A. Vihman

ALGEBRA

õpik

VIII KLASSILE

RK „PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

A. VIHMAN

ALGEBRA ÕPIK

VIII KLASSILE

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“
TALLINN, 1946

Peatükk I.

Algebraline murd.

§ 1. Hulkliikme algtegurid.

Nagu antud arve ja antud üksliikmeid saab esitada algtegurite korrutisena, või, nagu selle kohta öeldakse, saab lahutada algtegureiks, nii võime kõnelda ka hulkliikme algtegureist.

Hulkliikme algtegureiks nimetame temas esinevaid algarvulisi numbrilisi tegureid, ühetähelisi tegureid ja niisuguseid hulkliikmelisi tegureid, mida ei saa tegureiks lahutada.

Algtegurite näideteks võivad olla algarvud

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13 \text{ jne;}$$

ühetähelised tegurid, nagu

$$a,\ b,\ c,\ m,\ n,\ x,\ y \text{ jne;}$$

ja hulkliikmelised tegurid, nagu

$$a+1,\ 3x+2,\ b-y,\ a^2+x^2,\ x^3+5a^2b,\ a+b+c.$$

Algteguriks ei saa aga olla näiteks binoom $1-x^2$, sest teda saab lahutada tegureiks:

$$1-x^2=(1+x)(1-x).$$

Viimases avaldises tegurid $1+x$ ja $1-x$ on algtegurid, sest neid ei saa enam omakorda tegureiks lahutada. Sellepärast võime öelda, et hulkliikme $1-x^2$ algtegurid on $1+x$ ja $1-x$.

Kirjutame veel näitena hulkliikme

$$30a^2b^3 - 60a^2b^2x + 30a^2bx^2$$

tema algtegurite korrutisena:

$$30a^2b^3 - 60a^2b^2x + 30a^2bx^2 = 30a^2b\,(b^2 - 2bx + x^2) =$$
$$= 30a^2b\,(b - x)^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot b\,(b - x)\,(b - x).$$

Kui korrutises esineb algteguri aste, siis seda astet ei ole tingimata vajalik igakord võrdsete tegurite korrutisena kirjutada, sest astmes esinevad algtegurid on selletagi nähtavad, seetõttu võime viimase lahenduse kirjutada ka niisugusel kujul:

$$30a^2b^3 - 60a^2b^2x + 30a^2bx^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5a^2b\,(b - x)^2.$$

Hulkliikme algtegurid leiame tema tegureiks lahutamise teel, milleks kasutatakse meile tuntud võtteid: teguri sulgude ette toomise võtet, liikmete rühmitamise võtet, arvutamise abivalemite kasutamise võtet ja liikme kahendamise võtet. Mõnda võtet õpime tundma veel edaspidi.

Mõne hulkliikme tegureiks lahutamisel on vajalik mitme abivalemi rakendamine. Selgituseks toome paar näidet.

Ü l e s a n n e 1. Lahutada tegureiks hulkliige

$$a^2 - x^2 + 2xy - y^2.$$

L a h e n d u s. $a^2 - x^2 + 2xy - y^2 = a^2 - (x^2 - 2xy + y^2) =$
$a^2 - (x - y)^2 = (a + x - y)\,(a - x + y).$

Ü l e s a n n e 2. Lahutada tegureiks hulkliige

$$a^3 + a^2 - 2ax + a - x + x^2 - x^3.$$

L a h e n d u s. Rühmitame antud hulkliikme liikmed järgmiselt:

$$(a^3 - x^3) + (a^2 - 2ax + x^2) + (a - x).$$

Esimene rühm on kuupide vahe, teine rühm esitab kahe arvu vahe ruutu. Neid rühmi tegureiks lahutades saame hulkliikme järgmisel kujul:

$$(a-x)(a^2+ax+x^2)+(a-x)^2+(a-x).$$

Nüüd näeme, et igal liikmel on üks ja sama tegur $(a-x)$, selle teguri sulgude ette tuues saamegi antud hulkliikme korrutisena:

$$(a-x)(a^2+ax+x^2+a-x+1).$$

Niisiis

$$a^3+a^2-2ax+a-x+x^2-x^3=$$
$$=(a-x)(a^2+ax+x^2+a-x+1).$$

Ülesanded.

