

N. Rõbkin

TRIGONOMEETRIA

ÜLESANNETE KOGU

IX-XI
KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

A-216017

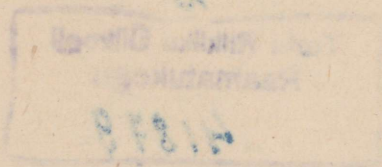
N. RÕBKIN

TRIGONOMEETRIA

ÜLESANNETE KOGU

ÜHES TRIGONOMEETRIA RAKENDAMIST
NÕUDVATE GEOMEETRIA
ÜLESANNETEGA

KESKKOOLI IX—XI KLASSILE



ARHIIVKOGU



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1957

Originaali tiitel: Н. Рыбкин. Сборник задач по тригонометрии
с приложением задач по геометрии, требующих
применения тригонометрии.

Для 8, 9 и 10 классов средней школы.

Утверждён Министерством просвещения РСФСР.
Учпедгиз 1956.

Tõlge kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.



ARHIIVKOGU

ESIMENE OSA.

TRIGONOMEETRIA.

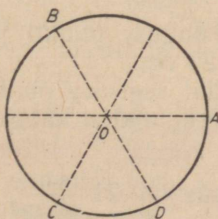
§ 1. Kaarte ja nurkade mõõtmine.

Nurga ja kaare mõistete üldistamine.

1. Kui suure nurga võrra pöördu 4 tunni jooksul kella tunni- osuti? minutiosuti?

2. Masinaratas teeb 2 sekundis 6 tiiru. Mitme kraadi võrra pöördu ratas 1 sekundis? 10 sekundis?

3. Hammasrattal on 72 hammast. Mitme kraadi võrra pöördu ratas, kui ta pöördu 1; 30; 144; 300 hamba võrra?



Joon. 1.

4. Joonestada liikuva raadiuse asend, kui nurk on: $+45^\circ$; -30° ; $+225^\circ$; -135° ; -90° ; $+450^\circ$; -810° ; $+2070^\circ$. Missuguste antud nurkade liikuvad raadiused ühtivad üksteisega?

5. Väljendada kraadides kaarte summa: $\cup ABCAB + \cup BAC + \cup CDA$ (joon. 1).

6. Anda nende nurkade üldavaldis, mille liikuv raadius on asendis: 1) OB ; 2) OD (joon. 1), ja leida nende nurkade mõned eriväärtused.

Radiaanmõõt.

7. 1) Ringi raadius on 5 cm. Arvutada 18° -se kaare pikkus.

2) Avaldada α° -se kaare pikkus, kui ringi raadius on R .

8. 1) Arvu π abil väljendada radiaanides järgmised kaared: a) 30° ; b) 45° ; c) 60° ; d) 135° ; e) 15° ; f) $22^\circ 30'$; g) 36° ; h) 75° ; i) 108° ; k) 150° ; l) $157^\circ 30'$; m) 162° .

2) Väljendada radiaanides: a) 51° ; b) 27° ; c) $76^\circ 30'$; d) $12^\circ 30'$; e) $28^\circ 42'$; f) $73^\circ 21'$; g) 117° ; h) $216^\circ 13'$ ($\pi \approx 3,14159$).

3) Väljendada radiaanides korrapärase kolmnurga, nelinurga, viisnurga, kuusnurga ja n -nurga sisenurk.

9. 1) Väljendada kraadides ja minutites nurgad, mille suurused on 1,5; 2; 0,75 radiaani ($\pi \approx 3,14159$), ja samuti $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2}{3}\pi$; $1\frac{1}{2}\pi$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3}{4}\pi$; $1\frac{1}{5}\pi$ radiaani.

2) Väljendada (tabelite abil) kraadimõõdus nurgad, mille radiaanmõõt on 0,6981; 1,3090; 0,2356; 1,0071; 3,8048; 0,48; 1,3; 0,8.

Nurkkiirus.

10. Ratas, mille raadius on 1,2 m, teeb minutis 300 tiiru.

1) Leida ratta nurkkiirus ω (nurkkiirust väljendatakse ühikuis $\frac{\text{radiaan}}{\text{sekund}}$).

2) Leida ratta niisuguse punkti joonkiirus, mille kaugus keskpunktist on 20 cm.

3) Leida ratta põial asetseva punkti joonkiirus.

4) Tõestada, et keskpunktist kaugusel r asetseva punkti joonkiirus on $r\omega$.

11. Võlli nurkkiirus on $21 \frac{\text{radiaan}}{\text{sekund}}$. Arvutada võlli tiirude arv minutis.

§ 2. Trigonomeetriliste funktsioonide muutumine nurga muutumisel.

1. Missuguses veerandis on kõik trigonomeetrilised funktsioonid positiivsed? Kas on olemas veerandit, milles kõik funktsioonid on negatiivsed?

2. Missugused kolmnurga nurga trigonomeetrilised funktsioonid võivad olla negatiivsed ja nimelt millal?

3. Missugused märgid on kolmnurga poole nurga trigonomeetrilistel funktsioonidel?

4. Missuguses vahemikus muutub avaldise $1 + \sin x$ väärtus?

5. Missugused järgmistest võrdustest on võimalikud:

1) $\sin a = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{1}{2}(a+b)}$; 2) $\cos \beta = a + \frac{1}{a}$; 3) $\sec a = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$?

6. Kas murd $\frac{\cos x}{\sec x}$ võib olla negatiivne?

Lihtsustada avaldised ülesandeis 7—13:

7. $a \cdot \sin 0^\circ + b \cdot \cos 90^\circ + c \cdot \tan 180^\circ$.

8. $a \cdot \tan 0^\circ + b \cdot \cot 90^\circ + c \cdot \sec 0^\circ$.

9. $a \cdot \cos 0^\circ + b \cdot \cos 180^\circ + c \cdot \cos 360^\circ$.

10. $a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 2ab \cdot \sec \pi - b^2 \cdot \sin \frac{3}{2} \pi$.

11. $a^2 \cdot \operatorname{cosec} 90^\circ - 2ab \cdot \sin 180^\circ + b^2 \cdot \operatorname{cosec} 270^\circ$.

12. $a^2 \cdot \sin 2\pi + 2ab \cdot \cos \frac{3}{2} \pi + b^2 \cdot \tan 2\pi$.

13. $a^3 \cdot \cot 270^\circ + b^3 \cdot \tan 90^\circ$.

14. Ringis, mille raadius on 5 cm, ehitada nurgad 30° ; 120° ; 225° ; -30° ; -120° ; -560° ja nende nurkade neli trigonomeetrilist lõiku. Mõõtnud trigonomeetrilised lõigud veega mitte üle 1 mm, arvutada järgmiste funktsioonide väärtused (täpsusega kuni 0,1):

1) $\tan 30^\circ$; 2) $\cos 120^\circ$; 3) $\sin 225^\circ$; 4) $\cos (-30^\circ)$;
5) $\tan (-120^\circ)$; 6) $\cot (-560^\circ)$.

15. Määrata iga järgmise vahe märk:

1) $\sin 20^\circ - \sin 21^\circ$; 2) $\cos 20^\circ - \cos 21^\circ$; 3) $\tan 20^\circ - \tan 21^\circ$; 4) $\cot 20^\circ - \cot 21^\circ$; 5) $\cos 20^\circ - \cos 120^\circ$;
6) $\sin 120^\circ - \sin 240^\circ$; 7) $\tan 120^\circ - \tan 40^\circ$; 8) $\cot 30^\circ - \cot 130^\circ$.

16. Missugusel funktsioonil igas järgmises paaris on suurem väärtus: 1) $\sin 20^\circ$ või $\cos 20^\circ$? 2) $\sin 50^\circ$ või $\cos 50^\circ$? 3) $\tan 40^\circ$ või $\cot 40^\circ$? 4) $\tan 50^\circ$ või $\cot 50^\circ$?

Nurkade ehitamine
ja arvutamine.

17. Ehitada nurgad, mille siinused on: 1) 0,6; 2) $-\frac{1}{2}$. Leida nurkade suurused täpsusega kuni 1° .

18. Ehitada nurgad, mille koosinused on: 1) $\frac{2}{3}$; 2) $-0,4$.

19. Ehitada nurgad, mille tangensid on: 1) 1,5; 2) -1 .

20. Ehitada nurgad, mille kootangensid on: 1) -2 ; 2) 1.

21. Nurga antud üldavaldise järgi kirjutada tema positiivsed eriväärtused, mis on väiksemad kui 360° (2π):

- 1) $x = 15^\circ + n \cdot 120^\circ$; 2) $x = -60^\circ + n \cdot 360^\circ$;
 3) $x = -10^\circ + n \cdot 60^\circ$; 4) $x = \pm 120^\circ + n \cdot 720^\circ$;
 5) $x = \pm \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$; 6) $x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$;
 7) $x = (-1)^n \cdot 45^\circ + n \cdot 180^\circ$; 8) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} \pm n \cdot \pi$.

22. Kirjutada järgmiste võrrandite üldlahendid, leides nurgad ehitamise ja mõõtmise teel (täpsusega kuni 1°):

- 1) $\tan x = 2,6$; 2) $\tan x = -0,8$; 3) $\cos x = 0,9$;
 4) $\cos x = -\frac{2}{3}$; 5) $\sin x = 0,25$; 6) $\sin x = -\frac{5}{7}$.

Ülesandeis 23—31 arvutada võrrandis esineva trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ja ehitada nurgad.

23. $\sin^2 x - 3 = 2 \sin x$. 24. $\cos^2 x + \cos x = 1$.
 25. $6 \sin^4 x = 1 - \sin^2 x$. 26. $\sin^2 x = 2 \sin x$.
 27. $\tan^2 x = 2 \tan x$. 28. $\sec^2 x = 2 \sec x$.
 29. $\cot^3 x + 4 \cot x = 0$. 30. $\frac{2}{1 + \tan x} = 0$.
 31. $(\cos x - 2) \cdot (2 \operatorname{cosec} x + 1) = 0$.

Tsüklomeetrilised funktsioonid.

32. Järgmistest võrrandeist avaldada x tsüklomeetriliste funktsioonide kaudu: 1) $\tan x = m$; 2) $\cos x = m$; 3) $\sin x = m$. Missugused on arvu m võimalikud väärtused igas eelmises võrrandis?

33. Kirjutada ümber järgmised võrdused tsüklomeetriliste funktsioonide abil:

- 1) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; 2) $\sin (-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 3) $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos 90^\circ = 0$;
 5) $\tan \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$; 6) $\tan 0^\circ = 0$;
 7) $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$; 8) $\cot 45^\circ = 1$;

9) $\sin x = 0,23$;

10) $\cos x = 0,5762$;

11) $\tan x = 0,468$;

12) $\cot x = 1,237$.

34. Kasutades tabelleid väljendada kraadides ja radiaanides: 1) $\arcsin 0,7314$; 2) $\arccos 0,3987$; 3) $\arctan 3,677$ ja 4) $\text{arc cot } 0,5117$.

35. Järgmistest võrrandeist leida x :

1) $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; 3) $\arctan x = \frac{\pi}{3}$;

4) $\arcsin \frac{x}{3} = a$; 5) $\arccos \frac{x}{a} = \frac{b}{c}$; 6) $\arctan \frac{1}{x} = a$.

36. Ehitada:

1) $\arcsin 0,8$;

2) $\arcsin \left(-\frac{1}{3}\right)$;

3) $\arccos \frac{2}{3}$;

4) $\arccos (-0,75)$;

5) $\arctan \frac{1}{2}$;

6) $\arctan (-1,5)$;

7) $\arctan 1,2$;

8) $\text{arc cot } (-0,6)$;

9) $\text{arc sec } 1\frac{1}{2}$;

10) $\text{arc cosec } (-2)$.

§ 3. Ühe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed.

Avaldada nurga a trigonomeetrilised funktsioonid:

1. $\sin a$ kaudu.

2. $\cos a$ kaudu.

3. $\tan a$ kaudu.

4. $\cot a$ kaudu.

Leida nurga a trigonomeetrilised funktsioonid, kui:

5. $\sin a = 0,8$.

6. $\sin a = -0,3$.

7. $\cos a = \frac{2}{3}$.

8. $\cos a = -\frac{3}{5}$.

9. $\tan a = \sqrt{5}$.

10. $\tan a = -\frac{9}{40}$.

11. $\cot a = \frac{8}{15}$.

12. $\cot a = -3$.

13. $\sec a = 3$.

14. $\sec a = -1\frac{9}{20}$.

15. $\text{cosec } a = 2,6$.

16. $\text{cosec } a = -\sqrt{3}$.

Oletades, et $0 < b < a$, leida nurga α trigonomeetrilised funktsioonid ülesannete 17—19 andmeil:

$$17. \sin \alpha = \frac{a-b}{a+b}. \quad 18. \cos \alpha = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}. \quad 19. \tan \alpha = \frac{a}{b}.$$

Leida nurga α trigonomeetrilised funktsioonid, kui:

$$20. \alpha \text{ on positiivne teravnurk ja } \tan \alpha = 4\frac{19}{20}.$$

$$21. \alpha \text{ on kolmnurga nurk ja } \cos \alpha = -0,28.$$

$$22. \alpha \text{ on III veerandi nurk ja } \sin \alpha = -\frac{12}{13}.$$

$$23. \alpha \text{ on IV veerandi nurk ja } \cot \alpha = -1,05.$$

Lihtsustada avaldised ülesandeis 24—52.

$$24. 1 - \sin^2 \alpha. \quad 25. 1 - \cos^2 \alpha.$$

$$26. \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad 27. \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - 1}.$$

$$28. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha. \quad 29. \sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

$$30. \text{ a) } \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}; \quad 31. \text{ a) } \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\text{ b) } \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}. \quad \text{ b) } \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - 1}.$$

$$32. \sin \alpha \cdot \cot \alpha. \quad 33. \cos \alpha \cdot \tan \alpha.$$

$$34. \tan \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha. \quad 35. \sin \alpha \cdot \sec \alpha.$$

$$36. \cos \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha. \quad 37. \cot \alpha \cdot \sec \alpha.$$

$$38. \sin \alpha : \tan \alpha. \quad 39. \tan \alpha : \cot \alpha.$$

$$40. 1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha. \quad 41. 1 - \sin^2 \alpha + \cot^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha.$$

$$42. (1 + \tan^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha.$$

$$43. (\tan \alpha \cdot \cos \alpha)^2 + (\cot \alpha \cdot \sin \alpha)^2.$$

$$44. (\tan \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha)^2 - 1.$$

$$45. \sin^2 \alpha \cdot \sec^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha.$$

$$46. \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \cdot \tan \alpha \cdot \cot \beta + 1.$$

$$47. \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta + 1.$$

$$48. \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot \cot \alpha.$$

$$49. \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha}.$$

50. $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$.
51. $(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - (\tan \alpha - \cot \alpha)^2$.
52. $\frac{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}$.
53. $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ avaldada: a) $\sin \alpha$ kaudu ja b) $\cos \alpha$ kaudu.
54. $\tan \alpha + \cot \alpha$ avaldada $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ kaudu.
55. $\frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha}$ avaldada $\tan \alpha$ kaudu.
56. $\frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ avaldada $\cot \alpha$ kaudu.
57. $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ avaldada: a) $\tan \alpha$ kaudu ja b) $\cot \alpha$ kaudu.
58. $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ avaldada: a) $\tan \alpha$ kaudu ja b) $\cot \alpha$ kaudu.
59. $\sec \alpha$ avaldada $\cot \alpha$ kaudu, kui α on IV veerandi nurk.
60. Arvutada $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, kui $\tan \alpha = \frac{5}{4}$.
61. Leida $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, kui $\sin \alpha + \cos \alpha = m$.
62. Leida $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ ja $\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$, kui $\tan \alpha + \cot \alpha = m$.
- Tõestada samasused ülesandeis 63—92.
63. $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.
64. $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$.
65. $\frac{\sec \alpha - 1}{\tan \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sec \alpha + 1}$.
66. $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$.
67. $\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha = \sec^2 \alpha - \operatorname{cosec}^2 \alpha$.
68. $\frac{\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha$.
69. $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \cdot \tan \beta$.

70. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$
71. $\frac{\sin \alpha + \cot \alpha}{\tan \alpha + \operatorname{cosec} \alpha} = \sin \alpha \cdot \cot \alpha.$
72. $\frac{\sec \alpha \cdot \cot \alpha - \operatorname{cosec} \alpha \cdot \tan \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha.$
73. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha}{\sec \alpha - \operatorname{cosec} \alpha}.$
74. $\frac{1 + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \sec \alpha}{1 + \operatorname{cosec} \alpha} = \tan \alpha.$
75. $\frac{1 - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \sec \alpha}{1 + \operatorname{cosec} \alpha} = \cot^3 \alpha.$
76. $\frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \frac{\cot^2 \alpha - 1}{\cot \alpha} = 1.$
77. $\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = 1.$
78. $\frac{\sin^2 \alpha}{\sec^2 \alpha - 1} + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1} = 1.$
79. $\operatorname{cosec} \alpha - \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \cot \alpha.$
80. $\tan \alpha + \cot \alpha = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha.$
81. $\sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha.$
82. $\sec^2 \alpha (\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1) = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$
83. $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \tan \alpha = (1 + \cos \alpha)(1 + \tan \alpha).$
84. $(\sin \alpha - \operatorname{cosec} \alpha)(\cos \alpha - \sec \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$
85. $(\sin \alpha + \tan \alpha)(\cos \alpha + \cot \alpha) =$
 $= (1 + \sin \alpha)(1 + \cos \alpha).$
86. $\sin \alpha (1 + \tan \alpha) + \cos \alpha (1 + \cot \alpha) =$
 $= \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha.$
87. $\sin^3 \alpha (1 + \cot \alpha) + \cos^3 \alpha (1 + \tan \alpha) =$
 $= \sin \alpha + \cos \alpha.$
88. $\tan^3 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha - \operatorname{cosec} \alpha \cdot \sec \alpha + \cot^3 \alpha \cdot \sec^2 \alpha =$
 $= \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha.$
89. $\sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2.$
90. $\left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha + \cot \alpha} \right)^2 = \frac{\sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \cot^2 \alpha}.$
91. $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha.$
92. $\left(\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} \right)^2 = 4 \tan^2 \alpha.$

Lahendada võrrandid 93—113. Ehitanud võrrandist leitud funktsiooni väärtuse järgi nurga ja määrtanud selle malliga (täpsusega kuni 1°), anda vastus üldkujul.

93. $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x$.
94. $\sin x \cdot \tan x = \frac{3}{2}$.
95. $\sin x = \cot x$.
96. $\cos x - 1 + 2 \sin x \cdot \tan x = 0$.
97. $\sin^2 x + \cos x = 0$.
98. $\sec x = \tan^2 x$.
99. $2 \cos^2 x = 3 \sin x + 2$.
100. $\tan x - \cot x = \frac{3}{2}$.
101. $\cos x = 2 \tan x$.
102. $\operatorname{cosec} x - \sin x = \frac{1}{2} \cot x$.
103. $2 \tan x = -3 \operatorname{cosec} x$.
104. $2 \sec x = \operatorname{cosec} x$.
105. $2 \cos^2 x + 4 \sin^2 x = 3$.
106. $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$.
107. $\sin^4 x - \cos^4 x = 0,5$.
108. $1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x = 0$.

Lahendada siinuse ja koosinuse suhtes homogeensed või sellisteks taanduvad võrrandid:

109. $\sin x = \cos x$.
110. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$.
111. $3 \sin^2 x = \cos^2 x$.
112. $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x$.
113. $1 - 3 \cos^2 x = 2 \sin x \cos x$.

§ 4. Täiendus- ja kõrvunurkade funktsioonid.

1. Taandada 45° -st väiksemale nurgale:
- | | |
|--------------------------|-------------------------------|
| 1) $\sin 73^\circ$; | 3) $\tan 69^\circ 25' 40''$; |
| 2) $\cos 80^\circ 40'$; | 4) $\cot 59^\circ 59'$. |

2. Taandada teravnurga samanimelisteks funktsioonideks:

- 1) $\sin 112^\circ 20'$; 3) $\tan 108^\circ 48' 36''$;
2) $\cos 99^\circ 25' 35''$; 4) $\cot 140^\circ 40'$.

3. Taandada 45° -st väiksemale nurgale:

- 1) $\sin 121^\circ 40'$; 5) $\tan 160^\circ 27' 32''$;
2) $\sin 163^\circ 35'$; 6) $\tan 106^\circ 32'$;
3) $\cos 158^\circ 17'$; 7) $\cot 120^\circ 28' 40''$;
4) $\cos 98^\circ 21'$; 8) $\cot 140^\circ 42'$.

Lihtsustada avaldised:

4. $\frac{\tan(180^\circ - \alpha)}{\cot(90^\circ - \alpha)}$.

5. $\frac{\cos^2(90^\circ - \alpha) - 1}{\cos(180^\circ - \alpha)}$.

6. $\sin(\pi - \alpha) \cdot \cot(\pi - \alpha)$.

7. $\frac{\tan(\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$.

8. $\sin(90^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ + \alpha) + 2 \cos(180^\circ - \alpha)$.

9. $\cos(90^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha)$.

10. $\tan 43^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 47^\circ$.

11. $\cos(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ + \alpha) \cdot \tan(180^\circ - \alpha) \cdot \cot(90^\circ + \alpha)$.

12. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cot(\pi - \alpha) + \cot(\pi - \alpha) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

13. $\frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \tan(\pi - \alpha)}{\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi - \alpha)}$.

14. $\frac{\tan(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \tan(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \cot(90^\circ + \alpha) \tan(90^\circ + \alpha)}$.

15. Tõestada, et $\sin(45^\circ + \alpha) = \cos(45^\circ - \alpha)$;
 $\cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha)$ jne.

§ 5. Trigonomeetriliste funktsioonide tabelid.

Trigonomeetriliste funktsioonide tabelite abil leida järgmistele funktsioonide arvulised väärtused:

1. 1) $\sin 15^\circ$; 2) $\sin 45^\circ$; 3) $\sin 60^\circ$;
4) $\sin 73^\circ$; 5) $\sin 38^\circ 30'$; 6) $\sin 69^\circ 24'$;
7) $\sin 11^\circ 50'$; 8) $\sin 87^\circ 10'$.

2. 1) $\tan 20^\circ$; 2) $\tan 45^\circ$; 3) $\tan 85^\circ$;
 4) $\tan 72^\circ 30'$; 5) $\tan 17^\circ 42'$; 6) $\tan 53^\circ 13'$;
 7) $\tan 20^\circ 48'$; 8) $\tan 83^\circ 07'$; 9) $\tan 85^\circ 28'$;
 10) $\tan 88^\circ 30'$; 11) $\tan 89^\circ 48'$; 12) $\tan 89^\circ 59'$.
3. 1) $\cos 65^\circ$; 2) $\cos 45^\circ$; 3) $\cos 30^\circ$;
 4) $\cos 73^\circ$; 5) $\cos 38^\circ 30'$; 6) $\cos 20^\circ 24'$;
 7) $\cos 61^\circ 10'$; 8) $\cos 78^\circ 46'$; 9) $\cos 2^\circ 52'$;
 10) $\cos 1^\circ 20'$.
4. 1) $\cot 20^\circ$; 2) $\cot 45^\circ$; 3) $\cot 37^\circ 30'$;
 4) $\cot 71^\circ 24'$; 5) $\cot 69^\circ 13'$; 6) $\cot 19^\circ 37'$;
 7) $\cot 88^\circ 15'$; 8) $\cot 5^\circ$; 9) $\cot 2^\circ 27'$;
 10) $\cot 90^\circ$; 11) $\cot 1^\circ 53'$.

Leida teravnurgad, kui on antud nende funktsioonide väärtused:

5. 1) $\sin \alpha = 0,3420$; 2) $\sin \beta = 0,5948$;
 3) $\sin \gamma = 0,8420$; 4) $\sin x = 0,9293$;
 5) $\sin y = 1,0024$; 6) $\sin z = 0,3932$.
6. 1) $\tan \alpha = 0,4452$; 2) $\tan \beta = 11,43$;
 3) $\tan \gamma = 2,675$; 4) $\tan x = 0,5452$;
 5) $\tan y = 5,558$; 6) $\tan z = 0,5$;
 7) $\tan u = 0,42$; 8) $\tan v = 12,9$;
 9) $\tan \omega = 6,63$.
7. 1) $\cos \alpha = 0,891$; 2) $\cos \beta = 0,910$;
 3) $\cos \gamma = 0,6361$; 4) $\cos x = 1,0008$;
 5) $\cos y = 0,8189$; 6) $\cos z = 0,4485$.
8. 1) $\cot \alpha = 2,747$; 2) $\cot \beta = 0,4142$;
 3) $\cot \gamma = 1,768$; 4) $\cot x = 1,4948$;
 5) $\cot y = 0,6946$; 6) $\cot z = 1,6946$;
 7) $\cot u = 7,115$; 8) $\cot v = 10,23$;
 9) $\cot \omega = 20$.

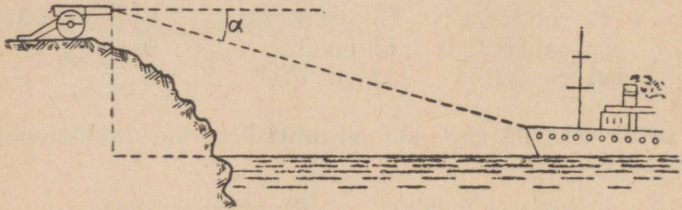
Leida tabelite abil järgmiste nürinurkade funktsioonide väärtused:

9. $\sin 105^\circ$; $\sin 172^\circ 08'$; $\sin 140^\circ 15'$; $\sin 115^\circ 22'$.
 10. $\cos 118^\circ$; $\cos 156^\circ 30'$; $\cos 98^\circ 42'$; $\cos 169^\circ 17'$.
 11. $\tan 121^\circ$; $\tan 160^\circ 24'$; $\tan 101^\circ 41'$; $\tan 147^\circ 39'$.
 12. $\cot 175^\circ$; $\cot 124^\circ 30'$; $\cot 171^\circ 13'$; $\cot 111^\circ 11'$.

§ 6. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine.

T ä h i s t u s i. Täisnurkses kolmnurgas ABC nurk $A = \alpha$, nurk $B = \beta$, nurk $C = 90^\circ$, kaadet $BC = a$, kaadet $AC = b$ ja hüpotenuus $AB = c$.

1. On antud täisnurkne kolmnurk ABC . Arvutada: 1) $\sin \alpha$ ja $\tan \alpha$, kui $a = 48$ cm ja $c = 50$ cm; 2) $\tan \alpha$ ja $\cos \alpha$, kui $a = 15$ m ja $b = 20$ m; 3) $\tan \beta$ ja $\cos \beta$, kui $b = 8,4$ cm ja $c = 8,5$ cm.



Joon. 2.

2. Täisnurkse kolmnurga ABC külgede pikkused sentimeetris väljenduvad arvudega $a = 7\frac{1}{5}$ ja $c = 17$. Arvutada kõik nurga β funktsioonid.

3. Arvutada täisnurkses kolmnurgas ABC : 1) kaadet a , kui on antud hüpotenuus $c = 30,6$ cm ja $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; 2) hüpotenuus c , kui on antud $a = 51$ cm ja $\sin \alpha = 0,75$.

4. Arvutada täisnurkse kolmnurga ABC kaadet a , kui: 1) $b = 14$ m ja $\tan \alpha = 0,72$; 2) $b = 20,4$ dm ja $\tan \alpha = 1,5$.

5. Õhulaev sattus helgiheitja kiirtekimpu, kui helgiheitja telg moodustas rõhttasapinnaga nurga 47° . Samal hetkel oli õhulaeva kaugus helgiheitjast $3,5$ km. Arvutada: 1) õhulaeva kõrgus maapinnast, 2) õhulaeva rõhtne kaugus helgiheitjast (vastuste murdosad ümardada kahekohalisteks).

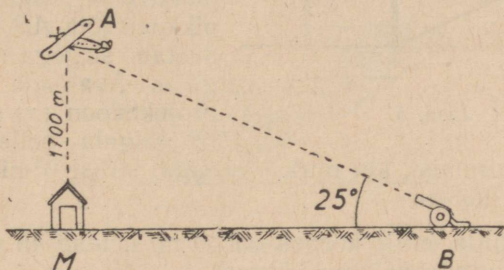
6. Patarei on paigutatud 150 m kõrgusele kaljule. Patareis leiti merel ujuva märgi (joon. 2) alangnurk (α) olevat 9° . Kui suur on märgi kaugus patareist (rõhtsihis)?

7. Kindlusest, mille suurtükid asetsevad 330 m kõrgemal merepinnast, on näha allveelaeva periskoop 1500 m

kaugusel. Leida nurk, mille võrra tuleb pöörata suurtüki-suudmeid rõhtsihist allapoole, et nad oleksid suunatud allveelaevale.

8. Lennukilt signaliseeritakse patareile, et lennuk on parajasti märgi kohal 1700 m kõrgusel (joon. 3). Samal hetkel leiab vaatleja patareis, et lennuki kõrgusnurk on 25° . Arvutada patarei kaugus märgist (rõhtsihis).

9. Jõe laiuse määramiseks võetakse jõe ühel kaldal otsevee lähedal baas AB , mille pikkus on a meetrit. Teisel kaldal vee läheduses kasvav puu C on näha baasi ühest otspunktist suunas, mis on risti baasiga, ja teisest otspunktist suunas, mis moodustab baasiga nurga β . Arvutada jõe laius, kui $a = 42$ ja $\beta = 25^\circ 28'$.



Joon. 3.

10. Punktis, mis asetseb a meetri kaugusel torni jala keskpunktist, on torni tipu kõrgusnurk α . Arvutada torni kõrgus ($a = 86,6$; $\alpha = 22^\circ 17'$).

11. Vaatamisel aknast, mille kõrgus maapinnast $h = 12$ m, on jõekallaste alangnurgad $\alpha_1 = 17^\circ$ ja $\alpha_2 = 45^\circ$. Kummagi nurga tasapind on risti jõe sihiga. Arvutada jõe laius.

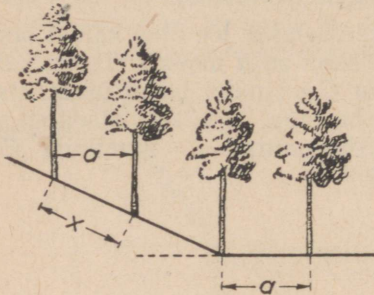
12. Mägiraudtee tõuseb tee pikkuse iga 30 m kohta 1 m võrra. Leida raudtee tõusunurk.

13. Sammunud mäkke 1050 m, oli jalakäija tõusnud 90 m kõrgusele mäejala tasapinnast. Leida mäenõlva keskmine tõusunurk.

14. Nivelleerimisel tehti kindlaks, et ühtlaselt tõusev tänav tõuseb oma pikkuse 728 m kohta 37,4 m võrra. Leida tänava tõusunurk ja rõhtprojektsiooni pikkus.

15. Künkale on püstitatud a meetri pikkune latt. Minigist punktist, mis asetseb künkajala tasapinnal b meetri kaugusel lati ülemisest otsast, on see ots näha rõhttasapinnaga nurgi α . Avaldada ja arvutada künka kõrgus ($a = 2$; $b = 14$; $\alpha = 63^\circ 18'$).

16. Puud kavatsetakse istutada a meetri kaugusele üksteisest. Kui kaugule üksteisest tuleb kaevata augud puude istutamiseks mäenõlval (joon. 4), mille kaldenurk rõhttasapinna suhtes on α ($a = 3,5$; $\alpha = 25^\circ 18'$)?



Joon. 4.

17. Sirgel MN olevast punktist A väljub a meetri pikkune lõik AB , mis moodustab sirgega MN nurga α . Avaldada lõigu AB projektsiooni (x) sirgel MN ja jälgida selle projektsiooni muutumist, kui nurk α muutub 90° -st 0° -ni ja vastupidi: 0° -st 90° -ni.

18. Ehitis, mille kõrgus on 30 m, heidab 45 m pikkuse varju. Arvutada päikese kõrgus.

19. Keskpäeval, kui päikese kõrgus on 28° , heidab vabrikukorsten 76 m pikkuse varju. Arvutada korstna kõrgus.

20. Kui kõrgel on päike, kui: 1) seisva inimese vari on kaks korda lühem kui inimene; 2) vari on kaks korda pikem kui inimene ja 3) vari on $2\frac{1}{2}$ korda pikem kui inimene?

21. Püsti asetseva varda vari on $\frac{1}{n}$ võrra lühem kui varras. Kui kõrgel on päike ($n = 10,5$)?

22. Haubits H , mis 2500 m kauguselt tulistab märki T , sai käsu tuli üle kanda märgist T 1500 m kaugusel asetsevale märgile S . Missuguse nurga võrra peab pöörama suurtükki, kui sirge ST on risti sirgega HT ?

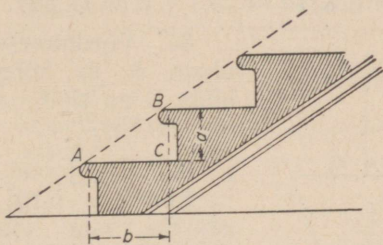
23. Kaks punkti, mis üheaegselt väljuvad täisnurga tipust, liiguvad ühtlaselt: üks mööda täisnurga üht haara, teine mööda teist haara; üks punkt kulgeb a meetrit ja teine

b meetrit sekundis. Kui suuri nurgi φ esimese punkti liikumise suunaga on temast näha teine punkt?

24. Kivist majatrepi (joon. 5) iga käik (s. o. trepi osa kahe platvormi vahel) sisaldab 15 trepiastet. Iga astme laius $b = 27$ cm ja kõrgus $a = 18$ cm. Leida trepi tõusunurk.

25. Majatrepi astme laius on 25 cm. Kui suur peab olema trepiastme kõrgus, et trepi tõusunurk oleks 40° ?

26. Kaks sirget tänavat lõikuvad teineteisega nurgi $51^\circ 50'$. Üks neist on vaja 1625 m kaugusel lõikumiskohast lühimat teed mööda ühendada teisega. Arvutada selle põiktänava pikkus.



Joon. 5.

27. Väljaspool ringjoont, mille keskpunkt on O , asetseva punkti kaugus keskpunktist on $AO = c = 2,53$ m. Punktist A on joonestatud ringjoonele puutuja AC , mis sirgega AO moodustab nurga $\alpha = 38^\circ 46'$. Leida raadiuse (r) ja puutuja lõigu (x) pikkused.

28. Avaldada täisnurkse kolmnurga ümber joonestatud ringjoone raadius, kui kolmnurga kaatet on a desimeetrit ja selle lähisnurk on β .

Täisnurksete kolmnurkade lahendamisele taanduvaid ülesandeid.

29. Joonisel 6 kujutatud võlli koonilise osa moodustaja tõus on 12%, s. o. kõrguse iga 100 mm kohta raadius suureneb 12 mm võrra. Leida moodustaja tõusunurk α ja läbimõõt D ($h = 105$ mm, $d = 80$ mm).

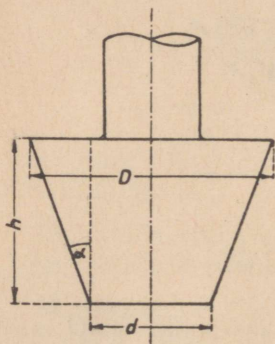
30. Joonisel 6 antud tüvikoonuse põhjade läbimõõdud on d ja D . Koonuse moodustaja tõus on $1 : n$. Leida tüvikoonuse kõrgus h ja moodustaja tõusunurk α ($n = 20$).

