

A. VIHMAN

ALGEBRA

IX KLASSILE

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

Duplum

A. VIHMAN

ALGEBRA

ÕPIK

IX KLASSILE

~~3301~~

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“
TALLINN 1948

2



25344

A-17387

Peatükk I.

RUUTVÖRRANDID JA NENDE SÜSTEEMID TÄHELISTE KORDAJATEGA.

§ 1. Täheliste kordajatega ruutvõrrand.

Kui ruutvõrrandis peale otsitava ruuduga liikme esineb veel otsitava esimese astmega liige ja otsitavast vaba liige, siis on meil tegemist täieliku ruutvõrrandiga. Nime-tame otsitava ruuduga liiget ruutvõrrandis ruutliik-meks, otsitava esimese astmega liiget — lineaarseks iikmeks ja otsitavast vaba liiget lihtsalt vabaliik-meks.

Peale teisendamist ja lihtsustamist kirjutatakse ruutvõrrand alati niisugusel kujul, et võrrandi kõik liikmed esinevad vasakul poolel, esikohal ruutliige, teisel kohal lineaarne liige ja kolmandal kohal vabaliige; paremal poolel on null. Siin-juures tuleb silmas pidada, et ruutliikme kordaja peab olema positiivne; kui ta tuleb negatiivne, siis korrutatakse võrrandi iga liige arvuga -1 .

Kui ruutvõrrand on teisendatud niisuguseks, et tema vasakul poolel on esikohal positiivse kordajaga ruutliige, teisel kohal lineaarne liige, viimasel kohal vabaliige ja paremal poolel null, siis ütleme, et ruutvõrrandil on normaalkuju. Näiteks ruutvõrrandid

$$3x^2 - 2x - 5 = 0 \text{ ja } (a - 1)x^2 + (a - b)x - b = 0$$

on normaalkujulised.

Lahendamiseks teisendatakse ruutvõrrand alati normaalkujuliseks.

Täielikud ruutvõrrandid liigitatakse ruutliikme kordaja järgi kahte liiki, taandatud ja üldisteks ruutvõrranditeks.

A. Kui ruutliikme kordaja on 1, siis kannab võrrand taandatud ruutvõrrandi nime. Näiteks

$$x^2 + px + q = 0$$

on taandatud ruutvõrrand.

Tema lahendid on

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ehk, lahendid eraldi kirjutades,

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ja

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

B. Kui ruutliikme kordaja ei ole võrdne arvuga 1, siis nimetame võrrandit üldiseks ruutvõrrandiks; näiteks võrrand

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on üldine ruutvõrrand. Tema lahendeid väljendab valem

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ehk, lahendid eraldi kirjutades,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ja

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kui üldises ruutvõrrandis

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lineaarse liikme kordaja b on paarisarv, siis saab lahendusvalemist lihtsamaks teisendada. Paarisarvulise kordaja b võime kirjutada kujul

$$b = 2k.$$

Asetades lahendusvalemis b asemele $2k$, saame pärast lihtsustamist

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Rakendades seda valemist näiteks võrrandi

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

lahendamisel, saame

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 3 \cdot 5}}{3} = \frac{4 \pm 1}{3};$$

$$x_1 = \frac{4 + 1}{3} = 1\frac{2}{3};$$

$$x_2 = \frac{4 - 1}{3} = 1.$$

Muidugi, igale üldisele ruutvõrrandile võime anda taandatud ruutvõrrandi kuju, jagades iga liiget ruutliikme kordajaga, kuid enamasti see ei hõlbusta tööd.

Põhimõtteliselt võime kõik ruutvõrrandid lahendada, kasutades ühtainsat täieliku ruutvõrrandi lahendusvalemist.

Lahendame näiteks võrrandi

$$3x^2 - 2x - 5 = 0,$$

rakendades järgemööda igähte kolmest valemist.

Üldise ruutvõrrandi lahendusvalem annab:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6};$$

$$x_1 = \frac{2 + 8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3};$$

$$x_2 = \frac{2 - 8}{6} = \frac{-6}{6} = -1.$$

Taandatud ruutvõrrandi lahendusvalemi rakendamiseks anname võrrandile taandatud ruutvõrrandi kuju, jagades iga liikme arvuga 3:

$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0.$$

Nüüd saame:

$$x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{5}{3}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{1}{3} \pm \frac{4}{3};$$

$$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3};$$

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Lõpuks võime antud võrrandi lahendamisel kasutada ka lihtsustatud üldist valemit

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a},$$

sest lineaarse liikme kordaja on siin paarisarv, nimelt -2 . Nii saame

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 3 \cdot 5}}{3} = \frac{1 \pm 4}{3};$$

$$x_1 = \frac{5}{3}; \quad x_2 = -1.$$

Endastmõistetavalt saime iga kord ühed ja samad lahendid.

Praktiliselt kasutame lahendamisel seda valemit, mille abil arvutamine on kõige kergem. Igatahes mõne valemi ununemine ei takista ruutvõrrandite lahendamist.

Kui ruutvõrrandis

$$ax^2 + bx + c = 0$$

vabaliige c või kordaja b on null, siis jääb võrrandisse ainult kaks liiget; seepärast sellist võrrandit nimetatakse ka he-liikmeliseks ehk mittetäielikuks ruutvõrrandiks. Neid võrrandeid saab lahendada küll ka lahendusvalemi abil, kuid kergemini läheb see ilma lahendusvalemit rakendamata.

Lahendame näidistena allpool kõrvuti numbriliste võrranditega mõned tähelised ruutvõrrandid.

Ülesanne 1. Lahendada võrrand

$$17x^2 + 2x = 0.$$

Lahendus. Teisendame võrrandi vasaku poole korrutiseks, tuues x -i sulgude ette, saame

$$x(17x + 2) = 0.$$

Arvestades asjaolu, et korrutis ainult siis võrdub nulliga, kui vähemalt üks teguritest on null, võime ütelda, et võrrand on rahuldatud, kui

$$x = 0,$$

ja võrrand on samuti rahuldatud, kui

$$17x + 2 = 0.$$

Esimene võrdus annab ühe lahendi,

$$x_1 = 0.$$

Teisest võrdusest saame, et

$$17x = -2,$$

$$x = -\frac{2}{17},$$

seega

$$x_2 = -\frac{2}{17}.$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrand

$$(m + 3)x^2 - x = 0.$$

Lahendus. $x[(m + 3)x - 1] = 0$

$$x_1 = 0;$$

$$(m + 3)x - 1 = 0; \quad (m + 3)x = 1;$$

$$x_2 = \frac{1}{m + 3}.$$

Ülesanded.

Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

- | | |
|--------------------------|---|
| 1. $x^2 - 8x = 0$ | 1. $(x + 11)(x - 9) = 0$ |
| 2. $x(x - 3) = 0$ | 2. $(3x - 2)(2x + 3) = 0$ |
| 3. $(x + 3)(x - 5) = 0$ | 3. $\left(3 - \frac{8}{x}\right)\left(2 - \frac{5}{x}\right) = 0$ |
| 4. $(x - 7)(x - 8) = 0$ | 4. $x^2 = x$ |
| 5. $2(x - 2)(x + 4) = 0$ | 5. $3(x + 5)(x - 6) = 0$ |

Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

- | | |
|-----------------------------|---|
| 6. $x^2 - ax = 0$ | 6. $(ax + b)(bx - a) = 0$ |
| 7. $x(x + b) = 0$ | 7. $\left(a - \frac{b}{x}\right)\left(b - \frac{a}{x}\right) = 0$ |
| 8. $(x + a)(x - b) = 0$ | 8. $ax^2 = x$ |
| 9. $a(x - a)(x + a) = 0$ | 9. $b(x + a)(x - b) = 0$ |
| 10. $(x - a)^2 = 2ax + a^2$ | 10. $(x + b)^2 = b^2 - 2bx$ |

Ülesanne 3. Lahendada võrrand

$$5x^2 - 3 = 0.$$

Lahendus. $5x^2 = 3$; $x^2 = \frac{3}{5} = 0,6$;

$$x = \pm \sqrt{0,6}.$$

Ruutjuure algoritmi või ruutjuurte tabeli abil leiame $\sqrt{0,6}$ ligikaudse väärtuse, saame

$$\sqrt{0,6} = 0,775.$$

Seega

$$x_1 = 0,775,$$

$$x_2 = -0,775.$$

Ülesanne 4. Lahendada võrrand

$$\frac{a^2 - b^2}{x} + bx = ax.$$

Lahendus. Vabastame võrrandi nimetajast, korrutades iga liikme x -iga, saame

$$a^2 - b^2 + bx^2 = ax^2.$$

Kirjutame ruutlikmed vasakul poolel esikohale:

$$bx^2 - ax^2 + a^2 - b^2 = 0.$$

Viime x^2 sulgude taha:

$$(b - a)x^2 + a^2 - b^2 = 0.$$

Nüüd saame:

$$(b - a)x^2 = b^2 - a^2;$$

$$x^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b + a)(b - a)}{b - a} = a + b;$$

$$x = \pm \sqrt{a + b};$$

$$x_1 = \sqrt{a + b};$$

$$x_2 = -\sqrt{a + b}.$$

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandid:

11. $5x^2 + 2 = 22$

12. $(x + 1)^2 = 2x + 10$

13. $(x - 2)^2 = 53 - 4x$

14. $\frac{4}{x - 3} - \frac{4}{x + 3} = \frac{1}{3}$

15. $\frac{2x^2}{3} - \frac{7x^2 - 5}{2} = 2\frac{1}{2}$

16. $ax^2 = b$

17. $ax^2 + b^2 = bx^2 + a^2$

18. $\frac{a}{x} - bx = cx$

19. $\frac{x}{x + a} + \frac{x}{x - a} = -1$

11. $7x^2 - 3 = 60$

12. $(x - 1)^2 = 26 - 2x$

13. $(x + 3)^2 = 6x + 25$

14. $\frac{x}{x + 3} + \frac{x}{x - 3} = \frac{9}{4}$

15. $\frac{x + 2}{x - 2} + \frac{x - 2}{x + 2} = \frac{34}{15}$

16. $x^2 - 3a^2 = a^2$

17. $ax^2 + b = bx^2 + a$

18. $\frac{b - 1}{x} + x = bx$

19. $(x + a)^2 + (x - a)^2 = 10a^2$

20. $(ax + b)^2 + (bx - a)^2 = a^2 + b^2$

20. $x^2 - ax(x - b) = abx + 1 - a$

Ülesanne 5. Lahendada võrrand

$$(3x - 2)^2 = 5.$$

Lahendus. Ka selle võrrandi saab lahendada ilma lahendusvalemi rakendamiseta. Võttes ruutjuure võrrandi kummastki poolest, saame avaldada $3x - 2$, seega saame x -i suhtes lineaarsed võrrandid, millest leiamegi x -i väärtused:

$$3x - 2 = \pm \sqrt{5};$$

$$3x = 2 \pm \sqrt{5};$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{3};$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{5}}{3} = \frac{2 + 2,236}{3} = \frac{4,236}{3} = 1,412;$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{5}}{3} = \frac{2 - 2,236}{3} = \frac{-0,236}{3} = -0,079.$$

Ülesanne 6. Lahendada võrrand

$$(ax + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Lahendus.

$$(ax + b)^2 = (a - b)^2$$

$$ax + b = \pm \sqrt{(a - b)^2} = \pm (a - b)$$

$$ax = -b \pm (a - b)$$

$$x = \frac{-b \pm (a - b)}{a}$$

$$x_1 = \frac{-b + (a - b)}{a} = \frac{-b + a - b}{a} = \frac{a - 2b}{a}$$

$$x_2 = \frac{-b - (a - b)}{a} = \frac{-b - a + b}{a} = -\frac{a}{a} = -1.$$

Kontroll. Asetame esmalt esimese lahendi algvõrrandi vasakusse poolde x -i asemele, siis saame:

$$\begin{aligned} \left(a \cdot \frac{a - 2b}{a} + b\right)^2 &= (a - 2b + b)^2 = (a - b)^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Sama avaldis on algvõrrandi paremal poolel, järelikult lahend on õige.

Samal viisil kontrollime teist lahendit, asendades x -i nüüd arvuga -1 , saame:

$$(-a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad \text{Õige.}$$

Praktiliselt võib piirduda ühe lahendi kontrollimisega, sest kui üks lahend on õige, siis võib arvata, et ka teine on õige, kuna lahendusvalemi rakendamiseni tehtud viga peelduks mõlemas lahendis.

Lahendada järgmised võrrandid:

21. $(x - 8)^2 = 49$

21. $(x - a)^2 = b^2$

22. $(3x - 1)^2 = 25$

22. $(2x - n)^2 = 25n^2$

23. $3(x - 2)^2 = 48$

23. $5(my - 1)^2 = 20$

24. $2(5x - 1)^2 = 12,5$

24. $2(ax - 1)^2 = 162a^2$

25. $\frac{1}{2}(x + 3)^2 = 18$

25. $\frac{1}{n}(x + n)^2 = 4n$

26. $\frac{(4x + 7)^2}{3} = 3$

26. $\frac{(ax + 1)^2}{a + 1} = a + 1$

Ülesanne 7. Lahendada võrrand

$$(x + a)^2 + (x + b)^2 = (a - b)^2.$$

Lahendus. Avame sulud ja lihtsustame, niipalju kui võimalik:

$$x^2 + 2ax + a^2 + x^2 + 2bx + b^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$2x^2 + 2ax + 2bx = -2ab;$$

$$x^2 + ax + bx = -ab;$$

$$x^2 + (a + b)x + ab = 0.$$

Rakendame taandatud ruutvõrrandi lahendusvalemit:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab} = -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{4ab}{4}} = \\ &= -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}} = -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{4}} = \\ &= -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}} = -\frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2}; \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{-a-b+a-b}{2} = \frac{-2b}{2} = -b;$$

$$x_2 = -\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{-a-b-a+b}{2} = \frac{-2a}{2} = -a.$$

Kontrolliks asetame näiteks esimese lahendi $-b$ algvõrrandi vasakul poolel x -i asemele, siis saame:

$$(-b + a)^2 + (-b + b)^2 = (a - b)^2 + 0 = (a - b)^2.$$

Et võrrandi parem pool on samuti $(a - b)^2$, siis meie lahend on õige. Samal viisil võiks kontrollida teist lahendit.

Ülesanne 8. Lahendada võrrand

$$bx^2 + (2b - a)x - 2a = 0.$$

Lahendus. Üldise ruutvõrrandi lahendusvalemit rakendades saame:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(2b - a) \pm \sqrt{(2b - a)^2 + 4 \cdot b \cdot 2a}}{2b} = \\ &= \frac{a - 2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ab + a^2 + 8ab}}{2b} = \\ &= \frac{a - 2b \pm \sqrt{4b^2 + 4ab + a^2}}{2b} = \\ &= \frac{a - 2b \pm \sqrt{(2b + a)^2}}{2b} = \frac{a - 2b \pm (2b + a)}{2b}; \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{a - 2b + (2b + a)}{2b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b};$$

$$x_2 = \frac{a - 2b - (2b + a)}{2b} = \frac{-4b}{2b} = -2.$$

Kontrolliks asetame esimese lahendi algvõrrandisse x -i asemele, siis saame:

$$\begin{aligned} b \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + (2b - a) \cdot \frac{a}{b} - 2a &= \frac{a^2b}{b^2} + \frac{2ab}{b} - \frac{a^2}{b} - 2a = \\ &= \frac{a^2}{b} + 2a - \frac{a^2}{b} - 2a = 0. \quad \text{Õige.} \end{aligned}$$

Kokkuvõttes toimime täheliste kordajatega ruutvõrrandi lahendamisel järgmiselt:

Pärast võrrandis esinevate nimetajate kaotamist, tarvilikku sulgude avamist ja võimalikku koondamist toome kõik liikmed võrrandi vasakule poolele, rühmitades need nii, et esikohal on ruutliikmete, teisel kohal lineaarsete liikmete ja kolmandal kohal vabaliikmete rühm; esimeses rühmas viime sulgude taha otsitava ruudu, teises rühmas otsitava esimese astme. Saadud normaalkujulise võrrandi lahendame numbriliste võrrandite eeskujul.

Numbriliste võrrandite lahendamisel nägime, et kui lahendusvalemis esinev juurealune avaldis on positiivne, siis ruutvõrrandil on kaks erinevat lahendit; kui juurealune avaldis on null, siis on võrrandil kaks võrdset lahendit; kui juurealune avaldis on negatiivne, siis ruutvõrrandil ei ole lahendit. Tähealiste kordajatega ruutvõrrandite puhul juurealuse avaldise positiivsus ja negatiivsus ei ole igakord määratud; kui juurealuse avaldise väärtus saab tähtede mõnesuguste arväärtuste puhul tulla positiivne, siis ütleme, et tähelisel ruutvõrrandil on kaks lahendit.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandid:

$$27. \quad x^2 - 6x = 720$$

$$27. \quad x^2 = 6x + 187$$

$$28. \quad 261 = x^2 - 20x$$

$$28. \quad x - \frac{10}{x} = 3$$

$$29. \quad 5x^2 - 3x = 3x^2 + 7x - 8$$

$$29. \quad (x + 2)^2 + (x + 3)^2 = (x + 4)^2$$

$$30. \quad (x - 4)^2 + (x - 6)^2 = (x - 2)^2$$

$$30. \quad (x + 10)^2 - (x + 8)^2 = (x + 1)^2$$

$$31. \quad (x + 3)^3 - x^3 = 63$$

$$31. \quad (x - 4)^3 = x^3 - 124$$

$$32. \quad \frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$32. \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} = 2$$

$$33. \quad x^2 - ax - 2a^2 = 0$$

$$33. \quad x^2 + 2ab - bx = 2ax$$

34. $x^2 - 2ax + 6a^2 = 3ax$
34. $6x(x - a) = a^2 - ax$
35. $x + x^2 = b(1 + x)$
35. $x^2 + 2x = 2n(x + 2)$
36. $2x + \frac{1}{x} = 3$
36. $3x - \frac{11}{2} = \frac{1}{x}$
37. $\frac{2}{x} + 3x = 7$
37. $5x - 12 = \frac{9}{x}$
38. $\frac{1}{x-1} + 2x = 5$
38. $24 = \frac{6}{x-1} + 7x$
39. $\frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 + 2x + 3} = \frac{3}{2}$
39. $\frac{7x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 9x - 8} = \frac{7}{6}$
40. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{7}{12}$
40. $\frac{1}{x} - \frac{3}{2} = \frac{1}{1-x}$
41. $x - \frac{a^2}{x} = \frac{3a}{2}$
41. $x + \frac{8a}{3} = \frac{a^2}{x}$
42. $x + \frac{a^2}{x+a} = \frac{7a}{6}$
42. $\frac{a}{x} + \frac{a-b}{x-b} = 2$
43. $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} = \frac{4}{3a}$
43. $\frac{a}{x} - \frac{b}{x+b^2} = \frac{2a-b}{2b^2}$
44. $3x^2 - 10x + 3 = 0$
44. $3x^2 - 8nx - 3n^2 = 0$
45. $5x^2 + 36x + 7 = 0$
45. $x^2 + \frac{5b^2}{3} = \frac{16bx}{3}$
46. $x^2 + 6\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3} = 0$
46. $x^2 - \frac{24c}{5}x = c^2$
47. $x^2 + 2\frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$
47. $x^2 + \frac{48a}{7}x = a^2$
48. $3x - \frac{1}{x+1} = \frac{7}{5}$
48. $n^2(x^2 + 1) = a^2 + 2n^2x$
49. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{4}$
49. $\frac{ax-2}{bx-1} = \frac{bx-1}{ax}$
50. $\frac{7}{x+1} + \frac{5}{x-1} = 2$
50. $(3x-2)^2 = 8x^2 - 31$
51. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{20}$
51. $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2x+1} = \frac{7}{36}$
52. $\frac{1}{5x} - \frac{1}{7x-1} = \frac{1}{60}$
52. $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 7\frac{3}{8} = 8$
53. $\frac{x+4}{x+1} - \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{6}{x^2-1}$

53. $\frac{x+3}{3-x} - \frac{4+x}{3+x} = \frac{2x+1}{3+x} - \frac{x-1}{x^2-9}$
54. $\frac{1}{27} - \frac{13}{1-2x} = \frac{25}{4x^2-1} + \frac{x}{2x-1}$
54. $\frac{112}{9x^2-1} + \frac{4}{3x+1} = \frac{x}{1-3x} + 1\frac{3}{28}$
55. $\frac{x-a}{x-b} + \frac{x+a}{x+b} = 1$
55. $x - \frac{a^2}{x-a} = a$
56. $ax + \frac{b}{x+a} = \frac{b}{a}$
56. $bx - \frac{a}{x-b} = \frac{a}{b}$
57. $(x+a)(x+b) + (x-a)(x-b) = 2ax + 2ab$
57. $(x+a)(x-b) + (x-a)(x+b) = 2bx - 2ab$
58. $\frac{a}{ax-b} = \frac{bx-a}{b}$
58. $x + \frac{a^2}{x} = 2a$
59. $6x^2 - 5ax + a^2 = 0$
59. $ax^2 + (a-b)x - b = 0$
60. $ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$
60. $2nx - \frac{a}{x} = 2nb - \frac{a}{b}$
61. $x = \frac{3(n-1)^2 + 2nx}{x+2}$
61. $\frac{c}{x-d} + \frac{d}{x-c} = 2$
62. $\frac{2x}{x-d} = \frac{x-d}{d}$
62. $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$

Lahendada järgmised bikvadraatvõrrandid:

63. $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$ 63. $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$
64. $4x^4 - 37x^2 - 1575 = 0$ 64. $3x^4 - 5x^2 - 688 = 0$
65. $9x^2 - \frac{16}{x^2} + 32 = 0$ 65. $16x^2 + \frac{7}{x^2} - 113 = 0$

66. $15x^2 + \frac{4}{x^2} - 15\frac{2}{3} = 0$

66. $25x^2 - \frac{4}{x^2} - 9\frac{3}{4} = 0$

67. $x + 4\sqrt{x} + 3 = 0$

67. $x - \sqrt{x} - 12 = 0$

Rakendades taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendite omadusi, et lahendite summa võrdub lineaarse liikme vastasmärgilise kordajaga ja lahendite korrutis võrdub vabaliikmega, ehk sümbolites

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

kirjutada ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

68. 2 ja 3

68. 1 ja 4

69. -6 ja 8

69. -1 ja -5

70. -10 ja 8

70. $\frac{1}{2}$ ja $\frac{2}{3}$

71. $-\frac{3}{8}$ ja $\frac{5}{6}$

71. 2,2 ja -3,5

72. $\sqrt{3}$ ja $2\sqrt{3}$

72. $2\sqrt{5}$ ja $-\sqrt{5}$

73. $1 + \sqrt{2}$ ja $1 - \sqrt{2}$

73. $3 + \sqrt{3}$ ja $3 - \sqrt{3}$

74. a^2 ja $-b^2$

74. m ja $m + 1$

75. a ja $\frac{1}{a}$

75. $\frac{a}{b^2}$ ja $\frac{b^2}{a}$

76. $2n + 1$ ja $2n - 1$

76. $p^2 - 1$ ja $p^2 + 1$

77. ma^2 ja nb^2

77. $a + b$ ja $a - b$

78. \sqrt{a} ja $-2\sqrt{a}$

78. $3\sqrt{a}$ ja $2\sqrt{a}$

79. $2 + \sqrt{a}$ ja $2 - \sqrt{a}$

79. $a + \sqrt{a}$ ja $a - \sqrt{a}$

Ülesanne. Avaldada võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendite kuupide summa võrrandi kordajate p ja q kaudu.

Lahendus. Tähistame antud võrrandi lahendid tähtedega m ja n . Siis on

$$m + n = -p$$

$$\text{ja } m \cdot n = q.$$

$$\begin{aligned}(m+n)^3 &= (-p)^3 = -p^3; \\ (m+n)^3 &= m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 = \\ &= m^3 + 3mn(m+n) + n^3;\end{aligned}$$

siit järeldub, et

$$m^3 + 3mn(m+n) + n^3 = -p^3$$

ehk

$$m^3 + 3q \cdot (-p) + n^3 = -p^3;$$

$$m^3 - 3pq + n^3 = -p^3;$$

siit saame:

$$m^3 + n^3 = 3pq - p^3.$$

Ülesanded.

80. Võrrandit $x^2 + px + q = 0$ lahendamata avaldada tema lahendite ruutude summa kordajate p ja q kaudu.

80. Võrrandit $x^2 - 3x - 5 = 0$ lahendamata leida selle võrrandi lahendite ruutude summa.

81. Leida võrrandi $x^2 + 2x - 10 = 0$ lahendite pöördarvude summa võrrandit ennast lahendamata.

81. Avaldada võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendite pöördarvude ruutude summa selle võrrandi kordajate p ja q kaudu, seda võrrandit lahendamata.

82. Leida kordaja b väärtus nii, et võrrandi $4x^2 + bx + 9 = 0$ lahendid on teineteisega võrdsed.

82. Leida a väärtus nii, et võrrandi $x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$ üks lahend on teise lahendi ruut.

Ülesanne. Koostada ruutvõrrand, mille lahenditeks on võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendite pöördarvude vastasarvud.

Lahendus. Tähistame antud võrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lahendid tähtedega m ja n .

Ülesande nõude kohaselt on uue võrrandi lahendid

$$-\frac{1}{m} \text{ ja } -\frac{1}{n}.$$

Antud võrrandi järgi

$$m + n = -\frac{b}{a}$$

ja

$$m \cdot n = \frac{c}{a}.$$

Kui uue võrrandi otsitava tähistame tähega y ja tema lahendite tähisteks võtame y_1 ja y_2 , siis peab olema

$$y_1 + y_2 = -\frac{1}{m} + \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = -\frac{m+n}{m \cdot n}.$$

Et aga

$$m + n = -\frac{b}{a}$$

ja

$$m \cdot n = \frac{c}{a},$$

siis

$$y_1 + y_2 = -\frac{m+n}{m \cdot n} = -\left(-\frac{b}{a} : \frac{c}{a}\right) = \frac{b \cdot a}{a \cdot c} = \frac{b}{c}.$$

Uue võrrandi lahendite korrutis on

$$y_1 \cdot y_2 = -\frac{1}{m} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{mn} = 1 : \frac{c}{a} = \frac{a}{c}.$$

Seega uus võrrand on

$$y^2 - \frac{b}{c}y + \frac{a}{c} = 0$$

ehk

$$cy^2 - by + a = 0.$$

Ülesanded.

83. Kirjutada ruutvõrrand, mille lahendid on võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendite kahekordsed.

83. Kirjutada ruutvõrrand, mille lahendid on võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendite kolmekordsed.

84. Kirjutada ruutvõrrand, mille lahendid on võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahenditest 2 korda väiksemad.

84. Kirjutada ruutvõrrand, mille lahendid on võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendite kolmandikud.

85. Kirjutada ruutvõrrand, mille lahendid on võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahenditest 2 võrra suuremad.

85. Kirjutada ruutvõrrand, mille lahendid on võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahenditest 3 võrra väiksemad.

Ülesanne. Määrata võrrandi $x^2 - 8x + q = 0$ vabaliige q nii, et selle võrrandi lahendid a ja β rahuldaksid tingimust

$$2a - \beta = 22.$$

Lahendus. Kui a ja β on võrrandi $x^2 - 8x + q = 0$ lahendid, siis on

$$a + \beta = 8.$$

Ülesande nõude kohaselt peab olema

$$2a - \beta = 22.$$

Seega a ja β on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a + \beta = 8 \\ 2a - \beta = 22 \end{cases}$$

lahenditeks.

Selle süsteemi lahendamisel saame :

$$\begin{cases} a = 10 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

Vabaliige $q = a \cdot \beta = 10 \cdot (-2) = -20$.

Vastus: Otsitav võrrand on $x^2 - 8x - 20 = 0$.

Ülesanded.

86. Määrata võrrandi $x^2 + 5x + q = 0$ vabaliige nii, et selle võrrandi lahendid a ja β rahuldavad tingimust

$$2a + 3\beta = -18.$$

86. Arvutada võrrandi $x^2 - 6x + q = 0$ vabaliige q nii, et selle võrrandi lahendid a ja β on ühtlasi võrrandi

$$2a - 3\beta = 22$$

lahenditeks.

