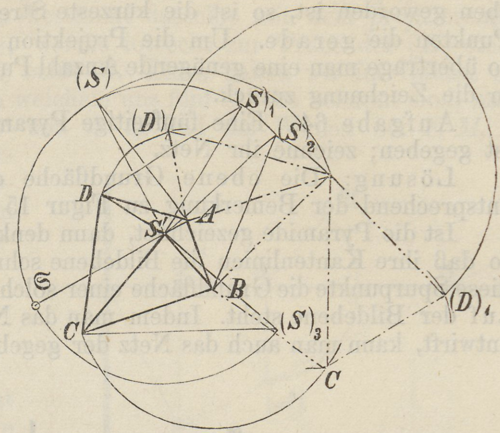


Fig. 24.

Breitet man die Umgrenzungsflächen eines Körpers in der Weise in eine Ebene aus, daß der Zusammenhang der einzelnen Flächen untereinander nach Möglichkeit gewahrt bleibt, so nennt man eine solche Zeichnung: das **Netz** des Körpers. So geben uns z. B. die Figuren 24 u. 25 Netze vierseitiger Pyramiden.

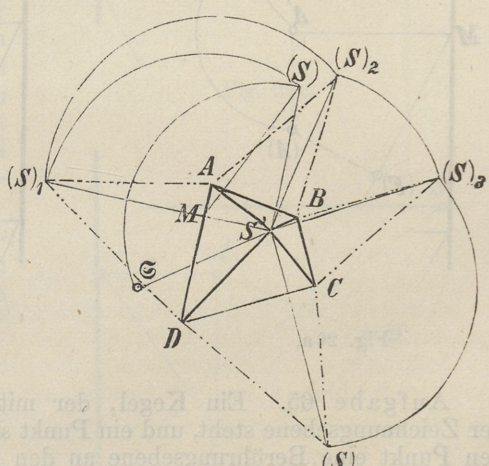


Fig. 25.

Aufgabe 62. Ein fünfseitiges Prisma steht mit seiner Grundfläche auf der Zeichnungsebene; entwirf sein Netz.

Aufgabe 63. Ein gerader Kreiskegel steht mit seiner Grundfläche auf der Zeichnungsebene, und zwei Punkte seiner Mantelfläche sind gegeben; zeichne diejenige Kurve, welche auf der Mantelfläche des Kegels den kürzesten Weg zwischen den beiden Punkten darstellt.

Lösung: Da bei der Abwickelung des Mantels sich seine

Dimensionen nicht ändern, so muß auch nach der Abwickelung die gesuchte Kurve den kürzesten Weg zwischen den beiden Punkten angeben. Da aber nach der Abwickelung die krumme Mantelfläche eben geworden ist, so ist die kürzeste Strecke zwischen den beiden Punkten die gerade. Um die Projektion der Kurve zu zeichnen, so übertrage man eine genügende Anzahl Punkte aus der Abwickelung in die Zeichnung zurück.

Aufgabe 64. Eine fünfseitige Pyramide, beliebig im Raume, ist gegeben; zeichne ihr Netz.

Lösung: Die ebene Grundfläche der Pyramide bestimme entsprechend der Bemerkung zu Figur 15 auf Seite 45 Absatz 4.

Ist die Pyramide gezeichnet, dann denke man dieselbe erweitert, so daß ihre Kantenlinien die Bildebene schneiden. Dann bestimmen diese Spurpunkte die Grundfläche einer solchen Hilfspyramide, welche auf der Bildebene steht. Indem man das Netz dieser Hilfspyramide entwirft, kann man auch das Netz der gegebenen Pyramide zeichnen.

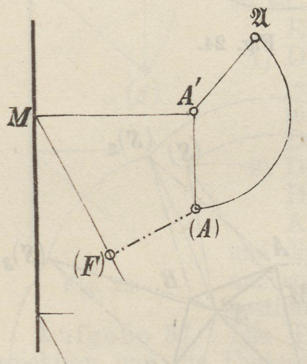


Fig. 26a.

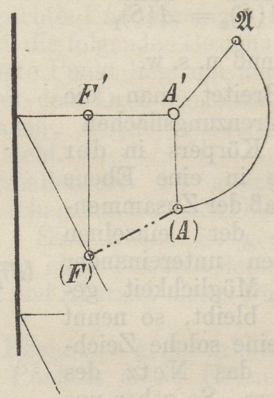


Fig. 26b.

Aufgabe 65. Ein Kegel, der mit seiner Grundebene auf der Zeichnungsebene steht, und ein Punkt sind gegeben; führe durch den Punkt eine Berührungsebene an den Kegel.

Lösung: Nach Aufgabe 29.

§ 43. Verhältnismäßig viel Schwierigkeiten bietet das Lösen gerade zweier Fundamentalaufgaben; nämlich die Ermittelung des Schnittpunktes von Ebene und Gerade und die Ermittelung der Schnittlinie zweier Ebenen.

Der Überwindung dieser Schwierigkeiten dienen die Aufgaben dieses Paragraphen.

Aufgabe 66. Eine Ebene E ist gegeben und ein Punkt A; gesucht ist der Abstand dieses Punktes von dieser Ebene.

Lösung: Denkt man sich von A das Lot auf $[E]$ gefällt (der Fußpunkt heiße F), so bestimmt dasselbe mit dem projizierenden Lote $A\,A'$ eine Ebene, welche lotrecht zur Trace der $[E]$ steht; der Schnittpunkt beider heiße M. Dann haben wir im Raume das Viereck $A\,F\,M\,A'$, von welchem uns fünf Stücke bekannt sind, nämlich: die Längen $A\,A'$ und $A'\,M$ und die Winkel bei F, M, A'. Zeichnen wir dieses Viereck in seiner Umklappung, so haben wir den gesuchten Abstand gefunden, nämlich:

$$\overline{(A)\,(F)} = \overline{A\,F}$$

(Fig. 26 a).

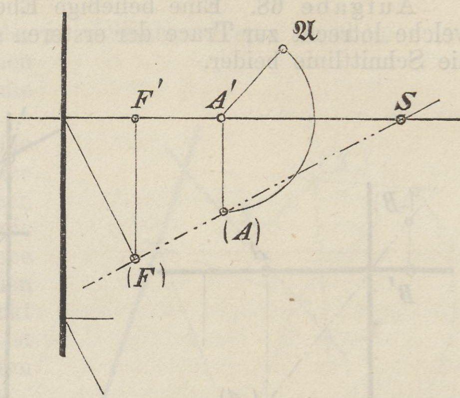


Fig. 26 c.

Diese Aufgabe hat der Schüler für positive und negative Punkte, für Punkte mit kleinem und mit großem Abstande, für Punkte mit Projektionen auf verschiedenen Seiten der Trace, für Ebenen mit großem und mit kleinem Flächenwinkel u. s. w. wiederholt auszuführen.

Hat man (F) gefunden, so ist es leicht auch die Projektion und den Abstand des Punktes F zu ermitteln (Fig. 26 b).

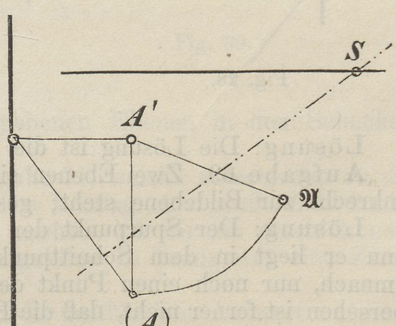


Fig. 27.

Denken wir uns $\overline{A'\,F'}$ und $\overline{(A)\,(F)}$ ohne Ende verlängert, so stellt $A'\,F'$ die Projektion und $(A)\,(F)$ die senkrechte Umklappung eines Lotes durch A zur $[E]$ dar und F ist der Schnittpunkt dieses Lotes mit seiner Grundebene (Fig. 26 c).

Man merke sich:

1) Die Projektion eines Lotes steht senkrecht zur Trace seiner Grundebene.

2) Der Neigungswinkel eines Lotes ist das Komplement des Maßwinkels seiner Grundebene.

Aufgabe 67. Ein Punkt ist gegeben und eine Gerade; lege durch den Punkt eine Ebene lotrecht zur Geraden.

Lösung: Man führe durch den Punkt eine Gerade, deren Projektion parallel zur Projektion der gegebenen Geraden liegt und deren Neigungswinkel das Komplement des Neigungswinkels der gegebenen Geraden ist; dann ist diese Gerade die Linie des Gefälles der gesuchten Ebene. (Fig. 27)

Aufgabe 68. Eine beliebige Ebene und eine zweite Ebene, welche lotrecht zur Trace der ersteren steht, sind gegeben; zeichne die Schnittlinie beider.

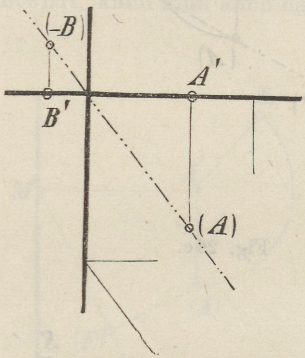


Fig. 28.

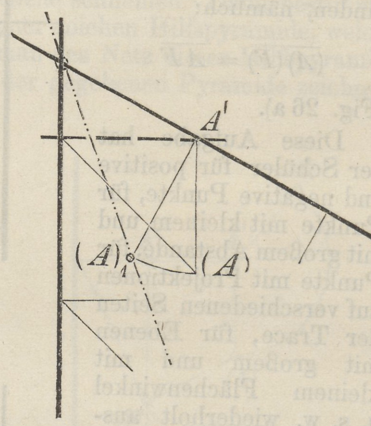


Fig. 29.

Lösung: Die Lösung ist die Linie des Gefälles (Fig. 28).

Aufgabe 69. Zwei Ebenen sind gegeben, von denen die eine senkrecht zur Bildebene steht; gesucht ist die Schnittlinie beider.

Lösung: Der Spurpunkt der gesuchten Geraden ist bekannt, denn er liegt in dem Schnittpunkt der beiden Tracen. Es gilt demnach, nur noch einen Punkt der Schnittlinie zu ermitteln. Zu übersehen ist ferner nicht, daß die Projektion der gesuchten Schnittlinie auch schon bekannt ist. Denn die zur Bildebene senkrecht stehende Ebene ist eine projizierende Ebene und es liegt daher die Projektion ihrer Schnittlinie in ihrer Trace.

Wählen wir auf dieser Trace einen Punkt, so können wir denselben als die Projektion eines Punktes der gesuchten Schnittlinie betrachten und wir haben nur noch den Abstand dieses Punktes zu ermitteln. Zu diesem Zwecke wähle man eine Hilfsebene, welche durch diesen Punkt geht und welche lotrecht zur Trace der geneigt liegenden Ebene steht. Dann haben wir drei Ebenen, folglich drei

Schnittlinien, aber nur einen Schnittpunkt derselben. Da wir die Schnittlinien unserer Hilfsebene mit den beiden gegebenen Ebenen leicht zeichnen können, so finden wir durch dieselbe einen Punkt der gesuchten Geraden. (Fig. 29).

Aufgabe 70. Eine Ebene ist gegeben und eine Gerade; gesucht ist der Schnittpunkt beider.

Lösung: Man zeichne die Schnittlinie der projizierenden Ebene dieser Geraden mit der gegebenen Ebene; der Schnittpunkt dieser Hilfsgeraden mit der gegebenen Geraden ist der gesuchte Punkt (Fig. 30).

Diese Aufgabe ist wieder in vielfachen Lagen zu üben.

Aufgabe 71. Zwei Ebenen sind gegeben; ihre Schnittlinie ist gesucht.

Lösung: Man wähle eine Hilfsebene lotrecht zur Trace der einen der gegebenen Ebenen; dann kann man die Schnittlinien dieser Hilfsebene mit den gegebenen Ebenen konstruieren; der Schnittpunkt dieser beiden Hilfsgeraden ist auch ein Punkt der gesuchten Linie.

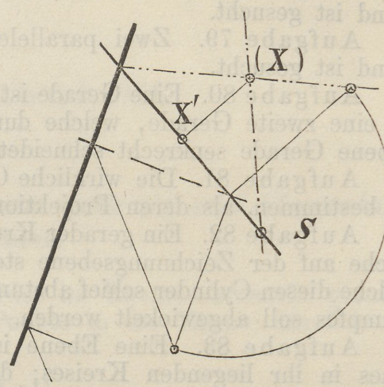


Fig. 30.

Aufgabe 72. Zwei Ebenen sind gegeben; die Größe ihres Flächenwinkels ist gesucht.

Lösung: Man führe zur Schnittlinie der gegebenen Ebenen eine lotrechte Hilfsebene, so wird dieselbe die gegebenen Ebenen in den Schenkeln des Maßwinkels schneiden.

Der Umstand, daß die Aufgabe 71, welche entschieden zu den Elementaraufgaben gehört, zu ihrer Lösung eine große Zahl Linien beansprucht, muß uns zweifeln machen, ob wir die geschickteste Art der Bestimmung der Raumgebilde in bezug auf eine Zeichnungsebene angewandt haben.

Die „Projektionslehre“ wird die ausführliche Antwort auf diese Zweifel geben.

§ 44. Im klassischen Gymnasium wird die Zeit wohl nur zur Durchnahme etwa der Hälfte der bis hierzu vorgeführten Aufgaben ausreichen. Für den Schüler des Realgymnasiums dagegen genügen dieselben noch nicht. Zu weiterer Übung mögen die folgenden dienen.

Aufgabe 73. Zeichne drei Gerade, die in derselben Ebene liegen.

Zwei Lösungsarten: einmal mit Benutzung der Ebene, d. h. ihrer Trace und ihres Maßwinkels, und zweitens ohne diese zu benutzen.

Aufgabe 74. Zeichne ein ebenes Siebeneck.

Aufgabe 75. Die Projektion einer bestimmten ebenen Kurve ist gegeben; ermittele für einen beliebigen Punkt dieser Kurve seinen Abstand.

Aufgabe 76. Eine Gerade ist gegeben und ein Punkt; zeichne durch den Punkt eine solche Gerade, welche parallel zur Zeichnungsebene liegt und die gegebene Gerade schneidet.

Aufgabe 77. Eine Gerade ist gegeben; man soll durch dieselbe eine Ebene legen, welche mit der Zeichnungsebene einen Flächenwinkel von gegebener Größe einschließt.

Aufgabe 78. Zwei parallele Ebenen sind gegeben; ihr Abstand ist gesucht.

Aufgabe 79. Zwei parallele Gerade sind gegeben; ihr Abstand ist gesucht.

Aufgabe 80. Eine Gerade ist gegeben und ein Punkt; gesucht ist eine zweite Gerade, welche durch den Punkt geht und die gegebene Gerade senkrecht schneidet.

Aufgabe 81. Die wirkliche Gestalt derjenigen ebenen Kurve zu bestimmen, als deren Projektion ein Kreis gegeben ist.

Aufgabe 82. Ein gerader Kreiscylinder, der mit seiner Grundfläche auf der Zeichnungsebene steht, ist gegeben und eine Ebene, welche diesen Cylinder schief abstumpft; der Mantel dieses Cylinderstumpfes soll abgewickelt werden.

Aufgabe 83. Eine Ebene ist gegeben und die Umklappung eines in ihr liegenden Kreises; die Projektion dieses Kreises zu zeichnen.

Aufgabe 84. Eine vierseitige Pyramide steht mit ihrer Grundfläche auf der Zeichnungsebene und wird durch eine gegebene Ebene schief abgestumpft; das Netz dieses Stumpfes soll gezeichnet werden.

Aufgabe 85. Ein Kegel, der mit seiner Grundebene auf der Zeichnungsebene steht, wird von einer Geraden geschnitten; die Länge der Sehne ist gesucht.

Aufgabe 86. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen mit bestimmter Neigung zu einer gegebenen Geraden.

Aufgabe 87. Eine Ebene ist gegeben und ein Punkt auf ihr; zeichne mit gegebenem Halbmesser eine Kugel, welche die Ebene in dem gegebenen Punkte berührt.

Aufgabe 88. Eine Ebene ist gegeben und eine Gerade auf ihr; drehe die Ebene um ihre Trace um einen gegebenen Winkel und zeichne die Gerade in ihrer neuen Lage.

Aufgabe 89. Drehe eine gegebene Ebene um ihre Trace, bis sie durch einen gegebenen Punkt geht.

Aufgabe 90. Zwei Gerade sind gegeben; zeichne ihren Abstand.

Aufgabe 91. Ein elliptischer Kegel, frei im Raume stehend, ist gegeben und ein Punkt; lege durch den Punkt eine Berührungsebene an den Kegel.

Aufgabe 92. Eine Kugel ist gegeben und eine Gerade, welche die Kugel schneidet; bestimme die Sehne.

Aufgabe 93. Führe eine Ebene durch eine gegebene Gerade in gegebenem Abstande von einem gegebenen Punkte.

Aufgabe 94. Zeichne durch einen gegebenen Punkt drei Gerade senkrecht zu einander (Axenkreuz).

