

ZUR METHODIK
DER
SEISMOMETRISCHEN BEOBACHTUNGEN.

Von

Fürst B. Galitzin.

ST. PETERSBURG.

BUCHDRUCKEREI DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Wass. Ostr., 9 Linie, № 12.

1903.

№ 2368

rung steht und zwar einer Verschiebung der Erdoberfläche senkrecht zur normalen Lage des Pendels.

Nehmen wir ein im Raume festes Coordinatensystem x, y, z an, wobei die xy -Ebene mit der Erdoberfläche am gegebenen Ort zusammenfallen soll, und sei bei einem Erdbeben nur eine Verschiebung parallel der x -Axe vorhanden, etwa

$$x = f(t).$$

Diese unbekannt Function der Zeit soll nun aus den Aufzeichnungen des Horizontalpendels ermittelt werden.

Bei dieser Erschütterung zeichnet das Horizontalpendel auf der geschwärzten drehbaren Trommel eine Curve auf. Die Ordinaten dieser Curve wollen wir durch ξ bezeichnen. ξ ist eine bekannte Function der Zeit, etwa

$$\xi = F(t),$$

da bei der Drehung der Trommel die Secunden auf dem Papier direct registriert werden.

Die Aufgabe der Seismometrie besteht eben darin, aus dem bekannten Gang der Function $F(t)$ die unbekannt Function $f(t)$ abzuleiten.

In den meisten Fällen unterscheidet sich die Function $F(t)$, welche von dem Horizontalpendel direct geliefert wird, ganz erheblich von der gesuchten Function $f(t)$, was die Auswerthung von Seismogrammen sehr erschwert; die Ursache dieser Abweichung ist die Eigenbewegung des Apparates.

Deshalb habe ich mir hier die Aufgabe gestellt: Wäre es nicht möglich die Eigenschaften des Horizontalpendels, respective aller anderer seismometrischer Apparate, so abzuändern, dass ihre Eigenbewegung so weit wie möglich fortfällt, und die Aufzeichnungen derselben sich möglichst nah dem wahren Gang der entsprechenden Componente der Erderschütterung anschliessen.

Dieses lässt sich in der That erreichen.

Dazu ist es nur nothwendig, das Horizontalpendel mit einer sehr starken Dämpfung zu versehen, um seine eigene periodische Bewegung in eine rein aperiodische umzuwandeln, d. h., ist das Horizontalpendel, bei Abwesenheit irgend welcher Erderschütterung, von seiner Ruhelage abgelenkt und alsdann sich selbst überlassen, so kehrt dasselbe in seine frühere Gleichgewichtslage allmählig zurück, ohne Schwingungen um die Ruhelage auszuführen.

In diesem Falle wird der Einfluss der Eigenbewegung des Horizontalpendels ungemein geschwächt und in einigen Specialfällen sozusagen fast ganz eliminirt, wie wir es später anderweitig sehen werden.

Um die Dämpfung eines Horizontalpendels zu vergrössern und die Bewegung desselben aus einer periodischen in eine aperiodische umzuwandeln, kann man sich der gewöhnlichen Reibung nicht bedienen. Diese starke Dämpfung habe ich auf electromagnetischem Wege erzielt und zwar in folgender Weise.

Eine viereckige Kupferplatte wird von der Seite an dem Arm eines Horizontalpendels befestigt. Diese Platte befindet sich theilweise in einem möglichst homogenen magnetischen Felde von einem ziemlich kräftigen Electromagnet. Bei der Bewegung des Pendels verschiebt sich die Platte im magnetischen Felde, wodurch Ströme in ihr erzeugt werden, welche dämpfend auf die Bewegung des Pendels wirken.

Durch Regulierung der Stromstärke im Electromagnet kann die Dämpfung des Horizontalpendels, wie die Beobachtungen es bestätigt haben, beliebig vergrössert und sogar die periodische Eigenbewegung des Pendels in eine aperiodische umgewandelt werden.

Auf diese Frage werde ich in einem späteren Paragraphen nochmals zurückkommen.

Ogleich die Einführung einer starken Dämpfung sich für den hier zu verfolgenden Zweck so vortheilhaft erweist, hat sie jedoch den Nachtheil, die Amplituden der Ablenkungen des Horizontalpendels von der Ruhelage zu verkleinern, so dass schwache Erdbeben möglicherweise gar nicht registriert werden.

Deshalb ist es nothwendig, bei Einführung einer solchen Dämpfung zugleich ein Mittel zu ersinnen, um die Empfindlichkeit der Ablesung eines Horizontalpendels zu vergrössern. Die Einführung irgend welcher Hebelvorrichtungen zu diesem Zweck erweist sich als unpraktisch, da solche Vorrichtungen bekanntlich sehr oft störend wirken und neue Fehler mit sich bringen.

Um die Empfindlichkeit der Aufzeichnungen des Horizontalpendels zu vergrössern, habe ich mich einer besonderen electromagnetischen Vorrichtung bedient, unter Anwendung eines aperiodischen Galvanometers. Wie die weiter zu beschreibenden Beobachtungen es gezeigt haben, hat sich diese Vorrichtung sehr gut bewährt.

Eine zweite Methode gründet sich auf reine magnetische Wechselwirkungen.

Beide Methoden, deren Beschreibung ich erst später geben werde, gestatten die Empfindlichkeit der Ablesung eines Horizontalpendels, resp. irgend welches anderen seismometrischen Apparates, in beliebigem Maasse zu vergrössern.

§ 2.

Die Bewegung eines Horizontalpendels unter starker Dämpfung.

Die Differentialgleichung der Bewegung eines Horizontalpendels unter dem Einfluss nur einer Componente x der Erderschütterung lässt sich in folgender Weise schreiben¹⁾:

$$\theta'' + 2\epsilon\theta' + \frac{g i_0}{l} \cdot \theta + \frac{1}{l} x'' = 0. \dots\dots\dots (1)$$

Hierin bedeuten: θ den Ablenkungswinkel des Horizontalpendels von seiner Ruhelage, l — die reducierte Länge des Pendels, i_0 — die Neigung der Drehungsaxe desselben gegen die Verticale, g — die Beschleunigung der Schwere und ϵ — die Dämpfungsconstante.

Setzen wir

$$\theta l = \xi,$$

wo ξ die entsprechende lineare Ablenkung des Horizontalpendels von seiner Gleichgewichtslage bedeutet, und ausserdem

$$\frac{g i_0}{l} = n^2, \dots\dots\dots (2)$$

so lässt sich die Differentialgleichung (1) in folgender Form schreiben:

$$\xi'' + 2\epsilon\xi' + n^2\xi + x'' = 0. \dots\dots\dots (3)$$

Wenn keine Erschütterung vorhanden ist ($x'' = 0$), so geht die Differentialgleichung der Bewegung des Horizontalpendels (eigene Bewegung) in die folgende über:

$$\xi'' + 2\epsilon\xi' + n^2\xi = 0. \dots\dots\dots (4)$$

Ist $n > \epsilon$, so führt das Horizontalpendel ($x'' = 0$) periodische Schwingungen aus und zwar mit abnehmenden Amplituden, wobei die Periode einer vollständigen Schwingung sich nach folgender Formel berechnen lässt:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - \epsilon^2}}. \dots\dots\dots (5)$$

In der That lässt sich das allgemeine Integral der Gleichung (4) in folgender Form wiedergeben:

$$\xi = Ae^{-\epsilon t} \sin(pt + a), \dots\dots\dots (6)$$

1) Siehe meinen Aufsatz «Ueber seismometrische Beobachtungen». l. c. p. 143, Formel (87).

wo

$$p = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{n^2 - \epsilon^2} \dots\dots\dots (7)$$

und A und a zwei Integrationsconstanten sind, welche unmittelbar von den Anfangsbedingungen der Bewegung abhängen.

Je stärker die Dämpfung, d. h. je grösser ϵ ist, desto stärker nehmen die maximalen Ausschläge des Horizontalpendels ab.

Ist nun die Dämpfung so stark geworden, dass $\epsilon > n$ wird, so erfährt das Bewegungsgesetz des Horizontalpendels eine totale Aenderung.

In diesem Falle wird die Bewegung eine aperiodische sein.

Das allgemeine Integral der Gleichung (4) nimmt in diesem Falle folgende Form an:

$$\xi = C_1 e^{-\mu_1 t} + C_2 e^{-\mu_2 t}, \dots\dots\dots (8)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \epsilon + \alpha \\ \mu_2 &= \epsilon - \alpha \\ \text{und} \\ \alpha &= \sqrt{\epsilon^2 - n^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ist.

C_1 und C_2 sind zwei Integrationsconstanten.

μ_1 und μ_2 sind beide positiv.

Ist am Anfang der Bewegung ($t = 0$) $\xi = \xi_0$ und die anfängliche Geschwindigkeit $\xi'_0 = 0$, so lässt sich ξ in folgender Weise darstellen:

$$\xi = \frac{\xi_0}{\mu_1 - \mu_2} [\mu_1 e^{-\mu_2 t} - \mu_2 e^{-\mu_1 t}]. \dots\dots\dots (10)$$

Da $\mu_1 > \mu_2$ ist, so wird ξ immer dasselbe Vorzeichen wie ξ_0 behalten, folglich kehrt das abgelenkte und sich selbst überlassene Horizontalpendel allmählig in seine Ruhelage zurück.

Ist dagegen am Anfang der Bewegung ($t = 0$) $\xi = 0$, aber ξ'_0 von Null verschieden, d. h. erfährt das Horizontalpendel am Anfang einen Anstoss, so wird

$$\xi = \frac{\xi'_0}{\mu_1 - \mu_2} [e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t}]. \dots\dots\dots (11)$$

In diesem Falle wächst ξ von Null an, erreicht ein Maximum, um dann wieder allmählig auf Null herabzusinken.

Wir sehen in der That, dass der Charakter der Eigenbewegung des Horizontalpendels in diesem Fall ein ganz anderer ist.

Setzen wir nun jetzt voraus, dass das aperiodisch gemachte Horizontalpendel unter dem Einflusse einer Erderschütterung steht und wollen wir dementsprechend die Gleichung (3) integrieren.

Das allgemeine Integral der Gleichung (3) lässt sich ohne Schwierigkeit aus dem Integral der Gleichung (4) nach der Methode der Veränderung der Constanten ermitteln.

Das gesuchte Integral lässt sich, wenn $x = f(t)$ gesetzt wird, in folgende Form bringen:

$$\xi = \Gamma_1 e^{-\mu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\mu_2 t} + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [e^{-\mu_1 t} \int e^{\mu_1 t} f''(t) dt - e^{-\mu_2 t} \int e^{\mu_2 t} f''(t) dt], \dots (12)$$

wo Γ_1 und Γ_2 zwei Integrationsconstanten bedeuten.

Diese allgemeine Gleichung lässt sich leicht umformen.

Zu diesem Zweck führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\left. \begin{aligned} \int f(t) dt &= f_1(t) \\ \int f_1(t) dt &= f_2(t) \\ \int f_2(t) dt &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

u. s. w.

Wollen wir nun die in der Formel (12) vorkommenden Integrale durch partielle Integration in eine andere Form bringen.

Es ist

$$\int e^{\mu_1 t} f''(t) dt = e^{\mu_1 t} f'(t) - \mu_1 \int e^{\mu_1 t} f'(t) dt$$

$$\int e^{\mu_1 t} f'(t) dt = e^{\mu_1 t} f(t) - \mu_1 \int e^{\mu_1 t} f(t) dt$$

$$\int e^{\mu_1 t} f(t) dt = e^{\mu_1 t} f_1(t) - \mu_1 \int e^{\mu_1 t} f_1(t) dt$$

$$\int e^{\mu_1 t} f_1(t) dt = e^{\mu_1 t} f_2(t) - \mu_1 \int e^{\mu_1 t} f_2(t) dt$$

u. s. w.

Es ergibt sich also

$$e^{-\mu_1 t} \int e^{\mu_1 t} f''(t) dt = f'(t) - \mu_1 f(t) + \mu_1^2 f_1(t) - \mu_1^3 f_2(t) + \mu_1^4 f_3(t) - \dots$$

$$e^{-\mu_2 t} \int e^{\mu_2 t} f''(t) dt = f'(t) - \mu_2 f(t) + \mu_2^2 f_1(t) - \mu_2^3 f_2(t) + \mu_2^4 f_3(t) - \dots,$$

folglich wird

$$\xi = \Gamma_1 e^{-\mu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\mu_2 t} + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [-(\mu_1 - \mu_2) f(t) + (\mu_1^2 - \mu_2^2) f_1(t) - (\mu_1^3 - \mu_2^3) f_2(t) + (\mu_1^4 - \mu_2^4) f_3(t) - \dots],$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen (9),

$$\xi = \Gamma_1 e^{-\mu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\mu_2 t} - f(t) + 2\varepsilon f_1(t) - (4\varepsilon^2 - n^2) f_2(t) + \left. \begin{aligned} &+ 4\varepsilon \{2\varepsilon^2 - n^2\} f_3(t) - \dots \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

Ist nun die Dämpfung passend gewählt, so verschwinden die ersten zwei Summanden der vorigen Reihe schon für sehr kleine Werthe von t , und es kann gesetzt werden:

$$\xi = -f(t) + 2\varepsilon f_1(t) - (4\varepsilon^2 - n^2) f_2(t) + 4\varepsilon(2\varepsilon^2 - n^2) f_3(t) - \dots (15)$$

Unter gewissen Bedingungen, auf die ich hier nicht näher eingehen werde, kann diese Reihe stark convergent sein. In diesem Falle würde man in erster Annäherung bekommen

$$\xi = -f(t) = -x,$$

d. h. die Ablenkung des Pendels von seiner Ruhelage ist in allererster Annäherung gleich den Verschiebungen der Erdoberfläche, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Mit dieser rohen Annäherung kann man sich in den meisten Fällen nicht begnügen, man könnte sich aber der Formel (15) bedienen, um aus den bekannten Werthen von ξ , ε und n , $f(t)$ nach der Methode der successiven Annäherungen zu bestimmen.

Auf die Einzelheiten dieser Bestimmung werde ich hier ebenfalls nicht eingehen.

Dabei muss man freilich immer im Auge halten, dass die Gleichung (15) nur für nicht zu kleine Werthe von t ihre Gültigkeit behält.

Selbstverständlich kann man auch zur Bestimmung der Function $f(t)$ die übliche Methode in Anwendung bringen, welche darin besteht, dass die Gleichung (3) Glied für Glied zwei Mal integriert wird.

Wir sehen also, dass durch Einführung einer starken electromagnetischen Dämpfung, der directe Einfluss der Eigenbewegung des Horizontalpendels in hohem Maasse herabgesetzt wird; ausserdem ist die Bewegung

des Pendels (für nicht zu kleine Werthe von t) völlig unabhängig von den Anfangsbedingungen der Bewegung.

Die weiter mitzutheilenden Versuche bestätigen in unzweifelhafter Weise dieses Resultat.

§ 3.

Untersuchung einiger Specialfälle.

Bis jetzt haben wir angenommen, dass die Verschiebung x der Erdoberfläche eine ganz willkürliche Function der Zeit $f(t)$ ist.

Vor einem Erdbeben ist die Erdoberfläche in Ruhe; dann erfolgt gewöhnlich ein Anstoss, und die Erdoberfläche setzt sich alsdann in Bewegung.

Der Charakter dieser Bewegung ist freilich unbekannt; es ist sogar eine der Hauptaufgaben der Seismometrie diese Bewegung zu ermitteln, aber darüber kann man mehr oder weniger plausible Hypothesen machen.

Nimmt man an, wie es in der Theorie der Elasticität geschieht, dass die Kräfte, welche auf ein von seiner Gleichgewichtslage verschobenes Theilchen wirken, proportional der Grösse der Verschiebung sind und ausserdem, dass bei dieser Bewegung Reibungskräfte in's Spiel kommen, welche proportional der Geschwindigkeit der Bewegung sind, so wird die Verschiebung x folgender allgemeiner Differentialgleichung genügen:

$$x'' + 2\varepsilon_1 x' + n_1^2 x = 0, \dots \dots \dots (16)$$

wo ε_1 und n_1 zwei Constanten bedeuten.

Da wir angenommen haben, dass am Anfang der Bewegung die Erdoberfläche in Ruhe ist, so muss für $t = 0$ $x = 0$ sein. Die Grösse der am Anfang der Bewegung ertheilten Geschwindigkeit wollen wir durch ω_0 bezeichnen.

Beim Integriren der Gleichung (16) muss man zwei Hauptfälle unterscheiden.

Ist $n_1 > \varepsilon_1$, so lässt sich x in folgender Form darstellen:

$$x = f(t) = \frac{\omega_0}{q} e^{-\varepsilon_1 t} \sin qt, \dots \dots \dots (17)$$

wo

$$q = \sqrt{n_1^2 - \varepsilon_1^2} \dots \dots \dots (18)$$

ist.

Ist ε_1 äusserst klein, so kann, für nicht zu grosse Werthe von t ,

$$x = \frac{\omega_0}{n_1} \sin n_1 t$$

gesetzt werden.

Dieses ist der üblich angenommene Fall, welcher, wie wir sehen, nur ein Specialfall der Gleichung (17) ist.

Die Gleichung (17) stellt eine harmonische Bewegung mit abnehmender Amplitude dar, sie ist aber nicht die einzig denkbare Bewegung.

Ist nämlich $\varepsilon_1 > n_1$, d. h. sind die Reibungskräfte sehr gross, so wird x sich ganz anders ausdrücken.

In diesem Fall erhalten wir

$$x = f(t) = \frac{\omega_0}{v_1 - v_2} [e^{-v_2 t} - e^{-v_1 t}], \dots \dots \dots (19)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \varepsilon_1 + \alpha_1 \\ v_2 &= \varepsilon_1 - \alpha_1 \\ \text{und} \\ \alpha_1 &= \sqrt{\varepsilon_1^2 - n_1^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

ist.

Dies ist die Gleichung einer aperiodischen Bewegung.

Ausser diesen zwei einfachen Bewegungsarten kann man sich noch eine Superposition mehrerer solcher Bewegungen denken.

Wollen wir nun diese zwei Hauptbewegungsarten besonders untersuchen.

§ 4.

$$\text{Fall } x = f(t) = \frac{\omega_0}{q} e^{-\varepsilon_1 t} \sin qt.$$

Setzen wir diese Gleichung zu Grunde, so findet man sofort

$$f''(t) = \frac{\omega_0}{q} e^{-\varepsilon_1 t} [(\varepsilon_1^2 - q^2) \sin qt - 2\varepsilon_1 q \cos qt].$$

Setzt man nun diesen Werth von $f''(t)$ in die allgemeine Gleichung (12) ein, so ergibt sich, für nicht zu kleine Werthe von t , wenn die beiden ersten Glieder der Formel (12) schon verschwindend klein geworden sind,

$$\xi = \frac{\omega_0}{q} \cdot \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[e^{-\mu_1 t} \{ (\varepsilon_1^2 - q^2) \int e^{(\mu_1 - \varepsilon_1)t} \sin qt \cdot dt - 2\varepsilon_1 q \int e^{(\mu_1 - \varepsilon_1)t} \cos qt \cdot dt \} - e^{-\mu_2 t} \{ (\varepsilon_1^2 - q^2) \int e^{(\mu_2 - \varepsilon_1)t} \sin qt \cdot dt - 2\varepsilon_1 q \int e^{(\mu_2 - \varepsilon_1)t} \cos qt \cdot dt \} \right] \dots (21)$$

Bekanntlich ist

$$\int e^{kt} \sin qt \, dt = \frac{e^{kt}}{q^2 + k^2} \{ k \sin qt - q \cos qt \} \dots (22)$$

$$\int e^{kt} \cos qt \, dt = \frac{e^{kt}}{q^2 + k^2} \{ q \sin qt + k \cos qt \} \dots (23)$$

Führt man nun die entsprechenden Transformationen in der Gleichung (21) aus, so findet man

$$\xi = \frac{\omega_0}{q} \cdot \frac{e^{-\varepsilon_1 t}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \left[\left\{ \frac{(\varepsilon_1^2 - q^2)(\mu_1 - \varepsilon_1) - 2\varepsilon_1 q^2}{q^2 + (\mu_1 - \varepsilon_1)^2} - \frac{(\varepsilon_1^2 - q^2)(\mu_2 - \varepsilon_1) - 2\varepsilon_1 q^2}{q^2 + (\mu_2 - \varepsilon_1)^2} \right\} \sin qt - q \left\{ \frac{(\varepsilon_1^2 - q^2) + 2\varepsilon_1(\mu_1 - \varepsilon_1)}{q^2 + (\mu_1 - \varepsilon_1)^2} - \frac{(\varepsilon_1^2 - q^2) + 2\varepsilon_1(\mu_2 - \varepsilon_1)}{q^2 + (\mu_2 - \varepsilon_1)^2} \right\} \cos qt \right].$$

Es ist nicht schwer einzusehen, dass die Coefficienten bei $\sin qt$ und $\cos qt$ als Factor $(\mu_1 - \mu_2)$ enthalten.

Nach passenden Reductionen findet man

$$\xi = \frac{\omega_0}{q} \frac{e^{-\varepsilon_1 t}}{\{q^2 + (\mu_1 - \varepsilon_1)^2\} \{q^2 + (\mu_2 - \varepsilon_1)^2\}} [A \sin qt - B \cos qt], \dots (24)$$

wo

$$A = (\varepsilon_1^2 - q^2) \{q^2 - (\mu_1 - \varepsilon_1)(\mu_2 - \varepsilon_1)\} + 2\varepsilon_1 q^2 (\mu_1 + \mu_2 - 2\varepsilon_1)$$

und

$$B = q [2\varepsilon_1 \{q^2 - (\mu_1 - \varepsilon_1)(\mu_2 - \varepsilon_1)\} - (\varepsilon_1^2 - q^2)(\mu_1 + \mu_2 - 2\varepsilon_1)]$$

ist, oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) und (18),

$$\left. \begin{aligned} A &= n^2(n_1^2 - 2\varepsilon_1^2) - n_1^2(n_1^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_1) \\ B &= 2q \{ \varepsilon_1 n_1^2 - \varepsilon_1 n^2 \}. \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

Setzen wir nun weiter

$$\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \psi$$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \psi,$$

also

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{B}{A},$$

so lässt sich die Gleichung (24) in folgender Form schreiben:

$$\xi = \frac{\omega_0}{q} \cdot \frac{e^{-\varepsilon_1 t} \sqrt{A^2 + B^2}}{\{q^2 + (\mu_1 - \varepsilon_1)^2\} \{q^2 + (\mu_2 - \varepsilon_1)^2\}} \cdot \sin (qt - \psi).$$

Aus den Gleichungen (25) ergibt sich ohne Schwierigkeit, mit Rücksicht auf dieselben Gleichungen (9) und (18),

$$A^2 + B^2 = n_1^4 \{q^2 + (\mu_1 - \varepsilon_1)^2\} \{q^2 + (\mu_2 - \varepsilon_1)^2\},$$

folglich ist, wenn

$$\{q^2 + (\mu_1 - \varepsilon_1)^2\} \{q^2 + (\mu_2 - \varepsilon_1)^2\} = R$$

gesetzt wird,

$$\xi = \frac{\omega_0 n_1^2}{q \sqrt{R}} e^{-\varepsilon_1 t} \sin (qt - \psi) \dots (26)$$

Setzen wir nun

$$\tau = \frac{\psi}{q},$$

also, wegen der Gleichungen (25),

$$\tau = \frac{1}{q} \operatorname{arctg} \cdot 2q \frac{\varepsilon_1 n_1^2 - \varepsilon_1 n^2}{n^2(n_1^2 - 2\varepsilon_1^2) - n_1^2(n_1^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_1)} \dots (27)$$

und

$$\frac{n_1^2}{\sqrt{R}} e^{-\varepsilon_1 \tau} = \mathfrak{A}, \dots (28)$$

so erhält man aus der Gleichung (26),

$$\xi = \mathfrak{A} \cdot \frac{\omega_0}{q} e^{-\varepsilon_1(t-\tau)} \sin q(t-\tau) \dots (29)$$

Vergleichen wir nun diese Gleichung mit der gegebenen (17)

$$x = f(t) = \frac{\omega_0}{q} e^{-\varepsilon_1 t} \sin qt,$$

so sehen wir, dass

$$\xi = \mathfrak{A} f(t - \tau),$$

d. h. das Horizontalpendel folgt genau demselben Bewegungsgesetz, wie die Erdoberfläche, aber bei einer veränderten Ausschlagsgrösse und mit einer bestimmten Zeitverschiebung.

Haben die Beobachtungen den Gang der Function ξ ergeben, so lassen sich aus der aufgezeichneten Curve ε_1 , q und die Grösse $\mathfrak{A} \frac{\omega_0}{q}$ leicht bestimmen.

ε und n sind zwei Constanten des Pendels, welche früher bestimmt sein müssen, was dadurch geschieht, dass man das abgelenkte Pendel bei ruhendem Boden seine entsprechende Curve zeichnen lässt. Aus ε und n lassen sich sofort μ_1 und μ_2 nach den Gleichungen (9) berechnen.

Sind nun ε_1 und q einmal bestimmt, so findet man aus der Gleichung (18) n_1 und aus der Gleichung (27) τ . Folglich kann man nach der Gleichung (28) \mathfrak{A} berechnen.

Ist nun \mathfrak{A} bestimmt, so kann man aus dem bekannten Werth von $\mathfrak{A} \frac{\omega_0}{q}$, ω_0 , d. h. die anfängliche Geschwindigkeit beim Anstoss, berechnen.

Wir sehen also, dass in diesem Specialfalle alle Elemente der Bewegung der Erdoberfläche, d. h. ε_1 , n_1 und ω_0 sich direct ermitteln lassen. Man braucht also nicht mehr bei der Bestimmung von x eine zweifache Integration der Differentialgleichung (3) Glied für Glied auszuführen. Freilich muss man dabei immer nicht vergessen, dass für sehr kleine Werthe von t die Gleichung (26) ihre Gültigkeit verliert.

Wollen wir nun den Werth von \mathfrak{A} etwas näher untersuchen.

Der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck ist immer positiv.

Wollen wir ihn nun in einer anderen Form schreiben.

Es ist

$$q^2 + (\mu_1 - \varepsilon_1)^2 = n_1^2 - \varepsilon_1^2 + \mu_1^2 - 2\mu_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 = n_1^2 \left\{ 1 + \frac{\mu_1(\mu_1 - 2\varepsilon_1)}{n_1^2} \right\},$$

folglich wird

$$\mathfrak{A} = \frac{e^{-\varepsilon_1 \tau}}{\sqrt{\left\{ 1 + \frac{\mu_1(\mu_1 - 2\varepsilon_1)}{n_1^2} \right\} \left\{ 1 + \frac{\mu_2(\mu_2 - 2\varepsilon_1)}{n_1^2} \right\}}} \dots \dots \dots (30)$$

Setzen wir jetzt voraus, dass die Erdbewegung eine rein periodische, ohne Dämpfung, ist. In diesem Fall muss man in den vorigen Gleichungen $\varepsilon_1 = 0$ setzen.

Es ergibt sich alsdann:

$$q = n_1$$

$$x = \frac{\omega_0}{n_1} \sin n_1 t$$

$$\tau = \frac{1}{n_1} \arctg \frac{2n_1 \varepsilon}{n^2 - n_1^2}, \dots \dots \dots (31)$$

also

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2n_1 \varepsilon}{n^2 - n_1^2}, \dots \dots \dots (32)$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\mu_1^2}{n_1^2} \right) \left(1 + \frac{\mu_2^2}{n_1^2} \right)}} \dots \dots \dots (33)$$

und

$$\xi = \mathfrak{A} \frac{\omega_0}{n_1} \cdot \sin n_1 (t - \tau) \dots \dots \dots (34)$$

In diesem Fall führt das Horizontalpendel auch rein periodische Schwingungen aus, aber bei verkleinerter Amplitude, da $\mathfrak{A} < 1$ wird.

Je stärker die Dämpfung, desto kleiner wird \mathfrak{A} , folglich verkleinert die Einführung einer starken elektromagnetischen Dämpfung die Ausschläge des Horizontalpendels.

Die Phasenverschiebung wird direct durch die Gleichung (32) angegeben.

Ist $n = n_1$, so wird die Phasenverschiebung gleich $\frac{\pi}{2}$ sein.

Wollen wir nun die Schwingungsdauer des vollständig ungedämpften Pendels durch T und die entsprechende Grösse für die Erdbewegung durch T_1 bezeichnen, dann ist

$$T = \frac{2\pi}{n} \dots \dots \dots (35)$$

und

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1} \dots \dots \dots (36)$$

Ein empfindlich eingestelltes Horizontalpendel hat gewöhnlich eine sehr grosse Schwingungsdauer, folglich wird n im Allgemeinen klein sein.

Ist T_1 bedeutend kleiner als T , so kann man in erster Annäherung n^2 im Vergleich zu n_1^2 vernachlässigen.

Dann ergibt sich

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{2\varepsilon}{n_1}.$$

Bei einem aperiodischen Pendel ist $\varepsilon > n$.

Für ein schwach gedämpftes aperiodisches Pendel wird ϵ sich wenig von n unterscheiden, folglich wird, für sehr grosse Werthe von n_1 , die Phasenverschiebung ungefähr gleich π sein.

Lassen wir alsdann ϵ fortwährend wachsen, d. h. verstärken wir die Dämpfung, so nähert sich ψ dem Grenzwerte $\frac{\pi}{2}$.

Ehe wir weiter mit dieser Untersuchung fortschreiten, wollen wir sehen, welche Bewegung das Horizontalpendel ausführen würde, wenn es nicht in ein aperiodisches Instrument umgewandelt wäre.

Dementsprechend müssen wir $n > \epsilon$ setzen.

Ist die Erdbewegung wiederum eine rein periodische ohne Dämpfung, d. h. ist

$$x = \frac{\omega_0}{n_1} \sin n_1 t,$$

so haben wir nur die Gleichung

$$\xi'' + 2\epsilon \xi' + n^2 \xi + x'' = 0 \dots \dots \dots (37)$$

unter den ausgesprochenen Bedingungen zu integrieren.

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lässt sich in folgender Form schreiben:

$$\xi = e^{-\epsilon t} [\Gamma_1 \sin pt + \Gamma_2 \cos pt] + \left. \begin{aligned} &+ \frac{n_1 \omega_0}{p} e^{-\epsilon t} [\sin pt \int e^{\epsilon t} \cos pt \cdot \sin n_1 t dt - \cos pt \cdot \int e^{\epsilon t} \sin pt \cdot \sin n_1 t dt], \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

wo

$$p = \sqrt{n^2 - \epsilon^2} \dots \dots \dots (39)$$

ist.

Berücksichtigt man dabei, dass

$$\cos pt \cdot \sin n_1 t = \frac{1}{2} \{ \sin (p + n_1) t - \sin (p - n_1) t \}$$

$$\sin pt \cdot \sin n_1 t = \frac{1}{2} \{ \cos (p - n_1) t - \cos (p + n_1) t \},$$

so findet man nach den Gleichungen (22) und (23) durch passende Umformungen

$$\xi = e^{-\epsilon t} [\Gamma_1 \sin pt + \Gamma_2 \cos pt] + \frac{n_1 \omega_0}{\sqrt{R_1}} \sin (n_1 t - \psi_1), \dots \dots (40)$$

wo

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{2n_1 \epsilon}{n^2 - n_1^2} \dots \dots \dots (41)$$

und

$$R_1 = (n^2 - n_1^2)^2 + 4n_1^2 \epsilon^2 \dots \dots \dots (42)$$

ist.

Wir ersehen also aus diesen Formeln, dass in dem hier besprochenen Falle die Eigenbewegung des Pendels sehr störend wirkt. Die erhaltene Curve setzt sich nämlich aus zwei sinusartigen Bewegungen zusammen, wobei die Anfangsbedingungen der Bewegung eine sehr erhebliche Rolle spielen, während bei einem aperiodischen Pendel die Glieder, welche von diesen Bedingungen abhängen, schon bei sehr kleinen Werthen von t verschwinden.

Die erhaltene Curve (für ξ) kann unter Umständen eine recht verwickelte sein und sich sehr von dem Gang der Function $x = f(t)$ unterscheiden.

Vergleicht man das letzte Glied der Formel (40) mit der Gleichung

$$x = f(t) = \frac{\omega_0}{n_1} \sin n_1 t$$

und setzt man dabei

$$\frac{n_1^2}{\sqrt{R_1}} = \mathfrak{A}_1 \dots \dots \dots (43)$$

und

$$\tau_1 = \frac{\psi_1}{n_1}, \dots \dots \dots (44)$$

so lässt sich die Gleichung (40) folgendermaassen schreiben:

$$\xi = e^{-\epsilon t} [\Gamma_1 \sin pt + \Gamma_2 \cos pt] + \mathfrak{A}_1 f(t - \tau_1). \dots \dots (45)$$

Es ergibt sich also, dass das Glied, welches von der Erdbewegung abhängt, in der Formel (45) mit einer bestimmten Phasenverzögerung eintritt, welche vollständig derjenigen gleich ist, welche dem Fall eines aperiodischen Pendels entspricht (man vergleiche die Gleichungen (41) und (32)).

Ausserdem tritt vor der Function $f(t - \tau)$ der Factor \mathfrak{A}_1 auf.

Was nun die Amplitude der Ausschläge des letzten Summanden der Gleichung (40) betrifft, so kann dieselbe unter Umständen sehr gross sein.

Für

$$n = n_1$$

ist

$$\frac{n_1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{2\epsilon}, \dots\dots\dots(46)$$

also

$$\mathcal{A}_1 = \frac{n}{2\epsilon} \dots\dots\dots(47)$$

Ist die Dämpfung, also ϵ , sehr gering, so kann der Ausschlag sehr gross werden und die Curve ξ unter Umständen sehr complicirt ausfallen.

Wir sehen also, dass es viel vortheilhafter ist, statt eines periodischen ein aperiodisches Pendel zu benutzen.

Eine starke Dämpfung erleichtert also ganz erheblich das Studium von Seismogrammen. Freilich werden auch in dem hier besprochenen Fall die beiden ersten Summanden der Formel (40) mit der Zeit schliesslich verschwinden, aber bei einem aperiodischen Pendel tritt dieses schon ganz am Anfang der Bewegung ein.

Wir haben vorher den Fall besprochen, wo die Erdbewegung sich durch die Gleichung

$$x = \frac{\omega_0}{n_1} \sin n_1 t$$

darstellen lässt, und fanden dabei für ein aperiodisches Pendel

$$\xi = \mathcal{A} \frac{\omega_0}{n_1} \sin n_1 (t - \tau), \quad (\text{Formel (34)})$$

wo

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\mu_1^2}{n_1^2}\right) \left(1 + \frac{\mu_2^2}{n_1^2}\right)}} \quad (\text{Formel (33)})$$

und

$$\tau = \frac{1}{n_1} \arctg \frac{2n_1\epsilon}{n^2 - n_1^2} \quad (\text{Formel (31)}).$$

ist.

Dieser Fall lässt sich verallgemeinern.

Wir wollen ja voraussetzen, dass die Erdbewegung aus einer endlichen Anzahl von einfachen Sinusbewegungen zusammengesetzt ist, also etwa

$$x = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\omega_k}{n_k} \sin n_k t. \dots\dots\dots(48)$$

Dann ergibt sich aus der Differentialgleichung (3) für ein aperiodisches Horizontalpendel, bei Vernachlässigung der schon bei sehr kleinen

Werthen von t verschwindenden zwei ersten Glieder, welche von den Anfangsbedingungen der Bewegung abhängen,

$$\xi = \sum_{k=1}^{k=m} \mathcal{A}_k \frac{\omega_k}{n_k} \sin n_k (t - \tau_k), \dots\dots\dots(49)$$

wo

$$\mathcal{A}_k = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\mu_1^2}{n_k^2}\right) \left(1 + \frac{\mu_2^2}{n_k^2}\right)}}$$

und

$$\tau_k = \frac{1}{n_k} \arctg \frac{2n_k\epsilon}{n^2 - n_k^2}$$

ist.

Hat nun der Seismograph die Curve ξ als Function von t geliefert, so kann man die einzelnen Summanden der vorigen Sinusreihe (Formel (49)) nach und nach bestimmen.

Dazu braucht man nur die Methode der consecutiven Sichtung der Glieder, die ich in meiner früheren Abhandlung besprochen habe¹⁾, in Anwendung zu bringen.

Mit Hilfe derselben lassen sich alle einzelnen ω_k und n_k ermitteln, folglich wird der Gang der Function x völlig bekannt und zwar, ohne die Anfangsbedingungen der Bewegung für ξ kennen zu brauchen.

Dieser Fall, wo nämlich x durch eine Sinusreihe ausgedrückt ist, besitzt schon eine ziemlich grosse Allgemeinheit, da eine ganze Anzahl Functionen mit hinreichender Genauigkeit durch entsprechende Sinusreihen sich ausdrücken lassen.

§ 5.

$$\text{Fall } x = f(t) = \frac{\omega_0}{v_1 - v_2} \{ e^{-v_2 t} - e^{-v_1 t} \}.$$

Setzen wir nun jetzt den zweiten Fall voraus, nämlich, dass x selbst ein aperiodisches Bewegungsgesetz befolgt.

Das Pendel sei wiederum aperiodisch gemacht, und wollen wir nun die Form der von ihm in diesem Falle aufgezeichneten Curve näher untersuchen.

1) «Ueber seismometrische Beobachtungen.» I. c. p. 115.

Es sei also gegeben:

$$x = f(t) = \frac{\omega_0}{v_1 - v_2} \{e^{-v_2 t} - e^{-v_1 t}\}, \quad (\text{Formel (19)})$$

wo

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \varepsilon_1 + \alpha_1 \\ v_2 &= \varepsilon_1 - \alpha_1 \\ \text{und} \\ \alpha_1 &= \sqrt{\varepsilon_1^2 - n^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Formel (20)})$$

ist.

