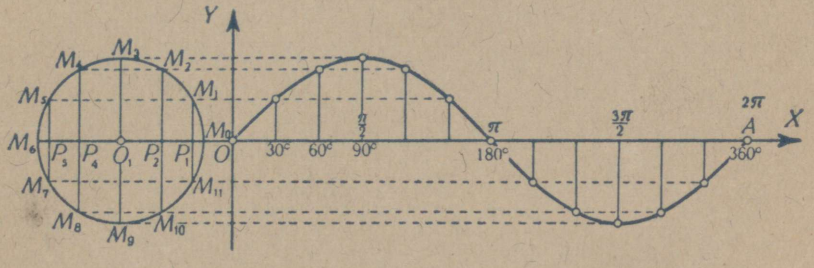
N. RÕBKIN

TASAPINNALINE TRIGONOMEETRIA

KESKKOOLI IX JA X KLASSILE



RK PEDAGOOGILINE KIRJANDUS

TALLINN

N. RÕBKIN

TASAPINNALINE TRIGONOMEETRIA

KESKKOOLI IX JA X KLASSILE

RK
PEDAGOOGILINE KIRJANDUS
TALLINN 1941

Sissejuhatus.

§ 1. Trigonomeetria aine. Sõna t r i g o n o m e e t r i a tähendab kreeka keeles k o l m n u r k a d e m õ õ t m i s t. Selle nimetuse sai see teadusharu seepärast, et ta esialgne ülesanne oli leida võtteid kolmnurga tundmatute elementide (nurkade ja külgede) arvutamiseks teiste, tuntud elementide järgi (kolmnurkade lahendamine). See ülesanne on nüüdisajalgi üheks trigonomeetria põhiülesandeks.

Arvuliste seoste avaldamiseks kolmnurga külgede ja nurkade vahel käsitellakse trigonomeetrias erilisi nurga suurusest olenevaid abisuurusi, mida nimetatakse trigonomeetrilisteks funktsioonideks. Kuid trigonomeetriliste funktsioonide tähtsus ei piirdu nende rakendamisega kolmnurkade lahendamisel, vaid nad leiavad rakendamist ka paljudes teistes matemaatika harudes, samuti ka füüsikas, mehaanikas jm. Seetõttu on trigonomeetriliste funktsioonide uurimine saanud mitte vähem tähtsaks ülesandeks kui kolmnurkade lahendamine.

Nii hargneb trigonomeetria kaheks osaks: goniomeetriaks ehk õpetuseks trigonomeetriliste funktsioonide omadustest ja trigonomeetriaks kitsamas mõttes ehk õpetuseks kolmnurkade lahendamisest.

Trigonomeetria leiab laialdast rakendamist praktilistel aladel: geodeetilistel töödel — kõrguste ja kauguste määramine, plaanistamine, triangulatsioon; astronoomias — taevakehade kõrguste, asimuutide, deklinatsioonide ja otsetõusude, üldse taevakoordinaatide määramine ja taevakoordinaatide põhjal geograafiliste koordinaatide arvutamine; mehaanikas tungi projektimine teljele, resultandi suuna määramine, perioodilise liikumise seaduste uurimine; masinaõpetuses — keermete ja hammasrataste arvestamine jms.

Trigonomeetria tekkis Kreekas astronoomia tarviduste mõjul; astronoomia omakorda arenes meresõidu ja põllunduse tarviduste mõjutusel: mereteede hädaohutuseks oli tarvis taevatähtede järgi määrata laeva õige kurss; põllundusel oli vaja täpset kalendrit, mille võis anda matemaatikale, eriti trigonomeetriale rajatud astronoomia.

Esimeste trigonomeetriliste tabelite autoriks oli Hipparchos, kes elas II sajandil enne meie ajaarvamist. Hipparchose tabelid sisaldasid mitmesugustele kesknurkadele vastavate kõõlude pikkusi.

100 aastat enne meie ajaarvamist pani õpetlane Menelaos aluse sfäärilisele trigonomeetriale. Koperniku-eelse geotsentrilise maailmasüsteemi kuulus looja Klaudios Ptolemaios avaldas oma raamatus „Syntaxis Mathematica" ringi kõõlude pikkuste tabelid. Ringi raadiuse ta võttis võrdseks ühega ja jagas selle 60 võrdseks osaks, iga osa veel 60 osaks ja veel kord 60 osaks, nimetades neid osi partes minutae primae ja partes minutae secundae, kust ongi pärit meie nimetused: minutid („esimesed vähendatud osad") ja sekundid („teised vähendatud osad"). Ptolemaiose tabelid sisaldasid kesknurkadele $1°$, $1\frac{1}{2}°$, $2°$, $2\frac{1}{2}°, \ldots$ vastavate kõõlude pikkusi.

Keskajal arenes trigonomeetria Indias. Hindud kasutasid poolt kõõlu, s. o. siinuslõiku; koosinuse võtsid tarvitusele samuti hindud. Nad tundsid siinuste tabeleid, seost $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (mida nad, muide, kirjutasid mitte matemaatiliste sümbolitega, vaid sõnadega) ning nürinurga siinuse ja koosinuse taandamist teravnurga funktsioonideks.

IX ja X sajandil võtsid araabia õpetlased tarvitusele tangensi ja koostasid täpsemad siinuste tabelid. Trigonomeetria areng araablaste juures seletub samuti astronoomia ja meresõidu tarvidustega, sest araablased tegelesid laialdaselt kauplemisega Vahemere kaldail.

Euroopas kirjutas esimesena trigonomeetriast inglise õpetlane Bradwardine (XIII ja XIV s.). Esimese süstemaatilise trigonomeetria kursuse kirjutas XV sajandil saksa õpetlane Johannes Müller Königsbergist, kes kirjutas Regiomontanuse nime all. Raamatus „Iga liiki kolmnurkadest" annab ta tasapinnaliste ja sfääriliste kolmnurkade lahendusi. Regiomontanus käsitleb trigonomeetriat juba iseseisva teadusena, lahus astronoomiast.

Alates XVI sajandist, pärast seda kui Vieta võttis tarvitusele tähelised sümbolid, omandavad trigonomeetrilised valemid juba nüüdisaegse ilme.

Teistest õpetlastest on töötanud trigonomeetria alal veel Napier (logaritmide leiutaja), Pothenot ja geniaalne Euler. Euler'it võib pidada nüüdisaegse trigonomeetriliste funktsioonide õpetuse loojaks.

§ 2. Funktsiooni mõiste. On olemas muutuvaid suurusi, mis on seotud teineteisega nii, et ühe suuruse igale väärtusele vastab teise suuruse kindel väärtus. Sellised suurused on näiteks järgmistes võrdustes esinevad muutuvad suurused y ja x:

$$y = a + x; \quad y = x^2; \quad y = \sqrt{x} \text{ jne.};$$

samuti on seda: ruudu külg ja ruudu pindala, kera raadius ja kera ruumala jne.

Muutuvat suurust, mille väärtused vastavad teise muutuva suuruse väärtustele, nimetatakse viimase funkts i o o n i k s. Nii võib ütelda näiteks, et ringi pindala on ringi raadiuse funktsioon; tõepoolest, raadiuse pikkuse muutumisel muutub ka ringi pindala ja seejuures igale raadiuse väärtusele v a s t a b ringi pindala kindel väärtus (ja ümberpöördult: ringi raadiust nimetame ringi pindala funktsiooniks, kui ette anname ringi pindala suuruse ja selle järgi määrame raadiuse väärtuse).

Seda suurust, millest olenevalt muutub funktsioon, nimetatakse funktsiooni a r g u m e n d i k s. Kui võrdust $y = x^3$ kasutatakse antud y-väärtuste määramiseks x-väärtuste järgi, siis x on argument ja y on funktsioon; samuti võrduses $y = \log N$ argumendiks on N ja funktsiooniks on y.

§ 3. Kaarte ja nurkade mõõtmine. Nagu on teada geomeetriast, mõõdetakse nurki kaarte abil.

Kui kaart kasutatakse nurga mõõtmiseks, siis teda väljendatakse kas ringjoone osades või raadiuse osades. [1]

Esimene viis on geomeetriast tuntud kaare ja nurga väljendamine k r a a d i m õ õ d u s.

Teine viis seisneb selles, et kaart väljendatakse arvuga, mis võrdub k a a r e j a r a a d i u s e s u h t e g a. Nii näiteks ütlus „kaare s u u r u s on 2,43“ tähendab, et sirgestatud kaar sisaldab eneses 2,43 raadiust. Poolringjoont väljendatakse sel viisil arvuga $\pi R : R$ ehk arvuga π ja veerand ringjoont arvuga $\frac{\pi}{2}$ jne.

Säärast kaare suuruse väljendamist nimetatakse kaare väljendamiseks r a d i a a n m õ õ d u s.

Et kesknurk sel viisil väljenduks sama arvuga, millega ta kaargi, on vaja, et nurga mõõduühikuks võetaks niisugune

---

[1] Esimene viis on näitlikum ja seda kasutatakse tegelikul mõõtmisel (nurgamõõtmise riistadel), teist eelistatakse teoreetiliste küsimuste käsitlustel.

kesknurk, millele vastava kaare pikkus võrdub raadiusega. Säärast nurgaühikut nimetatakse r a d i a a n i k s.

Nii võime ütelda, et nurga radiaanmõõt on nurga ja radiaani suhe. Näiteks ütlus „nurk $\frac{3}{2}\pi$“ tähendab „nurka, mis võrdub $\frac{3}{2}\pi$ radiaaniga“.

Et ringjoone pikkus sisaldab 2π raadiust, siis radiaani kraadimõõt on $\frac{360°}{2\pi}$ ehk $57°17'44{,}8''$, veaga mitte üle $0{,}05''$).

On kasulik meeles pidada veel järgmist. Terve ringjoone radiaanmõõt on $2\pi R : R$ ehk 2π ja ringjoone kraadimõõt on $360°$; siit saame järgmised vastavused:

360°	180°	90°	270°	60°	45°	30°	18°
2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$

Tuletame nüüd valemid kraadimõõdu ümberarvutamiseks radiaanmõõduks ja ümberpöördult. Tähistame mingi kaare või nurga kraadimõõdu tähega α ja radiaanmõõdu tähega a. Et ringjoone kraadimõõt on $360°$ ja radiaanmõõt on 2π, siis saame võrde:

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{a}{2\pi} \quad \text{ehk} \quad \frac{\alpha}{180°} = \frac{a}{\pi};$$

siit saame, et

$$a = \pi \cdot \frac{\alpha}{180°} \tag{1}$$

ja

$$\alpha = 180° \cdot \frac{a}{\pi}. \tag{2}$$

N ä i d e. Leida nurga $67°30'$ radiaanmõõt.

Asendades α valemis (1) arvuga $67°30'$, leiame:

$$a = \pi \cdot \frac{67°30'}{180°} = \frac{3}{8}\pi;$$

kui siin asendada π tema lähisväärtusega 3,14159, siis saame $a = 1{,}17810$, veaga mitte üle poole saja tuhandiku.

Ilma valemi rakendamiseta võime leida a järgmistest vastavustest:

$$360^\circ \ldots 2\pi$$

$$1^\circ \ldots \frac{2\pi}{360}$$

$$(67^\circ 30' = 67{,}5^\circ \ldots \frac{2\pi}{360} \cdot 67\tfrac{1}{2} = \frac{3}{8}\pi).$$

§ **3a. Kaare pikkus.** Kui ringjoone raadius tähistada tähega r, kaare pikkus tähega l ja vastava kesknurga radiaanmõõt tähega a, siis radiaanmõõdu definitsiooni järgi saame:

$$a = \frac{l}{r}, \quad \text{siit} \quad l = ar,$$

s. o. *kaare pikkus võrdub kaare radiaanmõõdu ja raadiuse korrutisega.*

See valem leiab sagedast rakendamist füüsikas ja tehnikas.

Kraadimõõdu ümberarvutamiseks radiaanmõõduks ja ümberpöördult võib kasutada ka selleks otstarbeks koostatud tabeleid. (Bradis'e tabeleis tabel VIII ja Prževalski tabeleis tabel XI.)

TRIGONOMEETRILISTEST FUNKTSIOONIDEST.

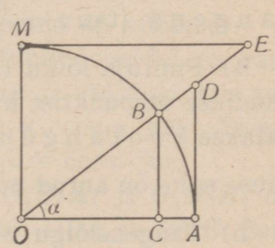
(GONIOMEETRIA.)

I. Teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid.

§ 4. Nimetusi ja tähiseid. Nurga trigonomeetrilised funktsioonid on järgmised: s i i n u s, k o o s i n u s, t a n g e n s, k o o t a n g e n s, s e e k a n s ja k o o s e k a n s.

Neid tähistatakse järgmiselt: sin, cos, tan, cot, sec ja cosec. Seejuures funktsiooni sümboli järele kirjutatakse argumendi (nurga) see väärtus, millele vastab kõne all olev funktsiooni väärtus. Näiteks, nurga α siinust kirjutatakse nii: $\sin \alpha$.

§ 5. Teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid. Võtame mingi teravnurga α ja vaatleme teda kui kesknurka. Selleks joonestame vabalt valitud raadiusega ringjoone, mille keskpunktiks on selle nurga tipp. Raadiuse pikkuse tähistame tähega R. Selleks et teha vahet raadiuste vahel, mis moodustavad antud nurga, kujutleme, et nurga α muutumisel (joon. 1) raadius OA püsib paigal, kuid raadius OB pöörleb; selles mõttes nimetame raadiust OB l i i k u v a k s r a a d i u s e k s ja raadiust OA l i i k u m a t u k s raadiuseks. Asudes trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide juurde, mainime esiti üldiselt, et nad on antud nur-



Joon. 1.

gas kui kesknurgas joonestatud eriliste lõikude suhted raadiusega. Peale kaare AB kasutatakse nende lõikude joonestamiseks veel selle kaare pikendust ja raadiust OM, mis on risti raadiusega OA.

Teravnurga üksikute trigonomeetriliste lõikude ja funktsioonide definitsioonid on järgmised:

1) Liikuva raadiuse otspunktist liikumatule raadiusele juhitud ristlõiku (BC) nimetatakse siinuslõiguks. Siinuslõigu ja raadiuse suhe on antud nurga siinus $\left(\sin\alpha = \frac{BC}{R}\right)$.

2) Siinuslõigu kaugust (OC) keskpunktist nimetatakse koosinuslõiguks. Koosinuslõigu ja raadiuse suhe on antud nurga koosinus $\left(\cos\alpha = \frac{OC}{R}\right)$.

3) Puutuja lõiku (AD) liikumatu raadiuse otspunktist kuni liikuva raadiuse pikenduseni nimetatakse tangenslõiguks. Tangenslõigu ja raadiuse suhe on antud nurga tangens $\left(\tan\alpha = \frac{AD}{R}\right)$.

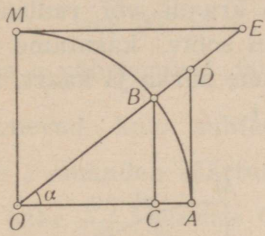
4) Puutuja lõiku (ME) liikumatu raadiusega risti seisva raadiuse otspunktist kuni liikuva raadiuse pikenduseni nimetatakse kootangenslõiguks. Kootangenslõigu ja raadiuse suhe on antud nurga kootangens $\left(\cot\alpha = \frac{ME}{R}\right)$.

5) Tangenslõigu otspunkti kaugust (OD) keskpunktist nimetatakse seekanslõiguks. Seekanslõigu ja raadiuse suhe on antud nurga seekans $\left(\sec\alpha = \frac{OD}{R}\right)$.

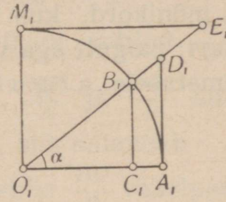
6) Kootangenslõigu otspunkti kaugust (OE) keskpunktist nimetatakse koosekanslõiguks. Koosekanslõigu ja raadiuse suhe on antud nurga koosekans $\left(\operatorname{cosec}\alpha = \frac{OE}{R}\right)$.

Seega, kui raadius on näiteks 9 cm ja siinuslõik on 6 cm, siis siinus on $\frac{2}{3}$.

§ 6. Teoreem. *Trigonomeetriliste funktsioonide väärtused olenevad nurga suurusest, kuid ei olene ringi raadiusest, milles nurka vaadeldakse.*



Joon. 2.



Joon. 3.

Olgu nurgad AOB ja $A_1O_1B_1$ joonistel 2 ja 3 võrdsed antud nurgaga α, kuid kaarte AB ja A_1B_1 raadiused OA ja O_1A_1 olgu erinevate pikkustega. Peame tõestama, et nurkade AOB ja $A_1O_1B_1$ ühenimelised funktsioonid on võrdsed.

Väärtusi, mis trigonomeetrilistel funktsioonidel on raadiuse R puhul, tähistame $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ jne. ja väärtusi, mis neil on raadiuse R_1 puhul, tähistame $\sin_1\alpha$, $\cos_1\alpha$ jne. Seega peame tõestama, et $\sin_1\alpha = \sin\alpha$, $\cos_1\alpha = \cos\alpha$ jne.

T õ e s t u s. Kolmnurgad $O_1B_1C_1$, $O_1D_1A_1$ ja $O_1M_1E_1$ on sarnased vastavalt kolmnurkadega OBC, ODA ja OME. Seepärast on:

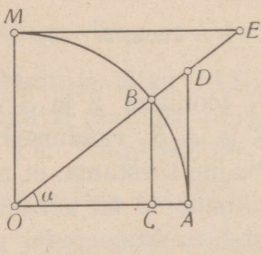
$$\frac{B_1C_1}{R_1} = \frac{BC}{R}, \quad \frac{O_1C_1}{R_1} = \frac{OC}{R}, \quad \frac{A_1D_1}{R_1} = \frac{AD}{R}$$

jne., s. o. $\sin_1\alpha = \sin\alpha$, $\cos_1\alpha = \cos\alpha$, $\tan_1\alpha = \tan\alpha$ jne.

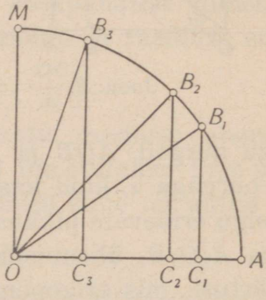
Seega ühe ja sama nurga trigonomeetrilisel funktsioonil on igasuguse raadiuse puhul üks ja sama väärtus.

§ 7. Eelmises paragrahvis on tõestatud, et antud nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtused ei muutu raadiuse pikkuse muutumisel; kuid nurga suuruse muutumisel muutuvad tema kõigi trigonomeetriliste funktsioonide väärtused, nagu nähtub joonisest.

§ 8. Et kesknurk ja temale vastav kaar väljenduvad ühe ja sama arvuga, siis nurga trigonomeetrilised funktsioonid on samal ajal ka kaare trigonomeetrilised funktsioonid, mõistes sõna k a a r e all tema kraadi- või radiaanmõõtu. Seepärast mõnikord, kus see on sobiv, kasutame nurkade asemel kaari; paiguti aga vaatleme nurka ja kaart, toetudes ühisele nimetusele a r g u m e n t.



Joon. 4.



Joon. 5.

§ 9. **Trigonomeetriliste funktsioonide muutumine nurga muutumisel 0°-st 90°-ni.** Kui nurk α joonisel 4 suureneb 0°-st 90°-ni, siis suhted $\frac{BC}{R}$, $\frac{AD}{R}$ ja $\frac{OD}{R}$ suurenevad, kuid suhted $\frac{OC}{R}$, $\frac{ME}{R}$ ja $\frac{OE}{R}$ vähenevad (joonisel 5 on näidatud siinuse ja koosinuse muutumine). Seega teravnurga suurenemisel tema siinus, tangens ja seekans kasvavad, kuid koosinus, kootangens ja koosekans kahanevad. Kui nurk α omandab väärtuse 90°, siis omandab

suhe $\frac{BC}{R}$ väärtuse 1, suhe $\frac{OC}{R}$ väärtuse 0, suhe $\frac{AD}{R}$ väärtuse ∞, suhe $\frac{ME}{R}$ väärtuse 0,

suhe $\frac{OD}{R}$ väärtuse ∞ ja suhe $\frac{OE}{R}$ väärtuse 1.

Seega on:

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0,$$
$$\tan 90^\circ = \infty, \quad \cot 90^\circ = 0,$$
$$\sec 90^\circ = \infty, \quad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1.$$

Nurga α vähenemisel 90°-st 0°-ni suhted $\frac{BC}{R}$, $\frac{AD}{R}$ ja $\frac{OD}{R}$ vähenevad, kuid suhted $\frac{OC}{R}$, $\frac{ME}{R}$ ja $\frac{OE}{R}$ suurenevad. Kui nurk α omandab väärtuse 0°, siis omandab

suhe $\frac{BC}{R}$ väärtuse 0, suhe $\frac{OC}{R}$ väärtuse 1,

suhe $\frac{AD}{R}$ väärtuse 0, suhe $\frac{ME}{R}$ väärtuse ∞,

suhe $\frac{OD}{R}$ väärtuse 1 ja suhe $\frac{OE}{R}$ väärtuse ∞.

Seega on:

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1,$$
$$\tan 0^\circ = 0, \quad \cot 0^\circ = \infty,$$
$$\sec 0^\circ = 1, \quad \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty.$$

Võrdusi, milles esineb lõpmatuse sümbol (∞), tuleb mõista tingimusi; nii tähendab võrdus $\tan 90^\circ = \infty$ ainult seda, et nurga l ä h e n e m i s e l 90°-le tema tangens p i i r a m a t u l t k a s v a b.

Seega näeme, et nurga α kasvamisel 0°-st 90°-ni

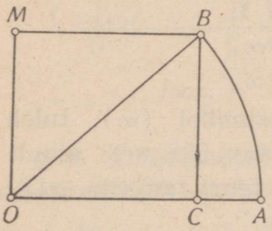
$\sin \alpha$ kasvab 0-st 1-ni, $\cos \alpha$ kahaneb 1-st 0-ni,
$\tan \alpha$ kasvab 0-st ∞-ni, $\cot \alpha$ kahaneb ∞-st 0-ni,
$\sec \alpha$ kasvab 1-st ∞-ni, $\operatorname{cosec} \alpha$ kahaneb ∞-st 1-ni.

Et 0° ja 90° on teravnurga ä ä r m i s e d väärtused, siis saadud tulemus osutab ka, missuguseid väärtusi iga trigonomeetriline funktsioon üldse võib omandada; nii näeme näiteks, et arv 3 võib olla tangensi, kootangensi, seekansi ja koosekansi väärtuseks, kuid ei või olla ei siinuse ega koosinuse väärtuseks.

§ 10. Teravnurga ehitamine antud trigonomeetrilise funktsiooni järgi. Paragrahvidest 6 ja 9 nähtub, et nurga α igale väärtusele vastab iga trigonomeetrilise funktsiooni kindel väärtus. Kuid ka ümberpöördult, mingi trigonomeetrilise funktsiooni igale väärtusele vastab kindla suurusega teravnurk. Allpool selgub, kuidas ehitada teravnurk, kui on antud tema ühe trigonomeetrilise funktsiooni väärtus. Toome vastavate konstruktsioonide näiteid.

Näide 1. Ehitada nurk, mille siinus on $\frac{2}{3}$ (joon. 6).

Lahendus. Joonestanud vabalt valitud lõigu OA, valime punkti O kaare keskpunktiks ja lõigu OA otsitava nurga liikumatuks raadiuseks ning joonestame selle raadiusega kaare AB. Et nurga siinus oleks $\frac{2}{3}$, peab kaare AB otspunkt B asetsema raadiusest OA kaugusel, mis suhtub raadiusega nagu $2:3$. Seepärast toimime järgmiselt: joonestame ristlõigu OM, mille pikkus on $\frac{2}{3}$ OA, joonestame punktist M rööpsirge raadiusele OA ning selle sirge ja kaare AB lõikepunkti B ühendame kaare keskpunktiga O. Nurk AOB ongi otsitav nurk, sest $\sin AOB = \frac{2}{3}$. Paneme tähele, et see nurk ei olene raadiuse pikkusest, sest igasuguse teise raadiuse pikkuse puhul saame kolmnurgaga OBC sarnase ja järelikult niisama suurte nurkadega kolmnurga.



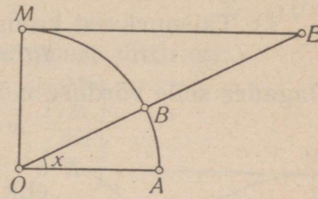
Joon. 6.

Näide 2. Ehitada nurk, mille kootangens on 2 (joon. 7).

Lahendus. Valides täisnurga AOM tipu keskpunktiks, joonestame vabalt valitud raadiusega kaare AM; olgu punkt

M selle kaare ja täisnurga haara OM lõikepunkt. Punktist M joonestame puutuja lõigu ME, mille pikkus on võrdne kahe raadiusega, ja ühendame punkti E keskpunktiga. Nurk AOB ongi otsitav nurk, sest $\cot AOB =$

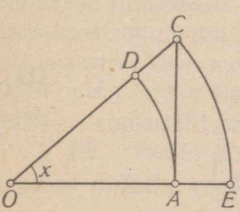
$$= \frac{ME}{R} = \frac{2R}{R} = 2.$$



Joon. 7.

Näide 3. Ehitada nurk, mille seekans on $\frac{4}{3}$.

Lahendus. Joonestame mingi kaare AB (joon. 8) ja, valides ta ühe raadiuse (OA) liikumatuks raadiuseks, joonestame selle otspunktist puutuja. Et seekans on $\frac{4}{3}$, siis puutuja lõigu otspunkti kaugus keskpunktist peab olema $\frac{4}{3}$ raadiust. Et seda saavutada, selleks võtame lõigu OE, mille pikkus on $\frac{4}{3} OA$, ja joonestame raadiusega OE punkti O ümber kaare EC lõikumiseni puutujaga AC. Kaare EC ja puutuja AC lõikepunkti C ühendame punktiga O. Nurk AOC ongi otsitav nurk. Nagu eelmisteski näidetes ei olene tulemus raadiuse pikkusest.



Joon. 8.

Õpilane ise ehitagu nüüd teravnurgad järgmistel andmetel: $\cos x = \frac{3}{5}$, $\tan x = \frac{4}{7}$ ja $\operatorname{cosec} x = 2$.

§ 11. Seega igale trigonomeetrilise funktsiooni väärtusele leiame vastava kindla teravnurga; varem aga nägime, et igale nurgale vastab kindel trigonomeetrilise funktsiooni väärtus. Seetõttu võime ütelda, et *teravnurk ja tema trigonomeetriline funktsioon täielikult määravad teineteise.*

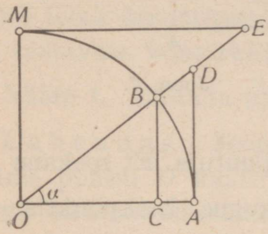
§ 12. Ühe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed. On kerge leida väga lihtsad seosed, mis kehtivad ühe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide vahel (joon. 9).

1) Täisnurksest kolmnurgast OBC leiame:

$$BC^2 + OC^2 = OB^2.$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled avaldisega R^2, saame:

$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OC}{R}\right)^2 = \left(\frac{OB}{R}\right)^2$$



Joon. 9.

ehk

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{I}$$

2) Kolmnurkade ODA ja OBC sarnasusest järeldub, et

$$\frac{AD}{OA} = \frac{BC}{OC};$$

asendades OA tähega R ja jagades teise suhte mõlemad liikmed R-ga, saame:

$$\frac{AD}{R} = \frac{\left(\frac{BC}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)}$$

ehk

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \tag{II}$$

3) Kolmnurkade EOM ja OBC sarnasuse tõttu on:

$$\frac{ME}{OM} = \frac{OC}{BC}, \quad \text{siit} \quad \frac{ME}{R} = \frac{\left(\frac{OC}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)}$$

ehk

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \tag{III}$$

4) Kolmnurkade ODA ja OBC sarnasuse tõttu on:

$$\frac{OD}{OA} = \frac{OB}{OC}, \quad \text{siit} \quad \frac{OD}{R} = \frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)}$$

ehk

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

kust saame

$$\sec\alpha \cdot \cos\alpha = 1. \tag{IV}$$

5) Kolmnurkade *EOM* ja *OBC* sarnasuse tõttu on:

$$\frac{OE}{OM} = \frac{OB}{BC}, \quad \text{siit} \quad \frac{OE}{R} = \frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)}$$

ehk

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},$$

kust saame

$$\operatorname{cosec}\alpha \cdot \sin\alpha = 1. \tag{V}$$

§ 13. Ühe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide vahel on olemas ainult viis iseseisvat seost. Selles veendume, lähtudes konstruktsioonist.

Selleks et ehitada nurk (§ 10), on küllalt, kui on teada üks funktsioon; kuid leitud nurk määrab viis ülejäänud funktsiooni. Seega, kui on teada nurga üks funktsioon, siis selle järgi on võimalik leida viis ülejäänud funktsiooni. Kuid viie tundmatu määramiseks vajame ka viit üksteisest sõltumatut võrrandit. Kui niisuguseid võrrandeid oleks kuus, siis leiaksime kõigi kuue funktsiooni jaoks kindlad (muutumatud) väärtused, mis ei saaks õige olla, sest funktsioonid muutuvad nurga muutumisel.

§ 14. Peale § 12 leitud viie põhiseose on kasulik meeles pidada veel kolm järgmist, mis on tuletatavad põhiseostest.

1) Korrutades võrduste (II) ja (III) vastavad pooled, saame:

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1. \tag{VI}$$

2) Jagades võrduse (I) liikmed avaldisega $\cos^2\alpha$ ning rakendades seoseid (II) ja (IV), saame (kui paigutame ümber vasema poole liikmed):

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha. \tag{VII}$$

3) Jagades võrduse (I) liikmed avaldisega $\sin^2 \alpha$ ning rakendades seoseid (III) ja (V), saame:

$$1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha. \qquad \text{(VIII)}$$

M ä r k u s 1. Seos (VI) on tuletatav ka vahenditult kolmnurkade *OAD* ja *EMO* sarnasusest, ning seoseid (VII) ja (VIII) on võimalik Pythagorase teoreemi abil tuletada samadest kolmnurkadest.

M ä r k u s 2. Meelespidamise kergendamiseks paneme tähele, et reas siinus, koosinus, tangens, kootangens, seekans ja koosekans, rea otsadest võrdsetel kaugustel seisvate funktsioonide iga korrutis on 1 [vt. seosed (IV), (V) ja (VI)].

Põhifunktsioonideks loeme siinust, koosinust ja tangensit, ülejäänud kolm funktsiooni on nende pöördarvud:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \ \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ ja } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

§ 15. Teades mingi nurga ühe funktsiooni väärtust on kerge § 12 ja 14 saadud seoste abil leida selle nurga kõigi teiste funktsioonide väärtused. Näiteks, kui $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, siis järk-järgult leiame:

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1; \qquad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}; \qquad \cot \alpha = \frac{4}{3};$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha; \qquad \sec^2 \alpha = \frac{25}{16}; \qquad \sec \alpha = \frac{5}{4};$$

$$\sec \alpha \cdot \cos \alpha = 1; \qquad \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}; \qquad \cos \alpha = \frac{4}{5};$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha; \qquad \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha; \qquad \sin \alpha = \frac{3}{5};$$

$$\operatorname{cosec} \alpha \cdot \sin \alpha = 1; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{3}.$$

Samad seosed võimaldavad mingi nurga ühe funktsiooni kaudu avaldada kõik teised funktsioonid. Näiteks, avaldades nurga siinuse kaudu teised funktsioonid, saame:

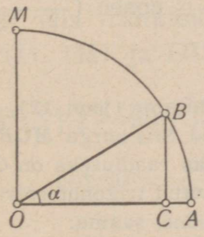
$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}; \quad \cot \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha};$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

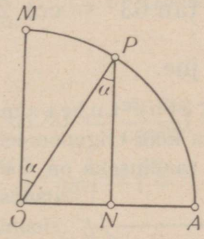
§ 16. Kolmnurkade OBC, ODA ja EOM (joon. 9) sarnasusest nähtub muuseas, et teravnurga kuus trigonomeetrilist funktsiooni ei ole muud kui kuus erinevat suhet, mis on mõeldavad, kui täisnurkse kolmnurga külgi võtta paarikaupa.