Vierter Abschnitt.

Über die gegenseitige Lage von mehr als zwei Elementargebilden.

§ 45. Durch n Punkte werden im Raume ebensoviel gerade Linien bestimmt, wie durch n Punkte in der Ebene; nämlich so viele, als die Formel angibt:

$$\frac{n \,.\, (n-1)}{1 \,.\, 2}$$

Durch n Punkte werden im Raume ebensoviele Ebenen bestimmt, als in der Ebene Kreise; nämlich so viele, als die Formel angibt:

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

§ 46. Es haben n gerade Linien im allgemeinen keinen Punkt gemeinschaftlich; dagegen kann man nach der Anzahl der Abstände fragen, welche durch sie bestimmt sind, und nach der Anzahl ihrer Winkel.

Tritt der Spezialfall ein, daß alle Gerade durch denselben Punkt gehen, so entsteht das Strahlenbündel.[1]) Am wichtigsten ist der Dreistrahl.

§ 47. Da je zwei Ebenen eine Gerade bestimmen, so werden durch n Ebenen ebensoviel Gerade bestimmt, wie durch n Punkte.

---

[1]) Welches Gebilde führt den Namen: Strahlenbüschel?

Am bedeutungsvollsten ist der Spezialfall, daß alle Ebenen durch denselben Punkt gehen; dieses Gebilde führt den Namen: das Ebenenbündel. Haben beliebig viele Ebenen alle dieselbe Gerade gemeinschaftlich, so bilden sie einen Ebenenbüschel.

Für uns am bedeutungsvollsten ist dasjenige Ebenenbündel, welches aus drei Ebenen besteht. Drei Ebenen bilden immer ein Ebenenbündel oder einen Ebenenbüschel.

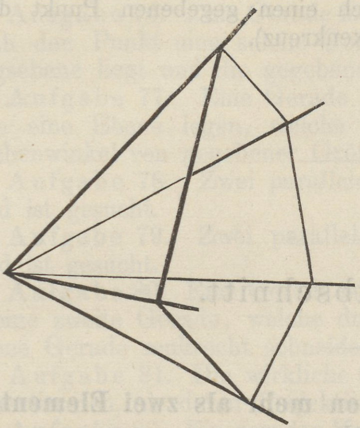


Fig. 31.

Eine Ebene hälftet den Raum; zwei Ebenen teilen den Raum in vier Teile, von denen je zwei gleich sind; drei Ebenen zerlegen den Raum in acht Teile.[1])

Jeder dieser acht Teile, in welche der Raum von drei Ebenen zerlegt wird, heißt dreiseitiger pyramidaler Raum, oder körperlicher Winkel, oder dreiseitiges Raumeck, oder Dreikant.

Schon die vielen Namen weisen auf die große Bedeutung dieses Gebildes hin.

Alle diese acht Dreikante, welche entstehen, wenn drei Ebenen gegeben sind, haben einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt; die vom Scheitelpunkte ausgehenden Strahlen heißen Kanten; die Winkel, welche von je zwei Kanten-

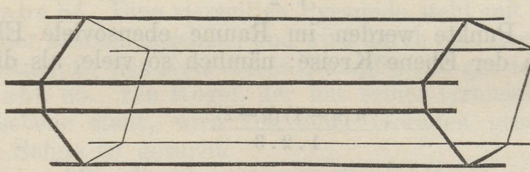


Fig. 32.

linien gebildet werden, heißen Kantenwinkel oder Seiten; die drei Seiten jedes Dreikants bilden drei Flächenwinkel.

In demselben Sinne, in welchem man von einem Dreikant spricht, spricht man auch von einem Vierkant, Fünfkant u. s. w. Und zwar müssen die Seiten jedes Vielkant so aufeinander folgen, daß jeder Flächenwinkel kleiner als ein flacher ist (vergleiche § 31).

Vielkante lassen sich nur dann deutlich skizzieren, wenn man ihre Seiten durch eine Ebene schneidet und das hierdurch entstehende

---

[1]) Als Spezialfall kommen auch sechs und sieben Teile vor.

Polygon in die Zeichnung aufnimmt. So zeigt Fig. 31 ein Fünfkant und Fig. 32 einen sechsseitigen prismatischen Raum.

§ 48. Wenn wir uns von den acht Dreikanten, welche entstehen, sobald drei Ebenen gegeben sind, eines als das gegebene denken, so werden die sieben anderen, infolge ihrer Lage zu diesem gegebenen, in drei Gruppen zusammengefaßt; und zwar spricht man von drei Nebendreikanten, drei Scheiteldreikanten und einem Gegendreikant.

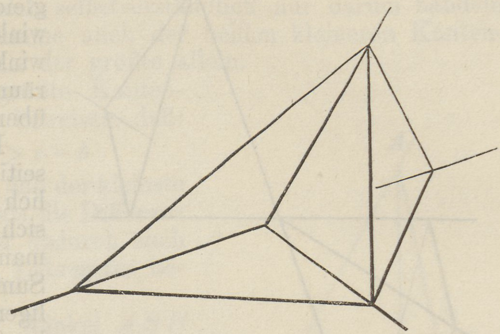


Fig. 33.

Zu einem gegebenen Dreikant entsteht ein Nebendreikant, sobald eine der Kantenlinien nach rückwärts über den Scheitelpunkt hinaus verlängert wird (Fig. 33). Somit hat das Nebendreikant einen Kantenwinkel und einen Flächenwinkel mit dem gegebenen Dreikant gemeinschaftlich und die übrigen Bestimmungsstücke sind Nebenstücke.

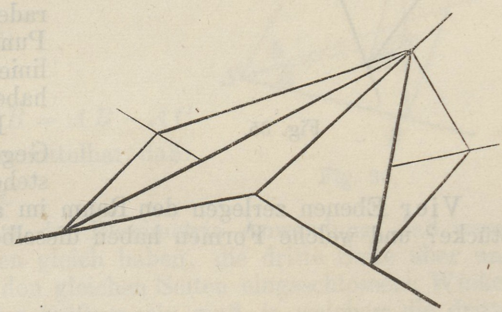


Fig. 34.

Werden zwei Kantenlinien über den Scheitelpunkt hinaus verlängert, so entsteht ein Scheiteldreikant. Das Scheiteldreikant hat einen Kantenwinkel und einen Flächenwinkel in solcher Lage, daß dieselben Scheitelstücke sind zu den entsprechenden Winkeln des gegebenen Dreikantes; die übrigen Stücke sind Nebenstücke (Fig. 34).

Werden alle drei Kantenlinien über den Scheitelpunkt hinaus nach rückwärts verlängert, so entsteht das Gegendreikant, dessen Winkel alle Scheitelwinkel sind zu den Winkeln des gegebenen Dreikants (Fig. 35).

Lehrsatz 34. Ein Dreikant und sein Gegendreikant sind auch an Rauminhalt gleich.

Beweis: Ist das gegebene Dreikant ein gleichschenkliges, so muß das Gegendreikant auch gleichschenklig sein, und die Richtigkeit der Behauptung ist unmittelbar klar, da man die beiden Dreikante zur Deckung bringen kann. (Der Schüler mache sich Modelle.) Zwei ungleichseitige Gegendreikante lassen sich nicht zur Deckung bringen, obgleich sie in allen Kantenwinkeln und allen Flächenwinkeln und auch in ihrer räumlichen Ausdehnung übereinstimmen.

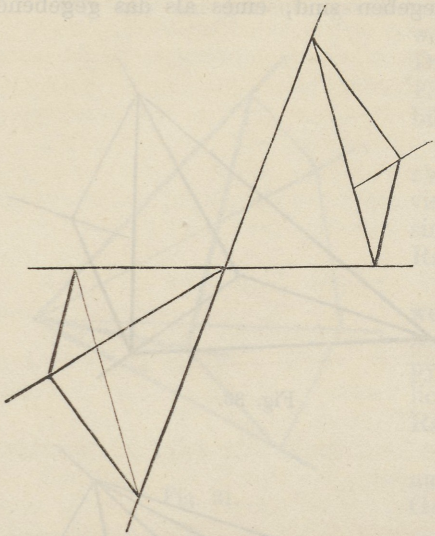


Fig. 35.

Daß auch zwei ungleichseitige Gegendreikante wirklich inhaltsgleich sind, ergibt sich aus dem Umstande, daß man jedes Dreikant in eine Summe von drei gleichschenkligen Dreikanten zerlegen kann. Zu diesem Zwecke hat man nur eine solche Gerade zu konstruieren, deren Punkte von den drei Kantenlinien gleiche Abstände haben.

Die Beziehung, in der zwei Gegendreikante zu einander stehen, heißt Symmetrie.

Vier Ebenen zerlegen den Raum im allgemeinen in wie viele Stücke? und welche Formen haben dieselben?

Fünfter Abschnitt.

Das Dreikant.

§ 49. Das Dreikant hat für die Stereometrie eine ähnliche Bedeutung, wie das Dreieck für die Planimetrie. Sogar eine unmittelbare Vergleichung beider ist möglich. So hat z. B. auch das Dreikant sechs Elementarbestimmungsstücke, von denen je drei gleichartig sind; nämlich drei Kantenwinkel und drei Flächenwinkel.

Sollten vielleicht auch die Größen der Seiten und Winkel eines Dreikants in ähnlicher Weise von einander abhängig sein, wie die Seiten und Winkel eines Dreiecks?

Die folgenden Lehrsätze bejahen diese Frage.

Lehrsatz 35. In jedem Dreikant ist die Summe zweier Kantenwinkel größer als der dritte.

Beweis: Es kann sich selbstverständlich nur darum handeln zu beweisen, daß die Summe auch der beiden kleineren Kantenwinkel doch größer ist, als der größte allein.

Gesetzt c sei der größte Kantenwinkel; dann gilt es zu beweisen, daß:

$$a + b > c \text{ oder } a > c - b$$

d. h. läßt es sich beweisen, daß der kleinste Kantenwinkel größer ist als die Differenz der beiden anderen, so ist dadurch auch die Behauptung unseres Lehrsatzes bewiesen.

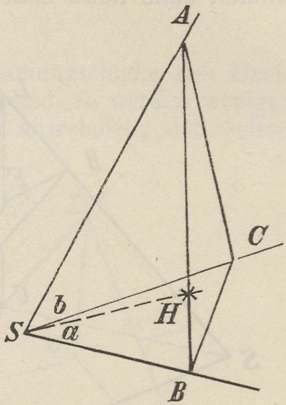


Fig. 36.

In Figur 36 ist der Winkel ASH gleich b gemacht und ist die abschließende Ebene so gelegt, daß:

$$\overline{SH} = \overline{SC}$$

ist. Dann ist:

$$\sphericalangle HSB = c - b \text{ und } \overline{HB} = AB - AC$$

Zunächst folgt nunmehr unmittelbar, daß:

$$\overline{HB} < \overline{BC}$$

und dann findet der Satz der Planimetrie Anwendung, daß wenn zwei Dreiecke zwei Seiten gleich haben, die dritte Seite aber ungleich ist, dann der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel in demjenigen Dreieck der größere sein muß, in welchem die dritte Seite die größere ist. In unserer Figur sind das die Dreiecke CSB und HSB, folglich gilt die Ungleichung:

$$\sphericalangle CSB > \sphericalangle HSB \text{ oder:}$$
$$a > c - b$$

Lehrsatz 36. In jedem Vielkant ist die Summe aller Kantenwinkel kleiner als vier Rechte.[1])

Beweis: Wird die Summe aller Kantenwinkel genau gleich vier Rechten, so wird das Vielkant zur Ebene; und größer als vier Rechte kann die Summe der Kantenwinkel nur in einem solchen Vielkant werden, in welchem einspringende Flächenwinkel vorkommen — was wider unsere Voraussetzungen ist.

Lehrsatz 37. In jedem Dreikant ist die Summe der drei Flächenwinkel kleiner als sechs Rechte.

---

[1]) Wie muß der entsprechende Satz der Planimetrie lauten?

Beweis: Der Voraussetzung nach muß jeder Flächenwinkel eines Vielkants kleiner als zwei Rechte sein.

Lehrsatz 38. In jedem Dreikant ist die Summe der drei Flächenwinkel größer als zwei Rechte.

Beweis: Sind zwei Flächenwinkel oder gar alle drei stumpf, so bedarf die Behauptung dieses Lehrsatzes keines Beweises. Ist aber keiner oder nur einer der Flächenwinkel stumpf, dann läßt sich die Einsicht in die Richtigkeit der Behauptung unseres Lehrsatzes folgendermaßen gewinnen.

Vorausgesetzt, an der Kante SC liege der größte Flächenwinkel; dann führe man lotrecht zu SC eine abschließende Ebene

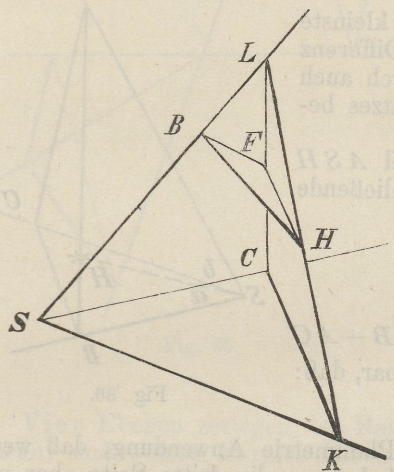


Fig. 37.

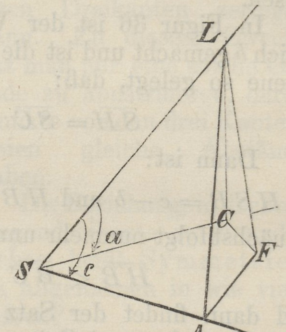


Fig. 38.

(Fig. 37). Folglich ist im Dreieck LCK der Winkel C Maßwinkel des Flächenwinkels an SC, und die Winkel L und K können nur spitz sein. Ließe sich nun beweisen, daß der Maßwinkel des Flächenwinkels an SL größer sein muß als L und der Maßwinkel des Flächenwinkels an SK größer sein muß als K, so würde hierdurch die Behauptung unseres Lehrsatzes bewiesen sein. Zu dem Zwecke führe man eine zweite Hilfsebene lotrecht zu SL, wodurch man die rechtwinkligen Dreiecke BFH und LFH erhält, in denen notwendig sein muß:

$$FB < FL \text{ und } HB < HL \text{ und folglich } B > L \text{ w. z. b. w.}$$

Lehrsatz 38. In jedem Dreikant liegt dem größeren Kantenwinkel auch der größere Flächenwinkel gegenüber.

Beweis: Vorausgesetzt, es sei $c > a$ (Fig. 38). Dann führe man durch den Punkt L zwei abschließende Ebenen, von denen die eine lotrecht zu SC, die andere lotrecht zu SA steht. Dann haben die rechtwinkligen Dreiecke LAS und LCS die Hypotenuse LS gemeinschaftlich und dann muß, weil $c > a$, notwendig auch

$$\overline{LA} > \overline{LC}$$

sein; denn in demselben Kreise gehört zu dem größeren Peripheriewinkel auch die größere Sehne.

Von den rechtwinkligen Dreiecken LFA und LFC, welche die Kathete LF gemeinschaftlich haben, wissen wir nun, daß ihre Hypotenusen ungleich sind und folglich auch die ihnen anliegenden Winkel und zwar:

$$A < C \text{ w. z. b. w.}$$

§ 50. Da die sechs Elementarbestimmungsstücke des Dreikants so mannigfach von einander abhängig sind, so werden weniger als sechs zur Bestimmung eines Dreikants ausreichen; daß schon

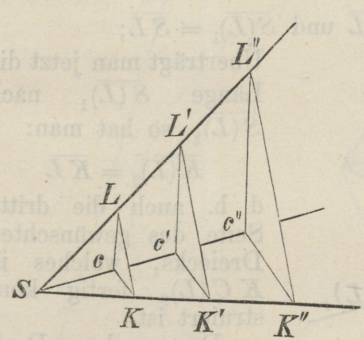


Fig. 39.

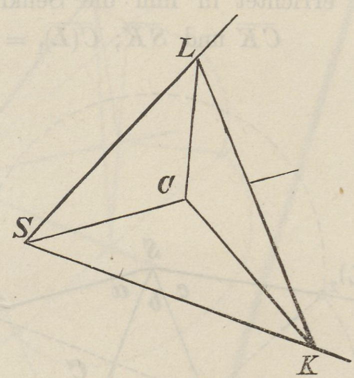


Fig. 40.

drei genügen, ergibt sich aus denjenigen Konstruktionen, welche zur Lösung der folgenden Aufgaben dienen.

Aufgabe 95. Aus den gegebenen Größen der drei Kantenwinkel eines Dreikants sollen die Größen der zugehörigen Flächenwinkel abgeleitet werden.

