

Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Puhta matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Ingrid Vessin

**Moodulfunktsioonidega määratud
jadaruumid ja tugev summeeruvus**

Magistritöö

Juhendaja:dotsent Virge Soomer

Tartu 2006

Sisukord

Sissejuhatus	3
1. Moodulfunktsioonid ja nendega määratud jadaruumid.....	7
2. Thorpe'i teoreemi üldistusi ruumis $[c_A]_0(f)$	15
3. Thorpe'i teoreemi analoog lakunaarse jadaga määratud maatriksmenetluse korral.....	21
4. Thorpe'i teoreem Riesz'i kaalutud keskmiste menetluse korral.....	27
Summary.....	30
Kasutatud kirjandus.....	31

Sissejuhatus

Käesolev magistritöö kuulub summeeruvusteooria valdkonda ning käsitleb moodulfunktsioonidega määratud jadaruume.

1) Olgu $A = (a_{nk})$ lõpmatu maatriks üle reaalarvude korpuse ning $x = (\xi_k)$ reaalarvuline jada.

Jada $y = (\eta_n)$, kus

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \xi_k$$

nimetatakse jada $x = (\xi_k)$ maatriksteisenduseks.

Jada $x = (\xi_k)$ nimetatakse summeeruvaks maatriksmenetlusega $A = (a_{nk})$ (A -summeeruvaks), kui eksisteerib lõplik piirväärtus¹

$$\lim_n \eta_n = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \xi_k = A(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Olgu $p = (p_k)$ positiivsete reaalarvude jada ja $a_{nk} \geq 0$, $n, k = 1, 2, \dots$. Jada $x = (\xi_k)$ nimetatakse tugevalt A -summeeruvaks arvuku l astmega p , kui leidub piirväärtus

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |\xi_k - l|^{p_k} = 0.$$

Maatriksmenetluse summeeruvusväljaks (A -summeeruvusväljaks) nimetatakse hulka

$$c_A = \left\{ x = (\xi_k) : \exists \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \xi_k = A(x) \right\}$$

ja tugevaks summeeruvusväljaks hulka

$$[c_A]^p = \left\{ x = (\xi_k) : \exists l, \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |\xi_k - l|^{p_k} = 0 \right\},$$

kui $l = 0$, saame tugevalt nulliks A -summeeruvate jadade ruumi $[c_A]_0^p$.

Tähistame sümboliga c kõigi koonduvate jadade ruumi.

¹ Sümbol $\lim_n$ tähendab siin ja edaspidi piirväärtust protsessis $n \rightarrow \infty$

Maatriksmenetlust $A=(a_{nk})$ nimetatakse konservatiivseks, kui $c \subset c_A$. Maatriksmenetlust $A=(a_{nk})$ nimetatakse regulaarseks, kui $c \subset c_A$ ja

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \xi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k,$$

iga koonduva jada $x=(\xi_k)$ korral.

Kehtib järgmine

Toeplitzi teoreem. Maatriksmenetlus $A=(a_{nk})$ on regulaarne parajasti siis, kui

$$1^0 \lim_n a_{nk} = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$2^0 \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1,$$

$$3^0 \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty.$$

Üks tuntumaid regulaarseid maatriksmenetlusi on aritmeetiliste keskmiste menetlus $(C,1)$, mis on antud maatriksiga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & - & - & - \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & - & - & - \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 1/n & 1/n & 1/n & 1/n & - & - & - & 1/n & 0 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix},$$

see tähendab antud juhul

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Kui $1 \leq p_k < H < \infty$ ja $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \neq 0$, siis tugev A -summeeruvusväli sisaldub A -summeeruvusväljas. (vt.[11]). Juhul kui $0 < p_k < 1$, ei pruugi see sisalduvus kehtida.

Edaspidi olgu $p_k = p$, $0 < p < 1$. Kui $A = (C, 1)$, siis tähistame tugevat A -summeeruvusvälja ja menetluse A tugevat null- summeeruvusvälja vastavalt sümbolitega $w(p)$ ja $w_0(p)$.

Kehtib järgmine 1946. aastal B. Kuttneri poolt tõestatud teoreem.

Teoreem K. Olgu $0 < p < 1$. Iga regulaarse maatriksi A korral leidub jada $x \in w_0(p)$, nii et $x \notin c_A$.

Võttes Kuttneri teoreemis $A = (C, 1)$ näemegi, et sisalduvus $[c_A]^p \subset c_A$ ei kehti, kui $0 < p < 1$.

Teoreemiga K on analoogne summeeruvusteoorias hästi tuntud Steinhausi teoreem.

Teoreem S. Iga regulaarse maatriksi A korral leidub tõkestatud jada, mis pole A -summeeruv.

Tähistame sümboliga l_∞ kõigi tõkestatud jadade ruumi.

Maddox (vt. [9]) tõestas 1968. aastal järgmise Kuttneri teoreemi üldistuse

Teoreem M. Olgu $0 < p < 1$. Kui maatriksmenetluse A korral $w_0(p) \subset c_A$, siis $l_\infty \subset c_A$.

Kuna summeeruvusteoorias on hästi on tuntud fakt (vt. [2]), et ükski regulaarne maatriksmenetlus ei summeeri kõiki tõkestatud jadasid, siis Kuttneri teoreem järeldub vahetult teoreemist M.

Thorpe (vt. [13]) tõestas järgmise Maddoxi teoreemi üldistuse²

Teoreem T. Kui $0 < p < 1$ ja E on lokaalselt kumer FK -ruum ning $w_0(p) \subset E$, siis $l_\infty \subset E$.

Käesolevas magistritöös vaadeldakse moodulfunktsiooniga f määratud jadaruumi $E(f)$ topologiseerimist F -normiga ja ruumi $E(f)$ Köthe -Toeplitzi kaasruume. Töö põhieesmärgiks

2 Mõisted FK -ruum ja lokaalselt kumer ruum on defineeritud töö esimeses osas.

on uurida Thorpe'i teoreemi üldistusi moodulfunktsioonidega määratud jadaruumide korral.

Magistritöö on liigendatud neljaks osaks. Töö esimeses osas tuuakse sisse moodulfunktsioonide ning nendega määratud jadaruumidega seotud mõisted ning antakse nende kohta ka näiteid. Samuti vaadeldakse moodulfunktsioonidega määratud jadaruumide topologiseerimist F -normiga.