Tõepoolest, kolmnurga OBC külgedest on võimalik moodustada kuus järgmist suhet: $\frac{BC}{OB}$, $\frac{OC}{OB}$, $\frac{BC}{OC}$, $\frac{OC}{BC}$, $\frac{OB}{OC}$ ja $\frac{OB}{BC}$. Kuid joonestanud kaare ABM ning ehitanud kolmnurgad ODA ja EOM, võime asendada need suhted järgmistega: $\frac{BC}{R}$, $\frac{OC}{R}$, $\frac{AD}{R}$, $\frac{ME}{R}$, $\frac{OD}{R}$ ja $\frac{OE}{R}$. Sel asendamisel on märgatavaid paremusi, milledest üks näiteks seisneb selles, et suhted on omandanud ühise nimetajaga murdude kuju, mis kergendab nende võrdlemist üksteisega.

§ 17. Täiendusnurkade trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed. Täiendusnurkadeks nimetatakse kaht nurka, mille summa võrdub täisnurgaga. Näiteks nurgad α ja $90° - \alpha$; α ja $\frac{\pi}{2} - \alpha$; 26° ja 64° on täiendusnurgad.



Joon. 10.



Joon. 11.

Joonise 10 järgi, millel on ehitatud $\angle AOB = \alpha$ ning selle nurga siinuslõik ja koosinuslõik, on $\sin \alpha = \frac{BC}{R}$ ja $\cos \alpha = \frac{OC}{R}$.

Joonise 11 järgi (joonisel 11 esineva kaare raadius on sama, mis joonisel 10), millel on ehitatud $\angle AOP = 90° - \alpha$ ning selle nurga siinus- ja koosinuslõik, on $\sin(90° - \alpha) = \frac{PN}{R}$ ja $\cos(90° - \alpha) = \frac{ON}{R}$.

Et kolmnurgad OBC ja NOP on ühtivad, siis $NP = OC$ ja $ON = BC$ ning järelikult on:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha; \tag{1}$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha. \tag{2}$$

Vältides joonise segamist uute lõikude joonestamisega, tuletame analoogilised valemid ülejäänud funktsioonide kohta valemite (1) ja (2) ning § 12 valemite najal:

$$\tan(90° - \alpha) = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha; \tag{3}$$

$$\cot(90° - \alpha) = \frac{\cos(90° - \alpha)}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha; \tag{4}$$

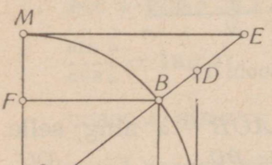
$$\sec(90° - \alpha) = \frac{1}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha; \tag{5}$$

$$\operatorname{cosec}(90° - \alpha) = \frac{1}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha. \tag{6}$$

Siit näeme, et *nurga funktsioonid on võrdsed täiendusnurga kaasfunktsioonidega**).

Nii on $\tan 63° = \cot 27°$; $\sec\frac{\pi}{6} = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$, s. o. $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}$ jne.

§ 18. Teine tuletamisviis. Ehitame (joon. 12) $\angle AOB = \alpha$ ja selle nurga kõik trigonomeetrilised lõigud. Siis nurga $MOB = 90° - \alpha$ liikumatuks raadiuseks on OM ja liikuvaks raadiuseks on OB. Rakendades nüüd § 5 antud trigonomeetriliste funktsioonide definitsioone, saame:



Joon. 12.

$$\sin\alpha = \frac{BC}{R} = \frac{OF}{R} = \cos(90° - \alpha);$$

$$\cos\alpha = \frac{OC}{R} = \frac{FB}{R} = \sin(90° - \alpha);$$

$$\tan\alpha = \frac{AD}{R} = \cot(90° - \alpha);$$

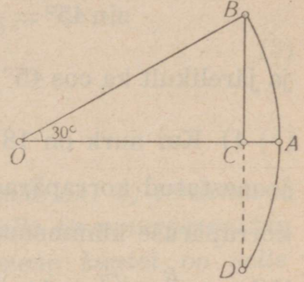
$$\cot\alpha = \frac{ME}{R} = \tan(90° - \alpha).$$

---

*) Siinust ja koosinust nimetatakse teineteise kaasfunktsioonideks; samuti on teineteise kaasfunktsioonid tangens ja kootangens ning seekans ja koosekans. Tõlkija.

§ 19. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamise näiteid. Puudutamata üldist võtet, vaatleme siin mõningaid juhtumeid, mis kergesti lahenduvad geomeetria võtete abil.

1) On antud nurk 30° ($\frac{\pi}{6}$) (joon. 13). Arvutada selle nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtused.



Joon. 13.

Pikendanud siinuslõigu kõõluks, saame ringisse joonestatud korrapärase kuusnurga külje, mis on võrdne raadiusega. Seega

$$BC = \frac{R}{2}$$

ja järelikult

$$\sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Ülejäänud viis funktsiooni leiame valemite (I), (II) ja (III) abil:

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cot 30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} \left(\text{ehk } \frac{1}{\tan 30°}\right) = \sqrt{3}.$$

2) On antud nurk 60° ($\frac{\pi}{3}$). Pikendades siinuslõigu kõõluks, saame ringisse joonestatud korrapärase kolmnurga külje, mis on $a_3 = R\sqrt{3}$, kus R on ringi raadius. Järelikult:

$$\sin 60° = \frac{\frac{1}{2}a_3}{R} = \frac{\frac{1}{2}R\sqrt{3}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Edasi, toimides samuti nagu esimeses näites, leiame:

$$\cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \tan 60° = \sqrt{3}, \quad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3) Võtame nurga 45° $(\frac{\pi}{4})$. Rakendades § 17 valemeid, saame:

sin 45° = cos 45°, tan 45° = cot 45°. Et sin 45° = cos 45°, siis

$$\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1,$$

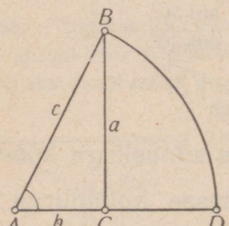
ja järelikult ka cot 45° = 1. Edasi leiame:

$$\sin 45° = \frac{1}{\operatorname{cosec} 45°} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ja järelikult ka $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) Kui nurk on 18° $(\frac{\pi}{10})$, siis siinuslõik võrdub ringisse joonestatud korrapärase kümmenurga poole küljega. Et aga korrapärase kümmenurga külg on $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, siis siinuslõik on $\frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)$ ja $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

§ 20. Täisnurkse kolmnurga külgede ja nurkade vahelised seosed. Näitame nüüd, kuidas trigonomeetriliste funktsioonide abil püstitada seoseid täisnurkse kolmnurga külgede ja nurkade vahel.



Joon. 14.

Kõigepealt lepime kokku tähiste suhtes. Kolmnurga külgede pikkusi tähistame tähtedega a, b ja c ning nende külgede vastasnurkade suurusi vastavalt tähtedega A, B ja C; seejuures eeldame, et kõik küljed on mõõdetud ühe ning sama ühikuga. Täisnurkses kolmnurgas tähistame täisnurka tähega C.

Asume nüüd valemite tuletamisele.

I. Joonestanud (joon. 14) raadiusega c kaare BD, leiame § 5 järgi, et

$$\frac{a}{c} = \sin A \qquad (1)$$

ja

$$\frac{b}{c} = \cos A, \tag{2}$$

s. o. *kaateti ja hüpotenuusi suhe on: 1) teravnurga siinus, kui kaatet asetseb teravnurga vastas, ja 2) teravnurga koosinus, kui kaatet on selle teravnurga haaraks.*

II. Jagades võrduse (1) pooled võrduse (2) vastavate pooltega ja ümberpöördult, leiame:

$$\frac{a}{b} = \tan A \tag{3}$$

ja

$$\frac{b}{a} = \cot A, \tag{4}$$

s. o. *täisnurkse kolmnurga kaatetite suhe on: 1) teravnurga tangens, kui esimene kaatet asetseb selle teravnurga vastas, ja 2) teravnurga kootangens, kui esimene kaatet on selle teravnurga haaraks.*

§ 21. Võrdusest (1) § 20 järeldub

$$a = c \cdot \sin A.$$

Kuid § 17 järgi võib $\sin A$ asemel võtta $\cos B$, sest $A + B = 90°$; siis saame

$$a = c \cdot \cos B.$$

Seega *kaatet võrdub hüpotenuusi ja vastasnurga siinuse ehk lähisnurga koosinuse korrutisega.*

Võrdusest (3) § 20 järeldub:

$$a = b \cdot \tan A.$$

Võttes $\tan A$ asemel $\cot B$, leiame veel:

$$a = b \cdot \cot B.$$

Seega *kaatet võrdub teise kaateti ja oma vastasnurga tangensi ehk oma lähisnurga kootangensi korrutisega.*

Võrdustest $\frac{a}{c} = \sin A$ ja $\sin A = \cos B$ järeldub, et

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B}.$$

Seega *hüpotenuus võrdub kaateti ja selle kaateti vastasnurga siinuse ehk lähisnurga koosinuse jagatisega.*

§ 22. Täisnurkse kolmnurga lahendamist selgitavad näited. Tabelite vajadusest. Kolmnurkade lahendamiseks on peale trigonomeetriliste valemite tarvilikud veel t a b e l i d, kust antud nurga järgi saab leida selle nurga trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse ja ümberpöördult, trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtuse järgi leida vastava nurga väärtuse. Tuntumad on V. Bradis'e „Neljakohalised matemaatilised tabelid" ja J. Prževalski „Viiekohalised tabelid". Selle paragrahvi näidetes kasutame N. Rõbkin'i trigonomeetria ülesannete kogu lõpus leiduvaid kolmekohalisi tabeleid.

Näide 1. Oletame, et täisnurkses kolmnurgas ABC on antud: $AB = 5$ cm ja $\angle A = 24°$; on vaja lahendada kolmnurk, s. o. arvutada BC, AC ja $\angle B$.

L a h e n d u s. Saame, et $B = 90° - A = 66°$. Edasi leiame § 21 järgi:

$$a = c \cdot \sin A = 5 \cdot \sin 24°$$

ja

$$b = c \cdot \cos A = 5 \cdot \cos 24°.$$

Asendades nüüd sin 24° ja cos 24° nende kolmekohalisest tabelist võetud väärtustega, saame:

$$a = 5 \cdot 0{,}407 = 2{,}035$$

ja

$$b = 5 \cdot 0{,}914 = 4{,}57.$$

Seega on $BC = 2{,}035$ cm ja $AC = 4{,}57$ cm.

Kontrollime:

$$a^2 = 2{,}035^2 = 4{,}1412,$$

$$b^2 = 4{,}57^2 = 20{,}8849;$$

järelikult $a^2 + b^2 = 25{,}0261$. Peaks aga olema 25.

See lahkuminek seletub sellega, et kasutatud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused olid ainult ligikaudsed.

Näide 2. Oletame, et täisnurkses kolmnurgas on antud kaatetid: $a = 14$ ja $b = 15$; on vaja arvutada hüpotenuus ja teravnurgad.

L a h e n d u s. § 20 järgi on $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{14}{15}$; arvutades selle suhte kolmekohalise murdosaga, saame $\tan A = 0{,}933$. Sellele tangensi väärtusele vastab tabelis nurk 43°; seega $A = 43°$ ja järelikult $B = 90° - A = 47°$. Arvutame nüüd hüpotenuusi, kasutades selleks trigonomeetrilist võtet. § 21 järgi on:

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{14}{\sin 43°};$$

asendades sin 43° tabelist võetud väärtusega, leiame

$$c = 14 : 0{,}682 = 20{,}528.$$

Kontrollides tulemust Pythagorase lause järgi, saame:

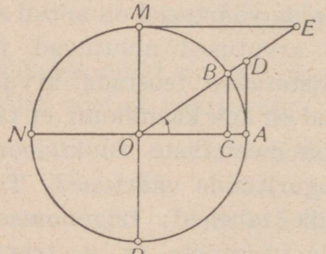
$$c = \sqrt{14^2 + 15^2} = 20{,}518.$$

Kontroll näitab, et tehtud arvutused ei evi suurt täpsust. Et saavutada suuremat täpsust, selleks tuleb kasutada detailsemaid tabeleid, milles funktsioonide väärtused on antud suurema kohtade arvuga; kuid siis arvutused muutuvad juba raskepärasemaks. Seepärast eelistatakse teostada arvutusi logaritmide abil; niisugusel korral on aga kasulikum, et tabeleis oleksid antud mitte trigonomeetriliste funktsioonide eneste väärtused, vaid nende logaritmide väärtused. Tegelikult nii ongi koostatud enamik tabeleid; trigonomeetriliste funktsioonide loomulikkude väärtuste (s. o. trigonomeetriliste funktsioonide eneste väärtuste) tabeleid aga kasutatakse võrdlemisi harva.

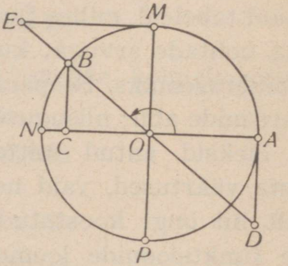
Eelmistes näidetes me ei puudutanud sugugi kaldnurksete kolmnurkade lahendamist. Nende lahendamine taandub kergesti täisnurksete kolmnurkade lahendamisele. Selleks piisab, kui jaotame kolmnurga ühe kõrguse joonestamisega kaheks täisnurkseks kolmnurgaks. Kuid nagu näeme edaspidi, on kaldnurksete kolmnurkade lahendamiseks ka teisi võtteid.

II. 90° kuni 360° suuruste nurkade trigonomeetrilised funktsioonid.

§ 23. Eelmärkusi. Võtame nüüd varem kasutatud veerandringi asemel (joon. 1, lk. 9) terve ringi (joon. 15) ning joonestame selles rõhtläbimõõdu *NA* ja püstläbimõõdu *PM*. Need läbimõõdud jaotavad ringi neljaks veerandiks (kvadrandiks): *AOM* — esimene veerand, *MON* — teine veerand, *NOP* — kolmas veerand ja *POA* — neljas veerand. Nagu varemgi, loeme raadiust *OA* liikumatuks raadiuseks, millest algab nurkade lugemine; tema otspunkti *A* võtame kaarte lugemise alguseks. Nurki, mis tekivad liikuva raadiuse *OB* pöörlemisel kellaosuti liikumisele vastupidises suunas, loeme positiivseiks; nurki, mis tekivad liikuva raadiuse pöörlemisel vastassuunas, loeme negatiivseiks.



Joon. 15.

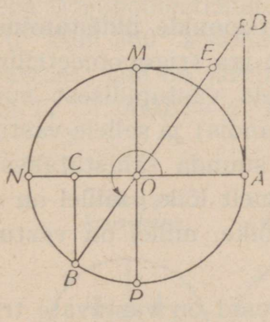


Joon. 16.

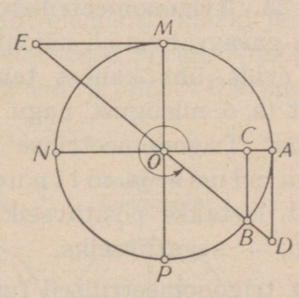
§ 24. Trigonomeetriliste lõikude ehitamine. Laiendame nüüd trigonomeetriliste lõikude mõisteid, mis § 5 olid antud ainult teravnurga puhul, ka täisnurgast suuremaile nurkadele.

Võtame nürinurga AOB (joon. 16). Selle nurga siinuslõiguks on liikuva raadiuse otspunktist liikumatu raadiuse p i k e n d u s e l e juhitud ristlõik BC; koosinuslõiguks on OC. Tangenslõigu leidmiseks joonestame puutuja punktist A ja pikendame raadiust OB lõikumiseni puutujaga. Selleks peame puutuja joonestama punktist A allapoole ja raadiust OB pikendama teisele poole keskpunkti; tangenslõiguks on siis lõik AD. Kootangenslõigu leidmiseks peame punktist M joonestama puutuja kuni lõikumiseni raadiuse OB pikendusega, s. o. vasemale punktist M. Kootangenslõiguks on lõik ME. Seekans- ja koosekanslõikudeks on lõigud OD ja OE.

Just samuti ehitatakse trigonomeetrilised lõigud neil juhtudel, kui liikuv raadius on kolmandas ja neljandas veerandis (joon. 17 ja 18).



Joon. 17.



Joon. 18.

Võrreldes joonist 15 joonistega 16, 17 ja 18 märkame, et ühel ja samal trigonomeetrilisel lõigul on eri joonistel eri suunad, ja nimelt:

1) siinuslõik (BC) on suunatud I ja II veerandis rõhtläbimõõdust ülespoole, kuid III ja IV veerandis sellest allapoole;

2) koosinuslõik (OC) on suunatud I ja IV veerandis keskpunktist paremale, kuid II ja III veerandis sellest vasemale;

3) tangenslõik (AD) on suunatud I ja III veerandis puutepunktist ülespoole, kuid II ja IV veerandis sellest allapoole;

4) kootangenslõik (ME) on suunatud I ja III veerandis puutepunktist paremale, kuid II ja IV veerandis sellest vasemale;

5) seekanslõigu (OD) suund I ja IV veerandis langeb ühte liikuva raadiuse suunaga, kuid II ja III veerandis on vastupidine liikuva raadiuse suunale;

6) koosekanslõigu (OE) suund I ja II veerandis langeb ühte liikuva raadiuse suunaga, kuid III ja IV veerandis on vastupidine liikuva raadiuse suunale.

Nii on iga nurga trigonomeetrilisel lõigul üks kahest suunast: kas see, mis I veerandis või sellele vastupidine.

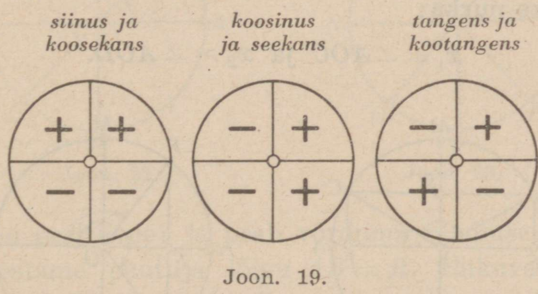
§ 25. **Trigonomeetriliste funktsioonide üldistamine.** Eelmises paragrahvis oli näidatud, et iga trigonomeetriline lõik võib evida üht kahest teineteisele vastupidisest suunast: otsest (s. o. niisugust, nagu I veerandis) ja sellele vastupidist suunda. Trigonomeetrilise lõigu suunda tähistatakse märkidega p l u s s ja m i i n u s. Nimelt lõike, millel on otsene suund, loetakse positiivseiks ja lõike, millel on vastupidine suund, — negatiivseiks.

Et trigonomeetrilised funktsioonid on vastavate trigonomeetriliste lõikude suhted raadiusega ja et raadiust alati loeme positiivseks, siis igal trigonomeetrilisel funktsioonil on sama märk, mis niisuguse suhte esimesel liikmel, s. o. vastaval trigonomeetrilisel lõigul.

Arvestades seda märkust, saame eri veerandite nurkade trigonomeetrilistele funktsioonidele järgmises tabelis ja joonisel 19 näidatud märgid (nurka loetakse selle veerandi nurgaks, milles asetseb nurga üheks haaraks olev liikuv raadius).

	I	II	III	IV
sin	$+\frac{BC}{R}$	$+\frac{BC}{R}$	$-\frac{BC}{R}$	$-\frac{BC}{R}$
cos	$+\frac{OC}{R}$	$-\frac{OC}{R}$	$-\frac{OC}{R}$	$+\frac{OC}{R}$
tan	$+\frac{AD}{R}$	$-\frac{AD}{R}$	$+\frac{AD}{R}$	$-\frac{AD}{R}$
cot	$+\frac{ME}{R}$	$-\frac{ME}{R}$	$+\frac{ME}{R}$	$-\frac{ME}{R}$
sec	$+\frac{OD}{R}$	$-\frac{OD}{R}$	$-\frac{OD}{R}$	$+\frac{OD}{R}$
cosec	$+\frac{OE}{R}$	$+\frac{OE}{R}$	$-\frac{OE}{R}$	$-\frac{OE}{R}$

Seega trigonomeetriliste funktsioonide väärtused nurkade puhul 0° kuni 360° sisaldavad kaht elementi: märki ja absoluutväärtust; nad on järelikult relatiivsed arvud. Niisiis, kui joonisel 17 $\angle AOB = \alpha$, $R = 1{,}2$ cm ja $BC = 0{,}9$ cm, siis $\sin \alpha = -\frac{3}{4}$.



Joon. 19.

Nüüd võime üldistatud trigonomeetriliste funktsioonide definitsiooni sõnastada nii: *trigonomeetriliste funktsioonide väärtused on positiivsed või negatiivsed arvud, mis väljenda-*

vad vastavate trigonomeetriliste lõikude suhteid raadiusega ja näitavad nende lõikude suundi.

Joonisel 19 on näidatud trigonomeetriliste funktsioonide märgid eri veerandeis.

§ 26. Nurga ehitamine antud trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse järgi. Funktsiooni väärtus võib olla nii positiivne kui ka negatiivne.

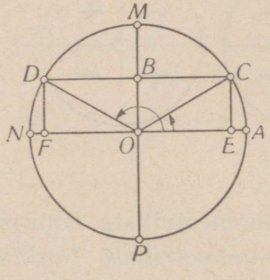
Konstruktsiooniks kasutame nüüd tervet ringi (vabalt võetud raadiusega) ühes tema rõht- ja püstläbimõõduga. Funktsiooni märk osutab trigonomeetrilise lõigu suunda ja funktsiooni absoluutväärtus — selle lõigu suhet raadiusega.

Vaatleme näiteid.

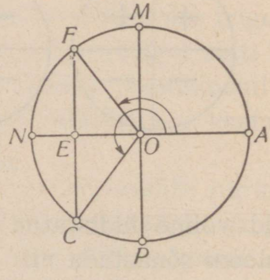
Näide 1. Ehitada nurk x, kui $\sin x = \frac{1}{2}$.

L a h e n d u s. Et siinuse väärtus on positiivne, siis siinuslõik peab asetsema ülemises poolringis. Siinuslõigu pikkus peab võrduma poole raadiusega. Seepärast toimime nii (joon. 20): pealpool rõhtläbimõõtu joonestame talle rööpsirge kaugusel $OB = \frac{1}{2} R$; see sirge lõikab ringjoont k a h e s punktis (C ja D). Ühendades ringi keskpunkti O punktidega C ja D, saame kaks nurka:

$$x_1 = \angle AOC \text{ ja } x_2 = \angle AOD.$$



Joon. 20.



Joon. 21.

Need kaks nurka rahuldavad seatud nõuet, sest

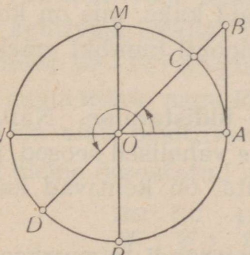
$$\sin AOC = \frac{CE}{R} = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2}; \ \sin AOD = \frac{DF}{R} = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2}.$$

Näide 2. Ehitada nurk x, kui $\cos x = -\frac{3}{5}$.

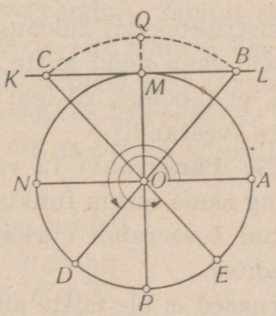
L a h e n d u s. Koosinuse väärtus on negatiivne, järelikult koosinuslõik peab olema suunatud vasemale. Koosinuslõik peab sisaldama kolm niisugust osa, missuguseid raadiuses on viis. Seepärast joonestame (joon. 21) $OE = \frac{3}{5}R$, seejärel joonestame läbi punkti E sirge EF risti rõhtläbimõõduga. Sirge EF lõikab ringjoont k a h e s punktis (F ja C). Otsitavad nurgad on: $x_1 = \angle AOF$ ja $x_2 = \angle AOC$ ($> 180°$).

Näide 3. Ehitada nurk x, kui $\tan x = 1$.

L a h e n d u s. Ehitame esmalt tangenslõigu: see peab olema suunatud punktist A ülespoole (sest antud tangensi



Joon. 22.



Joon. 23.

väärtus on positiivne) ja peab võrduma raadiusega; seepärast joonestame puutuja lõigu $AB = R$. Liikuva raadiuse pikendus peab läbima punkti B; seepärast joonestame lõikaja BD, mis läbib ringi keskpunkti (joon. 22). See lõikab ringjoont kahes punktis C ja D. Nurgad $x_1 = \angle AOC$ ja $x_2 = \angle AOD$ ($> 180°$) rahuldavad asetatud nõuet.

Näide 4. Ehitada nurk x, kui $\operatorname{cosec} x = -\frac{4}{3}$.

L a h e n d u s. Koosekanslõik peab algama ringi keskpunktis ja lõppema puutujal KL ning ta pikkus peab olema $\frac{4}{3} R$; seepärast joonestame ringi keskpunkti O ümber kaare raadiusega $OQ = \frac{4}{3} R$ (joon. 23). See kaar lõikab puutujat KL punktides B ja C; OB ja OC on koosekanslõigu kaks võimalikku asendit. Et antud koosekansi väärtus on negatiivne, siis OB ja OC suunad peavad olema vastupidised liikuva raadiuse suunale. Seepärast liikuva raadiuse asend on kas OD või OE, ja nurk x on kas nurk AOD ($>180°$) või nurk AOE ($>270°$).

Jätame õpilasele endale teostada nurga konstruktsiooni ka teistel juhtudel (võttes näiteks $\sin x = -\frac{3}{5}$; $\cos x = \frac{3}{4}$; $\tan x = -2$; $\cot x = \frac{7}{4}$; $\cot x = -3$; $\sec x = 2$; $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{4}$).

Konstruktsiooni tulemuste kohta on tähtis märkida, et vastuseid saab nüüd mitte üks, vaid kaks, mis on kooskõlas sellega, et tabelis § 25 igal funktsioonil kumbki märk esineb k a h e s veerandis.

§ 27. Paragrahvi 12 valemite üldistamine. Näitame, et ühe ning sama nurga funktsioonide vahelised seosed, mis olid tuletatud I veerandi nurkade kohta, on kehtivad ka teistes veerandites.

Sarnased ei ole mitte ainult I veerandi täisnurksed kolmnurgad OBC, ODA ja EOM, mida kasutasime § 12, vaid ka teiste veerandite vastavad kolmnurgad (joon. 15—18), ja seepärast need g e o m e e t r i l i s e d seosed, mis leidsime § 12, jäävad kehtivaiks ka nüüd. Seega kõigis veerandeis on:

$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OC}{R}\right)^2 = 1; \qquad (1)$$

$$\frac{AD}{R} = \frac{BC}{R} : \frac{OC}{R}; \qquad (2)$$

$$\frac{ME}{R} = \frac{OC}{R} : \frac{BC}{R}; \tag{3}$$

$$\frac{OD}{R} \cdot \frac{OC}{R} = 1; \tag{4}$$

$$\frac{OE}{R} \cdot \frac{BC}{R} = 1. \tag{5}$$

Neis valemeis ei ole küll arvestatud lõikude suundi, s. o. nende märke, kuid vaadeldes § 25 tabelit üksikute veerandite kaupa, märkame, et ka nõutavate märkide arvestamisel võrdused (1) — (5) jäävad kehtivaks. Tõepoolest: et võrduses (1) esinevad astendajad on paarisarvulised, siis sulgudes võivad esineda mistahes märgid; kehtivaiks jäävad ka võrdused (2) ja (3), sest (nagu nähtub jooniseist 15—18) lõigud AD ja ME on positiivsed neis veerandeis, milles lõikudel BC ja OC on üks ning sama märk (I ja III veerandis), ning lõigud AD ja ME on negatiivsed neis veerandeis, milles lõikudel BC ja OC on erinevad märgid (II ja IV veerandis). Samuti ei riku võrduse (4) kehtivust lõikude OD ja OC märgid ega võrduse (5) kehtivust lõikude OE ja BC märgid, sest (nagu nähtub jooniseist 15—18) kõigis veerandeis on lõikudel OD ja OC üks ning sama märk, nagu lõikudel OE ja BC, nii et need kaks korrutist on alati positiivsed [1].

Nüüd oleme õigustatud asendama suhted

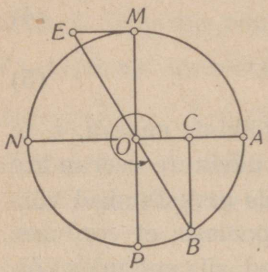
$$\frac{BC}{R}, \frac{OC}{R}, \frac{AD}{R}, \frac{ME}{R}, \frac{OD}{R}, \frac{OE}{R}$$

vastavate funktsioonidega sin α, cos α, tan α, cot α, sec α ja cosec α. Nii saame valemid (I) — (V) (§ 12), kuid nüüd juba mistahes nurga jaoks 0°-st 360°-ni.

---

[1] Oleks võinud kasutada ka tabelit § 25, millest nähtub, et neis veerandeis, milles siinusel ja koosinusel on üks ning sama märk (I ja III veerandis), tangens ja kootangens on positiivsed ning neis veerandeis, milles siinusel ja koosinusel on erinevad märgid (II ja IV veerandis), tangens ja kootangens on negatiivsed.

Seega oleme näidanud valemite (I) — (V) (§ 12) kehtivust täisnurgast suuremate nurkade puhul; sama on õige ka valemite (VI) — (VIII) (§ 14) kohta, sest nad on valemite (I) ja (V) järeldused.



Joon. 24.

Näide. Parema selguse saamiseks käsitleme üksikasjalisemalt üht näidet. Tuletame näiteks valemi $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ IV veerandi nurkade kohta.

Joonise 24 järgi on:

$$\cot\alpha = -\frac{EM}{R}; \quad \cos\alpha = +\frac{OC}{R} \quad \text{ja} \quad \sin\alpha = -\frac{BC}{R}. \qquad \text{(a)}$$

Et $\triangle OME \backsim \triangle OBC$, siis $\frac{ME}{OM} = \frac{OC}{BC}$,

siit
$$\frac{ME}{R} = \frac{\left(\frac{OC}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)}. \qquad \text{(b)}$$

Varustades siin esinevad trigonomeetrilised lõigud neile IV veerandis kuuluvate märkidega, näeme, et need märgid on niisugused, et nad ei riku võrduse kehtivust [vt. (a)]; saame nimelt:

$$-\frac{ME}{R} = \frac{\left(+\frac{OC}{R}\right)}{\left(-\frac{BC}{R}\right)}, \text{ s. o. } \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

§ 28. Valemite (I) — (VIII) rakendamine. Nagu nähtub näiteist, on praegune valemite rakendamine pisut erinev sellest, mis oli tehtud § 15.

Näide 1. Leida cosec α teades, et α on IV veerandi nurk[1] ja et $\cot\alpha = -\frac{15}{8}$.

---

[1] S. o. nurga α liikuv raadius asetseb IV veerandis.

L a h e n d u s. Valem (VIII) järgi on

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{289}{64}.$$

Et IV veerandis koosekans on negatiivne, siis kirjutame

$$\operatorname{cosec} \alpha = -\sqrt{\frac{289}{64}} = -\frac{17}{8}.$$

Näide 2. $\cos\alpha$ avaldada $\sin\alpha$ kaudu.

L a h e n d u s. Valemist (I) saame $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$; et koosinus üldiselt võib evida nii positiivseid kui negatiivseid väärtusi ja et meil puuduvad andmed märgi valikuks, siis saame, et

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Näide 3. Teades, et $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, leida nurga α kõigi teiste funktsioonide väärtused.

L a h e n d u s. Arvutame sama kava järgi nagu § 15, kuid $\sec \alpha$ määramisel säilitame juure ees mõlemad märgid, sest tangensi negatiivse väärtuse puhul seekans võib olla nii positiivne (IV veerand) kui ka negatiivne (II veerand); siit alates saame ka iga ülejäänud funktsiooni jaoks kaks väärtust (välja arvatud kootangens, millel on alati sama märk, mis tangensil).