Daraus ergibt sich

$$x'' = f''(t) = \frac{\omega_0}{v_1 - v_2} \{v_2^2 e^{-v_2 t} - v_1^2 e^{-v_1 t}\}.$$

Man hat also nur diesen Werth in die allgemeine Differentialgleichung (3)

$$\xi'' + 2\varepsilon\xi' + n^2\xi + x'' = 0, \quad (\text{Formel (3)})$$

wo $\varepsilon > n$ ist, einzusetzen und das entsprechende Integral aufzusuchen.

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung lässt sich in folgender Form schreiben (siehe die Gleichung (12)):

$$\xi = \Gamma_1 e^{-\mu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\mu_2 t} + \frac{\omega_0}{(\mu_1 - \mu_2)(v_1 - v_2)} \left[e^{-\mu_1 t} \int \{v_2^2 e^{(\mu_1 - v_2)t} - v_1^2 e^{(\mu_1 - v_1)t}\} dt \right. \\ \left. - e^{-\mu_2 t} \int \{v_2^2 e^{(\mu_2 - v_2)t} - v_1^2 e^{(\mu_2 - v_1)t}\} dt \right],$$

wo μ_1 und μ_2 durch die Formeln (9) gegeben sind.

Führt man die Integrationen aus, so findet man nach passenden Reductionen

$$\xi = \Gamma_1 e^{-\mu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\mu_2 t} + \frac{\omega_0}{v_1 - v_2} \left\{ \frac{v_1^2}{n^2 - 2\varepsilon v_1 + v_1^2} e^{-v_1 t} - \frac{v_2^2}{n^2 - 2\varepsilon v_2 + v_2^2} e^{-v_2 t} \right\}.$$

Setzen wir nun

$$\frac{v_1^2}{n^2 - 2\varepsilon v_1 + v_1^2} = -\mathfrak{A} e^{v_1 \tau} \dots \dots \dots (50)$$

und

$$\frac{v_2^2}{n^2 - 2\varepsilon v_2 + v_2^2} = -\mathfrak{A} e^{v_2 \tau}, \dots \dots \dots (51)$$

so ergibt sich

$$\xi = \Gamma_1 e^{-\mu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\mu_2 t} + \mathfrak{A} \frac{\omega_0}{v_1 - v_2} \{e^{-v_2(t-\tau)} - e^{-v_1(t-\tau)}\}. \dots (52)$$

\mathfrak{A} und τ lassen sich aus den Formeln (50) und (51) berechnen.

Man findet für dieselben

$$\tau = \frac{1}{v_1 - v_2} \log_e \left\{ \frac{v_1^2}{v_2^2} \cdot \frac{n^2 - 2\varepsilon v_2 + v_2^2}{n^2 - 2\varepsilon v_1 + v_1^2} \right\} \dots \dots \dots (53)$$

und

$$\mathfrak{A} = - \sqrt{\frac{v_1 - v_2}{v_1^2 v_2^2} \cdot \frac{(n^2 - 2\varepsilon v_1 + v_1^2)v_2}{(n^2 - 2\varepsilon v_2 + v_2^2)v_1}} \dots \dots \dots (54)$$

Ist das Pendel passend regulirt, so verschwinden die ersten beiden Glieder in dem Ausdrucke für ξ schon bei äusserst kleinen Werthen von t .

Unter Vernachlässigung dieser Glieder findet man

$$\xi = \mathfrak{A} \frac{\omega_0}{v_1 - v_2} \{e^{-v_2(t-\tau)} - e^{-v_1(t-\tau)}\},$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$x = f(t) = \frac{\omega_0}{v_1 - v_2} \{e^{-v_2 t} - e^{-v_1 t}\},$$

$$\xi = \mathfrak{A} f(t - \tau).$$

Dieses Resultat ist so zu deuten, dass auch in diesem Fall das Pendel die Bewegung der Erdoberfläche wiedergibt, aber mit einer bestimmten Zeitverschiebung und bei verschiedener Ausschlagsgrösse.

Aus der vom Seismographen aufgezeichneten Curve lassen sich mit Hilfe der angegebenen Formeln v_1 , v_2 und ω_0 ermitteln, d. h. es lassen sich die Elemente der Erdbewegung auch in diesem Falle bestimmen.

Wäre das Pendel nicht aperiodisch gemacht, so würde sich die Sache ganz anders verhalten.

Setzen wir nämlich dementsprechend

$$n > \varepsilon,$$

so würde sich das allgemeine Integral der Gleichung (3), unter Zugrundelegung desselben Bewegungsgesetzes

$$x = \frac{\omega_0}{v_1 - v_2} \{e^{-v_2 t} - e^{-v_1 t}\},$$

in folgender Weise darstellen lassen:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= e^{-\varepsilon t} [\Gamma_1 \sin pt + \Gamma_2 \cos pt] + \\ &+ \frac{\omega_0}{v_1 - v_2} \left[\frac{v_1^2}{n^2 - 2\varepsilon v_1 + v_1^2} e^{-v_1 t} - \frac{v_2^2}{n^2 - 2\varepsilon v_2 + v_2^2} e^{-v_2 t} \right]. \end{aligned} \right\} \dots \dots (55)$$

In diesem Fall ist die Bewegung des Pendels eine sehr complicirte. Sie setzt sich nämlich aus einer periodischen mit verklingender Amplitude und einer aperiodischen Bewegung zusammen. Ist ϵ klein, so werden nach einer bestimmten Zeit die beiden letzten Glieder der Formel (55) verschwinden, während die beiden ersten noch fortbestehen bleiben.

In diesem Fall ist der Charakter der Bewegung des Pendels total verschieden von dem der Erdbewegung, und es wird gar nicht leicht sein, aus solchen Beobachtungen ein richtiges Urtheil über die Erdbewegung zu gewinnen.

Diese ganze Untersuchung zeigt also ganz deutlich, wie vortheilhaft es ist, aperiodische Instrumente statt periodischer zu benutzen.

Wir haben freilich nur zwei Hauptfälle hier besprochen, aber nach dem, was im § 3 gesagt wurde, müssen sie auch als die Hauptfälle betrachtet werden.

Je complicirter die wahre Bewegung der Erdoberfläche ist, desto complicirter wird auch die vom Seismographen aufgezeichnete Curve, desto schwerer wird auch die Ermittlung des wahren Ganges der Function $x = f(t)$.

Aber bei einem stark aperiodischen Instrument nähert sich der Charakter der vom Seismographen aufgezeichneten Curve bedeutend dem der Erdbewegung.

Ein anderer wesentlicher Vortheil stark aperiodischer Instrumente besteht noch darin, dass die vom Seismographen gelieferte Curve gewissermassen (für nicht zu kleine Werthe von t) von den Anfangsbedingungen der Bewegung unabhängig ist.

§ 6.

Die Anwendung eines aperiodischen Galvanometers als Registrirapparat.

Die vorhergehende Untersuchung hat uns nun gezeigt, wie vortheilhaft es ist, seismometrische Instrumente mit einer starken Dämpfung zu versehen, sogar die eigene, periodische Bewegung derselben in eine aperiodische zu verwandeln. Eine starke Dämpfung hat jedoch den Nachtheil, dass sie die Amplituden der Ausschläge verkleinert. Es kann alsdann leicht vorkommen, dass bei schwachen Erdbeben der betreffende Apparat nichts registriren wird. Will man also eine starke Dämpfung in Anwendung bringen, so muss ein Mittel getroffen werden, welches dazu dient, die Ausschläge des registrirenden Theiles des Apparates zu vergrössern.

Die Anwendung von Hebelvorrichtungen erweist sich, wie die Praxis zeigt, als sehr unzweckmässig. Eine optische Registration bei grossem Gange des Lichtstrahles ist ebenfalls unpraktisch, erstens, weil man dann grosse Räume braucht, wenn man nicht mehrfache Reflexionen benutzt, und zweitens, weil bei grossen Lichtbahnen die photochemische Wirkung des Lichtes auf das empfindliche Papier äusserst schwach wird, besonders bei grossen Rotationsgeschwindigkeiten der Registrirtrommel.

Um die Ausschläge eines Horizontalpendels, resp. irgend welches anderen seismometrischen Apparates zu vergrössern, möchte ich die folgende electromagnetische Vorrichtung vorschlagen, welche sich sehr gut bewährt hat, wie wir es weiter, bei der Discussion einiger von mir ausgeführten Beobachtungen sehen werden.

Diese Vorrichtung besteht darin, dass man ein aperiodisches Galvanometer als Registrirapparat benutzt.

Denkt man sich eine Spule von viereckiger Form mit einer grossen Anzahl von Windungen dünnen Drahtes an dem Arm eines Horizontalpendels befestigt und zwar in der Entfernung L_1 von der Drehungs-Axe desselben. Diese Spule ragt theilweise in ein möglichst homogenes magnetisches Feld hinein. Dieses Feld soll von einem besonderen Electromagnet mit passenden Polflächen erzeugt werden. Die Stärke dieses Feldes F kann durch Aenderung der Stromstärke im Electromagnet beliebig vergrössert werden.

Bezeichnen wir die Anzahl der Windungen der Spule durch N , die Breite derselben durch h und die Länge des in das Feld hineinragenden Theiles der Spule durch c , so ist

$$Q = FNhc \dots\dots\dots(56)$$

die Grösse des Kraftflusses durch die Fläche der Spule.

Sind die Spule und der Electromagnet passend orientirt, so vermehrt sich c um dc , bei Vermehrung des Ablenkungswinkels des Horizontalpendels θ um $d\theta$, wobei

$$dc = L_1 d\theta.$$

Folglich wird

$$\frac{dQ}{dt} = FNhL_1 \frac{d\theta}{dt}, \dots\dots\dots(57)$$

wobei t die Zeit bedeutet.

Sei nun die erwähnte Spule durch sehr dünne, spiralförmig gewundene Drähte mit einem aperiodischen Galvanometer verbunden. Der Gesamtwiderstand des Systems sei w .

Bezeichnen wir ferner durch F_1 die Stärke des magnetischen Feldes des Galvanometers und durch φ den Ablenkungswinkel der beweglichen Spule desselben.

Die Aenderung des Kraftflusses durch die bewegliche Spule des Galvanometers in der Zeiteinheit kann für kleine Werthe von φ gleich $a \frac{d\varphi}{dt}$ gesetzt werden, wo a eine gewisse Constante bedeutet. Je grösser F_1 , desto grösser wird a .

Bezeichnen wir ferner durch L den Selbstinductionscoefficienten des Systems von beiden Spulen, dann ergibt sich für die durch die Bewegung der Spulen erzeugte Stromstärke I folgende Gleichung:

$$I = -\frac{1}{w} \left\{ \frac{dQ}{dt} + a \frac{d\varphi}{dt} + L \frac{dI}{dt} \right\} \dots \dots \dots (58)$$

Das magnetische Moment \mathfrak{M} der beweglichen Spule des Galvanometers kann gleich bI gesetzt werden, wo b ebenfalls eine gewisse Constante bedeutet, also

$$\mathfrak{M} = bI. \dots \dots \dots (59)$$

Ist nun K das Trägheitsmoment der Spule des Galvanometers und D das entsprechende Drehungsmoment (für $\varphi = 1$), so lässt sich die Differentialgleichung der Bewegung der Galvanometerspule für kleine Werthe von φ in folgender Form schreiben:

$$K\varphi'' = -\alpha\varphi' - D\varphi + F_1\mathfrak{M}, \dots \dots \dots (60)$$

wo α eine gewisse Constante bedeutet.

Mit Rücksicht auf die vorigen Gleichungen können wir, bei Vernachlässigung der Selbstinduction, schreiben

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1\varphi' + n_1^2\varphi = -\frac{F_1}{w} \cdot \frac{FNhL_1b}{K} \frac{d\theta}{dt},$$

wo ε_1 und n_1 zwei neue Constanten bedeuten.

Setzen wir

$$\frac{F_1 FNhL_1b}{wK} = k, \dots \dots \dots (61)$$

wo k , je nach Umständen, positiv oder negativ ausfallen kann, so ergibt sich schliesslich

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1\varphi' + n_1^2\varphi + k\theta' = 0, \dots \dots \dots (62)$$

wo $\varepsilon_1 > n_1$ wird, da wir mit einem aperiodischen Galvanometer zu thun haben.

Würde man die Selbstinduction berücksichtigen wollen, so hätte man nur die simultanen Differentialgleichungen (58) und (60) zu integrieren. Bei dieser Operation würde man auf eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit constanten Coefficienten geführt werden und zwar von der folgenden Form:

$$\varphi''' + P_1\varphi'' + P_2\varphi' + P_3\varphi + P_0\theta' = 0.$$

In den meisten Fällen kann man aber von der Selbstinduction vollständig absehen; dann bleibt uns nichts übrig, als die vereinfachte Gleichung (62) zu integrieren.

Bei Behandlung dieser Aufgabe wollen wir ebenfalls die vorigen zwei Hauptfälle ins Auge fassen.

Es soll dementsprechend θ das Integral der Gleichung

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta = 0. \dots \dots \dots (63)$$

sein.

Zwei Fälle sind hier zu unterscheiden: 1) $n > \varepsilon$ und 2) $n < \varepsilon$.

Im ersten Fall kann das allgemeine Integral der Gleichung (63) in folgender verallgemeinerter Form wiedergegeben werden:

$$\theta = Ae^{-\varepsilon t} \sin(pt + \delta), \dots \dots \dots (64)$$

wo

$$p = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2} \dots \dots \dots (65)$$

und A und δ zwei Constanten sind, welche von den Anfangsbedingungen der Bewegung unmittelbar abhängen.

Aus der Gleichung (64) ergibt sich

$$\theta' = Ae^{-\varepsilon t} [-\varepsilon \sin(pt + \delta) + p \cos(pt + \delta)]. \dots \dots \dots (66)$$

Setzt man weiter

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \varepsilon_1 + \alpha_1 \\ \nu_2 &= \varepsilon_1 - \alpha_1 \\ \text{und} \\ \alpha_1 &= \sqrt{\varepsilon_1^2 - n_1^2}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (67)$$

so lässt sich das allgemeine Integral der Gleichung (62) in folgender Form schreiben:

$$\varphi = \Gamma_1 e^{-\nu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\nu_2 t} + \frac{k}{\nu_1 - \nu_2} [e^{-\nu_1 t} \int e^{\nu_1 t} \cdot \theta' dt - e^{-\nu_2 t} \int e^{\nu_2 t} \cdot \theta' dt].$$

Daraus ergibt sich, bei Zugrundelegung der Gleichung (66), unter Berücksichtigung der Gleichungen (22), (23), (65) und (67) und nach passenden, leicht auszuführenden Reductionen, und zwar bei Vernachlässigung der beiden ersten Summanden, welche für sehr kleine Werthe von t verschwinden,

$$\varphi = - A_1 \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{R_1}} \sin(pt + \delta - \Delta_1), \dots \dots \dots (68)$$

wo

$$A_1 = nkA \dots \dots \dots (69)$$

$$\text{tg } \Delta_1 = p \frac{n^2 - n_1^2}{2\varepsilon_1 n^2 - \varepsilon(n^2 + n_1^2)} \dots \dots \dots (70)$$

$$R_1 = \{p^2 + (v_1 - \varepsilon)^2\} \{p^2 + (v_2 - \varepsilon)^2\} \dots \dots \dots (71)$$

ist.

Setzen wir der Einfachheit wegen, nach der Gleichung (64),

$$0 = f_1(t);$$

weiter

$$\left. \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{\Delta_1}{p} \\ \text{und} \\ \mathfrak{A}_1 = - \frac{nk e^{-\varepsilon \tau_1}}{\sqrt{R_1}}, \end{array} \right\} \dots \dots \dots (72)$$

so ergibt sich

$$\varphi = \mathfrak{A}_1 f_1(t - \tau_1),$$

d. h. das aperiodische Galvanometer giebt vollständig in diesem Fall die Bewegung des Pendels wieder, aber mit einer anderen Amplitude und bei einer bestimmten Zeitverschiebung.

Da der Werth von k unmittelbar von der Stromstärke F im Electromagnet abhängt, so kann \mathfrak{A}_1 beliebig gross gemacht werden, folglich kann die Empfindlichkeit der Registrirung des Horizontalpendels im beliebigen Maasse gesteigert werden.

Die Grösse der Phasenverschiebung ergibt sich aus der Gleichung (70).

Ist die Dämpfungsconstante des Pendels ε sehr klein, so kann mit hinreichender Genauigkeit

$$\text{tg } \Delta_1 = \frac{n^2 - n_1^2}{2\varepsilon_1 n}$$

gesetzt werden.

Wenn nun $n = n_1$ ist, so wird die Phasenverschiebung einfach gleich Null sein, ist dagegen n sehr klein im Vergleich zu n_1 , so wird sie sich wenig von $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden.

Wir sehen also, dass ein aperiodisches Galvanometer sich sehr gut zum Registrirungszwecke eignet, und dass die Empfindlichkeit der Ablesung beliebig gross gemacht werden kann.

Dabei muss selbstverständlich die Registrirung eine optische sein, da aber die Trommel des Registrirapparates sehr nah am Galvanometer aufgestellt werden kann, so wird die vom Lichtstrahl zurückgelegte Strecke eine sehr kleine sein, folglich kann man der Trommel grosse Drehungsgeschwindigkeiten ertheilen, was bei seismometrischen Beobachtungen sehr wünschenswerth ist.

Es wäre freilich bei Anwendung von aperiodischen Galvanometern als Registrirapparate eines zu befürchten, nämlich, dass die Erderschütterung die Spule des Galvanometers selbst in Bewegung setzen könnte. Bei heftigen Stössen könnte dieses wirklich vorkommen, aber in diesem Fall wird das Galvanometer als Registrirapparat ganz überflüssig sein, da die Ausschläge des Seismographen selbst an und für sich hinreichend gross werden, bei microseismometrischen Erschütterungen dagegen ist ein direkter Einfluss auf das Galvanometer wenig zu befürchten, da ein Galvanometer viel unempfindlicher für kleine Erschütterungen ist, als ein echter Seismograph. Nöthigenfalls könnten die Eigenschwingungen der Galvanometerspule, wenn dieselben vorhanden wären, als Correctionsglieder mitberücksichtigt werden.

Wir haben früher gesehen (siehe § 4), dass, wenn die Erdoberfläche gedämpfte Sinusschwingungen ausführt, etwa

$$x = f(t) = \frac{\omega_0}{q} e^{-\varepsilon_0 t} \sin qt^1)$$

ist, so erhält man für die entsprechende Bewegung (ξ) des Horizontalpendels, wenn dasselbe aperiodisch gemacht ist,

$$\xi = \mathfrak{A} f(t - \tau),$$

wo τ eine bestimmte Zeitverschiebung und \mathfrak{A} eine gewisse Constante bedeutet.

Wir haben ausserdem

$$\xi = l \theta,$$

wo l die reducirte Länge des Pendels ist.

Setzen wir nun

$$\theta = \frac{\xi}{l} = f_1(t),$$

1) Ich schreibe hier ε_0 statt ε_1 .

so ergibt sich

$$\theta = f_1(t) = \frac{\mathfrak{A}}{I} f(t - \tau).$$

Nun haben wir gesehen, dass bei Anwendung eines aperiodischen Galvanometers

$$\varphi = \mathfrak{A}_1 f_1(t - \tau_1)$$

ist.

Es folgt also

$$\varphi = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1}{I} f\{t - (\tau + \tau_1)\}.$$

Dieses Resultat ist so zu deuten, dass man in diesem Fall, bei der Erforschung der Erdbewegung, den Seismographen, so zu sagen, ganz ausser Acht lassen und nur die Bewegung des Galvanometers ins Auge fassen kann. Das Galvanometer giebt nämlich genau die Bewegung der Erdoberfläche wieder, aber für einen anderen Zeitpunkt und bei einer anderen Ausschlagsgrösse, die jedoch beliebig gross gemacht werden kann.

Wollen wir jetzt den anderen Fall untersuchen, wo nämlich die Bewegung des Horizontalpendels eine aperiodische ist.

In diesem Fall ist $\varepsilon > n$ zu setzen.

Das allgemeine Integral der Gleichung (63) kann in diesem Falle in folgender verallgemeinerter Form geschrieben werden:

$$\theta = A_1 e^{-\mu_1 t} + A_2 e^{-\mu_2 t}, \dots \dots \dots (73)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \varepsilon + \alpha \\ \mu_2 &= \varepsilon - \alpha \\ \alpha &= \sqrt{\varepsilon^2 - n^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (74)$$

ist und A_1 und A_2 zwei Constanten bedeuten, die von den Anfangsbedingungen der Bewegung unmittelbar abhängen.

Wir haben hier keine besonderen Voraussetzungen über die Anfangsbedingungen der Bewegung gemacht und lassen sie, wie im vorigen Falle, völlig unbestimmt.

Da das allgemeine Integral der Gleichung (62) sich in folgender Form schreiben lässt:

$$\varphi = \Gamma_1 e^{-\nu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\nu_2 t} + \frac{k}{\nu_1 - \nu_2} [e^{-\nu_1 t} \int e^{\nu_1 t} \theta' dt - e^{-\nu_2 t} \int e^{\nu_2 t} \theta' dt],$$

so findet man ohne Schwierigkeit, bei Zugrundelegung der Gleichung (73),

$$\varphi = \Gamma_1 e^{-\nu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\nu_2 t} + k \left[\frac{\mu_1 A_1}{(\nu_1 - \mu_1)(\nu_2 - \mu_1)} e^{-\mu_1 t} + \frac{\mu_2 A_2}{(\nu_1 - \mu_2)(\nu_2 - \mu_2)} e^{-\mu_2 t} \right].$$

Sind die Dämpfungsconstanten ν_1 und ν_2 des aperiodischen Galvanometers passend gewählt, so werden die beiden ersten Glieder des vorigen Ausdruckes schon bei verhältnissmässig sehr kleinen Werthen von t verschwindend klein werden.

Dann erhält man, unter Berücksichtigung der Gleichungen (67), für nicht zu kleine Werthe von t

$$\varphi = k \left[\frac{\mu_1 A_1}{n_1^2 - 2\varepsilon_1 \mu_1 + \mu_1^2} e^{-\mu_1 t} + \frac{\mu_2 A_2}{n_1^2 - 2\varepsilon_1 \mu_2 + \mu_2^2} e^{-\mu_2 t} \right] \dots \dots (75)$$

Setzen wir weiter

$$\frac{k \mu_1}{n_1^2 - 2\varepsilon_1 \mu_1 + \mu_1^2} = \mathfrak{A}_1 e^{\mu_1 \tau_1}$$

und

$$\frac{k \mu_2}{n_1^2 - 2\varepsilon_1 \mu_2 + \mu_2^2} = \mathfrak{A}_1 e^{\mu_2 \tau_1},$$

woraus sich ergibt

$$\tau_1 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \log_e \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{n_1^2 - 2\varepsilon_1 \mu_2 + \mu_2^2}{n_1^2 - 2\varepsilon_1 \mu_1 + \mu_1^2} \right\} \dots \dots \dots (76)$$

und

$$\mathfrak{A}_1 = k \sqrt{\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \cdot \frac{(n_1^2 - 2\varepsilon_1 \mu_1 + \mu_1^2)^{\mu_2}}{(n_1^2 - 2\varepsilon_1 \mu_2 + \mu_2^2)^{\mu_1}}} \dots \dots \dots (77)$$

Führen wir diese Werthe in der Gleichung (75) ein, so folgt

$$\varphi = \mathfrak{A}_1 \{ A_1 e^{-\mu_1(t-\tau_1)} + A_2 e^{-\mu_2(t-\tau_1)} \}.$$

Ist $\theta = f_1(t)$, so findet man

$$\varphi = \mathfrak{A}_1 f_1(t - \tau_1), \dots \dots \dots (78)$$

d. h. das aperiodische Galvanometer giebt vollständig auch in diesem Fall die Bewegung des Pendels wieder, aber mit einer bestimmten Zeitverschiebung und bei einer anderen Ausschlagsgrösse.

Wir haben früher in § 5 gesehen, dass, wenn die Erdbewegung eine aperiodische ist und

$$x = f(t)$$

gesetzt wird, das aperiodische Pendel eine ähnliche Curve aufschreibt und zwar von der Form

$$\xi = \mathfrak{A}f(t - \tau).$$

Setzen wir ebenfalls wie früher

$$\xi = l\theta,$$

so folgt

$$\theta = f_1(t) = \frac{\mathfrak{A}}{l} f(t - \tau).$$

Daraus ergibt sich nach der Gleichung (78)

$$\varphi = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{M}_1}{l} f(t - (\tau + \tau_1)).$$

Das Galvanometer giebt also auch in diesem Falle genau die Bewegung der Erdoberfläche wieder, aber mit einer bestimmten Zeitverschiebung.

Es tritt noch dabei ein Zahlenfactor $\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{M}_1}{l}$ auf, der beliebig gross gemacht werden kann. Durch diese Transformation von Bewegungen kann das Horizontalpendel aus den Beobachtungen selber als ganz eliminirt betrachtet werden.

Diese Untersuchung hat uns also gezeigt, dass man mit Hilfe eines aperiodischen Galvanometers die Ausschläge eines Horizontalpendels, welche im Allgemeinen sehr klein sind, im beliebigen Maasse vergrössern kann.

In den zwei wichtigsten Hauptfällen ist der Charakter der Bewegung der beweglichen Spule des Galvanometers vollständig identisch mit dem Charakter der Bewegung des Horizontalpendels.

Im allgemeinen Falle, wenn die Bewegung des Horizontalpendels weder eine gedämpfte Sinusbewegung, noch eine aperiodische ist, sondern sich durch eine beliebige Function der Zeit ausdrücken lässt, muss man zur genauen Ermittlung von θ nach der vom Galvanometer aufgezeichneten Curve auf die directe Integration der Gleichung (62) Glied für Glied zurückgreifen. Die weiter mitzutheilenden Versuche haben aber gezeigt, dass auch in diesem Fall der Charakter der Bewegung des Galvanometers in seinen allgemeinen Zügen sehr gut mit dem Charakter der Bewegung des Horizontalpendels selbst übereinstimmt.

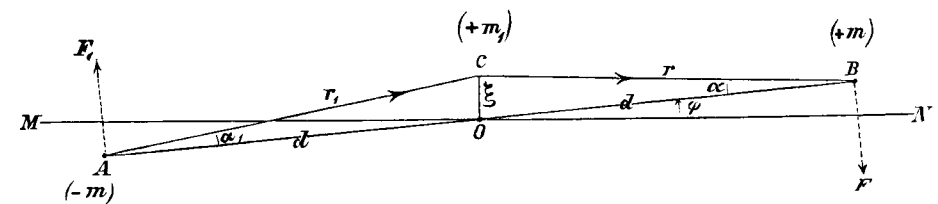
§ 7.

Magnetische Vorrichtung zur Vergrösserung der Empfindlichkeit der Registrirung eines Horizontalpendels.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, wie man sich eines aperiodischen Galvanometers bedienen kann, um die Empfindlichkeit der Registrirung eines Horizontalpendels im beliebigen Maasse zu vergrössern.

Zu demselben Zwecke kann man eine besondere magnetische Vorrichtung verwenden, auf deren Einzelheiten ich jetzt näher eingehen werde.

Fig. I.



Denkt man sich einen Magnet AB (siehe Fig. I) oder noch besser ein Solenoid mittelst eines Biflars aufgehängt. In den Punkten A und B seien die magnetischen Massen $-m$, respective $+m$ concentrirt. MN sei die Richtung der Ruhelage dieses Solenoids, welche mit dem magnetischen Meridian zusammenfallen soll. Die Entfernung der Pole A und B sei gleich $2d$.

Ein anderer Magnet oder Solenoid sei ausserdem mit dem Horizontalpendel verbunden und zwar so, dass, wenn das Pendel in Ruhe ist, der Pol $(+m_1)$ dieses zweiten Solenoids in der Mitte des ersten in O sich befindet. Dieses zweite Solenoid sei so angebracht, dass bei Drehung des Pendels um einen kleinen Winkel θ der Pol (m_1) sich senkrecht zu MN bewegt. Ist L die Entfernung dieses Pols von der Drehungsaxe, so hat man

$$OC = \xi = L\theta.$$

Dieses zweite Solenoid sei so lang gewählt, dass man von der Wirkung des zweiten Pols auf das erste Solenoid absehen kann. Ist das nicht der Fall, so wird die Wirkung des zweiten Pols nur als ein etwaiges Correctionsglied in den weiter zu entwickelnden Gleichungen auftreten. Diese Wirkung werden wir jedoch jetzt ganz ausser Acht lassen.

Ist das erste Solenoid um den Winkel φ gedreht, so lässt sich die Differentialgleichung der Bewegung desselben in folgender Form schreiben¹⁾:

$$K\varphi'' = -a\varphi' - b\varphi - 2md \cdot H\varphi - \mathfrak{M} \dots \dots \dots (79)$$

Hierin bedeuten: K das Trägheitsmoment des Systems und H die horizontale Componente der Intensität des Erdmagnetismus.

a und b sind zwei Constanten; die erste hängt von den Dämpfungsverhältnissen und die zweite von dem Drehungsmoment dieses beweglichen Systems unmittelbar ab.

\mathfrak{M} ist das Drehungsmoment, welches der um ξ verschobene Pol ($+m_1$) des zweiten Solenoids hervorruft.

Bei den hier gewählten Bedingungen (siehe Fig. I) ist \mathfrak{M} positiv; wird nun die Stromrichtung im zweiten Solenoid geändert, so wird \mathfrak{M} negativ.

Wollen wir nun \mathfrak{M} berechnen.

Die Entfernung von C von den Polen B und A sei respective r und r_1 .

Die Kraft F , welche senkrecht zu AB am Pole B wirkt, lässt sich in folgender Weise ausdrücken:

$$F = \frac{m m_1}{r^2} \cdot \sin \alpha.$$

In ähnlicher Weise ist

$$F_1 = \frac{m m_1}{r_1^2} \cdot \sin \alpha_1.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{M} = Fd + F_1d = m m_1 d \cdot \left\{ \frac{\sin \alpha}{r^2} + \frac{\sin \alpha_1}{r_1^2} \right\}.$$

Aus den Dreiecken OCB und OCA ergibt sich

$$\sin \alpha = \cos \varphi \cdot \frac{\xi}{r}$$

und

$$\sin \alpha_1 = \cos \varphi \cdot \frac{\xi}{r_1},$$

folglich wird

$$\mathfrak{M} = m m_1 d \cdot \xi \cos \varphi \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r_1^3} \right\} \dots \dots \dots (80)$$

1) φ soll klein sein.

Aus denselben Dreiecken ergibt sich weiter

$$r^2 = d^2 + \xi^2 - 2d\xi \sin \varphi$$

$$r_1^2 = d^2 + \xi^2 + 2d\xi \sin \varphi.$$

Das Solenoid AB soll so gewählt werden, dass ξ im Vergleich zu d immer sehr klein bleibt, so dass man Glieder von der Ordnung $\left(\frac{\xi}{d}\right)^2$ vernachlässigen darf.

Dann wird

$$r = d \left\{ 1 - \frac{\xi}{d} \sin \varphi \right\}$$

$$r_1 = d \left\{ 1 + \frac{\xi}{d} \sin \varphi \right\}.$$

Daraus ergibt sich bei der hier angenommenen Genauigkeit

$$\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r_1^3} = \frac{2}{d^3}.$$

Bringt man diesen Werth in der Gleichung (80) ein, so folgt

$$\mathfrak{M} = \frac{2m m_1 \cos \varphi}{d^2} \cdot \xi.$$

Für kleine Werthe von φ , kann man $\cos \varphi = 1$ setzen.

Setzen wir weiter (siehe Gleichung (79))

$$\frac{a}{K} = 2\varepsilon_1,$$

$$\frac{b + 2mdH}{K} = n_1^2,$$

und

$$\frac{2m m_1 L}{K d^2} = k,$$

so geht die Gleichung (79) in die folgende über:

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1 \varphi' + n_1^2 \varphi + k\theta = 0, \dots \dots \dots (81)$$

wo k je nach Umständen positiv oder negativ ausfallen kann.

Um sich bei den Beobachtungen von einer etwaigen Aenderung in der Richtung und Grösse der horizontalen Componente der Intensität des Erdmagnetismus H zu schützen, kann man beide Solenoide durch echt asta-

tische Systeme ersetzen, welche so eingerichtet sein sollen, dass man von der directen Wirkung des complementären Solenoids vollständig absehen oder wenigstens dieselbe als eine Correctionsgrösse betrachten kann. Dies ist nicht schwer zu bewerkstelligen, deshalb brauche ich hier auf die Einzelheiten einer solchen Einrichtung nicht näher einzugehen.

Was nun die in der Gleichung (81) auftretenden Constanten ϵ_1 und n_1 betrifft, so sei das erste Solenoid mit einer solchen electromagnetischen Dämpfungsvorrichtung versehen (etwa wie die beim Horizontalpendel früher besprochene), dass

$$\epsilon_1 > n_1$$

wird.

Setzen wir nun, wie früher,

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \epsilon_1 + \alpha_1 \\ v_2 &= \epsilon_1 - \alpha_1 \\ \text{und} \\ \alpha_1 &= \sqrt{\epsilon_1^2 - n_1^2}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(82)$$

so lässt sich das allgemeine Integral der Gleichung (81) in folgender Form wiedergeben :

$$\varphi = \Gamma_1 e^{-v_1 t} + \Gamma_2 e^{-v_2 t} + \frac{k}{v_1 - v_2} [e^{-v_1 t} \int e^{v_1 t} \cdot \theta dt - e^{-v_2 t} \int e^{v_2 t} \theta dt], \dots(83)$$

wo Γ_1 und Γ_2 zwei Constanten bedeuten, welche von den Anfangsbedingungen der Bewegung unmittelbar abhängen.

Bezüglich der Function $\theta = f_1(t)$ wollen wir wiederum dieselben Voraussetzungen wie früher machen, d. h. unsere beiden Hauptfälle besonders untersuchen.

Erster Fall.

$$\theta = f_1(t) = A e^{-\epsilon t} \sin(pt + \delta),$$

wo

$$p = \sqrt{n^2 - \epsilon^2}$$

ist.

Aus der Gleichung (83) ergibt sich dann in ähnlicher Weise wie früher bei Vernachlässigung der beiden ersten Glieder

$$\varphi = \frac{kA}{\sqrt{R_1}} e^{-\epsilon t} \sin(pt + \delta + \Delta_1), \dots\dots\dots(84)$$

wo

$$R_1 = \{p^2 + (v_1 - \epsilon)^2\} \{p^2 + (v_2 - \epsilon)^2\}$$

und

$$\text{tg } \Delta_1 = \frac{2p(\epsilon_1 - \epsilon)}{n^2 - n_1^2 + 2\epsilon(\epsilon_1 - \epsilon)}$$

ist.

Setzt man noch weiter

$$\tau_1 = \frac{\Delta_1}{p}$$

und

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{k e^{\epsilon \tau_1}}{\sqrt{R_1}},$$

so folgt

$$\varphi = \mathfrak{A}_1 A e^{-\epsilon(t + \tau_1)} \sin\{p(t + \tau_1) + \delta\} = \mathfrak{A}_1 f_1(t + \tau_1).$$

Zweiter Fall.

$$\theta = f_1(t) = A_1 e^{-\mu_1 t} + A_2 e^{-\mu_2 t}.$$

In diesem Fall ergibt sich aus der Gleichung (83), in ganz ähnlicher Weise wie früher, bei Vernachlässigung der beiden ersten Glieder,

$$\varphi = -k \left[A_1 \frac{e^{-\mu_1 t}}{n_1^2 - 2\epsilon_1 \mu_1 + \mu_1^2} + A_2 \frac{e^{-\mu_2 t}}{n_1^2 - 2\epsilon_1 \mu_2 + \mu_2^2} \right].$$

Setzt man nun

$$\frac{-k}{n_1^2 - 2\epsilon_1 \mu_1 + \mu_1^2} = \mathfrak{A}_1 e^{\mu_1 \tau_1}$$

und

$$\frac{-k}{n_1^2 - 2\epsilon_1 \mu_2 + \mu_2^2} = \mathfrak{A}_1 e^{\mu_2 \tau_1},$$

so ergibt sich

$$\tau_1 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \log_e \frac{n_1^2 - 2\epsilon_1 \mu_2 + \mu_2^2}{n_1^2 - 2\epsilon_1 \mu_1 + \mu_1^2}$$

und

$$\mathfrak{A}_1 = -k \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{(n_1^2 - 2\epsilon_1 \mu_1 + \mu_1^2) \mu_2 (n_1^2 - 2\epsilon_1 \mu_2 + \mu_2^2) \mu_1}}.$$

Führen wir diese Werthe in der vorigen Gleichung ein, so folgt

$$\varphi = \mathfrak{A}_1 [A_1 e^{-\mu_1(t - \tau_1)} + A_2 e^{-\mu_2(t - \tau_1)}] = \mathfrak{A}_1 f_1(t - \tau_1).$$

Wir sehen also, dass in diesen beiden Fällen unser bewegliches magnetisches System, für nicht zu kleine Werthe von t , vollständig die Bewegung

des Horizontalpendels wiedergibt, nur mit einer bestimmten Zeitverschiebung und bei einer veränderten Ausschlagsgrösse. In dieser Hinsicht verhält sich also unser magnetisches System ganz ähnlich, wie ein aperiodisches Galvanometer, folglich können alle Schlüsse, welche wir im vorigen Paragraphen gezogen haben, unmittelbar auf diesen Fall übertragen werden. Eine Wiederholung derselben halte ich für überflüssig.

Durch Vermehrung der Stromstärke in den Solenoiden, d. h. durch Vermehrung des Werthes von k , kann man die Empfindlichkeit der Aufzeichnungen des Horizontalpendels im beliebigen Maasse vergrössern. Folglich eignet sich in dieser Hinsicht zum Registrirzwecke das erwähnte magnetische System eben so gut, wie ein aperiodisches Galvanometer.

§ 8.

Ueber den Einfluss der Anfangsbedingungen auf die Bewegung eines aperiodischen Galvanometers.