Teises osas käsitletakse Thorpe'i teoreemi üldistusi ruumis $[c_A]_0(f)$ ning tõestatakse neist mõned, kasutades Köthe – Toelitz'i kaasruume.

Kolmandas osas tõestatakse Thorpe'i teoreemi üldistus lakunaarse jadaga määratud maatriksmenetluse korral.

Neljandas osas käsitletakse Thorpe'i teoreemi Riesz'i kaalutud keskmiste menetluse puhul.

1. Moodulfunktsioonid ja nendega määratud jadaruumid

Definitsioon. Funktsiooni $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ nimetatakse moodulfunktsiooniks, kui

- (i) $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$,
- (ii) $f(t+u) \leq f(t) + f(u)$ iga $t \geq 0, u \geq 0$ korral,
- (iii) f on rangelt kasvav,
- (iv) f on paremalt pidev punktis 0 .

Moodulfunktsiooni defineerivatest omadustest järeldub, et kehtib järgmine (vt. [6])

Lause 1. Iga moodulfunktsiooni f korral

$$|f(t) - f(u)| \leq f(|t - u|),$$

kus $t, u \geq 0$.

Tõestus. a) Olgu $t > u \geq 0$. Siis $|t - u| = t - u$ ning kuna f on mittekahanev, siis ka

$$|f(t) - f(u)| = f(t) - f(u).$$

Võime kirjutada

$$f(t) = f(t - u + u) \leq f(t - u) + f(u),$$

millest

$$f(t) - f(u) \leq f(t - u),$$

see tähendab, et võrratus $|f(t) - f(u)| \leq f(|t - u|)$ kehtib, kui $t > u \geq 0$.

b) Olgu nüüd $u > t \geq 0$. Siis $|f(t) - f(u)| = f(u) - f(t)$ ning $|t - u| = u - t$, edasine tõestuskäik analoogiline tõestuse a) osaga.

c) Kui $t = u$, siis võrratus $|f(t) - f(u)| \leq f(|t - u|)$ kehtib, sest $f(0) = 0$.

Lause 2. Moodulfunktsioon on kõikjal oma määramispiirkonnas pidev.

Tõestus. Olgu $t_0 > 0$. Lause 1 põhjal iga moodulfunktsiooni f korral

$$|f(t) - f(u)| \leq f(|t - u|),$$

siis võttes $u = t_0$, saame

$$|f(t) - f(t_0)| \leq f(|t - t_0|),$$

millest tingimuse (iv) tõttu saamegi f pidevuse hulgal $[0, \infty)$.

Lause 3. Moodulfunktsioonide f ja g lineaarkombinatsioon $\alpha f + \beta g$, kus $\alpha, \beta \geq 0$, on samuti moodulfunktsioon.

Tõestus. (i) On ilmne, et kui $t = 0$, siis $(\alpha f + \beta g)(t) = 0$. Kontrollime, kas võrdusest $(\alpha f + \beta g)(t) = 0$ järedub, et $t = 0$. Kuna $\alpha, \beta \geq 0$ ja moodulfunktsiooni definitsiooni tingimuste (i) ja (iii) põhjal $f(t) \geq 0$, $g(t) \geq 0$, siis $f(t) = g(t) = 0$, millest $t = 0$.

(ii) Peame näitama, et

$$(\alpha f + \beta g)(t+u) \leq (\alpha f + \beta g)(t) + (\alpha f + \beta g)(u).$$

Kuna

$$(\alpha f + \beta g)(t+u) \leq (\alpha f)(t+u) + (\beta g)(t+u) \leq (\alpha f)(t) + (\alpha f)(u) + (\beta g)(t) + (\beta g)(u),$$

siis $\alpha f + \beta g$ on tõesti subaditiivne.

(iii) Olgu $u > t \geq 0$. Kuna f ja g on moodulfunktsioonid ning seega ka kasvavad, siis

$$(\alpha f)(t) < (\alpha f)(u) \text{ ja } (\beta g)(t) < (\beta g)(u).$$

Järelikult

$$(\alpha f + \beta g)(t) < (\alpha f + \beta g)(u),$$

mis tähendab, et lineaarkombinatsioon $\alpha f + \beta g$ on rangelt kasvav.

(iv) On ilmne, et kahe paremalt pideva funktsiooni summa on paremalt pidev, ehk juhul, kui αf ja βg on paremalt pidevad, siis ka $\alpha f + \beta g$ on paremalt pidev punktis 0.

Näiteid moodulfunktsioonidest.

1) $f(t) = t^p, 0 < p \leq 1,$

2) $f(t) = \ln(1+t),$

3) $f(t) = t^p + t, \quad 0 < p < 1$

4) $f(t) = \frac{t}{1+t}.$

Tõestus. 1) Tingimuste (i), (iii), (iv) kontroll on elementaarne, tingimuse (ii) täidetud tuleneb võrratusest

$$|a+b|^p \leq |a|^p + |b|^p$$

iga $a, b \geq 0, \quad 0 < p < 1$ korral (vt. [7]).

Näidete 2) ja 3) tõestus on analoogiline.

4) Kontrollime, kas funktsioon $f(t) = \frac{t}{1+t}$ rahuldab tingimusi (i) – (iv) moodulfunktsiooni definitsioonist.

On selge, et

$$f(t) = \frac{t}{1+t} = 0,$$

parajasti siis, kui $t = 0$. Seega tingimus (i) on täidetud.

Olgu nüüd $t \geq 0, u \geq 0$. Siis

$$f(t) + f(u) - f(t+u) = \frac{t}{1+t} + \frac{u}{1+u} - \frac{t+u}{1+t+u} = \frac{u^2t + 2ut + ut^2}{(1+t)(1+u)(1+t+u)}$$

Kuna $t \geq 0, u \geq 0$ korral

$$\frac{u^2t + 2ut + ut^2}{(1+t)(1+u)(1+t+u)} \geq 0,$$

saame et

$$f(t) + f(u) - f(t+u) \geq 0,$$

ehk

$$f(t+u) \leq f(t) + f(u)$$

ning järelikult funktsioon $f(t)$ rahuldab tingimust (ii).

Oletame, et $t \geq 0, u \geq 0$ ja $t < u$, siis

$$f(u) - f(t) = \frac{u}{1+u} - \frac{t}{1+t} = \frac{u-t}{(1+t)(1+u)} > 0.$$

Seega oleme saanud, et $f(u) - f(t) > 0$, ehk $f(t) < f(u)$, mis tähendabki, et f on kasvav funktsioon.