1. Esitada järgmised hulkliikmed algtegurite korrutisena:

1.	$24a+48$	6.	$6a^2+2a+9a+3$
2.	$72x-18$	7.	$2b^2+4b+b+2$
3.	$3a^2+6ab+3b^2$	8.	$m^2-3m+2m-6$
4.	$6x^2-12x+6$	9.	$x^2+5x+2x+10$
5.	$21a^3-21b^3$	10.	$y^2-2y-y+2.$

2. Lahutada järgmised hulkliikmed algtegureiks:

1.	$5x^2-5$	6.	$2a^3+16$
2.	$3a^2-12$	7.	a^2+4m^2+4am
3.	$3a^2+12ab+12b^2$	8.	$a^4-2a^2b+b^2$
4.	$6x^2-36x+54$	9.	$5b^4-20b^2$
5.	$2a^3+2b^3$	10.	a^3b^2-a

3. Lahutada algtegureiks järgmised hulkliikmed:

1.	a^2+8a+7	6.	a^2-n^2+a-n
2.	x^2-6x+8	7.	$a^2+2ab+b^2-x^2$
3.	$2m^2+11m+5$	8.	$x^2-2xy+y^2-a^2$
4.	$3n^2-5n-2$	9.	$(a^2+2ab+b^2)c+ab(a+b)$
5.	$a^2-b^2+(a+b)c$	10.	$ab-an-(b^2-2bn+n^2)$

11. $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$

12. $(c^2-b^2+d^2-a^2)^2-4\ (ab-cd)^2$

13. a^3+8+6a^2+12a

14. b^3-8+6b^2-12b

15. $(a^3+1)^2-(b^3-1)^2$

16. $x^3-27a^3-9ax^2+27a^2x$

17. $(a+x)^3-(a-x)^3$

18. $a^2+2ab+b^2-x^2+2xy-y^2$

19. $x^3+x^2+2xy+y^2+y^3$

20. $a^3+a^2-2ab+a-b+b^2-b^3$

§ 2. Hulkliikmete suurim ühistegur.

Hulkliikmete suurima ühisteguri leidmiseks lahutame hulkliikmed algtegureiks, kirjutame välja nende ühised algtegurid ja moodustame viimaste korrutise.

Kui hulkliikmeil pole ühiseid algtegureid, siis öeldakse, et nende suurimaks ühisteguriks on arv 1.

Ülesanne. Leida polünoomide

$$15h^2-15h,\ 9h^3-9h \text{ ja } 24h^3-48h^2+24h$$

suurim ühistegur.

Lahendus. Antud avaldiste algtegureiks lahutamine annab:

$$15h^2-15h=15h(h-1)=3\cdot5\cdot h(h-1),$$

$$9h^3-9h=9h(h^2-1)=3^2\cdot h(h+1)(h-1),$$

$$24h^3-48h^2+24h=24h(h^2-2h+1)=$$
$$=2^3\cdot3\cdot h(h-1)^2.$$

Seega nõutud suurim ühistegur on

$$3h(h-1).$$

4. Leida järgmiste avaldisepaaride suurimad ühistegurid:

1. $4a$	2. $7a$	3. $8mnp$
$3a - 1$	$7a - b$	$12m^2np - 4mn^2p$
4. $a^2x + ax^2$	5. $15pq - 5p$	6. $7a^2 - 21ab$
$a^2x - ax^2$	$10p^2 + 15p$	$5a - 15b$
7. $a^2 - 1$	8. $5(a + x)^2$	9. $N^2 - 9$
$a + 1$	$10(a^2 - x^2)$	$N^2 - 6N + 9$
10. a^3	11. $m^2n^2 - 1$	12. $u^3 - c^2u$
$a^2x + ax^2$	$5mn^2 + 5n$	$u^3 - 2u^2c + uc^2$

5. Leida järgmiste avaldisekolmikute suurimad ühistegurid:

1. $x^2 - 2x + 1$	2. $9 - x^2$	3. $25 - 36x^2$
$x^2 - 1$	$x^2 + 6x + 9$	$5 + 6x$
$5x - 5$	$2x + 6$	$36x^2 - 60x + 25$
4. $x^2 - 4x + 4$	5. $x^2 - 25$	6. $3x^2 + x$
$x^2 + x - 6$	$x^2 + 6x + 5$	$3x + 3$
$x^2 - 7x + 10$	$x^2 + 3x - 10$	$3x^2 - 3x + 6$
7. $2a - 5$	8. $a^2 - 2a - 3$	9. $4c^2 - 28cf + 49f^2$
$10 - 4a$	$4a^2 - 4$	$10c^2 - 35cf$
$6a - 15$	$a^3 + 3a^2 + 3a + 1$	$49f^2 - 4c^2$
10. $4(a + 1)^2$	11. $a^2 - b^2 + a - b$	12. $m^2 - n^2 + 2(m + n)$
$6a^2 - 6$	$3a^2 - 6a + 3$	$8(m + n)^3$
$2a^2 + 4a + 2$	$5a^2 - 5b^2$	$7m^2 + 14mn + 7n^2$.

