Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Mathilde Manuela Nigul

Valdivia tugevdus Nikodými tõkestatuseteoreemile

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Märt Põldvere

Tartu 2024

VALDIVIA TUGEVDUS NIKODÝMI TÕKESTATUSETEOREEMILE

Bakalaureusetöö

Mathilde Manuela Nigul

Lühikokkuvõte. Klassikaline Nikodými tõkestatuseteoreem ütleb, et kui σ-algebral määratud tõkestatud aditiivsete arv-väärtuseliste hulgafunktsioonide hulk on sellel σ-algebral hulgaviisi tõkestatud, siis see hulgafunktsioonide hulk on tõkestatud täisvariatsiooninormi järgi. Aastal 1979 tõestas Valdivia sellele teoreemile järgmise tugevduse: kui σ-algebra on esitatud tema alamkogumite mittekahaneva loenduva ühendina, siis vähemalt ühel (ja seega lõpmatul hulgal) nendest alamkogumitest on sama omadus, mis σ-algebral Nikodými tõkestatuseteoreemist (s.t. iga antud σ-algebral määratud tõkestatud aditiivsete arv-väärtuseliste hulgafunktsioonide hulk, mis on sellel alamkogumil hulgaviisi tõkestatud, on tõkestatud täisvariatsiooninormi järgi). Selles bakalaureusetöös esitatakse nimetatud Valdivia teoreemi üksikasjaline tõestus.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier' analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: Nikodými tõkestatuseteoreem, tünniruum.

VALDIVIA'S STRENGTHENING OF THE NIKODÝM BOUNDEDNESS THEOREM

Bachelor's thesis

Mathilde Manuela Nigul

Abstract. The classical Nikodým boundedness theorem asserts that whenever a family of bounded additive scalar valued set functions on a σ-algebra is setwise bounded on that σ-algebra, this family is uniformly bounded (in the sense that this family is bounded with respect to the total variation norm). In 1979, Valdivia proved the following strengthening of this theorem: whenever a σ-algebra is represented as a non-decreasing union of its subcollections, at least one (and thus an infinite number) of these subcollections has the same property as the σ-algebra in the Nikodým boundedness theorem (i.e., whenever a family of bounded additive scalar valued set functions on the given σ-algebra is setwise bounded on this subcollection, this family is uniformly bounded). In this bachelor's thesis, the proof of this theorem of Valdivia is presented in detail.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.
Key Words: Nikodým boundedness theorem, barrelled space.

Sisukord

Sissejuhatus

Olgu Ω mittetühi hulk ning olgu $\mathcal{A}$ hulga Ω alamhulkade algebra. Meenutame klassikalist Nikodými tõkestatuseteoreemi (millele kirjanduses viidatakse ka kui Nikodým–Dieudonné–Grothendiecki, Nikodým–Dieudonné ja Nikodým–Grothendiecki tõkestatuseteoreemile). Ruumi $ba(\mathcal{A})$ ja hulgaviisi tõkestatuse definitsioone vt. jaotisest 1.1 (vastavalt lk. 11 esimesed kaks lõiku (vt. ka definitisiooni 1.1) ja definitsioon 1.3).

Nikodymi tõkestatuseteoreem (vt. nt. [D, lk. 80] ja lauset 1.2)**.** *Kui $\mathcal{A}$ on σ-algebra, siis ruumi $ba(\mathcal{A})$ mis tahes alamhulk, mis on hulgaviisi tõkestatud kogumil $\mathcal{A}$, on tõkestatud ruumis $ba(\mathcal{A})$.*

Artiklis [V1979] tõestas Valdivia Nikodými tõkestatuseteoreemile järgneva tugevduse.

Teoreem 1 (vt. [V1979, teoreem 2])**.** *Olgu $\mathcal{A}$ σ-algebra ning olgu selle σ-algebra alamkogumid $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ sellised, et $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \cdots$ ja $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$. Siis leidub arv $p \in \mathbb{N}$ selliselt, et ruumi $ba(\mathcal{A})$ mis tahes alamhulk, mis on hulgaviisi tõkestatud kogumil $\mathcal{A}_p$, on tõkestatud ruumis $ba(\mathcal{A})$.*

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on kirjutada üksikasjalikult lahti eelneva Valdivia teoreemi tõestus artiklist [V1979]. Täpsemalt, me tõestame selle teoreemi järeldusena järgnevast teoreemist, mille tõestuse me selles bakalaureusetöös üksikasjalikult lahti kirjutame. Ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ ja tünniruumi definitsioone vt. vastavalt jaotistest 1.2 ja 1.6 (vastavalt alajaotis 1.2.1 ja definitsioon 1.9 (vt. ka definitisioone 1.6 ja 1.8)).

Teoreem 2 (vt. [V1979, teoreem 1])**.** *Olgu $\mathcal{A}$ σ-algebra ning olgu ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ alamruumid $X_1, X_2, \ldots$ sellised, et $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ ja $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. Siis leidub arv $p \in \mathbb{N}$ selliselt, et alamruum X_p on ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ kõikjal tihe tünniruum.*

Töö koosneb kolmest peatükist. Esimeses peatükis esitame teoreemide 1 ja 2 sisust arusaamiseks ja tõestamiseks vajalikud üldised teadmised. Käsitletavad teemad on (alajaotiste kaupa) tõkestatud arv-väärtuselised lõplikult aditiivsed hulgafunktsioonid algebral ja ruum $ba(\mathcal{A})$, ruum $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ ja integraal selles ruumis, pidevad lineaarsed funktsionaalid normeeritud ruumil, ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ (topoloogiline) kaasruum, absoluutselt kumerad hulgad normeeritud ruumides, tünniruumid (normeeritud ruumide kontekstis) ning punkti eraldamine kinnisest absoluutselt kumerast hulgast normeeritud ruumis. Teise peatükki oleme koondanud teoreemide 1 ja 2 tõestamiseks vajaminevad spetsiifilisemat laadi abitulemused artiklist [V[1979]]. Kolmandas peatükis tõestame kõigepealt teoreemi 1 järeldusena teoreemist 2 ning seejärel esitame teoreemi 2 üksikasjaliku tõestuse.

Kõikjal bakalaureusetöös on Ω mingi mittetühi hulk ning $\mathcal{A}$ on hulga Ω alamhulkade algebra. Sümbol $\mathbb{K}$ tähistab kas reaalarvude korpust $\mathbb{R}$ või kompleksarvude korpust $\mathbb{C}$ ning X ja Y on normeeritud ruumid üle ühe ja sama korpuse $\mathbb{K}$.

Töös on kasutatud järgmisi tähistusi.

Lahtist kera ruumis X keskpunktiga a ja raadiusega r tähistame sümboliga $B(a,r)$, s.t.

$$B(a,r) := \{x \in X \colon \|x-a\| < r\},$$

ning ruumi X kinnist ühikkera ja ühiksfääri vastavalt sümbolitega B_X ja S_X, s.t.

$$B_X := \{x \in X \colon \|x\| \leqslant 1\} \qquad \text{ja} \qquad S_X := \{x \in X \colon \|x\| = 1\}.$$

Kui $A \subset X$, siis hulga A lineaarset katet ruumis X tähistame sümboliga $\operatorname{span} A$; hulga A absoluutselt kumerat katet ruumis X (vt. definitsiooni 1.7) tähistame sümboliga $\operatorname{absco} A$. Ruumi X (topoloogilist) kaasruumi tähistame sümboliga X^*.

Kui $E \subset \Omega$, siis $\chi_E \colon \Omega \to \mathbb{K}$ on hulga Ω karakteristlik funktsioon, s.t.

$$\chi_E(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \in E; \\ 0, & \text{kui } t \in \Omega \setminus E. \end{cases}$$

Mis tahes hulga Γ puhul ütleme, et selle hulga paarikaupa lõikumatute alamhulkade kogum $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\}$ (siin $n \in \mathbb{N}$) on selle hulga *lahutus,* kui $\bigcup_{i=1}^n \Gamma_i = \Gamma$. Kui hulga Ω alamhulga $E \in \mathcal{A}$ lahutuse $\{E_1, \ldots, E_n\}$ puhul $E_i \in \mathcal{A}$ iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral, siis viitame sellele lahutusele kui hulga E *$\mathcal{A}$-lahutusele.*

1 Tarvilikke eelteadmisi

1.1 Tõkestatud $\mathbb{K}$-väärtuselised lõplikult aditiivsed hulgafunktsioonid algebral. Ruum $ba(\mathcal{A})$

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et hulgafunktsioon $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ on

- *lõplikult aditiivne* (või lihtsalt *aditiivne*), kui mis tahes lõikumatute hulkade $D, E \in \mathcal{A}$ korral
$$\mu(D \cup E) = \mu(D) + \mu(E);$$
- *tõkestatud,* kui tema väärtuste hulk $\{\mu(E)\colon E \in \mathcal{A}\}$ on tõkestatud, s.t. leidub reaalarv M nii, et
$$|\mu(E)| \leqslant M \quad \text{iga hulga } E \in \mathcal{A} \text{ korral.}$$

Aditiivsetele hulgafunktsioonidele $\mathcal{A} \to \mathbb{K}$ viitame edasises sageli kui *mõõtudele* (kuigi rangelt võttes need hulgafunktsioonid ei ole mõõdud).

Järgnev lause loetleb mõned aditiivsete hulgafunktsioonide lihtsamad omadused.

Lause 1.1. *Olgu $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ aditiivne hulgafunktsioon. Siis*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(b) *kui $n \in \mathbb{N}$ ja hulgad $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ on paarikaupa lõikumatud, siis*
$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j);$$

(c) μ *on* subtraktiivne, *s.t.*
$$D, E \in \mathcal{A},\ D \subset E \quad \Longrightarrow \quad \mu(E \setminus D) = \mu(E) - \mu(D).$$

Kui $\mu(E) \geqslant 0$ iga $E \in \mathcal{A}$ korral (s.t. μ väärtused on reaalsed ja mittenegatiivsed), siis

(d) μ *on* monotoonne, *s.t.*
$$D, E \in \mathcal{A},\ D \subset E \quad \Longrightarrow \quad \mu(D) \leqslant \mu(E);$$

(e) μ *on* subaditiivne, *s.t.*

$$n \in \mathbb{N},\ E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j).$$

TÕESTUS. (a). Kuna hulgafunktsiooni μ aditiivsuse tõttu (arvestades, et $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$)

$$\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) = 2\mu(\emptyset),$$

siis $\mu(\emptyset) = 0$.

(b). Väide järeldub hulgafunktsiooni μ aditiivsuse definitsioonist induktsiooni abil.

(c). Olgu $D, E \in \mathcal{A}$ sellised, et $D \subset E$. Siis hulgafunktsiooni μ aditiivsuse tõttu (arvestades, et $D \cap (E \setminus D) = \emptyset$)

$$\mu(E) = \mu\big(D \cup (E \setminus D)\big) = \mu(D) + \mu(E \setminus D),$$

millest $\mu(E \setminus D) = \mu(E) - \mu(D)$.

Eeldame nüüd, et $\mu(E) \geqslant 0$ iga $E \in \mathcal{A}$ korral (s.t. μ väärtused on reaalsed ja mitte-negatiivsed).

(d). Olgu $D, E \in \mathcal{A}$ sellised, et $D \subset E$. Kuna $\mu(E \setminus D) \geqslant 0$, siis

$$\mu(D) \leqslant \mu(D) + \mu(E \setminus D) \overset{(*)}{=} \mu\big(D \cup (E \setminus D)\big) = \mu(E).$$

Siin võrdus $(*)$ kehtib hulgafunktsiooni μ aditiivsuse tõttu, sest $D \cap (E \setminus D) = \emptyset$.

(e). Olgu $D, E \in \mathcal{A}$. Väite tõestuseks piisab näidata, et $\mu(D \cup E) \leqslant \mu(D) + \mu(E)$ (väide järeldub siit induktsiooni abil). Hulgafunktsiooni μ aditiivsuse tõttu (arvestades, et $D \cap (E \setminus D) = \emptyset$)

$$\mu(D \cup E) = \mu\big(D \cup (E \setminus D)\big) = \mu(D) + \mu(E \setminus D) \leqslant \mu(D) + \mu(E),$$

sest kuna $E \setminus D \subset E$, siis väite (d) põhjal $\mu(E \setminus D) \leqslant \mu(E)$. $\square$

Definitsioon 1.2. Aditiivse hulgafunktsiooni $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ *täisvariatsiooniks* $|\mu|$ nimetatakse hulgafunktsiooni $|\mu|\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$, mille väärtus mis tahes hulgal $E \in \mathcal{A}$ on defineeritud võrdusega

$$|\mu|(E) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|\colon\ n \in \mathbb{N},\ E_1,\dots,E_n \in \mathcal{A} \text{ on paarikaupa lõikumatud, } \bigcup_{i=1}^{n} E_i = E\Big\}.$$

Öeldakse, et aditiivne hulgafunktsioon $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ on *tõkestatud variatsiooniga,* kui $|\mu|(\Omega) < \infty$.

Lause 1.2. *Olgu $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ aditiivne hulgafunktsioon. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *μ on tõkestatud;*

(ii) *μ on tõkestatud variatsiooniga.*

Seejuures, kui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, siis

$$\sup_{\mathcal{A}\ni D\subset E} |\mu(D)| \leqslant |\mu|(E) \leqslant 2 \sup_{\mathcal{A}\ni D\subset E} |\mu(D)| \qquad \textit{iga } E \in \mathcal{A} \textit{ korral,} \tag{1.1}$$

ning, kui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, siis

$$\sup_{\mathcal{A}\ni D\subset E} |\mu(D)| \leqslant |\mu|(E) \leqslant 4 \sup_{\mathcal{A}\ni D\subset E} |\mu(D)| \qquad \textit{iga } E \in \mathcal{A} \textit{ korral.} \tag{1.2}$$

Tõestus. (ii)⇒(i). Eeldame, et μ on tõkestatud variatsiooniga ja fikseerime vabalt hulga $E \in \mathcal{A}$. Siis hulga E mis tahes alamhulga $D \in \mathcal{A}$ korral (arvestades, et ka $E \setminus D \in \mathcal{A}$, kusjuures $D \cap (E \setminus D) = \emptyset$ ja $D \cup (E \setminus D) = E$)

$$|\mu(D)| \leqslant |\mu(D)| + |\mu(E \setminus D)| \leqslant |\mu|(E),$$

seega esimene võrratus tingimuste (1.1) ja (1.2) võrratusteahelates kehtib. Kui võtta eelnevas arutelus $E = \Omega$, siis saame, et μ on tõkestatud, kusjuures iga $D \in \mathcal{A}$ korral $|\mu(D)| \leqslant |\mu|(\Omega)$.

(i)⇒(ii). Eeldame, et μ on tõkestatud ja fikseerime vabalt hulga $E \in \mathcal{A}$. Implikatsiooni (ja ühtlasi teoreemi) tõestuseks piisab näidata, et kui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, siis kehtib teine võrratus tingimuses (1.1), ning kui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, siis kehtib teine võrratus tingimuses (1.2).

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Olgu $n\in\mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $E_1,\dots,E_n\in\mathcal{A}$ sellised, et $\bigcup_{i=1}^n E_i=E$. Tähistame

$$I^+ := \bigl\{i\in\{1,\dots,n\}\colon \mu(E_i)\geqslant 0\bigr\} \qquad \text{ja} \qquad I^- := \bigl\{i\in\{1,\dots,n\}\colon \mu(E_i)<0\bigr\};$$

seejuures, kui $I^+=\emptyset$, siis mõistame edasises summa $\sum_{i\in I^+}\mu(E_i)$ ja ühendi $\bigcup_{i\in I^+}E_i$ all vastavalt arvu 0 ja tühja hulka $\emptyset$, ning, analoogiliselt, kui $I^-=\emptyset$, siis mõistame summa $\sum_{i\in I^-}\mu(E_i)$ ja ühendi $\bigcup_{i\in I^-}E_i$ all vastavalt arvu 0 ja tühja hulka $\emptyset$. Siis

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n|\mu(E_i)| &= \sum_{i\in I^+}|\mu(E_i)|+\sum_{i\in I^-}|\mu(E_i)|\\
&= \sum_{i\in I^+}\mu(E_i)+\sum_{i\in I^-}\bigl(-\mu(E_i)\bigr)=\sum_{i\in I^+}\mu(E_i)-\sum_{i\in I^-}\mu(E_i)\\
&= \mu\Bigl(\bigcup_{i\in I^+}E_i\Bigr)-\mu\Bigl(\bigcup_{i\in I^-}E_i\Bigr)=\Bigl|\mu\Bigl(\bigcup_{i\in I^+}E_i\Bigr)\Bigr|+\Bigl|\mu\Bigl(\bigcup_{i\in I^-}E_i\Bigr)\Bigr|\\
&\leqslant \sup_{\mathcal{A}\ni D\subset E}|\mu(D)|+\sup_{\mathcal{A}\ni D\subset E}|\mu(D)|=2\sup_{\mathcal{A}\ni D\subset E}|\mu(D)|
\end{aligned}$$

ning järelikult kehtib teine võrratus tingimuses (1.1).