87. Leida võrrandi $x^2 - 10x + q = 0$ vabaliige q nii, et selle võrrandi lahendite ruutude vahe on 20.

87. Leida võrrandi $x^2 + px + q = 0$ kordajad p ja q nii, et nende summa on 27 ja võrrandi lahendite vahe on 3.

88. Koostada ruutvõrrand, mille lahendid rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{a}{x+a} + \frac{b}{y+b} = 1 \\ \frac{b}{x+a} + \frac{a}{y+b} = \frac{a^2+b^2}{2ab} \end{cases}$$

88. Koostada ruutvõrrand, mille lahendid on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{x-a}{q-a} = \frac{a-b}{a+b} \\ \frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} \end{cases}$$

lahenditeks.

Kui ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid on x_1 ja x_2 , siis lahendite omaduse põhjal võrrandi vasak pool

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Kui ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid on x_1 ja x_2 , siis selle ruutvõrrandi vasak pool

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ülesanded.

Rakendades neid valemeid, lahutada tegureiks järgmised ruuttrinoomid:

89. $x^2 + 12x + 35$

89. $x^2 + 7x + 10$

90. $x^2 + 5x + 6$

90. $x^2 - 9x + 14$

91. $x^2 - 7x - 30$

91. $x^2 - 3x - 10$

92. $x^2 + 4x - 5$

92. $x^2 + x - 56$

93. $6a^2 + 13a + 6$

93. $10b^2 - 29b + 10$

94. $6n^2 + 7n - 5$

94. $10c^2 - 13c - 3$

Taandada murrud:

$$95. \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}$$

$$95. \frac{a^3 + 1}{2a^2 + 5a + 3}$$

$$96. \frac{a^2 - 6a + 9}{9a^2 - 24a - 9}$$

$$96. \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x - 4}$$

$$97. \frac{3x^2 + 5x + 2}{12x^2 + 5x - 2}$$

$$97. \frac{11a^2 - 34a + 3}{33x^2 - 8x - 1}$$

$$98. \frac{2x^3 + x^4 - 8x - 16}{x^2 + 2x + 4}$$

$$98. \frac{x^2 + 3x + 9}{x^4 + 3x^3 - 27x - 81}$$

Lihtsustada avaldised:

$$99. \frac{n + 3}{n^2 - 4n + 3} : \left(\frac{6}{n - 2} - \frac{5n - 21}{n^2 - 5n + 6} \right)$$

$$99. \left(\frac{4a - 6}{a^2 + 3a} - \frac{2a - 8}{a^2 + 8a + 15} \right) \cdot \frac{a^3 - 9a}{a^2 + 11a - 15}$$

$$100. \frac{2x^2 + 2x - 2}{x^2 - 4x - 5} \cdot \frac{2x^4 - 2x^2 + 4x - 2}{3x^2 - 16x + 5} \cdot \frac{x(2x - 3)}{x(x - 1) - 1}$$

$$100. \frac{3x^2 + 5x + 2}{16 - 4x^2 - 4x^3 - x^4} : \frac{3x^2 - x - 2}{x^5 + 2x^4 + x^3 + 8x^2 + 16x + 8}$$

Lahendada võrrandid:

$$101. \frac{x + 1}{x^2 + 4x - 21} + \frac{x - 2}{x^2 + 8x + 7} = \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$101. \frac{x + 1}{2x^2 - 5x + 2} - \frac{x + 3}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{x - 7}{6x^2 - x - 1}$$

102. Leida arv, mis oma pöördarvust on $\frac{5}{6}$ võrra suurem.

102. Leida arv, mis oma pöördarvu ületab $\frac{7}{12}$ võrra.

103. Loomulikkude täisarvude reas kahe järjestikuse arvu pöördarvude summa on $\frac{11}{30}$. Leida need arvud.

103. Loomulikkude täisarvude reas kahe järjestikuse arvu pöördarvude vahe on $\frac{1}{20}$. Leida need arvud.

104. Kahe arvu vahe on 7, nende arvude ruutude summa on 445. Leida need arvud.

104. Kahe arvu vahe on 8, nende arvude pöördarvude vahe on $\frac{1}{48}$. Leida need arvud.

105. Jaotada arv 17 kaheks liidetavaks nii, et nende liidetavate kuupide summa võrdub 1853-ga.

105. Jaotada arv 13 kaheks liidetavaks nii, et nende liidetavate pöördarvude ruutude vahe võrdub $\frac{39}{1600}$.

106. Trapetsi üks alustest on võrdne trapetsi kõrgusega, teine alus on 8 cm; trapetsi pindala on 120 cm². Arvutada kõrgus.

106. Trapetsi üks alus on niisama suur kui kõrgus, teine alus on 6 cm; trapetsi pindala on 93,5 cm². Arvutada kõrgus.

107. Aias on eraldatud ristküliku-kujuline väljak, mille pikkus on 80 m ja laius 50 m. Väljaku keskel on muruplats pindalaga 3256 m², mida piirab igalt poolt ühe ja sama laiune tee, kusjuures muruplats koos teega katavad kogu väljaku. Kui lai on tee?

107. Pilt mõõdetega 84 cm ja 60 cm on asetatud ühtlase laiusega raami. Leida raami laius, kui raami pindala on võrdne pildi pindalaga.

108. Kaks töolist, töötades koos, lõpetavad töö 12 tunniga; üksikult töötades lõpetaks esimene selle töö 10 tunni võrra lühema ajaga kui teine. Mitme tunniga lõpetaks kumbki selle töö üksikult töötades?

108. Bassein täitub veega kahe toru kaudu 6 tunniga. Kui kumbki toru oleks üksi avatud, siis täituks bassein esimese kaudu 5 tunni võrra kiiremini kui teise kaudu. Mitme tunniga täituks bassein kummagi toru kaudu üksikult?

109. Võlg 820 rubla tasutakse krediitühistule kahes osas aastaste tähtaegadega, kusjuures kummagi aasta lõpul maksti 441 rubla. Mitmeprotsendiline oli laen?

109. Võlg 2100 rubla tasutakse aastaste tähtaegadega kahes osas, makstes kummagi aasta lõpul 1210 rubla. Mitme protsendiga oli laen tehtud?

110. Kaks matkajat lähtuvad ühel ja samal ajal ühest linnast teise linna suunas. Esimene matkab tunnis 0,5 km rohkem kui teine ja jõuab seepärast 1 tund varem sihtkohta. Linnade vahemaa on 28 km. Mitu kilomeetrit käib kumbki matkaja tunnis?

110. Tallinna ja Tartu vahelise tee, mille pikkus on 200 km, sõidab reisijaterong 3 tunni võrra lühema ajaga ära kui kaubarong. Leida kummagi rongi keskmine kiirus teades, et reisijaterongi keskmine kiirus on 15 km võrra tunnis suurem kui kaubarongi kiirus.

111. Ristküliku pindala on 1260 cm^2 ja diagonaal on 53 cm. Leida ristküliku küljed.

111. Ristküliku pindala on $516,12 \text{ m}^2$ ja diagonaal on 32,5 m. Arvutada ristküliku küljed.

112. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on 30 dm ja kaatetite pikkuste vahe on 7 dm. Leida kaatetite pikkused.

112. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on 84 m. Üks kaatet on teisest 23 m võrra pikem. Leida kaatetite pikkused.

113. Võrdhaarse kolmnurga haara pikkus on 13 cm ja pindala on 60 cm^2 . Leida selle kolmnurga alus.

113. Võrdhaarse kolmnurga haar on 29 m ja pindala on 420 m^2 . Leida kolmnurga alus.

114. Ristküliku kahe vastasnurga tipust diagonaalile ehitatud ristlõikude pikkused on 6 cm. Need ristlõigud lõikuvad diagonaaliga punktides, mis on teineteisest 9 cm kaugusel. Kui pikk on ristküliku diagonaal?

114. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 6 cm võrra pikem kui tema projektsioon hüpotenuusil ja 15 cm võrra lühem kui teise kaateti projektsioon hüpotenuusil. Leida selle kolmnurga külgede pikkused.

115. Arvutada kolmnurga kolmas kül, kui teised kaks külge on $6\sqrt{2}$ cm ja 14 cm ja nendevaheline nurk on 45° .

115. Arvutada kolmnurga kolmas külge, kui tema kaks külge on $2\sqrt{2}$ dm ja 12 dm ja nendevaheline nurk on 135° .

116. Antud ringjoone ümber, mille raadius on 2 cm, on ehitatud 4 võrdset ringjoont nii, et igaüks puudutab oma kaht naaberringjoont ja antud ringjoont. Leida nende ringjoonte raadiused.

116. Ristküliku külgede pikkused on 7,5 cm ja 5,8 cm. Selle ristküliku kahe vastasnurga sisse on ehitatud võrdsed ringjooned nii, et need puudutavad nurga haarasid ja teineteist. Leida raadius.

117. Ringjoone punktist on ehitatud ristlõik diameetrile. Leida selle ristlõigu pikkus, kui diameeter jaguneb lõikudeks 6 cm ja 24 cm.

117. Ringjoone punktist on ehitatud diameetrile ristlõik pikkusega 45 cm. See ristlõik jaotab raadiuse lõikudeks, mis suhtuvad nagu 8:9, arvates keskpunktist. Arvutada diameetri pikkus.

118. Ringis on joonestatud kaks teineteisega lõikuvat kõõlu. Ühe kõõlu lõigud on $\frac{2}{5}$ m ja $\frac{5}{6}$ m. Teise kõõlu lõigud suhtuvad nagu 1:3. Leida teise kõõlu pikkus.

118. Kõõlul asetsev punkt, mis jaotab kõõlu 2,4 m ja 1,2 m pikkusteks lõikudeks, on ringjoonest 1,4 m kaugusel. Leida ringi raadius.

119. Võrdkülgse kolmnurga külje pikkus on 6 cm. Leida selle kolmnurga siseringjoone raadius.

119. Võrdhaarse kolmnurga alus on 4 cm ja haar on 6 cm. Leida selle kolmnurga ümberringjoone raadius.

120. Katseklaasis oli katse algul 400 bakterit. Kahe tunni pärast oli katseklaasis 576 bakterit. Mitme % võrra kasvas bakterite arv iga tunni jooksul?

120. Mootorratas maksis 4000 rbl. Kahe aasta pärast hinnati tema väärtus 2890 rublale. Mitme % võrra kaotas mootorratas oma väärtusest iga aasta jooksul?

121. 440 g üht metalli sulatati kokku 420 g teise metalliga, mille erikaal on esimese metalli erikaalust 1,7 võrra suurem. Kokkusulatatud metallitükk kaotab vees oma raskusest 90 g. Leida kummagi metalli erikaal.

121. Kaks metallitükki sulatatakse kokku üheks metallitükiks. Kui esimest metalli võetakse 20 g ja teist 40 g, siis on sulami erikaal 9,4. Leida kummagi metalli erikaal teades, et esimese erikaal on 1,5 võrra suurem kui teise erikaal.

122. Õhupallilt, mis on maapinnast 2020 m kõrgusel, visatakse alla kuul algkiirusega $3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Mitme sekundi pärast jõuab kuul maapinnale? Raskuskiirendus võtta $9,8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

122. Kui sügav on kaev, kui temasse kukkunud kivi löök vastu kaevu põhja on kuulda 4 sekundi pärast?

123. Selleks, et sõita jõel S kilomeetrit vastuvoolu, kulub mootorpaadil t tundi rohkem aega kui sellesama teepikkuse sõitmiseks seisvas vees. Leida mootorpaadi kiirus seisvas vees teades, et jõevoolu kiirus on V kilomeetrit tunnis.

123. Selleks, et sõita jõel u kilomeetrit pärivoolu, kulub mootorpaadil t tundi vähem aega kui sellesama teepikkuse sõitmiseks seisvas vees. Leida mootorpaadi kiirus seisvas vees teades, et jõevoolu kiirus on v meetrit tunnis.

124. Ühe tonni kauba vedu linnast K linna L on raudteed mööda a rubla võrra kallim kui veeteed mööda. Mitu tonni kaupa saab vedada linnast K linna L raudteed mööda;

kulutades transpordiks b rubla, kui on teada, et veeteed mööda saaks sellesama transpordikuluga vedada kaupa k tonni võrra rohkem?

124. Raudtee sõidupilet Tallinnast Pärnu on b kopikat odavam kui omnibuse sõidupilet. Mitmele isikule saaks osta omnibusepileteid sõiduks Tallinnast Pärnu a rubla eest, kui on teada, et raudteepileteid saaks sama rahasumma eest osta n võrra suuremale isikute arvule?

125. Detaili väljatöötamiseks kulub stahhaanovlasel n minutit vähem aega kui lööktöölisel. Mitu detaili töötab välja kumbki t tunni jooksul, kui selle ajaga stahhaanovlane valmistab m detaili rohkem kui lööktööline?

125. Kaks töolist koos töötades jõuavad töö lõpetada n tunniga. Mitme tunniga lõpetaks selle töö kumbki üksi töötades, kui on teada, et teisel kulub selleks 12 tundi rohkem kui esimesel?

126. Kaks matkajat, lähtudes ühel ja samal ajal linnadest M ja N , hakkasid teineteisele vastu minema. Kohtumisel selgus, et üks oli ära käinud m kilomeetrit rohkem kui teine. Peale kohtumist liikusid mõlemad suunda ja kiirust muutmata edasi. Esimene saabus p tundi pärast kohtumist linna N , teine aga q tundi pärast kohtumist linna M . Leida linnade M ja N vahemaa.

126. Kaks lennukit startisid ühel ja samal ajal linnadest A ja B , millede vahemaa on s kilomeetrit, ning lendasid teineteisele vastu. Ühe tunni pärast nad kohtusid ning jätkasid lendu endises suunas ja endise kiirusega. Esimene maabus linnas B m minutit varem kui teine linnas A . Leida lennukite kiirused.

§ 2. Võrratuste teisendamine.

Võrratuse definitsioon. Kui q on mingi positiivne arv ja $a = b + q$, siis $a > b$ ehk $b < a$. Kirjutisi $a > b$ ja $b < a$ nimetame võrratusteks.

Võrratusi nagu $5 > 3$ ja $4 > 2$ nimetame ühepidisteks ehk samapidisteks, aga võrratusi nagu $5 > 3$ ja $3 < 4$ nimetame vastupidisteks võrratusteks.

Võrratuste teisendamisel kasutame allpool järgnevaid teoreeme.

Teoreem 1. Kui $a > b$ ja c on mistahes arv, siis $a + c > b + c$.

Tõestus. Et $a > b$, siis definitsiooni põhjal $a = b + q$; liites selle võrduse mõlema poolega arvu c , saame, et

$$a + c = b + q + c \text{ ehk } a + c = (b + c) + q,$$

järelikult

$$a + c > b + c.$$

Selle teoreemi võime sõnastada nõnda:

kui võrratuse mõlema poolega liidame ühe ja sama arvu, siis saame samapidise võrratuse.

Näide:

$$\begin{array}{r} 5 > 3 \\ -7 = -7 \\ \hline -2 > -4 \end{array}$$

Teoreem 2. Kui $a > b$ ja $c > d$, siis $a + c > b + d$.

Tõestus. Et $a > b$ ja $c > d$, see ütleb, et $a = b + q$ ja $c = d + r$, kus q ja r on positiivsed. Liites kahe viimase võrduse vastavad pooled saame, et

$$a + c = b + q + d + r \text{ ehk } a + c = b + d + (q + r),$$

millest näemegi, et

$$a + c > b + d,$$

see tähendab,

kui võrratuse pooltega liidame teise samapidise võrratuse pooled, siis saame samapidise võrratuse.

Näide:

$$\begin{array}{r} 8 > 3 \\ 2 > -1 \\ \hline 10 > 2 \end{array}$$

Teoreem 3. Kui $a > b$ ja $b > c$, siis $a > c$.

Tõestus. Eeldusest järeldub, et $a = b + q$ ja $b = c + r$, kusjuures q ja r on positiivsed. Pannes nüüd esimeses võrduses b asemele $c + r$, saame, et

$$a = (c + r) + q \text{ ehk } a = c + (r + q),$$

järelikult

$$a > c.$$

Näide: kui $x > -2$, siis $x > -5$, sest $-2 > -5$.

Teoreem 4. Kui $a > b$ ja c on mistahes positiivne arv, siis $ac > bc$.

Tõestus. Et $a = b + q$, kus q on positiivne, siis $ac = bc + qc$; et viimases võrduses qc on positiivne, siis saamegi, et

$$ac > bc,$$

ehk sõnastatult:

kui võrratuse kumbagi poolt korrutame mingi positiivse arvuga, siis saame samapidise võrratuse.

Näide:

$$\begin{array}{r} 3 > 2 \\ 5 = 5 \\ \hline 15 > 10 \end{array}$$

Teoreem 5. Kui $a > b$ ja d on mistahes negatiivne arv, siis $ad < bd$.

Tõestus. Et $a = b + q$, kus q on positiivne, siis $ad = bd + qd$; siin qd on negatiivne, seega

$$ad < bd.$$

See tähendab,

kui võrratuse kumbagi poolt korrutame mingi negatiivse arvuga, siis võrratuse märk pöördub.

Näide:

$$\begin{array}{r} 2 > 1 \\ -3 = -3 \\ \hline -6 < -3 \end{array}$$

Teoreemist 5 järeldub, et

kui võrratuse liikmete märgid muudame, siis võrratuse märk pöördub,

sest liikmete märkide muutmine on samaväärne korrutamise-ga arvuga -1 .

Näide:

$$\begin{array}{r} 7 > 2 \\ -7 < -2 \end{array}$$

Teoreem 6. Kui $a > b$ ja $c > d$, siis positiivsete b ja c korral $ac > bd$.

Tõestus. Teoreemi 4 põhjal on $ac > bc$ ja $bc > bd$ (esimese võrratuse pooled korrutasime positiivse arvuga c ja teise võrratuse pooled positiivse arvuga b); nüüd järeldame teoreemi 3 põhjal, et

$$ac > bd.$$

Näide:

$$\begin{array}{r} 5 > 2 \\ 1 > -2 \\ \hline 5 > -4 \end{array}$$

Kui teoreemi tingimus, et b ja c olgu positiivsed, ei ole täidetud, siis samapidiste võrratuste poolte korrutamisel ei saa alati samapidist võrratust. Seda asjaolu illustreerivad järgmised näited:

$$\begin{array}{cccc} 5 > 2 & 3 > 2 & 6 > 3 & 5 > -3 \\ -1 > -2 & -1 > -2 & -1 > -2 & -1 > -2 \\ \hline -5 < -4 & -3 > -4 & -6 = -6 & -5 < 6 \end{array}$$

Nagu nendest näidetest näeme, samapidiste võrratuste poolte korrutamise tulemuseks on kord vastupidine võrratus, kord samapidine võrratus, kord võrdus, olenevalt andmetest.

Teoreem 7. Kui $a > b$ ning a ja b on samamärgilised arvud, siis $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Tõestus. Kui a ja b on samamärgilised, siis $\frac{1}{ab}$ on positiivne. Teoreemi 4 põhjal on $a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab}$ ehk $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ ehk

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

See teoreem ütleb, et

kui kahest samamärgilisest arvust esimene on suurem kui teine, siis esimese arvu pöördarv on väiksem kui teise arvu pöördarv.

Näiteid: $-4 > -8$ $8 > 4$
 $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$

Märkus. Kui $a > b$ ning seejuures $a > 0$ ja $b < 0$, siis $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, sest $\frac{1}{a}$ on positiivne, aga $\frac{1}{b}$ on negatiivne.

Näide: $4 > -2$
 $\frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$

Ülesanne. Missugustel x -i väärtustel kehtib võrratus

$$\frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 4x - 3?$$

Lahendus. Korrutame iga liikme ühise nimetajaga 10, siis saame

$$15x - 6 < 40x - 30.$$

Liidame kummalegi poolele $-40x$ ja 6, see tähendab, toome liikme $40x$ paremalt poolelt vasakule poolele ja vabaliikme -6 vasakult poolelt paremale poolele, muutes nende märgid, saame:

$$15x - 40x < -30 + 6$$

ehk

$$-25x < -24.$$

Siit

$$25x > 24$$

ja

$$x > \frac{24}{25}.$$

Vastus. Antud võrratus on kehtiv, kui $x > \frac{24}{25}$.

Ülesanded.

127. Missugustel x -i väärtustel kehtivad järgmised võrratused:

1. $2 - 3x < 14 - 5x$

2. $x + 4 > 2 - 3x$

3. $4(x - 1) > 2 + 7x$

4. $3(x - 2) < 4x - 9$

5. $\frac{37 - 2x}{3} + 9 < \frac{3x - 8}{4} - x$

6. $3 - \frac{3x}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4x - 3}{6}$

7. $(x - 1)^2 + 7 > (x + 4)^2$

8. $(1 + x)^2 + 3x^2 < (2x - 1)^2 + 7$

Ülesanne. Missugustel x -i väärtustel kehtib võrratus

$$4x^2 + 16x + 7 > 0?$$

Lahendus. Lahutame võrratuse vasaku poole tegureiks:

$$4x^2 + 16x + 7 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 28}}{4} = \frac{-8 \pm 6}{4}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = -\frac{7}{2};$$

seega

$$4x^2 + 16x + 7 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{7}{2}\right).$$

Et viimane avaldis oleks positiivne, nagu ülesandes nõutakse, selleks peavad olema kas

1) mõlemad tegurid positiivsed või

2) mõlemad tegurid negatiivsed,

see on, kas

1) $x + \frac{1}{2} > 0$ ja $x + \frac{7}{2} > 0$

või 2) $x + \frac{1}{2} < 0$ ja $x + \frac{7}{2} < 0$.

Esimesel juhul saame, et

$$x > -\frac{1}{2} \text{ ja } x > -\frac{7}{2}.$$

Kui $x > -\frac{1}{2}$, siis on ammugi $x > -\frac{7}{2}$, teisiti öeldes, kui esimene tingimus on täidetud, siis sellega on ka teine täidetud. Niisiis, et avaldis $4x^2 + 16x + 7$ oleks positiivne, selleks peab olema $x > -\frac{1}{2}$.

Teisel juhul aga saame, et

$$x < -\frac{1}{2} \text{ ja } x < -\frac{7}{2}.$$

On selge, et kui $x < -\frac{7}{2}$, siis paratamatult ka $x < -\frac{1}{2}$. Sellest järeldub, et avaldis $4x^2 + 16x + 7$ on ka siis positiivne, kui $x < -\frac{7}{2}$.

Kokkuvõttes: selleks, et oleks

$$4x^2 + 16x + 7 > 0,$$

peab olema kas

$$x > -\frac{1}{2}$$

või

$$x < -\frac{7}{2},$$

mis ütleb, et ülesande nõuet rahuldab iga x -i väärtus, mis pole vahemikus $-\frac{7}{2}$ -st kuni $-\frac{1}{2}$ -ni.

Kontroll. Proovime, kas on

$$4x^2 + 16x + 7 > 0,$$

kui 1) $x > -\frac{1}{2}$, näiteks kui $x = 1$; saame

$$4 + 16 + 7 > 0;$$

kui 2) $x < -\frac{7}{2}$, näiteks $x = -\frac{8}{2} = -4$, siis

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-4)^2 + 16 \cdot (-4) + 7 &= \\ = 64 - 64 + 7 &= 7 > 0. \end{aligned}$$

Kui aga võtame x -i väärtuse arvude $-\frac{1}{2}$ ja $-\frac{7}{2}$ vahelt, näiteks

$$x = -\frac{4}{2} = -2,$$

siis $4 \cdot (-2)^2 + 16 \cdot (-2) + 7 = 16 - 32 + 7 = -9 < 0$.

Vastus. Võrratus $4x^2 + 16x + 7 > 0$ on rahuldatud, kui $x > -\frac{1}{2}$ või kui $x < -\frac{7}{2}$.

Ülesanded.

Leida, missugustel x -i väärtustel on järgmised võrratused rahuldatud:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 128. $x^2 - 10x + 21 > 0$ | 128. $x^2 + x - 6 > 0$ |
| 129. $x^2 - 4x - 45 < 0$ | 129. $x^2 - 9x + 14 < 0$ |
| 130. $4x^2 - 15x - 4 > 0$ | 130. $6x^2 + 5x - 50 < 0$ |

Ülesanne. Missugustel x -i väärtustel on rahuldatud võrratus

$$\frac{1}{x-5} > \frac{2}{3x+1} ?$$

Lahendus. A. Kui nimetajad $x-5$ ja $3x+1$ on samamärgilised, siis ka murrud $\frac{1}{x-5}$ ja $\frac{2}{3x+1}$ on samamärgilised ning ülesandes antud võrratusest $\frac{1}{x-5} > \frac{2}{3x+1}$ järeldeb teoreemi 7 põhjal võrratus $x-5 < \frac{3x+1}{2}$ ehk $2x-10 < 3x+1$ ehk $-11 < x$ ehk $x > -11$. Kuid selle võrratuse saime eeldusel, et $x-5$ ja $3x+1$ on samamärgilised, s. t.

kas	1)	$\begin{cases} x-5 > 0 \\ 3x+1 > 0, \end{cases}$	seega	$\begin{cases} x > 5 \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases}$

Esimesest juhtumist näeme, et meie võrratus on rahuldatud, kui $x > 5$, sest siis on ju $x > -\frac{1}{3}$ ja ka $x > -11$.

Teisest juhtumist selgub, et peab olema $x < -\frac{1}{3}$ ja $x > -11$ (siin paneme tähele, et kui $x < -\frac{1}{3}$, siis kindlasti $x < 5$).

Seega antud võrratus on rahuldatud ka siis, kui

$$-11 < x < -\frac{1}{3}.$$

B. Kui aga nimetajad $x-5$ ja $3x+1$ ja seega ka murrud $\frac{1}{x-5}$ ja $\frac{2}{3x+1}$ on vastasmärgilised, siis antud võrratuse

$$\frac{1}{x-5} > \frac{2}{3x+1}$$

rahuldamise tingimuseks on (teoreemi 7 märkuse põhjal), et

$$x-5 > \frac{3x+1}{2} \quad \text{ehk} \quad x < -11.$$

Sellele on aga eelduseks, et avaldised $x-5$ ja $3x+1$ on erimärgilised, see on

$$\text{kas 1) } \begin{cases} x-5 > 0 \\ 3x+1 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 5 \\ x < -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

mis pole võimalik, sest niisugust x -i väärtust pole olemas, mis on suurem kui 5 ja väiksem kui $-\frac{1}{3}$,
või aga

$$2) \begin{cases} x-5 < 0 \\ 3x+1 > 0, \end{cases} \quad \text{seega} \quad \begin{cases} x < 5 \\ x > -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

kuid vahemikus $-\frac{1}{3} < x < 5$ ei ole rahuldatud tingimus $x < -11$.

Vastus. Antud võrratus on rahuldatud, kui $x > 5$ ja ka siis, kui $-11 < x < -\frac{1}{3}$.

Ülesanded.

Leida, missugustel x -i väärtustel järgmised võrratused on rahuldatud:

$$131. \frac{1}{x-2} < \frac{2}{x+1}$$

$$131. \frac{3}{3x+1} > \frac{5}{x-4}$$

$$132. \frac{3}{x+2} + \frac{2}{2-x} > \frac{4x}{4-x^2}$$

$$132. \frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10} > 0$$

Võrratuse tõestamiseks, s. t. selleks, et näidata, kas võrratus antud tingimustel on õige, võrratust teisendatakse, kuni saame lihtsa võrratuse, mille kehtivus on silmnähtav.

Ülesanne. Tõestada, et positiivse lugeja ja nimetajaga lihtmurd suureneb, kui tema lugejaga ja nimetajaga liita mingi üks ja sama positiivne arv.

Lahendus. Olgu $\frac{p}{q}$ mingi positiivne lihtmurd. Seega $p < q$, $p > 0$ ja $q > 0$.

Olgu nüüd x mistahes positiivne arv; näitame, et

$$\frac{p+x}{q+x} > \frac{p}{q}.$$

Saame:

$$q(p+x) > p(q+x)$$

ehk

$$qp + qx > pq + px$$

ehk

$$qx > px,$$

millest $q > p$, nagu oligi eeldatud; seega tõesti

$$\frac{p+x}{q+x} > \frac{p}{q},$$

mida oli tarvis tõestada.

Ülesanded.

133. Tõestada, et

1. positiivse lugeja ja nimetajaga liigmurd väheneb, kui tema lugejaga ja nimetajaga liita mingi üks ja sama positiivne arv;

2. kahe erineva positiivse arvu aritmeetiline keskmine on suurem kui geomeetiline keskmine;

3. iga kolmnurga pool übermõõtu on suurem kui selle kolmnurga mistahes külj.

§ 3. Ruutvõrrandisüsteem täheliste kordajatega.