Lösung: Soll der Flächenwinkel an SC gefunden werden, so benutze man eine abschließende Ebene lotrecht zu SC; die Schnittpunkte mit den anderen Kantenlinien seien K und L. Nun werden die Seiten des abschließenden Dreiecks zwar sehr verschieden lang ausfallen, je nachdem man den Punkt C näher oder weiter vom Scheitel S wählt, aber alle diese Dreiecke müssen unter einander ähnlich sein, also gleiche Winkel haben (Fig. 39).

Nachdem man C gewählt hat und hierdurch die Länge SC bestimmt ist, so lassen sich die drei Seiten des abschließenden Dreiecks LCK leicht ermitteln (Fig. 40). Denn CL und CK

sind die Katheten solcher rechtwinkliger Dreiecke, von denen die Kathete $S\,C$ und die Winkel bekannt sind. Aus denselben rechtwinkligen Dreiecken ergeben sich die Längen $\overline{L\,S}$ und $\overline{K\,S}$; und nun sind vom Dreieck $L\,S\,K$ zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt und man findet die Länge $\overline{L\,K}$. Trägt man jetzt die bekannten drei Längen zum Dreieck $L\,C\,K$ zusammen, so ist im Winkel C der Maßwinkel des Flächenwinkels an $S\,C$ gefunden — und das verlangte unsere Aufgabe.

In gleicher Weise lassen sich die Größen der beiden anderen Flächenwinkel ermitteln.

Um die angegebenen Konstruktionen nicht nur in Gedanken, sondern in Wirklichkeit auszuführen, hat man das Dreikant mit der einen Seite, z. B. b, auf die Zeichnungsebene zu stellen und dann die beiden anderen Seiten in die Zeichnungsebene umzuklappen (Fig. 41).

Auf der Kantenlinie $S\,C$ dieses Netzes wählt man den Punkt C und errichtet in ihm die Senkrechte zu $S\,C$, so hat man sofort

$$\overline{CK} \text{ und } \overline{SK}; \ \overline{C(L)_1} = \overline{CL} \text{ und } \overline{S(L)_1} = \overline{SL};$$

Überträgt man jetzt die Länge $\overline{S\,(L)_1}$ nach $\overline{S\,(L)_2}$, so hat man:

$$\overline{K(L)_2} = \overline{KL}$$

d. h. auch die dritte Seite des gewünschten Dreiecks, welches in $K\,C\,(L)_3$ fertig konstruiert ist.

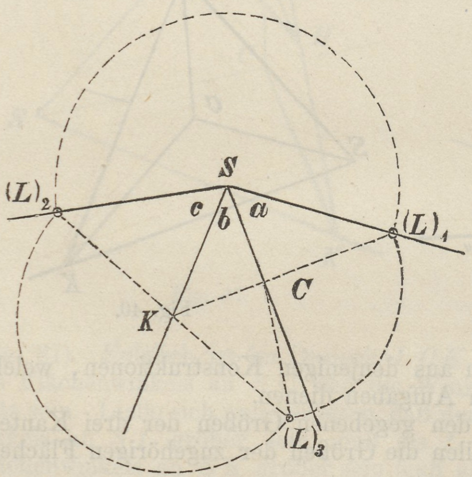


Fig. 41.

Das gegebene Dreikant selbst nebst seinem Netz und der Zeichnung zeigt Fig. 42.

Die Auffindung des Flächenwinkels A hat keine Schwierigkeiten, da man dazu dasselbe Netz oder eine Kopie desselben zu benutzen hat.

Zur Auffindung des Flächenwinkels B denke man sich das Dreikant mit einer anderen Seite, z. B. mit der Seite a, auf die Zeichnungsebene gestellt und verfahre dann in genau derselben Weise. Oder man benutze dasselbe Netz wie zur Figur 41 und konstruiere wie Fig. 43 es zeigt.

Zu den Figuren 41 und 43 sind die folgenden Kantenwinkel benutzt worden:

$$\hat{a} = 53^1/_2{}^0 \quad \hat{b} = 44^0 \quad \hat{c} = 59^0$$

und die Konstruktion ergibt als zugehörige Flächenwinkel die folgenden:

$$\hat{A} = 68^0 \quad \hat{B} = 53^0 \quad \hat{C} = 81^0$$

Der Schüler hat sich die eben vorgeführten Konstruktionen für mannigfach geänderte Werte der gegebenen Kantenwinkel sicher einzuüben.

Aus den ausgeführten Konstruktionen ergibt sich der folgende bemerkenswerte Schluß:

Da die drei Seiten des abschließenden Dreiecks ohne Zweideutigkeit sich ergeben, sobald die eine Länge $\overline{SC}$ gewählt ist, und da den verschiedenen Längen von $\overline{SC}$ solche abschließende Dreiecke

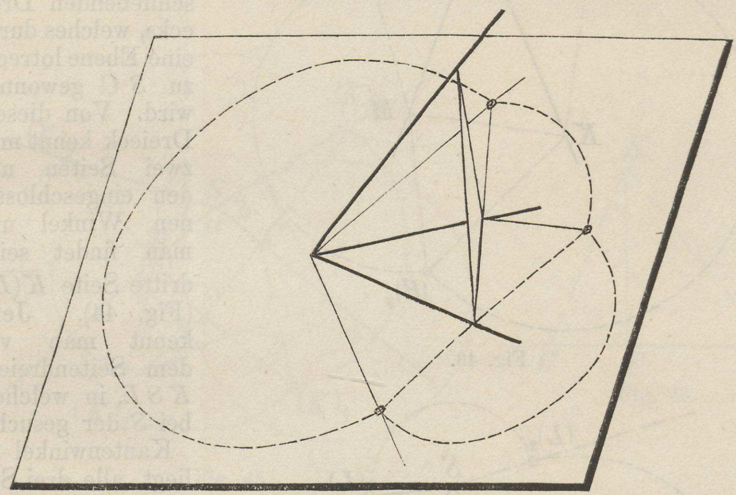


Fig. 42.

entsprechen, die unter einander ähnlich sind — so ergibt sich die Größe des Flächenwinkels C ohne Zweideutigkeit.

Dasselbe gilt von den beiden anderen Flächenwinkeln.

Demnach ist deutlich erwiesen, daß zu den drei bestimmten Kantenwinkeln eines Dreikants auch nur drei ganz bestimmte Flächenwinkel gehören können. Wenn demnach Messungen erweisen sollten, daß zwei Dreikante gleiche Seiten haben, so wissen wir jetzt, daß sie auch gleiche Winkel haben müssen. Somit haben wir den ersten Lehrsatz der Übereinstimmung zweier Dreikante gefunden; derselbe lautet:

Lehrsatz 39. Aus der Gleichheit ihrer Kantenwinkel folgt mindestens die Symmetrie oder gar die Kongruenz zweier Dreikante.

A u f g a b e 96. Aus den gegebenen Größen zweier Kantenwinkel eines Dreikants und der Größe des von ihnen eingeschlossenen Flächenwinkels soll die Größe des dritten Kantenwinkels abgeleitet werden.

Z. B. es sei gegeben:

$$\hat{a} = 49^0 \quad \hat{b} = 74^0 \quad \hat{C} = 71^0$$

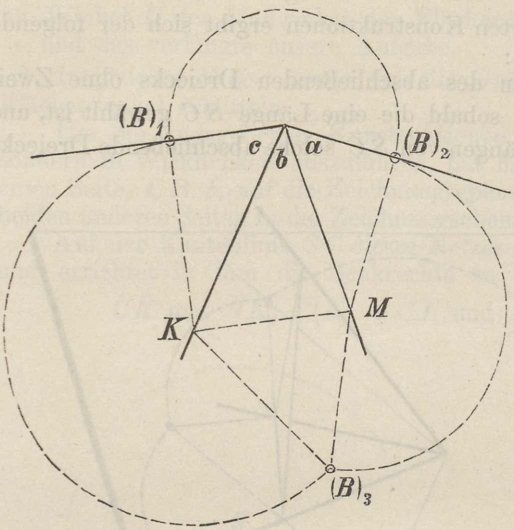


Fig. 43.

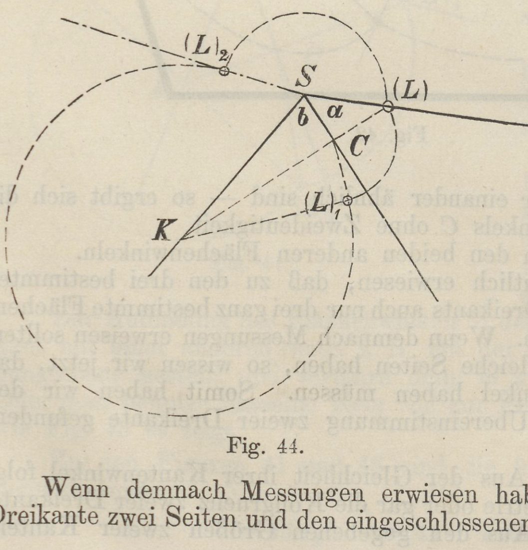


Fig. 44.

Lösung: Man lege $\hat{b}$ in die Zeichnungsebene und klappe $\hat{a}$ in dieselbe um; jetzt zeichne man die Umklappung desjenigen abschließenden Dreiecks, welches durch eine Ebene lotrecht zu SC gewonnen wird. Von diesem Dreieck kennt man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel und man findet seine dritte Seite $\overline{K(L)}_1$ (Fig. 44). Jetzt kennt man von dem Seitendreieck KSL, in welchem bei S der gesuchte Kantenwinkel c liegt, alle drei Seiten, und indem man dasselbe in $KS(L)_2$ zeichnet, findet man:

$$\hat{c} = 66^0$$

Wiederum sind alle Konstruktionen derartige, daß aus den drei gegebenen Stücken sich das vierte Stück ohne Zweideutigkeit ergibt.

Wenn demnach Messungen erwiesen haben sollten, daß zwei Dreikante zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, so folgt daraus, daß in diesen Dreikanten auch die übrigen Stücke gleich sein müssen.

Lehrsatz 40. Aus der Gleichheit zweier Kantenwinkel und des eingeschlossenen Flächenwinkels folgt die Kongruenz oder Symmetrie zweier Dreikante.

Zur Untersuchung der Frage: ob ein Kantenwinkel und zwei Flächenwinkel auch genügen, um aus ihrer Gleichheit in zwei Dreikanten auf die Gleichheit der übrigen Bestimmungsstücke schließen zu dürfen — dazu genügt eine abschließende Ebene nicht; denn wir müssen in diesem Falle in unseren Konstruktionen die Maßwinkel zweier Flächenwinkel gleichzeitig benutzen.

Die folgende Aufgabe diene dazu, die gleichzeitige Benutzung zweier abschließenden Ebenen bei Dreikants-Konstruktionen zu lehren.

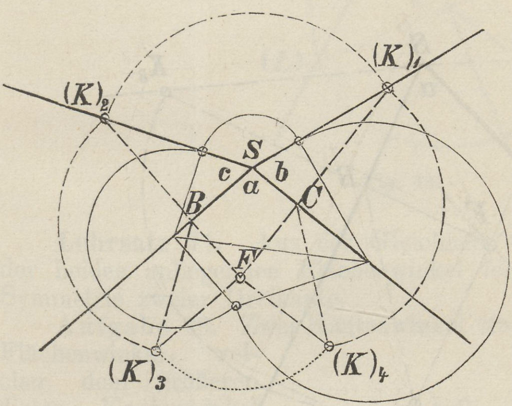


Fig. 45.

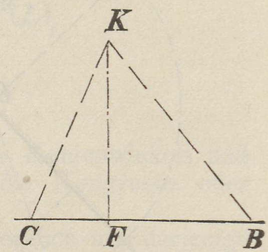


Fig. 46.

Aufgabe 97. Von einem Dreikant sind die drei Kantenwinkel gegeben; und zwar:

$$\hat{a} = 100^0 \quad \hat{b} = 70^0 \quad \hat{c} = 59^0;$$

die Flächenwinkel dieses Dreikants sollen mit Hilfe zweier abschließenden Ebenen bestimmt werden.

Lösung: Da a der größte Kantenwinkel ist, so denke man sich das Dreikant mit dieser Seite auf der Zeichnungsebene stehend. Dann wähle man auf der Kantenlinie SA einen Punkt K und führe durch diesen Punkt K eine Ebene lotrecht zur Kante SB und eine zweite Ebene lotrecht zur Kante SC. Hierdurch wird das Dreikant durch zwei rechtwinklige Dreiecke abgeschlossen, denn die beiden Hilfsebenen schneiden sich in einer Geraden lotrecht zur Seite a; wir benennen den Fußpunkt dieses Lotes mit F (vergleiche Fig. 38). Die beiden abschließenden Dreiecke sind in unserem

Falle: KFC und KFB. In der Figur 38 heißen die abschließenden Dreiecke LFA und LFC.

Die Hypotenusen dieser abschließenden Dreiecke sind leicht zu bestimmen, denn sie fallen zusammen mit den Katheten der Seitendreiecke KBL und KCS. Aber auch die Lage des Punktes F ist durch planimetrische Konstruktionen auffindbar. Denn fällt man von K die Senkrechte auf SB und errichtet hierauf vom Punkte B aus eine zweite Senkrechte zu SB, aber in der Seite a, so muß auf dieser zweiten Senkrechten der Punkt F liegen. Wiederholt man dieselbe Konstruktion in bezug auf die Seite b, so gewinnt man einen zweiten geometrischen Ort für F. Sobald die Lage von F bekannt ist, so kennt man auch die beiden Strecken FC und FB; und da diese Strecken Katheten der abschließenden Dreiecke sind, so kann man die letzteren zeichnen.

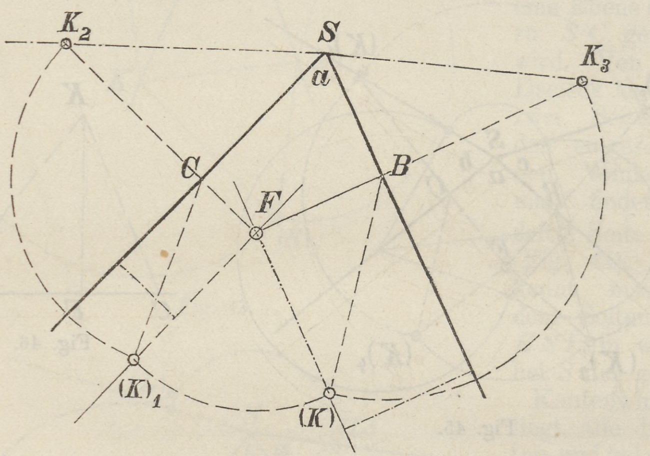


Fig. 47.

Zur wirklichen Ausführung der Zeichnung vergleiche Fig. 45. Um diese Figur zu entwerfen, beginnt man mit der Aufreißung des Netzes; dann wählt man den Punkt K, d. h. man zeichnet den Bogen $(K)_1\,(K)_2$ um den Mittelpunkt S u. s. w.

Um den dritten Flächenwinkel A zu finden, ist es am geschicktesten, eine abschließende Ebene zu benutzen, in der Weise wie Fig. 43 es zeigt, was auch in Fig. 45 geschehen.

Der Schüler lege dieselben Kantenwinkel in anderer Reihenfolge zum Netz an einander und führe dann dieselben Konstruktionen aus.

Aufgabe 98. Der Kantenwinkel a und die beiden anliegenden Flächenwinkel sind gegeben; die beiden anderen Kantenwinkel sind gesucht.

Lösung: Man wähle die Länge des Lotes KF; dann kann man die beiden abschließenden Dreiecke in richtiger Gestalt zeichnen (Fig. 46). Die Katheten FB und FC geben die Abstände des Punktes F von den Kantenlinien der Seite a u. s. w. (Fig. 47).

Die Aufgabe 98 lehrt uns den dritten Übereinstimmungssatz, welcher lautet:

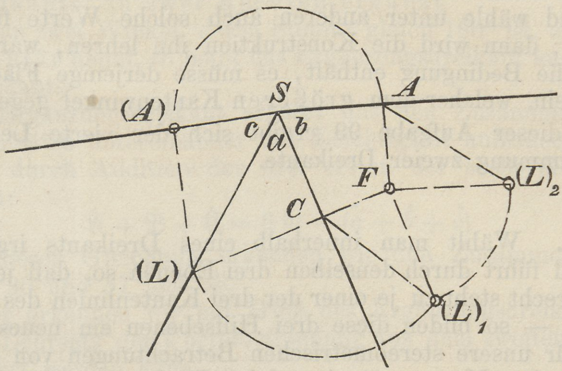


Fig. 48.

Lehrsatz 41. Aus der Gleichheit eines Kantenwinkels und der beiden anliegenden Flächenwinkel folgt die Kongruenz oder Symmetrie zweier Dreikante.

Aufgabe 99. Zwei Kantenwinkel sind gegeben und derjenige Flächenwinkel, welcher dem größeren dieser Kantenwinkel gegenüberliegt; gesucht ist der dritte Kantenwinkel.