Im § 6 haben wir gesehen, dass ein aperiodisches Galvanometer sich zum Registrirzwecke besonders gut eignet. Mit Hilfe desselben kann die Empfindlichkeit der Registrirung beliebig vergrössert werden, ausserdem spielen dann die Anfangsbedingungen der Bewegung keine wesentliche Rolle, da die Glieder in dem allgemeinen Ausdruck für φ , welche von denselben abhängen, schon für sehr kleine Werthe von t verschwinden. Die Richtigkeit dieser Theorie soll in einem späteren Paragraphen geprüft werden, aber, um dieses in Wirklichkeit durchführen zu können, ist es unbedingt notwendig vorher festzustellen, für welche Werthe von t der Einfluss der Anfangsbedingungen der Bewegung bei den gegebenen Werthen der Constanten des Pendels und des Galvanometers als verschwindend klein angenommen werden kann, da nur für diese Werthe von t eine Verwerthung der erhaltenen Curven vorgenommen werden darf.

Diese Frage soll jetzt näher erörtert werden.

Am Anfang der Bewegung, für $t = 0$, ist die Ablenkung des Galvanometers gleich Null, also $\varphi_0 = 0$. Wie steht es aber mit der anfänglichen Geschwindigkeit φ_0' ?

Ist die Anfangsgeschwindigkeit des Pendels gleich Null, so wird offenbar $\varphi_0' = 0$. Wie wird sich aber die Sache verhalten, wenn das Pendel am Anfang der Bewegung einen Anstoss erhalten hat?

Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit des Galvanometers $\frac{d\varphi}{dt}$ durch ω , so erhalten wir aus den Gleichungen (59) und (60), unter Berücksichtigung, dass für äusserst kleine Werthe von t $\varphi = 0$ gesetzt werden darf, folgende Gleichung

$$\frac{d\omega}{dt} + \beta\omega = \frac{F_1 b}{K} I, \dots\dots\dots(85)$$

wo

$$\beta = \frac{\alpha}{K}$$

gesetzt wird.

Diese Gleichung gilt nur für äusserst kleine Werthe von t , wo die Bewegung des Galvanometers so zu sagen noch nicht begonnen hat. Sie gilt nur zur Bestimmung der anfänglichen Geschwindigkeit $\omega_0 = \varphi_0'$, ganz ähnlich wie dieses bei der Ausmessung elektrischer Massen mit Hilfe eines ballistischen Galvanometers geschieht.

Die Gleichung (85) lässt sich noch folgendermassen schreiben

$$d(e^{\beta t} \cdot \omega) = \frac{F_1 b}{K} e^{\beta t} I dt. \dots\dots\dots(86)$$

Integriren wir diese Gleichung zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = \tau$, wo τ äusserst klein sein soll, damit für $t = \tau$ $\varphi = 0$ noch angenommen werden darf, und bezeichnen wir durch $[e^{\beta\tau}]$ einen Mittelwerth von $e^{\beta t}$ zwischen den Grenzen 0 und τ , so ergibt sich für die Anfangsgeschwindigkeit ω_0 des Galvanometers folgende Gleichung

$$\omega_0 = e^{-\beta\tau} \cdot \frac{F_1 b}{K} [e^{\beta\tau}] \int_0^\tau I dt.$$

Hätten wir etwa einen geladenen Condensator durch das Galvanometer entladen, so würde $\int_0^\tau I dt$ die Masse der Ladung darstellen und ω_0 einen endlichen Werth erhalten. In unserem Fall dagegen, da τ äusserst klein ist, wird das betreffende Integral sich sehr wenig von Null unterscheiden, folglich kann man die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Galvanometers ω_0 einfach gleich Null setzen.

Dieser Satz lässt sich auch auf eine andere Weise beweisen.

Setzt man den Werth von I aus der Gleichung (58) in die Gleichung (85) ein, so folgt, bei Vernachlässigung der Selbstinduction und unter Berücksichtigung der Gleichungen (57) und (61),

$$\frac{d\omega}{dt} + \beta_1 \omega = -k \frac{d\theta}{dt}, \dots\dots\dots(87)$$

wo

$$\beta_1 = \beta + \frac{F_1 b}{K} \cdot \frac{a}{w}$$

gesetzt wird.

Ist das Pendel am Anfang der Bewegung in Ruhe und erhält dasselbe alsdann einen Anstoss, und bezeichnen wir den Werth von θ für $t = \tau$, wo τ äusserst klein sein soll, durch θ_0 , so ergibt sich aus der Gleichung (87) in derselben Weise, wie früher, und bei Beibehaltung derselben Bezeichnungen

$$\omega_0 = -e^{-\beta_1 \tau} k [e^{\beta_1 \tau}] \theta_0.$$

Ist τ sehr klein, so wird auch θ_0 sehr klein sein, folglich kann man ω_0 einfach gleich Null setzen.

Die Richtigkeit dieses Satzes, nämlich, dass die Anfangsgeschwindigkeit des Galvanometers gleich Null gesetzt werden darf, lässt sich aus dem anfänglichen Lauf der originalen Curven für das Galvanometer erkennen.

Nach Feststellung dieses Satzes wollen wir näher untersuchen, welchen Werth die ersten beiden Glieder in dem allgemeinen Ausdruck für φ , welche von den Anfangsbedingungen der Bewegung abhängen, erlangen.

Hier sind ebenfalls zwei Fälle zu unterscheiden: der erste, wo die Bewegung des Pendels eine periodische, und der zweite, wo dieselbe eine aperiodische ist.

Jeden Fall wollen wir besonders untersuchen.

I. Fall. Die Bewegung des Pendels ist eine periodische.

Setzen wir dementsprechend

$$\theta = Ae^{-\epsilon t} \sin(pt + \delta). \quad (\text{Gleichung (64)})$$

Bei den von mir ausgeführten Versuchen war die anfängliche Phase δ immer gleich Null. Dieses wollen wir auch hier annehmen.

Dann ergibt sich aus den Entwicklungen des § 6, unter Beibehaltung derselben Bezeichnungen, folgender allgemeiner Ausdruck für den Ablenkungswinkel des Galvanometers φ :

$$\varphi = \Gamma_1 e^{-\nu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\nu_2 t} - A_1 \frac{e^{-\epsilon t}}{\sqrt{R_1}} \sin(pt - \Delta_1). \dots\dots\dots(88)$$

Setzen wir

$$\psi = \Gamma_1 e^{-\nu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\nu_2 t}, \dots\dots\dots(89)$$

so besteht unsere Aufgabe darin, den Werth von ψ näher zu verfolgen.

Wollen wir, der Einfachheit wegen, noch folgende Bezeichnung einführen:

$$-\frac{A_1}{\sqrt{R_1}} = C. \dots\dots\dots(90)$$

Zur Ermittlung der Constanten Γ_1 und Γ_2 haben wir zwei Bedingungen zu erfüllen, nämlich für $t = 0$ müssen φ und φ' beide gleich Null sein.

Dementsprechend ergibt sich aus der Gleichung (88), unter Berücksichtigung der Gleichung (90),

$$0 = \Gamma_1 + \Gamma_2 - C \sin \Delta_1$$

und

$$0 = -\nu_1 \Gamma_1 - \nu_2 \Gamma_2 + C [p \cos \Delta_1 + \epsilon \sin \Delta_1].$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich Γ_1 und Γ_2 berechnen.

Es wird

$$\Gamma_1 = \frac{C}{\nu_1 - \nu_2} [p \cos \Delta_1 + (\epsilon - \nu_2) \sin \Delta_1]$$

$$\Gamma_2 = -\frac{C}{\nu_1 - \nu_2} [p \cos \Delta_1 + (\epsilon - \nu_1) \sin \Delta_1],$$

also

$$\psi = \frac{C}{\nu_1 - \nu_2} \left[\{p \cos \Delta_1 + \epsilon \sin \Delta_1\} \{e^{-\nu_1 t} - e^{-\nu_2 t}\} - \sin \Delta_1 \{ \nu_2 e^{-\nu_1 t} - \nu_1 e^{-\nu_2 t} \} \right] \dots\dots\dots(91)$$

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für ψ .

In dem Grenzfall, wo in der Gleichung (62) $n_1 = \epsilon_1$ wird, ergibt sich aus den Gleichungen (67)

$$\nu_1 = \nu_2 = \epsilon_1.$$

Die Unbestimmtheit, welche dann in der Gleichung (91) auftritt, lässt sich leicht auflösen.

Es wird nämlich für $\nu_1 = \nu_2 = \epsilon_1$

$$\frac{e^{-\nu_1 t} - e^{-\nu_2 t}}{\nu_1 - \nu_2} = -t \cdot e^{-\epsilon_1 t} \dots\dots\dots(92)$$

und

$$\frac{\nu_2 e^{-\nu_1 t} - \nu_1 e^{-\nu_2 t}}{\nu_1 - \nu_2} = -e^{-\epsilon_1 t} [1 + \epsilon_1 t], \dots\dots\dots(93)$$

also

$$\psi = C e^{-\epsilon_1 t} [\sin \Delta_1 + \{(\epsilon_1 - \epsilon) \sin \Delta_1 - p \cos \Delta_1\} t] \dots\dots\dots(94)$$

und

$$\varphi = \psi + C e^{-\epsilon t} \sin(pt - \Delta_1). \dots\dots\dots(95)$$

Von diesen beiden letzten Formeln werden wir später Gebrauch machen.

II. Fall. Die Bewegung des Pendels ist eine aperiodische.

Wollen wir zuerst keine Voraussetzungen über die Anfangsbedingungen dieser Bewegung machen und das Integral der Gleichung

$$\theta'' + 2\epsilon\theta' + n^2\theta = 0, \text{ 1) } \dots\dots\dots(96)$$

wo $\epsilon > n$ wird, in folgender allgemeiner Form schreiben:

$$\theta = A_1 e^{-\mu_1 t} + A_2 e^{-\mu_2 t}, \text{ 2) } \dots\dots\dots(97)$$

Hierin bedeuten A_1 und A_2 zwei Integrationsconstanten; μ_1 und μ_2 berechnen sich nach den Formeln (74).

Ist am Anfang der Bewegung (für $t = 0$) das Pendel um den Winkel θ_0 von seiner Ruhelage abgelenkt und alsdann sich selbst überlassen, so wird für $t = 0$ $\theta = \theta_0$ und $\theta' = 0$.

In diesem Falle ergibt sich aus der Gleichung (97)

$$A_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \theta_0, \\ A_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \theta_0,$$

also

$$\theta = \frac{\theta_0}{\mu_1 - \mu_2} [\mu_1 e^{-\mu_2 t} - \mu_2 e^{-\mu_1 t}], \text{ 3) } \dots\dots\dots(98)$$

Ist dagegen das Pendel am Anfang der Bewegung in seiner Ruhelage und erhält alsdann einen Anstoss, welcher ihm die anfängliche Geschwindigkeit ω_0 ertheilt, so wird für $t = 0$ $\theta = 0$ und $\theta' = \omega_0$.

Aus der Gleichung (97) ergibt sich in diesem Falle

$$A_1 = -\frac{\omega_0}{\mu_1 - \mu_2}, \\ A_2 = \frac{\omega_0}{\mu_1 - \mu_2},$$

also

$$\theta = \frac{\omega_0}{\mu_1 - \mu_2} [e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t}], \text{ 4) } \dots\dots\dots(99)$$

In diesem Falle, wie wir es in § 2 schon besprochen haben, wächst θ von 0 an, erreicht ein Maximum θ_m für ein bestimmtes $t = t_m$, um dann allmählig auf Null herabzusinken.

1) Man vergleiche die Gleichung (4).
2) Man vergleiche die Gleichung (73).
3) Man vergleiche die Gleichung (10).
4) Man vergleiche die Gleichung (11).

Bei der Auswerthung der durch bestimmte Versuche erhaltenen Curven ist es sehr schwer die anfängliche Geschwindigkeit direct zu bestimmen, das Maximum des Ausschlags θ_m dagegen lässt sich leicht ausmessen. Wollen wir nun die Beziehung zwischen ω_0 und θ_m näher feststellen.

Bestimmen wir zuerst t_m .

Dazu müssen wir $\frac{d\theta}{dt} = 0$ setzen und daraus t_m berechnen.

Es ergibt sich ohne Schwierigkeit

$$t_m = \log_e \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}} \dots\dots\dots(100)$$

Daraus folgt

$$e^{-\mu_2 t_m} = \frac{1}{e^{\log \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}}}} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}} \\ e^{-\mu_1 t_m} = \frac{1}{e^{\log \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{\frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}}}} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}}.$$

Setzen wir diese Werthe in die Formel (99) ein, so ergibt sich

$$\theta_m = \frac{\omega_0}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}} \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right).$$

Daraus bekommen wir

$$\omega_0 = \theta_m \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 \mu_2} \right]^{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}} \dots\dots\dots(101)$$

Ist das Maximum von θ einmal bestimmt und die Constanten des Pendels μ_1 und μ_2 bekannt, so lässt sich die anfängliche Geschwindigkeit ω_0 nach der Formel (101) berechnen.

In dem Grenzfall, wo in der Gleichung (96) $\epsilon = n$ wird, ergibt sich aus den Formeln (74)

$$\mu_1 = \mu_2 = n.$$

In diesem Falle gehen die Gleichungen (98) und (99) in die folgenden über¹⁾:

$$\theta = \theta_0 e^{-nt} [1 + nt] \dots\dots\dots(102)$$

und

$$\theta = \omega_0 t e^{-nt} \dots\dots\dots(103)$$

1) Man sehe die Gleichungen (93) und (92).

Wollen wir nun t_m und ω_0 für diesen Fall bestimmen.

Setzen wir $\mu_1 - \mu_2 = \xi$, wo ξ an der Grenze verschwindend klein und alsdann $\mu_2 = n$ wird, so ergibt sich aus der Gleichung (100)

$$t_m = \frac{1}{\xi} \log_e \left(1 + \frac{\xi}{n} \right).$$

Nach der Reihenentwicklung für $\log_e (1 + x)$ erhalten wir

$$t_m = \frac{1}{n} \dots \dots \dots (104)$$

Wir brauchen jetzt nur diesen Wert von t in die Gleichung (103) einzusetzen. Dann folgt

$$\omega_0 = n e \theta_m \dots \dots \dots (105)$$

Nach dieser Einführung wollen wir die Bewegung des Galvanometers unter den hier ausgesprochenen Bedingungen näher verfolgen, um den Einfluss der Anfangsbedingungen auf dasselbe näher feststellen zu können.

Aus den Entwicklungen des § 6 ergibt sich, wenn

$$\theta = A_1 e^{-\mu_1 t} + A_2 e^{-\mu_2 t}$$

gesetzt wird, folgender allgemeiner Ausdruck für φ :

$$\varphi = \Gamma_1 e^{-\nu_1 t} + \Gamma_2 e^{-\nu_2 t} + \left. \begin{aligned} &+ k \left[\frac{\mu_1 A_1}{(\nu_1 - \mu_1)(\nu_2 - \mu_1)} e^{-\mu_1 t} + \frac{\mu_2 A_2}{(\nu_1 - \mu_2)(\nu_2 - \mu_2)} e^{-\mu_2 t} \right] \dots \dots \dots (106) \end{aligned} \right\}$$

Aus den Bedingungen, dass für $t = 0$ φ und φ' beide verschwinden, lassen sich die Constanten Γ_1 und Γ_2 mit Leichtigkeit bestimmen.

Die allgemeinen Ausdrücke für Γ_1 und Γ_2 werde ich hier nicht ausarbeiten, sondern mich zu dem Grenzfall wenden, wo $\mu_1 = \mu_2 = n$ ist. Nur dieser Fall ist bei meinen Beobachtungen vorgekommen.

Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall A. Für $t = 0$ $\theta = \theta_0$ $\theta' = 0$, also nach der Gleichung (102)

$$\theta = \theta_0 e^{-nt} [1 + nt].$$

Fall B. Für $t = 0$ $\theta = 0$ $\theta' = \omega_0$, also nach der Gleichung (103)

$$\theta = \omega_0 t e^{-nt}.$$

Um den entsprechenden Ausdruck für φ zu bekommen, müssen wir, bevor wir zur Grenze übergehen und $\mu_1 = \mu_2$ setzen, A_1 und A_2 durch ihre entsprechenden Werthe ersetzen.

Wir haben nun gesehen, dass im Falle A

$$A_1 = - \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \theta_0$$

$$A_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \theta_0$$

ist.

Führen wir diese Werthe in der Gleichung (106) ein, so folgt

$$\varphi = \psi + \frac{k \mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \theta_0 \left[\frac{e^{-\mu_2 t}}{(\nu_1 - \mu_2)(\nu_2 - \mu_2)} - \frac{e^{-\mu_1 t}}{(\nu_1 - \mu_1)(\nu_2 - \mu_1)} \right].$$

Gehen wir jetzt zur Grenze über und setzen dementsprechend $\mu_1 = \mu_2 = n$, so erhalten wir

$$\varphi = \psi + k n^2 \theta_0 \frac{e^{-nt}}{(\nu_1 - n)(\nu_2 - n)} \left[t - \frac{\nu_1 + \nu_2 - 2n}{(\nu_1 - n)(\nu_2 - n)} \right] \dots \dots \dots (107)$$

Dieses ist der Ausdruck für φ für beliebige Werthe von ν_1 und ν_2 .

Setzen wir jetzt noch, wie früher, eine andere Grenzbedingung voraus, nämlich, dass $n_1 = \varepsilon_1$, also $\nu_1 = \nu_2 = n_1$ ist, so ergibt sich aus der Gleichung (107)

$$\varphi = \psi + k \theta_0 \left(\frac{n}{n_1 - n} \right)^2 e^{-nt} \left[t - \frac{2}{n_1 - n} \right] \dots \dots \dots (108)$$

Für den Fall B ist, wie wir früher gesehen haben,

$$A_1 = - \frac{\omega_0}{\mu_1 - \mu_2}$$

$$A_2 = \frac{\omega_0}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Führen wir diese Werthe in der Gleichung (106) ein, so folgt

$$\varphi = \psi + \frac{k \omega_0}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{\mu_2 e^{-\mu_2 t}}{(\nu_1 - \mu_2)(\nu_2 - \mu_2)} - \frac{\mu_1 e^{-\mu_1 t}}{(\nu_1 - \mu_1)(\nu_2 - \mu_1)} \right]$$

und beim Uebergang zur Grenze ($\mu_1 = \mu_2 = n$)

$$\varphi = \psi + k n \omega_0 \frac{e^{-nt}}{(\nu_1 - n)(\nu_2 - n)} \left[t - \frac{1}{n} \frac{\nu_1 \nu_2 - n^2}{(\nu_1 - n)(\nu_2 - n)} \right] \dots \dots \dots (109)$$

Aus diesem allgemeinen Ausdruck für φ für beliebige ν_1 und ν_2 erhalten wir für den Grenzfall $\nu_1 = \nu_2 = n_1$

$$\varphi = \psi + k \omega_0 \frac{n}{(n_1 - n)^2} e^{-nt} \left[t - \frac{1}{n} \frac{n_1 + n}{n_1 - n} \right], \dots \dots \dots (110)$$

wo ω_0 sich nach der Formel (105) berechnen lässt.

Das sind eben die Grenzfälle, welche bei meinen Versuchen vorgekommen sind, und welche ich daher näher in Betracht gezogen habe.

Wollen wir nun annehmen, wie es in § 6 geschah, dass ψ verschwindend klein geworden ist, dann haben wir, wenn

$$\theta = f_1(t) = \theta_0 e^{-nt} [1 + nt] \quad (\text{Formel (102)})$$

ist,

$$\varphi = k \theta_0 \left(\frac{n}{n_1 - n} \right)^2 e^{-nt} \left[t - \frac{2}{n_1 - n} \right]. \quad (\text{Siehe Formel (108)})$$

Für den Fall

$$\theta = f_1(t) = \omega_0 t e^{-nt} \quad (\text{Formel (103)})$$

wird

$$\varphi = k \omega_0 \frac{n}{(n_1 - n)^2} e^{-nt} \left[t - \frac{1}{n} \frac{n_1 + n}{n_1 - n} \right]. \quad (\text{Siehe Formel (110)})$$

Nun haben aber die Entwicklungen des § 6 gezeigt, dass man den Ausdruck für φ unmittelbar aus dem Ausdrucke für $\theta = f_1(t)$ ableiten kann, indem

$$\varphi = \mathfrak{A}_1 f_1(t - \tau_1) \quad (\text{Formel (78)})$$

gesetzt wird, wo

$$\tau_1 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \log_e \left\{ \frac{\mu_1 \cdot n_1^2 - 2\varepsilon_1 \mu_2 + \mu_2^2}{\mu_2 \cdot n_1^2 - 2\varepsilon_1 \mu_1 + \mu_1^2} \right\} \quad (\text{Formel (76)})$$

und

$$\mathfrak{A}_1 = k \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \frac{(n_1^2 - 2\varepsilon_1 \mu_1 + \mu_1^2)^{\mu_2}}{(n_1^2 - 2\varepsilon_1 \mu_2 + \mu_2^2)^{\mu_1}}} \quad (\text{Formel (77)})$$

ist.

Um dieses prüfen zu können, müssen wir zuerst die Ausdrücke für τ_1 und \mathfrak{A}_1 bilden unter den Bedingungen $n_1 = \varepsilon_1$ und $\mu_1 = \mu_2 = n$.

Ist $n_1 = \varepsilon_1$, so wird

$$\tau_1 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \log_e \left\{ \frac{\mu_1 (n_1 - \mu_2)^2}{\mu_2 (n_1 - \mu_1)^2} \right\} \dots \dots \dots (111)$$

und

$$\mathfrak{A}_1 = k \left[\frac{\mu_2 \mu_1}{\mu_1 \mu_2} \right]^{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}} \cdot \left[\frac{(n_1 - \mu_1)^{2\mu_2}}{(n_1 - \mu_2)^{2\mu_1}} \right]^{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}} \dots \dots \dots (112)$$

Setzt man jetzt $\mu_1 = \mu_2$, so nehmen beide Ausdrücke eine unbestimmte Form an.

Um den wahren Werth von τ_1 , respective \mathfrak{A}_1 zu bestimmen, setzen wir $\mu_1 - \mu_2 = \xi$ und $\mu_2 = n$, wo ξ als verschwindend klein angenommen werden soll. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{\xi} \log \left\{ \frac{n + \xi}{n} \cdot \frac{(n_1 - n)^2}{(n_1 - n - \xi)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\xi} \left[\log \left(1 + \frac{\xi}{n} \right) + \log \left(1 + \frac{2\xi}{n_1 - n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n_1 - n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n_1 + n}{n_1 - n}, \end{aligned}$$

also ist

$$\tau_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n_1 + n}{n_1 - n} \dots \dots \dots (113)$$

Wollen wir nun \mathfrak{A}_1 bestimmen.

Setzen wir

$$a = \left[\frac{\mu_2 \mu_1}{\mu_1 \mu_2} \right]^{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}}$$

und

$$b = \left[\frac{(n_1 - \mu_1)^{2\mu_2}}{(n_1 - \mu_2)^{2\mu_1}} \right]^{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}},$$

dann ist

$$\mathfrak{A}_1 = k a b. \dots \dots \dots (114)$$

a und b müssen besonders bestimmt werden.

$$a = \frac{n + \xi}{n \xi} \frac{n}{(n + \xi)^{\frac{n}{\xi}}}$$

$$\log a = \frac{1}{\xi} \left[(n + \xi) \lg n - n \lg n \left(1 + \frac{\xi}{n} \right) \right] = \lg n - 1 = \lg \frac{n}{e}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} a &= \frac{n}{e} \\ b &= \frac{[n_1 - n - \xi]^{\frac{2n}{\xi}}}{[n_1 - n]^{\frac{2(n + \xi)}{\xi}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log b &= \frac{1}{\xi} \left[2n \left\{ \lg(n_1 - n) + \lg \left(1 - \frac{\xi}{n_1 - n} \right) \right\} - 2(n + \xi) \lg(n_1 - n) \right] \\ &= \frac{1}{\xi} \left[-2n \frac{\xi}{n_1 - n} - 2\xi \lg(n_1 - n) \right] = - \left[\lg e^{\frac{2n}{n_1 - n}} + \lg(n_1 - n)^2 \right], \end{aligned}$$

also

$$b = \frac{1}{(n_1 - n)^2} \cdot \frac{1}{e^{n_1 - n}}$$

Setzen wir die gefundenen Werthe von a und b in die Gleichung (114) ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{A}_1 = k \frac{n}{(n_1 - n)^2} \cdot \frac{1}{e^{n_1 - n}} \dots \dots \dots (115)$$

τ_1 und \mathfrak{A}_1 sind also bestimmt.

Es ist jetzt nicht schwer einzusehen, dass, wenn man in den Formeln (102), resp. (103), statt t , $t - \tau_1$ einsetzt und noch den Zahlenfactor \mathfrak{A}_1 beifügt, wie es die Formel (78) verlangt, man die Gleichungen (108), resp. (110) unmittelbar erhält¹⁾, wie es die im § 6 entwickelte Theorie verlangt.

Nach diesen Erläuterungen kehren wir zu der Hauptaufgabe dieses § zurück, welche darin besteht, die Grösse der Function ψ , welche von den Anfangsbedingungen der Bewegung abhängt, näher zu verfolgen.

Wir werden dabei nur den Fall besprechen, wo $n = \varepsilon$ ist. Setzen wir

$$\varphi - \psi = F(t),$$

wo $F(t)$ für den Fall A und B sich besonders ausdrücken lässt.

Da

$$\psi = \Gamma_1 e^{-v_1 t} + \Gamma_2 e^{-v_2 t}$$

ist und für $t = 0$ φ und φ' beide gleich Null sind, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_1 + \Gamma_2 + F(0) \\ 0 &= -v_1 \Gamma_1 - v_2 \Gamma_2 + F'(0). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{v_1 - v_2} \{F'(0) + v_2 F(0)\} \\ \Gamma_2 &= -\frac{1}{v_1 - v_2} \{F'(0) + v_1 F(0)\}, \end{aligned}$$

also

$$\psi = \frac{F'(0)}{v_1 - v_2} [e^{-v_1 t} - e^{-v_2 t}] + \frac{F(0)}{v_1 - v_2} [v_2 e^{-v_1 t} - v_1 e^{-v_2 t}]. \dots (116)$$

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für ψ für beliebige Werthe von v_1 und v_2 .

¹⁾ Wenn $\psi = 0$ gesetzt wird.

Gehen wir wieder zu dem uns interessirenden Grenzfall ($n_1 = \varepsilon_1 = v_1 = v_2$) über, so ergibt sich nach den Gleichungen (92) und (93)

$$\psi = -e^{-n_1 t} [F(0) + \{F'(0) + n_1 F(0)\} t]. \dots \dots \dots (117)$$

Diese Gleichung wollen wir besonders auf den Fall A und B anwenden.

Im Falle A ist nach der Gleichung (108)

$$F(t) = k \theta_0 \left(\frac{n}{n_1 - n}\right)^2 e^{-nt} \left[t - \frac{2}{n_1 - n}\right].$$

Daraus ergibt sich

$$F(0) = -k \theta_0 \left(\frac{n}{n_1 - n}\right)^2 \frac{2}{n_1 - n}$$

und

$$F'(0) = k \theta_0 \left(\frac{n}{n_1 - n}\right)^2 \frac{n_1 + n}{n_1 - n},$$

also

$$\psi = k \theta_0 \left(\frac{n}{n_1 - n}\right)^2 e^{-n_1 t} \left[t + \frac{2}{n_1 - n}\right] \dots \dots \dots (118)$$

und

$$\varphi = \psi + F(t) = k \theta_0 \left(\frac{n}{n_1 - n}\right)^2 \left[e^{-n_1 t} \left\{t + \frac{2}{n_1 - n}\right\} + e^{-nt} \left\{t - \frac{2}{n_1 - n}\right\} \right] \dots \dots (119)$$

Im Falle B ist nach der Gleichung (110)

$$F(t) = k \omega_0 \frac{n}{(n_1 - n)^2} e^{-nt} \left[t - \frac{1}{n} \cdot \frac{n_1 + n}{n_1 - n}\right].$$

Daraus ergibt sich

$$F(0) = -k \omega_0 \frac{1}{(n_1 - n)^2} \cdot \frac{n_1 + n}{n_1 - n}$$

und

$$F'(0) = k \omega_0 \frac{n}{(n_1 - n)^2} \cdot \frac{2n_1}{n_1 - n},$$

also unter Berücksichtigung, dass

$$\omega_0 = n e \theta_m \quad \text{(Formel (105))}$$

ist,

$$\psi = k \theta_m \frac{ne}{(n_1 - n)^2} e^{-n_1 t} \left[n_1 t + \frac{n_1 + n}{n_1 - n}\right] \dots \dots \dots (120)$$

und

$$\varphi = k \theta_m \frac{ne}{(n_1 - n)^2} \left[e^{-n_1 t} \left\{n_1 t + \frac{n_1 + n}{n_1 - n}\right\} + e^{-nt} \left\{nt - \frac{n_1 + n}{n_1 - n}\right\} \right] \dots \dots (121)$$

Von den beiden Formeln (118) und (120) werden wir später Gebrauch machen.

Zum Schluss möchte ich auf einen sehr interessanten Specialfall aufmerksam machen, nämlich auf den, wo ausser den Bedingungen $n = \varepsilon$ und $n_1 = \varepsilon_1$, noch $n = n_1$ ist.

Dieser Fall ($n = n_1$) erweist sich für Registrirungszwecke mit Hilfe eines aperiodischen Galvanometers als ein sehr günstiger, da nach der Formel (70), bei beliebigen, aber noch zulässigen Werthen von ε und ε_1 , $\text{tg } \Delta_1$ im Allgemeinen gleich Null wird.

In den Gleichungen (119) und (121) tritt die Differenz $n_1 - n$ im Nenner auf, aber trotzdem bleiben diese Ausdrücke für φ , wenn $n_1 = n$ gesetzt wird, immer endlich.

Wollen wir jetzt die entsprechenden Ausdrücke bilden.

Setzen wir dementsprechend $n_1 - n = \xi$, wo ξ verschwindend klein sein soll, so ergibt sich aus der Gleichung (119) für den Fall A

$$\begin{aligned} \varphi &= k \theta_0 n^2 \frac{1}{\xi^2} \left[e^{-nt} \cdot e^{-\xi t} \left\{ t + \frac{2}{\xi} \right\} + e^{-nt} \left\{ t - \frac{2}{\xi} \right\} \right] \\ &= k \theta_0 n^2 \frac{e^{-nt}}{\xi^2} \left[\left\{ 1 - \xi t + \frac{1}{2} \xi^2 t^2 - \frac{1}{6} \xi^3 t^3 \right\} \left\{ t + \frac{2}{\xi} \right\} + t - \frac{2}{\xi} \right] \\ &= k \theta_0 n^2 \frac{e^{-nt}}{\xi^2} \left[\frac{1}{2} \xi^2 t^3 - \frac{1}{3} \xi^3 t^3 \right], \end{aligned}$$

also

$$\varphi = \frac{1}{6} k \theta_0 n^2 e^{-nt} \cdot t^3. \dots\dots\dots(122)$$

Für den Fall B ergibt sich aus der Gleichung (121)

$$\begin{aligned} \varphi &= k \theta_m \frac{ne}{\xi^2} \left[e^{-nt} \cdot e^{-\xi t} \left\{ (n + \xi)t + \frac{2n + \xi}{\xi} \right\} + e^{-nt} \left\{ nt - \frac{2n + \xi}{\xi} \right\} \right] \\ &= k \theta_m \frac{ne}{\xi^2} e^{-nt} \left[\left\{ 1 - \xi t + \frac{1}{2} \xi^2 t^2 - \frac{1}{6} \xi^3 t^3 \right\} \left\{ nt + \xi t + \frac{2n}{\xi} + 1 \right\} + nt - \frac{2n}{\xi} - 1 \right] \\ &= k \theta_m \frac{ne}{\xi^2} e^{-nt} \left[\frac{1}{2} n \xi^2 t^3 - \xi^3 t^3 - \frac{1}{3} n \xi^2 t^3 + \frac{1}{2} \xi^2 t^3 \right], \end{aligned}$$

also

$$\varphi = \frac{1}{2} k \theta_m ne \cdot e^{-nt} t^2 \left[\frac{1}{3} nt - 1 \right]. \dots\dots\dots(123)$$

Wollen wir nun den Gang der Function φ in beiden Fällen etwas näher verfolgen.

Im Falle A, wo

$$\theta = \theta_0 e^{-nt} [1 + nt] \quad (\text{Formel (102)})$$

ist, ist θ am Anfang der Bewegung gleich θ_0 und sinkt alsdann allmählig auf Null herab, während φ nach der Formel (122) am Anfang gleich Null

ist, alsdann bis zum Maximalwerth φ_m für $t = t_m$ wächst, um dann ebenfalls allmählig auf Null herabzusinken.

Wollen wir t_m und φ_m bestimmen.

Aus der Bedingung $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ergibt sich

$$t_m = \frac{3}{n}, \dots\dots\dots(124)$$

also

$$\varphi_m = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{e^3} \cdot \frac{k\theta_0}{n} = 0,22405 \frac{k\theta_0}{n}. \dots\dots\dots(125)$$

Im Falle B, wo

$$\theta = ne \theta_m t e^{-nt}$$

ist, ist θ am Anfang der Bewegung gleich Null, wächst alsdann bis zum Maximalwerth θ_m für

$$t = t_m = \frac{1}{n}, \quad (\text{Siehe Formel (104)})$$

um dann allmählig auf Null herabzusinken.

Die Function φ , welche der Gleichung (123) entspricht, hat in diesem Fall einen ganz anderen und sehr interessanten Gang.

Am Anfang der Bewegung ist $\varphi = 0$. Alsdann für ein bestimmtes $t = t_1$ erreicht φ einen Grenzwert φ_1 , geht für $t = t_0$ durch Null hindurch, erreicht für $t = t_2$ einen zweiten Grenzwert φ_2 , um dann ebenfalls allmählig auf Null herabzusinken.

Wollen wir t_0, t_1, t_2, φ_1 und φ_2 bestimmen.

Aus der Gleichung (123) ergibt sich unmittelbar

$$t_0 = \frac{3}{n}, \dots\dots\dots(126)$$

also

$$t_0 = 3t_m.$$

Um t_1 und t_2 zu bestimmen, setzen wir

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Es ergibt sich

$$t^3 - \frac{6}{n} t + \frac{6}{n^2} = 0.$$

1) Man sehe die Formeln (103) und (105).

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{3 - \sqrt{3}}{n} = t_0 - \frac{\sqrt{3}}{n} \\ t_2 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{n} = t_0 + \frac{\sqrt{3}}{n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(127)$$

Wir sehen also, dass die Zeitmomente t_1 und t_2 symmetrisch in Bezug auf den Zeitmoment t_0 liegen.

Setzen wir diese Werthe von t_1 und t_2 in die Formel (123) ein, so folgt

$$\varphi_1 = - \sqrt{3} \frac{2 - \sqrt{3}}{e^{2 - \sqrt{3}}} \cdot \frac{k\theta_m}{n} = - 0,3550 \frac{k\theta_m}{n} \dots\dots\dots(128)$$

$$\varphi_2 = + \sqrt{3} \frac{2 + \sqrt{3}}{e^{2 + \sqrt{3}}} \cdot \frac{k\theta_m}{n} = 0,1548 \frac{k\theta_m}{n} \dots\dots\dots(129)$$

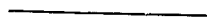
Das Vorzeichen von φ_1 und φ_2 hängt unmittelbar von dem Vorzeichen von k ab.

Aus den Gleichungen (128) und (129) ergibt sich das sehr interessante Resultat, dass das Verhältniss beider Ausschläge φ_1 und φ_2 vollständig unabhängig ist von den Werthen von k , θ_m und n .

Es ist nämlich

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = - e^{2\sqrt{3}} \cdot \{7 - 4\sqrt{3}\} = - 2,294. \dots\dots\dots(130)$$

Der Charakter der Functionen φ in den beiden Fällen A und B lässt sich aus den in den Figuren (54) und (55) angegebenen Curven gut erkennen. Diese Curven entsprechen zwar nicht vollständig den hier besprochenen Fällen, da, obgleich bei ihnen $n = \varepsilon$ und $n_1 = \varepsilon_1$ war, doch n_1 nicht gleich n war. Trotzdem entsprechen diese Curven in ihren allgemeinen Zügen der hier entwickelten Theorie und geben eine anschauliche Uebersicht über die Eigenschaften der hier besprochenen Functionen.



B. Experimenteller Theil.

§ 9.

Die Untersuchungsplattform.

In meinem früheren Aufsatz «Ueber seismometrische Beobachtungen» habe ich im § 10¹⁾ zur Untersuchung seismometrischer Apparate eine besondere Untersuchungsplattform vorgeschlagen und beschrieben.

Diese Plattform ist nun construiert worden und erwies sich als sehr praktisch und bequem. Sie unterscheidet sich ganz unwesentlich von der früher von mir gegebenen Zeichnung derselben. Die Laufgewichte g ²⁾, welche die kleine Rolle l an dem drehbaren Cylinder andrücken sollten, wurden durch eine starke Feder, welche sich unter der Plattform befindet, ersetzt; ausserdem wurde die Plattform zur Aufnahme seismometrischer Apparate und Registrirvorrichtungen durch zwei Ansatzstücke bedeutend erweitert. Der drehbare Theil e bestand aus einem excentrisch angebrachten Cylinder, welcher in Drehung gebracht werden konnte und die Plattform in einer periodischen Hin- und Herbewegung hielt. Die maximale Amplitude der Ausschläge der Plattform von ihrer Ruhelage betrug etwa 6,4 $\frac{m}{m}$. Die Drehung des Cylinders wurde mit Hilfe eines besonderen Electromotors von 3 HP und eines besonderen Systems von Transmission erzielt. Ein specieller Rheostat diente zur Regulierung der Stromstärke, wodurch man der Plattform verschiedene Geschwindigkeiten ertheilen konnte.

Diese Plattform wurde im Grundstock des Physikalischen Laboratoriums der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg aufgestellt; der zu den Versuchen nöthige elektrische Strom wurde von der Centrale der Akademie der Wissenschaften geliefert.

Die Fig. 2 giebt eine allgemeine Ansicht der Plattform mit dem drehbaren Cylinder nebst Transmissionsvorrichtung. Die Riemen, welche auf dieser Figur von dem oberen grossen Rade nach rechts laufen, dienen dazu,

1) Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. Année 1902. Livr. I, p. 162.