Kokkuvõttes saame:

$$\cot \alpha = -\frac{4}{3};\ \sec \alpha = \pm\frac{5}{4};\ \cos \alpha = \pm\frac{4}{5};$$

$$\sin \alpha = \mp\frac{3}{5};\ \operatorname{cosec} \alpha = \mp\frac{5}{3}$$

ehk kirjutades kummagi vastuse eraldi:

$$1)\ \cot \alpha = -\frac{4}{3};\ \sec \alpha = +\frac{5}{4};\ \cos \alpha = +\frac{4}{5};$$

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5};\ \operatorname{cosec} \alpha = -\frac{5}{3};$$

$$2)\ \cot \alpha = -\frac{4}{3};\ \sec \alpha = -\frac{5}{4};\ \cos \alpha = -\frac{4}{5};$$

$$\sin \alpha = +\frac{3}{5};\ \operatorname{cosec} \alpha = +\frac{5}{3}.$$

(Esimene vastus kuulub IV veerandi ja teine — II veerandi nurgale.)

§ 29. Trigonomeetriliste funktsioonide muutumine nurga kasvamisel 0°-st 360°-ni. Funktsioonide muutmist nurga kasvamisel 0°-st 90°-ni on juba vaadeldud § 9. Funktsioonide muutumise vaatlemiseks nurga kasvamisel 90°-st 180°-ni, 180°-st 270°-ni ja 270°-st 360°-ni kasutame vastavalt jooniseid 16, 17 ja 18 (§ 24) ja nimelt: määranud esmalt funktsiooni märgi, arutleme ta absoluutväärtuse kohta samuti kui § 9. Lõplikud tulemused on esitatud allolevas tabelis, milles on toodud ainult need äärmised argumendi ja funktsiooni väärtused, mis nad omandavad üksikuis veerandeis; nende väärtuste vahel funktsioon kas a i n u l t kasvab või a i n u l t kahaneb.

	I 0° . . . 90° $\left(0 \ . \ . \ . \ \frac{1}{2}\pi\right)$	II 90° . . . 180° $\left(\frac{1}{2}\pi \ . \ . \ . \ \pi\right)$	III 180° . . . 270° $\left(\pi \ . \ . \ . \ \frac{3}{2}\pi\right)$	IV 270° . . . 360° $\left(\frac{3}{2}\pi \ . \ . \ . \ 2\pi\right)$
sin	0 . . . +1	+1 . . . 0	0 . . . —1	—1 . . . 0
cos	+1 . . . 0	0 . . . —1	—1 . . . 0	0 . . . +1
tan	0 . . . +∞	—∞ . . . 0	0 . . . +∞	—∞ . . . 0
cot	+∞ . . . 0	0 . . . —∞	+∞ . . . 0	0 . . . —∞
sec	+1 . . . +∞	—∞ . . . —1	- 1 . . . —∞	+∞ . . . +1
cosec	+∞ . . . +1	+1 . . . +∞	—∞ . . . —1	—1 . . . —∞

Et trigonomeetrilised funktsioonid nüüd väljenduvad relatiivsete arvudega, siis tuleb teha vahet f u n k t s i o o n i kasvamise ja kahanemise ning tema absoluutväärtuse kasvamise ja kahanemise vahel. Näiteks argumendi kasvades 90°-st 180°-ni koosinuse absoluutväärtus kasvab, kuid koosinus ise, olles negatiivne, kahaneb. Samuti argumendi kasvades tangens *relatiivses* mõttes *alati* kasvab, kootangens aga kahaneb.

Ülalleitule lisame veel mõned näpunäited.

I. Tabelist nähtub, missuguseis vahemikes muutub iga funktsioon; märgime üles:

1) siinus ja koosinus muutuvad vahemikus -1 kuni $+1$ (nii et nende absoluutväärtused kunagi ei ületa arvu 1);

2) tangens ja kootangens muutuvad vahemikus $-\infty$ kuni $+\infty$ (seepärast tangensi ja kootangensi väärtuseks võib olla mistahes arv);

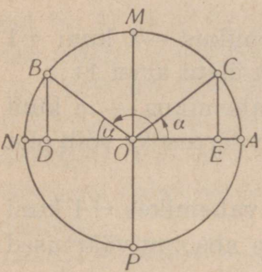
3) seekans ja kootangens muutuvad vahemikes $+1$ kuni $+\infty$ ja -1 kuni $-\infty$ (järelikult nende absoluutväärtused ei ole kunagi väiksemad kui 1).

II. Juhime tähelepanu mõnede tulemuste *kahesusele*. Nii näeme, et $\tan 90° = +\infty$, kui 90° on saadud teravnurga suurendamise teel, ja $\tan 90° = -\infty$, kui 90° on saadud nürinurga vähendamise teel; kui on teadmata, kuidas nurk on omandanud väärtuse 90°, siis tuleb kirjutada, et $\tan 90° = \pm\infty$. Samuti leiame, et $\cot 90° = \pm\infty$ jne.

Märkus. Tutvunud joonise abil siinuse ja koosinuse muutumisega, võib teiste funktsioonide muutumist kergesti jälgida ka ilma jooniseta — kasutades nende olenevust siinusest ja koosinusest. Nii võib käsitleda näiteks $\tan\alpha$ muutumist kui murru $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ muutumist, $\sec\alpha$ muutumist kui murru $\frac{1}{\cos\alpha}$ muutumist jne.

§ 30. Taandamisvalemid. Täisnurgast suuremate nurkade trigonomeetrilisi funktsioone on kerge avaldada teravnurga funktsioonide abil ehk *taandada* teravnurga funktsioonideks. Selleks kasutame kaht *teravnurka*, mis liikuv raadius moodustab rõht- ja püstläbimõõduga (nende nurkade summa on 90°); näiteks, kui joonisel 25 on $\angle AOB = 143°$, siis nimetatud nurgad on $\angle NOB = 37°$ ja $\angle MOB = 53°$, ning nurga 143° funktsioone võime taandada kas 37° või 53° funktsioonideks. Selgitame kõigepealt näidetega, kuidas seda teostada.

Näide 1. Nürinurga funktsioonid taandada niisuguse teravnurga funktsioonideks, mis seda nürinurka täiendab 180°-ni. Joonisel 25 nürinurga AOB täienduseks 180°-ni on nurk NOB, mille suuruse tähistame tähega α; siis $\angle AOB = 180° - \alpha$. Et ehitada nurga α trigonomeetrilised lõigud, peame esmalt selle nurga paigutama ühisele algusele OA; olgu $\angle AOC = \alpha$. Joonestanud siinuslõigud BD ja CE, saame



Joon. 25.

$$\sin(180° - \alpha) = +\frac{BD}{R} \text{ ja } \sin\alpha = +\frac{CE}{R};$$

et aga $BD = CE$, siis

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha. \tag{a}$$

Edasi leiame:

$$\cos(180° - \alpha) = -\frac{OD}{R} \tag{1}$$

ja

$$\cos\alpha = +\frac{OE}{R}. \tag{2}$$

Võrduste (1) ja (2) paremate poolte absoluutväärtused on võrdsed (sest $OD = OE$), kuid nad erinevad märkidelt; et neid täielikult võrrutada, selleks korrutame võrduse (2) mõlemad pooled arvuga —1, jättes muutmata võrduse (1). Siis saame:

$$-\cos\alpha = \mp\frac{OE}{R}. \tag{3}$$

Võrduste (1) ja (3) paremad pooled on võrdsed, järelikult on

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha. \tag{b}$$

Valemite (a) ja (b) abil leiame ülejäänud funktsioonide taandamisvalemid (§ 27 ja 12 põhjal):

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha;$$

$$\cot(180° - \alpha) = \frac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha;$$

$$\sec(180° - \alpha) = \frac{1}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\frac{1}{\cos\alpha} = -\sec\alpha;$$

$$\operatorname{cosec}(180° - \alpha) = \frac{1}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

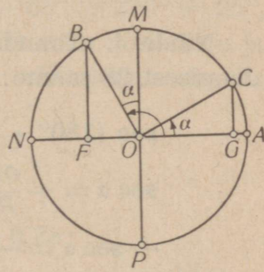
Näide 2. Nürinurga funktsioonid taandada teravnurga funktsioonideks. Joonisel 26 võime nurka AOB vaadelda summana $90° + \alpha$, kus α tähistab nurga MOB suurust. Ehitanud ühisele algusele $\triangle AOC = \alpha$ ning joonestanud siinuslõigud BF ja CG, saame:

$$\sin(90° + \alpha) = +\frac{BF}{R}; \qquad (1)$$

$$\cos(90° + \alpha) = -\frac{OF}{R}; \qquad (2)$$

$$\sin\alpha = +\frac{CG}{R}; \qquad (3)$$

$$\cos\alpha = +\frac{OG}{R}. \qquad (4)$$



Joon. 26.

Et $BF = OG$,

siis $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$. (a)

Et $OF = CG$, siis, korrutades võrduse (2) mõlemad pooled arvuga —1, leiame, et

$$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha. \qquad \text{(b)}$$

Võrdustest (a) ja (b) võib tuletada ülejäänud funktsioonide taandamisvalemid samal viisil nagu näites 1; nii leiame:

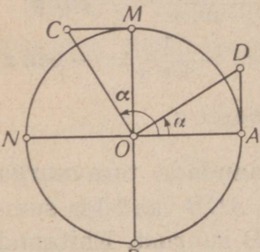
$$\tan(90° + \alpha) = -\cot\alpha;$$

$$\sec(90° + \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha;$$

$$\cot(90° + \alpha) = -\tan\alpha;$$

$$\operatorname{cosec}(90° + \alpha) = \sec\alpha.$$

Näide 3. Taandada cot $(90°+\alpha)$ nurga α funktsiooniks (kasutamata seejuures selle nurga teisi funktsioone) (joonis 27). Joonestades nurga AOC kootangenslõigu MC, saame kolmnurga MOC. Seejärel ehitame ühisele algusele nurga α ja joonestame kolmnurga AOD, mis on võrdne kolmnurgaga MOC. Siis leiame:



Joon. 27.

$$\cot(90° + \alpha) = -\frac{MC}{R}; \quad (1)$$

$$MC = AD; \quad (2)$$

$$\tan\alpha = +\frac{AD}{R}; \quad (3)$$

$$-\tan\alpha = -\frac{AD}{R}. \quad (4)$$

Võrdustest (1), (2) ja (4) järeldub, et

$$\cot(90° + \alpha) = -\tan\alpha.$$

Näide 4. Taandada sec $(180°+\alpha)$ nurga α funktsiooniks. Joonisest 28 saame:

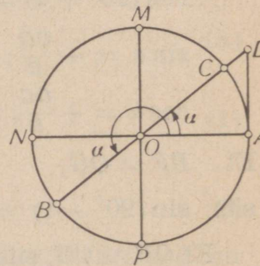
$$\sec(180° + \alpha) = -\frac{OD}{R}; \quad (1)$$

$$\sec\alpha = +\frac{OD}{R}; \quad (2)$$

$$-\sec\alpha = -\frac{OD}{R}. \quad (3)$$

Võrdustest (1) ja (3) järeldub, et

$$\sec(180°+\alpha) = -\sec\alpha.$$



Joon. 28.

Reeglid ja näiteid. Kõikide juhtude ($90° \mp \alpha$, $180° \mp \alpha$, $270° \mp \alpha$ ja $360° - \alpha$) eritlus annaks meile 42 taandamisvalemit[1], kuid neid kõiki saab võtta kokku järgmistesse lihtsatesse reeglitesse:

1) kui taandatava funktsiooni väärtus on negatiivne, siis teravnurga funktsioon tuleb korrutada arvuga —1;

[1] Nende hulka kuuluvad ka § 17 valemid.

2) kui teravnurk on võetud rõhtläbimõõdu juures, siis säilib taandatava funktsiooni nimetus; kui aga teravnurk on võetud püstläbimõõdu juures, siis funktsiooni nimetus asendub kaasfunktsiooni nimetusega.

Rakendame neid reegleid järgmistes näidetes:

1) Taandada $\tan 130°$ teravnurga funktsioonideks. Et $130° = 180° - 50° = 90° + 40°$, siis $\tan 130°$ saab taandada nii 50°-se kui ka 40°-se nurga funktsioonideks. Teades, et $\tan 130°$ on negatiivne, ja pidades meeles, et nurk 50° asetseb rõhtläbimõõdu juures ja nurk 40° püstläbimõõdu juures, kirjutame:

$$\tan 130° = -\tan 50° \quad \text{ja} \quad \tan 130° = -\cot 40°.$$

2) Taandada $\sec 295°$ niisuguse teravnurga funktsioonideks, mis ei ületa 45°. Et $295° = 360° - 65° = 270° + 25°$, siis nõutav nurk on 25°. Et $\sec 295°$ väärtus on positiivne ja nurk 25° asetseb püstläbimõõdu juures, siis saame reeglite põhjal: $\sec 295° = \operatorname{cosec} 25°$.

3) Veel näiteid:

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$;

b) $\tan 1{,}2\,\pi = \tan(\pi + 0{,}2\,\pi) = \tan 0{,}2\pi$;

c) $\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

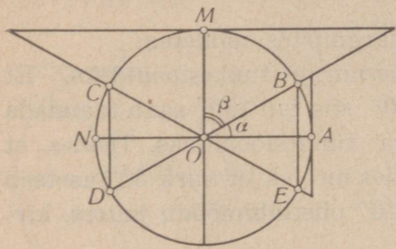
§ 31. **Teissugune taandamisvalemite tuletamine.** Esmalt juhime tähelepanu sellele, et I veerandis trigonomeetrilise lõigu suhe raadiusega võrdub alati funktsiooni väärtusega, kuid teistes veerandites mõnikord ainult funktsiooni absoluutväärtusega[1]. Vaatleme nüüd joonist 29. Võrreldes kaarte *AMC*, *AMND* ja *AMNDE* trigonomeetrilisi lõike kaare *AB* omadega, näeme, et nad on kas ühed ning samad või on vastavalt võrdsed. Siit järeldame, et kaarte $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ ja $360° - \alpha$ funktsioonide absoluutväärtused on võrdsed kaare α samade funktsioonidega.

2) Et avaldisi $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ ja $360° - \alpha$ võib asendada avaldistega $90° + \beta$, $270° - \beta$ ja $270° + \beta$ ja et kaare α funktsioonid võrdu-

---

[1] Kui funktsiooni väärtus on negatiivne.

vad kaare β (kui täienduskaare) kaasfunktsioonidega, siis p. 1 põhjal järeldame, et kaarte $90^\circ + \beta$, $270^\circ - \beta$ ja $270^\circ + \beta$ funktsioonide absoluutväärtused on võrdsed kaare β kaasfunktsioonidega.



Joon. 29.

3) Punktidest 1 ja 2 järeldub: selleks et koostada mingi taandamisvalem, tuleb määrata taandatava funktsiooni märk ja absoluutväärtus, võttes absoluutväärtuseks teravnurga funktsiooni väärtuse; seejuures tuleb säilitada funktsiooni nimetus, kui argumendi kirjutises esineb 180° või 360°, ning funktsiooni nimetus asendada kaasfunktsiooni nimetusega, kui argumendi kirjutises esineb 90° või 270°. Nii saame $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$; $\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$; $\cos(270^\circ - \beta) = -\sin\beta$ jne.

§ 32. Nurga leidmine antud trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse järgi (vahemikus 0° kuni 360°). Paragrahvis 26 me nägime juba, et antud trigonomeetrilise funktsiooni väärtusele vastava nurga ehitamisel tekib kaks nurka, mis kuuluvad mingisse kahte veerandisse. Nende nurkade suurust on võimalik määrata taandamisvalemite abil, neid ümberpöördult kasutades.

Selgitame seda järgmiste näidetega.

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; leida nurk x. Esimene vastus on: $x_1 = 30^\circ$. Teine nurk, millel on antud siinuse väärtus, on II veerandi nurk:

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ;$$

seega teine vastus on: $x_2 = 150^\circ$.

2) $\cos x = 0{,}974$; leida nurk x. Tabeleist leiame: $x_1 = 13^\circ$; peale selle on koosinusel positiivne väärtus veel IV veerandis:

$$x_2 = 360^\circ - 13^\circ = 347^\circ.$$

3) $\tan x = 1$; leida nurk x. Vastav teravnurk on 45°; seega $x_3 = 45°$ Joonisest 22 (lk. 31) nähtub, et $x_2 = 180° + 45° = 225°$.

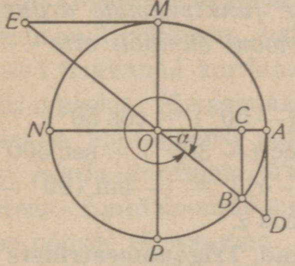
4) $\sin x = -\frac{1}{2}$; leida nurk x. Siinuse väärtused on negatiivsed III ja IV veerandis; teades, et $\sin 30° = +\frac{1}{2}$, järeldame, et otsitav nurk on: $x_1 = 180° + 30° = 210°$;

$$x_2 = 360° - 30° = 330°.$$

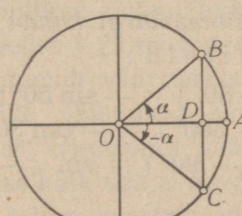
III. Negatiivsed nurgad. 360°-st suuremad nurgad.

§ 33. Negatiivsed nurgad. Kui arvestatakse mitte üksi nurga suurust, vaid ka suunda, milles loetakse nurka, siis tavalisele suunale vastupidises suunas pöörlemisel tekkinud nurkade suurust väljendatakse negatiivse arvuga.

Negatiivseile nurkadele vastavad ka negatiivsed kaared: niisuguseiks tuleb lugeda kaari, mida kujutab liikuva raadiuse otspunkt B raadiuse pöörlemisel päripäeva.



Joon. 30.



Joon. 31.

Negatiivse nurga trigonomeetrilised funktsioonid defineeritakse samal viisil nagu samade haaradega määratud positiivse nurga funktsioonid. Nii saame joonisest 30:

$\sin(-\alpha) = -\frac{BC}{R}$; $\cot(-\alpha) = -\frac{ME}{R}$; $\sec(-\alpha) = +\frac{OD}{R}$ jne.

§ 34. Leiame nüüd negatiivse nurga ja absoluutväärtuselt niisama suure positiivse nurga funktsioonide vahelised seosed.

Joonisest 31 näeme, et

$$\sin(-\alpha) = -\frac{CD}{R} \quad \text{ja} \quad \sin\alpha = +\frac{BD}{R};$$

ja pannes tähele, et $CD = BD$, ning korrutades teise võrduse mõlemad pooled arvuga -1, saame: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Edasi näeme, et

$$\cos(-\alpha) = +\frac{OD}{R} \text{ ja } \cos\alpha = +\frac{OD}{R};$$

järelikult,

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Seega $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ja $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Siit leiame:

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha;$$

ja samal viisil saame:

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

Reegel. *Koosinuse ja seekansi argumendis võib miinusmärgi jätta kirjutamata; teiste funktsioonide argumendist võib miinusmärgi kanda funktsiooni sümboli ette* [1].

Näiteid:

$\sin(-50°) = -\sin 50°$; $\cos(-50°) = \cos 50°$;
$\tan(-300°) = -\tan 300°$; $\sec(-300°) = \sec 300°$;
$\sin(\alpha - 90°) = \sin[-(90° - \alpha)] = -\sin(90° - \alpha) =$
$= -\cos\alpha$.

§ 35. 360°-st suuremad nurgad. Trigonomeetriliste funktsioonide perioodsus. Trigonomeetriliste funktsioonide teoorias vaadeldakse ka 360°-st suuremaid nurki.

---

[1] Analoogia tõttu negatiivse arvu astendamisega paaris- või paaritusse astmesse nimetatakse koosinust ja seekansit paarisfunktsioonideks ning siinust, tangensit, kootangensit ja koosekansi paarituiks funktsioonideks.

Negatiivsete ja 360°-st suuremate nurkade tarvitusele võtmisega saab nurk muutuvaks suuruseks, mis võib omandada igasugused väärtused vahemikus $-\infty$ kuni $+\infty$.

Paragrahvis 29 oli näidatud, kuidas muutuvad trigonomeetrilised funktsioonid nurga kasvamisel 0°-st 360°-ni, s. o. liikuva raadiuse ühe täispöörde jooksul. Edasisel nurga kasvamisel liikuv raadius jõuab asendeisse, mis ta läbis juba esimeses pöördes, ja seepärast ka trigonomeetrilised funktsioonid omandavad oma endised väärtused endises järjestuses. Negatiivse nurga kasvamisel —360°-st 0°-ni, —720°-st —360-ni jne. omandavad funktsioonid samad väärtused samas järjestuses nagu nurga muutumisel 0°-st 360°-ni.

Seega nurga muutudes vahemikus $-\infty$ kuni $+\infty$ korduvad trigonomeetriliste funktsioonide väärtused perioodiliselt. Väikseimat argumendi positiivset väärtust, millest alates funktsiooni muutumise käik hakkab korduma, nimetatakse selle funktsiooni perioodiks. Eelmine arutlus selgitas, et pärast seda, kui nurk on jõudnud 360°-ni, funktsioonide väärtused korduvad; meil jääb nüüd ainult selgitada, kas see on argumendi väikseim väärtus, millest alates funktsiooni väärtused hakkavad korduma. Tabelist § 29 näeme, et ta ei ole niisuguseks väikseimaks argumendi väärtuseks ainult tangensi ja kootangensi puhul, mille väärtused hakkavad esimest korda korduma juba alates argumendi väärtusest 180°; teiste funktsioonide muutumise käik aga ei kordu enne esimese pöörde täissaamist. Seega trigonomeetrilised funktsioonid on perioodilised funktsioonid, kusjuures siinuse, koosinuse, seekansi ja koosekansi periood on 360° ehk 2π ning tangensi ja kootangensi periood on 180° ehk π.

§ 36. Kui perioodilise funktsiooni argumendi mistahes väärtusega liita periood, siis funktsiooni väärtus ei muutu; ümberpöördult, kui antud funktsiooni puhul on olemas niisugune jääv arv, mida võib liita argumendi mistahes väärtusega, ilma et seejuures muutuks funktsiooni väärtus, siis funktsioon on perioodiline. Seetõttu võib väljendada trigonomeetriliste funktsioonide perioodsust järgmiste valemitega, milles arvul α võib olla mistahes väärtus vahemikust $-\infty$ kuni $+\infty$:

$$\sin(\alpha+360^\circ)=\sin\alpha;\quad \cos(\alpha+360^\circ)=\cos\alpha;$$
$$\tan(\alpha+180^\circ)=\tan\alpha;\quad \cot(\alpha+180^\circ)=\cot\alpha;$$
$$\sec(\alpha+360^\circ)=\sec\alpha;\quad \mathrm{cosec}(\alpha+360^\circ)=\mathrm{cosec}\,\alpha.$$

Näiteid: 1) Lihtsustada valem $m=\tan(\alpha-\pi)$. Lisades argumendile tangensi perioodi, s. o. π, saame: $m=\tan\alpha$.

2) Lihtsustada $n=\cot\frac{19}{6}\pi$. Et kootangensi periood on π, siis lahutame argumendist 3π; siis saame:

$$n=\cot\frac{1}{6}\pi=\sqrt{3}.$$

§ 37. Igasuguse nurga trigonomeetriliste funktsioonide taandamine lihtsaima argumendi funktsioonideks. Igasuguse nurga trigonomeetrilisi funktsioone, missugune olekski argumendi märk ja absoluutväärtus, on kerge taandada niisuguse positiivse nurga funktsioonideks, mis ei ületa 45°.

a) Olgu antud positiivne nurk (suurem kui 45°). Kui ta on väiksem kui 360°, siis rakendame § 17 ja 30 valemeid; kui ta on aga suurem kui 360°, siis esmalt lahutame tast kõik täispöörded, asendades seega antud nurga jäägiga, mis tekib selle nurga jagamisel 360°-ga.

Näiteks:

1) $\sin 63^\circ=\cos 27^\circ$;
2) $\cos 145^\circ=\cos(180^\circ-35^\circ)=-\cos 35^\circ$;
3) $\tan 2085^\circ=\tan(180^\circ\cdot 11+105^\circ)=\tan 105^\circ=$
$=\tan(90^\circ+15^\circ)=-\cot 15^\circ$.

b) Kui on antud negatiivne nurk, siis esmalt teeme ülemineku absoluutväärtuselt niisama suurele positiivsele nurgale, millega toimime juba nii, nagu näidatud ülal. Võtame näiteks sin (—1596°). Rakendades § 34 valemeid, saame:

$$\sin(-1596^\circ) = -\sin 1596^\circ.$$

Teisendame nüüd sin 1596°; jagades 1596 360-ga, saame jäägina 156; järelikult $\sin 1596^\circ = \sin 156^\circ$, kuid $\sin 156^\circ = \sin(180^\circ - 24^\circ) = \sin 24^\circ$.

Seega on lõplikult

$$\sin(-1596^\circ) = -\sin 24^\circ.$$

§ 38. **Taandamisvalemite üldkehtivus.** Paragrahvides 17, 30 ja 34 oli näidatud, kuidas taandada nurga α funktsioonideks argumentide $-\alpha$, $90^\circ \mp \alpha$, $180^\circ \mp \alpha$, $270^\circ \mp \alpha$ ja $360^\circ - \alpha$ trigonomeetrilised funktsioonid; seejuures oli eeldatud, et α on positiivne teravnurk. Näitame nüüd, et saadud valemid on kehtivad üldiselt, s. o., et nad on kehtivad ka siis, kui α on mistahes nurk vahemikust $-\infty$ kuni $+\infty$. Selleks piisab näidata seda siinuse ja koosinuse kohta, sest sellest võime järeldada sedasama teiste funktsioonide kohta.

Tõestuseks kasutame muuseas asjaolu, et koosinuslõik on liikuva raadiuse projektsioon rõhtläbimõõdule ja siinuslõik on liikuva raadiuse projektsioon püstläbimõõdule. Asume nüüd tõestamisele.

§ 39. 1. Tähistagu α mistahes nurka, siis $-\alpha$ tähistab nurgaga α absoluutväärtuselt võrdset, kuid märgilt vastupidist nurka. Nurgad α ja $-\alpha$ asetsevad üks ühel pool ja teine teisel pool liikumatut raadiust; nende siinuslõigud on võrdsed pikkuselt, kuid nende suunad on vastupidised; koosinuslõik on aga neil nurkadel ühine. Siit järeldame, et $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ja $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

§ 40. 2. a) Esitame nurga $90^\circ + \alpha$ kujul $\alpha + 90^\circ$. Kui mingile nurgale lisada 90°, siis liikuv raadius satub järgmisse veerandisse ja moodustab püstläbimõõduga niisama suure nurga kui enne rõhtläbimõõduga ning ümberpöördult. Seepärast liikuva raadiuse projektsioon püstläbimõõdule on nüüd niisama suur kui ta endine projektsioon rõhtläbimõõdule ja ta uus rõhtprojektsioon niisama suur kui endine püstprojektsioon. Siit järeldame, et $\sin(\alpha + 90^\circ)$ ja $\cos(\alpha + 90^\circ)$ absoluutväärtused on vastavalt võrdsed $\cos\alpha$ ja $\sin\alpha$ omadega. Nende funktsioonide märgid on määratud sellega, missuguse veerandi nurk on α, nagu nähtub järgmisist tabeleist:

$\alpha+90°$	$\sin(\alpha+90°)$	$\cos\alpha$	α
II	+	+	I
III	—	—	II
IV	—	—	III
I	+	+	IV

$\alpha+90°$	$\cos(\alpha+90°)$	$\sin\alpha$	α
II	—	+	I
III	—	+	II
VI	+	—	III
I	+	—	IV

Siit näeme, et $\sin(\alpha+90°)$ ja $\cos\alpha$ märgid on alati ühesugused, kuid $\cos(\alpha+90°)$ ja $\sin\alpha$ märgid on alati vastupidised.

Seega

$$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha;$$
$$\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha.$$

b) Rakendades praegu saadud valemeid nurgale $-\alpha$ ja arvestades § 39, leiame:

$$\cos(90°-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha;$$
$$\sin(90°-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

§ 41. 3. a) Esitame nurga $180°+\alpha$ kujul $\alpha+180°$. Kui mingile nurgale lisada 180°, siis liikuv raadius satub vastasveerandisse ja on oma endise asendi pikenduseks[1], järelikult siinus ja koosinus säilitavad oma absoluutväärtused, kuid nende märgid muutuvad vastupidisteks. Seepärast on:

$$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha;$$
$$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha.$$

b) Rakendades neid valemeid nurgale $-\alpha$, saame:

$$\sin(180°-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha;$$
$$\cos(180°-\alpha)=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha.$$

§ 42. 4. a) Esitame nurga $270°+\alpha$ kujul $\alpha+270°$. Kui mingile nurgale lisada 270°, siis liikuva raadiuse asend muutub samuti kui pöördumisel $-90°$ võrra. Arutledes samuti kui § 40 jõuame järeldusele, et nurga $\alpha+270°$ liikuva raadiuse projektsioon püstläbimõõdule on pikkuselt võrdne nurga α liikuva raadiuse projektsiooniga rõhtläbimõõdule.

[1] Ehk: kaare otspunkt satub diametraalselt vastupidisesse punkti.

Just samuti nurga $\alpha + 270^\circ$ liikuva raadiuse projektsioon rõhtläbimõõdul on pikkuselt võrdne nurga α liikuva raadiuse projektsiooniga püstläbimõõdul. Seepärast $\sin(\alpha + 270^\circ)$ ja $\cos(\alpha + 270^\circ)$ absoluutväärtused on vastavalt võrdsed $\cos\alpha$ ja $\sin\alpha$ absoluutväärtustega.

Nende funktsioonide võrdlemiseks eri veerandeis koostame tabelid § 40 tabelite eeskujul:

$\alpha + 270^\circ$	$\sin(\alpha + 270^\circ)$	$\cos\alpha$	α
IV	—	+	I
I	+	—	II
II	+	—	III
III	—	+	IV

$\alpha + 270^\circ$	$\cos(\alpha + 270^\circ)$	$\sin\alpha$	α
IV	+	+	I
I	+	+	II
II	—	—	III
III	—	—	IV

Siit näeme, et $\sin(\alpha + 270^\circ)$ ja $\cos\alpha$ märgid on alati vastupidised, kuid $\cos(\alpha + 270^\circ)$ ja $\sin\alpha$ märgid on alati ühesugused.

Seega

$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha.$$

b) Rakendades neid valemeid nurgale $-\alpha$, saame:

$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\cos(270^\circ - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

§ **43.** 5. Esitame nurga $360^\circ - \alpha$ kujul $-\alpha + 360^\circ$. Kui mingile nurgale lisada 360°, siis liikuva raadiuse lõplik asend ei muutu; seepärast on:

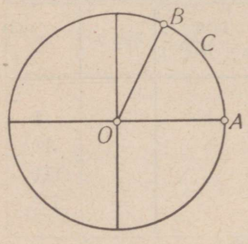
$$\sin(360^\circ - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

§ **44.** Paragrahvides 39—43 on tõestatud mistahes nurga puhul kõik need valemid, mis paragrahvides 17, 30 ja 34 olid tõestatud positiivse nurga puhul, mis ei ületa 90°. Seega on tõestatud taandamisvalemite üldine kehtivus.

Ülesandeis, kui on vaja ainult valem meelde tuletada, tuleb nurka α kujutleda võetuna vahemikust 0° kuni 90° ja rakendada § 30 antud reegleid.

§ 45. Ringjoone antud punktis lõppevate kaarte üldine avaldis. Olgu joonisel 32 kujutatud kaares ACB 64°. On ilmne, et kõik kaared, mis 64°-st erinevad täisarvu ringjoonte võrra, lõpevad samuti punktis B (eeldame, et kõigi kaarte alguseks on punkt A).

