TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TEHNOLOOGIATEADUSKOND
FÜÜSIKA INSTITUUT

JAAN RUUS

PUNKTOSAKESE LIIKUMISVÕRRANDID TELEPARALLEELSES GRAVITATSIOONITEOORIAS

Bakalaureusetöö

Juhendaja: Margus Saal

Kaitsmisele lubatud: ....

Juhendaja: ....

allkiri, kuupäev

Tartu 2016

Sisukord

1 Sissejuhatus

Nii Newtoni-Galilei mehaanika kui ka Einsteini erirelatiivsusteooria eraldavad kõikvõimalikest taustsüsteemidest välja ühe erilise klassi - inertsiaalsed taustsüsteemid. Need on taustsüsteemid, mis liiguvad üksteise suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt st kiirenduseta. Newtoni teooria on invariantne Galilei teisenduste suhtes, erirelatiivsusteooria on invariantne Lorentzi teisendustel, mis seovad neid inertsiaalseid taustsüsteeme omavahel. Kuna Lorentzi teisendused ,,segavad" omavahel aja- ja ruumikooordinaate, siis osutub, et on mõistlik teha üldistus ja rääkida neljamõõtmelisest aegruumist, mille matemaatiline realisatsioon on tuntud Minkowski ruumina M_4 (pseudo-eukleidiline ruum). Newtoni-Galilei paradigma raames räägitakse lisaks jõududele, mis realiseerivad mingit interaktsiooni kehade vahel (näiteks gravitasioonijõud), ka jõududest, mis seda ei tee. Viimaseid nimetatakse inertsijõududeks. Lisaks inertsiaalsetele taustsüsteemidele on olemas ka mitteinertsiaalsed taustsüsteemid ja Einstein soovis relatiivsusteooriat laiendada ka selliste taustsüsteemide jaoks. See mõte on sõnastatud üldrelatiivsusprintsiibina: ,,Füüsika seadused on ühesugused kõikides taustsüsteemides".

Milline on seos inertsi- ja gravitatsiooninähtuste vahel? Newtoni teine seadus on kirjutatav kujul $\vec{F} = m_i \vec{a}$, kus m_i on nn inertne mass, mis mõõdab osakese inertsiaalseid omadusi. Jõud, mis mõjub osakesele homogeenses gravitatsiooniväljas $\vec{g}$, on esitatav seosega $\vec{F_g} = m_g \vec{g}$, kus suurus m_g on osakese nn gravitatsiooniline mass. Eksperiment näitab, et suhe $\eta = m_g/m_i$ on kõikide osakeste jaoks sama ehk kõik osakesed tunnevad samasugust kiirendust antud gravitatsiooniväljas. Teiselt poolt on kõikide vabade osakeste kiirendused ühesugused kiirendusega liikuvas taustsüsteemis. Tuginedes sellele asjaolule väitis Einstein, et gravitatsioonivälja ja kiirendusega liikumist ei saa eristada. See tõdemus on sõnastatav ekvivalentsusprintsiibina: ,,Iga mitteinertsiaalne taustsüsteem on lokaalselt ekvivalentne mingisuguse gravitatsiooniväljaga". Seega on võimalik valida vabalt langev taustsüsteem sellisel viisil, et gravitatsiooniväli oleks lokaalselt kompenseeritud. Selles vabalt langevas taustsüsteemis on kõik füüsika seadused sellised, nagu inertsiaalses taustsüsteemis ja seda nimetatakse lokaalselt inetrtsiaalseks taustsüsteemiks. Ekvivalentsusprintsiibi eri formuleeringuid on põhjalikult käsitletud artiklis [11].

Eespool mainitud printsiipidest lähtuvalt õnnestus Einsteinil formuleerida teooria, milles inertsi- ja gravitatsiooninähtused on eristamatud ja gravitatsioon ei realiseeru mitte jõuna, nagu Newtoni teoorias, vaid läbi aegruumi kõveruse. Üldrelatiivsusteooriat

(ÜRT) võib seetõttu nimetada ka relativistlikuks gravitatsiooniteooriaks. Oma sellises formuleeringus on üldrelatiivsusteooria olemuslikult erinev teisi fundamentaalseid interaktsioone (elektromagnetiline, tugev ja nõrk interaktsioon) kirjeldavatest teooriatest. Üldrelatiivsusteooria on invariantne üldiste koordinaatteisendustel (diffeomorfismidel) ning seeläbi reliseerub üldkovariantsusprintsiip, mille kohaselt füüsika seadused peavad olema formuleeritavad koordinaatidest sõltumatult. Elementaarosakeste teooria, kus interaktsioon realiseerub osakeste vahetuse kaudu, seevastu on nn kalibratsiooniteooria, mis tähendab seda, et teooria lagranžiaan on invariantne lokaalsetel teisendustel, mille parameetrid määratakse vastava Lie rühma poolt. Üldrelatiivsusteoorias ei ole kalibratsioonirühma ja diffeomerfismide käsitlemine sellise rühmana ei ole sisukas [6]. Kalibratsiooniteooriates on keskseks väljaks kalibratsioonipotentsiaal, üldrelatiivsuteoorias on selleks väljaks meetrika.

Tuginedes Einsteini 1915. aastal avaldatud üldrelatiivsusteooriale ja juba tuntud Maxwelli elektrodünaamikale, proovis H. Weyl [1] 1918. aastal leida seost Einsteini võrrandite ja Maxwelli võrrandite vahel. Selle eesmärk oli leida nii gravitatsiooni kui elektromagnetismi hõlmav ühisteooria. Oma artiklis proovis Weyl kirjeldada mõlemaid teooriaid kui aegruumi geomeetria omadusi. Weyl kasutas kalibratsiooniteisenduse ja kalibratsioon-invariantsuse mõisteid, mis on aluseks tänapäevastele kalibratsiooniteooriatele. Järgmise katsetuse tegi Einstein [2] 1928. aastal kui ta kasutas üldrelatiivsusteooria formuleeringut nn tetraadformalismis, et ühendada elektrodünaamika ja gravitatsioon. Idee seisnes selles, et tetraadväli, mis määrab igas aegruumi punktis lokaalse baasi puutujaruumis, sisaldab 16 komponenti, aga meetrika üksnes 10. Ülejäänud 6 komponenti pidid kirjeldama elektromagnetismi. Idee osutus ekslikuks, sest need 6 komponenti saab eemaldada nõudes teooria invariantsust lokaalsetel Lorentsi teisendustel [6]. Olulise sammuna näidati 1979. aastal [10], et nihete rühma kalibratsiooniteooria on võimalik formuleerida sarnaselt Einsteini ideele 1928. aastast. Osutus, et see teooria ei sisaldanud kõverust, aga sisaldas väänet ja seda nimetatakse ajaloolistel põhjustel teleparalleelseks gravitatsiooniteooriaks. Teooria sisaldas vabasid parameetreid, mille kindel valik viib olukorrale, kus teleparalleelne gravitatsioon ja üldrelatiivsusteooria on ekvivalentsed. Seega saab väita, et nii kõverus kui vääne mõlemad on sobilikud gravitatsiooni kirjeldamiseks [6].

Käesoleva töö eesmärk ja ülesehitus on järgnevad. Eesmärgiks on detailselt läbi kirjutada nii vaba punktosakese kui ka gravitatsiooniväljas liikuva osakese liikumisvõrrandid kasutades teleparalleelse gravitatsiooniteooria mõisteid. Pärast detailset tuletuskäiku saab saadud tulemust võrrelda üldrelatiivsusteooria vastava tulemusega ning tuues välja sarnasused ja erinevused (nii matemaatilised kui füüsikalised). Kuna teleparaleelse gravitatsiooniteooria formuleerimine nõuab täiendavate matemaatiliste mõistete tundmist võrreldes üldrelatiivsuteooriaga, siis töö alajaotused 3.1 - 3.5 on kohati referatiivsed, aga peaksid siiski olema detailideni jälgitavad ka kasutatava matemaatilise aparatuuri esitamise seisukohalt. Käsitlus tugineb olulisel määral Aldrovandi ja Pereira raamatule ,,An Introduction to Teleparallel Gravity". Töö lisana on esitatud kõige olulisemate matemaatiliste tulemuste nimekiri koos lühikommentaaridega, mis peaks hõlbustama peatükkide 4.1 ja 4.2 lugemist.

Käesolevas töös on valitud meetrika järgneva signatuuriga $(-,+,+,+)$. Kui ei ole öeldud teisiti, siis on valguse kiirus võetud ühikuliseks $c \equiv 1$.

2 Üldrelatiivsusteooria

2.1 Kõverus ja vääne

Ühed tähtsamad mõisted nii ÜRTs kui ka teleparallelismis (TPG) on kõverus ja vääne, mis on üldise lineaarse seostuse kaudu defineeritud järgmistelt [3]:

$$R^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu} = \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\eta\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\eta\mu}\Gamma^{\eta}{}_{\lambda\nu}, \tag{1}$$

$$T^{\rho}{}_{\nu\mu} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}. \tag{2}$$

Siin $R^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu}$ nimetatakse kõverustensoriks ja $T^{\rho}{}_{\nu\mu}$ nimetatakse väändetensoriks ning suurus $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ tähistab osatuletist koordinaadi x^{μ} järgi. Seostust $\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}$ nimetatakse afiinseks seostuseks ja see näitab, kuidas muutuvad baasivektorid $\{\vec{e}_{\mu}\}$ paralleelnihetel piki koordinaatjooni

$$\frac{\partial \vec{e}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\vec{e}_{\lambda}. \tag{3}$$

Afiinne seostus defineerib kovariantse tuletise koordinaatbaasis

$$\nabla_{\mu}X^{\nu} = \partial_{\mu}X^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu}X^{\rho}, \tag{4}$$

kus X^{ν} on vektori aegruumi komponendid. Kõveruse (1) ja väände (2) definitsioonid tulenevad üldise vektori A_{λ} kahekordsete kovariantsete tuletiste kommutatsiooniavaldisest

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]\, A_{\lambda} = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}A_{\lambda} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}A_{\lambda} = R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}A_{\rho} - T^{\rho}{}_{\nu\mu}\nabla_{\rho}A_{\lambda}. \tag{5}$$

Kõverustensori $R^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu}$ ahendamisel aegruumi meetrikaga on defineeritud Ricci tensor ja Ricci skalaar

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}, \qquad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{6}$$

Definitsioonid (1) ja (2) on antud üldise seostuse puhul. Üldrelatiivsusteoorias, kus aegruumi kõverus realiseerub gravitatsioonilise vastastikmõjuna, on seostus valitud selliselt, et kehtiks tingimus

$$T^{\rho}{}_{\nu\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}. \tag{7}$$

Seega nõutakse, et seostus oleks alumiste indeksite suhtes sümmeetriline ning, et aegruum oleks väändeta. Lisaks eeldatakse, et kehtib ka meetrilisuse tingimus erinevate indeksite kombinatsioonide suhtes

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} = 0,\\ \nabla_\mu g_{\nu\lambda} &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} = 0,\\ \nabla_\nu g_{\lambda\mu} &= \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} g_{\lambda\rho} = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Kombineerides avaldised (8) ja kasutades tingimust (7) saab tuletada Levi-Civita seostuse

$$\mathring{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right). \tag{9}$$

Seostuse $\mathring{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ sümmeetrilisus alumiste indeksite suhtes tuleneb meetrika sümmeetrilisusest. $\mathring{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ on ÜRTs kasutatav seostus.