Et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{1+t} = 0 = f(0),$$

siis funktsioon

$$f(t) = \frac{t}{1+t}$$

on paremalt pidev punktis 0 ning tingimus (iv) on täidetud.

Definitsioon. Olgu $0 \leq p \leq 1$. Funktsiooni $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ nimetatakse p -kumeraks piirkonnas $I = [0, \infty)$, kui

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^p f(x) + \beta^p f(y),$$

iga $x, y \in I$ ja iga arvupaari $\alpha, \beta \geq 0$ korral, kus $\alpha^p + \beta^p = 1$.

Märkus. Kui $p = 1$ kõneldakse kumerast funktsioonist.

Näide 1. Funktsioon $f(t) = t^p, 0 < p \leq 1$ on p -kumer moodulfunktsioon, kui $t \in [0, \infty)$.

Tõestus. Rakendame taas võrratust

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p,$$

iga $a, b \geq 0$, $0 < p < 1$ korral. Siis iga $x, y \in [0, \infty)$ korral

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)^p \leq \alpha^p x^p + \beta^p y^p = \alpha^p f(x) + \beta^p f(y),$$

see tähendab $f(t) = t^p, 0 < p \leq 1$ on p -kumer.

Tänu järgmistele lausele on võimalik moodustada tuntud p -kumerate funktsioonide abil uusi p -kumeraid funktsioone (vt. [5]).

Definitsioon. Funktsiooni $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse kumeraks, kui

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y),$$

iga iga $x, y \in \mathbb{R}^m$ ja iga arvupaari $\alpha, \beta \geq 0$ korral, kus $\alpha + \beta = 1$.

Olgu $\mathbb{R}_+$ mittenegatiivsete reaalarvude hulk.

Lause 4. Olgu $0 < p < 1$. Kui f ja g on p -kumerad funktsioonid ja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on mittekahanev mõlema argumendi suhtes ja kumer, siis funktsioon $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, kus

$$h(u) = F[f(u), g(u)]$$

on p -kumer.

Erijuhuna saame lausest 4 funktsioonide $f + g$, $\max\{f, g\}$ p -kumeruse.

Lause 5. Olgu $0 < p < 1$ ja $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mittekahanev funktsioon. Siis funktsioon f , mis on määratud hulgal $\mathbb{R}_+$ eeskirjaga

$$f(u) = u^{\frac{1}{1-p}} h(u)$$

on p -kumer.

Olgu f moodulfunktsioon ja E mingi jadaruum, defineerime ruumi $E(f)$ järgnevalt:

$$E(f) = \{x = (\xi_k) : \Phi(x) = (f(|\xi_k|)) \in E\}.$$

Definitsioon. Funktsionaali g vektorruumil E nimetatakse F -normiks, kui

- 1) $g(x) = 0$ parajasti siis, kui $x = 0$,
- 2) $|\alpha| \leq 1, (\alpha \in \mathbb{K}, \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow g(\alpha x) \leq g(x)$ iga $x \in E$ korral,
- 3) $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ iga $x, y \in E$ korral,
- 4) $\lim_n (a_n) = 0, (a_n \in \mathbb{K}), x \in E \Rightarrow \lim_n g(a_n x) = 0$.

Täielikku F -normeeritud ruumi nimetatakse F -ruumiks. Kui jadaruum E on F -ruum, mille puhul koordinaatfunktsionaalid

$$\pi_k : x = (\xi_k) \rightarrow \xi_k$$

on pidevad, siis ruumi E nimetatakse FK -ruumiks. Normeeruva topoloogiaga FK -ruumi nimetatakse BK -ruumiks.

Olgu ϕ kõigi lõplike jadade ruum. Kui $\phi \subset E$ ja $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k = x$, iga $x \in E$ korral, nimetatakse F -ruumi E AK -ruumiks.

Definitsioon. Olgu X vektorruum. Hulka $D \subset X$ nimetatakse kumeraks, kui iga $x, y \in D$ korral

$$(\alpha x + \beta y) \in D,$$

kusjuures $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$.

Lokaalselt kumeraks ruumiks nimetatakse niisugust topoloogilist vektorruumi, mille iga nulliümbrus sisaldab kumerat nulliümbrust.

Jadaruumi E F -normi g nimetatakse absoluutselt monotoonseks, kui $|\xi_k| \leq |\eta_k|$ korral

$$g(x) \leq g(y), \text{ kus } x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in E.$$

Definitsioon. Jadaruumi E nimetatakse soliidseks, kui $l_\infty \cdot E \subset E$.

Näiteks on lihtne veenduda, et

- 1) kõigi tõkestatud jadade ruum l_∞ on soliidne jadaruum,
- 2) tugevalt nulliks A -summeeruvate jadade ruum $[c_A]_0^p$ on soliidne jadaruum,
- 3) nulliks koonduvate jadade ruum c_0 on soliidne jadaruum,
- 4) koonduvate jadade ruum c ei ole soliidne jadaruum.

Olgu $g_f(x) = g(\Phi(x))$. Kehtivad järgmised teoreemid

Teoreem 1. Olgu f p -kumer moodulfunktsioon ja g absoluutselt monotoonne F -norm jadaruumil E . Siis funktsionaal g_f defineerib absoluutselt monotoonse F -normi ruumil $E(f)$.

Tõestus. Kontrollime F -normi definitsiooni tingimusi 1) - 4).

- 1) Kuna f on moodulfunktsioon, siis $f(|\xi_k|) = 0$ parajasti siis, kui $|\xi_k| = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Seega ka $\Phi(x) = 0$ parajasti siis, kui $x = 0$ ja

$$g_f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

- 2) Olgu $|\alpha| < 1, \alpha \in \mathbf{K}$, siis funktsiooni f p -kumeruse tõttu

$$f(|\alpha \xi_k|) \leq |\alpha|^p f(|\xi_k|)$$

ning F -normi g absoluutse monotoonsuse tõttu saame

$$g_f(\alpha x) = g(\Phi(\alpha x)) = g([f(|\alpha \xi_k|)]) \leq g[|a|^p f(|\xi_k|)].$$

Et $0 < |a|^p < 1$, siis F -normi g omaduse 2) põhjal

$$g[|a|^p f(|\xi_k|)] \leq g([f(|\xi_k|)]) = g(\Phi(x)) = g_f(x).$$

Seega $g_f(\alpha x) \leq g_f(x)$ ning tingimus 2) on täidetud.

