TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

P. PRÜLLER JA H. TAMMET

MÕÕTMISVIGADE ARVUTAMINE

TARTU 1961

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
ÜLDFÜÜSIKA KATEEDER

P. PRÜLLER JA H. TAMMET

MÕÕTMISVIGADE ARVUTAMINE

TEINE TRÜKK

TARTU 1961

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18
П. Прюллер и Х. Таммет
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ
На эстонском языке

Vastutav toimetaja K. Kuddu
Korrektor E. Võhandu

TRÜ Rotaprint 1961. Trükipoognaid 2,9.
Tir. 1000 eks. MB 01448, Tell. nr. 477.

Hind 9 kop.

SISSEJUHATUS

Füüsikaliste suuruste mõõtmine on põhiliseks toiminguks igas laboratooriumis, samuti tehnikas. Mõõtmistulemuse täpsuse ja vea teadmine määrab oluliselt andmete väärtuse. See asjaolu sunnib füüsikaliste mõõtmiste täpsust iseloomustama kvantitatiivselt.

Käesolevas juhendis vaadeldakse mõõtmistulemuse vea kvantitatiivset iseloomustamist ning antakse juhendid mõõtmisvigade praktiliseks määramiseks. Mõõtmisvigade arvutamist raskendab asjaolu, et instrumendivigu ning juhuslikke mõõtmisvigu iseloomustatakse lihtsustatud käsitluse korral oluliselt erinevate kriteeriumide abil. See muudab paratamatuks tinglike kokkulepete kasutamise, mille kohta ei ole kahjuks seni veel välja kujunenud üldtunnustatud reegleid. Erinevais mõõtmisvigade arvutamise juhendeis võib leida üsna erinevaid, tihti vähe põhjendatud reegleid. Käesolevas juhendis esitatud kokkuleppeid ning reegleid rakendatakse Tartu Riikliku Ülikooli füüsika üldpraktikumides.

Teises kordustrükis on esimese trüki 8. paragrahvi all esinevale 3-le tabelile lisandatud veel 4 kehtivatele GOST'ide normidele alluvat instrumendivigade tabelit.

Autorid avaldavad tänu väärtuslike nõuannete eest dotsentidele L. Võhandule, O. Prinitsale, ENSV TA FAI van.tead. kaastöölisele G. Zelninile ja teistele. Ootame ka edaspidiseid märkusi ja täiendusi.

P. Prüller
H. Tammet

§ 1. Füüsikaliste suuruste mõõtmine

Füüsikalise suuruse, näit. pikkuse, kaalu, ruumala jne. mõõtmine seisneb tema võrdlemises teise sama liiki suurusega mis on võetud mõõtühikuks. Seda võrdlemist saab teostada: 1) mõõtevahendiga, millele on märgitud mõõtühikud, näit. mõõdupuu, kaaluviht, mensuur jne., 2) mõõteriistaga, näit. ampermeeter, voltmeeter jne., 3) mõõtmise seadisega, mis sisaldab mõõtevahendeid, mõõteriistu ja muid abivahendeid, millede kasutamine toimub kindla skeemi või mõõtmismeetodi järgi, näit. takistussild, katoodostsillograaf jne.

Mõõtarv leitakse kas otsese mõõtmise tulemusena mõõtevahendi või mõõteriista skaalalt, näit. pikkus, temperatuur, pinge jne. või kaudselt arvutamise teel otseselt mõõdetud suurustest.

Otsene mõõtmine seisneb teatud kindla punkti asukoha määramises mõõteriista skaalal. Mõõtmise täpsuse suurendamiseks tuleb sageli hinnata silmaga ka skaala vähimate jaotiste vahede kümnendikosi.

Tähistame mõõdetava suuruse, näiteks pikkuse X-ga ja mõõtühiku M-ga, siis mõõtarv A näitab, mitu korda mõõtühik M mahub mõõdetavasse suurusesse. Seega mõõtarv

$$A = \frac{X}{M}, \text{ millest } \underline{X = A \cdot M}. \qquad (1)$$

Mõõtarv A on pöördvõrdeline mõõtühikuga M. Näiteks 17 cm = 170 mm, s.o. mõõtühiku vähenemisel 10 korda suureneb mõõtarv 17-st 170-ni, s.o. samuti 10 korda.

<u>Laboratoorse töö katselises osas tuleb mõõtmine teostada maksimaalse korralikkusega ja täpsusega. Katselise materjali kvaliteedist sõltub töö lõppvastuse täpsus.</u>

§ 2. Mõõtmisvead

Kogemused näitavad, et sama suuruse võimalikult täpsel korduval mõõtmisel saame üksteisest erinevad tulemused. Seega ühtki mõõtmist ei saa teha täiesti täpselt ja iga mõõtmine on alati seotud teatud veaga.

Mõõtmisvead sõltuvalt neid esilekutsuvatest põhjustest liigituvad: 1) metoodilised vead, mis on tingitud mõõtmismeetodi ebatäpsusest, näit. elektrilise takistuse mõõtmisel jäetakse arvestamata ühendusjuhtmete takistus; 2) instrumendivead ehk riistavead, mis on põhjustatud mõõtmisel kasutatava mõõteriista puudulikkusest või ebatäpsusest tema valmistamisel; 3) lugemite määramise vead, mis tekivad ebatäpsustest lugemite tegemisel. Selle põhjused on kas subjektiivset laadi, näit. nägemise või kuulmise puudulikkus või objektiivset laadi, näit. vaatluskoha halb valgustus või mõõteriistade ebasobiv asend, parallaks vaatlemisel, aluse põrumine, võrgupinge kõikumine, temperatuuri muutus katse kestel. Lugemite määramise vead on juhuslikku laadi ning nad võivad ühe suuruse korduval mõõtmisel mõõtmistulemusi nii suurendada kui ka vähendada.

Mõõtmisvead oma olemuselt liigituvad:

1) juhuslikud vead, mis on korduvatel mõõtmistel võrdse tõenäosusega kas positiivse või negatiivse märgiga;

2) süstemaatilised vead, mis on kindla märgiga, s.o. nad mõjustavad mõõtmise tulemust ühes kindlas suunas, seda suurendades või vähendades. Näiteks ühendusjuhtmete takistuse arvesse võtmata jätmine annab kõigil mõõtmistel samasuunalise vea, mis osutub seega süstemaatiliseks veaks. Süstemaatilised vead võivad olla tingitud ka mõõteriista puudulikust ehitusest, näit. mõõteriista skaala on nihkunud, skaala mastaap on vigane, osuti on paindunud jne. Paljudel juhtudel saab süstemaatilise vea suurust ja märki kindlaks teha mõõteriista võrdlemisel täpse kontrollmõõteriistaga või metoodiliste vigade puhul arvutustulemuste analüüsimisel. Süstemaatiliste vigade vähendamiseks tuleb uurida katseriis-

ta ja mõõtmismeetodit ning teha vastavad parandused.

On aga olemas üks süstemaatiline viga, mida ei saa kõrvaldada ja mille kohta ei saa anda parandust. Selle süstemaatilise vea määrab mõõteriista enda valmistamise täpsus. Mis tahes mõõteriist võimaldab teha mõõtmisi ainult teatud kindla täpsusega, mis sõltub mõõteriista skaala vähimate jaotiste pikkusest, skaala joonte paksusest ja mõõteriista ehitusest. Mõõteriista valmistamise täpsus määrab instrumendiviga ehk riistavea. Riistaviga on süstemaatiline viga, s.o. korduvatel mõõtmistel annab ta mõõdetava suuruse tõelisest väärtusest ainult ühesuunalise hälbe, ent meie ei tea kunagi, millises suunas. Seepärast kirjutatakse riista viga pluss- ja miinusmärgiga. Riistavea suurus märgitakse mõõteriista passis, ent riista kauemaaegsel kasutamisel võib see viga suureneda. Passi puudumisel tuleb riistaveaks võtta vähemalt pool skaala vähima jaotise pikkusest, nn. jaotise hinnast. Näiteks riistaviga millimeeterjaotistega skaala puhul on võrdne $\Delta A_r = \pm 0{,}5$ mm. Nooniusega varustatud astmiku puhul loetakse riistaveaks nooniuse täpsus, s.o. mõõteriista vastava jaotise (või jaotiste) ja nooniuse jaotise pikkuste vahe. Sekundomeetri ja teiste hüppeti edasi liikuva osutiga riistade puhul loetakse riistaveaks jaotise hind. Nihkkaliibri, kruvikaliibri ja kaaluvihtide puhul on riistavigade klassifikatsioon antud selles juhendis § 8.

Juhuslikud vead, samuti nagu riistavead , ei ole kõrvaldatavad ja nende suhtes ei saa teha parandust.

Juhuslikud vead ja riista ad määravad vahemiku laiuse, milles asub mõõdetava suuruse tõeline väärtus.

Juhuslike vigade mõju vähendamiseks tuleb iga mõõtmist teostada korduvalt (vähemalt 5 või 10 korda), millisel korral ei ole põhjust oletada ainult ühesuunaliste vigade esinemist. Üksikute mõõtmiste juhuslikud vead omavad võrdset tõenäosust mõõdetava suuruse tõelise väärtuse suurendamiseks või vähendamiseks. Seetõttu on kõige lähemal mõõdetava suuruse tõelisele väärtusele rea üksikmõõtmiste aritmeetiline keskmine.

§ 3. Mõõtarvu absoluutne ja relatiivne viga.

Mõõdetava suuruse tõelise väärtuse X ja mõõtmisel saadud mõõtarvu A vahet nimetame mõõtarvu absoluutseks tõeliseks veaks α. Kuna juhuslike vigade puhul mõõtarv on mõõdetavast suurusest kas suurem või väiksem, siis tõeline viga tuleb mõõtarvule kas liita või sellest lahutada. Seega

$$X - A = \pm\alpha \quad \text{, millest}$$
$$X = A \pm \alpha. \qquad (2)$$

Mõõdetava suuruse tõeline väärtus X on meile tundmata, seetõttu ei ole võimalik leida tõelise vea α suurust. Kuna tõelise väärtuse X asemel kasutame tema lähisväärtust, s.o. mõõtarvu A, siis öeldakse, et füüsikalistel mõõtmistel leitud arvud on ligikaudsed arvud. Arvutustel on ligikaudseteks arvudeks arv π, naturaallogaritmide alus e, enamik logaritme ja trigonomeetrilisi funktsioone.

Üksikmõõtmise teostamise analüüs, mõõteriista kohta teada olev mõõtmise täpsus või rea mõõtmisseeriate tulemuste kriitiline läbitöötamine võimaldavad leida määra või mõnedel juhtudel suurusjärku, milleni ülimalt võib küündida absoluutne tõeline viga.

Absoluutsete tõeliste vigade ülemmäära nimetame mõõtarvu absoluutseks veaks. Absoluutne viga on nimetusega arv, mis mõõtarvule liidetult näitab piire, milledesse langeb mõõdetava suuruse tõeline väärtus.

Mõõtarvude A, B, C ... absoluutsed vead tähistame vastavalt ΔA, ΔB, ΔC ...