Vaatleme nüüd juhtu, kus $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Olgu jällegi $n\in\mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $E_1,\dots,E_n\in\mathcal{A}$ sellised, et $\bigcup_{i=1}^n E_i=E$. Hulgafunktsiooni μ reaalosa $\operatorname{Re}\mu$ ja imaginaarosa $\operatorname{Im}\mu$ on reaalväärtustega tõkestatud aditiivsed hulgafunktsioonid (reaalosa $\operatorname{Re}\mu$ ja imaginaarosa $\operatorname{Im}\mu$ väärtus mis tahes hulgal $E\in\mathcal{A}$ on defineeritud vastavalt võrdustega $(\operatorname{Re}\mu)(E)=\operatorname{Re}\bigl(\mu(E)\bigr)$ ja $(\operatorname{Im}\mu)(E)=\operatorname{Im}\bigl(\mu(E)\bigr)$), seega eelnevalt tõestatu põhjal

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n|\mu(E_i)| &= \sum_{i=1}^n|\operatorname{Re}\mu(E_i)+i\operatorname{Im}\mu(E_i)|\\
&\leqslant \sum_{i=1}^n\bigl(|\operatorname{Re}\mu(E_i)|+|\operatorname{Im}\mu(E_i)|\bigr)=\sum_{i=1}^n|\operatorname{Re}\mu(E_i)|+\sum_{i=1}^n|\operatorname{Im}\mu(E_i)|\\
&\leqslant |\operatorname{Re}\mu|(E)+|\operatorname{Im}\mu|(E)\\
&\leqslant 2\sup_{\mathcal{A}\ni D\subset E}|\operatorname{Re}\mu(D)|+2\sup_{\mathcal{A}\ni D\subset E}|\operatorname{Im}\mu(D)|\\
&\leqslant 2\sup_{\mathcal{A}\ni D\subset E}|\mu(D)|+2\sup_{\mathcal{A}\ni D\subset E}|\mu(D)|=4\sup_{\mathcal{A}\ni D\subset E}|\mu(D)|
\end{aligned}$$

ning järelikult kehtib teine võrratus tingimuses (1.2). $\square$

Kui $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ on tõkestatud aditiivne hulgafunktsioon, siis tema täisvariatsiooni $|\mu|\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ väärtuste hulgas ei ole väärtust ∞ (sest mis tahes hulga $E \in \mathcal{A}$ korral $|\mu|(E) \leqslant |\mu|(\Omega) < \infty$), seega me võime seda täisvariatsiooni tõlgendada hulgafunktsioonina $|\mu|\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.

Lause 1.3. *Olgu $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ tõkestatud aditiivne hulgafunktsioon. Siis täisvariatsioon $|\mu|\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ on mittenegatiivsete väärtustega aditiivne hulgafunktsioon.*

Tõestus. Olgu hulgad $D, E \in \mathcal{A}$ sellised, et $D \cap E = \emptyset$. Lause tõestuseks piisab näidata, et $|\mu|(D \cup E) = |\mu|(D) + |\mu|(E)$.

Ühelt poolt, olgu $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{A}$ sellised, et $\bigcup_{i=1}^n C_i = D \cup E$. Kuna iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$C_i = C_i \cap (D \cup E) = (C_i \cap D) \cup (C_i \cap E),$$

kusjuures $(C_i \cap D) \cap (C_i \cap E) = \emptyset$, siis

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |\mu(C_i)| &= \sum_{i=1}^n |\mu(C_i \cap D) + \mu(C_i \cap E)| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \big(|\mu(C_i \cap D)| + |\mu(C_i \cap E)|\big) \\ &= \sum_{i=1}^n |\mu(C_i \cap D)| + \sum_{i=1}^n |\mu(C_i \cap D)| \\ &\leqslant |\mu|(D) + |\mu|(E)\end{aligned}$$

(sest hulgad $C_1 \cap D, \ldots, C_n \cap D$ on paarikaupa lõikumatud ja $\bigcup_{i=1}^n (C_i \cap D) = D$ ning hulgad $C_1 \cap E, \ldots, C_n \cap E$ on paarikaupa lõikumatud ja $\bigcup_{i=1}^n (C_i \cap E) = E$); seega $|\mu|(D \cup E) \leqslant |\mu|(D) + |\mu|(E)$.

Teiselt poolt, olgu $m, n \in \mathbb{N}$ ning paarikaupa lõikumatud hulgad $D_1, \ldots, D_m \in \mathcal{A}$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ sellised, et $\bigcup_{i=1}^m D_i = D$ ja $\bigcup_{j=1}^n E_j = E$. Siis hulgad $D_1, \ldots, D_m, E_1, \ldots, E_n$ on paarikaupa lõikumatud, kusjuures $\Big(\bigcup_{i=1}^m D_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^n E_j\Big) = D \cup E$, seega

$$\sum_{i=1}^m |\mu(D_i)| + \sum_{j=1}^n |\mu(E_j)| \leqslant |\mu|(D \cup E),$$

aga siit järeldub, et $|\mu|(D) + |\mu|(E) \leqslant |\mu|(D \cup E)$. $\square$

Tähistame

$$ba(\mathcal{A}) := \big\{\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{K} \,|\, \mu \text{ on lõplikult aditiivne ja tõkestatud}\big\}.$$

Märkus 1.1. Märgime, et $ba(\mathcal{A})$ on siin kirjanduses üldkasutatav tähistus. Artiklis [V1979] kasutatakse tähistuse $ba(\mathcal{A})$ asemel tähistust $H(\mathcal{A})$.

Ilmselt on $ba(\mathcal{A})$ vektorruum loomulike tehete suhtes. Veelgi enam, $ba(\mathcal{A})$ *on normeeritud ruum normi* $\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$ *suhtes.* Tõepoolest, olgu $\mu, \nu \in ba(\mathcal{A})$ ning olgu $\alpha \in \mathbb{K}$. Esiteks, ühelt poolt, kui $\|\mu\| = 0$, s.t. $|\mu|(\Omega) = 0$, siis lause 1.2 võrratusteahelate (1.1) ja (1.2) esimese võrratuse põhjal (võttes seal $E = \Omega$) $\mu(D) = 0$ iga $D \in \mathcal{A}$ korral, s.t. $\mu = 0$; teiselt poolt, kui $\mu = 0$, siis vahetult täisvariatsiooni definitsioonist järeldub, et $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = 0$. Ning teiseks ja kolmandaks, järgnevast lausest järeldub, et

$$\|\alpha\mu\| = |\alpha\mu|(\Omega) = |\alpha| \cdot |\mu|(\Omega) = |\alpha|\,\|\mu\|$$

ja

$$\|\mu + \nu\| = |\mu + \nu|(\Omega) \leqslant |\mu|(\Omega) + |\nu|(\Omega) = \|\mu\| + \|\nu\|.$$

Lause 1.4. *Olgu $\mu, \nu \in ba(\mathcal{A})$ ning olgu $\alpha \in \mathbb{K}$. Siis mis tahes hulga $E \in \mathcal{A}$ korral*

$$|\alpha\mu|(E) = |\alpha| \cdot |\mu|(E) \qquad \text{ja} \qquad |\mu + \nu|(E) \leqslant |\mu|(E) + |\nu|(E).$$

TÕESTUS. Olgu $E \in \mathcal{A}$. Kui arv $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ on sellised, et $\bigcup_{i=1}^n E_i = E$, siis

$$\sum_{i=1}^n |(\alpha\mu)(E_i)| = \sum_{i=1}^n \big|\alpha\big(\mu(E_i)\big)\big| = \sum_{i=1}^n |\alpha| \cdot |\mu(E_i)| = |\alpha| \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)|,$$

millest järeldub, et $|\alpha\mu|(E) = |\alpha| \cdot |\mu|(E)$, ning

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |(\mu + \nu)(E_i)| &= \sum_{i=1}^n |\mu(E_i) + \nu(E_i)| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \big(|\mu(E_i)| + |\nu(E_i)|\big) = \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| + \sum_{i=1}^n |\nu(E_i)| \\ &\leqslant |\mu|(E) + |\nu|(E),\end{aligned}$$

millest järeldub, et $|\mu + \nu|(E) \leqslant |\mu|(E) + |\nu|(E)$. □

Definitsioon 1.3. Olgu $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ning olgu $\mathcal{M} \subset ba(\mathcal{A})$. Öeldakse, et hulk $\mathcal{M}$ on *hulgaviisi tõkestatud* kogumil $\mathcal{B}$, kui iga hulga $B \in \mathcal{B}$ korral on hulk $\{|\mu(B)| \colon \mu \in \mathcal{M}\}$ tõkestatud.

Märkus 1.2. Termini *hulgaviisi tõkestatud* ingliskeelne vaste on *setwise bounded;* artiklis [V^{1979}] kasutatakse siin terminit *simply bounded.*

1.2 Ruum $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. Integraal ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$

1.2.1 Ruum $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$

Meenutame, et mis tahes hulga $E \subset \Omega$ korral on selle hulga E karakteristlik funktsioon $\chi_E \colon \Omega \to \mathbb{K}$ defineeritud võrdusega

$$\chi_E(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \in E; \\ 0, & \text{kui } t \notin E. \end{cases}$$

Kõigi funktsioonide $\Omega \to \mathbb{K}$ hulk $\mathbb{K}^\Omega$ on vektorruum (üle korpuse $\mathbb{K}$) loomulike tehete suhtes: kui $z, w \in \mathbb{K}^\Omega$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$, siis summa $z+w$ ja kordne αz on defineeritud võrdustega

$$(z+w)(t) := z(t) + w(t) \quad \text{ja} \quad (\alpha z)(t) := \alpha z(t), \qquad t \in \Omega. \tag{1.3}$$

Funktsionaalanalüüsi kursusest teame, et kõigi tõkestatud funktsioonide alamruum $M(\Omega)$ vektorruumis $\mathbb{K}^\Omega$ on normeeritud ruum (isegi Banachi ruum, s.t. täielik normeeritud ruum) normi

$$\|z\|_\infty := \sup_{t \in \Omega} |z(t)|, \quad z \in M(\Omega), \tag{1.4}$$

suhtes (sellele normile viidatakse kui *lõpmatusnormile*).

Pole raske näha, et iga funktsioon algebra $\mathcal{A}$ hulkade karakteristlike funktsioonide hulga $\{\chi_A \colon A \in \mathcal{A}\}$ lineaarsest kattest $\operatorname{span}\{\chi_A \colon A \in \mathcal{A}\}$ ruumis $\mathbb{K}^\Omega$ on tõkestatud. Tõepoolest, kui $z \in \operatorname{span}\{\chi_A \colon A \in \mathcal{A}\}$, siis $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ mingite $n \in \mathbb{N}$ ning $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ ja $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ korral, seega mis tahes $t \in \Omega$ korral

$$|z(t)| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(t) \right| \leqslant \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \, |\chi_{A_i}(t)| \leqslant \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

Niisiis, $\operatorname{span}\{\chi_A \colon A \in \mathcal{A}\} \subset M(\Omega)$, järelikult on ka $\operatorname{span}\{\chi_A \colon A \in \mathcal{A}\}$ normeeritud ruum lõpmatusnormi $\|\cdot\|_\infty$ suhtes. Seda lineaarset katet $\operatorname{span}\{\chi_A \colon A \in \mathcal{A}\}$ vaadelduna normeeritud ruumina normi $\|\cdot\|_\infty$ suhtes tähistatakse sümboliga $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$.

Niisiis, ruum $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ koosneb kõikvõimalikest funktsioonidest $z\colon \Omega \to \mathbb{K}$, mille puhul leiduvad $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ja $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ nii, et

$$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \chi_{A_i}; \tag{1.5}$$

tehted ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ on defineeritud valemitega (1.3) (kus $z, w \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$) ning elemendi $z \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ norm $\|z\|_\infty$ ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ on defineeritud nagu valemis (1.4).

Jaotise lõpetuseks toome välja paar olulist fakti ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ kohta.

Iga funktsiooni $z \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ korral *saame hulgad $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ esituses (1.5) valida paarikaupa lõikumatud* – niisugust esitust nimetatakse funktsiooni z *kanooniliseks esituseks;* veelgi enam, arv $n \in \mathbb{N}$, hulgad $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ja arvud $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ esituses (1.5) on võimalik valida nii, et *need hulgad on mittetühjad ja paarikaupa lõikumatud,* $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ ning *arvud $\alpha_1, \dots \alpha_n$ on paarikaupa erinevad* – niisugust esitust nimetatakse funktsiooni z *standardesituseks.* Märgime, et kui (1.5) on funktsiooni z standardesitus, siis arvud $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ on parajasti selle funktsiooni erinevad väärtused ja iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $A_i = \{t \in \Omega\colon z(t) = \alpha_i\}$.

Mis tahes funktsiooni $z \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ väärtuste hulk on lõplik, seega esitub norm $\|z\|_\infty$ tegelikult valemiga

$$\|z\|_\infty = \max_{t \in \Omega} |z(t)|$$

(s.t. kui $z \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$, siis supreemum valemis (1.4) on tegelikult maksimum).

1.2.2 Integraal ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$

Definitsioon 1.4. Olgu $\mu \in ba(\mathcal{A})$ ning olgu $z \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. *Integraal $\int_\Omega z \, d\mu$ funktsioonist z üle hulga Ω mõõdu μ järgi* defineeritakse võrdusega

$$\int_\Omega z \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(E_i), \tag{1.6}$$

kus arv $n \in \mathbb{N}$, paarikaupa lõikumatud hulgad $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ ja arvud $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ on sellised, et kehtib (1.5) (ehk, teisisõnu, (1.5) on funktsiooni z kanooniline esitus).

Siinkohal tekib küsimus eelneva definitsiooni korrektsusest. Nimelt, integraali $\int_\Omega z \, d\mu$ definitsioon toetub funktsiooni z kanoonilisele esitusele; see esitus ei ole aga üheselt määratud. Veendumaks definitsiooni 1.4 korrektsuses, tuleb näidata, et iga funktsiooni

$z \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ mis tahes kahe kanoonilise esituse korral kujul (1.5) on neile esitustele vastavad summad võrduse (1.6) paremal poolel võrdsed. Selline integraali definitsiooni korrektsuse kontroll (seda siinsest veidi üldisemas, Banachi ruumi väärtuseliste aditiivsete hulgafunktsioonide järgi võetud integraalide kontekstis) on üksikasjaliselt läbi viidud nt. bakalaureusetöös [I, lk. 43–44, jaotise 3.3 algus].

Järgnev lause võtab kokku integraali olulisemad omadused ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$.

Lause 1.5. *Olgu $\mu, \nu \in ba(\mathcal{A})$, olgu $z, w \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ ja olgu $\gamma \in \mathbb{K}$. Siis*

(a) $\int_\Omega \gamma z \, d\mu = \gamma \int_\Omega z \, d\mu$;

(b) $\int_\Omega (z + w) \, d\mu = \int_\Omega z \, d\mu + \int_\Omega w \, d\mu$;

(c) *kui mõõdu μ väärtused on reaalarvulised ja mittenegatiivsed ning funktsioonide z ja w väärtused on reaalarvulised, kusjuures $z(t) \leqslant w(t)$ iga $t \in \Omega$ korral, siis* $\int_\Omega z \, d\mu \leqslant \int_\Omega w \, d\mu$;

(d) $\left| \int_\Omega z \, d\mu \right| \leqslant \int_\Omega |z| \, d|\mu|$ *(meenutame, et iga $t \in \Omega$ korral $|z|(t) := |z(t)|$);*

(e) $\int_\Omega z \, d(\gamma\mu) = \gamma \int_\Omega z \, d\mu$;

(f) $\int_\Omega z \, d(\mu + \nu) = \int_\Omega z \, d\mu + \int_\Omega z \, d\nu$.

Tõestus. Me saame leida arvu $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{A}$ selliselt, et mingite $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ korral $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, \chi_{C_i}$ ja $w = \sum_{i=1}^n \beta_i \, \chi_{C_i}$.