Ülesanne 1. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ xy = 221. \end{cases}$$

Lahendus. Tuletame antud võrrandisüsteemi võrranditest uue lineaarse võrrandi järgmisel viisil: tõstame antud süsteemi lineaarse võrrandi pooled ruutu, teise võrrandi pooled korrutame 4-ga, siis saame

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 900 \\ 4xy = 884. \end{cases}$$

Lahutame selle süsteemi esimese võrrandi pooltest teise võrrandi pooled, mille tulemusena saame:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 16$$

ehk

$$(x - y)^2 = 16.$$

Võttes selle võrrandi pooltest ruutjuured, saame kaks lineaarset võrrandit

$$x - y = \pm 4$$

ehk neid lahus kirjutades:

$$x - y = 4 \text{ ja } x - y = -4.$$

Nüüd võtame antud süsteemi lineaarse võrrandi ja lahendame selle koos uue, tuletatud esimese võrrandiga kui ka koos teise tuletatud võrrandiga. Niisiis antud süsteemi

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ xy = 221 \end{cases}$$

asemel lahendame kaks lineaarse võrrandite süsteemi:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = -4. \end{cases}$$

Nendest esimene annab

$$\begin{cases} x_1 = 17 \\ y_1 = 13 \end{cases}$$

ning teise lahendamisel saame

$$\begin{cases} x_2 = 13 \\ y_2 = 17. \end{cases}$$

Kontroll. $13 + 17 = 30$; $13 \cdot 17 = 221$.

Ülesanne 2. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b. \end{cases}$$

Lahendus. Astendame lineaarse võrrandi kummagi poole 2-ga; teise võrrandi kummagi poole korrutame 4-ga ja lahutame esimesest tulemusest teise. Sel viisil saame otsitavate vahe ruudu, ning sellest ruutjuure võttes, leiame otsitavate vahe. Niisiis

$$\begin{array}{r} x^2 + 2xy + y^2 = a^2 \\ \quad \quad \quad 4xy = 4b \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b \\ (x-y)^2 = a^2 - 4b \\ x - y = \pm \sqrt{a^2 - 4b}. \end{array}$$

Nüüd moodustame võrrandisüsteemi, mis koosneb algsüsteemi lineaarsest võrrandist ja praegu tuletatud uuest võrrandist. Et uues võrrandis esineb kaks juhtumit (märkid pluss ja miinus), siis saame kaks võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = +\sqrt{a^2 - 4b} \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x + y = a \\ x - y = -\sqrt{a^2 - 4b}. \end{cases}$$

Lahendades need võrrandisüsteemid, saame algsüsteemile kaks lahendit:

$$x + y = a$$

$$x - y = +\sqrt{a^2 - 4b}$$

$$2x = a + \sqrt{a^2 - 4b}$$

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$2y = a - \sqrt{a^2 - 4b}$$

$$y_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$x + y = a$$

$$x - y = -\sqrt{a^2 - 4b}$$

$$2x = a - \sqrt{a^2 - 4b}$$

$$x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$2y = a + \sqrt{a^2 - 4b}$$

$$y_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Seega algsüsteemi üks lahend

on $\begin{cases} x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ y_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases}$ ja teine $\begin{cases} x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ y_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases}$.

Lahenduskäik kujuneb samalaadseks, kui on antud võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b, \end{cases}$$

see tähendab, kui on antud otsitavate vahe ja otsitavate korrutis.

Lahendite iseloom oleneb juurealusest avaldisest, diskriminandist $a^2 - 4b$.

1. Kui $b \leq 0$, siis süsteemil on kaks teineteisest erinevat lahendit.

2. Kui $b > 0$ ja seejuures

a) $b < \frac{a^2}{4}$, siis on võrrandisüsteemil kaks teineteisest erinevat lahendit;

b) $b = \frac{a^2}{4}$, siis võrrandisüsteemi kaks lahendit langevad ühte;

c) kui aga $b > \frac{a^2}{4}$, siis võrrandisüsteemil ei ole lahendeid.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

$$134. \begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 35 \end{cases}$$

$$134. \begin{cases} x\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 5 \\ 9xy = 50 \end{cases}$$

$$135. \begin{cases} x + xy + y = 11 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$135. \begin{cases} x\left(1 - \frac{y}{x}\right) = 1\frac{1}{6} \\ xy = 4 \end{cases}$$

$$136. \begin{cases} (x + y)^2 - (x - y)^2 = 240 \\ x + 3xy + y = 197 \end{cases}$$

$$136. \begin{cases} x + xy - y = 16 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$137. \begin{cases} x + y = 2a \\ xy = a^2 - b^2 \end{cases}$$

$$137. \begin{cases} (x + y)^2 - (x - y)^2 = 28 \\ x - xy + y = 1 \end{cases}$$

$$138. \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 48 \end{cases}$$

$$138. \begin{cases} x - y = 2b \\ xy = a^2 - b^2 \end{cases}$$

Ülesanne 3. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 170 \\ xy = 77. \end{cases}$$

Lahendus. Tuletame antud süsteemi võrranditest uued lineaarsed võrrandid, korrutades teise võrrandi pooled 2-ga ja nii saadud võrrandi pooled kord liidame süsteemi esimese võrrandi pooltega, kord lahutame, tulemuse pooltest aga võtame mõlemal korral ruutjuure.

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 170 \\ 2xy = 154 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 170 \\ 2xy = 154 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2xy + y^2 = 324 \\ (x + y)^2 = 324 \\ x + y = \pm 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2xy + y^2 = 16 \\ (x - y)^2 = 16 \\ x - y = \pm 4 \end{array}$$

ehk

ehk

$$x + y = 18$$

$$x - y = 4$$

või $x + y = -18$

või $x - y = -4$.

Nüüd saame moodustada järgmised võrrandisüsteemid:

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -18 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ x - y = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -18 \\ x - y = -4. \end{cases}$$

Neid võrrandisüsteeme lahendades saame algsüsteemile neli lahendit:

$$\begin{cases} x_1 = 11 \\ y_1 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -7 \\ y_3 = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -11 \\ y_4 = -7. \end{cases}$$

Ülesanne 4. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b. \end{cases}$$

Lahendus. Tuletame antud süsteemist otsitavate summa ja vahe, teise võrrandi 2-ga korrutatud pooled esimese võrrandi pooltega vastavalt liites või lahutades. Nii saame otsitavate summa ruudu ja vahe ruudu; neist ruutjuured võttes leiamegi otsitavate summa ja vahe.

Niisiis

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = a \\ 2xy = 2b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b \\ (x + y)^2 = a + 2b \\ x + y = \pm \sqrt{a + 2b} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = a \\ 2xy = 2b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline x^2 - 2xy + y^2 = a - 2b \\ (x - y)^2 = a - 2b \\ x - y = \pm \sqrt{a - 2b}. \end{array}$$

Nüüd moodustame järgmised võrrandisüsteemid:

$$\begin{cases} x + y = +\sqrt{a + 2b} \\ x - y = +\sqrt{a - 2b} \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b} \\ x - y = -\sqrt{a - 2b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = +\sqrt{a + 2b} \\ x - y = -\sqrt{a - 2b} \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b} \\ x - y = +\sqrt{a - 2b}. \end{cases}$$

Neid süsteeme lahendades saame algsüsteemile neli lahendit:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{2} \\ y_1 = \frac{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{-\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}{2} \\ y_2 = \frac{-\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}{2} \\ y_3 = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{-\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{2} \\ y_4 = \frac{-\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}{2} \end{cases}$$

Antud võrrandisüsteemi lahenduvus oleneb diskriminandidist $a \pm 2b$.

1. Kui $a < 0$, siis võrrandisüsteemil lahendeid ei ole, ükskõik milline on arvu b absoluutväärtus ja märk. See kehtib ka siis, kui

$$a = 0 \text{ ja } b \neq 0.$$

2. Kui $a > 0$ ja seejuures

a) $a > 2|b|$, siis on võrrandisüsteemil neli lahendit;

b) $a = 2|b|$, siis saame kaks lahendit,

c) $a < 2|b|$, siis võrrandisüsteemil lahendeid ei ole.

Ülesanded.

Lahendada võrrandisüsteemid:

139. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ xy = 7 \end{cases}$

139. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 53 \\ xy = 14 \end{cases}$

140. $\begin{cases} x^2 + 5xy + y^2 = 25 \\ xy = 3 \end{cases}$

140. $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 31 \\ xy = 6 \end{cases}$

141. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

141. $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 118 \\ x^2 - 5xy + y^2 = 37 \end{cases}$

142. $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = b^2 \end{cases}$

142. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ xy = b^2 \end{cases}$

143. $\begin{cases} (x+y)^2 + (x-y)^2 = 4a^2 \\ xy = a^2 \end{cases}$

143. $\begin{cases} (x+y)^2 + (x-y)^2 = 82a^2 \\ x^2 + xy + y^2 = 61a^2 \end{cases}$

Ülesanne 5. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 754 \\ x + y = 38. \end{cases}$$

Lahendus. Antud süsteemi võrranditest saame määrata otsitavate korrutise. Selleks tõstame teise võrrandi pooled ruutu:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= 38^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 &= 1444. \end{aligned}$$

Saadud võrrandi pooltest lahutame süsteemi esimese võrrandi pooled:

$$\begin{array}{r} x^2 + 2xy + y^2 = 1444 \\ x^2 + y^2 = 754 \\ \hline 2xy = 690. \end{array}$$

Lahutame nüüd süsteemi esimese võrrandi pooltest viimase tuletatud võrrandi pooled:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 754 \\ 2xy = 690 \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 = 64 \\ (x - y)^2 = 64 \\ x - y = \pm 8, \end{array}$$

ehk, lahus kirjutades:

$$\begin{aligned} x - y &= 8; \\ x - y &= -8. \end{aligned}$$

Lahendades nüüd süsteemid

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ x - y = 8 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x + y = 38 \\ x - y = -8 \end{cases}$$

saame algsüsteemile kaks lahendit:

$$\begin{cases} x_1 = 23 \\ y_1 = 15 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x_2 = 15 \\ y_2 = 23. \end{cases}$$

Ülesanne 6. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = b. \end{cases}$$

Lahendus. Antud süsteemist määrame otsitavate korrutise sel teel, et astendame lineaarse võrrandi pooled 2-ga ja tulemusest lahutame ruutvõrrandi vastavad pooled. Edasi lahendame, nagu eelmiste ülesannete lahendustes näidatud.

Samalaadselt saame lahendada võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x - y = b. \end{cases}$$

Ülesanded.

Lahendada võrrandisüsteemid:

$$144. \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$144. \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases}$$

$$145. \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

$$145. \begin{cases} x(x + 1) + y(y + 1) = a^2 \\ x + y = b \end{cases}$$

$$146. \begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 134 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

$$146. \begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

$$147. \begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$147. \begin{cases} x^2 + y^2 = 53a^2 \\ x - y = 5a \end{cases}$$

$$148. \begin{cases} x(x + 1) + y(y - 1) = 194 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

$$148. \begin{cases} x(x + a) + y(y + a) = 36a^2 \\ x + y = 7a \end{cases}$$

Ülesanne 7. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 + x + y = 54 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Lahendus. Tähistades otsitava x -i väärtuse avaldisega $2t$, saame otsitava y -i väärtuseks $3t$, nagu ütleb teine võrrand; niisiis

$$x = 2t$$

$$y = 3t.$$

Nüüd on otsitavad x ja y avaldatud uue otsitava ehk abiotsitava t kaudu.

Kui need abiotsitavaga avaldised paneme antud süsteemi esimesse võrrandisse x -i ja y -i asemele, siis saame ühe otsitavaga võrrandi:

$$2 \cdot (2t)^2 - 2t \cdot 3t + (3t)^2 + 2t + 3t = 54;$$

$$2 \cdot 4t^2 - 6t^2 + 9t^2 + 2t + 3t = 54;$$

$$11t^2 + 5t - 54 = 0;$$

siit leiame, et

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = -\frac{27}{11}.$$

Seega algüsteemi lahendid on

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{54}{11} \\ y_2 = -\frac{81}{11}. \end{cases}$$

Ülesanne 8. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ \frac{x}{y} = \frac{m}{n}. \end{cases}$$

Lahendus. Rakendame abiotsitava võtet. Võtame abiotsitavaks t ; olgu

$$x = mt \text{ ja seega teise võrrandi põhjal } y = nt.$$

Asetame need väärtused mt ja nt esimesse võrrandisse x -i ja y -i asemele, siis saame uue võrrandi ühe otsitavaga.

Niisiis

$$am^2t^2 + bmnt^2 + cn^2t^2 + dmt + cnt + f = 0;$$

$$(am^2 + bmn + cn^2)t^2 + (dm + cn)t + f = 0.$$

See on otsitava t suhtes ruutvõrrand.

Ruutvõrrandi lahendusvalemi abil leiame siit t väärtused.

Tähistame leitud t väärtused järgmiselt:

$$\begin{aligned}t_1 &= k_1 \\ t_2 &= k_2.\end{aligned}$$

Siis antud võrrandisüsteemi lahenditeks on

$$\begin{cases} x_1 = mk_1 \\ y_1 = nk_1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = mk_2 \\ y_2 = nk_2. \end{cases}$$

Nagu näeme, antud võrrandisüsteemil on kaks lahendit või mitte ühtegi.

Ülesanded.

Lahendada võrrandisüsteemid:

$$149. \begin{cases} x^2 + y^2 = 117 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$149. \begin{cases} x^2 - y^2 = 225 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$150. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 333 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$150. \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1900 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$151. \begin{cases} 2x^2 + 3xy + 5y^2 + 4x + 7y = 726 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$151. \begin{cases} 5x^2 - 8xy + 3y^2 - 2x + 9y = 320 \\ \frac{x}{y} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$152. \begin{cases} ax^2 - xy + y^2 = a^4 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$152. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19a^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Otsitavate jagatise $\frac{x}{y}$ saame leida ka siis,

1. kui võrde $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ asemel on antud mõni tuletatud võrre; näiteks võrdest $\frac{x+y}{x-y} = \frac{m}{n}$ leiame, et $\frac{x}{y} = \frac{m+n}{m-n}$;

2. kui üks antud võrrandeist omab kuju

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0;$$

jagades siin iga liikme y^2 -ga, saame

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\left(\frac{x}{y}\right) + c = 0.$$

Lahendades saadud ruutvõrrandi $\frac{x}{y}$ suhtes, leiamegi $\frac{x}{y}$ väärtused.

Võrrandit, nagu $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, nimetatakse homogeenseks, mis tähendab, et kõik tema liikmed on ühe ja sama astmelised.

Ülesanne 9. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 4x^2 - 7xy + 3y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 50. \end{cases}$$

Lahendus. Jagame esimese võrrandi iga liikme y^2 -ga:

$$4\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 7\frac{x}{y} + 3 = 0.$$

Olgu $\frac{x}{y} = z$, siis

$$4z^2 - 7z + 3 = 0.$$

Siit leiame, et

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8} = \frac{7 \pm 1}{8};$$

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{3}{4}$$

ehk

$$\frac{x}{y} = 1 \text{ või } \frac{x}{y} = \frac{3}{4}.$$

Nüüd lahendame antud süsteemi asemel süsteemid

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

nagu näidisülesande 7.

Esimese süsteemi lahendamine:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t \\ t^2 + t^2 &= 50 \\ 2t^2 &= 50 \\ t^2 &= 25 \\ t_1 &= 5 \\ t_2 &= -5. \end{aligned}$$

Teise süsteemi lahendamine:

$$\begin{aligned} x &= 3u \\ y &= 4u \\ 9u^2 + 16u^2 &= 50 \\ 25u^2 &= 50 \\ u^2 &= 2 \\ u_1 &= \sqrt{2} \\ u_2 &= -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Seega algsüsteemi lahendid on

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 5 \end{cases} & \quad \begin{cases} x_3 = 3\sqrt{2} \\ y_3 = 4\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -5 \end{cases} & \quad \begin{cases} x_4 = -3\sqrt{2} \\ y_4 = -4\sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ülesanded.

Lahendada võrrandisüsteemid:

$$153. \begin{cases} x^2 + y^2 = 148 \\ \frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$153. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 57 \\ \frac{x-y}{x+y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$154. \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 124 \\ \frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{4} \end{cases} \quad 154. \begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 1107 \\ \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{9} \end{cases}$$

$$155. \begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \\ 3x^2 + 7y^2 = 76 \end{cases} \quad 155. \begin{cases} 3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0 \\ 2x^2 - 5y^2 = 13 \end{cases}$$

Ülesanne 10. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6 \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = -12. \end{cases}$$

Lahendus. Rakendame abiotsitava meetodit:

$$\frac{1}{x} = u; \quad \frac{1}{y} = v.$$

$$\begin{cases} u + v = 6 \\ u^2 - v^2 = -12. \end{cases}$$

Jagame teise võrrandi pooled esimese võrrandi pooltega, saame

$$\frac{u^2 - v^2}{u + v} = -\frac{12}{6} \quad \text{ehk} \quad u - v = -2.$$

Nüüd lahendame süsteemi

$$\begin{cases} u + v = 6 \\ u - v = -2, \end{cases}$$

millest leiame, et

$$u = 2 \quad \text{ja} \quad v = 4.$$

Seega $\frac{1}{x} = 2$ ja $\frac{1}{y} = 4$, millest

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Ülesanne 11. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = m \\ cx^2 + dy^2 = n. \end{cases}$$

Lahendus. Kui võrrandisüsteem sisaldab ainult otsitava ruutusid, ka siis abiotsitavaid kasutades ruutvõrrandisüsteemi lahendamine taandub lineaarse võrrandisüsteemi lahendamiseks.

Tähistame x^2 ja y^2 vastavalt tähtedega u ja v , nii et

$$x^2 = u \text{ ja } y^2 = v.$$

Asetades need uued otsitavad algvõrrandisüsteemi, saame

$$\begin{cases} au + bv = m \\ cu + dv = n. \end{cases}$$

See on u ja v suhtes lineaarne võrrandisüsteem; seda lahendades leiame u ja v väärtused.

Tähistame leitud u ja v väärtused vastavalt tähtedega g ja h , siis on

$$x^2 = g \text{ ja } y^2 = h.$$

Siit leiame, et

$$x = \pm \sqrt{g} \text{ ja } y = \pm \sqrt{h}.$$

Nagu näeme, antud võrrandisüsteemil on lahendid ainult siis, kui g ja h ei ole negatiivsed, ning lahendid on järgmised:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{g} \\ y_1 = \sqrt{h} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \sqrt{g} \\ y_2 = -\sqrt{h} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -\sqrt{g} \\ y_3 = \sqrt{h} \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\sqrt{g} \\ y_4 = -\sqrt{h}. \end{cases}$$

Üldist ruutvõrrandisüsteemi lahendamise juhust ei ole võimalik anda. Üldiselt võib ainult niipalju öelda, et kui üks antud süsteemi võrrandeist on lineaarne, siis sellest lineaarsest võrrandist saab alati avaldada ühe otsitava teise kaudu. Saadud avaldise teise võrrandisse asetades saame teise otsitava leidmiseks ruutvõrrandi.

Ülesanded.

Lahendada võrrandisüsteemid:

$$156. \quad \begin{cases} 3x + 4y = 37 \\ xy = 28 \end{cases}$$

$$156. \quad \begin{cases} xy + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

$$157. \begin{cases} x^2 + y^2 + 3x + y = 20 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad 157. \begin{cases} 5xy - 3x = 84 \\ 2x + 7y = 35 \end{cases}$$

$$158. \begin{cases} (x+2)^2 + (y+3)^2 = 32 \\ 5x + 4y = 14 \end{cases}$$

$$158. \begin{cases} x^2 + y^2 + x - 5y = 24 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$159. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$159. \begin{cases} (x-4)^2 - (y-5)^2 = 8 \\ 3x + 8y = 69 \end{cases}$$

$$160. \begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases}$$

$$160. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7 \\ \frac{1}{xy} = 12 \end{cases}$$

$$161. \begin{cases} 15x^2 - 8y^2 = 29 \\ 3x^2 + 2y^2 = 13 \end{cases}$$

$$161. \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$$

$$162. \begin{cases} \frac{x+y}{y} = a \\ 1 + \frac{xy}{a+1} = a^2 \end{cases}$$

$$162. \begin{cases} 2x^2 - 7y^2 = 8 \\ 4y^2 - 9x^2 = 19 \end{cases}$$

$$163. \begin{cases} \frac{x-y}{a+1} = a \\ x - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$163. \begin{cases} x - y = 2b \\ \frac{x}{a-b} = \frac{a+b}{y} \end{cases}$$

$$164. \begin{cases} xy + y^2 = 2a^2 - 6a \\ xy - y^2 = 6a - 18 \end{cases}$$

$$164. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{4ab}{a^2 - b^2} \\ \frac{1}{xy} = 1 \end{cases}$$

$$165. \begin{cases} 6x - 5y = 14 \\ xy = 72 \end{cases}$$

$$165. \begin{cases} xy - y^2 = n \\ xy - y = n^2 \end{cases}$$

166. Leida kaks arvu teades, et nende summa on 30 ja nende korrutis on 221.

166. Kahe arvu vahe on 74 ja korrutis on 4107. Millised arvud need on?

167. Ristküliku ümbermõõt on 32 cm, pindala aga on 60 cm². Arvutada ristküliku pikkus ja laius.

167. Täisnurkse kolmnurga kaatetite summa on 23 cm; selle kolmnurga pindala on 45 cm². Arvutada kaatetite pikkused.

168. Rööpküliku alus ületab kõrgust 5 cm võrra; rööpküliku pindala on 204 cm². Arvutada rööpküliku alus ja kõrgus.

168. Kahe arvu ruutude summa on 117, nende arvude korrutis on 54. Leida need arvud.

169. Täisnurkse kolmnurga kaatetite ruutude summa on 313, selle kolmnurga pindala on 78 cm². Arvutada kaatetite pikkused.

169. Leida kaks arvu teades, et nende summa on 18 ja nende ruutude summa on 194.

170. Kui ristküliku pikemat külge lühendada ja teist külge pikendada 5 cm võrra, siis saame ruudu. Kui aga pikemat külge pikendada 5 cm võrra ja teist külge sama palju lühendada, siis saame ristküliku pindalaga 512 cm². Leida ristküliku küljed.

170. Väljakul on ristküliku kuju; kui teda lühendada ja laiendada 12 m võrra, siis saab väljak ruudu kuju; kui teda aga pikendada 12 m võrra ja sama palju kitsendada, siis saame väljaku pindalaga 15 049 m². Kui pikk ja kui lai on väljak?

171. Kaks punkti liiguvad täisnurga haarasid mööda nurga tipu poole, üks kiirusega 49 cm ja teine kiirusega 72 cm sekundis. Liikumise alguses on nende punktide vaheline kaugus 205 cm; 2 sekundi pärast on nende vahemaa aga 37 cm. Kui kaugel oli kumbki punkt nurga tipust liikumise alguses?

171. Kaks punkti liiguvad täisnurga haarasid mööda nurga tipu poole. Ühel silmapilgul on üks neist nurga

tipust 60 m kaugusel ja teine 80 m kaugusel; 3 sekundit hiljem on nende punktide vaheline kaugus 70 m, veel 2 sekundit hiljem on nende vahemaa 50 m. Leida nende punktide liikumise kiirused.

172. Kaks Nõukogude armee ratsaväelast ratsutavad 2,8 km pikkusel sõidurajal. Esimesel kulub kogu sõiduraja läbisõitmiseks 5 minutit vähem kui teisel. Kui kumbki igas sekundis 1 m võrra rohkem sõidaks, siis kuluks esimesel kogu sõiduraja läbisõitmiseks $3\frac{1}{2}$ minutit vähem aega kui teisel. Missuguse kiirusega ratsutavad ratsurid?

172. Õlipaaki, mille maht on 1260 liitrit, saab täita kahe toru kaudu. Esimese toru kaudu saab paak 40 minuti võrra lühema ajaga täis kui teise kaudu. Kui esimese toru kaudu tuleks minutis 1 liiter rohkem ja teise kaudu 1 liiter vähem, siis kuluks paagi täitmiseks esimese toru kaudu 1 tund 24 minutit vähem aega kui teise toru kaudu. Mitu liitrit minutis voolab kummagi toru kaudu?

173. Leida kahekohaline arv, mille ristsumma on 39 võrra väiksem kui numbrite korrutis, kuid numbrite ruutude summa on 102 võrra suurem kui ristsumma.

173. Kui kahekohaline arv jagada tema numbrite korrutisega, siis jagatis on 9 ja jääk on 10. Kui arvu numbrid ümber paigutada ja sel teel saadud arv jagada numbrite korrutisega, siis jagatis on 2 ja jääk on 1. Leida see arv.

Peatükk II.

ASTE.

§ 4. Astendamine.

Nagu teada, korrutist

$$a \cdot a \cdot a \cdots a,$$

milles arv a esineb tegurina n korda, tähistatakse sümboliga

$$a^n$$

ja nimetatakse arvu a n -ndaks astmeks. Nii et

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ tegurit}} = a^n.$$

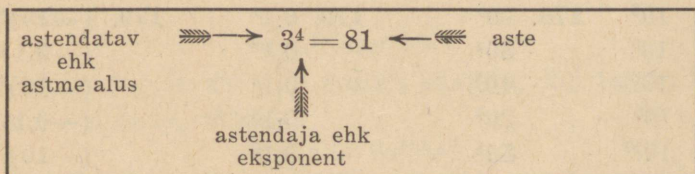
Seejuures arvu a nimetatakse astendatavaks ehk astme aluseks ja arvu n astendajaks ehk eksponentiks.

Näiteks

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81;$$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32;$$

$$0,2^3 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008.$$



Eespool-öeldust järeldub, et

astendamine on võrdsetest teguritest koosneva korrutise arvutamine.

Negatiivsete arvude korrutamise juhiseist järeldame, et negatiivse arvu paarisarvulise astendajaga aste on positiivne ja paarituuravulise astendajaga aste on negatiivne.

Näiteks

$$(-4)^2 = 16;$$

$$(-4)^3 = -64;$$

$$(-a)^{2n} = a^{2n}, \text{ sest } 2n \text{ on paarisarv;}$$

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}, \text{ sest } 2n-1 \text{ on paaritu arv.}$$

Astme definitsioonist on näha, et astendajaks võib olla iga positiivne täisarv, mis on suurem kui 1. Erijuhul, kui astendaja $n=1$, mõistame astet a^n arvu a endana:

$$a^1 = a.$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised astmed:

174.	2^6	174.	$(-2)^2$	175.	$0,2^2$	175.	$(-0,9)^4$
	2^{10}		$(-2)^3$		$0,3^2$		$(-0,02)^5$
	3^5		$(-2)^6$		$0,4^3$		$(-0,1)^6$
	4^5		$(-3)^5$		$0,5^3$		$(-1,1)^3$
	5^5		$(-6)^4$		$0,01^4$		$(-1,2)^4$
176.	56^2	176.	$(-12)^2$	177.	$(-a)^2$	177.	$(-a)^3$
	$4,3^3$		$(-17)^3$		$(-b)^5$		$(-b)^6$
	$1,7^4$		$(-4,2)^4$		$(-n)^8$		$(-n)^9$
	$0,03^4$		$(-8,1)^5$		$(-a)^9$		$(-a)^{10}$
	$1,02^5$		$(-0,2)^6$		$(-m)^{10}$		$(-m)^{11}$
178.	10^3	178.	20^2	179.	$0,1^2$	179.	$(-10)^8$
	10^5		30^4		$0,1^3$		$(-0,1)^5$
	10^6		40^3		$0,1^5$		$(-10)^{10}$
	10^9		20^5		$0,1^6$		$(-0,1)^9$
	10^{12}		50^4		$0,1^9$		$(-10)^7$

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

<p>180. $10^3 + 10^2 + 1$ $3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4$ $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$ $8 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10 + 1$ $9 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^2 + 7$</p>	<p>180. $10^5 + 10^2 + 1$ $4^5 + 4^3 + 4^1$ $1,3^3 + 1,3^2 + 1,3$ $0,8^4 + 0,8^3 + 0,8^2 + 0,8$ $0,1^4 + 0,1^3 + 0,1^2 + 0,1$</p>
---	--

181. $(-6)^2 + (-4)^3 + (-2)^5$
 $7^2 + (-5)^3 + (-1)^{10}$
 $(-1)^1 + (-2)^2 + (-3)^3$
 $1^4 \cdot 2^5 \cdot 3^6$
 $(-1)^{10} \cdot (-2)^5 \cdot (-3)^4$

Lihtsustada järgmised avaldised:

<p>182. $(+a)^{2n}$ $(-b)^{2n}$ $(-c)^{2n+1}$ $(-x)^{2n}$ $(-x)^{2m-1}$</p>	<p>182. $(+2)^3 \cdot (-3)^2$ $(+4)^2 \cdot (+5)^3$ $(-3)^3 \cdot (+2)^2$ $(-4)^4 \cdot (-2)^2$ $(-1)^5 \cdot (-2)^3$</p>
--	--

§ 5. Korrutise astendamine ja võrdsete astendajatega astmete korrutamine.