Kui mõõtarvu A absoluutne viga on ΔA, siis mõõdetava suuruse tõeline väärtus X asub vahemikus

$$A - \Delta A \leq X \leq A + \Delta A.$$

Selle võrratuse asemel kirjutame lühidalt:

$$X = (A \pm \Delta A) \text{ ühes mõõtühikuga}. \qquad (3)$$

Näiteks X = (0,70 ± 0,03) mm tähendab, et mõõdetav suurus X asub vahemikus $0,67 \leq x \leq 0,73$ mm. Selle vahemiku teadmine võimaldab määrata mõõtarvu kehtivate kohtade arvu.

Absoluutne viga iseloomustab mõõtarvu, kuid ei iseloomusta otseselt mõõtmise sooritamise täpsust. Viimast iseloomustab relatiivne viga.

Relatiivseks ehk suhteliseks veaks E_A nimetame absoluutse vea ΔA ja mõõtarvu A suhet, s.o. mõõtarvu ühe mõõtühiku kohta tulevat absoluutset viga.

Relatiivne viga

$$E_A = \frac{\Delta A}{A} . \tag{4}$$

Relatiivne viga on nimeta suurus ja seda väljendatakse harilikult protsentides. Näiteks, kui $x = (0,70 \pm 0,03)$mm, siis $E_x = \frac{0,03}{0,70} = \frac{3}{70} = 0,043 \simeq 0,05 = 5\%$.

Valemi (4) põhjal defineeritud relatiivne viga on tõelise relatiivse vea $\frac{\alpha}{X}$ ülemmääraks, kuna $\alpha \leq \Delta A$ ja $X \simeq A$.

Valemist (4) järgneb, et absoluutne viga

$$\Delta A = E_A \cdot A . \tag{5}$$

Seda valemit kasutame absoluutse vea ΔA arvutamiseks, kui relatiivne viga E_A on teada.

Üksikmõõtmiste absoluutsete vigade hindamise kohta esitame järgmisi näiteid.

Mõõtnud sentimeeterjaotustega mõõdupuuga mingi eseme pikkuse, saame juhul, kui pikkus on kõige lähemal arvule 127 cm, mõõtarvuks 127 cm absoluutse veaga ± 0,5 cm, mille kirjutame järgmiselt: $x = (127 \pm 0,5)$ cm. Eelnevas antud viga ± 0,5 cm, mille suurus on pool mõõtarvu viimase koha ühikut, nimetatakse standardveaks. Millimeeterjaotistega skaalat omava mõõdupuuga saab mõõta standardveaga ±0,5 mm= =±0,05 cm.Sageli tuleb arvestada viga mitte ainult mõõdupuu lõpplugemi,vaid ka alglugemi juures,näiteks mensuurile kinnitatud kahe nööri vahelise kauguse mõõtmisel, U-torus asuva vedeliku nivoode vahe kauguse mõõtmisel jne. Absoluutne viga on sel juhul kaks korda suurem.

Termomeetrilt, mille jaotised on 1 kraadi tagant, saame lugeda veaga kuni $\pm$ 0,5^{o}C. Aja mõõtmisel sekundomeetriga teeme nii alg- kui ka lõpphetke määramisel vea kuni sekundomeetrilt loetava vähima ajavahemiku ulatuses. Kui mensuuril on antud jaotised iga 25 cm^3 järel, siis vahepealsete jaotiste hindamisel teeme vea kuni $\frac{1}{2}$.25=12,5 cm$^3 \simeq$ 13 cm^3. Mõõtes näiteks mensuuriga 240 cm^3, kirjutame (240 $\pm$ 13) cm^3. Mitmekordsel mõõtmisel mensuuriga üksikmõõtmiste vead liituvad.

Laboratoorsetes töödes esineb sageli varem mõõdetud suurusi, milledele viga ei ole juurde kirjutatud. Sel juhul loetakse absoluutseks veaks pool viimase koha ühikut. Näiteks keha mass m = 632,4 g tuleb lugeda m= (632,4 $\pm$ 0,05)g.

Elektrimõõteriistale märgitakse nn. täpsusklass, mida tähistatakse ringjoonega ümbritsetud numbriga. Näiteks number 1,0 voltmeetril näitab, et mõõteriista lugemi absoluutne viga ei ületa 1% skaala lugemi maksimaalväärtusest. Kui viimane on näiteks 250 V, siis mõõteriista lugemi absoluutne viga on 0,01·250 = 2,5 V $\simeq$ 3 V. Kui osuti jääb peatuma lugemile 218 V, siis X = (218 $\pm$ 3) V.

Mõõtmise täpsus sõltub mõõteriistadest ja mõõtmismeetodist ja täpsust ei saa suurendada aritmeetiliste tehete sooritamise kaudu.

§ 4. Ligikaudsete arvude ümardamine ja aritmeetilised tehted nendega

Iga mõõtmise tulemusena saadud arv peab olema varustatud absoluutse veaga.

Absoluutne viga antakse harilikult ühe nullist erineva numbriga, näit. $\pm$ 0,03 cm, $\pm$ 200 m.

Mõõtarv kirjutatakse alati täpsusega kuni absoluutse vea paremalt esimese kehtiva numbrini. Näiteks (15,19$\pm$0,03) cm, (12700 $\pm$ 200) m. Ei ole lubatud kirjutada (15,1947 $\pm$ 0,03) cm, (12715 $\pm$ 200) m.

Mõõtarvu ülearused kümnendkohad jäetakse ära või täisarvu puhul ümardatakse nullideks.

1. Ligikaudsete arvude ümardamisel viimane säilitatav number suurendatakse ühe võrra, kui temale järgnev ärajäetav number on 5 või üle selle või jäetakse muutmatuks, kui ärajäetav number on väiksem kui 5. Erandiks on juht, kus ärajäetav number 5 on saadud ümardamise teel, millisel korral eelnev number jäetakse muutmatuks. Näiteks $\pi=3,14159$ ümardatakse 3,1416, 3,142 ja 3,14. Arv 0,6345 ümardatakse 0,635, 0,63 (mitte 0,64).

Sellist arvude ümardamise viisi kuni viimase säilitatava kümnendkoha ühiku pooleni nimetatakse standardümardamise viisiks. Sel puhul on kirjutised 5,7 cm ja (5,7 $\pm$ 0,05) cm täiesti üheväärsed.

Erandina eelnevast ümardamise reeglist ümardatakse absoluutsed ja relatiivsed vead alati nii, et viga kasvaks. Mainitud vead kujutavad endast tegelikult tõelise vea ülemmäärasid ja alla ümardamisel võib vea ülemmäär osutuda väiksemaks tõelisest veast.

Näiteks absoluutne viga $\Delta A = 0,034$ cm $\simeq 0,04$ cm ja relatiivne viga $E_A = \frac{0,06}{12,9} \simeq \frac{0,06}{12} = 0,005 = 0,5\%$.

Erandjuhtumeil, kui tahetakse vältida liiga suurt ümardamist, antakse absoluutne viga kahe kehtiva numbriga, näiteks kirjutatakse $\Delta A = 0,032$ cm, s.o. seda arvu ei ümardata üles 0,04 cm peale. Mõõtarvus A tuleb sel puhul säilitada samuti kolm numbrit peale koma.

2. Kehtivateks numbriteks loetakse kõik numbrid 1, 2, 3 ... 9 ja null, kui ta asub kahe kehtiva numbri vahel või täisarvu või kümnendmurru lõpus; nulle kümnendmurru numbritest vasakul ei loeta kehtivateks numbriteks.

Näiteks arvus 0,0106 on esimesed kaks nulli mittekehtivad, null 1 ja 6 vahel on kehtiv number. Arvu 7000 puhul on nullid kehtivad ja absoluutne viga on $\pm$ 0,5. Juhul aga,kui eelnevas arvus loeme kehtivaks numbriks ainult 7, siis kirjutame ta kujul $7 \cdot 10^3$, s.o. absoluutne viga on

$\pm 0,5 \cdot 10^3 = \pm 500$.

Arv 8,60 näitab, et tema mõõtmisel on arvestatud ka sajendikke ja absoluutne viga on $\pm$ 0,005. Arvu 8,6 absoluutne viga on $\pm$ 0,05, s.o. kümme korda suurem eelnevast. Seega ligikaudsete kümnendmurdude puhul näitavad nullid kehtivatest numbritest paremal mõõtmise täpsust.

3. Ligikaudsete arvude liitmisel või lahutamisel ümardame nad enne reeglite (1) ja (2) kohaselt kuni kümnendkohani, mis mingis arvus on vähimast ühe võrra suurem. Resultaadi ümardame ühe koha võrra.

Näiteks	2,923	asemel liidame	2,92
	15,467		15,47
	6,0		6,0
			$24,39 \simeq 24,4$

4. Ligikaudsete arvude korrutamisel või jagamisel jätame korrutises või jagatises nii palju kehtivaid numbreid, kui palju neid on kõige vähema kehtivate numbritega arvus. Näiteks $427 \cdot 23 = 98 \cdot 10^2$ (mitte 9821) või $454 : 61 = 7,4$ (mitte 7,44).

5. Kõigi aritmeetiliste tehete <u>vahepealsetes resultaatides tuleb säilitada üks number rohkem</u>, kui seda nõuavad eelnevad reeglid (3) ja (4). Näiteks $427 \cdot 23 \cdot 11 = (982 \cdot 10) \cdot 11 = 11 \cdot 10^4$ (mitte 108020 või 110000). Kuna lähteandmetes on vähim kehtivate numbrite arv 2 (arvud 23 ja 11), siis vahepealses korrutises $427 \cdot 23 = 9821$ säilitame 3 kehtivat numbrit, s.o. kirjutame ta kujul $982 \cdot 10$ (mitte 9820, milles on 4 kehtivat numbrit). Lõppresultaadi anname jälle 2-e kehtiva numbriga, mida näitab kirjutusviis $11 \cdot 10^4$, kus kehtivateks numbriteks on 11.

<u>Tähelepanu</u>! <u>Vahepealsetes resultaatides tuleb kõik vahepealsed korrutised - näiteks $982 \cdot 10$ - alati välja kirjutada, mis hõlbustab tunduvalt arvutuste kontrolli</u>.

<u>Kui lõppkorrutise või -jagatise esimene kehtiv number on väiksem kui kõige väiksema täpsusega arvu esimene kehtiv number, siis tuleb lõppresultaadis säilitada üks kehtiv num-</u>

ber rohkem, kui seda näeb ette reegel (4). Näiteks 454:75=6,05, mitte 6,1 või 1,60.0,9=1,4 , mitte 1.

§ 5. Aritmeetiline keskmine ja selle vead η ja σ_N.

Füüsika laboratoorsete tööde sooritamisel kehtib üldreegel, et igat suurust mõõdetakse vähemalt 5 korda, kui tööjuhend ei näe ette erineva arvu mõõtmiste sooritamist.

Mõõdetava suuruse tõenäoseimaks väärtuseks on üksikmõõtmiste mõõtarvude N_1, N_2, ... N_n aritmeetiline keskmine.

$$N = \frac{N_1 + N_2 + \ldots + N_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{n}, \qquad (6)$$

kus n on mõõtmiste arv.

Olgu teostatud 5 mõõtmist tulemustega N_1, N_2, N_3, N_4 ja N_5, kusjuures N_2 on vähim mõõtarv. Aritmeetiline keskmine

$$N = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}{5} =$$

$$= \frac{5N_2 + (N_1 - N_2) + (N_2 - N_2) + (N_3 - N_2) + (N_4 - N_2) + (N_5 - N_2)}{5} =$$

$$= N_2 + \frac{\sum_{i=1}^{5} (N_i - N_2)}{5}. \qquad (7)$$

Valemist (7) nähtub, et aritmeetilise keskmise leiame hõlpsamini, kui vähima mõõtarvuga liidame selle vähima mõõtarvu suhtes arvutatud hälvete aritmeetilise keskmise.