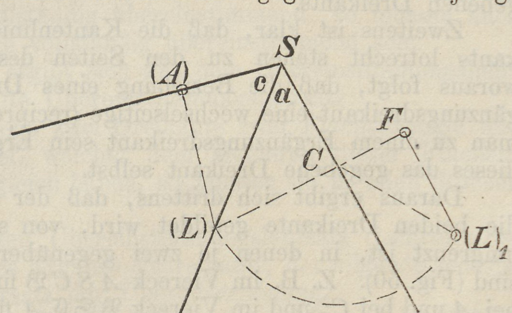


Fig. 49.

Lösung: Man übe sich zunächst an der folgenden Studienkonstruktion. Aus den Kantenwinkeln $a = 48^0$; $b = 83^0$; $c = 62^0$ bilde man sich, mit b in der Mitte, das Netz und zeichne die Dreiecke, wie sie der Konstruktion mit zwei abschließenden Ebenen entsprechen. Dann zeichne man eine neue Figur, die aus der erstgezeichneten dadurch entsteht, daß der Kantenwinkel c nach links gedreht wird, bis er an den Kantenwinkel a stößt (Fig. 48).

Nun denken wir uns, daß zur Ausführung derselben Figur, die jetzt vor uns liegt, nur $\hat{c}$, $\hat{a}$ und $\hat{C}$ gegeben seien. Dann sind wir zunächst im stande, sofort die Figur 49 zu entwerfen.

Da der Kantenwinkel b der gesuchte ist, so richten wir unsere Aufmerksamkeit auf den Punkt A. Derselbe liegt von S in einem Abstande gleich $\overline{S\,(A)}$ und er liegt zweitens mit den Punkten S und C und F auf einem Kreise — somit ist A bestimmt.

Der Schüler wiederhole dieselbe Konstruktion für verschiedene Werte und wähle unter anderen auch solche Werte für c, a, C, daß $c < a$; dann wird die Konstruktion ihn lehren, warum unsere Aufgabe die Bedingung enthält, es müsse derjenige Flächenwinkel gegeben sein, welcher dem größeren Kantenwinkel gegenüberliegt.

Aus dieser Aufgabe 99 ergibt sich der vierte Lehrsatz der Übereinstimmung zweier Dreikante.

§ 51. Wählt man innerhalb eines Dreikants irgend einen Punkt und führt durch denselben drei Ebenen so, daß je eine derselben lotrecht steht zu je einer der drei Kantenlinien des gegebenen Dreikants — so bilden diese drei Hilfsebenen ein neues Dreikant, welches für unsere stereometrischen Betrachtungen von besonderer Bedeutung ist. Man nennt ein solches Dreikant, welches durch die genannte Konstruktion entsteht, das Ergänzungsdreikant des gegebenen.

Zunächst ist klar, daß Form und Größe eines solchen Ergänzungsdreikants unabhängig sind von der Wahl seines Scheitelpunktes; daher spricht man auch von dem Ergänzungsdreikant eines gegebenen Dreikants.

Zweitens ist klar, daß die Kantenlinien des Ergänzungsdreikants lotrecht stehen zu den Seiten des gegebenen Dreikants; woraus folgt, daß die Beziehung eines Dreikants zu seinem Ergänzungsdreikant eine wechselseitige (reciproke) ist, d. h. konstruiert man zu einem Ergänzungsdreikant sein Ergänzungsdreikant, so ist dieses das gegebene Dreikant selbst.

Daraus ergibt sich drittens, daß der Körper, welcher durch die beiden Dreikante gebildet wird, von sechs solchen Vierecken umgrenzt ist, in denen je zwei gegenüberliegende Winkel rechte sind (Fig. 50). Z. B. im Viereck $A\,S\,C\,\mathfrak{B}$ finden sich rechte Winkel bei A und bei C; und im Viereck $\mathfrak{B}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{C}\,A$ finden sich rechte Winkel bei $\mathfrak{B}$ und bei $\mathfrak{C}$.

Die beiden anderen Winkel jedes dieser Vierecke haben eine unmittelbare Bedeutung für die beiden Dreikante. Z. B. in dem Viereck $A\,S\,C\,\mathfrak{B}$ ist der Winkel bei S der Kantenwinkel b des gegebenen Dreikants und der Winkel bei $\mathfrak{B}$ ist der Maßwinkel des Flächenwinkels an der Kantenlinie $\mathfrak{S}\,\mathfrak{B}$ des Ergänzungsdreikants; und wir haben somit gefunden:

$$\hat{a} + \hat{\mathfrak{B}} = 2\,.\,\mathfrak{R}$$

Der Schüler schreibe die fünf analogen Gleichungen auch auf, um sich für immer fest die folgenden Sätze einzuprägen:

Die Kantenwinkel des gegebenen Dreikants werden, durch die entsprechenden Flächenwinkel seines Ergänzungsdreikants, zu zwei Rechten ergänzt.

Die Flächenwinkel des gegebenen Dreikants werden, durch die entsprechenden Kantenwinkel seines Ergänzungsdreikants, zu zwei Rechten ergänzt.

Da man zwei Winkel, deren Summe gleich 180^0 ist, zu einander supplementär nennt, so heißt das Ergänzungsdreikant auch Supplementardreikant.

Das Ergänzungsdreikant erlaubt uns den Zusammenhang gewisser Lehrsätze untereinander mit Leichtigkeit aufzudecken.

Z. B. durch Addition der drei ersten der sechs Gleichungen ergibt sich:

$$\hat{\mathfrak{A}} + \hat{\mathfrak{B}} + \hat{\mathfrak{C}} = 6\,\mathfrak{R} - (\hat{a} + \hat{b} + \hat{c})$$

und aus dieser Gleichung erkennen wir den Zusammenhang der Lehrsätze 36 und 37 und 38.

Ferner erkennen wir mit Hilfe des Ergänzungsdreikants, daß der dritte Lehrsatz der Übereinstimmung aus dem zweiten unmittelbar gefolgert werden kann.

Denn haben zwei Dreikante einen Kantenwinkel und die beiden anliegenden Flächenwinkel gleich, so müssen ihre Ergänzungsdreikante einen Flächenwinkel und die beiden ihn einschließenden Kantenwinkel gleich haben, und folglich müssen diese Ergänzungsdreikante, nach Übereinstimmungssatz zwei, aus lauter gleichen Bestimmungsstücken sich zusammensetzen. Sind aber die beiden Ergänzungsdreikante vollständig übereinstimmend, so müssen auch die gegebenen Dreikante vollständig übereinstimmend sein.

In gleicher Weise ergibt sich aus dem Übereinstimmungslehrsatz 4 der folgende fünfte Übereinstimmungslehrsatz:

Lehrsatz 42. Wenn zwei Dreikante zwei Flächenwinkel und denjenigen Kantenwinkel, welcher dem kleineren dieser Flächenwinkel gegenüberliegt, gleich haben, so müssen sie in allen Stücken übereinstimmen.

Und aus dem ersten Übereinstimmungslehrsatz (Lehrsatz 39) ergibt sich, mit Hilfe des Ergänzungsdreikants, der folgende sechste, der interessanteste Lehrsatz der Übereinstimmung.

Lehrsatz 43. Aus der Gleichheit ihrer Flächenwinkel folgt die Symmetrie oder Kongruenz zweier Dreikante.

Warum hat die Stereometrie sechs Übereinstimmungssätze, während die Planimetrie nur vier kennt?

Aus dem Lehrsatz 43 müssen wir den Schluß ziehen, daß es diejenige Beziehung zwischen Vielkanten nicht gibt, die wir Ähnlichkeit nennen.

Aufgabe 100. Das Netz eines Dreikants ist gegeben, man soll das Netz seines Ergänzungsdreikants zeichnen.

Lösung: Die drei Umgrenzungsvierecke mit den Kantenwinkeln a, b, c lassen sich sofort zeichnen; von jedem der drei anderen Umgrenzungsvierecke kennen wir unmittelbar nur vier Stücke, nämlich die beiden rechten Winkel und zwei Seiten. Z. B. im Viereck $\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{C}B$ die rechten Winkel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ und die beiden Seiten $\mathfrak{A}B$ und $\mathfrak{C}B$. Ermittelt man jetzt durch eine Hilfskonstruktion den Flächenwinkel B, so kann man das genannte Viereck und dann auch die beiden anderen zeichnen.

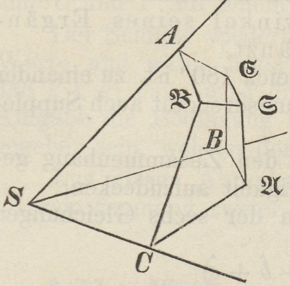


Fig. 50.

Diese Art zu konstruieren ist aber nicht hübsch; denn sie widerspricht dem eigentlichen Gedanken unserer Aufgabe, der darin besteht, daß zu den drei Kantenwinkeln eines Dreikants die drei Flächenwinkel mit Hilfe dreier abschließenden Ebenen zu finden sind. Daher ist es hübscher, den folgenden Weg zu gehen.

Man wähle die Strecken SA, SB, SC (Fig. 50) gleich lang und denke sich die drei Diagonalen $A\mathfrak{S}$, $B\mathfrak{S}$, $C\mathfrak{S}$ und die Linie $S\mathfrak{S}$ gezogen. Dann entstehen drei kongruente rechtwinklige Dreiecke über der gemeinschaftlichen Hypotenuse $S\mathfrak{S}$. Könnten wir eins

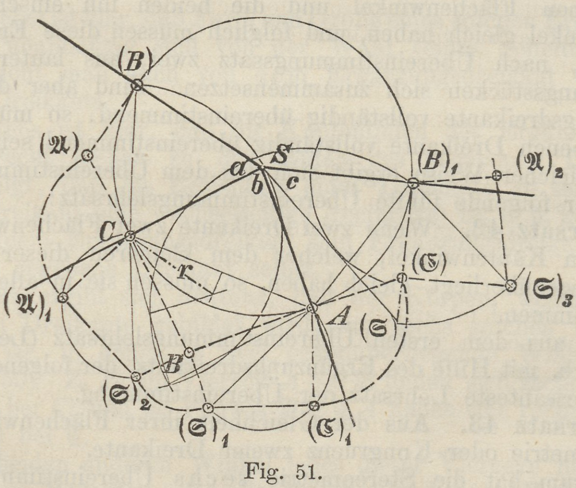


Fig. 51.

dieser Dreiecke, z. B. $SA\mathfrak{S}$, zeichnen, so hätten wir mit der Kathete $A\mathfrak{S}$ das fünfte Stück des Vierecks $\mathfrak{B}\mathfrak{S}\mathfrak{C}A$ gefunden. Von diesem Dreieck sind uns aber unmittelbar nur zwei Stücke bekannt: die Kathete SA und der rechte Winkel bei A. Als drittes Bestimmungsstück dieses Dreiecks läßt sich aber die Höhe desselben ermitteln;

denn diese Höhe ist der Radius desjenigen Kreises, welcher dem Dreieck $A\,B\,C$ umschrieben ist. Da die Seiten dieses Dreiecks bekannt sind, so u. s. w.

Die betreffenden Konstruktionen zeigt Fig. 51 in vollständiger Ausführung. Das Hilfsdreieck $A\,C\,B$ liegt hell gezeichnet in der Mitte der Figur; dieses Dreieck liefert uns den Radius seines umschriebenen Kreises r; derselbe dient als Höhe des Hilfsdreiecks $S(B)_1$ ($\mathfrak{S}$), welches rechts auf der Figur liegt; die Kathete dieses Dreiecks, nämlich $(B)_1$ ($\mathfrak{S}$), ist als Diagonale der gesuchten Vierecke verwertet.

Sechster Abschnitt.

Pyramide; Prisma; Kegel; Cylinder.

§ 52. Unter allen Pyramiden ist die dreiseitige die bedeutungsvollste. Jede andere Pyramide kann als die Summe solcher dreiseitiger Pyramiden aufgefaßt werden, welche alle mit der gegebenen Pyramide gleiche Höhe haben und deren Grundflächen summiert die Grundfläche der gegebenen Pyramide darstellen; und nur bei der dreiseitigen Pyramide kann jede ihrer Begränzungsflächen zur Grundfläche gewählt werden.

Unter den Prismen hat das dreiseitige Prisma eine besondere Bedeutung; nämlich jedes andere Prisma kann als die Summe solcher dreiseitigen Prismen aufgefaßt werden, welche alle mit dem gegebenen Prisma gleiche Höhe haben und deren Grundflächen summiert die Grundfläche des gegebenen Prismas darstellen.

Außer dem dreiseitigen Prisma ist noch das Parallelepipedon von besonderer Bedeutung; denn bei diesem kann man jede der Begrenzungsflächen zur Grundfläche wählen.

Zu beachten ist auch noch, daß man jede Pyramide leicht in eine solche d r e i s e i t i g e Pyramide verwandeln kann, welche gleiche Grundfläche und Höhe mit der gegebenen vielseitigen Pyramide hat; denn zu diesem Zwecke hat man nur die Grundfläche in ein Dreieck zu verwandeln.

In gleicher Weise läßt sich jedes Prisma in ein dreiseitiges Prisma oder auch in ein Parallelepipedon verwandeln.

Lehrsatz 44. Jedes dreiseitige Prisma kann in drei dreiseitige Pyramiden zerlegt werden.

Beweis: Heißt die Grundfläche unseres dreiseitigen Prismas ABC und die Deckfläche $A'B'C'$, so führe man eine schneidende Ebene durch den Eckpunkt A' und die Kantenlinie BC; hierdurch wird das Prisma in eine dreiseitige Pyramide, nämlich $A'(ABC)$, und eine vierseitige Pyramide, nämlich $A'(BB'C'C)$, zerlegt (Fig. 52).

Lehrsatz 45. Von den drei dreiseitigen Pyramiden, in welche jedes dreiseitige Prisma zerlegt werden kann, haben je zwei unter einander gleiche Grundfläche und Höhe, und zwei derselben haben mit dem Prisma selbst Grundfläche und Höhe gemeinschaftlich.

Beweis: Siehe Figur 52a und 52.

Gesetzt, wir könnten den Satz beweisen, daß Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen inhaltsgleich sein müssen, so würden wir aus dem letzten Lehrsatz lernen, daß eine dreiseitige

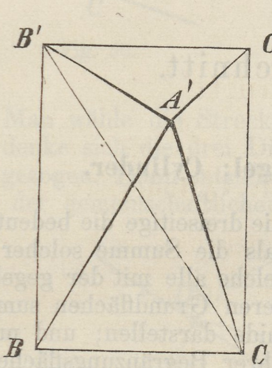


Fig. 52 a.

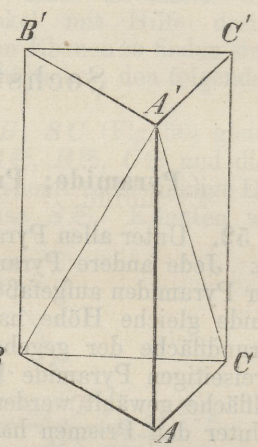


Fig. 52.

Pyramide stets der dritte Teil desjenigen dreiseitigen Prismas ist, welches mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. Da aber jede Pyramide in eine dreiseitige von gleicher Grundfläche und Höhe verwandelt werden kann, so gilt derselbe Satz für jede Pyramide. Analoge Schlußfolgerungen ergeben die Erweiterung auf jedes Prisma und wir würden dann den folgenden Satz haben:

Jede Pyramide ist der dritte Teil desjenigen Prismas, welches mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Wenn es wahr ist, daß alle Prismen mit gleichen Grundflächen und Höhen inhaltsgleich sind, so muß man im stande sein, aus den Maßzahlen der Grundfläche und Höhe eines Prismas, die Maßzahl seines Körperinhalts zu berechnen. Welche Rechnungen hierbei auszuführen sind, hängt noch von der Wahl der Maßeinheit ab.

Man ist übereingekommen, die Körpermaßeinheit so zu wählen, daß für das Prisma sich die einfachste Rechnungsregel ergibt: Multipliziere die Maßzahl der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe. Diese Rechnungsregel ist richtig, wenn zur Körpermaßeinheit dasjenige Körperstück gewählt wird, welches die Form eines Würfels hat, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist. Da wir für alle Längenmessungen das Millimeter zur Maßeinheit gewählt haben, so ist für uns das Kubikmillimeter die Maßeinheit für alle Körpermessungen.

Daß, für den Würfel als Maßeinheit, die genannte Rechnungsregel für das Prisma richtig sein kann, zeigt Fig. 53.

Ist die genannte Rechnungsregel für das Prisma wirklich giltig, dann muß für die Pyramide die folgende Regel Giltigkeit haben:

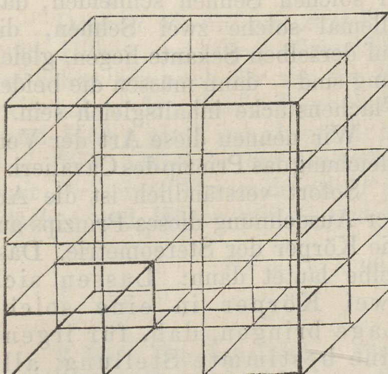


Fig. 53.