31. Raudteetamm, mille kõrgus on 120 m, on alt 360 m ja ülalt 60 m lai. Arvutada tammi nõlva kaldenurk rõhttasapinna suhtes.

32. Raudteetamm on ülalt 60 m ja alt 240 m lai. Tammi nõlvad moodustavad rõhttasapinnaga nurga 35° . Arvutada tammi kõrgus.

33. Võrdhaarse trapetsi kujulise ristlõikega tammi nõlva kaldenurgale on ehitamisel antud suurim võimalik väärtus $\varphi = 39^\circ$. Trapetsi alumine alus $a = 10$ m ja kõrgus $h = 3$ m. Leida trapetsi ülemine alus.

34. Võrdhaarse kolmnurga aluse b ja haara a järgi leida tema alusnurk ($b = 28,13$; $a = 17,53$).



Joon. 6.

35. Võrdhaarse kolmnurga aluse b ja kõrguse h järgi leida tema tipunurk ($b = 31,26$; $h = 20,75$).

36. Ringjoone raadiuse R ja kaare α järgi leida sellele kaarele vastav kõõl ($R = 4,175$; $\alpha = 37^\circ 42'$).

37. Ringis, mille raadius $R = 35,8$ dm, on joonestatud kõõl, mille pikkus $a = 28,7$ dm. Leida kõõlule vastava kaare suurus kraadides ja minutites ning kõõlu kaugus keskpunktist.

38. Kõõlu pikkus on $\frac{3}{4}$ ringi diameetrist. Leida kõõlule vastava kaare suurus kraadides ja minutites.

39. Kõõl jaotab ringjoone kaheks osaks, mis suhtuvad nagu $m : n$. Ringjoone pikkus on c meetrit. Leida kõõlu kaugus keskpunktist ($m : n = 3 : 7$; $c = 120$).

40. Piirdenurk α toetub kõõlule, mille pikkus on a sentimeetrit. Avaldada ringi raadius.

41. On antud kaks jõudu: $P = 4,372$ kG ja $Q = 5,645$ kG, mis on suunatud teineteisega risti. Kui suur on resultant ja kui suure nurga ta moodustab jõuga P ?

42. Võrdhaarse kolmnurga alus on b detsimeetrit ja alusnurk on α . Avaldada kolmnurga übermõõt.

43. Võrdhaarse kolmnurga alus on b detsimeetrit ja haarale joonestatud kõrgus on h detsimeetrit. Avaldada kolmnurga alusnurk.

44. Joonisel 7 on kujutatud nuudi ristlõige. Arvutada nuudi külgede kaldenurk α põhja suhtes.

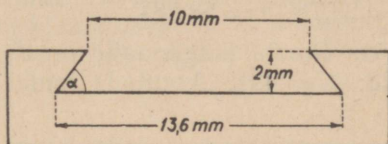
45. Joonisel 8 on kujutatud suurtükiluku keermestik. Arvutada selle keermestiku lõikamiseks vajaliku noa teritusnurk α .

46. Kolm punkti A , B ja C asetsevad nii, et kaardil nende vahelised kaugused on kujutatud lõikudega $AB = 0,85$ dm, $AC = 1,20$ dm ja $BC = 1,20$ dm. Punkt B asetseb täpselt põhja suunas punktist A . Leida siht punktist A punkti C .

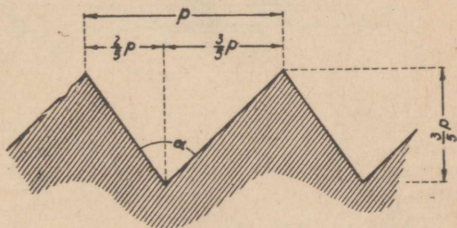
47. Sirge kangi õlgade pikkused on 5 dm ja 15 dm. Mitme detsimeetri võrra tõuseb (püstsuunas) kangi kumbki ots,

kui kangi pöörata rõhtseisust 1) 40° , 2) 60° ja 3) 90° võrra?

48. Laev liikus alloleva rumbide tabeliga kirjeldatud teed mööda¹. Arvutada kaugused, mille võrra laev liikus lähtekohast põhja ja ida poole.



Joon. 7.



Joon. 8.

Siht	Läbitud tee pikkus kilomeetris
23° NO	10
37° NO	13
82° NO	15

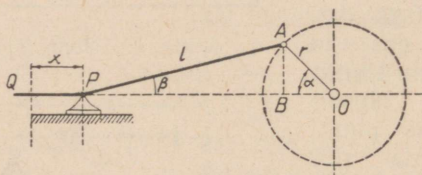
¹ Rumbiks nimetatakse geograafilise meridiaani ja antud sihi vahelist nurka. Rumbe loetakse kummalegi poole põhja- või lõunasihist 0° -st kuni 90° -ni. Rumbi kraadisuuruse järel näidatakse veerand, milles asetseb antud siht: NO — kirre, SO — kagu, SW — edel, NW — loe.

49. Ristküliku külgede a ja b järgi leida nurgad, mis ta diagonaal moodustab külgedega ($a = 75,2$ dm; $b = 63,6$ dm).

50. Ristküliku küljed on a ja b . Leida tema diagonaalide vaheline nurk ($a = 13,5$ dm; $b = 7,4$ dm).

51. Ristküliku küljed on a ja b sentimeetrit. Külgede keskpunktid on nelinurga tippudeks. Leida nurgad, mis selle nelinurga küljed moodustavad ristküliku külgedega ($a = 23,76$; $b = 58,28$).

52. Rombi diagonaalid on d_1 ja d_2 sentimeetrit ($d_1 = 28$; $d_2 = 49$). Arvutada rombi nurgad.



Joon. 9.

53. 1) AP (joon. 9) on mootori keps ja OA on selle vänt. Leida lõikude OB ja AB pikkused, kui $OA = r = 0,4$ m ja nurk $\alpha = 30^\circ$. Seejärel arvutada nurk APB ja kepsu projektsiooni PB pikkus teljel OP , teades, et kepsu pikkus $l = 2$ m.

2) Tõestada, et nurkade α ja β vahel, mis keps ja vänt moodustavad rõhttasapinnaga, valitseb seos

$$\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha.$$

3) Leida nurga α mõnedele väärtustele vastavad nurga β väärtused, kui $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ ($\alpha = 0^\circ; 10^\circ; 20^\circ; 30^\circ; 40^\circ; 50^\circ; 60^\circ; 70^\circ; 80^\circ; 90^\circ$).

4) Miks nurk β omandab (selle ülesande p. 2 antud valemi järgi) suurima väärtuse, kui $\alpha = 90^\circ$?

5) Kui suur on nurk β , kui keps ja vänt on teineteisega risti?

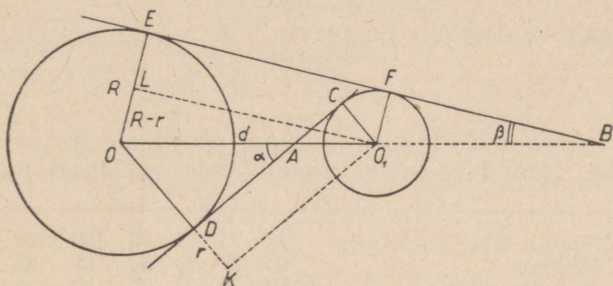
6) Olgu punkt P asendis Q , kui $\alpha = 0$. Näidata, et kepsupea nihet $QP = x$ võib arvutada valemi

$$x = r(1 - \cos \alpha) + l(1 - \cos \beta)$$

järgi.

Arvutada suurus x eespool antud nurga α väärtuste puhul (p. 3), kui vända pikkus $r = 300$ mm ja kepsu pikkus $l = 1500$ mm.

54. On antud ring, mille raadius on r sentimeetrit. Punktist, mille kaugus keskpunktist on a sentimeetrit, on ringile joonestatud kaks puutujat. Leida nende vaheline nurk ($r = 3,35$; $a = 8,32$).



Joon. 10.

55. Kahe ringi (joon. 10) keskpunktide vaheline kaugus on d sentimeetrit ning nende raadiused on R ja r sentimeetrit. Leida nurgad α ja β , mis nende ringide ühine seesmine ja ühine väline puutuja moodustavad nende keskpunkte läbiva sirgiga ($R = 3,065$; $r = 1,057$; $d = 6,245$).

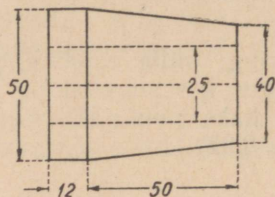
56. 5 dm pikkuse raadiusega ringjoone punktist A on joonestatud kaks kõõlu pikkustega 7 dm ja 8 dm. Arvutada nende kõõlude vaheline nurk, käsitledes kaht juhtumit: kui kõõlud asetsevad 1) üks ühel ja teine teisel pool raadiust AO ning 2) ühel ja samal pool seda.

57. Võrdhaarse kolmnurga alusele joonestatud kõrgus on h detsimeetrit ja haarale joonestatud kõrgus on h_1 detsimeetrit. Leida kolmnurga alusnurk ($h = 2,5$; $h_1 = 3$).

58. Võrdhaarse kolmnurga haar on a sentimeetrit ja tipunurk on β . Avaldada kolmnurga ümber ja sisse joonestatud ringjoonte raadiused (R ja r).

59. Täisnurkse kolmnurga kaatet on b meetrit ja hüpotenuusile joonestatud kõrgus on h meetrit. Leida kolmnurga üks teravnurk ning seejärel teine kaatet a ja hüpotenuus c .

60. Arvutada joonisel 11 telglõikes kujutatud puksi koonilise osa moodustajate vaheline nurk.

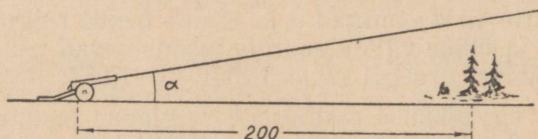


Joon. 11.

61. Arvutada (1° -se täpsusega) järgmiste tüvikoonusekujuliste treitud esemete moodustajate vahelised nurgad:

Suurem läbimõõt mm-eis	50	75	75	75	100	100
Väiksem	25	25	50	50	25	25
Koonuse pikkus	50	75	75	25	40	25

62. Maakera läbimõõdu järgi, mille pikkus on 12 740 km, ja koha geograafilise laiuse φ järgi leida selle koha geograafilise paralleeli pikkus ($\varphi = 57^\circ 05'$; $\pi = 3,14$).



Joon. 12.

63. Kui suur peab olema suurtüki tõstenurk α (joon. 12), kui suurtükk peab laskma üle metsa, mis on suurtükist 200 m kaugusel, ja mille puuladvad ulatuvad 15 m üle suurtüki tasapinna? Arvutamisel lisatakse varjendi (praegusel korral metsa) kõrgusele 1% suurtüki ja varjendi vahelisest kaugusest ehk distantsist.

64. Suurtükki ja märki ühendav sirge moodustab röhrtasapinnaga nurga, mida nimetatakse märgi kõrgusnurgaks. Arvutada märgi kõrgusnurk, kui märk asetseb 65 meetrit kõrgemal suurtüki tasapinnast ja kaardil, mille mөөt on $\frac{1}{10000}$, märgi kaugus suurtükist on 31,5 cm.

65. Punktide A ja B kaugus teineteisest on 15 cm. Punktide ees asetseb tasapeegel, mille kaugus ühest punktist on $a = 5$ cm ja teisest $b = 7$ cm. Kui suur on niisuguse kiire langemisnurk, mis, lähtunud punktist A , pärast peegeldumist läbib punkti B ?

§ 7. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine.

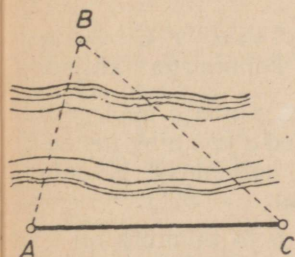
Siinusteoreem.

1. Lahendada kolmnurk järgmiste andmete järgi:

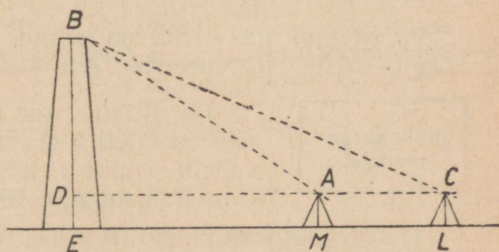
1) $a = 109$; $\beta = 33^{\circ}24'$; $\gamma = 66^{\circ}59'$;

2) $c = 16$; $\alpha = 143^{\circ}08'$; $\beta = 22^{\circ}37'$.

2. On vaja leida tehase A kaugus teisel pool jõge asetsevast raudteejaamast B (joon. 13). On teada, et $AC = 100$ m, $\angle BAC = 74^{\circ}$ ja $\angle BCA = 44^{\circ}$.



Joon. 13.



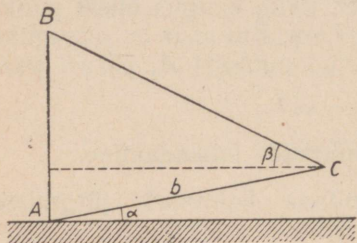
Joon. 14.

3. Ligipääsmatu vabrikukorstna kõrguse leidmiseks mөөdeti baas $AC = 11$ m, mille pikendus läbib korstna jalga (joon. 14), ning nurgad $BAD = 49^{\circ}$ ja $BCD = 35^{\circ}$. Nurgamөөtja kõrgus oli 1,37 m. Kui kõrge on korsten?

4. Vertikaalse eseme AB kõrguse leidmiseks võeti tema aluspunktis A algav baas AC , mille pikkus on b meetrit ja mis punktist A punkti C suunas tõuseb nurgi α röhrtasapinna suhtes (joon. 15). Baasi otspunktist C on eseme tipp B näha röhrtasapinna suhtes nurga all β . Avaldada eseme kõrgus.

5. Mäenõlval, mis rõhttasapinnaga moodustab nurga β , kasvab puu, mille vari langeb mööda mäenõlva alla. Kui päikese kõrgus on α , siis puu varju pikkus on l meetrit. Avaldada puu kõrgus.

6. Rööpküliku ühe diagonaali pikkus on d ning ta jaotab rööpküliku nurga osadeks α ja β . Avaldada rööpküliku küljed.



Joon. 15.

7. On antud kolmnurga külge a ning selle lähisnurgad β ja γ . Avaldada kolmnurga kõigi nurkade poolitajad l_a , l_b ja l_c .

8. Jõe laiuse määramiseks võeti jõe kaldal vee läheduses baas AB pikkusega c meetrit ja teisel kaldal valiti viseerimiseks vee läheduses kasvav puu C ; seejärel mõõdeti nurgad $CAB = \alpha$ ja $ABC = \beta$. Leida jõe laius puu C kohal ($c = 400$; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 30^\circ$).

9. Kolmnurgas ABC on antud $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$ ja kõrgus $AD = h_a$ meetrit. Avaldada kolmnurga küljed.

Kolmnurga pindala.

10. Kolmnurga ABC pindala määramiseks mõõdeti tema küljed a ja b ning nende vaheline nurk γ . Leida kolmnurga pindala ($a = 125$ m; $b = 160$ m; $\gamma = 52^\circ$).

11. Võrdhaarse kolmnurga haar on b ja tipunurk on α . Leida kolmnurga pindala ($b = 10$ m; $\alpha = 75^\circ 20'$).

12. Kui kolmnurga kahe külje pikkused a ja b on muutumatud, nende vaheline nurk γ aga muutub vahemikus 0° kuni 180° , siis missuguse nurga γ väärtuse puhul omandab kolmnurga pindala suurima väärtuse?

13. Tõestada, et rööpküliku pindala võrdub tema kahe lähiskülje ja nende vahelise nurga siinuse korrutisega.

14. Tõestada, et iga nelinurga pindala võrdub tema diagonaalide ja nende vahelise nurga siinuse korrutisega.

15. Rombi külje a ja nurga α järgi leida tema pindala ($a = 7,5$ cm; $\alpha = 22^\circ 10'$).

16. Ristküliku diagonaali d ja diagonaalidevahelise nurga φ kaudu avaldada ristküliku pindala Q . Leida pindala Q suurim väärtus nurga φ muutumisel 0° -st 180° -ni.

17. Trapetsi alused on a ja b , haar on c ning selle lähisnurk on α . Avaldada trapetsi pindala.

18. Rööpküliku pindala on 12 dm^2 ; ta küljed on $a = 3,7 \text{ dm}$ ja $b = 4,2 \text{ dm}$. Arvutada rööpküliku nurgad.

19. Kolmnurga pindala on $71,24 \text{ cm}^2$; ta küljed on $a = 15 \text{ cm}$ ja $b = 13 \text{ cm}$. Leida nende külgede vaheline nurk.

20. Maatükil on kolmnurga kuju, mille üks külge on c ning teised küljed moodustavad sellega nurgad α ja β . Leida maatüki pindala ($c = 20 \text{ m}$; $\alpha = 65^\circ 30'$; $\beta = 84^\circ 30'$).

21. Metsatüki kaks sirgjoonelist piirjoont ühinevad nurgi $BAC = \alpha$. Sirgjoone DE abil, mis küljega AC moodustab nurga $AED = \gamma$, on vaja metsatükist eraldada osa DAE , mille pindala oleks Q . Seda sirget on kerge ajada, kui on teada külgede AE ja AD pikkused. Leida nende külgede pikkused.

22. Kolmnurgas ABC on teada: nurk $C = \gamma$ ning tippudest A ja B joonestatud kõrgused h_a ja h_b . Avaldada kolmnurga pindala.

23. Avaldada kolmnurga pindala nurkade α ja β ning kõrguse h_b kaudu.

24. Kolmnurgas ABC on antud: $b = 7$, $c = 10$ ja $\alpha = 56^\circ 29'$. Leida külge a .

25. Lahendada kolmnurk ABC järgmistest andmetest järgi:

1) $a = 10$; $b = 15$; $\gamma = 123^\circ 17'$;

2) $a = 0,2$; $c = 0,6$; $\beta = 23^\circ 28'$;

3) $c = 40$; $a = 100$; $\beta = 16^\circ 28'$.

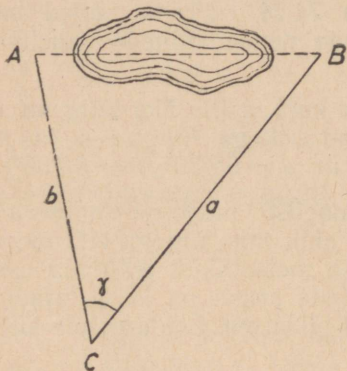
26. Punktid A ja B asetsevad nii, et nendevahelise kauguse otsene mõõtmine on takistatud (joon. 16). Selle kauguse kaudseks määramiseks valiti kolmas punkt C nii, et mõlemad punktid on nähtavad ja ligipääsetavad sellest punktist; seejärel mõõdeti kaugused $BC = a$ ja $AC = b$ ning nurk $ACB = \gamma$. Arvutada kaugus AB ($a = 100 \text{ m}$; $b = 80 \text{ m}$; $\gamma = 48^\circ 57'$).

Koosinus-
teoreem.

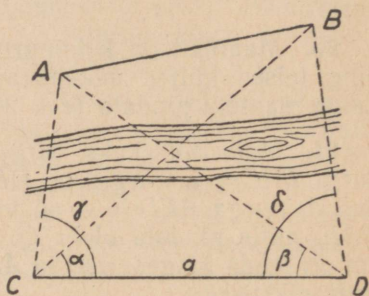
27. Kolmnurgas ABC on antud küljed $a = 3$, $b = 4$ ja $c = 6$. Arvutada nurk γ .

28. Rööpküliliku küljed on 4 m ja 5 m ning üks nurk on 52° . Arvutada rööpküliliku diagonaalid.

29. Materiaalsele punktile on rakendatud jõud $P = 100$ kG ja $Q = 200$ kG, mis moodustavad teineteisega nurga $\alpha = 50^\circ$. Arvutada resultandi R suurus ning nurgad, mis ta moodustab jõududega P ja Q .



Joon. 16.



Joon. 17.

30. Ligipääsmatute punktide A ja B (joon. 17) vahelise kauguse määramiseks mõõdeti baas CD , mis ei kulge punktide A ja B vahelt ja mille pikkus on a meetrit, ning nurgad $ACD = \gamma$, $BCD = \alpha$, $ADC = \beta$ ja $BDC = \delta$. Arvutada kaugus AB , kui $a = 2000$, $\alpha = 52^\circ 40'$, $\beta = 42^\circ 01'$, $\gamma = 86^\circ 40'$ ja $\delta = 81^\circ 15'$.

§ 8. Taandamisvalemid.

1. Taandada nurkade

a) $162^\circ 30'$; b) 230° ; c) 335°

siinus, koosinus, tangens ja kootangens teravnurkade samadeks funktsioonideks.

2. Taandada nurkade

a) $25^\circ 30' 20''$; b) 130° ; c) 250° ; d) 340°

siinus, koosinus, tangens ja kootangens teravnurkade kaasfunktsioonideks.

3. Taandada nurkade

a) 75° ; b) 150° ; c) 200° ; d) 315°

trigonomeetrilised funktsioonid funktsioonideks, mille argumendid ei ületa 45° .

Taandada väikseimale positiivsele argumendile:

4. a) $\sin 2000^\circ$; b) $\sin (-1000^\circ)$;
c) $\cos 1500^\circ$; d) $\cos (-2900^\circ)$.

5. e) $\tan 600^\circ$; f) $\tan (-40^\circ)$;
g) $\cot 1305^\circ$; h) $\cot (-300^\circ)$.

6. i) $\sec 1900^\circ$; k) $\sec (-2150^\circ)$;
l) $\operatorname{cosec} 500^\circ$; m) $\operatorname{cosec} (-80^\circ)$.

7. a) $\sin(-7,3\pi)$; b) $\cos \frac{34}{9}\pi$;
c) $\tan\left(-\frac{79}{11}\pi\right)$; d) $\operatorname{cosec}(-0,6\pi)$.

Arvutada:

8. a) $\sin(-1350^\circ)$; b) $\cos 720^\circ$;
c) $\tan 900^\circ$; d) $\cot(-450^\circ)$.

9. a) $\sin \frac{19}{6}\pi$; b) $\cos \frac{11}{2}\pi$;
c) $\tan \frac{16}{3}\pi$; d) $\sec 9\pi$.

10. Väljendada nurga 50° trigonomeetrilised funktsioonid tema kõrvunurga funktsioonide kaudu.

Lihtsustada avaldised ülesandeis 11—21:

11. $\sin(90^\circ + a) + \cos(180^\circ - a) +$
 $+ \tan(270^\circ + a) + \cot(360^\circ - a)$.

12. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \cos(\pi - a) +$
 $+ \tan(\pi - a) - \cot\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)$.

13. $\sin^2(270^\circ - a) + \sin^2(360^\circ - a)$.

14. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) \cdot \tan(2\pi - a)$.

15. $a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(180^\circ - a)$.

$$16. \frac{\sin(-a) \cdot \tan(-a)}{\cos(-a) \cdot \cot(-a)}.$$

$$17. \frac{\operatorname{cosec}(-a) \cdot \operatorname{cosec}(90^\circ + a)}{\sec(-a) \cdot \sec(180^\circ + a)}.$$

$$18. \frac{\sin(\pi + \alpha) \cdot \sec\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\tan(\pi - \alpha) \cdot \sec(2\pi - \alpha)}.$$

$$19. \sin 160^\circ \cdot \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cdot \cos 340^\circ + \tan 110^\circ \cdot \tan 340^\circ.$$

$$20. \frac{\sin(\alpha - 90^\circ) \cdot \tan 132^\circ \cdot \operatorname{cosec} 222^\circ \cdot \sin 90^\circ}{\cos(180^\circ + \alpha) \cdot \sec 312^\circ \cdot \cot 48^\circ \cdot \cos 180^\circ}.$$

$$21. \frac{\tan(270^\circ - \alpha) \cdot \sin 130^\circ \cdot \operatorname{cosec} 220^\circ \cdot \sin 270^\circ}{\cot(180^\circ - \alpha) \cdot \cos 50^\circ \cdot \sec 320^\circ \cdot \cos 360^\circ}.$$

22. Teisendada järgmiste nurkade trigonomeetrilised funktsioonid:

a) $a - 90^\circ$; b) $a - 180^\circ$; c) $a - 270^\circ$; d) $a - 360^\circ$.

23. Leida $\cos x$ võrrandist

$$3 \sin^2(360^\circ - x) - 7 \sin(x - 90^\circ) + 3 = 0.$$

24. Leida $\sin x$, kui

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

25. Leida $\tan x$ võrrandist

$$\sin(2\pi - x) \cdot \cos(\pi - x) + \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - \sin^2(2\pi - x) = 0.$$

Lahendada võrrandid (ülesandeis 26—30):

$$26. \sin^2(270^\circ - x) + 2 \cos(360^\circ - x) = 3.$$

$$27. \sin(x - 90^\circ) = -\sin(x - 180^\circ).$$

$$28. \cos(\pi + x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

$$29. \tan(x + \pi) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

$$30. \sin(x + 90^\circ) = -\cot(360^\circ - x).$$

§ 9. Nurkade summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid.

Summa ja vahe siinus ja koosinus.

1. Arvutada $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$, kui $\sin \alpha = 0,625$ ja $\sin \beta = 0,8$.

2. Arendada ja lihtsustada:

a) $\sin(\alpha + 60^\circ) + \sin(\alpha - 60^\circ)$;

b) $\cos(30^\circ + \alpha) - \cos(30^\circ - \alpha)$.

3. On antud: $\cos \alpha = 0,6$; $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Arvutada $\sin(\alpha + 30^\circ)$.

4. On antud: $\sin \alpha = \sqrt{0,2}$; $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Arvutada $\cos(60^\circ + \alpha)$.

5. On antud: $\cos \alpha = 0,5$; $\sin \beta = -0,4$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; $180^\circ < \beta < 270^\circ$. Arvutada $\sin(\alpha - \beta)$ ja $\cos(\alpha + \beta)$.

6. On antud: $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; $\cos \beta = -\frac{3}{4}$; α on II veerandi ja β on III veerandi nurk. Arvutada $\sin(\alpha + \beta)$ ja $\cos(\alpha - \beta)$.

7. Arvutada $\sin(\alpha + \beta)$, kui $\sin \alpha = 0,6$ ja $\sin \beta = 0,8$.

8. α ja β on positiivsed teravnurgad:

$$\cos \alpha = \frac{1}{7}; \cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}. \text{ Arvutada } \cos \beta.$$

9. Arvutada:

a) $\sin 75^\circ$ ja $\cos 75^\circ$, asendades 75° summaga $45^\circ + 30^\circ$;

b) $\sin 15^\circ$ ja $\cos 15^\circ$, asendades 15° vahega $45^\circ - 30^\circ$.

10. Rakendada $\sin(\alpha \pm \beta)$ ja $\cos(\alpha \pm \beta)$ arendamise valemid juhtumeile: a) $\alpha = 0^\circ$; 90° ; 180° ; 270° ; 360° ; b) $\beta = 90^\circ$; 180° ; 270° ; 360° ; c) $\alpha = \beta$.

11. Kui α ja β on positiivsed nurgad ning $\alpha + \beta < 90^\circ$, siis $\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$. Tõestada see lause: 1) joonise abil ja 2) valemi abil.

12. $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ ja $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$ väljendada: a) $\tan \alpha$ ja $\tan \beta$ kaudu; b) $\cot \alpha$ ja $\cot \beta$ kaudu.

13. Arendada $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ ja $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$.

14. On antud: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; $\sin \beta = \frac{12}{13}$; $\sin \gamma = \frac{7}{25}$, kus α , β ja γ on teravnurgad. Arvutada $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ ja $\cos(\alpha + \beta - \gamma)$.

Summa ja vahe tangens.

15. Arendada ja lihtsustada $\tan(45^\circ \pm \alpha)$.

16. Arvutada $\tan 105^\circ [= \tan(60^\circ + 45^\circ)]$.

17. On antud: $\tan \alpha = 3$. Arvutada $\tan(45^\circ - \alpha)$.

18. On antud: $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ ja $\tan \beta = -2$. Arvutada $\tan(\alpha + \beta)$ ja $\cot(\alpha - \beta)$.

19. $\tan(\alpha \pm \beta)$ väljendada $\cot \alpha$ ja $\cot \beta$ kaudu.

20. $\cot(\alpha \pm \beta)$ väljendada: a) $\cot \alpha$ ja $\cot \beta$ kaudu; b) $\tan \alpha$ ja $\tan \beta$ kaudu.

21. Arendada $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$.

Lihtsustada järgmised avaldised (ülesandeis 22—26):

22. $\frac{\sin(\alpha - \beta) + 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)}$ 23. $\frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta}$

24. $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$ 25. $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}$

26. $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}$

Tõestada järgmised samasused (ülesandeis 27—37):

27. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

28. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

29. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) =$
 $= \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \beta$.

30. $(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin \beta - \cos \beta) =$
 $= \sin(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha)$.

31. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \beta - \cos(\alpha + \gamma) \cdot \sin \gamma =$
 $= \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \beta - \sin(\alpha + \gamma) \cdot \cos \gamma$.

$$32. a) \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

$$b) \frac{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

$$33. \cot \alpha - \cot 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha.$$

$$34. \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\alpha}{2}.$$

$$35. \tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha - \tan \beta = \\ = \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta.$$

$$36. \cos \alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha) = 0.$$

$$37. \frac{1}{2}(\cos \alpha + \sqrt{3} \cdot \sin \alpha) = \cos(60^\circ - \alpha).$$

38. Kui $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ja $\tan \beta = \frac{1}{3}$, kusjuures α ja β on teravnurgad, siis $\alpha + \beta = 45^\circ$. Tõestada see.

39. Kui α , β ja γ on teravnurgad, mille tangensid on $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ ja $\frac{1}{8}$, siis $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$. Tõestada see.

40. On antud: $\cot \alpha = \frac{3}{4}$, $\cot \beta = \frac{1}{7}$, α ja β on teravnurgad. Tõestada, et $\alpha + \beta = 135^\circ$.

Lahendada järgmised võrrandid (ülesandeis 41—54):

$$41. \sin(x + 30^\circ) + \cos(x - 30^\circ) = 0.$$

$$42. \cos(\alpha + x) \cdot \cos(\alpha - x) + 0,75 = \cos^2 \alpha.$$

$$43. \cos(\alpha - \beta) \cdot \sin(\gamma - x) = \\ = \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\gamma + x).$$

$$44. \tan(x + 45^\circ) + \tan(x - 45^\circ) = 2 \cot x.$$

$$45. \sin(x + a) + \sin(x - a) = \cos a.$$

$$46. \sin(\alpha - x) : \cos(\alpha + x) = a : b.$$

$$47. \tan(x + a) \cdot \tan(x - a) = m.$$

$$48. \sin 2x \cdot \cos x = \cos 2x \cdot \sin x.$$

$$49. \sin x \cdot \sin 2x = \cos x \cdot \cos 2x.$$

$$50. \cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 5x.$$

$$51. \sin(\alpha + x) - \cos x \cdot \sin \alpha = \cos \alpha.$$

$$52. 2 \sin x = \sin (45^\circ - x).$$

$$53. \sin (45^\circ - x) = \frac{1}{2} \cos (45^\circ + x).$$

$$54. \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = \frac{1}{2}.$$

§ 10. Kordse ja murrulise argumendi trigonomeetriselised funktsioonid.

Kordse argumendi funktsioonid.

1. Arvutada: a) $\sin 2\alpha$ ja $\cos 2\alpha$, kui $\sin \alpha = 0,8$; b) $\tan 2\alpha$, kui $\tan \alpha = -3$.

2. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga siinus on $\frac{5}{13}$. Arvutada tipunurga siinus ja koosinus.

3. Kui $0^\circ < \alpha < 45^\circ$, siis $\sin 2\alpha < 2 \sin \alpha$. Tõestada see lause: 1) joonise abil ja 2) $\sin 2\alpha$ valemi abil.

4. On antud: $\sin \alpha = 0,8$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Arvutada $\sin 2\alpha$ ja $\cos 2\alpha$.

5. On antud: $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Arvutada $\sin 2\alpha$ ja $\cos 2\alpha$.

6. On antud $\tan \alpha = 3$. Arvutada $\tan 2\alpha$.

7. $\sin 2\alpha$ ja $\cos 2\alpha$ väljendada: a) ainult $\sin \alpha$ kaudu; b) ainult $\cos \alpha$ kaudu.

8. $\cot 2\alpha$ väljendada: a) $\cot \alpha$ kaudu ja b) $\tan \alpha$ kaudu.

9. $\sec 2\alpha$ väljendada $\sec \alpha$ kaudu.

10. a) $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ väljendada $\sin \frac{\alpha}{2}$ ja $\cos \frac{\alpha}{2}$ kaudu; b) $\tan \alpha$ väljendada $\tan \frac{\alpha}{2}$ kaudu.

11. $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ väljendada $\tan \frac{\alpha}{2}$ kaudu.

12. Näidata, et nurga α kõik trigonomeetriselised funktsioonid väljenduvad ratsionaalselt $\tan \frac{\alpha}{2}$ kaudu.

13. On antud: $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$. Arvutada $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$.

14. On antud: $\cot \alpha = \sqrt{2} + 1$. Arvutada $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ja $\tan 2\alpha$.

15. Väljendada $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ ja $\tan 3\alpha$ vastavalt $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$ kaudu.

16. $\sin 4\alpha$ ja $\cos 4\alpha$ väljendada $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ kaudu.

Murrulise argumendi
funktsioonid.

17. Arvutada $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ ja $\tan \frac{\alpha}{2}$, kui $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ja $\sin \alpha = -0,6$.

18. Arvutada nurga 15° siinus, koosinus, tangens ja kootangens, võttes $15^\circ = \frac{30^\circ}{2}$. (Võrrelda tulemusi § 9 ülesandes 9 leitud tulemustega.)

19. Arvutada nurga $22^\circ 30'$ ($= \frac{45^\circ}{2}$) siinus, koosinus, tangens ja kootangens.

20. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga koosinus on $\frac{7}{25}$. Arvutada alusnurga siinus ja koosinus.

21. Arvutada $\sin \frac{\alpha}{4}$, kui $45^\circ < \alpha < 540^\circ$ ja $\sin \alpha = \frac{336}{625}$.

22. Arvutada $\cot \frac{\alpha}{4}$, kui $45^\circ < \frac{\alpha}{4} < 90^\circ$ ja $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

23. Kui $\cos \alpha = \frac{40}{41}$ ja $\cos \beta = \frac{60}{61}$, kusjuures α ja β on positiivsed teravnurgad, siis $\sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{41 \cdot 61}$. Kontrollida see.

24. Kontrollida, kas $\tan 7^\circ 30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$.

25. $\sin \frac{\alpha}{2}$ ja $\cos \frac{\alpha}{2}$ väljendada $\sin \alpha$ kaudu.

26. $\tan \frac{\alpha}{2}$ ja $\cot \frac{\alpha}{2}$ väljendada vastavalt $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$ kaudu.

27. Arvutada $\tan \frac{\alpha}{2}$, kui $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ja $\tan \alpha = \frac{4}{3}$.

Tõestada järgmised samasused (ülesandeis 28—49):

28. a) $2 \sin (90^\circ - \alpha) \cdot \sin \alpha = \sin 2\alpha$;

b) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha$.

29. a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;

b) $\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin \alpha$.

30. a) $\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin 2\alpha$; b) $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos 2\alpha$.

31. $\cos^2 (\alpha + \beta) + \cos^2 (\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta = 1$.