Aritmeetilise keskmise ja üksikmõõtmiste mõõtarvude vahed, s.o. mõõtarvude hälbed aritmeetilise keskmise suhtes

$$\Delta N_1 = N - N_1,$$

$$\Delta N_2 = N - N_2,$$

$$\Delta N_n = N - N_n,$$

nimetame tõenäoseimateks vigadeks. See nimetus tuleneb sellest, et tõenäoseim viga on üksikmõõtmise mõõtarvu erinevus mõõdetava suuruse tõenäoseimast väärtusest, s.o. aritmeetilisest keskmisest. Tõenäoseimad vead võivad olla kas positiivsed või negatiivsed ja nende kohta kehtivad järgmised seaduspärasused:

a) <u>Tõenäoseimate vigade algebraline summa on null</u>. Liitnud eelnevate võrduste vastavad pooled liikmeti, leiame,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i = nN - \sum_{i=1}^{n} N_i \ .$$

Valemist (6) järgneb, et $nN = \sum_{i=1}^{n} N_i$, järelikult

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i = 0 \ .$$

Seda omadust kasutatakse aritmeetilise keskmise arvutamise kontrolliks. Väike vahe positiivsete ja negatiivsete tõenäosemate vigade summades esineb vaid juhul, kui aritmeetilise keskmise väärtus on ümardatud.

b) <u>Tõenäoseimate vigade ruutude summa</u>

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta N_i)^2$$

<u>omab minimaalset väärtust</u>. Kui üksikmõõtmiste mõõtarvude hälbed leida mitte aritmeetilise keskmise, vaid mõne teise arvu suhtes, siis on nende hälvete ruutude summa alati <u>suurem</u> kui tõenäoseimate vigade ruutude summa.

Kõige lihtsamalt arvutatavaks aritmeetilise keskmise veaks on keskmine absoluutne viga, mis on aritmeetiline keskmine tõenäoseimate vigade absoluutväärtustest. Keskmine absoluutne viga

$$\eta = \frac{|\Delta N_1| + |\Delta N_2| + \cdots\cdots + |\Delta N_n|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\Delta N_i|}{n} \ . \quad (8)$$

Keskmine relatiivne viga E_N on keskmise absoluutse vea η ja aritmeetilise keskmise N suhe

$$E_N = \frac{\eta}{N} \ . \qquad (8a)$$

Keskmine absoluutne viga ei väljenda otseselt, kui palju võib aritmeetiline keskmine erineda mõõdetava suuruse tõelisest väärtusest. Aritmeetilise keskmise võimalikku erinevust mõõdetava suuruse tõelisest väärtusest iseloomustab aritmeetilise keskmise ruutviga σ_N. Aritmeetilise keskmise ruutvea olemust selgitatakse tõenäosusteoorias.

Tõenäosusteooria uurimisobjektiks on juhuslikud sündmused. Juhusliku sündmuse esinemise tõenäosuseks p nimetatakse piirväärtust, millele läheneb selle sündmuse esinemiste arvu m ja sündmuste koguarvu n suhe viimase liginemisel lõpmatusele. Tõenäosus

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}.$$

Kui mõõtmisvea ΔA langemine vahemikku x_1 kuni x_2 on tõenäosusega p, siis väga suure arvu n mõõtmiste korral on sellesse vahemikku langevate mõõtmiste arv np.

Kui sama suuruse mõõtmisel teha palju mõõtmisi, siis kehtivad järgmised seaduspärasused:

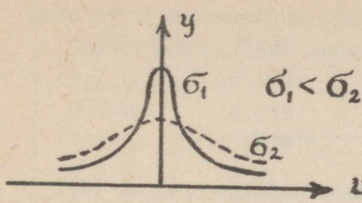
a) positiivse ja negatiivse väärtusega juhuslikud vead esinevad võrdse sagedusega,

b) mida suurem juhuslik viga, seda väiksem on tema esinemise tõenäosus ja ümberpöördult.

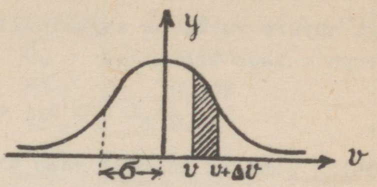
Aritmeetilise keskmise N tõeline viga v, s.o. tema hälve mõõdetava suuruse tõelise väärtuse X suhtes $v = N - X$ on samuti juhuslik suurus. Erineva suurusega tõeliste vigade esinemissagedust kirjeldab juhuslike vigade kohta kehtiv Gaussi normaalne vigade jaotusseadus, mille võrrandiks on

$$y = \frac{1}{\sigma_N \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2\sigma_N^2}}. \tag{9}$$

Gaussi kõver on kujutatud joonistel 1 ja 2.



Joonis 1



Joonis 2

Suurus σ_N^2 valemis (9) on ainuke parameeter, mis määrab kõvera kuju ja kannab nime dispersioon. Mida väiksem on dispersioon σ_N^2, seda teravam ja kõrgem on Gaussi kõvera maksimum (joon.1).

Tõenäosus Δp selleks, et viga v asuks vahemikus v kuni $v + \Delta v$, on võrdne joonisel 2 viirutatud osa pindalaga.

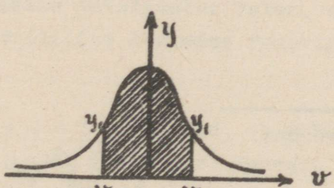
Kui Δv on väike, siis kõvera ordinaat y punktis v on ligikaudu võrdne tõenäosuse Δp ja vahemiku Δv laiuse suhtega, s.o.

$$y \simeq \frac{\Delta p}{\Delta v} \quad . \tag{a}$$

Mida väiksem on Δv, seda täpsem on võrdus (a). Lõplikult ordinaat

$$y = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta v} \quad .$$

Kujutame joonisel 3 ordinaadid, mis vastavad väärtustele v_1 ja $-v_1$



Joonis 3

Pindala nimetatud ordinaatide, abstsisstelje ja Gaussi kõvera vahel on arvuliselt võrdne tõenäosusega, et viga v asub vahemikus

$$-v_1 \leq v \leq v_1 \quad \text{ehk} \quad |v| \leq v_1 .$$

Selle pindala suurust saab arvutada integreerimise teel. Kuigi Gaussi kõverat mõlemale poole ükskõik kui kaugele jatkates kõver kunagi ei lõiku abstsissteljega, on siiski kogu pindala Gaussi kõvera ja abstsisstelje vahel lõplik ja võrdub ühega. Viimane asjaolu on täielikus kooskõlas sellega, et tõenäosus ükskõik millise väärtusega vea saamiseks on 1, mis tähendab, et ükskõik millist väärtust omava veaga tulemuse saame iga mõõtmise korral kindlasti.

Ordinaatidega piiratud pindala osa on alati ühest väiksem, mis tähendab, et mingis vahemikus asuva veaga tulemuse saamine pole kunagi päris kindel. Mida kitsam on vahemik, seda väiksem on vastavate ordinaatidega piiratud pindala, mis näitab, et seda väiksema tõenäosusega on selles vahemikus asuva veaga tulemuse saamine.

Toome järgnevas Gaussi vigade kõveraga ja ordinaatidega, millede abstsissid on -v ja +v (s.o. abstsissi absoluutväärtuseks on $|v|$), piiratud pindalade suurused mõnedele vahemikkudele.[1]

1) Pindala on võrdne

$$\Phi\left(\frac{v}{\sigma_N}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{v}{\sigma_N}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

$\|v\| <$	Tõenäosus p 2)	$\|v\| <$	Tõenäosus p 2)
0,00	0,000	$0{,}6745\sigma_N$	0,5 1)
$0{,}1\sigma_N$	0,080	σ_N	0,683
$0{,}2\sigma_N$	0,159	$2\sigma_N$	0,955
$0{,}3\sigma_N$	0,236	$3\sigma_N$	0,997
$0{,}4\sigma_N$	0,311	$4\sigma_N$	0,999
$0{,}5\sigma_N$	0,383		

Vastavalt eelnevale tabelile on tõenäosusega p=0,683 oodata, et mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine N asub mõõdetava suuruse tõelist väärtust X piiravates rajades

$$X - \sigma_N \leq N \leq X + \sigma_N$$

$$\text{ehk} \quad N = X \pm \sigma_N \; .$$

Kui teha k mõõtmisseeriat (k peab olema väga suur arv), siis umbes 2/3 juhul seeriate üldarvust (0,683 k seerias) langeb mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine vahemikku $X \pm \sigma_N$ ja ainult 1/3 seeriate korral on aritmeetiline keskmine sellest vahemikust väljaspool.

Ruutviga σ_N kujutab geomeetriliselt Gaussi vigadekõvera käänutäpi abstsissi.

Tõenäosusega p = 0,997, s.o. peaaegu täieliku kindlusega (p=1) on oodata, et aritmeetiline keskmine ei erine tõelisest väärtusest rohkem kui $3\sigma_N$ võrra.

Tõenäosusteoorias tuletatakse valem, mille järgi n üksikmõõtmise aritmeetilise keskmise ruutviga σ_N on võrdne

1) Tõenäosusega p = 0,5 on oodata, et aritmeetiline keskmine $N = X \pm 0{,}6745\,\sigma_N = X \pm r$. Suurust $r = 0{,}6745\,\sigma_N \simeq$ $\simeq 2/3\,\sigma_N$ nimetatakse tõenäoseks veaks.

2) Pindala $\Phi(\frac{v}{\sigma_N})$.

ruutjuurega aritmeetilise keskmise suhtes leitud hälvete ruutude summast, mis on jagatud korrutisega n(n-1)

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta N_i)^2}{n\cdot(n-1)}} \quad . \tag{10}$$

Ruutviga üksikmõõtmise mõõtarvu suhtes

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta N_i)^2}{n-1}} = \sigma_N \sqrt{n} \; .$$

on $\sqrt{n}$ korda suurem kui ruutviga aritmeetilise keskmise suhtes σ_N.

Valemist (10) nähtub, et kui mõõtmiste arv n suureneb, siis ruutviga kahaneb. Enam kui 10 mõõtmise korral muutub see kahanemine üha aeglasemaks. Siit järeldub, et aritmeetilise keskmise täpsuse edasiseks suurendamiseks on otstarbekam tee mitte mõõtmiste arvu suurendamine, vaid täpsema mõõtmismeetodi või mõõteriista kasutamine.

Küsimus, millist viga kasutada lõpptulemuse iseloomustamiseks, tuleb lahendada kokkuleppe teel.[1)]

Füüsika praktikumis määratakse mõõtmiste arvu $n > 5$ korral ruutviga ning $n \leq 5$ korral keskmine absoluutne viga.