Tõstame korrutise ab n -ndasse astmesse. Rakendades korrutamise seadusi, saame:

$$\begin{aligned}
 (ab)^n &= \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdots (ab)}_{n \text{ teguripaari}} = \\
 &= \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdots b)}_{n \text{ tegurit}} = \\
 &= a^n b^n.
 \end{aligned}$$

Seega siis

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Endastmõistetavalt jääb arutelu samaks, kui tegureid on rohkem kui kaks, näiteks.

$$(2abc)^3 = 8a^3b^3c^3.$$

Lühidalt sõnastame korrutise astendamise juhise nõnda:

korrutise astendamisel astendatakse iga tema tegur ja saadud astmed korrutatakse.

Kui vahetame võrduse $(ab)^n = a^n b^n$ pooled, siis saame valemi võrdsete astendajatega astmete korrutamiseks:

$$a^n b^n = (ab)^n,$$

mida võime sõnastada järgmiselt:

võrdsete astendajatega astmete korrutamisel astendatavad korrutatakse ja saadud korrutis astendatakse antud astendajaga.

Näited:

1. $5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4 = 10\,000$;
2. $2,5^3 \cdot 8^3 = (2,5 \cdot 8)^3 = 20^3 = 8000$.

Ülesanded.

Arendada järgmised astmed:

- | | | | |
|------|-------------------|------------|--------------|
| 183. | $(4 \cdot 1,5)^2$ | $(4n)^3$ | $(-0,3Nu)^4$ |
| | $(2 \cdot 5)^5$ | $(5mn)^3$ | $(-2h)^4$ |
| 183. | $(4,5 \cdot 2)^3$ | $(-4uv)^4$ | $(-3ad)^5$ |
| | $(5 \cdot 4)^3$ | $(2ax)^3$ | $(-4cm)^3$ |

Leida lihtsaimal viisil järgmiste avaldiste väärtused:

- | | | | |
|------|-------------------|---|--|
| 184. | $2^3 \cdot 5^3$ | $3^2 \cdot \left(3\frac{1}{3}\right)^2$ | $(35 \cdot 3)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2$ |
| | $5^4 \cdot 2^4$ | $6^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$ | $(42 \cdot 81)^3 \cdot \left(\frac{1}{21 \cdot 27}\right)^3$ |
| 184. | $45^2 \cdot 2^2$ | $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^4$ | $78^2 \cdot \left(\frac{1}{3,9}\right)^2$ |
| | $2,5^5 \cdot 4^5$ | $\left(5\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(3\frac{3}{4}\right)^2$ | $4^3 \cdot 8^3 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^3$ |

§ 6. Jagatise astendamise ja võrdsete astendajatega astmete jagamine.

Tõstame n -ndasse astmesse jagatise $\frac{a}{b}$. Rakendades siinjuures murdude korrutamise juhust, saame

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ tegurit}} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdots a}{b \cdot b \cdot b \cdots b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Niisiis

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Saadud tulemuse sõnastame nõnda:

murru astendamisel astendatakse tema lugeja ning nimetaja ja esimene saadus jagatakse teisega.

Näited:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{3}\right)^4 &= \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}; \\ \left(-1\frac{1}{2}\right)^3 &= \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8}; \\ \left(\frac{2a}{5b}\right)^2 &= \frac{4a^2}{25b^2}. \end{aligned}$$

Kui vahetame võrduse $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ pooled, siis saame juhise võrdsete astendajatega astmete jagamiseks:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

mida sõnastame nõnda:

võrdsete astendajatega astmete jagamisel astendatav jagatavas jagatakse astendatavaga jagajas ja tulemus astendatakse antud astendajaga.

Näited:

1. $24^2 : 12^2 = (24 : 12)^2 = 4;$
2. $\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27;$
3. $\frac{(6ab)^5}{(3b)^5} = \left(\frac{6ab}{3b}\right)^5 = (2a)^5 = 32a^5.$

Ülesanded.

Arendada järgmised astmed:

<p>185. $\left(\frac{5}{6}\right)^2$</p> <p>$\left(-\frac{4}{5}\right)^3$</p> <p>$\left(-\frac{6}{7}\right)^4$</p> <p>$\left(\frac{1}{2}\right)^6$</p> <p>$\left(-\frac{3}{7}\right)^2$</p>	<p>185. $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$</p> <p>$\left(-3\frac{1}{3}\right)^2$</p> <p>$\left(-5\frac{2}{3}\right)^3$</p> <p>$\left(4\frac{1}{4}\right)^2$</p> <p>$\left(-3\frac{2}{3}\right)^3$</p>	<p>186. $\left(-\frac{4a}{7b}\right)^2$</p> <p>$\left(\frac{4x}{7y}\right)^2$</p> <p>$\left(-\frac{2x}{3a}\right)^2$</p> <p>$\left(\frac{5aQ}{6cR}\right)^3$</p> <p>$-\left(\frac{0,2cn}{0,5d}\right)^4$</p>	<p>186. $\left(-\frac{7am}{8bn}\right)^3$</p> <p>$\left(-\frac{er}{4d}\right)^5$</p> <p>$\left(-\frac{3h}{5mn}\right)^3$</p> <p>$\left(-\frac{0,7anx}{0,01bz}\right)^2$</p> <p>$\left(-\frac{3ad}{4cm}\right)^4$</p>
--	---	---	---

Leida lihtsaimal viisil järgmiste avaldiste väärtused:

187. $16^3 : 4^3$	$\left(\frac{5}{7}\right)^2 : \left(\frac{25}{21}\right)^2$	$\frac{2^4 \cdot 3^4}{12^4}$
$69^2 : 23^2$	$\left(2\frac{1}{3}\right)^4 : \left(3\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{15^2 \cdot 4^2}{8^2 \cdot 5^2}$
187. $160^3 : 640^3$	$2,25^2 : 0,45^2$	$\left(1\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{2^5}{5^5}$
$24^3 : 16^3$	$0,72^3 : 2,4^3$	$\frac{2^{10} \cdot 6^{10}}{3^{10} \cdot 4^{10}}$

§ 7. Võrdsete alustega astmete korrutamine ja jagamine. Astme astendamine.

Võrdsete alustega astmete korrutamisel astendajad liidetakse ja tulemusega astendatakse antud astendatav, ehk sümbolites

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Tõestus.

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{m \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ tegurit}} = a^{m+n}.$$

Näited:

$$8^2 \cdot 8^3 = 8^{2+3} = 8^5;$$

$$a^3 \cdot a^7 = a^{3+7} = a^{10}.$$

Võrdsete alustega astmete jagamisel astendaja jagajas lahutatakse astendajast jagatavas, kui viimane astendaja on eelmisest suurem, ja tulemusega astendatakse antud astendatav,

ehk sümbolites:

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ kui } m > n.$$

Viimase võrduse kehtivuse tõestamiseks rakendame jagatise kontrollimise juhust — jagatis on arv, mis jagajaga korrutamisel annab tulemuseks jagatava.

Niisiis:

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

Näited: $\frac{3^8}{3^5} = 3^8 - 5 = 3^3 = 27;$

$$a^7 : a^5 = a^{7-5} = a^2.$$

Astme astendamisel astendajad korrutatakse ja saadud korrutisega astendatakse antud astendatav.

Sümbolites väljendub viimane teoreem nii:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Tõestus.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots a^m}_{n \text{ tegurit}} = \overbrace{a^{m+m+m+\dots+m}}^{n \text{ liidetavat}} = a^{mn}.$$

Näited:

$$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2 = 2^6 = 64;$$

$$(2a^2b^5)^4 = 2^4 a^8 b^{12} = 16a^8 b^{12};$$

$$(a^3 + a^4)^2 = a^3 \cdot 2 + 2a^{3+4} + a^4 \cdot 2 = a^6 + 2a^7 + a^8.$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised korrutised astmetena:

188.	$x^2 \cdot x^3$	$c \cdot c^2 \cdot c^3$	$x^{m+1} x^{m+2}$
	$n^5 \cdot n^2$	$d^2 \cdot d^4 \cdot d^6$	$y^n + 3y^{2n-1}$
188.	$h^3 \cdot h^3$	$u \cdot u^5 \cdot u$	$u^r u^{2r} u^{3r}$
	$q^4 \cdot q^5$	$n \cdot n^2 \cdot n^3 \cdot n^4 \cdot n^5$	$v^{q+2} v^{3q-3}$

Kirjutada järgmised korrutised võimalikult lühidalt:

189.	$x \cdot 3x$	189.	$h \cdot 0,1h \cdot 0,2h$
	$5A \cdot 4A$		$6x \cdot 0,4x^2 \cdot 0,1x^3$
	$3u \cdot 5u^2$		$0,1D \cdot (-0,2D^2) \cdot 0,3D^3$
	$(-6r^2) \cdot 7r^3$		$c \cdot 3\frac{1}{2}c \cdot \frac{2}{7}c^4$
	$aN^4 \cdot bN^3$		$(-\frac{3}{5}w^2) \cdot 2\frac{1}{2}w^2 \cdot (-\frac{2}{3}w^2)$

Kirjutada järgmised jagatised astmetena:

190.	$n^8 : n^5$	$f^4 : f^2$	$x^{3m} : x^m$
	$q^6 : q$	$h^{10} : h^7$	$y^{2n} : y$
190.	$a^{11} : a^{10}$	$q^{n+3} : q^n$	$u^{2p+1} : u^{2p-1}$
	$r^4 : r^4$	$d^{m+1} : d^{n+1}$	$v^{4p-1} : v^{4p-4}$

Kirjutada järgmised jagatised võimalikult lühidalt:

191.	$\frac{96x^{m+3}y^{n+1}}{24x^{m+1}y^{n-1}}$	191.	$42a^5b^7 : 14a^4b^3$
	$\frac{a^{2n}b^{5m}}{a^nb^{3m}}$		$51p^6q^3 : 17p^2q$
	$\frac{u^{3n+3}v}{u^{2n+1}v^{3m-2}}$		$3,6x^6y^5z^8 : 5,6x^2y^3z^4$
	$\frac{x^{m+8}y^{n-5}}{x^{m-2}y^{n-7}}$		$7n^{2q} : 0,14n^{q-3}$
	$\frac{a^{2n+2}}{b^{n-4}} : \frac{a^{n+3}}{b^{3n-1}}$		$1,72m^{p+6} : 4,3m^{p+2}$

Arendada järgmised astmed:

192.	$(4a)^3$	$(-0,3Nu)^4$	$(-3aD)^5$
	$(3mn)^3$	$(-2h)^4$	$(-4cmq)^3$
192.	$(\frac{4z^2}{7u^3})^4$	$(-\frac{0,2cU}{0,5d})^4$	$(-\frac{c^2r^2}{4d^4})^5$
	$(-\frac{2x^3}{3a^4})^2$	$(-\frac{0,7anx}{0,01bz})^2$	$(-\frac{3h^3}{5mnw})^3$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult väheste sümboolitega:

193.	$(3a)^2 \cdot (2a)^3$	193.	$(-25f)^3 : (5f)^2$
	$(-N^3) \cdot (2N)^5$		$(96ax)^4 : (16x)^4$
	$(4u^2)^2 \cdot (-u^3)^3$		$(63cN)^2 : (243c)^2$
	$\left(\frac{D}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{a}{D}\right)^4$		$(36nD)^5 : (-81D)^5$
	$\left(-\frac{2}{3}q\right)^3 \cdot (6q)^2$		$\left(\frac{1}{2}L\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^4 L^4$

Arendada järgmised astmed:

194.	$(m^2)^3$	$(D^3)^2$	$\left(\frac{m}{2n}\right)^2$
	$(a^4)^5$	$(3q^2)^2$	$\left(\frac{2a^3}{3x^2}\right)^2$
194.	$(u^{2n})^3$	$(0,1H^3)^3$	$\left(\frac{au^2}{bv^2}\right)^4$
	$(Q^2)^{n+1}$	$(0,7x^2)^4$	$\left(\frac{cH^2}{10}\right)^5$

Lihtsustada järgmised avaldised:

195.	$\left(\frac{2x^3}{3}\right) \cdot \left(\frac{6x}{5a}\right)^2$	195.	$\left(-\frac{1}{N}\right)^3 : \left(\frac{N}{2}\right)^3$
	$\left(-\frac{4m}{5n}\right)^3 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^4$		$\frac{3}{4}\left(\frac{a}{x}\right)^2 : \frac{3}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^2$
	$\left(\frac{7u}{4v}\right)^4 \cdot \left(\frac{2Nv}{7u}\right)^3$		$\left(\frac{4c}{5D^2}\right)^2 : \left(\frac{0,2}{D^3}\right)^2$
196.	$(ax)^m : (bx)^m$	196.	$(8Nu)^{2a-1} : (-2u)^{2a-1}$
	$(3cu)^n : (cdu)^n$		$\left(\frac{2p}{3q}\right)^{2n+1} : \left(-\frac{3q}{2p}\right)^{2n+1}$
	$(-pqr)^{2t} : (-pq^{2t})$		$\left(\frac{a^2}{5Q}\right)^{2m} : \left(\frac{5a}{Q}\right)^{m+2}$
197.	$\frac{2}{5}L^n \cdot \frac{3}{2}L \cdot 6L^3$	197.	$\frac{1}{4}x^p \cdot \frac{4}{5}x^{p+2} \cdot \frac{2}{5}x^{2p+1}$
	$u^a \cdot u^{a+b} \cdot u^{a+b+c}$		$7H^m \cdot 0,2H^{m+1} \cdot 0,5H^{m+2}$
	$D^n \cdot D^{n-m} \cdot D^{m-p}$		$N^{x+2} \cdot N^{x-3} \cdot N^{2-2x}$

Arendada järgmised korrutised:

- | | | | |
|------|---|------|--|
| 198. | $(a^2 + a^4) \cdot (a + a^3)$ | 198. | $(a^6 - a^5) \cdot (a^5 + a^4)$ |
| 199. | $(u^3 + v^2) \cdot (u^3 - v^2)$ | 199. | $(2p^4 + 5q^3) \cdot (2p^4 - 5q^3)$ |
| 200. | $(x^2 - \frac{1}{x^2}) \cdot (x^3 + \frac{1}{x^3})$ | 200. | $(2s^3 + \frac{1}{t^3}) \cdot (s^3 - \frac{1}{t^3})$ |

Arendada järgmised binoomide astmed:

- | | | | |
|------|---------------------------|------|---|
| 201. | $(a^2 + b^2)^2$ | 201. | $(a^3 - b^3)^2$ |
| 202. | $(a^4 - a^2)^2$ | 202. | $(a^m + a^n)^2$ |
| 203. | $(3x^3 - 5x^5)^2$ | 203. | $(m^2n^3 + m^3n^2)^2$ |
| 204. | $(x^{m+1} - x^{m-1})^2$ | 204. | $(y^{2n} + y^n)^2$ |
| 205. | $(t^2 - \frac{1}{t^2})^2$ | 205. | $(a^2 + b^2)^3$ |
| 206. | $(a^3 - b^3)^3$ | 206. | $(m^3 + m^2)^3$ |
| 207. | $(u^{2m} - u^m)^3$ | 207. | $(\frac{p^2}{q^4} + \frac{q^3}{p^5})^3$ |

§ 8. Hulklikme ruut.

Lähtudes kahe arvu summa ruudu valemist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

saame tuletada valemi kolme arvu summa ruudu arvutamiseks. Lugeses avaldises $a + b + c$ kahe esimese liikme summa $(a + b)$ üheks arvuks, võime kahe arvu summa ruudu valemi põhjal kirjutada:

$$\begin{aligned} [(a + b) + c]^2 &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2. \end{aligned}$$

Võrreldes kahe arvu summa ruutu kolme arvu summa ruuduga näeme, et viimases on kahe arvu summa ruudule lisaks tulnud kahe eelmise arvu summa ja kolmanda arvu kahekordne korrutis ja veel kolmanda arvu ruut.

Sama arutlusviisi rakendades saame tuletada valemi nelja arvu summa ruudu arvutamiseks. Nimelt, lugeses avaldises $a + b + c + d$ kolme esimese arvu summa $(a + b + c)$ üheks

arvuks, võime jälle kahe arvu summa ruudu valemi põhjal kirjutada:

$$[(a + b + c) + d]^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2.$$

Eelviimase võrduse põhjal võime viimase võrduse kirjutada järgmiselt:

$$[(a + b + c) + d]^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2.$$

Võrreldes nüüd kolme arvu summa ruudu avaldist nelja arvu summa ruuduga näeme, et eelmisele on lisaks tulnud kolme eelmise arvu summa ja neljanda arvu kahekordne korrutis ja neljanda arvu ruut.

Seda arutusviisi jätkates võime saada mitme tahes arvu summa ruudu valemi, teiste sõnadega, niiviisi võime tuletda mistahes hulkliikme ruudu valemi.

Kui eelmistes arendites avame sulud ja liikmed vastavalt rühmitame, siis saame

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$$
$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Kokkuvõttes võime hulkliikme ruutumise juhise sõnastada nõnda:

hulkliikme ruudu saamiseks tuleb iga tema liige ruutu tõsta; peale selle tuleb paarikaupa korrutada iga liige temale järgneva iga liikmega, saadud korrutised korrutada kahega ja kõik tulemused liita.

Endastmõistetavalt võib hulkliikme ruudu avaldises esineda ka miinus-märke.

Hulkliikme ruudu märkide kohta kehtib arusaadavalt põhjusil järgmine juhise:

kõik hulkliikme liikmete ruudud ja samamärgiliste liikmete kahekordsed korrutised on positiivsed; vastasmärgiliste liikmete kahekordsed korrutised on negatiivsed.

Ülesanne 2. Väljendada avaldis $9x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 20x + 4$ järgmisel hulkliikme ruudu kujul: $(3x^2 + ax + b)^2$.

Lahendus. Arendame antud hulkliikme ruudu. Saame:

$$\begin{aligned}(3x^2 + ax + b)^2 &= 9x^4 + a^2x^2 + b^2 + 6ax^3 + 6bx^2 + 2abx = \\ &= 9x^4 + 6ax^3 + (a^2 + 6b)x^2 + 2abx + b^2.\end{aligned}$$

Kordajate a ja b väärtuste leidmisel lähtume seisukohast, et kui kaks polünoomi on võrdsed, siis peavad olema võrdsed nende vastavate liikmete kordajad ning vabaliikmed. Seejärest, kui

$$\begin{aligned}9x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 20x + 4 &= \\ = 9x^4 + 6ax^3 + (a^2 + 6b)x^2 + 2abx + b^2,\end{aligned}$$

siis

$$6a = -30, \text{ siit } a = -5;$$

$$a^2 + 6b = 37;$$

asendades siin a leitud väärtusega -5 , saame

$$25 + 6b = 37; \text{ siit } 6b = 12 \text{ ja } b = 2.$$

Kontrolliks võrdleme veel ülejäänud kordajaid:

$$2ab = 2 \cdot (-5) \cdot 2 = -20;$$

$$b^2 = 4.$$

Vastus.

$$9x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 20x + 4 = (3x^2 - 5x + 2)^2.$$

Ülesanne 3. Näidata, et polünoom

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 30x + 25$$

ei ole täisruut.

Lahendus. Oletame vastupidiselt, et on olemas hulkiige, mille ruut võrdub antud polünoomiga. Niisugune hulkiige peaks olema teiseastmeline, sest teiseastmeline liige annab ruutu tõstmisel neljandaastmelise liikme, nagu see antud polünoomis ongi.

Seega siis meie oletuse järgi

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 30x + 25 = (ax^2 + bx + c)^2.$$

Katsume nüüd leida a , b ja c .

$$(ax^2 + bx + c)^2 = a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2abx^3 + 2acx^2 + 2bcx = \\ = a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2.$$

Et polünoomide võrdumisel peavad vastavad kordajad olema võrdsed, siis peavad a , b ja c rahuldama viit võrrandit:

$$a^2 = 1, \quad 2ab = -6, \quad b^2 + 2ac = 9, \quad 2bc = -30 \quad \text{ja} \quad c^2 = 25.$$

Esimesest võrrandist saame, et

$$a = \pm 1.$$

Vaatleme esimest juhtu:

$$a = 1.$$

Edasi peab olema

$$2ab = -6; \text{ et } a = 1, \text{ siis } 2b = -6; \quad b = -3.$$

$$b^2 + 2ac = 9; \text{ et } b = -3, \text{ siis } 9 + 2ac = 9 \text{ ehk } 2ac = 0.$$

Korrutis on ainult siis null, kui vähemalt üks tegureist on null. Avaldises $2ac$ aga $2 \neq 0$ ja $a \neq 0$, sest eespool leidsime, et $a = 1$; seega $c = 0$.

Kui $a = -1$, siis saame võrrandist $2ab = -6$, järeldada, et $b = 3$.

Edasi peab olema

$$b^2 + 2ac = 9; \text{ et nüüd } b = 3 \text{ ja } a = -1, \text{ siis } 9 - 2ac = 9, \\ \text{millest } c = 0.$$

Nii saime esimesel juhul

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{cases} \text{ ja teisel } \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 0. \end{cases}$$

Kuid nende tulemusteni jõudmiseks kasutasime ainult kolme võrrandit neist viiest, mida peavad a , b ja c üheaegselt rahuldama. Seepärast tuleb nüüd kontrollida, kas ka neljas ja viies võrrand on rahuldatud, s. t. kas

$$2bc = -30 \text{ ja } c^2 = 25.$$

On näha, et need pole kummalgi juhul rahuldatud (sest $c = 0$). Järelikult ei saa olla niisugust hulkliiget, mille ruut võrduks antud polünoomiga, ehk lühidalt: see polünoom pole täisruut.

Näidata järgmiste näidete abil, et hulkliikme ruut ei muutu, kui enne ruutimist kõigi liikmete märgid muuta vastupidisteks.

$$217. \quad (2a^3 - a^2 - 3a + 1)^2 = (-2a^3 + a^2 + 3a - 1)^2$$

$$217. \quad (x^3 + 2x^2 - x - 1)^2 = (-x^3 - 2x^2 + x + 1)^2$$

218. Näidata, et polünoomi

$$4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 24x + 16$$

saab väljendada kujul $(2x^2 + ax + b)^2$.

219. Avaldada polünoom

$$x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12x + 4$$

kujul $(x^2 + ax + b)^2$.

219. Avaldada polünoom

$$x^4 + 10x^3 + 11x^2 - 70x + 49$$

kujul $(x^2 + ax + b)^2$.

220. Näidata, et

$$9x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 4x + 4$$

on täisruut.

220. Näidata, et

$$25x^4 - 20x^3 - 26x^2 + 12x + 9$$

on täisruut.

221. Näidata, et

$$x^4 - 10x^3 + 21x^2 + 10x + 4$$

ei ole täisruut.

221. Näidata, et

$$4x^4 + 16x^3 - 12x^2 - 8x + 1$$

ei ole täisruut.

Peatükk III.

JUUR.

§ 9. Juurimine.

Sümboliga $\sqrt[3]{a}$ tähistatakse arvu, mille kolmas aste on arv a . Näiteks

$$\sqrt[3]{1000} = 10, \text{ sest } 10^3 = 1000;$$

$$\sqrt[3]{-64} = -4, \text{ sest } (-4)^3 = -64;$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}, \text{ sest } \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}.$$

Arvu $\sqrt[3]{a}$ nimetatakse arvu a kuupjuureks ehk kolmandaks juureks.

Üldiselt arvu a n -ndaks juureks nimetatakse arvu, mille n -es aste on arv a .

Arvu a n -ndat juurt tähistatakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$. Nii on:

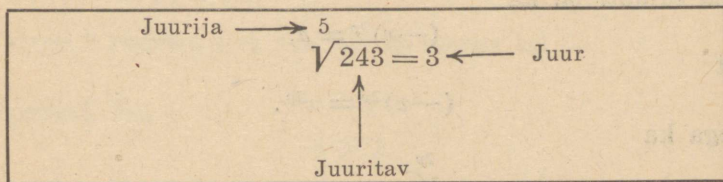
$$\sqrt[4]{2401} = 7, \text{ sest } 7^4 = 2401;$$

$$\sqrt[7]{-128} = -2, \text{ sest } (-2)^7 = -128;$$

$$\sqrt[5]{0,00243} = 0,3, \text{ sest } 0,3^5 = 0,00243.$$

n -nda juure leidmist mingist arvust nimetatakse selle arvu juurimiseks arvuga n . Juurimine on astendamise

pöördtehe. Astendamine seisab astme leidmises antud astendatava ja astendaja järgi, juurimine aga seisab selles, et antud astme a ja astendaja n järgi leitakse niisugune astendatav x , et $x^n = a$. Seega juur $\sqrt[n]{a}$ on otsitav astendatav x , kui on antud aste a ja astendaja n . Sel puhul astet a ehk arvu, mida juuritakse, nimetatakse juuritavaks ja astendajat n ehk arvu, millega juuritakse — juurijaks.



Juure definitsiooni järgi juurel $\sqrt[n]{a}$ on n -es aste võrdne juuritavaga a . Seega juure definitsiooni järeldusena saame samasuse:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Juure definitsioonist järeldub ka samasus:

$$\sqrt[n]{a^n} = a,$$

sest arv, mille n -es aste on a^n , on a .

Juurija n võib olla kas paarisarv või paaritu arv. Kui n on paarisarv, siis peab juuritav a olema positiivne arv; tõepoolest, võrduse

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

vasak pool on paarisarvulise n -i puhul ikka positiivne arv, millest järeldub, et ka a on positiivne arv. Seega

negatiivsetel arvudel ei ole paarisarvuliste juurijatega juuri.

Negatiivsetel arvudel on paarituarvulise juurijaga juur negatiivne, sest positiivse arvu või nulli astendamine ei annaks negatiivseid arve.

Juure definitsioonist järeldub, et sümbolil $\sqrt[n]{a}$ on esialgu kaks tähendust, kui a on positiivne ja n on paarisarv.

Tõepoolest, olgu n paarisarv, nii et $n = 2p$; märgime $\sqrt[2p]{a}$ tähega x . Juure definitsiooni järgi on siis

$$x^{2p} = a.$$

Kuid samuti on ka

$$(-x)^{2p} = a,$$

sest

$$(-x)^{2p} = x^{2p}.$$

Seega ka

$$\sqrt[2p]{a} = -x.$$

Et ära hoida ühe ja sellesama sümboli mitmeti mõistmist, siis positiivse a ja paarisarvulise n -i puhul tähendagu $\sqrt[n]{a}$ seda positiivset arvu, mille n -es aste on a .

Mõistes juurt positiivsest arvust ikka positiivse arvuna, saame näidata, et

võrdsete juurijatega juurtest on see juur suurem, millel juuritav on suurem,

s. t. kui

$$a > b,$$

siis ka

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Tõestus. Kui $\sqrt[n]{a}$ ei oleks suurem kui $\sqrt[n]{b}$, siis oleks

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b};$$

kuid siis oleks ka

$$(\sqrt[n]{a})^n \leq (\sqrt[n]{b})^n,$$

ehk, rakendades juure definitsiooni,

$$a \leq b,$$

mis on vastuolus eeldusega, et $a > b$. Seega siis

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Tõestatust järeldame, et

arvust 1 suurema arvu n -es juur on suurem kui 1.

Tõepoolest, kui

$$a > 1,$$

siis

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1}$$

ehk, et

$$\sqrt[n]{1} = 1,$$

siis

$$\sqrt[n]{a} > 1.$$

Ülesanded.

Teisendada järgmised juur-avaldised ratsionaalseiks avaldisteks:

222. $(\sqrt{5})^2$	222. $(\sqrt[3]{17})^3$	223. $(\sqrt[5]{37})^5$	223. $(\sqrt[n]{A})^n$
$\sqrt{19^2}$	$\sqrt[3]{12^3}$	$\sqrt[4]{7^4}$	$\sqrt[m]{c^m}$
$(\sqrt{23})^4$	$(\sqrt[3]{16})^6$	$(\sqrt[5]{7})^{10}$	$(\sqrt[n]{Q})^{2n}$
$8\sqrt{49}$	$4\sqrt[3]{27}$	$8\sqrt[4]{256}$	$R\sqrt[p]{R^p}$
$(5\sqrt{N})^2$	$(2\sqrt[3]{5})^3$	$(h^2\sqrt[3]{u})^3$	$(f^3\sqrt[n]{f^{2n}})^n$

Lahendada järgmised võrrandid:

224. $x^3 = 8$	$x^5 = -1$	$x^3 = \frac{8}{27}$
$y^4 = 81$	$y^4 = -16$	$s^4 = 0,0081$
224. $z^3 = -27$	$z^6 = 1$	$t^5 = \frac{243}{32}$
$u^5 = 32$	$u^{10} = 1024$	$q^3 = -1$

§ 10. Juure leidmine proovimise teel.