32. $\frac{\cos \alpha}{\sec \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \sin \alpha$.

33. $\frac{\cos^2 \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2} - \cot \frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{4} \sin 2\alpha$.

34. a) $\cot \alpha + \tan \alpha = 2 \operatorname{cosec} 2\alpha$;

b) $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$.

35. a) $\sin 2\alpha - \tan \alpha = \cos 2\alpha \cdot \tan \alpha$;

b) $\sin 2\alpha - \cot \alpha = -\cos 2\alpha \cdot \cot \alpha$.

36. $\frac{1}{1 - \tan \alpha} - \frac{1}{1 + \tan \alpha} = \tan 2\alpha$.

37. $\tan (\alpha + 45^\circ) + \tan (\alpha - 45^\circ) = 2 \tan 2\alpha$.

38. $2 \sin (45^\circ + \alpha) \cdot \sin (45^\circ - \alpha) = \cos 2\alpha$.

39. $\frac{1 - \tan^2 (45^\circ - \alpha)}{1 + \tan^2 (45^\circ - \alpha)} = \sin 2\alpha$.

40. $\sin 3\alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha - \cos 3\alpha \cdot \sec \alpha = 2$.

41. $4 \sin \alpha \cdot \sin (60^\circ - \alpha) \cdot \sin (60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha$.

42. $4 \cos \alpha \cdot \cos (60^\circ - \alpha) \cdot \cos (60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha$.

43. $\tan \alpha \cdot \tan (60^\circ - \alpha) \cdot \tan (60^\circ + \alpha) = \tan 3\alpha$.

44. $\frac{\sin 3\alpha + \sin^3 \alpha}{\cos 3\alpha - \cos^3 \alpha} = -\cot \alpha$.

45. $\frac{\tan^2 \alpha - \tan^2 60^\circ}{\tan^2 \alpha - \cot^2 60^\circ} = \tan 3\alpha \cdot 3 \cot \alpha$.

46. a) $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$;

b) $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

47. a) $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$;

b) $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

48. $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \tan^2 \frac{\alpha}{2}$.

49. $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan (45^\circ + \alpha)$.

50. Kui $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ ja $\tan \beta = \frac{1}{3}$, kusjuures α ja β on teravnurgad, siis $\alpha + 2\beta = 45^\circ$. Tõestada see.

51. Kui $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ ja $\tan \beta = \frac{1}{3}$, siis $\cos 2\alpha = \sin 4\beta$. Kontrollida see.

Lahendada järgmised võrrandid (ülesandeis 52—74):

52. $\sin x \cdot \cos x = 0,25$.

53. $\sin^2 x - \cos^2 x = 0,5$.

54. $1 = \tan^2 x + 2 \tan x$.

55. $\sin 2x = \sin x$.

56. $a \cdot \sin x = b \cdot \cos \frac{x}{2}$.

57. $1 + \sin^2 2x = 4 \sin^2 x$.

58. $\cos 2x = \cos x$.

59. $\cos 2x = 2 \sin^2 x$.

60. $\tan 2x = \tan x$.

61. $\tan 2x = 3 \tan x$.

62. $a(1 + \cos x) = b \cdot \cos \frac{x}{2}$.

63. $1 - \cos x = \sin \frac{x}{2}$.

64. $a(1 + \cos x) = b \cdot \sin x$.

65. $1 - \cos x = \sin x$.

66. $1 + \sec x = m \cdot \tan^2 \frac{x}{2}$.

67. $1 + \sec x = \cot^2 \frac{x}{2}$.

68. $\sin 3x = 2 \sin x$.

69. $\cos 3x = 4 \cos^2 x$.

70. $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}$.

71. $\cos^3 x \cdot \sin 3x +$

$+ \sin^3 x \cdot \cos 3x = \frac{3}{4}$.

Võrrandeis 72—74 kõigepealt väljendada $\sin x$ ja $\cos x$ ülesandes 11 saadud valemite abil:

72. $\sin x + \cos x = 1\frac{1}{4}$.

73. $4 \sin x + 3 \cos x = 2$.

74. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

§ 11. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamise korrutiseks. Abinurk.

Järgmistele avaldistele anda logaritmitav kuju ja need lihtsustada:

1. a) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; b) $\sin 78^\circ - \sin 42^\circ$;
c) $\cos 152^\circ + \cos 28^\circ$; d) $\cos 48^\circ - \cos 12^\circ$.
2. a) $\sin 5^\circ + \sin 20^\circ$; b) $\sin 3^\circ - \sin 5^\circ$;
c) $\cos 3^\circ 15' + \cos 17^\circ$; d) $\cos 5^\circ - \cos 25^\circ$.
3. a) $\sin (30^\circ + \alpha) + \sin (30^\circ - \alpha)$;
b) $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.
4. a) $\frac{\sin 25^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 25^\circ - \sin 15^\circ}$; b) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$.
5. a) $\sin 20^\circ + \cos 40^\circ$; b) $\cos 20^\circ - \sin 20^\circ$;
c) $\sin \alpha - \cos \beta$.
6. a) $\sin \alpha + \cos \alpha$; b) $\sin \alpha - \cos \alpha$.
7. a) $\tan \alpha \pm \tan \beta$; b) $\cot \alpha \pm \cot \beta$;
c) $\tan \alpha \pm \cot \beta$; d) $\cot \alpha \pm \tan \beta$.
8. a) $\tan \alpha + \cot \alpha$; b) $\tan \alpha - \cot \alpha$.
9. a) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$; b) $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$.
10. a) $\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta$; b) $\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta$;
c) $\tan^2 \alpha - \cot^2 \beta$; d) $\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha$.
11. a) $1 + \sin \alpha$; b) $\sin \alpha - 1$;
c) $1 - 2 \sin^2 \alpha$; d) $1 - 2 \cos^2 \alpha$.
12. $\sin \alpha - \tan \alpha$.
13. $\tan \alpha - \sec \alpha$.
14. $\operatorname{cosec} \alpha - \cot \alpha$.
15. a) $1 \pm \tan \alpha$; b) $1 \pm \cot \alpha$.
16. $1 \pm \tan \alpha \cdot \cot \beta$.
17. a) $\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}$, kui $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
b) $\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}$, kui $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
18. $\sqrt{\tan \alpha + \sin \alpha} + \sqrt{\tan \alpha - \sin \alpha}$, kui $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

19. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \beta$;
 b) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \cos \beta$.
20. a) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha$; b) $1 - \sin \alpha - \cos \alpha$.
21. $1 - 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha$.
22. a) $1 + \tan \alpha + \sec \alpha$; b) $\sec \alpha + \tan \alpha - 1$.
23. a) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \tan \alpha$;
 b) $1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \tan \alpha$.
24. a) $\tan \alpha + \cot \alpha + \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha$;
 b) $\tan \alpha - \cot \alpha - \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha$.
25. a) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)$;
 b) $\sin \alpha - \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)$.
26. $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

Tõestada järgmised samasused (ülesandeis 27—38):

$$27. \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \cot \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

$$28. \frac{\cot \alpha - \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \cot (\alpha + \beta) \cdot \tan \beta.$$

$$29. \text{ a) } \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}};$$

$$\text{ b) } \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

$$30. \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \tan (45^\circ + \alpha).$$

$$31. \frac{\sec \alpha + \tan \alpha}{\sec \alpha - \tan \alpha} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$32. \text{ a) } \frac{\tan 2\alpha \cdot \tan \alpha}{\tan 2\alpha - \tan \alpha} = \sin 2\alpha; \quad \text{ b) } \frac{1}{1 + \tan \alpha \cdot \tan 2\alpha} = \cos 2\alpha.$$

$$33. \sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

kui $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

$$34. \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2}.$$

$$35. \text{ a) } (\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = \\ = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\text{ b) } (\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = \\ = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$36. \text{ a) } 1 - \tan^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta};$$

$$\text{ b) } 1 - \cot^2 \alpha \cdot \cot^2 \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}.$$

$$37. \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha.$$

$$38. \tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha = \tan 3\alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha.$$

Tõestada, et tingimusel $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (näiteks, kui α , β ja γ on kolmnurga sisenurgad) on kehtivad järgmised seosed (ülesandeis 39—49; nendele ülesannetele on vastustes antud näpunäiteid):

$$39. \text{ a) } \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$\text{ b) } \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

$$40. \text{ a) } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma =$$

$$= 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2};$$

$$\text{ b) } \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma =$$

$$= -1 + 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$41. \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma.$$

$$42. \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \cot \alpha \cdot \cot \beta \cdot \cot \gamma + \\ + \operatorname{cosec} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \beta \cdot \operatorname{cosec} \gamma.$$

$$43. \cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \cdot \cot \frac{\beta}{2} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}.$$

$$44. \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = 1.$$

$$45. \cot \alpha \cdot \cot \beta + \cot \alpha \cdot \cot \gamma + \cot \beta \cdot \cot \gamma = 1.$$

$$46. \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

$$47. \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

$$48. \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

$$49. \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \\ = -1 - 4 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

Avaldised ülesandeis 50—59 teisendada korrutisteks, kasutades mõningate tuntud nurkade funktsioone:

$$50. 1 + 2 \sin \alpha.$$

$$51. 1 - 2 \cos \alpha.$$

$$52. \sqrt{3} - 2 \sin \alpha.$$

$$53. a) \sqrt{2} + 2 \cos \alpha;$$

$$54. 3 - 4 \sin^2 \alpha.$$

$$b) \sqrt{2} \cdot \sin \alpha - 1.$$

$$55. 3 - 4 \cos^2 \alpha.$$

$$56. 1 - 3 \tan^2 \alpha.$$

$$57. 3 - \cot^2 \alpha.$$

$$58. 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha.$$

$$59. a) \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha;$$

$$b) \cos \alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha.$$

60. Teisendada järgmised avaldised, kasutades abinurka:

$$1) \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$2) \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \text{ kui } p > 2\sqrt{q} > 0.$$

61. Eeldades, et $a > b > 0$, teisendada järgmised avaldised abinurga abil:

$$1) \frac{a+b}{a-b}; \quad 2) \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}; \quad 3) \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

62. Rakendada abinurga võtet avaldise

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma}$$

arvutamisel.

Lahendada järgmised võrrandid (63—75), teisendades enne funktsioonide summa või vahe korrutiseks:

$$63. \sin 3x + \sin x = 0.$$

$$64. \cos 4x + \cos x = 0.$$

$$65. \sin 5x = \sin x.$$

$$66. \cos 2x = \cos x.$$

$$67. \cos 3x = \sin x.$$

$$68. \sin x + \cos x = 1.$$

$$69. \cos x - \sin x = 1 : \sqrt{2}.$$

$$70. \tan x + \cot x = 2(1 + \sqrt{5}).$$

$$71. \tan x - \cot x = 2(1 - \sqrt{2}).$$

$$72. \cot 2x - \cot 4x = 2.$$

$$73. \tan x + \tan 3x = \sec x \cdot \sec 3x.$$

$$74. \cos x + \cos 3x = \cos 2x.$$

$$75. \sin 3x = \sin 2x - \sin x.$$

§ 12. Logaritmidete tabelite kasutamine trigonomeetriliste avaldiste arvutamiseks ja nurkade leidmiseks.

Selle paragrahvi, samuti ka § 13 ja 14 ülesannete vastused on antud neljakohaliste tabelite järgi. Kuid ülesannete lahendamisel kasutatakse ka täpsemaid, viiekohalisi tabeleid. Seejuures peab aga silmas pidama, et siis vastus võib erineda raamatus antud vastusest viimase koha 1—2 ühiku võrra.

Leida tabelite abil:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| 1. a) $\log \sin 21^\circ 37'$; | b) $\log \sin 63^\circ 42'$; |
| c) $\log \sin 21^\circ 11'$; | d) $\log \sin 47^\circ 12'$; |
| e) $\log \sin 53^\circ$; | f) $\log \sin 1^\circ 23' 18''$. |
| 2. a) $\log \cos 32^\circ 08'$; | b) $\log \cos 50^\circ 22'$; |
| c) $\log \cos 44^\circ 53'$; | d) $\log \cos 62^\circ 47'$; |
| e) $\log \cos 30^\circ 48'$; | f) $\log \cos 89^\circ 36' 20''$. |
| 3. a) $\log \tan 27^\circ 41'$; | b) $\log \tan 16^\circ 07'$; |
| c) $\log \tan 70^\circ 42' 53''$; | d) $\log \tan 14^\circ 0' 15''$; |
| e) $\log \tan 52^\circ 0' 12''$; | f) $\log \tan 89^\circ 10' 16''$. |
| 4. a) $\log \cot 80^\circ 0' 53''$; | b) $\log \cot 20^\circ 26' 48''$; |
| c) $\log \cot 77^\circ 21'$; | d) $\log \cot 45^\circ 0' 30''$; |
| e) $\log \cot 87^\circ 59' 34''$; | f) $\log \cot 15' 40''$. |

Leida teravnurk x , kui on antud:

- | | |
|---|--------------------------|
| 5. $\log \sin x =$ a) $\overline{1,4001}$; | b) $\overline{1,8634}$; |
| c) $\overline{1,6747}$; | d) $\overline{1,9341}$; |
| e) $\overline{1,8711}$; | f) $\overline{3,8662}$. |
| 6. $\log \cos x =$ a) $\overline{1,8615}$; | b) $\overline{2,9301}$; |
| c) $\overline{1,9497}$; | d) $\overline{1,8493}$; |
| e) $\overline{1,8080}$; | f) $\overline{2,0584}$. |
| 7. $\log \tan x =$ a) $\overline{2,7865}$; | b) 0,0066; |
| c) $\overline{1,4608}$; | d) 0,0771; |
| e) 0,0002; | f) $\overline{3,3500}$. |

8. $\log \cot x =$ a) 1,0367; b) $\bar{1},5018$;
 c) 0,3738; d) $\bar{1},3387$;
 e) $\bar{1},9909$; f) $\bar{2},0000$.

Leida logaritmid tabelite abil:

9. a) $\sin 20^\circ$; b) $\cos 47^\circ 36'$; c) $\tan 75^\circ 36'$;
 d) $\cot 15'$; e) $\sec 40^\circ$; f) $\operatorname{cosec} 53^\circ 03'$.
 10. a) $\sin 230^\circ$; b) $\cos 740^\circ$; c) $\tan (-250^\circ 10')$;
 d) $\cot 1000^\circ 15'$; e) $\sec (-100^\circ)$; f) $\operatorname{cosec} 500^\circ 18'$.

Leida teravnurk x , kui on antud:

11. a) $\sin x = \frac{4}{7}$; b) $\cos x = 0,38934$; c) $\tan x = 4$;
 d) $\cot x = 10$; e) $\sec x = 1,5$; f) $\operatorname{cosec} x = 2,65047$;
 g) $\sin x = \frac{1}{2} \sin 20^\circ$; h) $\cot x = 3 \cot 48^\circ$.

Leida nurgad vahemikust 0° kuni 360° , kui on antud:

12. $\sin x = \frac{5}{12}$. 13. $\sin x = -0,682$.
 14. $\cos x = 0,76213$. 15. $\cos x = -0,5688$.
 16. $\tan x = \frac{176}{353}$. 17. $\tan x = -2,48$.
 18. $\cot x = 5$. 19. $\cot x = -0,731$.
 20. $\sec x = 15$. 21. $\sec x = -2,5$.
 22. $\operatorname{cosec} x = 10$. 23. $\operatorname{cosec} x = -1\frac{2}{7}$.

Ülesandeks 24—31 leida absoluutväärtuselt väikseim nurk x (positiivne või negatiivne):

24. $\tan x = \tan 40^\circ + \tan 70^\circ$.
 25. $\cot x = 1 + \sin 23^\circ 15'$.
 26. $\cos x = 1 - \cot 66^\circ 12'$.
 27. $\sin x = \sin 37^\circ 15' - 1$.
 28. $\cos x = 1 + \tan 117^\circ$.
 29. $\tan x = \sin 44^\circ + \cos 166^\circ$.
 30. $\cot (-x) = 1 - \cos (-20^\circ) \cdot \sec 70^\circ 46'$.
 31. $\sin (x + 180^\circ) = \sqrt[3]{-\tan 152^\circ}$.

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused (ülesandeis 32—34):

32. $(a^2 - b^2) \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$, kui $a = 7,3863$; $b = 5,2138$;
 $\alpha = 42^\circ 26'$; $\beta = 68^\circ 34'$.

33. $(a + \sin a) \cdot (a + \cos a)$, kui $a = 0,001$ ja $a = 143^\circ 12'$.

34. $a^2 \cdot \sec a \cdot \sqrt[4]{-\tan 2a}$, kui $a = 0,0204$ ja $\alpha = 67^\circ 34'$.

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused (ülesandeis 35—41), teisendades nad enne korrutisteks:

35. $x = \pi \cdot (\sin 30^\circ 53' 30'' + \sin 80^\circ 24')$.

36. $x = \frac{\sqrt[3]{0,0001}}{\cos 16^\circ 41' - \sin 49^\circ 10'}$.

37. $x = \left(16 \frac{768}{815}\right)^2 \cdot (1 + \sin 11^\circ 07')$.

38. $x = \sqrt{2} \cdot (1 - \tan 61^\circ 39')$.

39. $x = \sqrt[4]{0,005} \cdot (1 + 2 \sin 41^\circ 19')$.

40. $x = 2,7148^3 \cdot \sqrt{3 - 4 \cos^2 72^\circ 05'}$.

41. $x = \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha}$, kui
 $a = 0,0148$, $b = 0,0040$ ja $\alpha = 36^\circ 15'$.

**Täisnurksete kolm-
nurkade lahendamine.**

42—57. Täisnurksete kolmnurkade lahendamise põhijuhtumid.

I. On antud hüpotenuus ja teravnurk:

42. $c = 9,35$; $A = 65^\circ 14'$. 43. $c = 627$; $A = 23^\circ 30'$.

44. $c = 0,7979$; $A = 66^\circ 36'$. 45. $c = 3,644$; $A = 50^\circ 02'$.

II. On antud kaatet ja teravnurk:

46. $a = 6,37$; $A = 4^\circ 35'$. 47. $a = 18,003$; $B = 47^\circ$.

48. $b = 0,1738$; $A = 35^\circ 55'$. 49. $b = 0,2954$; $B = 25^\circ 37'$.

III. On antud hüpotenuus ja kaatet:

50. $c = 65$; $a = 16$. 51. $c = 113$; $b = 15$.

52. $c = 697$; $a = 528$. 53. $c = 1710,2$; $b = 823$.

IV. On antud kaatetid:

54. $a = 261$; $b = 380$. 55. $a = 156$; $b = 133$.
 56. $a = 0,09783$; $b = 0,1003$. 57. $a = 12,06$; $b = 6,919$.
 58—69. Võrdhaarne kolmnurk.

Tähistusi: a ja c — haarad; b — alus; A ja C — alusnurgad; B — tipunurk; h — alusele joonestatud kõrgus; h_1 — haarale joonestatud kõrgus; $2p$ — übermõõt; S — pindala.

Lahendada võrdhaarne kolmnurk järgmisil andmeil:

58. $a = 797,9$; $A = 66^\circ 36'$. 59. $a = 627$; $B = 133^\circ$.
 60. $b = 15,65$; $A = 59^\circ 45'$. 61. $b = 5,478$; $B = 50^\circ 42'$.
 62. $a = 8,757$; $b = 13,958$. 63. $b = 925,2$; $h = 721,4$.
 64. $A = 65^\circ 40'$; $h_1 = 20$. 65. $b = 130,7$; $S = 1955$.
 66. $B = 73^\circ 54'$; $S = 45,04$. 67. $2p = 40,65$; $A = 72^\circ 46'$.
 68. $S = 250$; $a : b = 7 : 4$. 69. $S = 56$; $a = 14$.

§ 13. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine logaritmidel abil.

Tähistusi: a , b ja c — kolmnurga küljed; A , B ja C — nende külgede vastasnurgad; S — pindala; $2p$ — übermõõt; R — überjoonestatud ringjoone raadius; r — sissejoonestatud ringjoone raadius; h_a , l_a ja m_a — küljele a vastav kõrgus, nurgapoolitaja ja mediaan.

Kaldnurksete kolmnurkade lahendamise põhijuhtumid.

I. On antud külge ja kaks nurka:

- | | | |
|------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. $a = 370$; | $B = 86^\circ 03'$; | $C = 50^\circ 56'$. |
| 2. $a = 450$; | $A = 87^\circ 55'$; | $B = 10^\circ 53'$. |
| 3. $a = 951$; | $B = 126^\circ 43'$; | $C = 13^\circ 41'$. |
| 4. $a = 97,52$; | $A = 102^\circ 48'$; | $C = 21^\circ 06'$. |
| 5. $b = 13,02$; | $A = 11^\circ 48'$; | $B = 133^\circ 42'$. |
| 6. $c = 15,94$; | $A = 51^\circ 38'$; | $B = 18^\circ 19'$. |

II. On antud kaks külge ja nendevaheline nurk:

7. $a = 510$; $b = 317$; $C = 76^\circ 19'$.
 8. $a = 225$; $b = 800$; $C = 36^\circ 44'$.

9. $a = 2,29$; $c = 1,69$; $B = 29^{\circ}52'$.
 10. $b = 28$; $c = 42$; $A = 124^{\circ}$.
 11. $a = 30,99$; $c = 69,01$; $B = 87^{\circ}48'$.
 12. $b = 40,33$; $c = 32,11$; $A = 73^{\circ}40'$.

III. On antud kaks külge ja ühe antud külje vastasnurk:

13. $a = 87$; $b = 65$; $A = 75^{\circ}45'$.
 14. $a = 34$; $b = 93$; $A = 14^{\circ}15'$.
 15. $a = 24$; $b = 83$; $A = 26^{\circ}45'$.
 16. $b = 360$; $c = 309$; $C = 21^{\circ}14'$.
 17. $a = 13,9$; $c = 8,43$; $A = 126^{\circ}43'$.
 18. $a = 0,437$; $b = 1,299$; $B = 11^{\circ}03'$.
 19. $a = 13,81$; $c = 8,14$; $C = 14^{\circ}36'$.
 20. $b = 263$; $c = 215$; $B = 70^{\circ}15'$.
 21. $a = 19,06$; $b = 28,19$; $A = 31^{\circ}17'$.
 22. $a = 457,1$; $b = 169,9$; $B = 21^{\circ}49'$.
 23. $a = 2579$; $c = 10$; $A = 130^{\circ}22'$.

IV. On antud kolm külge:

24. $a = 19$; $b = 34$; $c = 49$.
 25. $a = 89$; $b = 321$; $c = 395$.
 26. $a = 44$; $b = 483$; $c = 486$.
 27. $a = 0,099$; $b = 0,101$; $c = 0,158$.
 28. $a = 172,5$; $b = 1135$; $c = 1205$.
 29. $a = 421,6$; $b = 409,8$; $c = 335,9$.
 30. $a = 1,236$; $b = 2,346$; $c = 3,456$.

Kaldnurksete kolm-
 nurkade lahendamise
 erijuhtumeid.

31. $R = 7,92$; $A = 113^{\circ}17'$;
 $B = 48^{\circ}16'$.

32. $S = 501,9$; $A = 15^{\circ}28'$;
 $B = 45^{\circ}$.

33. $h_a = 5,37$; $B = 115^{\circ}10'$; $C = 5^{\circ}08'$.

34. $l_a = 0,758$; $B = 98^{\circ}31'$; $C = 4^{\circ}25'$.

35. $a + b = m = 488,8$; $A = 70^{\circ}24'$; $B = 40^{\circ}16'$.
36. $a - b = n = 23$; $A = 108^{\circ}$; $B = 18^{\circ}$.
37. $h_a + h_b = m = 1,381$; $A = 102^{\circ}32'$; $B = 58^{\circ}17'$.
38. $h_a - h_c = n = 60,8$; $B = 46^{\circ}24'$; $C = 80^{\circ}28'$.
39. $2p = 420,7$; $A = 24^{\circ}37'$; $B = 52^{\circ}31'$.
40. $r = 5$; $A = 22^{\circ}37'$; $B = 39^{\circ}18'$.
41. $c = 1,230$; $a : b = 3 : 4$; $B = 48^{\circ}$.
42. $a = 63,51$; $b : c = 9 : 11$; $A = 95^{\circ}30'$.
43. $c = 226,8$; $h_c : b = 63 : 65$; $B = 17^{\circ}04'$.
44. $a = 15,98$; $A = 46^{\circ}20'$; $b = a_c$ (a_c on projektsioon küljel c).
45. $b = 29$; $l_c = 31$; $A = 68^{\circ}43'$.
46. $S = 2423$; $a = 42,5$; $B = 124^{\circ}38'$.
47. $a = 32$; $b = 25$; $A = 2B$.
48. $a + b = 36,5$; $R = 19,06$; $A - B = 19^{\circ}31'$.
49. $a + b = m = 2147$; $c = 353$; $C = 13^{\circ}41'$.
50. $a - b = n = 6,45$; $c = 18,3$; $C = 53^{\circ}40'$.
51. $a + b = m = 14,31$; $c = 5,18$; $A = 102^{\circ}38'$.
52. $a - b = n = 6,232$; $c = 15,14$; $A = 78^{\circ}40'$.
53. $S = 15$; $ab = 48$; $\sin A = \cos B$.
54. $h_b = 60$; $h_c = 36$; $a : R = \cos A$.
55. $a = 23$; $b = 45$; $R = 25,09$.
56. $\dot{a} = 120$; $b = 29$; $h_c = 23,76$.
57. $a = 6$; $b = 8$; $S = 12$.
58. $b = 98$; $c = 76$; $m_c = 68$.
59. $a = 20$; $b = 12$; $m_c = 14$.
60. $h_a = 8$; $h_b = 12$; $h_c = 18$.
61. $b = 42$; $c = 28$; $l_a = 12,81$.

§ 14. Trigonomeetrilised võrrandid.

Võrrandeist 1—12 leida x : 1) üldkuju ja 2) vahemikus 0° kuni 360° (0 kuni 2π).

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1. $3 \sin x = 2 \cos^2 x.$ | 2. $\sin x = \cot x.$ |
| 3. $3 + 2 \cos x = 4 \sin^2 x.$ | 4. $\sin x = -\cos x.$ |
| 5. $\tan x = 3 \cot x.$ | 6. $\tan x = 2 \sin x.$ |
| 7. $\cot x = 3 \cos x.$ | 8. $\operatorname{cosec} x = 2 \sin x.$ |
| 9. $\sin 3x = 0,5.$ | 10. $\cot \frac{2x}{5} = 1.$ |
| 11. $3 \tan^2 \frac{x}{3} = 1.$ | 12. $2 \sin\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 1.$ |

13. Leida seos nurkade α ja β vahel järgmistel juhtudel:

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\sin \alpha = \sin \beta;$ | 2) $\cos \alpha = \cos \beta;$ |
| 3) $\tan \alpha = \tan \beta;$ | 4) $\cot \alpha = \cot \beta;$ |
| 5) $\sin \alpha = -\sin \beta;$ | 6) $\cos \alpha = -\cos \beta;$ |
| 7) $\tan \alpha = -\tan \beta;$ | 8) $\cot \alpha = -\cot \beta;$ |
| | 9) $\sin \alpha = \cos \beta;$ |
| | 10) $\sin \alpha = -\cos \beta;$ |
| | 11) $\tan \alpha = \cot \beta;$ |
| | 12) $\tan \alpha = -\cot \beta.$ |

Lahendada järgmised võrrandid (14—73):

14. $\cot 10x = 0.$
15. $(\cos x)^{\sin x} = 1.$
16. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x.$
17. $a (\sin x + \cos x)^2 = b \sin 2x.$
18. $\tan px + \tan qx = 0.$
19. $\sin 3x = -\cos x.$
20. $\sin 5x \cdot \tan 4x \cdot \cos 2x = 0.$
21. $a \sin x + b \cos x = 0.$
22. $\sin x + \cos x = \operatorname{cosec} x.$
23. $5 \cos 2x = 4 \sin x.$
24. $\cos \frac{x}{2} + \cos x = 1.$

25. $\sin(m + x) + \sin x = \cos \frac{m}{2}$.
26. $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$.
27. $\frac{\tan 2x}{\tan x} + \frac{\tan x}{\tan 2x} = 2,5$.
28. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}$.
29. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$.
30. $2 \sin x - 9 \cos x = 7$.
31. $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$.
32. $14,36 \sin x + 23 \cos x = 26,02$.
33. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$.
34. $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$.
35. $\sec x = \sin x + \cos x$.
36. $\sin x + \cos x = \sec x + \operatorname{cosec} x$.
37. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 - \tan x$.
38. $\tan x + \cot x = \sec 80^\circ$.
39. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 3 \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.
40. $(4 - \sqrt{3})(\sec x + \operatorname{cosec} x) =$
 $= 4(\sin x \cdot \tan x + \cos x \cdot \cot x)$.
41. $\sin(x + 30^\circ) \cdot \sin(x - 30^\circ) = \sin 30^\circ$.
42. $\tan x + \tan(45^\circ + x) = 2$.
43. $\cos(a - b) \cdot \sin(c - x) =$
 $= \cos(a + b) \cdot \sin(c + x)$.
44. $\tan 2x = \tan(x - 45^\circ) \cdot \tan x \cdot \tan(x + 45^\circ)$.
45. $\sec^2 x + 3 \sec x \cdot \operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec}^2 x = 4$.
46. $\tan 3x = \sin 6x$.
47. $\sqrt{2} \cdot \cos 2x = \cos x + \sin x$.
48. $4 \sin^2 x + \sin^2 2x = 3$.
49. $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$.
50. $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 30^\circ$.

51. $\cos 4x + \cos 2x + \cos x = 0$.
52. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.
53. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = a \cdot \sin 2x - b \cdot \cos 2x$.
54. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.
55. $\cot(\pi - 3x) = \tan(x - \pi)$.
56. $\cos \frac{x}{2} + \cos x = 1$.
57. $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} \frac{x}{2}$.
58. $\sec^2 \frac{x}{2} + \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2} = 16 \cot x$.
59. $8 \tan^2 \frac{x}{2} = 1 + \sec x$.
60. $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = 1 + \sin 2x$.
61. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.
62. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$.
63. $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$.

Võrrandeis (64—73) esinevad murdavaldised tuleb enne taandada (vastasel korral tekivad vöörlahendid):

64. $\frac{\cos 2x}{1 + \tan x} = 0$.
65. $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$.
66. $\tan x \cdot \cot 2x = 0$.
67. $\sin 3x \cdot \cot x = 0$.
68. $\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\cos 2x}$.
69. $\frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$.
70. $\frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$.
71. $\cot x \cdot \tan 2x - \tan x \cdot \cot 2x = 2$.
72. $\sin 3x \cdot \tan 2x \cdot \sec x = 0$.
73. $3 \sin x = 1 - \sqrt{3 \cos^2 x - 2}$.

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid (74—95):

74. Leida $\sin x$ ja $\sin y$, kui $\sin x + \sin y = 0,2$ ja $\cos x + \cos y = -0,2$.

75. Leida $\cos x$ ja $\cos y$ võrrandisüsteemist:

$$\cos(x+y) = \frac{1}{6}(1 - 2\sqrt{6}); \quad \cos(x-y) = \frac{1}{6}(1 + 2\sqrt{6}).$$

76. Leida $\tan x$ ja $\tan y$, kui $x+y=45^\circ$ ja $\tan x + \tan y = 10$.

77. Võrrandisüsteemist

$$a = x \cdot \sin \alpha; \quad b = x \cdot \sin \beta; \quad \alpha + \beta = \varphi$$

avaldata x suuruste a , b ja φ kaudu.

78. Leida x ja y , kui $\sin(x-y) = \cos(x+y) = \frac{1}{2}$.

Leida teravnurgad järgmistest võrrandisüsteemidest (79–95):

79. $\sin x \cdot \cos y = 0,36; \quad \cos x \cdot \sin y = 0,14.$

80. $\sin x \cdot \sin y = 0,36; \quad \cos x \cdot \cos y = 0,14.$

81. $x+y=a; \quad \sin x + \sin y = a.$

82. $x+y=77^\circ; \quad \cos x - \cos y = 0,4898.$

83. $x+y=a; \quad \sin x \cdot \sin y = a.$

84. $x-y=48^\circ 20'; \quad \cos x \cdot \cos y = 0,4897.$

85. $x+y=a; \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{m}{n}.$

86. $x+y=96^\circ 38'; \quad \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{5}{3}.$

87. $x+y=a; \quad \tan x + \tan y = a.$

88. $x-y=31^\circ; \quad \tan x - \tan y = 0,74.$

89. $x+y=a; \quad \tan x \cdot \tan y = a.$

90. $x-y=5^\circ; \quad \tan x \cdot \tan y = 0,8391.$

91. $x+y=a; \quad \frac{\tan x}{\tan y} = \frac{m}{n}.$

92. $x-y=3^\circ 46'; \quad \frac{\tan x}{\tan y} = \frac{11}{9}.$

93. $2\sin x + \cos y = 1; \quad 16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4.$

94. $x+y+z=180^\circ; \quad \tan x \cdot \tan y = 2;$
 $\tan x \cdot \tan z = 3.$

95. $x+y+z=180^\circ; \quad \tan x \cdot \tan y = 3;$
 $\tan y \cdot \tan z = 14.$

§ 15. Tsüklomeetriselised funktsioonid.

(Vt. ka § 2, nr. 32—36.)

Näpunäide. Järgmiste ülesannete lahendamisel peab meeles pidama neid vahemikke, milles on kokku lepitud vaadelda tsüklomeetriseliste funktsioonide väärtusi, ja heitma kõrvale need lahendid, mis ei kuulu neisse vahemikesse.