§ 3. Hulkliikmete väikseim ühiskordne.

Hulkliikmete väikseima ühiskordse leidmiseks lahutame hulkliikmed algtegureiks, kirjutame välja ühe hulkliikme, siis selles puuduvad algtegurid teistest hulkliikmetest ja moodustame väljakirjutatud avaldistest korrutise.

Ülesanne. Leida avaldiste

$$4N^2x - 4N^2, \quad 6N(x^2 + 2x - 3) \text{ ja } 20Nx^2 - 20N$$

väikseim ühiskordne.

L a h e n d u s. Antud avaldiste algtegureiks lahutamine annab:

$$4N^2x - 4N^2 = 4N^2(x-1) = 2^2 \cdot N^2(x-1),$$

$$6N(x^2+2x-3) = 6N(x-1)(x+3) = 2 \cdot 3 \cdot N(x-1)(x+3),$$

$$20Nx^2 - 20N = 20N(x^2-1) = 2^2 \cdot 5 \cdot N(x-1)(x+1);$$

seega nõutud väikseim ühiskordne on

$$2^2 \cdot N^2(x-1) \cdot 3 \cdot (x+3) \cdot 5 \cdot (x+1)$$

ehk

$$60N^2(x-1)(x+1)(x+3).$$

Ülesanded.

6. Leida järgmiste avaldisepaaride väikseimad ühiskordsed:

1. 5	2. 12	3. m
$5a-5x$	$12a+5b$	m^2+m
4. Ny	5. $3p^2$	6. $4a+4n$
N^2-N	p^2+pq	$5a-5n$
7. a^3-aR^2	8. $(t-1)^2$	9. $(v-9)^2$
$6a-6R$	$4t^3-4t$	$(18-2v)^2$
10. $3x$	11. x^2-u^2	12. $1-x^2$
$3x^2-6xy$	$7x+7u$	$(x-1)(x+2)$

7. Leida järgmiste avaldisekolmikute väikseimad ühiskordsed:

1. $12a^2x$	2. $a+2$	3. $(b-7)^2$
$15a^3x^2$	$a+3$	b^2-7b
$18a^4x^4$	a^2+2a	$5b$
4. ax	5. $3x^2-48$	6. $(x-3)^2$
a^2+ax	$3x-12$	x^2-9
$ax+x^2$	$(x+4)^2$	$5x-15$
7. $3(n^2-1)$	8. $2(x-1)^2$	9. a^2-b^2
$(n-1)(n^2+1)$	$7(x+1)^2$	$(a-b)^2$
n^3+n	$14(x^2-1)$	$a+b$

8. Leida järgmiste avaldisekolmikute väikseimad ühiskordsed:

1. $a(a+b)+a^2-b^2$	2. x^2-4x+3
$4a^2-4ab+b^2$	x^2+4x-5
a^2-b^2	x^2-2x+1
3. $x^2-5x-14$	4. x^2-3x-4
$4x-16$	x^2-6x+8
x^2+x-2	x^3-3x^2+3x-1
5. x^2-y^2	6. a^4
$(x+y)^2$	$2a-1$
x^3+y^3	$4a^2-1$
7. $8ab+16b^2$	8. $x-1$
$a^2b+4ab^2+4b^3$	x^2-x+1
a^3	x^3+1
9. a^3-a^2+a-1	10. a^2-4
a^3+a^2+a+1	a^3+8
a^4-1	a^2+2a+4.

§ 4. Murru laiendamine.

Antud murru laiendamiseks nõutava nimetajani jagame nõutava nimetaja antud murru nimetajaga ja nii saadud jagatisega korrutamegi antud murru lugejat ja nimetajat.

Avaldist, millega antud murru lugejat ja nimetajat korrutame, see tähendab, millega antud murdu laiendame, nimetatakse laiendusteguriks ehk laiendajaks.

Ülesanne 1. Laiendada murd $\frac{3}{14}$ nimetajani 56.

Lahendus. $56:14=4$; $\frac{3}{14}=\frac{3\cdot 4}{14\cdot 4}=\frac{12}{56}$.