(a) ja (b). Kuna $\gamma z = \sum_{i=1}^n \gamma \alpha_i \, \chi_{C_i}$ ja $z + w = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \, \chi_{C_i}$, siis

$$\int_\Omega \gamma z \, d\mu = \sum_{i=1}^n \gamma \alpha_i \, \mu(C_i) = \gamma \sum_{i=1}^n \alpha_i \, \mu(C_i) = \gamma \int_\Omega z \, d\mu$$

ja

$$\begin{aligned}\int_\Omega (z + w) \, d\mu &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \, \mu(C_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, \mu(C_i) + \sum_{i=1}^n \beta_i \, \mu(C_i) \\ &= \int_\Omega z \, d\mu + \int_\Omega w \, d\mu.\end{aligned}$$

(c). Olgu mõõdu μ väärtused reaalarvulised ja mittenegatiivsed ning olgu funktsioonide z ja w väärtused reaalarvulised, kusjuures $z(t) \leqslant w(t)$ iga $t \in \Omega$ korral. Siis $\alpha_i \leqslant \beta_i$

iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral, seega

$$\int_\Omega z\, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \mu(C_i) \leqslant \sum_{i=1}^n \beta_i\, \mu(C_i) = \int_\Omega w\, d\mu.$$

(d). Kuna $|z| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|\, \chi_{A_i}$, siis

$$\left|\int_\Omega z\, d\mu\right| = \left|\sum_{i=1}^n \alpha_i\, \mu(C_i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |\alpha_i|\, |\mu(C_i)| \leqslant \sum_{i=1}^n |\alpha_i|\, |\mu|(C_i) = \int_\Omega |z|\, d|\mu|.$$

(e) ja (f):

$$\int_\Omega z\, d(\gamma\mu) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, (\gamma\mu)(C_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \gamma\, \mu(C_i) = \gamma \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \mu(C_i) = \gamma \int_\Omega z\, d\mu$$

ja

$$\begin{aligned}\int_\Omega z\, d(\mu+\nu) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i\, (\mu+\nu)(C_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \big(\mu(C_i) + \nu(C_i)\big) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \mu(C_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \nu(C_i) = \int_\Omega z\, d\mu + \int_\Omega z\, d\nu.\end{aligned}$$

□

1.2.3 Ruumid $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$ ja $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A}_A)$

Olgu $A \in \mathcal{A}$. Kõikjal järgnevas tähistame sümboliga $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$ ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ alamruumi $\operatorname{span}\{\chi_D \colon A \supset D \in \mathcal{A}\}$. Lisaks tähistame $\mathcal{A}_A := \{E \cap A \colon E \in \mathcal{A}\}$; siis $\mathcal{A}_A$ on hulga A alamhulkade algebra; niisiis me saame vaadelda ruumi $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A}_A)$. Kuna ilmselt $\mathcal{A}_A = \{D \in \mathcal{A} \colon D \subset A\}$, siis kehtib järgmine kergestikontrollitav lause.

Lause 1.6. *Olgu $A \in \mathcal{A}$. Kujutus*

$$\ell_0^\infty(A, \mathcal{A}) \ni z \longmapsto z|_A \in \ell_0^\infty(A, \mathcal{A}_A)$$

on isomeetriline isomorfism.

Valdivia teoreemi 2 (vt. Sissejuhatust) tõestamiseks vajamineva järelduse 2.4, (b), tõestuses kasutatakse järgnevat vahetut järeldust lausest 1.6.

Järeldus 1.7. *Olgu $A \in \mathcal{A}$ ning olgu $W \subset \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *hulk W on nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$;*

(ii) *hulk $\{w|_A : w \in W\}$ on nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A}_A)$.*

1.3 Pidevad lineaarsed funktsionaalid normeeritud ruumil

Kujutustele (ja seejuures eriti just lineaarsetele kujutustele), mis tegutsevad normeeritud ruumide vahel, on tavaks viidata kui *operaatoritele;* seejuures $\mathbb{K}$-väärtuselistele operaatoritele viidatakse kui *funktsionaalidele.* Niisiis, termini *funktsionaal* all mõistetakse tavaliselt kujutust, mis tegutseb normeeritud ruumist arvude ruumi $\mathbb{K}$. Käsilolevas jaotises on meie põhiliseks huviobjektiks pidevad lineaarsed funktsionaalid: me esitame mõned olulisemad faktid pidevate lineaarsete funktsionaalide kohta normeeritud ruumides. Kõigi meid selles jaotises huvitavate tulemuste puhul pidevate lineaarsete funktsionaalide kohta kehtivad ka nende tulemuste vahetud üldistused pidevate lineaarsete operaatorite jaoks; seepärast me esitamegi need tulemused üldisemas, pidevate lineaarsete operaatorite kontekstis.

Lause 1.8 (vt. nt. [OO, lk. 119, lause 1 ja järeldus 1])**.** *Olgu $T: X \to Y$ lineaarne operaator. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *operaator T on pidev;*

(ii) *operaator T on pidev punkis 0;*

(iii) *leidub punkt $x_0 \in X$, milles operaator T on pidev.*

Definitsioon 1.5. Öeldakse, et operaator $T: X \to Y$ on *tõkestatud,* kui leidub reaalarv $M \geqslant 0$ selliselt, et

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Järgmine lause "õigustab" terminit *tõkestatud operaator.*

Lause 1.9 (vt. nt. [OO, lk. 119, lause 2])**.** *Olgu $T: X \to Y$ lineaarne operaator. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *operaator T on tõkestatud;*

(ii) *operaator T teisendab ruumi X kinnise ühikkera B_X tõkestatud hulgaks ruumis Y;*

(iii) *operaator T teisendab mis tahes tõkestatud hulga ruumis X tõkestatud hulgaks ruumis Y.*

Järgnev lause ütleb, et *lineaarne operaator (normeeritud ruumist normeeritud ruumi) on pidev parajasti siis, kui ta on tõkestatud.*

Lause 1.10 (vt. nt. [OO, lk. 120, esimene teoreem])**.** *Olgu $T\colon X \to Y$ lineaarne operaator. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *operaator T on pidev;*

(ii) *operaator T on tõkestatud.*

On ilmne, et kõigi pidevate lineaarsete operaatorite $X \to Y$ hulk $\mathcal{L}(X,Y)$ on vektorruum loomulike tehete suhtes. Veelgi enam, järgnev lause ütleb, et vektorruum $\mathcal{L}(X,Y)$ on normeeritud ruum normi (1.7) suhtes .

Lause 1.11 (vt. nt. [OO, lk. 123–124, § 2 algus, lk. 124, teoreem, ja lk. 125, märkus])**.** *Kõigi pidevate lineaarsete operaatorite vektorruum $\mathcal{L}(X,Y)$ on normeeeritud ruum normi*

$$\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|Tx\| \tag{1.7}$$

suhtes (siin loomulikult $T \in \mathcal{L}(X,Y)$). Seejuures, kui ruum Y on täielik, siis ka ruum $\mathcal{L}(X,Y)$ on täielik, ning, teiselt poolt, kui $X \neq \{0\}$ ja ruum $\mathcal{L}(X,Y)$ on täielik, siis ka ruum Y on täielik (niisiis, kui $X \neq \{0\}$, siis normeeritud ruum $\mathcal{L}(X,Y)$ on Banachi ruum parajasti siis, kui ruum Y on Banachi ruum).

Märgime, et kui $X \neq \{0\}$, siis mis tahes $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ korral

$$\|T\| = \sup_{x\in S_X} \|Tx\|. \tag{1.8}$$

Tõepoolest, olgu $X \neq \{0\}$ ning olgu $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Siis ühelt poolt, (arvestades, et $S_X \subset B_X$)

$$\sup_{x\in S_X} \|Tx\| \leqslant \sup_{x\in B_X} \|Tx\| = \|T\|.$$

Teiselt poolt, mis tahes $x \in B_X \setminus \{0\}$ korral $\frac{x}{\|x\|} \in S_X$, kusjuures

$$\|Tx\| = \|x\| \left\|T\tfrac{x}{\|x\|}\right\| \leqslant \left\|T\tfrac{x}{\|x\|}\right\|,$$

seega

$$\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|Tx\| = \sup_{x\in B_X\setminus\{0\}} \|Tx\| \leqslant \sup_{x\in S_X} \|Tx\|.$$

Kokkvõttes oleme saanud võrduse (1.8).

Ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$, kus $Y = \mathbb{K}$ (s.t. ruumi $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$), nimetatakse ruumi X *(topoloogiliseks) kaasruumiks* ja tähistatakse sümboliga X^*. Teisisõnu, ruumi X (topoloogiline) kaasruum X^* on kõigi pidevate lineaarsete funktsionaalide $X \to \mathbb{K}$ normeeritud ruum, kus mis tahes funktsionaali $f \in X^*$ norm on defineeritud võrdusega

$$\|f\| = \sup_{x\in B_X} |f(x)|.$$

Seejuures, kui $X \neq \{0\}$, võib mis tahes funktsionaali $f \in X^*$ normi arvutada võrdusest

$$\|f\| = \sup_{x\in S_X} |f(x)|.$$

Kuna arvude ruum $\mathbb{K}$ on täielik, siis (lause 1.11 põhjal) *ruumi X kaasruum X^* on Banachi ruum.*

Lause 1.12 (vt. nt. [OO, lk. 124, ülesandele eelnev valem])**.** *Olgu $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Siis*

$$\|T\| = \min\big\{M \geqslant 0\colon \|Tx\| \leqslant M\|x\| \textit{ iga } x \in X \textit{ korral}\big\}.$$

Eelnev lause rakendatuna kaasruumile X^* ütleb, et mis tahes funktsionaali $f \in X^*$ norm $\|f\|$ esitub valemiga

$$\|f\| = \min\big\{M \geqslant 0\colon |f(x)| \leqslant M\|x\| \text{ iga } x \in X \text{ korral}\big\}.$$

1.4 Ruumi $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ (topoloogiline) kaasruum

Järgnev teoreem kirjeldab ruumi $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ (topoloogilist) kaasruumi – me saame loomulikul viisil samastada funktsionaalid sellest kaasruumist mõõtudega ruumist $ba(\mathcal{A})$.

Teoreem 1.13. *Kujutus $T : ba(\mathcal{A}) \to \ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})^*$, kus mis tahes $\mu \in ba(\mathcal{A})$ ja $z \in \ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ korral*

$$(T\mu)(z) = \int_\Omega z\,d\mu, \tag{1.9}$$

on isomeetriline isomorfism.

TÕESTUS. Kõigepealt veendume, et kujutuse T definitsioon on korrektne, s.t. iga $\mu \in ba(\mathcal{A})$ korral on valemiga (1.9) defineeritud funktsionaal $T\mu\colon \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$ pidev ja lineaarne. Olgu $\mu \in ba(\mathcal{A})$. Funktsionaal $T\mu$ on lineaarne, sest mis tahes $z, w \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ korral lause 1.5, (a), põhjal

$$(T\mu)(\alpha z) = \int_\Omega \alpha z \, d\mu = \alpha \int_\Omega z \, d\mu = \alpha\big((T\mu)(z)\big)$$

ja lause 1.5, (b), põhjal

$$(T\mu)(z + w) = \int_\Omega (z + w) \, d\mu = \int_\Omega z \, d\mu + \int_\Omega w \, d\mu = (T\mu)(z) + (T\mu)(w).$$

Funktsionaal $T\mu$ on tõkestatud, sest mis tahes $z \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ korral lause 1.5, (d) ja (c), põhjal (siin lause 1.5, (c), rakendamisel märgime, et $|z|(t) = |z(t)| \leqslant \|z\|_\infty \, \chi_\Omega(t)$ iga $t \in \Omega$ korral)

$$|(T\mu)(z)| = \left|\int_\Omega z \, d\mu\right| \leqslant \int_\Omega |z| \, d|\mu| \leqslant \int_\Omega \|z\|_\infty \, \chi_\Omega \, d|\mu| = \|z\|_\infty \, |\mu|(\Omega) = \|\mu\| \, \|z\|_\infty.$$

Siit järeldub, et $T\mu \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$, kusjuures $\|T\mu\| \leqslant \|\mu\|$.

Veendume, et kujutus T on lineaarne. Mis tahes $\mu, \nu \in ba(\mathcal{A})$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ ning $z \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ korral lause 1.5, (e), põhjal

$$(T(\alpha\mu))(z) = \int_\Omega z \, d(\alpha\mu) = \alpha \int_\Omega z \, d\mu = \alpha\big((T\mu)(z)\big) = (\alpha(T\mu))(z)$$

ja lause 1.5, (f), põhjal

$$\begin{aligned}(T(\mu + \nu))(z) &= \int_\Omega z \, d(\mu + \nu) = \int_\Omega z \, d\mu + \int_\Omega z \, d\nu = (T\mu)(z) + (T\nu)(z) \\ &= (T\mu + T\nu)(z),\end{aligned}$$

seega $T(\alpha\mu) = \alpha(T\mu)$ ja $T(\mu + \nu) = T\mu + T\nu$; niisiis, T on lineaarne. Kujutuse T tõkestatus järeldub sellest, et mis tahes $\mu \in ba(\mathcal{A})$ korral $\|T\mu\| \leqslant \|\mu\|$.

Veendume, et T on isomeetriline, s.t. $\|T\mu\| = \|\mu\|$ iga $\mu \in ba(\mathcal{A})$ korral. Olgu $\mu \in ba(\mathcal{A})$. Siis, ühelt poolt, eelnevalt tõestatu põhjal $\|T\mu\| \leqslant \|\mu\|$. Teiselt poolt, olgu $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ sellised, et $\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$. Valime arvud

$\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{K}$ selliselt, et $|\theta_i| = 1$ ja $|\mu(E_i)| = \theta_i\, \mu(E_i)$ iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral; siis

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| &= \sum_{i=1}^{n} \theta_i\, \mu(E_i) = \left|\sum_{i=1}^{n} \theta_i\, \mu(E_i)\right| = \left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \theta_i\, \chi_{E_i}\, d\mu\right| = \left|(T\mu)\Big(\sum_{i=1}^{n} \theta_i\, \chi_{E_i}\Big)\right| \\ &\leqslant \|T\mu\| \left\|\sum_{i=1}^{n} \theta_i\, \chi_{E_i}\right\|_\infty \leqslant \|T\mu\|\end{aligned}$$

(sest $\left\|\sum_{i=1}^{n} \theta_i\, \chi_{E_i}\right\|_\infty \leqslant 1$), seega $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) \leqslant \|T\mu\|$. Niisiis, tõepoolest, T on isomeetriline. Siit järeldub ka, et T on üksühene.

Jääb näidata, et T on pealekujutus. Olgu $u \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$. Peame leidma $\mu \in ba(\mathcal{A})$ nii, et $T\mu = u$, s.t.

$$(T\mu)(z) = u(z) \qquad \text{iga } z \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A}) \text{ korral.} \tag{1.10}$$

Kui $z \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$, siis mingite $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ ja $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ korral

$$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \chi_{E_i},$$

seega mis tahes $\mu \in ba(\mathcal{A})$ korral

$$(T\mu)(z) = \int_\Omega z\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mu(E_i)$$

ja

$$u(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u(\chi_{E_i});$$

järelikult, kui kehtiks tingimus

$$\mu(E) = u(\chi_E) \qquad \text{iga } E \in \mathcal{A} \text{ korral,} \tag{1.11}$$

siis kehtiks ka tingimus (1.10) (ning seega T oleks pealekujutus, nagu soovitud). Niisiis, defineerides hulgafunktsiooni $\mu \in \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ tingimusega (1.11), jääb teoreemi tõestuseks näidata, et $\mu \in ba(\mathcal{A})$, s.t. μ on lõplikult aditiivne ja tõkestatud. Mis tahes lõikumatute hulkade $D, E \in \mathcal{A}$ korral

$$\mu(D \cup E) = u(\chi_{D \cup E}) = u(\chi_D + \chi_E) = u(\chi_D) + u(\chi_E) = \mu(D) + \mu(E),$$

seega μ on lõplikult aditiivne. Mis tahes $E \in \mathcal{A}$ korral

$$|\mu(E)| = |u(\chi_E)| \leqslant \|u\| \|\chi_E\|_\infty \leqslant \|u\|,$$

seega μ on tõkestatud. Teoreem on tõestatud. □

1.5 Absoluutselt kumerad hulgad normeeritud ruumides

Definitsioon 1.6. Olgu $B \subset X$. Öeldakse, et hulk B on

- *kumer,* kui

$$x, y \in B,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \ \lambda, \mu > 0,\ \ \lambda + \mu = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda x + \mu y \in B;$$

- *absoluutselt kumer,* kui

$$x, y \in B,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \ |\lambda| + |\mu| \leqslant 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda x + \mu y \in B;$$

- *tasakaalus,* kui

$$x \in B,\ \ s \in \mathbb{K},\ \ |s| \leqslant 1 \qquad \Longrightarrow \qquad sx \in B.$$

Lause 1.14. *Olgu $B \subset X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *B on absoluutselt kumer;*

(ii) *B on kumer ja tasakaalus.*

Tõestus. (i)⇒(ii). Eeldame, et B on absoluutselt kumer. Siis ilmselt on B kumer, niisiis jääb implikatsiooni tõestuseks näidata, et B on tasakaalus. Olgu $x \in B$ ja olgu $s \in \mathbb{K}$ selline, et $|s| \leqslant 1$. Hulga B tasakaalususeks piisab näidata, et $sx \in B$. Arvestades, et $|s| + |0| = |s| \leqslant 1$, järeldub hulga B absoluutsest kumerusest, et $sx = sx + 0x \in B$, nagu soovitud.