2) Siehe die Figuren XIV und XV in meinem früheren Aufsatz.

die Plattform in eine schaukelnde Bewegung zu versetzen. Bei meinen in dieser Abhandlung weiter zu beschreibenden Beobachtungen wurde von dieser schaukelnden Vorrichtung kein Gebrauch gemacht.

Die Fig. 3 giebt ebenfalls eine Ansicht der Plattform mit einem darauf aufgestellten Horizontalpendel vom Mechaniker Schultze in Juriew (Dorpat) bezogen, nach Art derjenigen von Bosch in Strassburg, nebst dem Electromagnet zur Dämpfung und einer Registrirtrommel.

Als Registrirapparat diente ein von Zimmermann in Leipzig bezogenes Kymographion, welches für den vorliegenden Zweck sich als sehr zweckmässig erwies, da man mit Hilfe desselben der Trommel je nach Bedarf verschiedene Drehungsgeschwindigkeiten ertheilen konnte.

Die Figur 4 giebt eine andere Ansicht derselben Aufstellung der Apparate.

Die Figuren 5 und 6 geben ebenfalls eine Ansicht der Plattform mit folgenden aufgestellten Apparaten: einem Horizontalpendel mit der Vorrichtung zur electromagnetischen Dämpfung und einer flachen Spule zur Registrirung mit Hilfe eines aperiodischen Galvanometers, einem zweiten Electromagnet zur Erzeugung eines magnetischen Feldes für die Spule, einem aperiodischen Galvanometer und einer Lampe nebst zwei Linsen zur optischen Registrirung. Das Kymographion stand jetzt nicht auf der Plattform selbst, sondern auf einem besonderen Gestell. Die Trommel desselben wurde in diesem Fall anstatt des berusstem mit lichtempfindlichem Papier bedeckt. Bei diesen Versuchen über optische Registrirung mit einem Galvanometer blieb die Plattform immer in Ruhe, und das Pendel wurde direkt mit den Händen in Bewegung versetzt.

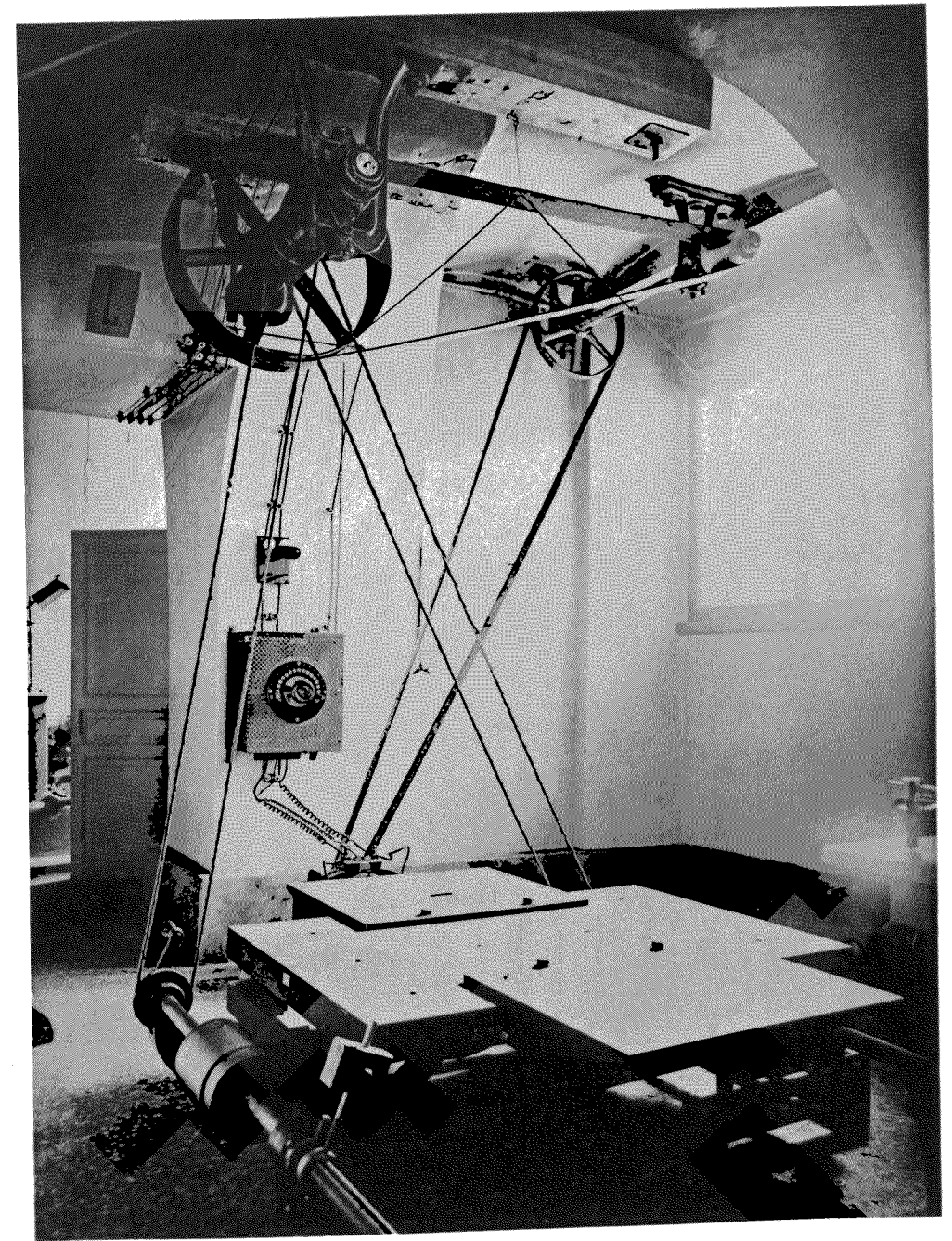
Auf die Einzelheiten dieser letzteren Beobachtungen werde ich nochmals in einem späteren § zurückkommen.

Falls die Plattform in Bewegung versetzt wurde, wurde die Bewegung des Horizontalpendels mit Hilfe eines besonderen, am Ende des Pendelarmes angebrachten Stiftes registrirt. Ganz in der Nähe dieses Stiftes befand sich ein zweiter, welcher jede Secunde von einem besonderen kleinen Electromagnet angezogen wurde, wodurch die Secunden direkt auf der drehbaren Trommel markirt wurden. Die Schliessung des entsprechenden Stromkreises, welchem der nöthige Strom durch kleine Accumulatoren geliefert wurde, geschah mit Hilfe einer besonderen im anderen Stocke aufgestellten Uhr, welche in jeder Secunde einen Contact gab.

Die Bewegung der Plattform selbst wurde durch einen dritten, fest mit dem Boden des Zimmers verbundenen Stift angegeben.

Vor dem Beginn der Beobachtungen wurde die Plattform jedes Mal in

Fig. 2.



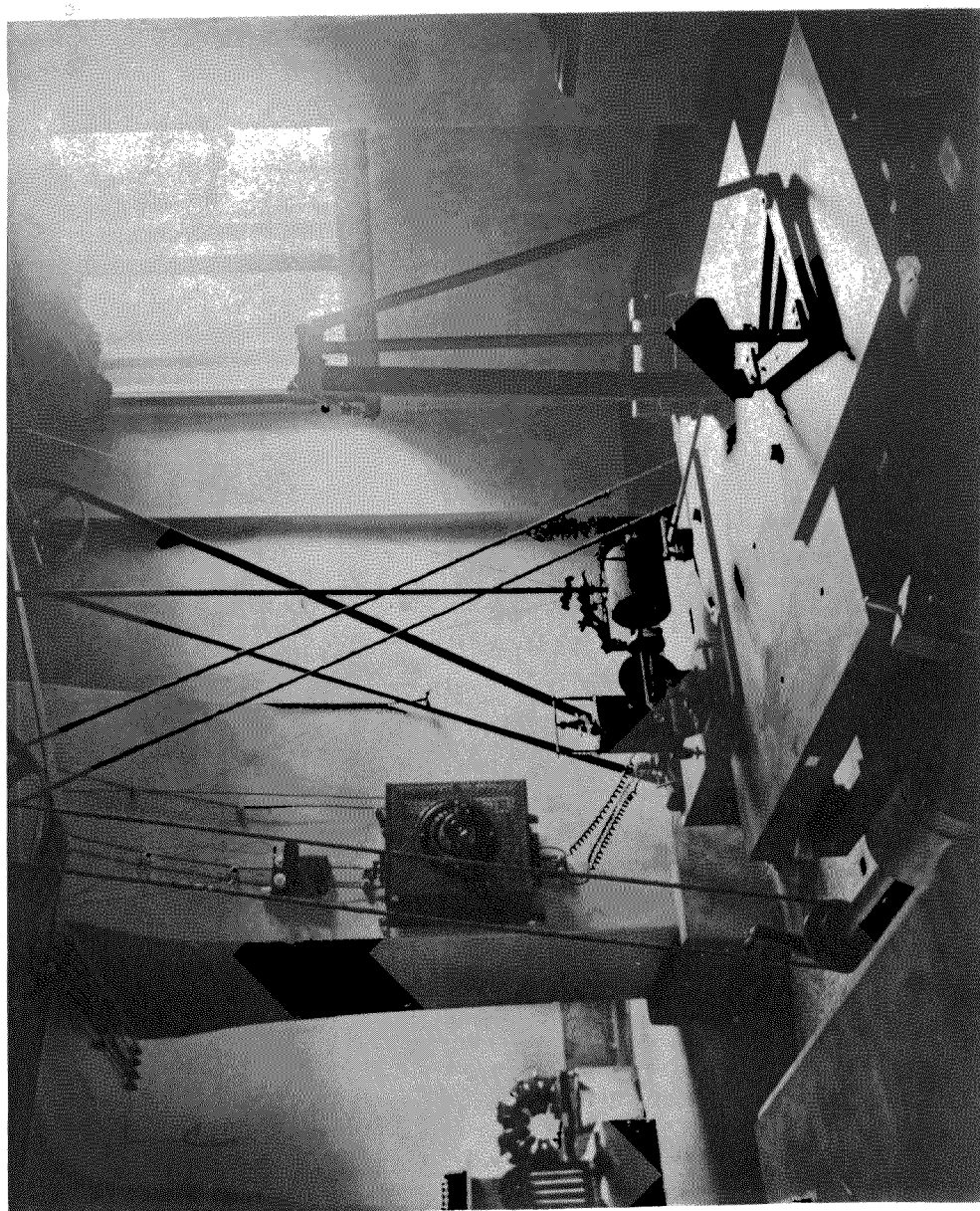


Fig. 3.

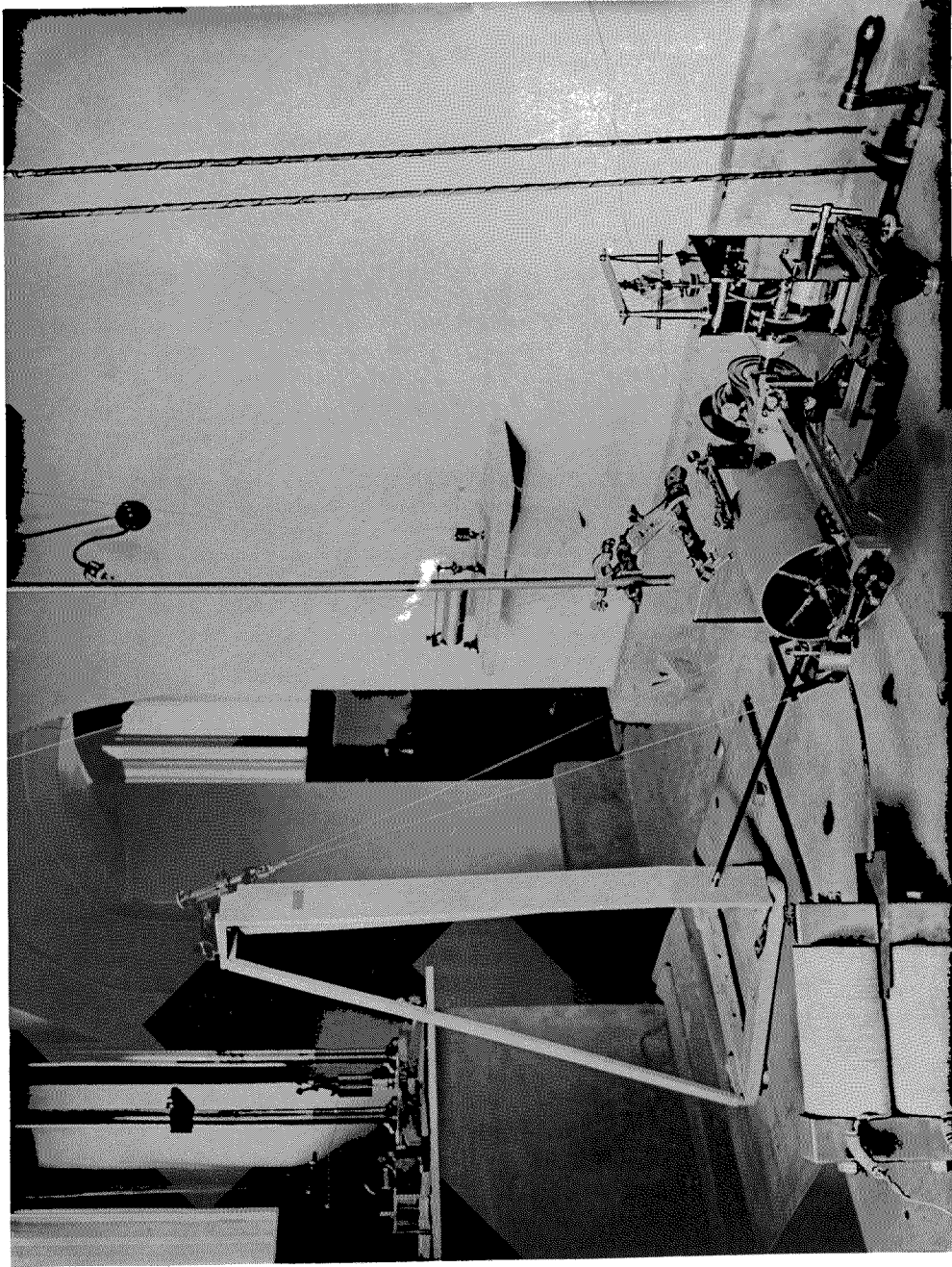


Fig. 4.

Fig. 5.

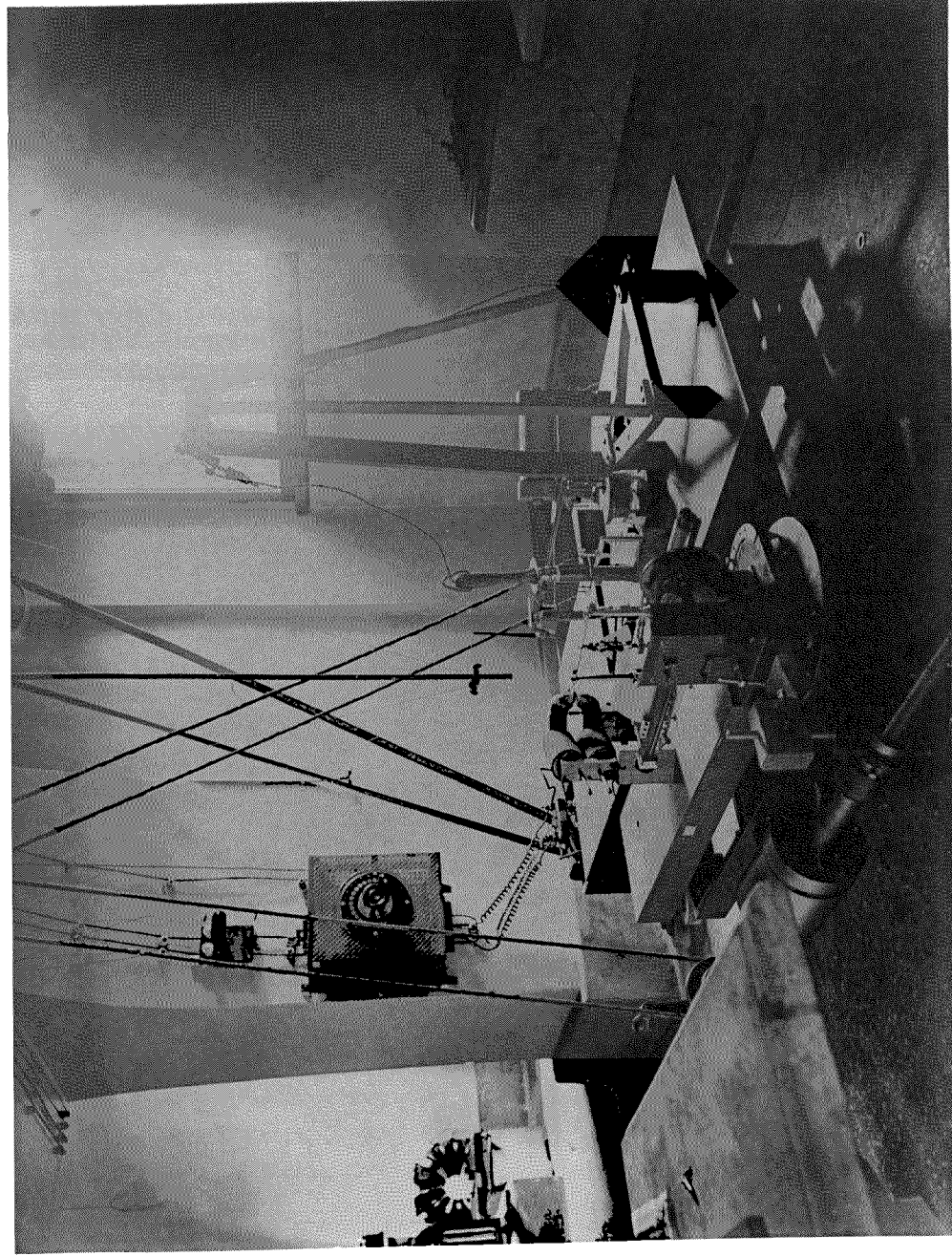
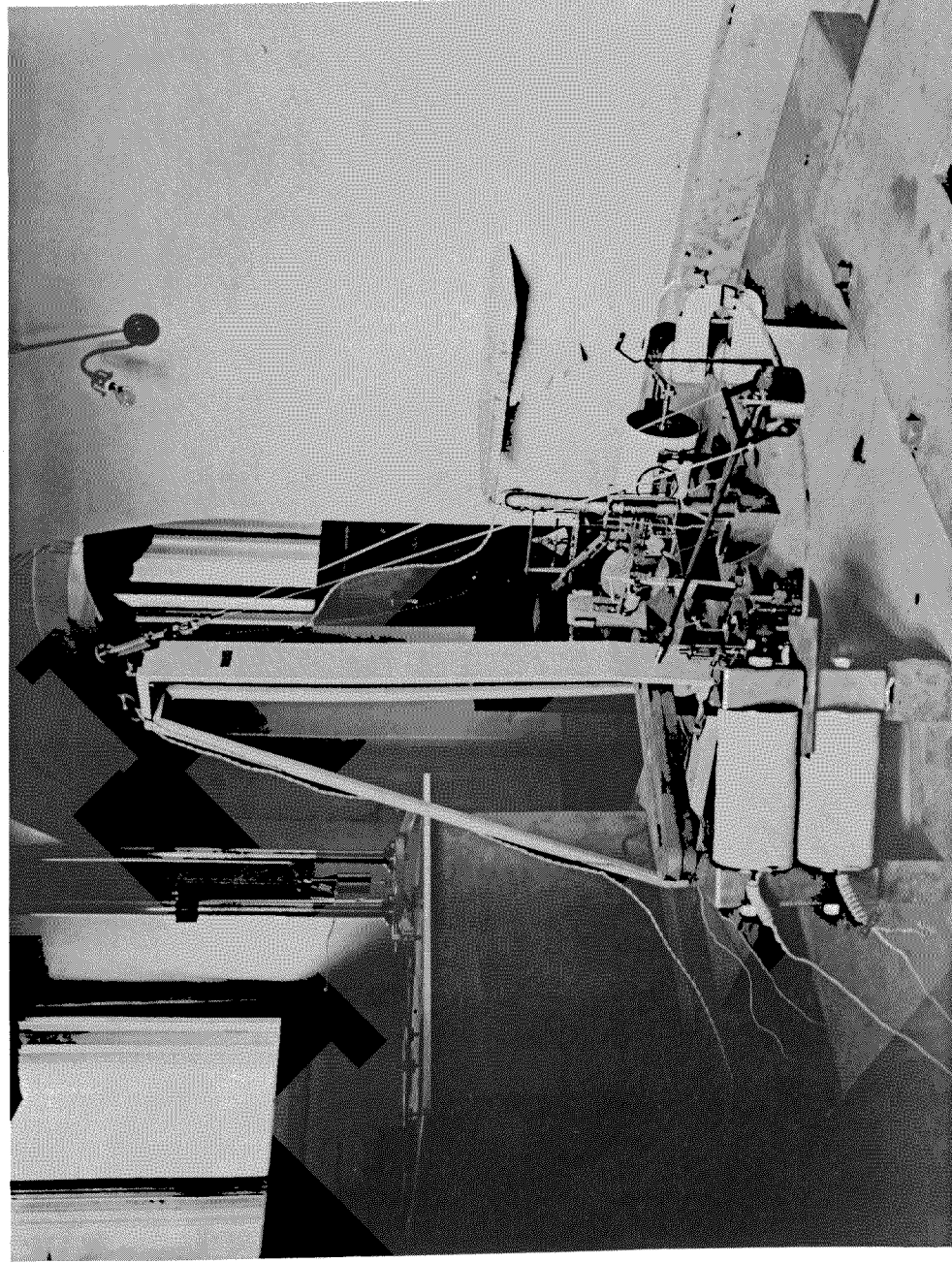


Fig. 6.



ihre mittlere Lage gebracht, für welche die Ablenkung von ihrer Ruhelage $x = 0$ war. Alsdann wurde der Electromotor in Gang gesetzt.

Die wahre Verschiebung der Plattform x als Function der Zeit, $x = f(t)$, wurde in diesem Fall, bei der hier gewählten Form des drehbaren Cylinders, durch die folgende einfache Formel gegeben:

$$x = a_1 \sin n_1 t, \dots \dots \dots (131)$$

wo a_1 die maximale Amplitude des Ausschlags bedeutet (in unserem Falle etwa $a_1 = 6,4^m/m$), und n_1 unmittelbar von der Drehungsgeschwindigkeit des Cylinders abhängt.

Da die Trommel auf der Plattform selbst sich befand, und der zur Registrirung der Bewegung verwendete Stift fest mit dem Boden verbunden war, so zeichnete derselbe nicht die Curve $x = f(t)$, sondern die Curve

$$x_1 = -x.$$

Es war also immer eine Phasenverschiebung gleich π vorhanden, worauf bei der Bearbeitung der verschiedenen gelieferten Curven Rücksicht genommen werden musste.

Die drei zur Registrirung verwendeten Stifte, — für das Horizontalpendel, für die Secunden und für die Bewegung der Plattform, — wurden immer vor den Beobachtungen in eine Linie gebracht und zwar senkrecht zur Axe der Trommel. Bei der Drehung derselben wurde die zur Verschiebung der Trommel ihrer Axe entlang dienende Schraube immer ausgeschaltet, somit erhielten die Curven keine Neigung.

Der Stift des Pendels und derjenige, welcher mit dem Boden verbunden war, befanden sich so nah wie möglich an einander.

Die noch übriggebliebene kleine Verschiebung der Curven gegen einander musste man immer bei der Vergleichung beider Curven und Reduction der gemessenen Ordinaten auf denselben Zeitmoment in Rechnung ziehen. Der dritte Stift zeichnete eine gerade gezackte Linie, welche als Axe diente, von der aus die Ordinaten der beiden Curven gemessen wurden.

Wie früher gesagt wurde, hat sich diese Plattform sehr gut bewährt, aber am Anfang der Bewegung, wo der Electromotor in Gang gesetzt wurde, war die Drehung des Cylinders nicht ganz gleichmässig, und erst nach einigen Drehungen desselben konnte die Periode der Bewegung der Plattform als constant angesehen werden. Deshalb war ich genöthigt, bei der Bearbeitung der erhaltenen Curven die anfänglichen Theile derselben ausser

Acht zu lassen und die Ausmessungen erst dort zu beginnen, wo die Periode schon constant geworden war.

Ein anderer Mangel dieser Plattform bestand noch darin, dass wegen ihres grossen Gewichtes eine sehr starke Feder angewandt werden musste, welche eine kleine Durchbiegung der Axe hervorrief, wodurch die erhaltenen Sinuscurven für die Bewegung der Plattform in ihren unteren Theilen sich etwas abgeplattet ergaben.

Trotzdem war es möglich diese Plattform sehr gut zu verwenden und die früher entwickelte Theorie einer strengen experimentellen Prüfung, die ich gemeinsam mit meinem Assistenten Herrn Wilip durchgeführt habe, zu unterziehen.

§ 10.

Beobachtungen mit einem einfachen Horizontalpendel.

Die in diesem § mitzutheilenden Versuche beziehen sich auf die Bewegung eines einfachen, ungedämpften Horizontalpendels unter dem Einfluss einer periodischen Bewegung der Plattform.

Sei die Bewegung der Plattform durch die Gleichung

$$x = f(t) = a_1 \sin n_1 t,$$

gegeben, so wird die Bewegung des Pendels nach den Entwicklungen des § 4 folgender Gleichung genügen:

$$\xi = e^{-\epsilon t} [\Gamma_1 \sin pt + \Gamma_2 \cos pt] + \frac{n_1^2}{\sqrt{R_1}} \cdot a_1 \sin (n_1 t - \psi_1), \dots (132)$$

wo

$$p = \sqrt{n^2 - \epsilon^2}$$

und n und ϵ zwei Constanten des Pendels bedeuten. Γ_1 und Γ_2 sind zwei Integrationsconstanten, welche von den Anfangsbedingungen der Bewegung unmittelbar abhängen, und auf deren Bestimmung wir für den vorliegenden Zweck nicht näher einzugehen brauchen.

1) Siehe die Gleichungen (39), (40), (41) und (42).

Das hier verwendete Pendel war mit keiner electromagnetischen Dämpfung versehen; es bestand nur die Dämpfung in Folge der Reibung. Diese Dämpfung, wie die Curve auf der Fig. (7) es zeigt, ist sehr gering, folglich wird ϵ sehr klein sein, und wir können mit hinreichender Genauigkeit, wenn $n - n_1$ nicht zu klein ist, einfach

$$p = n$$

und

$$R_1 = (n^2 - n_1^2)^2 \dots \dots \dots (133)$$

setzen.

Die Bewegung der Plattform ist, abgesehen von den früher besprochenen Unregelmässigkeiten am Anfang der Bewegung, eine einfache Sinusbewegung mit der Periode

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1},$$

während die Bewegung des Pendels, wie die Formel (132) es lehrt, aus zwei einfachen Sinusbewegungen mit den Perioden T_1 und

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

zusammengesetzt ist, wo T die Periode der Eigenbewegung des Pendels bedeutet. Diese beiden Sinusbewegungen haben verschiedene Amplituden und anfangs verschiedene Phasen, folglich wird im Allgemeinen die Bewegung des Pendels viel complicirter, als die der Plattform ausfallen.

Die weiter mitzutheilenden Curven bestätigen in unzweideutigster Weise dieses Resultat.

Die Gleichung (132) entspricht der Bewegung eines Punktes des Pendels, welcher sich in der Entfernung l von der Drehungsaxe desselben befindet, wo l die reducierte Länge des Pendels bedeutet. In der That befindet sich aber der Stift, welcher die Bewegung des Pendels auf der Trommel aufschreibt, in einer anderen und zwar grösseren Entfernung von der Axe, als l . Wollen wir diese Entfernung durch L bezeichnen.

Bedeutet nun y die Ordinate der in Wirklichkeit aufgeschriebenen Curve, so wird

$$y = \frac{L}{l} \xi. \dots \dots \dots (134)$$

Diese Beziehung muss man bei Bearbeitung solcher Curven immer im Auge behalten.

1) Siehe die Formeln (39) und (42).

Die früher angeführten Formeln lehren uns, dass, je mehr die Periode der Plattform T_1 sich der Periode des Pendels nähert, desto kleiner R_1 wird, folglich desto grösser werden die Ausschläge des Pendels und um so complicirter die aufgeschriebene Curve ausfallen.

Zur Ausmessung der Curven habe ich mich eines besonderen kleinen Apparates bedient. Derselbe bestand aus einem getheilten, mit Nonius versehenen Lineal, welches die hundertsten Theile eines Millimeters abzulesen gestattete. Auf diesem Lineal war ein Schlitten mit einem drehbaren Arm angebracht, welcher eine Lupe trug. Unter der Lupe, in einer gewissen Entfernung von derselben, gleich ihrer Brennweite, war auf einer besonderen Gabel ein dünner Faden befestigt, welcher bei den Ausmessungen fast dicht an der zumessenden Curve zu liegen kam. Auf dem oberen Theile der Lupe war eine Kappe mit einem sehr kleinen Loch in der Mitte angebracht, durch welche man nach der unter der Lupe sich befindenden Curve blicken konnte. Diese Vorrichtung diente dazu, den bei den Ablesungen möglichen Parallaxfehler möglichst zu verkleinern. Auf diese Weise konnten die Ordinaten der Curven direct gemessen werden.

Was nun die Bestimmung der verschiedenen Zeitmomente, wo die Curven die t -Axe schnitten, anbelangt, so konnten die ganzen Secunden direct auf der Curve abgelesen werden. Um nun die Bruchtheile einer Secunde zu bestimmen, bediente ich mich desselben Lineals und zwar in folgender Weise. Der Faden des beschriebenen Apparates wurde auf zwei benachbarte Secundenstriche und den Schnittpunkt der Curve mit der t -Axe eingestellt, die entsprechenden Ablesungen am Lineal notiert und alsdann die Bruchtheile einer Secunde durch Interpolation berechnet. Dabei, um den Einfluss jeder Unsymmetrie in den Ausschlägen der Uhr zu vermeiden¹⁾, visirte ich in den meisten Fällen zwei benachbarte Secundenstriche, welche um 2 Secunden von einander entfernt waren und zwischen denen der betreffende Schnittpunkt sich befand.

Die Verschiebung der Pendelcurve gegen die der Plattform in Folge des Nichtzusammenfallens beider aufzeichnender Stifte konnte ebenfalls mit diesem Apparat gemessen werden. Diese Verschiebung ist am Anfang der Curven zu ersehen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir zur Besprechung der erhaltenen Curven über.

Die Curve auf der Fig. (7) giebt die Eigenbewegung des Horizontalpendels bei ruhender Plattform wieder.

1) Diese Unsymmetrie war in Wirklichkeit vorhanden.

Fig. 7.

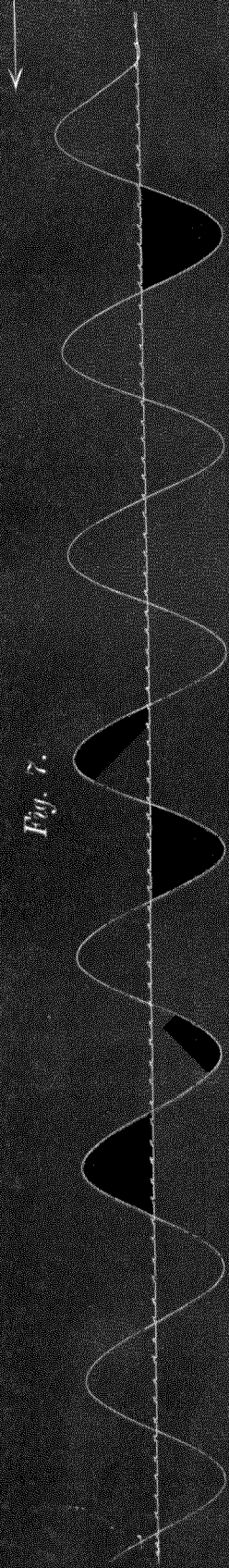


Fig. 8.

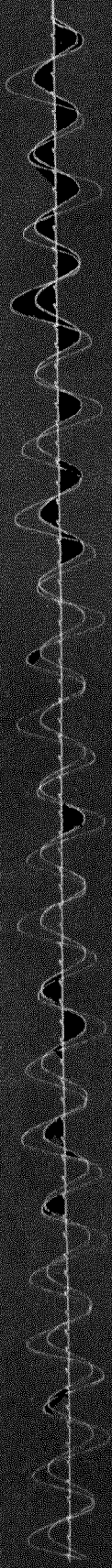


Fig. 9.

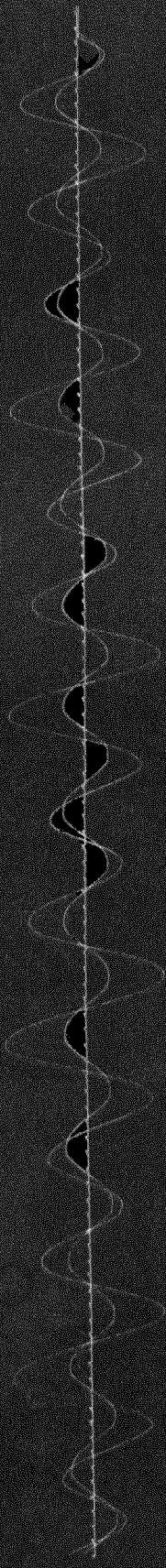
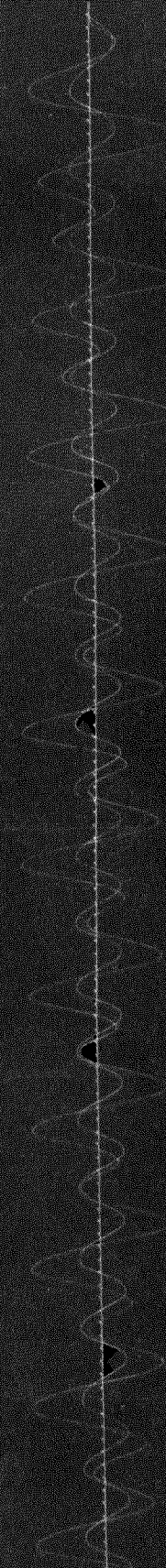


Fig. 10.



Aus dieser Curve erhalten wir für die Periode des Pendels

$$T = 10,77 \text{ Sec.}$$

Es ist dabei zu bemerken, dass die in dieser Abhandlung angegebenen Curven in etwas verkleinertem Maassstab reproducirt sind, deshalb werde ich für die hier gemessenen Curven, um über die Genauigkeit der Ausmessungen einen Aufschluss zu bekommen, neben den gemessenen Daten noch die Länge λ einer Secunde auf der Trommel angeben.

In diesem Fall war

$$\lambda = 5,6 \text{ m/m.}$$

Was nun die Dämpfungskonstante ϵ anbelangt, so sehen wir aus der Fig. 7, dass sie äusserst klein ist.

Wenn nun die Eigenperiode des Pendels T einmal bestimmt war, setzte man die Plattform in Bewegung.

Die Fig. 8 entspricht dem Fall

$$T_1 = 3,57$$

$$\lambda = 5,5 \text{ m/m}$$

und die Fig. 9

$$T_1 = 7,27$$

$$\lambda = 4,1 \text{ m/m,}$$

wo T_1 die Periode der Plattformbewegung bedeutet. T war dabei immer 10,77. Die inneren Curven entsprechen der Plattformbewegung.

Später sind diese Versuche wiederholt worden, wobei die Eigenperiode des Pendels sich ergab

$$T = 10,60. 1)$$

Die Fig. 10 entspricht für dieses T dem Fall

$$T_1 = 5,33$$

$$\lambda = 3,6 \text{ m/m}$$

und die Fig. 11 dem Fall

$$T_1 = 7,06$$

$$\lambda = 3,6 \text{ m/m.}$$

1) Die entsprechende Curve ist hier nicht angegeben.

Diese Curven lehren uns, dass, je näher die Periode der Plattform T_1 an die Eigenperiode des Pendels anrückt, desto complicirter die vom Horizontalpendel gezeichneten Curven ausfallen, wobei die Amplituden der Ausschläge immer grösser und grösser werden.

Die Plattformcurve bleibt immer eine einfache Sinuscurve, während die Pendelcurve mit Verkleinerung der Differenz $T - T_1$ immer mehr von der Plattformcurve abweicht. Es treten der Gleichung (132) gemäss secundäre Maxima und Minima auf, und die Curve des Pendels erhält schliesslich eine ziemlich verwickelte Gestalt.

Wie gross die Ausschläge sein können, zeigt deutlich die Fig. 12.

In diesem Fall war

$$T = 8,82^1)$$

und

$$T_1 = 9,32, \quad (\lambda = 3,6^m/m),$$

also

$$T - T_1 = -0,50.$$

Bei allen diesen Curven war am Anfang der Bewegung der Ausschlag des Pendels $y = 0$, und das Pendel erhielt dabei keinen directen Anstoss.

Wir sehen also, dass in diesem allereinfachsten Fall, wo

$$x = a_1 \sin n_1 t$$

ist, die Bewegung des Pendels sehr von der Bewegung der Plattform abweicht, folglich kann man aus den von einem Horizontalpendel gelieferten Seismogrammen keinen *directen* Schluss auf den Charakter der Erdbewegung machen.

Dieses Resultat ist für die Seismometrie insofern von Wichtigkeit, dass es zeigt, wie vorsichtig man vorgehen muss, wenn man aus den erhaltenen Seismogrammen Schlüsse auf die Erdbewegung machen will.

Diese Abweichung der Pendelcurve von der Plattformcurve verdankt ihren Ursprung der Eigenbewegung des Pendels, welche äusserst störend wirkt.

Meine Bemühungen waren eben darauf gerichtet, diese Eigenbewegung möglichst zu eliminiren, was mir dadurch gelungen ist, dass ich das Pendel mittelst einer starken electromagnetischen Dämpfung in ein aperiodisches Instrument verwandelt habe. Die entsprechenden Versuche werden erst in einem späteren § besprochen.