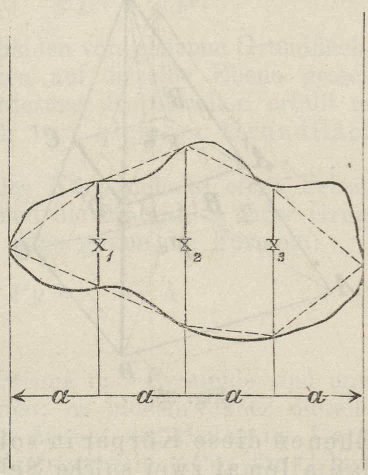


Fig. 54.

Die Körpermaßzahl einer Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus der Maßzahl ihrer Grundfläche in die Maßzahl ihrer Höhe.

Jedoch dürfen wir nicht vergessen, daß uns noch immer die Beweise fehlen für die beiden Annahmen, daß sowohl Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe als auch Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe wirklich inhaltsgleich sein müssen. Die Betrachtungen des folgenden Paragraphen sollen uns zu diesen Beweisen führen.

§ 53. Wir hatten in der Planimetrie gesehen, daß man jede ganz beliebig umgrenzte Fläche als eine Summe von Trapezen auffassen kann 8). Aus dieser Auffassung ergab sich dann die Rechnungsregel zur Ermittelung der Maßzahl einer beliebig umgrenzten Fläche.

Dieselbe lautet: Man ziehe auf der Fläche, in gleichen Abständen von einander, eine genügende Anzahl paralleler Sehnen und multipliziere die Summe der Maßzahlen dieser Sehnen mit der Maßzahl ihres Abstandes (Fig. 54).

Wohl enthält diese Regel einen theoretischen Fehler, der aber durch Vermehrung der Anzahl der Sehnen beliebig verkleinert werden kann. Daher ist diejenige Art der Vergleichung zweier Flächen, die auf dieser Auffassung beruht, so lange diese Vergleichung nur in Gedanken ausgeführt wird, eine fehlerlos stichhaltige. Diese Art der Vergleichung ist die folgende: Lassen sich zwei ebene Flächenstücke in eine solche Lage bringen, daß, für irgend eine bestimmte Richtung, alle unter einander parallelen Sekanten die beiden Flächenstücke in solchen Sehnen schneiden, daß allemal solche zwei Sehnen, die auf derselben Sekante liegen, gleich lang sind — dann müssen die beiden Flächenstücke inhaltsgleich sein.

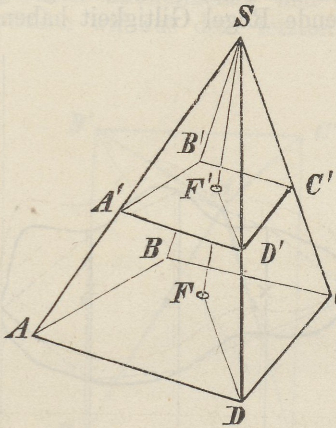


Fig. 55.

Wir nennen diese Art der Vergleichung das Prinzip des Cavalieri.[1])

Sofort verständlich ist die Art der Ausdehnung dieses Prinzips auf die Körper der Stereometrie. Dasselbe lautet dann: L a s s e n s i c h z w e i K ö r p e r i n e i n e s o l c h e L a g e b r i n g e n, d a ß, f ü r i r g e n d e i n e b e s t i m m t e S t e l l u n g, a l l e u n t e r e i n a n d e r p a r a l l e l e n E b e n e n d i e s e K ö r p e r i n s o l c h e n S e h n e n f l ä c h e n s c h n e i d e n, d a ß a l l e m a l z w e i s o l c h e S e h n e n f l ä c h e n, d i e a u f d e r s e l b e n S e k a n t e n e b e n e l i e g e n, f l ä c h e n g l e i c h s i n d — d a n n m ü s s e n d i e s e K ö r p e r i n h a l t s g l e i c h s e i n.

Kürzer drücken wir dieselbe Anschauung auch aus, indem wir sagen: Körper, die aus lauter gleichen Flächenschnitten bestehen, sind inhaltsgleich.

§ 54. Von jedem Prisma wissen wir, daß jeder Schnitt, parallel zu den Grundflächen, diesen Grundflächen kongruent ist. Stellen wir daher zwei Prismen, die beliebig geformte, aber inhaltsgleiche Grundflächen haben, mit diesen Grundflächen auf dieselbe Ebene, so werden alle Schnitte, die man durch Ebenen, parallel zu der gemeinschaftlichen Grundebene, in diesen Körpern erhält, flächengleich sein müssen. Denken wir uns noch diese Prismen von gleicher

---

[1]) Der Schüler, dem diese Art der Vergleichung neu ist, möge an vielen Beispielen sich dieselbe gehörig einüben.

Höhe, so ist für dieselben die Forderung des Cavalieri voll erfüllt — Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe müssen demnach inhaltsgleich sein.

Wird eine Pyramide parallel ihrer Grundfläche geschnitten, so ist die Schnittfigur der Grundfläche ähnlich, denn diese beiden Figuren befinden sich in perspektivischer Lage. Auf diese Thatsache stützt sich der folgende Satz.

Lehrsatz 46. Wird eine Pyramide durch Ebenen, parallel zur Grundfläche, geschnitten, so verhalten sich die Flächen dieser Schnitte zu einander, wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Beweis: Siehe Figur 55.

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2} = \frac{\overline{SD}^2}{\overline{SD'}^2} = \frac{\overline{SF}^2}{\overline{SF'}^2}$$

Denken wir uns nun zwei Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen mit ihren Grundflächen auf dieselbe Ebene gestellt, so sehen wir auch für sie die Forderung des Cavalieri erfüllt und wir haben den Satz: Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

Wir benennen die Maßzahl des Körperinhalts eines Prismas mit Pr, einer Pyramide mit Py und die Maßzahlen ihrer Grundflächen und Höhen mit G und h; dann gelten die Formeln:

$$Pr = G.h \text{ und } Py = \frac{1}{3}.G.h$$

§ 55. Die Inhaltssätze für Prisma und Pyramide sind unabhängig von der Anzahl ihrer Seiten; es bleiben daher dieselben Regeln giltig, auch wenn man die Anzahl der Seiten ins Unendliche vermehrt, d. h. dieselben Rechnungsregeln gelten für Cylinder und Kegel. Da wir uns in der Stereometrie nur mit dem Kreiscylinder und Kreiskegel beschäftigen, so erhalten wir die folgenden Formeln:

$$Cy = \pi.r^2.h \text{ und } Ke = \frac{\pi}{3}.r^2.h$$

In bezug auf Cylinder und Kegel haben wir noch für ihre gekrümmten Mantelflächen Formeln aufzustellen. Das glückt uns nur für den Fall, daß die betreffenden Körper gerade sind.

Die Mantelfläche eines geraden Kreiscylinders geht bei der Abwickelung in ein Rechteck über, daher gilt die Formel:

$$Cy_m = 2.\pi.r.l$$

In obiger Formel bedeutet r den Radius der Grundfläche und l die Mantellinie des Cylinders; da der Cylinder ein gerader ist, so stimmt die Maßzahl der Mantellinie mit der Maßzahl der Höhe überein.

Die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels geht bei der Abwickelung in einen Kreissektor über; daher gilt die Formel:

$$Ke_m = \frac{1}{2} \,.\, 2 \,.\, \pi \,.\, r \,.\, l = \pi \,.\, r \,.\, l$$

In obiger Formel bedeutet wiederum r den Radius der Grundfläche und l die Mantellinie des Kegels; und da dieser Kegel ein gerader ist, so gilt zwischen der Höhe und der Mantellinie desselben und dem Radius seines Grundkreises die folgende Gleichung:

$$l^2 = h^2 + r^2$$

An diese Gleichung muß man sofort denken, sobald von einem geraden Kreiskegel die Rede ist.

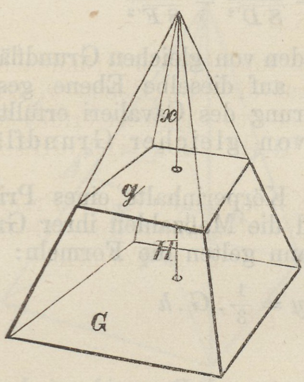


Fig. 56.

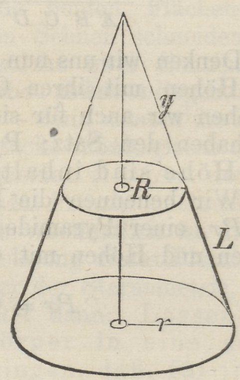


Fig. 57.

§ 56. Für die Maßzahl des Körperinhalts einer abgestumpften Pyramide finden wir die Formel:

$$Py_a = \frac{\pi}{3} \,.\, (G + \sqrt{G \,.\, g} + g)$$

Und zwar bedeutet in obiger Formel H die Maßzahl der Höhe des Stumpfes und G und g sind die Maßzahlen der beiden parallelen Grundflächen.

Ableitung: Man erhält den Pyramidenstumpf als Differenz zweier vollständigen Pyramiden (Fig. 56).

$$Py_a = \frac{1}{3} \,.\, (H + x) \,.\, G - \frac{1}{3} \,.\, x \,.\, g$$

In obiger Formel bedeutet x die Höhe der Ergänzungspyramide. Dieses x eliminieren wir mit Hilfe der folgenden Proportion:

$$\frac{G}{g} = \frac{(H + x)^2}{x^2}$$

oder

$$\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} = \frac{H + x}{x}$$

folglich:

$$\frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{H}{x}$$

woraus:

$$x = \frac{H \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

und

$$H + x = \frac{H \cdot \sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

Diese Werte, in unsere Formel substituiert, ergeben:

$$Py_a = \frac{H}{3} \cdot \frac{G \cdot \sqrt{G} - g \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$Py_a = \frac{H}{3} \cdot (G + \sqrt{G \cdot g} + g) \text{ w. z. b. w.}$$

§ 57. Wenden wir unsere letzte Formel auf den Kegelstumpf an, so schreibt sich dieselbe folgendermaßen:

$$Ke_a = \frac{H}{3} \cdot (\pi \cdot r^2 + \sqrt{\pi \cdot r^2 \cdot \pi \cdot R^2} + \pi \cdot R^2)$$

$$Ke_a = \frac{\pi}{3} \cdot H \cdot (r^2 + r \cdot R + R^2)$$

Unter r und R sind die Radien der beiden Grundflächen zu verstehen.

Auch für die Mantelfläche eines Kegelstumpfes können wir eine Formel aufstellen. Dieselbe lautet:

$$Ke_{m.a} = \pi \cdot (r + R) \cdot L$$

Ableitung: Auch die Mantelfläche des gerade abgestumpften geraden Kreiskegels erscheint als Differenz der Mantelflächen zweier vollständigen Kegel (Fig. 57).

$$Ke_{m.a} = \pi \cdot r \cdot (L + y) - \pi \cdot R \cdot y$$

Und y eliminieren wir mit Hilfe der Proportion:

$$\frac{r}{R} = \frac{L + y}{y}$$

$$\frac{r - R}{R} = \frac{L}{y}$$

$$y = \frac{L \cdot R}{r - R}$$

$$L + y = \frac{L \cdot r}{r - R}$$

Durch Substitution der beiden letzten Werte in unsere Formel erhalten wir:

$$Ke_{m.a} = \pi . L . \frac{r^2 - R^2}{r - R}$$

$$Ke_{m.a} = \pi . L . (r + R) \text{ w. z. b. w.}$$

§ 58. Sehr bedeutungsvoll ist eine Umformung, welche man mit der letzten Formel vornehmen kann. Diese gleich auszuführende Umformung wird uns nämlich lehren, daß man die Maßzahl der Mantelfläche eines Kegelstumpfes berechnen kann aus der Maßzahl seiner Höhe und der Maßzahl des Radius derjenigen Kugel, welche

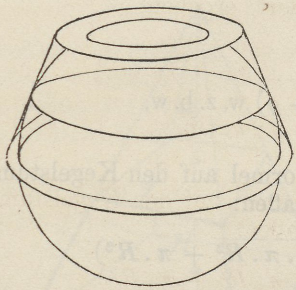


Fig. 58 a.

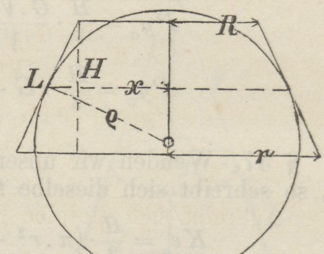


Fig. 58 b.

den Mantel des Kegelstumpfes in seinem Mittelkreise berührt (Fig. 58 a).

Die Figur 58 b zeigt uns einen Meridianschnitt der Figur 58 a und aus der ersteren entnehmen wir die folgenden Beziehungen:

$$x = \frac{r + R}{2} \text{ und } \frac{L}{H} = \frac{\varrho}{x}$$

folglich:

$$L . (r + R) = 2 . H . \varrho$$

Und durch Substitution in die letzte Formel des vorigen Paragraphen:

$$Ke_{m.a} = 2 . \pi . \varrho . H \text{ w. z. b. w.}$$

In Worten spricht sich diese Formel folgendermaßen aus: Die Mantelfläche eines Kegelstumpfes ist gleich der Mantelfläche eines Cylinders von derselben Höhe, wenn die Grundfläche dieses Cylinders gleich ist dem größten Kreise derjenigen Kugel, welche den Mantel dieses Kegelstumpfes in seinem Mittelkreise berührt.

§ 59. Bei der Lösung unzählig vieler Aufgaben finden die obigen Formeln Anwendung und nur durch den Gebrauch kann man sich dieselben gehörig einprägen.

Die folgenden Rechnungen sollen als Beispiele dafür dienen, wie solche Aufgaben zu behandeln sind.

Vorher sei noch auf die folgenden Spezialfälle aufmerksam gemacht.

Hat ein Prisma die Form eines von Rechtecken begrenzten Parallelepipedons, dessen drei Kantenlinien mit a und b und c benannt sind, so wird die Formel für seine Körpermaßzahl die folgende sein:

$$P = a \cdot b \cdot c$$

Werden auch noch die drei Kantenlinien gleich lang, d. h. geht das Parallelepipedon in einen Würfel über, so erhalten wir für denselben:

$$W = a^3$$

Aufgabe 101. Man soll zwei Würfel bilden, deren Volumina (Körperinhalte) sich verhalten wie 2 : 3, und welche zusammen so groß sind, wie ein Würfel von der Oberfläche 61,44 Quadratmeter.

Lösung: Die Kantenlinien der beiden gesuchten Würfel seien x und y Meter lang und ihre Volumina seien W_1 und W_2 Kubikmeter; für den dritten Würfel, dessen Oberfläche gegeben ist, seien die entsprechenden Größen mit z und W_3 benannt. Dann ergeben sich bei nochmaliger Durchlesung der Aufgabe unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{2}{3}$$

$$W_1 = x^3$$

$$W_2 = y^3$$

$$W_1 + W_2 = W_3$$

$$W_3 = z^3$$

$$6 \cdot z^2 = 61{,}44$$

Da die Zahl der Gleichungen der Zahl der Unbekannten gleich ist, so können wir zur Berechnung der gewünschten Größen, nämlich x und y, übergehen. Leicht werfen wir die Volumina hinaus und erhalten hierdurch die Gleichungen:

$$\frac{x^3}{y^3} = \frac{2}{3}$$

$$x^3 + y^3 = z^3$$

$$6\,z^2 = 61{,}44$$

Aus den beiden ersten Gleichungen findet sich:

$$\frac{z^3}{y^3} = \frac{5}{3}$$

oder

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{5}} \cdot z$$

und da

$$z = \sqrt[2]{10{,}24}$$

so wird

$$y = \sqrt[3]{0\,6} \cdot \sqrt[2]{10{,}24}$$

$$y = 0{,}84 \times 3{,}20$$

$$y = 2{,}69.$$

In ähnlicher Weise hat man jedesmal zu verfahren, d. h. man wählt für alle vorkommenden Größen mathematische Benennungen und setzt aus ihnen, nach den Angaben der Aufgabe, die Gleichungen zusammen.

Die mathematische Benennung besteht in der Regel aus einem Buchstaben, unter dem immer die Maßzahl des Objekts zu verstehen ist.

Aufgabe 102. Die größere Grundfläche einer abgekürzten Pyramide ist gleich 60 Quadratfuß und die kleinere gleich $1\frac{2}{3}$ Quadratfuß; die Höhe der Ergänzungspyramide mißt 6 Fuß; wie groß ist der Pyramidenstumpf?