(ii)⇒(i). Eeldame, et B on tasakaalus ja kumer. Olgu $x, y \in B$ ja olgu $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sellised, et $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$. Hulga B absoluutseks kumeruseks (ja ühtlasi implikatsiooni tõestuseks) piisab näidata, et $\lambda x + \mu y \in B$.

Kui $\mu = 0$, siis, arvestades, et $|\lambda| \leqslant 1$, hulga B tasakaalususe tõttu $\lambda x + \mu y = \lambda x \in B$; kui $\lambda = 0$, siis sümmeetria põhjal samuti $\lambda x + \mu y \in B$.

Eeldame nüüd, et $\lambda \neq 0$ ja $\mu \neq 0$. Siis

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|) \left(\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \cdot \frac{\lambda}{|\lambda|}\, x + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \cdot \frac{\mu}{|\mu|}\, y \right). \tag{1.12}$$

Arvestades, et $\left|\frac{\lambda}{|\lambda|}\right| = 1$ ja $\left|\frac{\mu}{|\mu|}\right| = 1$, hulga B tasakaalususe tõttu $\frac{\lambda}{|\lambda|}\, x \in B$ ja $\frac{\mu}{|\mu|}\, y \in B$, järelikult, arvestades, et $\dfrac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} + \dfrac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} = 1$, hulga B kumeruse tõttu

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \cdot \frac{\lambda}{|\lambda|}\, x + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \cdot \frac{\mu}{|\mu|}\, y \in B.$$

Nüüd, arvestades, et $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$, jällegi hulga B tasakaalususe tõttu võrduse (1.12) parem pool kuulub hulka B; niisiis ka $\lambda x + \mu y \in B$, nagu soovitud. $\square$

Lause 1.15. (a) *Absoluutselt kumerate hulkade summa normeeritud ruumis on absoluutselt kumer hulk.*

(b) *Absoluutselt kumera hulga sulund normeeritud ruumis on absoluutselt kumer hulk.*

TÕESTUS. Olgu A ja B ruumi X absoluutselt kumerad alamhulgad ning olgu arvud $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sellised, et $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$.

(a). Olgu $x, y \in A + B$. Veendumaks, et summa $A + B$ on absoluutselt kumer, piisab näidata, et $\lambda x + \mu y \in A + B$. Selleks olgu $a, c \in A$ ja $b, d \in B$ niisugused, et $x = a + b$ ja $y = c + d$; siis (arvestades, et hulkade A ja B absoluutse kumeruse tõttu vastavalt $\lambda a + \mu c \in A$ ja $\lambda b + \mu d \in B$)

$$\lambda x + \mu y = \lambda(a + b) + \mu(c + d) = (\lambda a + \mu c) + (\lambda b + \mu d) \in A + B,$$

nagu soovitud.

(b). Olgu $x, y \in \overline{A}$ (sümbol $\overline{A}$ tähistab hulga A sulundit). Veendumaks, et sulund $\overline{A}$ on absoluutselt kumer, piisab näidata, et $\lambda x + \mu y \in \overline{A}$. Selleks olgu hulga A elementide jadad $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ niisugused, et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ja $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ ruumis X. Nüüd

$$\lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda x + \mu y \quad \text{ruumis } X,$$

millest (arvestades, et hulga A absoluutse kumeruse tõttu iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\lambda x_n + \mu y_n \in A$) järeldub, et $\lambda x + \mu y \in \overline{A}$, nagu soovitud. $\square$

Definitsioon 1.7. Olgu $A \subset X$. Vähimat ruumi X absoluutselt kumerat alamhulka, mis sisaldab hulka A, nimetatakse hulga A *absoluutselt kumeraks katteks* (ruumis X).

Hulga A absoluutselt kumerat katet tähistatakse sümboliga $\operatorname{absco} A$.

Siinkohal kerkib üles küsimus eelneva definitsiooni sisukusest. Nimelt, mis tahes hulga $A \subset X$ korral leidub hulka A sisaldavaid ruumi X absoluutselt kumeraid alamhulki – üheks selliseks on näiteks ruum X ise, kuid kas niisuguste (hulka A sisaldavate absoluutselt kumerate) ruumi X alamhulkade seas on olemas ka vähim (s.t. niisugune, mis sisaldub igas teises sellises alamhulgas)? Vastus sellele küsimusele on jaatav: nimelt, on lihtne kontrollida, et kõigi hulka A sisaldavate ruumi X absoluutselt kumerate alamhulkade ühisosa on absoluutselt kumer hulk, see ühisosa sisaldab hulka A ning samas see ühisosa sisaldub igas hulka A sisaldavas ruumi X absoluutselt kumeras alamhulgas.

Järgnev lause kirjeldab hulga absoluutselt kumerat katet normeeritud ruumis.

Lause 1.16. *Olgu $A \subset X$. Siis*

$$\operatorname{absco} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \colon n \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_n \in A,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant 1 \right\}. \tag{1.13}$$

Võrduses (1.13) paremal pool võrdusmärki oleva hulga elementidele viidatakse kui *hulga A elementide absoluutselt kumeratele kombinatsioonidele.*

LAUSE 1.16 TÕESTUS. Tähistame võrduses (1.13) paremal pool võrdusmärki oleva hulga tähega B. Me peame näitama, et $\operatorname{absco} A = B$.

Sisalduvuse $\operatorname{absco} A \subset B$ tõestuseks piisab näidata, et hulk B on absoluutselt kumer (sest, arvestades, et $B \supset A$, niisugusel juhul $\operatorname{absco} A$ kui *vähim* hulka A sisaldav absoluutselt kumer hulk sisaldub hulgas B). Olgu $x, y \in B$ ning olgu $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sellised, et $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$. Veendumaks, et hulk B on absoluutselt kumer, piisab näidata, et $\lambda x + \mu y \in B$. Olgu $m, n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in A$ ja $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ sellised, et $\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \leqslant 1$ ja $\sum_{j=1}^{n} |\mu_j| \leqslant 1$ ning $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ ja $y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j$. Nüüd

$$\lambda x + \mu y = \lambda \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \mu \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \mu \mu_j y_j \in B,$$

nagu soovitud, sest

$$\sum_{i=1}^{m} |\lambda \lambda_i| + \sum_{j=1}^{n} |\mu \mu_j| = |\lambda| \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| + |\mu| \sum_{j=1}^{n} |\mu_j| \leqslant |\lambda| + |\mu| \leqslant 1.$$

Tõestame sisalduvuse $B \subset \operatorname{absco} A$, s.t. tõestame, et kõik hulga A elementide absoluutselt kumerad kombinatsioonid kuuluvad absoluutselt kumerasse kattesse $\operatorname{absco} A$. Tõestame selle väite induktsiooniga liidetavate arvu järgi hulga A elementide absoluutselt kumerates kombinatsioonides. Kõigepealt paneme tähele, et iga ühest liidetavast koosnev selline absoluutselt kumer kombinatsioon kuulub hulka $\operatorname{absco} A$ (sest selline absoluutselt kumer kombinatsioon esitub kujul λx, kus $x \in A \subset \operatorname{absco} A$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ rahuldab tingimust $|\lambda| \leqslant 1$, ning hulga $\operatorname{absco} A$ absoluutse kumeruse tõttu $\lambda x = \lambda x + 0x \in \operatorname{absco} A$). Eeldame nüüd, et mingi $n \in \mathbb{N}$ korral kuuluvad kõik n liidetavast koosnevad hulga A elementide absoluutselt kumerad kombinatsioonid hulka $\operatorname{absco} A$, ning fikseerime vabalt ($n+1$ liidetavast koosneva) hulga A elementide absoluutselt kumera kombinatsiooni $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$. Väite tõestuseks jääb näidata, et $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in \operatorname{absco} A$; seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et $|\lambda_{n+1}| < 1$. Absoluutselt kumera katte $\operatorname{absco} A$ absoluutse kumeruse tõttu

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1 - |\lambda_{n+1}|) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - |\lambda_{n+1}|} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in \operatorname{absco} A,$$

nagu soovitud. Siin arvestasime, et kuna $\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\lambda_i}{1-|\lambda_{n+1}|}\right| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\lambda_i|}{1-|\lambda_{n+1}|} \leqslant 1$, siis tehtud eelduse põhjal $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-|\lambda_{n+1}|} x_i \in \operatorname{absco} A$, samuti, et $x_{n+1} \in A \subset \operatorname{absco} A$ ning et $\big|1 - |\lambda_{n+1}|\big| + |\lambda_{n+1}| = 1$. □

Järeldus 1.17. *Olgu $A \subset X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *hulk A on absoluutselt kumer;*

(ii) $A = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \colon n \in \mathbb{N},\, x_1, \ldots, x_n \in A,\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant 1 \Big\}$.

TÕESTUS. Hulk on absoluutselt kumer parajasti siis, kui ta on võrdne oma absoluutselt kumera kattega; seega samaväärsus (i)⇔(ii) järeldub lausest 1.16. □

Lause 1.18. *Lõpliku hulga absoluutselt kumer kate normeeritud ruumis on kompaktne hulk.*

Lause 1.18 tõestamisel on mugav toetuda järgnevale lausele.

Lause 1.19. *Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $x_1, \ldots, x_n \in X$. Siis*

$$\operatorname{absco}\{x_1, \ldots, x_n\} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \colon \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant 1 \Big\}. \tag{1.14}$$

Tõestus. Sisalduvus “$\supset$” võrduses (1.14) kehtib lause 1.16 põhjal. Jääb veenduda, et kehtib ka vastupidine sisalduvus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et elemendid $x_1, \ldots, x_n$ on paarikaupa erinevad. Olgu $x \in \operatorname{absco}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Lause 1.16 põhjal leiduvad $m \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_m \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ ja $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{K}$ nii, et $\sum_{j=1}^m |\mu_j| \leqslant 1$ ning $x = \sum_{j=1}^m \mu_j z_j$. Defineerime iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $J_i := \{j \in \{1, \ldots, m\} \colon z_j = x_i\}$ ning $\lambda_i := \sum_{j \in J_i} \mu_j$, kui $J_i \neq \emptyset$, ja $\lambda_i := 0$, kui $J_i = \emptyset$. Siis (lugedes $\sum_{j \in J_i} \mu_j = \sum_{j \in J_i} |\mu_j| = 0$, kui $J_i = \emptyset$)

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \sum_{i=1}^n \Big| \sum_{j \in J_i} \mu_j \Big| \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j \in J_i} |\mu_j| = \sum_{j=1}^m |\mu_j| \leqslant 1,$$

kusjuures (lugedes $\sum_{j \in J_i} \mu_j z_j = \sum_{j \in J_i} \mu_j x_i = 0$, kui $J_i = \emptyset$)

$$x = \sum_{j=1}^m \mu_j z_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in J_i} \mu_j z_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in J_i} \mu_j x_i = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j \in J_i} \mu_j \Big) x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i;$$

niisiis võrduses (1.14) kehtib sisalduvus “$\subset$”. $\square$

Lause 1.18 tõestus. Olgu Q ruumi X lõplik alamhulk. Kui $Q = \emptyset$, siis $\operatorname{absco} Q = \emptyset$ on kompaktne hulk. Jääb vaadelda juhtu, kus $Q \neq \emptyset$. Sel juhul leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \ldots, x_n \in X$ nii, et $Q = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Olgu $(u_k)_{k=1}^\infty$ hulga $\operatorname{absco} Q$ elementide jada. Veendumaks, et hulk $\operatorname{absco} Q$ on kompaktne (ja ühtlasi lause tõestuseks), piisab näidata, et sellel jadal leidub osajada, mis koondub mingiks hulga $\operatorname{absco} Q$ elemendiks ruumis X. Lause 1.19 põhjal iga $k \in \mathbb{N}$ korral leiduvad arvud $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k \in \mathbb{K}$ nii, et $\sum_{i=1}^n |\lambda_i^k| \leqslant 1$ ja $u_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k x_i$. Nüüd arvjadad

$$(\lambda_1^k)_{k=1}^\infty, \quad (\lambda_2^k)_{k=1}^\infty, \quad \ldots\ldots, \quad (\lambda_n^k)_{k=1}^\infty$$

on tõkestatud; seega Bolzano–Weierstrassi teoreemi põhjal leidub jadal $(\lambda_1^k)_{k=1}^\infty$ koonduv osajada $\big(\lambda_1^{l_k^1}\big)_{k=1}^\infty$, (osa)jadal $\big(\lambda_2^{l_k^1}\big)_{k=1}^\infty$ leidub koonduv osajada $\big(\lambda_2^{l_k^2}\big)_{k=1}^\infty$ jne. Kirjeldatud protseduuri tulemusena me saame (kasvavad) indeksite jadad

$$(l_k^1)_{k=1}^\infty, \quad (l_k^2)_{k=1}^\infty, \quad \ldots\ldots, \quad (l_k^n)_{k=1}^\infty$$

nii, et

- jada $(l_k^{i+1})_{k=1}^\infty$ on jada $(l_k^i)_{k=1}^\infty$ osajada iga $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ korral;
- jada $\big(\lambda_i^{l_k^i}\big)_{k=1}^\infty$ koondub iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral.

Aga nüüd kõik (osa)jadad $\big(\lambda_i^{l_k^n}\big)_{k=1}^\infty$, $i = 1, \dots, n$, koonduvad (sest iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral on $\big(\lambda_i^{l_k^n}\big)_{k=1}^\infty$ koonduva jada $\big(\lambda_i^{l_k^i}\big)_{k=1}^\infty$ osajada). Kirjutame lihtsuse mõttes iga $k \in \mathbb{N}$ korral $j_k := l_k^n$.

Olgu arvud $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sellised, et

$$\lambda_i^{j_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_i \qquad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral;}$$

siis $\sum_{i=1}^n |\lambda_i^{j_k}| \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$. Kuna iga $k \in \mathbb{N}$ korral $\sum_{i=1}^n |\lambda_i^{j_k}| \leqslant 1$, järeldub siit, et ka $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leqslant 1$; seega lause 1.19 põhjal $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \operatorname{absco} Q$. Lause tõestuseks jääb veel märkida, et $u_{j_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ ruumis X, sest

$$\Big\| u_{j_k} - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i^{j_k} x_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^n (\lambda_i^{j_k} - \lambda_i) x_i \Big\| \leqslant \sum_{i=1}^n |\lambda_i^{j_k} - \lambda_i| \, \|x_i\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

□

Definitsioon 1.8. Olgu $B \subset X$. Öeldakse, et hulk B on *neelav* (ruumis X), kui iga $x \in X$ korral leidub reaalarv $s_x > 0$ nii, et

$$t > s_x \qquad \Longrightarrow \qquad x \in tB. \tag{1.15}$$

Lause 1.20. *Olgu B ruumi X mittetühi absoluutselt kumer alamhulk. Kui* $\operatorname{span} B = X$*, siis hulk B on neelav.*

Tõestus. Eeldame, et $\operatorname{span} B = X$. Olgu $x \in X$. Veendumaks, et hulk B on neelav, piisab leida reaalarv $s_x > 0$ nii, et kehtib implikatsioon (1.15). Eelduse $\operatorname{span} B = X$ põhjal leiduvad $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in B$ ja $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ nii, et $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ (märgime, et hulga B absoluutse kumeruse tõttu $0 \in B$). Tähistame $\alpha := \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$; siis $\sum_{i=1}^n \big|\frac{\alpha_i}{\alpha}\big| = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 1$, seega hulga B absoluutse kumeruse tõttu järelduse 1.17 põhjal

$$\frac{1}{\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i \in B.$$

Kui nüüd reaalarv t rahuldab tingimust $t > \alpha$, siis $\big|\frac{\alpha}{t}\big| = \frac{\alpha}{t} < 1$, seega absoluutselt kumera hulga B tasakaalususe tõttu

$$\frac{1}{t} x = \frac{\alpha}{t} \cdot \frac{1}{\alpha} x \in \frac{\alpha}{t} B \subset B;$$

niisiis $x \in tB$. Implikatsioon (1.15) kehtib, kui $s_x = \alpha$. □

Järeldus 1.21. *Olgu $U, Q \subset X$, kusjuures hulk U on absoluutselt kumer ja kinnine ning hulk Q on lõplik. Tähistame*

$$V := U + \operatorname{absco} Q.$$

(a) *Hulk V on absoluutselt kumer ja kinnine.*

(b) *Kui hulgad U ja Q on mittetühjad, kusjuures* $\operatorname{span}(U \cup Q) = X$, *siis hulk V on neelav.*

TÕESTUS. (a). Hulk V on absoluutselt kumer lause 1.15, (a), põhjal. Hulk V on kinnine, sest $\operatorname{absco} Q$ on kompaktne hulk ruumis X (lause 1.18 põhjal) ning kinnise hulga ja kompaktse hulga summa normeeritud ruumis on kinnine hulk (vt. nt. [M, lk. 179, lemma 2.2.27]).