Üldine afiinne seostus $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ on võimalik taandada kahe liikme summaks kasutades meetrilisuse tingimust (8) ja üldise väände avaldist (2) sama eeskirja järgi [4]. Sel juhul saab sama protseduuriga, nagu leiti (9), näidata et

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} + K^\rho{}_{\mu\nu}, \tag{10}$$

kus $\mathring{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ on Levi-Civita seostus ja $K^\rho{}_{\mu\nu}$ nimetatakse kontorsioonitensoriks, mis on esitatav väändetensori kaudu

$$K^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T_\nu{}^\rho{}_\mu + T_\mu{}^\rho{}_\nu - T^\rho{}_{\mu\nu}\right). \tag{11}$$

ÜRT raames on tingimuse (7) tõttu kontorsioonitensor võrdne nulliga. Seega üldine afiinne seostus (10) on väändevaba Levi-Civita seostuse ja tensori kombinatsioon ning selle tõttu ei teisene $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ tensorina.

2.2 Geodeetilise joone võrrand

On mitu võimalust, kuidas leida punktosakese liikumisvõrrandit ÜRT raames. Üks viis on kasutada vähima mõju printsiipi. Antud juhul on mõjufunktsionaal kujul

$$S = \int d\tau \sqrt{-\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)}, \tag{12}$$

kus τ tähistab omaaega ning ruutjuure all olev avaldis on Lagrange'i funktsioon L. See omakorda rahuldab Euleri-Lagrange'i võrrandeid

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}. \tag{13}$$

Siin täpp tähistab tuletist omaaja τ järgi. Seega ÜRTs on punktosakese liikumisvõrrandid kujul

$$\frac{d^2x^\delta}{d\tau^2} + \mathring{\Gamma}^\delta_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \tag{14}$$

mida nimetatakse geodeetilise joone võrrandiks. Suurus $\mathring{\Gamma}^\delta_{\rho\sigma}$ tähistab siin Levi-Civita seostust (9). Parema poole võrdumine nulliga näitab, et ÜRTs puuduvad gravitatsioonilised jõud ning kehad interakteeruvad aegruumi kõveruse tõttu.

Tasase ruumi ja ristkoordinaatide korral oleks $\mathring{\Gamma}^\delta_{\rho\sigma} = 0$ ning võrrand (14) taanduks kujule

$$\frac{d^2x^\delta}{d\tau^2} = 0. \tag{15}$$

Selle lahend on sirgjoone võrrand $x^\delta = a\tau + b$, kus a ja b määratakse algtingimustest. Seega geodeetilise joone võrrand on sirgjoone üldistus kõverasse ruumi. Võrrandi (14) esimene liige on osakese 4-kiirendus a^δ ning teine liige kirjeldab, kuidas muutub osakese trajektoor mittetasase ruumi (või kõverjooneliste koordinaatide kasutamise) korral. See on kooskõlas teadmisega, et gravitatsiooninähtused on tingitud aegruumi geomeetriast, mida kirjeldab kõverustensor $R^\rho{}_{\lambda\nu\mu}$.

2.3 ÜRT väljavõrrandid

Üldrelatiivsusteoorias kirjeldavad gravitatsioonilisi ja inertsiaalseid nähtusi Einsteini võrrandid. Mõlemad nähtused on ÜRT raames eristamatud. See kuidas kehad üksteisega interakteeruvad on määratud aegruumi geomeetriaga. Einsteini võrrandid saab tuletada vähima mõju printsiibist.

Mõjufunktsionaal, millest saab tuletada Einsteini võrrandid on esitatav kujul

$$S = S_{EH} + S_m = \int \sqrt{-g}d^4x\left(k\left(R - \Lambda\right) + L_m\right), \tag{16}$$

kus g on aegruumi meetrika determinant, R on Ricci skaalar, L_m on mateeria Lagrange'i funktsioon, Λ on kosmoloogiline konstant ja k on määratav konstant. Esimest liiget nimetatakse ka Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaaliks. Mõju varieerimisel meetrika järgi

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \tag{17}$$

saab tuletada Einsteini võrrandid

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{18}$$

Siin $T_{\mu\nu}$ on energia-impulsitensor, $R_{\mu\nu}$ on Ricci tensor ning konstant $k = 8\pi G_N$, kus G_N on Newtioni gravitatsioonikonstant. Energia-impulsitensor on defineeritud järgmiselt:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \left[\int \sqrt{-g} d^4 x L_m \right]}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}. \tag{19}$$

Kõikide indeksite väärtuste puhul on võrrandeid (18) kokku kuusteist. Kuna aga $G_{\mu\nu}$ on sümmeetriline ja kehtib Bianchi identsus

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0, \tag{20}$$

siis on sõltumatuid võrrandeid kokku kuus.

3 Teleparalleelne gravitatsiooniteooria

3.1 Tetraadformalism

ÜRTs on kesksel kohal aegruumi mõiste, mis on meetrikaga $g_{\mu\nu}$ kirjeldatud 4-mõõtmeline pseudo-Riemanni muutkond. Üldjuhul eeldatakse, et meetrika ei ole singulaarne ja tema determinant ei võrdu nulliga. Selle muutkonna igas punktis saab defineerida puutujaruumi T_P.

4-mõõtmelises aegruumis on baasivektorid $\vec{e}_\mu$ defineeritud nii, et nad oleksid koordinaatjoonte puutujavektorid

$$\vec{e}_\mu = \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{21}$$

Sellist baasivektorite definitsiooni nimetatakse koordinaatbaasiks või holonoomseks baasiks. Baasivektorite $\vec{e}_\mu$ skalaarkorrutise kaudu saab defineerida ka aegruumi meetrika

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu. \tag{22}$$

Baasi valik ei ole ühene. Puutujaruum on omakorda vaadeldav 4-mõõtmelise muutkonnana, mille meetrika on Minkowski meetrika η_{ab}. See meetrika on igas aegruumi punktis määratud lokaalse ehk tetraadbaasiga $\{\vec{e}_a\}$. Selle baasi moodustavad neli lineaarselt sõltumatut vektorvälja, mida nimetatakse tetraadiks (ka *vierbein*). Lokaalne baas (ka lokaalne reeper) rahuldab tingimust

$$\vec{e}_a \cdot \vec{e}_b = \eta_{ab}. \tag{23}$$

Seega on puutujaruum definitsiooni kohaselt tasane ruum Minkowski meetrikaga η_{ab}. Muutkonda, mis rahuldab seda tingimust, nimetatakse ka Lorentzi muutkonnaks. Siin ja edaspidi ladina tähed viitavad nn Lorentzi indeksitele ja kreeka tähed viitavad aegruumi indeksitele. Iga vektor on arendadav nii koordinaatbaasis $\{\vec{e}_\mu\}$ kui ka lokaalses baasis $\{\vec{e}_a\}$

$$\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu = V^a \vec{e}_a\,. \tag{24}$$

Seega on need baasid seotud tetraadi kaudu järgmisel viisil:

$$\vec{e}_a = e_a{}^\mu \vec{e}_\mu\,, \qquad \vec{e}_\mu = e^a{}_\mu \vec{e}_a = e_a{}^\mu \partial_\mu\,. \tag{25}$$

Tetraadi nimetatakse ortonormeeritud tetraadiks, kui kehtib tingimus

$$e_a^{\ \mu}\, e_b^{\ \nu}\, g_{\mu\nu} = \eta_{ab}. \tag{26}$$

Tetraad on seega lineaarne baas, mis seob aegruumi meetrika $g_{\mu\nu}$ puutujaruumi meetrikaga η_{ab} kujul

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\, e^a_{\ \mu}\, e^b_{\ \nu}. \tag{27}$$

Analoogilised seosed jäävad kehtima ka vastavate kaasbaaside $\{dx^\mu\}$ ja $\{dx^a\}$ jaoks ning tuntud duaalsusseosed

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu\,, \qquad\qquad dx^a(\partial_a) = \delta^a_b \tag{28}$$

saavad kuju

$$e_a^{\ \mu}\, e^a_{\ \nu} = \delta^\mu_\nu\,, \qquad\qquad e_a^{\ \mu}\, e^b_{\ \mu} = \delta^b_a\,. \tag{29}$$

Eeskirja (25) järgi saab kasutada selleks, et teisendada vektori aegruumi ja puutujaruumi koordinaatide vahel üksteiseks:

$$V^a = e^a_{\ \mu} V^\mu\,, \qquad\qquad V^\mu = e_a^{\ \mu} V_a\,. \tag{30}$$

Seega iga aegruumi vektori saab teisendada puutujaruumi vektoriks ja vastupidi.

3.2 Spinnseostus

Spinnseostus määrab tetraadbaasis $\{\vec{e}_a\}$ paralleelnihetel vektorikomponentide muutused. Infinitesimaalsetel nihetel δx^μ muutuvad vektori komponendid V^a suuruse δV^a võrra

$$V^a(x^\mu + \delta x^\mu) = V^a(x^\mu) + \delta V^a. \tag{31}$$

Komponentide muutuse δV^a saab esitada vektori komponentide V^a kaudu

$$V^a(x^\mu + \delta x^\mu) = V^a(x^\mu) - A^a_{\ b\mu} V^b dx^\mu, \tag{32}$$

kus võrdetegurit $A^a_{\ b\mu}$ nimetatakse spinnseostuseks.