Aritmeetilise keskmise absoluutse vea ülemmäära leidmiseks kasutame järgmist kokkulepet:

---

1) Tõenäosusteoorias näidatakse, et väga suure üksikmõõtmiste arvu n korral on ruutviga σ_N ja keskmine absoluutne viga η omavahel järgnevalt seotud

$$\sigma_N = \frac{1{,}25}{\sqrt{n}}\,\eta \, . \tag{11}$$

Seega ruutviga on keskmisest absoluutsest veast väiksem. Näiteks n = 10 korral saame valemist (11)

$$\sigma_N = 0{,}4\,\eta \, .$$

Valemit (11) võib kasutada vigade arvutuse kontrolliks. Kui valemi (11) abil leitud ning otseselt valemi (10) abil arvutatud ruutvea väärtused erinevad tunduvalt, siis näitab see, et vaadeldaval juhul juhuslike vigade esinemise tõenäosus ei allu Gaussi jaotusseadusele.

a) kui $n > 5$, siis

$$\Delta N = 3\sigma_N \quad , \tag{12}$$

b) kui $n \leq 5$, siis

$$\Delta N = 2\eta \tag{13}$$

Selle kokkuleppe püstitamisel arvestame, et tõenäosusega ligi 1 on oodata, et aritmeetiline keskmine ei erine tõelisest väärtusest rohkem kui $3\sigma_N$ või 2η võrra.

Valemite (12) ja (13) abil leitud ΔN võib lugeda mõõtarvu absoluutseks veaks ainult siis, kui ΔN on vähemalt 5 korda suurem mõõteriista passis märgitud instrumendi- ehk riistaveast ΔM.

Varbsirklite, mikromeetrite ja kaaluvihtide instrumendivigade tabel on toodud § 8. Elektrimõõteriistade instrumendiviga määratakse nende täpsusklassi järgi, mis on kõigi kaasaegsete riistade skaalal märgitud.

Kui mõõteriista instrumendiviga on teadmata, siis tuleb riistaveaks lugeda reeglina nominaalne viga $\Delta M'$, mis võrdub poolega mõõteriista skaala vähima jaotise väärtusest (jaotise hinnast). Mõõteriistade skaalad valmistatakse tavaliselt nii, et nominaalne viga on ligikaudu võrdne tegeliku instrumendiveaga. Kulunud mõõteriistade korral võib instrumendiviga osutuda nominaalsest veast märksa suuremaks, mistõttu neid võib kasutada ainult siis, kui vastav riist on eelnevalt kontrollitud täpsema mõõteriista abil. Tehastes, ülikoolide laboratooriumides jne. teostatakse aeg-ajalt kõigi mõõteriistade kohustuslikku riiklikku kontrolli, mille korral mõõdetakse kõigi mõõteriistade instrumendivigu ning praagitakse välja kõlbmatud riistad, mille viga ületab lubatud normi.

Kui ΔN ei ole 5 korda suurem instrumendiveast ΔM, siis tuleb mõõtarvu absoluutseks veaks lugeda aritmeetilise keskmise vea ning instrumendivea summa $\Delta N + \Delta M$.

Korduvatel mõõtmistel aritmeetilise keskmise absoluutse vea ülemmäär ΔN liitub instrumendiveaga, mis võib esineda igal mõõtmisel ülimalt kuni $+\Delta M$ või $-\Delta M$. Seetõttu on äärmistel juhtudel mõõtarvu absoluutse vea ülemmääraks $+(\Delta N + \Delta M)$ või $-(\Delta N + \Delta M)$.

Kui mõõtmiste käigus selgub, et üksikmõõtmiste mõõtarvude hälbed aritmeetilise keskmise suhtes on väiksemad kui instrumendiviga, siis ei ole vaja aritmeetilise keskmise viga määrata, vaid mõõtarvu absoluutseks veaks loetakse instrumendiviga ΔM.

Selgitame allpool mõõtarvu vea määramist näitega.

Metallvõlli diameeter mõõdeti kruvikaliibri abil, mille ühe jaotise väärtus on 0,01 mm. Instrumendiviga on passi järgi $\Delta M = 0{,}004$ mm. Selleks et teostada mõõtmisi instrumendiveale vastava täpsusega, peame lugemi võtmisel hindama ka jaotiste kümnendikosi. Üksikmõõtmiste mõõtarvud märgime järgnevasse tabelisse ühte veergu. Järgmisse veergu märgime hälbed vähima mõõtarvu suhtes $\delta \cdot 10^3$, mis hõlbustab aritmeetilise keskmise arvutamist. Järgnevatesse veergudesse märgime hälbed aritmeetilise keskmise suhtes $\Delta \cdot 10^3$ ja nende ruudud $\Delta^2 \cdot 10^6$. Kõrvalveergudes kasutame viimase kümnendkoha ühikuid selleks, et mitte alati ülearuseid nulle välja kirjutada.

Mõõtmise nr.	D, mm	$\delta \cdot 10^3$	$\Delta \cdot 10^3$	$\Delta^2 \cdot 10^6$
1	21,433	11	-2	4
2	21,424	2	+7	49
3	21,430	8	+1	1
4	21,429	7	+2	4
5	21,440	18	-9	81
6	21,435	13	-4	16
7	21,422	0	+9	81
8	21,435	13	-4	16
9	21,428	6	+3	9
10	21,431	9	0	0
	$N \simeq$ 21,431	87	$\sum \Delta^+ = +22$ $\sum \Delta^- = -19$	261

Vähima mõõtarvu 21,422 suhtes on hälvete summa $\sum \delta \cdot 10^3 = 87.10^{-3}$. Aritmeetiline keskmine on valemi (7) põhjal

$$N = 21,422 + \frac{87.10^{-3}}{10} \simeq 21,431 \text{ mm.}$$

Aritmeetilise keskmise võtame sama arvu kohtadega peale koma nagu mõõtarvud.

Hälvete ruutude summa aritmeetilise keskmise suhtes

$$\sum (\Delta N_i)^2 = 261.10^{-6}.$$

Keskmine ruutviga on valemi (9) põhjal

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{261.10^{-6}}{10.9}} = \frac{10^{-3}}{3}\sqrt{26,1} = \frac{10^{-3}.5,1}{3} \simeq 0,0017 \text{ mm.}$$

Aritmeetilise keskmise vea ülemmäära leiame valemi (12) abil

$$\Delta N = 3 \, . \, 0,0017 \text{ mm} = 0,0051 \text{ mm} \simeq 0,006 \text{ mm.}$$

Mõõtarvu vea leiame järgmiselt:

$$\Delta D = \Delta N + \Delta M = 0,006 + 0,004 = 0,01 \text{ mm.}$$

Relatiivne viga $E_D = \frac{0,01}{21,43} = 0,00047 \simeq 0,0005 = 0,05\%.$

Diameeter $D=(21,43 \pm 0,01)$ mm, Raadius $R=(10,715 \pm 0,005)$ mm,
$E_D = 0,05\%.$ $E_R = 0,05\%.$

Viie kuni kümne mõõtmise korral võib ruutvea suurust ligikaudselt hinnata valemiga

$$\sigma_N = \frac{d}{n},$$

kus d on maksimaalse ja minimaalse mõõtarvu vahe (veatlusriba laius).

Eelneva näite puhul $\sigma_D = \frac{18.10^{-3}}{10} = 0,0018$ mm.

Kui eelnevas nimetatud võlli diameetrit mõõta nihkkaliibriga, mille noonius võimaldab mõõta täpsusega 0,1 mm ning instrumendiviga on $\Delta M = 0,1$ mm, siis saame üksikmõõtmistel mõõtarvuks alati 21,4 mm ning juhuslike vigade arvutusel ei oleks mõtet. Mõõtmistulemus sel juhul on

$$D = (21,4 \pm 0,1) \text{ mm.}$$

6.

§ 6. Kaudsete mõõtmistulemuste vead.

Enamikel juhtudel ei saa otseselt mõõta otsitavat suurust. Tegelikult mõõdetakse rida abisuurusi, millised on seotud otsitava suurusega vastava matemaatilise valemi kaudu. Kaudse mõõtmistulemuse viga sõltub mitte ainult otseste mõõtmistulemuste vigadest, vaid ka abisuurustega sooritatavatest matemaatilistest tehetest.

Vigade teoorias tuletatakse erinevatele matemaatilistele tehetele vastavad valemid vigade arvutamiseks.[x)]

Tabelis nr. 1 on antud rea tehete ja trigonomeetriliste suuruste leidmise puhul absoluutsed ja relatiivsed vead.

Sellest tabelist nähtub, et näiteks summa absoluutne viga võrdub liidetavate absoluutsete vigade summaga ja vahe absoluutne viga võrdub vähendatava ja lahutatava absoluutsete vigade summaga.

Korrutise relatiivne viga võrdub tegurite ja jagatise relatiivne viga võrdub jagatava ja jagaja relatiivsete vigade summaga.

Kaudsete mõõtmistulemuste vigade leidmiseks tuleb teostada tehteid järgmises järjekorras:

1) Kõik otseste mõõtmiste mõõtarvud varustatakse kohe pärast mõõtmise teostamist vastavalt käesoleva juhendi §§ 3 ja 5 absoluutse veaga. Viie mõõtmise puhul arvutatakse keskmine absoluutne viga η, üle viie mõõtmise puhul arvutatakse ruutviga σ_N. Mõõtarvu absoluutne viga määratakse valemiga $\Delta X = 2\eta + \Delta M$ või $\Delta X = 3\sigma_N + \Delta M$.

2) Arvutatakse vastavalt matemaatilisele valemile lõppresultaat U, paigutades valemisse otseste mõõtmiste mõõtarvud..

---

x) Vt. 1) "Физический практикум" под ред.проф.В.И.Ивероновой,введение.Гостехиздат,Москва 1953.2) К.П.Яковлев. "Математическая обработка результатов измерений".Гостехиздат,Москва 1950.

Tabel nr.1

Matemaatiline tehe	Absoluutne viga	Relatiivne viga
$N = A + B + C$	$\Delta N = (\Delta A + \Delta B + \Delta C)$	$E_N = \dfrac{\Delta A + \Delta B + \Delta C}{A + B + C}$
$N = A - B$	$\Delta N = (\Delta A + \Delta B)$	$E_N = \dfrac{\Delta A + \Delta B}{A - B}$
$N = A.B$	$\Delta N = (A.\Delta B + B.\Delta A)$	$E_N = (\dfrac{\Delta A}{A} + \dfrac{\Delta B}{B})$
$N = \dfrac{A}{B}$	$\Delta N = \dfrac{B.\Delta A + A.\Delta B}{B^2}$	$E_N = (\dfrac{\Delta A}{A} + \dfrac{\Delta B}{B})$
$N = A^n$	$\Delta N = n \cdot A^{n-1} \cdot \Delta A$	$E_N = n \cdot \dfrac{\Delta A}{A}$
$N = \sqrt[n]{A}$	$\Delta N = \dfrac{1}{n} A^{\frac{1}{n}-1} . \Delta A$	$E_N = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\Delta A}{A}$
$N = \sin A$	$\Delta N = \cos A.\Delta A$	$E_N = \cot A.\Delta A$
$N = \cos A$	$\Delta N = \sin A.\Delta A$	$E_N = \tan A.\Delta A$
$N = \tan A$	$\Delta N = \dfrac{\Delta A}{\cos^2 A}$	$E_N = \dfrac{2.\Delta A}{\sin 2A}$
$N = \cot A$	$\Delta N = \dfrac{\Delta A}{\sin^2 A}$	$E_N = \dfrac{2.\Delta A}{\sin 2A}$

vud. Sealjuures tuleb tingimata kasutada § 4 reegleid (1) kuni (5) ja mitte kulutada aega 7- või 10-kohaliste arvude korrutamisega, kui kehtivateks numbriteks on esimesed 2 või 3 numbrit.