(b). Olgu hulgad U ja Q mittetühjad, kusjuures $\operatorname{span}(U \cup Q) = X$. Kuna $V = U + \operatorname{absco} Q \supset U \cup Q$ (sest $\operatorname{absco} Q \supset Q$ ning $0 \in U$ ja $0 \in \operatorname{absco} Q$), siis ka $\operatorname{span} V = X$. Hulga V neelavus järeldub nüüd lausest 1.20 (sest hulk V on mittetühi ja järelduse (a)-osa põhjal absoluutselt kumer). □

1.6 Tünniruumid (normeeritud ruumide kontekstis)

Definitsioon 1.9. Öeldakse, et

- alamhulk $B \subset X$ on *tünn* (ruumis X), kui B on kumer, tasakaalus, neelav ja kinnine (ruumis X);
- ruum X on *tünniruum,* kui temas iga tünn on nulliümbrus.

Järgnev teoreem annab meile näite ühest olulisemast tünniruumide klassist: iga Banachi ruum on tünniruum.

Teoreem 1.22. *Iga Banachi ruum on tünniruum.*

TÕESTUS. Olgu X Banachi ruum (s.t. täielik normeeritud ruum) ning olgu U tünn ruumis X. Veendumaks, et X on tünniruum, piisab näidata, et U on nulliümbrus ruumis X, s.t. leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et $U \supset \delta B_X$. Selleks paneme tähele, et $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$. Tõepoolest, olgu $x \in X$. Siis tünni U neelavuse tõttu leidub reaalarv $t > 0$ selliselt, et $x \in tU$. Kui nüüd arv $n \in \mathbb{N}$ rahuldab tingimust $\frac{t}{n} \leqslant 1$, siis (arvestades, et tünni U tasakaalususe tõttu $\frac{t}{n} U \subset U$)

$$x \in tU = n\Big(\frac{t}{n} U\Big) \subset nU.$$

Kuna tünn U on kinnine, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral on hulk nU kinnine, järelikult Baire'i teoreemi põhjal leidub arv $n \in \mathbb{N}$ nii, et hulk nU sisaldab mingi kera $B(a,r)$. Defineerime $b := \frac{1}{n}\,a$ ja $\varepsilon := \frac{r}{n}$; siis

$$U \supset \frac{1}{n}\,B(a,r) = B\big(\tfrac{1}{n}\,a, \tfrac{r}{n}\big) = B(b,\varepsilon).$$

Tünni U tasakaalususe tõttu $B(-b,\varepsilon) = -B(b,\varepsilon) \subset U$ ning seega tünni U kumeruse tõttu

$$\frac{\varepsilon}{2}B_X \subset B(0,\varepsilon) \subset \frac{1}{2}\,B(-b,\varepsilon) + \frac{1}{2}\,B(b,\varepsilon) \subset \frac{1}{2}\,U + \frac{1}{2}\,U \subset U.$$

□

Tünniruumides kehtib järgmine *ühtlase tõkestatuse printsiip.*

Teoreem 1.23 (ühtlase tõkestatuse printsiip normeeritud tünniruumide jaoks)**.** *Olgu X tünniruum ning olgu alamhulk $\mathcal{M} \subset X^*$ punktiviisi tõkestatud, s.t. iga $x \in X$ korral leidub reaalarv M_x selliselt, et*

$$|x^*(x)| \leqslant M_x \qquad \text{iga } x^* \in \mathcal{M} \text{ korral.} \tag{1.16}$$

Siis $\mathcal{M}$ on normi järgi tõkestatud, s.t. leidub reaalarv M selliselt, et

$$\|x^*\| \leqslant M \qquad \text{iga } x^* \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Tõestus. Paneme tähele, et hulk $B := \{x \in X \colon |x^*(x)| \leqslant 1 \text{ iga } x^* \in \mathcal{M} \text{ korral}\}$ on tünn. Tõepoolest, on lihtne vahetult kontrollida, et hulk B on absoluutselt kumer ja kinnine. Hulk B on ka neelav, sest kui $x \in X$ ja $t > M_x$, siis tingimuse (1.16) põhjal

$$\begin{aligned} x &\in \{u \in X \colon |x^*(u)| \leqslant M_x \text{ iga } x^* \in \mathcal{M} \text{ korral}\} \\ &\subset \{u \in X \colon |x^*(u)| \leqslant t \text{ iga } x^* \in \mathcal{M} \text{ korral}\} = tB. \end{aligned}$$

Niisiis, tõepoolest, hulk B on tünn. Kuna X on tünniruum, siis B on nulliümbrus ruumis X, s.t. leidub reaalarv $\alpha > 0$ nii, et $\alpha B_X \subset B$, s.t. iga $x \in B_X$ korral $\alpha x \in B$, s.t. iga $x \in B_X$ korral

$$|x^*(\alpha x)| \leqslant 1 \qquad \text{iga } x^* \in \mathcal{M} \text{ korral,}$$

s.t. mis tahes $x^* \in \mathcal{M}$ ja $x \in B_X$ korral $|x^*(x)| \leqslant \frac{1}{\alpha}$. Seega

$$\sup_{x^* \in \mathcal{M}} \|x^*\| = \sup_{x^* \in \mathcal{M}} \sup_{x \in B_X} |x^*(x)| = \sup_{\substack{x^* \in \mathcal{M} \\ x \in B_X}} |x^*(x)| \leqslant \frac{1}{\alpha},$$

järelikult hulk $\mathcal{M}$ on normi järgi tõkestatud. □

1.7 Punkti eraldamine kinnisest absoluutselt kumerast hulgast normeeritud ruumis

Valdivia teoreemi 2 (vt. Sissejuhatust) tõestuses (täpsemalt, selle teoreemi tõestamiseks vajamineva lause 2.8 tõestuses) kasutatakse järgnevat Hahn–Banachi eraldamisteoreemi versiooni.

Teoreem 1.24 (punkti eraldamine kinnisest absoluutselt kumerast hulgast normeeritud ruumis)**.** *Olgu V ruumi X kinnine absoluutselt kumer alamhulk ning olgu $z \in X \setminus V$. Siis leidub funktsionaal $z^* \in X^*$ sellselt, et $|z^*(z)| > 1$ ja*

$$|z^*(x)| \leqslant 1 \qquad \text{iga } x \in V \text{ korral.}$$

Teoreem 1.24 on järeldus järgnevast Hahn–Banachi eraldamisteoreemi versioonist.

Teoreem 1.25 (Hahn–Banachi eraldamisteoreemi Eidelheiti versioon; vt. nt. [M, lk. 179, teoreem 2.2.26])**.** *Olgu C_1 ja C_2 ruumi X mittetühjad kumerad alamhulgad, kusjuures $C_2^\circ \neq \emptyset$ (s.t. hulga C_2 sisemus on mittetühi), ning olgu $C_1 \cap C_2^\circ = \emptyset$. Siis leiduvad funktsionaal $x^* \in X^*$ ja arv $s \in \mathbb{R}$ nii, et*

(1) $\operatorname{Re} x^*(x) \geqslant s$ *iga $x \in C_1$ korral;*

(2) $\operatorname{Re} x^*(x) \leqslant s$ *iga $x \in C_2$ korral;*

(3) $\operatorname{Re} x^*(x) < s$ *iga $x \in C_2^\circ$ korral.*

Teoreemi 1.24 tõestuseks piisab leida funktsionaal $z^* \in X^*$ selliselt, et

$$\operatorname{Re} z^*(x) \leqslant 1 \quad \text{iga } x \in V \text{ korral} \qquad \text{ja} \qquad \operatorname{Re} z^*(z) > 1. \tag{1.17}$$

Tõepoolest, kui funktsionaal $z^* \in X^*$ rahuldab tingimusi (1.17), siis mis tahes $x \in V$ korral, valides arvu $\theta \in \mathbb{K}$ selliselt, et $|\theta| = 1$ ja $\theta z^*(x) = |z^*(x)|$, ning arvestades, et hulga V tasakaalususe tõttu $\theta x \in V$,

$$|z^*(z)| \geqslant \operatorname{Re} z^*(z) > 1 \geqslant \operatorname{Re} z^*(\theta x) = \operatorname{Re} \theta z^*(x) = \operatorname{Re} |z^*(x)| = |z^*(x)|.$$

Tingimusi (1.17) rahuldava funktsionaali $z^* \in X^*$ leidmiseks märgime kõigepealt, et kuna hulk V on kinnine ja $z \in X \setminus V$, siis leidub reaalarv $\varepsilon > 0$ nii, et $B(z, \varepsilon) \cap V = \emptyset$. Nüüd teoreemi 1.25 põhjal (võttes seal $C_1 = V$ ja $C_2 = B(z, \varepsilon)$ ning arvestades, et lahtise kera $B(z, \varepsilon)$ lahtisuse tõttu $z \in B(z, \varepsilon) = B(z, \varepsilon)^\circ = C_2^\circ$) leiduvad funktsionaal $x^* \in X^*$ ja arv $s \in \mathbb{R}$ nii, et

$$\operatorname{Re} x^*(x) \geqslant s \quad \text{iga } x \in V \text{ korral} \qquad \text{ja} \qquad \operatorname{Re} x^*(z) < s. \tag{1.18}$$

Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et $s \neq 0$ (sest kui $s = 0$, siis $\operatorname{Re} x^*(z) < 0$ ning seega jääksid tingimused (1.18) kehtima ka siis, kui võtta seal arvu s rolli näiteks $\frac{1}{2} \operatorname{Re} x^*(z)$). Paneme tähele, et $s < 0$. Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et $s > 0$. Siis mis tahes $x \in V$ korral (arvestades, et tingimustest (1.18) esimese põhjal $\operatorname{Re} x^*(x) \geqslant s$)

$$\operatorname{Re} x^*(-x) = -\operatorname{Re} x^*(x) \leqslant -s < 0 < s,$$

mis (arvestades, et hulga V tasakaalususe tõttu $-x \in V$) on vastuolus tingimustest (1.18) esimesega. Niisiis, tõepoolest, $s < 0$. Nüüd, korrutades tingimuses (1.18) sisalduvate võrratuste mõlemad pooled läbi arvuga $\frac{1}{s}$, saame, et kehtivad tingimused (1.17), kus $z^* = \frac{1}{s} x^*$. $\square$

2 Abitulemusi bakalaureusetöös kesksete teoreemide tõestuseks

Sellesse peatükki oleme koondanud bakalaureusetöös kesksete Valdivia teoreemide (teoreemid 1 ja 2 Sissejuhatuses) tõestamiseks vajaminevad spetsiifilisemat laadi abitulemused artiklist [V1979].

Kui $u \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ ja $A \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$, siis me tähistame $\|u\|_A := \|u|_{\ell_0^\infty(A,\mathcal{A})}\|$. Me kirjutame sageli $u(z) = \langle z, u\rangle$, kus $z \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$.

Lemma 2.1 (vt. [V1979, jaotise 1 teine lõik])**.** *Olgu $A \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$, olgu $n \in \mathbb{N}$ ja olgu $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$ hulga A paarikaupa lõikumatud alamhulgad. Siis mis tahes $u \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ korral*

$$\sum_{j=1}^n \|u\|_{A_j} \leqslant \|u\|_A. \tag{2.1}$$

Tõestus. Olgu $u \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ ning olgu $\varepsilon > 0$. Võrratuse (2.1) tõestuseks piisab näidata, et

$$\|u\|_A \geqslant \sum_{j=1}^n \|u\|_{A_j} - \varepsilon.$$

Valime iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral elemendi $z_j \in \ell_0^\infty(A_j, \mathcal{A})$ nii, et $\|z_j\|_\infty \leqslant 1$ ja

$$\langle z_j, u\rangle = |\langle z_j, u\rangle| > \|u\|_{A_j} - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Defineerime $z = \sum_{j=1}^n z_j$; siis $z \in \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$, kusjuures $\|z\|_\infty \leqslant 1$, seega

$$\begin{aligned}\|u\|_A \geqslant |\langle z, u\rangle| &= \left|\left\langle \sum_{j=1}^n z_j, u\right\rangle\right| = \left|\sum_{j=1}^n \langle z_j, u\rangle\right| = \left|\sum_{j=1}^n |\langle z_j, u\rangle|\right| = \sum_{j=1}^n |\langle z_j, u\rangle| \\ &\geqslant \sum_{j=1}^n \left(\|u\|_{A_j} - \frac{\varepsilon}{n}\right) = \sum_{j=1}^n \|u\|_{A_j} - \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = \sum_{j=1}^n \|u\|_{A_j} - \varepsilon,\end{aligned}$$

nagu soovitud. □

Lause 2.2 (vt. [V1979, lause 1])**.** *Vaatleme reaalset ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. Selles ruumis*

$$\operatorname{absco}\{\chi_A \colon A \in \mathcal{A}\} \supset \frac{1}{2} B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})},$$

s.t. hulga $\{\chi_A \colon A \in \mathcal{A}\}$ absoluutselt kumer kate (reaalses) ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ sisaldab selle ruumi kinnise ühikkera kordset $\frac{1}{2} B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})}$.

Tõestus. Tähistame $\mathcal{H} := \{\chi_A \colon\ A \in \mathcal{A}\}$ ja iga $p \in \mathbb{N}$ korral

$$A_p := \big\{z \in \tfrac{1}{2}B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})} \colon \text{ funktsioonil } z \text{ on } p \text{ nullist erinevat väärtust}\big\}.$$

Lause tõestuseks peame näitama, et iga $p \in \mathbb{N}$ korral $A_p \subset \operatorname{absco}\mathcal{H}$. Tõestame selle väite induktsiooniga indeksi p järgi.

Kui $z \in A_1$ (s.t. funktsioonil $z \in \frac{1}{2}B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})}$ on üks nullist erinev väärtus), siis $z = \frac{1}{2}\,\alpha\chi_A$ mingite $A \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral, kus $0 < |\alpha| \leqslant 1$. Aga nüüd $z = \frac{\alpha}{2}\chi_A \in \operatorname{absco}\mathcal{H}$ (sest $\chi_A \in \mathcal{H} \subset \operatorname{absco}\mathcal{H}$ ja $|\frac{\alpha}{2}| = \frac{|\alpha|}{2} \leqslant 1$ ning hulk $\operatorname{absco}\mathcal{H}$ on tasakaalus); niisiis $A_1 \subset \operatorname{absco}\mathcal{H}$.

Olgu nüüd $z \in A_2$. Siis $z = \frac{1}{2}(\alpha\chi_A + \beta\chi_B)$ mingite lõikumatute hulkade $A, B \in \mathcal{A}\setminus\{\emptyset\}$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral, kus $0 < |\alpha| \leqslant 1$ ja $0 < |\beta| \leqslant 1$. Seega $z = \frac{\alpha}{2}\chi_A + \frac{\beta}{2}\chi_B \in \operatorname{absco}\mathcal{H}$ (sest $\chi_A, \chi_B \in \mathcal{H}$ ja $|\frac{\alpha}{2}| + |\frac{\beta}{2}| = \frac{|\alpha|}{2} + \frac{|\beta|}{2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$); niisiis $A_2 \subset \operatorname{absco}\mathcal{H}$.

Eeldame nüüd, et mingi naturaalarvu $p \geqslant 2$ korral $A_p \subset \operatorname{absco}\mathcal{H}$. Lause tõestuseks jääb näidata, et ka $A_{p+1} \subset \operatorname{absco}\mathcal{H}$. Olgu $z \in A_{p+1}$. Siis leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $A, B, A_3, \ldots, A_{p+1} \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$ ja paarikaupa erinevad arvud $\alpha, \beta, \alpha_3, \ldots, \alpha_{p+1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nii, et $|\alpha| \leqslant 1$, $|\beta| \leqslant 1$ ja $|\alpha_j| \leqslant 1$ iga $j \in \{3, \ldots, p+1\}$ korral ning

$$z = \frac{1}{2}\bigg(\alpha\chi_A + \beta\chi_B + \sum_{j=3}^{p+1}\alpha_j\chi_{A_j}\bigg).$$

Kuna $p + 1 \geqslant 3$, siis funktsiooni z nullist erinevate väärtuste hulgas on vähemalt kaks samamärgilist, seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et

$$0 < \alpha < \beta \qquad \text{või} \qquad \beta < \alpha < 0.$$

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $0 < \alpha < \beta$. Defineerime

$$z_1 = \frac{1}{2}\bigg(\beta\chi_A + \beta\chi_B + \sum_{j=3}^{p+1}\alpha_j\chi_{A_j}\bigg) \qquad \text{ja} \qquad z_2 = \frac{1}{2}\bigg(\beta\chi_B + \sum_{j=3}^{p+1}\alpha_j\chi_{A_j}\bigg);$$

siis $z_1, z_2 \in A_p$, järelikult tehtud eelduse tõttu $z_1, z_2 \in \operatorname{absco}\mathcal{H}$. Kuna $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$, siis hulga $\operatorname{absco}\mathcal{H}$ kumeruse tõttu

$$z = \frac{\alpha}{\beta}z_1 + \bigg(1 - \frac{\alpha}{\beta}\bigg)z_2 \in \operatorname{absco}\mathcal{H}.$$

Kui $\beta < \alpha < 0$, siis $0 < -\alpha < -\beta$, järelikult äsjatõestatu põhjal $-z \in \operatorname{absco}\mathcal{H}$ ning seega hulga absco $\mathcal{H}$ tasakaalususe tõttu $z = -(-z) \in \operatorname{absco}\mathcal{H}$. Niisiis, igal juhul $z \in \operatorname{absco}\mathcal{H}$, järelikult $A_{p+1} \subset \operatorname{absco}\mathcal{H}$, nagu soovitud. □

Lause 2.3 (vt. [V[1979], lause 2]). *Vaatleme kompleksset ruumi $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$. Selles ruumis*

$$\operatorname{absco}\{\chi_A\colon A\in\mathcal{A}\} \supset \frac{1}{4}\, B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})},$$

s.t. hulga $\{\chi_A\colon A\in\mathcal{A}\}$ absoluutselt kumer kate (kompleksses) ruumis $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ sisaldab selle ruumi kinnise ühikkera kordset $\frac{1}{4}B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})}$.