Leida järgmiste avaldiste väärtused (1—16):

1. 1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\operatorname{arcsec} 2$; 3) $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
2. 1) $\sin\left(\operatorname{arc cot} \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(2 \operatorname{arc sin} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
3) $\tan\left(\operatorname{arc cos} \frac{1}{2}\right)$.
3. 1) $\cot[\operatorname{arc tan}(-1)]$; 2) $\sin\left(3 \operatorname{arc cos} \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
3) $\cos\left[2 \operatorname{arc sin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$.
4. 1) $\cos(\operatorname{arc cos} x)$; 2) $\sin\left(\operatorname{arc tan} \frac{3}{4}\right)$;
3) $\sin[\operatorname{arc tan}(-2)]$.
5. 1) $\sin\left(\operatorname{arc sin} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\cos(\operatorname{arc cos} \frac{1}{2})$;
3) $\tan(\operatorname{arc tan} \sqrt{3})$.
6. 1) $\operatorname{arc cot}\left(\cot \frac{4\pi}{5}\right)$; 2) $\operatorname{arc tan}(\tan x)$;
3) $\operatorname{arc cos}\left(\sin \frac{\pi}{7}\right)$.
7. 1) $\sin(\operatorname{arc cos} 0,8)$; 2) $\cos\left(\operatorname{arc sin} \frac{8}{17}\right)$;
3) $\tan\left(\operatorname{arc sin} \frac{3}{5}\right)$.
8. 1) $\sin\left(\operatorname{arc sin} \frac{1}{2} + \operatorname{arc cos} \frac{1}{2}\right)$;
2) $\cos\left(\operatorname{arc cos} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc sin} \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
9. 1) $\tan\left(\operatorname{arc tan} 2 + \operatorname{arc tan} \frac{1}{2}\right)$;
2) $\tan\left(\operatorname{arc tan} x + \operatorname{arc tan} \frac{1}{x}\right)$.

$$10. \tan \left(\arctan \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \arctan \frac{2b-a}{a\sqrt{3}} \right).$$

$$11. \sin \left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{8}{17} \right).$$

$$12. \cos \left(\arccos \frac{9}{\sqrt{82}} + \operatorname{arccosec} \frac{\sqrt{41}}{4} \right).$$

$$13. \cos \left(2 \arcsin \frac{2}{7} \right). \quad 14. \sin (2 \arcsin m).$$

$$15. \tan \left(3 \arctan \frac{1}{4} \right). \quad 16. \sin (2 \arctan m).$$

Kontrollida järgmiste võrduste kehtivust (17—31):

$$17. \text{ a) } \arcsin \frac{3}{5} = \arccos \frac{4}{5};$$

$$\text{ b) } \arcsin \sqrt{\frac{a}{a+b}} = \arctan \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$18. \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}.$$

$$19. \arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{7} = \arccos \left(-\frac{11}{14} \right).$$

$$20. \arcsin 0,6 - \arcsin 0,8 = -\arcsin 0,28.$$

$$21. \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

$$22. \operatorname{arccot} \frac{1}{7} + \operatorname{arccot} \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$23. 2 \arccos a = \arccos (2a^2 - 1), \text{ kui } 0 \leq a \leq 1.$$

$$24. \arcsin m = \arccos (1 - 2m^2), \text{ kui } 0 \leq m \leq 1.$$

$$25. 2 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{4} = \arctan \frac{32}{43}.$$

$$26. \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

$$27. 2 \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} = \arccos \frac{a-x}{a+x}.$$

$$28. \arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arccot} \frac{2}{11}.$$

$$29. \arctan m + \arctan n = \arccos \frac{1-mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}},$$

kui $0 \leq m$ ja $0 \leq n$.

$$30. \operatorname{arc} \cot \sqrt{3} + \operatorname{arc} \cot (2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$31. \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arc} \tan \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arc} \tan (\sqrt{2} + 1)^2.$$

Lahendada järgmised võrrandid (32—44):

$$32. \operatorname{arc} \tan (1 + x) + \operatorname{arc} \tan (1 - x) = \frac{\pi}{4}.$$

$$33. \operatorname{arc} \cos (x - 1) = 2 \operatorname{arc} \cos x.$$

$$34. \operatorname{arc} \tan x = 2 \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x}.$$

$$35. \operatorname{arc} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{arc} \tan (x - 1).$$

$$36. \operatorname{arc} \sin 2x = 3 \operatorname{arc} \sin x.$$

$$37. x = \operatorname{arc} \sin (\cos x).$$

$$38. 2x = \operatorname{arc} \cot (\tan x).$$

$$39. \operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$40. \operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin x \sqrt{3} = \frac{\pi}{2}.$$

$$41. \operatorname{arc} \cos x + \operatorname{arc} \cos (1 - x) = \operatorname{arc} \cos (-x).$$

$$42. \operatorname{arc} \tan x + \operatorname{arc} \tan 3x = \frac{\pi}{2}.$$

$$43. \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x-1} - \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x+1} = \operatorname{arc} \tan a.$$

$$44. \operatorname{arc} \tan x + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sec 5x = \frac{\pi}{4}.$$

TEINE OSA.

TRIGONOMEETRIA RAKENDAMIST NÕUDVAID
GEOMEETRIA ÜLESANDEID.

§ 15a. Planimeetria.

Korrapäraseid
hulknurged.

1. Ringisse joonestatud korrapärase n -nurga antud külje a kaudu avaldada ringi ümber joonestatud korrapärase n -nurga külg b .

2. Arvutada korrapärase 7-nurga diagonaalide pikkused, kui 7-nurga külg on 10 cm.

3. Avaldada korrapärase n -nurga lühima diagonaali pikkus, kui n -nurga külg on a cm.

4. Korrapärase n -nurga külje a kaudu avaldada selle n -nurga pikima diagonaali pikkus kahel juhul: 1) kui n on paarisarv ja 2) kui n on paaritu arv.

Hulknurga
pindala.

5. Ristküliku diagonaalid moodustavad teineteisega nurga $75^{\circ}24'$; ristküliku pindala on 562 m^2 . Arvutada ristküliku küljed.

6. Ringi ümber, mille raadius on r , on joonestatud romb, mille teravnurk on α . Leida rombi pindala ($r = 5$; $\alpha = 36^{\circ}47'$).

7. Võrdhaarse kolmnurga pindala on Q ja tipunurk on β . Leida kolmnurga kõrgus ($Q = 450$; $\beta = 73^{\circ}$).

8. Võrdhaarse kolmnurga pindala on $Q \text{ m}^2$ ja alus b m. Leida kolmnurga tipunurk ($Q = 1956$; $b = 130,7$).

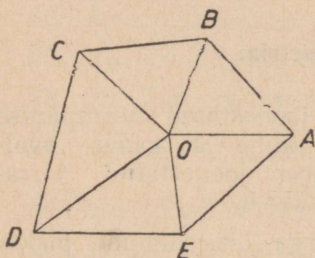
9. Korrapärase n -nurga külje a järgi avaldada ja arvutada n -nurga pindala: 1) $n = 7$; $a = 20$; 2) $n = 8$; $a = 1$; 3) $n = 12$; $a = 10$.

10. Ringisse, mille raadius on R , on joonestatud korrapärane n -nurk. Avaldada ja arvutada n -nurga pindala: 1) $n = 12$; $R = 7$; 2) $n = 5$; $R = 7$.

11. Ringi ümber, mille raadius on R , on joonestatud korrapärane n -nurk. Avaldada n -nurga pindala.

12. Trapetsi alused on 25 cm ja 15 cm, haar on 12 cm ning haara ja suurema aluse vaheline nurk on 50° . Arvutada trapetsi pindala.

13. Maamõõtja mõötis viisnurkse maa-ala nn. polaarmetodil (joon. 18). Lähtudes punktist O (poolus) mõötis ta kaugused $OA = 43$ m, $OB = 36$ m, $OC = 41$ m, $OD = 56$ m ja $OE = 34$ m ning nurgad $\angle AOB = 65^\circ 30'$, $\angle BOC = 71^\circ 20'$, $\angle COD = 80^\circ$ ja $\angle DOE = 61^\circ 35'$. Arvutada maa-ala pindala.



Joon. 18.

14. Avaldada võrdhaarse trapetsi pindala, kui trapetsi diagonaal on a ja diagonaal moodustab alustega nurga α .

15. Korrapärase 6-nurga külg on 84 cm; arvutada temaga pindvõrdse korrapärase 7-nurga külg.

16. Korrapärasel 9-nurgal ja 10-nurgal on võrdsed ümbermõõdud. Leida, kuidas suhtuvad nende pindalad:

Ringi osade pindalad.

17. Arvutada sektori pindala, kui sektori raadius on 8 cm ja temasse joonestatud ringi raadius on 2 cm.

18. Arvutada segmendi pindala, kui on antud ta raadius r ja kaar a : 1) $r = 4,73$; $a = 46^\circ 44'$; 2) $r = 12$; $a = 29^\circ 38'$.

19. Kõõl, mille pikkus on a cm, jaotab ringi, mille raadius on R cm, kaheks segmendiks. Leida väiksema segmendi pindala ($a = 3,5$; $R = 6,2$).

20. Ringis, mille raadius on R cm, on joonestatud kaks paralleelset kõõlu; kummalegi kõõlule vastav kaar on α° . Avaldada kõõlude vahel asetseva ringi osa pindala.

Segaülesandeid.

21. Poolringjoon on jaotatud suhtes 4 : 7 ja jaotuspunktist on joonestatud ristsirge läbimõõdule. Arvutada läbimõõdu lõigud, kui läbimõõdu pikkus on 11 cm.

22. Rööpküliku teravnurk on α ning diagonaalide lõikepunkti kaugused ühe nurga haaradest on a ja b . Avaldada diagonaalide pikkused ja rööpküliku pindala.

23. Kolm ringi, millede raadiused on 1 m, 2 m ja 3 m, puutuvad üksteist. Arvutada nende vahelise tasapinnatüki pindala.

24. Leida rombi teravnurk, kui selle rombi külj on tema diagonaalide keskmine võrdeline.

§ 16. Sirged ja tasapinnad.

Rist- ja kaldlõigud tasapinnale.

1. Punktist M tasapinnale P ehitatud ristlõigu ja kaldlõigu vaheline nurk on α . Kaldlõigu pikkus on a . Leida punkti M kaugus tasapinnast P ($a = 11,22$; $\alpha = 72^\circ 45'$).

2. Tasapinnale on ehitatud ristlõik, mille pikkus on p ; tema aluspunkt on võetud tasapinnal joonestatud ringjoone keskpunktiks; ringjoone raadius on r . Leida ristlõigu ning tema otspunkti ja ringjoone mingit punkti ühendava lõigu vaheline nurk ($p = 4,54$; $r = 8$).

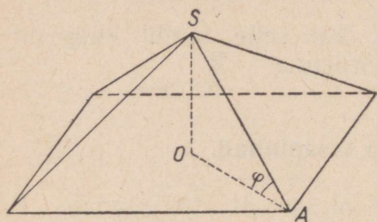
3. Ruudu külj $AB = a = 30$. Ruudu keskpunktist O on ehitatud ristsirge ruudu tasapinnale. Ristsirgel on võetud lõik $OM = d = 20$ ja punktist M on ehitatud ristlõik MC küljele AB . Arvutada nurk x lõigu MC ja tema projektsiooni OC vahel.

4. Arvutada kuubi diagonaali ja tahu vaheline nurk.

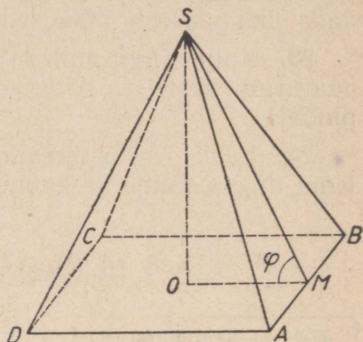
5. Ruudukujulise põhjaga silosüvendile on tarvis ehitada korrapärase 4-nurkse püramiidi kujuline katus. Põhiserv on 6,5 m. Katuse kõrgus peab olema 2,5 m. Arvutada sarika SA pikkus ja sarika kaldenurk põhitahu suhtes (joon. 19).

6. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on 7 cm ja põhiserv on 8 cm. Kui suur on külgserva ja põhitahu vaheline nurk?

7. Telk, millel on korrapärase nelinurkse püramiidi kuju, koosneb presendiga ületõmmatud neljast latist (joon. 20). Telgi kõrgus SO on 2,4 m; kahe kõrvuti oleva lati aluspunktide kaugus teineteisest on $AB = 2$ m. Leida telgi tipu kaugus SM põhiserva keskpunktist (s. o. püramiidi apoteem) ja tema kaldenurk põhja suhtes.



Joon. 19.



Joon. 20.

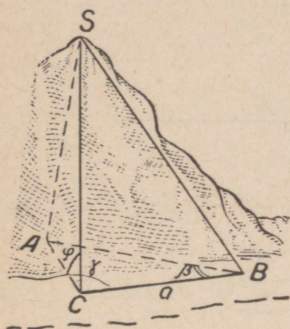
8. Korrapärase kolmnurga ABC külg on a . Kolmnurgesse joonestatud ringi keskpunktist O ehitatakse sirge risti kolmnurga tasapinnaga; ristsirgel võetakse punkt M nii, et $MA = a$; seejärel ehitatakse punktist M küljele AC ristlõik MD . Arvutada lõigu MD ja kolmnurga ABC tasapinna vaheline nurk φ .

9. Kaldsirge moodustab tasapinnaga nurga α ; selle nurga tipust on antud tasapinnal ehitatud sirge, mis kaldsirge projektsiooniga moodustab nurga β . Leida nurk nende sirgete vahel ($\alpha = 43^\circ 53'$; $\beta = 11^\circ 10'$).

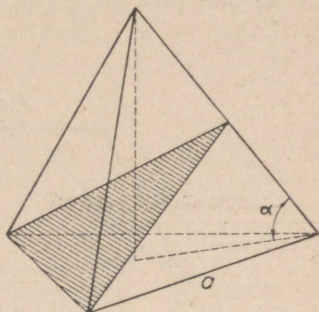
10. Väljaspool tasapinda asetsev sirge lõikub tasapinnal asetseva sirgega, moodustades sellega nurga α . Viimane sirge moodustab esimese sirge projektsiooniga tasapinnal nurga β . Leida esimese sirge ja tasapinna vaheline nurk ($\alpha = 8^\circ 26'$; $\beta = 5^\circ 40'$).

11. Kolmnurga küljed on a , b ja c . Kolmnurga ümber joonestatud ringi keskpunktist on ehitatud kolmnurga tasapinnale ristlõik h . Leida nurgad, mille moodustavad selle tasapinnaga sirged, mis ühendavad ristjoone otspunkti kolmnurga tippudega ($h = 60$; $a = 30$; $b = 5$; $c = 29$).

12. Sirge teosa BC , mille pikkus on a meetrit, kulgeb mööda rõhtsat maapinda. Tee kõrval asetseb mägi, mille tipu kõrgusnurk punktist C on φ (joon. 21). Tipu S projektsioon maapinnal on punkt A . Lõik BC moodustab oma otspunktidest punkti A suunatud kiirtega nurgad $\angle ACB = \gamma$ ja $\angle ABC = \beta$. Leida mäe kõrgus ($a = 400$; $\beta = 40^\circ 10'$; $\gamma = 60^\circ 40'$; $\varphi = 50^\circ 50'$).



Joon. 21.



Joon. 22

13. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a ja külgserv moodustab põhitahuga nurga α (joon. 22). Leida põhiserva ja külgserva keskpunkti läbiva lõike pindala.

Paralleelsed sirged
ja tasapinnad.

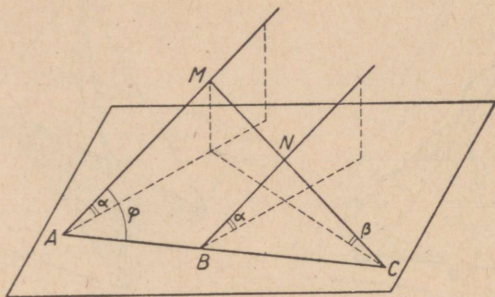
14. Lõigu $AB = a = 13$ cm otspunktide kaugused tasapinnast on $m = 5$ cm ja $n = 8$ cm. Leida nurk lõigu ja tasapinna vahel (2 juhtu).

15. Tasapinna kahest punktist väljuvad kaks paralleelset kaldsirget AM ja BN , mis tasapinnaga moodustavad nurga α (joon. 23); sirge MN , lõikudes kaldsirgetega täisnurgi, moodustab tasapinnaga nurga β . Avaldada sirgete AB ja AM vaheline nurk φ .

16. Tasapinna kahest punktist, mille kaugus teineteisest on a , väljuvad kaks teineteisega paralleelset kaldsir-

get, mille kaldenurgad tasapinna suhtes on φ . Avaldada nende sirgete vaheline kaugus, kui nende projektsioonide vaheline kaugus tasapinnal on b .

17. Lõik AB on paralleelne tasapinnaga. Lõigu otspunktidest on ehitatud kaldlõigud tasapinnale $AC = c$ ja $BD = d$. Kaldlõik AC moodustab tasapinnaga nurga α . Leida kaldlõigu BD ja tasapinna vaheline nurk ($c = \sqrt{6}$; $d = 3$; $\alpha = 60^\circ$).



Joon. 23.

18. Tasapinnaga paralleelse lõigu otspunktidest on ehitatud temale kaks ristsirget, mis tasapinnaga moodustavad nurgad α ja β ($\alpha > \beta$). Lõigu pikkus on a ning ristsirgete ja tasapinna lõikepunktide kaugus teineteisest on b . Avaldada lõigu kaugus tasapinnast (2 juhtu).

19. Kaks sirglõiku, mis on piiratud kahe paralleelse tasapinnaga, suhtuvad nagu 2 : 3. Nurgad, mis need lõigud moodustavad ühe tasapinnaga, suhtuvad nagu 2 : 1. Arvutada need nurgad.

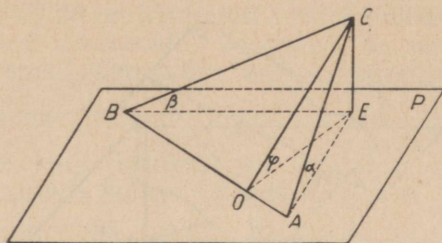
§ 17. Kahetahulised ja mitmetahulised nurgad.

1. On antud kahetahuline nurk α . Punktist, mis asetseb nurga ühel tahul kaugusel a nurga servast, on ehitatud ristlõik lõikumiseni teise tahuga. Leida ristlõigu pikkus ($a = 6,06$; $\alpha = 41^\circ 55'$).

2. 1) Täisnurkne kolmnurk ABC asetseb nii, et ta hüpotenuus on tasapinnal P ning kaatetid moodustavad

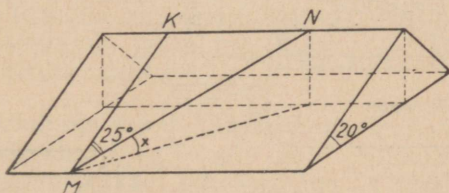
tasapinnaga P nurgad α ja β (joon. 24). Avaldada tasapindade ABC ja P vaheline nurk φ .

2) Kolmnurga ABC üks külge (AB) asetseb tasapinnal P . Teised küljed (CA ja CB) moodustavad tasapinnaga P nurgad α ja β , mille tangensid on vastavalt $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{4}$; nende külgede projektsioonid sel tasapinnal on teineteisega risti. Arvutada tasapinna ABC kaldenurk tasapinna P suhtes.



Joon. 24.

naga P nurgad α ja β , mille tangensid on vastavalt $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{4}$; nende külgede projektsioonid sel tasapinnal on teineteisega risti. Arvutada tasapinna ABC kaldenurk tasapinna P suhtes.

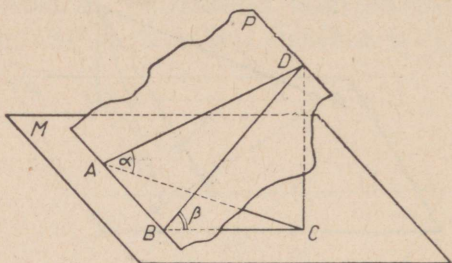


Joon. 25.

3. Katusel, mille kaldenurk rõhttasapinna suhtes on 20° , on ehitatud sirge MN (joon. 25) nurgi 25° langusjoonega MK (tasapinna langusjooneks nimetatakse seda tasapinna sirget, mis on risti samal tasapinnal võetud rõhtsa sirgega). Arvutada sirge MN ja rõhttasapinna vaheline nurk x .

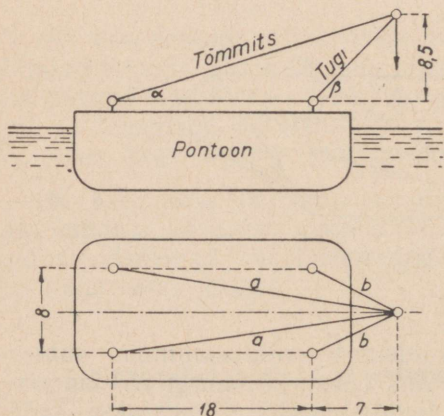
4. Mööda mäenõlva, mille kaldenurk on 32° , kulgeb tee, mis langusjoonega moodustab 45° -se nurga (vt. ülesannet 3). Arvutada tee tõusnurk.

5. Läbi tasapinna M punkti A on ehitatud sirge AD , mis tasapinnaga moodustab nurga α (joon. 26). Läbi AD on ehitatud tasapind P nurgi $DBC = \beta$ tasapinnaga M . Avaldada sirge AD ning tasapindade M ja P lõikesirge vaheline nurk.

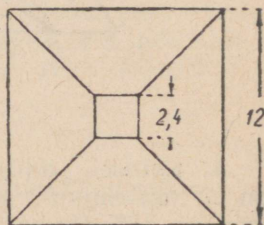


Joon. 26.

6. Korrapärase n -nurkse püramiidi kõrgus on kaks korda väiksem kui püramiidi põhiserv. Avaldada põhja ja külgtahu vaheline nurk φ .



Joon. 27.



Joon. 28.

7. Joonisel 27 on antud ujuva pontoonkraana (pontoon on lamedapõhjaline raudpaat) kõrvaltvaade ja pealtvaade. Mõõtmed on antud meetreis. Arvutada: a) tõmmitsate

pikkus a ja tugede pikkus b ; b) tõmmitsate ja tugede kaldenurgad pontooni rõhtsa pinna suhtes; c) tõmmitsatevaheline nurk ja tugedevaheline nurk; d) tõmmitsate tasapinna ja pontooni tasapinna vaheline nurk ning tugede tasapinna ja pontooni tasapinna vaheline nurk.

8. Joonisel 28 on kujutatud ruudukujulise põhiplaaniga hoone katuse pealtvaade. Mõõtmed on antud meetreis. Katuse ülemine, rõhtne osa asetseb kõrgusel, mis moodustab $\frac{1}{3}$ hoone laiuusest (lugedes katuse põhjast). Kõigi nelja katuse külje kaldenurgad rõhttasapinna suhtes on võrdsed. Arvutada katuse külgede kaldenurk.

9. On antud täisnurkse kolmnurga hüpotenuus a ja teravnurk α . Avaldada täisnurga tipu kaugus tasapinnast, mis läbib hüpotenuusi ja moodustab kolmnurga tasapinnaga nurga φ .

10. Püramiidi põhjaks on korrapärane kolmnurk. Üks külgtahk on risti põhitahuga ja teised külgtahud moodustavad põhitahuga kumbki nurga α . Kui suured on nurgad külgservade ja põhitahu vahel?

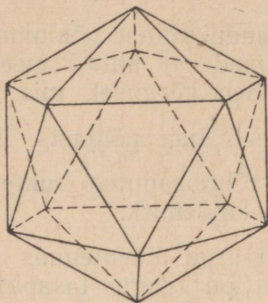
11. Sirge AB on paralleelne tasapinnaga P . Sirge CD moodustab lõikudes sirgega AB nurga α ja tasapinnaga P nurga φ . Avaldada tasapinna P ning sirgeid AB ja CD läbiva tasapinna vaheline nurk.

12. Risttahuka ühest tipust väljuvate servade otspunktid on ühendatud sirglõikude abil. Risttahuka tahkudel tekkinud kolmnurkade pindalad on 4 dm^2 , 6 dm^2 ja 12 dm^2 . Arvutada ühenduslõike läbiva tasapinna ja risttahuka väiksema põhja vaheline nurk.

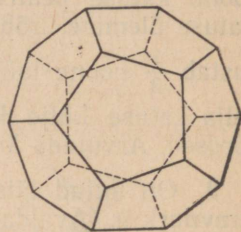
13. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv ja külgserv suhtuvad nagu $\sqrt{3} : \sqrt{2}$. Läbi põhja diagonaali on asetatud tasapind paralleelselt külgservaga. Arvutada selle tasapinna ja põhitahu vaheline nurk.

14. Rööpküliku üks väiksem külge asetseb tasapinnal P , tema vastaskülge asetseb tasapinnast P kaugusel, mis on võrdne rööpküliku suuremate külgede kaugusega teineteisest. Arvutada rööpküliku tasapinna ja tasapinna P vaheline nurk, kui rööpküliku külgede suhe on $3 : 5$.

15. Arvutada: 1) korrapärase tetraeedri; 2) korrapärase oktaeedri; 3) korrapärase ikosaeedri (joon. 29); 4) korrapärase dodekaeedri (joon. 30) lähistahkude vahelised nurgad.



Joon. 29.



Joon. 30.

§ 18. Kujundi projektsiooni pindala.

1. Rööpküliku pindala $Q = 50 \text{ cm}^2$. Tema tasapind moodustab projektsioonitasapinnaga P nurga 30° . Rööpküliku üks külg asetseb projektsioonitasapinnal P . Arvutada rööpküliku projektsiooni pindala.

2. Läbi kolmnurkse püstprisma põhiserva on asetatud tasapind, mis lõikub vastasoleva külgservaga ja moodustab põhitahuga 45° -se nurga. Avaldada lõike pindala, kui põhja pindala on Q .

3. Läbi korrapärase kolmnurkse prisma põhiserva on asetatud lõiketaspind, mis moodustab põhitahuga nurga α . Prisma põhiserv on a . Avaldada lõike pindala.

4. Korstnal on korrapärase nelinurkse prisma kuju. Katuse kaldenurk on 32° . Katusesse korstna jaoks jäetud avause pindala on 2100 cm^2 . Arvutada korstna laius.

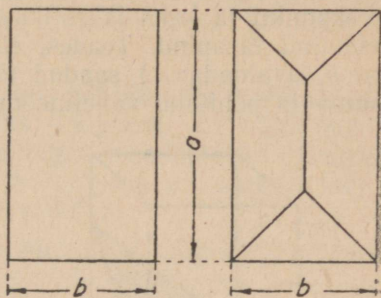
5. Korstna ristlõige on $40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$. Katuse kaldenurk on 35° . Arvutada korstna jaoks katusesse jäetud avause pindala.

6. Neljaküljeline katus katab 28-ruutmeetrilist pindala.

Katuse iga külg moodustab laega nurga $32^{\circ}53'$. Arvutada katuse pindala.

7. Neljaküljelise katuse küljel on võrdhaarse trapetsi kaju, mille alused on 10 m ja 6 m ning kõrgus on 5 m. Katuse külje projektsiooni pindala lae tasapinnal on 32 m^2 . Leida katuse külje kaldenurk ja katuse kõrgus laest.

8. Joonisel 31 on kujutatud ühe- ja neljaküljelise katuse ristküliku-kujulised põhijoonised. Ristkülikute küljed on a ja b ning mõlema katuse külgede kaldenurgad on α . Kumba katuse värvimiseks kulub rohkem värvi?



Joon. 31.

9. Pinna valgustustugevus oleneb valguskiirte ja valgustatava pinna vahelisest nurgast. Olgu valgustatava tasapinnatüki pindala Q ja moodustagu valguskiired selle tasapinnaga nurga α . Kui suurele pinnale langeksid samad kiired, kui valgustatav tasapind oleks kiirtega risti? Kas see pind on endisest suurem või väiksem? Kas pind on endisest tugevamini või nõrgemini valgustatud?

10. Kui suurt rõhttasapinna osa saab katta katusega, mille kaldenurk on $27^{\circ}30'$ ja pindala on 120 m^2 ?

§ 19. Rööptahukad, prismad, püramiidid ja nende pindalad.

Rööptahukad ja prismad.

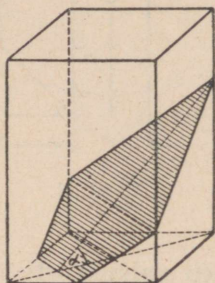
1. Risttahuka diagonaal moodustab tema servadega nurgad α , β ja γ .

1) Tõestada, et $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. 2) Arvutada γ , kui $\alpha = 31^{\circ}10'$ ja $\beta = 69^{\circ}09'$.

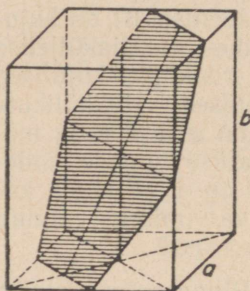
2. Kui korrapärast nelinurkset prismat lõigata nii, et lõikena tekib romb, mille teravnurk on α , siis lõiketaspind osutub paralleelseks põhja diagonaaliga ja moodustab põhjaga nurga $\varphi = \arccos\left(\tan \frac{\alpha}{2}\right)$. Tõestada see lause.

3. Läbi korrapärase nelinurkse prisma (joon. 32) kahe lähestikuse põhiserva keskpunktide on asetatud tasapind, mis lõikab kolme külgserva ja moodustab põhitahuga nurga α . Avaldada saadud lõike pindala, kui prisma põhiserv on a .

4. Läbi korrapärase nelinurkse prisma (joon. 33) telje keskpunkti ja kahe lähestikuse põhiserva keskpunktide on asetatud tasapind. Teades, et põhiserv on a ja külgserv on b , avaldada: 1) saadud lõike pindala ja 2) lõiketasa-pinna ja põhitahu vaheline nurk.



Joon. 32.



Joon. 33.

5. Nelinurkse püstprisma põhjaks on romb, mille teravnurk on α . Kuidas peab lõikama seda prisma, et lõikena tekiks ruut, mille tipud asetsevad prisma külgservadel?

6. Risttahuka diagonaal d moodustab põhjaga nurga β . Põhja diagonaali ja põhiserva vaheline nurk on α . Leida risttahuka külgpindala ($\alpha = 21^\circ 35'$; $\beta = 54^\circ 24'$; $d = 17,89$ m).

7. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille väiksem diagonaal on d ja teravnurk on α . Rööptahuka kõrgus on $\frac{d}{2}$. Leida rööptahuka täispindala ($d = 25,87$; $\alpha = 75^\circ 20'$).

8. Korrapärase viisnurkse prisma põhiserv on a , põhja diagonaal on d ja prisma kõrgus on $\frac{d}{4}$. Leida prisma täispindala ($a = 23,79$).

9. Püstprisma põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille haar on a ja tipunurk on α . Võrdsete külgtahkude diago-

naalid, mis väljuvad ühest ja samast põhja tipust, moodustavad teineteisega nurga β . Leida prisma külgpindala ($a = 97,84$ cm; $\alpha = 63^\circ 28'$ ja $\beta = 39^\circ 36'$).

10. Prisma põhjaks on korrapärase kolmnurk, mille külge on a . Ühe põhja ühe tipu projektsioon asetseb teise põhja keskpunktis. Külgservad moodustavad põhitahuga nurga α . Avaldada prisma külgpindala.

Püramiid.

11. Püramiidi põhjaks on korrapärase kolmnurk. Üks külgtahk on risti põhitahuga, teised aga moodustavad kumbki põhitahuga nurga φ . Leida, kui suured on nurgad külgservade ja põhitahu vahel ($\varphi = 30^\circ$).

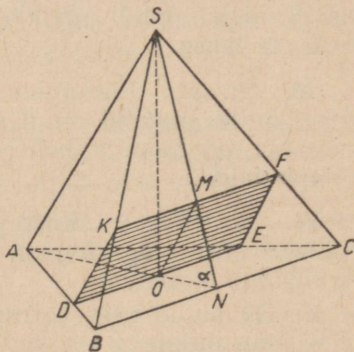
12. Korrapärase n -nurkse püramiidi külgtahu tipunurk on α . Leida püramiidi külgtahkude ja põhitahu vahelised nurgad ($n = 4$; $\alpha = 60^\circ$).

13. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja külgserv moodustab põhitahuga nurga α . Püramiidisse on kujundatud kuup nii, et ta neli tippu asetsevad püramiidi apoteemidel. Avaldada kuubi serv.

14. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a ja moodustab külgservaga nurga α . Avaldada läbi püramiidi külgserva ja kõrguse tehtud lõike pindala.

15. Korrapärase nelinurkse püramiidi apoteem on c ja diagonaallõike pindala on P . Leida püramiidi külge ja põhitahu vaheline nurk ning põhiserv ($c = 5$; $P = 15$).

16. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrguse ja põhiserva suhe on $m : n$. Läbi põhitahu diagonaali on pandud kaldtasapind nii, et lõike pindala võrdub diagonaallõike pindalaga. Leida lõiketasetapinna ja põhitahu vaheline nurk ($m : n = 1 : \sqrt{6}$).



Joon. 34.

17. Korrapärase kolmnurkse püramiidi (joon. 34) põhiserv on a ning külg- ja põhitahu vaheline nurk on α . Püramiidi lõike $DEFK$ tasapind läbib põhja keskpunkti ja on paralleelne püramiidi kiivsete servadega SA ja BC . Leida selle lõike pindala ($a = 3$; $\alpha = 70^\circ$).

18. Korrapärase nelinurkse püramiidi külg- ja põhitahu vaheline nurk on α . Püramiid on lõigatud põhiserva läbiva tasapinnaga, mis põhitahuga moodustab nurga β . Põhiserv on a . Avaldada lõike pindala.

Projektsiooni pindala
lause rakendamine
püramiidi pindala
arvutamiseks.

19. Kui mingi püramiidi kõik külgtahud moodustavad põhitahuga võrdsed nurgad α , siis:

$$S_{\text{külg}} = \frac{Q}{\cos \alpha} \text{ ja } S_{\text{täis}} = \frac{2Q \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha},$$

kus S on püramiidi pindala ja Q on põhja pindala. Tõestada see lause.

20. (Peast.) Püramiidi põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatedid on 6 cm ja 8 cm. Püramiidi kõik külg- ja põhitahu vahelised nurgad on 60° . Arvutada külgpindala.

21. 1) (Peast.) Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ning külg- ja põhitahu vaheline nurk on 60° . Avaldada külgpindala.

2) On antud kaks korrapärast püramiidi, üks kolm- ja teine kuusnurkne. Kummagi püramiidi põhiserv on a ning külg- ja põhitahu vaheline nurk on 30° . Avaldada kummagi püramiidi külgpindala.

22. Kolmnurkse püramiidi põhiservad on 13 cm, 14 cm ja 15 cm ning kõik külg- ja põhitahu vahelised nurgad on 60° . Arvutada püramiidi külgpindala.

23. Torn on kaetud korrapärase kaheksanurkse püramiidi kujulise katusega. Püramiidi külg- ja põhitahu vahelised nurgad on 60° . Põhiserv on 1,23 m. Mitu ruutmeetrit plekki kulub katuse katmiseks?

24. Korrapärase püramiidi põhja pindala on 168 cm^2 ja külgpindala on 200 cm^2 . Arvutada külg- ja põhitahu vaheline nurk.

25. (*Peast.*) Korrapärase nelinurkse püramiidi külge- ja põhitahu vaheline nurk on α . Põhiserv on a . Avaldada külgpindala.

26. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on h ning külge- ja põhitahu vaheline nurk on α . Avaldada püramiidi täispindala.

27. Püramiidi põhjaks on romb, mille külge on a ja teravnurk on α . Püramiidi kõik külge- ja põhitahu vahelised nurgad on φ . Avaldada püramiidi täispindala.

28. Korrapärase n -nurkse püramiidi apoteem on k ja ta moodustab põhitahuga nurga α . Leida püramiidi täispindala ($n = 12$; $k = 36,3$; $\alpha = 35^\circ 40'$).

29. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne trapets, mille alused on a ja b ($b > a$). Kõik külge- ja põhitahu vahelised nurgad on α . Avaldada püramiidi täispindala.

30. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne trapets, mille diagonaal on l ja mis moodustab suurema alusega nurga α . Kõik külge- ja põhitahu vahelised nurgad on φ . Avaldada püramiidi täispindala.

**Püramiidi
pindala.**

31. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja külgtahu tipunurk on α . Avaldada püramiidi täispindala.

32. Korrapärase n -nurkse püramiidi põhiserv on a ning külgserva ja põhitahu vaheline nurk on α . Avaldada püramiidi külgpindala.

33. Kolmnurkse püramiidi tipu juures olevad tasanurgad on α , α ja β . Külgserv, mis on võrdsete nurkade ühiseks haaraks, on a ja on risti põhitahuga. Avaldada püramiidi külgpindala.

34. Püramiidi põhjaks on ruut, mille külge on a . Kaks külgtahku on risti põhitahuga ja teised kaks külgtahku moodustavad põhitahuga nurgad α . Avaldada püramiidi külge- ja täispindala.

35. Püramiidi põhjaks on ristkülik. Kaks külgtahku on põhitahuga risti, teised kaks moodustavad aga põhitahuga nurgad α ja β . Püramiidi kõrgus on h . Avaldada püramiidi külgpindala.