Lisaks sellele on soovitav valemis iga arvu järele kirjutada mõõtühik ja enne aritmeetiliste tehete sooritamist kontrollida vastuse mõõtühikut.

Pärast lõppresultaadi leidmist on soovitav kontrollida tema suurusjärku, s.o. kirjutada ta kujul $k.10^n$, kus k on ühekohaline arv ja n on täisarv. Selleks tuleb iga valemis esinev arv ümardada ühe või ülimalt kahe kehtiva kohani, sooritada vastavad tehted ja võrrelda tulemusi.

Selle punkti reeglite mittearvestamisel võib arvutamistel kulutada täiesti tarbetult vaeva ja aega.

3) Leitakse matemaatilises valemis esineva summa või vahe absoluutne viga, mis on liidetavate või vähendatava ja lahutatava absoluutsete vigade summa.

4) Järgnevalt arvutatakse lõppresultaadi relatiivne viga. Olgu punkt 2 juhtnööride kohaselt arvutatud lõppresultaat U seotud otseselt mõõdetud suurustega (või nende summade ja vahedega) A, B, C, D ... üldise valemi

$$U = \frac{A^a \cdot B^b \ldots}{C^c \cdot D^d \ldots} \qquad (14)$$

kaudu. See valem näeb ette kõikvõimalikke astendamisi, korrutamisi ja jagamisi. Vastavalt tabelile 1 on lõppresultaadi relatiivne viga tegurite relatiivsete vigade summa.

$$E_U = \frac{\Delta U}{U} = a\frac{\Delta A}{A} + b\frac{\Delta B}{B} + c\frac{\Delta C}{C} + \ldots \qquad (15)$$

Trigonomeetriliste funktsioonide korral esinevad valemis (15) relatiivsed vead vastavalt tabelile 1.

Valemist (15) nähtub, et lõppresultaadi relatiivse vea leidmiseks tuleb liita valemis esinevate tegurite või jagajate A, B, C ... relatiivsed vead. Kui avaldises esinev $\pi = 3,141593$ .... või $g = 980,665$ cm/sek^2, siis tuleb relatiivse vea avaldises leida kõigi ülejäänud tegurite relatiivsete vigade summa S. Arv π või g tuleb võtta sellise arvu kohtadega pärast koma, et summa S ja $\frac{\Delta\pi}{\pi}$ või $\frac{\Delta g}{g}$ liitmisel ja ümardamisel ei muutuks relatiivse vea esimene kehtiv number pärast nulle.

$$\pi = 3,1 \ , \qquad \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0,042}{3} = 0,014 \ ,$$

$$\pi = 3,14 \ , \qquad \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0,0016}{3} = 0,00053,$$

$$\pi = 3,142, \qquad \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0,00041}{3} = 0,00014 \text{ jne.},$$

$$g = 981 \ cm/sek^2, \qquad \frac{\Delta g}{g} = \frac{0,335}{980} = 0,00034,$$

$$g = 980,7 \ cm/sek^2, \qquad \frac{\Delta g}{g} = \frac{0,035}{980} = 0,000034 \text{ jne.}$$

Eelneva tabeli asemel võib kasutada ka standard relatiivse vea väärtusi, kuigi näit. $\pi = 3,14$ puhul on standardviga $\frac{0,005}{3} = 0,0017$, umbes 3 korda suurem tabelis antud veast 0,00053.

Kui näiteks tegurite relatiivsete vigade summa $S = 0,0372$, siis võttes $\pi = 3,14$, leiame lõppresultaadi relatiivse vea

$$E_u = 0,0372 + 0,00053 \simeq 0,0377 \simeq 0,038,$$

s.o. selle π väärtuse puhul relatiivse vea esimene kümnendkoht ei muutu.

5) Arvutame lõppresultaadi absoluutse vea valemi (5) põhjal

$$\Delta U = U \cdot E_u \ ,$$

kus U on valemi (14) põhjal arvutatud lõppresultaat ja E on valemi (15) põhjal arvutatud lõppresultaadi relatiivne viga.

ΔU anname kahe kehtiva numbriga, seega enne korrutamist on U ja E_u kumbki ümardatud samuti kahe kehtiva numbrini.

6) Kirjutame lõppresultaadi kujul

$$u = (U \pm \Delta U) \text{ ühes mõõtühikuga},$$

$$E_u = \dots .\%,$$

kus ΔU ümardatakse ühe kehtiva numbrini ja U kuni sama järguni, milleni oli ümardatud ΔU. Vastusele kirjutame alati juurde vastava mõõtühiku (erandiks on vaid nimetusteta suhtarvud, näit. kasutegur).

Lõppresultaadi alla kirjutame ka relatiivse vea protsentides.

Kogu arvutustöö tähtsamaks eeltingimuseks on töö hoolikas ja korralik vormistamine. Arvud tuleb kirjutada korralikult ja õigesti, et vältida ühtede arvude vahetamist teistega. Liidetavad või lahutatavad arvud tuleb kirjutada üksteise alla nii, et sama järku numbrid oleksid samas püstveerus.

On soovitav kohe vormistada puhtand, nähes selles ette vastavad kohad vaatlusandmete märkimiseks ühes vigade arvutuse veergudega. Mustandite kasutamisest tuleb võimalikult loobuda, kuna andmete ümberkirjutamine puhtandisse tähendab tarbetut ajakulu.

Käesolevale juhendile on lisatud vigade arvutamise näiteid ja füüsika praktikumi tööde mõned näidiseksemplarid.

7. Vigade arvutamise näiteid

Näide 1. Joule-Lenzi soojusvalemi järgi on voolu toimel eraldunud soojushulk

$$Q = c \cdot I^2Rt,$$

kus $c = (0{,}24 \pm 0{,}005)\ \frac{cal}{J}$, $R = (10{,}0 \mp 0{,}2)\,\Omega$,

$t = (40{,}0 \pm 0{,}6)$ s, $I = (3{,}0 \pm 0{,}1)$ A,

$$Q = 0{,}24 \cdot 3^2 \cdot 10.40 = 864 \text{ cal.}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta c}{c} + 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta t}{t} = \frac{0{,}005}{0{,}24} + 2.\frac{0{,}1}{3} + \frac{0{,}2}{10} + \frac{0{,}6}{40} =$$

$$= 0{,}021 + 0{,}067 + 0{,}02 + 0{,}015 \simeq 0{,}123.$$

$$\Delta Q = 864 \cdot 0{,}123 = 106{,}3 \text{ cal} \simeq 107 \text{ cal},$$

$$Q = (864 \pm 107) \text{ cal} \simeq (860 \pm 110) \text{ cal},$$

$$E_Q = 12{,}3\% \simeq 13\%.$$

Näide 2. Arvutada õõnessilindri ruumala.

$$V = h(R^2 - r^2), \text{ kus}$$

kõrgus $h = (20{,}00 \pm 0{,}02)$ cm,
väline raadius $R = (6{,}00 \pm 0{,}01)$ cm,
sisemine raadius $r = (2{,}00 \pm 0{,}01)$ cm,

Ruumala

$$V = 3{,}14 \cdot 20\,(6^2 - 2^2) = 3{,}14.20.32 = 3{,}14.640 = 2010 \text{ cm}^3.$$

Relatiivne viga

$$E_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta(R^2-r^2)}{R^2-r^2} + \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{2R\cdot\Delta R + 2r\cdot\Delta r}{R^2-r^2} + \frac{\Delta\pi}{\pi} =$$

$$= \frac{0{,}02}{20} + \frac{2.6.0{,}01+2.2.0{,}01}{6^2-2^2} + \frac{\Delta\pi}{\pi} = 0{,}0010 + \frac{0{,}12+0{,}04}{32} + \frac{\Delta\pi}{\pi} =$$

$$= 0{,}0010 + 0{,}0050 + \frac{\Delta\pi}{\pi} = 0{,}0060 + 0{,}00053 = 0{,}00653 \simeq 0{,}0066.$$

Absoluutne viga

$$\Delta V = 2010 \cdot 0{,}0066 = 13{,}3 \simeq 14 \text{ cm}^3,$$

$$V = (2010 \pm 14) \text{ cm}^3 \simeq (2010 \pm 20) \text{ cm}^3,$$

$$E_v = 0{,}0066 \simeq 0{,}7\%$$

<u>Näide 3.</u> Arvutada $x = c.b$, kus c on konstant ja $\Delta c = 0$

$$x + \Delta x = c(b + \Delta b) = cb + c.\Delta b,$$

järelikult

$$\Delta x = \pm c.\Delta b; \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{c.\Delta b}{cb} = \frac{\Delta b}{b}.$$

Näiteks, kui

$$c = 3 \text{ ja } b = (20 \pm 0{,}2) \text{ cm., s.o. } \frac{\Delta b}{b} = \frac{0{,}2}{20} = 0{,}01 = 1\%,$$

siis

$$x = 3.20 = 60 \text{ cm}, \ \Delta x = 3.0{,}2 = 0{,}6 \text{ cm}, \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{0{,}6}{60} = 0{,}01 = 1\%.$$

Seega konstantne kordaja suurendab selle kordaja kordselt korrutatava absoluutset viga, ei muuda aga tema relatiivset viga.

8. Instrumendivigade tabelid [1]

1. Nihkkaliibri instrumendivigade tabel

Mõõtmise piirkonnad mm	Nooniuse täpsus mm		
	0,02	0,05	0,1
	Nihkkaliibri instrumendiviga mm		
kuni 300	± 0,02	± 0,05	± 0,1
üle 300 kuni 500	± 0,03	± 0,05	± 0,1
" 500 " 1000	± 0,04	± 0,05	± 0,1

[1] Vt. kirjanduse loetelu 9 p. 11.

2. Kruvikaliibrite instrumendivigade tabel

Mõõtmise piirkond mm		kuni 100	üle 100 kuni 150	üle 150 kuni 200
ΔM mm	0 klass	± 0,002	± 0,0025	± 0,003
	1 "	± 0,004	± 0,005	± 0,006
	2 "	± 0,008	± 0,010	± 0,012

3. Metalljoonlaudade (valmistatud GOST 427-56 alusel) instrumendivigade tabel

Metallribast valmistatud joonlaudadel on millimeetriline või poolmillimeetriline skaala mõõtepiirkondadega 150, 300, 500 ja 1000 mm.

Joonlaua skaala pikkuse hälbed nominaalväärtusest ei tohi ületada tabelis antud hälbeid.

Mõõdetav pikkus kuni	150 mm	300 mm	500 mm	100 mm
Lubatavad hälbed mm-tes ±	0,1	0,1	0,15	0,20

Näiteks 1000 mm pikkusega joonlauaga pikkuste mõõtmisel kuni 300 mm on lubatav hälve ± 0,1 mm, kuni 500 mm aga ± 0,15 mm.