Ruutjuure leidmiseks on olemas algoritm. Teiste juurte leidmiseks puuduvad lihtsad, kiiret tööd võimaldavad algoritmid. Nende juurte leidmine võib toimuda proovimise teel.

Ülesanne 1. Leida $\sqrt[5]{161051}$.

Lahendus. Peame leidma niisuguse arvu, mille 5. aste on 161051. Proovides järjest arve 1, 2, 3, ... leiame: $1^5 < 161051$, $2^5 < 161051$, $3^5 < 161051$, ..., $11^5 = 161051$; järelikult

$$\sqrt[5]{161051} = 11.$$

Ülesanne 2. Leida $\sqrt[3]{17}$.

Lahendus. Peame leidma niisuguse arvu, mille kuup on 17. Proovides järjest arve 1, 2, 3, ... leiame:

$$1^3 < 17, \quad 2^3 < 17, \quad 3^3 > 17;$$

arvud 4, 5, 6, ... omavad veelgi suuremaid kuupe, seega

ükski neist ei ole $\sqrt[3]{17}$. Nii näeme, et ei leidu täisarvu, mille kuup on 17. Kui tähistame otsitava arvu $\sqrt[3]{17}$ sümboliga x , siis

$$2^3 < x^3 < 3^3$$

ehk

$$2 < x < 3.$$

Näeme, et arv x asetseb arvude 2 ja 3 vahel.

Katsume nõuet $x^3 = 17$ rahuldada kohaselt valitud murdarvuga. Tähistame selle arvu sümboliga $\frac{a}{b}$ ja eeldame, et see murd on kirjutatud oma lihtsaimal, see on taandatud kujul; sel puhul lugeja ja nimetaja on ühistegurita arvud. Nõude kohaselt peab olema

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 17 \text{ ehk } \frac{a^3}{b^3} = 17.$$

Et arvudel a ja b pole ühiseid tegureid (peale arvu 1), siis pole ühiseid tegureid ka arvudel aaa ja bbb ehk arvudel a^3 ja b^3 ; järelikult murd $\frac{a^3}{b^3}$ on taandumatu. Nõude kohaselt peab murd $\frac{a^3}{b^3}$ olema võrdne täisarvuga 17. Et murd ei saa olla ühtaegu taandumatu ja võrdne täisarvuga, siis ei leidu ka murdarvu, mis rahuldab nõuet $x^3 = 17$. Seega pole võimalik leida ei täisarvu ega murdarvu x , mille puhul oleks täpselt $x^3 = 17$.

Küll aga on võimalik leida niisuguseid arve, mis seda nõuet rahuldavad ligikaudu; teiste sõnadega: leidub arve, millede kuup on ligikaudu võrdne arvuga 17.

Tõepoolest, niisugusteks arvudeks on näiteks 2 ja 3; esimene annab nõutava arvu puudusega, teine liiaga. Paremate lähisväärtuste saamiseks arvu x jaoks jaotame vahemiku 2 ja 3 vahel kümneks võrdseks osaks ja proovime nõuet $x^3 = 17$ rahuldada arvudega

$$2,1 \quad 2,2 \quad 2,3 \quad \dots \quad 2,8 \quad 2,9.$$

Nende arvude kuupide arvutamine näitab, et $2,5^3$ ehk 15,625 on väiksem kui 17, seevastu $2,6^3$ ehk 17,576 on aga juba suurem kui 17. Järelikult

$$2,5 < x < 2,6.$$

Jaotame saadud vahemiku 2,5 ja 2,6 vahel uuesti kümneks võrdseks osaks ja proovime nõuet $x^3 = 17$ rahuldada arvudega

$$2,51 \quad 2,52 \quad 2,53 \quad \dots \quad 2,58 \quad 2,59.$$

Nende arvude kuupide arvutamine näitab, et

$$2,57 < x < 2,58.$$

Samal viisil edasi minnes näeme, et

$$2,571 < x < 2,572.$$

Võrratused

$$2 < x < 3$$

$$2,5 < x < 2,6$$

$$2,57 < x < 2,58$$

$$2,571 < x < 2,572$$

suruvad otsitava x ikka kitsamasse ja kitsamasse vahemikku: esimese vahemiku pikkus on 1, teise pikkus 0,1, kolmanda 0,01, neljanda 0,001 jne. Nende vahemikkude jada määrab meile kümnendmurre

$$x = 2,571 \dots;$$

ülalsetatud viisil saame määrata selle murre nii mitu kümnendkohta, kui iganes soovime. Mida enam selles kümnendmurrus on kümnendkohti, seda vähem selle murre kuup erineb arvust 17. Kümnendmurre 2,571... kohtade jada ei saa lõppeda; tõepoolest, vastasel korral me saaksime murre, mille kuup on 17, mis eelneva põhjal on võimatu. Seega x on lõpmatu kümnendmurd. Seda murdu me kirjutame sümboliga

$$\sqrt[3]{17}.$$

Et seda juurt ei saa avaldada ei täis- ega murdarvuga, siis on ta irratsionaalarv.

Võib näidata, et iga n -es juur, mille juuritav pole mõne ratsionaalarvu n -es aste, avaldub lõpmatu kümnendmurruna ja on irratsionaalarv. Niisugusteks juurteks on näiteks

$$\sqrt[4]{10} \quad \sqrt[5]{1,82} \quad \sqrt[6]{11} \quad \sqrt[7]{\frac{3}{4}}.$$

Kui on leitud juure kaks lähisväärtust (üks puudusega ja teine liiaga), mille vahe on näiteks 0,01, siis juure tõeline väärtus erineb kummastki lähisväärtusest vähem kui 0,01 võrra. Seega, kasutades ühte neist juure ligikaudse väärtusena, teeme vea, mis on väiksem kui 0,01. Nii võib $\sqrt[3]{17}$ ligikaudse väärtusena veaga alla 0,01 kasutada nii tema lähisväärtust 2,57 kui ka 2,58. Sama arvu ligikaudse väärtusena veaga alla 0,001 võib kasutada kas lähisväärtust 2,571 või 2,572.

Ülesanded.

Leida proovimise teel järgmised juured:

225. $\sqrt{169}$	227. $\sqrt{361}$	230. $\sqrt[3]{3,375}$
225. $\sqrt[3]{512}$	228. $\sqrt[3]{1331}$	230. $\sqrt[4]{0,00256}$
226. $\sqrt[4]{81}$	228. $\sqrt[4]{2401}$	231. $\sqrt[5]{3125}$
226. $\sqrt[5]{32}$	229. $\sqrt[5]{243}$	231. $\sqrt[4]{0,6561}$
227. $\sqrt[6]{0}$	229. $\sqrt[7]{1}$	

Leida proovimise teel järgmised juured veaga alla 0,01:

232. $\sqrt{28}$	233. $\sqrt[3]{100}$	234. $\sqrt[3]{24,2}$
232. $\sqrt{0,1}$	233. $\sqrt[3]{0,9}$	234. $\sqrt[4]{25}$

§ 11. Ruutude, kuupide, ruutjuurte ja kuupjuurte tabelid.

Praktiliste küsimuste lahendamisel kõige sagedamini vajalikkude astmete ja juurte, s. o. ruutude, kuupide, ruutjuurte ja kuupjuurte kiireks leidmiseks on koostatud tabelid.

Niisugused tabelid on kas 4-, 5- või enamakohalised, see tähendab, neist leiame kas 4-, 5- või enamakohalisele arvule vastava astme või juure kas 4, 5 või enama arvu õigete numbritega.

Nimetame antud arvus nullidele järgnevatest või nullidele eelnevatest numbritest moodustatud arvu antud arvu t ü v e k s.

Näiteks arvu 0,00765 tüvi on 765 ja arvu 2036000 tüvi on 2036.

Võib öelda, et praktiliselt

antud arvu ruudul, kuubil, ruutjuurel ja kuupjuurel on sama palju õigeld tüvenumbreid nagu antud arvul.

See tähendab, kui antud arvus on neli tüvenumbrit, siis tema ruudu, kuubi, ruutjuure ja kuupjuure saame anda nelja õige tüvenumbriga, mida neljakohalised tabelid võimaldavadki. Praktiliste ülesannete lahendamisel on see täpsus täiesti rahuldav.

Allpool on toodud väljalõikeid K. Ratasessa „Matemaatilistes tabelites“ esitatud ruutude, kuupide, ruutjuurte ja kuupjuurte tabelitest. Kõigis neis tabelites kuuluvad antud arvu kaks esimest numbrit tabeli esimesse veergu, kolmas number esimesse ritta ülal (või all) ja neljas number kõrvaloleva paranduste tabeli esimesse ritta ülal (või all).

Tulemuse loeme sellest reast, kuhu juhata sid antud arvu kaks esimest numbrit, ning sellest veerust, kus pealkirjaks on antud arvu kolmas number. Kui antud arvul on veel neljas tüvenumber, siis leitud tulemusega liidame paranduse, mille leiame paranduste tabeli samast reast, kuhu juhata sid antud arvu kaks esimest tüvenumbrit, ning veerust, mille pealkirjaks on antud arvu neljas tüvenumber.

RUUDUD

	0	1	2	3	...	7	8	9	123	456	789
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	...	31,02	31,14	31,25	1 2 3	4 6 7	8 9 10
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	...	32,15	32,26	32,38	1 2 3	5 6 7	8 9 10
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	...	33,29	33,41	33,52	1 2 3	5 6 7	8 9 10
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	...	34,46	34,57	34,69	1 2 4	5 6 7	8 9 11
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	...	35,64	35,76	35,88	1 2 4	5 6 7	8 10 11

Näide 1. $5,6^2 = 31,36.$

Näide 2. $5,68^2 = 32,26.$

Näide 3. $5,736^2 = 32,83 + 0,07 = 32,90.$

7

Paranduse 7 loeme paranduste tabeli veerust, mille pealiseks on 6 kui neljas number antud arvust 5,736; parandus tuleb liita viimase kümnendkohaga.

Näide 4. $5,919^2 = 34,93 + 0,11 = 35,04.$

11

Näide 5. $58,7^2 = (10 \cdot 5,87)^2 = 100 \cdot 5,87^2 =$
 $= 100 \cdot 34,46 = 3446.$

Praktiliselt tehakse selle näite korral nii, et antud arvus nihutatakse koma ühe koha võrra vasakule; sel teel saame arvu, mis leidub tabeli esimeses veerus; selle arvu ruudus 34,46 varem tehtud vea parandamiseks nihutame koma kaks kohta paremale, mille tulemusena saame 3446.

Näide 6. $0,0572^2 = \left(\frac{5,72}{100}\right)^2 = \frac{5,72^2}{10000} =$
 $= \frac{32,72}{10000} = 0,003272.$

Ka siin toimime praktikas näite 5 eeskujul: antud arvus nihutame koma kaks kohta paremale, saame arvu 5,72, mis leidub tabelis; selle ruut on 32,72. Et arvu suurendasime 100 korda, sellega tema ruutu suurendasime 10000 korda,

siis õige tulemuse saamiseks arvus 32,72 nihutame koma neli kohta vasakule.

Kui antud arvus on rohkem kui neli tüvenumbrit, siis ümardame ta nelja tüvenumbriga arvuks.

Näide 7. $5,9376^2 \approx 5,938^2 = 35,26$.

Ülesanded.

Leida tabelist järgmiste arvude ruudud:

235.	3,7	235.	4,2
	46		59
	6,73		1,26
	279		348
	8,963		5,748
	63,52		49,76
	0,594		0,723
	0,8596		0,1264
	2,56799		3,8844
	32,493		61,729

Kuupide arvutamisel peame koma nihutamisel silmas, et kui arvu suurendatakse või vähendatakse 10, 100, 1000, ... korda, siis arvu kuup vastavalt suureneb või väheneb 10^3 , 100^3 , 1000^3 , ... korda. See tähendab, kui arvus nihutame koma 1, 2, 3, ... koha võrra, siis leitud kuubis peame koma nihutama vastassuunas 3, 6, 9, ... koha võrra.

KUUBID

	0	1	2	3	...	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	...	172,8	173,7	174,7	1 2 3	4 5 6	6 7 8
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	...	182,3	183,3	184,2	1 2 3	4 5 6	7 8 9
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	...	192,1	193,1	194,1	1 2 3	4 5 6	7 8 9
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	...	202,3	203,3	204,3	1 2 3	4 5 6	7 8 9
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	...	212,8	213,8	214,9	1 2 3	4 5 6	7 8 10

Näide 1. $5,73^3 = 188,1$.

Näide 2. $5,826^3 = 197,1 + 0,6 = 197,7$.

6

Näide 3. $55,729^3 \approx 55,73^3 \dots 1728$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 1731 \end{array}$$

$55,729^3 \approx 173100$.

Nagu näeme, tuleb antud arvus tarbekorral koma niipalju nihutada (nii ruudu kui ka kuubi arvutamisel), et saame arvu, milles komale eelneb üks tüvenumber.

Ülesanded.

Leida tabelist järgmiste arvude kuubid:

236. 9,2	236. 7,8
56	47
3,75	8,92
2,44	7,66
0,5124	0,08931

RUUTJUURED

	0	1	2	3	...	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
3,3	1,817	1,819	1,822	1,825	...	1,836	1,838	1,841	0 1 1	1 1 2	2 2 2
33,	5,745	5,753	5,762	5,771	...	5,805	5,814	5,822	1 2 3	3 4 5	6 7 8
3,4	1,844	1,847	1,849	1,852	...	1,863	1,865	1,868	0 1 1	1 1 2	2 2 2
34,	5,831	5,840	5,848	5,857	...	5,891	5,899	5,908	1 2 3	3 4 5	6 7 8
3,5	1,871	1,873	1,876	1,879	...	1,889	1,892	1,895	0 1 1	1 1 2	2 2 2
35,	5,916	5,925	5,933	5,941	...	5,975	5,983	5,992	1 2 2	3 4 5	6 7 8

Näide 1. $\sqrt{3,31} = 1,819$.

Näide 2. $\sqrt{33,1} = 5,753$.

Näide 3. $\sqrt{34,75} \dots 5,891$

$$\sqrt{34,75} = \frac{5,895}{4}$$

$$\text{Näide 4. } \sqrt{352} = \sqrt{100 \cdot 3,52} = 10 \cdot \sqrt{3,52} = \\ = 10 \cdot 1,876 = 18,76.$$

$$\text{Näide 5. } \sqrt{0,348} = \sqrt{\frac{34,8}{100}} = \frac{\sqrt{34,8}}{10} = \frac{5,899}{10} = 0,5899.$$

Nendest näidetest näeme, et kui antud arv, mille ruutjuurt otsitakse, ei ole niisugune, et temas komale eelneb kas üks või kaks tüvenumbrit, siis nihutame koma kahe koha kaupa nõnda, et saaksime niisuguse arvu. Sel teel leitud arvu ruutjuures nihutame siis koma vastassuunas kaks korda väiksema arvu kohtade võrra, kui seda tegime antud arvus.

Ülesanded.

Leida tabelist järgmiste arvude ruutjuured:

237. 7,2	237. 2,5
3,49	1,78
75,4	86,1
82,96	56,47
643	729
5246	6759
0,874	0,056

KUUPJUURED

	0	1	2	3	...	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4,0	1,587	1,589	1,590	1,591	...	1,597	1,598	1,599	0 0 0	1 1 1	1 1 1
40,	3,420	3,423	3,426	3,428	...	3,440	3,443	3,445	0 1 1	1 1 2	2 2 3
40	7,368	7,374	7,380	7,386	...	7,411	7,417	7,423	1 1 2	2 3 4	4 5 5
4,1	1,601	1,602	1,603	1,604	...	1,610	1,611	1,612	0 0 0	1 1 1	1 1 1
41,	3,448	3,451	3,454	3,457	...	3,468	3,471	3,473	0 1 1	1 1 2	2 2 3
41	7,429	7,435	7,441	7,447	...	7,471	7,477	7,483	1 1 2	2 3 4	4 5 5

$$\text{Näide 1. } \sqrt[3]{4,13} = 1,604.$$

$$\text{Näide 2. } \sqrt[3]{41,29} \dots 3,454$$

$$\sqrt[3]{41,29} = 3,457.$$

$$\text{Näide 3. } \sqrt[3]{4180} = \sqrt[3]{1000 \cdot 4,180} = 10 \cdot \sqrt[3]{4,180} = 10 \cdot 1,611 = 16,11.$$

$$\text{Näide 4. } \sqrt[3]{0,417} = \sqrt[3]{\frac{417}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{417}}{10} = \frac{7,471}{10} = 0,7471.$$

Kuupjuure otsimisel paneme tähele, et kui antud arv ei ole niisugune, et temas komale eelneb kas üks, kaks või kolm tüvenumbrit, siis nihutame koma kolme koha kaupa nõnda, et saaksime niisuguse arvu. Sel teel leitud arvu kuupjuures nihutame koma siis vastassuunas kolm korda väiksema arvu kohtade võrra, kui seda tegime antud arvus.

Ülesanded.

Leida tabelist järgmiste arvude kuupjuured:

238. 2,58	238. 3,76
61,34	59,26
5170	2460
0,218	0,316
3728	8964

§ 12. Tehted juurtega.

Allpool tõestame viis teoreemi, mille järgi toimuvad tehted juurtega.

1. Juurte korrutamise teoreem:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

s. t.

võrdsete juurijatega juurte korrutamisel juuritavad korrutatakse ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Tõestus. Tähistame juurte korrutise tähega x , nii et

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = x.$$

Astendades selle võrduse mõlemad pooled arvuga n , saame

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = x^n,$$

ehk korrutise astendamise juhise põhjal,

$$(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = x^n;$$

et juure definitsiooni põhjal $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ja $(\sqrt[n]{b})^n = b$, siis tähendab eelmine võrdus lihtsalt, et

$$ab = x^n.$$

Seega x on arv, mille n -es aste on ab ; juure definitsiooni kohaselt siis

$$x = \sqrt[n]{ab}.$$

Võttes nüüd arvesse, et tähega x oli meil tähistatud $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, saame võrduse

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Näide.

$$\sqrt[3]{16cm^2} \cdot \sqrt[3]{4c^2m} = \sqrt[3]{64c^3m^3} = \sqrt[3]{(4cm)^3} = 4cm.$$

Vahetades ülaltõestatud võrduse pooled, saame korrutise juurimise teoreemi:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

s. t.

korrutise juurimisel juuritakse iga tema tegur ja tulemused korrutatakse.

Näide.

$$\sqrt[5]{32x^{10}} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x^{10}} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{(x^2)^5} = 2 \cdot x^2 = 2x^2.$$

Korrutise juurimise teoreemi rakendamisel peame arvestama asjaolu, et paarisarvulise juuriija puhul ei saa seda teoreemi alati kasutada. Nimelt see teoreem ei ole rakendatav juhul, kui juuriija on paarisarv ja kui juuritav teisendatakse korrutiseks, mille mõned tegurid on negatiivsed. Näiteks $\sqrt{30}$ on küll esitatav kujul $\sqrt{2 \cdot (-3) \cdot (-5)}$, kuid mitte $\sqrt{2} \cdot \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5}$, sest negatiivsel arvul ei ole paarisarvulise juurijaga juurt.

Ülesanded.

Leida järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks juurte korrutamise teoreemi:

239.	$\sqrt{162} \cdot \sqrt{0,5}$	$\sqrt{0,8} \cdot \sqrt{45}$	$\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{0,6}$
239.	$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$	$\sqrt[3]{-7} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$	$\sqrt[3]{-12} \cdot \sqrt[3]{18}$
240.	$\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[3]{40\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[3]{0,32} \cdot \sqrt[3]{-200}$
240.	$\sqrt[4]{64} \cdot \sqrt[4]{4}$	$\sqrt[4]{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[4]{486}$	$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[5]{48}$

Lihtsustada järgmised avaldised, kasutades korrutise juurimise teoreemi:

241.	$\sqrt{49a^2}$	$\sqrt{121x^4}$	$\sqrt{a^2b^2}$
242.	$\sqrt[3]{125u^3}$	$\sqrt[3]{-343f^6}$	$\sqrt[3]{-p^3q^9}$
242.	$\sqrt[4]{256g^4}$	$\sqrt[5]{k^5x^{10}}$	$\sqrt[7]{-128r^7}$

Kirjutada järgmised juurte korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

$$\begin{array}{lll}
 243. & \sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a} & \sqrt{3b} \cdot \sqrt{27b^3} & \sqrt{\frac{1}{2}ax^3} \cdot \sqrt{288ax} \\
 & \sqrt[3]{4c} \cdot \sqrt[3]{2c^2} & \sqrt[3]{9u} \cdot \sqrt[3]{-3u^5} & \sqrt[3]{24m^2n^4} \cdot \sqrt[3]{9m^4n^5} \\
 244. & \sqrt[4]{3N^2} \cdot \sqrt[4]{27N^2} & \sqrt[4]{48x^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}x^5} & \sqrt[5]{9H^3} \cdot \sqrt[5]{27H^7} \\
 244. & \sqrt[5]{16a} \cdot \sqrt[5]{64a^4} & \sqrt[4]{\frac{243}{x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^9}{3}} & \sqrt[3]{m^{14}n^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{n^7}{m^2}}
 \end{array}$$

Kirjutada järgmised juurte korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

$$\begin{array}{lll}
 245. & \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} & \sqrt{7} \cdot \sqrt{6} & \sqrt{2} \cdot \sqrt{13,5} \\
 246. & \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{15} & \sqrt[3]{-4,6} \cdot \sqrt[3]{2,5} & \sqrt[3]{1\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{80} \\
 246. & \sqrt{10} \cdot \sqrt{a} & \sqrt[8]{5x} \cdot \sqrt[8]{3y} & \sqrt[3]{-m} \cdot \sqrt[3]{-n} \\
 247. & \sqrt[4]{15a} \cdot \sqrt[4]{4a^2} & \sqrt[4]{-\frac{x^2}{a}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{x^2}} & \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a+1} \\
 247. & \sqrt[7]{u} \cdot \sqrt[7]{2v} & \sqrt[6]{2a} \cdot \sqrt[9]{3b^2} & \sqrt[4]{x-1} \cdot \sqrt[4]{x+1}
 \end{array}$$

Leida järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks korrutise juurimise teoreemi:

$$\begin{array}{lll}
 248. & \sqrt{81 \cdot 169} & \sqrt{441 \cdot 144} & \sqrt{7,29 \cdot 121} \\
 249. & \sqrt[3]{216 \cdot 27} & \sqrt[3]{125 \cdot 4096} & \sqrt[3]{3375 \cdot 1331} \\
 249. & \sqrt{225 \cdot 100} & \sqrt{484 \cdot 10000} & \sqrt{57600} \\
 250. & \sqrt[3]{729 \cdot 1000} & \sqrt[3]{64 \cdot 1000000} & \sqrt[3]{512000} \\
 250. & \sqrt{196 \cdot 10^4} & \sqrt[3]{1728 \cdot 10^9} & \sqrt[4]{81 \cdot 10^{12}}
 \end{array}$$

Teisendada järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult väike täisarv:

251.	$\sqrt{50}$	$\sqrt{45}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{63}$
252.	$\sqrt{72}$	$\sqrt{245}$	$\sqrt{300}$	$\sqrt{768}$
252.	$\sqrt[3]{54}$	$\sqrt[3]{375}$	$\sqrt[3]{108}$	$\sqrt[3]{1512}$
253.	$\sqrt{-24}$	$\sqrt{320}$	$\sqrt{-1024}$	$\sqrt{2000}$
253.	$\sqrt[4]{512}$	$\sqrt[4]{240}$	$\sqrt[5]{486}$	$\sqrt[5]{-96}$

Teisendada järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult vähe tegureid:

254.	$\sqrt{c^5h}$	$\sqrt{7m^2x^2}$	$\sqrt{4a^4b}$	$\sqrt{25f^4g^3}$
254.	$\sqrt[3]{27c^5}$	$\sqrt[3]{16a^4}$	$\sqrt[3]{2a^2x^3}$	$\sqrt[3]{8a^3b^2}$
255.	$\sqrt[3]{40cu^4}$	$\sqrt[3]{54h^6k}$	$\sqrt[3]{135u^3v^3}$	$\sqrt[3]{-64N^3}$
255.	$\sqrt[4]{6a^4}$	$\sqrt[4]{64n^5}$	$\sqrt[5]{32P^6}$	$\sqrt[5]{81a^5x}$

Kirjutada järgmised avaldised üheainsa juuremärgi abil ja teisendada tulemus nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult vähe tegureid:

256.	$\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{ah}$	$\sqrt[3]{pq^2r^2} \cdot \sqrt[4]{p^2q}$	$\sqrt[3]{6x^2} \cdot \sqrt{\frac{6}{x}} \cdot \sqrt[3]{4x^3}$
256.	$\sqrt{7} \cdot \sqrt{14}$	$\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{240}$
257.	$\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{36}$	$\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{75}$	$\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
257.	$\sqrt[4]{49} \cdot \sqrt[4]{98}$	$\sqrt[5]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[5]{96}$	$\sqrt[6]{2,5} \cdot \sqrt[6]{1,6} \cdot \sqrt[6]{48}$

2. Juurte jagamise teoreem:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

s. t.

võrdsete juurijatega juurte jagamisel juuritav jagatavas jagatakse juuritavaga jagajas ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Tõestus. Tähistame antud juurte jagatise tähega x , siis on

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = x.$$

Astendame saadud võrduse kummagi poole arvuga n , siis saame

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = x^n,$$

ehk, jagatise astendamise eeskirja põhjal,

$$\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = x^n,$$

ehk, juure definitsiooni põhjal,

$$\frac{a}{b} = x^n.$$

Et x on arv, mille n -es aste on $\frac{a}{b}$, siis juure definitsiooni järgi

$$x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Võrdustest

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = x \text{ ja } x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

järelname, et

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Näide.

$$\frac{\sqrt[3]{cu^4}}{\sqrt[3]{c^4u}} = \sqrt[3]{\frac{cu^4}{c^4u}} = \sqrt[3]{\frac{u^3}{c^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{u}{c}\right)^3} = \frac{u}{c}.$$

Vahetades ülaltöestatud võrduse pooled, saame jagatise juurimise teoreemi:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

s. t.

murru juurimisel juuritakse tema lugeja ja nimetaja ning arvutatakse tulemuste jagatis.

Näide.

$$\sqrt[4]{\frac{256}{a^4x^8}} = \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{a^4x^8}} = \frac{\sqrt[4]{4^4}}{\sqrt[4]{(ax^2)^4}} = \frac{4}{ax^2}.$$

Jagatise juurimise teoreemi ei saa kasutada siis, kui juurija on paarisarv, aga juurealune jagatav ja jagaja on negatiivsed.