Tõestus. Olgu $z \in \frac{1}{4}\,B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})}$. Tähistame $z_1 := \operatorname{Re} z$ ja $z_2 := \operatorname{Im} z$; siis $z = z_1 + iz_2$, kusjuures $z_1, z_2 \in \frac{1}{4}B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})}$. Tõepoolest, olgu $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i\,\chi_{A_i}$ funktsiooni z standard-esitus (vt. jaotise 1.2.1 eelviimast lõiku). Siis

$$z_1 = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}\alpha_i\,\chi_{A_i} \quad \text{ja} \quad z_2 = \sum_{i=1}^n \operatorname{Im}\alpha_i\,\chi_{A_i},$$

seega z_1 ja z_2 on ruumi $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ elemendid. Kuna iga $i\in\{1,\dots,n\}$ korral

$$|\operatorname{Re}\alpha_i| \leqslant |\alpha_i| \leqslant \|z\|_\infty \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{ja} \quad |\operatorname{Im}\alpha_i| \leqslant |\alpha_i| \leqslant \|z\|_\infty \leqslant \frac{1}{4},$$

siis $\|z_1\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}$ ja $\|z_2\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}$. Funktsioonid z_1 ja z_2 on tõlgendatavad reaalse ruumi $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ elementidena, kusjuures nende normid selles reaalses ruumis on samad, mis kompleksses ruumis $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$. Kuna $\|2z_1\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}$ ja $\|2z_2\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}$, siis $2z_1, 2z_2 \in \frac{1}{2}B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})}$ (siin $B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})}$ on reaalse ruumi $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ kinnine ühikkera), järelikult lause 2.2 põhjal $2z_1, 2z_2 \in \operatorname{absco}\{\chi_A\colon A\in\mathcal{A}\}$ (reaalses ruumis $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ ning seega ka kompleksses ruumis $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$). Aga nüüd (kompleksses ruumis $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$)

$$z = \frac{1}{2}(2z_1) + \frac{i}{2}(2z_2) \in \operatorname{absco}\{\chi_A\colon A\in\mathcal{A}\},$$

sest absoluutselt kumer kate $\operatorname{absco}\{\chi_A\colon A\in\mathcal{A}\}$ on absoluutselt kumer. □

Järeldus 2.4 (vt. [V[1979], lause 2 tõestusele järgnev lõik]). (a) *Olgu $W \subset \ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ absoluutselt kumer hulk. Kui W ei ole nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$, siis mis tahes reaalarvu $\gamma>0$ korral leidub hulk $C\in\mathcal{A}$ nii, et $\gamma\chi_C\notin W$.*

(b) *Olgu $A\in\mathcal{A}$ ning olgu $V\subset\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ absoluutselt kumer hulk. Kui $V\cap\ell_0^\infty(A,\mathcal{A})$ ei ole nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(A,\mathcal{A})$, siis mis tahes reaalarvu $\gamma>0$ korral leidub hulk $C\in\mathcal{A}$ nii, et $C\subset A$ ja $\gamma\chi_C\notin V$.*

TÕESTUS. (a). Leidugu reaalarv $\gamma > 0$ nii, et iga hulga $C \in \mathcal{A}$ korral $\gamma\chi_C \in W$. Väite tõestuseks piisab näidata, et W on nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. Hulga W absoluutse kumeruse tõttu

$$W \supset \operatorname{absco}\{\gamma\chi_C \colon C \in \mathcal{A}\} = \gamma \operatorname{absco}\{\chi_C \colon C \in \mathcal{A}\}.$$

Lausete 2.2 ja 2.3 põhjal leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et

$$\operatorname{absco}\{\chi_C \colon C \in \mathcal{A}\} \supset \delta B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})}$$

(siin reaalse ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ juhul võime lause 2.2 põhjal võtta $\delta = \frac{1}{2}$ ning kompleksse ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ juhul lause 2.3 põhjal $\delta = \frac{1}{4}$), seega $W \supset \gamma\delta B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})}$; niisiis W on nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$, nagu soovitud.

(b). Eeldame, et $V \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$ ei ole nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$. Olgu $\gamma > 0$. Tähistame $W := V \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$; siis järelduse 1.7 põhjal hulk $\{w|_A \colon w \in W\}$ ei ole nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A}_A)$, järelikult väite (a) põhjal leidub hulk $C \in \mathcal{A}_A$ (s.t. $C \in \mathcal{A}$, kusjuures $C \subset A$) nii, et $\gamma\chi_C \notin \{w|_A \colon w \in W\}$ (siin me tõlgendame karakteristlikku funktsiooni χ_C funktsioonina $A \to \mathbb{K}$). Siit järeldub, et kui tõlgendada funktsiooni χ_C funktsioonina $\Omega \to \mathbb{K}$, siis $\gamma\chi_C \notin W = V \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$, millest omakorda, arvestades, et $\gamma\chi_C \in \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$, järeldub, et $\gamma\chi_C \notin V$. □

Järgnevalt defineeritav mõiste mängib Valdivia teoreemi 2 tõestusskeemis võtmerolli.

Definitsioon 2.1 (vt. [V[1979], lausele 3 eelnev lõik]). Olgu U ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ kinnine absoluutselt kumer alamhulk ning olgu $A \in \mathcal{A}$. Öeldakse, et hulgal A on *omadus* U, kui leidub ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ lõplik alamhulk Q selliselt, et hulk

$$\big(\operatorname{absco}(U \cup Q)\big) \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A}) \tag{2.2}$$

on nulliümbrus alamruumis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$.

Lause 2.5. *Olgu U ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ kinnine absoluutselt kumer alamhulk ning olgu $A, C \in \mathcal{A}$, kusjuures $A \supset C$. Kui hulgal A on omadus U, siis ka hulgal C on omadus U.*

TÕESTUS. Eeldame, et hulgal A on omadus U, s.t. leidub leidub ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ lõplik alamhulk Q selliselt, et hulk (2.2) on nulliümbrus alamruumis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$, s.t. leidub reaalarv $\delta > 0$ selliselt, et

$$\big(\operatorname{absco}(U \cup Q)\big) \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A}) \supset \delta B_{\ell_0^\infty(A,\mathcal{A})}.$$

Nüüd

$$\begin{aligned}\big(\operatorname{absco}(U \cup Q)\big) \cap \ell_0^\infty(C,\mathcal{A}) &= \big(\operatorname{absco}(U \cup Q)\big) \cap \big(\ell_0^\infty(A,\mathcal{A}) \cap \ell_0^\infty(C,\mathcal{A})\big)\\ &= \Big(\big(\operatorname{absco}(U \cup Q)\big) \cap \ell_0^\infty(A,\mathcal{A})\Big) \cap \ell_0^\infty(C,\mathcal{A})\\ &\supset (\delta B_{\ell_0^\infty(A,\mathcal{A})}) \cap \ell_0^\infty(C,\mathcal{A})\\ &= \delta B_{\ell_0^\infty(C,\mathcal{A})};\end{aligned}$$

niisiis hulk $\big(\operatorname{absco}(U \cup Q)\big) \cap \ell_0^\infty(C,\mathcal{A})$ on nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(C,\mathcal{A})$, aga siit järeldub, et hulgal C on omadus U. $\square$

Lause 2.6 (vt. [V[1979], lause 3]). *Olgu U ruumi $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ kinnine absoluutselt kumer alamhulk, olgu $A \in \mathcal{A}$ ning olgu algebra $\mathcal{A}$ alamkogum $\{A_1,\dots,A_n\}$, kus $n \in \mathbb{N}$, hulga A lahutus. Kui hulgal A ei ole omadust U, siis ka vähemalt ühel hulkadest $A_1,\dots,A_n$ ei ole omadust U.*

TÕESTUS. Eeldame, et igaühel hulkadest $A_1,\dots,A_n$ on omadus U, s.t. iga $j \in \{1,\dots,n\}$ korral leidub lõplik alamhulk $Q_j \in \ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ selliselt, et hulk

$$V_j := \Big(\operatorname{absco}(U \cup Q_j)\Big) \cap \ell_0^\infty(A_j,\mathcal{A})$$

on nulliümbrus alamruumis $\ell_0^\infty(A_j,\mathcal{A})$. Lause tõestuseks piisab näidata, et hulgal A on omadus U, milleks omakorda piisab näidata, et, tähistades $Q := \bigcup_{j=1}^n Q_j$, on hulk

$$V := \Big(\operatorname{absco}(U \cup Q)\Big) \cap \ell_0^\infty(A,\mathcal{A})$$

nulliümbrus alamruumis $\ell_0^\infty(A,\mathcal{A})$, s.t. leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et $V \supset \delta B_{\ell_0^\infty(A,\mathcal{A})}$.

Iga $j \in \{1,\dots,n\}$ korral on hulk V_j nulliümbrus alamruumis $\ell_0^\infty(A_j,\mathcal{A})$, seega leidub reaalarv $\delta_j > 0$ nii, et $V_j \supset \delta_j B_{\ell_0^\infty(A_j,\mathcal{A})}$. Defineerides $\delta := \frac{1}{n}\min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$, jääb lause tõestuseks näidata, et $V \supset \delta B_{\ell_0^\infty(A,\mathcal{A})}$ ehk, teisisõnu, iga $z \in B_{\ell_0^\infty(A,\mathcal{A})}$ korral $z \in \frac{1}{\delta}V$.

Olgu $z \in B_{\ell_0^\infty(A,\mathcal{A})}$. Siis iga $j \in \{1,\dots,n\}$ korral $z\chi_{A_j} \in B_{\ell_0^\infty(A_j,\mathcal{A})} \subset \frac{1}{\delta_j}V_j$. Aga nüüd

$$z = \sum_{j=1}^n z\chi_{A_j} \in \sum_{j=1}^n \frac{1}{\delta_j}\,V_j \subset \sum_{j=1}^n \frac{1}{n\delta}\,V_j \subset \frac{1}{\delta}\Big(\overbrace{\tfrac{1}{n}V + \dots + \tfrac{1}{n}V}^{n \text{ liidetavat}}\Big) \subset \frac{1}{\delta}\,V,$$

nagu soovitud (siin viimase sisalduvuse põhjenduseks märgime, et hulga V absoluutse kumeruse tõttu $\underbrace{\tfrac{1}{n}V + \dots + \tfrac{1}{n}V}_{n \text{ liidetavat}} \subset V$). $\square$

Lause 2.7. *Olgu $U, Q \subset \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$, kusjuures hulk U on absoluutselt kumer ja kinnine ning hulk Q on lõplik. Tähistame*

$$V := U + \operatorname{absco} Q.$$

(a) *Hulk V on absoluutselt kumer ja kinnine.*

(b) *Kui hulgad U ja Q on mittetühjad, kusjuures* $\operatorname{span}(U \cup Q) = \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$, *siis hulk V on neelav.*

(c) *Olgu $A \in \mathcal{A}$. Kui hulgal A ei ole omadust U, siis $V \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$ ei ole nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$.*

TÕESTUS. (a) ja (b) on erijuht järeldusest 1.21, kui seal võtta $X = \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$.

(c). Eeldame, et hulgal A ei ole omadust U. Sel juhul, tähistades $W := \operatorname{absco}(U \cup Q)$, hulk $W \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$ ei ole nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$.

Arvestades, et $U \subset W$ ja $\operatorname{absco} Q \subset W$ ning et hulga W kumeruse tõttu $\frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W \subset W$, saame

$$V = U + \operatorname{absco} Q \subset W + W = 2\big(\tfrac{1}{2}W + \tfrac{1}{2}W\big) \subset 2W.$$

Kuna $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$ on vektorruum, siis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A}) = 2\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$, seega

$$V \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A}) \subset (2W) \cap \big(2\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})\big) = 2\big(W \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})\big).$$

Siit, arvestades, et hulk $2\big(W \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})\big)$ ei ole nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$ (sest hulk $W \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$ ei ole nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$), järeldub, et hulk $V \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$ ei ole nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$. □

Lause 2.8 (vt. [V1979, lause 4])**.** *Olgu U ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ mittetühi kinnine absoluutselt kumer alamhulk, olgu $A \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$, olgu $p, r \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, olgu $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, ning olgu $x_1, \dots, x_r \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. Kui hulgal A ei ole omadust U, siis leiduvad hulga A $\mathcal{A}$-lahutus $\{A_1, \dots, A_p\}$ ja funktsionaalid $u_1, \dots, u_p \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ selliselt, et iga $i \in \{1, \dots, p\}$ korral*

(1) $|\langle \chi_{A_i}, u_i \rangle| > \alpha$;

(2) $\sum\limits_{j=1}^{r} |\langle x_j, u_i \rangle| \leqslant 1$;

(3) $|\langle x, u_i \rangle| \leqslant 1$ *iga $x \in U$ korral.*

TÕESTUS. Tõestame kõigepealt järgmise väite.

($\sharp$) *Kui hulgal A ei ole omadust U, siis leiduvad hulga A alamhulk $B \in \mathcal{A}$ ja funktsionaal $u \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ selliselt, et*

(1') $|\langle \chi_B, u\rangle| > \alpha$ *ja* $|\langle \chi_{A\setminus B}, u\rangle| > \alpha$*;*

(2') $\sum\limits_{j=1}^{r} |\langle x_j, u\rangle| \leqslant 1$*;*

(3') $|\langle x, u\rangle| \leqslant 1$ *iga* $x \in U$ *korral;*

(4') *hulgal* $A \setminus B$ *pole omadust* U*.*

Väite ($\sharp$) tõestuseks eeldame, et hulgal A ei ole omadust U ja tähistame

$$V := U + \operatorname{absco}\{\chi_A, rx_1, \dots, rx_r\}.$$

Lause 2.7, (a), põhjal on V ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ kinnine absoluutselt kumer alamhulk. Kuna hulgal A ei ole omadust U, siis lause 2.7, (c), põhjal ei ole $V \cap \ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$ nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(A, \mathcal{A})$ ning seega järelduse 2.4, (b), põhjal leidub hulga A alamhulk $C \in \mathcal{A}$ selliselt, et $\frac{1}{1+\alpha}\chi_C \notin V$. Teoreemi 1.24 põhjal leidub funktsionaal $u \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ selliselt, et

$$|\langle x, u\rangle| \leqslant 1 \qquad \text{iga } x \in V \text{ korral} \tag{2.3}$$

ja

$$\left|\left\langle \tfrac{1}{1+\alpha}\chi_C, u\right\rangle\right| > 1. \tag{2.4}$$

Kuna $V \supset U$, siis tingimuse (2.3) põhjal kehtib ka tingimus (3'). Iga $j \in \{1, \dots, r\}$ korral $rx_j \in V$, järelikult tingimuse (2.3) põhjal $|\langle rx_j, u\rangle| \leqslant 1$ ning seega $|\langle x_j, u\rangle| \leqslant \frac{1}{r}$; niisiis

$$\sum_{j=1}^{r} |\langle x_j, u\rangle| \leqslant \overbrace{\frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{r}}^{r \text{ liidetavat}} = 1,$$

s.t. tingimus (2') kehtib. Tingimusest (2.4) järeldub, et

$$|\langle \chi_C, u\rangle| > 1 + \alpha > \alpha.$$

Kuna $\langle \chi_C, u\rangle = \langle \chi_A, u\rangle - \langle \chi_{A\setminus C}, u\rangle$, siis $|\langle \chi_C, u\rangle| \leqslant |\langle \chi_A, u\rangle| + |\langle \chi_{A\setminus C}, u\rangle|$ ning järelikult

$$|\langle \chi_{A\setminus C}, u\rangle| \geqslant |\langle \chi_C, u\rangle| - |\langle \chi_A, u\rangle| > 1 + \alpha - 1 = \alpha.$$

Lause 2.6 põhjal ei ole vähemalt ühel hulkadest C ja $A \setminus C$ omadust U. Kui hulgal C pole omadust U, siis defineerime $B := A \setminus C$ (sel juhul $A \setminus B = C$); kui hulgal C on omadus U, siis defineerime $B := C$ (sel juhul pole hulgal $A \setminus B = A \setminus C$ omadust U). Mõlemal juhul rahuldab hulk B talle väites ($\sharp$) esitatud tingimusi ($1'$) ja ($4'$).