4. Kaaluvihtide instrumendivigade tabel

Vihi mass	Analüütilised	Tehnilised			Vihi mass	Analüütilised	Tehnilised		
		1 klass	2 klass	3 klass			1 klass	2 klass	3 klass
20 kg		+200 mg	+ 2 g	+10 g	2 g	+0,6 mg	+1 mg	+4 mg	+20 mg
10 "		+100 "	+ 1 "	+ 5 "	1 "	+0,6 "	+1 "	+4 "	+10 "
5 "		+ 50 "	+500 mg	+2,5"	500 mg	±0,3 "	±0,5mg	±2 "	
2 "		+ 30 "	+300 "	+1,5"	200 "	±0,3 "	±0,5 "	±2 "	
1 "		+ 20 "	+200 "	+1 "	100 "	±0,3 "	±0,5 "	±2 "	
500 g		+ 10 "	+100 "	+500mg	50 "	±0,3 "	±0,5 "	±2 "	
200 "	+ 2 mg	+ 4 "	+ 50 "	+200 "	20 "	±0,2 "	±0,5 "	±2 "	
100 "	+ 1 "	+ 3 "	+ 25 "	+100 "	10 "	±0,2 "	±0,5 "	±2 "	
50 "	+ 1 "	+ 3 "	+ 20 "	+ 80 "	5 "	±0,1 "	±0,5 "	±1 "	
20 "	+ 1 "	+ 2 "	+ 15 "	+ 50 "	2 "	±0,1 "	±0,2 "	±0,4"	
10 "	+ 0,6mg	+ 2 "	+ 10 "	+ 30 "	1 "	±0,1 "	±0,1 "	±0,2"	
5 "	+ 0,6 "	+ 2 "	+ 6 "	+ 20 "	-	-	-	-	-

Ratsurite vead ei tohi ületada nendega võrdsete masside vihtidega lubatavaid vigu. Sama kaalukomplekti samanimeliste ratsurite masside vahe ei tohi ületada 0,1 mg.

5. Vedeliktermomeetrite instrumendivigade tabel

Tehniliste elavhõbetermomeetrite (mõõtepiirkond alates $-30^\circ C$ kuni $+500^\circ C$) vead sõltuvalt jaotise hinnast ja temperatuuri vahemikust ei tohi ületada alljärgnevas tabelis antud hälbeid.

Temperatuuri vahemik °C		Lubatavad vead vastavalt jaotise hinnale °C		
Alates	Kuni	1°C	2°C	5 ja 10°C
- 30	0	± 1	± 2	-
1	100	± 1	± 2	-
101	200	± 2	± 2	± 5
201	300	± 3	± 4	± 5
301	400	± 4	± 4	± 10
401	500	± 5	± 5	± 10

Märkus: 1. Inkubaatorite termomeetritel jaotise hinnaga $0,5^\circ C$ ei tohi vead ületada $\pm 0,25^\circ C$ ja jaotise hinnaga $0,1^\circ C$ ei tohi vead ületada $\pm 0,1^\circ C$. 2. Uute maksimaaltermomeetrite (meditsiinilised ja veterinaarsed) vead ei tohi ületada $+ 0,10$ ja $- 0,15^\circ C$, kasutamisel olevate termomeetrite puhul aga $\pm 0,15^\circ C$.

Laboratoorsete elavhõbetermomeetrite vead (mõõtepiirkond $-30^\circ C$ kuni $+ 300^\circ C$) ei tohi ületada järgmisi väärtusi:

Temperatuuri vahemik oC		Lubatavad vead vastavalt jaotise hinnale °C			
Alates	kuni	0,01 ja 0,02°C	0,05°C	0,1 ja 0,2°C	0,5°C
- 30	0	-	± 0,1	± 0,3	± 1
1	100	∓ 0,05	± 0,1	± 0,2	± 1
101	200	-	-	± 0,4	± 1
201	300	-	-	± 1	± 2

Märkus: Kalorimeetrite termomeetritel jaotise hinnaga 0,01°C ei tohi vead ületada ± 0,02°C ja jaotise hinnaga 0,02°C ei tohi vead ületada ± 0,04°C.

6. Sekundomeetrite instrumendivead

Sekundomeetrid jaotatakse vastavalt nende käigu täpsusele 3 klassi.

Sekundomeetriga mõõtmisel tuleb arvesse võtta nullpunkti parandus. Korras sekundomeetri nullpunkti parandus ei tohi olla rohkem kui üks skaala vähim jaotus.

Ajavahemiku mõõtmise absoluutne viga sõltub mõõdetava ajavahemiku pikkusest. Kui on võimalik korrata sama ajavahemiku mõõtmist, siis teostame 10 mõõtmist ja leitakse tulemuste aritmeetiline keskmine, mis võimaldab saavutada väiksema absoluutse vea.

Ajavahemiku mõõtmise absoluutsed vead sekundites on toodud alljärgnevas tabelis (õhu temperatuur mõõtmistel $t=20°C \mp 5°C$)

Sekundomeetri klass	Mõõtmise iseloom	Mõõtarvu absoluutne viga sekundites ajavahemiku korral		
		Kuni 60 sek.	Kuni 15 min.	Kuni 30 min.
1	üksikmõõtmine	0,4	0,7	1,0
	10-ne või enam mõõtmise keskmine	0,2	0,4	0,6
2	üksikmõõtmine	0,6	1,0	1,5
	10-ne või enam mõõtmise keskmine	0,3	0,6	1,0
3	üksikmõõtmine	0,6	1,3	2,4
	10-ne või enam mõõtmise keskmine	0,3	0,8	1,6

Märkus: Eelnevas tabelis antud absoluutsete vigade tabeli väärtused kujutavad endast paljude sekundomeetrite kohta teostatud vigade mõõtmiste keskmisi maksimaalväärtusi. Need vead, eriti mõõdetava ajavahemiku kuni 60 sek. puhul on võrdlemisi suured. Seepärast on soovitav määrata kasutatavale sekundomeetrile vastavad vead. Kronomeetri puudumisel võib teostada 10 või rohkem üksikmõõtmist sekundipendliga (99,4 cm pikkuse niidi otsa riputatud väike kuulike), võttes igal mõõtmisel 30-ne väikese amplituudiga täisvõnke kestus (kogu üksikmõõtmise kestus $\simeq$ 60 sek.). Arvutada kõigi üksikmõõtmiste aritmeetiline keskmine, selle ruutviga σ_N ja ruutviga üksikmõõtmise mõõtarvu suhtes $\sigma = \sigma_N \cdot \sqrt{n}$ (vt. juhend lk. 18). Antud sekundomeetri aritmeetilise keskmise absoluutseks veaks on $3\sigma_N$ ja üksikmõõtmise absoluutseks veaks on 3σ.

Kolbide, mõõtsilindrite, kooniliste mensuuride, bürettide ja pipettide lubatud vigade tabel.

Maht ml	Lubatud absoluutne viga (±) temperatuuril 20°C												
	1-klassi mõõtkolvid		2-klassi mõõtkolvid		Mõõtsilindrid		Koonilised mensuurid	Otsekraaniga büretid ja mikrobüretid		Ühe märgiga pipetid, jaotiseta		Kahe märgiga jaotistega pipetid või jaotisteta	
	juurdevalamis	väljavalamis	juurdevalamis	väljavalamis	juurdevalamis	väljavalamis		1.klass	2.klass	1.klass	2.klass	1.klass	2.klass
2000	0,50	1,00	1,00	2,00	6,0	12,0	-						
1000	0,30	0,60	0,60	1,20	4,0	8,0	10,0						
500	0,15	0,30	0,30	0,60	2,0	4,0	6,0						
250	0,10	0,20	0,20	0,40	1,0	2,0	3,0						
200	0,10	0,20	0,20	0,40	-	-	-	0,20	0,40				
100	0,10	0,20	0,20	0,40	0,4	0,8	1,5	0,10	0,20	0,08	0,16	0,10	0,20
50	0,05	0,10	0,10	0,20	0,3	0,6	1,0	0,05	0,10	0,05	0,12	0,08	0,16
40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,05	0,12	0,08	0,16
25	0,03	0,06	0,06	0,12	0,2	0,4	-	0,03	0,06	0,04	0,10	0,05	0,10
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03	0,06	0,04	0,08
15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03	0,06	0,04	0,08
10	-	-	-	-	0,2	0,4	-	-	-	0,02	0,04	0,03	0,06

5	-	-	-	-	-	0,2	0,4	-	0,010	0,030	0,01	0,03	0,02	0,04
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	0,03	0,02	0,04
2	-	-	-	-	-	-	-	-	0,006	0,015	0,006	0,015	0,01	0,02
1	-	-	-	-	-	-	-	-	0,006	0,015	0,006	0,015	0,01	0,02
0,5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,006	0,015	0,01	0,02

7. Kolbide, mõõtsilindrite, kooniliste mensuuride, bürettide ja pipettide lubadud vigade tabel.

Vedelikunivoo lugem mõõtanumas võetakse meniski alumise ääre järgi, täisjaotisele vastava lugemi korral langevad kokku meniski pinna puutetasand ja skaala kriipsu ülemist äärt läbiv horisontaaltasand.

Mõõtsilindrid (ja kolbid) valmistatakse kahte tüüpi: juurdevalamissilindrid ja väljavalamissilindrid. Need tüübid erinevad teineteisest ainult märgamise tõttu silindrisse jääva vee ruumala arvestamise poolest. Õige mõõtarvu saamiseks peab juurdevalamissilinder olema enne mõõtmist kuiv, väljavalamissilinder aga märg. Vedeliku väljakallamisel tuleb alla 1 l mahuga mõõtsilindrit hoida ümberpööratud asendis 30 sek., üle 1 l mahuga mõõtsilindrit 60 sek.

§ 9. Kirjanduse loetelu vigade arvutamise kohta.

1. A. Borkvell - Tõenäosusteooria põhijooni, Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn 1958.
2. G.Rägo - Kõrgem matemaatika - RK "Teaduslik Kirjandus" Tartu 1948.
3. Бронштейн И.Н. и К.А.Семендяев - Справочник по математике - Гостехиздат,Москва 1948.
4. Длужневский Г.И., С.Н.Немиров, Б.А.Садиков,Л.Ф.Суходольская - Лабораторные работы по физике. -Министерство высшего образования СССР,Методическое Управление - Гос.Изд."Советская Наука" Москва 1958.
5. Гуткин А.М. и И. .Федорова - Погрешности при физических измерениях - Московский ордена Ленина Энергетический Институт имени В.М.Молотова, Москва 1956.
6. Под ред.В.И.Иверoновой Физический практикум.Гостехиздат,Москва 1953.
7. Маликов С.Ф. Введение в технику измерений.Комитет по делам мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР - Гос. Научно-техническое издательство машиностроительной литературы, Москва 1952.
8. Романовский - Применения математической статистики в опытном деле - Гостехиздат 1947.
9. Талалаева Е.В. О вычислении ошибок измерений - Министерство высшего образования СССР - Изд.Московского Университета 1957.
10. Яковлев К.П. Математическая обработка результатов измерений.Гостехиздат,Москва 1950.

II. Комитет стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров Союза ССР.

I. Инструкция I38-57 по поверке штангенциркулей, Москва, I958.

2. Сборник инструкции I35-57, I36-57, I37-57 по поверке микрометров, Москва, I958.

3. Инструкция 83-57 по поверке измерительных металлических линеек, Москва, I957.

4. Инструкция 69-56 по поверке рабочих гирь (мер массы), Москва, I956.

5. Приборы для измерения температуры и их поверка, Стандартгиз, Москва, I957, 1к. 2I5.

6. Инструкция 247-54 по поверке секундомеров, Главная Балата Мер и Измерительных Приборов СССР, Москва, I954.

7. Инструкция 3I-53 по поверке мер вместимости стеклянных технических I-го и 2-го классов, Москва, I954.

T R Ü   Ü L D F Ü Ü S I K A   K A T E E D E R

Praktilise töö aruanne

nr. 12....