Siit näeme, et kaared, mis lõpevad punktis B, on järgmised: 64°, 424°, 784°, 1144° jne., kuid ka: —296°, —656°, —1016° jne. Kõiki neid kaari saab avaldada üheainsa valemiga: $64° + n \cdot 360°$, milles n on mistahes täisarv (ta võib olla nii positiivne kui ka negatiivne, aga ka null).



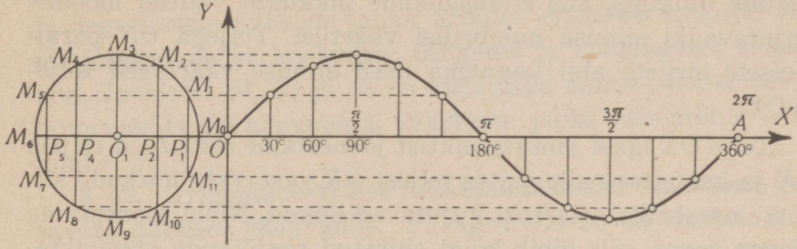
Joon. 32.

Üldiselt, kui α on üks neist kaartest, millel on antud algus ja antud lõpp, siis kõigi sama algust ja sama lõppu evivate kaarte üldine avaldis on $\alpha + n \cdot 360°$ (ehk $\alpha + 2\pi n$).

Me kõnelesime siin kaartest, kuid saadud avaldised on ka ühise algraadiuse ja ühise lõppraadiusega nurkade üldavaldisteks.

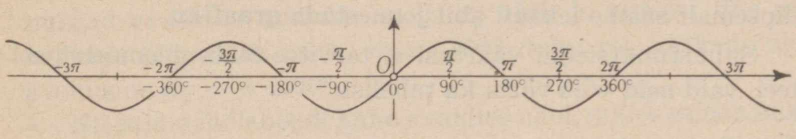
§ 46. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud. Trigonomeetriliste funktsioonide muutumine argumendi muutumisel 0°-st kuni 360°-ni on esitatud tabelis § 29, kuid see tabel sisaldab ainult rea üksikuid funktsioonide väärtusi ega anna seepärast täielikku kujutlust funktsioonide muutumise pidevast käigust. Et saada kujutlust funktsioonide pidevast muutumisest, selleks kasutatakse nende muutumise kujutamist graafiliselt.

Seks otstarbeks joonestame kaks teineteisega ristuvat sirget OX ja OY, mida nimetame koordinaatide telgedeks (joon. 33). Teljele OX kanname lõigud, mis vabalt valitud mõõdus kujutavad argumendi numbrilisi väärtusi, ja teljele OY kanname lõigud, mis teises vabalt valitud mõõdus kujutavad funktsiooni numbrilisi väärtusi. Seejuures peame silmas märkide reeglit: positiivseid väärtusi kujutavad lõigud kanname alguspunktist O paremale ja ülespoole ning negatiivseid väärtusi kujutavad lõigud kanname vasemale ja allapoole (telgede positiivsed suunad on joonisel näidatud nooltega).



Joon. 33.

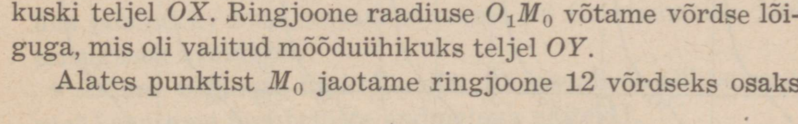
Teljele OX kanname mingi arvu, näiteks 12, võrdseid lõike; kujutagu igaüks neist nurka 30° (ehk $\frac{\pi}{6}$); seega kõik 12 lõiku ehk lõik OA kujutavad nurka 360° ehk 2π. Et teljele OY kanda mingi trigonomeetrilise funktsiooni, näiteks siinuse väärtused, selleks joonestame abiringjoone keskpunktiga O_1



Joon. 34.

kuski teljel OX. Ringjoone raadiuse O_1M_0 võtame võrdse lõiguga, mis oli valitud mõõduühikuks teljel OY.

Alates punktist M_0 jaotame ringjoone 12 võrdseks osaks



Joon. 35.

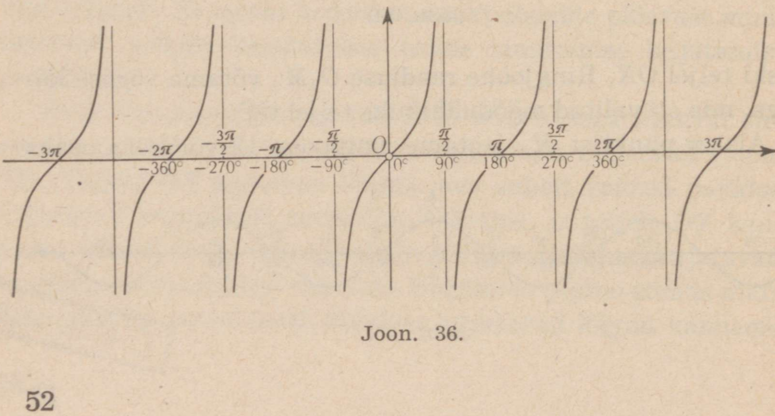
(vastavalt teljele OX kantud lõikude arvule, mis kujutavad 360°-st nurka). Jaotuspunktidest M_0, M_1, ... M_{11} joonestame siinuslõigud M_1P_1, M_2P_2, ... $M_{11}P_1$. Et ringjoone raadius on võrdne ühikuga, siis siinuslõikude pikkused valitud mõõdus kujutavadki siinuse numbrilisi väärtusi. Teljega OX paralleelsete sirgete abil kanname need siinuse väärtused teljele OY.

Telje OX igast jaotuspunktist joonestame ristsirged teljele OX ja kanname neile alates teljest OX vastavate nurkade siinuste numbrilisi väärtusi kujutavad lõigud. Nüüd joonestame kõvera joone, mis läbib kõigi ehitatud ristlõikude otspunkte. See joon kujutabki siinusfunktsiooni muutumist tema argumendi muutumisel. Niisugust joont nimetatakse f u n k t s i o o n i g r a a f i k u k s.

Joonisel 33 on kujutatud siinusfunktsiooni graafik selle funktsiooni ühe perioodi jaoks.

Mida enam jaotuspunkte me võtame lõigul OA ja vastavalt abiringjoonel, seda enam saame graafiku punkte ja seda täpsemalt saame lekaali abil joonestada graafiku.

Siinusfunktsiooni väärtusi ei tarvitse leida geomeetrilisel teel, vaid neid võib võtta ka tabelist.



Joon. 36.

Siinuse graafik on kõverjoon, mida nimetatakse siinuskõveraks (ehk sinusoidiks).

Siinuse graafikut, mis on ehitatud positiivsete nurkade jaoks ühe perioodi piirides, võib jätkata mistahes positiivsete ja negatiivsete nurkade jaoks. Siinuse graafiku eeskujul võime joonestada ka koosinuse, tangensi ja kootangensi graafikud. Joonistel 34, 35 ja 36 on kujutatud siinus-, koosinus- ja tangenskõverad argumendi väärtuste jaoks vahemikus -3π kuni $+3\pi$.

§ 47. Trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtusele vastavate nurkade üldavaldis. Paragrahvis 26 oli näidatud, et trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtusele vastab liikuva raadiuse kaks seisu; paragrahvis 32 neile vastas kaks positiivset nurka x_1 ja x_2, väiksemat kui 360°. Kuid on selge, et pärast mistahes suurusega nurkade tarvitusele võtmist igale liikuva raadiuse seisule vastab mitte üks nurk, vaid lõpmatu rida nurki, nii positiivseid kui ka negatiivseid; seega nüüd antud funktsiooni väärtusele vastavad nurgad, mis moodustavad kaks lõpmatut rida. § 45 järgi on võimalik kõik need nurgad avaldada nurkade x_1 ja x_2 abil, ja nimelt: ühe rea nurkade üldavaldis on $x_1 + n \cdot 360°$, teise rea nurkade üldavaldis on $x_2 + n \cdot 360°$.

Nii saime üldlahendi kahe avaldise näol, milles esineb kaks põhinurka. Näitame, et iga funktsiooni jaoks on võimalik anda kahe avaldise asemel üks avaldis, milles esineb ka ainult üks põhinurk; kuid seejuures saame eri funktsioonide jaoks erisugused avaldised.

Asume üksikute funktsioonide käsitlemisele (lihtsuse pärast kasutame numbriliste andmetega näiteid).

1. a) $\sin x = \frac{1}{2}$.

Otsitav nurk on kas 30° või 150°; järelikult saame:

$$x_1 = 30° + n \cdot 360° \text{ ja } x_2 = 150° + n \cdot 360°.$$

Teisendame neid avaldisi järgmiselt:

$$x_1 = 2n \cdot 180° + 30°;$$

$$x_2 = 180° - 30° + 2n \cdot 180° = (2n+1) \cdot 180° - 30°.$$

Siin 30° ees seisev märk oleneb sellest, kas 180° ees seisev kordaja on paarisarv ($2n$) või paaritu ($2n + 1$), kuid seda olenevust on võimalik väljendada negatiivse ühiku astme abil. Siis saamegi kahe avaldise asemel järgmise üheainsa:

$$x = m \cdot 180° + (-1)^m \cdot 30°,$$

kus m tähistab mistahes täisarvu, positiivset või negatiivset. Paarisarvulise m puhul valem annab x_1 ja paarituarvulise m puhul x_2.

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$;

$$x_1 = 210° + n \cdot 360° \quad \text{ja} \quad x_2 = 330° + n \cdot 360°.$$

Põhinurkade absoluutväärtusi on võimalik vähendada, võttes nende negatiivsed väärtused:

$$x_1 = -150° + k \cdot 360° \quad \text{ja} \quad x_2 = -30° + k \cdot 360°$$

ehk kirjutades teisel kujul:

$$x_1 = -150° + 2k \cdot 180° = -150° + 180° - 180° + \\ + 2k \cdot 180° = 30° + (2k - 1) \cdot 180°$$

ja

$$x_2 = 2k \cdot 180° - 30°,$$

kuid neid kaht valemit saab ühendada järgmiseks:

$$x = m \cdot 180° - (-1)^m \cdot 30°,$$

mis paarisarvulise m puhul annab x_2 ja paarituarvulise m puhul x_1.

2. a) $\cos x = \frac{1}{2}$; $x_1 = 60° + n \cdot 360°$

$$\text{ja} \quad x_2 = 300° + n \cdot 360°.$$

Kui põhinurkadena kasutada ka negatiivseid nurki, siis saame:

$$x_1 = 60° + m \cdot 360° \quad \text{ja} \quad x_2 = -60° + m \cdot 360°,$$

mida võib ühendatult kirjutada järgmiselt:

$$x = m \cdot 360° \pm 60°.$$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

$$x_1 = 120° + n \cdot 360° \quad \text{ja} \quad x_2 = 240° + n \cdot 360°.$$

x_1 ja x_2 võime avaldada ka järgmiste valemite abil:

$$x_1 = 120° + m \cdot 360° \quad \text{ja} \quad x_2 = -120° + m \cdot 360°,$$

kuid neid võime kirjutada ühendatult nii:

$$x = m \cdot 360° \pm 120°.$$

3. a) $\tan x = 1$;

$$x_1 = 45° + n \cdot 360° \quad \text{ja} \quad x_2 = 225° + n \cdot 360°,$$

mida võib esitada kujul:

$$x_1 = 45° + 2n \cdot 180° \quad \text{ja} \quad x_2 = 45° + (2n + 1) \cdot 180°;$$

kuid viimased kaks valemit võime asendada ühega:

$$x = 45° + m \cdot 180°,$$

mis paarisarvulise m puhul annab x_1 ja paarituarvulise m puhul x_2.

Valemit $x = 45° + m \cdot 180°$ on kerge tuletada ka järgmisel viisil: joonisel 22 (lk. 31), millel punktid C ja D asetsevad ühel ning samal läbimõõdul, on näha, et kõigi võimalike suurustega kaarte reas vahemikus $-\infty$ kuni $+\infty$, kaared, millel on üks ning sama tangens, esinevad iga 180° tagant. Seega otsitavad kaared moodustavad aritmeetilise rea, mille vahe on 180°; selle rea üldliige ongi

$$x = 45° + m \cdot 180°.$$

b) $\tan x = -1$.

Arutledes samuti kui p. a), saame:

$$x_1 = 135° + n \cdot 360° \quad \text{ja} \quad x_2 = 315° + n \cdot 360°$$

ehk

$$x = 135° + m \cdot 180°$$

ehk $$x = -45^\circ + k \cdot 180^\circ.$$

4. a) $\cot x = \sqrt{3}$.

Küsimus lahendub samuti kui tangensi juhul. Saame:

$$x_1 = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ ja } x_2 = 210^\circ + n \cdot 360^\circ$$

ehk

$$x = 30^\circ + m \cdot 180^\circ.$$

b) $\cot x = -\sqrt{3}$.

Arutledes samuti kui tangensi juhul, leiame:

$$x_1 = 150^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ ja } x_2 = 330^\circ + n \cdot 360^\circ$$

ehk

$$x = 150^\circ + m \cdot 180^\circ,$$

aga ka $x = -30^\circ + k \cdot 180^\circ$.

5. ja 6. Kui on antud seekans või koosekans, siis avaldame nad esmalt koosinuse või siinuse kaudu.

§ 48. Tsüklomeetrilised funktsioonid. Kui on antud üks võrrand kahe tundmatuga, siis sellest võib üldiselt avaldada ühe tundmatu teise kaudu. Näiteks, kui on antud võrrand $2x + 3y = 6$, siis:

$$\text{a) } y = 2 - \frac{2}{3}x, \qquad \text{b) } x = 3 - \frac{3}{2}y.$$

Võrrand a) avaldab arvu y arvu x funktsioonina. Võrrand b) ümberpöördult, avaldab arvu x arvu y funktsioonina. Üldiselt kõik kolm võrrandit väljendavad üht ning sama olenevust muutujate x ja y vahel, erinevad on ainult selle olenevuse avaldamise kujud; esimene võrrand on ilmutamata nii x suhtes kui y suhtes; teises on funktsiooniks võetud y ja argumendiks x, kolmandas on funktsiooniks võetud x ja argumendiks y.

Kaht funktsiooni, mis väljendavad üht ning sama olenevust muutujate x ja y vahel, kuid ühes on funktsiooniks muutuja y ja teises muutuja x, nimetatakse teineteise *pöördfunktsioonideks*. Kummagi neist võib valida otseseks funktsiooniks, siis teine on pöördfunktsioon.

Vastastikuste pöördfunktsioonide näiteid:

$$y = 5x + 3; \qquad x = \frac{y-3}{5};$$

$$y = 2x; \qquad x = \frac{1}{2} y;$$

$$y = x^2; \qquad x = \pm \sqrt{y};$$

$$y = \sqrt[3]{x}; \qquad x = y^3.$$

Pöördfunktsiooni mõiste on rakendatav ka trigonomeetrilistele funktsioonidele.

Näiteks, võrdus $y = \sin x$ tähendab, et y on kaare x siinus, kuid võib ütelda ka ümberpöördult, x on kaar, mille siinus on y.

Selle asemel et seda pöördolenevust väljendada sõnadega, kasutatakse erilist sümbolit arc [lühend ladinakeelsest sõnast arcus (kaar)].

Seda sümbolit kasutades kirjutame:

$$\frac{1}{2} = \sin 30°; \qquad 30° = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2} = \cos 60°; \qquad 60° = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{2};$$

$$1 = \tan 45°; \qquad 45° = \operatorname{arc} \tan 1;$$

$$\sin 16^0 = 0{,}276; \qquad 16° = \operatorname{arc} \sin 0{,}276;$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = 0{,}707; \qquad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \cos 0{,}707;$$

$$1 = \sin 90°; \qquad 90° = \operatorname{arc} \sin 1;$$

$$1 = \cos\ 0°; \qquad 0° = \operatorname{arc} \cos 1;$$

$$-1 = \cos \pi; \qquad \pi = \operatorname{arc} \cos (-1);$$

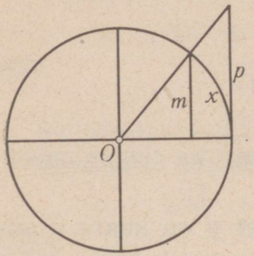
$$\tan\ \frac{\pi}{2} = \infty; \qquad \frac{\pi}{2} = \operatorname{arc} \tan \infty;$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2};$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{2} \sqrt{2} = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Joonisel 37 (raadius võrdub ühega) kaare suurus on tähistatud tähega x, kaare siinus tähega m ja kaare tangens tähega p. Järelikult x on kaar, mille siinus on m ja tangens on p, ehk:

$$x = \text{arc}\sin m; \quad x = \text{arc}\tan p.$$



Joon. 37.

Kasutades trigonomeetrilisi tabeleid, me lahendame kahesuguseid ülesandeid: 1) kui on antud kaar (või nurk), siis otsime trigonomeetrilise funktsiooni väärtust; 2) kui on antud trigonomeetrilise funktsiooni väärtus, siis otsime nurka. Viimane pole muud kui trigonomeetrilise pöördfunktsiooni leidmine tema argumendi järgi.

Paragrahvist 47 teame, et ühele ning samale trigonomeetrilise funktsiooni väärtusele vastab lõpmatu hulk kaari; näiteks siinuse väärtusele $\frac{1}{2}$ vastavad kaared: 30°, 150°, 390°, 510°, . . .; neist 30° ja 150° on põhikaared, ning teised saadakse neist järjest 360° lisamisega. Järelikult on trigonomeetrilised pöördfunktsioonid mitmesed funktsioonid.

§ 49. Eelmisis näiteis me piirdusime väikseima kaarega, mis vastab antud trigonomeetrilise funktsiooni väärtusele, kuid me võime anda ka kõigi nende kaarte üldavaldise, millel on antud siinuse, koosinuse või tangensi väärtus. Kui mõeldakse mitte väikseimat kaart, vaid kõigi nende kaarte üldavaldist, mis vastavad trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtusele, siis kaare sümbol kirjutatakse suure algustähega.

Näiteks:

$$\text{arc}\sin\frac{1}{2} = 30°, \text{ kuid } \text{Arc}\sin\frac{1}{2} = m\cdot 180° + (-1)^m\cdot 30°$$

või

$$\text{arc}\tan 1 = 45°, \text{ kuid } \text{Arc}\tan 1 = m\cdot 180° + 45°.$$

Need valemid on võetud § 47 (trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtusele vastavate nurkade üldavaldis), kuid seal need valemid olid kirjutatud ilma trigonomeetriliste pöördfunktsioonide sümboliteta.

Kui kasutada § 47 valemeid ja üldistada neid, asendades numbrilised väärtused tähelistega, siis saame järgmise trigonomeetriliste otseste ja pöördfunktsioonide tabeli:

$$\begin{aligned}
y &= \sin x; & \operatorname{Arc} \sin y &= m\pi + (-1)^m \cdot x; \\
y &= \cos x; & \operatorname{Arc} \cos y &= 2m\pi \pm x; \\
y &= \tan x; & \operatorname{Arc} \tan y &= m\pi + x; \\
y &= \cot x; & \operatorname{Arc} \cot y &= m\pi + x.
\end{aligned}$$

Enamasti aga otsitakse v ä i k s e i m a t k a a r t (arc), mis vastab trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtusele. Seejuures kõigi trigonomeetriliste funktsioonide positiivseile väärtustele vastavad kaared võetakse I veerandis (0 kuni $\frac{\pi}{2}$) siinuse, tangensi ja koosekansi negatiivseile väärtustele vastavad kaared võetakse I negatiivses veerandis ($-\frac{\pi}{2}$ kuni 0) ning koosinuse, kootangensi ja seekansi negatiivseile väärtustele vastavad kaared võetakse II veerandis ($\frac{\pi}{2}$ kuni π).

Seega kõigile siinuse, tangensi ja koosekansi võimalikele väärtustele vastavad kaared võetakse vahemikust $-\frac{\pi}{2}$ kuni $+\frac{\pi}{2}$ ning koosinuse, kootangensi ja seekansi kõigile võimalikele väärtustele vastavad kaared võetakse vahemikust 0 kuni π.

Trigonomeetrilisi pöördfunktsioone nimetatakse ka t s ü k l o m e e t r i l i s t e k s funktsioonideks, nende seotuse tõttu ringjoonega[1].

---

[1] Ringjoon on kreeka keeles kyklos (tsüklos). T õ l k i j a.

IV. Nurkade summa ja vahe, kahekordse nurga ja poolnurga siinus, koosinus ja tangens.

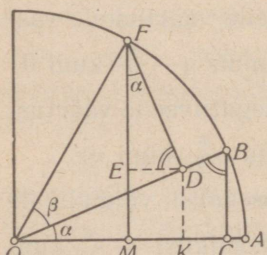
§ 50. Kahe nurga summa ja vahe siinus ja koosinus. Olgu α ja β positiivsed teravnurgad, mille summa on väiksem kui 90°.

Ehitame ringis kesknurga $\alpha + \beta$ (joon. 38). Ehitame samal joonisel nurkade α, β ja $\alpha + \beta$ siinuslõigud. Joonisest näeme, et:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{R};\quad \cos\alpha = \frac{OC}{R};\quad \sin\beta = \frac{FD}{R};\quad \cos\beta = \frac{OD}{R};$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{FM}{R};\quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{OM}{R}.$$

§ 51. a) *Summa siinus.* Et $\sin(\alpha + \beta)$ avaldada nurkade α ja β funktsioonide kaudu, selleks ehitame kolmnurgad, mille külgedeks on nende nurkade trigonomeetrilised lõigud. Selleks joonestame $DE \parallel OA$ ja $DK \parallel BC$.



Joon. 38.

Joonisest leiame, et

$$FM = ME + EF = KD + EF.$$

Et avaldada KD, vaatleme täisnurkseid kolmnurki ODK ja OBC; nad on sarnased, sest neil on ühine teravnurk α. Kolmnurkade sarnasusest saame:

$$\frac{DK}{BC} = \frac{OD}{OB};\qquad DK = BC \cdot \frac{OD}{OB} = ME.$$

Lõigu EF avaldame täisnurkseist kolmnurkadest FED ja OBC, mis on sarnased vastavate külgede ristseisu tõttu:

$$\frac{EF}{OC} = \frac{FD}{OB};\qquad EF = OC \cdot \frac{FD}{OB}.$$

Liites tulemused ja pannes tähele, et $OB = OF$, saame:

$$FM = ME + EF = BC \cdot \frac{OD}{OF} + OC \cdot \frac{FD}{OB}.$$

Et saada lõikude suhted ja üle minna trigonomeetrilistele funktsioonidele, jagame võrduse mõlemad pooled raadiusega:

$$\frac{FM}{R}=\frac{BC}{R}\cdot\frac{OD}{OF}+\frac{OC}{R}\cdot\frac{FD}{OB};$$

minnes üle trigonomeetrilistele funktsioonidele, saame:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

b) *Summa koosinus.* Et avaldada kahe nurga summa koosinus nende nurkade funktsioonide kaudu, vaatleme jälle joonist 38. Joonisest leiame, et

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OM}{OF}\cdot$$

Kuid

$$OM=OK-MK=OK-ED;$$

järelikult

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OK}{OF}-\frac{ED}{OF}\cdot$$

Jagades viimase võrduse parema poole esimese liikme OD-ga ja teise liikme FD-ga, saame:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OK}{OD}\cdot\frac{OD}{OF}-\frac{ED}{FD}\cdot\frac{FD}{OF}.$$

Kolmnurgast ODK:

$$\frac{OK}{OD}=\cos\alpha;$$

Kolmnurgast EFD:

$$\frac{ED}{FD}=\sin\alpha;$$

Kolmnurgast OFD:

$$\frac{OD}{OF}=\cos\beta;$$

Kolmnurgast OFD:

$$\frac{FD}{OF}=\sin\beta.$$

Järelikult

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

§ 52. a) *Vahe siinus.* Vahe siinuse valemi võib tuletada kahe nurga summa siinuse ja koosinuse valemeist, toetudes seejuures taandamisvalemeile.

Nii saame:

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos[90^\circ-(\alpha-\beta)]=\cos[(90^\circ-\alpha)+\beta]=$$
$$=\cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta-\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta=$$
$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

b) *Vahe koosinus.* Analoogiliselt eelmisega saame kahe nurga vahe koosinuse jaoks:

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin[90° - (\alpha - \beta)] = \sin[(90° - \alpha) + \beta] =$$
$$= \sin(90° - \alpha)\cos\beta + \cos(90° - \alpha)\sin\beta =$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

§ 53. Seega saime järgmised neli valemit:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta; \quad \text{(I)}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta; \quad \text{(II)}$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta; \quad \text{(III)}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta. \quad \text{(IV)}$$

Nende valemite tuletamisel me oletasime, et $\alpha > \beta$ ja et $\alpha + \beta < 90°$; järgmises paragrahvis tõestame, et saadud valemid on kehtivad üldiselt, s. t. nad on õiged ka α ja β mistahes väärtuste puhul.

§ 54. Paragrahv 53 valemite üldkehtivuse tõestus. Vaatleme esmalt summa valemeid, sest nendest on kerge tuletada vahe valemid. Tuletamisel kasutame muuseas ka taandamisvalemeid, mille üldine kehtivus on juba tõestatud (§ 38).

I. a) Mõlemad liidetavad nurgad on positiivsed.

1) Juhul, kui $\alpha + \beta < 90°$, on valemite kehtivus tõestatud.

2) Olgu $\alpha < 90°$ ja $\beta < 90°$, kuid $\alpha + \beta > 90°$. Siis, võttes $\alpha = 90° - \alpha_1$ ja $\beta = 90° - \beta_1$, saame:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[180° - (\alpha_1 + \beta_1)] = \sin(\alpha_1 + \beta_1);$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[180° - (\alpha_1 + \beta_1)] = -\cos(\alpha_1 + \beta_1).$$

Et $\alpha_1 + \beta_1 < 90°$, siis rakendades sellele summale valemeid (I) ja (II) ning kasutades täiendusnurkade omadust, saame:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha_1 \cdot \cos\beta_1 + \cos\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 =$$
$$= \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta;$$
$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\alpha_1 \cdot \cos\beta_1 + \sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 =$$
$$= -\sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta.$$

Nii saime sama, mis § 53.

Punktidest 1) ja 2) järeldub, et valemid (I) ja (II) on kehtivad igasuguste teravnurkade puhul.

3) Tõestame nüüd, et kui valemid (I) ja (II) on kehtivad mingi kahe nurga puhul, siis nad jäävad kehtivaiks ka siis, kui ühele nurgale lisame

90°. Tähistame tähtedega α ja β kaht niisugust nurka, mille puhul valemid on kehtivad, ning olgu $\alpha + 90° = \alpha_1$. Siis on:

$$\sin(\alpha_1 + \beta) = \sin [90° + (\alpha + \beta)] = \cos (\alpha + \beta);$$
$$\cos(\alpha_1 + \beta) = \cos [90° + (\alpha + \beta)] = - \sin (\alpha + \beta).$$

Toetudes α ja β kohta tehtud oletusele, arendame $\cos (\alpha + \beta)$ ja $\sin (\alpha + \beta)$. Siis saame:

$$\sin (\alpha_1 + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta; \tag{1}$$
$$\cos (\alpha_1 + \beta) = - (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta). \tag{2}$$

Võrduste paremates pooltes avaldame α α_1 kaudu. Et $\alpha + 90° = \alpha_1$, siis $\alpha = \alpha_1 - 90°$, ehk $\alpha = -(90° - \alpha_1)$. Siis saame:

$$\sin \alpha = - \sin (90° - \alpha_1) = - \cos \alpha_1,$$
$$\cos \alpha = \cos (90° - \alpha_1) = \sin \alpha_1.$$

Asendades nüüd võrdustes (1) ja (2) $\sin \alpha$ avaldisega $(- \cos \alpha_1)$ ja $\cos \alpha$ avaldisega $\sin \alpha_1$, saame:

$$\sin (\alpha_1 + \beta) = \sin \alpha_1 \cdot \cos \beta - (- \cos \alpha_1) \cdot \sin \beta =$$
$$= \sin \alpha_1 \cdot \cos \beta + \cos \alpha_1 \cdot \sin \beta;$$
$$\cos (\alpha_1 + \beta) = - [(- \cos \alpha_1) \cdot \cos \beta + \sin \alpha_1 \cdot \sin \beta] =$$
$$= \cos \alpha_1 \cdot \cos \beta - \sin \alpha_1 \cdot \sin \beta.$$

Nii saime eelmise paragrahvi valemid (I) ja (II) nurkade $\alpha_1 = \alpha + 90°$ ja β jaoks.

4) Iga positiivse nurga, mis ületab 90°, võib saada sel teel, et teravnurgale järjest lisatakse 90°. Valemite (I) ja (II) kehtivus teravnurkade puhul on juba tõestatud, kuid 90° lisandamine ühele või teisele nurgale ei riku valemite kehtivust, nagu nägime p. 3). Järelikult need valemid on kehtivad mistahes positiivsete nurkade puhul.

I. b) Üks liidetavaist nurkadest või mõlemad on negatiivsed.

Iga negatiivse nurga võib saada sel teel, et mingile positiivsele nurgale lisatakse järjest —360°. Positiivsete nurkade jaoks on valemite (I) ja (II) kehtivus tõestatud, kuid —360° lisamine nurgale α või nurgale β või kummalegi nurgale ei muuda summa siinust ega koosinust, ega ka liidetavate nurkade siinuseid ega koosinusi. Seepärast on need valemid kehtivad ka siis, kui üks nurkadest või mõlemad on negatiivsed.

Punktidest Ia) ja Ib) järeldub, et valemid (I) ja (II) kehtivad α ja β mistahes väärtuste puhul.

II. Kahe nurga vahe.

Asendades summa valemites nurga β nurgaga $-\beta$, saame:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Seega on tõestatud valemite (I)—(IV) üldine kehtivus.

§ 55. Kahe nurga summa ja vahe tangens. 1) Teisendame:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Et $\tan(\alpha+\beta)$ avaldada $\tan\alpha$ ja $\tan\beta$ kaudu, jagame viimase murru lugeja ja nimetaja liikmed avaldisega $\cos\alpha\cdot\cos\beta$. Siis saame:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}};$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}. \qquad \text{(V)}$$

2) Korrates sama võtet leiame:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}. \qquad \text{(VI)}$$

§ 56. Kahe nurga summa ja vahe funktsioonide valemite abil võime arendada kuitahes mitme positiivse ja negatiivse nurga funktsioonid. Näiteks:

$$\sin(\alpha-\beta+\gamma)=\sin[(\alpha-\beta)+\gamma]=$$
$$=\sin(\alpha-\beta)\cdot\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)\cdot\sin\gamma;$$

edasi rakendame valemeid (III) ja (IV).

§ 57. Kahekordse nurga siinus, koosinus ja tangens. Võttes kahe nurga summa funktsioonide valemeis $\beta=\alpha$, saame:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha; \qquad \text{(VII)}$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha; \qquad \text{(VIII)}$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \qquad \text{(IX)}$$

§ 58. Et arendada nurkade 3α ja 4α trigonomeetrilised funktsioonid, esitame nad kujul $2\alpha + \alpha$ ja $2 \cdot (2\alpha)$. Näiteks:

1) $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha =$
$= (2\sin\alpha \cdot \cos\alpha) \cdot \cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \cdot \sin\alpha =$
$= \sin\alpha\,(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$

2) $\sin 4\alpha = \sin 2 \cdot (2\alpha) = 2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha =$
$= 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$

§ 59. Sagedasti tekib tarvidus avaldada antud nurga funktsioonid poole nurga funktsioonide kaudu; selleks vaatleme nurka kui poole nurga kahekordset ja rakendame § 57 valemeid. Näiteks:

a) $\sin\alpha = \sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2};$

b) $\cos\alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$

§ 60. **Poolnurga siinus, koosinus ja tangens.** Paragrahvide 12 ja 59 järgi on kehtivad võrdused:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1; \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Liites ja lahutades need võrdused liikmeti, saame:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \quad \text{ja} \quad 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

ja siit:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \text{(X)}$$

ja

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}. \qquad \text{(XI)}$$

Jagades võrduste (X) ja (XI) vastavad pooled, saame:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \qquad \text{(XII)}$$

Paragrahvis 62 anname $\tan\frac{\alpha}{2}$ jaoks lihtsama valemi.