1) Die entsprechende Curve ist hier nicht angegeben

Fig. 11.



Fig. 12.

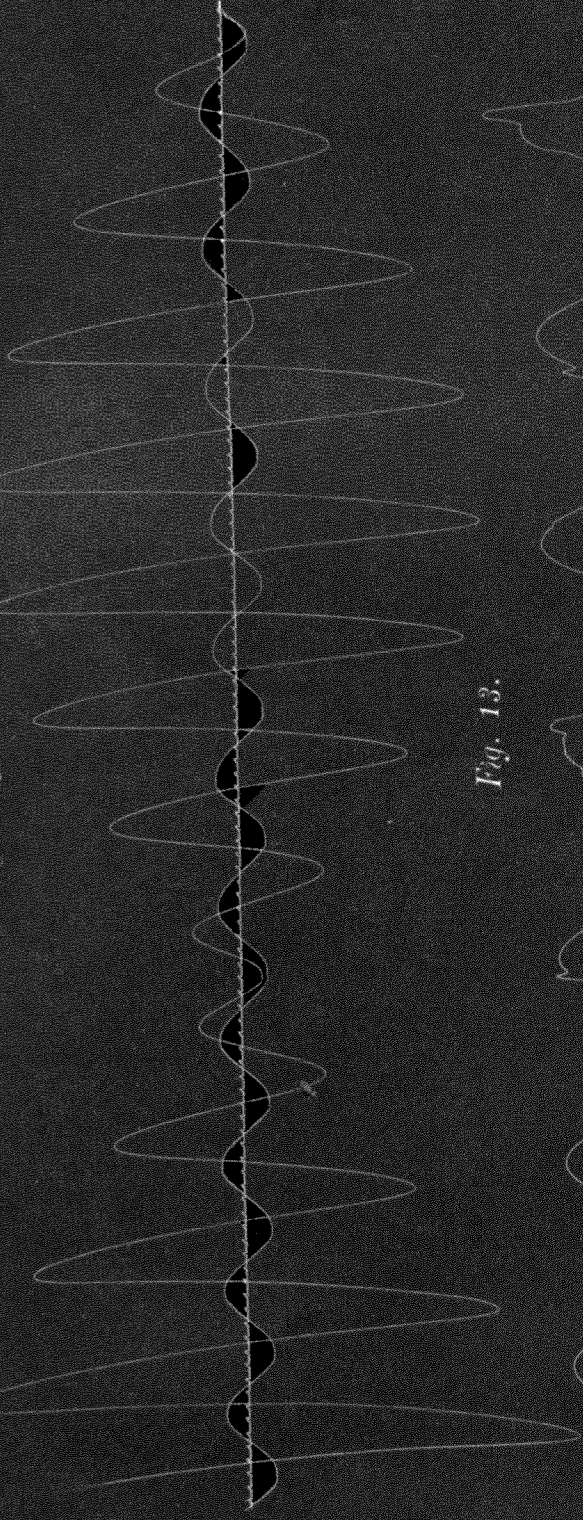


Fig. 13.



Zum Schluss möchte ich noch auf die Fig. 13 aufmerksam machen.

Bei den früheren Versuchen war die Bewegung der Plattform eine gleichmässige Sinusbewegung. In diesem Fall aber war sie eine ganz willkürliche, zu welchem Zweck die Plattform mit Hilfe eines Hebels einfach mit den Händen Erschütterungen bekommen hat. Die innere Curve giebt den Charakter dieser Erschütterungen wieder, während die äussere Curve die entsprechende Bewegung des Horizontalpendels darstellt.

Aus der Vergleichung beider Curven ersieht man, dass die plötzlichen Erschütterungen der Plattform entsprechende Zackungen an der Pendelcurve hervorrufen, aber ausserdem noch die Eigenbewegung des Pendels hinzutritt, welche, wie wir sehen, äusserst störend wirkt, so dass der Charakter der Pendelcurve ganz verschieden von dem der eigentlichen Plattformbewegung ausfällt.

§ 11.

Ueber die Zulässigkeit der Anwendung einer electromagnetischen Dämpfung.

Wir werden weiter sehen, wie vortheilhaft es ist, ein Horizontalpendel mit einer starken electromagnetischen Dämpfung zu versehen, aber bevor man dieselbe anwandte, war es unbedingt nothwendig sich zuerst zu überzeugen, ob die Einführung einer solchen Dämpfung überhaupt zulässig ist, d. h. ob die Differentialgleichung

$$\xi'' + 2\varepsilon\xi' + n^2\xi = 0, \quad (\text{Formel (4)})$$

welche die Eigenbewegung des Pendels reguliert, bei Einführung einer mit dem Horizontalpendel verbundenen, dämpfenden Kupferplatte, die sich in einem starken, möglichst homogenen magnetischen Felde befindet, noch ihre Gültigkeit behält.

Die Constante n des Pendels ist, wie die Formel (2) zeigt, ganz unabhängig von den Dämpfungsverhältnissen, folglich muss für wachsende Werthe von ε , d. h. bei Vergrösserung der Stromstärke im Electromagnet, n immer seinen Werth beibehalten.

Ist $\varepsilon < n$, so beschreibt das Pendel eine Sinuscurve mit stetig abnehmenden Maximalausschlägen; aus der Form der gezeichneten Curve lassen sich die Constanten ε und n leicht ermitteln.

Die dazu nöthigen Formeln seien hier zusammengestellt.

Die Bewegung des Pendels kann nach den Gleichungen (6) und (134) durch folgende Formel dargestellt werden :

$$y = C \cdot e^{-\epsilon t} \sin(pt + a),$$

wo C und a zwei Integrationsconstanten bedeuten, und

$$p = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{n^2 - \epsilon^2} \quad \text{(Formel (7))}$$

ist.

Bedeutet nun y_k und y_{k+1} zwei auf einander folgende maximale Ausschläge des Pendels unabhängig vom Vorzeichen derselben, so wird, wie leicht einzusehen ist,

$$\frac{y_k}{y_{k+1}} = \frac{y_{k+1}}{y_{k+2}} = \frac{y_{k+2}}{y_{k+3}} = \dots = e^{\epsilon \frac{T}{2}} \dots \dots \dots (135)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{y_k + y_{k+1}}{y_{k+1} + y_{k+2}} = \frac{y_{k+1} + y_{k+2}}{y_{k+2} + y_{k+3}} = e^{\epsilon \frac{T}{2}}.$$

Führen wir noch folgende Bezeichnung ein

$$\Lambda = \text{Log}_{10}(y_k + y_{k+1}) - \text{Log}_{10}(y_{k+1} + y_{k+2}), \dots \dots \dots (136)$$

dann ist

$$\Lambda = \epsilon \frac{T}{2} \text{Log}_{10} e,$$

oder

$$\epsilon = \frac{2}{\text{Log}_{10} e} \cdot \frac{\Lambda}{T} = 4,6052 \cdot \frac{\Lambda}{T} \dots \dots \dots (137)$$

Aus dieser Gleichung und der Formel (7) ergibt sich

$$n = \frac{2\pi}{T} \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{(\pi \text{Log} e)^2}} = \frac{6,2832}{T} \cdot \sqrt{1 + 0,53720 \Lambda^2} \dots \dots (138)$$

Bedeutet noch

$$m = \frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{y_{k+2}}{y_{k+1}} = \dots,$$

so wird nach den Gleichungen (135) und (136)

$$m = e^{-\epsilon \frac{T}{2}} = 10^{-\Lambda} \dots \dots \dots (139)$$

m giebt an, welchen Bruchtheil jeder maximale Ausschlag von dem vorhergegangenen ausmacht. Dieser Werth zeigt also in sehr anschaulicher Weise, wie stark die Amplituden abnehmen, d. h. er liefert ein sehr gutes Criterium für die Stärke der electromagnetischen Dämpfung.

Aus der Form der erhaltenen Curve lässt sich die volle Periode einer Schwingung T leicht ermitteln. Was nun Λ anbelangt, so braucht man nur drei auf einander folgende maximale Ausschläge zu messen, um nach der Formel (136) Λ berechnen zu können.

Man kann entweder diese Ausmessungen an verschiedenen Theilen der Curve durchführen und dann den Mittelwerth von Λ bilden, oder sich der folgenden, sehr leicht abzuleitenden Formel bedienen:

$$\Lambda = \frac{\text{Lg}(y_1 + y_2) - \text{Lg}(y_{k-1} + y_k)}{k - 2} \dots \dots \dots (140)$$

Bei der Bestimmung von Λ ist es immer vortheilhaft, wegen der möglichen Verschiebung der t -Axe, Λ aus der Summe zweier benachbarter Ausschläge zu berechnen.

Sind T und Λ einmal bestimmt, so lassen sich aus den früher angeführten Formeln

$$\epsilon, n \text{ und } m$$

leicht berechnen.

Bekanntlich ist die Dämpfungsconstante eines Horizontalpendels, welche durch die Reibung des Apparates bedingt ist, nicht ganz constant, sondern hängt etwas von der Amplitude der Ausschläge ab. Deshalb schien es mir wünschenswerth, die Zulässigkeit der Anwendung einer electromagnetischen Dämpfung an einem solchen Apparat zu prüfen, welcher diesen Nachtheil nicht besitzt. Zu diesem Zweck habe ich mich eines Davidson'schen Apparates bedient, welcher von dem Mechaniker des Physikalischen Laboratoriums der Akademie der Wissenschaften Herrn Masing nach meinen Angaben construirt war, indem ich beide Drähte gleich lang machte. In dieser Weise besteht der Apparat nur aus einem schweren cylindrischen Gewicht, welches bifilar aufgehängt ist. An dem Gewicht war ein Arm befestigt, welcher eine kupferne Platte trug, die in ein starkes electromagnetisches Feld hineinragte. Ausserdem war an dem Gewichte ein Spiegel angebracht, mit Hilfe dessen man mit Fernrohr und Scala die Schwingungen des Apparates mit dem Auge leicht verfolgen konnte.

Die Momente des Durchganges des Apparates durch die Nulllage wurden, entweder auf einem Chronographen, oder mit Hilfe eines Loebner'schen Secundenzählers notiert. Darnach liess sich die Periode T leicht bestimmen.

Die auf einander folgenden maximalen Ausschläge des Apparates wurden direct an der Scala abgelesen und notiert.

Selbstverständlich, je stärker die Dämpfung ist, desto schneller ver-
klingt die Bewegung des Apparates, und desto schwerer ist es auch die
Werthe von T und Λ genau zu bestimmen, da weniger experimentelle
Daten zur Verfügung stehen. Folglich ist man bei solchen und ähnlichen
Versuchen genöthigt, bei bestimmten Werthen von ε die Beobachtungen
abzubrechen.

Die mit diesem Apparat ausgeführten Versuche haben zuerst gezeigt,
dass die Periode T und der Werth von ε ganz unabhängig von der Am-
plitude der Ausschläge sind, folglich sind ε und n für eine gegebene
Stromstärke im Electromagnet vollständig constant. Die Differentialglei-
chung (4) behält also in dieser Hinsicht ihre Gültigkeit, und die Anwendung
der electromagnetischen Dämpfung erweist sich als ganz zulässig.

Was nun die Unabhängigkeit von n von der Stromstärke im Electro-
magnet, folglich von ε , anbelangt, so sind die entsprechenden Zahlen in der
folgenden Tabelle I zusammengestellt.

Die erste Colonne enthält die Werthe von Λ , die zweite diejenigen
von T , die dritte — ε , die vierte — n und die letzte die Werthe
von $m = \frac{y_{k+1}}{y_k}$

Die erste Zeile entspricht dem Fall, wo die Dämpfung nur durch die
Reibung verursacht war.

Tabelle I.

Λ	T	ε	n	m
0,0068	12,63	0,0025	0,498	0,984
0,0633	12,64	0,0231	0,498	0,864
0,107	12,69	0,0387	0,497	0,782
0,109	12,63	0,0396	0,499	0,779
0,192	12,71	0,0694	0,499	0,643
0,243	12,84	0,0871	0,497	0,572
0,421	13,16	0,147	0,500	0,379
0,641	13,85	0,213	0,501	0,228

Wir sehen aus dieser Tabelle, dass, wenn ε von 0,0025 bis 0,213,
also mehr als 85 Mal, sich vergrössert, n fast unverändert bleibt. Die
kleinen Schwankungen in den Werthen von n lassen sich wohl durch Beob-
achtungsfehler erklären. In der That, es genügt nach der Formel (138)

ein Fehler von 0,1 in dem Werthe von T , um einen Fehler von 0,003—
0,004 in dem Werthe von n hervorzurufen. Folglich kann man n wirklich
als constant betrachten. Es ergibt sich im Mittel

$$n = 0,499.$$

Es wäre sehr schwer gewesen, diese Beobachtungen für noch grössere
Werthe von ε fortzusetzen, da schon im letzten Fall, für $\varepsilon = 0,213$, m
gleich 0,228 war, d. h. jeder maximale Ausschlag schon kleiner als $\frac{1}{4}$ des
vorhergegangenen war und für sehr kleine Werthe von y es unmöglich ist
aus solchen Beobachtungen genaue Werthe von Λ und T zu bekommen.

Auf jeden Fall zeigen diese Beobachtungen ganz deutlich, dass die
Einführung einer electromagnetischen Dämpfung keine Störung in dem Be-
wegungsgesetz des Apparates hervorruft. Die Differentialgleichung (4) be-
hält ihre Gültigkeit, und n erweist sich als eine wirkliche Constante.

Folglich ist die Einführung einer electromagnetischen Dämpfung an
seismometrischen Apparaten als ganz zulässig zu betrachten.

§ 12.

Bestimmung der Constanten des Horizontalpendels.

Um das zu benutzende Horizontalpendel in ein aperiodisches Instru-
ment umzuwandeln, war an demselben ein Seitenarm mit viereckiger Kupfer-
platte angebracht, welche zwischen den Polen eines besonderen, vom Mecha-
niker Masing in der eigenen Werkstatt des Physikalischen Laboratoriums
construirten Electromagnetes sich frei bewegen konnte.

Je grösser man die Stromstärke im Electromagnet macht, desto mehr
nimmt die Dämpfungsconstante zu, bis schliesslich die periodische Bewegung
des Pendels in eine aperiodische übergeht (für $\varepsilon \geq n$).

Bei meinen Beobachtungen war das Pendel nur schwach aperiodisirt
und zwar so, dass man die Stromstärke nur so weit vermehrte, dass die Be-
wegung des Pendels erst anfang aperiodisch zu sein.

In diesem Fall kann man einfach

$$\varepsilon = n$$

setzen, was die Auswerthung der Curven besonders erleichtert.

Freilich ist dieses für die Beobachtungen der ungünstigste Fall. Am
zweckmässigsten wäre es, ε so gross wie möglich zu machen, um die Eigen-

bewegung des Pendels möglichst zu eliminiren. Aber in diesem Fall ist es ziemlich schwer, den genauen Werth von ϵ aus einer aperiodisch verlaufenden Curve zu ermitteln. Die Ausmessungen müssen sehr genau ausgeführt werden, um einen sicheren Werth von ϵ zu bekommen.

Da es aber hier nur darum handelt, die früher entwickelte Theorie einer experimentellen Prüfung zu unterziehen, so ist es viel bequemer, die Stromstärke nur so weit zu steigern, bis $\epsilon = n$ wird.

Auf diese Frage werde ich jedoch bald nochmals zurückkommen.

Was nun die Veränderlichkeit von ϵ mit der Amplitude des Ausschlages anbelangt, welche durch die verschiedenen Reibungsverhältnisse eines Horizontalpendels bei kleinen und grossen Amplituden bedingt ist, so ist dieselbe bei grösseren Werthen der electromagnetischen Dämpfung, wo also die Dämpfungskonstante in Folge der Reibung nur einen kleinen Bruchtheil der ganzen Dämpfungskonstante ausmacht, ohne wesentliche Bedeutung.

Es handelt sich also nur darum, n zu bestimmen. Das Horizontalpendel war für diese Beobachtungen ziemlich unempfindlich gemacht. Seine Eigenperiode T bei Abwesenheit irgend welcher electromagnetischen Dämpfung war ungefähr gleich $10,7$.

Man liess alsdann das Pendel bei ruhender Plattform seine Bewegungcurve schreiben und zwar für verschiedene, allmählig wachsende Stromstärken. Die entsprechenden Curven sind in den Figuren 14 bis 20 dargestellt.

Aus diesen Curven wurden T und Λ abgeleitet und alsdann ϵ , n , und $m = \frac{y_{k+1}}{y_k}$ berechnet.

In der folgenden Tabelle II sind die entsprechenden Zahlenwerthe angegeben. Die erste Colonne enthält ausserdem die Laufnummer der entsprechenden Figur und die zweite die Stromstärke i im Electromagnet.

Tabelle II.

N ^o der Figur.	i	Λ	T	ϵ	n	m
14	0,0 Amp.	0,0056	10,71	0,0024	0,587	0,987
15	0,1	0,0265	10,72	0,0114	0,586	0,941
16	0,2	0,0374	10,71	0,0161	0,587	0,917
17	0,5	0,0760	10,69	0,0327	0,589	0,839
18	0,8	0,197	10,77	0,0842	0,589	0,635
19	1,3	0,338	10,99	0,142	0,589	0,459
20 ¹⁾	2,0	0,633	11,83	0,246	0,586	0,233

Die Werthe von λ schwankten dabei zwischen $5,3 \text{ m/m}$ und $6,8 \text{ m/m}$.

1) Zwei Curven.

Fig. 14.

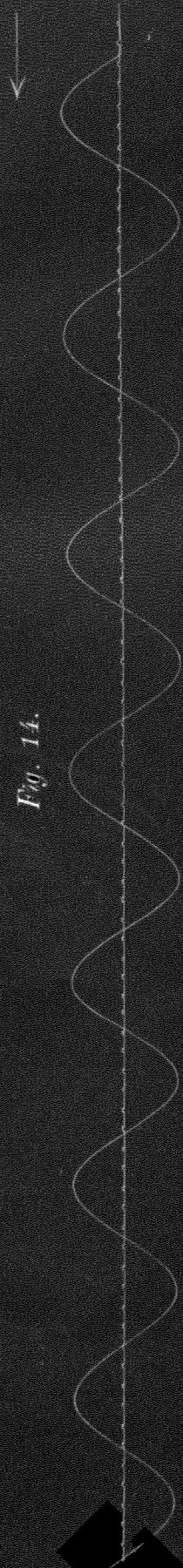


Fig. 15.

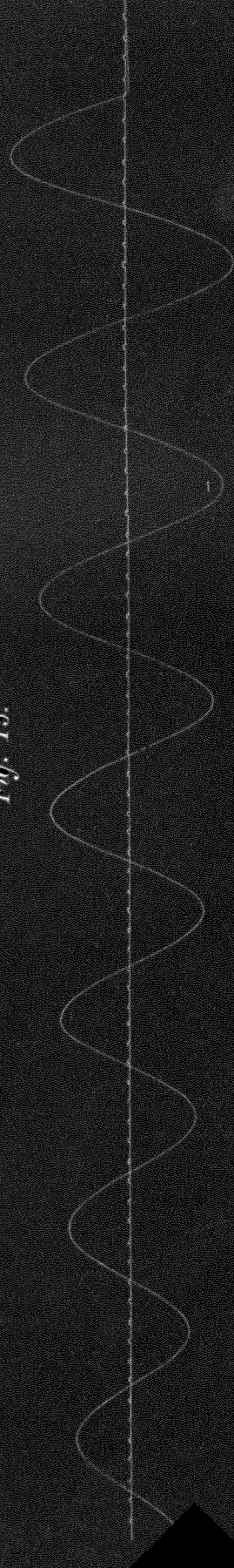
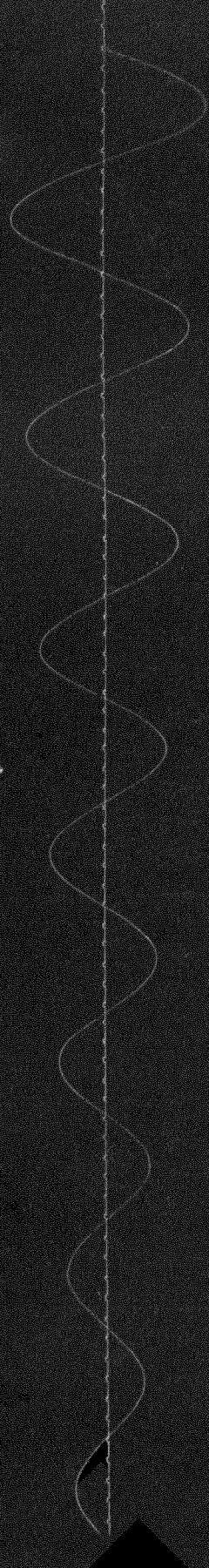
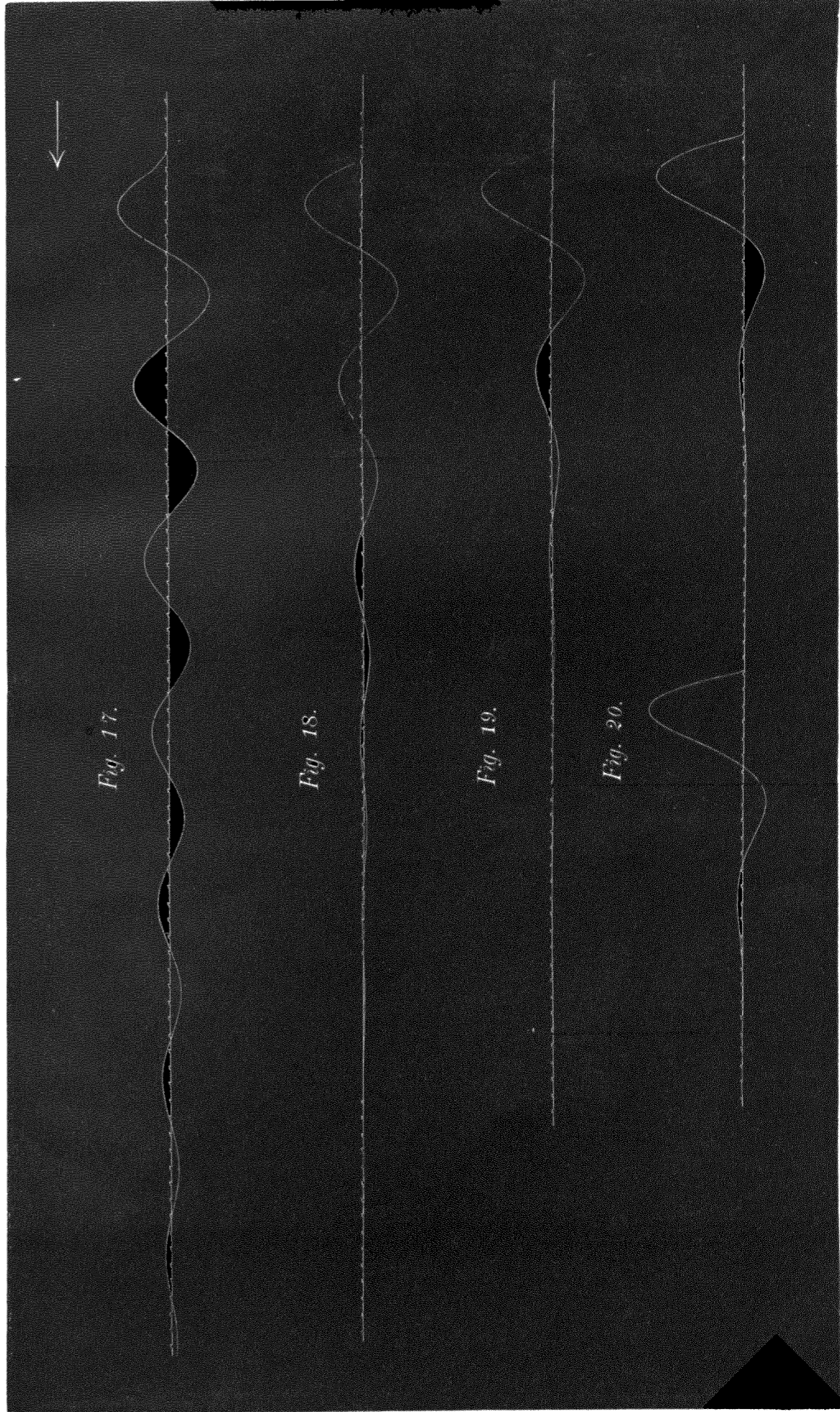
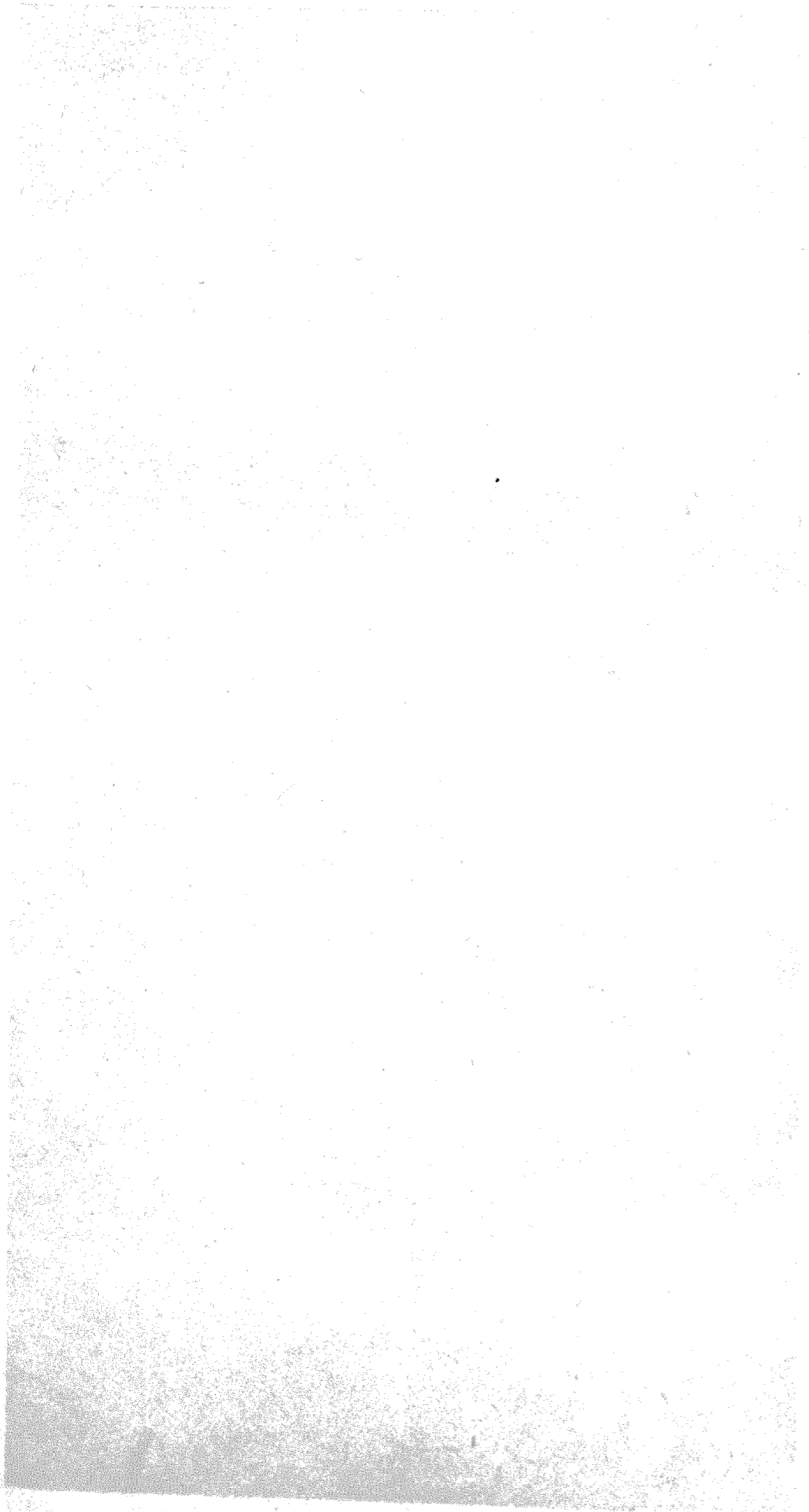


Fig. 16.





Diese Tabelle zeigt, dass, wenn ϵ sich von 0,0024 bis 0,246 ändert, also mehr als 102 Mal grösser wird, n seinen Werth behält, da die kleinen Schwankungen in den Werthen von n wohl auf Versuchsfehler zurückgeführt werden können. In der That ist die grösste Differenz in den Werthen von n nur 0,003 und dieses entspricht einem Fehler in den Werthen von T gleich 0,06.¹⁾

Als Mittelwerth von n ergiebt sich²⁾

$$n = 0,587.$$

Diesen Werth von n habe ich bei Bearbeitung der weiter mitzutheilenden Versuche zu Grunde gelegt.

Der letzte Werth von ϵ in der vorigen Tabelle, nämlich $\epsilon = 0,246$, ist bedeutend kleiner, als n , trotzdem wäre es ziemlich schwer, die Beobachtungen für noch grössere Werthe von ϵ fortzusetzen. In der That sehen wir aus der Form der beiden Curven auf der Fig. 20, dass das Pendel schon in diesem Falle sehr wenige Schwingungen ausführt, und bei kleinen Amplituden der Ausschläge und bei flacher Form der Curve ist die Bestimmung von Λ und T mit einer ziemlich grossen Unsicherheit behaftet.

Es ist auch nicht nöthig diese Versuche weiter fortzusetzen, da die früheren Zahlen hinlänglich genug zeigen, dass n wirklich als constant zu betrachten ist.

Ein Beweis, dass n wirklich als unabhängig von i , auch bei grösseren Stromstärken, zu betrachten ist, bietet die Thatsache, dass, wenn das Pendel schon aperiodisch gemacht ist, seine Ruhelage auch bei Schliessung des Stromkreises im Electromagnet unveränderlich bleibt.

Was nun den Werth von ϵ bei dem aperiodisch gemachten Pendel anbetrifft, so ist derselbe gleich n zu setzen, da die Stromstärke im Electromagnet nur so weit gesteigert wurde, bis die Bewegung des Pendels anfang aperiodisch zu sein.

Die Figuren (21), (22) und (23) entsprechen eben der aperiodischen Bewegung des Pendels bei einer Stromstärke $i = 4,3$ A.

Wollen wir nun zur Controlle sehen, ob diese drei Curven den gefundenen Werthen von $\epsilon = n = 0,587$ entsprechen.

1) Da bei diesen Beobachtungen nicht die Länge zweier Secunden, sondern diejenige einer direct gemessen war, so können, wegen der nicht vollständigen Symmetrie in den Ausschlägen der Pendelubr, die Werthe von T mit einem kleinen, unwesentlichen Fehler behaftet werden.

2) Bei Ableitung dieses Mittelwerthes ist die vierte Decimale in Betracht gezogen worden.

Am Anfang der Bewegung sei der Ausschlag des Pendels gleich y_0 . Die Anfangsgeschwindigkeit ist gleich Null, folglich wird die Gleichung der Bewegung des Pendels folgende Form annehmen ¹⁾)

$$y = \frac{y_0}{\mu_1 - \mu_2} \{ \mu_1 e^{-\mu_2 t} - \mu_2 e^{-\mu_1 t} \},$$

oder für $\varepsilon = n$, nach der Formel (93),

$$\frac{y}{y_0} = e^{-\varepsilon t} [1 + \varepsilon t]. \dots\dots\dots(141)$$

Die Bearbeitung dieser Curven ist ziemlich schwierig, erstens, weil wegen der Kleinheit der zu messenden Werthe von y jeder Fehler in der Bestimmung derselben einen verhältnissmässig grossen Einfluss auf das Resultat ausübt, zweitens, weil es sehr schwer ist genau denjenigen Punkt auf der Curve festzustellen, welcher dem Momente $t = 0$ entspricht.

Aus diesem letzten Grunde habe ich die Bearbeitung dieser drei letzten Curven in folgender Weise vorgenommen.

Seien y_1 und y_2 zwei gemessene Ausschläge des Pendels, welche den Momenten t_1 und t_2 entsprechen.

t_1 und t_2 können, wegen der Unbestimmtheit in der Lage des Anfangspunktes ($t = 0$), mit einem mehr oder weniger grossen Fehler behaftet sein, während die Differenz $t_2 - t_1$ sich viel genauer bestimmen lässt.

Da y_0 , y_1 und y_2 gegeben sind, so habe ich aus dem Werthe von $\frac{y_1}{y_0}$ t_1 nach der Formel (141) berechnet und, da die Differenz $t_2 - t_1$ ebenfalls bekannt ist, t_2 abgeleitet. Mit diesem Werthe von t_2 berechnete ich alsdann nach derselben Formel (141) den Werth von $\frac{y_2}{y_0}$, der mit dem direct aus den Ausmessungen sich ergebenden verglichen war.

Es ergaben sich folgende Resultate:

	$\frac{y_2}{y_0}$	
	Berechnet.	Beobachtet.
Aus der Curve (21)	0,37	0,33
» » » (22)	0,29	0,25
» » » (23)	0,31	0,26

Es wäre wünschenswerth, eine bessere Uebereinstimmung zu erzielen, aber wegen der Schwierigkeit dieser Bestimmungen kann man sich mit diesem Resultat fürs Erste begnügen.

¹⁾ Siehe die Formel (10).

Fig. 21.



Fig. 22.

Fig. 23.

Auf jeden Fall führen die gefundenen Werthe von ϵ und n , wie wir es weiter im § 14 sehen werden, zu sehr befriedigenden Resultaten. •

Zum Schluss dieses Paragraphen möchte ich auf Folgendes aufmerksam machen.

In der vorigen Tabelle II entspricht der erste Werth von ϵ einer Dämpfung nur in Folge der Reibung. Bezeichnen wir diese Grösse durch ϵ_0 , also

$$\epsilon_0 = 0,0024.$$

Die Differenz $\epsilon - \epsilon_0$ ist eine Function der Stromstärke i .

Die Beziehung zwischen i und $\epsilon - \epsilon_0$ ist nicht eine ganz lineare, aber sie weicht nicht, insbesondere, wenn man die Unsicherheit dieser Bestimmungen erwägt, sehr von einer solchen ab.

In der folgenden Tabelle III sind die entsprechenden Werthe von i und $\epsilon - \epsilon_0$ zusammengestellt.

Tabelle III.

i	$\epsilon - \epsilon_0$
0,1 Amp.	0,009
0,2	0,014
0,5	0,030
0,8	0,082
1,3	0,140
2,0	0,244

§ 13.

Die Bestimmung der reducierten Länge des Horizontalpendels.

Zur experimentellen Prüfung der im § 4 entwickelten Theorie wird es noch nothwendig, ausser den Werthen von ϵ und n des aperiodisch gemachten Horizontalpendels, noch die reducierte Länge desselben l zu kennen.

Nun besteht zwischen der reducierten Länge l und der Constante des Pendels n folgende Beziehung:

$$\frac{g^i}{l} = n^2. 1) \quad \text{(Formel (2))}$$

1) Ich schreibe hier der Allgemeinheit wegen i statt i_0 .

Lässt man das Pendel seine entsprechende Bewegungcurve schreiben, so kann man aus derselben die Periode der Bewegung T und Λ bestimmen und alsdann nach der Formel (138) n berechnen.

Der absolute Werth der Neigung i der Drehungsaxe des Pendels gegen die Verticale lässt sich schwerlich bestimmen, aber die Aenderung der Neigung Δi lässt sich wohl ermitteln. Hat man nun n für verschiedene Neigungen bestimmt und die entsprechenden Aenderungen von i dabei gemessen, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, aus welchen man l berechnen kann.

Bezeichnen wir nun die anfängliche, kleinste Neigung für den grössten Werth von T durch i_0 , den entsprechenden Werth von n durch n_0 und die Aenderungen von i Δi entsprechend durch $\Delta_1 i$, $\Delta_2 i$, $\Delta_3 i$ u. s. w. für $n = n_1, n_2, n_3$ u. s. w., so sind alle diese Werthe mit Ausnahme von i_0 als bekannt zu betrachten.

Setzen wir $x = i_0$ und $y = \frac{l}{g}$, so haben wir folgende Reihe von Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} n_0^2 y - x &= 0 \\ n_1^2 y - x &= \Delta_1 i \\ n_2^2 y - x &= \Delta_2 i \\ n_3^2 y - x &= \Delta_3 i \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (142)$$

woraus x und y , folglich auch l , sich bestimmen lassen.

Ich habe in dieser Weise das Pendel 5 verschiedene Curven bei verschiedenen Neigungen aufschreiben lassen. Diese Curven sind auf den Figuren (24) bis (28) dargestellt. Aus denselben ergaben sich folgende Werthe von Λ , T , ϵ und n .

Tabelle IV.

Nr der Figur.	Λ	T	ϵ	n
24	0,02051	25,523	0,0037	0,24621
25	0,01375	19,815	0,0032	0,31711
26	0,00776	15,439	0,0023	0,40698
27	0,00678	12,494	0,0025	0,50290
28	0,00564	10,472	0,0025	0,60000

λ variirte dabei zwischen $4,5^m/m$ und $4,8^m/m$.

Fig. 24.



Fig. 25.

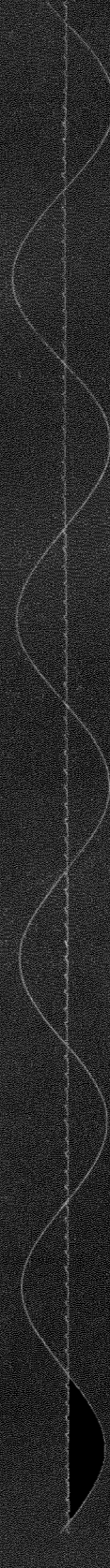


Fig. 26.