Eeldame nüüd jällegi, et hulgal A ei ole omadust U ning tõestame lauses kirjeldatud hulkade $A_1, \dots, A_p$ ja funktsionaalide $u_1, \dots, u_p$ olemasolu. Hulgaks A_1 ja funktsionaaliks u_1 võtame vastavalt väitest ($\sharp$) saadava hulga B ja funktsionaali u. Kui $p = 2$, siis defineerime $A_2 := A \setminus A_1 = A \setminus B$ ja $u_2 = u_1 = u$. Kui $p \geqslant 3$ toimime edasi järgmiselt: kui mingi $q \in \{2, \dots, p-1\}$ korral on hulgad $A_1, \dots, A_{q-1}$ ja funktsionaalid $u_1, \dots, u_{q-1}$ juba leitud, kuid hulk A_q ja funktsionaal u_q on veel leidmata, siis, võttes väites ($\sharp$) hulga A rolli hulga $A \setminus \bigcup_{i=1}^{q-1} A_i$, võtame hulgaks A_q ja funktsionaaliks u_q vastavalt sellest väitest saadava hulga B ja funktsionaali u. Lause tõestuseks jääb defineerida $A_p := A \setminus \bigcup_{i=1}^{p-1} A_i$ ja $u_p := u_{p-1}$. $\square$

Lause 2.9 (vt. [V1979, lause 5])**.** *Olgu $U_1, U_2, \dots$ ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ mittetühjad kinnised absoluutselt kumerad alamhulgad. Tähistame iga $E \in \mathcal{A}$ korral*

$$\Gamma(E) := \big\{ n \in \mathbb{N} \colon \ \textit{hulgal } E \textit{ ei ole omadust } U_n \big\}.$$

Olgu $A \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$, olgu $p, r \in \mathbb{N}$, olgu $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$, olgu $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, ning olgu $x_1, \dots, x_r \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. Kui hulk $\Gamma(A)$ on lõpmatu, kusjuures $n_1, \dots, n_p \in \Gamma(A)$, siis leiduvad hulga A paarikaupa lõikumatud alamhulgad $M_1, \dots, M_p \in \mathcal{A}$ ja funktsionaalid $u_1, \dots, u_p \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ selliselt, et iga $i \in \{1, \dots, p\}$ korral

(1) $|\langle \chi_{M_i}, u_i \rangle| > \alpha$;

(2) $\sum\limits_{j=1}^{r} |\langle x_j, u_i \rangle| \leqslant 1$;

(3) $|\langle x, u_i \rangle| \leqslant 1$ *iga* $x \in U_{n_i}$ *korral;*

(4) *hulk* $\Gamma\big(A \setminus \bigcup_{i=1}^{p} M_i\big)$ *on lõpmatu, kusjuures* $n_1, \dots, n_p \in \Gamma\big(A \setminus \bigcup_{i=1}^{p} M_i\big)$.

Tõestus. Tõestame kõigepealt järgmise väite.

($\flat$) *Kui hulk $\Gamma(A)$ on lõpmatu, kusjuures $n_1, \dots, n_p \in \Gamma(A)$, ning $k \in \{1, \dots, p\}$, siis leiduvad hulga A alamhulk $M \in \mathcal{A}$ ja funktsionaal $u \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ selliselt, et*

(1') $|\langle \chi_M, u \rangle| > \alpha$;

(2') $\sum\limits_{j=1}^{r} |\langle x_j, u \rangle| \leqslant 1$;

(3') $|\langle x, u\rangle| \leqslant 1$ *iga* $x \in U_{n_k}$ *korral;*

(4') *hulk* $\Gamma(A \setminus M)$ *on lõpmatu, kusjuures* $n_1, \dots, n_p \in \Gamma(A \setminus M)$.

Väite ($\flat$) tõestuseks eeldame, et hulk $\Gamma(A)$ on lõpmatu, kusjuures $n_1, \dots, n_p \in \Gamma(A)$, ning fikseerime vabalt $k \in \{1, \dots, p\}$. Lause 2.8 põhjal leiduvad hulga A $\mathcal{A}$-lahutus $\{A_1, \dots, A_{p+2}\}$ ja funktsionaalid $u_1, \dots, u_{p+2} \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$, mis rahuldavad iga $i \in \{1, \dots, p+2\}$ korral lause 2.8 tingimusi (1)–(3), kus $U = U_{n_k}$. Ilmselt on vähemalt ühe indeksi $i \in \{1, \dots, p+2\}$ korral hulk $\Gamma(A_i)$ lõpmatu. Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et iga $i \in \{1, \dots, p+2\}$ korral on hulk $\Gamma(A_i)$ lõplik. Tähistame iga $i \in \{1, \dots, p+2\}$ korral $m_i := \max \Gamma(A_i)$. Kuna hulk $\Gamma(A)$ on lõpmatu, siis leidub $N \in \Gamma(A)$ nii, et $N > m_i$ iga $i \in \{1, \dots, p+2\}$ korral. Lause 2.6 põhjal leidub $l \in \{1, \dots, p+2\}$ nii, et $N \in \Gamma(A_l)$. Teiselt poolt, $N > m_l = \max \Gamma(A_l)$. Jõudsime vastuoluni. Saadud vastuolu näitab, et tehtud vastuväiteline oletus on väär; niisiis tõepoolest vähemalt ühe indeksi $i \in \{1, \dots, p+2\}$ korral on hulk $\Gamma(A_i)$ lõpmatu. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et hulk $\Gamma(A_1)$ on lõpmatu. Edasi, leidub indeks $i_0 \in \{2, \dots, p+2\}$ selliselt, et $\{n_1, \dots, n_p\} \subset \Gamma(A \setminus A_{i_0})$. Tõepoolest, lause 2.6 põhjal saame iga $i \in \{1, \cdots, p\}$ korral valida indeksi $k_i \in \{1, \dots, p+2\}$ selliselt, et hulgal A_{k_i} pole omadust U_{n_i}, s.t. $n_i \in \Gamma(A_{k_i})$. Nüüd indeksite $k_1, \dots, k_p$ hulk I on ülimalt p-elemendiline (märgime, et kui leiduvad teineteisest erinevad $i, j \in \{1, \dots, p\}$ selliselt, et $k_i = k_j$, siis on indeksite $k_1, \dots, k_p$ hulgas I vähem kui p elementi), seega leidub $i_0 \in \{2, \dots, p+2\} \setminus I$. Nüüd iga $i \in \{1, \dots, p\}$ korral $A_{k_i} \subset A \setminus A_{i_0}$, seega, arvestades, et $n_i \in \Gamma(A_{k_i})$, lause 2.5 põhjal ka $n_i \in \Gamma(A \setminus A_{i_0})$; niisiis $\{n_1, \dots, n_p\} \subset \Gamma(A \setminus A_{i_0})$. Aga nüüd, kui defineerida $M := A_{i_0}$ ja $u := u_{i_0}$, kehtivad tingimused (1')–(4'). (Siin vajab põhjendamist, miks hulk $\Gamma(A \setminus M)$ on lõpmatu: kuna $A_1 \subset A \setminus M$, kusjuures hulk $\Gamma(A_1)$ on lõpmatu, siis lausest 2.5 järeldub, et ka hulk $\Gamma(A \setminus M)$ on lõpmatu.) Väide ($\flat$) on tõestatud.

Eeldame nüüd jällegi, et hulk $\Gamma(A)$ on lõpmatu, kusjuures $n_1, \dots, n_p \in \Gamma(A)$, ning tõestame lauses nõutud omadustega hulkade $M_1, \dots, M_p$ ja funktsionaalide $u_1, \dots, u_p$ olemasolu. Hulgaks M_1 ja funktsionaaliks u_1 võtame vastavalt väitest ($\flat$) juhul $k = 1$ saadava hulga M ja funktsionaali u. Kui $p = 1$, on lause tõestatud. Kui $p \geqslant 2$, toimime edasi järgmiselt: kui mingi $q \in \{2, \dots, p\}$ korral on hulgad $M_1, \dots, M_{q-1}$ ja funktsionaalid $u_1, \dots, u_{q-1}$ juba leitud, kuid hulk M_q ja funktsionaal u_q on veel leidmata, siis, võttes väites ($\flat$) hulga A rolli hulga $A \setminus \bigcup_{i=1}^{q-1} M_i$ ning $k = q$, võtame hulgaks M_q ja funktsionaaliks u_q vastavalt sellest väitest saadava hulga M ja funktsionaali u.

Kirjeldatud viisil leitavad hulgad $M_1, \dots, M_p$ ja funktsionaalid $u_1, \dots, u_p$ rahuldavad lauses neile seatud tingimusi. $\square$

Lause 2.10 (vt. [V1979, lause 6]). *Olgu* $U_1, U_2, \ldots$ *ruumi* $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ *mittetühjad kinnised absoluutselt kumerad alamhulgad. Kui mitte ühegi* $n \in \mathbb{N}$ *korral pole hulgal* Ω *omadust* U_n*, siis leiduvad algebra* $\mathcal{A}$ *paarikaupa lõikumatute hulkade kogum* $\{A_{ij} \colon i, j \in \mathbb{N}\}$*, kaasruumi* $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ *alamhulk* $\{u_{ij} \colon i, j \in \mathbb{N}\}$ *ja rangelt kasvav naturaalarvude jada* $(n_i)_{i=1}^\infty$ *nii, et mis tahes* $i, j \in \mathbb{N}$ *korral*

(1) $|\langle \chi_{A_{ij}}, u_{ij} \rangle| > i + j$;

(2) $\sum\limits_{h+k<i+j} |\langle \chi_{A_{hk}}, u_{ij} \rangle| \leqslant 1$;

(3) $|\langle x, u_{ij} \rangle| \leqslant 1$ *iga* $x \in U_{n_i}$ *korral.*

Tõestus. Eeldame, et mitte ühegi $n \in \mathbb{N}$ korral pole hulgal Ω omadust U_n. Tõestame soovitud omadustega alamkogumi $\{A_{ij} \colon i, j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$, alamhulga $\{u_{ij} \colon i, j \in \mathbb{N}\} \subset \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ ja rangelt kasvava naturaalarvude jada $(n_i)_{i=1}^\infty$ olemasolu rekursiooni abil. Iga naturaalarvu $p \geqslant 2$ korral tähistame

$$\Delta_p^0 := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon i + j = p\} \qquad \text{ja} \qquad \Delta_p := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon i + j \leqslant p\}$$

ning iga hulga $E \in \mathcal{A}$ korral (nagu ka lauses 2.9)

$$\Gamma(E) := \big\{n \in \mathbb{N} \colon \text{ hulgal } E \text{ ei ole omadust } U_n\big\}.$$

Kõigepealt võtame $n_1 := 1$; siis lause 2.9 põhjal leiduvad hulk $A_{11} \in \mathcal{A}$ ja funktsionaal $u_{11} \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ nii, et

(1') $|\langle \chi_{A_{11}}, u_{11} \rangle| > 1 + 1 = 2$;

(3') $|\langle x, u_{11} \rangle| \leqslant 1$ iga $x \in U_{n_1}$ korral;

(4') hulk $\Gamma\big(\Omega \setminus A_{11}\big)$ on lõpmatu, kusjuures $n_1 \in \Gamma\big(\Omega \setminus A_{11}\big)$.

Eeldame nüüd, et mingi naturaalarvu $p \geqslant 2$ korral oleme leidnud naturaalarvud $n_1 < n_2 < \cdots < n_{p-1}$ ja iga $(i, j) \in \Delta_p$ korral hulga $A_{ij} \in \mathcal{A}$ ja funktsionaali u_{ij} selliselt, et

- need hulgad A_{ij} on paarikaupa lõikumatud;
- mis tahes $(i, j) \in \Delta_p$ korral kehtivad tingimused (1)–(3);
- hulk $\Gamma\big(\Omega \setminus \bigcup_{(i,j)\in\Delta_p} A_{ij}\big)$ on lõpmatu, kusjuures $n_1, \ldots, n_{p-1} \in \Gamma\big(\Omega \setminus \bigcup_{(i,j)\in\Delta_p} A_{ij}\big)$.

Kuna hulk $\Gamma\big(\Omega \setminus \bigcup_{(i,j)\in\Delta_p} A_{ij}\big)$ on lõpmatu, siis leidub indeks $n_p \in \Gamma\big(\Omega \setminus \bigcup_{(i,j)\in\Delta_p} A_{ij}\big)$ nii, et $n_p > n_{p-1}$. Lause tõestuseks jääb näidata, et leiduvad hulga $\Omega \setminus \bigcup_{(i,j)\in\Delta_p} A_{ij}$ paarikaupa lõikumatud alamhulgad $A_{1p}, A_{2\,p-1}, \ldots, A_{p1} \in \mathcal{A}$ ja funktsionaalid $u_{1p}, u_{2\,p-1}, \ldots, u_{p1} \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ selliselt, et

- mis tahes $(i,j) \in \Delta_{p+1}^0$ korral kehtivad tingimused (1)–(3);
- hulk $\Gamma\big(\Omega\setminus\bigcup_{(i,j)\in\Delta_{p+1}} A_{ij}\big)$ on lõpmatu, kusjuures $n_1, \ldots, n_p \in \Gamma\big(\Omega\setminus\bigcup_{(i,j)\in\Delta_{p+1}} A_{ij}\big)$.

Niisuguste hulkade ja funktsionaalide olemasolu järeldub lausest 2.9, kui seal võtta hulga A rolli hulk $\Omega \setminus \bigcup_{(i,j)\in\Delta_p} A_{ij}$, $\alpha = p+1$ ning hulga $\{x_1, \ldots, x_r\}$ rolli võtta hulk $\{\chi_{A_{ij}} \colon (i,j) \in \Delta_p\}$: soovitud omadustega hulkadeks $A_{1p}, A_{2\,p-1}, \ldots, A_{p1}$ ja funktsionaalideks $u_{1p}, u_{2\,p-1}, \ldots, u_{p1}$ sobivad vastavalt lausest 2.9 kirjeldatud juhul saadavad hulgad $M_1, \ldots, M_p$ ja funktsionaalid $u_1, \ldots, u_p$. $\square$

Lause 2.11 (vt. [V[1979], lause 7]). *Olgu U ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ mittetühi kinnine absoluutselt kumer alamhulk. Kui U ei ole nulliümbrus oma lineaarses kattes L, siis hulgal Ω ei ole omadust U.*

TÕESTUS. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus lineaarse katte $L = \operatorname{span} U$ koodimensioon ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ on lõplik. Siis leidub mittetühi lõplik alamhulk $M \subset \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ nii, et $L + \operatorname{span} M = \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ ja $L \cap \operatorname{span} M = \{0\}$. Lause 2.7, (a) ja (b), põhjal on hulk $V = U + \operatorname{absco} M$ tünn ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. Paneme tähele, et $V \cap L = U$, s.t. $(U + \operatorname{absco} M) \cap \operatorname{span} U = U$. Tõepoolest, sisalduvus $(U + \operatorname{absco} M) \cap \operatorname{span} U \supset U$ on ilmne. Teiselt poolt, olgu $z \in (U + \operatorname{absco} M) \cap \operatorname{span} U$. Siis $z = u + m$ mingite $u \in U$ ja $m \in \operatorname{absco} M \subset \operatorname{span} M$ korral. Kuna $m = z - u \in \operatorname{span} U = L$, siis $m = 0$ (sest $L \cap \operatorname{span} M = \{0\}$) ning seega $z = u \in U$; niisiis $(U + \operatorname{absco} M) \cap \operatorname{span} U \subset U$. Oleme tõestanud, et $(U + \operatorname{absco} M) \cap \operatorname{span} U = U$. Siit järeldub, et V ei ole nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ (sest kui V oleks nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$, siis $U = V \cap L$ oleks nulliümbrus alamruumis L). Olgu Q mingi ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ lõplik alamhulk. Tähistame $Z := \operatorname{absco}(U \cup Q)$. Kuna tünn V on neelav hulk ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$, siis leidub arv $n \in \mathbb{N}$ nii, et $Q \subset nV$. Nüüd, arvestades, et $U \subset V$ ning et tünni V tasakaalususe tõttu $\frac{1}{n} V \subset V$,

$$Z = \operatorname{absco}(U \cup Q) \subset \operatorname{absco}(V \cup nV) = \operatorname{absco} n\Big(\big(\tfrac{1}{n} V\big) \cup V\Big) = \operatorname{absco} nV = nV$$

(siin viimane võrdus kehtib, sest hulga V absoluutse kumeruse tõttu on ka hulk nV absoluutselt kumer); järelikult Z ei ole nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$; niisiis hulgal Ω pole omadust U.