Saadud valemite rakendamisel tuleb säilitada juuresümboli ees kaks märki ainult siis, kui puuduvad andmed selleks, kumb märk valida; vastasel korral võtame ühe, nõutava märgi.

N ä i d e. Leida $\tan\frac{\alpha}{2}$, kui α on nurk vahemikust 270° kuni 360° ja $\cos\alpha = 0{,}6$.

Et $270° < \alpha < 360°$, siis $135° < \frac{\alpha}{2} < 180°$. Seega $\frac{\alpha}{2}$ on nürinurk ja $\tan\frac{\alpha}{2}$ väärtus on negatiivne. Seepärast peame võtma

$$\tan\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-0{,}6}{1+0{,}6}} = -\frac{1}{2}.$$

§ 61. **Kahekordsest märgist valemeis (X) ja (XI).** Kui on antud $\cos\alpha$ ja α väärtused ei ole piiratud mingi muu tingimusega, siis kaare $\frac{\alpha}{2}$ funktsioonide määramine on üheväärne nende määramisega α kõigi väärtuste jaoks, mis vastavad antud koosinuse väärtusele. Väikseim positiivne väärtus nende hulgas olgu φ. Siis $\alpha = \pm\varphi + n \cdot 360°$ ja järelikult $\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\varphi}{2} + n \cdot 180°$. Kaarte $+\frac{\varphi}{2}$ ja $-\frac{\varphi}{2}$ otspunktid asetsevad I ja IV veerandis; lisades neile $n \cdot 180°$, saame kaared, mille otspunktid paarisarvulise n puhul asetsevad samades punktides (I ja IV veerandis), ja paarituarvulise n puhul kaared, mille otspunktid asetsevad diametraalselt vastupidistes punktides (s. o. III ja II veerandis). Seega kaarte $\frac{\alpha}{2}$ otspunktid on jaotatud kõige nelja veerandi vahel ja seepärast kaare $\frac{\alpha}{2}$ funktsioonide väärtused võivad olla nii positiivsed kui negatiivsed.

§ 62. Avaldame $\tan\frac{\alpha}{2}$ veel $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ kaudu. Selleks asendame $\tan\frac{\alpha}{2}$ avaldisega $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ ning laiendame seda murdu kord avaldisega $2\cos\frac{\alpha}{2}$ ja teinekord avaldisega $2\sin\frac{\alpha}{2}$. Siis saame (§ 59 ja 60 põhjal):

$$\text{a)}\ \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}; \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

b) $\tan\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}$; $\quad \tan\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

N ä i d e. Rakendame valemeid a) ja b) näitele paragrahvist 60. On antud, et $270° < \alpha < 360°$ ja $\cos\alpha = 0{,}6$; siit saame, et

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-0{,}6^2} = -0{,}8.$$

Seega:

$$\text{a)}\ \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{-0{,}8}{1+0{,}6} = \frac{-0{,}8}{1{,}6} = -\frac{1}{2};$$

$$\text{b)}\ \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-0{,}6}{-0{,}8} = \frac{0{,}4}{-0{,}8} = -\frac{1}{2}.$$

V. Avaldiste teisendamine logaritmitavaiks.

§ 63. Üldine märkus. Logaritmimiseks sobivad ainult niisugused avaldised, mis ei sisalda liitmise ega lahutamise tehte nõudeid, välja arvatud niisugused, mis on kergesti ja vahenditult teostatavad.

Kui see tingimus ei ole täidetud, siis tuleb avaldist teisendada, kuivõrd see on võimalik ja kasulik. Vaatleme nüüd tähtsamaid niisuguseid teisendusi.

§ 64. Kahe siinuse või koosinuse summa ja vahe teisendamine.

Teisendame avaldise $\sin\alpha + \sin\beta$. Oletame, et

$$\alpha = x + y \tag{1}$$

ja

$$\beta = x - y \tag{2}$$

ning rakendame valemeid (I) ja (III) § 53. Siis saame:

$$\sin\alpha = \sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y; \tag{3}$$

$$\sin\beta = \sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y. \tag{4}$$

Siit saame:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin x\cdot\cos y;$$

kuid võrrandeist (1) ja (2) järeldub, et

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ ja } y=\frac{\alpha-\beta}{2};$$

seega on

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad \text{(XIII)}$$

Lahutades liikmeti võrdusest (4) võrduse (3), saame:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos x\cdot\sin y=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ehk

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad \text{(XIV)}$$

Kasutame nüüd valemeid

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \qquad (5)$$

ja

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y, \qquad (6)$$

võttes jälle

$$\alpha=x+y \text{ ja } \beta=x-y.$$

Liites liikmeti võrdused (5) ja (6), saame:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y \qquad \text{(XV)}$$

ehk

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Lahutades liikmeti võrdusest (6) võrduse (5), saame:

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\ ^{1)}. \qquad \text{(XVI)}$$

N ä i t e i d.

1) $\sin 100^\circ-\sin 16^\circ=2\cos\frac{100^\circ+16^\circ}{2}\cdot\sin\frac{100^\circ-16^\circ}{2}=$ $=2\cos 58^\circ\cdot\sin 42^\circ$.

2) $\cos 12^\circ-\cos 60^\circ=2\sin 36^\circ\cdot\sin 24^\circ$.

---

[1]) $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\left(-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=-\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$. Seda valemit võib sõnastada nii: *kahe koosinuse vahe võrdub nurkade poolsumma siinuse ja vastupidise poolvahe siinuse kahekordse korrutisega.*

3) $\cos 50^\circ + \sin 70^\circ = \cos 50^\circ + \cos 20^\circ =$
$$= 2\cos 35^\circ \cdot \cos 15^\circ.$$

4) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin(90^\circ - \alpha) =$
$$= 2\sin 45^\circ \cdot \cos(\alpha - 45^\circ) = \sqrt{2}\cdot\cos(\alpha - 45^\circ).$$

§ 65. Teisendame veel järgmised siinust ja koosinust sisaldavad avaldised.

a) Jagades võrduste (XIII) ja (XIV) vastavad pooled, saame:
$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} : \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}};$$
järelikult
$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}. \qquad \text{(XVII)}$$

b) § 60 põhjal on:
$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad \text{(XVIII)}$$
$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad \text{(XIX)}$$

Näiteid.

1) $$\frac{\sin 35^\circ + \sin 14^\circ}{\sin 35^\circ - \sin 14^\circ} = \frac{\tan\frac{35^0 + 14^0}{2}}{\tan\frac{35^0 - 14^0}{2}} = \frac{\tan 24^\circ 30'}{\tan 10^\circ 30'}.$$

2) $1 + \cos 10^\circ 23' = 2\cos^2 5^\circ 11' 30''$.

3) $1 - \sin 40^\circ = 1 - \cos 50^\circ = 2\sin^2 25^\circ$.

§ 66. Kahe tangensi või kootangensi summa ja vahe teisendamine. Et teisendada avaldised $\tan\alpha \pm \tan\beta$, $\cot\alpha \pm \cot\beta$, $\tan\alpha \pm \cot\beta$ ja $\cot\alpha \pm \tan\beta$, selleks esmalt avaldame neis tangensid ja kootangensid siinuse ja koosinuse kaudu. Näiteks:

a) $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$;

b) $\cot\alpha - \cot\beta = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$;

c) $\tan\alpha - \cot\beta = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} = -\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$.

§ 67. Abinurga võte. Mõningaid avaldisi saab kergesti teisendada logaritmitavaiks sel teel, et mingi avaldises esinev arv asendatakse mõne nurga trigonomeetrilise funktsiooniga.

Toome mõnede niisuguste juhtude näited:

1) $\sqrt{\sqrt{5}-1} = \sqrt{4 \sin 18^\circ} = 2\sqrt{\sin 18^\circ}$.

2) $1 + \tan\alpha = \tan 45^\circ + \tan\alpha = \frac{\sin(45^0 + \alpha)}{\cos 45^0 \cdot \cos\alpha}$.

3) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\left(\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$
$= \sqrt{2}\cdot(\sin\alpha\cdot\cos 45^\circ + \cos\alpha\cdot\sin 45^\circ) = \sqrt{2}\cdot\sin(\alpha + 45^\circ)$.

4) $1 + 2\sin 50^\circ = 2\cdot\left(\frac{1}{2} + \sin 50^\circ\right) = 2\cdot(\sin 30^\circ + \sin 50^\circ) =$
$= 4\sin 40^\circ\cdot\cos 10^\circ$.

§ 68. Paragrahvis 67 toodud teisendused oli võimalik teostada mõnede lihtsate nurkade abil. Vaatleme nüüd üldist juhtu, nimelt, teisendame abinurga võtte abil logaritmitavaiks summa $A + B$ ja vahe $A - B$, kus A ja B tähistavad mistahes avaldisi.

1) Võime kirjutada $A + B = A\left(1 + \frac{B}{A}\right)$. Võtame siin murru $\frac{B}{A}$ võrdseks mingi nurga tangensiga, mis on alati võimalik, sest tangensi väärtuseks võib olla mistahes arv. Võttes $\frac{B}{A} = \tan\varphi$, saame

$$A + B = A\,(1 + \tan\varphi),$$

kuid § 67 järgi on

$$1 + \tan\varphi = \frac{\sin(45^\circ + \varphi)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\varphi};$$

seega

$$A + B = A\cdot\frac{\sin(45^\circ + \varphi)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\varphi}.$$

Parema poole arvutamiseks tuleb muidugi esmalt leida (tabelite abil) nurga φ väärtus.

2) Samal viisil saame, et

$$A - B = A \cdot \frac{\sin(45^\circ - \varphi)}{\cos 45^\circ \cdot \cos\varphi}.$$

3) Veel saame, et

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{1+\tan\varphi}{1-\tan\varphi} = \tan(45^\circ + \varphi).$$

§ 69. Avaldiste $A+B$ ja $A-B$ teisendamine muutub lihtsamaks kui eelmises paragrahvis, kui on teada, et A ja B väärtused on p o s i t i i v s e d.

1) Kirjutame $A + B = A\left(1+\frac{B}{A}\right)$; et $\frac{B}{A}$ on positiivne, siis võime võtta $\frac{B}{A} = \tan^2\varphi$. Siis on:

$$A + B = A(1+\tan^2\varphi) = A\sec^2\varphi = \frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

2) Vahe $A-B$ puhul, kui $A > B$, kirjutame $A - B = A\left(1-\frac{B}{A}\right)$ ja võtame $\frac{B}{A} = \sin^2\varphi$. See on võimalik, sest $\frac{B}{A}$ on positiivne ja väiksem kui 1. Siis saame:

$$A - B = A(1-\sin^2\varphi) = A\cdot\cos^2\varphi.$$

Kui $A < B$, siis kirjutame esmalt $A - B = -(B-A)$, ja teisendame $B - A$ nagu varem.

VI. Trigonomeetrilistest võrranditest.

§ 70. Üldisi märkusi. Võrrandit nimetatakse t r i g o n o m e e t r i l i s e k s, kui tundmatu esineb trigonomeetrilise funktsiooni argumendis. Niisugused on näiteks järgmised võrrandid:

$2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; $\sin 5x = \sin 4x$; $\tan(\alpha + x) = m\tan x$ (esimeses võrrandis tundmatu on argumendiks, teises võrrandis tundmatu esineb argumendi koostises ja kolmandas võrrandis esinevad mõlemad juhud).

Trigonomeetrilistest v õ r r a n d i t e s t tuleb eristada trigonomeetrilised s a m a s u s e d: nii nimetatakse võrdusi, mis kehtivad argumendi kõigi väärtuste puhul. Näiteks, võrduse $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ vasem pool on alati võrdne parema poolega, — see on samasus, kuid võrdus $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$ on õige ainult argumendi mõnede väärtuste puhul[1], — see on võrrand.

Lahendada trigonomeetriline võrrand — tähendab leida nurgad, mis teda rahuldavad, s. o. teevad võrdseks tema mõlemad pooled (neid nurki nimetatakse võrrandi lahendeiks). Et lahendada võrrand, selleks tuleb esmalt võrrandist määrata tundmatu nurga mingi funktsiooni väärtus ja selle järgi määrata argumendi väärtus (tavaliselt tabelite abil). Kuid § 47 me nägime, et antud funktsiooni väärtusele vastab lõpmatu hulk nurki. Seega trigonomeetrilisel võrrandil (kui ta on lahendatav) on lõpmatu hulk lahendeid; tavaliselt leitakse nende üldavaldis. Olgu mingi võrrandi lahendamisel leitud, et $\tan 3x = 1$. Sellele tangensi väärtusele vastavad argumendid, mille üldavaldis on $45° + n \cdot 180°$, kus n on mistahes täisarv. Järelikult $3x = 45° + n \cdot 180°$; siit leiame x, kui võrduse mõlemad pooled jagame 3-ga: $x = 15° + n \cdot 60°$. See ongi antud võrrandi lahendite üldavaldis. (Lahendamatu võrrandi näitena võib olla võrrand $5 \sin x = 7$; sellest saame, et $\sin x = \frac{7}{5}$, kuid see on võimatu, sest siinuse absoluutväärtus ei või olla suurem kui 1.)

Mis puutub lahendamise võtteisse, siis enamasti on kasulik teisendada võrrandit nii, et võrrandisse jääks ainult ühe argumendi üks funktsioon; siis, võttes tundmatuks selle funktsiooni, lahendame võrrandi kui algebralise ja heidame kõrvale viimase need lahendid, mis ei saa olla määratava funktsiooni väärtusteks. Mõnikord on kasulik küsimust

---

[1] Näiteks, kui $x = 45°$, siis vasem pool ei võrdu paremaga.

taandada korrutise või murru nulliks muutumisele. Kõike öeldut selgitame näidetega.

§ 71. Näiteid.

I. Lahendada võrrand $2 \sin^2 x = 3 \sin x$.

L a h e n d u s. Andes võrrandile kuju

$$\sin x \cdot (2 \sin x - 3) = 0,$$

saame:

$$\sin x = 0; \quad 2 \sin x - 3 = 0, \text{ kust saab, et } \sin x = \frac{3}{2}.$$

Teine siinuse väärtus on võimatu (sest ta on suurem, kui 1); esimesele väärtusele aga vastab $x = n \cdot 180°$ (ehk $x = \pi n$).

II. Lahendada võrrand $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$.

L a h e n d u s. Asendades $\sin^2 x$ avaldisega $1 - \cos^2 x$, saame:

$$2 \cdot (1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0$$

ja seejärel

$$\cos^2 x - \frac{3}{2} \cos x - 1 = 0,$$

kust leiame:

$$\cos x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1}; \quad \cos x_1 = 2 \text{ ja } \cos x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Esimene koosinuse väärtus on võimatu, teine aga annab

$$x = 360^0 \cdot n \pm 120^0 \left(\text{ehk } x = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}\right).$$

III. Lahendada võrrand $\cot (270° - x) = 3 \cot x$.

L a h e n d u s. Asendades $\cot (270° - x)$ ja $\cot x$ vastavalt avaldistega $\tan x$ ja $\frac{1}{\tan x}$, saame $\tan x = \frac{3}{\tan x}$, kust järeldub, et $\tan x = \pm \sqrt{3}$. Mõlemad saadud arvud võivad olla $\tan x$ väärtusteks: kui $\tan x_1 = +\sqrt{3}$, siis $x_1 = 60° + n \cdot 180°$, kui $\tan x_2 = -\sqrt{3}$, siis $x_2 = -60° + n \cdot 180°$. Seega üldiselt on:

$$x = n \cdot 180° \pm 60° \quad \text{ehk} \quad x = \pi n \pm \frac{\pi}{3}.$$

IV. Lahendada võrrand $\tan(\alpha + x) = m \cdot \tan x$, kus α ja m tähistavad tuntud arve.

Lahendus. Arendades $\tan(\alpha + x)$ saame järk-järgult:

$$\frac{\tan\alpha + \tan x}{1 - \tan\alpha \cdot \tan x} = m \cdot \tan x;$$

$$\tan\alpha + \tan x = m \cdot \tan x - m \cdot \tan\alpha \cdot \tan^2 x;$$

$$m \cdot \tan\alpha \cdot \tan^2 x - (m-1) \cdot \tan x + \tan\alpha = 0;$$

$$\tan x = \frac{m - 1 \pm \sqrt{(m-1)^2 - 4m \cdot \tan^2\alpha}}{2m \cdot \tan\alpha}.$$

V. Lahendada võrrand $\sin x - \cos x = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Lahendus. Siin on kasulik teisendada vasem pool korrutiseks (vrd. § 64, näide 4):

$$\sin x - \sin(90° - x) = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad 2\cos 45° \cdot \sin(x - 45°) = \sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$\sqrt{2}\sin(x - 45°) = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad \sin(x - 45°) = \frac{1}{2}.$$

Siit

$$x - 45° = 30° + n \cdot 360°$$

ja

$$x - 45° = 150° + n \cdot 360°$$

ning järelikult

$$x = 75° + n \cdot 360° \text{ ja } x = 195° + n \cdot 360°$$

ehk

$$x = \frac{5}{12}\pi + 2\pi \cdot n \text{ ja } x = \frac{13}{12}\pi + 2\pi \cdot n.$$

VI. Lahendada võrrand $\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 3\cos^2 x$.

Lahendus. Jagades mõlemad pooled avaldisega $\cos^2 x$, saame

$$\tan^2 x - 2\tan x = 3,$$

kust leiame kaks tangensi väärtust: -1 ja 3. Vastavalt nendele $\tan x$ väärtustele leiame: $x_1 = 135° + n \cdot 180°$ ehk $x_1 = -45° + n \cdot 180°$ ja $x_2 = 71°33'54'' + n \cdot 180°$.

VII. Lahendada võrrand $\sin 5x = \sin 4x$.

L a h e n d u s. $\sin 5x - \sin 4x = 0$; $2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{9x}{2} = 0$. Edasi saame: 1) $\sin \frac{x}{2} = 0$, mille järgi $\frac{x}{2} = n \cdot 180°$ ja järelikult $x = n \cdot 360°$; 2) $\cos \frac{9x}{2} = 0$, mille järgi $\frac{9x}{2} = 90° + n \cdot 180°$ ja järelikult $x = 20° + n \cdot 40°$.

Seega

$$x_1 = n \cdot 360° \text{ ja } x_2 = 20° + n \cdot 40°.$$

VIII. Lahendada võrrand $a \cdot \sin x = b \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$.

L a h e n d u s.

$$a \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = b \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$$

ehk

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \left(2\,a \cdot \sin \frac{x}{2} - b \cdot \cos \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Siit saame:

$$1) \quad \cos \frac{x}{2} = 0;$$

ja

2) $2\,a \cdot \sin \frac{x}{2} - b \cdot \cos \frac{x}{2} = 0$, kust saame: $\tan \frac{x}{2} = \frac{b}{2a}$.

IX. Lahendada võrrand $\tan 5x = \tan 2x$.

L a h e n d u s. Andes võrrandile kuju: $\tan 5x - \tan 2x = 0$ ja rakendades § 67, saame: $\frac{\sin (5x - 2x)}{\cos 5x \cdot \cos 2x} = 0$. Sellest saame, et $\sin 3x = 0$, mille järgi on $3x = n \cdot 180°$ ja järelikult $x = n \cdot 60°$.

X. Lahendada võrrand $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$.

L a h e n d u s. *1. viis.* Et $\sin x$ ja $\cos x$ avalduvad teineteise kaudu i r r a t s i o n a a l s e l t, siis, eraldades esmalt $a \cdot \sin x$ (või $b \cdot \cos x$), tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu ja seejärel asendame $\sin^2 x$ (või $\cos^2 x$).

2. viis. Kasutame asjaolu, et $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ avalduvad r a t s i o n a a l s e l t $\tan\frac{\alpha}{2}$ kaudu ja nimelt:

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \quad \text{ja} \quad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\text{[1]}.$$

Kui teeme oma võrrandis need asendused, siis saame $\tan\frac{x}{2}$ suhtes ruutvõrrandi, millest leiame, et

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}.$$

Siit muide nähtub ka, et võrrand on lahendatav tingimusel: $a^2 + b^2 \geqq c^2$.

Kui otsitava nurga funktsiooni jaoks saadakse täheline avaldis, nagu näiteks käesoleval juhul, siis seda loetaksegi lõplikuks tulemuseks. On vaja ainult uurida, missuguste avaldises esinevate tähtede väärtuste puhul on võimalik leitud trigonomeetrilise funktsiooni väärtus.

3. viis. Arvude a ja b mitmekohaliste väärtuste korral eelmine lahendamise viis muutub tülikaks. Niisugusel juhul antud võrrand lahendatakse a b i n u r g a v õ t t e g a järgmisel viisil: jagades võrrandi mõlemad pooled b-ga ja võttes $\frac{a}{b} = \tan\varphi$, saame:

$$\tan\varphi \cdot \sin x + \cos x = \frac{c}{b};$$

korrutades nüüd mõlemad pooled $\cos\varphi$-ga, leiame:

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{b}\cdot\cos\varphi.$$

Siit leiame esmalt $x - \varphi$ ja siis x.

---

[1]) Võttes $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ ja $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, jagame paremad pooled avaldisega $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ (mis võrdub 1-ga) ning seejärel jagame lugeja ja nimetaja avaldisega $\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

§ 72. Selle paragrahvi näited puudutavad võrrandi lahendite kaotsimineku ja lisalahendite tekkimise küsimusi. Seejuures eeldatakse, et nende küsimuste üldine teooria on õpilasele tuttav juba algebra kursusest.

I. Kui nulliga võrduva korrutise tegur võrrutatakse nulliga, siis tuleb jälgida, kas teine tegur ei omanda seejuures väärtust ∞

Võtame näiteks võrrandi $\sin x \cdot \cot 2x = 0$. Võrrutades nulliga kummagi teguri, saame:

1) $\sin x = 0$; $x = n \cdot 180°$; 2) $\cot 2x = 0$; $2x = 90° + n \cdot 180°$ ja järelikult $x = 45° + n \cdot 90°$.

Kontrollime neid tulemusi.

Tehes antud võrrandis asenduse $x = n \cdot 180°$, saame vasemal poolel: $\sin (n \cdot 180°) \cdot \cot (n \cdot 360°)$, mis on $0 \cdot \infty$.

Et selgitada selle määramatu avaldise tõelist tähendust, selleks teisendame avaldise $\sin x \cdot \cot 2x$; x-i igasuguste väärtuste puhul on:

$$\sin x \cdot \cot 2x = \sin x \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos 2x}{2 \cos x};$$

tehes siin asenduse $x = n \cdot 180°$, saame:

$$\frac{\cos (360° \cdot n)}{2 \cos (180° \cdot n)} = \frac{1}{2 \cdot (-1)^n} = \frac{1}{2} \cdot (-1)^n.$$

Seega vastus $x = n \cdot 180°$ ei rahulda antud võrrandit, sest selle väärtuse puhul vasem pool ei omanda väärtust 0, vaid $+\frac{1}{2}$ või $-\frac{1}{2}$.

Asetame antud võrrandisse $x = 45° + n \cdot 90°$. Et $\sin x$ ei saa kunagi omandada väärtust ∞, siis korrutise väärtus on 0, ja järelikult see vastus on õige. Niisiis pärast uurimist selgub, et püsib ainult lahendus $x = 45° + n \cdot 90°$.

II. Lahendada võrrand

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

Lahendus. Vabastanud võrrandi murdudest, saame $\sin 2x \cdot \cos x = \cos 2x \cdot \sin x$ ehk

$$\sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x = 0.$$

Selle võrrandi vasem pool on vahe siinuse arendis; seega on $\sin x = 0$, mille järgi oleks $x = n \cdot 180°$. Et $\sin x = 0$ puhul ühine nimetaja $\sin x \cdot \cos x$ muutub nulliks, siis leitud vastus on kaheldav.

Asetades antud võrrandisse $x = n \cdot 180°$, saaksime

$$\frac{\sin (360° \cdot n)}{\sin (180° \cdot n)} = \frac{\cos (360° \cdot n)}{\cos (180° \cdot n)} \text{ ehk } \frac{0}{0} = \frac{1}{(-1)^n}.$$

Et leida vasemal poolel oleva määramatuse tõeline tähendus, paneme tähele, et $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ on samaselt võrdne avaldisega $\frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin x}$ ehk $2 \cos x$. Järelikult vasema poole tõeline väärtus on $2 \cos (n \cdot 180°)$ ehk $2 \cdot (-1)^n$.

Seega $x = n \cdot 180°$ ei rahulda antud võrrandit.

Kui võrrand sisaldab murdavaldisi, siis on üldiselt parem kasutada järgmist usaldatavamat võtet: kõik liikmed kantakse ühele poole ja ühendatakse üheks murruks; kui võimalik, siis taandatakse see murd ja seejärel selgitatakse, millal see murd võib saada võrdseks nulliga.

Toimides sel viisil antud võrrandiga, oleksime ta järk-järgult asendanud järgmistega:

$$\frac{\sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \cos x} = 0; \qquad \frac{\sin (2x - x)}{\sin x \cdot \cos x} = 0;$$

$$\frac{1}{\cos x} = 0; \qquad \sec x = 0.$$

Kuid seekans ei saa kunagi olla null, seepärast antud võrrandil ei olegi lahendeid.

III. Kui me näites 1 oleksime jaganud võrrandi mõlemad pooled avaldisega $\sin x$, siis oleksime kaotanud lahendi $\sin x = 0$.

Näites VI, § 71 me jagasime võrrandi mõlemad pooled avaldisega $\cos^2 x$. Kuid $\cos x = 0$ ei rahulda seda võrrandit, järelikult lahendi kaotsiminekut siin ei olnud.

IV. Lahendada võrrand $\sin x + 7 \cos x = 5 \ldots$ (a).

Lahendus. Kirjutanud $\sin x = 5 - 7 \cos x \ldots$ (b), tõstame mõlemad pooled ruutu; siis saame:

$$\sin^2 x = 25 - 70 \cos x + 49 \cos^2 x.$$

Edasi leiame:

$$50 \cos^2 x - 70 \cos x + 24 = 0; \quad \cos^2 x - \frac{7}{5} \cos x + \frac{12}{25} = 0;$$

kust saame:

$$\cos x = \frac{7}{10} \pm \sqrt{\frac{49}{100} - \frac{12}{25}} = \frac{7}{10} = \mp \frac{1}{10}.$$

Seega:

1) $\cos x_1 = 0{,}8$, kust $x_1 = n \cdot 360° \pm 36° 52' 12''$;

2) $\cos x_2 = 0{,}6$, kust $x_2 = n \cdot 360° \pm 53° 07' 48''$.

Meenutame, et lahendamise käigus kasutasime võrrandi poolte ruutu tõstmist, kuid sellest võisid tekkida lisalahendid. Nagu teada, kuuluvad niisugused lahendid võrrandile, mis erineb antud võrrandist ainult ühe poole märgilt, s. o. võrrandile $\sin x = -(5 - 7\cos x)$. Nendeks lahenditeks on järelikult nurgad, mille siinuse märk on vastupidine nõutavale. Selgitame seepärast, missugune peab olema siinuse märk, et nurk rahuldaks antud võrrandit. Võrrandis (b) $\cos x$ asendamine tema väärtustega annab:

$$1)\ \sin x_1 = 5 - 7 \cdot 0{,}8 < 0; \qquad 2)\ \sin x_2 = 5 - 7 \cdot 0{,}6 > 0.$$

Seega ülalsaadud nurkadest tuleb heita kõrvale: $x_1 = n \cdot 360° + 36°\,52'\,12''$ kui nurk x_1, mille siinus on positiivne, ja $x_2 = n \cdot 360° - 53°\,07'\,48''$ kui nurk x_2, mille siinus on negatiivne.

Seega lõplikult võrrandi (a) lahendeiks on:

$$x_1 = n \cdot 360° - 36°\,52'\,12'' \text{ ja } x_2 = n \cdot 360° + 53°\,07'\,48''.$$

Võrdluseks lahendades antud võrrandi veel sel teel, et avaldame $\sin x$ ja $\cos x$ funktsiooni $\tan \frac{x}{2}$ kaudu, saame:

$$1)\ \tan\frac{x}{2} = \frac{1}{2};\ \frac{x}{2} = 26°33'54'' + n \cdot 180°;\ x = 53°07'48'' + 360° \cdot n;$$

$$2)\ \tan\frac{x}{2} = -\frac{1}{3};\ \frac{x}{2} = -18°26'06'' + n \cdot 180°;\ x = -36°52'12'' + n \cdot 360°.$$

TRIGONOMEETRILISTEST TABELITEST.

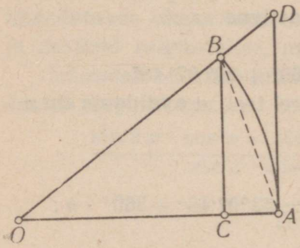
VII. Trigonomeetriliste tabelite koostamisest.

§ 73. Nüüd näitame, kuidas oleks võimalik leida iga nurga trigonomeetriliste funktsioonide ligikaudsed väärtused.

Nagu teame, taanduvad mistahes nurga trigonomeetrilised funktsioonid niisuguse positiivse teravnurga funktsioonideks, mis ei ületa 45°. Teame ka, et on võimalik arvutada kõik trigonomeetrilised funktsioonid, kui on antud üks neist, näiteks siinus. Sellest järeldub, et piisab näidata võtet, mis võimaldab arvutada vahemikus 0° kuni 45° sisaldavate nurkade siinused.

Üks niisuguseist viisidest põhjeneb sellel, et v ä g a v ä i k e s e nurga puhul võib s i i n u s l õ i g u ilma märgatava veata asendada k a a r e g a.

Olgu näiteks joonisel 39 $\angle\ AOB = 10'$ (joonisel on nurga suurus moonutatud, sest võimatu on joonestada nii väikest nurka). Siinuse definitsiooni järgi peab olema $\sin 10' = \frac{BC}{R}$, mainitud võte seisneb aga selles, et suhte $\frac{BC}{R}$ asemel võetakse suhe $\frac{\smile AB}{R}$. Selle suhte arvutamiseks kirjutame, et



Joon. 39.

$$\smile AB = \frac{2\pi R \cdot 10}{360 \cdot 60} = \frac{\pi R}{1080},$$

kust leiame:

$$\frac{\smile AB}{R} = \frac{\pi}{1080};$$

asendades siin π tema väärtusega, saame, et $\frac{\smile AB}{R} = 0{,}002908882\ldots$

Selle arvu võtamegi sin 10′ ligikaudseks väärtuseks.

Et suhe $\frac{\smile AB}{R}$ on kaare AB radiaanmõõt, siis võime ütelda, et väga väikese nurga siinuse me asendame sellele nurgale vastava kaare radiaanmõõduga.

Seejärel, kui oleme arvutanud 10′-se nurga siinuse, võime, järk-järgult nurka 10′ võrra suurendades, arvutada nii tekkivate nurkade siinused, kasutades kahekordse nurga ja nurkade summa siinuse arendisi.

Paragrahvides 74—76 tõestame kolm teoreemi: teine neist annab õigustuse asendada väga väikese kaare siinuse selle kaare radiaanmõõduga ja kolmas võimaldab hinnata niisugusest asendamisest tekkivat viga.

§ 74. Teoreem. *Kaare (väiksema kui $\frac{\pi}{2}$) radiaanmõõt on suurem kui ta siinus ja väiksem kui ta tangens.*

Olgu $0 < a < \frac{\pi}{2}$, kus a on kaare radiaanmõõt; peame tõestama, et $\sin a < a < \tan a$.