Ülesanne 2. Laiendada murd $\frac{3m}{4n}$ nimetajani $12bn$.

Lahendus. $12bn:4n=3b$;

$$\frac{3m}{4n}=\frac{3m\cdot 3b}{4n\cdot 3b}=\frac{9bm}{12bn}.$$

Ülesanne 3. Laiendada murd $\frac{2a-b}{a+3b}$ nimetajani $2a^2+7ab+3b^2$.

Lahendus.

$$\begin{array}{l|l} 2a^2+7ab+3b^2 & a+3b \\ \hline 2a^2+6ab & 2a+b \\ \hline ab+3b^2 & \\ ab+3b^2 & \end{array}$$

$$\frac{2a-b}{a+3b}=\frac{(2a-b)\cdot(2a+b)}{(a+3b)\cdot(2a+b)}=\frac{4a^2-b^2}{2a^2+7ab+3b^2}.$$

Ülesanded.

9. Laiendada järgmised murrud antud nimetajateni:

1. $\frac{8}{17}$ nimetajani 2108
2. $\frac{2}{43}$ „ 817
3. $\frac{a}{n}$ „ bn^2
4. $\frac{b}{x}$ „ $2ax$
5. $\frac{a}{4b}$ „ $12ab^2$
6. $\frac{2m}{13n}$ „ $52m^2n$
7. $\frac{1}{a+b}$ „ a^2-b^2
8. $\frac{a-b}{a+b}$ „ $a^2+2ab+b^2$
9. $\frac{x+y}{x-y}$ „ $x^2-2xy+y^2$
10. $\frac{m+n}{m-n}$ „ m^2-n^2
11. $\frac{a+b}{a-b}$ „ a^3-b^3
12. $\frac{m-n}{m+n}$ „ m^3+n^3

13. $\dfrac{2a+5}{3a-1}$ nimetajani $21a^2+52a-4$

14. $\dfrac{2x-3}{5x+7}$ „ $15x^2+11x-14$

15. $\dfrac{2a+1}{a+5}$ „ $2a^2+9a-5$.

§ 5. Murru taandamine.

Murru taandamiseks lahutame lugeja ja nimetaja algtegureiks, leiame lugeja ja nimetaja suurima ühisteguri ning siis jagame sellega murru lugejat ja nimetajat.

Avaldist, millega murdu taandame, nimetatakse *taandamisteguriks* ehk *taandajaks*.

Praktiliselt toimub murru taandamine sel teel, et pärast lugeja ja nimetaja algtegureiks lahutamist kustutatakse lugejas ja nimetajas nende ühised tegurid.

Ülesanne 1. Taandada murd

$$\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49}.$$

Lahendus. Lugeja teisendamine annab:

$$(x+3)(x+2)+2(x-3)=x^2+5x+6+2x-6=$$
$$=x^2+7x=x(x+7).$$

Nimetaja lahutub tegureiks järgmiselt:

$$x^2+14x+49=(x+7)^2.$$

Seega

$$\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49}=\frac{x(x+7)}{(x+7)^2}=\frac{x}{x+7}.$$

Ülesanne 2. Taandada murd $\dfrac{2ab-2b}{8b-8ab}$.

Lahendus. $\dfrac{2ab-2b}{8b-8ab}=\dfrac{2b(a-1)}{8b(1-a)}=\dfrac{a-1}{4(1-a)}$.

Me teame murru põhiomaduse põhjal, et murru väärtus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat korrutame arvuga — 1, see tähendab, kui muudame lugeja ja nimetaja liikmete ees olevad märgid vastupidisteks. Kui aga soovime muuta vastupidisteks ainuüksi kas lugeja või nimetaja liikmete ees olevad märgid, siis sellest muutub ka murru märk vastupidiseks; et murru väärtus ei muutuks, siis sel korral muudame omakorda vastupidiseks ka murru ees oleva märgi. Vastavalt sellele, mis praegu öeldud, saame oma murdu teisendada veel järgmiselt:

$$\frac{a-1}{4(1-a)} = -\frac{1-a}{4(1-a)} = -\frac{1}{4}.$$

Ülesanded.