36. Püramiidi põhjaks on romb, mille külge on a ja teravnurk on α . Kaks külgtahku (näiteks need, mis hõlma-

vad nurka α) on põhitahuga risti ja kumbki ülejäanud tahk moodustab põhitahuga nurga φ . Avaldada püramiidi külgpindala.

Tüvipüramiid

37. Korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi külgserv on c ning põhiservad on a ja b ($a > b$). Avaldada tüvipüramiidi kõrgus.

38. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi suurem ja väiksem põhiserv suhtuvad nagu $m:n$ ning külgservad moodustavad suurema põhitahuga nurga α . Püramiid on lõigatud tasapinnaga, mis läbib suurema põhja serva ja tema vastas asetsevat väiksema põhjaga serva. Kui suure nurga moodustab see tasapind püramiidi põhjaga?

39. Korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi kõrgus on h ning põhiservad on a ja b ($a > b$). Avaldada tüvipüramiidi täispindala.

40. Korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi põhiservad on a ja b ($a > b$) ning külgserv moodustab põhjaga nurga α . Avaldada tüvipüramiidi täispindala.

41. Korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi põhjade pindalade suhe on m^2 , apoteem on k ning apoteemi ja kõrguse vaheline nurk on α . Avaldada tüvipüramiidi täispindala.

42. On antud korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus h ning nurgad α ja β , mis suurem põhi moodustab külgserva ja tüvipüramiidi diagonaaliga. Leida tüvipüramiidi külgpindala ($h = 25$; $\alpha = 50^\circ 15'$; $\beta = 35^\circ$).

§ 20. Silinder, koonus, tüvikoonus ja nende pindalad.

Silinder.

1. Võrdkülgse telglõikega silindri ülemise põhja piiride punkt on ühendatud alumise põhja piiride punktiga. Nendes punktidesse suunatud raadiuste vaheline nurk (mõeldakse kiivsirgete vahelist nurka) on 30° . Arvutada ühendussirge ja silindri telje vaheline nurk.

2. Võrdkülgse telglõikega silindri põhja raadius on R . Ülemise põhja piirde punkt on ühendatud alumise põhja piirde punktiga sirge abil, mis põhja tasapinnaga moodustab nurga α . Avaldada selle sirge lühim kaugus silindri teljest.

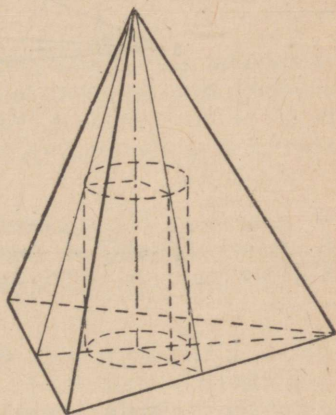
3. Silindrile on ehitatud puutuja, mis põhja tasapinnaga moodustab nurga α . Avaldada alumise põhja keskpunkti kaugus sellest sirgest, kui põhja raadius on R ja põhja keskpunkti kaugus puutepunktist on d .

4. Korrapärase kolmnurkse püramiidi külgserv on b ja moodustab põhitahuga nurga α . Sellesse püramiidi on kujundatud võrdkülgse telglõikega silinder nii, et ta põhi asetseb püramiidi põhitahul (joon. 35). Avaldada silindri kõrgus.

Koonus.

5. Koonuse põhja raadius on R ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Koonus on lõigatud tasapinnaga, mis läbib koonuse tippu ja moodustab kõrgusega nurga φ . Avaldada lõike pindala.

6. Koonus asetseb kahe paralleelse tasapinna vahel nii, et ta põhi asetseb ühel neist ja tipp teisel. Koonuse moodustaja ja kõrguse vaheline nurk on α . Kõrgust poolitab sirge, mis temaga moodustab nurga β ja lõikab koonuse külgpinda kahes punktis. Selle sirge paralleelsete tasapindade vahel asetsev lõik on a . Avaldada selle sirge lõik, mis asetseb seespool koonuse külgpinda.



Joon. 35.

7. Koonusesse, mille moodustaja on l ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α , on kujundatud kuup. Avaldada kuubi serv.

8. Koonuse põhja raadius on R ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Koonusesse on kujundatud kolmnurkne võrdsete servadega püstprisma nii, et ta põhi asetseb koonuse põhja tasapinnal. Avaldada prisma servade pikkus.

Koonuse pindala.

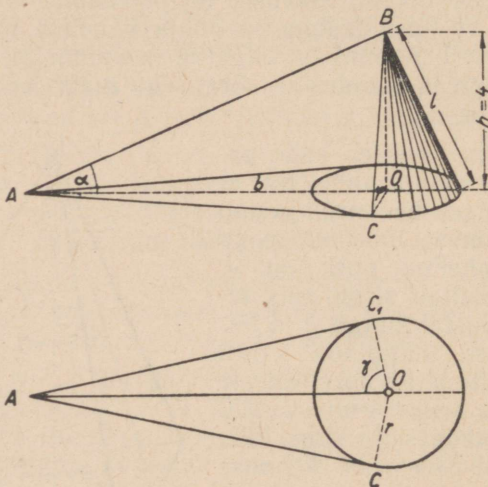
9. Koonuse moodustaja a ja põhja vaheline nurk on α . Avaldada koonuse täispindala.

10. Koonuse külgpindala on kolm korda suurem kui ta põhja pindala. Leida moodustaja ja põhja vaheline nurk.

11. Arvutada koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk, kui koonuse telglõike pindala on neli korda väiksem kui täispindala.

12. Avaldada koonuse täispindala, kui ta moodustaja ja põhja vaheline nurk on α ning telglõike pindala on Q .

13. Läbi koonuse kahe moodustaja, mis teineteisega moodustavad nurga φ , on pandud tasapind, mis koonuse põhjaga moodustab nurga α . Lõike pindala on S . Leida koonuse kõrgus ($\varphi = 52^\circ 16'$; $\alpha = 33^\circ 10'$; $S = 617,5 \text{ cm}^2$).



Joon. 36.

14. Koonuse põhja raadius on r ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Koonus on lõigatud tasapinnaga, mis läbib koonuse tippu ja moodustab kõrgusega nurga δ . Leida koonuse külgpindala ja lõike pindala ($r = 2,3 \text{ m}$; $\alpha = 42^\circ 27'$; $\delta = 36^\circ 21'$).

15. Muldvallil on joonisel 36 näidatud kuju. On antud: $\frac{h}{b} = \frac{1}{n} = 0,05$; $\frac{h}{r} = \frac{1}{m} = \frac{2}{3}$; $h = 4 \text{ m}$. Arvutada: 1) b ; 2) r ; 3) $\alpha = \angle BAO$; 4) $\varphi = \angle BCO$; 5) γ ; 6) valli põhja pindala; 7) valli külgpindala.

16. Koonuse külgpindala on S ja moodustaja on a . Leida koonuse telglõike tipunurk ($S = 81,312 \text{ m}^2$; $a = 10 \text{ m}$).

17. Koonuse kõrgus on H ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Koonuse täispind on jaotatud pooleks tasapinnaga, mis on risti kõrgusega. Avaldada: 1) lõiketaspinna kaugus koonuse tipust; 2) külginna osade suhe ($\alpha = 60^\circ$).

18. Koonuse telglõike tipunurk on α . Avaldada koonuse külginnaalaotuse kesknurk. [Näited: 1) võrdkülgse telglõikega koonus; 2) $\alpha = 70^\circ 24'$.]

Tüvikoonus.

19. Tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r . Moodustaja kaldenurk esimese põhja suhtes on α . Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

20. Tüvikoonuse kõrgus on tema põhjade raadiuste keskmine võrdeline; raadiuste summa on m . Moodustaja kaldenurk põhja tasapinna suhtes on α . Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

21. Läbi tüvikoonuse kahe moodustaja, mis moodustavad omavahel nurga β , on pandud tasapind, mis koonuse põhju lõikab mööda kõõle, mille pikkused on m ja n ($m > n$). Kummalegi kõõlule vastav kaar on α . Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

22. Tüvikoonus, mille põhjade raadiused on R ja r , on lõigatud tasapinnaga, mis põhjaga moodustab nurga β . Lõiketaspind lõikab kummagi põhja piirdejoonest kaare δ . Avaldada lõike pindala.

23. Tüvikoonuse kõrgus on h ning moodustaja ja alumise põhja vaheline nurk on α . Moodustaja on risti telglõike diagonaaliga, mis läbib tema ülemist otspunkti. Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

24. Tüvikoonuse alumise ja ülemise põhja pindalad ning külgpindala suhtuvad nagu $m : n : p$. Avaldada moodustaja ja alumise põhja vaheline nurk.

25. Tüvikoonuse telglõike diagonaalid on teineteisega risti. Moodustaja on l ning moodustaja ja alumise põhja vaheline nurk on α . Leida tüvikoonuse kül- ja täispindala ($l = 12$; $\alpha = 70^\circ 20'$)

26. Tüvikoonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on α ning põhjade pindalad Q ja q . Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

§ 21. Ruumalade arvutamine.

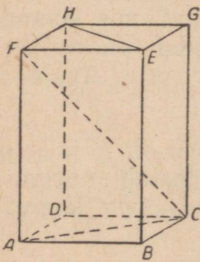
Rööptahukas.

1. Risttahuka diagonaal l moodustab põhja tasapinnaga nurga φ . Põhja diagonaalide vaheline teravnurk on β . Avaldada risttahuka ruumala.

2. Risttahuka põhja diagonaal $d = 7,5$ dm, põhja diagonaalide vaheline nurk $\alpha = 35^\circ 27'$ ning põhja suuremat külge läbiva diagonaaltasapinna ja põhja vaheline nurk $\beta = 57^\circ 33'$. Arvutada risttahuka ruumala.

3. Püströöptahuka põhja teravnurk on α ning küljed on a ja b . Rööptahuka väiksem diagonaal võrdub põhja suurema diagonaaliga. Avaldada rööptahuka ruumala.

4. Püströöptahuka (joon. 37) põhjaks on rööpkülik, mille diagonaal $AC = d$, külg $CB = \frac{1}{4} AC$ ja $\angle ABC = \alpha$. Rööp-



Joon. 37.

tahuka diagonaal FC moodustab põhja tasapinnaga nurga φ . Leida rööptahuka ruumala ning põhjade diagonaalide AC ja EH vaheline nurk ($d = 14,28$ dm; $\alpha = 106^\circ 06'$; $\varphi = 57^\circ 47'$).

5. Rööptahuka ühest tipust väljuvad servad a, b ja c ; servad a ja b on teineteisega risti ning serv c moodustab kummagagi nurga α . Avaldada rööptahuka ruumala ning serva c ja risküliku tasapinna vaheline nurk ($\alpha = 120^\circ$).

Prisma.

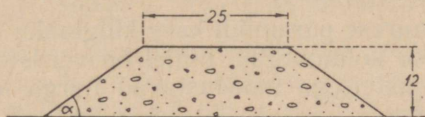
6. Korrapärase nelinurkse prisma diagonaal moodustab külgtahuga nurga α ; prisma põhiserv on a . Avaldada prisma ruumala.

7. Läbi korrapärase nelinurkse prisma alumise põhja diagonaali ja ülemise põhja tipu on pandud tasapind, mis kahte lähiskülgtahku lõikab mööda sirgeid, mis teineteisega moodustavad nurga $\alpha = 58^\circ 48'$. Prisma põhiserv $a = 6,4$ cm. Arvutada prisma ruumala.

8. Korrapärase kolmnurkse prisma ülemise põhja kaks tippu on ühendatud nende vastas asetsevate alumise põhja külgede keskpunktidega. Ühendussirgete vaheline nurk, mille sisepiirkond on pööratud põhja poole, on α ; prisma põhiserv on a . Avaldada prisma ruumala.

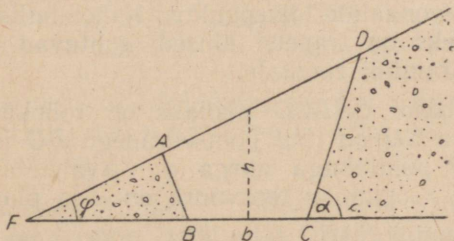
9. Joonisel 38 on kujutatud raudtee muldkeha ristlõige. Nurk α on määratud võrdusega $\tan \alpha = \frac{2}{3}$. Mitu kuupmeetrit mulda sisaldab muldkeha 1 jooksev meetre? Mõõtmed on joonisel antud meetreis.

10. Püstprisma põhjaks on kolmnurk ABC , mille külg $AC = b = 38,03$ dm, külg $BC = a = 34,84$ dm ja nurk $ACB = \gamma = 58^\circ 22'$. Prisma külgserv võrdub kolmnurga ABC kõrgusega h_c . Arvutada prisma ruumala.



Joon. 38.

11. Püstprisma kõrgus $h = 20$ dm. Prisma põhjaks on ringi ümber kujundatud täisnurkne trapets, mille teravnurk $\alpha = 45^\circ 42'$; ringi raadius $r = 6,15$ dm. Avaldada ja arvutada prisma ruumala.



Joon. 39.

12. Maa-alale, mille pinna kaldenurk rõhttasapinna suhtes $\varphi = 18^\circ 30'$ (joon. 39), tahetakse kaevata süvend. Süvendi külgede kaldenurk peab olema $\alpha = 68^\circ 10'$, süvendi alumine laius $b = 14,2$ m ja sügavus keskkohal $h = 9,2$ m. Mitu kuupmeetrit mulda tuleb süvendi 1 jooksva meetri kohta?

13. Prisma põhjaks on kolmnurk ABC , milles $BC = a$ ja $AB = AC$. Serv AA_1 on b ja on risti servaga BC ; kahtahuline nurk serva AA_1 juures on α . Avaldada prisma ruumala.

Püramiid.

14. Korrapärase n -nurkse püramiidi külgserv b moodustab põhja tasapinnaga nurga β . Leida püramiidi ruumala ($n = 8$; $b = 3,5$; $\beta = 78^\circ 39'$).

15. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv on b ja külgtahu tipunurk on α . Avaldada püramiidi ruumala.

16. Avaldada püramiidi ruumala, kui ta kõrgus on h , külgservad moodustavad põhitahuga nurga φ ning põhjaks on kolmnurk, mille kaks nurka on α ja β .

17. Kolmnurkse püramiidi kaks külgtahku on võrdhaarsed täisnurksed kolmnurgad, millel on võrdsed hüpotenuusid b , mis teineteisega moodustavad nurga α . Avaldada püramiidi ruumala.

18. Püramiidi põhjaks on trapets, mille haarad on võrdsed väiksema alusega a ja teravnurgad on α . Püramiidi külgservad moodustavad põhitahuga võrdsed nurgad φ . Avaldada püramiidi ruumala.

19. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne trapets, mille alused on a ja b ($a > b$) ning diagonaalide mittevõrdsete lõikude vaheline nurk on α . Püramiidi kõrguse aluspunkt asetseb põhja diagonaalide lõikepunktis. Kahetahulised nurgad, mille servadeks on trapetsi alused, suhtuvad nagu 1:2. Avaldada püramiidi ruumala.

20. Püramiidi $SABCD$ põhjaks on rööpkülik $ABCD$. Servad SB ja SD on risti põhiservadega BC ja AD ning moodustavad põhitahuga nurga φ . Avaldada püramiidi ruumala, kui rööpküliku teravnurk on α ja pindala on P .

21. Püramiidi $SABC$ tahu ABC nurk A on $\alpha = 72^\circ 36'$ ja nurk B on $\beta = 47^\circ 23'$. Püramiidi ruumala $V = 317 \text{ cm}^3$. Püramiid on lõigatud tasapinnaga, mis läbib serva SC ja kolmnurga ABC nurga C poolitajat. Missugusteks osadeks jaotab see tasapind püramiidi ruumala?

22. Korrapärase tetraeedri serva läbiv tasapind jaotab tetraeedri ruumala suhtes 3:5. Missugusteks osadeks jaotab see tasapind tetraeedri kahetahulise nurga?

Tüvipüramiid.

23. Tiigi süvendil on korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kuju. Põhiservad on $a = 14 \text{ m}$ ja $b = 10 \text{ m}$. Külgtahkude kaldenurk põhitahu suhtes $\alpha = 38^\circ$. Kui palju vett võib süvend mahutada?

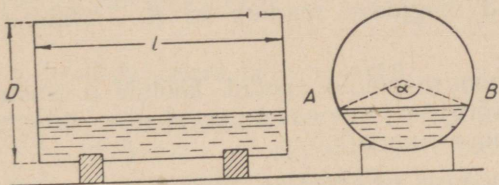
24. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on a ja b ning külgtahu teravnurk on α . Leida tüvipüramiidi ruumala ($a = 28,7$; $b = 15,2$; $\alpha = 65^\circ 12'$).

25. Korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi põhiservad on a ja b . Külgservade kaldenurk põhitahu suhtes on α . Avaldada tüvipüramiidi ruumala.

Silinder.

26. Silindri külgpinnalaotus on ristkülik, mille diagonaal d moodustab alusega nurga α . Avaldada silindri ruumala.

27. Silindri põhjal on võetud kõõl, mille pikkus on a . Temale vastav kaar on α . Silindri kõrgus on h . Leida silindri ruumala ($a = 4,8$ dm; $\alpha = 26^\circ 32'$; $h = 23$ dm).



Joon. 40.

28. Võrdkülgse telglõikega silindri põhjasse on kujundatud korrapärase n -nurk, mille külge on a . Avaldada silindri ruumala.

29. Rõhtsalt asetsev silindrikujuline paak on osaliselt täidetud vedelikuga (joon. 40). Kaarele AB vastab nurk $\alpha = 135^\circ$. Paagi sisemine läbimõõt $D = 1,7$ m ja sisemine pikkus $l = 3,5$ m. Arvutada vedeliku hulk.

30. Silindrilise toru kõrgus on H . Kui läbi toru välispinna moodustaja ehitada kaks tasapinda, mis puutuvad tema sisepinda, siis nende tasapindade vaheline nurk on α ning kõõl, mis ühendab nende tasapindade ja toru põhja sisemise ringjoone puutepunkte, on b . Avaldada toru seinte ruumala.

31. Kui silindri põhjasse kujundatud korrapärase n -nurga külje otspunktid ühendada teise põhja keskpunktiga, siis tekib võrdhaarne kolmnurk, mille pindala on Q ja tipunurk on α . Avaldada silindri ruumala.

Koonus.

32. Peene liiva vaba pinna kaldenurk $\varphi = 31^\circ$. Liivakuhjal on koonuse kuju, mille põhja übermõõt $c = 11$ m. Liiva erikaal $d = 1,6$. Avaldada ja arvutada kuhja kaal.

33. Koonuse moodustaja ja telje vaheline nurk $\alpha = 18^\circ 46'$, moodustaja pikkus $l = 36,17$ dm. Arvutada koonuse ruumala.

34. Koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on α ning kõrgus on h . Avaldada koonuse ruumala.

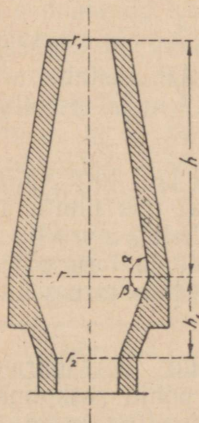
35. Koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on α ning põhja raadius on R . Avaldada koonuse täispindala ja ruumala.

36. Koonuse telglõike tipunurk on α . Telglõike ümber kujundatud ringjoone raadius on R . Avaldada koonuse ruumala.

37. Koonuse põhjal võetud kõõlule a vastab kaar α . Koonuse kõrguse ja moodustaja vaheline nurk on β . Avaldada koonuse ruumala.

38. Koonuse moodustaja ja kõrguse vahe $d = 2,5$ m ning nendevaheline nurk $\alpha = 42^\circ 38'$. Avaldada ja arvutada koonuse ruumala.

39. Kaks koonust asetsevad ühel ning samal pool nende ühist põhja, mille raadius $R = 5,38$ dm. Ühe koonuse moodustaja kaldenurk põhja suhtes $\alpha = 74^\circ 28'$ ja teise oma $\beta = 60^\circ 12'$. Avaldada ja arvutada koonuste külgpindade vaheline ruumala.



Joon. 41.

Tüvikoonus.

40. Tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r . Moodustaja ja esimese põhja vaheline nurk on α . Avaldada tüvikoonuse ruumala.

41. Tüvikoonuse põhjade pindalade suhe on 4, moodustaja on l ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on φ . Avaldada koonuse ruumala.

42. Joonisel 41 on kujutatud kõrgahju telglõige. Ahju õõne moodustavad kaks tüvikoonust. Ülemise ja alumise

ava raadiused on r_1 ja r_2 . Moodustajate kaldenurgad põhja suhtes on α ja β . Ahju õõne ruumala on V . Avaldada ja arvutada tüvikoonuste ühise põhja raadius r ning nende kõrgused h ja h_1 ($2r_1 = 4,2$ m; $2r_2 = 4,9$ m; $\alpha = 86^\circ$; $\beta = 76^\circ$; $V = 572,6$ m³).

43. Tüvikoonuses asetseb koonus, mille põhjaks on tüvikoonuse väiksem põhi, kõrguseks aga tüvikoonuse kõrgus ja mille moodustajad on paralleelsed tüvikoonuse moodustajatega. Tüvikoonuse moodustaja $a = 24,9$ dm ja moodustajate pikendite vaheline suurim nurk $\alpha = 65^\circ 49'$. Avaldada ja arvutada tüvikoonuse ruumala.

44. Tüvikoonuse telglõike diagonaalid on teineteisega risti, moodustaja on l ning moodustaja ja suurema põhja vaheline nurk on α . Avaldada ja arvutada tüvikoonuse ruumala ($l = 12$; $\alpha = 70^\circ 20'$).

§ 22. Kera ja selle osad.

Kera.

1. Maakera raadius on (ligikaudu) 6370 km. Moskva asetseb paralleelringjoonel, mille geograafiline laius on 56° . Arvutada selle paralleeli raadius.

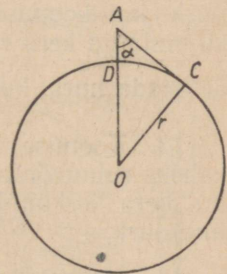
2. Maakera raadius on 6370 km. Arvutada pöörijoone (laius $23^\circ 27'$) ja polaarjoone (laius $66^\circ 33'$) pikkus.

3. Vaatleja, asetsedes mäetipul A (joon. 42), mõõtis püstsirge AD ja silmapiirile suunatud vaatekiire AC vahelise nurga $\angle DAC = \alpha$. Teades maakera raadiust r , avaldada mäe kõrgus $AD = x$.

4. Kerasse, mille ruumala $V = 53,37$ dm³, on kujundatud koonus. Koonuse põhja läbimõõdu otspunktidest lähtuvate moodustajate vaheline nurk $\alpha = 42^\circ 18'$. Avaldada ja arvutada koonuse ruumala.

5. Koonuse moodustaja ja telje vaheline nurk $\alpha = 35^\circ 18'$. Leida koonuse ja tema ümber kujundatud kera ruumalade suhe.

6. Korrapärase n -nurkse püramiidi põhiserv on a ning põhi- ja külgtahu vaheline nurk on φ . Avaldada püramiidisse kujundatud kera raadius.



Joon. 42.

7. Korrapärase n -nurkse püramiidi põhiserv on a ning külgserva ja põhitahu vaheline nurk on α . Avaldada ja arvutada püramiidi ümber kujundatud kera raadius ($n = 8$; $a = 3,5$; $\alpha = 58^\circ 37'$).

8. Püramiidi põhjaks on romb, mille külg on a ja teravnurk on α . Külgtahkude ja põhitahu vahelised nurgad on võrdsed nurgaga φ . Avaldada püramiidisse kujundatud kera raadius.

9. Koonuse põhja ümbermõõt on C ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Avaldada koonuse ja temasse kujundatud kera puutejoone pikkus.

10. Mingist kera pinna punktist on ehitatud kolm võrdset kõõlu, mis üksteisega moodustavad võrdsed nurgad. Avaldada kõõlude pikkus, kui nendevaheline nurk on α ja kera raadius on R .

11. Koonuse põhja pindala, koonusesse kujundatud kera pindala ja koonuse külgpindala moodustavad aritmeetilise progressiooni. Arvutada moodustaja ja põhja vaheline nurk.

12. Avaldada koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk, kui koonuse ruumala on m korda suurem temasse kujundatud kera ruumalast. Leida arvu m väikseim väärtus; arvutada nurk, kui $m = 2\frac{1}{4}$.

13. Koonuse teljega ristuv lõige, mis jaotab koonuse kaheks ruumvõrdseks osaks, läbib koonuse ümber kujundatud kera keskpunkti. Arvutada moodustaja ja põhja vaheline nurk.

14. Nelja võrdse kera ümber, mis asetsevad nii, et iga kera puutub kokku kõigi teistega, on kujundatud koonus. Arvutada koonuse telglõike tipunurk.

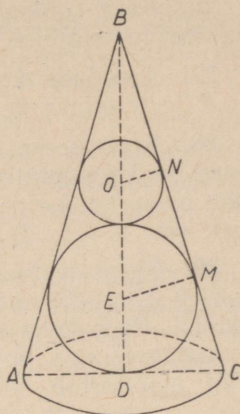
15. Kera ümber on kujundatud tüvikoonus, mille külgpindala ja kera pindala suhe on $m : n$. Avaldada ja arvutada moodustaja ja suurema põhja vaheline nurk ($m : n = 2 : 1$).

16. Avaldada tüvikoonuse ümber kujundatud kera raadius, kui tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r ning moodustaja ja alumise aluse vaheline nurk on α .

17. Tüvikoonusesse, mille põhjade raadiused on r_1 ja r_2 ($r_1 > r_2$), on kujundatud kera. Avaldada: 1) kera pindala ning 2) koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk.

18. Koonusesse on kujundatud kaks kera nii, et nad puutuvad teineteist ning koonuse pinda (joon. 43). Kerade raadiuste EM ja ON suhe on $m:n$. Avaldada ja arvutada koonuse telglõike tipunurk ($m:n = 3:1$).

19. Koonuse põhja raadius on R ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Koonusesse on kujundatud rida kerasid nii, et esimene neist puutub koonuse külgpinda ja põhja pinda, iga järgmine aga koonuse külgpinda ja eelmist kera. Leida kerade ruumalade summa piirväärtus kerade arvu piiramatul kasvamisel.

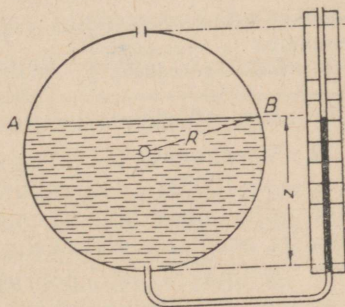


Joon. 43.

Kera osad.

20. Kerakujulisse paaki on valatud vedelikku, mille erikaal on d . Kaare AB (joon. 44) suurus on φ . Paagi sisemine raadius on R . Avaldada vedeliku kaal.

21. Gaasisäilitil on ülalt sfääri segmendiga kaetud silindri kuju. Silindri sisemised mõõtmed on: läbimõõt 24 m, kõrgus 6 m. Silindrit katva sfääri segmendi telglõike kaar on $73^\circ 44'$. Arvutada säiliti ruumala.



Joon. 44.

22. Arvutada kera kihi telglõike kaar, kui kihil on võrdsed põhjad ja ta külgpindala võrdub põhjade pindalade summaga.

23. Avaldada sfääri segmendi pindala, kui ta telglõike kaar on α ja sellele vastav kõõl on a .

24. Sfääri segmendi telglõike kaar $\alpha = 65^\circ 28'$ ja raadius $R = 24$ dm. Avaldada ja arvutada sfääri segmendi pindala.

25. Kera sektori telglõike kaar on a ja temale vastav kõõl on b . Avaldada ja arvutada sektori ruumala ($b = 25,13$; $a = 63^{\circ}17'$).

26. Kera ruumala on V . Avaldada kera sektori ruumala, kui ta telglõike kesknurk on α .

27. Avaldada kera sektori täispindala, kui ta raadius on R ja telglõike kesknurk on α .

28. Koonusesse on kujundatud kera. Koonuse külginna ja kera puutejoon jaotab kera pinna osadeks, mille suhe on $m : n$. Leida koonuse moodustaja ja telje vaheline nurk ($m : n = 1 : 3$).

29. Ringi sektor, mille kaar on a (väiksem kui 180°), pöörleb ringi läbimõõdu ümber, mis asetseb väljaspool sektorit. Pöördkeha ruumala suhtub sama raadiusega kera ruumalasse nagu $m : n$. Leida väiksem nurk, mis see läbimõõt moodustab sektori äärmiste raadiustega ($\alpha = 90^{\circ}$; $m : n = \sqrt{3} : \sqrt{8}$).

30. Kera sektori raadius on R ja raadiustevaheline suurim nurk on α . Avaldada sektorisse kujundatud kera pindala ja ruumala.

§ 23. Pöördkehad.

Silindrist ja koonusest koosnevaid pöördkehi.

1. Kolmnurgas on antud: külge a ning nurgad B ja C . Avaldada keha pindala ja ruumala, mis tekib kolmnurga pöörlemisel antud külje ümber.

2. Võrdhaarse kolmnurga pindala $Q = 50 \text{ dm}^2$ ja tipunurk $\beta = 100^{\circ}24'$. Kolmnurk pöörleb sirge ümber, mis läbib tema aluse ühte otsupunkti ja on risti alusega. Avaldada ja arvutada pöördkeha täispindala.

3. Kolmnurk ABC pöörleb sirge ümber, mis läbib tippu A ja on paralleelne küljega BC . Avaldada ja arvutada pöördkeha ruumala, kui $BC = a = 23,54 \text{ dm}$, külje AB projektsioon pöörlemisteljel on $b = 7,33 \text{ dm}$ ning külje AB ja telje vaheline nurk on $\alpha = 18^{\circ}36'$.

4. Korrapärane kolmnurk pöörleb telje ümber, mis, jäädes väljapoole kolmnurka, läbib tema külje otsupunkti ja moodustab selle küljega teravnurga α . Avaldada pöördkeha pindala.

5. Võrdhaarne kolmnurk, mille haar on b ja tipunurk on α , pöörleb oma haara ümber. Leida pöördkeha ruumala ja pindala ($\alpha = 120^\circ$).

6. Romb, mille külg on a ja teravnurk on α , pöörleb teravnurga tippu läbiva telje ümber, mis on risti rombi küljega. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala.

7. Tasane siksakiline joon koosneb n võrdsest lõigust, millede pikkus on a ja mis moodustavad üksteisega võrdsed nurgad α . See joon pöörleb telje ümber, mis läbib ta üht otsupunkti ja on paralleelne nurga α poolitajaga. Avaldada pöördkeha pindala.

8. Kolmnurgas on antud küljed b ja c ning nende vaheline nurk α . Kolmnurk pöörleb telje ümber, mis, jäädes väljapoole kolmnurka, läbib nurga α tippu ning moodustab külgedega b ja c võrdsed nurgad. Avaldada pöördkeha ruumala.

9. Kolmnurgas on antud külg a ning selle lähisnurgad α ja $90^\circ + \alpha$. Kolmnurk pöörleb küljele a tõmmatud kõrguse ümber. Avaldada pöördkeha ruumala.

10. Poolringjoonel, mille läbimõõt on $AB = 2R$, on võetud kaar $BC = \alpha$ (väiksem kui 90°). Punktist C on tõmmatud puutuja lõik CD kuni läbimõõdu pikenduseni, peale selle on punkt C ühendatud veel punktiga A . Kolmnurk ACD pöörleb külje AD ümber. Avaldada pöördkeha ruumala.

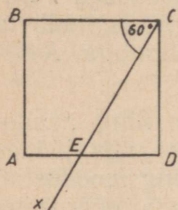
11. On antud kolmnurga ABC nurgad. Kolmnurk pöörleb järgemööda oma külgede a , b ja c ümber. Leida, kuidas suhtuvad üksteisega tekkinud pöördkehade ruumalad V_a , V_b ja V_c .

12. Võrdhaarne kolmnurk, mille tipunurk $\alpha = 54^\circ 16'$, ja võrdkülgne kolmnurk, milledel on ühine alus $b = 25,34$ cm, asetsevad ühel ja samal tasapinnal, üks ühel pool ja teine teisel pool nende ühist alust. Nendest kolmnurkadest koosnev kujund pöörleb telje ümber, mis läbib kolmnurkade üht ühist tippu ja on paralleelne võrdhaarse kolmnurga kõrgusega. Avaldada ja arvutada pöördkeha ruumala ja pindala.

13. Täisnurkse kolmnurga pindala on S ja üks teravnurk on α . Kolmnurk pöörleb ümber sirge, mis on kolmnurga tasapinnas hüpotenuusiga risti ja läbib nurga α tippu. Avaldada pöördkeha ruumala.

14. Ristkülik pöörleb ümber sirge, mis läbib tema üht tippu ja on risti diagonaaliga d , moodustades ristküliku küljega nurga α . Arvutada pöördkeha ruumala ja pindala ($d = 34,06$ m; $\alpha = 56^\circ 14'$).

15. Läbi ruudu $ABCD$ tipu C (joon. 45) on tõmmatud sirge Cx , mis moodustab küljega $BC = a$ nurga $BCx = 60^\circ$ ja lõikab külge AD punktis E . Avaldada nelinurga $CBAE$ pöörlemisel telje Cx ümber tekkiva keha ruumala.



Joon. 45.

16. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt $2p = 27,42$ dm ja üks nurk $\alpha = 41^\circ 16'$. Kolmnurk pöörleb oma hüpotenuusi ümber. Avaldada ja arvutada pöördkeha ruumala.

17. Ringi ümber, mille raadius on r , on kujundatud täisnurkne trapets, mille teravnurk on α . Trapets pöörleb oma väiksema haara ümber. Avaldada pöördkeha külgpindala.

18. Rööpküliku nürinurga tipust tõmmatud diagonaal moodustab rööpküliku väiksema küljega nurga β ; suuremate külgede vaheline kaugus on h ja rööpküliku teravnurk on α . Rööpkülik pöörleb ümber telje, mis läbib teravnurga tippu ja on paralleelne mainitud diagonaaliga. Avaldada pöördkeha ruumala.

19. Paarisarvulise külgede arvuga (n) korrapärase hulknurk pöörleb kahe teineteise vastas asetseva tipu ühendussirge ümber. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala: 1) hulknurgasse joonestatud ringi raadiuse r kaudu, 2) hulknurga ümber joonestatud ringjoone raadiuse R kaudu ja 3) hulknurga külje a kaudu.

20. Paarisarvulise külgede arvuga (n) korrapärase hulknurk pöörleb kahe teineteise vastas asetseva külje keskpunktide ühendussirge ümber. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala: 1) hulknurgasse joonestatud ringi raadiuse r kaudu, 2) hulknurga ümber joonestatud ringjoone raadiuse R kaudu ja 3) hulknurga külje a kaudu.

21. Paaritu arvulise külgede arvuga (n) korrapärase hulknurk pöörleb ühe külje keskpunkti ja tema vastas asetseva tipu ühendussirge ümber. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala: 1) hulknurgasse joonestatud ringi raa-

diuse r kaudu, 2) hulknurga ümber joonestatud ringjoone raadiuse R kaudu ja 3) hulknurga külje a kaudu.

Kera osi sisaldavaid
pöördkehi.

22. Ringi segment, mille raadius on R ja kaar on a , pöörleb kaare otspunktesse tõmmatud läbimõõdu ümber. Avaldada pöördkeha ruumala ja täispindala.