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised juurtena üheainsa juuremärgi abil, võimaluse korral juuremärgita:

258. $\sqrt{72} : \sqrt{2}$	$\sqrt{ab} : \sqrt{b}$	$\sqrt[4]{b} : \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$
258. $\sqrt[3]{625} : \sqrt[3]{5}$	$\sqrt[3]{c^2} : \sqrt[3]{c}$	$\sqrt[3]{N^2} : \sqrt[3]{\frac{1}{N}}$
259. $\sqrt[3]{102} : \sqrt[3]{17}$	$\sqrt[3]{H^2u^2} : \sqrt[3]{Hu^2}$	$\sqrt[3]{\frac{P}{Q^2}} : \sqrt[3]{\frac{Q}{P^2}}$

$$\begin{array}{lll}
259. \sqrt[4]{8N^3u} : \sqrt[4]{\frac{N^2u}{2}} & \sqrt{\frac{9ax^3}{25n^6}} : \sqrt{\frac{a^5x}{n^2}} & \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}} \\
260. \sqrt[3]{\frac{H^2}{25u}} : \sqrt[3]{\frac{5u^2}{H}} & \frac{\sqrt{a^2b-a^2c}}{\sqrt{b-c}} & \frac{\sqrt{(u+v)^2}}{\sqrt{u^2-v^2}} \\
260. \sqrt[3]{ab^2c^3} : \sqrt[3]{\frac{27c^6}{64a^5b}} & \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m^2-n^2}} & \frac{\sqrt[3]{a^2(a^2-b^2)}}{\sqrt[3]{a(a+b)}}
\end{array}$$

Kirjutada järgmised juurte jagatised võimalikult väheste sümbolitega:

$$\begin{array}{llll}
261. \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} & 261. \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} & 262. \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} & 262. \frac{\sqrt{aN}}{\sqrt{N}} \\
\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}} & \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n}} & \frac{\sqrt[3]{h^7}}{\sqrt[3]{h}} & \frac{\sqrt[3]{a^2h}}{\sqrt[3]{ah^2}} \\
\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}} & \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{44}} & \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{ac^2}} & \frac{\sqrt{px^3}}{\sqrt{p^2x^2}} \\
\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{72}} & \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{56}} & \frac{\sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{c^2u^2}} & \frac{\sqrt[3]{mx^2}}{\sqrt[3]{m^4x^5}}
\end{array}$$

Leida järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks jagatise juurimise teoreemi:

$$\begin{array}{llll}
263. \sqrt{\frac{9}{64}} & 263. \sqrt{\frac{49}{81}} & 264. \sqrt{\frac{144}{25}} & 264. \sqrt{\frac{169}{289}} \\
\sqrt{6\frac{1}{4}} & \sqrt{3\frac{1}{16}} & \sqrt{7\frac{9}{16}} & \sqrt{4\frac{21}{25}} \\
\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} & \sqrt[3]{-15\frac{5}{8}} & \sqrt[3]{5\frac{23}{64}} & \sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 265. & \sqrt[3]{\frac{5^2}{6^4}} & 265. & \sqrt[3]{\frac{2^6}{7^3}} & 266. & \sqrt[4]{\frac{25^6}{10^8}} & 266. & \sqrt[5]{\frac{24^3}{10^{15}}} \\
 & \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2} & & \sqrt[4]{\left(5\frac{1}{16}\right)^3} & & \sqrt[4]{\left(3\frac{13}{81}\right)^2} & & \sqrt[5]{\left(-\frac{32}{243}\right)^3}
 \end{array}$$

Teisendada järgmised avaldised nii, et juuremärgi all oleksid võimalikult lihtsad avaldised:

$$\begin{array}{ccc}
 267. & 12\sqrt[3]{\frac{a^3}{16x^2}} & \sqrt[3]{1\frac{9}{16}\frac{x^3}{a^2}} & 0,2\sqrt[3]{1000Nu^3} \\
 267. & 10\sqrt[3]{\frac{1}{8}M} & \frac{2}{7}\sqrt[3]{\frac{3}{4}m^2n^4} & 10\sqrt[3]{\frac{H^2}{0,008}}
 \end{array}$$

3. Juure astendamise teoreem:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

s t.

juure astendamisel astendatakse juuritav ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Tõestus.

Kirjutame astme $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ korrutisena, siis saame

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdots \sqrt[n]{a}}_{m \text{ tegurit}},$$

Juurte korrutamise teoreemi põhjal võime nüüd kirjutada:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdots \sqrt[n]{a}}_{m \text{ tegurit}} = \underbrace{\sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \cdots a}}_{m \text{ tegurit}} = \sqrt[n]{a^m}; \text{ seega}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

nagu oligi väidetud.

Näide.

$$\left(\sqrt{5a^3}\right)^3 = \sqrt{5^3a^9} = \sqrt{5^2a^8 \cdot 5a} = 5a^4\sqrt{5a}.$$

Vahetades ülaltõestatud võrduse pooled, saame:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m;$$

selle võrduse mõtet võime sõnastada nii:

arvu astendamise ja saadud astme juurimise asemel võib arvu juurida ja siis saadud juurt astendada.

Näide.

$$\sqrt{\left(\frac{a^2h^2}{16}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{a^2h^2}{4^2}\right)^3} = \left(\sqrt{\frac{a^2h^2}{4^2}}\right)^3 = \left(\frac{ah}{4}\right)^3 = \frac{a^3h^3}{64}.$$

Valemit $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ ei ole võimalik kasutada siis, kui juurija n on paarisarv, aga juurealune astendatav arv a on negatiivne.

4. Astme juurimise teoreem.

Astme juurimise puhul väärrib kõigepealt märkimist see juhtum, kus juuremärgi all seisev astendaja on juurija kordne, see tähendab, kui avaldises $\sqrt[n]{a^m}$ on $m = kn$. Sel juhul saab näidata, et

$$\sqrt[n]{a^{kn}} = a^k,$$

s. t. kui astendaja on jaguv juurijaga, siis

astme juurimisel astendaja jagatakse juurijaga ja saadud jagatisega astendatakse juurealune astendatav.

Tõestus. Avaldise a^{kn} võime kirjutada kujul $(a^k)^n$. Eelmise teoreemi ja juure definitsiooni põhjal saame nüüd, et

$$\sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = \left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n = a^k.$$

Näide.

$$\sqrt[7]{x^{21}} = x^{\frac{21}{7}} = x^3.$$

Teiseks juhtumiks, mis astme juurimisel märkimist väärrib, on see, kus juurijal ja juuremärgi all seisval astendajal on ühine tegur. Sel juhul saab juurt taandada, s. t.

juurijat ja juuremärgi all seisvat astendajat võib jagada nende ühise teguriga.

Olgu juurija 'ja juuremärgi all seisva astendaja ühine tegur märgitud tähega k ; siis võime neid arve kirjutada kujul km ja kn ja juure taandamise teoreem avaldub kujul

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Tõestus. Tähistame $\sqrt[km]{a^{kn}}$ tähega x ; teatavasti aga $a^{kn} = (a^n)^k$, mistõttu ka

$$\sqrt[km]{(a^n)^k} = x$$

ehk eelmise teoreemi põhjal

$$(\sqrt[km]{a^n})^k = x.$$

Astendame nüüd võrduse mõlemad pooled arvuga m ; saame

$$(\sqrt[km]{a^n})^{km} = x^m$$

ehk

$$a^n = x^m.$$

Et x on niisugune arv, mille m -es aste on a^n , siis juure definitsiooni järgi

$$x = \sqrt[m]{a^n}.$$

Võttes arvesse, et tähega x tähistasime tõestuse alguses avaldist $\sqrt[km]{a^{kn}}$, saamegi võrduse

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Näited.

$$1. \sqrt[9]{a^6} = \sqrt[3 \cdot 3]{a^{3 \cdot 2}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

$$2. \sqrt[8]{4x^6y^4} = \sqrt[8]{2^2x^6y^4} = \sqrt[8]{(2x^3y^2)^2} = \sqrt[4]{2x^3y^2}.$$

Vahetades võrduse

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}$$

pooled, saame juure laiendamise teoreemi:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[km]{a^{kn}},$$

s. t.

juurijat ja juuremärgi all seisvat astendajat võib korrutada ühe ning sama arvuga.

Näited.

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[15]{a^{10}}; \quad \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[15]{a^9}.$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised astmed võimalikult väheste sümboolitega:

$$268. \quad (\sqrt{3})^3 \quad (\sqrt[5]{a})^6 \quad (\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b})^6$$

$$268. \quad (\sqrt{2})^{10} \quad (\sqrt[4]{x})^5 \quad (\sqrt[4]{x} : \sqrt[4]{y})^5$$

$$269. \quad (\sqrt[3]{3})^6 \quad (\sqrt[5]{b^2})^7 \quad (\sqrt[4]{27} : \sqrt[4]{3})^2$$

$$269. \quad (\sqrt[9]{5})^9 \quad (\sqrt[10]{x^2})^5 \quad (\sqrt[5]{u^2} : \sqrt[5]{v^2})^3$$

Arendada järgmised korrutised ja astmed:

$$270. \quad (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{3} \quad 270. \quad (\sqrt{11} + \sqrt{10})(\sqrt{11} - \sqrt{10})$$

$$(\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} \quad (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$$

$$(\sqrt{7} - 1)^2 \quad (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$$

$$(\sqrt{10} - \sqrt{8})^2 \quad (2\sqrt{8} - 3)(9 + 4\sqrt{8})$$

$$(\sqrt[3]{3} - 1)^3 \quad (2\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[3]{3})^3$$

Teisendada järgmised astmed nii, et juuremärgi all oleks võimalikult vähe tegureid:

271. $(\sqrt[5]{3hu^2})^5$	$(2\sqrt[3]{cu^6})^3$	$(\sqrt[3]{\frac{a^3x}{5u^3}})^3$	
271. $(\sqrt[3]{5c^2N^2})^2$	$(\sqrt[4]{6R^2})^2$	$(\sqrt[3]{\frac{2m^3x^5}{n^4}})^3$	
272. $(\sqrt[4]{7p^4q^2})^4$	$(\sqrt[4]{\pi R^3h})^2$	$(\sqrt[5]{\frac{3c^5x^2}{4f^3}})^4$	
272. $(ax^2\sqrt{2ax})^2$	$(2N\sqrt{3N^2u})^4$	$(\frac{1}{2c}\sqrt[3]{5a^2x^3})^5$	

Taandada järgmised juured:

273. $\sqrt[4]{a^2}$	273. $\sqrt[9]{a^6}$	274. $\sqrt[4]{5^2}$	274. $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}$
$\sqrt[6]{a^2}$	$\sqrt[12]{a^4b^8}$	$\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[3]{\sqrt{x^2}}$
$\sqrt[4]{a^2x^6}$	$\sqrt[12]{\frac{x^6}{y^3}}$	$\sqrt[6]{9}$	$\sqrt[3]{b\sqrt{b}}$
$\sqrt[6]{a^2b^4}$	$\sqrt[15]{u^5v^{10}}$	$\sqrt[6]{1000}$	$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$
$\sqrt[2n]{a^{2m}}$	$\sqrt[3n]{a^{9p}b^{9q}}$	$\sqrt[6]{\frac{25}{81}}$	$\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$

Arvutada järgmiste juurte väärtused, kasutades ruut- ja kuupjuurte tabelleid:

275. $\sqrt[4]{4}$	275. $\sqrt[4]{49}$	276. $\sqrt[6]{25}$	276. $\sqrt[4]{100}$
$\sqrt[6]{36}$	$\sqrt[6]{27}$	$\sqrt[6]{144}$	$\sqrt[6]{1331}$
$\sqrt[8]{81}$	$\sqrt[8]{625}$	$\sqrt[8]{1296}$	$\sqrt[12]{10000}$

5. Juure juurimise teoreem:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

s. t.

juure juurimisel juurijad korrutatakse ja tulemusega juuritakse antud juurealune arv.

Tõestus.

Tähistame avaldise $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ tähega x , nii et

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x.$$

Astendame selle võrduse pooled arvuga m , saame

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = x^m$$

ehk

$$\sqrt[n]{a} = x^m.$$

Astendame nüüd saadud võrduse kummagi poole veel arvuga n , siis saame

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (x^m)^n$$

ehk

$$a = x^{mn}.$$

Juure definitsiooni põhjal ongi nüüd

$$x = \sqrt[mn]{a}.$$

Viimasest võrdusest ja võrdusest

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$$

järeltame, et

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

nagu oligi väidetud.

Näide.

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{D^{30}}} = \sqrt[15]{D^{30}} = D^{30/15} = D^2.$$

Nagu varemkäsiteldud võrdustes, nii võib ka kõnesolevas võrduses vahetada pooled; siis saame

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

või ka

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Seega on alati võimalik juurimist mingi kordarvuga mn teostada sel teel, et enne juuritakse näiteks arvuga n ja tulemust juuritakse arvuga m . Nii võime 4-nda juure arvust 625 leida sel teel, et leiame arvu 625 ruutjuure ja tulemusest leiame veel kord ruutjuure:

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt{25} = 5.$$

Analoogiliselt leiame $\sqrt[6]{27}$:

$$\sqrt[6]{27} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3} = 1,732.$$

Kirjutada järgmised avaldised üheainsa juuremärgiga:

$$277. \quad \sqrt[3]{\sqrt{7}} \qquad \sqrt[3]{\sqrt{h^3}} \qquad \sqrt[5]{\sqrt{(3c^4)^2}}$$

$$277. \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{13}} \qquad \sqrt[5]{\sqrt{c^{10}}} \qquad \sqrt[3]{\sqrt{a^3 b^6 c^9}}$$

$$278. \quad \sqrt[4]{\sqrt[3]{29}} \qquad \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4 x^3}} \qquad \sqrt[5]{\sqrt[3]{N^{10} f^{15}}}$$

$$278. \quad \sqrt{2\sqrt{3}} \qquad \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \qquad \sqrt[3]{2x\sqrt[3]{\frac{a}{2}}}$$

§ 13. Juur-avaldiste teisendamisi.

Juur-avaldisteks nimetame niisuguseid avaldisi, mis sisaldavad juuri. Näiteks

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \qquad \left(10 - 2\sqrt[5]{100}\right)^2 \qquad \frac{1}{3 - \sqrt{5}}$$

on juur-avaldised.

Nende avaldiste väärtusi saab arvutada vaid ligikaudu; selleks asendame avaldises esinevad irratsionaalsed suurused nende ligikaudsete väärtustega, tavaliselt 2-, 3- või 4-kohaliste kümnendmurdudega, ja teostame avaldises näidatud tehted. Töö hõlbustamiseks on sageli kohane avaldist enne teisendada. Teisendamise võtteist käsitame kahte:

1. teguri toomine juuremärgi alt juuremärgi ette;
2. juure kaotamine murru nimetajast.

Esimene teisendus põhineb kas korrutise või jagatise juurimise teoreemil ja vastavalt sellele teostub see kas nii:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b},$$

või nii:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \frac{1}{b} \sqrt[n]{a}.$$

Teine teisendus — juure kaotamine murru nimetajast — toimub murru lugeja ja nimetaja korrutamisel kohaselt valitud juur-avaldisega.

$$1. \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b} \sqrt{b}.$$

$$2. \quad \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{a \sqrt[3]{b^2}}{b} = \frac{a}{b} \sqrt[3]{b^2}.$$

$$3. \quad \frac{a}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \\ = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{b - c}.$$

$$4. \quad \frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \\ = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}.$$

Nende teisendusvõtete kasutamist selgitavad järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Arvutada avaldise

$$4\sqrt{63} - 5\sqrt{28} - 2\sqrt{7} + \sqrt{20}$$

väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et kõigepealt määrame ruutjuure algoritmi või tabeli abil kõik antud avaldises esinevad juured, siis teostame nõutavad korrutamised ja lõpuks teostame liitmised ja lahutamised. Tunduvalt hõlpsamini jõuame eesmärgile antud avaldist teisendades. Nii saame:

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{63} - 5\sqrt{28} - 2\sqrt{7} + \sqrt{20} = \\ & = 4\sqrt{9 \cdot 7} - 5\sqrt{4 \cdot 7} - 2\sqrt{7} + \sqrt{4 \cdot 5} = \\ & = 4 \cdot 3\sqrt{7} - 5 \cdot 2\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} = \\ & = 12\sqrt{7} - 10\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} = \\ & = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Avaldise väärtuse arvutamine algkuju järgi nõuab 4 juurimise, 3 korrutamise, 2 lahutamise ja 1 liitmise, seega kokku 10 tehte teostamist. Avaldise väärtuse arvutamine avaldise teisendatud kuju järgi nõuab kõigest üht juure leidmist ja üht korrutamist. Võttes tabelist $\sqrt{5}$ lähisväärtuse 2,236, leiame kõnesoleva avaldise väärtusena 4,472. Kontrolliks märgime, et $2\sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$ ehk tabeli järgi 4,472.

Ülesanne 2. Arvutada avaldise $\frac{26}{5\sqrt{13}}$ väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et tabelist võtame $\sqrt{13}$ näiteks neljakohalise lähisväärtuse, korrutame selle 5-ga ja jagame 26 saadud korrutisega. Et hoiduda tülikast jagamisest mitmekohalise arvuga, kaotame nimetajast juure. Selleks korrutame murru lugejat ja nimetajat arvuga $\sqrt{13}$. Nii saame:

$$\frac{26}{5\sqrt{13}} = \frac{26 \cdot \sqrt{13}}{5 \cdot 13} = \frac{2}{5} \sqrt{13} = 0,4\sqrt{13}.$$

Avaldise väärtuse arvutamine avaldise teisendatud kuju järgi nõuab ühtainsat korrutamist, kui $\sqrt{13}$ lähisväärtus võetakse tabelist.

Ülesanded.

Teisendada järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult väike täisarv:

279. $\sqrt{\frac{1}{2}}$	279. $\sqrt{\frac{2}{3}}$	280. $\sqrt{2\frac{1}{2}}$	280. $\sqrt{3\frac{1}{7}}$
$\sqrt{\frac{3}{20}}$	$\sqrt{\frac{5}{12}}$	$\sqrt{1\frac{5}{18}}$	$\sqrt{2\frac{1}{50}}$
$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$	$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

Teisendada järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult lihtne täisavaldis:

281.	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	281.	$\sqrt{\frac{m}{2n}}$	282.	$\sqrt{\frac{5x}{8a}}$	282.	$\sqrt{\frac{p}{q^3}}$
	$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$		$\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$		$\sqrt[4]{\frac{5x}{y^2}}$		$\sqrt[5]{\frac{a^2}{d^3}}$
	$\sqrt[4]{\frac{x}{y^3}}$		$\sqrt[4]{\frac{m^5}{n}}$		$\sqrt[3]{\frac{250}{3x}}$		$\sqrt[5]{\frac{243}{49a^3}}$

Kirjutada järgmised juur-avaldised kujul, milles nimetaja on ratsionaalne, ja arvutada nende väärtused:

283.	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	283.	$\frac{3}{\sqrt{5}}$	284.	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	284.	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
	$\frac{3}{\sqrt{3}}$		$\frac{7}{2\sqrt{7}}$		$\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$		$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{27}}$
	$\frac{6}{\sqrt{6}}$		$\frac{6}{\sqrt{18}}$		$\frac{10}{3\sqrt{25}}$		$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}$
285.	$\frac{9}{2\sqrt{27}}$	285.	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}}$	286.	$\frac{18}{5\sqrt[3]{3}}$	286.	$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{50}}$
	$\frac{16}{5\sqrt{8}}$		$\frac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{15}}$		$\frac{3}{\sqrt[4]{9}}$		$\frac{\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{27}}$

Kirjutada järgmised avaldised kujul, milles nimetaja on ratsionaalne:

287.	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2x}}$	$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$	$\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{25}}$
287.	$\frac{a}{\sqrt{a}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^3}}$	$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{125}}$	$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{2xy^2}}$

$$\begin{array}{ccccc}
 288. & \frac{m}{\sqrt{2n}} & \frac{b^4}{\sqrt{b^5}} & \frac{a^2}{x\sqrt{ax}} & \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}} \\
 288. & \frac{3p}{\sqrt{3q}} & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x^3}} & \frac{4xy}{\sqrt{2xy^3}} & \frac{1}{\sqrt[3]{2a^2}} & \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2b^5}}
 \end{array}$$

Ülesanne 3. Arvutada avaldise

$$\frac{8}{\sqrt{19} - \sqrt{15}}$$

väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et tabelist leiame $\sqrt{19}$ ja $\sqrt{15}$ näiteks neljakohalised lähisväärtused, arvutame nende vahe ja jagame 8 selle vahega. Et hoiduda tülikast jagamisest mitmekohalise arvuga, kaotame nimetajast juured. Selleks korrutame murru lugeja ja nimetaja summaga $\sqrt{19} + \sqrt{15}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{8}{\sqrt{19} - \sqrt{15}} &= \frac{8(\sqrt{19} + \sqrt{15})}{(\sqrt{19} - \sqrt{15})(\sqrt{19} + \sqrt{15})} = \\
 &= \frac{8(\sqrt{19} + \sqrt{15})}{19 - 15} = \frac{8}{4}(\sqrt{19} + \sqrt{15}) = 2(\sqrt{19} + \sqrt{15}).
 \end{aligned}$$

Antud avaldise väärtuse arvutamine avaldise teisendatud kuju järgi nõuab vaid üht liitmist ja üht korrutamist, kui $\sqrt{19}$ ja $\sqrt{15}$ lähisväärtused on teada.

Kirjutada järgmised avaldised kujul, milles nimetaja on ratsionaalne, ja arvutada nende väärtused:

$$\begin{array}{ccc}
 289. & \frac{1}{\sqrt{3} - 1} & \frac{21}{5 + \sqrt{2}} & \frac{12}{5 - \sqrt{13}} \\
 289. & \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} & \frac{8}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{15} - \sqrt{13}}
 \end{array}$$

$$290. \quad \frac{1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}} \qquad \frac{19}{3\sqrt{11}-4\sqrt{5}} \qquad \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-4}$$

$$290. \quad \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \qquad \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \qquad \frac{8+\sqrt{15}}{8-2\sqrt{15}}$$

Anda järgmistele murdudele kuju, milles nimetaja on ratsionaalne:

$$291. \quad \frac{u}{\sqrt{u}-1} \qquad \frac{w}{w\sqrt{w}+1} \qquad \frac{a^2-b}{a-\sqrt{b}}$$

$$292. \quad \frac{3N}{\sqrt{N}+2} \qquad \frac{3m}{m\sqrt{u}-2} \qquad \frac{x^4-a^2}{x-\sqrt{a}}$$

$$292. \quad \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}-\sqrt{x}} \qquad \frac{10x}{\sqrt{x}+\sqrt{5x}} \qquad \frac{a+2\sqrt{x}}{a-2\sqrt{x}}$$

$$293. \quad \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \qquad \frac{3H}{2\sqrt{H}-\sqrt{5}} \qquad \frac{\sqrt{c}}{3\sqrt{c}+1}$$

$$293. \quad \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} \qquad \frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{3\sqrt{a}+2\sqrt{b}} \qquad \frac{u-2\sqrt{u}}{u+3\sqrt{u}}$$

Koondada järgmised juur-avaldised:

$$294. \quad 6\sqrt{2}+3\sqrt{2} \qquad 10\sqrt[3]{5}-9\sqrt[3]{5} \qquad a\sqrt{x}+\sqrt{x}$$

$$294. \quad 8\sqrt[5]{3}-5\sqrt[5]{3} \qquad \sqrt[5]{4}+4\sqrt[5]{4} \qquad m\sqrt[3]{d}-2n\sqrt[3]{d}$$

$$295. \quad m\sqrt[8]{7}+n\sqrt[8]{7} \qquad a\sqrt[3]{x}+b\sqrt[3]{x} \qquad \sqrt[4]{3f}-5\sqrt[4]{3f}$$

$$295. \quad a\sqrt[5]{z}-2\sqrt[5]{z} \qquad k\sqrt[n]{a}+\frac{n}{k}\sqrt[n]{a} \qquad a^2\sqrt[5]{b}-a\sqrt[5]{b}$$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult väheste ja võimalikult lihtsate juurte abil:

$$296. \quad 8\sqrt[3]{7} + 5\sqrt[3]{7} - 10,7\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{7}$$

$$3\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{10} - 5,5\sqrt[3]{10} - 0,7\sqrt[3]{10}$$

$$2\sqrt{N} - \sqrt{M} + 4\sqrt{N} - 6\sqrt{M}$$

$$\sqrt[3]{H} + 3\sqrt[3]{H} - 2\sqrt[3]{H} + \sqrt[3]{H}$$

$$296. \quad 6\sqrt{3} - 7\sqrt{12} + \sqrt{75} - 3\sqrt{48} + 3\sqrt{108} + \sqrt{300}$$

$$\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{40} + 9\sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{128} + 2\sqrt[3]{432}$$

$$6\sqrt[3]{18} - 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{72} + 4\sqrt[3]{1024}$$

$$5\sqrt[3]{72} - 7\sqrt[3]{45} + 11\sqrt[3]{9000} - 10\sqrt[3]{180}$$

297.	$4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{8} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$	297.	$5\sqrt{3} : (2\sqrt{12})$
	$2\sqrt[3]{2} \cdot 5\sqrt[3]{12} \cdot \frac{3}{5}\sqrt[3]{32}$		$\sqrt{48} : \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$
	$5\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{18} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{20}$		$\frac{3}{5}\sqrt{56} : (3\sqrt{8})$
	$\frac{2}{3}\sqrt[3]{3} \cdot 7\sqrt[3]{18} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[3]{16}$		$\sqrt{91} : \left(\frac{3}{4}\sqrt{39}\right)$

Võttes tabelist vastavate arvude ruut- ja kuupjuured, arvutada järgmiste juur-avaldiste väärtused:

298.	$\sqrt{3} + \sqrt{5}$	298.	$\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}$
	$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$		$\sqrt{35} + 1$
	$\sqrt{21} - 4$		$\sqrt[3]{45} - 3$

$$299. \quad \sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{49} + 2$$

$$\sqrt[3]{448} - 8$$

$$299. \quad \sqrt{50} - \sqrt{28} + \sqrt{35}$$

$$2\sqrt{15} + \sqrt{27} - 2\sqrt{75}$$

$$\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{200}$$

Teisendada järgmised korrutised nii, et kõik tegurid oleksid juuremärgi all:

$$300. \quad 2\sqrt{5}$$

$$b\sqrt[3]{c^2}$$

$$ax^2\sqrt[3]{a}$$

$$301. \quad a\sqrt{b^3}$$

$$h\sqrt[4]{3h}$$

$$c^2u\sqrt[3]{c^2u}$$

$$301. \quad h^2\sqrt{u}$$

$$N^2\sqrt[5]{N}$$

$$3D^2\sqrt[3]{3D}$$

$$302. \quad 3\sqrt{\frac{1}{27}}$$

$$\frac{5}{2}\sqrt{10}$$

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

$$302. \quad c^2\sqrt{\frac{b}{c}}$$

$$4x\sqrt[3]{\frac{m}{16x^2}}$$

$$\frac{1}{2}a^2u^3\sqrt[3]{\frac{4}{au^2}}$$

Teisendada järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult lihtne avaldis:

$$303. \quad \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$303. \quad 3N\sqrt{N^2 - \frac{5}{9}N^2}$$

$$\sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{4x^2 - \frac{19}{25}x^6}$$

$$2\pi\sqrt{r^2 - \frac{3}{8}r^2}$$

$$\sqrt{\frac{12}{25}R^4 - \frac{4}{25}R^2}$$

Lihtsustada järgmised korrutised:

$$304. \quad \frac{a}{2}\sqrt{3x} \cdot \frac{5}{a}\sqrt{6x}$$

$$304. \quad \sqrt{N}(\sqrt{N} - a\sqrt{aN})$$

$$m^2\sqrt{\frac{2}{m}} \cdot 3\sqrt{m}$$

$$\sqrt{2x}(\sqrt{2} + \sqrt{x})$$

$$h^2\sqrt[3]{2u} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{4u^2}$$

$$m\sqrt{n}(\sqrt{mn} - 5m\sqrt{n})$$

$$\pi\sqrt{aR^2} \cdot \frac{5R^2}{3}\sqrt[3]{a^2R}$$

$$3\sqrt{cD}(\sqrt{cD} + 2\sqrt{aD})$$

Arendada järgmised korrutised:

$$\begin{aligned} 305. \quad & (\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B}) \\ & (3\sqrt{h} - 2\sqrt{k})(3\sqrt{h} + 2\sqrt{k}) \\ & (\sqrt{ab} - 1)(\sqrt{ab} + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 305. \quad & (t - 2\sqrt{uv})(t + 2\sqrt{uv}) \\ & \left(\sqrt{\frac{p}{2}} + \sqrt{\frac{q}{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{p}{2}} - \sqrt{\frac{q}{3}}\right) \\ & \left(1 + \frac{\sqrt{uv}}{s}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{uv}}{s}\right) \end{aligned}$$

§ 14. Juurvõrrandid.

Võrrandit, milles tundmatu esineb juuritavas, nimetatakse juurvõrrandiks ehk irratsionaalseks võrrandiks.

Juurvõrrandid on näiteks võrrandid

$$\sqrt{x} + \sqrt{2x} = 3$$

ja

$$\sqrt[3]{x + 50} = 4.$$

Seevastu võrrand

$$x\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

ei ole juurvõrrand, sest tundmatu ei esine juuremärgi all. See on irratsionaalsete kordajatega ratsionaalne võrrand.

Et lahendada juurvõrrandit, selleks tuleb teda enne teisendada ratsionaalseks, s. o. anda talle niisugune kuju, et üheski juuritavas ei esineks tundmatut.

Selle saavutamiseks püütakse esmalt anda võrrandile niisugune kuju, et võrrandi ühel poolel oleks üksainus juur, mille juuritav sisaldab tundmatut, ja teisel poolel oleks samuti

üksainus juur või ratsionaalseist liikmeist koosnev avaldis (milles võib esineda irratsionaalseid kordajaid), nagu näiteks võrrandid

$$\sqrt{x^2 + 8} = 4\sqrt{x + 7},$$

$$\sqrt{x + 4} = 3,$$

$$\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{2x - 10},$$

$$\sqrt[3]{x^3 + 19} = x + \sqrt[3]{2}.$$

Et võrdsete arvude ruudud on võrdsed ja nende kuubid on võrdsed, siis võime iga niisuguse võrrandi asemel kirjutada uue võrrandi, mille saame, kui võrrandi mõlemad pooled astendame vastava juurijaga. Nii saame näiteina toodud võrranditest pärast astendamist ratsionaalsed võrrandid:

$$x^2 + 8 = 16(x + 7), \quad x + 4 = 9,$$

$$x = 8(2x - 10), \quad x^3 + 19 = (x + \sqrt[3]{2})^3,$$

mille lahendamine võimaldab leida juurvõrrandi lahendid.