T õ e s t u s. Joonestanud kõõlu AB joonisel 39, näeme, et $\triangle OAB$ pindala < sektori OAB pindala < $\triangle OAD$ pindala, ehk avaldades pindalad:

$$\frac{1}{2} OA \cdot BC < \frac{1}{2} OA \cdot \smile\!\mathrm{AB} < \frac{1}{2} OA \cdot AD.$$

Siit saame, et

$$BC < \smile\!AB < AD,$$

ja jagades kõik liikmed R-ga:

$$\frac{BC}{R} < \frac{\smile\!AB}{R} < \frac{AD}{R},$$

s. o.

$$\sin a < a < \tan a.$$

§ 75. Teoreem. *Nurga piiramatul lähenemisel nullile nurga siinuse ja radiaanmõõdu suhe piiramatult läheneb ühele.*

Peame tõestama, et $\lim\limits_{a \to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$, kus a on nurga radiaanmõõt.

T õ e s t u s. § 74 järgi on

$$\sin a < a < \tan a. \tag{1}$$

Jagades suuruse $\sin a$ järgemööda selle võrratuse iga liikmega, saame:

$$1 > \frac{\sin a}{a} > \cos a. \tag{2}$$

Kui nurk a piiramatult läheneb nullile, siis $\cos a$ piiramatult läheneb ühele. Seega võrratuse (2) kolmas liige piiramatult läheneb esimesele. Järelikult peab ka võrratuse teine liige piiramatult lähenema esimesele, s. o. suhte $\frac{\sin a}{a}$ piir on 1.

§ 76. Teoreem. *Teravnurga radiaanmõõdu ja siinuse vahe on väiksem kui veerand radiaanmõõdu kuupi.*

Olgu a nurga radiaanmõõt, kusjuures $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Peame tõestama, et $a - \sin a < \frac{a^3}{4}$.

T õ e s t u s. Lähtume võrratusest $\frac{a}{2} < \tan \frac{a}{2}$ (rakendades

§ 74 teoreemi kaarele $\frac{a}{2}$). Korrutades mõlemad liikmed avaldisega $2\cos^2\frac{a}{2}$, saame: $a\cdot\cos^2\frac{a}{2}<2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}$ ehk $a(1-\sin^2\frac{a}{2})<\sin a$, kust saame: $a-\sin a<a\cdot\sin^2\frac{a}{2}$.

Asendades siin $\sin\frac{a}{2}$ suurema arvuga $\frac{a}{2}$ (§ 74), saame lõpuks:

$$a-\sin a<\frac{a^3}{4}.$$

§ 77. Rakendades § 73 mainitud võtet (mõningate lihtsustustega) võib koostada trigonomeetriliste funktsioonide tabelid, ja võttes nende funktsioonide logaritmid, saame koostada logaritmilised tabelid, mida kasutatakse trigonomeetrilisteks arvutusteks.

Märkus. Eelnevalt oli näidatud, missugused võimalused on trigonomeetriliste tabelite koostamiseks. Selle kohta, kuidas tegelikult olid koostatud esimesed tabelid, tähendame ainult, et tol ajal rakendatavad võtted olid väga keerulised.

VIII. Trigonomeetrilised tabelid.

§ 78. Anname V. Bradis'e raamatus „Neljakohalised matemaatilised tabelid" toodud trigonomeetriliste funktsioonide neljakohaliste tabelite lühikese seletuse.

Tabel IX sisaldab kõigi niisuguste teravnurkade siinuste ja koosinuste väärtusi, milles on täisarv kraade ja minuteid. Siinuse leidmiseks tuleb vasemalt üles otsida antud kraadide arv ja ülalt antud minutite arv; vastava rea ja veeru lõikumise kohas leitakse otsitav siinus.

Näiteid. $\sin 20°12' = 0{,}3453$,

$\sin 75°48' = 0{,}9694$.

Ümberpöördult, et antud siinuse järgi leida nurk, selleks otsitakse üles antud siinuse väärtus ning kraadide arv võetakse vasemalt ja minutite arv ülalt:

$$\sin x = 0{,}8949;\ x = 63°30'.$$

Koosinuse leidmiseks tuleb kraadide arv võtta paremalt ja minutite arv alt, näiteks:

$$\cos 35°42' = 0{,}8121.$$

Nurga väärtused selles tabelis on antud 6′-ste vahedega. Vahepealsete nurkade funktsioonide leidmiseks tuleb kasutada 1, 2 ja 3 minuti jaoks tehtud parandusi paremal asetsevaist veergudest. Näiteks:

$$\sin 34°15' = 0{,}5628$$

[nurga 34°12′ siinusega on liidetud 3′-le vastav parandus 7 (siinuse murdosa neljanda koha ühikut)].

Et I veerandis nurga kasvades siinus kasvab ja koosinus kahaneb, siis siinuse puhul parandus liidetakse, koosinuse puhul aga lahutatakse.

Tabel X sisaldab nurkade 0° kuni 76° tangensite väärtusi ja nurkade 14° kuni 90° kootangensite väärtusi. Seda tabelit tuleb kasutada samuti kui tabelit IX.

Tabel XI sisaldab nurkade 76° kuni 90° tangensite väärtusi ja nurkade 0° kuni 14° kootangensite väärtusi. Neis vahemikes tangens ja kootangens muutuvad eriti kiiresti, seepärast on siin nurgad antud 1′ tagant; parandusi ei ole siin vaja leida.

§ 79. Tabelid XII, XIII, XIV, XV ja XVI sisaldavad siinuste ja koosinuste ning tangensite ja kootangensite logaritme. Neid tabeleid kasutatakse samal viisil kui eelmisi.

Näiteid.

$$\log\sin 20°18' = \overline{1}{,}5402; \quad \log\tan 61°54' = 0{,}2725;$$
$$\log\cos 26°48' = \overline{1}{,}9506; \quad \log\cot 18°30' = 0{,}4755.$$

§ 80. Viiekohaliste trigonomeetriliste funktsioonide logaritmide tabelite kasutamine. Kirjeldame Prževalski tabelite ehitust.

Nende tabelite stereotüüp-väljaande lk. 62—151 sisaldavad teravnurkade siinuste, koosinuste, tangensite ja kootangensite logaritme, kusjuures nurgad on antud $1'$ tagant ja logaritmid on antud veaga mitte üle 0,000005.

Logaritmide täisosad on trükitehnilistel põhjustel suurendatud 10 võrra, nii et täisosa 9 tähendab $\overline{1}$, täisosa 8 tähendab $\overline{2}$ jne.

Kraadide arvud, mis on suuremad kui 45, on trükitud lehekülje alumisel äärel. Kui kasutatakse neid arve, siis minutite arvud tuleb võtta paremalt ja funktsioonide nimetused alt.

Kui nurk sisaldab ka sekundeid, siis tabelis leiduvale logaritmile tehakse parandus. See parandus arvutatakse proportsiooni põhjal, sest väikesed nurga kasvud ja väikesed logaritmi kasvud on ligikaudu proportsionaalsed.

N ä i d e 1. Leida $\log \sin 34°16'43''$.

L a h e n d u s. Lk. 130 leiame:

$$\log \sin 34°16' = \overline{1},75054.$$

Kirjutame välja tabelivahe $d = 19$. Koostame võrde:

$$x : 19 = 43'' : 60'',$$

kus x on otsitav logaritmi parandus, mis vastab $43''$-le. Leiame:

$$x = \frac{43}{60} \cdot 19 \approx 14.$$

Seega

$$\log \sin 34°16'43'' = \overline{1},75068.$$

Paranduste leidmiseks võib kasutada tabelikesi, mis on paigutatud iga lehekülje paremale äärele.

Toodud näite jaoks võtame tabelikesest enne $40''$-le vastava paranduse (saame 12,7) ja siis $3''$-le vastava paranduse (saame 0,95), kokku ligikaudu 14.

See toiming tuleb kirjas paigutada nii:

$$\begin{array}{lrl} \log \sin 34°16' & = \overline{1},75054 & \quad d = 19 \\ +43'' & +14 & \\ \hline \log \sin 34°16'43'' & = \overline{1},75068. & \end{array}$$

N ä i d e 2. Leida $\log \cos 29°45'23''$.

L a h e n d u s.

$$\begin{array}{lll} \log \cos 29°45' & = \bar{1},93862 & d = 7. \\ \quad + 23'' & \quad -3 & \\ \hline \log \cos 29°45'23'' & = \bar{1},93859. & \end{array}$$

Paranduse lahutame, sest nurga kasvades koosinus kahaneb ja samuti koosinuse logaritm.

N ä i d e 3. Leida $\log \tan 57°20'30''$.

L a h e n d u s.

$$\begin{array}{lll} \log \tan 57°20' & = 0,19303 & d = 28. \\ \quad + 30'' & \quad +14 & \\ \hline \log \tan 57°20'30'' & = 0,19317. & \end{array}$$

N ä i d e 4. Leida nurk x, kui $\log \sin x = \bar{1},63623$.

L a h e n d u s. Lk. 113 leiame lähima väiksema nurga ja teeme paranduse; toimingu paigutame kirjas nii:

$$\begin{array}{lll} \bar{1},63610 \; . \; . \; . \; . & 25°38' & d = 26. \\ \quad + 13 \; . \; . \; . \; . \; . \; . & + 30'' & \\ \hline \bar{1},63623 \; . \; . \; . & 25°38'30'' & \\ & x = 25°38'30''. & \end{array}$$

Kõige lihtsam on võtta parandus veerust pealkirjaga **26**, kus $3''$-le vastab 1,3, seega 13 vastab $30''$-le.

N ä i d e 5. On antud: $\log \tan x = \bar{2},95696$; leida x.

L a h e n d u s.

$$\begin{array}{lll} \bar{2},95627 \; . \; . \; . & 5°10' & d = 140. \\ \quad + 69 \; . \; . \; . & + 30'' & \\ \hline \bar{2},95696 \; . \; . & 5°10'30'' & \\ & x = 5°10'30'' & \end{array}$$

N ä i d e 6. On antud: $\log \cot x = 1,07085$; leida x.

L a h e n d u s.

$$\begin{array}{lll} 1,06984 \; . \; . \; . \; . & 4°52' & d = 150. \\ \quad + 101 \; . \; . \; . \; . & - 40'' & \\ \hline 1,07085 \; . \; . & 4°51'20'' & \\ & x = 4°51'20''. & \end{array}$$

§ 81. Juhtum, kus tabelivahe on väga suur. Seni tegime parandusi tabelis esinevale logaritmile ja tabelis esinevale nurgale, toetudes oletusele, et nurga kasvud ja logaritmi kasvud on võrdelised. See oletus on aga tegelikult õige ainult ligikaudu; kui ta oleks olnud täiesti õige, siis ühe ning sama funktsiooni tabelivahed oleksid kõik võrdsed, mida aga tegelikult ei ole, kuigi nad üldiselt muutuvad väga aeglaselt. Kuid tabelite esimestel lehekülgedel väga väikeste nurkade siinuste, tangensite ja kootangensite (ja järelikult 90°-le väga lähedaste nurkade koosinuste, kootangensite ja tangensite) logaritmide vahed muutuvad väga kiiresti ning seepärast seni tarvitatud paranduste arvutamisviis muutub neil juhtudel vähe usaldatavaks. Toome näite.

Tavalisel viisil leiame, et

$$\log \sin 22'48'' = 7{,}80615 - 10 + \frac{8}{10} \cdot 0{,}01930 = 7{,}82159 - 10,$$

kuna aga täielikumaist tabeleist leiame, et $\log \sin 22'48'' = 7{,}82166 - 10$, seega tavaline paranduste arvutamisviis osutub siinkohal liiga jämedaks (viga küünib 7 saja tuhandendikuni).

Sel põhjusel väga suure tabelivahe juhtumil (näiteks 2°-st väiksemate nurkade siinuse ja tangensi puhul) kasutatakse võtet, mis toetub oletusele, et v ä g a v ä i k e s t e n u r k a d e s i i n u s e d j a t a n g e n s i d o n v õ r d e l i s e d n u r k a d e g a (täisnurga lähedaste nurkade koosinused ja kootangensid taandatakse siinusteks ja tangensiteks).

Näitame selle võtte rakendamist näidetes.

Näide 1. Leiame $\log \sin 22'48''$, rakendades uut võtet. Selle järgi on:

$$\frac{\sin 22'48''}{\sin 22'} = \frac{22'48''}{22'} \quad \text{ehk} \quad \frac{\sin 22'48''}{\sin 22'} = \frac{22{,}8}{22};$$

siit saame:

$$\log \sin 22'48'' = \log \sin 22' + (\log 22{,}8 - \log 22) =$$
$$= 7{,}80615 - 10 + (1{,}35793 - 1{,}34242) = 7{,}82166 - 10,$$

mis on kooskõlas täielikumate tabelitega.

Näide 2. Leida $\log \tan 88^\circ 56' 20''$.

Tavaline viis annab 1,73232, kuid peab olema (täielikumate tabelite järgi) 1,73231. Rakendame nüüd uut viisi. Siis saame:

$$1)\ \tan 88^\circ 56' 20'' = \cot 1^\circ 03' 40'' = \frac{1}{\tan 1^\circ 03' 40''};$$

$$2)\ \frac{\tan 1^\circ 03' 40''}{\tan 1^\circ 03'} = \frac{1^\circ 03' 40''}{1^\circ 03'}$$

ehk

$$\frac{\tan 1^\circ 03' 40''}{\tan 1^\circ 03'} = \frac{191}{189}.$$

Teostades arvutuse saame:

a) $\log \tan 1^\circ\, 03' 40'' = 8{,}26312 - 10 + (2{,}28103 - 2{,}27646) =$
$= 8{,}26769 - 10;$

b) $\log \cot 1^\circ\, 03' 40'' = \log 1 - \log \tan 1^\circ\, 03' 40'' = 1{,}73231$, nagu peabki olema (täielikumate tabelite järgi).

Näide 3. On antud $\log \cot \alpha = 2{,}20443$; leida α.

Tavalise viisi järgi saame: $\alpha = 21' 29''$. Arvutame uuel viisil.

Kirjutame $\log \tan \alpha = \log 1 - \log \cot \alpha = 7{,}79557 - 10$; lähim väiksem logaritm tabelis on 7,78595, millele vastab nurk $21'$. Koostame proportsiooni:

$$\frac{\alpha}{21'} = \frac{\tan \alpha}{\tan 21'};$$

oletades nüüd, et $\alpha = x''$, saame:

$$\frac{x}{1260} = \frac{\tan \alpha}{\tan 21'},$$

kust saame, et

$$\log x = \log 1260 + (\log \tan \alpha - \log \tan 21') = 3{,}10999.$$

Otsime täisarvu, mille logaritm on kõige lähem saadud logaritmile. Siis leiame $x = 1288$. Seega $\alpha = 1288'' = 21' 28''$. Sama tulemuse saame täielikumate tabelite abil.

§ 82. Viiekohaliste tabelite abil määratud nurga täpsusest. Selleks et mingi trigonomeetrilise funktsiooni kaks logaritmi erineksid teineteisest 0,00001 võrra, on tarvilik, et vastavad nurgad erineksid teineteisest $\frac{60''}{d}$ võrra, kus d tähistab tabelivahet (saja tuhandendikes). Kui aga kahe nurga vahe on väiksem kui $\frac{60''}{d}$, siis vastavate logaritmide vahe on väiksem kui 0,00001 ja järelikult, kui logaritmid on antud viiekohaliste murdosadega, need logaritmid osutuvad võrdseiks. Siit järeldub, et nurga määramise viga võib küündida kuni $\frac{60''}{d}$.

Kuni umbes 12°-ni on siinuse logaritmi tabelivahe suurem kui 60 ja järelikult suurus $\frac{60''}{d}$ väiksem kui $1''$; 12°-st suuremate nurkade puhul on see suurus suurem kui $1''$, 85°

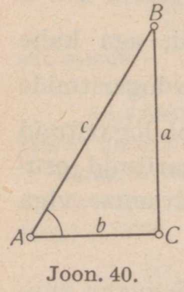
juures küünib juba 1′-ni ja 90°-le lähedaste nurkade puhul üks ning sama logaritm vastab juba mitmele nurgale, nii et siin nurga määramatuse vahemik küünib mitme minutini. Seega nurga määramine siinuse ja koosinuse järgi on vähe täpne; eriti ebatäpne on nurkade määramine siinuse järgi 90° läheduses ja järelikult koosinuse järgi 0° läheduses.

Tangens ja kootangens seevastu võimaldavad paremat täpsust, sest nurga muutudes tangens ja kootangens muutuvad kiiremini kui siinus ja koosinus, nii et nende logaritmide (ühine) tabelivahe on alati suurem kui vastav vahe siinuse ja koosinuse puhul. Kõige halvemini teostub nurkade määramine tangensi ja kootangensi järgi 45° läheduses, kuid isegi seal nurga määramise võimalik viga jääb väiksemaks kui $\frac{60''}{25}$, s. o. väiksemaks kui 2,4″.

KOLMNURKADE LAHENDAMISEST.

IX. Täisnurksed kolmnurgad.

§ 83. Täisnurkse kolmnurga elementide vahelised seosed. Paragrahvis 20 olid tuletatud täisnurkse kolmnurga elementide vahelised trigonomeetrilised seosed; nimelt olid trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonidest tuletatud järgmised valemid (joonis 40):



Joon. 40.

$$\sin A = \frac{a}{c}; \cos A = \frac{b}{c}; \tan A = \frac{a}{b}.$$

Avaldades neist valemeist a, b ja c, leidsime:

$$1)\ a = c \cdot \sin A;\quad 2)\ b = c \cdot \cos A;$$
$$3)\ a = b \cdot \tan A.$$

Nende valemite sõnastused on antud § 20—21. Nendele tuleb lisada veel kolm geomeetria kursusest tuntud valemit:

$$A + B = 90°;\quad c^2 = a^2 + b^2;\quad S = \frac{1}{2} ab.$$

§ 84. *Igasuguse kolmnurga elementide vahel on olemas ainult kolm iseseisvat seost.* Kolmnurga moodustavad kolm külge ja kolm nurka, kuid kolmnurga ehitamiseks piisab, kui nendest kuuest elemendist on teada kolm (välja arvatud kolme nurga juhtum).

Siit järeldub, et ka arvutamise teel võib määrata kolm kolmnurga elementi, kui on antud ülejäänud elemendid. Selleks peab aga olema kasutada kolm iseseisvat võrrandit, mis seovad kolmnurga elemente üksteisega. Kui võrrandeid on saadud enam kui kolm, siis mõned neist on järeldused teistest.

Täisnurkses kolmnurgas tavaliselt loetakse põhiseoseiks järgmisi:

$$A + B = 90°;\quad a = c \cdot \sin A;\quad b = c \cdot \cos A.$$

Ülejäänud seoseid saab tuletada nendest.

§ 85. **Täisnurkse kolmnurga lahendamine.** Kolmnurga põhielementideks loetakse tema külgi ja nurki. Seepärast täisnurkse kolmnurga lahendamisel võib esineda 4 järgmistes paragrahvides eriteldud juhtumit, sõltuvalt sellest, missugused elemendid on antud. Seejuures peab andmete hulgas olema vähemalt üks joonelement, sest vastasel korral poleks võimalik leida kolmnurga mõõtmeid; ainult kolme nurga järgi on võimalik ehitada kuitahes palju üksteisega sarnaseid kolmnurki.

Kolmnurkade lahendamine (nagu muudegi matemaatiliste ülesannete lahendamine) viiakse läbi algusest lõpuni. kui võimalik, üldisel kujul; hiljem asendatakse tähed numbriliste andmetega ja teostatakse arvutused. Kõik järgmised näited on lahendatud Bradis'e tabelite abil, esimestes näidetes on kasutatud trigonomeetriliste funktsioonide ja hilisemais nende logaritmide tabeleid.

Viiekohaliste tabelite kasutamise puhuks on toodud kolmnurga lahendamise näiteid ka nende tabelite abil.

§ 86. *1. juhtum.* On antud hüpotenuus ja üks teravnurk (c ja A). Leida teine teravnurk, kaatetid ja pindala (B, a, b ja S).

I. Lahendus üldkujul.

$$B = 90° - A;\quad a = c \cdot \sin A;\quad b = c \cdot \cos A;$$

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{c^2}{2} \cdot \sin A \cdot \cos A = \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2A.$$

II. Numbriline näide: $c = 627$; $A = 23°30'$.

Lahendus.

$$B = 90° - 23°30' = 66°30';\ a = 627 \cdot \sin 23°30'.$$

Bradis'e tabelist IX leiame $\sin 23°30' = 0{,}3987$, järelikult on:

$a = 627 \cdot 0{,}3987 = 249{,}9849$;
$a \approx 250$ (pikkusühikut);
$b = 627 \cdot \cos 23°30' = 627 \cdot 0{,}9171 = 575{,}0217$;
$b \approx 575$ (pikkusühikut);
$S = \frac{1}{2} \cdot 249{,}98 \cdot 575{,}02 = 71\,872$ (ruutühikut).

§ 87. *2. juhtum.* On antud kaatet ja teravnurk (a ja A). Leida B, c, b ja S.

I. Lahendus üldkujul.

$$B = 90° - A;\ c = \frac{a}{\sin A};\quad b = \frac{a}{\tan A} = a \cdot \cot A;$$

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{2} \cdot \cot A.$$

II. Numbriline näide: $a = 18$; $A = 47°$.

Lahendus.

$$B = 90° - 47° = 43°;\ c = \frac{18}{\sin 47°} = \frac{18}{0{,}7314};$$

$c = 24{,}61$ (pikkusühikut);
$b = 18 \cdot \cot 47° = 18 \cdot 0{,}9325$;
$b = 16{,}79$ (pikkusühikut);
$S = \frac{18^2}{2} \cdot 0{,}9325 = 151{,}07$ (ruutühikut).

§ 88. *3. juhtum.* On antud hüpotenuus ja kaatet (c ja a). Leida A, B, b ja S.

1. L a h e n d u s ü l d k u j u l.

$$\sin A = \frac{a}{c}; \ \cos B = \frac{a}{c}; \ b = \sqrt{c^2 - a^2}; \ S = \frac{a}{2}\sqrt{c^2 - a^2}.$$

II. N u m b r i l i n e n ä i d e: $c = 65$; $a = 16$.

L a h e n d u s.

$$\sin A = \frac{16}{65} = 0{,}2461; \ A = 14^\circ 12' + 3' = 14^\circ 15';$$

$$B = 90^\circ - 14^\circ 15' = 75^\circ 45';$$

$$b = \sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{(65 + 16) \cdot (65 - 16)} = \sqrt{81 \cdot 49} = 9 \cdot 7;$$

$b = 63$ (pikkusühikut);

$S = \frac{16}{2} \cdot 63 = 504$ (ruutühikut).

§ 89. *4. juhtum.* On antud mõlemad kaatetid (a ja b). Leida A, B, c ja S.

I. L a h e n d u s ü l d k u j u l.

$$\tan A = \frac{a}{b}; \quad \tan B = \frac{b}{a}; \ c = \sqrt{a^2 + b^2}; \ S = \frac{ab}{2}.$$

II. N u m b r i l i n e n ä i d e: $a = 25$; $b = 40$.

L a h e n d u s.

$$\tan A = \frac{25}{40} = 0{,}625; \ \ A = 32^\circ; \ \ B = 58^\circ;$$

$c = \sqrt{25^2 + 40^2} \approx 47{,}2$; $S = 500$ (ruutühikut).

Täisnurkse kolmnurga lahendamine neljakohaliste logaritmide tabelite abil.

§ 90. *1. juhtum.* On antud hüpotenuus ja teravnurk: $c = 287{,}4$ ja $A = 42^\circ 06'$. Leida B, a, b ja S.

L a h e n d u s.

1) $B = 90^\circ - 42^\circ 06' = 47^\circ 54'$.

2) $a = c \cdot \sin A$;

$a = 287{,}4 \cdot \sin 42^\circ 06'$;

$\log a = \log 287{,}4 + \log \sin 42^\circ 06'$;

$$\begin{array}{r} \log 287{,}4 = 2{,}4585 \\ + \ \log \sin 42^\circ 06' = \overline{1}{,}8264 \\ \hline \log a = 2{,}2849 \\ a = 192{,}7. \end{array}$$

3) $b = c \cdot \cos A;$

$$b = 287{,}4 \cdot \cos 42°06';$$

$$\log b = \log 287{,}4 + \log \cos 42°06';$$

$$\begin{array}{r} \log 287{,}4 = 2{,}4585 \\ + \ \log \cos 42°06' = \bar{1}{,}8704 \\ \hline \log b = 2{,}3289 \\ b = 213{,}2. \end{array}$$

4) $S = \frac{1}{2}ab;\ S = 0{,}5 \cdot 192{,}7 \cdot 213{,}2;$

$$\log S = \log 0{,}5 + \log 192{,}7 + \log 213{,}2;$$

$$\begin{array}{r} \log 0{,}5 = \bar{1}{,}6990 \\ + \log 192{,}7 = 2{,}2849 \\ \log 213{,}2 = 2{,}3289 \\ \hline \log S = 4{,}3128; \end{array} \quad S = 20\,550 \text{ (ruutühikut).}$$

§ 91. *2. juhtum.* On antud kaatet ja teravnurk: $\boldsymbol{a} = 797{,}9$ ja $\boldsymbol{A} = 66°36'$. Leida B, c, b ja S.

Lahendus. 1) $B = 90° - 66°36' = 23°24'.$

2) $c = \frac{a}{\sin A};\quad c = \frac{797{,}9}{\sin 66°36'};$

$$\log c = \log 797{,}9 - \log \sin 66°36';$$

$$\begin{array}{r} \log 797{,}9 = 2{,}9020 \\ - \ \log \sin 66°36' = \bar{1}{,}9627 \\ \hline \log c = 2{,}9393 \\ c = 869{,}6. \end{array}$$

3) $b = \boldsymbol{a} \cdot \cot A;$

$$b = 797{,}9 \cdot \cot 66°36';$$

$$\log b = \log 797{,}9 + \log \cot 66°36';$$

$$\begin{array}{r} \log 797{,}9 = 2{,}9020 \\ + \ \log \cot 66°36' = \bar{1}{,}6362 \\ \hline \log b = 2{,}5382 \\ b = 345{,}3. \end{array}$$

4) $S = \frac{1}{2}ab;\quad S = \frac{1}{2} \cdot 797{,}9 \cdot 345{,}3;$

$$\log S = \log 0{,}5 + \log 797{,}9 + \log 345{,}3;$$

$$\begin{array}{r} \log 0{,}5 = \bar{1}{,}6990 \\ + \log 797{,}9 = 2{,}9020 \\ \log 345{,}3 = 2{,}5382 \\ \hline \log S = 5{,}1392; \end{array} \quad S = 137\,800 \text{ (ruutühikut).}$$

§ 92. *3. juhtum.* On antud kaatet ja hüpotenuus: $a = 35{,}47$ ja $c = 45{,}93$. Leida A, B, b ja S.

L a h e n d u s.

$$1)\ \frac{a}{c} = \sin A; \quad \sin A = \frac{35{,}47}{45{,}93};$$

$$\log \sin A = \log 35{,}47 - \log 45{,}93;$$

$$\begin{array}{r} \log 35{,}47 = 1{,}5499 \\ -\ \log 45{,}93 = 1{,}6621 \\ \hline \log \sin A = \overline{1}{,}8878 \\ A = 50°34'. \end{array}$$

$$2)\ B = 90° - 50°34' = 39°26'.$$

$$3)\ b = a \cdot \cot A;$$

$$b = 35{,}47 \cdot \cot 50°34';$$

$$\log b = \log 35.47 + \log \cot 50°34';$$

$$\begin{array}{r} \log 35{,}47 = 1{,}5499 \\ \log \cot 50°34' = \overline{1}{,}9151 \\ \hline \log b = 1{,}4650 \\ b = 29{,}17. \end{array}$$

$$4)\ S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{2} \cdot 35{,}47 \cdot 29{,}17;$$

$$\log S = \log 0{,}5 + \log 35{,}47 + \log 29{,}17;$$

$$\begin{array}{r} \log 0{,}5 = \overline{1}{,}6990 \\ +\ \log 35{,}47 = 1{,}5499 \\ \log 29{,}17 = 1{,}4650 \\ \hline \log S = 2{,}7139 \end{array}; \quad S = 517{,}5 \text{ (ruutühikut).}$$

§ 93. *4. juhtum.* On antud mõlemad kaatetid: $a = 104$ ja $b = 20{,}49$. Leida A, B, c ja S.

L a h e n d u s.

$$1)\ \tan A = \frac{a}{b}; \ \tan A = \frac{104}{20{,}49};$$

$$\log \tan A = \log 104 - \log 20{,}49;$$

$$\begin{array}{r} \log 104 = 2{,}0170 \\ -\ \log 20{,}49 = 1{,}3115 \\ \hline \log \tan A = 0{,}7055 \\ A = 78°51'. \end{array}$$

$$2)\ B = 90° - 78°51' = 11°09';$$

$$3)\ c = \frac{a}{\sin A}; \ c = \frac{104}{\sin 78°51'};$$

$$\log c = \log 104 - \log \sin 78°51'$$

$$\begin{array}{r} \log 104 = 2{,}0170. \\ -\ \log \sin 78°51' = \overline{1}{,}9917 \\ \hline \log c = 2{,}0253 \\ c = 106. \end{array}$$

$$4)\ S = \frac{1}{2} ab; \quad S = \frac{1}{2} \cdot 104 \,.\, 20{,}49;$$

$$\log S = \log 52 + \log 20{,}49;$$

$$\begin{array}{r} \log 52 = 1{,}7160 \\ + \log 20{,}49 = 1{,}3115 \\ \hline \log S = 3{,}0275; \end{array} \quad S = 1065 \text{ (ruutühikut).}$$

Täisnurkse kolmnurga lahendamise näiteid viiekohaliste tabelite abil.

§ 94. *1. juhtum.* On antud hüpotenuus ja teravnurk (c ja A).

Numbriline näide: $c = 457$ ja $A = 32°40'15''$.

Arvutus:

$$B = 90° - A = 57°19'45''.$$

$$\begin{array}{r} a = c \cdot \sin A \\ \log c = 2{,}65992 \\ + \log \sin A = 9{,}73224 - 10 \\ \hline \log a = 2{,}39216 \\ a = 246{,}69 \end{array} \qquad \begin{array}{r} b = c \cdot \sin B \\ \log c = 2{,}65992 \\ + \log \sin B = 9{,}92520 - 10 \\ \hline \log b = 2{,}58512 \\ b = 384{,}7 \end{array}$$

$$S = 0{,}5 \cdot ab. \quad \begin{array}{r} \log 0{,}5 = 9{,}69897 - 10 \\ + \log a = 2{,}39216 \\ \log b = 2{,}58512 \\ \hline \log S = 4{,}67625 \end{array} \quad S = 47\,451 \text{ (ruutühikut).}$$

§ 95. *2. juhtum.* On antud kaatet ja teravnurk (a ja A).

Numbriline näide: $a = 9{,}82$ ja $A = 63°21'45''$.

Arvutus:

$$B = 90° - A = 26°38'15''.$$

$$\begin{array}{r} c = \dfrac{a}{\sin A} \\ \log a = 0{,}99211 \\ - \log \sin A = 9{,}95127 - 10 \\ \hline \log c = 1{,}04084 \\ c = 10{,}986 \end{array} \qquad \begin{array}{r} b = \dfrac{a}{\tan A} \\ \log a = 0{,}99211 \\ - \log \tan A = 0{,}29966 \\ \hline \log b = 0{,}69245 \\ b = 4{,}9255 \end{array}$$

Pindala arvutame valemi järgi: $\log S = \log 0{,}5 + \log a + \log b$ ja saame $S = 24{,}184$ (ruutühikut).

§ 96. *3. juhtum.* On antud hüpotenuus ja kaatet (c ja a).

N u m b r i l i n e n ä i d e: $c = 58{,}5$ ja $a = 47{,}54$.

A r v u t u s:

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\begin{array}{rl} & \log a = 1{,}67706 \\ - & \log c = 1{,}76716 \\ \hline & \log \sin A = 9{,}90990 - 10 \\ & A = 54^\circ 21' 20'' \\ & B = 90^\circ - A = 35^\circ 38' 40'' \end{array}$$

$$b = c \cdot \sin B$$

$$\begin{array}{rl} & \log c = 1{,}76716 \\ + & \log \sin B = 9{,}76548 - 10 \\ \hline & \log b = 1{,}53264 \\ & b = 34{,}091 \end{array}$$

Pindala $S = 810{,}34$ (ruutühikut).