Nimi ja eesnimi: Lõo. Merike....	Matr. nr.: 61 275.	Töö tehtud: "22." veebruaril 1961. a.
Teadusk., osakond: Arstiteaduskond ravi.........	Kursus: I..	Aruanne esitatud: "27." veebruaril 1961. a.
Praktikumi juhendaja: ass. E. Palmre	Rühm: VII..	Kontrollinud:..............Hinne:.....

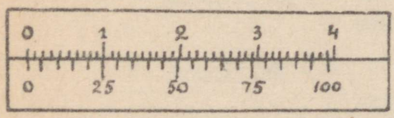
TÖÖ PEALKIRI: № 26 ja 27	Mõõtmine nihkkaliibriga ja kruvikaliibriga

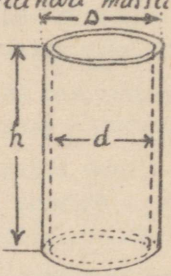
Katsetatavad esemed:	Kasutatud riistade nimetused, nr.nr. ja andmed:	
a) Mõõtmisel nihkkaliibriga õõnessilinder b) Mõõtmisel kruvikaliibriga traadikera.	Nihkkaliiber ШЦ-8 243 555 Nooniuse täpsus 0,05 mm Skaala jaotise hind 1 mm Mõõduriista viga ±0,05 mm Nokkade kaugus 10 mm " — " — " - viga ±0,02 mm	Kruvikaliiber MK25 Ш 1899 Mõõtepiirkond 0-25 mm Mõõduriista viga ±0,04 mm Ringskaala jaotise hind 0,01 mm.

KATSEKORRALDUSE SKEEM , LÜLITUSSKEEM

Töö nr. 26. Mõõtmisi nihkkaliibriga

Määrata nihkkaliibriga õõnessilindri massiivse osa ruumala ja aine erikaal.





$\frac{D}{2} = R$

$\frac{d}{2} = r$

Nihkkaliibriks on kahe ristliistuga nn. nokkadega mõõtastmik, mille kõrval on abiastmik nn. noonius. Nokkade nihutamisel kokku ühtib nooniuse nullkriips astmiku nullkriipsuga, seega langeb ära nulltäpi parandus. Nooniuse 20-e jaotise pikkus on astmikul 39 mm, seega nooniuse jaotise pikkus on $\frac{39}{20}$ mm = 1,95 mm. Nooniuse täpsus, s.o. astmikul pikkuse 2mm ja nooniuse jaotise pikkuse 1,95mm vahe 2 mm − 1,95 mm = 0,05 mm.

Kui nooniuse 1., 2., 3. jne kriips ühtib astmiku 2, 4, 6. jne kriipsuga, siis on nooniuse ja astmiku nullkriipsude ja seega ka nokkade kaugus vastavalt $1\times0{,}05\,mm=0{,}05\,mm$, $2\times0{,}05\,mm=0{,}10\,mm$, $3\times0{,}05\,mm=0{,}15\,mm$ jne. Need murdosad loeme nooniuselt, millel on märgitud iga 5. kriipsu järele millimeetri sajandike mõõtarvud 25, 50, 75 ja 100. Sisemise diameetri mõõtmisel liidame nihkkalibri astmiku lugemile nokkade kauguse 10 mm.

Silindri mõõtarvud.

Jrk.	Väline diameeter		Sisemine diameeter		Silindri kõrgus	
nr.	$\varnothing D$ mm	$\delta.10^{2}$ mm	$\varnothing d$ mm	$\delta.10^{2}$ mm	h mm	$\delta.10^{2}$ mm
1	23,75	–	21,90	5	29,05	–
2	23,80	5	21,85	–	29,05	–
3	23,80	5	21,90	5	29,10	5
4	23,80	5	21,85	–	29,05	–
5	23,75	–	21,85	–	29,05	–
6	23,75	–	21,85	–	29,10	5
7	23,75	–	21,90	5	29,05	–
8	23,75	–	21,90	5	29,05	–
9	23,75	–	21,90	5	29,05	–
10	23,80	5	21,85	–	29,10	5
Aritmeet. keskmine	23,77	20 : 10 = = 2	21,88	25 : 10 = = 2,5 ≃ 3	29,07	15 : 10 = = 1,5 ≃ 2

$D=23{,}75+0{,}02=23{,}77$	$d=21{,}85+0{,}03=21{,}88$	$h=29{,}05+0{,}02=29{,}07$
$D=(23{,}77\pm0{,}05)\,mm$	$d=(21{,}88\pm0{,}07)\,mm$	$h=(29{,}07\pm0{,}05)\,mm$
$R=(11{,}89\pm0{,}03)\,mm$	$r=(1{,}94\pm0{,}04)\,mm$	

Mõõtarvude hälbed aritmeetilise keskmise suhtes – näit. välise diameetri mõõtmisel vastavalt $+0{,}02\,mm$, $-0{,}03\,mm$, $-0{,}03\,mm$ jne on väiksemad kui nihkkalibri viga $\pm0{,}05\,mm$. Seetõttu võtame aritmeetilise keskmise veaks mõõduriista vea 0,05 mm, millele sisemise diameetri mõõtmisel liidame nokkade vea 0,02 mm. Raadiuse viga on 2 korda väiksem diameetri veast. Silindri massiivse osa ruumala $V=\pi h(R^{2}-r^{2})$

$V=3{,}14\cdot29{,}07(11{,}89^{2}-10{,}94^{2})=91{,}280(141{,}37-119{,}68)=91{,}280\cdot21{,}69=\underline{\underline{1979{,}9\,mm^{3}}}$ [1)]

Ligikaudne kontroll: $V=3\cdot29(12^{2}-11^{2})=87(144-121)=87\cdot23=2001\,mm^{3}$

1) Lähteandmetes on h, R ja r kehtivate numbrite arv 4, seepärast säilitame vahearvutustel üks number rohkem, s.o. 5 numbrit. Arvu π kohtade arvu näitab vastava vea arvutus.

Ruumala relatiivne viga

$$E_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta(R^2-r^2)}{R^2-r^2} + \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{2R\Delta R + 2r\Delta r}{R^2-r^2} + \frac{\Delta\pi}{\pi};$$

$$E_V = \frac{0,05}{29} + \frac{2\cdot12\cdot0,03+2\cdot11\cdot0,04}{21} + \frac{\Delta\pi}{\pi} = 0,0018 + \frac{1,60}{21} + \frac{\Delta\pi}{\pi} =$$

$$= 0,0018 + 0,08 + 0,00053 = 0,08233 \simeq 0,083 \quad ^{1)}$$

Ruumala absoluutne viga

$$\Delta V = V\cdot E_V = 20\cdot10^2\cdot0,083 = 166 \simeq 170\ mm^3$$

$$\underline{V = (1980 \pm 170)\ mm^3 = (1,980 \pm 0,17)\ cm^3} \quad ^{2)}$$

$$\underline{E_v = 8,3\,\% \simeq 9\,\%}$$

Silindri kaal tehnilistel kaaludel (täpsus 0,01 G)

$$P = (17,60 \pm 0,05)\ G$$

Silindri erikaal $\varrho = \frac{P}{V}$; $\varrho = \frac{17,60}{1,98} = 8,89\ \frac{G}{cm^3}$

Erikaalu relatiivne viga

$$E_\varrho = \frac{0,005}{17} + \frac{0,17}{1,98} = 0,0003 + 0,086 \simeq 0,087$$

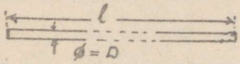
Erikaalu absoluutne viga

$$\Delta\varrho = 8,9\cdot0,087 = 0,7743 \simeq 0,8\ \frac{G}{cm^3}$$

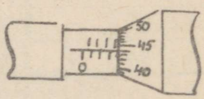
$$\underline{\varrho = (8,9 \pm 0,8)\ \frac{G}{cm^3}}\ ; \quad \underline{E_\varrho = 8,7\,\% \simeq 9\,\%}$$

2. Töö nr. 27. Mõõtmisi kruvikaliibriga.

Arvutada isolatsioonita valgevasest traadikera ($\varrho = 8,4 \pm 0,05$) $\frac{G}{cm^3}$ traadi pikkus.



Traat



Kruvikaliibri lugem $3,5 + 0,440\ mm = 3,940\ mm$.

Kruvikaliibriks on klambris edasi-tagasi liikuv kruvi. Kruvikäigu kõrgus on 0,5 mm, millele vastab trumli skaalal 50 jaotist. Pöörlemisel 1 jaotise võrra nihkub kruvi edasi $\frac{1}{50}\cdot 0,05\,mm = 0,01\,mm$ võrra, mida nimetame jaotise hinnaks. Täismillimeetrid loeme allpool, poolmillimeetrid ülalpool võllil asuva skaala rõhtjoont. Täis- või poolmillimeetrist üleulatuva osa loeme trumlilt. Kruvi ja klambri kokkupuutel nihkub trumli nullpunkt kõrgemale võllil asuva skaala nulljoonest, seega nullpunkti parandus $d > 0$.

---

1) Arvu π relatiivse vea $\frac{\Delta\pi}{\pi}$ võtame selliste kohtade arvuga pärast koma, et selle liitmisel ei muutuks relatiivse vea esimene kehtiv number pärast nulle. EG p.3 tabeli kohaselt $\frac{\Delta\pi}{\pi} = 0,00053$ ja vastavalt sellele $\pi = 3,14$

2) Absoluutse vea kirjutame 2 kehtiva numbriga, kuna see on vahepealne resultaat (arvutatakse veel erikaal).

Jrk. nr.	Nullpunkt mm	$\delta \cdot 10^2$	Traadi diam. ϕ D mm	$\delta \cdot 10^3$	$\Delta 10^3$	$\Delta^2 10^6$
1	+0,007	-	0,290	5	+6	36
2	7	-	,297	12	-1	1
3	7	-	,307	22	-11	121
4	7	-	,295	10	+1	1
5	7	-	,292	7	+4	16
6			,303	18	-7	49
7			,296	11	0	0
8			,293	8	+3	9
9			,285	0	+11	121
10			,299	14	-3	9
Aritm. keskm.	+0,007		0,296	107	+25 -22	363

Diameeter $D = 0{,}285 + \frac{107 \cdot 10^{-3}}{10} =$
$= 0{,}285 + 0{,}011 = 0{,}296$ mm

Diameeter ühes nulltäpi parandusega

$D = 0{,}296 + 0{,}007 = 0{,}303$ mm

Hälbed aritmeetilise keskmise suhtes ulatuvad kuni 0,01 mm ja ületavad riista vea $\Delta M = 0{,}004$ mm.