3) Olgu $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in E$. Siis

$$g_f(x + y) = g(\Phi(x + y)) = g[f(\xi_k + \eta_k)].$$

Funktsiooni f subaditiivsuse ja F -normi g absoluutse monotoonsuse tõttu

$$g[f(\xi_k + \eta_k)] \leq g[f(\xi_k) + f(\eta_k)]$$

ning F -normi g subaditiivsusest ja F -normi g_f definitsioonist saame

$$g[f(\xi_k) + f(\eta_k)] \leq g_f(x) + g_f(y).$$

Järelikult

$$g_f(x + y) \leq g_f(x) + g_f(y),$$

mis tähendab, et tingimus 3) kehtib.

4) Kui $\lim_n a_n = 0$, siis saame normi g omaduste ja funktsiooni f p -kumeruse põhjal

$$\lim_n g_f(a_n x) = \lim_n g(\Phi(a_n x)) \leq \lim_n g[f(\alpha_n \xi_k)] \leq \lim_n g[|\alpha_n|^p f(\xi_k)] = 0.$$

Seega $\lim_n g_f(a_n x) = 0$ ning tingimus 4) on täidetud.

Teoreem 2. (vt. [6]). Kui E on soliidne AK - FK -ruum absoluutselt monotoonse F -normiga g , siis $E(f)$ on soliidne AK - FK -ruum absoluutselt monotoonse F -normiga g_f .

2. Thorpe'i teoreemi üldistusi ruumis $[c_A]_0(f)$

Edasiseks on olulised järgmised mõisted.

Jadaruumi E Köthe-Toeplitzi kaasruumideks E^α ja E^β nimetatakse ruume

$$E^\alpha = \left\{ \alpha = (\alpha_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \xi_k| < \infty, \forall (\xi_k) \in E \right\}$$

ja

$$E^\beta = \left\{ \alpha = (\alpha_k) : \text{rida } \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \text{ koondub } \forall (\xi_k) \in E \right\}.$$

Tähistame sümbooliga E' F -normeeritud jadaruumi E topoloogilist kaasruumi.

Juhul kui $\phi \subset E$ defineeritakse ruum E^ϕ järgmiselt

$$E^\phi = \left\{ (\phi(e_k)) : \phi \in E' \right\}.$$

Kui maatriksi $A = (a_{nk})$ kõik elemendid on mittenegatiivsed ja

$$\sup_n a_{nk} > 0$$

(see tähendab, et $A = (a_{nk})$ ei sisalda nullveerge), siis $[c_A]_0$ on soliidne AK - FK -ruum absoluutselt monotoonse normiga (vt. [1]).

$$\|x\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |\xi_k|.$$

Kerge on veenduda, et vaadeldav norm on absoluutselt monotoonne. Sellisel juhul on ruum

$[c_A]_0(f)$ teoreemi 2 põhjal soliidne AK - FK -ruum absoluutselt monotoonse F -normiga

$$g_f(x) = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|\xi_k|).$$

Kuna iga soliidse AK - FK -ruumi E korral $E^\alpha = E^\beta = E^\phi$, siis need võrdused kehtivad ka ruumi

$E = [c_A]_0(f)$ korral.

Edasiseks on vajalik

Schuri teoreem. Maatriksteisendus $A = (a_{nk})$ viib kõik tõkestatud jadad koonduvateks jadadeks parajasti siis, kui

1⁰ eksisteerib piirväärtus

$$\lim_n a_{nk} = a_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

2⁰ eksisteerib konstant M , nii et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq M,$$

3⁰ $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_k| = 0$.

Olgu $A = (a_{nk})$ positiivne maatriksmenetlus ja $0 < p < 1$, defineerime ruumi

$$B(A, p) = \left\{ x = (\xi_k) : \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{1/p} |\xi_k| = 0 \right\}.$$

Kehtib järgmine

Teoreem 3. Olgu f moodulfunktsioon ja olgu $A = (a_{nk})$ positiivne regulaarne lõplike ridadega maatriks, mille korral on täidetud tingimused $\sup_n a_{nk} > 0$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ iga naturaalarvu n puhul.

Siis kehtivad järgmised väited:

(i) Hulk $B(A, p)$ on soliidne AK - BK -ruum normiga

$$q(x) = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{1/p} |\xi_k|.$$

(ii) Kui f on p -kumer, siis

$$[c_A]_0(f) \subset B(A, p)$$

(iii) Tõkestatud jadade ruum l_{∞} sisaldub ruumis $B(A, p)$ parajasti siis, kui

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{1/p} = 0.$$

Tõestus. (i) Kui $\sup_n a_{nk} > 0$ iga naturaalarvu k puhul, siis ruum $[c_A]_0$ on soliidne AK - BK -ruum normiga (vt. [1]).

$$\|x\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |\xi_k|.$$

Kuna sel juhul ka $\sup_n (a_{nk})^{1/p} > 0$, siis ka $B(A, p)$ on soliidne AK - BK -ruum normiga

$$q(x) = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{1/p} |\xi_k|.$$

(ii) Peame näitama, et kui

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|\xi_k|) = 0,$$

siis ka

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{1/p} |\xi_k| = 0.$$

Kui f on p -kumer funktsioon ja $\alpha_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k^p = 1$, $t_k \geq 0$, siis kehtib Jenseni võrratus

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k t_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k^p f(t_k).$$

Võttes $\alpha_k = a_{nk}^{1/p}$ ja $t_k = |\xi_k|$, saame (eelduse kohaselt $A = (a_{nk})$ on lõplike ridadega)

$$0 \leq f\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{1/p} |\xi_k|\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|\xi_k|).$$

Järelikult, kui

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|\xi_k|) = 0,$$

siis ka

$$\lim_n f\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{1/p} |\xi_k|\right) = 0.$$

Kuna f on pidev, järeldub siit, et

$$f\left(\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{1/p} |\xi_k|\right) = 0.$$

Et $f(t) = 0$ parajasti siis, kui $t = 0$ saame, et

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{1/p} |\xi_k| = 0,$$

see tähendab, et tõepoolest

$$[c_A]_0(f) \subset B(A, p).$$

(iii) Kuna $A = (a_{nk})$ on regulaarne, siis ka $\lim_n a_{nk}^{1/p} = 0$, seega Schuri teoreemi tingimus 1^o on menetluse $A_p = (a_{nk}^{1/p})$ korral täidetud.