4. juhtum. On antud mõlemad kaatetid (a ja b).

N u m b r i l i n e n ä i d e: $a = 23\,214$ ja $b = 38\,947$.

A r v u t u s:

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\begin{array}{rl} & \log a = 4{,}36575 \\ - & \log b = 4{,}59048 \\ \hline & \log \tan A = 9{,}77527 - 10 \\ & A = 30^\circ 47' 40'' \\ & B = 59^\circ 12' 13'' \end{array}$$

$$c = \frac{a}{\sin A}$$

$$\begin{array}{rl} & \log a = 4{,}36575 \\ - & \log \sin A = 9{,}70926 - 10 \\ \hline & \log c = 4{,}65649 \\ & c = 45\,341 \end{array}$$

Pindala kohta saame: $S = b \cdot \frac{a}{2} = 38\,947 \cdot 11\,607 =$

$= 452\,057\,829$ (ruutühikut).

M ä r k u s. Mõnikord c arvutamiseks sobib ka valem $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Olgu näiteks $a = 400$ ja $b = 503$, siis on kerge leida vahenditult: $a^2 = 160\,000$ ja $b^2 = 253\,009$ ja järelikult $c = \sqrt{413\,009}$. Rakendades nüüd logaritme saame: $\log c = 2{,}80798$ ja $c = 642{,}66$.

X. Kaldnurksed kolmnurgad.

§ 97. Kaldnurkse kolmnurga elementide vahelised seosed. Algame geomeetrilisest seosest kolmnurga nurkade vahel:

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Mainime mõningaid järeldusi sellest.

a) Et A ja $B+C$ summa on $180°$, siis nende siinused on võrdsed ja koosinused erinevad ainult märkide poolest. Seega $\sin(B+C = \sin A$; $\cos(B+C) = -\cos A$ ja $\cos A = -\cos(B+C)$.

Samuti $\tan(B+C) = -\tan A$.

b) Et $\frac{A}{2}$ ja $\frac{B+C}{2}$ summa on $90°$, siis nende kaasfunktsioonid on võrdsed (§ 17). Näiteks:

$$\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2};\ \sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}\ \text{jne.}$$

c) On kasulik meeles pidada veel järgmisi seoseid kolmnurga nurkade vahel:

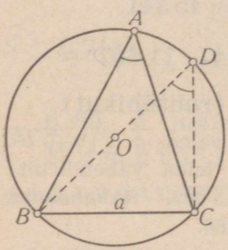
1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$;

2) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$;

3) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}$.

Nende valemite tuletamise jätame õpilasele.

§ 98. Lemma. *Iga kolmnurga külg võrdub kolmnurga ümber joonestatud ringi läbimõõdu ja vastasnurga siinuse korrutisega.*



Joon. 41.

Tähistanud ümberjoonestatud ringi raadiuse tähega R, tõestame näiteks, et $a = 2R\cdot\sin A$, olgu A terav- või nürinurk.

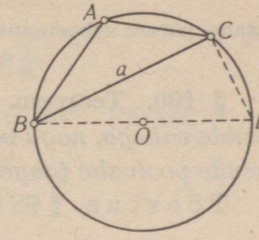
Tõestus. 1) Olgu A teravnurk (joonis 41). Joonestame külje a ühest otspunktist ümberjoonestatud ringi läbimõõdu ning ühendame külje ja läbimõõdu teised otspunktid; siis saame täisnurkse kolmnurga. Joonisel 41 on selleks kolmnurgaks BDC; sellest kolmnurgast saame § 21 põhjal, et $BC = BD\cdot\sin D$ ehk $a = 2R\cdot\sin D$; kuid $\angle D = \angle A$[1], järelikult $a = 2R\cdot\sin A$.

[1] Nii üht kui teist mõõdetakse poolega kaarest BC.

2) Olgu A nürinurk. Teeme sama abikonstruktsiooni nagu p. 1. Täisnurksest kolmnurgast BCE (joon. 42) leiame, et $a = 2R \cdot \sin E$; kuid $E + A = 180°$, järelikult $\sin E = \sin A$. Seepärast $a = 2R \cdot \sin A$.

Seega on üldiselt:

$$a = 2R \cdot \sin A; \quad b = 2R \cdot \sin B;$$
$$c = 2R \cdot \sin C.$$



Joon. 42.

§ 99. Teoreem. *Iga kolmnurga küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega.*

Peame tõestama, et

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

T õ e s t u s. § 98 järgi on igas kolmnurgas:

$$a = 2R \cdot \sin A; \quad b = 2R \cdot B; \quad c = 2R \cdot \sin C.$$

Siit leiame:

$$2R = \frac{a}{\sin A}; \quad 2R = \frac{b}{\sin B}; \quad 2R = \frac{c}{\sin C},$$

järelikult:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Seega ühes ning samas kolmnurgas külje ja ta vastasnurga siinuse jagatis on jääv arv ja võrdub ümberjoonestatud ringi läbimõõduga.

Võrretest $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ saame liikmete ümberpaigutamise teel:

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C,$$

s. o. *iga kolmnurga küljed suhtuvad nagu nende vastasnurkade siinused.*

N ä i d e. Leida suhe $a : b : c$, kui $A : B : C = 3 : 4 : 5$.

Et $A + B + C = 180°$, siis esmalt jaotame $180°$ suhtes $3 : 4 : 5$. Siis saame: $A = 45°$, $B = 60°$ ja $C = 75°$. Nüüd saame teoreemi põhjal, et

$$a : b : c = \sin 45° : \sin 60° : \sin 75°.$$

Tehes siin asendused:

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ja

$$\sin 75^\circ = \cos \frac{30^\circ}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

saame pärast vabastamist nimetajaist:

$$a:b:c = \sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

§ 100. Teoreem. *Kolmnurga kahe külje summa suhtub nende vahega, nagu vastasnurkade poolsumma tangens suhtub nende poolvahe tangensiga.*

Tõestus. § 98 põhjal on:

$$a + b = 2R \cdot (\sin A + \sin B)$$

ja

$$a - b = 2R \cdot (\sin A - \sin B);$$

siit saame:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}.$$

Rakendades paremale poolele valemi (XVII) (§ 65) saame:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

§ 101. Mollweide' valemid. Nii nimetatakse järgmist kaht proportsiooni, mis sisaldavad kolmnurga kahe külje summa ja vahe suhteid kolmanda küljega:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}; \tag{1}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}. \tag{2}$$

Tõestus. 1) § 98 järgi on:

$$a + b = 2R \cdot (\sin A + \sin B) \quad \text{ja} \quad c = 2R \cdot \sin C;$$

siit saame: $$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}. \qquad \text{(a)}$$

Teisendame parema poole nii:

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}, \qquad \text{(b)}$$

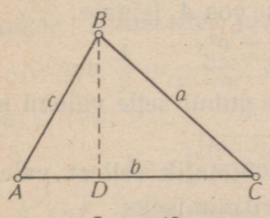
kuid $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$, sest $\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=90°$. Pärast murru (b) taandamist saame lõplikult:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

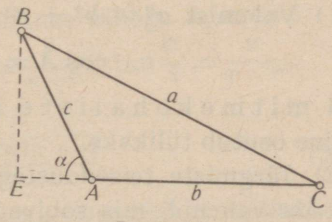
2) Samal viisil saame:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

§ 102. Teoreem. *Kolmnurga külje ruut võrdub teiste külgede ruutude summaga, millest on lahutatud nende külgede ja nende vahelise nurga koosinuse kahekordne korrutis.*



Joon. 43.



Joon. 44.

Peame tõestama, et $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ (nii terav- kui ka nürinurga puhul).

T õ e s t u s. 1) Kui A on teravnurk, siis geomeetrilise teoreemi järgi teravnurga vastaskülje ruudust on (joon. 43):

$$a^2=b^2+c^2-2b\cdot AD,$$

kuid täisnurksest kolmnurgast ABD nähtub, et AD võib asendada avaldisega $c \cdot \cos A$; siis saamegi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

2) Kui A on nürinurk, siis rakendame teoreemi nürinurga vastaskülje ruudust (joon. 44). Siis on

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot AE.$$

Kolmnurgast ABE leiame, et

$$AE = c \cdot \cos \alpha;$$

kuid et

$$\alpha = \angle BAE = 180° - A,$$

siis

$$\cos \alpha = \cos (180° - A) = - \cos A.$$

Seepärast

$$AE = - c \cdot \cos A.$$

Tehes selle asenduse geomeetrilisse valemisse, saame:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

s. o. sama, mis esimeselgi juhul.

§ 103. Valem kolmnurga nurga määramiseks tema kolme külje järgi.

1) Valemist $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ leiame:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc},$$

kuid m i t m e k o h a l i s t e arvude puhul selle valemi kasutamine osutub tülikaks.

2) Järgmiste teisendustega on võimalik sellest valemist tuletada valemid, mis sobivad logaritmimiseks:

$$1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}$$

$$1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 + a^2}{2\,bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}$$

Asendades vasemad pooled § 60 järgi ja tehes parematest pooltes asenduse $a+b+c=2p$, saame edasi:

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(p-c)\,.\,2(p-b)}{2bc} \qquad 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2p\,.\,2(p-a)}{2bc}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}. \quad \text{(XX)} \qquad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}. \quad \text{(XXI)}$$

Et pool kolmnurga nurka on alati väiksem kui 90°, siis $\sin\frac{A}{2}$ ja $\cos\frac{A}{2}$ on positiivsed, mida ongi arvestatud juurimisel. Jagades võrduse (XX) võrdusega (XXI), leiame:

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \qquad \text{(XXII)}$$

Valemid nurkade B ja C määramiseks võib kirjutada analoogiliselt nurga A jaoks tuletatud valemiga.

Valemile (XXII) võib anda teissuguse kuju, mis on sobivam arvutamiseks sel juhul, kui on vaja määrata kõik k o l m nurka. Laiendades juuritavat avaldisega $p-a$, saame:

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Siin juuritav ei olene sellest, missugust nurka parajasti määratakse. Tähistades juure väärtuse tähega k, saame:

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{k}{p-a}, \quad \tan\frac{B}{2}=\frac{k}{p-b}, \quad \tan\frac{C}{2}=\frac{k}{p-c},$$

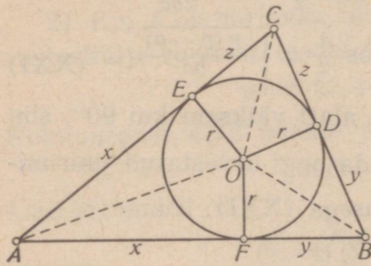
kus

$$k=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \qquad \text{(XXIII)}$$

§ 104. Kolmnurga poolnurga tangensit on võimalik määrata ka sissejoonestatud ringi raadiuse abil.

Olgu (joon. 45): O sissejoonestatud ringi keskpunkt, D, E ja F puutepunktid ning r ringi raadiuse pikkus. Tähendame, et sirged OA, OB ja OC poolitavad kolmnurga nurki ja et ühise tipu juures olevad külgede lõigud on võrdsed (näiteks $AE=AF$).

Esmalt määrame need lõigud. Tähistanud nad tippude
kuid $y + z = BC = a$, järelikult $x = p - a$. Samuti leiame,
kuid $y + z = BC = a$, järelikult $x = p - a$. Samuti leiame,
et $y = p - b$ ja $z = p - c$. Täisnurkseist kolmnurkadest leiame nüüd:



Joon. 45.

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a},\quad \tan\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b},$$

$$\tan\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}. \qquad \text{(XXIV)}$$

Et neid valemeid saaks kasutada arvutusteks, siis tuleb enne määrata r (või ainult $\log r$). Seda teeme geomeetriast tuntud valemite abil:

$$S = r \cdot p\,^{1)} \quad \text{ja} \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

kust saame:

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

(Võrreldes viimast avaldist k avaldisega § 103, näeme, et $k = r$.)

§ 105. Iseseisvaist seoseist kaldnurkse kolmnurga külgede ja nurkade vahel. Nagu nägime § 84, peab niisuguseid seoseid olema kolm. Valime põhiseoseiks järgmised:

$$A + B + C = 180°; \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\,^{2)}, \qquad \text{(b)}$$

ja näitame, et kõik teised seosed saab tuletada nendest.

§ 100 ja 101 saadud võrded olidki tuletatud võrretest (b). Kuid § 102 me lähtusime geomeetrilisest teoreemist. Näitame nüüd, et seal saadud seost on võimalik tuletada seoseist (a) ja (b).

---

1) $S = AOB + AOC + BOC = \frac{c\,.\,r}{2} + \frac{b\,.\,r}{2} + \frac{a\,.\,r}{2} = r\,.\,\frac{c+b+a}{2} = r\,.\,p$

2) Siin on kaks iseseisvat võrret:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{ja} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Tähistades võrretes (b) iga suhte väärtuse tähega m, saame:

$$a = m \,.\, \sin A; \quad b = m \,.\, \sin B; \quad c = m \,.\, \sin C. \tag{c}$$

Võtame võrduse $a = m \cdot \sin A$. Et (a) järgi on $A + (B + C) = 180°$, siis $\sin A = \sin (B + C)$. Seega on $a = m \cdot \sin (B + C)$ ja järelikult

$$a^2 = m^2 \,.\, \sin^2 (B + C). \tag{d}$$

Teisendame järgmiselt:

$$\sin^2 (B + C) = (\sin B \,.\, \cos C + \cos B \,.\, \sin C)^2 =$$
$$= \sin^2 B\,(1 - \sin^2 C) + (1 - \sin^2 B) \sin^2 C + 2 \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos B \,.\, \cos C =$$
$$= \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \,.\, \sin C\,(\cos B \,.\, \cos C - \sin B \,.\, \sin C) =$$
$$= \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos (B + C);$$

kuid $\cos (B + C) = - \cos A$, järelikult

$$\sin^2 (B + C) = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos A.$$

Tehes võrduses (d) selle asenduse, saame:

$$a^2 = m^2 \,.\, \sin^2 B + m^2 \,.\, \sin^2 C - 2\,(m \,.\, \sin B)\,(m \,.\, \sin C) \,.\, \cos A,$$

ehk, arvestades võrdusi (c),

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos A.$$

§ 106. **Kolmnurga pindala valemid.** Geomeetriast on tuntud järgmised kolmnurga pindala valemid:

$$S = \frac{1}{2} b h_b; \tag{1}$$

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}; \tag{2}$$

$$S = r \cdot p. \tag{3}$$

Tuletame nüüd valemid, mis sisaldavad nurki.

§ **107.** a) Võtame valemi $S = \frac{1}{2} b h_b$. Et siin asendada h_b, selleks vaatleme jooniseid 43 ja 44: kui A on teravnurk, siis $h_b = c \cdot \sin A$; kui A on nürinurk, siis $h_b = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \sin (180° - A) = c \cdot \sin A$. Kummalgi juhul saame, et $h_b = c \cdot \sin A$, s. o. *iga kolmnurga kõrgus võrdub külje ning selle külje ja aluse vahelise nurga siinuse korrutisega.*

Tehes valemis $S = \frac{1}{2} b h_b$ asenduse $h_b = c \cdot \sin A$, saame:

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A, \tag{XXV}$$

s. o. *kolmnurga pindala võrdub tema kahe külje ja nende vahelise nurga siinuse poole korrutisega.*

b) Seosest $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ leiame, et

$$b=\frac{a \,.\, \sin B}{\sin A} \quad \text{ja} \quad c=\frac{a \,.\, \sin C}{\sin A}.$$

Asetades need avaldised valemisse $S=\frac{1}{2}\,bc\cdot\sin A$, saame:

$$S=\frac{a^2 \,.\, \sin B \,.\, \sin C}{2 \sin A}.$$

Et $\sin A=\sin(B+C)$, siis viimase valemi asemel võib kirjutada ka nii:

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin B \,.\, \sin C}{\sin(B+C)}.$$

§ 108. a) Geomeetriast tuntud kolmnurga pindala valemit, mis sisaldab kolmnurga kolm külge, on kerge tuletada ka trigonomeetriliselt. Ülal leidsime, et

$$S=\frac{1}{2}\,bc\cdot\sin A, \text{ kuid } \sin A=2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

asendades $\sin\frac{A}{2}$ ja $\cos\frac{A}{2}$ § 103 järgi, saame:

$$S=bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

b) § 103 järgi on:

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\quad \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Korrutades nende võrduste vastavad pooled, saame pärast taandamist juuritavas:

$$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}=$$

$$=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}}=\frac{S}{p^2},$$

kust leiame, et

$$S=p^2\cdot\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}. \qquad \text{(XXVI)}$$

(Viimast valemit on muide hea kasutada kolmnurkade lahendamisel k o n t r o l l v a l e m i n a.)

§ 109. Ümberjoonestatud ringi raadiuse valemid.

1) § 98 järgi on $a = 2R \cdot \sin A$. Siit saame $R = \frac{a}{2 \sin A}$.

2) Avaldades $\sin A$ võrdusest $S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$, saame $\sin A = \frac{2S}{bc}$.

Tehes selle asenduse p. 1 saadud valemis, leiame: $R = \frac{abc}{4S}$.

§ 110. Sissejoonestatud ringi raadiuse valemid.

1) Valemist $S = rp$ järeldub $r = \frac{S}{p}$.

2) Joonisest 45 leiame $r = x \cdot \tan \frac{A}{2}$; kuid $x = p - a$, järelikult $r = (p - a) \cdot \tan \frac{A}{2}$.

3) Kolmnurkadest BOD ja COD joonisel 45 leiame: $y = r \cdot \cot \frac{B}{2}$ ja $z = r \cdot \cot \frac{C}{2}$. Liites need võrdused liikmeti ja asendades $y + z$ a-ga, saame:

$$a = r \cdot \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right) = r \cdot \frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}} = r \cdot \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}};$$

kust leiame:

$$r = \frac{a \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine loomulikkude väärtuste tabelite abil.

§ 111. *1. juhtum.* On antud üks külg ja kaks nurka (a, B ja C). Leida A, b, c ja S.

I. Lahendus üldkujul.

1) Nurga A määramiseks kasutame kolmnurga nurkade summa valemit:

$$A + B + C = 180°; \; A = 180° - (B + C).$$

Külgede b ja c määramiseks kasutame siinuslauset:

2) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$; $b=\frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$; $b=\frac{a \cdot \sin B}{\sin (B+C)}$.

3) $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$; $c=\frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$; $c=\frac{a \cdot \sin C}{\sin (B+C)}$.

4) Pindala määramiseks võime kasutada üht järgmisist valemeist:

$$S=\frac{1}{2} ab \cdot \sin C; \quad S=\frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin (B+C)}.$$

II. Numbriline näide:

$$a=37; \quad B=86°03'; \quad C=50°56'.$$

1) $A=180° - (86°03' + 50°56') = 43°01'$.

2) $b=\frac{37 \cdot \sin 86°03'}{\sin 43°01'}=\frac{37 \cdot 0{,}9976}{0{,}6822}$; $b=54{,}1$;

3) $c=\frac{37 \cdot \sin 50°56'}{0{,}6822}=\frac{37 \cdot 0{,}7764}{0{,}6822}$; $c=42{,}1$;

4) $S=\frac{1}{2} \cdot 37 \cdot 54{,}1 \cdot \sin 50°56'$; $S=\frac{1}{2} \cdot 37 \cdot 54{,}1 \cdot 0{,}7764$;

$S=777$ (ruutühikut).

2. juhtum. On antud kaks külge ja nende vaheline nurk (a, b ja C). Leida A, B, c ja S.

I. 1) Külje c leiame koosinuslause abil:

$$c^2=a^2+b^2-2ab \cdot \cos C.$$

2) Nüüd võime määrata nurga A, kasutades siinuslauset:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}; \quad \sin A=\frac{a \cdot \sin C}{c}.$$

3) Samal viisil:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}; \quad \sin B=\frac{b \cdot \sin A}{a}.$$

4) Pindala määrame valemist:

$$S=\tfrac{1}{2}ab \cdot \sin C.$$

II. Numbriline näide: $a=110$; $b=100$; $C=50°$.

1) $c^2=110^2+100^2 - 2 \cdot 110 \cdot 100 \cdot \cos 50°$;

$c^2=12\,100+10\,000 - 22\,000 \cdot 0{,}6428$;

$c=89{,}21$;

2) $\sin A = \frac{110 \cdot \sin 50^\circ}{89{,}21}$; $\sin A = 0{,}9445$; $A = 70^\circ 49'$ või $109^\circ 11'$;

3) $\sin B = \frac{100 \cdot 0{,}9445}{110}$; $\sin B = 0{,}8586$; $B = 59^\circ 10'$.

K o n t r o l l: $A + B + C = 70^\circ 49' + 59^\circ 10' + 50^\circ = 179^\circ 59'$.

Kontroll näitab, et suurim nurk A on teravnurk.

4) $S = \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 100 \cdot \sin 50^\circ = 5500 \cdot 0{,}766 = 4213$ (ruutühikut).

Ülesanne. On antud: $a = 50$, $c = 30$ ja $B = 60^\circ$. Leida b, A ja C.

Vast.: $b = 43{,}59$, $A = 83^\circ 21'$ ja $C = 36^\circ 35'$.

Ülesanne. On antud: $b = 12$, $c = 10$ ja $A = 54^\circ$. Leida pindala S.

Vast.: $S = 48{,}54$.

Ülesanne. On antud kolmnurga külg $a = 10$ cm ning ta lähisnurgad $B = 50^\circ$ ja $C = 70^\circ$. Ehitada kolmnurk joonlaua ja malli abil; ehitada sisse- ja ümberjoonestatud ringjooned; arvutada A, b, c, S, R ja r; kontrollida arvutuste tulemusi mõõtmistega joonisel.

Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine neljakohaliste logaritmide tabelite abil.

§ 112. *1. juhtum.* On antud üks külg ja kaks nurka (a, B ja C). Leida A, b, c ja S.

Lahendame sama kava järgi, mida kasutasime ennegi, kuid lõpuks logaritmime valemid ja arvutused teostame logaritmide abil.

N u m b r i l i n e n ä i d e: $a = 1235$, $B = 37^\circ 32'$ ja $C = 115^\circ 18'$.

L a h e n d u s.

1) $A = 180° - (B + C)$;

$A = 180° - (37°32' + 115°18') = 27°10'$;

2) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$; $b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$; $b = \frac{1235 \cdot \sin 37°32'}{\sin 27°10'}$;

$\log b = \log 1235 + \log \sin 37°32' - \log \sin 27°10'$;

$\log 1235 = 3{,}0917$

$$\begin{array}{r} \log \sin 37°32' = \overline{1},7847 \\ -\log \sin 27°10' = 0{,}3405 \\ \hline \log b = 3{,}2169 \\ b = 1648; \end{array}$$

$\log \sin 27°10' = \overline{1},6595$;

$-\log \sin 27°10' = -\overline{1},6595 = 0{,}3405$.

3) $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$; $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$; $c = \frac{1235 \cdot \sin 115°18'}{\sin 27°10'}$;

$\log c = \log 1235 + \log \sin 115°18' - \log \sin 27°10'$;

$$\begin{array}{r} \log 1235 = 3{,}0917 \\ \log \sin 115°18' = \overline{1},9562 \\ -\log \sin 27°10' = 0{,}3405 \\ \hline \log c = 3{,}3884 \\ c = 2446; \end{array}$$

$\sin 115°18' = \sin (180° - 64°42') =$
$= \sin 64°42'$;
$\log \sin 64°42' = \overline{1},9562$.

4) $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$; $S = \frac{1}{2} \cdot 1235 \cdot 1648 \cdot \sin 115°18'$;

$S = \frac{1}{2} \cdot 1235 \cdot 1648 \cdot \sin 64°42'$;

$\log S = \log 1235 + \log 824 + \log \sin 64°42'$;

$$\begin{array}{r} \log 1235 = 3{,}0917 \\ \log 824 = 2{,}9159 \\ \log \sin 64°42' = \overline{1},9562 \\ \hline \log S = 5{,}9638 \end{array}$$

$S = 920\,000$ (ruutühikut).

§ 113. *2. juhtum.* On antud kaks külge ja nende vaheline nurk (a, b ja C). Leida A, B, c ja S.

N u m b r i l i n e n ä i d e : $a = 42{,}53$, $b = 29{,}81$ ja $C = 47°14'$.

1) Esmalt määrame nurgad A ja B. Selleks kasutame tangenslauset:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}; \qquad \tan\frac{A-B}{2}=\frac{(a-b)\cdot\tan\frac{A+B}{2}}{a+b}.$$

Leiame otsitavad suurused:

$$a+b=42{,}53+29{,}81=72{,}34;$$
$$a-b=42{,}53-29{,}81=12{,}72;$$
$$A+B=180^\circ-47^\circ14'=132^\circ46';$$
$$\frac{A+B}{2}=66^\circ23'; \qquad \tan\frac{A-B}{2}=\frac{12{,}72\cdot\tan 66^\circ23'}{72{,}34};$$
$$\log\tan\frac{A-B}{2}=\log 12{,}72+\log\tan 66^\circ23'-\log 72{,}34;$$

$$\begin{array}{r} \log 12{,}72=1{,}1045 \\ \log\tan 66^\circ23'=0{,}3593 \\ -\log 72{,}34=\bar{2}{,}1407 \\ \hline \log\tan\frac{A-B}{2}=\bar{1}{,}6045; \end{array} \qquad \begin{array}{l} \log 72{,}34=1{,}8593; \\ -\log 72{,}34=-1{,}8593=\bar{2}{,}1407. \end{array}$$

Tangensi logaritmide tabeli järgi leiame nurga $\frac{A-B}{2}$:

$$\frac{A-B}{2}=21^\circ55'.$$

Teades nurkade A ja B poolsummat ja poolvahet, võime leida A ja B, lahendades võrrandsüsteemi:

$$\begin{array}{r} \frac{A+B}{2}=66^\circ23' \\ \frac{A-B}{2}=21^\circ55' \\ \hline A=88^\circ18' \\ B=44^\circ28'. \end{array}$$

2) Külje c määramiseks kasutame siinuslauset:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}; \quad c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}; \quad c=\frac{42{,}53\cdot\sin 47^\circ14'}{\sin 88^\circ18'};$$
$$\log c=\log 42{,}53+\log\sin 47^\circ14'-\log\sin 88^\circ18';$$

$$\begin{array}{r} \log 42{,}53=1{,}6287 \\ \log\sin 47^\circ14'=\bar{1}{,}8657 \\ -\log\sin 88^\circ18'=0{,}0002 \\ \hline \log c=1{,}4946 \\ c=31{,}23; \end{array} \qquad \begin{array}{l} \log\sin 88^\circ18'=\bar{1}{,}9998; \\ -\log\sin 88^\circ18'=0{,}0002. \end{array}$$

3) $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$; $S=\frac{1}{2}\cdot 42{,}53\cdot 29{,}81\cdot\sin 47^\circ 14'$;

$\log S=\log 0{,}5+\log 42{,}53+\log 29{,}81+\log\sin 47^\circ 14'$;

$$\begin{array}{r}
\log 0{,}5=\bar{1}{,}6990\\
\log 42{,}53=1{,}6287\\
\log 29{,}81=1{,}4743\\
\log\sin 47^\circ 14'=\bar{1}{,}8657\\
\hline
\log S=2{,}6677;\quad S=465{,}2.
\end{array}$$

§ 114. *3. juhtum.* On antud kolm külge (a, b ja c). Leida A, B, C ja S.

Nurgad määrame poolnurga tangensi valemi abil ja pindala Heron'i valemi abil:

$$S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Numbriline näide: $a=15{,}37$, $b=21{,}42$ ja $c=13{,}83$.

1) Kirjutame valemi nurga A määramiseks:

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}};$$

arvutame p ja teostame kõik valemiga nõutavad tehted:

$$\begin{array}{rl}
a=15{,}37 & p-a=\ 9{,}94\\
b=21{,}42 & p-b=\ 3{,}89\\
c=13{,}83 & p-c=11{,}48\\
\cline{1-1}
2p=50{,}62 & \\
p=25{,}31 &
\end{array}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{3{,}89\ .\ 11{,}48}{25{,}31\ .\ \ 9{,}94}};$$

$\log\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\log 3{,}89+\log 11{,}48-\log 25{,}31-\log 9{,}94)$;

$$\begin{array}{r}
\log\ 3{,}89=0{,}5899\\
\log 11{,}48=1{,}0599\\
-\ \log 25{,}31=\bar{2}{,}5967\\
-\ \log\ 9{,}94=\bar{1}{,}0026\\
\hline
\log\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\cdot\bar{1}{,}2491;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\log 25{,}31=1{,}4033\\
-\ \log 25{,}31=\bar{2}{,}5967\\
\log\ 9{,}94=0{,}9974\\
-\ \log\ 9{,}94=\bar{1}{,}0026\\
\hline
\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}{,}6246;
\end{array}$$

$$\frac{A}{2}=22^\circ 51';\ A=45^\circ 42'.$$

2) Määrame nurga B:

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{9{,}94\ .\ 11{,}48}{25{,}31\ .\ \ 3{,}89}};$$

$$\log\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}(\log 9{,}94+\log 11{,}48-\log 25{,}31-\log 3{,}89);$$

$$\begin{array}{rlrl} \log & 9{,}94=0{,}9974 & \log 3{,}89 & =0{,}5899 \\ \log & 11{,}48=1{,}0599 & -\log 3{,}89 & =\bar{1}{,}4101; \\ -\log & 25{,}31=\bar{2}{,}5967 & & \\ -\log & 3{,}89=\bar{1}{,}4101 & & \end{array}$$

$$\log\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\cdot 0{,}0641;\ \log\tan\frac{B}{2}=0{,}0320;$$

$$\frac{B}{2}=47°06';\ B=94°12'.$$

3) Määrame nurga C:

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}};$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{9{,}94\ .\ \ 3{,}89}{25{,}31\ .\ 11{,}48}};$$

$$\log\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{2}(\log 9{,}94+\log 3{,}89-\log 25{,}31-\log 11{,}48);$$

$$\begin{array}{rlrl} \log & 9{,}94=0{,}9974 & & \\ \log & 3{,}89=0{,}5899 & \log 11{,}48 & =1{,}0599; \\ -\log & 25{,}31=\bar{2}{,}5967 & -\log 11{,}48 & =-1{,}0599=\bar{2}{,}9401; \\ -\log & 11{,}48=\bar{2}{,}9401; & & \end{array}$$

$$\log\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\cdot\bar{1}{,}1241;\quad \log\tan\frac{C}{2}=\bar{1}{,}5621;$$

$$\frac{C}{2}=20°03';\quad C=40°06'.$$

Kontroll:

$$A+B+C=45°42'+94°12'+40°06'=180°.$$

4) Pindala määrame Heron'i valemi abil:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$\log S=\frac{1}{2}[\log p+\log(p-a)+\log(p-b)+\log(p-c)].$$

Asendades siin logaritmid nende varem leitud väärtustega ja teostades arvutused, saame:

$$\log S = 2{,}0252 \text{ ja } S = 106 \text{ (ruutühikut).}$$

§ **115.** *4. juhtum.* On antud kaks külge ja ühe külje vastasnurk (a, b ja A).

Lahendus. Proportsioonist $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$ leiame: $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$, mille järgi määrame nurga B. Edasi on:

$$C = 180° - (A + B); \quad c = \frac{a \,.\, \sin C}{\sin A}; \quad S = \frac{ab}{2} \cdot \sin C.$$

Vaatleme lähemalt nurga B määramist ($\sin B$ järgi). Et kaldnurkse kolmnurga nurk üldiselt võib olla nii terav- kui ka nürinurk, siis nurga B väärtust tuleb otsida vahemikust 0° kuni 180°. Selles vahemikus ühele ning samale siinuse väärtusele vastab kaks nurka: teravnurk, mille leiame tabelist, ja nürinurk, mis eelmist täiendab 180°-ni. Seepärast tekib küsimus, kas mõlemad nurgad kõlbavad kolmnurga nurgaks, või ainult üks neist, ja kumb nimelt. Seda küsimust on võimalik lahendada antud külgede võrdlemise teel, sest kolmnurgas nürinurk võib asetseda ainult suurima külje vastas.