Seetõttu arvutame aritmeetilise keskmise ruutvea

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{363 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 9}} = \frac{10^{-3}}{3}\sqrt{36{,}3} = 0{,}002 \text{ mm}$$

Diameetri absoluutne viga

$$\Delta D = 3\sigma_D + \Delta M = 3 \cdot 0{,}002 + 0{,}004 = 0{,}010 \text{ mm}$$

Diameeter

$$D = (0{,}303 \pm 0{,}010) \text{ mm} = (0{,}0303 \pm 0{,}0010) \text{ cm}$$

Traadikera kaal tehnilistel kaaludel $P = (3{,}82 \pm 0{,}005)$ G

Kuna traadi ruumala $\frac{\pi D^2 l}{4}$ korrutatud erikaaluga ε annab kaalu P, siis $\frac{\pi D^2 l \varepsilon}{4} = P$, kust traadi pikkus $l = \frac{4P}{\pi D^2 \varepsilon}$

$$l = \frac{4 \cdot 3{,}82 \text{ G}}{3{,}14 (30{,}3 \cdot 10^{-3})^2 \text{cm}^2 \, 8{,}4 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}} = \frac{3{,}82}{3{,}14 \cdot 918 \cdot 10^{-6} \, 2{,}1} \text{ cm} = \frac{3{,}82 \cdot 10^6}{288 \cdot 10 \cdot 21} \text{ cm} =$$

$$= \frac{3{,}82 \cdot 10^6}{605 \cdot 10} \text{ cm} = \underline{631 \text{ cm}}.$$

Relatiivne viga

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta P}{P} + 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\Delta \pi}{\pi} = \frac{0{,}005}{3{,}8} + 2\frac{0{,}0010}{0{,}03} + \frac{0{,}05}{8{,}4} + \frac{\Delta \pi}{\pi} =$$

$$= 0{,}0013 + 0{,}07 + 0{,}006 + \frac{\Delta \pi}{\pi} = 0{,}0773 + 0{,}00053 = 0{,}078$$

Absoluutne viga $\Delta l = 64 \cdot 10 \cdot 0{,}078 = 50$ cm [1]

Traadi pikkus $l = (631 \pm 50) \text{ cm} \simeq (630 \pm 50) \text{ cm}$ [2]

$$\underline{E_l = 0{,}078 = 7{,}8\,\%}$$

---

[1] Vea arvutamisel arv 631 ümardatakse üles kahe kehtiva koha peale, s.o. 64.10

[2] Lõppresultaat 631 ümardatakse alla 630 peale.

2. näidistöö.

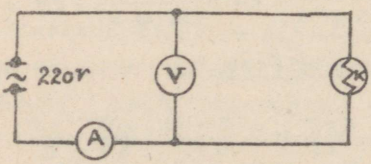
TRÜ ÜLDFÜÜSIKA KATEEDER

Praktilise töö aruanne

nr. 7.....

Nimi ja eesnimi: Heinla, Väino	Matr. nr.: 61324	Töö tehtud: "10." veebruaril 1961.a.
Teadusk., osakond: Matem.-Loodus. bioloogia	Kursus: I	Aruanne esitatud: "17." veebruaril 1961.a.
Praktikumi juhendaja: ass. Ü. Rannaste	Rühm: II	Kontrollinud: .... Hinne: .....
TÖÖ PEALKIRI: № 93	Elektrienergia hulga ja kasuteguri määramine	
Katsetatavad esemed: Elektrikeetja	Kasutatud riistade nimetused, nr.nr. ja andmed: 1. Elektrikeetja inv. nr. 61723 2. Ampermeeter nr. 2764, täpsusklass 2.5, skaala 5A. 3. Voltmeeter nr. 235A, " —" — " 2.5, " — " 250V 4. Mõõtesilinder 250 cm³, vähim jaotiste vahe 25 cm³. 5. Termomeeter, jaotise hind 1°C. 6. Sekundomeeter, 3. klass.	

KATSEKORRALDUSE SKEEM , LÜLITUSSKEEM



A - ampermeeter

V - voltmeeter

K - elektrikeetja.

1. Töö ülesanne.

Määrata vee soojendamisel elektrikeetjaga:

a. Kogu tarvitatud elektrienergia ja selle hind, kui 1 kwh maksab 4 kop.

b. Elektrikeetjas leiduva vee temperatuuri tõstmiseks kulunud elektrienergia (kasulik töö).

c. Kulutatud ja tarvitatud elektrienergia suhe, s.o. kasutegur.

2. Töö käik.

a. Kogu tarvitatud elektrienergia kWh-des

$$A = Nt = 0{,}001\, UJt,$$

kus N-võimsus kW-des, U-pinge voltides (0,001U kilovoltides), J-voolutugevus amprites, t-keetmise aeg tundides.

Sama elektrienergia kalorites on Joule-Lenzi seaduse p.

$$Q = cUJt,$$

kus U-pinge voltides, J-voolutugevus amprites, t-aeg sekundites, $c = (0{,}24 \pm 0{,}005)\,\frac{cal}{J}$ on töö termiline ekvivalent.

b. Vee soojendamiseks kulunud energia, s.o. soojushulk

$$q = c_1 \cdot m \cdot (\tau_2 - \tau_1),$$

kus c_1-vee erisoojus, m-vee mass grammides, τ_1-vee algtemperatuur ja τ_2-vee lõpptemperatuur.

c. Kasutegur $\eta = \frac{q \cdot 100}{Q}$ %

d. Töö sooritan järjekorras:

1) mõõdan mõõtsilindriga keedunõusse 150 cm^3 vett;

2) koostan vooluringi;

3) määran vee algtemperatuuri elektrikeetjas ja voolu lülitamise hetkel käivitan sekundomeetti;

4. Katse kestel registreerin ampermeetri ja voltmeetri lugemid iga minuti järgi;

5. Katse kestel segan korralikult vett, vee temperatuuri tõusul üle 85°C katkestan voolu, seisatan sekundomeetri käigu, registreerin tema lugemi ja elektrikeetjas asuva termomeetri lugemi.

6. Vaatlus- ja arvutustulemuste tabel

U	217	215	216	216	217	217	217	217	216	216	$215+1=216\ V$
δ	2	-	1	1	2	2	2	2	1	1	$\frac{14}{10}=1{,}4\simeq 1$
I	2,70	2,70	2,69	2,69	2,69	2,69	2,70	2,70	2,69	2,69	$2{,}69+0=2{,}69\ A$
$\delta\cdot 10^2$	1	1	-	-	-	-	1	1	-	-	$\frac{4\cdot 10^{-2}}{10}=0{,}004\simeq 0$

Voltmeetri lugemi viga (klass 2,5, skaala 250 V): $0{,}025\cdot 250=6{,}25\simeq 7\ V$

Ampermeetri " —"— (" —" 2,5, " —" 5 A): $0{,}025\cdot 5=0{,}125\simeq 0{,}13\ A$

Tabelist on näha, et voltmeetri ja ampermeetri lugemite hälbed aritmeetilise keskmise suhtes 1 V ja 0,01 A on väiksemad, kui mõõduriistade lugemite vead 7 V ja 0,13 A. Seetõttu tuleb võtta aritmeetilise keskmise vea asemel mõõduriista viga s.o. $U=(216\pm 7)\ V$ ja $I=(2{,}69\pm 0{,}13)\ A$

Vee soojendamise aeg $t=8\,m\ 30\,s\pm 2\,s=(510\pm 2)\,s=(0{,}125\pm 0{,}0005)\,h$, [1]

Vee mass elektrikeetjas $m=(750\pm 6)\,g$, [1]

" algtemperatuur $\tau_1=(19{,}1\pm 1{,}0)\,°C$ [1]

" lõpptemperatuur $\tau_2=(86{,}2\pm 1{,}0)\,°C$ [1]

" temperatuuri tõus $\tau_2-\tau_1=86{,}2-19{,}1=67{,}1\,°C$ veaga $1{,}0+1{,}0=2{,}0\,°C$

Kogu tarvitatud elektrienergia

$$A=0{,}001\cdot 216\,V\cdot 2{,}69\,A\cdot 0{,}125\,h=0{,}5810\cdot 0{,}125\,kWh=0{,}0726\,kWh$$

Relatiivne viga

$$\frac{\Delta A}{A}=\frac{7}{216}+\frac{0{,}13}{2{,}69}+\frac{0{,}0005}{0{,}125}=0{,}033+0{,}049+0{,}004=0{,}086.$$

Absoluutne viga

$$\Delta A=0{,}073\cdot 0{,}086=0{,}0063\simeq 0{,}007\ kWh$$

$$\underline{A=(0{,}073\pm 0{,}007)\ kWh}$$

---

[1] Vt. §8. Instrumendivigade tabelid: sekundomeetrite vead (p. 6. 3. klass), mõõtesilindrite vead (p. 7, maht 250 cm³, 3 korda mõõdetud) ja tehniliste termomeetrite vead (p. 5. jaotise hind 1°C).

Elektrienergia hind

$$\underline{H = 0{,}073 \cdot 4 = 0{,}3 \text{ kop.}}$$

Sama elektrienergia kalorites

$$Q = 0{,}24 \frac{cal}{J}\ 216 V \cdot 2{,}69 A\ 510 \text{ sek} = 51{,}8 \cdot 1370 \frac{cal}{J} W\text{sek} = 70970 \frac{cal}{J} J = 71 \cdot 10^3 cal.$$

Relatiivne viga

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{0{,}005}{0{,}24} + \frac{7}{216} + \frac{0{,}13}{2{,}69} + \frac{2}{510} = 0{,}021 + 0{,}033 + 0{,}049 + 0{,}004 = 0{,}107 \simeq 0{,}11$$

Absoluutne viga $\Delta Q = 71 \cdot 10^3\ 0{,}11 = 781 = 800 cal.$ $\underline{Q = (71000 \pm 800)\ cal.}$

Vee soojendamiseks kulunud soojushulk

$$q = 1 \frac{cal}{g\,kr} \cdot 750 g \cdot 67{,}1 kr = 503 \cdot 10^2 cal.$$

Relatiivne viga

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{0{,}0009}{0{,}9991} + \frac{6}{750} + \frac{2}{67} = 0{,}0009 + 0{,}008 + 0{,}03 = 0{,}0389 \simeq 0{,}04 \quad ^{1)}$$

Absoluutne viga

$$\Delta q = 51 \cdot 10^3 \cdot 0{,}04 = 2040 cal \simeq 2100 cal.$$

$$\underline{q = (50300 \pm 2100)\ cal.}$$

Kasutegur $\quad \eta = \dfrac{503 \cdot 10^2}{71 \cdot 10^3} = 0{,}71 = 71 \%$

Relatiivne viga $\quad \dfrac{\Delta \eta}{\eta} = \dfrac{\Delta Q}{Q} + \dfrac{\Delta q}{q} = 0{,}11 + 0{,}04 = 0{,}15.$

Absoluutne viga $\quad \Delta \eta = 0{,}71 \cdot 0{,}15 = 0{,}1065 = 0{,}11$

Kasutegur $\quad \underline{\eta = 0{,}71 \pm 0{,}11 = (71 \pm 11)\ \%}$

$$E_\eta = 0{,}15 = 15 \%$$

---

1) Vee keskmine erisoojus 20°–90°C on tabeli põhjal (В.И. Иверонова, Физический практикум, 1953, lk. 594) $c_1 = 0{,}9991 \frac{cal}{g\,kr}$, seega absoluutne viga $\Delta c_1 = 0{,}0009 \frac{cal}{g\,kr}$, relatiivne viga $\frac{\Delta c_1}{c_1} = \frac{0{,}0009}{0{,}9991} = 0{,}0009$

Temperatuuri vahemik	Vee keskm. erisoojus	Temperatuuri vahemik	Vee keskm. erisoojus	Temperatuuri vahemik	Vee keskm. erisoojus
20°–70°C	0,9981	20°–85°C	0,9988	20°–100°C	0,9997
20°–75°C	0,9984	20°–90°C	0,9991		
20°–80°C	0,9986	20°–95°C	0,9994		

S I S U K O R D

Hind 9 kop.