Tingimustest $a_{nk} \geq 0, \sum_{k=1}^n a_{nk} = 1$ tuleneb ka Schuri teoreemi tingimuse 2^o täidetus menetluse $A_p = (a_{nk}^{1/p})$ jaoks. Seega saame, et maatriksmenetlus $A_p = (a_{nk}^{1/p})$, summeerib kõik tõkestatud jadad parajasti siis, kui $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{1/p} = 0$. (Märgime, et $A = (a_{nk})$ regulaarsuse tõttu $\lim_n a_{nk} = 0$, seega ka $\lim_n a_{nk}^{1/p} = 0$).

Järgnevalt vaatleme Thorpe'i teoreemi üldistusi juhtudel, kus ruumi $w_0(p)$ asemel käsitleme ruumi $[c_A]_0(f)$.

Kui FK -ruumi E korral $\bar{\varphi} = E$, siis ruumi E nimetatakse AD -ruumiks.

Edasiseks on vajalik (vt. [11], teor. 4)

Teoreem 4. Olgu E AD -ruum ja X lokaalselt kumer FK -ruum ning $X \supset \varphi$. Siis tingimusest $X^\varphi \subset E^\varphi$ järeldub $X \supset E$.

Kehtib järgmine

Teoreem 5 Olgu E lokaalselt kumer FK -ruum. Kui maatriksmenetlus $A = (a_{nk})$ ja moodulfunktsioon f rahuldavad teoreemi 3 tingimusi ja

$$([c_A]_0(f))^{\mathfrak{p}} \subset (B(A, p))^{\mathfrak{p}},$$

siis tingimus

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{1/p} = 0$$

on piisav selleks, et kehtiks implikatsioon

$$E \supset [c_A]_0(f) \Rightarrow E \supset l_{\infty}.$$

Tõestus. Oletame, et $E \supset [c_A]_0(f)$. Kuna alati

$$E \supset X \Rightarrow E^{\mathfrak{p}} \subset X^{\mathfrak{p}}$$

siis $E^{\mathfrak{p}} \subset ([c_A]_0(f))^{\mathfrak{p}}$ ning eelduse

$$([c_A]_0(f))^{\mathfrak{p}} \subset (B(A, p))^{\mathfrak{p}},$$

põhjal $E^{\mathfrak{p}} \subset (B(A, p))^{\mathfrak{p}}$.

Teoreemi 3 tingimuse (i) põhjal BK -ruum $B(A, p)$ on AK -ruum ja järelikult ka AD -ruum. Siis teoreemi 4 põhjal sisalduvusest $E^{\mathfrak{p}} \subset (B(A, p))^{\mathfrak{p}}$ järeljub sisalduvus $E \supset B(A, p)$. Seega teoreemi 3 tingimuse (iii) põhjal $E \supset l_{\infty}$.

Edasiseks on vajalik (vt. [11])

Teoreem 6. Olgu E ja X lokaalselt kumerad FK -ruumid ja $E \supset \emptyset$. Kui E on ruumi X kinnine alamruum, siis $X^{\mathfrak{p}} \supset E^{\mathfrak{p}}$.

Siis on lihtne tõestada, et kehtib järgmine

Teoreem 7. Olgu E lokaalselt kumer FK -ruum. Kui maatriksmenetluse A ja moodul-funktsiooni f puhul $\sup_n a_{nk} > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ ning $[c_A]_0(f)$ on kinnine alamruum ruumis $B(A, p)$ ja

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{1/p} = 0$$

siis

$$E \supset [c_A]_0(f) \Rightarrow E \supset l_{\infty}.$$

Tõestus. Kuna $[c_A]_0(f)$ on ruumi $B(A, p)$ kinnine alamruum, siis teoreemi 6 põhjal

$$([c_A]_0(f))^{\circ} \subset (B(A, p))^{\circ}$$

ning teoreemi 5 põhjal saame, et

$$E \supset [c_A]_0(f) \Rightarrow E \supset l_{\infty}.$$

3. Thorpe'i teoreemi analoog lakunaarse jadaga määratud maatriksmenetluse korral

Kasvavat mittenegatiivsete liikmetega jada $\Theta = (k_r)$ nimetatakse lakunaarseks, kui $k_0 = 0$ ja

$$\lim_r (k_{r+1} - k_r) = \infty.$$

Tähistame

$$\sum_{(r)} = \sum_{k=k_r}^{k_{r+1}-1}, \quad \max_{(r)} = \max_{k_r \leq k \leq k_{r+1}-1}.$$

Järgnevalt käsitleme Thorpe'i teoreemi teatavate lakunaarse jadaga määratud menetluste korral.

Olgu $\Theta = (k_r)$ lakunaarne jada ja olgu antud jada $v = (v_k)$, $v_k > 0$. Seejuures eeldame, et $v_k = O(1)$ ja

$$V_r = \sum_{(r)} v_k \rightarrow \infty,$$

kui $r \rightarrow \infty$, Vaatleme menetlust $A_\Theta = (a_{rk}^\Theta)$, kus

$$a_{rk}^\Theta = \begin{cases} \frac{v_k}{V_r}, & k_r \leq k \leq k_{r+1} - 1, \\ 0, & k < k_r, k > k_{r+1} - 1. \end{cases}$$

Selle maatriksmenetluse tugevaks null-summeeruvusväljaks on ruum

$$V_\Theta^0 = \left\{ x = (\xi_k) : \lim_r \frac{1}{V_r} \sum_{(r)} v_k |\xi_k| = 0 \right\}.$$

Kuna $A_\Theta = (a_{rk}^\Theta)$ ei sisalda nullveerge, siis V_Θ^0 , on soliidne AK - BK -ruum normiga

$$\|x\|_\Theta = \sup_r \frac{1}{V_r} \sum_{(r)} v_k |\xi_k|.$$

Olgu f moodulfunktsioon, siis teoreemi 2 põhjal saame, et $V_\Theta^0(f)$ on soliidne AK - FK -ruum F -normiga

$$g_f(x) = \sup_r \frac{1}{V_r} \sum_{(r)} v_k f(|\xi_k|).$$

Defineerime hulga

$$M_{\Theta}(p) = \left\{ \alpha = (\alpha_k) : \sum_{r=0}^{\infty} V_r^{1/p} \max_{(r)} \frac{|\alpha_k|}{v_k^{1/p}} < \infty \right\}.$$