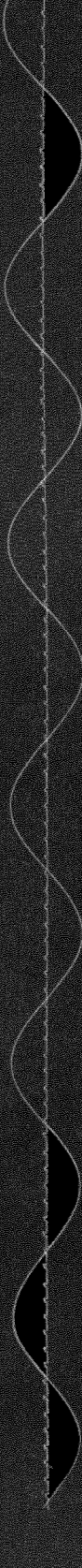
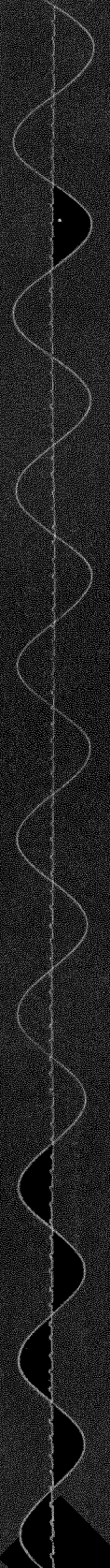


Fig. 27.



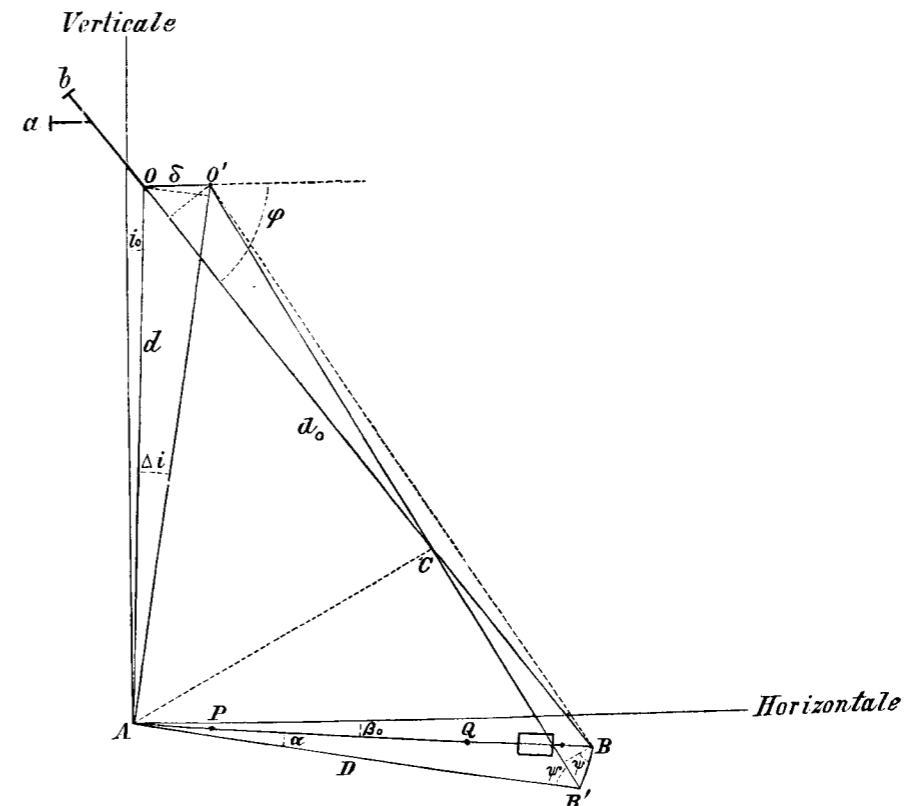
Fig. 28.



Was nun die Aenderung der Neigung Δi der Drehungsaxe des Horizontalpendels anbelangt, so lässt sich dieselbe auf dreierlei Arten bestimmen.

Das von mir benutzte Horizontalpendel hatte in seinem oberen Theil folgende Vorrichtung. Dem Aufhängepunkt O des schräg laufenden Drahtes OB (siehe die schematische Figur (29)¹⁾ konnten mittelst der Schrauben a oder b zwei verschiedene Bewegungen ertheilt werden.

Fig. 29.



Erstens, durch Drehung der Schraube a konnte der Aufhängepunkt O horizontal, etwa nach O' , verschoben oder, zweitens, durch Drehung der Schraube b , O in der Richtung bO gesenkt werden. Bei den jetzt zu besprechenden Beobachtungen war nur von der Schraube a Gebrauch gemacht.

Ist die anfängliche, kleinste Neigung der Drehungsaxe des Pendels i_0 und verschiebt sich alsdann der Punkt O nach O' , wo etwa

$$OO' = \delta$$

1) In Wirklichkeit befand sich der Schwerpunkt des Pendelgewichtes in B . Auf der Zeichnung ist derselbe der Anschaulichkeit wegen etwas verschoben.

ist, so vergrößert sich die Neigung i_0 um Δi , und der Pendelarm sinkt weiter nach unten, wobei der anfängliche Winkel β_0 , welchen der Pendelarm mit der Horizontalebene bildete, sich um α vermehrt (siehe die Figur (29)), so dass jetzt der neue Winkel mit der Horizontalebene β gleich $\beta_0 + \alpha$ wird, also

$$\alpha = \beta - \beta_0. \dots\dots\dots(143)$$

Die Verschiebung δ lässt sich leicht bestimmen. Dazu braucht man nur den Schraubengang der Schraube a zu kennen und derselben nur eine ganze Anzahl von Umdrehungen zu ertheilen. Dann lässt sich δ leicht berechnen.

Was nun α anbelangt, so lässt sich derselbe auf zweierlei Art bestimmen.

Erstens kann man sich dafür eines Kathetometers bedienen. Man braucht nur auf dem Pendelarm zwei Marken P , und Q in einer bestimmten Entfernung PQ von einander aufzutragen und die Höhen derselben z_1 und z_2 mit einem Kathetometer zu bestimmen. Es wird alsdann

$$\sin \beta = \frac{z_1 - z_2}{PQ}. \dots\dots\dots(144)$$

Hat man nun den anfänglichen Winkel β_0 für die Neigung i_0 in derselben Weise bestimmt, so ergibt sich α nach der Formel (143) einfach gleich $\beta - \beta_0$.

Zweitens kann man die Aenderung α der Neigung des Pendelarmes durch Spiegelablesung direct bestimmen. Dazu braucht man nur an dem Pendelarm einen kleinen Spiegel zu befestigen und demselben gegenüber ein Fernrohr mit Scala aufzustellen. Ist die Entfernung der Scala vom Spiegel gleich L und ist die Verschiebung der Scala, im Fernrohr gesehen, bei der Neigung des Pendels gleich m , so ergibt sich einfach

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{m}{L}. \dots\dots\dots(145)$$

Beide Methoden sind in Anwendung gebracht worden, wobei eine sehr gute Uebereinstimmung zwischen den nach beiden Methoden bestimmten Werthen von α erreicht wurde, wie es aus der weiter mitzutheilenden Tabelle V ersichtlich ist.

Ehe aber die verschiedenen Zahlenwerthe angegeben werden, wollen wir zunächst sehen, welche Beziehung zwischen den Werthen von Δi und δ oder α besteht.

Führen wir der Einfachheit wegen folgende Bezeichnungen ein:

$$OA = d$$

$$OB = d_0$$

$$\angle O'OB = \varphi$$

$$\angle OB'A = \psi$$

$$AB = D.$$

Aus dem Dreieck $OA'O$ ergibt sich

$$d \sin \Delta i = \delta \cos(i_0 + \Delta i),$$

oder bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung, da Δi und i_0 sehr klein sind,

$$\underline{\Delta i = \frac{\delta}{d}}. \dots\dots\dots(146)$$

Weiter ergibt sich aus der Figur (29)

$$O'B = d_0 - \delta \cos \varphi$$

$$O'B = O'B' - BB' \sin \psi = d_0 - \alpha D \sin \psi, ^1)$$

also

$$\delta \cos \varphi = \alpha D \sin \psi,$$

oder nach der Gleichung (146)

$$\Delta i \cdot d \cos \varphi = \alpha D \sin \psi. \dots\dots\dots(147)$$

Aus dem Dreieck $O'AB'$ folgt

$$AC = D \sin \psi = AO' \sin(B'O'A).$$

Nun ist bei Vernachlässigung kleiner Grössen

$$AO' = AO = d$$

und

$$\angle B'O'A = 90^\circ - \varphi,$$

folglich wird

$$D \sin \psi = d \cos \varphi,$$

also nach der Gleichung (147)

$$\underline{\Delta i = \alpha}. \dots\dots\dots(148)$$

1) $OB = O'B' = d_0$.

Von diesen beiden Formeln (146) und (148) werden wir gleich Gebrauch machen.

In der folgenden Tabelle V sind nun die verschiedenen Werthe von z_1 , z_2 , m und aus ihnen nach den Formeln (143), (144) und (145) abgeleiteten Werthe von α angegeben.

Bei diesen Beobachtungen war

$$PQ = 501,8 \text{ m/m}$$

$$L = 1145 \text{ m/m}$$

$$d = 771,5 \text{ m/m}$$

$$D = 523 \text{ m/m}$$

$$d_0 = 951,2 \text{ m/m}$$

Tabelle V.

z_1	z_2	m	β	α' mit dem Kathetometer.	α'' mit dem Fernrohr.	$\alpha' - \alpha''$	$\Delta i = \frac{\alpha' + \alpha''}{2}$
m/m	m/m	m/m					
383,28	383,49	0	-0° 1' 26",3	—	—		
383,20	382,40	4,6	+0 5 28,8	0° 6' 55",1	0° 6' 54",3	+ 0",8	0,0020106
383,18	380,68	12,1	+0 17 7,6	0 18 33,9	0 18 9,8	+24,1	0,0053422
383,06	378,28	22,5	+0 32 44,9	0 34 11,2	0 33 46,3	+24,9	0,0098844
382,87	375,30	35,4	+0 51 51,8	0 53 18,1	0 53 7,5	+10,6	0,0154789

Diese Tabelle zeigt, dass die nach zwei ganz verschiedenen Methoden bestimmten Werthe von α sehr gut mit einander übereinstimmen. Die grösste Differenz in den Werthen von α beträgt nur 24",9. Im Mittel ist die Differenz $\alpha' - \alpha'' = 15",1$.

Berücksichtigt man dabei, dass Δi der Mittelwerth von α' und α'' ist, so kann der mittlere Fehler von Δi

$$\epsilon_{\Delta i} = 7",55 = 0,000037$$

gesetzt werden.

Die folgende Tabelle VI enthält die Werthe von Δi , abgeleitet aus der Formel (146) aus der Verschiebung δ des Punktes 0.

Die Höhe h des Schraubenganges der Schraube a war gleich $0,8643 \text{ m/m}$.

Die erste Colonne giebt die Anzahl s der Umdrehungen der Schraube a .

1) Δi ist in Bogenlänge ausgedrückt.

Tabelle VI.

s	δ	Δi
2	1,729 ^m / _m	0,002241
5	4,322	0,005601
9	7,779	0,010082
14	12,100	0,015684

Wir sehen also, dass man die Aenderung der Neigung der Drehungsaxe eines Horizontalpendels nach drei verschiedenen Methoden bestimmen kann.

Die zuletzt besprochene Methode zur Bestimmung von Δi (aus der Verschiebung δ) führt zu weniger genauen Resultaten, als die beiden anderen Methoden.

Wollen wir nun jetzt von den Zahlen der letzten Colonne der Tabelle V Gebrauch machen, um die reducierte Länge l des Pendels zu berechnen.

Den Gleichungen (142) gemäss haben wir

$$n_k^2 y - x = \Delta_k i.$$

Setzen wir $n_k^2 = a_k$, so haben wir zur Bestimmung von x und y folgende Reihe von Gleichungen von der Form

$$a y - x = \Delta i$$

$$0,06062 y - x = 0$$

$$0,10056 y - x = 0,0020106$$

$$0,16563 y - x = 0,0053422$$

$$0,25291 y - x = 0,0098844$$

$$0,36000 y - x = 0,0154789.$$

Setzen wir

$$y = y_0 + \eta,$$

$$x = x_0 - \xi$$

und

$$\Delta i_k + x_0 - a_k y_0 = m_k,$$

wo

$$y_0 = 0,051704$$

und

$$x_0 = 0,003134^1)$$

ist, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem von der Form

$$a\eta + b\xi = m$$

$$0,06062\eta + \xi = 0$$

$$0,10056\eta + \xi = -0,000054$$

$$0,16563\eta + \xi = -0,000088$$

$$0,25291\eta + \xi = -0,000058$$

$$0,36000\eta + \xi = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich η und ξ , also y und x bestimmen.

Wir haben hier mehr Gleichungen als Unbekannte, folglich lohnt es sich, um jede Willkür in der Bestimmung von ξ und η auszuschliessen, die Methode der kleinsten Quadrate in Anwendung zu bringen.

Bei Zugrundelegung der Gauss'schen Bezeichnungen haben wir zur Bestimmung von η und ξ folgende zwei normale Gleichungen

$$(aa)\eta + (ab)\xi = (am)$$

$$(ab)\eta + (bb)\xi = (bm),$$

wo

$$(aa) = 0,23477$$

$$(bb) = 5$$

$$(ab) = 0,93972.$$

$$(am) = -0,0000347$$

$$(bm) = -0,000200$$

Daraus ergibt sich

$$\eta = +0,0000501$$

$$\xi = -0,0000494,$$

1) x_0, y_0 befriedigen die erste und letzte Gleichung.

also

$$y = 0,051754$$

$$x = i_0 = 0,003183 = 0^\circ 10' 56'' 5.$$

Da die Beschleunigung der Schwere in St. Petersburg $g = 9818,5 \frac{m}{m}$ ist, so folgt

$$l = 508,2 \frac{m}{m}.$$

Man kann, um über die Genauigkeit dieser Bestimmungen einen Aufschluss zu erhalten, die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Bestimmung der mittleren Fehler in Anwendung bringen, aber mit gewissem Vorbehalt, erstens, weil die Anzahl der Gleichungen nur um 3 grösser ist, als die Anzahl der Unbekannten und zweitens, weil die Coefficienten a , welche beobachtete Grössen sind, selbst mit einem gewissen Fehler behaftet sind.

Setzen wir

$$a\eta + \xi - m = v,$$

so wird bekanntlich der mittlere Fehler $\epsilon_{\Delta i}$ von Δi sich aus folgender Formel berechnen lassen¹⁾

$$\epsilon_{\Delta i} = \sqrt{\frac{\sum v^2}{3}}.$$

Es ergibt sich

$$\epsilon_{\Delta i} = 0,000044.$$

Früher haben wir aus der Uebereinstimmung der einzelnen Werthe von α' und α'' gefunden

$$\epsilon_{\Delta i} = 0,000037.$$

Die Uebereinstimmung ist also eine sehr gute.

Was nun den mittleren Fehler ϵ_η und ϵ_ξ anbelangt, so lassen sich dieselben bekanntlich nach folgenden Formeln berechnen:

$$\epsilon_\eta = \frac{\epsilon_{\Delta i}}{\sqrt{g_\eta}}$$

$$\epsilon_\xi = \frac{\epsilon_{\Delta i}}{\sqrt{g_\xi}},$$

wo g_η und g_ξ die entsprechenden Gewichte der Grössen η und ξ sind.

1) Bei Vernachlässigung des Fehlers von a .

Nun ist, wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung uns lehrt,

$$g_{\eta} = (aa) - \frac{(ab)(ab)}{(bb)} = 0,0582$$

$$g_{\xi} = (bb) - \frac{(ab)(ab)}{(aa)} = 1,239,$$

folglich wird

$$\varepsilon_{\xi} = \varepsilon_{i_0} = 0,000040 = 8'',3$$

$$\varepsilon_{\eta} = \varepsilon_y = 0,000182$$

und

$$\varepsilon_l = 1,8 \frac{m}{m}.$$

Die reducierte Länge des Pendels lässt sich also nach dieser Methode mit einem mittleren Fehler von $1,8 \frac{m}{m}$ bestimmen.

Hätte man, statt der Zahlen der Tabelle V, diejenigen der Tabelle VI für Δi zu Grunde gelegt, so würde man in ganz ähnlicher Weise finden

$$i_0 = 0^{\circ} 10' 34'',7$$

$$l = 511,9 \frac{m}{m}$$

$$\varepsilon_{\Delta i} = 0,000071$$

$$\varepsilon_{i_0} = 13'',2$$

$$\varepsilon_l = 2,9 \frac{m}{m}.$$

Wir sehen also, dass die mittleren Fehler in diesem Fall grösser sind, folglich führt die Methode der Bestimmung von l aus der Verschiebung des Aufhängepunktes zu weniger genauen Resultaten, als die der Bestimmung der Neigung des Pendelarms.

Hätte man bei der Feststellung der Beziehung zwischen Δi und α noch die Glieder höherer Ordnung berücksichtigt, so würde man einen wenig anderen Werth für l gefunden haben, aber die Differenz ist so klein, dass man für den vorliegenden Zweck sich mit dieser Genauigkeit vollständig begnügen kann.

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch sehen, ob die Dämpfungsconstante ε sich mit der Neigung des Pendelarmes β , oder der Neigung der Drehungsaxe i ändert. Die entsprechenden Zahlen sind in der folgenden Tabelle VII zusammengestellt, wobei T und ε aus der Tabelle IV und β aus der Tabelle V entnommen sind, während die Werthe von i nach der Formel (2) berechnet sind, da jetzt l bekannt ist.

Tabelle VII.

T	$\beta^1)$	i	ε
25,523	— 0° 1' 26''	0° 10' 47''	0,0037
19,815	+ 0 5 29	0 17 54	0,0032
15,439	+ 0 17 8	0 29 28	0,0023
12,494	+ 0 32 45	0 45 0	0,0025
10,472	+ 0 51 52	1 4 3	0,0025

Aus einer anderen Beobachtungsreihe, deren Einzelheiten hier nicht näher angegeben sind, ergaben sich folgende Zahlenwerthe.

Tabelle VIII.

T	β	i	ε
42,997	— 2° 39' 53''	0° 3' 48''	0,0027
19,669	— 1 44 17	0 18 10	0,0035
14,486	— 0 46 15	0 33 29	0,0034
12,443	— 0 4 23	0 45 22	0,0030
11,387	+ 0 27 37	0 54 11	0,0031
10,320	+ 1 10 5	1 5 57	0,0027

Aus diesen beiden Tabellen darf man wohl den Schluss ziehen, dass unter Berücksichtigung der möglichen Beobachtungsfehler, ε sich sowohl von β als auch von i als unabhängig erweist.

Aus der Tabelle VII ergibt sich im Mittel

$$\varepsilon = 0,0028$$

und aus der Tabelle VIII

$$\varepsilon = 0,0031,$$

welche Werthe gut mit einander übereinstimmen.

Es ergibt sich also das Resultat, dass die Dämpfungsconstante eines Horizontalpendels in Folge der Reibung als unabhängig von der Neigung desselben zu betrachten ist.

1) Wenn β positiv ist, so ist der Pendelarm nach unten gerichtet.

§ 14.

Beobachtungen mit einem aperiodischen Horizontalpendel.

Die in diesem § zu beschreibenden Versuche beziehen sich auf die Registrierung der Bewegung der Untersuchungsplattform mit Hilfe eines aperiodisch gemachten Horizontalpendels. Diese Versuche sind eine Ergänzung derjenigen, welche im § 10 beschrieben sind. Damals war die Eigenbewegung des Pendels ohne merkliche Dämpfung, in diesem Fall dagegen ist dieselbe in eine aperiodische Bewegung verwandelt.

Die entsprechenden Werthe der Constanten des Pendels sind früher bestimmt worden. Es ergab sich, wie wir schon gesehen haben,

$$\epsilon = n = 0,587$$

$$l = 508,2 \text{ m.}$$

Die Bewegung der Plattform war eine einfache Sinusbewegung von der Form

$$x = a_1 \sin n_1 t,$$

wo a_1 ungefähr gleich $6,4 \text{ m.}$ war.

Für die vollständige Periode der Plattformbewegung haben wir die Beziehung

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1}.$$

Nach den Entwicklungen des § 4 und unter Berücksichtigung der Formel (134) haben wir für die vom Horizontalpendel aufgeschriebene Curve folgendes System von Gleichungen:

$$y = \frac{L}{l} \cdot \mathfrak{A} a_1 \sin n_1 (t - \tau) \quad (\text{Siehe Formel (34)})$$

$$\tau = \frac{1}{n_1} \operatorname{arctg} \frac{2n_1 \epsilon}{n^2 - n_1^2} \quad (\text{Formel (31)})$$

$$\mathfrak{A} = \frac{n_1^2}{n_1^2 + n^2} \cdot 1) \dots \dots \dots (149)$$

Diese Formeln zeigen, dass die Bewegung des Pendels ebenfalls eine einfache Sinusbewegung ohne Dämpfung ist, wenn die Bewegung der Plattform eine einfache Sinusbewegung ohne Dämpfung ist ($\epsilon_1 = 0$). Die Periode

1) Siehe Formel (33) $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon = n$.

der Bewegung (T_1) ist genau dieselbe, aber es tritt eine kleine Zeitverschiebung ein.

Die maximale Amplitude der Ausschläge des Pendels ist eine andere.

Bezeichnen wir die nach der entsprechenden Curve der Pendelbewegung gemessene Amplitude durch a , so ergibt sich

$$\mathfrak{A} = \frac{l}{L} \cdot \frac{a}{a_1} \dots \dots \dots (150)$$

Auf diese Weise sind drei Curven für verschiedene Werthe von T_1 erhalten worden, welche in den Figuren (30), (31) und (32) wiedergegeben sind.

Auf jeder Figur sind zwei Curven dargestellt. Eine Curve entspricht der Bewegung der Plattform und die andere der entsprechenden Bewegung des Pendels.

Die Prüfung der vorgeführten Formeln geschah in folgender Weise.

Man bestimmte nach diesen Curven getrennt die Periode T_1 der Plattform und die Periode T_1' des Pendels. Nach der Theorie muss $T_1 = T_1'$ sein.

Dann wurden die Amplituden a und a_1 gemessen und aus ihnen \mathfrak{A} nach der Formel (150) berechnet, wobei in unserem Fall

$$L = 715 \text{ m.}$$

war.

Dieser beobachtete Werth von \mathfrak{A} , welchen ich durch \mathfrak{A}' bezeichnen werde, wurde alsdann mit dem aus der Theorie nach der Formel (149) sich ergebenden verglichen.

Was nun die Zeitverspätung betrifft, so lässt sich dieselbe einerseits nach der Formel (31) berechnen und zweitens aus den Figuren entnehmen. Den beobachteten Werth von τ werde ich durch τ' bezeichnen.

Bei der Bestimmung von τ' muss man auf zwei Umstände Acht geben.

Erstens entspricht die gezeichnete Curve der Plattformbewegung nicht der Gleichung

$$x = a_1 \sin n_1 t,$$

sondern, wie wir es schon wissen, der Gleichung

$$x_1 = -x = -a_1 \sin n_1 t.$$

Zweitens, wegen der Nichtübereinstimmung beider registrierender Stifte ist eine dieser Curven gegen die andere etwas verschoben. In unserem Fall betrug diese Verschiebung etwa $1,28 \text{ m.}$

Ich habe schon im § 9 darauf aufmerksam gemacht, dass am Anfang der Drehung des Electromotors die Bewegung der Plattform nicht ganz gleichmässig vor sich geht. Erst nach Verlauf einiger Secunden kann, wie aus den beigefügten Figuren ersichtlich ist, diese Bewegung als eine gleichmässige angesehen werden, folglich muss man bei Verwerthung der Curven die anfänglichen Theile derselben ausser Acht lassen. Dieses habe ich auch gethan.

Ein Blick auf die Figuren zeigt ganz deutlich, dass, wenn die Plattform reine Sinusschwingungen ohne Dämpfung ausführt, die Bewegung des Pendels ebenfalls eine Sinusbewegung ohne Dämpfung ist und zwar mit derselben Periode, ganz genau wie es die Theorie verlangt.

In der folgenden Tabelle IX sind die entsprechenden Zahlenwerthe für T , \mathfrak{A} und τ zusammengestellt.

Tabelle IX.

Nr der Figur.	a	a_1	T_1	T_1'	\mathfrak{A}	\mathfrak{A}'	τ	τ'	λ
30	8,35 ^m / _m	6,41 ^m / _m	3,597	3,597	0,9	0,9	1,43	1,44	5,9 ^m / _m
31	7,15	6,39	7,514	7,514	0,7	0,8	2,29	2,47	5,9
32	7,31	6,38	7,002	7,002	0,7	0,8	2,21	2,27	3,0

Die Zahlen dieser Tabelle zeigen, dass die Uebereinstimmung der Perioden der Plattform und des Pendels eine vollständige ist.

Der Unterschied in den Werthen der berechneten und beobachteten Zeitverspätung τ und τ' ist ebenfalls äusserst gering. Nur im zweiten Fall beträgt dieser Unterschied 0,18, was vermuthlich davon herrührt, dass in diesem Fall bei einer Periode von 7,5 die Trommel eine zu grosse Drehungsgeschwindigkeit hatte (die Länge $1^s \lambda = 5,9^m/m$). Deshalb bekamen die gezeichneten Curven eine zu flache Form, was besonders die genaue Bestimmung der Schnittpunkte der Curven mit der t -Axe erschwert, infolgedessen ist die Bestimmung von τ' nicht so sicher. In der That sehen wir bei der dritten Curve (Fig. 32), wo die Periode beinahe dieselbe war ($T_1 = 7,0$), aber λ nur 3,0^m/_m betrug, dass der Unterschied in den Werthen von τ und τ' nur 0,06 ausmacht.

Was nun die Werthe von \mathfrak{A} und \mathfrak{A}' anbelangt, so sehen wir, dass der Unterschied zwischen denselben ebenfalls nicht gross ist. \mathfrak{A}' scheint etwas grösser als \mathfrak{A} zu sein, was theilweise davon herrühren konnte, dass wegen einiger fast unmöglich zu beseitigenden Mängel in der Construction der Plattform die von ihr gelieferte Curve keine echte Sinuscurve ist; nämlich

Fig. 30.

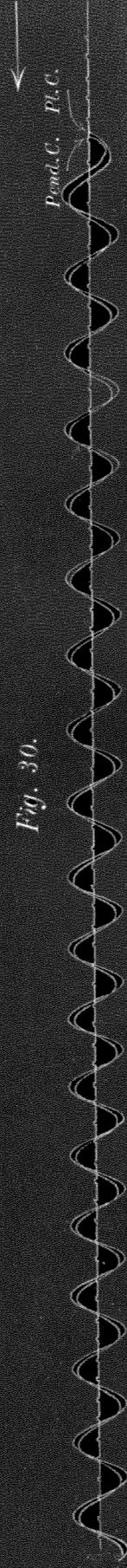


Fig. 31.

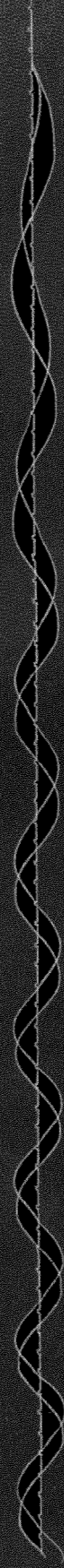


Fig. 32.

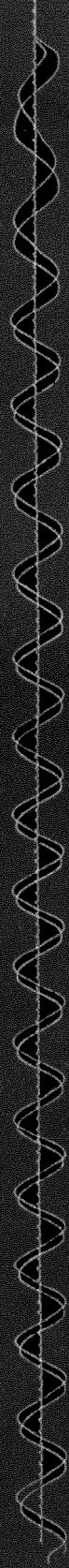


Fig. 33.



sind die unteren Spitzen der Plattformcurven etwas abgeflacht, folglich sind die gemessenen Werthe von a_1 zu klein, was eine Vergrößerung der nach der Formel (150) berechneten Werthe von \mathfrak{A}' nach sich zieht.

Auf jeden Fall ist die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung als eine sehr befriedigende zu bezeichnen, insbesondere, wenn man noch dabei berücksichtigt, dass eine gewisse Unbestimmtheit über den genauen Werth von ϵ herrscht und die Bewegung der Plattform, insbesondere bei grösseren Werthen von T_1 , nicht vollständig gleichmässig erfolgt.

Es unterliegt also keinem Zweifel, dass durch Einführung einer starken electromagnetischen Dämpfung, d. h. durch Verwandlung des Horizontalpendels in ein aperiodisches Instrument, die Eigenbewegung des Pendels hier eliminirt wird und die von ihm aufgeschriebene Curve genau den Charakter der Bewegung der Plattform wiedergibt, im vollständigen Einklang mit der früher vorgeführten Theorie.

Zum Schluss wollen wir noch den Fall besprechen, wo die Bewegung der Plattform eine ganz willkürliche ist.

Um diese willkürliche Bewegung zu erzielen, war der Electromotor eingestellt, und die Plattform einfach mit den Händen mit Hilfe eines Hebels in Erschütterungen versetzt.

Die entsprechenden zwei Curven der Plattform- und Pendelbewegung sind auf der Figur (33) dargestellt.

Wir sehen aus derselben, dass das Pendel sehr gut alle Eigenthümlichkeiten der Plattformbewegung wiedergibt, wobei der Einfluss seiner Eigenbewegung fast vollständig fortfällt oder wenigstens sehr geschwächt ist. Für ein periodisches Pendel ist dieses, wie wir früher gesehen haben (Fig. (13)), nicht mehr der Fall.

Hätte man die electromagnetische Dämpfung noch mehr verstärkt, so würde man ohne Zweifel noch bessere Resultate erzielt haben.

Diese Versuche zeigen also ganz deutlich, der vorgeführten Theorie entsprechend, wie vortheilhaft es ist, seismometrische Apparate mit einer starken electromagnetischen Dämpfung zu versehen.

§ 15.

Bestimmung der Constanten des aperiodischen Galvanometers.

Wir haben früher gesehen, dass, obgleich die Einführung einer starken electromagnetischen Dämpfung sich als sehr vortheilhaft erweist, dieselbe doch den Nachtheil hat, die Amplituden der Ausschläge des Pendels zu verkleinern.

Freilich ist diese Verkleinerung in den früher besprochenen Fällen unbedeutend, da \mathcal{Q} nur zwischen 0,7 und 0,9 variierte, aber damals war ϵ nur gleich n gesetzt. Bei einer sehr starken Dämpfung kann ϵ sehr gross werden, und infolgedessen werden die Amplituden der Ausschläge des Pendels schon recht bedeutend verkleinert.

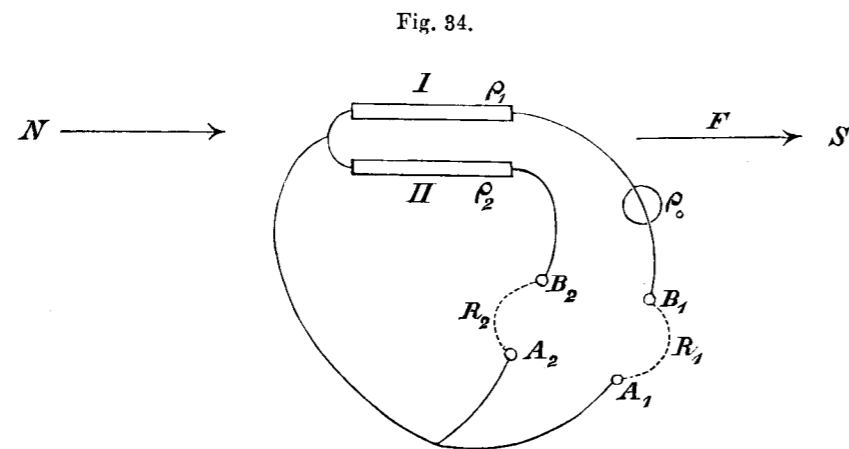
Will man also eine starke electromagnetische Dämpfung in Anwendung bringen, so muss man ein Mittel treffen, um die Empfindlichkeit der Registrirung zu vergrössern. Dazu habe ich ein aperiodisches Galvanometer als Registrirapparat vorgeschlagen.

Die entsprechenden Versuche sind im § 17 wiedergegeben. Jetzt wollen wir uns aber mit der Bestimmung der Constanten des Galvanometers beschäftigen. Diese Bestimmungen erheben keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit und Vollständigkeit, aber sie reichen doch hin, ganz zutreffende Werthe der Constanten des Galvanometers zu liefern.

Das von mir benutzte aperiodische D'Arsonval'sche Galvanometer war von Hartmann und Braun bezogen.

In dem kräftigen Felde eines hufeisenförmigen Magnets befand sich ein Rahmen, welcher zwei getrennte Systeme von Windungen hatte, die ich beziehungsweise durch System I und System II bezeichnen werde. Die Fläche der Windungen war im Ruhezustand parallel den Kraftlinien.

Das System I hatte eine grosse Anzahl von Windungen, deren Gesamtwiderstand ρ_1 etwa 400 Ohm betrug. Ausserdem war im Stromkreise I (siehe die Figur (34)) im Galvanometer



selbst ein Zusatzwiderstand ρ_0 eingeschaltet, wobei

$$\rho_1 + \rho_0 = 9972 \Omega$$

war.

Der Stromkreis II hatte eine geringe Anzahl von Windungen, deren Gesamtwiderstand ρ_2 $4,53 \Omega$ betrug.

Beide Systeme von Windungen endigten beziehungsweise an den Klemmen $A_1—B_1$ und $A_2—B_2$.

Zwischen den Klemmen $A_2—B_2$ befand sich während der im § 17 zu beschreibenden Beobachtungen der Stromkreis der am Pendelarm befestigten Spule, welche sich in einem besonderen magnetischen Felde bewegen konnte.

Den Widerstand zwischen $A_2—B_2$ wollen wir durch R_2 bezeichnen. Für den Fall der Spule war

$$R_2 = 59,95 \Omega.$$

Der Widerstand R_1 zwischen A_1 und B_1 konnte beliebig variiert werden.

Ist die erwähnte Spule zwischen A_2 und B_2 eingeschaltet, so wird die Galvanometerspule, wenn dieselbe einen Anstoss bekommen hat ¹⁾, bei grösseren Werthen von R_1 periodische Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführen. Durch Verkleinerung von R_1 konnte das Galvanometer in ein aperiodisches Instrument verwandelt werden.

Der Widerstand R_1 , bei welchem die Bewegung der Galvanometerspule anfang aperiodisch zu werden, war gleich 23Ω , also

$$R_1 = 23 \Omega.$$

Mit diesen Werthen von R_2 und R_1 waren die im § 17 zu beschreibenden Versuche ausgeführt.

Dieses entspricht also dem Grenzfall, wo die Dämpfungsconstante ϵ_1 des Galvanometers gleich der zweiten Constante n_1 desselben war (siehe Formel (62)), also

$$\epsilon_1 = n_1.$$

Um nun die Constanten ϵ_1 und n_1 des Galvanometers überhaupt zu bestimmen, sind zwei Versuchsreihen ausgeführt worden.

Bei der ersten Reihe blieb R_1 constant und zwar war

$$R_1 = 100000 \Omega,$$

während R_2 zwischen den Grenzen ∞ und $59,95 \Omega$ variiert wurde. Für jeden Werth von R_2 liess man das Galvanometer seine entsprechende Bewegungscurve auf der mit lichtempfindlichem Papier überzogenen Trommel regi-

1) Etwa durch Durchlassung eines kurzdauernden inducierten Stromes.

striren¹⁾. Aus der Form der erhaltenen Curven konnte man alsdann ϵ_1 und n_1 bestimmen.

Bei der zweiten Reihe war $R_1 = 23\Omega$ gewählt, während R_2 zwischen 9493,91 und 1003,35 Ω variierte.

Ehe wir zur Beschreibung dieser Versuche übergehen, wollen wir zuerst die Beziehung zwischen ϵ_1 und R_1 und R_2 näher feststellen.

Ist die Galvanometerspule um den Winkel φ gedreht, und bezeichnen S_1 , resp. S_2 die totale Fläche der Windungen der Spule, so haben wir für den Kraftfluss durch jedes System von Windungen folgende Beziehungen:

$$Q_1 = FS_1 \sin \varphi$$

$$Q_2 = FS_2 \sin \varphi,$$

wo F die Feldstärke bedeutet.

Ist φ klein, so erhalten wir in erster Annäherung für die Stromstärke in jedem System,

$$I_1 = FS_1 \frac{\varphi'}{R_1 + \rho_1 + \rho_0}$$

$$I_2 = FS_2 \frac{\varphi'}{R_2 + \rho_2}.$$

Nach dem Lenz'schen Gesetz müssen diese Ströme solche Richtungen annehmen, dass sie die stattgefundene Bewegung der Spule möglichst hemmen.

Bedeutet nun g_1 beziehungsweise g_2 eine gewisse Constante für jedes System von Windungen, so erhalten wir für das gesammte magnetische Moment \mathfrak{M} der beweglichen Spule des Galvanometers folgende Beziehung:

$$\mathfrak{M} = g_1 I_1 + g_2 I_2 = F \left[\frac{g_1 S_1}{R_1 + \rho_1 + \rho_0} + \frac{g_2 S_2}{R_2 + \rho_2} \right] \varphi' \dots (151)$$

Die Differentialgleichung der Bewegung der Galvanometerspule lässt sich in folgender allgemeiner Form schreiben

$$K\varphi'' = -\Delta\varphi - \mathfrak{M}F - \left(b_0 + \frac{b_1}{R_1 + \rho_1 + \rho_0} + \frac{b_2}{R_2 + \rho_2} \right) \varphi' \dots (152)$$

Hierin bedeuten:

K — das Trägheitsmoment des Systems, Δ — die Torsionsconstante des Aufhängefadens und b_0 , b_1 und b_2 drei Constanten, auf deren Bedeutung wir nicht näher einzugehen brauchen.

1) Die Einzelheiten der Aufstellung sind im nächsten § beschrieben.

Setzt man den Werth von \mathfrak{M} aus der Gleichung (151) in diese Gleichung ein und führt noch dabei folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{\Delta}{K} = n_1^2$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \frac{b_0}{K}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K} [b_1 + g_1 S_1 F^2]$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K} [b_2 + g_2 S_2 F^2]$$

und

$$\epsilon_1 = c_0 + \frac{c_1}{R_1 + \rho_1 + \rho_0} + \frac{c_2}{R_2 + \rho_2}, \dots (153)$$

so erhalten wir folgende bekannte Differentialgleichung der Bewegung der Galvanometerspule

$$\varphi'' + 2\epsilon_1 \varphi' + n_1^2 \varphi = 0. \dots (154)$$

n_1 ist ganz unabhängig von den Widerständen R_1 , R_2 , ρ_1 , ρ_2 und ρ_0 , während ϵ_1 von denselben unmittelbar abhängt.