10. Taandada järgmised murrud:

1. $\frac{42}{63}$
2. $\frac{45}{60}$
3. $\frac{270}{288}$
4. $\frac{384}{408}$
5. $\frac{3ab}{6a}$
6. $\frac{6abc}{9ac}$
7. $\frac{4mn^2}{6m^2n}$
8. $\frac{ab}{a^2+ab}$
9. $\frac{6xy}{3x^2-3xy}$
10. $\frac{12a}{3a+6}$

11. Taandada, kus võimalik, järgmised murrud:

1. $\frac{9m+18}{9m-27}$
2. $\frac{ab-ac}{ad+ac}$
3. $\frac{a^2-a}{ab+a}$
4. $\frac{2x-2}{2x+7}$
5. $\frac{a-ax}{n-nx}$
6. $\frac{7h+14}{7h-35}$
7. $\frac{2e-1}{2e+3}$
8. $\frac{n+n^2}{1+n}$
9. $\frac{ar+a^2r^2}{a+ar}$
10. $\frac{6u^3-6u^2}{u-1}$
11. $\frac{3abc-7abu}{3ac-7au}$
12. $\frac{ns+nt}{sv+tv}$
13. $\frac{a^2-az}{ab-bz}$
14. $\frac{Q^3+Q^2}{Q^2+Q}$
15. $\frac{5z^3-6z}{15z^2-18}$

12. Taandada, kus võimalik, järgmised murrud:

1. $\frac{4x^2 - 4x + 1}{10x - 5}$
2. $\frac{ay^2 - 2ay + a}{y - 1}$
3. $\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^3 - z}$
4. $\frac{u^3 - 2u^2 + u}{2u - 2}$
5. $\frac{25 - 10v + v^2}{25a - av^2}$
6. $\frac{4x^2 - 1}{4x + 2}$
7. $\frac{9p^2 - 16q^2}{6p + 8q}$
8. $\frac{4n^2 + 25}{16n^4 - 625}$
9. $\frac{gh^2 - gf^2}{kh + kf}$
10. $\frac{1 - Q^4}{Q^2 + 1}$

13. Rakendada summa jagamise seadust ja taandada, kus võimalik, tulemus:

1. $\frac{5n + 20}{5}$
2. $\frac{28a - 35b}{21}$
3. $\frac{ab - 2ac}{ab}$
4. $\frac{x^2 + mx}{2mx}$
5. $\frac{h^3 + 5h^2}{h^2}$
6. $\frac{4l^2 - 6l}{8l}$
7. $\frac{7mn - 14mp}{7m^2}$
8. $\frac{3p^2 - 2pq}{6p^2q^2}$
9. $\frac{14f^2 - 10fg}{7f^2}$
10. $\frac{9ax^2 - 18bz^2}{36ab}$
11. $\frac{12x^2 - 60a^2x^2}{-48ax^2}$
12. $\frac{18a^2b^2c + 72a^2bc^2}{18a^2bc}$

14. Taandada, kus võimalik, järgmised murrud:

1. $\frac{x - a}{a - x}$
2. $\frac{by - b}{1 - y}$
3. $\frac{5nz - 15}{3 - nz}$
4. $\frac{x^2 + xy}{xy + y^2}$
5. $\frac{15a^2 - 20ab}{21am - 28bm}$
6. $\frac{2a - 5b}{15b - 6a}$
7. $\frac{1 - h^2}{ch^2 - c}$
8. $\frac{abd^2 - abc}{abc - abd^2}$
9. $\frac{ab - bc}{ad - dc}$
10. $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$
11. $\frac{a^2 - 1}{1 + a}$
12. $\frac{c^2 - 16}{4 - c}$
13. $\frac{d^2u^2 - 9d^2}{du - 3d}$
14. $\frac{w^2 - 1}{(w + 1)^2}$
15. $\frac{(nz + 1)^3}{n^2z^2 - 1}$

15. Taandada, kus võimalik, järgmised murrud:

1. $\dfrac{-x}{a-x}$
2. $\dfrac{a-b}{b^2-a^2}$
3. $-\dfrac{6-x}{x^2-36}$
4. $\dfrac{3h-k}{k^2-9h^2}$
5. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$
6. $\dfrac{9-p^2}{p+3}$
7. $\dfrac{m^2-2mn+n^2}{n-m}$
8. $-\dfrac{-p-q}{p^2+2pq+q^2}$
9. $\dfrac{u^2-v^2}{u^2-2uv+v^2}$
10. $\dfrac{9a^2-16b^2}{9a^2-24ab+16b^2}$