Analoogiliselt afiinse seostusega (3) defineerib spinnseostus kovariantse tuletise tetraadbaasis

$$\nabla_\mu V^a = \partial_\mu V^a + A^a_{\ c\mu} V^c, \tag{33}$$

$$\nabla_\mu V_a = \partial_\mu V_a - A^c{}_{a\mu} V_c. \tag{34}$$

Kasutades seoseid (30) ja (33) saame avaldada afiinse seostuse $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ spinnseostuse $A^a{}_{\mu b}$ kaudu

$$\Gamma^\rho_{\nu\mu} = e_a{}^\rho \partial_\mu e^a{}_\nu + e_a{}^\rho A^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu. \tag{35}$$

Analoogiliselt saab ka spinnseostuse $A^a{}_{\mu b}$ esitada afiinse seostuse $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ kaudu

$$A^a{}_{b\mu} = e^a{}_\nu \partial_\mu e_b{}^\nu + e^a{}_\nu \Gamma^\nu{}_{\rho\mu} e_b{}^\rho. \tag{36}$$

Seosed (35) ja (36) saab tuletada ka kasutades asjaolu, et tetraadi $e_\nu{}^a$ täielik kovariantne tuletis on null [7]. See tuleneb nõudest, et vektorväli ei tohi sõltuda baasi valikust ning on analoogiline meetrilisuse tingimusega (8) ehk

$$\nabla_\mu e_\nu{}^a = 0. \tag{37}$$

Afiinse ja spinnseostuse kaudu avaldub (37) järgmiselt:

$$\nabla_\mu e_\nu{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a - e_\rho{}^a \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} + A^a{}_{\mu b} e_\nu{}^b = 0. \tag{38}$$

Kuna Minkowski meetrika ei saa paralleelnihetel muutuda, siis kehtib seos

$$\delta\eta_{ab} = \left(A^c{}_{a\mu}\eta_{cb} + A^c{}_{b\mu}\eta_{ca}\right) dx^\mu = 0, \tag{39}$$

millest järeldub tingimus

$$A^{ab}{}_\mu = -A^{ba}{}_\mu. \tag{40}$$

Seega spinnseostus on seostus, mis on antisümmeetriline puutujaruumi indeksite suhtes.

Analoogiliselt kovariantse tuletisega on võimalik ka kõverustensor (1) ja väändetensor (2) avaldada spinnseostuse $A^a{}_{b\mu}$ kaudu kasutades seost (35)

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_{b\nu} - \partial_\nu A^a{}_{b\mu} + A^a{}_{c\mu} A^c{}_{b\nu} - A^a{}_{c\nu} A^c{}_{b\mu}, \tag{41}$$

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu + A^a{}_{c\mu} e^c{}_\nu - A^a{}_{c\nu} e^c{}_\mu. \tag{42}$$

Tetraadi omaduse (30) tõttu saab avaldada kõveruse ja väändetensori kujul, kus esinevad ainult puutujaruumi indeksid [5]

$$R^a{}_{bcd} = e_c{}^\mu \partial_\mu \left(A^a{}_{bd}\right) - e_d{}^\mu \partial_\mu \left(A^a{}_{bc}\right) + A^a{}_{ec} A^e{}_{bd} - A^a{}_{ed} A^e{}_{bc} - f^e{}_{cd} A^a{}_{be}, \tag{43}$$

$$T^a{}_{bc} = A^a{}_{cb} - A^a{}_{bc} - f^a{}_{bc}. \tag{44}$$

Suurusi $f^a{}_{bc}$ nimetatakse struktuurikoefitsentideks ja need tulevad teooriasse lokaalse baasi $\{\vec{e}_a\}$ kommutaatori avaldisest $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = f^c{}_{ab}\vec{e}_c$. Kasutades avaldist (44) on võimalik spinnseostus avaldada väände ja struktuurikoefitsentide kaudu

$$A^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\left(f_b{}^a{}_c + T_b{}^a{}_c + f_c{}^a{}_b + T_c{}^a{}_b - f^a{}_{bc} - T^a{}_{bc}\right). \tag{45}$$

See on analoogiline afiinse seostuse avaldisega (10), mis näitab, et üldise spinnseostuse saab samuti kirjutada väändevaba seostuse $\mathring{A}^a{}_{bc}$ ja tensori $K^a{}_{bc}$ summana

$$A^a{}_{bc} = \mathring{A}^a{}_{bc} + K^a{}_{bc}. \tag{46}$$

Siin $\mathring{A}^a{}_{bc}$ on spinnseostus juhul kui kehtib tingimus $T^a{}_{bc} = 0$, mis vastab ÜRTle. Tensor $K^a{}_{bc}$ on kontorsioonitensor (11) avaldatuna puutujaruumi koordinaatide kaudu

$$K^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\left(T_b{}^a{}_c + T_b{}^a{}_c - T^a{}_{bc}\right). \tag{47}$$

3.3 Lorentzi teisendus

Puutujaruumi tasasusest järeldub, et Minkowski meetrika η_{ab} on puutujaruumis invariantne lokaalsete Lorentzi teisenduste suhtes. Lorentzi teisendused on koordinaatteisendused kahe inertsiaalse taustsüsteemi vahel. Neid teisendusi saab kirjeldada Lorentzi teisendusmaatriksiga $\Lambda^a{}_b$.

Erirelatiivsusuteoriast on teada, et Lorentzi maatriks on konstantne ning teisendab vektori komponente vastavalt eeskirjale $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^\nu$. Tetraadformalismis on aga igas aegruumi punktis defineeritud erinev puutujaruum (25) lokaalse baasiga $\{\vec{e}_a\}$. Seetõttu on tetraadformalismis Lorentzi maatriks koordinaadist sõltuv $\Lambda = \Lambda(x)$. Sellist teisendust nimetatakse lokaalseks Lorentzi teisenduseks, kuna teisendus tehakse puutujaruumis, mis on lokaalselt määratud. See tähendab, et kehtib seos

$$\eta_{ab} = \Lambda^{c'}{}_a(x)\Lambda^{d'}{}_b(x)\eta_{c'd'}, \tag{48}$$

kus $\Lambda^{a'}{}_a$ tähistab Lorentzi teisenduse maatriksit.

Aegruumi ja puutujaruumi meetrika vahelisest seost (27) kasutades on võimalik leida, et teisenduse maatriks $\Lambda^{a'}{}_a$ on määratud tetraadi kaudu järgmise seosega:

$$\Lambda^{a'}{}_b = e^{a'}{}_{\mu'} e_b{}^{\mu'}. \tag{49}$$

Analoogiliselt saame leida tetraadi jaoks

$$e^{a'}{}_{\mu'} = \Lambda^{a'}{}_b e^b{}_{\mu'}. \tag{50}$$

Antud seos näitab, et kindla meetrika puhul ei ole tetraad üheselt määratud vaid on antud lokaalse Lorentzi teisenduse täpsusega. Spinnseostus (36) teiseneb lokaalse Lorentzi teisenduse kaudu järgmisel viisil [7]:

$$A'^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c(x)\partial_\mu \Lambda_b{}^c(x) + \Lambda^a{}_c(x) A^c{}_{d\mu} \Lambda_b{}^d(x). \tag{51}$$

Spinnseostust nimetatakse inertsiaalseks kui ta avaldub kujul

$$\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c(x)\partial_\mu \Lambda_b{}^c(x). \tag{52}$$

See nimetus tuleneb sellest, et seostuse (51) esimene liige kirjeldab inertsiaalseid nähtusi. Kõverus ja vääne teisenevad lokaalsel Lorentzi teisendusel järgmisel viisil [6]:

$$\begin{aligned} T^{a'}{}_{\mu\nu} &= \Lambda^{a'}{}_b(x) T^b{}_{\mu\nu}, \\ R^{a'}{}_{b'\mu\nu} &= \Lambda^{a'}{}_c(x) \Lambda_{b'}{}^d R^c{}_{d\mu\nu}. \end{aligned} \tag{53}$$

3.4 Kalibratsiooniteisendus

Kalibratsiooniteisenduseks nimetatakse sellist teisendust, kus Lagrange'i funktsioon jääb lokaalselt invariantseks. Puutujaruumi puhul on tegemist Minkowski meetrikaga tasase ruumiga. Seetõttu on puutujaruumis Lagrange'i funktsioon invariantne koordinaadi nihetel [6]

$$x^{a'} = x^a + \epsilon^a. \tag{54}$$

Teisenduse parameeter ϵ^a on antud juhul nihkeparameetriks piki x^a koordinaatjoont. Oluline on märkida, et ϵ^a on funktsioon aegruumi koordinaadist x^μ ehk

$$\epsilon^a \equiv \epsilon(x^\mu). \tag{55}$$

See näitab, et koordinaadi nihe puutujaruumis sõltub, millises aegruumi punktis x^μ on lokaalne puutujaruum valitud. Teisenduse (54) saab kirjutada ka generaatorite kaudu

$$x^{a'} = x^a + \epsilon^b P_b x^a, \tag{56}$$

kus $P_b = \partial_b$ nimetatakse teisenduse generaatoriks. On näha, et see on seos (54) kui arvestada, et $\partial_b x^a = \delta^a_b$, kus δ^a_b on Kroneckeri delta ning seega $e^b \delta^a_b = e^a$.

Analoogiliselt koordinaatnihkega (54) avaldub ka välja ψ kalibratsiooniteisendus kujul

$$\psi' = \psi + \delta\psi = \psi + \epsilon^a \partial_a \psi, \tag{57}$$

milles $\delta\psi$ tähistab välja ψ muutu nihkel piki koordinaatjoont x^a. Et väli ψ oleks kalibratsiooniteisendustel invariantne, peab selle tuletis teisenema kovariantselt [6]. Teisisõnu peab kehtima võrdus

$$\delta \left(D_\mu \psi \right) = \epsilon^a \partial_a \left(D_\mu \psi \right). \tag{58}$$

See tähendab, et kalibratsiooniteisendusel toimub üleminek

$$D_\mu \psi \to \delta \left(D_\mu \psi \right), \tag{59}$$

kus D_μ on kovariantne tuletis, mille avaldis tuleb leida kujul, et oleks täidetud kovariantsuse tingimus.