Vaatleme nüüd juhtu, kus lineaarse katte L koodimensioon ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ on lõpmatu. Olgu jällegi Q mingi ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ lõplik alamhulk. Siis $\operatorname{absco}(U \cup Q)$ ei ole neelav hulk ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. Tõepoolest, kuna lineaarse katte L koodimensioon ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ on lõpmatu, siis $L + \operatorname{span} Q \neq \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$, s.t. leidub $z \in \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A}) \setminus (L + \operatorname{span} Q)$. Kui hulk $\operatorname{absco}(U \cup Q)$ oleks neelav ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$, siis $z \in \operatorname{span} \operatorname{absco}(U \cup Q) \subset (\operatorname{span} U) + (\operatorname{span} Q) = L + \operatorname{span} Q$, vastuolu. Seega tõepoolest hulk $\operatorname{absco}(U \cup Q)$ ei ole neelav ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. Siit järeldub, et $\operatorname{absco}(U \cup Q)$ ei ole nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ (sest iga nulliümbrus on neelav hulk); niisiis hulgal Ω pole omadust U. $\square$

3 Bakalaureusetöös kesksete Valdivia teoreemide tõestused

Selles peatükis esitame bakalaureusetöös kesksete Valdivia teoreemide (teoreemid 1 ja 2 Sissejuhatuses) üksikasjalikud tõestused. Parema jälgitavuse huvides sõnastame need teoreemid siinkohal uuesti.

Teoreem 3.1 (sama, mis teoreem 1 Sissejuhatuses; vt. [V[1979], teoreem 2])**.** *Olgu $\mathcal{A}$ σ-algebra ning olgu selle σ-algebra alamkogumid $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ sellised, et $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \cdots$ ja $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$. Siis leidub arv $p \in \mathbb{N}$ selliselt, et ruumi $ba(\mathcal{A})$ mis tahes alamhulk, mis on hulgaviisi tõkestatud kogumil $\mathcal{A}_p$, on tõkestatud ruumis $ba(\mathcal{A})$.*

Teoreem 3.2 (sama, mis teoreem 2 Sissejuhatuses; vt. [V[1979], teoreem 1])**.** *Olgu $\mathcal{A}$ σ-algebra ning olgu ruumi $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ alamruumid $X_1, X_2, \dots$ sellised, et $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ ja $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. Siis leidub arv $p \in \mathbb{N}$ selliselt, et alamruum X_p on ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ kõikjal tihe tünniruum.*

Teoreemi 3.1 tõestus toetub teoreemile 3.2.

Teoreemi 3.1 tõestus. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral olgu X_n hulga $\{\chi_A \colon A \in \mathcal{A}_n\}$ lineaarne kate ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. Siis $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ ja $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$, seega teoreemi 3.2 põhjal leidub arv $p \in \mathbb{N}$ selliselt, et alamruum X_p on ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ kõikjal tihe tünniruum.

Olgu alamhulk $\mathcal{M} \subset ba(\mathcal{A})$ hulgaviisi tõkestatud kogumil $\mathcal{A}_p$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et alamhulk $\mathcal{M}$ on tõkestatud ruumis $ba(\mathcal{A})$. Olgu $T \colon ba(\mathcal{A}) \to \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$ isomeetriline isomorfism teoreemist 1.13. Siis kujutishulk $T(\mathcal{M})$ (kaasruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})^*$) on punktiviisi tõkestatud alamruumil X_p. Tõepoolest, olgu $z \in X_p$. Kujutishulga $T(\mathcal{M})$ punktiviisi tõkestatuseks alamruumil X_p piisab näidata, et hulk $\{u(z) \colon u \in T(\mathcal{M})\}$ on tõkestatud. Olgu $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, kus $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ ja $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_p$. Kuna alamhulk $\mathcal{M}$ on hulgaviisi tõkestatud kogumil $\mathcal{A}_p$, siis leiduvad arvud $M_1, \dots, M_n \in \mathbb{R}$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$|\mu(A_i)| \leqslant M_i \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Aga nüüd mis tahes $u \in T(\mathcal{M})$ korral, kui $\mu \in \mathcal{M}$ on selline, et $u = T\mu$, saame

$$\begin{aligned} |u(z)| = |(T\mu)(z)| &= \left| \int_\Omega z \, d\mu \right| = \left| \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \right) d\mu \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i) \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, |\mu(A_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, M_i; \end{aligned}$$

seega hulk $\{u(z)\colon u \in T(\mathcal{M})\}$ on tõkestatud, nagu soovitud. Niisiis, tõepoolest, kujutishulk $T(\mathcal{M})$ (kaasruumis $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})^*$) on punktiviisi tõkestatud alamruumil X_p. Kuna alamruum X_p on ruumis $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ kõikjal tihe tünniruum, siis teoreemi 1.23 põhjal on kujutishulk $T(\mathcal{M})$ tõkestatud kaasruumis $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})^*$. Kuna T on isomorfism, siis järeldub siit, et hulk $\mathcal{M}$ on tõkestatud ruumis $ba(\mathcal{A})$, nagu soovitud. □

TEOREEMI 3.2 TÕESTUS. Oletame vastuväiteliselt, et mitte ühegi indeksi $n \in \mathbb{N}$ korral ei ole ruum X_n tünniruum. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub tünn W_n ruumis X_n, mis ei ole nulliümbrus ruumis X_n. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral olgu U_n hulga W_n sulund ruumis $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$; siis U_n on ruumi $\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})$ kinnine absoluutselt kumer alamhulk, mis ei ole nulliümbrus oma lineaarses kattes (sest vastasel korral oleks hulk $U_n \cap X_n$ nulliümbrus ruumis X_n, mis, arvestades, et hulga W_n kinnisuse tõttu ruumis X_n kehtib võrdus $W_n = U_n \cap X_n$, on vastuolus tehtud eeldusega).

Lause 2.11 põhjal ei ole hulgal Ω mitte ühegi indeksi $n \in \mathbb{N}$ korral omadust U_n. Lause 2.10 põhjal leiduvad hulga Ω paarikaupa lõikumatud alamhulgad $A_{ij} \in \mathcal{A}$ ja funktsionaalid $u_{ij} \in \ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})^*$, $i,j = 1,2,\dots$, ning rangelt kasvav naturaalarvude jada $(l_i)_{i=1}^\infty$ nii, et mis tahes $i,j \in \mathbb{N}$ korral kehtivad lause 2.10 tingimused (1)–(3), kus indeksite n_i asemel on l_i.

Järjestame hulga $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ lineaarselt, defineerides $(m,n),(r,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ korral

$$(m,n) \preccurlyeq (r,s) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad m+n < r+s \quad \text{või} \quad m+n = r+s \text{ ja } m \leqslant r.$$

Defineerime $\nu(1,1) := 1$ ja $\Gamma_{11} := \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\colon i+j > 1+\nu(1,1) = 2\}$. Edasi toimime järgmiselt. Eeldame, et mingi paari $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ korral on defineeritud indeks $\nu(m,n) \in \mathbb{N}$ ja hulk $\Gamma_{mn} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, selliselt, et

($\sharp$) iga $i \in \mathbb{N}$ korral on hulk $\{j \in \mathbb{N}\colon (i,j) \in \Gamma_{mn}\}$ lõpmatu,

kuid paarile (m,n) vahetult järgneva paari $(r,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ jaoks pole indeksit $\nu(r,s) \in \mathbb{N}$ ja hulka $\Gamma_{rs} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ veel defineeritud. Tänu tingimusele ($\sharp$) saame leida indeksi $\nu(r,s) \in \mathbb{N}$ nii, et $\big(r,\gamma(r,s)\big) \in \Gamma_{mn}$ ning

$$m+\nu(m,n) < r+\nu(r,s) \qquad \text{ja} \qquad \gamma(r,s) > s+2.$$

Leiame arvu $p_{rs} \in \mathbb{N}$ nii, et $\|u_{r\nu(r,s)}\| < p_{rs}$ ning valime hulga $\{(i,j) \in \Gamma_{mn}\colon i+j > r+\nu(r,s)\}$ lahutuse $\{\Gamma_{rs}^1,\dots,\Gamma_{rs}^{p_{rs}}\}$ nii, et iga $k \in \{1,\dots,p_{rs}\}$ korral

- iga $i \in \mathbb{N}$ korral on hulk $\{j \in \mathbb{N}\colon (i,j) \in \Gamma_{rs}^k\}$ lõpmatu.

Tähistame iga $k \in \{1, \ldots, p_{rs}\}$ korral $G_{rs}^k = \bigcup_{(i,j)\in\Gamma_{rs}^k} A_{ij}$; siis lemma 2.1 põhjal

$$\sum_{k=1}^{p_{rs}} \|u_{r\gamma(r,s)}\|_{G_{rs}^k} \leqslant \|u_{r\nu(r,s)}\| < p_{rs}$$

ning seega leidub arv $k \in \{1, \ldots, p_{rs}\}$ selliselt, et $\|u_{r\nu(r,s)}\|_{G_{rs}^k} < 1$. Defineerime $\Gamma_{rs} := \Gamma_{rs}^k$ ja $G_{rs} := G_{rs}^k = \bigcup_{(i,j)\in\Gamma_{rs}} A_{ij}$.

Kirjeldatud protseduuri tulemusena saame vastavalt igale paarile $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mingi indeksi $\nu(i,j) \in \mathbb{N}$. Defineerime $H := \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} A_{i\nu(i,j)}$. Kuna $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = \ell_0^{\infty}(\Omega, \mathcal{A})$, kusjuures $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$, siis leidub naturaalarv $m \geqslant 2$ selliselt, et $\chi_H \in X_{l_m}$. Kuna W_{l_m} on neelav hulk ruumis X_{l_m} ja $W_{l_m} \subset U_{l_m}$, siis leidub reaalarv $t > 0$ selliselt, et $\chi_H \in tW_{l_m} \subset tU_{l_m}$ ning järelikult mis tahes $n \in \mathbb{N}$ korral (arvestades, et iga $x \in U_{l_m}$ korral $|\langle x, u_{m\nu(m,n)}\rangle| \leqslant 1$)

$$|\langle \chi_H, u_{m\nu(m,n)}\rangle| \leqslant t. \tag{3.1}$$

Teiselt poolt, tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $B_{mn} := \bigcup_{(i,j)\succ(m,n)} A_{i\nu(i,j)}$. Kui $(i,j) \succ (m,n)$, siis $\big(i, \nu(i,j)\big) \in \Gamma_{mn}$, seega $A_{i,\nu(i,j)} \subset \bigcup_{(k,l)\in\Gamma_{mn}} A_{kl} = G_{mn}$, järelikult $B_{mn} \subset G_{mn}$, mistõttu $\chi_{B_{mn}} \in \ell_0^{\infty}(G_{mn}, \mathcal{A})$; niisiis

$$|\langle \chi_{B_{mn}}, u_{m\nu(m,n)}\rangle| \leqslant \|u_{m\nu(m,n)}\|_{G_{mn}} < 1.$$

Kui $(i,j) \prec (m,n)$, siis $i + \nu(i,j) < m + \nu(m,n)$, järelikult

$$\sum_{(i,j)\prec(m,n)} |\langle \chi_{A_{i\nu(i,j)}}, u_{m\nu(m,n)}\rangle| \leqslant \sum_{h+k<m+\nu(m,n)} |\langle \chi_{A_{hk}}, u_{m\nu(m,n)}\rangle| < 1.$$

Seega

$$\begin{aligned}
|\langle \chi_H, u_{m\nu(m,n)}\rangle| &= \left|\left\langle \sum_{(i,j)\prec(m,n)} \chi_{A_{i\nu(i,j)}} + \chi_{A_{m\nu(m,n)}} + \chi_{B_{mn}},\ u_{m\nu(m,n)} \right\rangle\right| \\
&\geqslant |\langle \chi_{A_{m\nu(m,n)}}, u_{m\nu(m,n)}\rangle| - \sum_{(i,j)\prec(m,n)} |\langle \chi_{A_{i\nu(i,j)}}, u_{m\nu(m,n)}\rangle| - |\langle \chi_{B_{mn}}, u_{m\nu(m,n)}\rangle| \\
&\geqslant m + \nu(m,n) - 1 - 1 \geqslant m + n + 2 - 2 = m + n,
\end{aligned}$$

mis, valides $n \in \mathbb{N}$ nii, et $m + n > t$, on vastuolus tingimusega (3.1). Oleme tõestanud, et mingi indeksi $i \in \mathbb{N}$ korral on ruum X_i tünniruum.

Järgnevalt oletame vastuväiteliselt, et mitte ühegi indeksi $n \in \mathbb{N}$ korral ei ole alamruum X_n ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ kõikjal tihe. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral olgu $\overline{X}_n$ alamruumi X_n sulund ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ ning olgu U_n alamruumi $\overline{X}_n$ kinnine ühikkera (siis muuhulgas on U_n kinnine absoluutselt kumer nulliümbrus alamruumis $\overline{X}_n$). Paneme tähele, et mitte ühegi indeksi $n \in \mathbb{N}$ korral ei ole hulgal Ω omadust U_n. Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et mingi indeksi $n \in \mathbb{N}$ korral on hulgal Ω omadus U_n, s.t. leidub lõplik alamhulk $Q \subset \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ nii, et hulk $V := \operatorname{absco}(U_n \cup Q)$ on nulliümbrus ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$, s.t. leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et $\delta B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})} \subset V$. Valime indeksi $m \geqslant n$ nii, et $Q \subset X_m$; siis $U_n \cup Q \subset \overline{X}_n \cup Q \subset \overline{X}_m$ ja seega ka $V = \operatorname{absco}(U_n \cup Q) \subset \overline{X}_m$. Hulgad U_n ja Q on tõkestatud, seega ka ühend $U_n \cup Q$ on tõkestatud ning järelikult ka selle ühendi absoluutselt kumer kate V on tõkestatud; niisiis leidub reaalarv $\gamma > 0$ nii, et $V \subset \gamma U_m$ (meenutame, et U_m on alamruumi X_m kinnine ühikkera). Oleme saanud, et $\delta B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})} \subset V \subset \gamma U_m$, seega $B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})} \subset \frac{\gamma}{\delta} U_m \subset \overline{X}_m$ ning järelikult $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A}) = \operatorname{span} B_{\ell_0^\infty(\Omega,\mathcal{A})} \subset \operatorname{span} \overline{X}_m = \overline{X}_m$, s.t. $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A}) \subset \overline{X}_m$ ehk, teisisõnu, alamruum X_m on kõikjal tihe ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$. Saime vastuolu tehtud vastuväitelise eeldusega, järelikult see eeldus on väär; niisiis mitte ühegi indeksi $n \in \mathbb{N}$ korral ei ole hulgal Ω omadust U_n. Eelnevas tõestuse osas läbiviidud arutelu viib meid nüüd vastuoluni; seega tehtud vastuväiteline oletus on väär ning järelikult leidub indeks $n \in \mathbb{N}$ nii, et alamruum X_n on ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ kõikjal tihe ja seega ka iga $i \in \mathbb{N}$ korral alamruum X_{n+i} on ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ kõikjal tihe (sest $X_n \subset X_{n+1} \subset X_{n+2} \subset \cdots$). Eelnevalt tõestatu põhjal leidub indeks $k \in \mathbb{N}$ selliselt, et X_{n+k} on tünniruum (siin me arvestasime, et $X_{n+1} \subset X_{n+2} \subset \cdots$ ja $\bigcup_{i=1}^\infty X_{n+i} = \ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$), seega, defineerides $p := n + k$, on alamruum X_p ruumis $\ell_0^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ kõikjal tihe tünniruum. $\square$

Kirjandus

[D] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces.* Graduate Texts in Mathematics, 92, Springer, New York, 1984.

[I] J. Izotova, *Absoluutselt summeerivad operaatorid ruumil* $B(\mathcal{F})$. Bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, Tartu, 2013.

[M] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory.* Graduate Texts in Mathematics, 183, Springer, New York, 1998.

[OO] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs.* Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[V^{1979}] M. Valdivia, *On certain barrelled normed spaces.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979), no. 3, v, 39–56.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Mathilde Manuela Nigul,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Valdivia tugevdus Nikodými tõkestatuseteoreemile", mille juhendaja on Märt Põldvere, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Mathilde Manuela Nigul
15.05.2024