23. Ringi sektor, mille raadius on r ja kesknurk on α , pöörleb läbimõõdu ümber, mis sektori kesknurga poolitajaga moodustab nurga β . Avaldada pöördkeha ruumala.

24. Ringi sektor, mille kesknurk on α , pöörleb läbimõõdu ümber, mis on risti kesknurga poolitajaga. Sektori pindala on Q . Leida pöördkeha ruumala ($\alpha = 70^{\circ}36'$; $Q = 211,8$).

25. Kera läbimõõdu otspunktist on ehitatud kõõl nii, et pind, mille kõõl moodustab pöörlemisel läbimõõdu ümber, jaotab kera kaheks ruumvõrdseks osaks. Arvutada kõõlu ja läbimõõdu vaheline nurk α .

26. Ringi segment, mille kaar on a ja kõõl on a , pöörleb kõõluga paralleelse läbimõõdu ümber. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala.

Trigonomeetriliste funktsioonide tabel

°	sin	tan	cot	cos	°
0	0,000	0,000	~	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,195	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
°	cos	cot	tan	sin	°

VASTUSED.

§ 1.

1. -120° ; -1440° . 2. 1080° ; 10800° . 3. 5° ; 150° ; 720° ; 1500° . 5. 360° .
6. 1) $120^\circ + n \cdot 360^\circ$; 2) $-60^\circ + n \cdot 360^\circ$.
1) 120° , 480° , 840° , ...; 2) -60° , 300° , 660° , ...
7. 1) $\approx 1,57$ cm; 2) $\frac{\pi R \alpha}{180}$. 8. 1) a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{3}{4}\pi$; e) $\frac{\pi}{12}$;
f) $\frac{\pi}{8}$; g) $\frac{\pi}{5}$; h) $\frac{5}{12}\pi$; i) $\frac{3}{5}\pi$; k) $\frac{5}{6}\pi$; l) $\frac{7}{8}\pi$; m) $0,9\pi$.
2) a) $\approx 0,8901$; b) $\approx 0,4712$; c) $\approx 1,3352$; d) $\approx 0,2182$; e) $\approx 0,5009$;
f) $\approx 1,2802$; g) $\approx 2,0420$; h) $\approx 3,7737$.
3) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{5}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{\pi(n-2)}{n}$.
9. 1) $\approx 85^\circ 57'$; $\approx 114^\circ 35'$; $\approx 42^\circ 58'$; 30° ; 120° ; 270° ; $22^\circ 30'$; 135° ;
 216° .
2) 40° ; 75° ; $13^\circ 30'$; $57^\circ 42'$; 218° ; $27^\circ 30'$; $74^\circ 29'$; $45^\circ 50'$.
10. 1) $10\pi \approx 31,4$; 2) $\approx 6,28$ m/sek; 3) $\approx 37,68$ m/sek. 11. ≈ 200 .

§ 2.

1. Esimeses; ei. 4. 0-st 2-ni. 5. Ainult 1-ne. 6. Ei.
7. 0. 8. c. 9. $a - b + c$. 10. $(a - b)^2$. 11. $a^2 - b^2$. 12. 0.
13. Pole arvulist väärtust.
14. 1) 0,6; 2) $-0,5$; 3) $-0,7$; 4) 0,9; 5) 1,7; 6) $-2,7$.
15. 1, 3, 7 — negatiivsed; 2, 4, 5, 6, 8 — positiivsed.
16. 1) $\cos 20^\circ$; 2) $\sin 50^\circ$; 3) $\cot 40^\circ$; 4) $\tan 50^\circ$.
21. 1) 15° ; 135° ; 255° ; 2) 300° ; 3) 50° ; 110° ; 170° ; 230° ; 290° ; 350° ;
4) 120° ; 5) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; $1\frac{1}{6}\pi$; $1\frac{5}{6}\pi$; 6) $\frac{\pi}{12}$; $1\frac{5}{12}\pi$; 7) 45° ; 135° ;
8) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2}{3}\pi$.

22. 1) $69^\circ + n \cdot 180^\circ$; 2) $-39^\circ + n \cdot 180^\circ$; 3) $\pm 26^\circ + n \cdot 360^\circ$;
 4) $\pm 132^\circ + n \cdot 360^\circ$; 5) $15^\circ + n \cdot 360^\circ$ ja $165^\circ + n \cdot 360^\circ$ ehk
 $(-1)^n \cdot 15^\circ + n \cdot 180^\circ$; 6) $-45^\circ + n \cdot 360^\circ$ ja $-135^\circ + n \cdot 360^\circ$
 ehk $(-1)^{n+1} \cdot 45^\circ + n \cdot 180^\circ$.

23. $\sin x = -1$. 24. $\cos x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. 25. $\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

26. $\sin x = 0$. 27. $\tan x = 0$; 2. 28. $\sec x = 2$.

29. $\cot x = 0$. 30. Pole lahendit. 31. Võimatu.

32. 1) $\arctan m + n \cdot 180^\circ$, kus m on mistahes arv;

2) $\pm \arccos m + n \cdot 360^\circ$, $-1 \leq m \leq 1$;

3) $(-1)^n \cdot \arcsin m + n \cdot 180^\circ$, $-1 \leq m \leq 1$.

33. 1) $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$; 2) $-45^\circ = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3) $\frac{\pi}{4} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $90^\circ = \arccos 0$; 5) $-\frac{\pi}{4} = \arctan(-1)$;

6) $0^\circ = \arctan 0$; 7) $30^\circ = \text{arc cot } \sqrt{3}$; 8) $45^\circ = \text{arc cot } 1$;

9) $x = \arcsin 0,23$; 10) $x = \arccos 0,5762$; 11) $x = \arctan 0,468$;

12) $x = \text{arc cot } 1,237$.

34. 1) 47° ehk $0,8203$; 2) $66^\circ 30'$ ehk $1,1606$;

3) $74^\circ 47'$ ehk $1,3052$; 4) $62^\circ 54'$ ehk $1,0978$.

35. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $3 \sin \alpha$; 5) $a \cos \frac{b}{c}$; 6) $\frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha$.

§ 3.

Ülesande nr.	1	2	3	4
$\sin \alpha$	$(\sin \alpha)$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$(\cos \alpha)$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha$	$\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$(\tan \alpha)$	$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	$(\cot \alpha)$
$\sec \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cos \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\frac{1}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}$
Ülesande nr.	5	6	7	8
$\sin \alpha$	$(0,8)$	$(-0,3)$	$\pm \frac{\sqrt{5}}{3}$	$\pm \frac{4}{5}$
$\cos \alpha$	$\pm 0,6$	$\mp \frac{\sqrt{91}}{10}$	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{3}{5}\right)$
$\tan \alpha$	$\pm \frac{4}{3}$	$\pm \frac{3}{\sqrt{91}}$	$\pm \frac{\sqrt{5}}{2}$	$\mp \frac{4}{3}$
$\cot \alpha$	$\pm 0,75$	$\pm \frac{\sqrt{91}}{3}$	$\pm \frac{2}{\sqrt{5}}$	$\mp \frac{3}{4}$
$\sec \alpha$	$\pm \frac{5}{3}$	$\mp \frac{10}{\sqrt{91}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{3}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$1,25$	$-\frac{10}{3}$	$\pm \frac{3}{\sqrt{5}}$	$\pm \frac{5}{4}$

Ülesande nr.	9	10	11	12
$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{\frac{5}{6}}$	$\pm \frac{9}{41}$	$\pm \frac{15}{17}$	$\pm \sqrt{0,1}$
$\cos \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{6}}$	$\mp \frac{40}{41}$	$\pm \frac{8}{17}$	$\mp \sqrt{0,9}$
$\tan \alpha$	$(\sqrt{5})$	$(-\frac{9}{40})$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{1}{3}$
$\cot \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{40}{9}$	$(\frac{8}{15})$	(-3)
$\sec \alpha$	$\pm \sqrt{6}$	$\mp \frac{41}{40}$	$\pm \frac{17}{8}$	$\mp \frac{\sqrt{10}}{3}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\pm \sqrt{\frac{6}{5}}$	$\pm \frac{41}{9}$	$\pm \frac{17}{15}$	$\pm \sqrt{10}$
Ülesande nr.	13	14	15	16
$\sin \alpha$	$\pm \frac{\sqrt{8}}{3}$	$\pm \frac{21}{29}$	$\frac{5}{13}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\cos \alpha$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{20}{29}$	$\pm \frac{12}{13}$	$\mp \sqrt{\frac{2}{3}}$
$\tan \alpha$	$\pm \sqrt{8}$	$\mp \frac{21}{20}$	$\pm \frac{5}{12}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$\cot \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{8}}$	$\mp \frac{20}{21}$	$\pm 2,4$	$\pm \sqrt{2}$
$\sec \alpha$	(3)	$(-1\frac{9}{20})$	$\pm \frac{13}{12}$	$\mp \sqrt{\frac{3}{2}}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\pm \frac{3}{\sqrt{8}}$	$\pm \frac{29}{21}$	$(2,6)$	$(-\sqrt{3})$

Ülesande nr.	17	18	19	20
$\sin \alpha$	$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$	$\pm \frac{b}{a}$	$\pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{99}{101}$
$\cos \alpha$	$\pm \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$	$\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$	$\pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{20}{101}$
$\tan \alpha$	$\pm \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$	$\pm \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)$	$\left(4\frac{19}{20}\right)$
$\cot \alpha$	$\pm \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$	$\pm \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{20}{99}$
$\sec \alpha$	$\pm \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$	$\frac{101}{20}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\pm \frac{a+b}{a-b}$	$\pm \frac{a}{b}$	$\pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$	$\frac{101}{99}$
Ülesande nr.	21	22	23	
$\sin \alpha$	0,96	$\left(-\frac{12}{13}\right)$	$-\frac{20}{29}$	
$\cos \alpha$	(-0,28)	$-\frac{5}{13}$	$\frac{21}{29}$	
$\tan \alpha$	$-\frac{24}{7}$	$\frac{12}{5}$	$-\frac{20}{21}$	
$\cot \alpha$	$-\frac{7}{24}$	$\frac{5}{12}$	(-1,05)	
$\sec \alpha$	$-\frac{25}{7}$	$-\frac{13}{5}$	$\frac{29}{21}$	
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\frac{25}{24}$	$-\frac{13}{12}$	-1,45	

24. $\cos^2 \alpha$. 25. $\sin^2 \alpha$. 26. $1 - \cos \alpha$.
 27. $-(1 + \sin \alpha)$. 28. $\sec^2 \alpha$. 29. $\cos^2 \alpha$.
 30. a) $\tan \alpha \cdot \tan \beta$; b) $\cot \alpha \cdot \cot \beta$. 31. a) $\cot^2 \alpha$; b) $\tan^2 \alpha$.
 32. $\cos \alpha$. 33. $\sin \alpha$. 34. $\sec \alpha$. 35. $\tan \alpha$. 36. $\cot \alpha$.
 37. $\operatorname{cosec} \alpha$. 38. $\cos \alpha$. 39. $\tan^2 \alpha$.
 40. $2 \sin^2 \alpha$. 41. $2 \cos^2 \alpha$. 42. 1. 43. 1.
 44. $\tan^2 \alpha$. 45. $\sec^2 \alpha$. 46. $\sec^2 \alpha$. 47. $\operatorname{cosec}^2 \beta$.
 48. $\operatorname{cosec}^2 \alpha$. 49. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$. 50. $\tan \alpha \cdot \tan \beta$. 51. 4.
 52. $\cot^6 \alpha$. 53. a) $2 \sin^2 \alpha - 1$; b) $1 - 2 \cos^2 \alpha$. 54. $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$.
 55. $\frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$. 56. $\frac{\cot \alpha}{\cot^2 \alpha - 1}$. 57. a) $\frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$; b) $\frac{1 - \cot \alpha}{1 + \cot \alpha}$.
 58. a) $\frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$; b) $\frac{\cot \alpha}{\cot^2 \alpha - 1}$. 59. $\sec \alpha = -\frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha}$.
 60. 9. 61. $\frac{m^2 - 1}{2}$. 62. $m^2 - 2$ ja $m^3 - 3m$.
 93. $90^\circ + n \cdot 180^\circ$. 94. $\pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$.
 95. $\pm 52^\circ + n \cdot 360^\circ$. 96. $n \cdot 360^\circ$.
 97. $\pm 128^\circ + n \cdot 360^\circ$. 98. $\pm 52^\circ + n \cdot 360^\circ$.
 99. $n \cdot 180^\circ$. 100. $\approx 63^\circ + n \cdot 180^\circ$ ja $\approx -27^\circ + n \cdot 180^\circ$.
 101. $\approx (-1)^n \cdot 24^\circ 28' + n \cdot 180^\circ$.
 102. $90^\circ + n \cdot 180^\circ$ ja $\pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$.
 103. $\pm 120^\circ + n \cdot 360^\circ$. 104. $\approx 27^\circ + n \cdot 180^\circ$.
 105. $45^\circ + n \cdot 90^\circ$. 106. $\pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$.
 107. $\pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ$. 108. $n \cdot 360^\circ$ ja $90^\circ + n \cdot 360^\circ$.
 109. $45^\circ + n \cdot 180^\circ$. 110. $60^\circ + n \cdot 180^\circ$.
 111. $\pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$. 112. $45^\circ + n \cdot 180^\circ$ ja $\approx -72^\circ + n \cdot 180^\circ$.
 113. $\approx 70^\circ + n \cdot 180^\circ$ ja $\approx -36^\circ + n \cdot 180^\circ$.

§ 4.

1. 1) $\cos 17^\circ$; 2) $\sin 9^\circ 20'$; 3) $\cot 20^\circ 34' 20''$;
 4) $\tan 30^\circ 01'$.
 2. 1) $\sin 67^\circ 40'$; 2) $-\cos 80^\circ 34' 25''$; 3) $-\tan 71^\circ 11' 24''$;
 4) $-\cot 39^\circ 20'$.
 3. 1) $\cos 31^\circ 40'$; 2) $\sin 16^\circ 25'$; 3) $-\cos 21^\circ 43'$;
 4) $-\sin 8^\circ 21'$; 5) $-\tan 19^\circ 32' 28''$; 6) $-\cot 16^\circ 32'$;
 7) $-\tan 30^\circ 28' 40''$; 8) $-\cot 39^\circ 18'$.
 4. — 1. 5. $\cos \alpha$. 6. $-\cos \alpha$. 7. $-\sec \alpha$. 8. 0. 9. 0. 10. 1.
 11. $-\sin^2 \alpha$. 12. 0. 13. $2 \cos \alpha$. 14. 1.

§ 5.

- | | | | |
|---|---|--|--|
| 1. 1) 0,2588;
2) 0,7071;
3) 0,8660;
4) 0,9563;
5) 0,6225;
6) 0,9361;
7) 0,2051;
8) 0,9988. | 2. 1) 0,3640;
2) 1;
3) 11,43;
4) 3,172;
5) 0,3191;
6) 1,3375;
7) 0,3799;
8) 8,284;
9) 12,61;
10) 38,19;
11) 286,5;
12) 3438. | 3. 1) 0,4226;
2) 0,7071;
3) 0,8660;
4) 0,2924;
5) 0,7826;
6) 0,9373;
7) 0,4823;
8) 0,1948;
9) 0,9987;
10) 0,9997. | 4. 1) 2,747;
2) 1;
3) 1,3032;
4) 0,3365;
5) 0,3796;
6) 2,805;
7) 0,0305;
8) 11,43;
9) 23,37;
10) 0;
11) 30,41. |
|---|---|--|--|
5. 1) 20°; 2) 36°30'; 3) 57°21'; 4) 68°20'; 5) vōimatu; 6) 23°09'.
6. 1) 24°; 2) 85°; 3) 69°30'; 4) 28°36'; 5) 79°48'; 6) 26°34';
 7) 22°47'; 8) 85°34'; 9) 81°25'.
7. 1) 27°; 2) 24°30'; 3) 50°30'; 4) vōimatu; 5) 35°02'; 6) 63°21'.
8. 1) 20°; 2) 67°30'; 3) 29°29'; 4) 33°47'; 5) 55°13'; 6) 30°33';
 7) 8°; 8) 5°35'; 9) 2°52'.
9. 0,9659; 0,1368; 0,6395; 0,9036.
10. -0,4695; -0,9171; -0,1513; -0,9825.
11. -1,6643; -0,3561; -4,836; -0,6334.
12. -11,43; -0,6873; -6,472; -0,3876.

§ 6.

1. 1) $\sin \alpha = 0,96$; $\tan \alpha = 3\frac{3}{7} \approx 3,429$; 2) $\tan \alpha = 0,75$; $\cos \alpha = 0,8$;
 3) $\tan \beta \approx 6,462$; $\cos \beta \approx 0,1529$.
2. $\sin \beta = \frac{77}{85}$; $\cos \beta = \frac{36}{85}$; $\tan \beta = 2\frac{5}{36}$; $\cot \beta = \frac{36}{77}$.
3. 1) 20,4 cm; 2) 68 cm.
4. 1) 10,08 m; 2) 30,6 dm. 5. 1) 2,56 km; 2) 2,39 km. 6. 947 m.
7. 12°43'. 8. 3646,5 m \approx 3647 m. 9. 20 m. 10. 35,5 m.
11. 27,25 m. 12. 1°54'.
13. 4°55'. 14. 2°57'; 727 m. 15. $b \sin \alpha - a = 10,5$ m.
16. 3,9 m. 18. 33°41'. 19. \approx 40 m.
20. 1) 63°26'; 2) 26°34'; 3) 21°48'. 21. $\arctan \frac{n}{n-1} = 47°52'$.
22. 30°58'. 23. $\varphi = 180^\circ - \arctan \frac{b}{a}$. 24. 33°41'.
25. 21 cm. 26. 1278 m. 27. $r = 1,584$ m; $x = 1,973$ m.

28. $\frac{\alpha}{2 \cos \beta}$. 29. $6^{\circ}51'$; 105,2 mm. 30. $h = 10(D - d)$; $2^{\circ}52'$.
 31. $38^{\circ}40'$ 32. ≈ 63 m. 33. 2,6 m.
 34. $36^{\circ}39'$. 35. $73^{\circ}58'$. 36. 2,698.
 37. $47^{\circ}16'$; 32,8 dm. 38. $97^{\circ}12'$.
 39. $\frac{c}{2\pi} \cos \frac{180^{\circ} m}{m+n} \approx 11,2$. 40. $\frac{a}{2 \sin \alpha}$.
 41. $52^{\circ}15'$; 7,141 kG. 42. $b(1 + \sec \alpha)$. 43. $\arcsin \frac{h}{b}$.
 44. $48^{\circ}01'$. 45. $78^{\circ}48'$.
 46. Moodustab põhja suunaga nurga $69^{\circ}15'$.

47.

α	5 dm	15 dm
40°	3,2 dm	9,6 dm
60°	4,3 "	13,0 "
90°	5 "	15 "

48. 26,6 km ida suunas ja 21,7 km põhja suunas. 49. $40^{\circ}13'$ ja $49^{\circ}47'$.
 50. $57^{\circ}28'$; $122^{\circ}32'$. 51. $67^{\circ}49'$ ja $22^{\circ}11'$. 52. $120^{\circ}30'$ ja $59^{\circ}30'$.
 53. 1) $OB \approx 0,35$ m; $AB = 0,2$ m; $\beta = 5^{\circ}44'$; $BP \approx 1,99$ m;
 3) 0° ; $1^{\circ}59'$; $3^{\circ}55'$; $5^{\circ}44'$; $7^{\circ}23'$; $8^{\circ}49'$; $9^{\circ}59'$; $10^{\circ}50'$; $11^{\circ}22'$; $11^{\circ}32'$;
 5) $11^{\circ}19'$; 6) 0; 5 mm; 22 mm; 48 mm; 83 mm; 125 mm;
 173 mm; 224 mm; 277 mm; 330 mm.
 54. $47^{\circ}30'$. 55. $\alpha = 41^{\circ}20'$; $\beta = 18^{\circ}45'$.
 56. 1) $82^{\circ}27'$; 2) $8^{\circ}38'$. 57. $53^{\circ}08'$.
 58. $R = \frac{a}{2 \cos \frac{\beta}{2}}$; $r = a \sin \frac{\beta}{2} \tan \left(45^{\circ} - \frac{\beta}{4} \right)$.
 59. $\alpha = \arcsin \frac{h}{b}$; $a = \frac{h}{\cos \alpha}$; $c = \frac{b}{\cos \alpha}$. 60. $11^{\circ}26'$.
 61. 28° ; 37° ; 19° ; 53° ; 86° ; 113° . 62. $\approx 21\,741$ km.
 63. $4^{\circ}52'$. 64. $1^{\circ}11'$. 65. $51^{\circ}05'$.

§ 7.

1. 1) $b = 61$; $c = 102$; 2) $a = 39$; $b = 25$. 2. 78,7 m. 3. 21,1 m.
 4. $\frac{b \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$. 5. $\frac{l \sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$. 6. $\frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ ja $\frac{d \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

7. $l_b = \frac{a \sin \gamma}{\sin\left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)}$; $l_c = \frac{a \sin \beta}{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}$; $l_a = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma) \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}$.
8. $\frac{c \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \approx 146,4 \text{ m}$.
9. $a = \frac{h_a \sin \alpha}{\sin \gamma \sin(\alpha + \gamma)}$; $b = \frac{h_a}{\sin \gamma}$; $c = \frac{h_a}{\sin(\alpha + \gamma)}$.
10. 7880 m^2 . 11. $\frac{1}{2} b^2 \sin \alpha \approx 48 \text{ m}^2$. 12. $\gamma = 90^\circ$ puhul.
15. $a^2 \sin \alpha \approx 21 \text{ cm}^2$.
16. $\frac{d^2 \sin \varphi}{2}$; maksimum on $\frac{d^2}{2}$, kui $\varphi = 90^\circ$.
17. $\frac{a+b}{2} \cdot c \sin \alpha$. 18. $50^\circ 33'$ ja $129^\circ 27'$. 19. $46^\circ 57'$ ja $133^\circ 03'$.
20. $362,3 \text{ m}^2$. 21. $AE = \sqrt{\frac{2Q \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma}}$; $AD = \sqrt{\frac{2Q \sin \gamma}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)}}$.
22. $\frac{h_a h_b}{2 \sin \gamma}$. 23. $\frac{h_b^2 \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}$. 24. $a \approx 8,5$.
25. 1) $c = 22$; $\alpha = 22^\circ 20'$; $\beta = 34^\circ 23'$; 2) $b = 0,4$; $\alpha = 11^\circ 29'$; $\gamma = 145^\circ 03'$; 3) $b = 63$; $\alpha = 153^\circ 16'$; $\gamma = 10^\circ 16'$.
26. 77 m . 27. $117^\circ 17'$. 28. $8,1 \text{ m}$ ja $4,0 \text{ m}$.
29. 275 kG ; $16^\circ 10'$ ja $33^\circ 50'$. 30. 1633 m .

§ 8.

1. $\cos 162^\circ 30' = -\cos 17^\circ 30'$. 2. $\sin 340^\circ = -\cos 70^\circ$.
3. $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$; $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$.
4. a) $-\sin 20^\circ$; b) $\cos 10^\circ$; c) $\sin 30^\circ$; d) $\cos 20^\circ$.
5. e) $\cot 30^\circ$; f) $-\tan 40^\circ$; g) $\cot 45^\circ$; h) $\tan 30^\circ$.
6. i) $-\operatorname{cosec} 10^\circ$; k) $\sec 10^\circ$; l) $\operatorname{cosec} 40^\circ$; m) $-\sec 10^\circ$.
7. a) $\cos 0,2\pi$; b) $\cos \frac{2}{9}\pi$; c) $-\tan \frac{2}{11}\pi$; d) $-\sec 0,1\pi$.
8. a) 1; b) 1; c) 0; d) 0. 9. a) $-\frac{1}{2}$; b) 0; c) $\sqrt{3}$; d) -1 .
10. $\cos 50^\circ = -\cos 130^\circ$. 11. $-2 \cot \alpha$. 12. $2 \cos \alpha$. 13. 1.
14. -1 . 15. $a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$. 16. $-\tan^3 \alpha$.
17. $\cot \alpha$. 18. $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$. 19. 0. 20. $\cot^2 42^\circ$.

21. $-\cot^2 40^\circ$.
 22. $\sin(a - 90^\circ) = -\cos a$; $\cos(a - 180^\circ) = -\cos a$;
 $\tan(a - 360^\circ) = \tan a$.
 23. $\cos x = -\frac{2}{3}$. 24. $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. 25. $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 26. $n \cdot 360^\circ$.
 27. $135^\circ + n \cdot 180^\circ$. 28. $\frac{\pi}{4} + \pi n$. 29. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. 30. $(2n + 1) \cdot 90^\circ$.

§ 9.

1. -1 . 2. a) $\sin a$; b) $-\sin a$. 3. $0,4 \sqrt{3} + 0,3$.
 4. $\sqrt{0,2} - \sqrt{0,15}$. 5. $0,2 + \sqrt{0,63}$; $-\sqrt{0,21} - \sqrt{0,12}$.
 6. $\frac{1}{12}(\sqrt{35} - 6)$; $\frac{1}{12}(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})$. 7. ± 1 ; $\pm 0,28$. 8. $\frac{1}{2}$.
 9. a) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$; $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$;
 b) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$; $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$.
 12. a) $\frac{\tan a - \tan \beta}{\tan a + \tan \beta}$ ja $\frac{1 - \tan a \tan \beta}{1 + \tan a \tan \beta}$; b) $\frac{\cot \beta - \cot a}{\cot \beta + \cot a}$ ja
 $\frac{\cot a \cot \beta - 1}{\cot a \cot \beta + 1}$.
 13. $\sin a \cos \beta \cos \gamma + \cos a \sin \beta \cos \gamma + \cos a \cos \beta \sin \gamma -$
 $-\sin a \sin \beta \sin \gamma$;
 $\cos a \cos \beta \cos \gamma - \sin a \sin \beta \cos \gamma - \sin a \cos \beta \sin \gamma -$
 $-\sin a \sin \beta \sin \gamma$.
 14. $\frac{56}{65}$ ja $\frac{57}{1625}$. 15. $\frac{1 \pm \tan \alpha}{1 \mp \tan \alpha}$. 16. $-(2 + \sqrt{3})$. 17. $-\frac{1}{2}$.
 18. -1 ja $\frac{1}{7}$. 19. $\frac{\cot \beta \pm \cot a}{\cot a \cdot \cot \beta \mp 1}$. 20. a) $\frac{\cot a \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot a}$;
 b) $\frac{1 \mp \tan a \tan \beta}{\tan a \pm \tan \beta}$.
 21. $\frac{\tan a + \tan \beta + \tan \gamma - \tan a \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma}{1 - \tan a \cdot \tan \beta - \tan \beta \cdot \tan \gamma - \tan \gamma \cdot \tan a}$. 22. $\tan(a + \beta)$.
 23. $\tan a \cdot \tan \beta$. 24. $\tan a \cdot \cot \beta$. 25. $\cot a \cdot \cot \beta$.
 26. $\tan a$. 41. $-45^\circ + n \cdot 180^\circ$. 42. $\pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ$.
 43. $x = \arctan(\tan a \tan \beta \tan \gamma) + n \cdot 180^\circ$. 44. $\pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$ ja
 $\frac{\pi}{2}(2n + 1)$ ehk üldiselt $(2n + 1) \cdot 30^\circ$.

$$45. x = (-1)^n \cdot 30^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

$$46. x = \arctan \frac{a - b \cdot \tan \alpha}{a \cdot \tan \alpha - b} + \pi n.$$

$$47. x = \arctan \left(\pm \sqrt{\frac{m + \tan^2 \alpha}{1 + m \tan^2 \alpha}} \right) + \pi n. \quad 48. x = n \cdot 180^\circ \text{ ehk } x = \pi n.$$

$$49. x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot n. \quad 50. x = n \cdot 90^\circ; \quad n \cdot 60^\circ. \quad 51. \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

$$52. 14^\circ 38' + n \cdot 180^\circ. \quad 53. 45^\circ + n \cdot 180^\circ. \quad 54. \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

§ 10.

$$1. a) \pm 0,96; -0,28; b) \frac{3}{4}. \quad 2. \frac{120}{169}; -\frac{119}{169}.$$

$$4. -0,96; -0,28. \quad 5. -\frac{2}{3} \sqrt{2}; -\frac{1}{3}. \quad 6. -\frac{3}{4}.$$

$$7. a) \pm 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$b) \pm 2 \cos \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

$$8. a) \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}; \quad b) \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha}. \quad 9. \frac{\sec^2 \alpha}{2 - \sec^2 \alpha}.$$

$$10. a) 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad b) \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$11. \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad \text{Näpunäide. Algul kirjutame:}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \text{ja} \quad \cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

12. Et $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ kaudu teised funktsioonid väljenduvad ratsionaalselt, siis piisab $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ käsitlemisest; nende kohta vaata aga ülesande 11 lahendust.

$$13. \frac{12}{13}; \frac{5}{13}; 2,4. \quad 14. \frac{1}{2} \sqrt{2}; \frac{1}{2} \sqrt{2}; 1.$$

$$15. 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \quad \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}.$$

$$16. 2 \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha); \quad \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha.$$

$$17. \sqrt{0,9}; \quad -\sqrt{0,1}; \quad -3.$$

$$18. \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}; \quad \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}; \quad 2 - \sqrt{3}; \quad 2 + \sqrt{3}.$$

$$19. \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}; \quad \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}; \quad \sqrt{2} - 1; \quad \sqrt{2} + 1.$$

$$20. \frac{3}{5} \text{ ja } \frac{4}{5}. \quad 21. \frac{4}{5}. \quad 22. \sqrt{5} - 2.$$

$$25. \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \text{ ja } 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha; \text{ siit leiame:}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \text{ ja } \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin \alpha}.$$

Nende võrduste abil leiame nii $\sin \frac{\alpha}{2}$ kui $\cos \frac{\alpha}{2}$ jaoks neli väärtust. Kuid kui mingi uue tingimuse lisamisega saab võimalikuks määrata märk kummagi juuravaldise ees, siis ülesandel on ainult üks lahend.

$$26. \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}; \quad \cot \alpha \pm \sqrt{\cot^2 \alpha + 1}. \quad 27. -2.$$

$$52. x = (-1)^n \cdot 15^\circ + n \cdot 90^\circ \quad \text{ehk } x = \frac{\pi}{2} \cdot n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}.$$

$$53. x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n. \quad 54. x = 22^\circ 30' + n \cdot 90^\circ \text{ ehk } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot n.$$

$$55. x = \pi n; \quad \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

$$56. x_1 = \pm 2 \arccos 0 + 4\pi n = \pi (2n + 1);$$

$$x_2 = 2 \cdot (-1)^n \arcsin \frac{b}{2a} + 2\pi n.$$

$$57. x = 45^\circ + n \cdot 90^\circ.$$

$$58. x = n \cdot 120^\circ.$$

$$59. x = \pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ. \quad 60. x = \pi n. \quad 61. x_1 = \pi n; \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

$$62. x_1 = \pi + 2\pi n; \quad x_2 = \pm 2 \arccos \frac{b}{2a} + 4\pi n.$$

$$63. x = n \cdot 360^\circ; \quad (-1)^n \cdot 60^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

$$64. x_1 = \pi + 2\pi n; \quad x_2 = 2 \arctan \frac{a}{b} + 2\pi n. \quad 65. x_1 = \pi n; \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

$$66. x = \pm \arccos \frac{m - 2 \pm \sqrt{m(m-8)}}{2(m+1)} + 2\pi n.$$

$$67. x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \pi n.$$

$$68. x = n \cdot 180^\circ; \quad \pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ. \quad 69. x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

$$70. x = 45^\circ + m \cdot 90^\circ; \quad \pm 30^\circ + m \cdot 180^\circ.$$

$$71. x_1 = x_2 = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}. \quad 72. 72^\circ 52' + n \cdot 360^\circ \quad \text{ja} \quad 17^\circ 08' + n \cdot 360^\circ.$$

$$73. 119^\circ 34' + n \cdot 360^\circ \quad \text{ja} \quad -13^\circ 18' + n \cdot 360^\circ.$$

$$74. 90^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \text{ja} \quad 30^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

§ 11.

1. a) $\sqrt{1,5}$; b) $\sin 18^\circ$; c) 0; d) $-\sin 18^\circ$.

2. a) $2 \sin 12^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$; b) $-2 \sin 1^\circ \cdot \cos 4^\circ$;

c) $2 \cos 10^\circ 07' 30'' \cdot \cos 6^\circ 52' 30''$; d) $2 \sin 15^\circ \cdot \sin 10^\circ$.

3. a) $\cos \alpha$; b) $2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$. 4. a) $\frac{\tan 20^\circ}{\tan 5^\circ}$; b) $\cot \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cot \frac{\beta - \alpha}{2}$.

5. a) $2 \sin 35^\circ \cdot \cos 15^\circ$; b) $\sqrt{2} \cdot \sin 25^\circ$;

c) $2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - 45^\circ \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} + 45^\circ \right)$.

6. a) $\sqrt{2} \cdot \cos (\alpha - 45^\circ)$; b) $\sqrt{2} \sin (\alpha - 45^\circ)$ ehk $\sin \alpha \pm \cos \alpha =$
 $= \sqrt{2} \cdot \sin (\alpha \pm 45^\circ)$.

7. a) $\frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$; b) $\frac{\sin (\beta \pm \alpha)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$; c) $\frac{\cos (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$; d) $\frac{\cos (\alpha \mp \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$.

8. a) $2 \operatorname{cosec} 2\alpha$; b) $-2 \cot 2\alpha$.

9. a) $\sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta)$; b) $\sin (\beta + \alpha) \cdot \sin (\beta - \alpha)$.

10. a) $\frac{\sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}$; b) $\frac{\sin (\beta + \alpha) \cdot \sin (\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}$;

c) $-\frac{\cos (\alpha + \beta) \cdot \cos (\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}$; d) $-4 \cot 2\alpha \cdot \operatorname{cosec} 2\alpha$.

11. a) $2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$; b) $-2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$; c) $\cos 2\alpha$;

d) $-\cos 2\alpha$.

12. $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \alpha$. 13. $\tan \left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ \right)$. 14. $\tan \frac{\alpha}{2}$.

15. a) $\frac{\sin (45^\circ \pm \alpha)}{\cos 45^\circ \cdot \cos \alpha}$; b) $\frac{\sin (\alpha \pm 45^\circ)}{\sin 45^\circ \cdot \sin \alpha}$.

Näpunäide. $1 = \tan 45^\circ = \cot 45^\circ$.

$$16. \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}. \quad 17. \text{ a) } 2 \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right); \text{ b) } 2 \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

$$18. 2 \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\tan \alpha}.$$

$$19. \text{ a) } \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta); \text{ b) } \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta).$$

$$20. \text{ a) } \sqrt{8} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right); \text{ b) } \sqrt{8} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right).$$

$$21. -4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha. \quad 22. \text{ a) } \frac{\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}; \text{ b) } \frac{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$23. \text{ a) } \frac{\sqrt{8} \cdot \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \text{ b) } \frac{\sqrt{8} \cdot \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$24. \text{ a) } \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}; \text{ b) } \frac{\sin(\alpha - 45^\circ)}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$25. \text{ a) } 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}; \text{ b) } 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

Näpunäide. Avaldame $\sin(\alpha + \beta)$ nurga $\frac{\alpha + \beta}{2}$ funktsioonide kaudu.

$$26. 4 \cos \alpha \cdot \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

39. Esmalt kõrvaldame nurga γ (vasakul poolel), teisendame saadud avaldise ja taastame γ . 40. Sama võtte nagu ülesandes 39.