Lösung: Wir haben jedenfalls die Formel zu benutzen:

$$Py_a = \frac{H}{3} \cdot (G + \sqrt{G \cdot g} + g) \qquad 1)$$

und in dieser Formel ist uns nur noch H, außer der gesuchten Größe Py_a, unbekannt; demnach müssen wir bemüht sein, H aus den übrigen Angaben der Aufgabe zu ermitteln. Die Aufgabe enthält aber nur noch eine Angabe und diese bezieht sich auf die Höhe der Ergänzungspyramide; daher werden wir auch die Höhe der vollständigen Pyramide in die Rechnung einführen müssen; wir nennen dieselbe h. Dann haben wir die Gleichung:

$$h = H + 6 \qquad 2)$$

und

$$\frac{h}{6} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} \qquad 3)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen h eliminiert, gibt:

$$H = \frac{6 \cdot (\sqrt{G} - \sqrt{g})}{\sqrt{g}} \qquad 4)$$

und nun aus der Gleichung 1, nachdem man den Wert aus Gleichung 4 substituiert hat,

$$Py_a = \frac{2 \cdot (G \cdot \sqrt{G} - g \cdot \sqrt{g})}{\sqrt{g}} = 2 \cdot (G \cdot \sqrt{\frac{G}{g}} - g) \qquad 5)$$

und nun durch Substitution der gegebenen Zahlenwerte:

$$Py_a = 716\tfrac{2}{3} \text{ Kubikfuß.}$$

In der Regel ist es geschickt, mit derjenigen Formel zu beginnen, welche sich auf die gesuchte Größe bezieht, und immer ist es gut, die Rechnung möglichst lange in allgemeinen Zeichen zu führen. So hätten wir z. B. dieses Mal schon in die Gleichung drei die gegebenen Zahlenwerte substituieren können und hierdurch h, dann H u. s. w. berechnen können. Hübscher und nützlicher ist es aber, die algebraischen Umformungen so weit fortzusetzen, bis man zu einer Gleichung kommt, in der nur noch die gesuchte und die gegebenen Größen enthalten sind, wie in unserem Falle in der Gleichung 5.

Da bei der Ableitung der Gleichung 5 aus den Gleichungen 4 und 1 bedeutende Vereinfachungen eintraten, so drängt sich die Frage auf, ob es nicht möglich ist, die Gleichung 5 auf kürzerem Wege zu erhalten? Das glückt, indem man unmittelbar an den Gedanken anknüpft, daß der Pyramidenstumpf die Differenz ist aus der ganzen Pyramide und dem Ergänzungsstück. Denn in diesem Falle tritt sofort die Forderung an uns heran, die Höhe der ganzen Pyramide zu berechnen, d. h. wir kommen zu der Gleichung:

$$\frac{h}{6} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}}$$

und dann sofort zu der anderen:

$$Py_a = \frac{1}{3} . h . G - \frac{1}{3} . 6 . g$$

und dieses ist schon die Gleichung 5.

Aufgabe 102 a. Von einer geraden Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck ist, sind die drei Kantenlinien a, b und c gegeben und es soll diese Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundfläche gehälftet werden. Der Abstand dieser Hälftungsebene von der Spitze soll berechnet werden.

Lösung: Da wir die Höhe h der gegebenen Pyramide bei unseren Rechnungen werden gebrauchen müssen, so bestimmen wir zunächst ihren Wert und finden:

$$h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 c^2 - a^2 - b^2} \qquad 1)$$

Desgleichen werden wir die Seiten a' und b' des Schnittrechteckes bei der Lösung der gestellten Aufgabe zu benutzen haben und wir finden für dieselben:

$$a' = \frac{a . x}{h} \text{ und } b' = \frac{b . x}{h} \qquad 2)$$

Nunmehr stellen wir die Formeln für den Körperinhalt P der gegebenen Pyramide und für den Körperinhalt p der abgeschnittenen Pyramide auf:

$$P = \frac{h}{3} . a . b \text{ und } p = \frac{x}{3} . a' . b' \qquad 3)$$

Aus 3 und 2 ergibt sich die Lösungsgleichung:

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{a \cdot x}{h} \cdot \frac{b \cdot x}{h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot a \cdot b$$

oder

$$x^3 = \frac{1}{2} \cdot h^3. \qquad 4)$$

Hätten wir vom Anfang an darauf geachtet, daß die abgeschnittene Pyramide der ganzen Pyramide ähnlich ist, so hätte uns der Satz: die Inhalte ähnlicher Körper verhalten sich zu einander, wie die dritten Potenzen homologer Strecken — schneller zum Ziele geführt, wie die folgenden Gleichungen zeigen:

$$\frac{h^3}{x^3} = \frac{P}{p} = \frac{2 \cdot p}{p} = \frac{2}{1}. \qquad 5)$$

Aus der von uns durchgeführten Lösung der Aufgabe 102a erkennen wir nunmehr einen Beweis für die Richtigkeit des letztgenannten Satzes.

Aufgabe 103. Der Körperinhalt eines Kegelstumpfes sei 9751,5, seine Höhe 24 und seine Mantellinie 26. Wie groß ist die Mantelfläche?

Lösung: Für die Mantelfläche eines Kegelstumpfes haben wir die Formel gehabt:

$$Ke_{m.a} = \pi \cdot (r + R) \cdot L \qquad 1)$$

und da wir für seinen Körperinhalt die Formel haben:

$$Ke_a = \frac{\pi}{3} \cdot H \cdot (r^2 + r \cdot R + R^2) \qquad 2)$$

so haben wir zwei Gleichungen mit drei Unbekannten und wir haben uns daher nach einer dritten Gleichung umzusehen.

Um diese dritte Gleichung zu finden, entwerfe man eine Skizze des Kegelstumpfes, aus welcher dann sofort die Richtigkeit der folgenden Gleichung ersichtlich ist:

$$L^2 = H^2 + (r - R)^2 \qquad 3)$$

In diesem Falle rechnen wir geschickt folgendermaßen.

Wir substituieren die gegebenen Zahlenwerte und erhalten zunächst aus Gleichung 3:

$$(r - R)^2 = 100 \qquad 4)$$

und aus Gleichung 2:

$$r^2 + r \cdot R + R^2 = 388 \qquad 5)$$

indem wir jetzt die Gleichung 4 von der Gleichung 5 subtrahieren, bekommen wir:

$$r \cdot R = 96 \qquad 6)$$

addiert man nun die Gleichung 6 zur Gleichung 5, so findet man:

$$r + R = 22 \qquad 7)$$

und durch Substitution dieses Wertes in die Gleichung 1 ergibt sich das Resultat:

$$Ke_{m.a} = 1797.$$

Bemerkung: Die drei zuletzt behandelten Aufgaben sind dem Féaux entnommen.

Aufgabe 104. Den Mantel eines gleichseitigen Kegels zu berechnen, wenn dessen Körperinhalt gegeben ist.

Lösung: Selbstverständlich darf man niemals an die Lösung einer Aufgabe gehen, bevor man dieselbe nicht, sowohl dem Wortlaute nach, als auch dem Sinne nach, ganz verstanden hat. Wir erklären daher, daß gleichseitig derjenige Kegel heißt, dessen Meridianschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist. Die Höhe dieses gleichseitigen Dreiecks ist dann auch die Höhe des Kegels und die Seite dieses gleichseitigen Dreiecks ist der Durchmesser des Grundkreises und gleichzeitig auch Mantellinie des Kegels; diese Seite werden wir demnach ganz zuerst aus dem Körperinhalt zu berechnen haben. Zu dem Zwecke benennen wir die Seite dieses Meridianschnittes mit s; die Höhe desselben mit h; den Körperinhalt des Kegels mit K und die gesuchte Mantelfläche mit M. Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$h = \frac{s.\sqrt{3}}{2}$$

$$K = \frac{\pi}{3}.h.\left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$s = \sqrt[3]{\frac{24.K}{\pi.\sqrt{3}}} = 2.\sqrt[3]{\frac{K.\sqrt{3}}{\pi}}$$

und da wir die Formel haben:

$$M = \pi.\frac{s}{2}.s$$

so folgt:

$$M = 2.\sqrt[3]{3.\pi^2.K^2}$$

Aufgabe 105. Eine Kugel ist gegeben; man soll derselben einen Kegel so umschreiben, daß der Körperinhalt dieses Kegels ein Minimum wird.

Lösung: Man skizziere einen Meridianschnitt; derselbe besteht aus einem größten Kreise der gegebenen Kugel und einem diesem Kreise umschriebenen gleichschenkligen Dreieck. Dann benennen wir die Höhe des Kegels, welche auch Höhe des Meridiandreiecks ist, mit h; den Radius der gegebenen Kugel mit R und den Radius der Grundfläche mit r; den Schenkel des Meridiandreiecks mit s und den Körperinhalt des Kegels, der ein Minimum werden soll, mit m. Zieht man in der Skizze außer der Höhe noch einen Radius zum Berührungspunkt des einen Schenkels, so sind die folgenden Gleichungen verständlich:

$$m = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h \qquad 1)$$

$$(h - R)^2 = R^2 + (s - r)^2 \qquad 2)$$

$$s^2 = h^2 + r^2 \qquad 3)$$

Durch kleine Umformungen findet man aus den Gleichungen 2 und 3:

$$s = r + \sqrt{h^2 - 2h \cdot R}$$

und

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$r = \frac{h \cdot R}{\sqrt{h^2 - 2h \cdot R}} \qquad 4)$$

Die auffallenden Vereinfachungen, welche bei der Ableitung der Gleichung 4 aus den Gleichungen 2 und 3 eintreten, zwangen uns wiederum den Gedanken auf, ob es nicht möglich ist, die Gleichung 4 unmittelbar aus der Figur zu entnehmen? Um die Richtigkeit dieses Gedankens deutlich zu machen, schreiben wir die Gleichung 4 folgendermaßen:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{\sqrt{h \cdot (h - 2R)}}$$

und nun ist es leicht, in der Skizze die beiden Dreiecke zu finden, aus deren Ähnlichkeit die letzte Formel unmittelbar gefolgert werden kann, wenn man gleichzeitig den Satz, betreffend die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis, benutzt.

Jetzt substituieren wir den Wert für r aus der Gleichung 4 in die Gleichung 1 und erhalten:

$$\pi \cdot R^2 \cdot h^2 - 3m \cdot h + 6m \cdot R = 0 \qquad 5)$$

Diese Gleichung gibt, nach h aufgelöst:

$$h = \frac{3m \pm \sqrt{9m^2 - 24 \cdot \pi \cdot m \cdot R^3}}{2 \cdot \pi \cdot R^2.} \qquad 6)$$

Diese Gleichung benutzen wir zu den folgenden Argumentationen.

Da ein imaginärer Wert von h für die vorliegende Aufgabe keinen Sinn hat, so darf der Wert unter dem Wurzelzeichen nicht negativ werden. Daher setzen wir:

$$9m^2 - 24 \cdot \pi \cdot m \cdot R^3 > 0 \qquad 7)$$

d. h. die in diesem Ausdruck noch enthaltene veränderliche Größe m darf nur solche Werte annehmen, für welche die obige Bedingung erfüllt wird.

Wir können schreiben:

$$3m.(3m - 8\pi.R^3) > 0. \tag{8}$$

Da m negativ für die vorliegende Aufgabe keinen Sinn hat, so knüpfen unsere weiteren Betrachtungen an die Ungleichung 9 an:

$$3m - 8\pi.R^3 > 0 \tag{9}$$

und wir sehen aus ihr, daß m beliebig große Werte annehmen darf, aber nicht beliebig kleine; der kleinste Wert, der für m zulässig ist, ergibt sich aus der Gleichung 10:

$$3m - 8\pi.R^3 = 0 \tag{10}$$

$$m = \frac{8}{3}\pi.R^3 \tag{11}$$

Dieses ist der gesuchte Minimalwert des Körperinhaltes solcher Kegel, welche alle der Kugel mit dem Halbmesser R umschrieben sind; wir werden später sehen, daß dieser kleinste Kegel genau doppelt so groß ist als die Kugel.

Durch Substitution dieses Minimalwertes in die Gleichung 6 ergibt sich, daß dieser kleinste Kegel erhalten wird, wenn man ihm eine Höhe gibt, die der Gleichung 12 entspricht:

$$h = 4R. \tag{12}$$

Die Skizze, die wir zu unserer nun vollständig gelösten Aufgabe entworfen haben, zeigt uns eigentlich nur die planimetrische Aufgabe: Ein Kreis ist gegeben, man soll ihm ein solches Dreieck umschreiben, welches unter allen möglichen den kleinsten Inhalt hat. Auffallender Weise führt die Lösung dieser planimetrischen Aufgabe zu Gleichungen, die höher als zweiten Grades sind.

Bemerkung: Weitere Beispiele zu Rechnungsaufgaben werden hier nicht genannt, weil es zu diesem Zwecke vortreffliche Sammlungen gibt. Z. B.:

Dr. B. Féaux. Sammlung von Rechnungsaufgaben aus Arithmetik und Algebra, Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie (Essen, Bädecker).

H. C. E. Martus. Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten (Greifswald, Koch).

Dr. Franz Wallentin. Maturitätsfragen aus der Mathematik (Wien, Karl Gerold's Sohn).

Siebenter Abschnitt.

Die Kugel.

§ 60. Schon Archimedes (287 bis 212) hat die Aufgabe gelöst, die Maßzahl des Körperinhaltes einer Kugel aus der Maßzahl ihres Radius zu berechnen. Sein bedeutungsvoller Lehrsatz lautet folgendermaßen:

Lehrsatz 47. Der Körperinhalt einer Halbkugel ist gleich dem Körperinhalte eines Cylinders von derselben Grundfläche und Höhe, weniger dem Körperinhalte eines Kegels von derselben Grundfläche und Höhe.

Zu obigem Satze ist zu bemerken, daß unter der Grundfläche einer Halbkugel der größte Kreis zu verstehen ist, der sie begrenzt, sodaß die Höhe der Halbkugel gleich ihrem Radius wird.

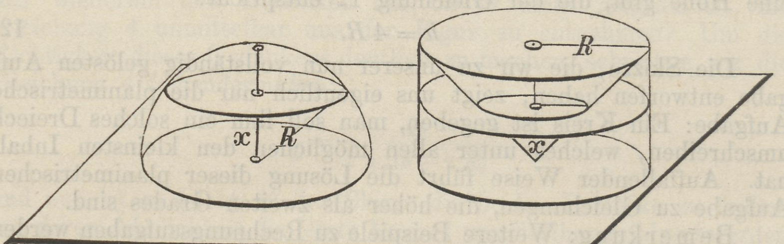


Fig. 59.

Zum Beweise des obigen Satzes denke man sich die Halbkugel mit ihrer Grundfläche auf eine Ebene gestellt, auf welcher auch der Cylinder mit seiner Grundfläche steht. Dann denke man sich den Kegel aus dem Cylinder derartig herausgeschnitten, daß die Grundfläche des Kegels mit der Deckfläche des Cylinders zusammenfällt, sodaß die Spitze des Kegels in den Mittelpunkt der Cylindergrundfläche zu liegen kommt (Fig. 59). Der hierdurch entstehende Restkörper soll gleich der Halbkugel sein; und wir leiten diese Wahrheit leicht aus der Thatsache ab, daß die beiden genannten Körper aus lauter flächengleichen Schnitten zusammengesetzt erscheinen.

Man schneide z. B. die beiden Körper (die Halbkugel und den Restkörper) in beliebigem, aber gleichem Abstand x von ihren Grundflächen, parallel zu diesen — so entstehen immer flächengleiche Schnitte. Denn der Schnittkreis der Halbkugel ist nach der Formel zu berechnen:

$$\pi \cdot (R^2 - x^2)$$

und der Kreisring des Restkörpers berechnet sich nach der Formel:

$$\pi . R^2 - \pi . x^2$$

Da diese beiden Formeln identisch sind, so erkennen wir, daß für die beiden verglichenen Körper die Forderung des Cavalieri erfüllt ist — folglich sind diese Körper inhaltsgleich.

Somit dürfen wir schreiben:

$$\frac{Ku}{2} = Cy - Ke$$

$$\frac{Ku}{2} = \pi . R^2 . R - \frac{1}{3} . \pi . R^2 . R$$

$$\frac{Ku}{2} = \frac{2}{3} . \pi . R^3$$

$$Ku = \frac{4}{3} . \pi . R^3$$

Diese Formel hat der Schüler sich sofort fest einzuprägen. Und zwar ist diese Formel leicht zu behalten, denn, daß in ihr die dritte Potenz des Radius vorkommen muß, das wußten wir im Voraus; desgleichen kann uns der Faktor π nicht überraschen; es bleibt demnach nur noch der bedeutungsvolle Faktor $\frac{4}{3}$ — der aber tritt aus der Entstehung unserer Formel so klar hervor, daß er gar nicht mehr vergessen werden kann.