Öeldust selgub, et on kasulik esmalt uurida ülesannet antud külgede suhtelise pikkuse alusel. (Eeldame, et a ja b ei ole võrdsed, sest kui $a = b$, siis $B = A$.)

Uurimus. I. Juhtum $a > b$. Sel juhtumil nurk A kui antud külgedest suurema vastasnurk võib olla nii terav- kui ka nürinurk.

Vaatleme võrduse $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$ paremat poolt. Et $b < a$, siis on muidugi ka $b \cdot \sin A < a$. Seega on $\sin B < 1$ (ehk $\log \sin B < 0$) ja järelikult ülesandel on olemas lahend olenematult nurga A suurusest. Otsitav nurk B võib sel juhtumil olla ainult teravnurk, sest ta vastaskülg ei ole kolmnurga suurim külg.

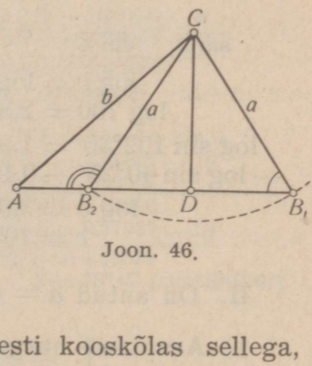
II. J u h t u m $a > b$. Sel juhtumil antud nurk A peab olema terav, sest ta asetseb külje vastas, mis on väiksem kui teine külg.

Vaadeldes võrdust $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$ märkame, et kui $b > a$, siis $b \cdot \sin A$ on kas suurem kui a või on võrdne a-ga, või väiksem kui a, olenevalt nurga A suurusest. Vaatleme iga võimalust eraldi.

1) $b \cdot \sin A > a$, siis $\sin B > 1$ (ehk $\log\ \sin B > 0$), ja ülesandel pole lahendit.

2) $b \cdot \sin A = a$, siis $\sin B = 1$ (ehk $\log \sin B = 0$), järelikult $B = 90°$, s. o. kolmnurk osutub täisnurkseks.

3) $b \cdot \sin A < a$, siis $\sin B < 1$ (ehk $\log \sin B < 0$). Sellele siinuse väärtusele vastab kaks nurka: terav- ja nürinurk. K o l m n u r g a puhul tulebki käesoleval juhtumil arvestada kumbagi võimalust, sest külg b on suurem kui külg a, ja kolmas külg c ei saa mõjutada nurga B valikut, kuna c ise tuleb määramisele B kaudu. Vastavalt nurga B kahele võimalikule väärtusele leiame kahesugused väärtused ka suurustele C, c ja S.



Joon. 46.

Seega tehtud uurimuse põhjal saame juhul, kui $\log \sin B < 0$, järelduse: kui o t s i t a v nurk asetseb väiksema külje vastas, siis ta võib olla ainult teravnurk; kui ta aga asetseb suurema külje vastas, siis ülesandel on kaks lahendit.

Need uurimuse tulemused on täiesti kooskõlas sellega, mis annab kolmnurga k o n s t r u k t s i o o n samul andmeil (tähendame, et $b \cdot \sin A$ on küljele c juhitud kõrgus).

8

Joonis 46 vastab juhtumile II, p. 3: otsitavad kolmnurgad on ACB_1 ja ACB_2, kusjuures $\angle AB_1C + \angle AB_2C = 180°$. Jätame õpilasele endale teostada konstruktsioonid teistel juhtudel.

Numbriline näide. I. On antud $a = 700$, $b = 650$ ja $A = 40°25'$.

1) Arvutame nurga B:

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}; \quad \sin B = \frac{650 \cdot \sin 40°25'}{700};$$

$$\log \sin B = \log 650 + \log \sin 40°25' - \log 700;$$

$$\begin{array}{rl} \log 650 = 2{,}8129 & \qquad \log 700 = 2{,}8451; \\ \log \sin 40°25' = \overline{1}{,}8118 & \qquad -\log 700 = \overline{3}{,}1549. \\ -\log 700 = \overline{3}{,}1549 & \\ \hline \log \sin B = \overline{1}{,}7796 & \\ B = 37°; & \end{array}$$

2) Arvutame nurga C:

$$C = 180° - (40°25' + 37°) = 102°35'.$$

3) Arvutame külje c:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; \quad c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}; \quad c = \frac{700 \cdot \sin 102°35'}{\sin 40°25'};$$

$$\log c = \log 700 + \log \sin 102°35' - \log \sin 40°25';$$

$$\begin{array}{rl} \log 700 = 2{,}8451 & \qquad \log \sin 40°25' = \overline{1}{,}8118; \\ \log \sin 102°35' = \overline{1}{,}9894 & \qquad -\log \sin 40°25' = 0{,}1882; \\ -\log \sin 40°25' - 0{,}1882 & \qquad \sin 102°35' = \sin 77°25'; \\ \hline \log c = 3{,}0227 & \qquad \log \sin 77°25' = \overline{1}{,}9894. \\ c = 1054; & \end{array}$$

II. On antud $a = 4$, $b = 7$ ja $A = 30°$.

1) Arvutame nurga B:

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}; \quad \sin B = \frac{7 \cdot \sin 30°}{4};$$

$$\log \sin B = \log 7 + \log \sin 30^\circ - \log 4;$$

$$\log 7 = 0{,}8451 \qquad \log 4 = 0{,}6021;$$

$$\log \sin 30^\circ = \bar{1}{,}6990 \qquad -\log 4 = -0{,}6021 = \bar{1}{,}3979.$$

$$\begin{array}{r} -\log 4 = \bar{1}{,}3979 \\ \hline \log \sin B = \bar{1}{,}9420; \end{array}$$

$$B_1 = 61^\circ 03'; \quad B_2 = 118^\circ 57'.$$

2) Nurgal C võib olla kaks väärtust:

$$C_1 = 180^\circ - A - B_1 \text{ ja } C_2 = 180^\circ - A - B_2,$$

s. o.

$$C_1 = 180^\circ - 30^\circ - 61^\circ 03' = 88^\circ 57' \text{ ja}$$

$$C_2 = 180^\circ - 30^\circ - 118^\circ 57' = 31^\circ 03'.$$

3) Samuti on küljel c kaks väärtust:

$$c_1 = 7{,}999 \quad \text{ja} \quad c_2 = 4{,}126.$$

Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine viiekohaliste tabelite abil.

§ 116. *1. juhtum.* On antud üks külg ja kaks nurka (a, B ja C).
Numbriline näide: $a = 253$, $B = 38^\circ 50' 48''$, $C = 112^\circ 34'$.

1) A arvutus.

$$\begin{array}{r} B = 38^\circ 50' 48'' \\ C = 112^\circ 34' \\ \hline B + C = 151^\circ 24' 48'' \\ A = 28^\circ 35' 12''. \end{array}$$

2) b arvutus.

$$\begin{array}{r} \log a = 2{,}40312 \\ -\log \sin A = 9{,}67987 - 10 \\ \hline \log 2R = 2{,}72325 \\ + \log \sin B = 9{,}79743 - 10 \\ \hline \log b = 2{,}52068 \\ b = 331{,}65. \end{array}$$

3) c arvutus.

$$\begin{array}{r} \log 2R = 2{,}72325 \\ + \log \sin C = 9{,}96541 - 10 \\ \hline \log c = 2{,}68866 \\ c = 488{,}27. \end{array}$$

4) S arvutus.

$$S = 0{,}5 \cdot bc \cdot \sin A$$

$$\begin{array}{r} \log 0{,}5 = 9{,}69897 - 10 \\ \log b = 2{,}52068 \\ + \log c = 2{,}68866 \\ \log \sin A = 9{,}67987 - 10 \\ \hline \log S = 4{,}58818 \\ S = 38742 \text{ (ruutühikut).} \end{array}$$

Kontrollarvutus.

$$\left[a = (c + b) \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{C - B}{2}} \right].$$

$$\begin{aligned} c &= 488{,}27 \\ b &= 331{,}65 \\ \hline c + b &= 819{,}92 \\ C &= 112°34' \\ B &= 38°50'48'' \\ \hline C - B &= 73°43'12'' \\ \frac{C-B}{2} &= 36°51'36'' \\ \frac{A}{2} &= 14°17'36'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(c+b) &= 2{,}91377 \\ + \log \sin \frac{A}{2} &= 9{,}39250 - 10 \\ \hline & \ 2{,}30627 \\ - \log \cos \frac{C-B}{2} &= 9{,}90315 - 10 \\ \hline \log a &= 2{,}40312, \end{aligned}$$

mis on kooskõlas algul võetud $\log a$ väärtusega (vt. b arvutust).

§ 116 a. *2. juhtum.* On antud kaks külge ja nende vaheline nurk (b, c *ja* A).

Numbriline näide: $b = 1123$, $c = 2034$, $A = 72°15'19''$.

1) Nurkade B *ja* C arvutus.

$$\begin{aligned} C + B + A &= 180° \\ A &= 72°15'19'' \\ \hline C + B &= 107°44'41'' \\ \hline \frac{C+B}{2} &= 53°52'21'' \\ \pm \frac{C-B}{2} &= 21°34'13'' \\ \hline C &= 75°26'34'' \\ B &= 32°18'08''. \end{aligned}$$

$$\tan \frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b} \cdot \tan \frac{C+B}{2}$$

$$c = 2034 \quad\Big|\quad c - b = 911$$
$$b = 1123 \quad\Big|\quad c + b = 3157$$

$$\begin{aligned} \log(c-b) &= 2{,}95952 \\ - \quad \log(c+b) &= 3{,}49927 \\ \hline & \ 9{,}46025 - 10 \\ + \log \tan \frac{C+B}{2} &= 0{,}13671 \\ \hline \log \tan \frac{C-B}{2} &= 9{,}59696 - 10. \end{aligned}$$

2) a arvutus.

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}05038 \\ + \log \sin A &= 9{,}97883 - 10 \\ \hline & \ 3{,}02921 \\ - \log \sin B &= 9{,}72786 - 10 \\ \hline \log a &= 3{,}30135 \\ a &= 2001{,}5 \end{aligned}$$

3) S arvutus.

$$S = (b \cdot \sin A) \cdot \frac{c}{2}$$

$$\begin{aligned} \log(b \cdot \sin A) &= 3{,}02921 \text{ [1])} \\ + \log \frac{c}{2} &= 3{,}00732 \\ \hline \log S &= 6{,}03653 \\ S &= 1\,087\,750 \text{ (ruutühikut).} \end{aligned}$$

§ 116 b. *3. juhtum.* On antud kolm külge (a, b ja c).

Numbriline näide: $a = 215$, $b = 500$, $c = 427$.

$$\begin{aligned} a &= 215 \\ b &= 500 \\ c &= 427 \\ \hline 2p &= 1142 \\ p &= 571 \\ p - a &= 356 \\ p - b &= 71 \\ p - c &= 144 \end{aligned}$$

k arvutus.

$$\begin{aligned} \log(p-a) &= 2{,}55145 \\ + \quad \log(p-b) &= 1{,}85126 \\ \log(p-c) &= 2{,}15836 \\ \hline & \ 6{,}56107 \\ - \quad \log p &= 2{,}75664 \\ \hline & \ 3{,}80443 \\ \log k &= 1{,}90222. \end{aligned}$$

[1]) Võetud a arvutusest.

A arvutus.

$$\begin{array}{r} \log k = 1{,}90222 \\ - \ \log (p - a) = 2{,}55145 \\ \hline \log \tan \frac{A}{2} = 9{,}35077 - 10 \\ \frac{A}{2} = 12°38'26'' \\ A = 25°16'52''. \end{array}$$

B arvutus.

$$\begin{array}{r} \log k = 1{,}90222 \\ - \ \log (p - b) = 1{,}85126 \\ \hline \log \tan \frac{B}{2} = 0{,}05096 \\ \frac{B}{2} = 48°21'14'' \\ B = 96°42'28''. \end{array}$$

C arvutus.

$$\begin{array}{r} \log k = 1{,}90222 \\ - \ \log (p - c) = 2{,}15836 \\ \hline \log \tan \frac{C}{2} = 9{,}74386 - 10 \\ \frac{C}{2} = 29°00'22'' \\ C = 58°00'44''. \end{array}$$

S arvutus.

$S = pr = pk.$

$\log S = \log p + \log k = 4{,}65886;$

$S = 45\,589$ (ruutühikut).

Kontroll.

$$\begin{array}{r} A = 25°16'52'' \\ + \ B = 96°42'28'' \\ C = 58°00'44'' \\ \hline 180°00'04''. \end{array}$$

4″ suurune erinevus nurkade summas on seletatav sellega, et logaritmide väärtused on ligikaudsed.

XI. Mõõtmisest maastikul.

§ 117. **Üldmärkusi.** Maamõõdu-plaanide koostamise otstarbel ja mõnedel teistel juhtudel on vaja määrata maastikul esinevate joonte pikkused ja nurkade suurus. Põhiandmed leitakse otsese mõõtmise teel eriliste riistade abil, teised andmed saadakse neist arvutamise teel; nendeks arvutusteks rakendatakse trigonomeetriat.

§ 118. **Pikkuste mõõtmine.** Sirglõiku maastikul tähistatakse tema otspunktidesse paigutatud hästi nähtavate esemetega. Kui mõõdetava lõigu pikkus on suur, siis tuleb enne a j a d a tema s i h t, s. o. asetada tema sihis rida sihitikke.

Pikkuste otseseks mõõtmiseks maastikul on tarvitatavamad maamõõdukett ja mõõdulint.

Kett, mille tarvitamine nüüdisajal järjest väheneb, on valmistatud paindumatust raudtraadist. Keti pikkus on 20 m ja ta koosneb 100 sirgest lülist, mis on üksteisega ühendatud rõngastega.

Nüüdisajal enam tarvitatav mõõdulint on valmistatud õhukesest terasribast. Lindi pikkus on 10—15 m, enamasti aga 20 m, ja talle on märgitud kümnendiku meetri suurused jaotused.

§ 119. Nurgamõõtjad. Riistu, mida kasutatakse nurga suuruse mõõtmiseks kraadides, nimetatakse nurgamõõtjaiks.

Ühed neist on määratud nurkade mõõtmiseks ainult rõhttasapinnas, teistega mõõdetakse nurki nii rõht- kui püsttasapinnas. (Kaldtasapindadel asetsevate nurkade suurus määratakse tavaliselt arvutamise teel.)

Sagedamini tarvitatavaiks nurgamõõtjaiks on astrolaab ja teodoliit.

§ 120. Astrolaab (joon. 47) koosneb limbist C, alidaadist A ja kahest paarist dioptreist (a, b) ja (a_1, b_1).

Limbiks nimetatakse kraadidesse jaotatud ringi.

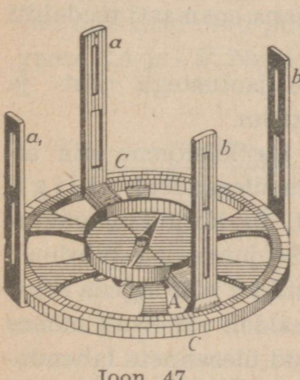
Alidaadiks nimetatakse joonlauda, mis on pööratav limbi tasapinnas tema keskpunkti ümber. Mingi nurga mõõtmisel alidaad suunatakse mööda nurga haara, s. o. sihitakse mingile esemele, mis asetseb sellel haaral.

Alidaadi suunamiseks — viseerimiseks — on määratud dioptrid. Nii nimetatakse kaht alidaadi otstesse kinnitatud pikergust lauakest; neis on tehtud pikuti asetsevad pilud — kitsamad ja laiemad. Ühe dioptri kitsa pilu vastas asetseb teise dioptri lai pilu, millele on kinnitatud pikuti must jõhv. Viseerides mingit punkti seatakse alidaad nii, et vaadates ühe dioptri kitsasse pilusse teise dioptri jõhv kataks selle punkti.

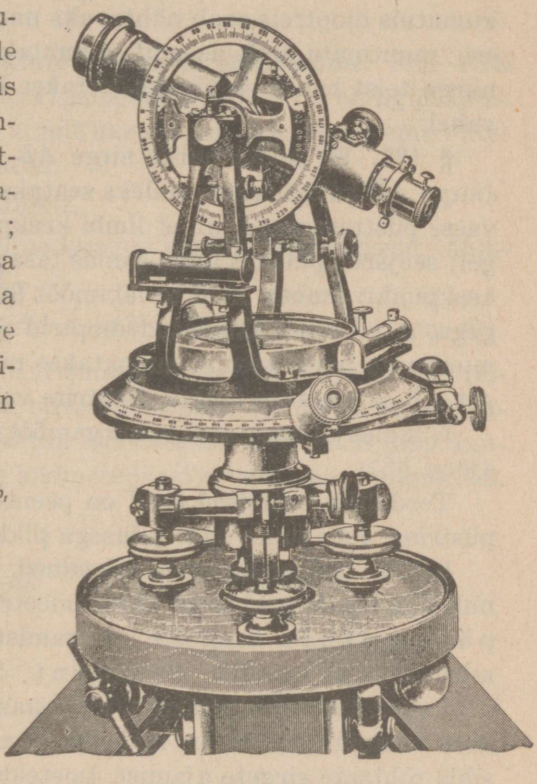
Astrolaabil on kaks paari dioptreid: üks paar on kinnitatud limbi külge, neid nimetatakse liikumatuiks, teine paar on kinnitatud alidaadi külge, neid nimetatakse liiku-vaiks.

Orienteerumiseks ilmakaartes on astrolaab varustatud kompassiga.

Tavaliselt on astrolaab kinnitatud kokkupandavale kolmjalale mingi seadise abil, mis võimaldab kallutada limbi tarviduse järgi. Lihtsaimaks niisuguseist seadiseist on pöördpea; see on limbi telje otsa kinnitatud kera, mida haarab kolmjala külge kinnitatud eriline sfääriline hoidja. Niiviisi on võimalik pöörata limbi telje ümber, mille siht on vabalt muudetav.



Joon. 47.


Joon. 48.

Limbi seadmiseks rõhttasapinda kasutatakse vesiloodi, tema seadmiseks püsttasapinda kasutatakse püstloodi.

§ 121. Rõhttasapinnas asetseva nurga mõõtmiseks seatakse limb esmalt rõhttasapinda nii, et ta keskpunkt oleks nurga tipu kohal, mida saavutatakse püstloe — niidi otsas rippuva terava otsaga pommikese abil. Seejärel säilitades limbi rõhtseisu pööratakse teda keskpunkti ümber, kuni liikumatuis dioptreis saab nähtavaks nurga ühel haaral asetsev ese; muutmata limbi asendit, suunatakse nüüd alidaad mööda nurga teist haara ja lõpuks loetakse limbilt lugem dioptrite vahel.

§ 122. Et mõõta nurka sirge AB ja rõhttasapinna vahel (sirge AB kaldenurka), selleks seatakse limb seda sirget läbivasse püsttasapinda nii, et limbi keskpunkt asetseb sellel sirgel; seejärel, pidades limbi samas tasapinnas, pööratakse teda keskpunkti ümber, kuni ta läbimõõt 90°—270° ühtib püstsirgega, s. o. kuni liikumatud dioptrid jõuavad rõhttasapinda; muutmata limbi asendit suunatakse nüüd alidaad mööda sirget AB ja loetakse limbilt dioptrite vahelise kaare suurus.

Nüüdisajal kasutatakse nurgamõõtjana enamasti teodoliiti (joon. 48).

Teodoliidi peamised osad on peente jaotustega rõht- ja püstring ning suure suurendusega pikksilm.

§ 123. **Trigonomeetria rakendusi.** Me käsitleme siin ainult lihtsamaid praktilise trigonomeetria ülesandeid: 1) l i g i p ä ä s m a t u t e kauguste määramist, 2) kõrguste määramist ja 3) t r i a n g u l a t s i o o n i. Seejuures me piirdume niisuguse juhu käsitlemisega, kui maastikku võib lugeda rõhtsaks tasapinnaks või kui maastik võimaldab vähemalt mõnes sihis rõhtsate sirgete ajamist. Loeteldud ülesannete lahendamiseks on vaja esmalt mõõta mõned pikkused ja nurgad. Pikkuste otsene mõõtmine maastikul on seotud kahesuguste raskustega: 1) mõõtmise toiming ise on tülikas ja 2) kui valitud joon ei ole täpselt sirge ja rõhtne, siis tuleb teha mitmesuguseid p a r a n d u s i mõõtmiste ja arvutuste näol. Nurkade mõõtmist saab aga teostada palju kergemalt ja võrratult täpsemalt. Seepärast püütakse, kuivõrd see on võimalik, asendada pikkuste mõõtmist nurkade mõõtmisega; pikkused aga määratakse enamasti arvutamise teel. Enamasti piirdutakse üheainsa pikkuse mõõtmisega; seda pikkust nimetatakse siis b a a s i k s (aluseks).

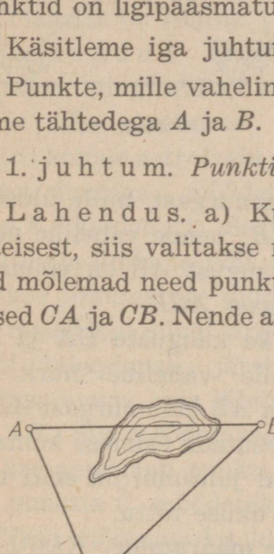
§ 124. Ligipääsmatute kauguste määramine. Siin võib esineda kolm juhtumit: 1) mõlemad otspunktid on ligipäästavad, 2) ligipäästav on ainult üks otspunkt ja 3) mõlemad otspunktid on ligipääsmatud.

Käsitleme iga juhtumit.

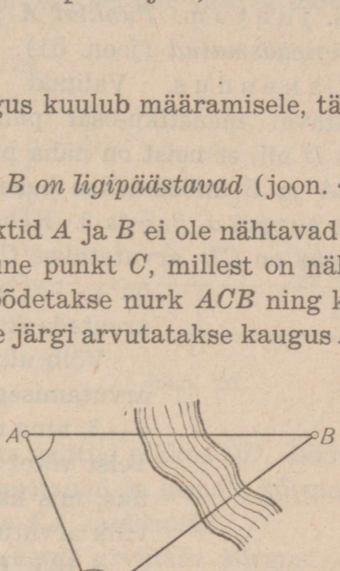
Punkte, mille vaheline kaugus kuulub määramisele, tähistame tähtedega A ja B.

1. j u h t u m. *Punktid A ja B on ligipäästavad* (joon. 49).

L a h e n d u s. a) Kui punktid A ja B ei ole nähtavad teineteisest, siis valitakse niisugune punkt C, millest on nähtavad mõlemad need punktid, mõõdetakse nurk ACB ning kaugused CA ja CB. Nende andmete järgi arvutatakse kaugus AB.



Joon. 49.

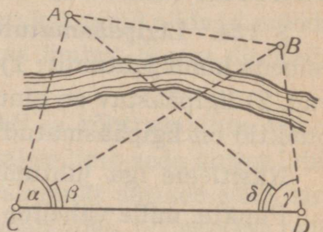


Joon. 50.

b) Kui aga punktid A ja B on nähtavad teineteisest, siis mõõdetakse kaugus AC ning nurgad A ja C. Neist andmeist piisab kauguse AB arvutamiseks.

2. juhtum. *Punkt A on ligipäästav, kuid punkt B mitte* (s. t. vaatlejal on võimalik pääseda punkti, kuid punktist B lahutab teda mingi takistus).

Lahendus. Valinud punkti C (joon. 50) nii, et temast on näha punktid A ja B, mõõdetakse nurgad A ja C ning baas AC. Siis on kerge arvutada kaugust AB, sest kolmnurgast ABC on tuntud üks külg ja kaks nurka.



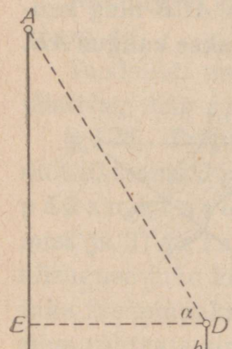
Joon. 51.

3. juhtum. *Punktid A ja B on ligipääsmatud* (joon. 51).

Lahendus. Valinud ligipäästaval maastiku-osal punktid C ja D nii, et neist on näha punktid A ja B, mõõdetakse baas CD ning nurgad α, β, γ ja δ. Kahest kolmnurgast, mille ühiseks küljeks on CD, arvutatakse CA ja CB: nende vaheline nurk on $\alpha - \beta$; seega kaugust AB on võimalik arvutada kolmnurgast ACB.

Võib alustada ka kauguste DA ja DB arvutamisega, mille vaheline nurk on $\gamma - \delta$, ning määrata AB kolmnurgast ABD. Teist võtet võib kasutada esimese kontrolliks, mis käesoleval juhtumil on eriti tarvilik arvutuse keerukuse tõttu.

§ 125. Kõrguse määramine. Käsitleme selle ülesande tähtsamaid juhtumeid.



Joon. 52.

1. juhtum. *Kõrguse aluspunkt on ligipäästav.* Olgu määramisele kuuluvaks kõrguseks AB (joon. 52), kusjuures punkt B on ligipäästav.

Lahendus. Maastikul aetakse punktist B mingi rõhtlõik BC ja mõõdetakse selle pikkus; olgu selle lõigu pikkus a.

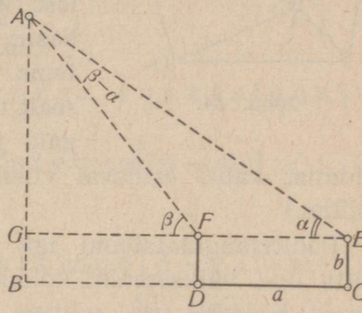
Seejärel punkti C kohale asetatakse astrolaab, mille limb on seatud püsttasapinda nii, et limbi keskpunkt D asetseb täpselt punkti C kohal, ja mõõdetakse sirge DA kaldenurk (§ 122); olgu selle nurga suurus α.

Veel mõõdetakse püstsihiline kaugus DC; olgu $DC = b$.

Teades suurusi a, α ja b, võime arvutada kõrguse:

$$AB = AE + EB = a \cdot \tan \alpha + b.$$

2. juhtum. *Aluspunkt on ligipääsmatu.* Kujutagu niisugust juhtu kõrgus AB joonisel 53. Oletame veel, et ümbritsev maastik on rõhtne.



Joon. 53.

Lahendus. Maastikul valitakse mingi küllalt kauge punkt C. Asetanud selle punkti kohale astrolaabi püstseisus limbiga, mõõdetakse sirge EA kaldenurk. Seejärel, muutmata limbi asendit, määratakse liikumatute dioptrite abil maastikul mingi sirge CD limbi tasapinnas, järelikult ka tasapinnas, mis läbib sirget AB. Siis mõõdetakse baasiks valitud pikkus CD. Lõpuks viiakse astrolaab punkti D ja, asetanud ta samale kõrgusele kui punktis C, mõõdetakse sirge FA kaldenurk.

Need mõõtmised tehtud, on kerge arvutada kõrgust AB. Olgu näiteks $CD = a$, $FD = EC = b$, $\angle AEG = \alpha$ ja $\angle AFG = \beta$. Siis on:

$$AB = AG + GB = AF \cdot \sin \beta + b;$$

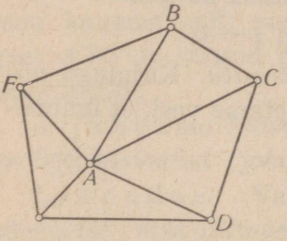
kolmnurgast AFE leiame, et

$$AF = \frac{a \,.\, \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)};$$

seega on

$$AB = \frac{a \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} + b.$$

§ 126. **Triangulatsioon** [1]. Mingi suurema maa-ala plaanistamiseks võetakse tal ainult mõned kõige enam sobivad, mööda kogu maa-ala laialipaisatud punktid (näiteks punktid A, B, C, ... joonisel 54). Kujutledes neid punkte ühendatuina üksteisega, saame kolmnurkade võrgu. Neis kolmnurkades mõõdetakse võimalikult täpselt k õ i k nurgad ja ü k s külg, näiteks AC. Võrgu kõik teised lõigud määratakse juba kolmnurkade lahendamise teel, kusjuures alatakse sellest kolmnurgast, mille küljeks on baas; sellelt kolmnurgalt siirdutakse tema kõrvalasetsevale kolmnurgale, sealt uuele kõrvalasetsevale kolmnurgale jne. (Ühe ning sama pikkuse leidmist kahel erineval viisil kasutatakse arvutuste kontrolliks.)



Joon. 54.

Põhitriangulatsiooni iga üksiku lõigu võib omakorda võtta uue, väiksemaist kolmnurkadest koosneva triangulatsiooni baasiks jne., millega ongi võimalik määrata plaanil selle maa-ala mistahes punkti asend, s. o. plaanistada kogu maa-ala.

Trigonomeetrilised põhivalemid.

I. T r i g o n o m e e t r i l i s t e f u n k t s i o o n i d e v a h e l i s e d s e o s e d.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. **2.** $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. **3.** $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

4. $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$. **5.** $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$.

---

[1] Triangulatsioon tähendab hulknurgalise kujundi plaani koostamist kolmnurkadeks lahutamise teel. Mõnikord nimetusega t r i a n g u l a t s i o o n iseloomustatakse plaanistamisel kasutatud m e e t o d i t.

$$6.\ 1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

$$7.\ \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}. \quad 8.\ \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

II. Nurkade summa ja vahe funktsioonide valemid.

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta.$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$
5. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}.$
6. $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}.$

III. Kahekordse nurga funktsioonide valemid.

1. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$ 2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$

3. $\tan 2\alpha = \dfrac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$

IV. Poolnurga funktsioonide valemid.

1. $\sin \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{2}}.$ 2. $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{2}}.$

3. $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$; $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$

V. Logaritmitavaid avaldisi.

1. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}.$

2. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2}.$

3. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}.$

4. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2}$;

$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \dfrac{\beta - \alpha}{2}.$

5. $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$. 6. $\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$.

7. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 8. $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

VI. Seoseid täisnurkses kolmnurgas.

1. $\frac{a}{c} = \sin A$; $\frac{b}{c} = \cos A$; $\frac{a}{b} = \tan A$.

2. $a = c \cdot \sin A$; $b = c \cdot \cos A$; $a = b \cdot \tan A$.

VII. Seoseid kaldnurkses kolmnurgas.

1. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. *S*iinuslause. 2. $a = 2R \cdot \sin A$.

3. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. Koosinuslause.

4. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$. Tangenslause.

5. $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$. 6. $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$. Mollweide' valemid.

7. $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$; $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$;

$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$.

VIII. Kolmnurga pindala.

1. $S = \frac{1}{2}ah_a$. 2. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

3. $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$. 4. $S = rp$. 5. $S = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2\sin(B+C)}$.

Tähtsamate nurkade trigonomeetrilised funktsioonid.

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0	∞

Taandamisvalemid.

	α	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$	$360°+\alpha$
sin	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tan	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$
cot	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$
sec	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$
cosec	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$

SISUKORD.

Vastutav toimetaja J. Nuut. Tõlkijad K. Ratassepp ja A. Vihman. Korrektor B. Vahi. Tehniline toimetaja H. Treumann. Laduda antud: 8. V 1941. Trükki antud: 24. VI 1941. Trükitähtede arv trükipoognas: 29 568. Trükipoognate arv: 8. Autori arvutuspoognate arv: 5,16. Kirjastuse arvutuspoognate arv: 5,58. Trükiarv: 7150 eksemplari. Kaust: D5. Paber: 56:79 cm $^{1}/_{32}$. Trükikoja tellimise nr. 2108. MB-6247. Trükikoda: „Ühistrükk", Tallinn, Lai tän. 33.

Originaali tiitel:

Н. Рыбкин. Прямолинейная тригонометрия. XIX издание. Москва 1940.

Печатано на эстонском языке.

ГИЗ Педагогическая Литература, Таллинн. Типография „Юхиструкк", Таллинн, улица Лай 33.

RBL. 2.60