16. Anda järgmistele murdudele niisugune kuju, et nii lugejas kui nimetajas seisev avaldis algaks positiivse liikmega:

1. $\dfrac{a-b}{-a-c}$
2. $\dfrac{c+x}{-3c+x}$
3. $\dfrac{-m-n}{n-m}$
4. $\dfrac{x-1}{-1-x}$
5. $\dfrac{4P-Q}{-5}$
6. $\dfrac{5u-1}{-7}$
7. $\dfrac{-a(b-c)}{-b}$
8. $\dfrac{(1-a)(b-c)}{-m-n}$
9. $\dfrac{-R(x-r)}{x^2+r^2}$

17. Taandada, kus võimalik, järgmised murrud:

1. $\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2-18}$
2. $\dfrac{x^2-8x+7}{2x^2-4x+2}$
3. $\dfrac{x^2-x-2}{ax-2a}$
4. $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-4x}$
5. $\dfrac{a^3+a^2b-ab^2-b^3}{a^3-a^2b-ab^2+b^3}$
6. $\dfrac{a^2-13a+42}{14-2a}$
7. $\dfrac{5x^2+10x+5}{ax^2-5ax-6a}$
8. $\dfrac{c^2-2c-3}{c^3+3c^2+3c+1}$
9. $\dfrac{4n^2-4n-8}{7n^3-42n^2+84n-56}$
10. $\dfrac{x^2-y^2-(x+y)z}{x^2-y^2+xz+yz}$

18. Leida järgmiste murdude numbriline väärtus, võimaluse korral murde enne taandades:

1. $\frac{z^2 - 14z + 49}{z^3 - 7z^2 - z + 7}$, kui $z = -5$

2. $\frac{t - t^3}{1 + 3t + 3t^2 + t^3}$, kui $t = -7$

3. $\frac{2a^3 + 3a^2 - 20a - 30}{4a^2 - 9}$, kui $a = 11$

4. $\frac{v^3 - 12v^2 + 48v - 64}{v^2 - 4v^2 - v + 4}$, kui $v = -1{,}4$

5. $\frac{8x^2 + 16x + 32}{x^3 - 8}$, kui $x = 3$

§ 6. Murdude teisendamine ühenimelisteks.

Murdude teisendamisel ühenimelisteks leiame antud murdude nimetajate väikseima ühiskordse, mille võtame antud murdude ühiseks nimetajaks. Siis laiendame antud murrud selle nimetajani.

N ä i d e. Teisendada ühenimelisteks murrud

$$\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2} \text{ ja } \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

Leiame nimetajate vük.:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\text{ühine nimetaja} = (a+b)^2(a-b).$$

Esimese murru laiendaja on

$$(a+b)^2(a-b) : (a^2+2ab+b^2) = a-b;$$

teise murru laiendaja on

$$(a+b)^2(a-b) : (a^2-b^2) = a+b.$$

Niisiis

$$\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a-b)\cdot(a-b)}{(a^2+2ab+b^2)\cdot(a-b)}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2(a-b)}$$

ja

$$\frac{2ab}{a^2-b^2}=\frac{2ab\cdot(a+b)}{(a^2-b^2)(a+b)}=\frac{2ab\cdot(a+b)}{(a+b)(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{2ab(a+b)}{(a+b)^2(a-b)}.$$

Ülesanded.

19. Teisendada ühenimelisteks järgmised murrud:

1. $\frac{7}{12}$ ja $\frac{13}{18}$
2. $\frac{5}{24}$ ja $\frac{17}{32}$
3. $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{15}$ ja $\frac{13}{24}$
4. $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{18}$ ja $\frac{1}{30}$
5. $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{ab}$ ja $\frac{3}{a^2}$
6. $\frac{5n}{6m}$, $\frac{2k}{15n}$ ja $\frac{4m}{9k}$
7. $\frac{a}{a+b}$ ja $\frac{b}{a-b}$
8. $\frac{m}{m-n}$ ja $\frac{n}{m+n}$
9. $\frac{a+b}{a-b}$ ja $\frac{a-b}{a+b}$
10. $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ ja $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$
11. $\frac{b}{a(a+b)}$, $\frac{a}{b(a-b)}$ ja $\frac{ab}{a^2-b^2}$
12. $\frac{c+d}{c(c-d)}$, $\frac{c-d}{d(c+d)}$ · ja $\frac{cd}{c^2-y^2}$

§ 7. Murdude liitmine ja lahutamine.

Ühenimeliste murdude liitmisel ja lahutamisel, nagu teame, saame summa lugejaks antud murdude lugejate summa või vahe, summa nimetajaks jääb antud murdude nimetaja. Kui liidetavad on isenimelised murrud, siis teisendame nad ühenimelisteks ja edasi toimime eespool antud juhise järgi. Kui mõni liidetav on täisavaldis, siis arvutamisel kirjutame ta murru kujul nimetajaga 1.