§ 61. Nicht nur von der ganzen Kugel, sondern auch von gewissen Teilen derselben handelt die Stereometrie; und zwar sind das die folgenden:

Wird eine Kugel durch eine Ebene geschnitten, so teilt dieselbe die ganze Kugel in zwei Kugelsegmente; das eine dieser Segmente ist stets kleiner, das andere größer als die Halbkugel.

Die gekrümmte Oberfläche, welche zu einem Segmente gehört, heißt Kalotte.

Sowohl bei einem Segment als auch bei einer Kalotte spricht man von ihrem Grundkreise und ihrer Höhe.

Denkt man sich den Grundkreis eines Segmentes auch als Grundkreis eines solchen Kegels, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, so bilden Segment und Kegel zusammen diejenige Körperform, welche Kugelsektor heißt.

Wird eine Ebene von zwei parallelen Ebenen geschnitten, so heißt das zwischen beiden Ebenen liegende Körperstück Kugelschicht und der zwischen den beiden Schnittkreisen liegende Flächenstreifen heißt Zone. Der Abstand der beiden Ebenen wird Höhe dieser Formen genannt.

Die hiermit in unsere Betrachtungen neu eingetretenen Gebilde sind nicht ohne Beziehungen unter einander. Die bedeutungsvollste dieser Beziehungen ist diejenige, in welcher Kalotte und

Sektor zu einander stehen. Wir können nämlich den Kugelsektor auffassen als einen Kegel, dessen Grundfläche die Kalotte ist und dessen Höhe der Radius der Kugel ist. Daraus ergibt sich die Formel:

$$Sk = \frac{1}{3} . Ca . R.$$

Sobald wir eine Kugelfläche durch eine Ebene schneiden, so entstehen jedesmal zwei Kalotten, deren Summe gleich der ganzen Oberfläche ist; wir schreiben das in mathematischen Zeichen:

$$Ca + C'a = O.$$

Zu diesen beiden Kalotten gehören zwei Sektoren, deren Summe gleich dem ganzen Kugelkörper ist; wir schreiben das in mathematischen Zeichen:

$$Sk + S'k = Ku$$

Nun wissen wir aber, daß:

$$Sk = \frac{1}{3} . Ca . R$$

$$S'k = \frac{1}{3} . C'a . R$$

$$Sk + S'k = \frac{1}{3} . R . (Ca + C'a)$$

$$Ku = \frac{1}{3} . R . O.$$

Da die Kalotte als ein Spezialfall der Zone aufgefaßt werden kann, so werden wir im stande sein, die Formeln für alle genannten Kugelteile aufzustellen, sobald wir die Formel für die Zone gefunden haben. Das soll, gestützt auf die letzte Formel des § 58, in dem folgenden Paragraphen geschehen.

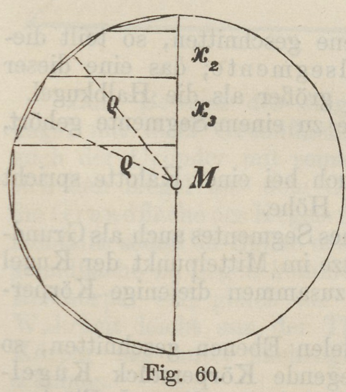


Fig. 60.

§ 62. Denken wir uns einem Kreise ein Polygon von gerader Anzahl Seiten eingeschrieben (Fig. 60) und lassen Kreis und Polygon um einen Durchmesser rotieren, so entsteht eine Kugelfläche und eine dieser Kugelfläche eingeschriebene gebrochene Fläche, welche aus einer Reihe abgestumpfter Kegelflächen besteht. Bilden wir uns die Summe z. B. zweier dieser Kegelflächen, so können wir mit Benutzung der letzten Formel des § 58 schreiben:

$$\Sigma(2) = 2 . \pi . \varrho . x_2 + 2 . \pi . \varrho . x_3$$

$$\Sigma(2) = 2 . \pi . \varrho . (x_2 + x_3) = 2 . \pi . \varrho . h.$$

In dieser Formel bedeutet $\Sigma(2)$ die gebrochene Fläche, welche durch Summation zweier abgestumpfter Kegelflächen sich ergibt; und h bedeutet die Höhe dieser gebrochenen Fläche.

Denken wir uns jetzt die Seitenzahl des eingeschriebenen Polygons verdoppelt und betrachten denjenigen gebrochenen Flächenstreifen, welcher zu derselben Höhe h gehört, dann haben wir zu schreiben:

$$\Sigma'(4) = 2 \,.\, \pi \,.\, \varrho' \,.\, y_3 + 2\pi \,.\, \varrho' y_4 + 2 \,.\, \pi \,.\, \varrho' y_5 + 2 \,.\, \pi \,.\, \varrho' \,.\, y_6$$

$$\Sigma'(4) = 2 \,.\, \pi \,.\, \varrho' \,.\, (y_3 + y_4 + y_5 + y_6) = 2 \,.\, \pi \,.\, \varrho' \,.\, h.$$

Setzen wir in gleicher Weise die Verdoppelung der Seitenzahl fort, bis die Sehnen mit den Bögen zusammenfallen, dann wird die gebrochene Summenfläche zur Kugelzone werden; hierbei geht ϱ in R über und wir haben die Formel:

$$Zo = 2 \,.\, \pi \,.\, R \,.\, h.$$

In Worten ausgedrückt lehrt uns diese Formel: Die Fläche einer Kugelzone ist gleich der Mantelfläche desjenigen Cylinders, dessen Höhe gleich ist der Höhe der Zone und dessen Grundkreis gleich ist dem größten Kreise der Kugel.

Unsere besondere Aufmerksamkeit erweckt diese Formel durch den Umstand, daß in ihr die Radien der beiden Grundkreise der Zone nicht enthalten sind. Verschiedene Zonen derselben Kugel sind demnach inhaltsgleich, sobald sie gleiche Höhen haben. Somit gilt auch für die Kalotte dieselbe Formel:

$$Ca = 2 \,.\, \pi \,.\, R \,.\, h.$$

Bei dieser Kalottenformel sei nochmals darauf aufmerksam gemacht, daß R den Radius der Kugel bedeutet, auf welcher die Kalotte liegt.

Ganz deutlich erscheint die halbe Kugeloberfläche als eine Kalotte mit der Höhe R; folglich ist die ganze Kugeloberfläche eine Kalotte mit der Höhe $2\,R$ und wir haben die Formel:

$$O = 4 \,.\, \pi \,.\, R^2.$$

Überraschend einfach ist diese Formel, welche uns lehrt, daß die Oberfläche einer Kugel genau viermal so groß ist, als die Fläche ihres größten Kreises.

Substituieren wir diesen Wert in die letzte Formel des § 61, so erhalten wir die Formel des Archimedes.

§ 63. Wegen ihres häufigen Gebrauches sind in diesem Paragraphen alle stereometrischen Formeln zusammengestellt, die wir bis hierzu abgeleitet haben.

$$Pr = G \,.\, h \tag{1}$$

$$Py = \frac{1}{3} \,.\, G \,.\, h \tag{2}$$

$$Py_a = \frac{H}{3} \,.\, (G + \sqrt{G \,.\, g} + g) \tag{3}$$

$$Cy = \pi . r^2 . h \tag{4}$$

$$Ke = \frac{\pi}{3} . r^2 . h \tag{5}$$

$$Ke_a = \frac{\pi}{3} . H . (R^2 + R . r + r^2) \tag{6}$$

$$Cy_m = 2 . \pi . r . l \tag{7}$$

$$Ke_m = \pi . r . l \tag{8}$$

$$Ke_{m.a} = \pi . L . (R + r) = 2 . \pi . \varrho . H \tag{9}$$

$$Ku = \frac{4}{3} . \pi . R^3 \tag{10}$$

$$O = 4 . \pi . R^2 \tag{11}$$

$$Zo = Ca = 2 . \pi . R . h \tag{12}$$

$$Sk = \frac{1}{3} . R . Ca \tag{13}$$

$$Sg = Sk - Ke \tag{14}$$

§ 64. Wieder mögen die beiden folgenden Aufgaben als Beispiele dafür dienen, wie die einschlägigen Rechnungen durchzuführen sind.

Aufgabe 106. Von einer Kugelzone sind gegeben: die Radien ihrer Grundkreise $r = 42$ und $r' = 28$ und ihre Höhe $h = 21$; wie groß ist die Fläche dieser Zone?

Lösung: Da nach einer Kugelzone gefragt ist, so werden wir die Formel (12) benutzen müssen:

$$Zo = 2 . \pi . R . h \tag{1}$$

In dieser Formel ist aber außer der Zonenfläche auch noch R unbekannt, wir müssen daher noch weitere Gleichungen aufzustellen versuchen. Zu diesem Zwecke skizzieren wir die Kugel mit der Zone und finden dann leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$R^2 = r^2 + x^2 \tag{2}$$

$$R^2 = r'^2 + (x + h)^2 \tag{3}$$

In diesen Formeln bedeutet x den Abstand der Ebene des größeren der beiden Grundkreise vom Mittelpunkte der Kugel.

Wir haben drei Gleichungen mit drei Unbekannten; der Ansatz ist beendet.

Nunmehr ist es unsere Aufgabe, die algebraische Rechnung so zu führen, daß sich eine Gleichung ergibt, in der nur Zo, r, r', h enthalten sind; d. h. wir haben x und R zu eliminieren. Zu dem Zwecke eliminieren wir zunächst R^2 aus den Gleichungen 2 und 3 und erhalten hierdurch:

$$x = \frac{r^2 - r'^2 - h^2}{2 . h}$$

Dieser Wert, in die Gleichung (2) substituiert, liefert:

$$R^2 = \frac{(r^2 - r'^2)^2 + h^4 + 2\,h^2 . (r^2 + r'^2)}{4 . h^2}$$

Und als Resultat erhalten wir die Formel:

$$Zo = \pi . \sqrt{(r^2 - r'^2)^2 + h^4 + 2\,h^2 (r^2 + r'^2)}$$

Jetzt erst substituieren wir die bestimmten Zahlenwerte und führen auch den arithmetischen Teil der Rechnung durch:

$$\begin{aligned} Zo &= \frac{22}{7} \cdot \sqrt{(42^2 - 28^2)^2 + 21^4 + 2 . 21^2 . (42^2 + 28^2)} \\ &= \frac{22}{7} \cdot \sqrt{7^4 . 400 + 7^4 . 81 + 7^4 . 18 . 52} \\ &= 22 . 7 . \sqrt{1417} \\ &= 154 . 37{,}64 \\ &= 5796. \end{aligned}$$

Es ist die Wurzel nur auf zwei Dezimalstellen angegeben worden, weil der benutzte Wert von π auch nur auf zwei Dezimalstellen genau ist. Denkt man sich die gegebenen Maßzahlen auf das Millimeter als Maßeinheit bezogen, so muß das Resultat auf Quadratmillimeter bezogen werden.

Aufgabe 107. Berechne das Kugelsegment aus dem Radius seines Grundkreises und seiner Höhe.

Lösung:

$$Sg = Sk - Ke \tag{1}$$

$$Sk = \frac{1}{3} . R . Ca \tag{2}$$

$$Ca = 2 . \pi . R . h \tag{3}$$

$$Ke = \frac{1}{3} . \pi . r^2 . (R - h) \tag{4}$$

$$R^2 = r^2 + (R - h)^2 \tag{5}$$

Aus der Gleichung (5) findet man die Werte:

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2 . h}$$

und

$$R - h = \frac{r^2 - h^2}{2 . h}$$

Diese Werte, in die Gleichungen (4) und (3) substituiert, geben:

$$Ke = \frac{\pi}{2} . r^2 . \frac{r^2 - h^2}{2\,h}$$

und

$$Ca = \pi . (r^2 + h^2)$$

Diese letzte Formel ist bedeutungsvoll, denn sie lehrt uns die Kugelkalotte aus der Höhe und dem Radius ihres Grundkreises zu berechnen. Der Schüler füge diese Formel der Formelsammlung des § 63 an.

Durch Substitution der Werte für R und Ca in die Gleichung (2) und durch Überführung der Sektorformel und Kegelformel in die Gleichung (1) erhalten wir die Resultatsgleichung:

$$Sg = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(r^2 + h^2)^2}{2 \cdot h} - \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot \frac{r^2 - h^2}{2h}$$

$$Sg = \frac{\pi}{6} \cdot h \cdot (3 \cdot r^2 + h^2)$$

Auch diese Formel vermehrt mit Nutzen die Formelsammlung des vorhergehenden Paragraphen.

Achter Abschnitt.

Sphärometrie.

§ 65. Unter Sphäre versteht man die Kugel und es ist das Wort Sphärometrie in analogem Sinne aufzufassen, wie das Wort Planimetrie, d. h. die Sphärometrie handelt von der Messung solcher Figuren, die auf einer Kugelfläche gezeichnet sind.

Die einfachste Linie der Sphärometrie ist der größte Kreis, denn er ist schon durch zwei Punkte der Kugelfläche bestimmt, er hat die kleinste Krümmung und sein Bogen gibt daher den sphärischen Abstand zweier Punkte an.

Wir denken uns alle sphärischen Figuren nur von Bögen größter Kreise umgrenzt.

Jeder größte Kreis hälftet die Kugelfläche.

Stehen die Ebenen zweier größten Kreise senkrecht zu einander, so nennt man auch die Kreise selbst senkrecht zu einander stehend. Zu einem gegebenen größten Kreise gibt es unzählig viele senkrechte größte Kreise. Man nennt den gegebenen größten Kreis auch Grundkreis oder Horizont und dann alle zu ihm senkrechten größten Kreise seine Vertikalkreise.

Alle Vertikalkreise eines bestimmten Grundkreises schneiden sich in zwei Punkten; das sind die Endpunkte desjenigen Durchmessers der Kugel, welcher auf der Ebene des Grundkreises lotrecht steht. Diese Punkte werden die Pole des Grundkreises genannt; und umgekehrt heißt der Grundkreis wohl auch die Polare zu den beiden Punkten. Die Pole haben von allen Punkten der Polare 90^0 sphärischen Abstand.

Im allgemeinen versteht man unter sphärischem Abstande eines Punktes von einem Kugelkreise den betreffenden Bogen desjenigen größten Kreises, welcher durch den Punkt geht und senkrecht zum gegebenen Kreise steht.

Kugelkreise heißen parallel, wenn ihre Ebenen parallel sind. Größte Kreise können nie parallel sein; folglich gibt es keine ähnlichen sphärischen Gebilde, welche auf derselben Kugel liegen.

Denkt man sich zu einem Grundkreise alle Vertikalkreise und gleichzeitig alle Parallelkreise gezeichnet, so erhält man ein sphärisches Koordinatennetz.

Zu klarer Erfassung dieser, wie auch aller weiteren sphärischen Anschauungen müssen sphärische Konstruktionen wirklich vorgeführt werden. Hierzu braucht man eine möglichst große schwarze Kugel, welche mit einem Kugelgelenk auf einem Fuß befestigt ist, und ein zu dieser Kugel passendes sphärisches Winkellineal; praktisch ist auch noch ein Zirkel mit ungleich langen Füßen. Auf die unmittelbare Anschauung wirklich ausgeführter sphärischer Zeichnungen stützen sich alle weiteren Sätze.

§ 66. Zwei größte Kreise schneiden sich immer in zwei Punkten, Gegenpunkte genannt.

Zwei größte Kreise teilen die ganze Kugelfläche in vier Stücke, von denen jedes sphärischer Winkel heißt.

Der sphärische Winkel hat begrenzte Schenkel, hat zwei Scheitelpunkte, hat eine endliche Fläche; der sphärische Winkel heißt auch sphärisches Zweieck.

Die Summe zweier sphärischen Nebenwinkel ist gleich der Halbkugel; sphärische Scheitelwinkel sind einander gleich.

Sind zwei sphärische Nebenwinkel einander gleich, so nennt man sie rechte; vier rechte Winkel sind identisch mit der ganzen Oberfläche einer Kugel.

Aufgabe 108. Wie groß ist die Fläche eines sphärischen Winkels von $73^0\,24'$, wenn der Radius der Kugel 63 mm lang ist?

Lösung: Die gewünschte Maßzahl W der Winkelfläche finden wir aus der Proportion:

$$\frac{Ku}{W} = \frac{360}{73{,}4}$$

$$W = \frac{4 \,.\, \pi \,.\, 63^2 \,.\, 73{,}4}{360}$$

$$W = \pi \,.\, 21^2 \,.\, 7{,}34$$

$$W = 22 \,.\, 3 \,.\, 21 \,.\, 7{,}34$$

$$W = 10173 \,\square\, \text{mm.}$$

Da wir festgestellt haben, daß die gegenseitige Lage zweier Kugelkreise von uns stets nach der Lage ihrer Ebenen zu beurteilen ist, so müssen wir auch sagen, daß die Maßzahl eines sphärischen Winkels gleich ist der Maßzahl des Flächenwinkels der Ebenen seiner Schenkel. Daß diese Erklärung zulässig ist, erkennen wir sofort, sobald wir im Scheitelpunkte eines sphärischen Winkels die Tangenten an seine Schenkel legen. Denn diese Tangenten bilden den Maßwinkel des sphärischen Winkels und gleichzeitig den Maßwinkel des Flächenwinkels.