Vaatame kõigepealt osatuletist $D_\mu = \partial_\mu$. Avaldisest (58) saame sellisel juhul

$$\delta \left(\partial_\mu \psi \right) = \partial_\mu \left(\delta\psi \right) = \partial_\mu \left(\epsilon^a \partial_a \psi \right). \tag{60}$$

Antud võrrandis on kasutatud asjaolu, et variatsioon ja osatuletis on kommuteeruvad operatsioonid $[\delta, \partial_\mu] = 0$. Leibnizi reegli kohaselt avaldub see summana

$$\partial_\mu \left(\delta\psi \right) = \left(\partial_\mu \epsilon^a \right) \partial_a \psi + \epsilon^a \partial_\mu \left(\partial_a \psi \right) \neq \epsilon^a \partial_a \left(\partial_\mu \psi \right). \tag{61}$$

Seega leidsime, et osatuletis ei teisene kovariantselt. Seetõttu tuleb defineerida tuletis, kus lisaks osatuletisele on ka lisaliige, mis tagab kovariantsuse nõude. Tähistades tuletise ümber $D_\mu \to e_\mu$ saab selle defineerida järgnevalt:

$$e_\mu = \partial_\mu + B^a{}_\mu \partial_a. \tag{62}$$

Suurust $B^a{}_\mu$ nimetatakse kalibratsioonipotentsiaaliks. Selle kuju tuleb valida nii, et e_μ teiseneks kovariantselt. Teisenemiseeskirja (58) järgi leiame

$$\delta \left(e_\mu \psi \right) = \delta \left(\partial_\mu \psi \right) + \delta \left(B^a{}_\mu \partial_a \psi \right). \tag{63}$$

Siin esimene liige on antud seosega (61) ja teine avaldub summana

$$\delta \left(B^a{}_\mu \partial_a \psi \right) = \left(\delta B^a{}_\mu \right) \partial_a \psi + B^a{}_\mu \delta \left(\partial_a \psi \right). \tag{64}$$

Kokku saame seega:

$$\delta\left(e_\mu\psi\right)=\epsilon^a\partial_a\left(\partial_\mu\psi\right)+\left(\partial_\mu\epsilon^a\right)\partial_a\psi+\left(\delta B^a{}_\mu\right)\partial_a\psi+B^a{}_\mu\delta\left(\partial_a\psi\right). \tag{65}$$

Nõudes, et kalibratsioonipotentsiaali $B^a{}_\mu$ variatsioon avaldub kujul

$$\delta B^a{}_\mu=-\partial_\mu\epsilon^a, \tag{66}$$

taanduvad võrrandis (65) teine ja kolmas liige ära. Alles jäävad liikmed

$$\delta\left(e_\mu\psi\right)=\epsilon^a\partial_a\left(\partial_\mu\psi\right)+B^a{}_\mu\delta\left(\partial_a\psi\right). \tag{67}$$

Rakendades teisele liikmele osatuletise teisenemise eeskirja (61) saame

$$B^a{}_\mu\delta\left(\partial_a\psi\right)=B^a{}_\mu\left[\left(\partial_a\epsilon^a\right)\partial_a\psi+\epsilon^a\partial_a\left(\partial_a\psi\right)\right]. \tag{68}$$

Definitsioonist (55) järeldub, et $\partial_a\epsilon^a=0$ ning alles jääb ainult teine liige. Avaldis (65) saab siis kuju

$$\delta\left(e_\mu\psi\right)=\epsilon^a\partial_a\left[\partial_\mu\psi+B^a{}_\mu\partial_a\psi\right]=\epsilon^a\partial_a\left(e_\mu\psi\right). \tag{69}$$

Sellega on kovariantsuse tingimus (58) täidetud. Antud tuletise defineerimisel ei ole võetud arvesse Lorentzi teisendust. See tähendab, et (69) on kovariantne ainult taustsüsteemis, kus inertsiaalne seostus $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$ on identselt null.

Et tuletis D_μ oleks kovariantne ka Lorentzi teisendustel peab toimuma üleminek

$$x^a\to\Lambda_b{}^a x^b. \tag{70}$$

Üldine funktsioon ψ teiseneb Lorentzi teisendustel $\psi\to U(\Lambda)\psi$, kus $U(\Lambda)$ on funktsioon teisendusmaatriksist [6]. Sellest järeldub, et ka eelnevalt leitud kovariantne tuletis e_μ läheb üle kujule $e_\mu\psi\to U(\Lambda)e_\mu\psi$. Seda arvestades saab leida, et suurus $U(\Lambda)e_\mu\psi$ teiseneb järgnevalt:

$$\delta\left(U(\Lambda)e_\mu\psi\right)=\delta\left(U(\Lambda)\right)e_\mu\psi+U(\Lambda)\delta\left(e_\mu\psi\right). \tag{71}$$

Kuna $\delta U(\Lambda)\neq 0$, siis tuletis (62) ei ole lokaalse Lorentzi teisenduse suhtes kovariantne. Et oleks täidetud kovariantsuse nõue (58), defineerime uue tuletise kujul

$$h_\mu=\mathcal{D}_\mu+B^a{}_\mu\partial_a. \tag{72}$$

Siin $\mathcal{D}_\mu$ tähistab tuletist, mis on kovariantne lokaalsel Lorentzi teisendusel. Seda võib vaadelda kui osatuletise ∂_μ üldistust. Näitamaks, et (72) puhul on kovariantsuse tingimus täidetud, tuleb tõestada, et $\delta\left(h_\mu\psi\right) = \epsilon^a\partial_a\left(h_\mu\psi\right)$. Kirjutades selle avaldise lahti saame

$$\delta\left(h_\mu\psi\right) = \delta\left(\mathcal{D}_\mu\psi\right) + \delta\left(B^a{}_\mu\right)\partial_a\psi + B^a{}_\mu\delta\left(\partial_a\psi\right). \tag{73}$$

Variatsioon δ ja tuletis $\mathcal{D}_\mu$ on kommuteeruvad suurused, $[\delta, \mathcal{D}_\mu] = 0$. Et (72) oleks kovariantne peab olema täidetud tingimus $\mathcal{D}_\mu\epsilon^a = -\delta B^a{}_\mu$. Esimene liige avaldub

$$\begin{aligned}\delta\left(\mathcal{D}_\mu\psi\right) &= \mathcal{D}_\mu\left(\delta\psi\right) = \mathcal{D}_\mu\left(\epsilon^a\partial_a\psi\right) = \\ &= \left(\mathcal{D}_\mu\epsilon^a\right)\partial_a\psi + \epsilon^a\mathcal{D}_\mu\left(\partial_a\psi\right) = \\ &= -\left(\delta B^a{}_\mu\right)\partial_a\psi + \epsilon^a\mathcal{D}_\mu\left(\partial_a\psi\right).\end{aligned} \tag{74}$$

Et tuletis $\mathcal{D}_\mu$ oleks Lorentzi teisenduste suhtes kovariantne tuleb see defineerida järgnevalt:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b\partial_a. \tag{75}$$

Suurus $\overset{\bullet}{A}{}^b{}_{c\mu} = \Lambda^b{}_d\partial_\mu\Lambda_c{}^d$ on inertsiaalne Lorentzi seostus ehk teleparalleelne seostus [6] (vt. ka valem (52)).

Seega tehes vajalikud asendused ja kasutades avaldist teadmist, et teisendusparameeter ϵ^a ei sõltub ainult aegruumi koordinaadist x^μ saame

$$\begin{aligned}\delta\left(h_\mu\psi\right) &= -\left(\delta B^a{}_\mu\right)\partial_a\psi + \epsilon^a\mathcal{D}_\mu\left(\partial_a\psi\right) + \delta\left(B^a{}_\mu\right)\partial_a\psi + B^a{}_\mu\delta\left(\partial_a\psi\right) \\ &= \epsilon^a\left(\partial_a\left(\partial_\mu\psi\right) + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b\partial_a\left(\partial_a\psi\right)\right) + B^a{}_\mu\left(\left(\partial_a\epsilon^a\right)\partial_a\psi + \epsilon^a\partial_a\left(\partial_a\psi\right)\right) \\ &= \epsilon^a\partial_a\left[\partial_\mu\psi + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b\left(\partial_a\psi\right) + B^a{}_\mu\partial_a\psi\right] \\ &= \epsilon^a\partial_a\left(h_\mu\psi\right).\end{aligned} \tag{76}$$

Tuletisele (72) vastava tetraadi saame esitada kujul

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b + B^a{}_\mu, \tag{77}$$

mis tuleneb seosest (25). Tingimus (58) on seega täidetud.

Spinnseostus $A^a{}_{b\mu}$ on kujul $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$ juhul, kui (51) kirjeldab ainult inertsiaalseid nähtusi, mitte gravitatsioonilisi [6]. TPG eripära on see, et inertsiaalseid nähtusi ja gravitatsioonili nähtusi vaadeldakse eraldiseisvatena, mitte kui sama nähtuse erinevaid ilminguid.

3.5 Väljavõrrandid teleparalleelses gravitatsioonis

Sarnaselt Einsteini võrranditega (18) kirjeldavad TPGs väljavõrrandid gravitatsioonilisi ja inertsiaalseid nähtusi. Üks viis neid tuletada on kasutada vähima mõju printsiipi. Selleks tuleb konstrueerida Lagrange'i funktsioon, mis oleks invariantne skalaar ning mis rahuldaks TPG raames tehtud eeldusi [9].