Ülesanne 1. Kirjutada murru kujul avaldis

$$a-b-\frac{a^2-b^2+ab^2}{b}.$$

Lahendus.

$$a-b=\frac{a-b}{1}=\frac{b(a-b)}{b}=\frac{ab-b^2}{b};$$

seega

$$a-b-\frac{a^2-b^2+ab}{b}=\frac{ab-b^2}{b}-\frac{a^2-b^2+ab}{b}=$$

$$=\frac{ab-b^2-a^2+b^2-ab}{b}=\frac{-a^2}{b}=-\frac{a^2}{b}.$$

Ülesanne 2. Lihtsustada avaldis

$$\frac{12}{(2a+b)^2-9b^2}+\frac{1}{ab+b^2}-\frac{1}{ab-b^2}.$$

Lahendus. Nimetajaid tegureiks lahutades saame

$$(2a+b)^2-9b^2=(2a+b+3b)(2a+b-3b)=$$
$$=(2a+4b)(2a-2b)=2^2(a+2b)(a-b);$$
$$ab+b^2=b(a+b);$$
$$ab-b^2=b(a-b).$$

Seega antud nimetajate väikseim ühiskordne on

$$2^2b(a+b)(a-b)(a+2b).$$

Laiendajad on vastavalt:

$$b(a+b),\ 2^2(a-b)(a+2b)$$
$$\text{ja }\ 2^2(a+b)(a+2b).$$

Teisendades antud murrud ühenimelisteks, saame antud avaldise kujul

$$\frac{12b(a+b)+2^2(a-b)(a+2b)-2^2(a+b)(a+2b)}{2^2b(a+b)(a-b)(a+2b)}.$$

Lugeja lihtsustamine annab

$$12(ab+b^2)+4(a^2+ab-2b^2)-4(a^2+3ab+2b^2)=$$
$$=12ab+12b^2+4a^2+4ab-8b^2-4a^2-12ab-8b^2=$$
$$=4ab-4b^2=4b(a-b).$$

Seega omandab antud avaldis kuju

$$\frac{4b(a-b)}{4b(a+b)(a-b)(a+2b)}$$

ehk

$$\frac{1}{(a+b)(a+2b)}$$

Ülesanne 3. Lihtsustada avaldis

$$\frac{a}{a-1}-\frac{2a}{1-a}-\frac{3a^2+a-2}{a^2-1}.$$

Lahendus. Teine nimetaja teisendub esimese nimetajaga samakujuliseks, kui teise murru ees oleva märgi ja nimetajas märgid muudame vastupidisteks; kui peale selle kolmanda murru nimetaja lahutame tegureiks ja iga laiendaja kirjutame vastava murru peale, siis saame:

$$\frac{a}{a-1}-\frac{2a}{1-a}-\frac{3a^2+a-2}{a^2-1}=\frac{\overbrace{a}^{a+1}}{a-1}+\frac{\overbrace{2a}^{a+1}}{a-1}-\frac{\overbrace{3a^2+a-2}^{1}}{(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{a^2+a+2a^2+2a-3a^2-a+2}{(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{2a+2}{(a+1)(a-1)}=\frac{2(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{2}{a-1}.$$

Ülesanded.

20. Teostada järgmised liitmised ja lahutamised:

1. $\frac{7}{16}+\frac{3}{16}+\frac{5}{16}$
2. $\frac{5}{18}-\frac{13}{18}+\frac{17}{18}$
3. $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}$
4. $\frac{m}{a}+\frac{n}{a}-\frac{r}{a}$
5. $\frac{5a}{6}+\frac{a}{6}$
6. $\frac{9a^2}{5}-\frac{3a^2}{5}-\frac{a^2}{5}$
7. $\frac{3a+2b}{9}+\frac{6a+7b}{9}$
8. $\frac{13x-9}{14}+\frac{x+2}{14}$
9. $\frac{am}{a+b}+\frac{bm}{a+b}$
10. $\frac{a}{a^2-1}-\frac{1}{a^2-1}$

21. Teostada järgmised liitmised ja lahutamised:

1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$
2. $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}-\frac{2}{3}$
3. $1+\frac{2}{3}+\frac{5}{9}$
4. $\frac{3}{8}+\frac{11}{12}-1$
5. $\frac{a}{10}+\frac{a}{15}$
6. $\frac{x}{6}-\frac{x}{9}$
7. $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{4}$
8. $\frac{b}{6}-\frac{b}{8}+\frac{b}{12}$
9. $\frac{1}{a}+\frac{1}{3a}$
10. $\frac{3}{b}-\frac{5}{2b}$