Allpool selgitame lähemalt juurvõrrandite lahendamise võtteid mõne näite varal. Näiteina kasutame ruut-irratsionaalseid võrrandeid kui kõige lihtsamaid ja kõige sagedamini esinevaid juurvõrrandeid. Kõrgemate, s. o. suurema juurijaga juurvõrrandite lahendamise võtted on näidatud võtetega analoogilised.

Näide 1. Olgu vaja lahendada võrrand

$$x - \sqrt{x + 2} = 10.$$

Kui võrrandi vabastamiseks juurest tõstaksime ruutu selle võrrandi pooled, siis võrrandi vasakul poolel peale ratsionaalsete liikmete saaksime ka liikmete x ja $-\sqrt{x + 2}$ kahekordse korrutise; seega jääks juur $\sqrt{x + 2}$ ikkagi võrrandisse püsima. Seepärast talitame nii, nagu eespool öeldud: juure viime võrrandi ühele poolele ja kogume kõik ratsionaalsed liikmed teisele poolele; siis võrrand omandab kuju:

$$x - 10 = \sqrt{x + 2}.$$

Tõstes ruutu selle võrrandi pooled, saame juba ratsionaalse võrrandi

$$(x - 10)^2 = x + 2$$

ehk, pärast sulgude avamist ja koondamist,

$$x^2 - 21x + 98 = 0.$$

Selle võrrandi lahendid on 14 ja 7.

Asendades lähtevõrrandis tähe x ruutvõrrandi lahendiga 14, saame võrrandi vasakul poolel $14 - \sqrt{14 + 2}$ ehk 10, s. o. sama arvu, mis seisab paremal poolel. Seega ruutvõrrandi lahend 14 on ka antud juurvõrrandi lahendiks.

Tehes sedasama ruutvõrrandi teise lahendiga, arvuga 7, saame juurvõrrandi vasakul poolel $7 - \sqrt{7 + 2}$ ehk 4. Et aga paremal poolel seisab 10, siis arv 7 juurvõrrandit ei rahulda. Kuid ta rahuldab võrrandit

$$(x - 10)^2 = x + 2,$$

mille saime lähtevõrrandist pärast liikmete ümberpaigutamist ja poolte ruutimist. Asendades selles võrrandis tähe x arvuga 7, saame vasakul poolel $(7 - 10)^2$ ehk 9 ja paremal poolel $7 + 2$ ehk samuti 9.

Sellest nähtub, et lähtevõrrand ja temast poolte astendamisel saadud võrrand pole samaväärsed, s. o. mitte kõik astendamisel saadud võrrandi lahendid pole ühtlasi ka lähtevõrrandi lahenditeks. Pärast poolte ruutu tõstmist saadud võrrandi lahendite hulgas on peale lähtevõrrandi lahendite veel ühe teise niisuguse võrrandi lahendid, mille poolte ruutu tõstmisel tekib sama võrrand mis lähtevõrrandist. Praegusel juhul on niisuguseks võrrandiks

$$x - 10 = -\sqrt{x + 2}.$$

Arv 7 ongi just selle võrrandi lahend: tehes selles võrrandis asenduse $x = 7$, saame vasakul poolel $7 - 10$ ehk -3 ja paremal poolel $-\sqrt{7 + 2}$ ehk samuti -3 . Lõppvõrrandi lahendit, mis ei rahulda lähtevõrrandit, nimetatakse lähte-

võrrandi võõrlahendiks. Arv 7 on seega antud juurvõrrandi võõrlahend ja selle võrrandi ainsaks tõeliseks lahendiks on 14.

Et võrrandi poolte astendamise tagajärjel võib tekkida võõrlahendeid, seda näitame veel järgmise üldisema näite abil.

Olgu antud võrrand

$$x - a = 0,$$

milles ainus lahend on a . Viies võrrandi vabaliikme paremale poolele, saame võrrandi

$$x = a;$$

tõstes ruutu selle võrrandi mõlemad pooled, saame uue võrrandi

$$x^2 = a^2$$

ehk

$$x^2 - a^2 = 0.$$

Selle võrrandi võime esitada kujul

$$(x + a)(x - a) = 0,$$

millest järeldame, et peab olema

$$\text{kas } x - a = 0 \quad \text{või } x + a = 0,$$

ehk

$$\text{kas } x = a \quad \text{või } x = -a.$$

Neist kahest arvust rahuldab lähtevõrrandit ainult esimene; teine rahuldab küll teisendatud võrrandit $x^2 - a^2 = 0$, mitte aga lähtevõrrandit. Ta on võrrandi $x + a = 0$ lahend; lähtevõrrandi suhtes on ta võõrlahend.

Kõigest öeldust järeldub, et võrrandi teisendamisel astendamise teel võib tekkida võõrlahendeid. Seepärast

tuleb igal juhul selgitada, missugused juurvõrrandi lahendamise tulemustest rahuldavad seda võrrandit.

Näide 2. Olgu antud lahendada võrrand

$$\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x + 5} = 1,$$

milles peale ratsionaalse liikme esineb kaks ruutjuurt tundmatuga juuritavas.

Kui tõstaksime ruutu selle võrrandi mõlemad pooled, siis vasakul poolel saaksime peale ratsionaalsete liikmete ka juurte kahekordse korrutise. Et vältida selle keerulise avaldise tekkimist, teisendame võrrandit, jättes vasakule poolele ainult ühe juure, näiteks esimese:

$$\sqrt{3x+4} = 1 + \sqrt{x+5}.$$

Tõstes nüüd võrrandi pooled ruutu, saame:

$$3x+4 = 1 + 2\sqrt{x+5} + x+5$$

ehk, pärast koondamist ja taandamist,

$$x-1 = \sqrt{x+5}.$$

Tõstes uuesti mõlemad pooled ruutu, tekib juba ratsionaalne võrrand, mille koondamisel saame

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Selle võrrandi lahendid on 4 ja -1 .

Tehes lähtevõrrandis asendused $x=4$ ja $x=-1$, veendume, et esimene neist rahuldab seda võrrandit, teine aga ei rahulda. Seega antud võrrandi ainsaks lahendiks on 4.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandid:

306. $\sqrt{5x} = 10$

306. $\sqrt{x^2+8} = \sqrt{2x^2-2x}$

307. $x - \sqrt{3x} = 0$

307. $\sqrt[3]{10x+46} = \sqrt[3]{7x+43}$

308. $\sqrt{x} - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

308. $\sqrt{x^2+10x} = 12$

309. $\sqrt[3]{2x^2} = x$

309. $\sqrt{x+6} = x$

310. $\sqrt{3x+6} = 6$

310. $\sqrt{x^2-9} = \frac{4}{5}x$

311. $\sqrt{x+8} = x+2$

311. $\sqrt{2x} - x = 4$

$$312. \sqrt{x+8} = -x-2$$

$$313. \sqrt{x^2+16} + x = 8$$

$$314. 2\sqrt{x^2+11} - 7 = x$$

$$315. \sqrt{5x+10} + x = 8$$

$$316. \sqrt{8x} - \sqrt{2x} = 2$$

$$317. \sqrt{5x} + 2\sqrt{x} = 12$$

$$318. \sqrt{x} + \sqrt{7x} = 4x$$

$$319. \sqrt{x-5} - \sqrt{x} + 1 = 0$$

$$320. \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{6}$$

$$312. 4x + 2\sqrt{5-4x} = 5$$

$$313. 2a - \sqrt{x^2-8a} = 1$$

$$314. a^2 - nx = n\sqrt{x^2+a^2}$$

$$315. x + \sqrt{x(x-4a)} = 5a$$

$$316. \sqrt{x} + \sqrt{6x} = 5$$

$$317. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x} = 1$$

$$318. \sqrt{x} + \sqrt{2x} + \sqrt{3x} = 10$$

$$319. \sqrt{x} - \sqrt{x-28} = 2$$

$$320. \sqrt{x+7} = \sqrt{x} + \sqrt{5}$$

$$321. \sqrt{x+13} - \sqrt{3x} = 1$$

$$321. 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x+5} = 5$$

$$322. \sqrt{2x} + \sqrt{6x-4} - 2 = 0$$

$$322. \sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} = \sqrt{a-b}$$

$$323. \sqrt{a^2+x} + \sqrt{b^2-x} = a+b$$

$$323. \sqrt{x} + \sqrt{3x-a} = \sqrt{a}$$

$$324. 2\sqrt{x} = \sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1}$$

$$324. \sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+2}$$

$$325. \sqrt{1+3x} + \sqrt{1-3x} - \sqrt{6x} = 0$$

$$325. \sqrt{3x+3} + \sqrt{\frac{1}{3}x} - \sqrt{\frac{x}{3}+7} = 0$$

$$326. \sqrt{x-2} - \sqrt{6x-11} + \sqrt{x+3} = 0$$

$$326. 3\sqrt{x+4} - 2\sqrt{x+9} = 6\sqrt{x+1}$$

$$327. \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 4$$

$$327. \sqrt{\frac{2}{x}} - \sqrt{\frac{x}{2}} = 1$$

$$328. \frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = 4 - \frac{1-\sqrt{x}}{2}$$

$$328. \sqrt{5x} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{3x+1}$$

$$329. \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{3}{2}$$

$$329. \frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-9}} - \frac{1}{\sqrt{x-3}} = 0$$

330. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 1 cm võrra pikem kui üks kaatetest ja kolmnurga übermõõt on 56 cm. Leida kolmnurga küljed.

330. Täisnurkse kolmnurga kaatete vahe on 7 cm ja kolmnurga übermõõt on 30 cm. Leida kolmnurga küljed.

331. Kolmnurga kahe külje suhe on 5:8, kolmas külg on 39 cm ja sellele tõmmatud kõrgus on 24 cm. Leida kolmnurga esimesed kaks külge.

331. Kolmnurga kaks külge suhtuvad nagu 13:15; kolmas külg on 28 cm ja sellele tõmmatud kõrgus on 24 cm. Leida kolmnurga esimesed kaks külge.

Peatükk IV.

NEGATIIVSETE JA MURRULISTE ASTENDAJATEGA ASTMED.

§ 15. Negatiivsete täisarvuliste astendajatega astmed.

Olgu a mingi arv ja m ning n kaks positiivset täisarvu. Me teame, et siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ kui } m > n,$$

ja

$$a^m : a^n = 1, \text{ kui } m = n.$$

Kui $m < n$, kirjutame astmete jagatise murru kujul ja taandame selle murru arvuga a^m :

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m : a^m}{a^n : a^m} = \frac{1}{a^{n-m}};$$

seega

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ kui } m < n.$$

Selleks, et kõik need kolm juhtumit avaldada üheainsa võrdusega, laiendame astme mõistet. Kirjutame nimelt igal juhul, see on, ka siis, kui $m = n$ või $m < n$, et

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Kui $m = n$, seisab vasakul pool võrdusmärki kahe võrdse arvu jagatis ja paremal pool sümbol a^0 . Viimasel ei ole astme definitsiooni järgi mõtet: ei ole võimalik võtta arvu a null korda tegurina. Et kahe võrdse arvu jagatis on 1, siis tuleb sümbolit a^0 mõista arvuna 1:

$$a^0 = 1.$$

Nii on

$$7^0 = 1 \quad (-9)^0 = 1 \quad \left(\frac{5}{8}\right)^0 = 1.$$

Võrdust $a^0 = 1$ loetakse õigeaks ainult siis, kui $a \neq 0$, aga 0^0 jäetakse ilma arvu tähendusest.

Kui $m < n$, siis ülalantud võrduse vasak pool $a^m : a^n$ kujutab murdu $\frac{1}{a^{n-m}}$; sellesama võrduse parema poole a^{m-n} võime kirjutada kujul $a^{-(n-m)}$. Ka sellel sümbolil kui negatiivse astendajaga astmel pole astme definitsiooni järgi mõtet, kuid ülalantud võrduse järgi tähendab ta murdu lugejaga 1:

$$a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Tähistades vahet $n - m$ üheainsa tähega r , näeme, et

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Nii on

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

ja

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = 1 : \frac{5}{2} = \frac{2}{5}.$$

Saab näidata, et tehted astmetega toimuvad ühtede ning samade teoreemide järgi, olenemata sellest, kas astendajad on positiivsed või negatiivsed täisarvud.

Näiteks on

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}.$$

Tõepoolest,

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}.$$

Samuti

$$(a^{-m})^n = a^{-mn}.$$

Tõepoolest,

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

Iga avaldist, milles esineb negatiivseid astendajaid, saame murrujoone abiksvõtmisel kirjutada nii, et esineksid vaid positiivsed astendajad. Näiteks

$$n^2 x^3 \cdot \frac{2}{5} n^{-3} x^{-2} = \frac{2}{5} n^{-1} x = \frac{2x}{5n}.$$

Ülesanded.

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

332. 3^{-2}

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$1,7^{-2}$$

$$4^0 \cdot 5^{-2}$$

$$\left(\frac{3}{8}\right)^{-1} \cdot 2^{-3}$$

333. 2^{-5}

$$\left(1\frac{3}{5}\right)^{-2}$$

$$2,4^{-3}$$

$$(-1)^4 \cdot 8^{-2}$$

$$\left(\frac{7}{12}\right)^{-2} \cdot 6^0$$

332. 6^{-2}

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$$

$$0,9^{-1}$$

$$2^5 \cdot 3^{-4}$$

$$\left(-\frac{16}{7}\right)^{-2} \cdot 4^4$$

333. 10^{-7}

$$\left(3\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

$$3,6^{-2}$$

$$(-4)^{-1} \cdot 10^{-3}$$

$$(-0,2)^{-5} \cdot 10^3$$

Kirjutada järgmised murrud nimetajaist vabade avaldistena:

334. $\frac{1}{a^2}$

$$\frac{2}{n^3}$$

$$\frac{1}{ab^2}$$

$$\frac{0,7}{cx^2}$$

$$\frac{100}{\pi D^2}$$

334. $\frac{1}{x^3}$

$$\frac{4}{v}$$

$$\frac{1}{2x^3}$$

$$\frac{5a}{z^3}$$

$$\frac{3c^3}{10gh^2}$$

335. $\frac{1}{m}$

$$\frac{5}{N^6}$$

$$\frac{u}{3v^4}$$

$$\frac{9a}{8b^2u^3}$$

$$\frac{0,2p}{q^2r^3}$$

335. $\frac{1}{u^5}$

$$\frac{a}{b^4}$$

$$\frac{m}{p^2q^5}$$

$$\frac{8}{10c^2u^4}$$

$$\frac{7s^3}{23rh^2}$$

Kirjutada järgmised avaldised nõnda, et neis esineksid ainult positiivsed astendajad:

336. a^{-1}	$3b^0$	$2^{-1}c^{-1}$
337. N^{-2}	$5u^{-3}$	$7^{-1}m^{-2}$
337. $4h^{-3}$	$8ab^{-2}$	$0,9a^{-2}x^{-3}$
338. $\frac{3^0}{x^{-4}}$	$\frac{m}{2n^{-3}}$	$\frac{4a}{5bc^{-2}}$
338. $\frac{7a^{-1}}{N^{-2}u^{-3}}$	$\frac{m^{-2}n^{-3}}{15p^{-2}}$	$\frac{7au^{-5}}{3a^{-3}u^0}$

Kasutades arvu 10 astmeid, avaldada:

339. 1 km meetrites	339. l m millimeetrites
1 mm sentimeetrites	a cm meetrites
1 kg milligrammides	s m ² aarides
0,7 ha ruutmeetrites	V cm ³ liitrites
1,4 l kuupsentimeetrites	P g tonnides

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

340. $7^3 \cdot 7^{-4}$	$3 \cdot 5^6 \cdot 5^{-8}$
$5^3 \cdot 5^{-1}$	$2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}$
$4^5 \cdot 4^{-3}$	$5,7 \cdot 9^{-3} \cdot 9^0$
$3^{-6} \cdot 3^{-4}$	$10^4 \cdot (5 \cdot 10^{-2})$
$10^{-4} \cdot 10^{-7}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot (2 \cdot 10^{-3})$
340. $7,2 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}$	
$3,43 \cdot 10^{-6} \cdot (0,49 \cdot 10^{-8})$	
$8 \cdot 10^{-9} \cdot 0,125 \cdot 10^{12}$	
$1,74 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^0$	
$2,25 \cdot 10^{-1} \cdot 4 \cdot 10^3$	

Kirjutada järgmised arvud kümne astme kordsetena:

341. 70	341. 900	342. 1400	342. 1 750 000
$\frac{9}{10}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{325}{1000}$	$\frac{283}{10000}$
$\frac{11}{20}$	$\frac{7}{500}$	$\frac{15}{4000}$	$\frac{112}{500000}$
0,72	3,2	1,11	0,033
0,025	1,375	5,0081	0,000 765

Teostada järgmised tehted ja kirjutada tulemus, kasutades vaid positiivseid astendajaid:

343. $c^0 \cdot u^{-3}$	$10p^{-5} \cdot 0,2p^8$	$3a^0b^{-2} \cdot \frac{2}{3}b^{-3}$
343. $g^0 \cdot f^0$	$\frac{3}{2}u^3 : 6u^{-2}$	$4n^2x^2 : 5n^6x^{-3}$
344. $h^{10} : (-h)^0$	$8,5q^{-3} : 1,5q^{-5}$	$10c^2D^{-2} : 0,7c^{-1}D^{-2}$
344. $3m^5 \cdot (-n)^{-1}$	$12,1N^{-4} \cdot 0,1N^7$	$f^0g^1h^2 \cdot \frac{7}{18}f^{-2}g^{-1}h^0$

Lihtsustada järgmised avaldised ja teisendada tulemused nõnda, et neis esineksid üksnes positiivsed astendajad:

345. $(a^{-1})^{-3}$	$(0,3h^{-2})^{-1}$	$(1,2H \cdot 5H)^{-2}$
345. $(cu^{-2})^{-2}$	$(3ax^4)^{-3}$	$(\frac{1}{2}x^{-1} \cdot 3x^{-2})^{-4}$
346. $(2Q^{-3})^{-2}$	$(\frac{4}{5}c^2u^{-3})^{-2}$	$(\frac{7}{22}R^{-2}h^{-1})^{-2}$
346. $[(-a)^2]^{-2}$	$[(-3u)^{-1}]^{-2}$	$[(-0,1f)^{-2}]^{-3}$

§ 16. Murruliste astendajatega astmed.

Olgu a mingi positiivne arv ja m ning n kaks positiivset täisarvu. Astme juurimise teoreemi järgi

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

kui arv m on arvu n kordne. Astendaja $\frac{m}{n}$ on siis täisarv.

Sel puhul sümbol $a^{\frac{m}{n}}$ tähendab $\frac{m}{n}$ teguri korrutist, milles kõik tegurid on võrdsed arvuga a .

Sümbolil $a^{\frac{m}{n}}$ pole esiotra mingit mõtet, kui $\frac{m}{n}$ on murdarv: ei ole ju võimalik võtta arvu a tegurina murdarv korda. Et saada sellele sümbolile mõtet ka siis, kui $\frac{m}{n}$ on murdarv, lepime kokku, et iga juurt $\sqrt[n]{a^m}$ võib kirjutada kujul $a^{\frac{m}{n}}$; seega igal juhul

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Selle kokkuleppe kohaselt

$$49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7,$$

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(27)^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9,$$

$$125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}}.$$

Saab näidata, et kõik tehted astmetega toimuvad ühtede ja samade teoreemide järgi, olenemata sellest, kas astendajad on täis- või murdarvud.

Näiteks on

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Tõepoolest

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = \\ &= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Iga avaldist, milles esineb murrulisi astendajaid, saab kirjutada juuremärgi abiksvõtmisel nii, et esineksid vaid täisarvulised astendajad.

Näide.

$$\left(x^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 5}} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Leida järgmiste sümboolite väärtused:

347.	$9^{\frac{1}{2}}$	347.	$16^{\frac{3}{2}}$	348.	$27^{\frac{1}{3}}$	348.	$64^{\frac{2}{3}}$
	$125^{\frac{2}{3}}$		$169^{\frac{5}{2}}$		$216^{\frac{2}{3}}$		$121^{\frac{3}{2}}$
	$1,44^{\frac{1}{2}}$		$0,001^{\frac{5}{3}}$		$0,343^{\frac{4}{3}}$		$0,729^{\frac{2}{3}}$
	$\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$		$\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$		$\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$		$\left(\frac{1}{512}\right)^{\frac{4}{3}}$

Kirjutada järgmised avaldised juuremärki kasutamata:

349.	\sqrt{N}	349.	$\sqrt[3]{u}$	350.	$\sqrt{x^3}$	350.	$\sqrt[3]{h^2}$
	$\sqrt{5x}$		$\sqrt[3]{7c^2}$		$0,1\sqrt{D^2}$		$\sqrt[5]{(3cu)^3}$
	$\sqrt{cn^3}$		$\sqrt[4]{AVa^2}$		$u\sqrt{u^3}$		$\sqrt{ab^2c^3}$
	$0,7\sqrt[5]{a^2b^3}$		$\frac{3}{4}\sqrt[4]{H^2u^4}$		$\frac{1}{2}x\sqrt[3]{N^4x}$		$\sqrt[5]{A^3x^5}$
	$\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$		$\frac{1}{5\sqrt{k}}$		$\frac{1}{\sqrt[5]{u^2}}$		$\sqrt[3]{\frac{m}{n^2}}$

Kirjutada järgmised avaldised juurtena:

351.	$19^{\frac{1}{2}}$	351.	$7^{\frac{1}{2}}$	352.	$83^{\frac{1}{4}}$	352.	$100^{\frac{1}{5}}$
	$1,3^{\frac{3}{2}}$		$0,58^{\frac{2}{3}}$		$9,2^{\frac{3}{4}}$		$0,06^{\frac{4}{5}}$
	$N^{\frac{1}{6}}$		$u^{\frac{4}{3}}$		$a^{\frac{3}{5}}$		$x^{\frac{5}{2}}$
	$(2h)^{\frac{4}{3}}$		$\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$		$(10f)^{0,1}$		$(mn^2)^{0,3}$
	$aI^{0,5}$		$3QR^{2,4}$		$c\left(\frac{G}{H}\right)^{1,5}$		$m\left(\frac{ax^2}{n}\right)^{0,7}$

Kirjutada järgmised avaldised juuremärki kasutamata:

$$353. \quad \sqrt[3]{a^{-2}} \\ \frac{1}{\sqrt{H^3}} \\ \sqrt[5]{\left(\frac{2}{N}\right)^3} \\ \frac{a}{\sqrt{a+bx}}$$

$$353. \quad \sqrt[5]{x^{-3}} \\ \frac{a}{\sqrt[3]{b^2}} \\ \sqrt{\frac{u^3}{v^2}} \\ \sqrt{\frac{b}{a+bx}}$$

$$354. \quad \sqrt[4]{N^{-5}} \\ \frac{5}{\sqrt{2px}} \\ \sqrt[3]{\frac{a^2}{cx}} \\ \frac{\sqrt{(a+bx)^3}}{a}$$

$$354. \quad \sqrt[4]{c^{-1}d^{-3}} \\ \frac{7}{\sqrt[3]{mn^2}} \\ \sqrt[4]{\frac{\pi D^2}{S^3}} \\ \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{(a+bx)^3}}$$

Kirjutada järgmised avaldised, kasutamata negatiivseid ja murrulisi astendajaid:

355. $27^{-\frac{2}{3}}$	355. $36^{-\frac{1}{2}}$	356. $8^{-\frac{4}{3}}$	356. $64^{-\frac{3}{4}}$
$0,343^{-\frac{1}{3}}$	$0,01^{-\frac{1}{2}}$	$0,0016^{-\frac{3}{4}}$	$0,0169^{-\frac{3}{2}}$
$\left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{3}{2}}$	$\left(\frac{216}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{625}{256}\right)^{-\frac{3}{4}}$
$7D^{-\frac{3}{2}}$	$(2S)^{-\frac{2}{3}}$	$(a^2v)^{-\frac{4}{3}}$	$(\pi R^2H)^{-\frac{5}{3}}$
$3a^{-\frac{3}{4}}f^{-\frac{3}{4}}$	$\left(\frac{3c}{x}\right)^{-\frac{3}{2}}$	$(5kw^3)^{-\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{22}{7}ah^3\right)^{-\frac{2}{3}}$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lihtsate astmetena:

$$\begin{array}{llll}
 357. & a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} & 357. & d^{\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{1}{3}} \\
 & N^{\frac{1}{2}} \cdot N^{-\frac{1}{4}} & & u \cdot u^{-\frac{2}{3}} \\
 & x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} & & l^0 \cdot l^{-\frac{3}{2}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{llll}
 358. & f^{\frac{1}{3}} \cdot f^{\frac{2}{3}} & 358. & h^0 \cdot h^{\frac{3}{4}} \\
 & p^{-\frac{1}{2}} \cdot p^0 & & x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \\
 & D^{\frac{1}{3}} \cdot D^{-\frac{3}{4}} & & c^{-\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{2}{3}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 359. & A : A^{\frac{1}{2}} & 359. & c^2 : c^{\frac{1}{3}} \\
 & c^2 : c^{-\frac{1}{3}} & & f^{\frac{5}{6}} : f^{\frac{1}{2}} \\
 & N^{-1} : N^{\frac{3}{2}} & & z^{\frac{4}{5}} : z^{-1}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{llll}
 360. & x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{3}{2}} & 360. & a^{\frac{3}{5}} : a^{\frac{2}{3}} \\
 & h^{\frac{3}{4}} : h^{\frac{2}{3}} & & u^{\frac{2}{3}} : u^{-2} \\
 & q^0 : q^{-\frac{1}{2}} & & l^{\frac{2}{3}} : l^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

Kirjutada järgmised avaldised juuremärgi kasutamata, toimetada nõutavad tehted ja anda tulemus juure kujul:

$$\begin{array}{lll}
 361. & \sqrt[3]{N} \cdot \sqrt{N} & \sqrt[3]{A^2} : \sqrt{A^3} \\
 & \sqrt[3]{u} \cdot \sqrt[4]{u^2} & \sqrt[4]{c^3} : \sqrt{c} \\
 & \sqrt[3]{D^2} \cdot \sqrt{D^3} & \sqrt[3]{h^4} : \sqrt{h}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} \\
 \sqrt[3]{3x} \cdot \sqrt[3]{9x^2} \\
 \sqrt[4]{a^3x^2} : \sqrt[3]{a^2x^2}
 \end{array}$$

Kirjutada järgmised avaldised, kasutades ainult positiivseid täisarvulisi astendajaid:

$$\begin{array}{llll}
 363. & (x^0)^{\frac{1}{2}} & 363. & (h^2)^{\frac{3}{2}} \\
 & (a^{\frac{2}{3}})^3 & & (N^{-1})^{\frac{2}{3}} \\
 & (I^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{4}{3}} & & (u^{-\frac{1}{2}})^9 \\
 & N^{\frac{2}{3}} \cdot N^{\frac{3}{5}} & & (2u^{\frac{3}{4}})^4 \\
 & \frac{(4D^2)^{\frac{3}{2}}}{(3D^3)^{\frac{2}{3}}} & & \frac{(a^{-3})^{\frac{1}{3}}}{(8b)^{-\frac{2}{3}}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{llll}
 364. & (u^{-1})^{\frac{2}{3}} & 364. & (D^{-1})^{-\frac{1}{2}} \\
 & (c^{-2})^{-\frac{1}{3}} & & (x^{-\frac{1}{3}})^6 \\
 & (F^8)^{\frac{3}{4}} & & (c^0)^0 \\
 & x : x^{-\frac{3}{4}} & & H^2 : H^{\frac{2}{3}} \\
 & \left(\frac{a^{\frac{5}{6}}}{\frac{1}{3}}\right)^4 & & \left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^8
 \end{array}$$

Peatük V.

KORDAMISÜLESANDED.