Erinevalt ÜRTst on TPGs valitud seostus ${\Gamma^\rho}_{\mu\nu}$ selliselt, et aegruumi kõverus (1) oleks võrdne nulliga. Seetõttu on TPGs määravaks suuruseks vääne (2), mistõttu mõjufunktsionaal peab mingil kujul sisaldama väände tensorit ${\overset{\bullet}{T}{}^a}_{\mu\nu}$. Osutub, et mõjufunktsionaali saab esitada alljärgneva kombinatsioonina väändetensorist [6]:

$$S = \int h d^4x \left[\frac{1}{16\pi G} \left(\alpha {\overset{\bullet}{T}{}^\rho}_{\mu\nu} {\overset{\bullet}{T}{}^{\mu\nu}}_\rho + \beta {\overset{\bullet}{T}{}^\rho}_{\mu\nu} {\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}}_\rho + \gamma {\overset{\bullet}{T}{}^\rho}_{\mu\rho} {\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}}_\nu \right) + L_m \right], \tag{78}$$

kus on summeeritud väändetensori indeksite erinevad kombinatsioonid ja konstandid. Siin $h = \sqrt{-g}$ on tetraadi (77) determinant ja L_m on Lagrange'i funktsiooni mateerialiige nagu Einstein-Hilberti mõjus (16). Konstandid α, β ja γ määratakse nii, et Lagrange'i funktsioon oleks Lorentzi invariantne [9]:

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = -1. \tag{79}$$

Seega teleparalleelne mõjufunktsionaal (78) on

$$S = \int h d^4x \left[\frac{1}{16\pi G} \left(\frac{1}{4} {\overset{\bullet}{T}{}^\rho}_{\mu\nu} {\overset{\bullet}{T}{}^{\mu\nu}}_\rho + \frac{1}{2} {\overset{\bullet}{T}{}^\rho}_{\mu\nu} {\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}}_\rho - {\overset{\bullet}{T}{}^\rho}_{\mu\rho} {\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}}_\nu \right) + L_m \right]. \tag{80}$$

TPG väljavõrrandid saab leida kasutades Euleri-Lagrange'i võrrandeid (13). Antud juhul varieeritakse Lagrange'i funktsiooni tetraadi ${h^a}_\rho$ järgi ja vastavad võrrandid on

$$\frac{\partial \left(\overset{\bullet}{L} + L_m \right)}{\partial {h^a}_\rho} = \partial_\sigma \frac{\partial \left(\overset{\bullet}{L} + L_m \right)}{\partial \left(\partial_\sigma {h^a}_\rho \right)}. \tag{81}$$

Tähistades need liikmed alljärgnevalt saame

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overset{\bullet}{L}}{\partial \left(\partial_\sigma {h^a}_\rho \right)} &= -h {\overset{\bullet}{S}_a}{}^{\rho\sigma}, \\ \frac{\partial \overset{\bullet}{L}}{\partial {h^a}_\rho} &= -kh {\overset{\bullet}{\jmath}_a}{}^\rho, \\ -\frac{\partial L_m}{\partial {h^a}_\rho} + \partial_\sigma \frac{\partial L_m}{\partial \left(\partial_\sigma {h^a}_\rho \right)} &= kh {\Theta_a}^\rho. \end{aligned} \tag{82}$$

Esimest liiget nimetatakse superpotentsiaaliks ning see on defineeritud väände ja kontorsioonitensori (11) kaudu

$$\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma} = \overset{\bullet}{K}{}^{\rho\sigma}{}_a - h_a{}^{\sigma}\overset{\bullet}{T}{}^{\theta\rho}{}_{\theta} + h_a{}^{\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{\theta\sigma}{}_{\theta}. \tag{83}$$

Teist liiget nimetatakse kalibratsioonivooks ning on defineeritud kui

$$\overset{\bullet}{\jmath}_a{}^{\rho} = \frac{1}{k}h_a{}^{\lambda}\overset{\bullet}{S}_a{}^{\nu\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{c}{}_{\nu\lambda} - \frac{h_a{}^{\rho}}{h}\overset{\bullet}{L} + \frac{1}{k}\overset{\bullet}{A}{}^{c}{}_{a\sigma}\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma} \tag{84}$$

ning kolmas liige on mateeria energia-impulsi tensor nagu võrrandis (18) on $T_{\mu\nu}$. Üksikasjalikult on nende suuruste tuletuskäigud antud [6].

Lähtudes tähistustest (82) saame TPG väljavõrrandid kujul

$$\partial_\sigma\left(h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}\right) - kh\overset{\bullet}{\jmath}_a{}^{\rho} = kh\Theta_a{}^{\rho}. \tag{85}$$

Kasutades seost (11) ning definitsioone (83), (84) saab leida, et võrrandi (85) parem pool rahuldab järgmist seost [6]:

$$\overset{\circ}{R}_a{}^{\rho} - \frac{1}{2}h_a{}^{\rho}\overset{\circ}{R} = k\Theta_a{}^{\rho}. \tag{86}$$

Need ongi Einsteini võrrandid (18). See näitab, et ÜRT ja TPG on ekvivalentsed teooriad, mis kirjeldavad samu füüsikalisi nähtusi, aga teevad seda erinevaid suurusi kasutades ja seega erineval viisil.

4 Liikumisvõrrandid teleparallelses gravitatsiooniteoorias

Tuletamaks liikumisvõrrandid teleparalleelse gravitatsiooni raames kasutame siin vähima mõju printsiipi analoogilisel viisil ÜRT kontekstiga (vt. ptk 2). Selleks tuleb moodustada mõjufunktsionaal analoogiliselt avaldisega (12), kuid mis sisaldaks tetraadformalismis kasutatavaid suurusi. Lagrange'i funktsioon peab olema invariantne lokaalsete Lorentzi teisneduste (50) suhtes. Samuti peab kehtima invariantsus kalibratsiooniteisendustel (54).

4.1 Vaba osake

Vabaks osakeseks nimetatakse süsteemi, mis koosneb ühest osakesest massiga m ning kus puudub gravitatsiooniväli. Sellist osakest saab kirjeldada holonoomse tetraadiga $e^{a'}{}_{\mu} = \partial_\mu x^{a'}$. Samuti on antud süsteem invariantne lokaalsete Lorentzi teisenduste suhtes, mis tuleneb sellest, et tetraadbaas $\{\vec{e}_a\}$ ei ole üheselt määratud. Seega tetraad teiseneb järgmise eeskirja järgi [6]:

$$e^b{}_\mu = \Lambda^b{}_{a'} e^{a'}{}_\mu. \tag{87}$$

Avaldis (87) on esitatav kujul

$$\begin{aligned} e^b{}_\mu &= \Lambda^b{}_{a'} \left(\partial_\mu x^{a'}\right) \\ &= \partial_\mu \left(\Lambda^b{}_{a'} x^{a'}\right) + \left(\Lambda^b{}_{a'} \partial_\mu\right) x^{a'} \\ &= \partial_\mu x^b + \left(\Lambda^b{}_{a'} \partial_\mu\right) \Lambda^{a'}_{c} x^c \\ &= \partial_\mu x^b + \overset{\bullet}{A}{}^b{}_{c\mu} x^c. \end{aligned} \tag{88}$$

Siin viimases reas on kasutatud inertsiaalse spinnseostuse $\overset{\bullet}{A}{}^b{}_{c\mu}$ definitsiooni (52).

Üldisel kujul on massiga m punktosakese mõjufunktsionaal esitatav kujul

$$S = -m \int_a^b d\sigma, \tag{89}$$

kus $d\sigma$ tähistab invariantset intervalli, mis on antav valemiga

$$d\sigma^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b = \eta_{ab} e^a e^b. \tag{90}$$

Definitsioonis (90) suurust e^a nimetatakse tetraadvälja $\{\vec{e}_a\}$ kaasbaasiks, mis (88) kaudu avaldatuna tuleb

$$dx^a = e^a = e^a{}_\mu dx^\mu = dx^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b dx^\mu. \tag{91}$$

Aegruumi koordinaatide kaudu on (90) esitatav tuntud seosega $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Jagades seda seost läbi ds-ga ning defineerides $u^\mu = dx^\mu / ds$ kui 4-kiiruse saame

$$d\sigma = u_\mu dx^\mu. \tag{92}$$

Puutujaruumi baasis analoogiliselt toimides saame

$$d\sigma = u_a e^a. \tag{93}$$

Järgnevalt leiame intervalli $d\sigma$ variatsioon $\delta\,(d\sigma)$. Otsene arvutus annab

$$\begin{aligned} \delta\left(d\sigma^2\right) &= 2d\sigma\delta\left(d\sigma\right) \\ &= \eta_{ab}\left(\delta e^a\right)e^b + \eta_{ab}\left(\delta e^b\right)e^a \\ &= e_a\left(\delta e^a\right) + e_b\left(\delta e^b\right) \\ &= 2e_a\left(\delta e^a\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2d\sigma\delta\left(d\sigma\right) = 2e_a\delta\left(e^a\right). \end{aligned} \tag{94}$$

Siit saab avaldada intervalli $d\sigma$ variatsiooni

$$\delta\left(d\sigma\right) = \frac{e_a}{d\sigma}\left(\delta e^a\right) = u_a\left(\delta e^a\right). \tag{95}$$

Variatsioon avaldisest (93) tuleb aga

$$\delta\left(d\sigma\right) = \left(\delta u_a\right)e^a + u_a\left(\delta e^a\right). \tag{96}$$

Võrreldes seoseid (95) ja (96) saame, et kehtib tingimus

$$\left(\delta u_a\right)e^a = 0. \tag{97}$$

Mõjufunktsionaali avaldise punktosakese jaoks saame seoseid (89), (91) ja (93) kasutades kirjutada kujul

$$\begin{aligned} S &= -m\int u_a e^a \\ &= -m\int u_a\left[dx^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}x^b dx^\mu\right]. \end{aligned} \tag{98}$$

Kasutades eelnevalt leitud valemit (97) ja teadmist, et variatsioon ja tuletis on kommuteeruvad operatsioonid, $[\delta, d] = 0$, saame mõjufunktsionaali varieerides ning ositi integreerides järgmise avaldise:

$$\begin{aligned}
\delta S &= -m \int \left[(\delta u_a)\, e^a + u_a \left(d\delta x^a \right) + u_a \delta \left(\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b dx^\mu \right) \right] \\
&= -m \int u_a \left(d\delta x^a \right) + u_a \delta \left(\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b \right) dx^\mu + u_a \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b \left(d\delta x^\mu \right) \\
&= -m \left[u_a \delta x^a \right]_a^b - m u_a \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b \left[\delta x^\mu \right]_a^b + \\
&\quad + m \int \left[du_a \delta x^a - u_a \delta \left(\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b \right) dx^\mu + d \left(u_a \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b \right) \delta x^\mu \right]
\end{aligned} \tag{99}$$