Hat man aus einer genügenden Anzahl von Beobachtungen ϵ_1 bei verschiedenen Werthen von R_1 und R_2 bestimmt, so lassen sich die Constanten c_0 , c_1 und c_2 leicht berechnen. Sind nun diese Constanten einmal bekannt, so kann man den Werth der Dämpfungsconstante ϵ_1 für jeden beliebigen vorgeschriebenen Fall vorausberechnen.

Gehen wir jetzt zu den Beobachtungen selber über.

Erste Versuchsreihe.

$$R_1 = 100000 \Omega, \text{ also } R_1 + \rho_1 + \rho_0 = 109972 \Omega; \rho_2 = 4,53 \Omega.$$

Die entsprechenden Curven sind in den Figuren (35) bis (40) wiedergegeben. Die Zeitintervalle sind dadurch markirt, dass jede Secunde ein kleiner Schirm durch einen besonderen kleinen Electromagnet vor dem Beleuchtungsspalt angezogen wurde; deshalb erscheinen eben alle Curven punktiert.

Die Nulllinie ist von einem festen Spiegel angegeben.

Wegen kleiner Verschiebungen, welche in der Ruhelage des Galvanometers während der Beobachtungen zuweilen eintraten, liegen die Curven

1) Siehe Formel (82).

in ihren weiteren Theilen, wo die Amplituden sehr klein sind, nicht immer ganz symmetrisch im Bezug auf die Nulllinie. Dieser Umstand ist aber ohne wesentliche Bedeutung, wenn man bei der Bestimmung der Dämpfungsconstante die Summe der Ausschläge nach oben und unten bildet.

Durch Ausmessung der Curven sind die Werthe von Λ und T direct bestimmt, und alsdann aus ihnen ϵ_1 und n_1 nach den Formeln (137) und (138) berechnet worden.

Diese Bestimmungen können nicht auf grosse Genauigkeit Anspruch erheben, da die Curven in manchen Fällen sehr flach verlaufen und kleine Amplituden besitzen, folglich ist die Ausmessung solcher Curven mit einer ziemlich grossen Unsicherheit behaftet.

Die Versuchsergebnisse dieser I^{ten} Versuchsreihe sind in der folgenden Tabelle X wiedergegeben.

Tabelle X.

N ^o der Figur.	R_2	Λ	T	ϵ_1	n_1
35	∞	0,1163	15,056	0,03557	0,4188
36	1003,35 Ω	0,1366	15,042	0,04182	0,4198
37	531,65	0,1582	14,999	0,04857	0,4217
38	248,63	0,2039	15,072	0,06230	0,4215
39	154,29	0,2682	15,184	0,08134	0,4217
40	59,95	0,5250	15,930	0,15177	0,4226

λ variierte dabei zwischen 3,5 und 3,9 m/m.

Für $R_2 = 16,04 \Omega$ war die Bewegung schon eine aperiodische.

Die Schwankungen der Zahlen der letzten Colonne dieser Tabelle liegen ohne Zweifel innerhalb der möglichen Beobachtungsfehler, folglich darf man n_1 als constant annehmen.

Es ergibt sich im Mittel aus 6 Bestimmungen

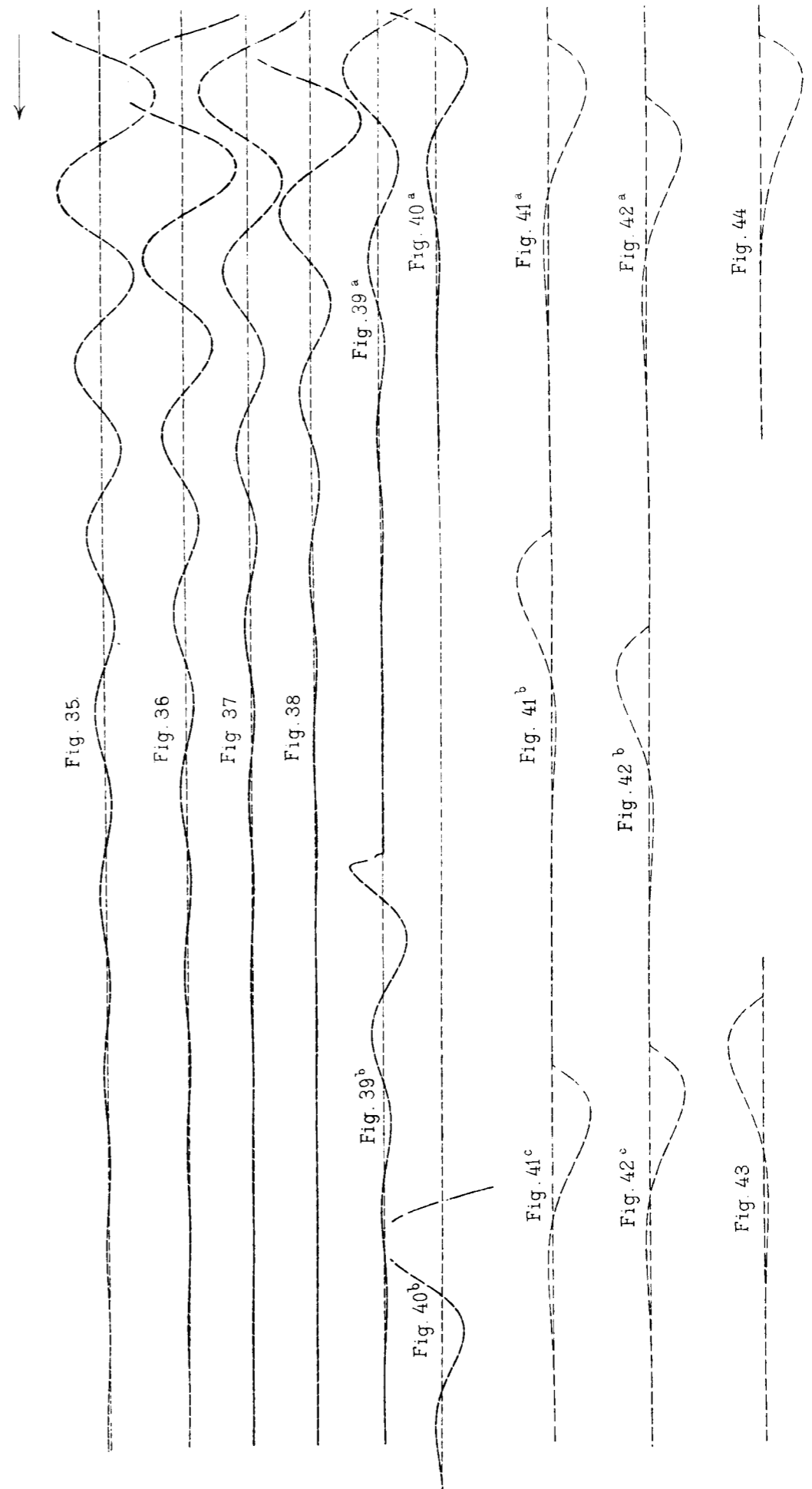
$$n_1 = 0,4210.$$

Setzen wir in der Formel (153)

$$c_0 + \frac{c_1}{R_1 + \rho_1 + \rho_0} = \epsilon_0,$$

wo $R_1 + \rho_1 + \rho_0 = 109972 \Omega$ ist, also

$$c_0 + \frac{c_1}{109972} = \epsilon_0, \dots\dots\dots(155)$$



so bekommen wir nach der Tabelle X 6 Gleichungen von der Form

$$\varepsilon_0 + \frac{1}{R_2 + \rho_2} \cdot c_2 = \varepsilon_1,$$

wo $\frac{1}{R_2 + \rho_2}$ und ε_1 bekannt sind.

Aus diesen Gleichungen lassen sich ε_0 und c_2 bestimmen.

Für die wahrscheinlichsten Werthe derselben erhalten wir

$$\varepsilon_0 = 0,03428$$

$$c_2 = 7,54.$$

Bei Zugrundelegung dieses Werthes von ε_0 und unter Berücksichtigung, dass für $R_2 = 16,04 \Omega$ die Bewegung eine aperiodische, folglich $\varepsilon_1 = n_1$ ist, würde sich ergeben

$$c_2 = 8,00.$$

Zweite Versuchsreihe.

$$R_1 = 23 \Omega, \text{ also } R_1 + \rho_1 + \rho_0 = 9995 \Omega; \rho_2 = 4,53 \Omega.$$

Die entsprechenden Curven sind in den Figuren (41), (42) und (43) dargestellt.

Die aus diesen Curven sich ergebenden Zahlenwerthe sind in der folgenden Tabelle XI zusammengestellt.

Diese Zahlen sind noch weniger sicher, als die Zahlen der Tabelle X, da hier in allen drei Fällen die Dämpfung sehr stark war und die Curven sehr flach verlaufen.

Tabelle XI.

N ^o der Figur.	R_2	Λ	T	ε_1	n_1
41	9493,91 Ω	0,9096	17,536	0,23887	0,4306
42	4776,93	0,9294	17,803	0,24042	0,4270
43	1003,35	0,9784	18,088	0,24911	0,4275

λ variierte dabei zwischen 5,1 und 5,7 m/m.

Für $R_2 = 59,95 \Omega$ war die Bewegung schon eine aperiodische. Für den Mittelwerth von n_1 aus drei Bestimmungen erhalten wir

$$n_1 = 0,4284.$$

Setzen wir wiederum wie früher

$$c_0 + \frac{c_1}{R_1 + \rho_1 + \rho_0} \text{ für } R_1 + \rho_1 + \rho_0 = 9995 \Omega \text{ gleich } \epsilon_0',$$

d. h.

$$c_0 + \frac{c_1}{9995} = \epsilon_0', \dots \dots \dots (156)$$

so haben wir nach der Tabelle XI 3 Gleichungen von der Form

$$\epsilon_0' + \frac{1}{R_2 + \rho_2} c_2 = \epsilon_1,$$

woraus ϵ_0' und c_2 sich bestimmen lassen.

Für die wahrscheinlichsten Werthe derselben erhalten wir

$$\epsilon_0' = 0,23785$$

$$c_2 = 11,35.$$

Bei Zugrundelegung dieses Werthes von ϵ_0' und unter Berücksichtigung, dass für $R_2 = 59,95 \Omega$ die Bewegung eine aperiodische ist, würde sich ergeben

$$c_2 = 11,93.$$

Wir sehen also, dass beide Versuchsreihen keine sehr übereinstimmenden Werthe für c_2 geben, was auch wegen der Schwierigkeit dieser Beobachtungen und der Unsicherheit der Zahlen der Tabelle XI wohl zu erwarten war. Wir können aber doch nach diesen Versuchen in erster Annäherung annehmen, dass der wahre Werth von c_2 wenigstens zwischen 8 und 12 liegt.

Hätte man c_2 aus solchen Versuchen genauer bestimmen wollen, so müsste man mehrere Versuchsreihen unter den verschiedensten Bedingungen ausführen.

Die hier beschriebenen Versuche haben aber nur den Zweck zu zeigen, wie man überhaupt die Constanten eines aperiodischen Galvanometers bestimmen kann.

In unserem Fall brauchen wir auch gar nicht c_2 zu kennen, da die Widerstände so reguliert waren, dass nur die Grenze der Aperiodicität erzielt wurde, folglich kann man einfach

$$\epsilon_1 = n_1$$

setzen.

Der Mittelwerth von n_1 aus beiden Versuchsreihen, wenn man die Anzahl der Beobachtungen in jeder Reihe berücksichtigt, ergibt sich gleich 0,423, also

$$\underline{n_1 = 0,423.}$$

Mit diesem Werth von n_1 sind die im § 17 angegebenen Berechnungen ausgeführt.

Sind nun die Werthe von ϵ_0 und ϵ_0' bekannt, so kann man c_0 und c_1 aus den Gleichungen (155) und (156) bestimmen.

Es ergibt sich

$$c_0 = 0,014$$

$$c_1 = 2238.$$

Ausserdem ist

$$c_2 = 8 - 12,$$

und, da

$$\rho_1 + \rho_0 = 9972 \Omega$$

und

$$\rho_2 = 4,53 \Omega$$

ist, so kann man ϵ für verschiedene Werthe von R_1 und R_2 nach der Formel (153)

$$\epsilon_1 = c_0 + \frac{c_1}{R_1 + \rho_1 + \rho_0} + \frac{c_2}{R_2 + \rho_2}$$

berechnen.

In unserem Falle waren die Widerstände so gewählt, dass $\epsilon_1 = n_1$ war. Dieses entspricht

$$R_1 = 23 \Omega,$$

$$R_2 = 59,95 \Omega \text{ (Widerstand der Spule am Pendelarm).}$$

Hätte man ϵ_1 vergrössern wollen, was für Registrirzwecke sich als sehr zweckmässig erweist, so müsste man die Spule des Pendels zwischen den Klemmen $A_1 - B_1$ einschalten, also $R_1 = 59,95 \Omega$ machen und R_2 einfach gleich Null setzen.

In diesem Falle wäre

$$\epsilon_1 = 2,00 \text{ oder } 2,89,$$

je nachdem man für c_2 den Werth 8 oder 12 annimmt.

Jetzt ist ϵ_1 bedeutend grösser als n_1 .

Zum Schluss sei vom folgenden Controllversuch Erwähnung gemacht.

Man liess das aperiodisch gemachte Pendel ($\epsilon_1 = n_1$) seine Curve aufzeichnen (Fig. (44)).

Der maximale Ausschlag dieser Curve y_0' war gemessen und gleich $-13,46^m/m$ gefunden. Wählt man diesen Moment für den Anfang der Zeitmessung t , so muss bekanntlich die aufgeschriebene Curve der Gleichung

$$\frac{y'}{y_0'} = e^{-\epsilon_1 t} [1 + \epsilon_1 t] \quad (\text{Formel (141)})$$

genügen.

Für den Zeitmoment $t = 4,645$ war die entsprechende Ordinate y' von der Curve genommen und gleich $-4,73^m/m$ gefunden.

Es ergibt sich also für das Verhältniss

$$\frac{y'}{y_0'} = 0,35.$$

Es fragt sich nun, genügt der früher gefundene Werth von $\epsilon_1 = n_1 = 0,423$ der Gleichung (141) oder nicht.

Aus dieser Gleichung berechnet sich nun (für $t = 4,645$)

$$\frac{y'}{y_0'} = 0,42.$$

Der Unterschied ist nicht bedeutend, insbesondere wenn man berücksichtigt, dass t mit einem ziemlich grossen Fehler behaftet sein kann, da es sehr schwer ist den Anfangspunkt der Zeitzählung genau festzustellen, weil dieser Punkt einem Minimum der Curve entspricht, folglich ist seine Lage gar nicht scharf gekennzeichnet. Ein Fehler von nur 0,43 im Werthe von t würde schon 5 Einheiten der zweiten Decimale im Werthe von $\frac{y'}{y_0'}$ entsprechen.

Wir können also annehmen, dass die früher angegebenen Werthe von ϵ_1 und n_1 für unseren Zweck hinreichend genau ermittelt sind.

§ 16.

Verhältniss der Ausschläge des Horizontalpendels und des aperiodischen Galvanometers.

Im nächsten § sind die Beobachtungen über die Bewegung des Galvanometers unter dem Einfluss der Bewegung des Horizontalpendels beschrieben. Aber, bevor wir zu diesen Beobachtungen übergehen, wollen wir zuerst sehen, wie diese Bewegungen eigentlich registriert wurden, und wie man das Verhältniss der Ausschläge beider Instrumente bestimmen kann.

Die Galvanometerspule war mit einem kleinen Spiegel verbunden; am Pendelarm war ein zweiter Spiegel angebracht. Ausser diesen zwei beweglichen Spiegeln befand sich noch in der Nähe derselben ein dritter, fester Spiegel, welcher zur Feststellung der Nulllinie diente.

Vor diesen drei sehr nah an einander liegenden Spiegeln befand sich etwas zur Seite eine Glühlampe mit geradem, vertical stehendem Kohlenfaden. Diese Lampe war mit einer cylindrischen Hülse bedeckt, die einen Spalt hatte, durch welchen das Licht auf die drei Spiegel fallen konnte.

Die drei reflectierten Strahlenbündel wurden zuerst durch eine verticalstehende Cylinderlinse durchgelassen und dann von einer zweiten horizontalstehenden Cylinderlinse auf dem Lichtempfindlichen Papier der Registrirtrommel concentrirt. Mit Hilfe dieses optischen Systems bekam man auf der Trommel drei sehr scharfe Lichtpunkte, und, da die Entfernung der Trommel verhältnissmässig klein war, hinterliessen sie ziemlich helle Punktgebilde. Der Vorthheil dieser Einrichtung besteht eben darin, dass die von den Strahlen zurückgelegte Strecke verhältnissmässig klein ist, folglich kann man der Trommel grosse Drehungsgeschwindigkeiten ertheilen und dabei noch immer genügend starke photochemische Wirkungen auf dem Lichtempfindlichen Papier erzielen. Die drei Spiegel waren so orientirt, dass die drei Punkte auf der Trommel in eine Linie und dabei möglichst nah an einander zu liegen kamen.

Es bestand doch immer bei der Gleichgewichtslage beider Instrumente eine kleine Verschiebung der Brennpunkte der vom Galvanometerspiegel und Pendelspiegel reflectirten Strahlen, und von dieser Verschiebung musste bei Auswerthung der im nächsten § angegebenen Curven, nämlich bei der Ermittlung der Zeitverschiebung τ_1 einer Curve im Bezug auf die andere, Rechnung getragen werden.

Zwischen der horizontalliegenden Cylinderlinse und der Registrirtrommel befand sich noch, um jedes fremde Licht möglichst auszuschliessen, ein Schirm aus Pappe mit horizontalem Schlitz.

Die Registrirung der Zeit geschah, wie ich es schon früher betont habe, dadurch, dass jede Secunde ein kleiner Schirm von einem besonderen kleinen Electromagnet angezogen wurde und die Lichtstrahlen interceptierte.

Bedeuteten nun θ und φ die Winkelausschläge des Pendels resp. des Galvanometers, und sind y und y' die entsprechenden Ausschläge auf der Trommel, so können wir setzen.

$$\left. \begin{aligned} \theta &= ay \\ \varphi &= a'y' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(157)$$

wo a und a' zwei Constanten bedeuten, welche unmittelbar von den Eigenschaften des eben beschriebenen optischen Systems abhängen.

Die Ermittlung von a und a' geschah auf folgende Weise.

Auf dem Arm des Horizontalpendels war ein zweiter, in eine andere Richtung gedrehter Spiegel und demselben gegenüber ein Fernrohr mit Scala angebracht.

Man drehte alsdann das Pendel um verschiedene Winkel θ und maass einerseits die Verschiebung m der Scala im Fernrohr und andererseits die entsprechenden Ausschläge y des Lichtpunktes auf der Trommel.

Ist D die Entfernung der Scala vom Spiegel, so kann

$$\theta = \frac{m}{2D}$$

gesetzt werden.

D war gleich $1214 \frac{m}{m}$.

In der folgenden Tabelle XII sind die entsprechenden Werthe von m , y und aus ihnen berechneten Werthe von a zusammengestellt.

Tabelle XII.

m	y	a
$61,0 \frac{m}{m}$	$9,5 \frac{m}{m}$	0,00264
120,8	18,7	0,00266
177,1	26,5	0,00275
88,45	13,3	0,00274
58,85	9,2	0,00263
30,05	4,5	0,00275
177,2	26,3	0,00277
117,9	18,3	0,00265
60,4	9,2	0,00270

Es ergibt sich im Mittel

$$a = 0,002699.$$

Was nun den Werth von a' anbelangt, so lässt sich derselbe auf folgende Weise bestimmen.

Die Entfernung des Spiegels des Horizontalpendels, welcher zur optischen Registrirung diente, von der Trommel betrug $761 \frac{m}{m}$.

Nun befand sich der Galvanometerspiegel noch um $4 \frac{m}{m}$ hinter demselben. Folglich kann man setzen

$$a' = a \frac{761}{765}.$$

Es ergibt sich

$$a' = 0,002685.$$

und

$$\frac{a'}{a} = 0,99476.$$

§ 17.

Registrirung der Bewegung des Horizontalpendels mit Hilfe des aperiodischen Galvanometers.¹⁾

Bei diesen Beobachtungen war an dem Arm des Horizontalpendels eine kleine Spule angebracht, welche bei der Bewegung desselben sich im Felde eines besonderen Electromagnets frei bewegen konnte. Diese Spule war mit dem aperiodischen Galvanometer verbunden.

Bei der Bewegung des Pendels inducierten sich in dieser Spule Ströme und das Galvanometer gerieth dadurch in Bewegung.

Die Theorie dieser Wechselwirkung ist im § 6 dargestellt; es handelt sich hier nur darum, diese Theorie einer experimentellen Prüfung zu unterziehen.

Die beschriebene Einrichtung erwies sich als so empfindlich, dass es gar nicht nöthig war, einen Strom durch den Electromagnet durchzulassen. Der zurückgebliebene Magnetismus desselben reichte vollständig aus, die Galvanometerspule in Bewegung zu setzen.

Entspricht die Bewegung des Pendels dem Gesetz

$$\theta = Ae^{-\epsilon t} \sin(pt + \delta), \quad (\text{Formel (64)})$$

wo

$$p = \sqrt{n^2 - \epsilon^2} \quad (\text{Formel (65)})$$

ist, so ergibt sich für die Bewegung des Galvanometers, für nicht zu kleine Werthe von t ,

$$\varphi = -A_1 \frac{e^{-\epsilon t}}{\sqrt{R_1}} \sin(pt + \delta - \Delta_1), \quad (\text{Formel (68)})$$

1) Einige vorläufige Beobachtungen über diesen Gegenstand habe ich in meinem Bericht in der seismometrischen Commission am 5. März dieses Jahres mitgetheilt. Siehe die Protocolle der Sitzungen der Commission (1903).

wo

$$A_1 = nkA \quad (\text{Formel (69)})$$

$$\text{tg } \Delta_1 = p \frac{n^2 - n_1^2}{2\varepsilon_1 n^2 - \varepsilon(n^2 + n_1^2)} \quad (\text{Formel (70)})$$

$$R_1 = \{p^2 + (\nu_1 - \varepsilon)^2\} \{p^2 + (\nu_2 - \varepsilon)^2\}. \quad (\text{Formel (71)})$$

ist.

Hierin bedeuten

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \varepsilon_1 + \alpha_1 \\ \nu_2 &= \varepsilon_1 - \alpha_1 \\ \alpha_1 &= \sqrt{\varepsilon_1^2 - n_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Formeln (67)})$$

Für die Periode der Schwingung T haben wir

$$T = \frac{2\pi}{p}.$$

Setzen wir

$$\tau_1 = \frac{\Delta_1}{p}, \quad (\text{Formel (72)})$$

so sehen wir, dass das Galvanometer genau den Charakter der Bewegung des Pendels wiedergibt; es ist nämlich die Periode dieselbe, die Dämpfung dieselbe, aber es tritt eine Zeitverschiebung τ_1 ein, und ausserdem sind die Amplituden der Ausschläge geändert.

Unser Galvanometer war so eingerichtet, dass $\varepsilon_1 = n_1 = 0,423$ war.

In Folge dessen vereinfachen sich die Gleichungen (70) und (71) zu folgenden

$$\text{tg } \Delta_1 = p \cdot \frac{n^2 - n_1^2}{2n_1 n^2 - \varepsilon(n^2 + n_1^2)} \dots\dots\dots(158)$$

$$\sqrt{R_1} = n^2 + n_1^2 - 2n_1\varepsilon. \dots\dots\dots(159)$$

Wollen wir nun zwei benachbarte maximale Ausschläge θ_m und y_m des Pendels und des Galvanometers vergleichen.

θ erreicht seinen grössten, resp. kleinsten Werth, wenn

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

t muss also eine Wurzel der Gleichung

$$\text{tg}(pt + \delta) = \frac{p}{\varepsilon}$$

sein.

Setzen wir den entsprechenden Werth von t gleich t_m , dann haben wir

$$\sin(pt_m + \delta) = \frac{p}{n},$$

folglich ist

$$\theta_m = A \frac{p}{n} e^{-\varepsilon t_m}.$$

Der nächst folgende, grösste Ausschlag, unabhängig vom Vorzeichen desselben, wird

$$\theta_{m+1} = A \frac{p}{n} e^{-\varepsilon t_m} \cdot e^{-\varepsilon \frac{T}{2}}.$$

Daraus ergibt sich

$$A \frac{p}{n} e^{-\varepsilon t_m} = \frac{1}{2} \left[\theta_m + \theta_{m+1} e^{\varepsilon \frac{T}{2}} \right] \dots\dots\dots(160)$$

Es ist immer vortheilhafter, zwei nach einander folgende maximale Ausschläge in Betracht zu ziehen, um den Einfluss der etwaigen Verschiebung der Nulllinie möglichst zu eliminiren.

Für das Galvanometer erhalten wir aus der Bedingung

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

$$\text{tg}(p(t - \tau_1) + \delta) = \frac{p}{\varepsilon},$$

also

$$t'_m = t_m + \tau_1.$$

Daraus ergibt sich

$$\varphi_m = -A_1 \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_1}} e^{-\varepsilon(t_m + \tau_1)}$$

und

$$\varphi_{m+1} = -A_1 \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_1}} e^{-\varepsilon(t_m + \tau_1)} \cdot e^{-\varepsilon \frac{T}{2}},$$

also

$$-A_1 \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_1}} e^{-\varepsilon(t_m + \tau_1)} = \frac{1}{2} \left[\varphi_m + \varphi_{m+1} e^{\varepsilon \frac{T}{2}} \right] \dots\dots(161)$$

Nennen wir die gemessenen maximalen Ausschläge des Pendels und des Galvanometers (unabhängig vom Vorzeichen derselben) auf der erhaltenen

Curve resp. durch y_m und y'_m , so ergibt sich aus den Formeln (160) und (161) mit Rücksicht auf die Gleichungen (157) und (69)

$$k = -\frac{a'}{a} \cdot \frac{y'_m + y'_{m+1} e^{\frac{\epsilon}{2} \frac{T}{T'}}}{y_m + y_{m+1} \cdot e^{\frac{\epsilon}{2} \frac{T}{T'}}} \cdot e^{\epsilon \tau_1} \cdot \frac{\sqrt{R_1}}{n} \dots \dots \dots (162)$$

Auf diese Weise lässt sich die Constante k , deren Bedeutung durch die Formel (61) festgestellt ist, bestimmen.

Um diese Theorie experimentell zu prüfen, sind eine Anzahl von Curven erhalten worden, bei stetig wachsender Dämpfung des Pendels. Diese Curven sind in den Figuren (45) bis (51) dargestellt. Die inneren Curven entsprechen der Pendel — und die äusseren der Galvanometerbewegung.

Aus jeder Pendelcurve ist die Periode T des Pendels und aus der des Galvanometers die Periode T' desselben bestimmt worden.

Nach der Theorie muss

$$T = T'$$

sein.

Durch Ausmessung der Amplituden sind die Dämpfungsconstanten beider Curven ϵ und ϵ' nach den früher angegebenen Formeln bestimmt worden.

Nach der Theorie muss ebenfalls

$$\epsilon = \epsilon'$$

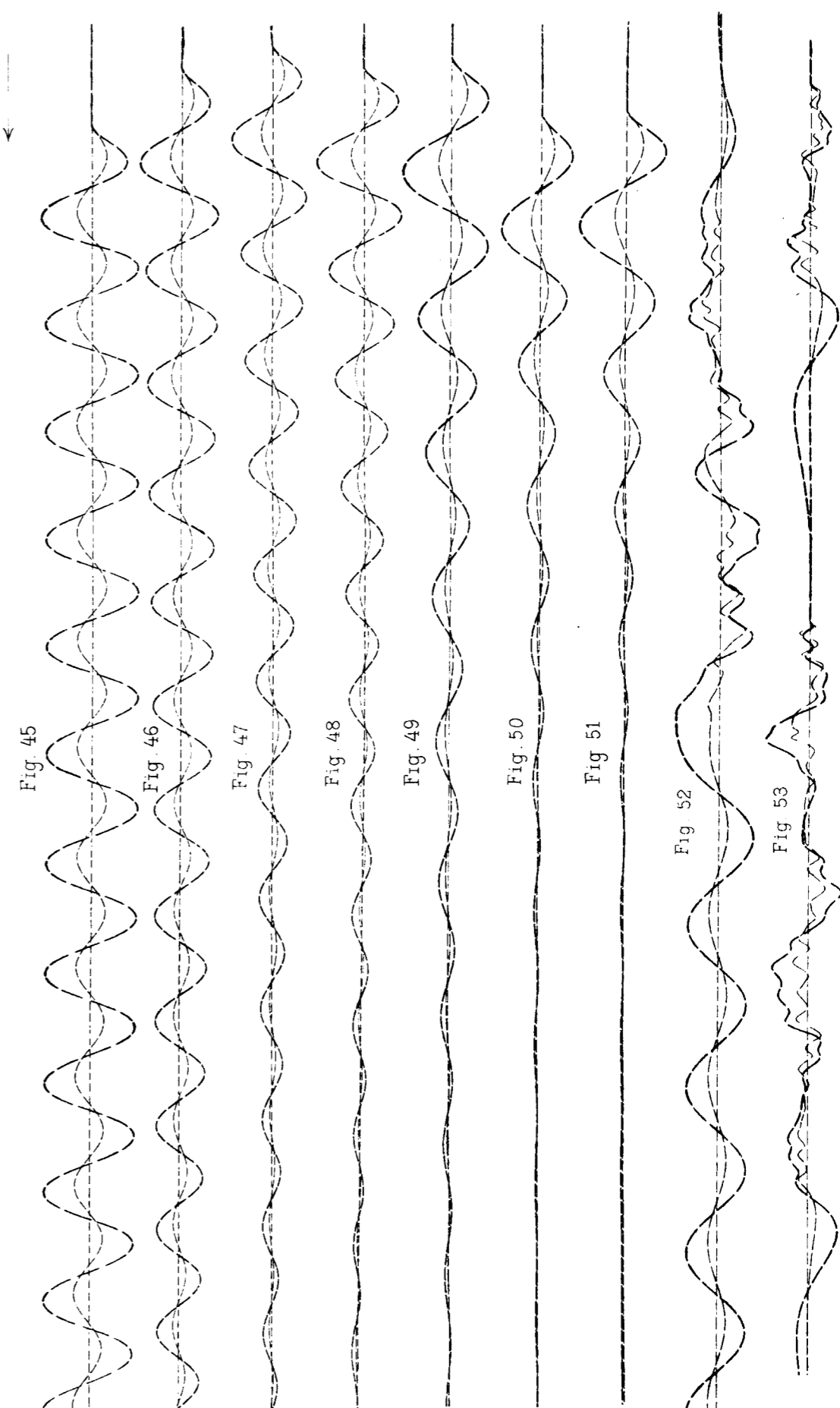
sein.

Was nun die Zeitverschiebung τ_1 anbelangt, so könnte dieselbe ebenfalls aus den Figuren entnommen und alsdann mit dem aus der Theorie nach den Formeln (72) und (70) sich ergebenden Werth derselben verglichen werden.

Bei dieser Bestimmung von τ_1 aus den Figuren musste man auch die relative Verschiebung beider Lichtpunkte, welche dem Pendel- und Galvanometerspiegel entsprachen, mitberücksichtigen. Diese Verschiebung war jedoch sehr klein und zwar gleich $0,64 \frac{m}{m}$.

Bei der Verwerthung der Curven mussten ebenfalls die Anfangstheile derselben ausser Acht gelassen und die Ausmessungen nur dann angefangen werden, wenn der Einfluss der Anfangsbedingungen der Bewegungen schon verschwindend klein geworden war. Nach wie viel Secunden diese Bedingung wirklich eintrat, werden wir im nächsten § sehen.

Je stärker die Dämpfung des Pendels ist, desto flacher verlaufen die Curven und desto schwerer ist es, die genauen Werthe von T , T' , ϵ , ϵ' und τ_1 aus den Curven zu bestimmen. Aus diesem Grunde sah ich mich ge-



nötigt, die Prüfung der Theorie an einem bestimmten Werth der Dämpfungscostante abzurechnen.

In der folgenden Tabelle XIII sind nun die verschiedenen Werthe von T , T' , ϵ , ϵ' , τ_1 (beobachtet) und τ_1 (berechnet) zusammengestellt.

Ausserdem enthält die zweite Colonne die Stromstärke i in dem dämpfenden Electromagnet des Horizontalpendels und die vorletzte Colonne die aus den Pendelcurven berechneten Werthe von n für das Horizontalpendel.

In der letzten Colonne sind die nach der Formel (162) berechneten Werthe von k zusammengestellt.

Tabelle XIII.

№ der Figur.	i	T Pendel.	T' Galvano- meter.	ϵ Pendel.	ϵ' Galvano- meter.	τ_1		n	k
						beobacht.	berechnet.		
45	0,0 Amp.	9,38	9,39	0,0006	0,0005	0,71	0,66	0,670	—2,9
46	0,13	9,36	9,37	0,006	0,006	0,74	0,67	0,671	—3,1
47	0,2	9,35	9,37	0,017	0,016	0,76	0,68	0,672	—3,2
48	0,3	9,38	9,40	0,024	0,024	0,81	0,69	0,670	—3,2
49	0,4	9,36	9,39	0,036	0,035	0,84	0,70	0,672	—3,2
50	0,5	9,35	9,46	0,060	0,056	0,88	0,73	0,675	—3,3
51	0,6	9,41	9,48	0,073	0,073	0,93	0,74	0,672	—3,3

λ variierte bei den einzelnen Curven zwischen 3,4 und 4,8 m/m.

Diese Tabelle zeigt ganz deutlich, dass die Perioden T und T' des Pendels und des Galvanometers im Allgemeinen sehr gut übereinstimmen. Für grössere Werthe von ϵ sind die Differenzen etwas grösser, aber nach dem früher Gesagten, war das eben zu erwarten. Im ungünstigsten Fall beträgt der Unterschied zwischen T und T' nur 0,11.

Die Werthe der Dämpfungscostante beider Curven ϵ und ϵ' stimmen ebenfalls sehr gut überein.

Was nun die beobachteten Werthe von τ_1 anbelangt, so wachsen dieselben fortwährend mit wachsendem ϵ , wie es auch die Theorie verlangt, aber die berechneten Werthe von τ_1 sind immer etwas kleiner, als die beobachteten, obgleich die Differenzen zwischen denselben immer doch sehr klein sind — im ungünstigsten Falle beträgt der Unterschied nur 0,19.

Die Uebereinstimmung muss also als eine ganz befriedigende bezeichnet werden, um so mehr, da die Differenzen zwischen den Werthen von τ_1 für verschiedene Theile derselben Curven bis zu 0,16 reichten.

Die nicht vollständige Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe von τ_1 könnte auch theilweise davon herrühren, dass die Constanten des Galvanometers ϵ_1 und n_1 nicht ganz genau bestimmt waren und ausserdem die relative Verschiebung der Lichtpunkte für beide Curven nicht vollständig richtig bestimmt wurde.

Die Werthe von n können innerhalb der Beobachtungsfehler als constant betrachtet werden. Es ergibt sich im Mittel

$$n = 0,672.$$

Die Werthe von k weisen ebenfalls eine genügende Constanz auf.

Es scheint jedoch, als ob k die Neigung hätte mit wachsendem ϵ selbst etwas grösser zu werden, was sehr wohl möglich ist, da man bei diesen Versuchen, wie früher erwähnt wurde, keinen Strom durch den zur Pendelspule gehörigen Electromagnet durchliess und nur von dem zurückgebliebenen Magnetismus Gebrauch machte. Fliessen aber in der Nähe dieses Electromagnets stärkere Ströme (i), so kann wohl die Stärke des magnetischen Feldes desselben etwas grösser werden, was eine Vergrösserung von k nach sich ziehen würde.

Ist ein solches Wachsen von k wirklich vorhanden, so ist es jedoch sehr gering. Der Mittelwerth von k ist gleich — 3,17.

Diese Beobachtungen bestätigen also, innerhalb der möglichen Beobachtungsfehler, in aller befriedigendster Weise die früher vorgeführte Theorie.

Wir sehen also, dass das Galvanometer vollständig den Charakter der Bewegung des Pendels wiedergiebt.

Was nun die Zeitverschiebung τ_1 betrifft, so könnte dieselbe eventuell auf sehr einfache Weise gleich Null gemacht werden; dadurch würde die Registrirung noch mehr an Einfachheit gewinnen.

Dazu ist nur nöthig die Eigenperiode des Pendels T , bei Abwesenheit der electromagnetischen Dämpfung, so abzuändern, dass

$$n = n_1 = 0,423$$

wird.

Daraus ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{0,423} = 14,9.$$

Ist die Periode des Pendels so eingerichtet, so muss die relative Verschiebung der Curven, abgesehen von der möglichen Verschiebung der Lichtpunkte, gleich Null sein.

Bis jetzt haben wir nur den Fall besprochen, wo die Bewegung des Pendels einer regelmässig verlaufenden Curve entspricht.

Die folgenden Figuren (52) und (53) geben den Fall wieder, wo die Bewegung des Pendels zum Theil eine ganz willkürliche ist (innere Curve). Wir sehen, dass auch in diesem Falle das Galvanometer ziemlich gut die Einzeinheiten dieser Bewegung wiedergiebt. Hätte man die Dämpfung des Galvanometers verstärkt, also ϵ_1 bedeutend grösser als n_1 gemacht, so würde man ohne Zweifel noch viel bessere Resultate erzielt haben.

Diese Versuche zeigen also ganz deutlich wie bequem ein aperiodisches Galvanometer sich zum Registrirzwecke eignet, wobei die Empfindlichkeit der Registrirung in aller einfachster Weise, durch Vermehrung der Stromstärke im entsprechenden Electromagnet, in beliebigem Maasse gesteigert werden kann.

§ 18.

Einfluss der Anfangsbedingungen der Bewegung auf die Form der Galvanometercurve.