41. Võrduses $\tan(\alpha + \beta) = -\tan \gamma$ avame sulud ja vabastame võrduse nimetajast.

42. Rakendades sama võtet, mis ülesandes 39, asendame vasaku poole avaldisega $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$; seejärel pärast mõningaid teisendusi saame avaldise

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta) + 1}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)} \text{ jne.}$$

43. Võrduses $\cot\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 1 : \cot \frac{\gamma}{2}$ avame sulud ja vabastame võrduse nimetajaist. 44. Sama võtte, mis ülesandes 43.

45. Võrduses $\cot(\alpha + \beta) = -\cot \gamma$ avame sulud ja vabastame võrduse nimetajast. 46. Sama võtte, mis ülesandes 39. Algul saame $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$, seejärel avame sulud ning asendame $\sin^2 \alpha$ ja $\sin^2 \beta$ avaldistega $1 - \cos^2 \alpha$ ja $1 - \cos^2 \beta$ jne.

47. Sama võtte, mis eelmises ülesandes. Algul saame $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 (\alpha + \beta)$, seejärel avame sulud ning asendame $\sin^2 \alpha$ ja $\sin^2 \beta$ avaldistega $1 - \cos^2 \alpha$ ja $1 - \cos^2 \beta$ jne.
48. Sama võtte, mis ülesandes 39. Algul saame $2 \sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) - 2 \sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha + \beta)$ jne.
49. Sama võtte, mis eelmises ülesandes.
50. $4 \sin \left(15^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(15^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$.
51. $4 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ \right)$.
52. $4 \cos \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$.
53. a) $4 \cos \left(22^\circ 30' + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(22^\circ 30' - \frac{\alpha}{2} \right)$;
 b) $\sqrt{8} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} + 22^\circ 30' \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} - 22^\circ 30' \right)$.
54. $3 - 4 \sin^2 \alpha = 4 (\sin^2 60^\circ - \sin^2 \alpha) = 4 \sin (60^\circ + \alpha) \cdot \sin (60^\circ - \alpha)$.
55. $4 \sin (\alpha + 30^\circ) \cdot \sin (\alpha - 30^\circ)$. 56. $\frac{4 \sin (30^\circ + \alpha) \cdot \sin (30^\circ - \alpha)}{\cos^2 \alpha}$.
57. $\frac{4 \sin (\alpha + 30^\circ) \cdot \sin (\alpha - 30^\circ)}{\cos^2 \alpha}$.
58. $4 \cos \alpha \cdot \cos \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$.
59. a) $4 \sin 2\alpha \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ \right)$;
 b) $4 \cos 2\alpha \cdot \sin \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$.
60. 1) $\left| \frac{a}{\cos \varphi} \right|$, kus $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$; 2) $p \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \sqrt{q} \cdot \cot \frac{\varphi}{2}$,
 kus $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$.
61. Viies a sulgude ette ja võttes $\frac{b}{a} = \cos$, saame:
 1) $\cot^2 \frac{\varphi}{2}$; 2) $2\sqrt{a} \cdot \sin \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$; 3) $2 \operatorname{cosec} \varphi$.
62. $x = \sqrt{(a+b)^2 - 2ab(1 + \cot \gamma)} = (a+b) \cdot \cos \varphi$, kusjuures
 $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$.

63. $x = n \cdot 90^\circ$

64. $x = 36^\circ + n \cdot 72^\circ; 60^\circ + n \cdot 120^\circ.$

65. $x = n \cdot \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}.$

66. $x = n \cdot 120^\circ.$

67. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot n.$

68. $\sqrt{2} \cdot \sin(x + 45^\circ) = 1; x = n \cdot 360^\circ; 90^\circ + n \cdot 360^\circ.$

Harjutus. Lahendada antud võrrand, kasutades mõlema poole ruutu tõstmise võtet, ja leida võõrlahendid saadud lahendite ($x = n \cdot 90^\circ$) hulgast.

69. $x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$

70. $x = 9^\circ + n \cdot 180^\circ; 81^\circ + n \cdot 180^\circ.$

71. $x = 33^\circ 45' + n \cdot 90^\circ.$

72. $x = 7^\circ 30' + n \cdot 90^\circ; 37^\circ 30' + n \cdot 90^\circ$ ehk $x = n \cdot \frac{\pi}{4} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{24}.$

73. $x = 22^\circ 30' + n \cdot 90^\circ.$ 74. $x = 45^\circ + n \cdot 90^\circ; \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ.$

75. $x = n \cdot \frac{\pi}{2}; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$

§ 12.

1. a) $\bar{1},5663$; b) $\bar{1},9525$; c) $\bar{1},5580$; d) $\bar{1},8655$; e) $\bar{1},9023$; f) $\bar{2},3844$.
2. a) $\bar{1},9278$; b) $\bar{1},8047$; c) $\bar{1},8503$; d) $\bar{1},6602$; e) $\bar{1},9340$; f) $\bar{3},8378$.
3. a) $\bar{1},7199$; b) $\bar{1},4608$; c) $0,4561$; d) $\bar{1},3969$; e) $\bar{2},1814$; f) $\bar{1},8396$.
4. a) $\bar{1},2456$; b) $0,4285$; c) $\bar{1},3511$; d) $\bar{1},9999$; e) $\bar{2},5447$; f) $\bar{2},3415$.
5. a) $14^\circ 33'$; b) $46^\circ 54'$; c) $28^\circ 13'$; d) $59^\circ 14'$; e) 48° ; f) $25' 16''$.
6. a) $43^\circ 22'$; b) $85^\circ 07'$; c) $27^\circ 03'$; d) $45^\circ 01'$; e) $50^\circ 01'$; f) $89^\circ 20' 40''$.
7. c) $16^\circ 07'$; d) $50^\circ 03'$; e) $45^\circ 01'$; f) $7' 43''$.
8. c) $22^\circ 55'$; d) $77^\circ 41' 40''$; e) $45^\circ 36''$; f) $89^\circ 25' 37''$.
9. a) $0,342$; b) $0,6743$; c) $3,895$; d) $229,14$; e) $1,305$; f) $1,251$.
10. a) $-0,7661$; b) $0,9397$; c) $-2,773$; d) $-0,181$; e) $-5,76$; f) $1,566$.
11. a) $34^\circ 51'$; b) $67^\circ 05'$; c) $75^\circ 58'$; d) $5^\circ 43'$; e) $48^\circ 11'$; f) $22^\circ 10'$; g) $9^\circ 51'$; h) $20^\circ 19'$.
12. $27^\circ 02'$; $152^\circ 58'$. 13. 223° ; 317° . 14. $40^\circ 21'$; $319^\circ 39'$.
15. $124^\circ 40'$; $235^\circ 20'$.
16. $26^\circ 30'$; $206^\circ 30'$. 17. $111^\circ 58'$; $291^\circ 58'$. 18. $11^\circ 19'$; $191^\circ 19'$.
19. $126^\circ 10'$; $306^\circ 10'$. 20. $86^\circ 11'$; $273^\circ 49'$. 21. $113^\circ 35'$; $246^\circ 25'$.
22. $5^\circ 44'$; $174^\circ 16'$. 23. $231^\circ 03'$; $308^\circ 57'$. 24. $74^\circ 25'$. 25. $35^\circ 38'$.

26. $56^{\circ}01'$. 27. $-23^{\circ}15'$. 28. $164^{\circ}22'$. 29. $-15^{\circ}25'$. 30. $28^{\circ}21'$.
 31. $-54^{\circ}07'$. 32. 103,6.
 33. $-0,48$. 34. 0,00109. 35. 4,710. 36. 0,2307. 37. 342,6.
 38. $-1,208$. 39. 0,617. 40. 32,41. 41. 0,009326.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>S</i>
42.	8,49	3,916	9,35	$65^{\circ}14'$	$24^{\circ}46'$	16,63
43.	250	575	627	$23^{\circ}30'$	$66^{\circ}30'$	71 880
44.	0,7323	0,3169	0,7979	$66^{\circ}36'$	$23^{\circ}24'$	0,116
45.	2,793	2,340	3,644	$50^{\circ}02'$	$39^{\circ}58'$	3,268
46.	6,37	79,45	79,7	$4^{\circ}35'$	$85^{\circ}25'$	253
47.	18,003	16,79	24,61	47°	43°	151,1
48.	0,1259	0,1738	0,2146	$35^{\circ}55'$	$54^{\circ}05'$	0,01094
49.	0,6162	0,2954	0,6832	$64^{\circ}23'$	$25^{\circ}37'$	0,0910
50.	16	63	65	$14^{\circ}15'$	$75^{\circ}45'$	504
51.	112	15	113	$82^{\circ}22'20''$	$7^{\circ}37'40''$	840
52.	528	455	697	$49^{\circ}15'$	$40^{\circ}45'$	120 120
53.	1499	823	1710,2	$61^{\circ}14'$	$28^{\circ}46'$	616 800
54.	261	380	461	$34^{\circ}29'$	$55^{\circ}31'$	49 590
55.	156	133	205	$49^{\circ}33'$	$40^{\circ}27'$	10 374
56.	0,09783	0,1003	0,1401	$44^{\circ}17'$	$45^{\circ}43'$	0,004906
57.	12,06	6,919	13,9	$60^{\circ}09'$	$29^{\circ}51'$	41,73

58. $B = 46^{\circ}48'$; $b = 633,8$; $S = 232 100$.
 59. $A = 23^{\circ}30'$; $b = 1150$; $S = 143 800$.
 60. $B = 60^{\circ}30'$; $a = 15,53$; $S = 105$.
 61. $A = 64^{\circ}39'$; $a = 6,398$; $S = 15,8$.
 62. $A = 37^{\circ}10'$; $B = 105^{\circ}41'$; $S = 36,92$.
 63. $A = 57^{\circ}19'$; $B = 65^{\circ}22'$; $a = 856,7$; $S = 333 720$.
 64. $B = 48^{\circ}40'$; $b = 21,95$; $a = 26,64$; $S = 266,4$.
 65. $A = 24^{\circ}36'$; $B = 130^{\circ}48'$; $a = 71,87$.
 66. $A = 53^{\circ}03'$; $a = 9,68$; $b = 11,64$.
 67. $B = 34^{\circ}28'$; $a = 15,68$; $b = 9,29$; $S = 69,58$.
 68. $A = 73^{\circ}24'$; $B = 33^{\circ}12'$; $a = 30,20$; $b = 17,27$.
 69. $B_1 = 34^{\circ}51'$; $B_2 = 145^{\circ}09'$; $A_1 = 72^{\circ}34'30''$; $A_2 = 17^{\circ}25'30''$;
 $b_1 = 8,39$; $b_2 = 26,72$.

Näpunäide. Nurga B leiame tema siinuse järgi, kusjuures $0^{\circ} < B < 180^{\circ}$, kuid selles vahemikus antud siinuse väärtusele vastab kaks nurka. Selgitada lahenduse kahestust ka geomeetriliselt.

§ 13.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>S</i>
1.	(370)	541	421	43°01'	(86°03')	(50°56')	77 710
2.	(450)	85	445	(87°55')	(10°53')	81°12'	18 900
3.	(951)	1196	353	39°36'	(126°43')	(13°41')	134 550
4.	(97,52)	83,01	36,00	(102°48')	56°06'	(21°06')	1 457
5.	3,683	(13,02)	10,20	(11°48')	(133°42')	34°30'	13,58
6.	13,30	5,333	(15,94)	(51°38')	(18°19')	110°03'	33,32
7.	(510)	(317)	531,9	68°23'	35°18'	(76°19')	78 540
8.	(225)	(800)	634,1	12°15'	131°01'	(36°44')	53 830
9.	(2,29)	1,178	(1,69)	104°33'	(29°52')	45°35'	0,964
10.	62,17	(28)	(42)	(124°)	21°56'	34°04'	487,5
11.	(30,99)	74,6	(69,01)	24°32'	(87°48')	67°40'	1 069
12.	43,92	(40,33)	(32,11)	(73°40')	61°46'	33°34'	621,4
13.	(87)	(65)	76	(75°45')	46°24'	57°51'	2 394
14.	(34)	(93)	{ 65 115,3	(14°15')	{ 137°41' 42°19'	{ 28°04' 123°26'	{ 744 1 320
15.	(24)	(83)	—	(26°45')	—	—	—
16.	{ 55,56 615,8	(360)	(309)	{ 3°44' 133°48'	{ 155°02' 24°58'	(21°14')	{ 3 622 40 150
17.	(13,9)	7,102	(8,43)	(126°43')	24°11'	29°06'	24
18.	(0,437)	(1,299)	1,724	3°42'	(11°03')	165°15'	0,07226
19.	(13,81)	{ 20,72 6,005	(8,14)	{ 25°19' 154°41'	{ 140°05' 10°43'	(14°36')	{ 36,08 10,45
20.	240,8	(263)	(215)	59°29'	(70°15')	50°16'	24 350
21.	(19,06)	(28,19)	{ 36,29 11,88	(31°17')	{ 50°10' 129°50'	{ 98°33' 18°53'	{ 265,8 86,95
22.	(457,1)	(169,9)	433,8	90°	(21°49')	68°11'	36 850
23.	(2579)	2572	(10)	(130°22')	49°28'	0°10'	9 800
24.	(19)	(34)	(49)	16°26'	30°24'	133°10'	235,6
25.	(89)	(321)	(395)	7°58'	29°58'	142°04'	8 783
26.	(44)	(483)	(485)	5°12'	84°48'	90°	10 626
27.	(0,099)	(0,101)	(0,158)	37°22'	38°16'	104°22'	0,004844
28.	(172,5)	(1135)	(1205)	7°44'	62°16'	110°	91 980
29.	(421,6)	(409,8)	(335,9)	68°04'	64°24'	47°32'	63 830
30.	(1,236)	(2,346)	(3,456)	10°52'	20°58'	148°10'	0,7639

31. $C = 18^\circ 27'$; $a = 2R \sin A = 14,55$; $b = 2R \sin B = 11,82$;
 $c = 2R \sin C = 5,013$; $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = 27,22$.
32. $C = 119^\circ 32'$; $a = \sqrt{\frac{2S \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C}} = 20,65$; $b = 55,9$; $c = 66,16$.
33. $A = 59^\circ 42'$; $a = \frac{h_a \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C} = 57,25$; $b = \frac{h_a}{\sin C} = 60,01$;
 $c = \frac{h_a}{\sin B} = 5,933$; $S = \frac{h_a^2}{2} \cdot \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C} = 153,7$.
34. $A = 77^\circ 04'$; $a = \frac{l_a \sin A}{\sin B \cdot \sin C} \cdot \cos \frac{B-C}{2} = 6,610$;
 $b = \frac{l_a}{\sin C} \cos \frac{B-C}{2} = 6,708$; $c = \frac{l_a}{\sin B} \cos \frac{B-C}{2} = 0,5223$;
 $S = \frac{l_a^2}{2} \cdot \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C} \cos^2 \frac{B-C}{2} = 1,708$.
35. $a = \frac{m}{2} \cdot \sin A \cdot \sec \frac{C}{2} \cdot \sec \frac{A-B}{2}$;
 $b = \frac{m}{2} \cdot \sin B \cdot \sec \frac{C}{2} \cdot \sec \frac{A-B}{2}$; $c = m \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sec \frac{A-B}{2}$;
 $S = \frac{m^2}{4} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \tan \frac{C}{2} \cdot \sec^2 \frac{A-B}{2}$;
 $C = 69^\circ 20'$; $a = 290,2$; $b = 199,1$; $c = 288,1$; $S = 27\ 020$.
Näpunäide. Saame $m = 2R (\sin A + \sin B) = \dots$, kust leiame $2R$; seejärel koostame külgede avaldised $2R$ abil.
36. $C = 54^\circ$; $a = \frac{n}{2} \cdot \sin A \cdot \operatorname{cosec} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{C}{2} = 34,07$;
 $b = \frac{n}{2} \cdot \sin B \cdot \operatorname{cosec} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{C}{2} = 11,07$;
 $c = n \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{A-B}{2} = 28,98$;
 $S = \frac{n^2}{4} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \cot \frac{C}{2} \cdot \operatorname{cosec}^2 \frac{A-B}{2} = 152,5$.
37. $C = 19^\circ 11'$; $c = \frac{m}{2} \sec \frac{C}{2} \sec \frac{A-B}{2} = 0,7558$; $b = 1,958$;
 $a = 2,247$; $S = 0,722$. *Näpunäide.* $m = c (\sin A + \sin B)$.
38. $A = 53^\circ 08'$; $a = n : 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C-B}{2} = 232$; $b = 210$; $c = 286$;
 $S = 24\ 020$.
39. $C = 102^\circ 52'$; $a = p \cdot \sin \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2} = 80,21$;

$$b = p \cdot \sin \frac{B}{2} \sec \frac{A}{2} \sec \frac{C}{2} = 152,7;$$

$$c = p \cdot \sin \frac{C}{2} \sec \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} = 187,6;$$

$$S = p^2 \cdot \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 5974.$$

Näpunäide. 1. viis. $2p = 2R (\sin A + \sin B + \sin C) =$

$$= 8R \cdot \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}; \text{ siit } 2R = \frac{\frac{p}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

mida kasutamegi arvutamisel ja mille abil koostame külgede avaldised ja seejärel pindala avaldise.

2. viis. Külje AC pikendustel võtame lõigud $CE = CB$ ja $AD = AB$ ning ühendame punktid D ja E punktiga B ; kolmnurgas DBE külge $DE = 2p$, nurk $D = \frac{A}{2}$ ja nurk $E = \frac{C}{2}$. Võrdhaarsest kolmnurgast BCE leiame: $a = \frac{BE}{2} : \cos \frac{C}{2}$; BE määramiseks kolmnurgast DBE leiame:

$$BE : 2p = \sin \frac{A}{2} : \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) = \sin \frac{A}{2} : \cos \frac{B}{2}.$$

Sel viisil määrame külje a ; külgede b ja c avaldised koostame analoogia põhjal.

$$40. C = 118^\circ 05'; c = r \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{B}{2};$$

$$b = r \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{C}{2};$$

$$a = r \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{C}{2};$$

$$S = r^2 \cdot \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}.$$

Otstarbekam on kasutada arvutamiseks külgede lõike (x, y, z) tippudest (A, B, C) kuni puutepunktideni; siis saame: $x = 25$, $y = 14$ ja $z = 3$; seejärel leiame: $a = z + y = 17$, $b = z + x = 28$, $c = x + y = 39$ ja $S = r(x + y + z) = 5 \cdot 42 = 210$.

$$41. A = 33^\circ 53'; C = 98^\circ 07'; a = 0,6927; b = 0,9236; S = 0,3167.$$

$$42. C = 47^\circ 26'; B = 37^\circ 04'; b = 38,37; c = 47; S = 897.$$

$$43. A_1 = 75^\circ 44'; C_1 = 87^\circ 12'; a_1 = 220,2; b_1 = 66,66; S_1 = 7330;$$

$$A_2 = 104^\circ 15'; C_2 = 58^\circ 41'; a_2 = 257; b_2 = 77,94; S_2 = 8569.$$

$$44. B = 35^\circ 53'; C = 97^\circ 47'; b = 12,95; c = 21,905; S = 102,6.$$

$$45. B = 10^\circ 02'; C = 101^\circ 15'; a = 155,2; c = 163,4; S = 2207.$$

46. $A = 12^\circ 08'$; $C = 43^\circ 14'$; $b = 166,5$; $c = 138,6$.
 47. $A = 100^\circ 25'$; $B = 50^\circ 12'$; $C = 29^\circ 23'$; $c = 15,96$; $S = 196,2$.
 48. $A = 38^\circ 49'$; $B = 19^\circ 18'$; $C = 121^\circ 53'$; $a = 23,84$; $b = 12,66$;
 $c = 32,32$; $S = 127,5$.
 49. $A = 126^\circ 43'$; $B = 39^\circ 36'$; $a = 1196$; $b = 951$; $S = 134\,550$.

Näpunäide. $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C}$; siit $\cos \frac{A-B}{2} = \frac{m}{c} \cdot \sin \frac{C}{2}$,

mille abil leiame $\frac{A-B}{2}$; teades aga $\frac{A+B}{2}$ ja $\frac{A-B}{2}$, leiame A ja B .

50. $A = 81^\circ 30'$; $B = 44^\circ 50'$; $a = 22,47$; $b = 16,02$; $S = 144,9$.
 51. $B = 41^\circ 05'$; $C = 36^\circ 17'$; $a = 8,556$; $b = 5,762$; $S = 14,58$.

Näpunäide. 1. viis. Mollweide esimese valemi järgi

$$\frac{m}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}B}{2 \sin \frac{1}{2}A \cdot \sin \frac{1}{2}B} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2},$$

mis võimaldab leida nurga B .

2. viis. Korrutada teineteisega

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \text{ ja } \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \text{ saame:}$$

$$\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} = \frac{p-c}{p}, \text{ kuid } \frac{p-c}{p} = \frac{2(p-c)}{2p} = \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{m-c}{m+c}.$$

52. $B = 37^\circ 43'$; $C = 63^\circ 36'$; $a = 16,58$; $b = 10,35$; $S = 76,86$.

Näpunäide. 1. viis. Mollweide teise valemi järgi

$$\frac{n}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\text{; siit saame } \frac{c+n}{c-n} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}B}{2 \cos \frac{1}{2}A \cdot \sin \frac{1}{2}B} =$$

$$= \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2}, \text{ mis võimaldab leida nurga } B.$$

2. viis. Jagades $\tan \frac{A}{2}$ ja $\tan \frac{B}{2}$, saame $\tan \frac{A}{2} : \tan \frac{B}{2} =$

$$= \frac{p-b}{p-a}, \text{ kuid } \frac{p-b}{p-a} = \frac{2(p-b)}{2(p-a)} = \frac{c+a-b}{c+b-a} = \frac{c+n}{c-n}.$$

53. $A = 115^\circ 39'$; $B = 25^\circ 40'$; $C = 38^\circ 41'$; $a = 9,998$; $b = 4,801$; $c = 6,931$.
54. $A = 26^\circ 34'$; $B = 30^\circ 04'$; $C = 123^\circ 22'$; $a = h_c : \sin B = 71,84$;
 $c = h_b : \sin A = 134,16$; $b = c \cdot 0,6 = 80,49$; $S = 0,5 \cdot c \cdot h_c = 2415$.
Näpunäide. $\tan A = 0,5$; $b : c = h_c : h_b = 3 : 5$.
55. $A = 27^\circ 16'$; $B_1 = 63^\circ 42'$; $C_1 = 89^\circ 02'$; $c_1 = 50,19$; $S_1 = 517,4$;
 $B_2 = 116^\circ 18'$; $C_2 = 36^\circ 26'$; $c_2 = 29,81$; $S_2 = 307$.
56. $B = 11^\circ 25'$; $A_1 = 55^\circ 02'$; $C_1 = 113^\circ 33'$; $c_1 = 134,2$;
 $S_1 = 0,5$; $c_1 \cdot h_c = 1595$; $A_2 = 124^\circ 59'$; $C_2 = 43^\circ 36'$; $c_2 = 101$;
 $S_2 = 1200$.
57. $C_1 = 30^\circ$; $B_1 = 103^\circ 04'$; $A_1 = 46^\circ 56'$; $c_1 = 4,106$; $C_2 = 150^\circ$;
 $B_2 = 17^\circ 12'$; $A_2 = 12^\circ 48'$; $c_2 = 13,53$. (Vastuse kahestust selgitada
 joonise abil.)
58. $A = 30^\circ 24'$; $B = 99^\circ 45'$; $C = 49^\circ 51'$; $a = 50,32$; $S = 1884$.
59. $A = 83^\circ 25'$; $B = 36^\circ 35'$; $C = 60^\circ$; $c = 17,434$; $S = 103,9$.

Näpunäide. Pikendanud mediaani CD lõigu $DE = CD$ võrra ja ühendanud punktid B ja E , leiame kolmnurgast CBE nurga CBE .

60. $A = 127^\circ 10'$; $B = 32^\circ 05'$; $C = 20^\circ 45'$; $a = h_b : \sin C = 33,88$;
 $b = h_a : \sin C = 22,59$; $c = h_a : \sin B = 15,06$; $S = 135,5$.

Näpunäide. Saame võrde $a : b : c = \frac{2S}{8} : \frac{2S}{12} : \frac{2S}{18} = 9 : 6 : 4$, mis
 võimaldab leida nurgad.

61. $A = 135^\circ 11'$; $B = 27^\circ 07'$; $C = 17^\circ 42'$; $a = 64,93$; $S = 414,5$.

Näpunäide. Kolmnurkade pindalade võrdlemisest saame:

$$\frac{bc}{2} \cdot \sin A = \frac{bl_a}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{cl_a}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}; \text{ siit leiame, et } \cos \frac{A}{2} = \frac{(b+c)l_a}{2bc}.$$

§ 14.

1. a) $x = (-1)^n \cdot 30^\circ + n \cdot 180^\circ$ ehk $x = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$;
 b) $x = 30^\circ, 150^\circ$ ehk $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.
2. a) $x = \pm 51^\circ 50' + n \cdot 360^\circ$; b) $x = 51^\circ 50'; 308^\circ 10'$.
3. a) $x = \pm 72^\circ + n \cdot 360^\circ; \pm 144^\circ + n \cdot 360^\circ$ ehk $x = \pm \frac{2\pi}{5} + 2\pi n$;
 $\pm \frac{4\pi}{5} + 2\pi n$;
 b) $x = 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$ ehk $x = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$.

4. a) $x = -45^\circ + n \cdot 180^\circ$ ehk $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; b) $x = 135^\circ, 315^\circ$ ehk

$$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

5. a) $x = \pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ$ ehk $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$; b) $x = 60^\circ, 120^\circ,$

$$240^\circ, 300^\circ \text{ ehk } x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}.$$

6. a) $x = n \cdot 180^\circ; \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$ ehk $x = n \cdot 360^\circ; x = 60^\circ + n \cdot 120^\circ;$

7. a) $x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ; (-1)^n \cdot 19^\circ 28' + n \cdot 180^\circ;$

b) $x = 0^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ, 360^\circ$ ehk $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi.$

b) $x = 19^\circ 28', 90^\circ, 160^\circ 32', 270.$

8. a) $x = 45^\circ + m \cdot 90^\circ$ ehk $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot m$; b) $x = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ,$

$$315^\circ \text{ ehk } x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

9. a) $x = (-1)^n \cdot 10^\circ + 60^\circ \cdot n$ ehk $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} \cdot n$;

b) $x = 10^\circ, 50^\circ, 130^\circ, 170^\circ, 250^\circ, 290^\circ$

$$\text{ehk } x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}.$$

10. a) $x = 112^\circ 30' + n \cdot 45^\circ$ ehk $x = \frac{5\pi}{8} + \frac{5\pi}{2} \cdot n$; b) $x = 112^\circ 30'$ ehk

$$x = \frac{5\pi}{8}.$$

11. a) $x = (6n \pm 1) \cdot 90^\circ$ ehk $x = (6n \pm 1) \frac{\pi}{2}$; b) 90° ehk $\frac{\pi}{2}$

12. a) $x = (3n \pm 1) \cdot 4\pi$; b) ei ole.

13. 1) $\alpha - \beta = 2n \cdot 180^\circ$ või $\alpha + \beta = (2n + 1) \cdot 180^\circ;$

2) $\alpha \pm \beta = n \cdot 360^\circ;$ 3) $\alpha - \beta = n \cdot 180^\circ;$

4) $\alpha - \beta = n \cdot 180^\circ;$

5) $\alpha + \beta = 2n \cdot 180^\circ;$ või $\alpha - \beta = (2n + 1) \cdot 180^\circ;$

6) $\alpha \pm \beta = (2n + 1) \cdot 180^\circ;$

7) $\alpha + \beta = n \cdot 180^\circ;$ 8) $\alpha + \beta = n \cdot 180^\circ;$

9) $\alpha \pm \beta = 90^\circ + n \cdot 360^\circ;$ 10) $\alpha \pm \beta = 270^\circ + n \cdot 360^\circ;$

11) $\alpha + \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ;$ 12) $\alpha - \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ.$

14. $(2k + 1) \cdot 9^\circ.$ 15. $k \cdot 180^\circ.$ 16. $(2k + 1) \cdot 60^\circ.$

17. $\sin 2x = \frac{a}{b-a}.$ Võrrandil on lahendid, kui $|a| \leq |b-a|.$

$$18. \frac{k}{p+q} \cdot 180^\circ.$$

$$19. (4k-1) \cdot 45^\circ \text{ ja } (4k+3) \cdot 22^\circ 30'.$$

$$20. k \cdot 36^\circ \text{ ja } k \cdot 45^\circ.$$

$$21. x = \arctan \left(-\frac{b}{a} \right) + n \cdot 180^\circ.$$

$$22. (2k+1) \cdot 90^\circ \text{ ja } 45^\circ + k \cdot 180^\circ.$$

$$23. (-1)^n \arcsin \frac{-2 \pm \sqrt{54}}{10} + n \cdot 180^\circ.$$

$$24. \pm 2 \arccos \frac{\sqrt{17}-1}{4} + n \cdot 720^\circ.$$

$$25. k \cdot 180^\circ + (-1)^k 30^\circ - \frac{m}{2}.$$

$$26. k \cdot 90^\circ \text{ ja } \pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ.$$

$$27. k \cdot 180^\circ. \quad 28. \tan x_1 = \tan x_2 = \frac{a}{b}.$$

$$29. x = \arctan \frac{a}{b} \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2\pi n, \text{ kusjuures } c^2 \leq a^2 + b^2.$$

$$30. x_1 = 126^\circ 52' + n \cdot 360^\circ; \quad x_2 = -151^\circ 56' + n \cdot 360^\circ.$$

$$31. x = n \cdot 360^\circ; \quad -126^\circ 52' + n \cdot 360^\circ.$$

$$32. x = 31^\circ 59' \pm 16^\circ 20' + n \cdot 360^\circ.$$

$$33. x = 15^\circ + n \cdot 360^\circ; \quad 105^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

Näpunäide. Jagades võrrandi mõlemad pooled 2-ga saame:
 $\cos(x-60^\circ) = \cos 45^\circ.$

$$34. x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n.$$

$$35. x = n \cdot 180^\circ; \quad 45^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

$$36. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$$

$$37. x = \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

Näpunäide. Viinud kõik liikmed võrrandi vasakule poolele ja ühendanud nad üheks murruks, taandame selle avaldisega $1 + \sin x$.

$$38. x = 10^\circ 12' + n \cdot 180^\circ; \quad 79^\circ 50' + n \cdot 180^\circ.$$

$$39. x = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \pi n. \quad 40. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; \quad \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

$$41. x = \pm 60^\circ + m \cdot 180^\circ.$$

$$42. x = 75^\circ + n \cdot 180^\circ; \quad 15^\circ + n \cdot 180^\circ. \quad 43. \tan x = \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c.$$

$$44. x = m \cdot 60^\circ.$$

$$45. x = (-1)^n \cdot 75^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

$$46. x = n \cdot 60^\circ; 15^\circ + n \cdot 30^\circ.$$

$$47. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n. \quad 48. x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$49. x_1 = x_2 = 90^\circ + n \cdot 180^\circ; x_3 = 45^\circ + n \cdot 90^\circ.$$

$$50. x = m \cdot 180^\circ \pm 18^\circ; m \cdot 180^\circ \pm 54^\circ.$$

$$51. x = \frac{\pi}{2} + n\pi; \pm \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}.$$

Näpunäide. Avaldis $\cos 4x + \cos 2x$ teisendada korrutiseks.

$$52. x = n \cdot 120^\circ; -90^\circ + n \cdot 360^\circ; 45^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

Näpunäide. $\cos x - \cos 2x$ teisendada korrutiseks ja $\sin 3x$ arendada kui $\sin 2\left(\frac{3x}{2}\right)$.

$$53. x = 60^\circ + n \cdot 120^\circ; 2 \arctan \frac{b}{a} + 2\pi n.$$

$$54. x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \pi n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Näpunäide. Teisendanud $\sin x + \sin 3x$ ja $1 + \cos 2x$ korrutisteks ja teinud veel mõned teisendused, saame võrrandi

$$\cos x \cdot (1 + 2 \cos x) (1 - 2 \sin x) = 0.$$

$$55. x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Näpunäide. Antud võrrand taandub võrrandiks $\frac{\cos 2x}{\sin 3x \cdot \cos x} = 0$.

$$56. \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4}; x = \pm 77^\circ 20' + n \cdot 720^\circ.$$

$$57. x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n.$$

$$58. x = \frac{\pi}{2} \cdot n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}.$$

Näpunäide. Vasaku poole teisendame murruks $\frac{4}{\sin^2 x}$.

$$59. \cos x_1 = \cos x_2 = \frac{1}{3}; x_1 = x_2 = \pm 70^\circ 32' + n \cdot 360^\circ.$$

$$60. x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n; x_2 = x_3 = \pi n.$$

Näpunäide. $1 + \sin 2\alpha = (\cos \alpha + \sin \alpha)^2$.

61. $x_1 = x_2 = n \cdot 90^\circ$; $x_3 = \pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$ ehk $x = n \cdot 180^\circ$;
 $30^\circ + n \cdot 60^\circ$.

Näpunäide. $\sin^2 3x - \sin^2 x$ lahutame tegureiks.

62. $x = n \cdot 60^\circ$; $\pm 35^\circ 16' + n \cdot 180^\circ$.

Näpunäide. Esitanud antud võrrandi kujul $\tan x + \tan 2x = -\tan 3x$, arendame $\tan 3x$ kui $\tan(x + 2x)$. Uuest võrrandist saame järgmised kaks võrrandit: 1) $\tan x + \tan 2x = 0$ ja 2) $1 = -1 : (1 - \tan x \cdot \tan 2x)$. Võrrandist 1 leiame, et $\sin 3x = 0$, ja

võrrandist 2 leiame, et $\tan x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$.

63. $x = n \cdot \frac{\pi}{8}$.

Näpunäide. Korrutanud võrrandi mõlemad pooled 2-ga, kasutame võrdust $2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.

64. $x = 45^\circ + n \cdot 180^\circ$. 65. $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$.

66. $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$. 67. $x = \pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ$; $90^\circ + n \cdot 180^\circ$.

68. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$. 69. Pole lahendeid.

70. Pole lahendeid. 71. $\tan x = \pm(\sqrt{2} + 1)$; $\pm(\sqrt{2} - 1)$;

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n$.

72. $x = n \cdot 60^\circ$.

Näpunäide. $\tan 2x$ asendame avaldisega $\frac{2 \sin x \cos x}{\cos 2x}$.

73. $x = \pi n$.

74. 1) $\sin x = 0,8$; $\sin y = -0,6$; 2) $\sin x = -0,6$; $\sin y = 0,8$.

Näpunäide. Tõstame võrrandid $\sin y = 0,2 - \sin x$ ja $\cos y = -0,2 - \cos x$ ruutu ning liidame liikmeti.

75. 1) $\cos x = \frac{1}{2}$; $\cos y = \frac{1}{3}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $\cos y = -\frac{1}{3}$;

3) $\cos x = \frac{1}{3}$; $\cos y = \frac{1}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{3}$; $\cos y = -\frac{1}{2}$.

Näpunäide. Liites ja lahutades liikmeti antud võrrandid, avaldame neist $\cos y$ ja $\sin y$ ning liidame nende ruudud.