Esimene ja teine liige on võrdsed nulliga, kuna variatsioon on trajektoori otspunktides $\delta x(a)$, $\delta x(b)$ võrdne nulliga. Seega

$$\delta S = m \int \left[du_a \delta x^a - u_a \delta \left(\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b \right) dx^\mu + d \left(u_a \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b \right) \delta x^\mu \right]. \tag{100}$$

Vaatleme mõju liikmeid eraldi. Esimeses puhul kasutame seost $\delta x^a = \partial_\mu x^a \delta x^\mu$ ning saame

$$du_a \delta x^a = du_a \left(\partial_\mu x^a \right) \delta x^\mu. \tag{101}$$

Teise liikme puhul kasutame Leibnizi reeglit ja seost $\delta \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} = \left(\partial_\rho \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} \right) \delta x^\rho$ ning saame kirjutada

$$\begin{aligned}
u_a \delta \left(\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b \right) dx^\mu &= u_a dx^\mu \left[\delta \left(\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} \right) x^b + \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} \delta x^b \right] \\
&= u_a dx^\mu \left[\left(\partial_\rho \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} \right) \delta x^\rho x^b + \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} \left(\partial_\rho x^b \right) \delta x^\rho \right] \\
&= u_a \partial_\rho \left(\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b \right) dx^\mu \delta x^\rho \\
&= u_a \partial_\mu \left(\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b \right) dx^\mu \delta x^\mu.
\end{aligned} \tag{102}$$

Siin viimases reas muutsime summeerimisreeglite kohaselt paarikaupa indekseid $\rho \to \mu$. Kolmas liige mõjufunktsionaalis (100) tuleb lahti kirjutatuna

$$d \left(u_a \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b \right) \delta x^\mu = \left[(du_a)\, \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b + u_a d \left(\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} \right) x^b + u_a \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} dx^b \right] \delta x^\mu. \tag{103}$$

Kui vaadata avaldist (101) ja avaldise (103) esimest liiget, siis saab need kokku võtta kujul

$$du_a \delta x^\mu \left(\partial_\mu x^a + \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} x^b \right) = du_a \delta x^\mu e^a{}_\mu, \tag{104}$$

kus $e^a{}_\mu$ on tetraad (88). Seoses (103) teeme veel asendused $d\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = \left(\partial_\rho \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}\right) dx^\rho$ ja $dx^b = \partial_\rho x^b dx^\rho$. Asendades kõik eelnevad teisendused mõju variatsiooni (100) saame

$$\delta S = m \int \left[e^a{}_\mu du_a - u_a \partial_\mu \left(\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b \right) dx^\mu + u_a \left(\partial_\rho \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \right) dx^\rho x^b + u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \partial_\rho x^b dx^\rho \right] \delta x^\mu. \tag{105}$$

Vaatame nüüd lähemalt mõju (105) teist, kolmandat ja neljandat liiget. Teeme teises liikmes summeerireegli kohaselt indeksivahetused $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \to \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\rho}$ ja $dx^\mu \to dx^\rho$, mis annavad kokku

$$\begin{aligned} u_a \left[- \left(\partial_\mu \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\rho} \right) x^b - \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\rho} \left(\partial_\mu x^b \right) + \left(\partial_\rho \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \right) x^b + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \left(\partial_\rho x^b \right) \right] dx^\rho = \\ u_a \left[x^b \left(\partial_\rho \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} - \partial_\mu \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\rho} \right) - \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\rho} \left(\partial_\mu x^b \right) + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \left(\partial_\rho x^b \right) \right] dx^\rho. \end{aligned} \tag{106}$$

Arvestades kõveruse üldist avaldist (41) ning asendades üldise spinnseostuse $A^a{}_{b\mu}$ inertsiaalse spinnseostusega $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$ saame, et sulgudes olevad liikmed saab esitada kõveruse kaudu

$$\partial_\rho \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} - \partial_\mu \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\rho} = \overset{\bullet}{R}{}^a{}_{b\rho\mu} - \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{e\rho} \overset{\bullet}{A}{}^e{}_{b\mu} + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{e\mu} \overset{\bullet}{A}{}^e{}_{b\rho}. \tag{107}$$

Ülejäänud kahes liikmes asendame suuruse $\partial_\nu x^b$ tetraadi (88) kaudu. Seega saame avaldise

$$\begin{aligned} u_a \Big[x^b \left(\overset{\bullet}{R}{}^a{}_{b\rho\mu} - \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{e\rho} \overset{\bullet}{A}{}^e{}_{b\mu} + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{e\mu} \overset{\bullet}{A}{}^e{}_{b\rho} \right) - \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\rho} e^b{}_\mu + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\rho} \overset{\bullet}{A}{}^b{}_{c\mu} x^c \\ + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} e^b{}_\rho - \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \overset{\bullet}{A}{}^b{}_{d\rho} x^d \Big]. \end{aligned} \tag{108}$$

Siin teine ja viies liige taanduvad ära, kuna viiendas liikmes saab teha indeksivahetused $b \to e$, $c \to b$. Samamoodi taanduvad ära kolmas ja viimane liige, kui vahetada $b \to e$, $d \to b$, mis annavad

$$\begin{aligned} -\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{e\rho} \overset{\bullet}{A}{}^e{}_{b\mu} x^b + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\rho} \overset{\bullet}{A}{}^b{}_{c\mu} x^c = 0, \\ -\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{e\mu} \overset{\bullet}{A}{}^e{}_{b\rho} x^b + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \overset{\bullet}{A}{}^b{}_{d\rho} x^d = 0. \end{aligned} \tag{109}$$

Mõju variatsioon on seega kujul

$$\delta S = m \int \left[e^a{}_\mu du_a - u_a dx^\rho \overset{\bullet}{R}{}^a{}_{b\rho\mu} x^b - u_a dx^\rho \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\rho} e^b{}_\mu + u_a dx^\rho \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} e^b{}_\rho \right] \delta x^\mu. \tag{110}$$

Kuna TPG teoorias on seostus valitud nii, et kõverus $\overset{\bullet}{R}{}^a{}_{b\rho\mu}$ oleks null, siis teine liige seoses (110) on identselt null. Lisaks toome sulgude ette intervalli $d\sigma$ ning tähistame 4-kiiruse $dx^\rho / d\sigma = u^\rho$. Viimases liikmes kasutame tetraadi omadusi (30) ja leiame, et

$$u_a \left(u^\rho e^b{}_\rho \right) \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = u_a u^b \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = u_a u_b \overset{\bullet}{A}{}^{ab}{}_\mu = 0, \tag{111}$$

mis tuleneb sellest, et $u_a u_b$ on sümmeetriline tensor ning $\overset{\bullet}{A}{}^{ab}_{\mu}$ avaldise (40) kohaselt on antisümmeetriline puutujaruumi indeksite suhtes. Sümmeetrilise ja antisümmeetrilise objekti korrutis on null. Seega saame mõju variatsiooni (110) kirjutada kujul

$$\delta S = e^a{}_\mu \left[\frac{du_a}{d\sigma} - \overset{\bullet}{A}{}^b{}_{a\rho} u_b u^\rho \right] \delta x^\mu, \tag{112}$$

kus teises liikmes vahetasime omavahel indeksid $b \leftrightarrow a$.

Vähima mõju prinstiibi kohaselt peab mõju variatsioon δS võrduma nulliga, $\delta S = 0$, millest järelduvad liikumisvõrrandid on järgmised:

$$\frac{du_a}{d\sigma} - \overset{\bullet}{A}{}^b{}_{a\rho} u_b u^\rho = 0. \tag{113}$$

See on gravitatsioonivälja puudumisel vaba osakese liikumisvõrrand TPG raames. On näha, et gravitatsiooni puudumisel on see analoogiline ÜRTs tuntud geodeetilise võrrandiga (14), kus parema poole võrdumine nulliga näitab gravitatsioonilise jõu puudumist.

4.2 Vaba osake gravitatsiooniväljas

Eelmise juhu üldistusena vaatame olukorda, kus osake massiga m liigub välises gravitatsiooniväljas. Selleks tuleb tetraad $e^a{}_\mu$ asendada üldise tetraadiga $h^a{}_\mu$, mis sisaldab ka kalibratsioonipotentsiaaliga $B^a{}_\mu$ liiget [8]. Mõju avaldis (89) on sel juhul

$$S = -m \int u_a h^a, \tag{114}$$

milles h^a on tetraadile (77) vastav 1-vorm

$$h^a \equiv h^a{}_\mu dx^\mu = dx^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b dx^\mu + B^a{}_\mu dx^\mu. \tag{115}$$

Mõju varieerimisel saame

$$\delta S = -m \int (\delta u_a)\, h^a + u_a \left[\delta dx^a + \delta \left(\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b dx^\mu \right) + \delta \left(B^a{}_\mu dx^\mu \right) \right]. \tag{116}$$

Analoogiliselt avaldistega (95) ja (96) saab leida, et

$$\begin{gathered} \delta\,(ds) = u_a \delta h^a = (\delta u_a)\, h^a + u_a\,(\delta h^a) \\ \Downarrow \\ (\delta u_a) h^a = 0 \end{gathered} \tag{117}$$

ning seega esimene liige on võrdne nulliga. Mõju variatsioon (116) avaldub

$$\begin{aligned} \delta S = -m \int u_a d\delta x^a + u_a \left(\delta \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}\right) x^b dx^\mu + u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \left(\delta x^b\right) dx^\mu + u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b \left(d\delta x^\mu\right) \\ + u_a \left(\delta B^a{}_\mu\right) dx^\mu + u_a B^a{}_\mu \left(d\delta x^\mu\right). \end{aligned} \tag{118}$$

Integreerime nüüd ositi esimest, neljandat ja kuuendat liiget. Need on vastavalt

$$\begin{aligned} \int u_a d\delta x^a &= \left[u_a \delta x^a\right]_a^b - \int du_a \delta x^a, \\ \int u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b \left(d\delta x^\mu\right) &= \left[u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b \delta x^\mu\right]_a^b - \int d\left(u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b\right) \delta x^\mu, \\ \int u_a B^a{}_\mu \left(d\delta x^\mu\right) &= \left[u_a B^a{}_\mu \delta x^\mu\right]_a^b - \int d\left(u_a B^a{}_\mu\right) \delta x^\mu. \end{aligned} \tag{119}$$