Lahendada järgmised võrrandid:

$$365. \frac{9}{9x^2 + x - 3} = \frac{4}{4x^2 - 5x + 15}$$

$$365. \frac{3}{3y^2 + 2y + 1} = \frac{7}{7y^2 - 2y + 9}$$

$$366. \frac{7}{x + 4} + \frac{5}{x - 5} = \frac{11x - 13}{x^2 - x - 20}$$

$$366. \frac{4}{y + 2} + \frac{3}{y - 7} = \frac{3(y + 1)}{y^2 - 5y - 14}$$

$$367. \frac{6x + 4}{3x - 2} + \frac{4x - 3}{6x^2 - 5x - 6} = \frac{4x - 5}{2x - 3}$$

$$367. \frac{5}{4x + 5} + \frac{31}{8x^2 - 18x - 35} = \frac{2}{2x - 7}$$

$$368. \frac{5}{3x - 4} - \frac{11x + 14}{9x^2 - 16} = \frac{7}{3x + 4}$$

$$368. \frac{3}{x + 3} + \frac{2}{x - 3} = \frac{x + 5}{x^2 - 9}$$

$$369. \frac{5}{x + a} = \frac{3}{a - x} + \frac{2x}{x^2 - a^2}$$

$$370. \frac{y}{4a - 3} + \frac{y}{4a + 3} = \frac{4a}{16a^2 - 9}$$

$$370. \frac{1}{px - pq} + \frac{1}{px - pr} = \frac{1}{qx - qr} + \frac{1}{qx - q^2}$$

$$371. \frac{y}{(m - n)n} - \frac{y}{(m - n)m} = \frac{m + n}{mn}$$

$$371. \frac{x}{m - 4} + 5 = m + \frac{8}{m + 4} - \frac{y}{16 - m^2}$$

$$372. (3x - 2)(4x - 3) = 0$$

$$372. (x - 9)(x + 9) = 0$$

$$373. (3x - 2)^2 = 0$$

$$373. (x + 11)^2 = 0$$

$$374. (6x - 1)^2 = 4$$

$$374. (x - 6)^2 = 9$$

$$375. \frac{7}{5x} - \frac{1}{2x} = \frac{x - 7}{20}$$

$$375. \frac{2x + 11}{4} = \frac{x - 7}{2} + x^2$$

$$376. \frac{x^2 + 2}{2} = \frac{x(x + 1)}{3} + \frac{x + 3}{4}$$

$$376. \frac{x + 2}{x + 3} = 2 + \frac{x + 4}{x - 3}$$

$$377. \frac{3}{x + 3} + \frac{4}{x - 3} = \frac{4x - 3}{x^2 - 9}$$

$$377. \frac{3}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{5}{(x + 3)(2x + 3)}$$

$$378. \frac{x + 1}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{x + 2}{(x - 3)(x + 4)}$$

$$378. \frac{x - 5}{2x^2 + x - 1} = \frac{x - 6}{2x^2 + 3x - 2}$$

$$379. \frac{x - 1}{2x - 5} + \frac{2x - 1}{2x + 5} = \frac{3(x - 2)}{4x^2 - 25}$$

$$379. \frac{x^2}{x^3 - 1} = \frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{x - 1}$$

$$380. \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{x + 4}{x^3 + 1} = \frac{3}{x^2 - x + 1}$$

$$380. \frac{5(x + 1)}{2x + 1} = \frac{2x + 3}{x} + \frac{x^2 + 6}{2x^2 + x}$$

$$381. \frac{x + 1}{3} + \frac{3(x - 1)}{4} = (x - 3)^2 + 1$$

$$381. \frac{x(x - 9)}{18} + \frac{(x - 12)^2}{6} - \frac{x}{9} = 5 + \frac{(x - 14)^2}{2}$$

$$382. \frac{x^2 - 30x + 200}{10} = \frac{(34 - x)(40 - x)}{2} + \frac{(x - 30)(5 - x)}{3}$$

$$383. \frac{6}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{x+4}{x+1}$$

$$383. \frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2x+13}{x+1}$$

$$384. x^2 - 2cx + (c^2 - d^2) = 0$$

$$384. x^2 - (a-b)x - ab = 0$$

$$385. x^2 - (h+2k)x + k(h+k) = 0$$

$$385. \frac{n}{x} + \frac{n-1}{x-2} = 1$$

$$386. \frac{1}{x+m} + \frac{1}{x-m} = \frac{4}{3m}$$

$$386. \frac{x+n}{x-n} + \frac{x-n}{x+n} = \frac{7}{12}$$

387. Üks kaatet on 120 cm pikk, teine 80 cm lühem kui hüpotenuus. Kui pikk on hüpotenuus?

387. Pool rombi pikemast diagonaalist on 2 cm lühem kui rombi külge; lühem diagonaal on 12 cm pikk. Kui pikk on külge?

388. Ruudukujulise tiigi keskpaigas kasvab pilliroog, mille veepealne osa on 1 jalg pikk. Kui selle roo tipp tõmmati tiigi külje keskkoha, puudutas tipp parajasti veepinda. Tiigi külje pikkus on 10 jalga. Eeldades, et pilliroog jäi sirgeks, leida, kui sügav on tiik. (Tsin Kiu Tšaon, umbes 2600 a. e. m. a.)

388. Oja ääres, mille laius on 4 m, kasvas pappel. Torm on ta murdnud 3 jala kõrguselt nii, et latv just üle oja teisele kaldale ulatub. Kui kõrge oli pappel? (Bhaskara, umbes a. 1150.)

389. Kas on olemas kolm järjestikulist paarisarvu, mis võiksid olla täisnurkse kolmnurga külgede mõõt arvudeks?

389. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 25 cm; üks kaatet on teisest 17 cm võrra pikem. Kui pikk on lühem kaatet?

Mitu punkti, milledest ükski kolmik ei asetse sirgjoonel, määravad

$$390. \quad 351 \text{ sirgjoont?}$$

$$390. \quad 465 \quad ,,$$

Vördhaarse kolmnurga kõrgus on h cm; aluse ja haara summa on s cm. Kui pikk on haar?

$$391. \quad h = 24; \quad s = 39.$$

$$391. \quad h = 40; \quad s = 59.$$

392. Reisija kavatseb matkata 1200 km. Kui ta iga päev matkab 10 km vähem kui kavatsetud, siis kestab reis 6 päeva rohkem kui kavatsetud. Mitu km kavatses ta matkata iga päev?

392. Veepaak täitub kahe avatud kraani kaudu m minutiga. Esimene kraan üksi täidab veepaagi t minuti võrra kiiremini kui teine kraan. Mitme minutiga täitub veepaak, kui esimene kraan on üksi avatud?

$$1. \quad m = 9; \quad t = 24;$$

$$2. \quad m = 10; \quad t = 48.$$

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

$$393. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y = 12 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$393. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 20x - 16y + 139 = 0 \\ 4x - 3y - 16 = 0 \end{cases}$$

$$394. \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ (x + 3)(y + 4) = 48 \end{cases}$$

$$394. \quad \begin{cases} x - y = 5 \\ (x + 5)(y + 8) = 168 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
395. & \begin{cases} (x+y)^2 - (x-y)^2 = 36 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 109 \end{cases} \\
395. & \begin{cases} (x+y)^2 - (x-y)^2 = 96 \\ x^2 - 3xy + y^2 = 1 \end{cases} \\
396. & \begin{cases} (x+1)^2 + (y+2)^2 = 45 \\ (x+1) + (y+2) = 9 \end{cases} \\
396. & \begin{cases} (x+3)^2 + (y+5)^2 = 136 \\ (x+3) - (y+5) = 4 \end{cases} \\
397. & \begin{cases} 5x^2 - 8xy + 3y^2 - 2x + 9y = 320 \\ x:y = 7:4 \end{cases} \\
397. & \begin{cases} 9x^2 - 12xy - 7y^2 - 15x + 12y = 206 \\ \frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{3} \end{cases} \\
398. & \begin{cases} (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4(a-b)^2 \\ x + xy + y = (a-b)^2 + 2(a-b) \end{cases} \\
399. & \begin{cases} (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4(a+b)^2 \\ x + xy - y = a^2 + 2ab + b^2 \end{cases} \\
399. & \begin{cases} (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4(a^2 - b^2) \\ x^2 + 3xy + y^2 = 5a^2 - b^2 \end{cases} \\
400. & \begin{cases} x(x+1) + y(y-1) = 2(a^2 + b + b^2) \\ x - y = 2b \end{cases} \\
400. & \begin{cases} x(x+a) + y(y+a) = 36a^2 \\ x + y = 7a \end{cases}
\end{aligned}$$

Ristküliku diagonaali pikkus on d cm; tema pindala on S cm². Kui pikad on küljed?

$$401. \quad d = 17; \quad S = 120.$$

$$401. \quad d = 109; \quad S = 5460.$$

Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi pikkus on c cm; pindala on S cm². Kui pikad on kaatetid?

$$402. \quad c = 13; \quad S = 30.$$

$$402. \quad c = 89; \quad S = 1560.$$

Võrdhaarse kolmnurga haara pikkus on b cm; tema pindala on S cm². Arvutada alus ja kõrgus.

$$403. \quad b = 25; \quad S = 168.$$

$$403. \quad b = 4,49; \quad S = 9,828.$$

404. Vankri esiratas teeb 240-meetrilisel teel 20 pööret rohkem kui tagumine ratas. Kui kummagi ratta ümbermõõt oleks 1 m võrra pikem, siis teeks esimene ratas samal teel 12 pööret rohkem kui tagumine ratas. Leida kummagi ratta ümbermõõt.

Arendada järgmiste hulkliikmete ruudud:

$$405. \quad (1 - a + 2a^2)^2 \quad 406. \quad \left(2x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 4\right)^2$$

$$405. \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right)^2 \quad 406. \quad \left(a^3 - \frac{2a^2}{3} - \frac{a}{2} - 6\right)^2$$

Lihtsustada järgmised avaldised:

$$407. \quad \left(\frac{2}{3}a^2\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4a^2}\right)^2 \quad 408. \quad \left(\frac{2u}{v}\right) \cdot \left(\frac{3v}{2u}\right)^3$$

$$407. \quad \left(\frac{4x^3}{y^2}\right)^2 : \left(-\frac{2x}{y}\right)^3 \quad 408. \quad \left(\frac{5c^2}{2d}\right)^{n+1} : \left(-\frac{5c^2}{2d}\right)^{n+1}$$

$$409. \quad \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{32}$$

$$410. \quad \sqrt[4]{a^{-13}} : \sqrt[4]{a^{-1}}$$

$$411. \quad \sqrt[n]{a^{-3n} b^{2n}}$$

$$409. \quad \sqrt[3]{750} : \sqrt[3]{6}$$

$$410. \quad \sqrt[3]{a^{3n+3}} : \sqrt[3]{a^{n+3}}$$

$$411. \quad \sqrt[5]{-a^{16}} : \sqrt[5]{a}$$

$$412. \quad \sqrt[3]{\frac{27a^3}{64}} + 2\sqrt[4]{\frac{81b^8}{16}}$$

$$412. \quad (\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2})$$

$$413. \quad \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$413. \quad \frac{\sqrt{m^2p - m^2q} - \sqrt{n^2p - n^2q}}{\sqrt{p - q}}$$

Vabastada järgmiste murdude nimetajad irratsionaalseist arvudest:

$$\cancel{414.} \quad \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \quad 415. \quad \frac{1}{\sqrt{5+1}} \quad 416. \quad \frac{8-3\sqrt{2}}{8+3\sqrt{2}}$$

$$\cancel{414.} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{25}} \quad 415. \quad \frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad 416. \quad \frac{2\sqrt{2}+5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-5\sqrt{5}}$$

Lihtsustada järgmised avaldised:

$$\cancel{417.} \quad \frac{3}{\sqrt{3}} \quad 418. \quad \frac{16}{\sqrt{8}} \quad 419. \quad \frac{21}{\sqrt{7}} \quad 420. \quad \frac{30}{\sqrt[3]{25}}$$

$$\cancel{417.} \quad \frac{h}{\sqrt[3]{h}} \quad 418. \quad \frac{a}{b\sqrt{a^2}} \quad 419. \quad \frac{c^2}{a\sqrt{c}} \quad 420. \quad \frac{x}{\sqrt[5]{x^2}}$$

Lihtsustada järgmised juured ning leida nende väärtused ruut- ja kuupjuurte tabelite abil:

$$\cancel{421.} \quad \sqrt{\frac{2}{25}} \quad 422. \quad \sqrt[3]{\frac{3}{8}} \quad 423. \quad \sqrt[4]{\frac{10}{81}} \quad 424. \quad \sqrt[4]{\frac{1}{625}}$$

$$\cancel{421.} \quad \sqrt{\frac{9}{5}} \quad 422. \quad \sqrt[3]{\frac{27}{6}} \quad 423. \quad \sqrt[3]{4\frac{1}{2}} \quad 424. \quad \sqrt[3]{\frac{1}{9 \cdot 64}}$$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lihtsate juurte abil ja koondada:

$$\cancel{425.} \quad \sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{20} - 5\sqrt{\frac{1}{18}} - \frac{1}{6}\sqrt{245} - \sqrt{24\frac{1}{2}}$$

$$\cancel{425.} \quad \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{\frac{a^5}{8}} - 3a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$$

Arendada järgmised kaksliikmete ruudud:

$$426. \quad (\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}})^2$$

$$426. \quad \left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{3}{\sqrt{ab}}\right)^2$$

Lihtsustada järgmised avaldised:

$$427. \sqrt{\frac{25}{27}} : 10 - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$427. \sqrt{3 - \frac{6a}{b} + \frac{3a^2}{b^2}}$$

$$428. \frac{5}{4 - \sqrt{11}} - \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} - \frac{2}{3 + \sqrt{7}}$$

$$428. \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \right)$$

Lihtsustada avaldised:

$$429. \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}} \qquad 429. \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x-a}}, \frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{a^4}}$$

430. Näidata, et $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{18}$.

Koostada ruutvõrrandid, mille lahendid on:

$$431. 2 + \sqrt{3} \text{ ja } 2 - \sqrt{3}$$

$$\frac{5 + \sqrt{7}}{6} \text{ ja } \frac{5 - \sqrt{7}}{6}$$

$$431. -3 + \sqrt{5} \text{ ja } -3 - \sqrt{5}$$

$$\frac{-9 + \sqrt{11}}{10} \text{ ja } \frac{-9 - \sqrt{11}}{10}$$

Teisendada järgmised avaldised nii, et saaduses nimetaja oleks ratsionaalne:

$$432. \frac{1}{n\sqrt{3}-1} - \frac{1}{n\sqrt{3}}$$

$$432. \frac{\sqrt{2}}{p-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

$$433. (-5)^3 - (-2)^0 + (-1)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$$

$$433. \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{5}{6}\right)^0$$

Vabastada järgmised avaldised negatiivseist astendajaist ja lihtsustada tulemus:

$$\checkmark 434. (a^5 - a^{-3}) : (a - a^{-3})$$

$$\checkmark 434. (a^{-4} - a^{-6}) : (a^{-2} + a^{-3})$$

$$\checkmark 435. \text{ Näidata, et } a = b^{\pm 1}, \text{ kui } a + a^{-1} = b + b^{-1}.$$

435. Näidata, et

$$(a - b)^{-2} - (a + b)^{-2} = 4ab(a^2 - b^2)^{-2}.$$

436. Arendada avaldis $(a^x - a^{-x})^2$.

\checkmark 437. Kirjutada järgmised avaldised juuremärgita:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{2}{x}\right)^3} \qquad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} \qquad \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Kirjutada järgmised avaldised juurtena, kasutades ainult positiivseid juuriid:

$$\checkmark 438. \quad ax^{\frac{1}{2}} \qquad (ab)^{\frac{2}{3}} \qquad (x-y)^{1\frac{1}{2}}$$

$$\checkmark 438. \quad a^{-\frac{1}{3}} \qquad a(2n)^{-\frac{3}{4}} \qquad (u+v^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

439. Arendada korrutis $(x^{\frac{1}{2}} - 5)(x^{\frac{1}{2}} + 4)$.

439. Arendada avaldis $(a^x - a^{\frac{1}{x}})^2$.

440. Taandada murd $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$.

441. Näidata, et

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{9}, \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

442. Lihtsustada avaldised:

$$\checkmark \sqrt{10} : 0,81^{-\frac{1}{4}}, \quad \sqrt[3]{25} \cdot (0,04)^{-\frac{1}{6}}, \quad 0,16^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{5}.$$

443. Leida avaldise $(7\frac{19}{32})^{-0,4}$ väärtus.

Lihtsustada järgmised korrutised ja jagatised:

$$444. (\sqrt[3]{3x^2})^2 \cdot \sqrt[5]{\frac{2y}{81x^5}}$$

$$444. 5c^2 : (2,5c \sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}})$$

$$445. \sqrt{\frac{2x}{9}} : (\frac{1}{3} \sqrt{6x})$$

$$445. \sqrt[3]{\frac{s}{t}} : (5s)^{\frac{1}{3}}$$

$$446. \sqrt[3]{7a} \sqrt{2x^2} : (6\sqrt{a})$$

$$446. (\frac{1,5}{2}a)^3 : (\frac{0,375}{a})^3$$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lihtsate ja väheste juurte abil:

$$447. 6\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{6}} + \sqrt{16\frac{2}{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$448. 8,5\sqrt{4\sqrt{63}} - 10\sqrt{3\sqrt{7}} - 3\sqrt{6\sqrt{28}}$$

$$449. \sqrt{x^3} - \sqrt{4x} + \frac{3x}{\sqrt{x}} - 4x^3 \sqrt{\frac{1}{x^3}}$$

Leida järgmiste avaldiste väärtused:

$$450. 144^3 : 72^3$$

$$450. \sqrt[3]{\left(\frac{8}{343}\right)^{-2}}$$

$$\left(-5\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(1\frac{7}{9}\right)^{-1}$$

$$\left(4\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{4}}{3}\right)^3$$

$$9^{-\frac{1}{2}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + 0,25^{-1\frac{1}{2}}$$

Kirjutada avaldis ainult ühe juuremärgi abil:

$$451. \sqrt[3]{\frac{1}{a} \sqrt[4]{a^5 \sqrt{\frac{1}{a}}}}$$

$$451. \frac{\sqrt[3]{x \sqrt[4]{x^2 \sqrt{x^3}}}}{\sqrt[4]{x^3 \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x}}}}$$

452. Arendada binoomi ruut:

$$\left(\frac{a}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{3}{\sqrt{b}}\right)^2.$$

453. Lihtsustada avaldis:

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}.$$

Lahendada järgmised võrrandid:

$$454. \quad x + \sqrt{16 + x^2} = 8$$

$$455. \quad \sqrt{x-7} - \sqrt{x+1} = -2$$

$$456. \quad \sqrt{x+20} - \sqrt{x-1} = 3$$

$$457. \quad \frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = 4 - \frac{1-\sqrt{x}}{2}$$

$$458. \quad \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}} - 2\sqrt{\frac{x-4}{x+4}} = \frac{7}{3}$$

VASTUSEID.

5. $x_1 = 2; x_2 = -4$.
10. $x_1 = 0; x_2 = 4a$.
15. $x_1 = 0; x_2 = 0$.
20. $x_1 = 0; x_2 = 0$.
24. $x_1 = 0,7; x_2 = -0,3$.
26. $x_1 = -1; x_2 = -2\frac{1}{2}$.
31. $x_1 = 1; x_2 = -4$.
34. $x_1 = 3a; x_2 = 2a$.
41. $x_1 = 2a; x_2 = -\frac{a}{2}$.
43. $x_1 = 2a; x_2 = -\frac{a}{2}$.
46. $x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = -7$.
54. $x = 13$.
57. $x_1 = 0; x_2 = a$.
72. $x^2 - 3\sqrt{3} \cdot x + 6 = 0$.
80. $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$.
82. $b = -6$.
83. $y^2 + 2py + 4q = 0$.
85. $y^2 - (4-p)y + q - 2p + 4 = 0$.
86. $q = -24$.
88. $x^2 - (a+b)x + ab = 0$.
89. $(x+5)(x+7)$.
98. $x^2 - 4$.
99. $\frac{n-2}{n-1}$.
100. 1.
101. $x_1 = 7; x_2 = 2$.
102. $\frac{3}{2}$ või $-\frac{2}{3}$.
108. 30 t.; 20 t.
120. 20⁰/₀.
126. $\frac{q + 2\sqrt{qp} + p}{q-p} \cdot m$ km
 ehk $\frac{\sqrt{q} + \sqrt{p}}{\sqrt{q} - \sqrt{p}} \cdot m$ km.
127. 1. $x < 6$.
 2. $x < 1\frac{1}{6}$.
128. $x > 7$ ja $x < 3$.
130. $x > 4$ ja $x < -\frac{1}{4}$.
131. $x > 5$ ja $-1 < x < 2$.
132. $x > 2$ ja $-2 < x < 2$.
143. $\begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = a; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -a \\ y_2 = -a. \end{cases}$
148. $\begin{cases} x_1 = 13 \\ y_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -13. \end{cases}$
152. $\begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = a^2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -a \\ y_2 = -a^2. \end{cases}$

$$155. \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \sqrt{\frac{76}{31}} \\ y_3 = 2\sqrt{\frac{76}{31}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -\sqrt{\frac{76}{31}} \\ y_4 = -2\sqrt{\frac{76}{31}}. \end{cases}$$

$$164. \begin{cases} x_1 = a - 3 \\ y_1 = a + 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3 - a \\ y_2 = -3 - a. \end{cases}$$

$$172. 420 \text{ m minutis ja} \\ 240 \text{ m minutis.}$$

$$216. 256a^8 - 128a^6c^2 + \\ + 24a^4c^4 + \frac{1}{16}c^4 - 2a^2c^6.$$

$$231. 5.$$

$$233. 4,64.$$

$$259. \sqrt[3]{6}; \sqrt[3]{H}; \frac{P}{Q}.$$

$$268. 3\sqrt[3]{3}; a\sqrt[5]{a}; a^2b^2.$$

$$278. \sqrt[12]{29}; \sqrt[12]{a^4x^3}; \sqrt[3]{N^2f^3}.$$

$$290. \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{15} \approx 0,3983;$$

$$3\sqrt{11} + 4\sqrt{5} \approx 18,8942;$$

$$\frac{75 + 20\sqrt{5}}{29} \approx 4,128.$$

$$295. (m+n)\sqrt[3]{7}; (a+b)\sqrt[3]{x}; \\ -4\sqrt[4]{3f}.$$

$$305. A - B; 9h - 4k; ab - 1.$$

$$306. x = 20.$$

$$310. x = 10.$$

$$315. x = 3.$$

$$323. x_1 = 0; x_2 = b^2 - a^2.$$

$$329. x = \frac{12}{13}.$$

$$368. x = -6,8.$$

$$380. x_1 = 0; x_2 = 2.$$

$$386. x_1 = 2m; x_2 = -\frac{m}{2}.$$

$$390. 27 \text{ punkti.}$$

$$400. \begin{cases} x_1 = a + b \\ y_1 = a - b; \\ x_2 = b - a \\ y_2 = -b - a. \end{cases}$$

$$434. a^4 + 1.$$

$$436. a^{2x} - 2 + a^{-2x}.$$

$$437. \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{3}{4}}; a^{\frac{1}{6}};$$

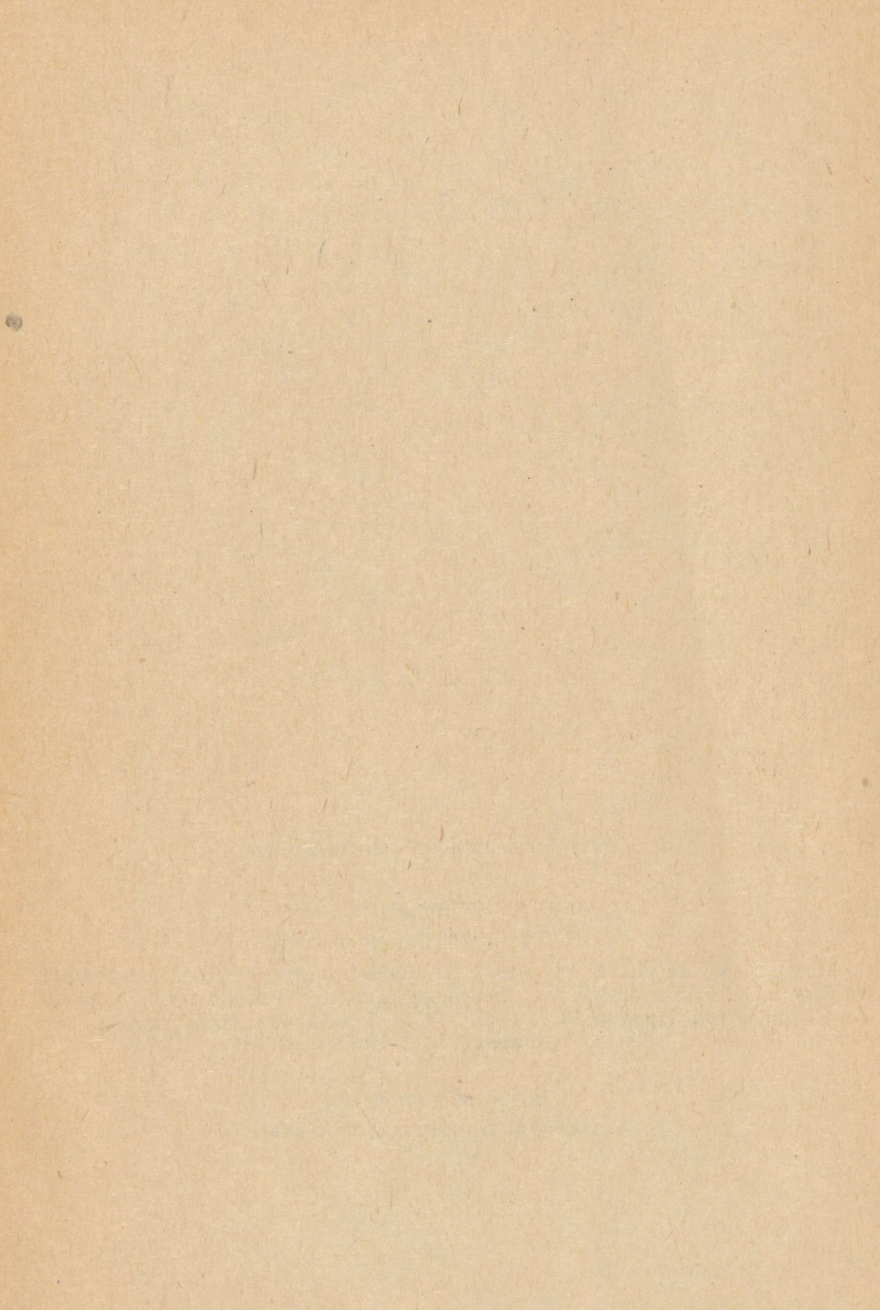
$$(a+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (a-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$440. x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}.$$

$$443. \frac{4}{9}.$$

SISUKORD.

	Lk.
Peatükk I. Ruutvõrrandid ja nende süsteemid täheliste kordajatega.	
§ 1. Täheliste kordajatega ruutvõrrand	3
§ 2. Võrratuste teisendamine	26
§ 3. Ruutvõrrandisüsteem täheliste kordajatega	36
Peatükk II. Aste.	
§ 4. Astendamine	53
§ 5. Korrutise astendamine ja võrdsete astendajatega astmete korrutamine	55
§ 6. Jagatise astendamine ja võrdsete astendajatega astmete jagamine	57
§ 7. Võrdsete alustega astmete korrutamine ja jagamine. Astme astendamine	58
§ 8. Hukkliikme ruut	62
Peatükk III. Juur.	
§ 9. Juurimine	68
§ 10. Juure leidmine proovimise teel	72
§ 11. Ruutude, kuupide, ruutjuurte ja kuupjuurte tabelid	75
§ 12. Tehted juurtega	81
§ 13. Juur-avaldiste teisendamisi	96
§ 14. Juurvõrrandid	104
Peatükk IV. Negatiivsete ja murruliste astendajatega astmed.	
§ 15. Negatiivsete täisarvuliste astendajatega astmed	111
§ 16. Murruliste astendajatega astmed	115
Peatükk V. Kordamisülesanded	120
Vastuseid	131



III, parandatud ja täiendatud trükk.

Vastutav toimetaja A. Humal.

Keeleline toimetaja E. Kivistik.

Ladumisele antud 24. VI 1948. Trükkimisele antud 18. VIII 1948. Trükiarv 5200. Paber 56×79, $\frac{1}{16}$. Trükipoognaid 8,5. Trükitähti trükipoognas 34.560. Arvutuspoognaid 7,3. MB-07354. Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4. Tellimise nr. 1297.

На эстонском языке.

А. Вихман. Алгебра для IX класса.

RBL. 2.50

A-17387

[Handwritten mark]

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00426578 3