Teoreem 8. Eeldame, et f on selline tõkestamata p -kumer moodulfunktsioon, mille korral

$$f(t^{1/p}) = O(t), t \rightarrow \infty.$$

Siis

$$(V_{\Theta}^0(f))^{\alpha} = M_{\Theta}(p).$$

Tõestus. 1) Tõestame esiteks sisalduvuse

$$(V_{\Theta}^0(f))^{\alpha} \supset M_{\Theta}(p).$$

Oletame, et $\alpha = (\alpha_k)$ on suvaline hulga $M_{\Theta}(p)$ element ning $x = (\xi_k) \in V_{\Theta}^0(f)$ ja olgu f^{-1} moodulfunktsiooni f pöördfunktsioon. Siis

$$\sum_{(r)} |\alpha_k \xi_k| \leq \max_{(r)} \left(V_r^{1/p} \frac{1}{v_k^{1/p}} |\alpha_k| \right) \frac{1}{V_r^{1/p}} \sum_{(r)} v_k^{1/p} |\xi_k| = \max_{(r)} \left(V_r^{1/p} \frac{1}{v_k^{1/p}} |\alpha_k| \right) f^{-1} \left[f \left(\frac{1}{V_r^{1/p}} \right) \sum_{(r)} v_k^{1/p} |\xi_k| \right].$$

Kasutades Jenseni võrratust p -kumerate funktsioonide jaoks, saame

$$\sum_{(r)} |\alpha_k \xi_k| \leq \max_{(r)} \left(V_r^{1/p} \frac{1}{v_k^{1/p}} |\alpha_k| \right) f^{-1} \left[\frac{1}{V_r} \sum_{(r)} v_k f(|\xi_k|) \right] = \max_{(r)} \left(V_r^{1/p} \frac{1}{v_k^{1/p}} |\alpha_k| \right) f^{-1} [g_f(x)]$$

ja seega

$$\sum_{r=0}^{\infty} |\alpha_k \xi_k| = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{(r)} |\alpha_k \xi_k| \leq f^{-1} [g_f(x)] \sum_{r=0}^{\infty} V_r^{1/p} \max_{(r)} \frac{|\alpha_k|}{v_k^{1/p}} < \infty.$$

Järelikult $\alpha = (\alpha_k) \in (V_{\Theta}^0(f))^{\alpha}$ ning seega oleme jõudnud tulemuseni, et

$$M_{\Theta}(p) \subset (V_{\Theta}^0(f))^{\alpha}.$$

2) Sisalduvuse $M_{\ominus}(p) \supset (V_{\ominus}^0(f))^{\alpha}$ tõestamiseks näitame, et

$$\alpha = (\alpha_k) \notin M_{\ominus}(p)$$

korral $\alpha = (\alpha_k) \notin (V_{\ominus}^0(f))^{\alpha}$. Kehtigu

$$\alpha = (\alpha_k) \notin M_{\ominus}(p),$$

siis rida $\sum_{r=0}^{\infty} V_r^{1/p} \max_{(r)} \frac{|\alpha_k|}{v_k^{1/p}}$ on hajuv ning järelikult leidub jada (b_r) , $0 < b_r \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$ nii, et

$$\sum_{r=0}^{\infty} b_r V_r^{1/p} \max_{(r)} \frac{|\alpha_k|}{v_k^{1/p}} = \infty.$$

Olgu $\max_{(r)} \frac{|\alpha_k|}{v_k^{1/p}} = \frac{|\alpha_{\tilde{k}_r}|}{v_{\tilde{k}_r}^{1/p}}$ ning defineerime jada $\tilde{\alpha} = (\tilde{\xi}_k)$ järgmiselt

$$\tilde{\xi}_k = \begin{cases} b_r \frac{V_r^{1/p}}{v_{\tilde{k}_r}^{1/p}}, k = \tilde{k}_r \\ 0, k \neq \tilde{k}_r \end{cases}.$$

Kuna moodulfunktsioon f on p -kumer ning $f(0) = 0$ ja

$$f(t^{1/p}) = O(t), t \rightarrow \infty,$$

saame et

$$\frac{1}{V_r} \sum_{(r)} f(\tilde{\xi}_k) = \frac{1}{V_r} v_{\tilde{k}_r} f\left(\frac{b_r V_r^{1/p}}{v_{\tilde{k}_r}^{1/p}}\right) \leq b_r^p \left[\frac{f(V_r^{1/p} / v_{\tilde{k}_r}^{1/p})}{V_r / v_{\tilde{k}_r}} \right] = o(1),$$

kui $r \rightarrow \infty$. Seega $\tilde{\alpha} = (\tilde{\xi}_k) \in V_{\ominus}^0(f)$.

Et $\sum_{(r)} |\alpha_k \tilde{\xi}_k| = |\alpha_{\tilde{k}_r}| b_r \frac{V_r^{1/p}}{v_{\tilde{k}_r}^{1/p}}$, siis seose

$$\sum_{r=0}^{\infty} b_r V_r^{1/p} \max_{(r)} \frac{|\alpha_k|}{v_k^{1/p}} = \infty$$

tõttu rida $\sum_{r=0}^{\infty} |\alpha_k \tilde{\xi}_k|$ hajub ja seega $\alpha = (\alpha_k) \notin (V_{\ominus}^0(f))^{\alpha}$.

Kokkuvõttes osades 1) ja 2) tõestatu põhjal olemegi saanud, et

$$(V_{\Theta}^0(f))^{\alpha} = M_{\Theta}(p).$$

Järgnev teoreem annab Thorpe'i teoreemi üldistuse ruumi $V_{\Theta}^0(f)$ korral.

Teoreem 9. Olgu E lokaalselt kumer FK -ruum ja f tõkestamata p -kumer moodulfunktsioon, mille korral

$$f(t^{1/p}) = O(t), t \rightarrow \infty,$$

siis kehtivad järgmised väited:

$$(i) (V_{\Theta}^0(f))^{\Theta} \subset (B(A_{\Theta}, p))^{\Theta},$$

$$(ii) \text{ Kui } \lim_r \frac{1}{V_r^{1/p}} \sum_{(r)} v_k^{1/p} = 0, \text{ siis}$$

$$E \supset V_{\Theta}^0(f) \Rightarrow E \supset l_{\infty}.$$

Tõestus. (i) Kuna $V_{\Theta}^0(f)$ ja $B(A_{\Theta}, p)$ on soliidsed AK - FK -ruumid, siis on nende α -kaasruumid ja Φ -kaasruumid võrdsed ning seega piisab tõestada, et