Ich habe schon im vorigen § bemerkt, dass die Verwerthung der Curven nur von demjenigen Punkt anfangen konnte, wo der Einfluss der Anfangsbedingungen der Bewegung schon verschwindend klein geworden ist.

Wollen wir jetzt näher untersuchen, wie diese Anfangsbedingungen sich geltend machen.

Die entsprechenden Formeln sind im § 8 angegeben.

Für den vorliegenden Fall haben wir die Formel (94) in Anwendung zu bringen.

Es ist nämlich ¹⁾

$$\psi = -\frac{A_1}{\sqrt{R_1}} e^{-\epsilon_1 t} [\sin \Delta_1 + \{(\epsilon_1 - \epsilon) \sin \Delta_1 - p \cos \Delta_1\} t], \quad (\text{Formel (94)})$$

wo ψ die Grösse derjenigen Glieder in dem allgemeinen Ausdruck für φ darstellen, welche von den Anfangsbedingungen der Bewegung unmittelbar abhängen.

Bezeichnen wir den entsprechenden Ausschlag auf der Registrirtrommel durch z , so ist

$$z = \frac{1}{a'} \psi. \quad 2)$$

1) Siehe auch die Gleichung (90).

2) Siehe die zweite der Formeln (157).

Ich habe die Rechnungen für die Curven auf der Figur (45) durchgeführt und dabei folgende Werthe für z gefunden.

Tabelle XIV.

t	z
0 ^s	+ 6,69 ^m / _m
1,139	0
5	— 2,73
10	— 0,76
15	— 0,14
20	— 0,023
31	— 0,0004

Wir sehen also, dass nach Verlauf von 20 Secunden der Einfluss der Anfangsbedingungen schon als verschwindend klein angesehen werden darf.

Für die Curven auf der Figur (50) ergeben sich folgende Werthe.

Tabelle XV.

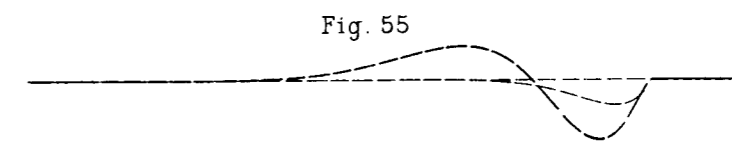
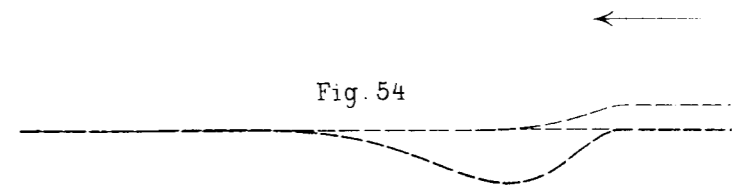
t	z
10 ^s	— 0,99 ^m / _m
15	— 0,19
18	— 0,064

Hätte man die Dämpfung des Galvanometers, also ϵ_1 , noch mehr verstärkt, so würde z bei noch kleineren Werthen von t sich ungeltend machen.

Für die anderen Curven sind diese Rechnungen nicht durchgeführt worden, da man für t , d. h. für den Anfangspunkt der Ausmessung der Curven ähnliche Werthe bekommen würde.

Bei den vorher beschriebenen Beobachtungen war die Bewegung des Pendels immer eine periodische, obgleich die Dämpfung der Bewegung bei grösseren Werthen der Stromstärke i eine recht bedeutende war.

Für noch grössere Werthe von i geht die Bewegung des Pendels in eine aperiodische über.



Die Grenze der Aperiodicität tritt ein bei einer Stromstärke i von 4,8 Amp. In diesem Fall ist

$$\varepsilon = n$$

zu setzen.

Es sind auch in diesem Falle Beobachtungen über die Registrierung der Pendelbewegung mit Hilfe des aperiodischen Galvanometers ausgeführt worden.

Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall A. (Fig. 54.)

Das Pendel wurde um y_0 von seiner Ruhelage abgelenkt und alsdann sich selbst überlassen, wobei $y_0 = 5,95^m/m$ war.

In diesem Fall wächst der absolute Werth der Ordinate y' der Galvanometercurve von 0 an, erreicht ein Maximum, um dann allmählig auf Null herabzusinken.

Fall B. (Fig. 55.)

Das Pendel befindet sich in seiner Ruhelage und erhält alsdann einen Anstoss.

Der absolute Werth von y wächst von 0 an, erreicht ein Maximum y_m (in unserem Fall war $y_m = 5,98^m/m$) und sinkt alsdann allmählig auf Null herab.

Was nun den absoluten Werth der Ordinate y' der Galvanometercurve anbelangt, so ist y' am Anfang 0. Alsdann fängt y' an zu wachsen, erreicht einen Grenzwert, geht darauf durch Null hindurch, erreicht einen zweiten Grenzwert, um dann allmählig auf Null herabzusinken.

Dieser eigenthümliche Gang der Galvanometercurve steht in vollem Einklang mit der früher vorgeführten Theorie.

Was nun den Einfluss der Anfangsbedingungen der Bewegung anbelangt, so gelten sie noch etwa bis $t = 25^s$, wie es aus den folgenden beiden Tabellen ersichtlich ist. Aber nach 25 Secunden hört eigentlich die Bewegung des Pendels selbst auf, folglich eignen sich diese Beobachtungen nicht zur Prüfung der im § 6 gegebenen Formel (75). Zu diesem Zwecke müsste die Dämpfungsconstante des Galvanometers ε_1 viel grösser gewählt werden.

Der Einfluss der Anfangsbedingungen lässt sich in unserem Falle leicht aus den Formeln (118) und (120) berechnen und zwar unter Berücksichtigung der Gleichungen (157).

Es ist nämlich:

Im Fall A

$$z = \frac{a}{a'} \cdot k y_0 \left(\frac{n}{n_1 - n} \right)^2 e^{-n_1 t} \left[t + \frac{2}{n_1 - n} \right].$$

Im Falle B dagegen ist

$$z = \frac{a}{a'} \cdot k y_m \frac{ne}{(n_1 - n)^2} \cdot e^{-n_1 t} \left[n_1 t + \frac{n_1 + n}{n_1 - n} \right].$$

Die nach diesen Formeln berechneten Werthe von z sind in den folgenden zwei Tabellen zusammengestellt.

Fall A.

Tabelle XVI.

t	z
0 ^s	+ 1109 ^m / _m
5	+ 50,5
8,03	0
10	— 3,96
15	— 1,69
20	— 0,35
25	— 0,060
30	— 0,009

Fall B.

Tabelle XVII.

t	z
0 ^s	+ 2470 ^m / _m
5	+ 154,7
10	+ 1,38
10,40	0
15	— 1,92
20	— 0,48
25	— 0,089
30	— 0,014

Wir sehen also aus beiden Tabellen, dass man erst nach Verlauf von etwa 25^s den Einfluss der Anfangsbedingungen der Bewegung ausser Acht lassen kann.

Zum Schluss wollen wir die diesen beiden Fällen zugleich entsprechenden Werthe von τ_1 und \mathfrak{A}_1 berechnen. (Man sehe die Formeln (76), (77) und (78)).

In unserem Falle, wo $\varepsilon = n$ und $\varepsilon_1 = n_1$ ist, muss man von den vereinfachten Formeln (113) und (115) Gebrauch machen.

Führt man die Rechnungen aus, so ergibt sich

$$\tau_1 = - 6,54$$

$$\mathfrak{A}_1 = - 2792.$$

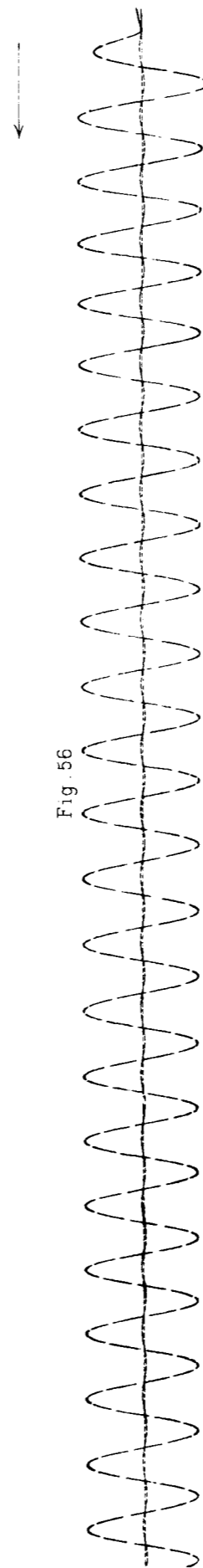


Fig. 56

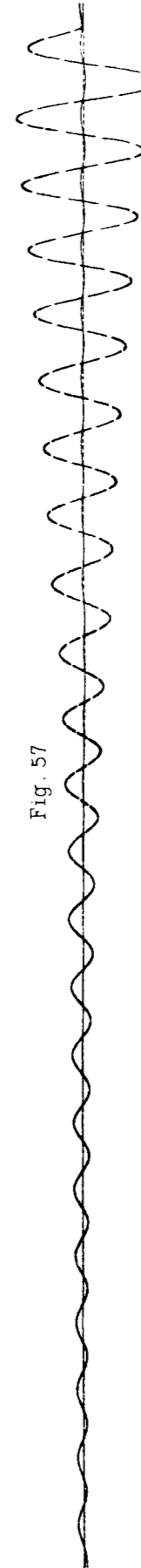


Fig. 57

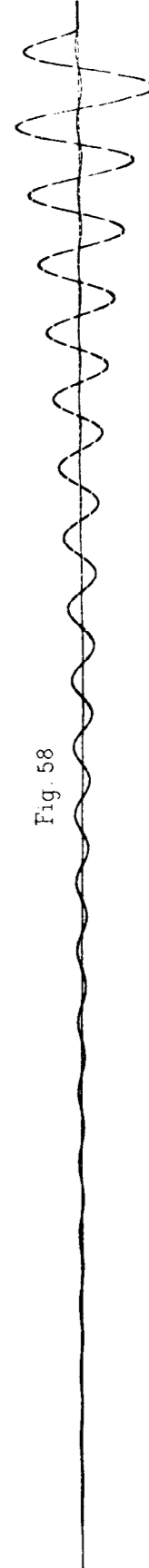


Fig. 58

§ 19.

Ueber die Empfindlichkeit der Registrirung mit Hilfe eines aperiodischen Galvanometers.

Bei den in § 17 beschriebenen Versuchen war die Empfindlichkeit der Registrirung so regulirt, dass die Ausschläge des Galvanometers etwa nur 3,2 Mal so gross wie die Ausschläge des Horizontalpendels waren. Dabei war nur vom zurückgebliebenen Magnetismus im Electromagnet Gebrauch gemacht. Will man aber die Empfindlichkeit vermehren, so hat man nur einen entsprechend starken Strom durch den Electromagnet durchzulassen.

Die folgenden drei Figuren (56), (57) und (58) beziehen sich nun auf den Fall, wo die Empfindlichkeit der Registrirung gross gemacht worden ist, dabei ist die Dämpfung der Pendelbewegung in allen drei Fällen verschieden.

Wir sehen aus diesen Figuren, dass die Ausschläge des Galvanometers bedeutend grösser, als diejenigen des Pendels sind. Ausserdem erkennen wir, dass, wenn die sichtbare Bewegung des Pendels ganz verschwunden ist und dasselbe in aller Ruhe zu verbleiben scheint, das Galvanometer noch ganz deutlich die Fortdauer der Bewegung des Pendels zeigt.

Wir können also aus diesen Versuchen den Schluss ziehen, dass die oben beschriebene Vorrichtung sich besonders gut zur Erforschung microseismometrischer Bewegungen eignet.

§ 20.

Beobachtungen mit einem Zöllner'schen Horizontalpendel.

Das bis jetzt benutzte Horizontalpendel war nach Art derjenigen von Bosch in Strassburg construirt. Es besass einen doppelten Aufhängedraht und drückte mit der Spitze des Hebelarmes in eine kleine Höhlung ein. Ein solches Pendel functionirt nur gut, wenn die Spitze nicht stumpf ist; es bietet aber den grossen Vorzug, dass alle Längsbewegungen, in der Richtung des Pendelarms, vollständig ausgeschlossen sind.

Empfindlicher, als diese Pendel, sind unzweifelhaft die Zöllner'schen, welche zwei Aufhängedrähte besitzen und bei welchen die oben erwähnte Spitze ganz fortfällt, was die Reibung des Apparates in bedeutender Weise

vermindert. Bei diesen Pendeln können aber Längsbewegungen vorkommen, welche bei der Verwerthung von Seismogrammen störend wirken können.

Um mich zu überzeugen, wie störend diese Längsbewegungen wirken, war ein solches Zöllner'sches, vom Mechaniker Schultze in Juriew (Dorpat) verfertigtes Horizontalpendel auf der Plattform aufgestellt und dieselbe als dann in Bewegung versetzt. Die Beobachtungen geschahen in ganz ähnlicher Weise, wie sie in den §§ 10 und 14 beschrieben sind.

Die Figuren (59) und (60) entsprechen dem Falle, wo die Eigenbewegung des Pendels eine periodische und die Figur (61) demjenigen, wo das Pendel durch eine genügend starke electromagnetische Dämpfung in ein aperiodisches Instrument verwandelt war. Die innere Curve in allen drei Fällen entspricht der Plattformbewegung.

Wir sehen aus den ersten beiden Figuren, dass die Pendelcurven zuweilen sehr grosse Zackungen aufweisen, welche eben von diesen oben erwähnten Seitenbewegungen des Pendels herrühren. Diese Zackungen entsprechen keinen Störungen in der Bewegung der Plattform, welche Bewegung, wie die Figuren es zeigen, immer ganz regelmässig verläuft, sondern haben ihre Ursache in den constructiven Eigenschaften des Pendels selbst.

Diese Zackungen können zuweilen recht störend wirken. Hätte man nämlich ein Seismogramm mit solchen Zackungen aus den Beobachtungen bekommen, so wäre man selbstverständlich geneigt, diese Störungen auf entsprechende Erschütterungen der Erdoberfläche zurückzuführen. Dieses könnte jedoch zuweilen zu ganz irrthümlichen Resultaten führen, da, wie wir sehen, das Pendel auch bei ganz regelmässiger Bewegung der Unterlage recht complicirte, gezackte Curven aufschreibt.

Ist das Pendel aperiodisch gemacht (Fig. (61)), so ist der störende Einfluss dieser Seitenbewegung im hohen Maasse vermindert, aber die Zackungen lassen sich auch in diesem Fall an der entsprechenden Pendelcurve gut erkennen.

Zum Schluss sei noch der folgenden Beobachtung Erwähnung gethan.

Das Horizontalpendel wurde auf der Plattform um 90° gedreht, so dass der Pendelarm mit der Richtung der Plattformbewegung zusammenfiel. Setzte man alsdann die Plattform in Bewegung, so beschrieb das Pendel eine wellenförmige Curve mit sehr kurzer Periode.

Die entsprechende Curve ist auf der Figur (62) wiedergegeben. Die äussere Curve entspricht in diesem Fall der Plattformbewegung und die innere der Bewegung des Pendels.

Fig. 59.

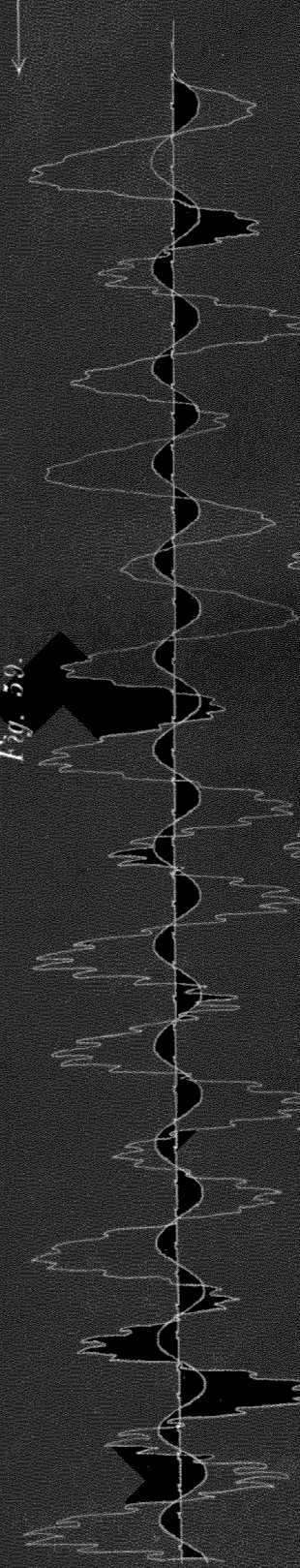


Fig. 60.

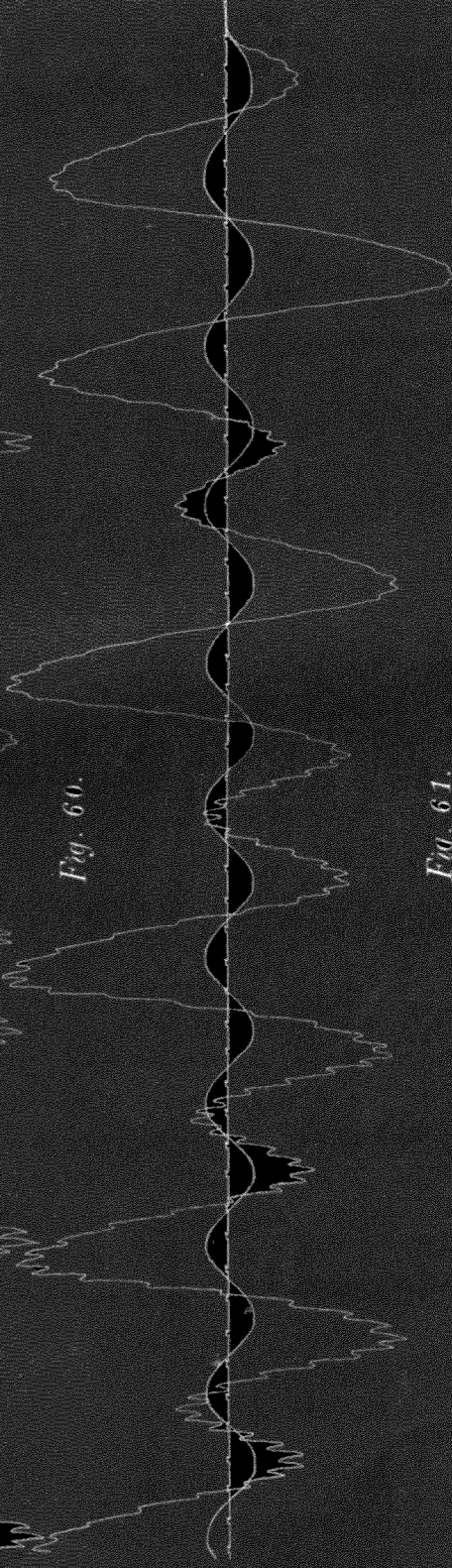


Fig. 61.

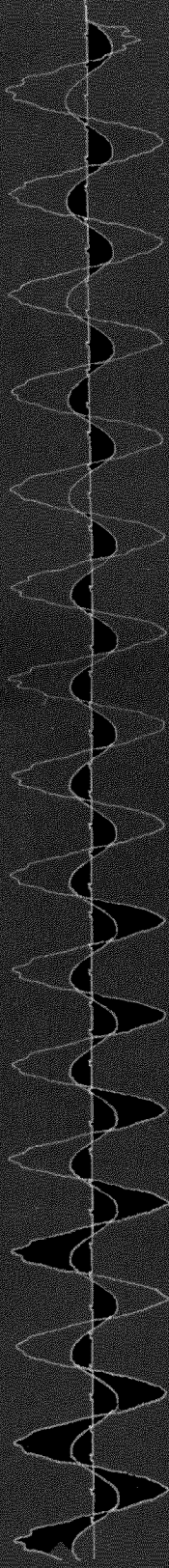


Fig. 62.



Wir sehen also, dass die Seitenbewegungen eines Zöllner'schen Horizontalpendels zuweilen sehr störend wirken und zu ganz irrthümlichen Resultaten führen können, folglich sind, meiner Ansicht nach, solche Apparate für genaue Beobachtungen wenig zu empfehlen.

§ 21.

Schlussfolgerungen.

Das Hauptergebniss dieser ganzen Untersuchung besteht eben darin, dass es sich als sehr zweckmässig erweist, die zur Erforschung von Erdbeben dienenden seismometrischen Apparate mit einer starken electromagnetischen Dämpfung zu versehen und zwar die periodische Eigenbewegung derselben in eine aperiodische umzuwandeln.

Bei einem aperiodischen Horizontalpendel giebt die Bewegung desselben in zwei Hauptfällen, nämlich die einer periodischen Bewegung mit abnehmenden Amplituden und einer aperiodischen, genau den Charakter der Bewegung der Unterlage wieder, was bei einem periodischen Instrument gar nicht mehr zutrifft. Aber auch bei einer ganz willkürlichen Bewegung der Unterlage, nähert sich die entsprechende Pendelcurve sehr dem Charakter der Bewegung der Unterlage. Je stärker die Dämpfung ist, desto kleiner wird der Einfluss der Eigenbewegung des Apparates selbst sein, ausserdem ist dann die Bewegung des Pendels für nicht zu kleine Werthe der Zeit t völlig unabhängig von den Anfangsbedingungen der Bewegung.

Da eine starke Dämpfung die Amplituden der Ausschläge eines Horizontalpendels, resp. irgend welches anderen seismometrischen Instrumentes, verkleinert, so empfiehlt es sich, zur Vergrösserung der Empfindlichkeit der Registrirung, eines aperiodischen Galvanometers zu bedienen. In den früher erwähnten zwei Hauptfällen giebt das Galvanometer genau den Charakter der Bewegung des Pendels wieder, aber auch bei einem ganz willkürlichen Bewegungsgesetz desselben entspricht die vom Galvanometer gezeichnete Curve, besonders wenn die Dämpfung des Galvanometers sehr stark ist, sehr nah dem Charakter der Bewegung des Pendels selbst. Ausserdem ist in diesem Fall die Bewegung des Galvanometers für nicht zu kleine Werthe von t ebenfalls völlig unabhängig von den Anfangsbedingungen der Bewegung.

Da man die Empfindlichkeit der Registrirung in äusserst einfacher Weise, durch Vermehrung der Stromstärke im Electromagnet, vermehren

kann, so eignet sich diese Vorrichtung besonders gut zur Erforschung micro-seismometrischer Bewegungen.

Zum Schluss möchte ich den Wunsch aussprechen, dass die in dieser Abhandlung beschriebenen Vorrichtungen, die recht einfach und verhältnissmässig billig sind, auf irgend welcher seismometrischen Station eingeführt werden mögen, um aus der Praxis wirklicher seismometrischer Beobachtungen schliessen zu können, in wie weit die hier vorgeschlagene Beobachtungsmethode den Aufgaben der Seismometrie Dienste leisten kann.

Nachtrag.

Ueber die Abhängigkeit der Ausschläge eines aperiodischen Instruments vom Werthe der Dämpfungsconstante.

Genügt der Ausschlag von der Ruhelage θ irgend eines aperiodischen Instrumentes der Differentialgleichung

$$\theta'' + 2\epsilon\theta' + n^2\theta = 0,$$

wo $\epsilon > n$ ist, so lässt sich bekanntlich das allgemeine Integral dieser Gleichung in folgender Form schreiben

$$\theta = A_1 e^{-\mu_1 t} + A_2 e^{-\mu_2 t},$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \epsilon + \alpha \\ \mu_2 &= \epsilon - \alpha \\ \text{und} \\ \alpha &= \sqrt{\epsilon^2 - n^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (163)$$

ist.

Bei dieser Untersuchung wollen wir zwei Fälle unterscheiden.

Fall A. Für $t = 0$ sei $\theta = \theta_0$, $\theta' = 0$; dann ist, wenn $\frac{\theta}{\theta_0} = u$ gesetzt wird, ¹⁾

$$u = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [\mu_1 e^{-\mu_2 t} - \mu_2 e^{-\mu_1 t}]. \dots \dots \dots (164)$$

Fall B. Für $t = 0$ sei $\theta = 0$, $\theta' = \omega_0$; dann ist, wenn $\frac{\theta}{\omega_0} = v$ gesetzt wird, ²⁾

$$v = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t}]. \dots \dots \dots (165)$$

Für ein gegebenes Instrument nehmen wir n als constant an, und wollen wir nun die Abhängigkeit der Functionen u und v vom Werthe der Dämpfungsconstante ϵ etwas näher verfolgen.

1) Siehe die Formel (10).
2) Siehe die Formel (11).

Fall A.

Wollen wir zuerst nach der Formel (164), unter Berücksichtigung der Beziehungen (163), den Differentialquotienten $\frac{du}{d\varepsilon}$ bilden.

Wir haben

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\varepsilon} &= \frac{\varepsilon}{\alpha} \\ \frac{d\mu_1}{d\varepsilon} &= 1 + \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\mu_1}{\alpha} \\ \frac{d\mu_2}{d\varepsilon} &= 1 - \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\frac{\mu_2}{\alpha} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (166)$$

also

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\varepsilon}{\alpha^3} \{ \mu_1 e^{-\mu_2 t} - \mu_2 e^{-\mu_1 t} \} + \frac{1}{\alpha^2} \{ \mu_1 e^{-\mu_2 t} + \mu_2 e^{-\mu_1 t} \} + \frac{t}{\alpha^2} \mu_1 \mu_2 \{ e^{-\mu_2 t} + e^{-\mu_1 t} \} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{\alpha^3} [e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t} + \alpha t \{ e^{-\mu_1 t} + e^{-\mu_2 t} \}]. \end{aligned}$$

Setzen wir der Einfachheit wegen $\alpha t = \xi$, dann folgt

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{n^2 t^3}{\xi^2} e^{-\xi t} \left[e^{\xi} + e^{-\xi} - \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{\xi} \right].$$

Nun haben wir

$$\left. \begin{aligned} e^{\xi} &= 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^4}{4!} + \dots \\ e^{-\xi} &= 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2!} - \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^4}{4!} - \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (167)$$

folglich wird

$$\frac{du}{d\varepsilon} = n^2 t^3 e^{-\xi t} \left[\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) \xi^2 + \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} \right) \xi^4 + \dots \right].$$

Wir sehen also, dass $\frac{du}{d\varepsilon}$ immer positiv wird.

Nun kann ε nur zwischen den Grenzen n und ∞ variiren, folglich entspricht, für einen gegebenen, endlichen Zeitmoment t , der kleinste Werth von u dem Fall $\varepsilon = n$ und der grösste $\varepsilon = \infty$.

Ist nun $\varepsilon = n$, also $\alpha = 0$, so wird

$$\mu_1 - \mu_2 = n \text{ und } \xi = 0.$$

Dann ergibt sich nach der Formel (93)

$$u_{\min.} = e^{-nt} [1 + nt] \dots \dots \dots (168)$$

und ausserdem ist

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \frac{n^2 t^3}{3} e^{-nt} \dots \dots \dots (169)$$

Wollen wir nun $u_{\max.}$ aufsuchen.

Ist ε sehr gross, so wird $\frac{n}{\varepsilon}$ sehr klein sein.

Setzen wir

$$\frac{n}{\varepsilon} = \zeta,$$

dann wird

$$\alpha = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \zeta^2 \right)$$

$$\mu_1 = \varepsilon \left(2 - \frac{1}{2} \zeta^2 \right)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} \varepsilon \zeta^2$$

und

$$u = \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left[\left(2\varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon \zeta^2 \right) e^{-\frac{1}{2} \varepsilon \zeta^2 t} - \frac{1}{2} \varepsilon \zeta^2 e^{\frac{1}{2} \varepsilon \zeta^2 t} \cdot e^{-2\varepsilon t} \right].$$

Für sehr grosse Werthe von ε wird das zweite in den eckigen Klammern stehende Glied verschwinden, und da

$$\varepsilon \zeta^2 = \frac{n^2}{\varepsilon}$$

eine sehr kleine Grösse ist, so können wir einfach schreiben

$$u = \left(1 + \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left(1 - \frac{1}{4} \zeta^2 \right) \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \zeta^2 t \right),$$

oder, bei Beibehaltung nur derjenigen Glieder, welche ε in der ersten Potenz im Nenner enthalten,

$$u = 1 - \frac{1}{2} \frac{n^2 t}{\varepsilon} \dots \dots \dots (170)$$

und

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{n^2 t}{\varepsilon^2} \dots \dots \dots (171)$$

Im Grenzfalle $\varepsilon = \infty$ wird einfach

$$u_{\max.} = 1$$

und

$$\frac{du}{d\varepsilon} = 0.$$

Wir sehen also, dass u , folglich $\frac{\theta}{\theta_0}$ immer kleiner als die Einheit ist und nur im Grenzfall $u = 1$ sein wird.

Dieses Resultat ist so zu deuten, dass ein von seiner Ruhelage abgelenktes Instrument mit einer unendlich grossen Dämpfung, wenn es sich selbst überlassen wird, fortwährend in derselben abgelenkten Lage bestehen bleibt.

Fall B.

Das Maximum der Function v für ein gegebenes ϵ haben wir schon früher untersucht und dabei gefunden, dass dieses Maximum dann eintritt, wenn

$$t = t_m = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \log_e \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad \text{(Formel (100))}$$

wird.

Für das entsprechende Maximum v_m ergibt sich nach der Formel (101)

$$v_m = \left[\frac{\mu_2 \mu_2}{\mu_1 \mu_1} \right]^{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}}$$

Wollen wir nun t_m und v_m in ihrer Abhängigkeit von ϵ näher untersuchen. Aus der Formel (100) ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (166)

$$\frac{dt_m}{d\epsilon} = \frac{1}{\alpha^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\alpha} \lg \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \dots \dots \dots (172)$$

Setzen wir jetzt der Einfachheit wegen

$$\frac{\alpha}{\epsilon} = \xi \dots \dots \dots (173)$$

Für $\epsilon = n$ wird $\xi = 0$ und für $\epsilon = \infty$ wird $\xi = 1$.

Es ergibt sich nun

$$\frac{dt_m}{d\xi} = \frac{1}{\xi^2 \epsilon^2} \left[1 - \frac{1}{2\xi} \lg \frac{1+\xi}{1-\xi} \right]$$

Da aber für $0 \leq \xi < 1$

$$\left. \begin{aligned} \lg(1+\xi) &= \xi - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} + \dots \\ \text{und} \\ \lg(1-\xi) &= -\xi - \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} - \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (174)$$

ist, so folgt

$$\frac{dt_m}{d\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{\xi^2}{5} + \frac{\xi^4}{7} + \dots \right]$$

Wir sehen also, dass $\frac{dt_m}{d\epsilon}$ immer negativ ist, folglich entspricht der grösste Werth von t_m $\epsilon = n$ und der kleinste $\epsilon = \infty$.

Ist nun $\epsilon = n$ (also $\xi = 0$), so ergibt sich, wie wir es aus der Formel (104) schon wissen,

$$(t_m)_{\max.} = \frac{1}{n},$$

ausserdem wird

$$\frac{dt_m}{d\epsilon} = -\frac{1}{3n^2} \dots \dots \dots (175)$$

Was nun den anderen Grenzfall anbelangt, so wird, wenn ϵ sehr gross ist und

$$\frac{n}{\epsilon} = \zeta$$

gesetzt wird, nach der Formel (100),

$$t_m = \frac{1}{2\epsilon} \left(1 + \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left[\lg 2 + \lg \frac{1 - \frac{1}{4} \zeta^2}{\frac{1}{2} \zeta^2} \right],$$

oder, bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung,

$$t_m = \frac{1}{2\epsilon} \lg 2 - \frac{1}{2\epsilon} \cdot \lg \frac{\zeta^2}{2}$$

Für $\epsilon = \infty$ nimmt $\frac{1}{2\epsilon} \lg \frac{\zeta^2}{2}$ eine unbestimmte Form an. Der wahre Werth desselben wird

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\zeta} \left[\lg \frac{\zeta^2}{2} \right] = -\frac{1}{\zeta}$$

Folglich wird für ϵ sehr gross

$$t_m = \left[1 + \frac{1}{2} \log_e 2 \right] \frac{1}{\epsilon} = 1,3466 \cdot \frac{1}{\epsilon} \dots \dots \dots (176)$$

und

$$\frac{dt_m}{d\epsilon} = -\frac{1}{2} \log_e 2 \cdot \frac{1}{\epsilon^2} = -0,3466 \frac{1}{\epsilon^2} \dots \dots \dots (177)$$

Wollen wir uns jetzt zu v_m wenden.

Aus der oben angegebenen Formel für v_m ergibt sich

$$\lg v_m = \frac{1}{2\alpha} [\mu_2 \lg \mu_2 - \mu_1 \lg \mu_1],$$

folglich wird, mit Rücksicht auf die Beziehungen (166),

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_m} \cdot \frac{dv_m}{d\epsilon} &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\epsilon}{\alpha^3} \lg \frac{\mu_2 \mu_2}{\mu_1 \mu_1} - \frac{1}{\alpha^2} (\mu_2 \lg \mu_2 + \mu_1 \lg \mu_1) - \frac{1}{\alpha^2} (\mu_1 + \mu_2) \right] \\ &= -\frac{1}{2\alpha^3} \left[\lg \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\mu_1 \mu_2} + 2\epsilon \alpha \right], \end{aligned}$$

oder

$$\frac{dv_m}{d\epsilon} = -\frac{1}{2\alpha^3} \left[\mu_1 \mu_2 \lg \frac{\mu_2}{\mu_1} + 2\epsilon \alpha \right] \cdot v_m \dots \dots \dots (178)$$

Setzen wir wiederum $\frac{\alpha}{\epsilon} = \zeta$, dann wird

$$v_m = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{(1-\xi)^{\frac{1-\xi}{2\xi}}}{(1+\xi)^{\frac{1+\xi}{2\xi}}} \dots \dots \dots (179)$$

und

$$\frac{dv_m}{d\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon^3\xi^3} \left[\varepsilon^2(1-\xi^2) \lg \frac{1-\xi}{1+\xi} + 2\varepsilon^2\xi \right] v_m,$$

oder nach den Gleichungen (174), für $0 \leq \xi < 1$,

$$\frac{dv_m}{d\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\xi^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)\xi^4 + \dots \right] v_m. \dots (180)$$

Da $0 \leq \xi < 1$ wird, so ist v_m immer positiv, folglich wird $\frac{dv_m}{d\varepsilon}$ immer negativ, d. h. v_m , folglich auch der Maximalausschlag θ_m , nimmt fortwährend mit wachsender Dämpfung ab.

Der grösste Werth von v_m entspricht $\varepsilon = n$, also $\xi = 0$.

Aus der Formel (179) ergibt sich für diesen Fall nach den üblichen Rechenmethoden

$$(v_m)_{\max.} = \frac{1}{n e}, \dots (181)$$

und aus der Gleichung (180)

$$\frac{dv_m}{d\varepsilon} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^2 e}. \dots (182)$$

Wollen wir jetzt zu dem anderen Grenzfall übergehen und ε sehr gross voraussetzen.

Sei wiederum

$$\frac{n}{\varepsilon} = \zeta,$$

und setzen wir ausserdem noch

$$\frac{1}{2} \zeta^2 = \omega,$$

dann wird nach der Gleichung für v_m

$$v_m = \frac{\omega^{\frac{\omega}{2(1-\omega)}}}{(2-\omega)^{\frac{2(1-\omega)}{2(1-\omega)}}} \cdot \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wenn ε sehr gross, also ω sehr klein ist, wird bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$v_m = \frac{1}{2\varepsilon}. \dots (183)$$

1) Diese Gleichung könnten wir nach der Formel (105) auch direct hinschreiben.

Aus der Gleichung (178) folgt nun auch, bei derselben Substitution,

$$\frac{dv_m}{d\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon(1-3\omega)} \left[\omega(2-\omega) \lg \frac{\omega}{2-\omega} + 2(1-\omega) \right] v_m,$$

oder für sehr kleine Werthe von ω

$$\frac{dv_m}{d\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon^2}. \dots (184)$$

Diese Gleichung könnten wir auch sonst aus der Gleichung (183) direct hinschreiben.

Im Grenzfall wo $\varepsilon = \infty$ ist, wird

$$v_m = 0$$

und ebenfalls

$$\frac{dv_m}{d\varepsilon} = 0.$$

Wir haben also den Gang der Function u und v in ihrer Abhängigkeit von ε untersucht und wollen wir nun zum Schluss die erhaltenen Resultate nochmals tabellarisch zusammenstellen.

Fall A.

$$\frac{\theta}{\theta_0} = u$$

$$u = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [\mu_1 e^{-\mu_2 t} - \mu_2 e^{-\mu_1 t}].$$

Für ein beliebiges t

$$\frac{du}{d\varepsilon} > 0.$$

$$\varepsilon = n \quad u_{\min.} = e^{-nt} [1 + nt] \quad \frac{du}{d\varepsilon} = \frac{1}{3} \cdot n^2 t^3 e^{-nt}$$

$$\varepsilon \text{ sehr gross} \quad u = 1 - \frac{1}{2} \frac{n^2 t}{\varepsilon} \quad \frac{du}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{n^2 t}{\varepsilon^2}.$$

Fall B.

$$\frac{\theta}{\omega_0} = v$$

$$v = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t}].$$

Für

$$t = t_m = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \lg \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

ist v Maximum.

$$v_m = \left[\frac{\mu_2^{\mu_2}}{\mu_1^{\mu_1}} \right]^{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}}$$

$$\frac{dt_m}{d\varepsilon} < 0$$

$\varepsilon = n$

$$(t_m)_{\max.} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{dt_m}{d\varepsilon} = -\frac{1}{3n^2}$$

ε sehr gross

$$t_m = \left[1 + \frac{1}{2} \log_e 2 \right] \frac{1}{\varepsilon} = 1,3466 \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{dt_m}{d\varepsilon} = -\frac{1}{2} \log_e 2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = -0,3466 \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{dv_m}{d\varepsilon} < 0$$

$\varepsilon = n$

$$(v_m)_{\max.} = \frac{1}{ne}$$

$$\frac{dv_m}{d\varepsilon} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^2 e}$$

ε sehr gross

$$v_m = \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\frac{dv_m}{d\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon^2}$$