Rajadega liikmed on võrsed nulliga nagu (100) ning saame

$$\begin{aligned} \delta S = m \int du_a \delta x^a - u_a \left(\delta \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}\right) x^b dx^\mu - u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \left(\delta x^b\right) dx^\mu + d\left(u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b\right) \delta x^\mu \\ - u_a \left(\delta B^a{}_\mu\right) dx^\mu + d\left(u_a B^a{}_\mu\right) \delta x^\mu. \end{aligned} \tag{120}$$

Selguse mõttes kirjutame kõik liikmed eraldi. Kasutades eelmises punktis olnud teisendusi avalduvad esimesed kolm liiget järgmiselt:

$$\begin{aligned} du_a \delta x^a &= du_a \left(\partial_\mu x^a\right) \delta x^\mu, \\ u_a \left(\delta \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}\right) x^b dx^\mu &= u_a \left(\partial_\mu \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}\right) \delta x^\mu x^b dx^\mu, \\ u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \left(\delta x^b\right) dx^\mu &= u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \left(\partial_\mu x^b\right) \delta x^\mu dx^\mu. \end{aligned} \tag{121}$$

Neljas liige tuleb

$$\begin{aligned} &\left(du_a\right) \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b \delta x^\mu + u_a \left(d\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}\right) x^b \delta x^\mu + u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \left(dx^b\right) \delta x^\mu = \\ &\left(du_a\right) \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b \delta x^\mu + u_a \left(\partial_\rho \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}\right) dx^\rho x^b \delta x^\mu + u_a \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} \left(\partial_\rho x^b\right) dx^\rho \delta x^\mu \end{aligned} \tag{122}$$

ning viies ja kuues on vastavalt

$$\begin{aligned} &u_a \left(\delta B^a{}_\mu\right) dx^\mu = u_a \left(\partial_\mu B^a{}_\mu\right) \delta x^\mu dx^\mu, \\ &d\left(u_a B^a{}_\mu\right) \delta x^\mu = \left(du_a\right) B^a{}_\mu \delta x^\mu + u_a \left(\partial_\rho B^a{}_\mu\right) dx^\rho \delta x^\mu. \end{aligned} \tag{123}$$

Viienda liikme puhul on kasutatud indeksi vahetus $\rho \to \mu$.

Võtame kokku kõik liikmed, milles on du_a ning kasutame tetraadi $h^a{}_\mu$ definitsiooni (77), millest järeldub

$$du_a \delta x^\mu \left[\partial_\mu x^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b + B^a{}_\mu\right] = du_a \delta x^\mu h^a{}_\mu. \tag{124}$$

Asendades eelmises lõigus saadud avaldised mõju avaldisse (120) saame

$$\begin{aligned}\delta S = m\int \delta x^{\mu}\Big[&h^{a}{}_{\mu}du_a - u_a\left(\partial_\mu \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}\right)x^b dx^\mu - u_a\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}\left(\partial_\mu x^b\right)dx^\mu \\ &+u_a\left(\partial_\rho \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}\right)dx^\rho x^b + u_a\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}\left(\partial_\rho x^b\right)dx^\rho - u_a\left(\partial_\mu B^{a}{}_{\mu}\right)dx^\mu + u_a\left(\partial_\rho B^{a}{}_{\mu}\right)dx^\rho\Big].\end{aligned} \tag{125}$$

Siin vaatame eraldi liikmeid kordajatega $u_a dx^\mu$ ja $u_a dx^\rho$, mis annavad vastavalt

$$\begin{aligned}-u_a dx^\mu&\left[\left(\partial_\mu \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}\right)x^b + \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}\left(\partial_\mu x^b\right) + \left(\partial_\mu B^{a}{}_{\mu}\right)\right],\\ u_a dx^\rho&\left[\left(\partial_\rho \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}\right)x^b + \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}\left(\partial_\rho x^b\right) + \left(\partial_\rho B^{a}{}_{\mu}\right)\right].\end{aligned} \tag{126}$$

Kui avaldada tetraadi (77) osatuletis on näha, et sulgudes olevad avaldised teisenevad kujule

$$\begin{aligned}&-u_a dx^\mu\left[\partial_\mu h^{a}{}_{\mu} - \partial_\mu\left(\partial_\mu x^a\right)\right] \overset{\mu\rightarrow\rho}{=} -u_a dx^\rho\left[\partial_\mu h^{a}{}_{\rho} - \partial_\mu\left(\partial_\rho x^a\right)\right],\\ &u_a dx^\rho\left[\partial_\rho h^{a}{}_{\mu} - \partial_\rho\left(\partial_\mu x^a\right)\right].\end{aligned} \tag{127}$$

Segatuletiste võrdsuse tõttu jäävad nende vahesse alles ainult tetraadi osatuletised. Avaldades tetraadi osatuletiste vahe väände definitsiooni (42) kaudu

$$-u_a dx^\rho\left[\partial_\mu h^{a}{}_{\rho} - \partial_\rho h^{a}{}_{\mu}\right] = -u_a dx^\rho\left[\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\rho} - \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{e\mu}h^{e}{}_{\rho} + \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{e\rho}h^{e}{}_{\mu}\right], \tag{128}$$

saame mõju variatsioon kirjutada kujul:

$$\delta S = m\int\left[h^{a}{}_{\mu}du_a - u_a dx^\rho\left(\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\rho} - \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{e\mu}h^{e}{}_{\rho} + \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{e\rho}h^{e}{}_{\mu}\right)\right]\delta x^\mu. \tag{129}$$

Järgnevalt toome sulgude ette intervalli ds. Analoogiliselt eelmises punktis leitud võrdusega (112) saab sümmeetrilise ja antisümmeetrilise objekti korrutamisel tulemuseks nulli $u_a u_e \overset{\bullet}{A}{}^{ae}_{\mu} = 0$. Seega mõjufunktsionaal tuleb

$$\delta S = h^{a}{}_{\mu}\left(\frac{du_a}{ds} - \overset{\bullet}{A}{}^{b}{}_{a\rho}u_a u^\rho - \overset{\bullet}{T}{}^{b}{}_{a\rho}u_b u^\rho\right), \tag{130}$$

kus väände puhul on kasutatud seost $T^{b}{}_{\mu\rho} = T^{b}{}_{a\rho}h^{a}{}_{\mu}$ ning kuna mõju variatsioon peab olema null, siis osakese liikumisvõrrand on

$$\frac{du_a}{ds} - \overset{\bullet}{A}{}^{b}{}_{a\rho}u_a u^\rho = \overset{\bullet}{T}{}^{b}{}_{a\rho}u_b u^\rho. \tag{131}$$

See on teleparalleelne osakese liikumisvõrrand gravitatsioonivälja olemasolul. See erineb vaba osakese liikumisvõrrandist (113) selle poolest, et võrrandi parem pool ei võrdu nulliga. See tähendab, et tegemist on jõu võrrandiga, kus vääne määrab gravitatsioonilise jõu. Võrdluse ÜRTs leitud võrrandiga (14) esitame järgmises arutelus.

5 Arutelu

Järgnevalt võrdleme eelnevas peatükis leitud punktosakese liikumisvõrrandeid teleparalleelses gravitatsiooniteoorias vastavate liikumisvõrranditega üldrelatiivsusteoorias.

Alajaotuses 2.2 esitasime ülevaatliku tuletuskäigu punktosakese geodeetilise joone võrrandi (14) jaoks ÜRT kontekstis. Kuna ÜRTs toimub kogu dünaamika aegruumis, siis sisaldab võrrand (14) ainult aegruumi koordinaate ning nende tuletisi omaaja τ järgi. Geodeetilise joone võrrandi vasak pool sisaldab punktosakese 4-kiirendust ning Levi-Civita seostust $\mathring{\Gamma}^{\delta}{}_{\rho\sigma}$, mis võtab arvesse aegruumi kõveruse ning vektori suuna muutuse paralleelnihetel. Osakese liikumisvõrrandid TPGs, (113) ja (131), sisaldavad aga Levi-Civita seostuse asemel inertsiaalset spinnseostust $\overset{\bullet}{A}{}^{b}{}_{a\rho}$. Erinevus tuleneb sellest, et nendes teooriates kasutatakse erinevat matemaatilist formalismi. TPGs kasutatakse tetraadformalismi, kus liikumise kirjeldamiseks kasutatakse lokaalset tetraadbaasi, mis on defineeritud tasases puutujaruumis.

Nii välise gravitatsioonivälja puudumisel (vt. valem (113)) kui ka olemasolul (vt. valem (131)) on punktosakese liikumisvõrrandite vasakud pooled indentsed. See näitab, et TPGs kirjeldab spinnseostus $\overset{\bullet}{A}{}^{b}{}_{a\rho}$ inertsiaalseid nähtusi ja mitte gravitatsioonilisi. Seega gravitatsioonivälja arvestamata jättes eksisteerivad üldises Lorentzi raamis inertsiaalsed nähtused. Sellest järeldub, et TPGs on gravitatsiooninähtused ja inertsinähtused kirjeldatud nii, et nad on omavahel eristatavad. ÜRTs käsitletakse neid kui ühte ja sama fenomeni. See asjaolu kajastub ka geodeetilise joone võrrandis (14), kus Levi-Civita seostus sisaldab nii inertsiaalseid kui ka gravitatsioonilisi nähtusi.

ÜRTs on geodeetilise joone võrrandi parem pool identselt null. Nagu eelmises lõigus sai öeldud, tähendab see ühest küljest seda, et ÜRTs on gravitatsioon ja inerts eristamatud, ning teisest küljest näitab see, et punktosakese liikumine on täielikult määratud aegruumi kõverusega. Teisisõnu liigub punktosake mööda lühimat trajektoori (geodeetilist joont) ning talle ei mõju väliseid jõudusid. TPGs sõltub liikumisvõrrandi parem pool gravitatsioonivälja esinemisest või mitteesinemisest. Selle puudumisel kehtib liikumisvõrrand (113), mis näitab, et osake liigub analoogiliselt ÜRTga piki lühimat trajektoori ning talle ei mõju väliseid jõudusid. Gravitatsioonivälja olemasolul aga sisaldab liikumisvõrrandi (131) parem pool väändetensorit $\overset{\bullet}{T}{}^{b}{}_{a\rho}$. See näitab, et massiga punktosakese trajektoori määrab lisaks inertsile ka veel väline jõud, mis on määratud väände poolt. Seega on TPGs liikumisvõrrand jõu võrrand ning võrrandi paremal pool olev liige on vaadeldav gravitatsioonijõuna, mida kirjeldadakse väänet kasutades.