$$(V_{\Theta}^0(f))^{\alpha} \subset (B(A_{\Theta}, p))^{\alpha}.$$

Teoreemi 8 põhjal piisab näidata, et ruum $M_{\Theta}(p)$ sisaldub ruumis $(B(A_{\Theta}, p))^{\alpha}$. Olgu $\alpha = (\alpha_k)$ suvaline hulga $M_{\Theta}(p)$ element ning $x = (\xi_k)$ jada ruumist $B(A_{\Theta}, p)$. Siis võime kirjutada

$$\sum_{r=0}^{\infty} |\alpha_r \xi_r| = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{(r)} |\alpha_k \xi_k| \leq \sum_{r=0}^{\infty} V_r^{1/p} \left(\max_{(r)} \frac{|\alpha_k|}{v_k^{1/p}} \right) \frac{1}{V_r^{1/p}} \sum_{(r)} v_k^{1/p} |\xi_k| \leq q(x) \sum_{r=0}^{\infty} V_r^{1/p} \left(\max_{(r)} \frac{|\alpha_k|}{v_k^{1/p}} \right) < \infty,$$

see tähendab, et jada $\alpha = (\alpha_k)$ kuulub ruumi $(B(A_{\Theta}, p))^{\alpha}$.

(ii) Maatriks $A_{\Theta} = (a_{rk}^{\Theta})$ on positiivne regulaarne lõplike ridadega maatriksmenetlus, mis ei sisalda nullveerge ja rahuldab tingimust $\sum_k a_{rk}^{\Theta} = 1$ iga naturaalarvu n puhul. Väite (i) põhjal

$$(V_{\Theta}^0(f))^{\Theta} \subset (B(A_{\Theta}, p))^{\Theta}.$$

Sellisel juhul väide (ii) järeldub teoreemist 5.

Vaatleme järgnevas lakunaarse jadaga $\Theta = (k_r)$ määratud maatriksmenetluse $A_\Theta = (a_{rk}^\Theta)$ mõningaid erijuhte. Olgu $h_r = (k_{r+1} - k_r)$ ja

$$a_{rk}^\Theta = \begin{cases} \frac{1}{h_r}, k_r \leq k \leq k_{r+1} - 1, \\ 0, k < k_r, k > k_{r+1} - 1. \end{cases}$$

Tähistame sümboliga N_Θ^0 selle menetluse A_Θ tugevat null-summeeruvusvälja, ehk

$$N_\Theta^0 = \left\{ x = (\xi_k) : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{(r)} |\xi_k| = 0 \right\}.$$

Siis ruum N_Θ^0 on ruumi V_Θ^0 erijuhtum, kus $v_k = 1$. |||

Maddox (vt. [7]) näitas, et juhul $\Theta = (2^r)$ on $N_\Theta^0 = w_0(1)$ ja norm $\|x_\Theta\|$ on ekvivalentne niinimetatud „tavalise” normiga

$$\|x\| = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\xi_k|$$

ruumis $w_0(1)$.

Maatriksmenetluse esitus tugeva summeeruvuse korral lakunaarse jadaga määratud menetlusena on mitmetel juhtudel eelistatavam nii öelda tehnilistel põhjustel. Sel juhul sisaldab vaadeldavat menetlust määrava maatriksi iga veerg parajasti ühe nullist erineva elemendi (vt. teoreemi 9 tõestus). Võimalust esitada maatriksmenetlus lakunaarse jada abil kasutatakse tihti menetluse tugeva summeeruvusvälja Köthe -Toeplitzi kaasruumide leidmisel. Märgime, et on suhteliselt vähe informatsiooni selle kohta, kuidas esitub konkreetse mamaatriksmenetluse tugeva summeeruvusvälja Köthe -Toeplitzi kaasruum.

Vaadeldes teoreemis 9 ruumi $V_{\Theta}^0(f)$ erijuhtu $N_{\Theta}^0(f)$, saame formuleerida järgmise teoreemi

Teoreem 10. Olgu E lokaalselt kumer FK -ruum ja f tõkestamata p -kumer moodulfunktsioon, mille korral

$$f(t^{1/p}) = O(t), t \rightarrow \infty,$$

siis kehtivad järgmised väited:

$$(i) \left(N_{\Theta}^0(f)\right)^p \subset (B(A_{\Theta}, p))^p,$$

$$(ii) E \supset V_{\Theta}^0(f) \Rightarrow E \supset l_{\infty}.$$

Teoreemi 10 tõestuseks märgime, et vaadeldaval juhul

$$\lim_r \frac{1}{V_r^{1/p}} \sum_{(r)} v_k^{1/p} = \lim_{(r)} \frac{1}{h^{1/p-1}} = 0.$$

Seega teoreemi 9 osa (ii) põhjal saamegi teoreemi 10 väite (ii).

Võttes nüüd

$$f(t) = t^p, 0 < p < 1, t \in [0, \infty) \text{ ja } \Theta = (2^r),$$

saame teoreemi 10 väite (ii) erijuhuna Thorpe'i teoreemi.

Ruumi N_{Θ}^0 on põhjalikumalt uuritud artiklis (vt. [3]). Selles töös tõestatu põhjal võime formuleerida

Teoreem 11. Olgu $q_r = k_r/k_{r-1}$. Siis $N_{\Theta}^0 \supset w_0(1)$ parajasti siis, kui $\liminf_r q_r > 1$.

Seega kehtib Thorpe'i teoreem iga teoreemi 11 tingimust rahuldava lakunaarse jadaga määratud maatriksmenetluse korral.

4. Thorpe'i teoreem Rieszi kaalutud keskmiste menetluse korral

Käesolevas töös tõestatakse Thorpe'i teoreemi üldistusi ruumi $[c_A]_0(f)$ korral, rakendades seejuures Köthe – Toeplitzi kaasruumide sisalduvusteoreeme. Sellist meetodikat kasutas ka Maddox artiklis [8]. Thorpe tõestas teoreemi T aga niinimetatud FK -ümbriku abil.

Definitsioon. Lokaalselt kumerat FK -ruumi X_E nimetatakse jadaruumi E FK -ümbrikuks, kui ta on väikseim jadaruumi E sisaldav FK -ruum.

Thorpe (vt. [12]) näitas teoreemi T tõestamisel, et tõkestatud jadade ruum l_∞ sisaldub ruumi $w_0(p)$, $0 < p < 1$ FK -ümbrikus.