Konstruieren wir den Maßwinkel dieses Flächenwinkels in solcher Lage, daß sein Scheitelpunkt im Mittelpunkte der Kugel liegt, so bestimmen seine Schenkel eine solche Ebene, welche die Kugel in einem größten Kreise schneidet, welcher zu beiden Schenkeln des sphärischen Winkels senkrecht steht; es ist dieser Schnittkreis die Polare zu den beiden Scheitelpunkten des sphärischen Winkels. Hierdurch lernen wir die Maßzahl eines sphärischen Winkels durch eine sphärische Konstruktion zu ermitteln. Wir merken uns zu diesem Zwecke den folgenden Satz:

Die Maßzahl eines sphärischen Winkels ist gleich der Maßzahl desjenigen Bogens, den seine Schenkel von der Polaren seiner Scheitelpunkte abschneiden.

§ 67. Drei größte Kreise zerlegen die Kugelfläche in acht Stücke und jedes derselben hat die Form eines sphärischen Dreiecks.

Denkt man sich eins derselben als gegeben, so teilen sich die anderen sieben in drei Gruppen; nämlich in drei Nebendreiecke, drei Scheiteldreiecke und ein Gegendreieck.

Lehrsatz 48. Zwei Gegendreiecke sind symmetrisch.

Beweis: Daß die Seiten und Winkel beider Dreiecke gleich sind, ist unmittelbar ersichtlich; daß sie trotzdem nicht zur Deckung gebracht werden können, ist auch klar. (Man benutze, wenn nötig, einen Gummiball, aus welchem man das eine Dreieck herausschneidet.) Es gilt demnach nur noch zu beweisen, daß diese Dreiecke flächengleich sind.

Zu dem Zwecke denke man sich um die beiden Dreiecke Kreise umschrieben. Diese Kreise schneiden flächengleiche Kalotten ab. Zieht man von jeder dieser flächengleichen Kalotten die drei Flächenstücke ab, welche zwischen den Seiten des Dreiecks und seinem umschriebenen Kreise liegen, so bleiben die Dreiecksflächen nach; und da je zwei dieser zweieckigen Kugelflächenstücke kongruent sind, so ergeben sich die Dreiecksflächen als gleich.

Ein anderer Beweisgang ergibt sich, wenn man die Mittelpunkte der umschriebenen Kreise benutzt. Verbindet man dieselben mit den Ecken der Dreiecke, so werden diese hierdurch in gleichschenklige Dreiecke zerlegt, von denen je zwei kongruent sind.

§ 68. Wenn man von den drei größten Kreisen, welche zur Bildung eines Dreiecks erforderlich sind, einen in der Zeichnung ganz besonders hervorhebt (z. B. den Kreis der Seite AC), so ergibt sich unmittelbar aus der Figur die folgende Gleichung:

$$A + (C - \Delta) + B = \text{Halbkugel} + \Delta'$$

Zu dieser Gleichung ist zu bemerken, daß in derselben das Zeichen Δ (Delta) die Fläche des gegebenen sphärischen Dreiecks ABC bedeutet und Δ' die Fläche seines Gegendreiecks, sodaß wir schreiben können:

$$\Delta' = \Delta$$

Ferner sei bemerkt, daß man bei der Summierung der Flächen der drei Winkel des Dreiecks, anstatt des Dreieckswinkels B seinen ihm gleichen Scheitelwinkel benutzt hat.

Da wir anstatt der Halbkugelfläche den sphärischen Winkel 180° schreiben können, so läßt sich die letzte Gleichung in die folgende Form umrechnen:

$$\Delta = \frac{(A + B + C) - 180}{2}$$

Dieses ist die bedeutungsvollste Gleichung der ganzen Sphärometrie.

Aufgabe 109. Wie viele Quadratmeilen mißt die Fläche desjenigen sphärischen Dreiecks, welches mit den Winkeln $A = 74^0\ 12'$; $B = 68^0\ 42'$; $C = 53^0\ 54'$ auf einer Kugel liegt, deren Halbmesser 960 Meilen lang ist.

Lösung: In Graden wird die Fläche dieses Dreiecks aus der folgenden Gleichung gefunden:

$$\Delta = \frac{(74{,}2 + 68{,}7 + 53{,}9) - 180}{2}$$

$$\Delta = \frac{16{,}8}{2} = 8{,}4$$

D. h. ein sphärischer Winkel von 8,4 Graden hat eine Fläche, welche gleich ist der Fläche des gegebenen Dreiecks. Daß die Fläche eines Dreiecks durch einen Winkel gemessen werden kann, ist charakteristisch für die Sphärometrie; und es ist diese Thatsache sofort verständlich, sobald man sich des Umstandes erinnert, daß ein sphärischer Winkel und ein sphärisches Zweieck identische Figuren sind.

Benennen wir mit D die Flächenmaßzahl unseres Dreiecks, bezogen auf die Quadratmeile als Maßeinheit, so können wir die folgende Proportion aufstellen:

$$\frac{4 \,.\, \pi \,.\, R^2}{D} = \frac{360}{\Delta}$$

$$D = \frac{4 \,.\, \pi \,.\, R^2 \,.\, \Delta}{360}$$

$$D = \frac{4 \,.\, 22 \,.\, 960^2 \,.\, 8{,}4}{7 \,.\, 360}$$

$$D = 22 . 32^2 . 12$$
$$D = 270\,336.$$

Die Differenz $(A + B + C) - 180$ führt einen eigenen Namen; sie heißt sphärischer Exceß. Dann haben wir den Satz: Die Fläche eines sphärischen Dreiecks ist gleich der Hälfte seines Excesses.

§ 69. Ist ein sphärisches Dreieck gegeben und man verbindet seine Eckpunkte mit dem Mittelpunkte der Sphäre, so entsteht ein Dreikant, welches zu dem Dreieck in höchst bedeutungsvoller Beziehung steht. Es sind die Kantenwinkel dieses Dreikants die Centriwinkel zu den Seiten des Dreiecks und die Flächenwinkel dieses Dreikants werden durch die Dreieckswinkel gemessen.

Mit anderen Worten: Zu jedem sphärischen Dreieck läßt sich ein solches Dreikant konstruieren, welches in bezug auf die Maßzahlen der einzelnen Bestimmungsstücke mit dem Dreieck identisch ist.

Somit sind alle Lehrsätze, die wir über das Dreikant gehabt haben, unmittelbar auf das sphärische Dreieck übertragbar.

Aus allen diesen Sätzen heben wir nur den vom Supplementardreikant zu näherer Betrachtung heraus. Zunächst folgt, daß es auf der Sphäre auch Supplementardreiecke gibt; d. h. zu jedem sphärischen Dreieck läßt sich ein zweites konstruieren, dessen Seiten die Supplemente sind zu den Winkeln des gegebenen Dreiecks, während gleichzeitig auch die Winkel des Supplementardreiecks die Supplemente sind zu den Seiten des gegebenen.

Um zu einem gegebenen sphärischen Dreieck sein Supplementardreieck zu erhalten, kann man folgendermaßen verfahren. Man konstruiert zum gegebenen sphärischen Dreieck zunächst sein Dreikant und dann zu diesem Dreikant sein Supplementardreikant. Gibt man dann diesem Supplementardreikant eine solche Lage, daß sein Scheitelpunkt in den Mittelpunkt der Kugel fällt, so schneiden seine Seiten auf der Kugelfläche das Supplementardreieck heraus.

Lehrreicher wird die Konstruktion, wenn wir also verfahren: Nachdem zum gegebenen Dreieck sein Dreikant konstruiert ist, wählt man zum Scheitelpunkt des zu konstruierenden Supplementardreikants sofort den Mittelpunkt der Kugel; dann bleiben die beiden Dreikante in der von der ersten Definition geforderten Lage, d. h. die Kantenlinien des einen sind Lote zu den Seiten des anderen. Es sind somit in dieser Lage die Ecken des Supplementardreiecks die Pole zu den Seiten des gegebenen Dreiecks und umgekehrt.

Aus dieser Beziehung ergibt sich die sphärische Konstruktion des Supplementardreiecks und es wird durch sie verständlich, warum man das Supplementardreieck in der Regel Polardreieck nennt.

Die in diesem Abschnitt entwickelten Anschauungen bilden die Grundlage zu den Lehren der sphärischen Trigonometrie und der astronomischen Geographie.

Anhang.

1. Des Verfassers psychologische Anschauungen sind durchweg diejenigen, welche Herbart lehrt.

2. Man hänge z. B. über das Bett des ganz kleinen Kindes eine rote Walze; so wird das Kind durch das Auge nur einen Gesamteindruck empfangen, dessen Bestandteile, wie Form, Farbe, rund, Kante u. s. w., es noch nicht trennt. Nachdem dieser Eindruck sich gehörig befestigt hat, so ersetze man die rote Walze durch eine blaue Walze und diese durch einen blauen Kegel u. s. w. und man zwingt hierdurch das Kind den Eindruck Farbe von dem Eindruck Form zu trennen.

3. Wenn z. B. ein Neger und ein Eskimo das Wort Baum gebrauchen, so denkt der Neger an hohe Palmen und der Eskimo an niedrige Weiden; es müssen demnach die Aussagen beider ganz verschieden lauten. Noch deutlicher zeigt sich dasselbe bei Personen verschiedenen Bildungsgrades. So hat z. B. das Wort Kreis für einen Knaben, der nie eine Schule besuchte, einen Inhalt, der außerordentlich klein erscheint, verglichen mit dem Inhalte, den dieses Wort durch die Lehren der Planimetrie erhält; und die Lehren der neueren Geometrie erweitern diesen Inhalt wiederum.

Jede Aussage ist subjektiv wahr; aber unser Streben soll nach objektiver Wahrheit gehen. Die Wissenschaft ist es, die uns am sichersten zu der letzteren führt.

4. Der Inhalt eines Begriffes wird erst durch andauernde wissenschaftliche Untersuchung allmählich immer mehr erkannt. Man denke z. B. an den Inhalt des Begriffes Kreis.

5. Interessant ist es, daß wir bei der Geschwindigkeit nicht nur im stande sind, dieselbe in andere Begriffe zu zerlegen, sondern auch angeben können, wie diese neuen Begriffe zu verbinden sind, damit der Begriff Geschwindigkeit aus ihnen wieder entstehe. Diesen vollständigen Zusammenhang der drei Begriffe Geschwindigkeit (v), Weg (s), Zeit (t) gibt die Gleichung:

$$v = \frac{s}{t}$$

Aus derselben finden wir:

wenn $t = 1$ ist, so muß $v = s$ sein.

Hieraus lernen wir die Ausdrucksweise: Unter Geschwindigkeit hat man den auf die Zeiteinheit reduzierten Weg zu verstehen. Weil demnach v und s sich stets auf dieselbe Maßeinheit beziehen müssen, so fehlt in der obigen Gleichung der konstante Reduktionssektor.

6. Die Tangente entsteht aus der Sekante, indem dieselbe sich um den einen festliegenden Schnittpunkt so lange dreht, bis der zweite Schnittpunkt mit dem ersteren zusammenfällt.

Hieraus erkennen wir, daß eine Tangente durch ihren Berührungspunkt ohne Zweideutigkeit bestimmt ist.

Da aber eine Gerade nur durch zwei Punkte bestimmt ist, so haben wir den Berührungspunkt als einen Doppelpunkt aufzufassen.

Zwei Punkte bestimmen aber eine Strecke und wir müssen daher sagen, daß die Tangente mit ihrer Kurve, wenn auch auf eine unmeßbar kleine, so doch auf eine bestimmte Strecke zusammenfällt. Eine solche unmeßbar kleine, aber doch bestimmte Länge heißt Element. Dann dürfen wir die beiden Ausdrucksweisen gebrauchen:

Jede Gerade besteht aus einer sehr großen Anzahl unmeßbar kleiner gekrümmter Elemente.

Jede Kurve besteht aus einer sehr großen Anzahl, zwar unmeßbar kleiner, aber geradliniger Elemente.

Die letztere Anschauung ist von großer Bedeutung. Man kann dieselbe auch mit folgenden Worten wiedergeben: Die Tangente ist die sichtbare Verlängerung eines bestimmten Kurvenelementes.

Da die Tangente die Richtung angibt, welche eine Kurve in einem bestimmten Punkte hat, so dienen Tangenten dazu den Winkel zu bestimmen, den zwei sich schneidende Kurven bilden. Man lege zu dem Zwecke im Schnittpunkte der Kurven Tangenten an dieselben.

Fassen wir die Gerade als eine Kurve auf und legen an dieselbe eine Tangente, so fällt diese mit der Geraden ganz zusammen. Die Gerade ist eine Kurve mit der Krümmung Null.

Um die Krümmungen verschiedener Kurven oder auch die Krümmungen an verschiedenen Stellen derselben Kurve mit einander zu vergleichen, denke man sich auf diesen Kurven gleich lange Bögen abgetragen und in den Endpunkten dieser Bögen Tangenten gezogen. Dort, wo dann die Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Tangenten die größeren sind, ist auch die Krümmung die stärkere.

7. Daß eine Gerade, wenn sie zwei Punkte im Unendlichen hat, mit allen Punkten im Unendlichen liegt, das wird aus folgender Betrachtungsweise klar.

Einen Punkt hat eine Gerade immer im Unendlichen, somit muß die Gerade mit allen Punkten ins Unendliche hinausrücken, sobald man noch irgend einen zweiten Punkt ins Unendliche hinausschiebt — und das ist wirklich der Fall. Denn zeichnet man irgend eine Gerade und wählt den Punkt K als denjenigen, der ins Unendliche hinausrücken soll, so kann man hierbei allemal die folgende Konstruktion ausführen. Man errichtet im Punkte K zur Geraden eine Senkrechte und wählt auf ihr irgend einen Punkt P. Nun denke man sich, daß der Punkt K auf der Geraden PK ins Unendliche hinausrücke, während die gegebene Gerade selbst stets senkrecht zu PK bleibt — dann ist klar, daß gleichzeitig mit dem Punkte K die ganze gegebene Gerade aus dem Endlichen verschwinden muß; denn jeder andere Punkt der gegebenen Geraden hat von P immer einen größeren Abstand als der Punkt K.

8. Zur Ermittelung der Maßzahl einer beliebig umgrenzten Fläche kann man folgendermaßen verfahren.

Man ziehe zwei beliebige, aber parallele Tangenten an die Umgrenzungskurve; den Abstand dieser Tangenten teile man in eine genügende Anzahl gleicher Stücke; durch jeden so gewonnenen Teilpunkt ziehe man auf der Fläche Sehnen, alle parallel zu den beiden Tangenten. Verbindet man jetzt die Endpunkte je zweier Nachbarsehnen, so entstehen lauter Trapeze und zwei Dreiecke. Würden die zuletzt gezogenen Sehnen mit ihren Bögen zusammenfallen, so würde die Summe dieser Trapeze (die beiden Dreiecke mit inbegriffen) genau gleich sein der gegebenen Fläche — das ist nun nicht der Fall. Setzen wir aber trotzdem die Trapezsumme gleich der gegebenen Fläche, so kann der hieraus entstehende Fehler dadurch beliebig verkleinert werden, daß man die Zahl der parallelen Sehnen genügend vermehrt. Genügend ist die Anzahl dieser parallelen Sehnen dann, wenn eine weitere Vermehrung ihrer Zahl den theoretischen Fehler weniger verkleinern würde, als der mechanische Fehler hierdurch vergrößert wird.

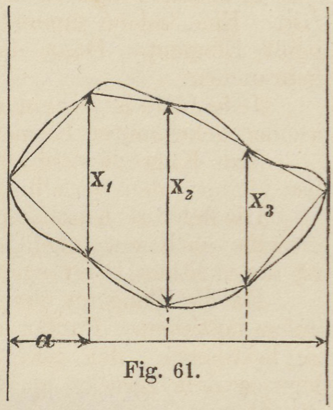


Fig. 61.

Aus der Figur 61 ergibt sich die folgende Gleichung:

$$Fl: = \frac{a \, . \, x_1}{2} + a \, . \, \frac{x_1 + x_2}{2} + a \, . \, \frac{x_2 + x_3}{2} + \frac{a \, . \, x_3}{2}$$

$$Fl: = a \, . \, (x_1 + x_2 + x_3)$$

Die letzte Gleichung liefert die im Text genannte Rechnungsregel.

9. Laut folgender Erklärung der Ähnlichkeit: Zwei Gebilde sind ähnlich, wenn sich dieselben in eine solche Lage bringen lassen, daß für einen bestimmten Punkt alle Vektoren des einen Gebildes mit den Vektoren des anderen Gebildes zusammenfallen und je zwei zusammengefallene und einander entsprechende Vektoren einerlei Verhältnis haben.