6 Kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärgiks oli detailselt tuletada nii vaba osakese kui ka gravitatsiooniväljas liikuva osakese liikumisvõrrandid teleparalleelse gravitatsiooniteooria raames ja võrrelda saadud tulemusi vastavate liikumisvõrranditega, mis on tuletatud üldrelatiivsusteooria kontekstis.

Töö teises peatükis panime kirja ÜRT põhimõisted ja definitsioonid, millele antud teooria on üles ehitatud. Alajaotuses 2.2 esitasime geodeetilise joone võrrandi ning andsime ülevaate selle liikmete ja võrrandi enda füüsikalisest tähendusest. Teise peatüki ülejäänud osas andsime lühiülevaate ÜRT väljavõrranditest ja ning nende liikmete tähendusest.

Kuna töö eesmärgiks oli tuletada osakese liikumisvõrrandid TPGs, siis alajaotustes 3.1-3.4 on kirjeldatud nende detailseks tuletamiseks vajalikku matemaatilist aparatuuri. Panime kirja tetraadformalismist vajalikud mõisted (alajaotus 3.1) ning tegelesime spinnseostusega (alajaotus 3.2) ja Lorentzi teisendusega (alajaotus 3.3). Esitasime põhjaliku ülevaate kalibratsiooniteisendusest ja -invariantsusest (alajaotus 3.4). Ülevaatlikuse huvides on alajaotuses 3.5 esitatud ka TPG üldised väljavõrrandid koos lühikese tuletuskäiguga ning võrreldud neid Einsteini väljavõrranditega.

Neljandas peatükis tuletasime üksikasjalikult massiga osakese liikumisvõrrandid TPGs, kasutades kolmandas peatükis arendatud matemaatilist aparatuuri. Liikumivõrranditest vaatlesime kahte erijuhtu. Esiteks lihtsamat juhtu vabast osakesest gravitatsioonivälja puudumisel. Ning teiseks selle üldistust, kus osake liigub gravitatsiooniväljas.

Lõpuks võrdlesime ÜRT ja TPG raames leitud liikumisvõrrandeid, kus tõime välja nende põhilised erinevused ning andsime neile nii füüsikalised kui ka matemaatilised seletused.

7 Summary

Equations of Motion for a Point Particle in Teleparallel Gravity

The goal of this work was to derive the equations of motion for a free particle and a particle moving in a gravitational field in the context of teleparallel gravity and compare the results with the respective equations derived from general relativity.

In the second section we established the basic definitions and concepts of GR, on which the theory is built. In subsection 2.2 we presented the geodesic equation and explained the meaning of the equation and its components. In the rest of section 2 we gave a short overview of the field equations of GR and its components.

Because our aim was to derive the equations of motions for a paricle in TPG, in sections 3.1-3.4 we described the mathematics necessary for the detailed derivation of the equations. We established the necessary concepts of tetradformalism (subsection 3.1) and looked at the spin connection (subsection 3.2) and Lorentz transformations (3.3). We gave a thorough overview of gauge theory (subsection 3.4). In subsection 3.5 we gave an overview of the general field eqations in TPG along with a short derivation and compared the with Einsteins field equations.

In the fourth section we gave a detailed derivation of the equations of motion for a particle with mass in TPG. We used the mathematics, that was established in section 3. Two special cases were studied. Firstly the simpler case of a free particle in the absence of gravitation and then its generalisation, where a particle is moving in a gravitational field.

In conclusion we compared our results in TPG with the geodesic equation of GR. An analysis of the main differences between them was given along with their physical and mathematical interpretation.

Viited

[1] H. Weyl, *Gravitation und Elektrizität*, Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 465 (1918).

[2] A. Unzicker, T. Case *Unified Field Theory of Gravitation and Electricity*, (2005); [`arXiv:physics/0503046`].

[3] S. Carroll, *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, (2004).

[4] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Ltd (2003).

[5] R. Aldrovandi, P. B. Barros and J. G. Pereira, *Gravitation as Anholonomy*, Gen. Rel. Grav. 35, 991 (2003); [arXiv:gr-qc/0301077].

[6] R. Alvorandi, J. G. Pereira, *An Introduction to Teleparallel Gravity*, (2010).

[7] J. Yepez, *Einstein's Vierbein Field Theory of Curved Space*, Air Force Research Laboratory, (2011); [arXiv:1106.2037v1 [gr-qc]].

[8] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen,J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Overview*, 2000; [arXiv:gr-qc/0011087v1].

[9] B. M. Pimentel, P. J. Pompeia, J. F. da Rocha-Neto, R. G. Teixeira, *The Teleparallel Lagrangian and Hamilton-Jacobi Formalism*, (2003); [arXiv:gr-qc/0303087].

[10] K. Hayashi, T. Shirafuji, *New General Relativity*, Physical Review D, (1979); [PhysRevD.19.3524].

[11] E. Di Casola, S. Liberati and S. Sonego, *Nonequivalence of equivalence principles* Am. J. Phys. **83**, 39 (2015) doi:10.1119/1.4895342 [arXiv:1310.7426 [gr-qc]].

Lisa

- $\eta_{ab} = g_{\mu\nu} h_a{}^\mu h_b{}^\nu$ - Describes the relation between spacetime and its tangent space at that point by relating the spacetime metric g to the Minkowski metric of tangent space using the tetrad h.

- $T_{a\nu\mu} = \eta_{ab} T^b{}_{\nu\mu}$ - When the Minkowski metric acts on a tensor, it either lowers or raises one index.

- $A^a{}_{bc} = A^a{}_{b\mu} h_c{}^\mu$, $R^a{}_{bcd} = h^a{}_\rho h_b{}^\lambda h_c{}^\mu h_d{}^\nu R^\rho{}_{\lambda\mu\nu}$ - Tensor components can be transformed into spacetime or tangent space indices using the tetrad.

- $[h_a, h_b] = f^c{}_{ab} h_c$ - This equation is valid for an anholonomic basis $\{h_a\}$, where $f^c{}_{ab}$ are the structure coefficients, which are given in the next equation.

- $f^c{}_{ab} = h_a{}^\mu h_b{}^\nu \left(\partial_\nu h^c{}_\mu - \partial_\mu h^c{}_\nu\right)$ - The structure coefficients represent the curls of the base members and include gravitational and inertial effect.

- $\nabla_\mu \phi^\nu = \partial_\mu \phi^\nu + \Gamma^\nu_{\rho\mu} \phi^\rho$ - Covariant derivative of vector ϕ, where Γ is the linear connection, which acts only on spacetime indices.

- $\mathcal{D}_\mu \phi^c = \partial_\mu \phi^c + A^c_{d\mu} \phi^d$ - Fock-Ivananko derivative of vector ϕ, where the spin connection A acts only on tangent space indices.

- $A^a{}_{b\mu} = h^a{}_\nu \partial_\mu h_b{}^{nu} + h^a_\nu \Gamma^\nu_{\rho\mu} h_b{}^\rho = h^a{}_\nu \nabla_\mu h_b{}^\nu$ - Relation between the spin connection A and linear connection Γ using the tetrad components h.

- $\mathcal{D}_\mu \phi^d = h^d{}_\rho \nabla_\mu \phi^\rho$ - Relation between the Fock-Ivananko derivative and covariant derivative.

- $\partial_\mu h^a{}_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho + A^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu = 0$ - The total covariant derivative of the tetrad is vanishing.

- $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} + K^\rho{}_{\mu\nu}$ - Every general linear connection Γ can be decomposed using the Levi-Civita connection $\mathring{\Gamma}$ and the contortion tensor K, where

$$\mathring{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right),$$

$$K^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(T_\nu{}^\rho{}_\mu + T_\mu{}^\rho{}_\nu - T^\rho{}_{\nu\mu}\right).$$

- $A^a{}_{b\mu} = \mathring{A}^a{}_{b\mu} + K^a{}_{b\mu}$ - The same equation for the spin connection.

- $R^a{}_{b\nu\mu} = \partial_\nu A^a{}_{b\mu} - \partial_\mu A^a{}_{b\nu} + A^a{}_{e\nu} A^e{}_{b\mu} - A^a{}_{e\mu} A^e{}_{b\nu}$ - Curvature tensor written in terms of the spin connection A. The spacetime form of R is just

$$R^\rho{}_{\lambda\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} + \Gamma^\rho{}_{\eta\nu}\Gamma^\eta{}_{\lambda\mu} + \Gamma^\rho{}_{\eta\mu}\Gamma^\eta{}_{\lambda\nu}.$$

- $T^a{}_{\nu\mu} = \partial_\nu h^a{}_\mu - \partial_\mu h^a{}_\nu + A^a{}_{e\nu} h^e{}_\mu - A^a{}_{e\mu} h^e{}_\nu$ - Torsion tensor of the spin connection A. Using the linear connection this becomes

$$T^\rho{}_{\nu\mu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}.$$

- $\mathcal{D}_\nu T^a{}_{\rho\mu} + \mathcal{D}_\mu T^a{}_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\rho T^a{}_{\mu\nu} = R^a{}_{\rho\mu\nu} + R^a{}_{\nu\rho\mu} + R^a{}_{\mu\nu\rho}$ - General Bianchi identity for torsion.

- $\mathcal{D}_\nu R^a{}_{b\rho\mu} + \mathcal{D}_\mu R^a{}_{b\nu\rho} + \mathcal{D}_\rho R^a{}_{b\mu\nu} = 0$ - General Bianchi identity for curvature.

- $h'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b h^b{}_\mu$ - Lorentz transformation of tetrad h. Lorentz transformations can be applied to tensors with tangent space indices. Only spacetime indexed quantities are invariant.

$$R'^a{}_{b\nu\mu} = \Lambda^a{}_c \Lambda_b{}^d R^c{}_{d\nu\mu}.$$

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, _______________________Jaan Ruus____,
(*autori nimi*)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose
__________,,Punktosakese liikumisvõrrandid teleparalleelses gravitatsiooniteoorias''
____
____
____,
(*lõputöö pealkiri*)

mille juhendaja on ______________Margus Saal_____________________________________,
(*juhendaja nimi*)

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus/Tallinnas/Narvas/Pärnus/Viljandis, **27.05.2016**