76. $\tan x = 5 + \sqrt{34}$. $\tan y = 5 - \sqrt{34}$; 2) $\tan x = 5 - \sqrt{34}$;
 $\tan y = 5 + \sqrt{34}$.

$$77. x^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Näpunäide. Võtnud $\cos(\alpha + \beta) = \cos \varphi$, avame sulud, avaldame $\cos \alpha$ ja $\cos \beta$ vastavalt $\sin \alpha$ ja $\sin \beta$ kaudu ning asendame $\sin \alpha$ ja $\sin \beta$ avaldistega $\frac{a}{x}$ ja $\frac{b}{x}$.

$$78. \begin{aligned} 1) & x = 45^\circ + (m+n) \cdot 180^\circ, \quad y = 15^\circ + (m-n) \cdot 180^\circ; \\ 2) & x = 150^\circ + (m+n) \cdot 180^\circ, \quad y = -45^\circ + (m-n) \cdot 180^\circ; \\ 3) & x = -15^\circ + (m+n) \cdot 180^\circ, \quad y = -45^\circ + (m-n) \cdot 180^\circ; \\ 4) & x = 45^\circ + (m+n) \cdot 180^\circ, \quad y = -105^\circ + (m-n) \cdot 180^\circ. \end{aligned}$$

$$79. \begin{aligned} 1) & x = 21^\circ 21' 15'', \quad y = 8^\circ 38' 45''; \quad 2) x = 81^\circ 21' 15'', \quad y = 68^\circ 38' 45''. \end{aligned}$$

$$80. \begin{aligned} 1) & x = 81^\circ 21' 15'', \quad y = 21^\circ 21' 15''; \quad 2) x = 21^\circ 21' 15'', \quad y = 81^\circ 21' 15''. \end{aligned}$$

81. x ja y leiame nende poolsumma ja poolvahe järgi: 1) esimese võrrandi järgi on $\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}$; 2) teise võrrandi esitame kujul $2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = a$ ja leiame sellest $\frac{x-y}{2}$.

$$82. x = 15^\circ 20', \quad y = 61^\circ 40'.$$

83. x ja y leiame nende summa ja vahe järgi: 1) $x+y$ on antud; 2) $x-y$ leiame teisest võrrandist, kui korrutame ta mõlemad pooled 2-ga ja $2 \sin x \cdot \sin y$ asendame avaldisega $\cos(x-y) - \cos(x+y)$.

$$84. x = 60^\circ, \quad y = 11^\circ 40'.$$

85. Esimesest võrrandist saame $\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}\alpha$ ja teisest võrrandist

$$\text{leiame, et } \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{m+n}{m-n} \text{ ehk } \frac{\tan \frac{1}{2}(x+y)}{\tan \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{m+n}{m-n},$$

millest leiame $\frac{1}{2}(x-y)$.

$$86. x = 35^\circ 46', \quad y = 60^\circ 52'.$$

87. Teise võrrandi võib esitada kujul $\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = a$, millest saame $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{a} \cdot \sin(x+y)$ ehk $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{a} \cdot \sin \alpha$. Korrutanud nüüd võrrandi mõlemad pooled 2-ga ja asendanud $2 \cos x \cdot \cos y$ avaldisega $\cos(x+y) + \cos(x-y)$, võime leida $x-y$.

$$88. x = 44^\circ 20', \quad y = 13^\circ 20'.$$

89. Esitanud teise võrrandi kujul $\frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{a}{1}$, saame sellest

$$\frac{\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y} = \frac{1+a}{1-a} \text{ ehk } \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{1+a}{1-a}.$$

Viimasest võrrandist leiame $x - y$.

90. $x = 45^\circ$, $y = 40^\circ$.

91. Teisest võrrandist leiame, et $\frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \frac{m+n}{m-n}$ ehk

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{m+n}{m-n}, \text{ millest leiame } x - y.$$

92. 1) $x = 22^\circ 25'$, $y = 18^\circ 39'$; 2) $x = 71^\circ 21'$, $y = 67^\circ 35'$.

93. Pole lahendipaari, milles mõlemad nurgad oleksid teravad.

94. $\tan x = 1$; $\tan y = 2$; $\tan z = 3$; $x = 45^\circ$; $y = 63^\circ 26'$; $z = 71^\circ 34'$.

Näpunäide. $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z$.

95. $x = 30^\circ 58'$; $y = 78^\circ 41'$; $z = 70^\circ 21'$. (Vt. ülesanne 94.)

§ 15.

1. 1) $-\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{3}{4}\pi$.

2. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 0; 3) $\sqrt{3}$.

3. 1) -1 ; 2) 1; 3) 0.

4. 1) x ; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

5. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\sqrt{3}$.

6. 1) $\frac{4\pi}{5}$; 2) x ; 3) $\frac{5\pi}{14}$.

7. 1) 0,6; 2) $\frac{15}{17}$; 3) $\frac{3}{4}$.

8. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$.

9. 1) pole väärtust;
2) pole väärtust.

10. $\sqrt{3}$.

11. $\frac{77}{85}$.

12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. $\frac{41}{49}$.

14. $2m\sqrt{1-m^2}$.

15. $\frac{47}{52}$.

16. $\frac{2m}{1+m^2}$.

32. $\pm\sqrt{2}$.

33. 0; $\frac{1}{2}$.

34. $\pm\sqrt{3}$.

35. $\sqrt{2}$.

36. 0;

$\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

37. $\frac{\pi}{4}$.

38. $\pm\frac{\pi}{6}$.

39. $\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{2})}{17}}$.

40. $\frac{1}{2}$.

41. 0; $\frac{1}{2}$.

42. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

43. $\pm\sqrt{\frac{2}{a}}$.

44. $\pm\frac{1}{3}$.

§ 15a.

1. $a \sec \frac{180^\circ}{n}$. 2. 18,02 cm ja 22,47 cm. 3. $2a \cos \frac{180^\circ}{n}$.
4. 1) $2R = a \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{n}$; 2) $\frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{90^\circ}{n}$. 5. 26,97 m ja 20,84 m.
6. $4r^2 \operatorname{cosec} \alpha = 167$. 7. $\sqrt{Q \cot \frac{\beta}{2}} = 24,66$. 8. $\beta = 2 \operatorname{arc} \tan \frac{b^2}{4Q} = 130^\circ 47'$.
9. $\frac{1}{4} na^2 \cot \frac{180^\circ}{n}$; 1) 1453; 2) 4,829; 3) 1120. 10. $\frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$;
1) 147; 2) 116,5. 11. $nR^2 \tan \frac{180^\circ}{n}$. 12. 183,8. 13. $\approx 41 a$.
14. $a^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha$.
15. 71 cm. 16. $S_9 : S_{10} = 10 \cot 20^\circ : 9 \cot 18^\circ = 0,992$. 17. 21,75 cm².
18. $\pi r^2 \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{r^2}{2} \sin \alpha$; 1) 0,98; 2) 1,63. 19. $\frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{R^2 \sin \alpha}{2}$;
 $\alpha = 2 \operatorname{arc} \sin \frac{a}{2R}$; 0,59 cm².
20. $R^2 \left[\frac{\pi(180^\circ - \alpha)}{180^\circ} + \sin \alpha \right]$. 21. 3,215 cm ja 7,785 cm.
22. $S = \frac{4ab}{\sin \alpha}$; $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \cdot \frac{2}{\sin \alpha}$;
 $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \cdot \frac{2}{\sin \alpha}$.
23. $6 - \pi \frac{90^\circ + \alpha}{72^\circ} = 0,4643$; α on suurem ringjoone puutepunktide vaheline kaar.
24. 30°.

§ 16.

1. 3,328. 2. $\operatorname{arc} \tan \frac{r}{p} = 60^\circ 26'$. 3. $\operatorname{arc} \tan \frac{2d}{a} = 53^\circ 08'$.
4. 35°16'. 5. 5,2 m; 28°33'. 6. 51°03'.
7. 2,6 m; 67°23'. 8. 70°32'. 9. $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos \varphi$; $\varphi = 45^\circ$.
10. $\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$; $\varphi = 6^\circ 12'$. 11. $x = y = z = \operatorname{arc} \tan \frac{4hS}{abc} = 75^\circ 52'$.
12. $\frac{\alpha \sin \beta \tan \varphi}{\sin(\gamma + \beta)} = 322,5$ m. 13. $\frac{a^2}{4\sqrt{3}} \sqrt{4 + \tan^2 a}$.

$$14. \operatorname{arc} \sin \frac{n \pm m}{a}. \quad 15. \varphi = \operatorname{arc} \tan \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Näpunäide. Paralleelsete kaldsirgete ja lõikaja lõikepunktid tasapinnaga asetsevad ühel sirgel.

$$16. \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos \varphi}. \quad 17. \operatorname{arc} \sin \frac{c \sin \alpha}{d}; 45^\circ.$$

18. 1) $\sqrt{b^2 - a^2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$; ristsirgete ja antud tasapinna lõikepunktid asetsevad ühel ja samal pool tasapinda, mis on pandud läbi antud lõigu risti antud tasapinnaga. 2) $\sqrt{b^2 - a^2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$; ristsirgete ja antud tasapinna lõikepunktidest asetseb üks ühel pool ja teine teisel pool tasapinda, mis on pandud läbi antud lõigu risti antud tasapinnaga.

Näpunäide. Projitseerime antud lõigu ja temale ehitatud ristsirged antud tasapinnale; seejärel ehitame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on b ja mille üks kaatet on paralleelne lõigu a projektsiooniga.

$$19. 41^\circ 25' \text{ ja } 82^\circ 50'.$$

§ 17.

$$1. a \tan \alpha = 5,441. \quad 2. 1) \varphi = \operatorname{arc} \sin \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}; \quad 2) \varphi = 22^\circ 37'.$$

$$3. \sin x = \sin 20^\circ \cos 25^\circ; \quad x = 18^\circ 04'. \quad 4. 22^\circ. \quad 5. \sin \varphi = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

$$6. \frac{180^\circ}{n}. \quad 7. \text{ a) } 26,7 \text{ m; } 11,7 \text{ m; b) } \alpha = 18^\circ 33'; \beta = 46^\circ 31'; \text{ c) } 17^\circ 14';$$

$$40^\circ; \text{ d) } 18^\circ 47'; 50^\circ 32'.$$

$$8. 39^\circ 48'. \quad 9. \frac{a}{2} \sin 2\alpha \cdot \sin \varphi. \quad 10. \tan x = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \alpha; \tan y = \frac{1}{2} \tan \alpha.$$

$$11. x = \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \right). \quad 12. 73^\circ 24'. \quad 13. 30^\circ.$$

$$14. \varphi = \operatorname{arc} \sin 0,6 = 36^\circ 52'. \quad 15. 1) 70^\circ 32'; 2) 109^\circ 28'; 3) 138^\circ 12'.$$

Näpunäide. Ülesanne taandub niisuguse korrapärase viisnurkse püramiidi külgtahkude vahelise nurga arvutamiseks, mille kõik servad on võrdsed. 4) $116^\circ 34'$. *Näpunäide.* Ülesanne taandub niisuguse korrapärase kolmnurkse püramiidi külgtahkude vahelise nurga arvutamiseks, mille külgtahu tipunurk on 108° .

§ 18.

1. 43,3 cm². 2. $Q \sqrt{2}$. 3. $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \alpha}$. 4. 42,2 cm.
 5. 1953 cm². 6. 33,35 m². 7. 36°52'; 3 m.
 8. Ühepalju. 9. $Q \sin \alpha$; väiksem; heledamalt. 10. 106,4 m².

§ 19.

1. 67°56'. 3. $\frac{7a^2}{8 \cos \alpha}$. 4. 1) $\frac{3a}{4} \sqrt{a^2 + 2b^2}$; 2) $\arctan \frac{b \sqrt{2}}{a}$.
 5. Lõiketasapind on paralleelne põhja suurema diagonaaliga ja moodustab põhitahuga nurga $\varphi = \arccos \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)$.
 6. $d^2 \sqrt{2} \cdot \sin 2\beta \cdot \sin (45^\circ + \alpha) \approx 393,1 \text{ m}^2$. 7. $d^2 \cot \frac{\alpha}{4} \approx 1963 \text{ m}^2$.
 8. $5a^2 \cot 36^\circ \cdot \cos^2 27^\circ \approx 3092 \text{ m}^2$.
 9. $4a^2 \operatorname{cosec} \frac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) \cdot \sqrt{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} \approx 34\,700 \text{ cm}^2$.
 10. $\frac{1}{3} a^2 \sqrt{3} \sec \alpha \cdot (1 + \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha})$.
 11. $x = \arctan \left(\frac{1}{2} \tan \varphi \right) = 16^\circ 06'$; $y = \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan \varphi \right) = 26^\circ 34'$.
 12. $x = \arccos \left(\cot \frac{180^\circ}{n} \tan \frac{\alpha}{2} \right) = 54^\circ 44'$. 13. $\frac{a \sin \alpha}{2 \sin (\alpha + 45^\circ)}$.
 14. $\frac{1}{4} a^2 \sec \alpha \cdot \sqrt{\sin (\alpha + 30^\circ) \sin (\alpha - 30^\circ)}$.
 15. $x = \frac{1}{2} \arcsin \frac{P \sqrt{2}}{c^2} = 29^\circ 02'$ või $x = 60^\circ 58'$;
 $y = 2c \cos x = 8,743$ või $y = 4,853$.
 16. $\tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{m \sqrt{2}}{n}$; $\varphi = 90^\circ - 2 \arctan \frac{m \sqrt{2}}{n} = 30^\circ$.
 17. $\frac{a^2}{9 \sqrt{3}} \sqrt{4 + \tan^2 \alpha} = 1,962$. 18. $a^2 \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)}$. 20. 48 cm².
 21. 1) $2a^2$; 2) $\frac{a^2}{2}$; 3) $3a^2$. 22. 168 cm². 23. 14,61 cm². 24. 32°51'.
 25. $a^2 \sec \alpha$. 26. $4h^2 \cot \alpha \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$. 27. $2a^2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \sec \varphi$.
 28. $2nk^2 \cos \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{180^\circ}{n} = 6238$. 29. $(a + b) \sqrt{ab} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sec \alpha$.

$$30. l^2 \sin 2\alpha \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \sec \varphi. \quad 31. a^2 \sqrt{2} \cdot \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}.$$

$$32. \frac{na^2}{4 \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \cos \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$\text{ehk } \frac{na^2}{4} \cdot \cot \frac{180^\circ}{n} \sqrt{1 + \frac{\tan^2 \alpha}{\cos^2 \frac{180^\circ}{n}}}.$$

$$33. a^2 \sec^2 \alpha \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right).$$

$$34. a^2 \cot \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right); \quad a^2 \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cosec} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

$$35. \frac{2h^2}{\sin \alpha \sin \beta} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right).$$

$$36. a^2 \sin \alpha \cdot \cot \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right). \quad 37. \sqrt{c^2 - \frac{(a-b)^2}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{180^\circ}{n}}$$

$$38. \varphi = \arctan \left(\tan \alpha \cdot \frac{m-n}{m+n} \sqrt{2}\right).$$

$$39. \frac{n(a+b)}{2} \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} \cot^2 \frac{180^\circ}{n} + h^2 + n \frac{a^2 + b^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$40. \frac{n(a^2 - b^2)}{4 \sin \frac{180^\circ}{4}} \sqrt{\tan^2 \alpha + \cos^2 \frac{180^\circ}{n} + \frac{n(a^2 + b^2)}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$41. hk^2 \frac{m+1}{m-1} \sin \alpha \tan \frac{180^\circ}{n} \quad 42. 2h^2 \cot \beta \cdot \sqrt{2 + \cot^2 \alpha} = 2928.$$

§ 20.

$$1. \tan \varphi = \sin 15^\circ; \quad \varphi = \arctan (\sin 15^\circ) = 14^\circ 31'.$$

$$2. R \operatorname{cosec} \alpha \sqrt{1 - \cos 2\alpha}.$$

$$3. \sqrt{R^2 \sin^2 \alpha + d^2 \cos^2 \alpha}.$$

Näpunäide. Olgu põhja keskpunkt O , puutepunkt A , puutuja ja põhja tasapinna lõikepunkt B , punkti A lähiva moodustaja alumine otspunkt C ja punktist O sirgele AB ehitatud ristlõik OD . Siis on $\angle ABC = \alpha$, $OA = d$ ja $OC = R$. Ühendades punktid C ja D , saame kolmnurga ODC tipu C juures täisnurga.

$$4. \frac{b \sin 2\alpha}{2 \sqrt{2} \sin (45^\circ + \alpha)}.$$

$$5. \left(\frac{R}{\cos \alpha \cdot \cos \varphi}\right)^2 \sin \alpha \sqrt{\cos (\alpha + \varphi) \cos (\alpha - \varphi)}.$$

$$6. \frac{a}{4} \cdot \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta}{\sin(\beta + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)}.$$

Näpunäide. Otsitava lõigu leiame osade kaupa.

$$7. \frac{l \sin \alpha \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \tan \alpha} = l \sin \alpha \sin^2 \varphi, \text{ kusjuures } \varphi \text{ leiame võrdusest } \frac{\tan \alpha}{\sqrt{2}} = \cot^2 \varphi.$$

$$8. \frac{R \sin \alpha \cdot \sin 60^\circ}{\sin(\alpha + 60^\circ)} \quad 9. 2\pi a^2 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad 10. 70^\circ 32'.$$

$$11. \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}; \quad \alpha = 2 \arctan \frac{\pi}{4} = 76^\circ 17'. \quad 12. \pi Q \cot \frac{\alpha}{2}.$$

$$13. \sin \alpha \sqrt{S \cot \frac{\varphi}{2}} = 19,42 \text{ cm}. \quad 14. 22,52 \text{ m}^2; \quad 4,442 \text{ m}^2.$$

$$15. 1) b = nh = 80 \text{ m}; \quad 2) r = mh = 6 \text{ m}; \quad 3) \alpha = \arctan \frac{1}{n} = 2^\circ 52';$$

$$4) \varphi = \arctan \frac{2}{3} = 33^\circ 41'; \quad 5) \gamma = \arccos \frac{m}{n} = 85^\circ 42';$$

$$6) 537,9 \text{ m}^2; \quad 7) 646,5 \text{ m}^2.$$

$$16. \sin \frac{x}{2} = \frac{S}{\pi a^2}; \quad x = 2 \arcsin \frac{S}{\pi a^2} = 30^\circ.$$

$$17. 1) H \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = H \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \text{ tipupoolne osa suhtub põhjapoolse}$$

osaga nagu $\cos^2 \frac{\alpha}{2} : \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; Võrdkülgse telglõikega koonuse puhul

$$\text{saame: } 1) x = \frac{3}{4} \text{ moodustajast}; \quad 2) 3 : 1.$$

Näpunäide. Sarnaste koonuste külgpindalad suhtuvad nagu koonuste kõrguste ruudud.

$$18. 360^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2}; \quad 1) 180^\circ; \quad 2) 207^\circ 31'. \quad 19. \frac{\pi (R^2 - r^2)}{\cos \alpha}.$$

$$20. \frac{\pi m^2}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}}. \quad 21. \frac{\pi (m^2 - n^2)}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}. \quad 22. \frac{(R^2 - r^2) \sin \delta}{2 \cos \beta}.$$

$$23. \pi h^2 \sec \alpha. \quad 24. \cos \varphi = \frac{m - n}{p}. \quad 25. S_{\text{küllg}} = \pi l^2 \sin \alpha = 426;$$

$$S_{\text{täis}} = 2\pi l^2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ \right) = 652. \quad 26. \frac{Q - q}{\cos \alpha}.$$

§ 21.

$$1. \frac{1}{2} l^3 \sin \beta \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi. \quad 2. \frac{1}{2} d^3 \sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \beta = 58,6.$$

$$3. 2ab \sin \alpha \sqrt{ab \cos \alpha}.$$

$$4. \frac{1}{4} d^3 \sin \left[\alpha + \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{4} \right) \right] \tan \varphi = 1000 \text{ dm}^3; \quad 30^\circ.$$

$$5. V = abc \sqrt{-\cos 2\alpha}; \quad x = 45^\circ. \quad 6. \frac{a^3}{\sin \alpha} \sqrt{\cos 2\alpha}.$$

$$7. \frac{a^3 \sqrt{2 \cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = 271,8 \text{ cm}^3.$$

$$8. \frac{3a^3}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \left(60^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}. \quad 9. 516 \text{ m}^3.$$

$$10. V = \frac{a^2 b^2 \sin^2 \gamma}{2(a+b) \cos \varphi} = 17850 \text{ dm}^3.$$

Näpunäide. $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = (a+b)^2 \cos^2 \varphi$, kus $\sin \varphi =$

$$= \frac{2 \sqrt{ab} \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b} \quad (\text{vt. § 11, nr. 62}).$$

$$11. \frac{4r^2 h \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha} = 3,627 \text{ m}^3.$$

12. *Näpunäide.* Algul avaldame kolmnurga *FCD* pindala ja seejärel kolmnurga *FAB* pindala:

$$\frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi}{\sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \varphi)} \left[\left(h^2 \cot^2 \varphi + \frac{b^2}{4} \right) \cot \alpha + hb \right]; \quad \approx 170 \text{ m}^3.$$

13. *Näpunäide.* Avaldada ruumala ristlõike pindala kaudu:

$$\frac{a^2 b}{4} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}.$$

$$14. \frac{1}{6} nb^3 \cdot \cos^2 \beta \cdot \sin \beta \cdot \sin \frac{360^\circ}{n} = 1,535 \text{ m}^3.$$

$$15. \frac{4}{3} b^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}.$$

$$16. \frac{2}{3} h^3 \cot^2 \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

$$17. \frac{b^3}{6} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}.$$

$$18. \frac{2}{3} a^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \tan \varphi. \quad 19. \frac{1}{24} (a+b)^2 \sqrt{a(a-2b)} \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$20. \frac{1}{6} P \sqrt{P \tan \alpha} \cdot \tan \varphi.$$

Näpunäide. Olgu püramiidi kõrguse aluspunkt E . Siis joon BED on sirgjoon, mis on risti sirgetega BC ja AD .

$$21. V_A = \frac{V \sin \beta}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = 138,9 \text{ cm}^3.$$

Näpunäide. $V_A : V_B = \sin B : \sin A$.

$$22. 45^\circ 18' \text{ ja } 25^\circ 14'.$$

$$23. V = \frac{a^3 - b^3}{6} \tan \alpha = \frac{a^3}{6} \cos^2 \varphi \tan \alpha, \text{ kus } \sin^2 \varphi = \frac{b^3}{a^3}; \quad V = 227 \text{ m}^3.$$

$$24. V = \frac{a^3 - b^3}{6 \cos \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha} = \frac{a^3 \cos^2 \varphi}{6 \cos \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}, \quad V = 4304.$$

$$25. \frac{n(a^3 - b^3) \cot \frac{180^\circ}{n}}{24 \sin \frac{180^\circ}{n}} \cdot \tan \alpha. \quad 26. \frac{d^3 \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha}{8\pi}.$$

$$27. \frac{\pi a^2 h}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 7900 \text{ dm}^3. \quad 28. \frac{\pi a^3}{4 \sin^3 \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$29. V = \frac{D^2 l}{8} \cdot \frac{\pi \alpha}{180^\circ} \cdot \frac{\sin(45^\circ - \varphi)}{\cos 45^\circ \cdot \cos \varphi},$$

$$\text{kus } \tan \varphi = \frac{\sin \alpha \cdot 180^\circ}{\pi \alpha}; \quad V \approx 2,1 \text{ m}^3. \quad 30. \frac{\pi b^2 H}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$31. V = \frac{\pi Q}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin^3 \frac{180^\circ}{n}} \sqrt{Q \tan \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{180^\circ}{n} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

$$32. \frac{c^3 d \tan \varphi}{24\pi^2} \approx 5,4 \text{ t}. \quad 33. \frac{\pi}{3} l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \approx 4856 \text{ dm}^3. \quad 34. \frac{\pi h^3}{3} \cot^2 \alpha.$$

$$35. S = \frac{2\pi R^2}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad V = \frac{\pi R^3}{3} \tan \alpha.$$

$$36. \frac{\pi R^3}{3} \sin^3 \alpha \cdot \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \pi R^3 \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$37. \frac{\pi a^3 \cot \beta}{24 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}. \quad 38. \frac{\pi d^3 \cot \alpha}{3 \tan^3 \frac{\alpha}{2}} = 299 \text{ m}^3.$$

$$39. \frac{\pi R^3 \sin(\alpha - \beta)}{3 \cos \alpha \cos \beta} = 302 \text{ dm}^3. \quad 40. \frac{\pi}{3} (R^3 - r^3) \tan \alpha.$$

$$41. \frac{7}{6} \pi l^3 \sin 2\varphi \cos \varphi.$$

$$42. r = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{\pi} V + r_1^3 \tan \alpha + r_2^3 \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}} = 3,45 \text{ m};$$

$$h_1 = (r - r_1) \tan \alpha = 19 \text{ m}; \quad h_2 = (r - r_2) \tan \beta = 4 \text{ m}.$$

$$43. \frac{7}{6} \pi a^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} = 28\,030 \text{ dm}^2. \quad 44. \frac{\pi}{12} l^3 \sin \alpha (2 - \cos 2\alpha) = 1182.$$

§ 22.

$$1. 3562 \text{ km}. \quad 2. 36\,710 \text{ km}; 15\,930 \text{ km}. \quad 3. \frac{2r \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha}.$$

$$4. \frac{V}{2} \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 10,52 \text{ dm}^3. \quad 5. \frac{\sin^2 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha}{2} = 0,2963.$$

$$6. \frac{a}{2} \tan \frac{\varphi}{2} \cot \frac{180^\circ}{n}.$$

$$7. \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n} \sin 2\alpha} = 5,145 \text{ m}.$$

$$8. \frac{a}{2} \sin \alpha \tan \frac{\varphi}{2}.$$

$$9. 2C \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$10. x = 2R \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ \cdot \sqrt{\sin \left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Näpunäide. Ehitanud läbi kõõlude ühise punkti veel **lähimõõdu** ja tähistanud kõõlu pikkuse tähega x , avaldame kõõlu otspunkti kauguse lähimõõdust. See on $x \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ$. Ühendanud lähimõõdu otspunkti kõõlu otspunktiga, koostame võrrandi:

$$x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} = 2R \cdot x \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ.$$

$$11. 70^\circ 32'.$$

$$12. \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}; \quad \alpha_1 = 78^\circ 28'; \quad \alpha_2 = 60^\circ;$$

$$m = 2 \text{ (väiksem)}.$$

$$13. \sin \alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}; \quad \alpha = 52^{\circ}32'. \quad 14. \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \alpha = 70^{\circ}32'.$$

$$15. \sin \alpha = \sqrt{\frac{n}{m}}; \quad (\alpha = 45^{\circ}). \quad 16. \frac{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}.$$

$$17. 1) 4\pi r_1 r_2; \quad 2) \cos z = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \text{ ehk } \tan \frac{z}{2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}.$$

$$18. \sin \frac{ABC}{2} = \frac{m - n}{m + n}.$$

$$19. \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{\tan^3 \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^6 \frac{\alpha}{2}} \text{ ehk } \frac{2}{3} \pi R^3 \tan 2\varphi, \text{ võttes } \tan^3 \frac{\alpha}{2} = \tan \varphi.$$

$$20. \frac{4}{3} \pi R^3 d \cos^4 \frac{\varphi}{4} \left(3 - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{4}\right). \quad 21. 3652 \text{ m}^3.$$

$$22. \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1; \quad \alpha = 49^{\circ}02'. \quad 23. \frac{\pi a^2}{4} \sec^2 \frac{\alpha}{4}.$$

$$24. 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{4} = 574,8 \text{ dm}^2. \quad 25. \frac{\pi b^3 \tan \frac{\alpha}{4}}{12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 4276 \text{ dm}^3.$$

$$26. V \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4}. \quad 27. \frac{\pi R^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \varphi}, \text{ kus } \tan \varphi = \sqrt{2 \tan \frac{\alpha}{4}}.$$

$$28. \sin \alpha = \frac{n - m}{n + m}; \quad (\alpha = 30^{\circ}).$$

$$29. \sin \left(x + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{m}{n} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}; \quad (x = 15^{\circ}).$$

$$30. \frac{\pi R^3 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}{6 \cos^6 \left(45^{\circ} - \frac{\alpha}{4}\right)}; \quad \frac{\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^4 \left(45^{\circ} - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

§ 23.

$$1. S = \pi a^2 \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C \cdot \cos \frac{1}{2}(B - C)}{\sin(B + C) \cdot \cos \frac{1}{2}(B + C)}; \quad V = \frac{\pi a^3}{3} \cdot \frac{\sin^2 B \cdot \sin^2 C}{\sin^2(B + C)}.$$

$$2. 4\pi Q \cot \left(45^{\circ} - \frac{\beta}{4}\right) = 1736 \text{ dm}^2.$$

3. $\frac{2}{3} \pi ab^2 \tan^2 a = 300 \text{ dm}^2$. 4. $2\pi a^2 \sqrt{3} \cdot \sin(30^\circ + a)$.
5. $\frac{1}{3} \pi b^3 \sin^2 a$; $4\pi b^2 \sin a \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) \cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$; kui $a = 120^\circ$.
 $V = \frac{\pi b^3}{4}$; $S = \frac{1}{2} \pi b^2 \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$. 6. $8\pi a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$;
 $2\pi a^3 \sin a \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. 7. $\pi a^2 n^2 \sin \frac{\alpha}{2}$.
8. $\frac{\pi}{3} \cdot bc(b + c) \cdot \sin a \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$. 9. $\frac{\pi}{6} \cdot \frac{a^3 \tan 2a}{\cos 2a}$.
10. $\frac{2}{3} \pi R^3 \tan a \cdot \sin a \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.
11. $V_a : V_b : V_c = \operatorname{cosec} A : \operatorname{cosec} B : \operatorname{cosec} C$.
12. $V = \frac{\pi b^3 \sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = 47\,090 \text{ cm}^3$;
 $S = \frac{4\pi b^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) \cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) = 8460 \text{ cm}^2$.
13. $\frac{4}{3} \pi (1 + \cos^2 a) \sqrt{\frac{S^3}{\sin 2a}}$.
14. $\frac{1}{2} \pi d^3 \sin 2a = 57\,380 \text{ m}^3$;
 $4\pi d^2 \cdot \sin 45^\circ \cos(45^\circ - a) = 10\,110 \text{ m}^2$.
15. $\frac{10 - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \pi a^3$. 16. $\frac{\pi p^3 \sqrt{2} \tan \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha}{3 \cos^3\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = 378,4 \text{ dm}^3$.
17. $\frac{8\pi r^2}{\sin^2 \alpha} \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$. 18. $\frac{2\pi h^3}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}\right)^2$.
19. 1) $S = 4\pi r^2 \cdot \sec \frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3} \pi r^3 \sec \frac{180^\circ}{n}$;
2) $S = 4\pi R^2 \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3} \pi R^3 \cos^2 \frac{180^\circ}{n}$;
3) $S = \pi a^2 \cot^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \sec \frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{\pi}{6} a^3 \cot^3 \frac{180^\circ}{n} \sec \frac{180^\circ}{n}$.
20. 1) $S = 2\pi r^2 \left(2 + \tan^2 \frac{180^\circ}{n}\right)$; $V = \frac{2}{3} \pi r^3 \left(2 + \tan^2 \frac{180^\circ}{n}\right)$;

$$2) S = 2\pi R^2 \left(1 + \cos^2 \frac{180^\circ}{n} \right); \quad V = \frac{2}{3} \pi R^3 \cos \frac{180^\circ}{n} \left(1 + \cos^2 \frac{180^\circ}{n} \right);$$

$$3) S = \pi a^2 \left(\cot^2 \frac{180^\circ}{n} + 0,5 \right); \quad V = \frac{\pi a^3}{6} \cot \frac{180^\circ}{n} \left(\cot^2 \frac{180^\circ}{n} + 0,5 \right).$$

$$21. 1) S = 4\pi r^2 \cdot \cos^4 \frac{90^\circ}{n} \sec^2 \frac{180^\circ}{n}; \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3 \cos^4 \frac{90^\circ}{n} \cdot \sec^2 \frac{180^\circ}{n};$$

$$2) S = 4\pi R^2 \cdot \cos^4 \frac{90^\circ}{n}; \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \cos^4 \frac{90^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n};$$

$$3) S = \frac{\pi a^2}{4} \cdot \cot^2 \frac{90^\circ}{4}; \quad V = \frac{\pi a^3}{24} \cot \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot^2 \frac{90^\circ}{n}.$$

$$22. V = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \sin^4 \frac{\alpha}{2}; \quad S = 8\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{4}$$

$$23. \frac{4}{3} \pi r^3 \sin \beta \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$24. 2Q \cdot \frac{360^\circ}{\alpha} \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= 2Q \cdot \frac{360^\circ}{\alpha} \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \varphi \right) \cdot \operatorname{cosec} \varphi = 4259 \left(\text{kusjuures } \tan \varphi = \frac{1}{2} \right).$$

$$25. \cos \alpha = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}; \quad \alpha = 32^\circ 47'. \quad 26. \pi a^2 \cdot \cot \frac{\alpha}{4}; \quad \frac{\pi a^3}{6}.$$

SISUKORD.

Esimene osa.

Trigonomeetria.

	Lk.
§ 1. Kaarte ja nurkade mõõtmine	3
§ 2. Trigonomeetriliste funktsioonide muutumine nurga muutumisel	4
§ 3. Ühe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed	7
§ 4. Täiendus- ja kõrvunurkade funktsioonid	11
§ 5. Trigonomeetriliste funktsioonide tabelid	12
§ 6. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine	14
§ 7. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine	23
§ 8. Taandamisvalemid	26
§ 9. Nurkade summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid	29
§ 10. Kordse ja murrulise argumendi trigonomeetrilised funktsioonid	32
§ 11. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks. Abinurk	36
§ 12. Logaritmid tabelite kasutamine trigonomeetriliste avaldiste arvutamiseks ja nurkade leidmiseks	40
§ 13. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine logaritmid abil	43
§ 14. Trigonomeetrilised võrrandid	46
§ 15. Tsükloomeetrilised funktsioonid	50

Teine osa.

Trigonomeetria rakendamist nõudvaid geometria ülesandeid.

§ 15a. Planimeetria	53
§ 16. Sirged ja tasapinnad	55
§ 17. Kahetahulised ja mitmetahulised nurgad	58
§ 18. Kujundi projektsiooni pindala	62
§ 19. Rööptahukad, prismad, püramiidid ja nende pindalad	63
§ 20. Silinder, koonus, tüvikoonus ja nende pindalad	68
§ 21. Ruumalade arvutamine	72
§ 22. Kera ja selle osad	77
§ 23. Pöördkehad	80
Trigonomeetriliste funktsioonide tabel	84
Vastused	85

H. Рыбкин

СБОРНИК ЗАДАЧ ТРИГОНОМЕТРИИ

На эстонском языке

Эстонское Государственное Издательство, Таллин, Пярну маantee 10

*

Toimetaja K. Kallaste · Tehniline toimetaja L. Uuspõld

Korrektor Ü. Rattur

Ladumisele antud 23. III 1957. Trükkimisele antud 14. V 1957. Paber 54×84, ¹/₁₆ Trükipoognaid 7,75. Formaadile 60×92 kohaldatud trükipoognaid 6,35. Arvutuspoognaid 6,27. Trükiarv 5500. Tellimise nr. 993. Hans Heidemanni nimeline trükikoda, Tartu, Vallikraavi 4.

Hind rbl. 1.35

Rbl. 1.35

A-21601

1

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00380448 3