Siit saame järeldada teoreemi M. Tõepoolest kuna c_A on lokaalselt kumer FK -ruum, siis sisalduvuse

$$c_A \supset w_0(p), \quad 0 < p < 1$$

korral ka c_A sisaldab ruumi $w_0(p)$ FK -ümbrikku ning seega l_∞ sisaldub ruumis c_A .

Grosse – Erdmann (vt. [4]) üldistas Thorpe'i teoreemi juhule, kus A on positiivne regulaarne Rieszi kaalutud keskmiste menetlus, see tähendab $A = (R, q_k), q_k > 0$, sel juhul

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{q_k}{Q_n}, & k \leq n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

kusjuures $Q_n = \sum_{k=1}^n q_k$.

Märgime, et positiivne menetlus $A = (R, q_k), q_k > 0$ on regulaarne parajasti siis, kui $\lim_n Q_n = \infty$.

Järgnevalt anname ülevaate Thorpe'i teoreemi üldistusest Rieszi kaalutud keskmiste menetluse korral. Grosse – Erdmann (vt. [4]) on tõestanud järgmise teoreemi

Teoreem 12. Olgu $0 < p < 1$ ja olgu (R, q_k) positiivne regulaarne kaalutud keskmiste menetlus. Siis järgmised väited on samaväärsed.

- (i) Iga regulaarse positiivse maatriksmenetluse A korral leidub jada $x \in [R, q_k]_0^p$, $0 < p < 1$, nii et $x \notin c_A$.
- (ii) Iga maatriksi A puhul sisalduvusest $c_A \supset [R, q_k]_0^p$ järeldub, et ruum l_∞ sisaldub ruumis c_A .
- (iii) Ruumi $[R, q_k]_0^p$ FK -ümbrik sisaldab ruumi l_∞ .
- (iv) Jada (q_k) korral

$$\lim_n \frac{1}{Q_n^{1/p}} \sum_{k=1}^n q_k^{1/p} = 0.$$

Toome mõned näited

Näide 1. Paneme tähele, et kui $q_k = 1$, siis

$$[R, q_k]_0^p = w_0(p)$$

ja

$$\lim_n \frac{1}{Q_n^{1/p}} \sum_{k=1}^n q_k^{1/p} = \lim_n \frac{1}{n^{1/p}} = 0.$$

Seega saame viimase teoreemi põhjal Thorpe'i teoreemi.

Märkus. Kehtib võrdus $[R, q_k]_0^p = [R, q_k]_0(f)$, kus $f(t) = t^p, 0 < p \leq 1$,

Näide 2. Kui $q_k = \frac{1}{k}$, siis $(R, q_k) = \left(R, \frac{1}{k}\right)$ on logaritmiliste keskmiste menetlus ja teoreemi 12 tingimus (iv) on täidetud (vt. [10], teoreem4).

Märgime, et teoreemi 12 tõestuses on Grosse – Erdmann muuhulgas näidanud, et ruumi $[R, q_k]_0^p$ FK -ümbrikuks on ruum

$$B((R, q_k), p) = \left\{ x = (\xi_k) : \lim_n \frac{1}{Q_n^{1/p}} \sum_{k=1}^{\infty} q_{nk}^{1/p} |\xi_k| = 0 \right\}.$$

Sequence spaces defined by modulus functions and strong summability

Ingrid Vessin

Summary

Let $A = (a_{nk})$ be an infinite matrix with $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \neq 0$, and let $p = (p_k)$ be a sequence of positive real numbers. If $1 \leq p_k < H < \infty$, then the strong A -summability field is included in the summability field of $A = (a_{nk})$. But the result known as Kuttner's theorem asserts that if $0 < p_k < 1$ and $A = (a_{nk})$ is regular, then there is a sequence which is strongly $(C,1)$ -summable but which is not A -summable.

We denote the strong null summability field of the method $(C,1)$ by $w_0(p)$.

Maddox proved the following extension of Kuttner's theorem.

Theorem M. If $w_0(p) \subset c_A$, then $l_{\infty} \subset c_A$.

Thorpe proved the following extension of Theorem M.

Theorem T. If $0 < p < 1$ and E is a locally convex FK -space with $w_0(p) \subset E$, then $l_{\infty} \subset E$.

The main purpose of this master thesis is to extend Theorem T. In the first part of thesis sequence spaces defined by modulus functions are presented. In the second part some extensions of Theorem T are proved by using Köthe – Toeplitz duals. Third part presents lacunary sequences. Some extensions of Theorem T for matrix methods that are given by lacunary sequences are proved. In the fourth part an extension of Theorem M for Riesz's method is considered.

Kasutatud kirjandus

- [1] W. Balser, W. B. Jurkat, A. Peyerimhoff, *On linear functionals and summability factors for strong summability*, Canad. J. Math. **30** (1978), 983-996.
- [2] S. Baron, *Sissejuhatus ridade summeeruvuse teooriasse*, Tallinn, Valgus, 1977, 58-59, (vene keeles).
- [3] A. R. Freedmann, J. J. Sember, M. Raphael, *Some Cesaro-type summability spaces*, Proc. London Math. Soc. **37** (1978), 508-520.
- [4] K.-G. Grosse-Erdmann, *Strong weighted mean summability and Kuttner's theorem*, J. London Math. Soc. (2) **59** (1999), 987-1002.
- [5] H. Hudzin, L. Maligranda, *Some remarks on s-convex functions*, Aequationes Mathematicae **48** (1994) 100-111
- [6] E. Kolk, *F-seminormed sequence spaces defined by a sequence of modulus functions and strong summability*, Indian J. Pure Appl. Math. **28** (1997), 1547-1566.
- [7] I. J. Maddox, *Elements of Functionals Analysis*, Cambridge University Press, London-New York, 1970.
- [8] I. J. Maddox, *FK spaces which include strongly summable spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **93** (1983), 131-134.
- [9] I. J. Maddox, *On Kuttner's theorem*, J. London Math. Soc. **43** (1968), 285-290.
- [10] I. J. Maddox, *Strong logarithmic means*, J. Nat. Acad. Math. India **3** (1985), 47-51.
- [11] A. K. Snyder, A. Wilansky, *Inclusion theorems and semiconservative FK spaces*, Rocky Mountain J. Math. **2** (1972), 595-603.
- [12] V. Soomer, *Jadaliste menetlustega määratud tugev summeeruvus*, Tartu Riikl. Ül. Toimetised, **661** (1984), 42-48 (vene keeles).
- [13] B. Thorpe, *An extension of Kuttner's theorem*, Bull. London Math. Soc. **13** (1981), 301-302.