22. Kirjutada järgmised avaldised murdudena:

1. $1+\frac{d}{1-d}$
2. $\frac{b}{b+x}+1$
3. $1+n+\frac{n^2}{1-n}$
4. $x-3+\frac{7}{x+3}$
5. $a-b-\frac{a^2-b^2}{a}$
6. $1-\frac{(a-c)^2}{(a+c)^2}$
7. $\frac{x^2+3}{x^2-3}-2x$
8. $1-\frac{4x+5}{x^2-x+6}$
9. $\frac{5x^3-3}{2x^2+3x-8}-x^2-2$
10. $a+b-\frac{a^2-b^2+ab}{a}$

23. Teostada järgmised liitmised ja lahutamised:

1. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$
2. $\frac{1}{y-3}-\frac{1}{y-1}$
3. $\frac{1}{2u-v}-\frac{1}{2u+v}$
4. $\frac{4-3a}{a-1}-\frac{4a-5}{1-a}$
5. $\frac{7b-8a}{3b-2a}-\frac{b-4a}{2b-3a}$
6. $\frac{1}{R-\pi r}-\frac{1}{\pi R-r}$
7. $\frac{1}{4a-7b}+\frac{1}{3a-b}$
8. $\frac{1}{2h+5}-\frac{1}{3h+7}$
9. $\frac{5x-6y}{x-y}-\frac{3x-2y}{y-x}$
10. $\frac{3a-4b}{a^2-b^2}-\frac{3b-2a}{b^2-a^2}$

24. Teostada järgmised liitmised ja lahutamised:

1. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}$

2. $\frac{x}{2x-c}+\frac{c}{2x}$

3. $\frac{x-y}{x+3y}-\frac{x+y}{3y}$

4. $\frac{m+2n}{m}-\frac{m+2n}{m-2n}$

5. $\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

6. $\frac{2}{a}+\frac{4a-b}{a^2+ab}$

7. $\frac{1}{1-c}-\frac{1}{c+1}$

8. $\frac{7n}{5m^2-m}-\frac{3n}{10m-2}$

9. $\frac{4}{x-1}+\frac{3}{1-x}$

10. $\frac{a}{b(x+1)}-\frac{b}{a(1-x)}$

25. Teostada järgmised liitmised ja lahutamised:

1. $\frac{2x-19}{3x-7}-\frac{5x}{6x-8}-\frac{1}{2}$

2. $\frac{5z-3}{a-3}-\frac{6z+8}{3(3-a)}-\frac{z}{a}+\frac{a}{z}$

3. $\frac{5}{y-1}-\frac{3}{2y+1}+\frac{1}{y+1}$

4. $\frac{2n-11}{3n-5}-\frac{4n+15}{n+7}+1$

5. $\frac{2u^2}{2u-1}+\frac{3u^2-4}{3u+5}-2u$

6. $\frac{2}{1-a^2}-\frac{2}{a-1}$

7. $\frac{2a+3x}{2a-3x}-\frac{2a-3x}{3x-2a}$

8. $\frac{4a+x}{4a-x}+\frac{4a-x}{x-4a}$

9. $\frac{2}{2a+3}+\frac{3}{3-2a}+\frac{2a+15}{4a^2-9}$

10. $\frac{2}{a}+\frac{3}{b-2a}-\frac{2a-3b}{4a^2-b^2}$

11. $\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{2}{(a-1)(3-a)}+\frac{1}{(a-1)(a-2)}$

12. $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2+ac}{(b+c)(b-a)}+\frac{c^2+ab}{(c-a)(c+b)}$

26. Maja veevärgi kraan annab torustiku korrasolekul q liitrit vett minutis. Torude osalisel ummistumisel langeb minutine läbivool d liitri võrra. Mitme minuti võrra kasvab sel puhul vanni täitumise aeg, kui vanni lastakse vett v liitrit?

27. Ujuja ujub seisvas vees kiirusega v meetrit sekundis. Jõevoolu kiirus on w meetrit sekundis. Kui palju aega rohkem kulub ujujal ujudes k meetrit vastuvoolu kui ujudes sama kaugust pärivoolu?

Kui palju aega kulub ujujal ujumiseks k meetrit vastuvoolu ja tagasi lähtekohani?

§ 8. Murdude korrutamine.

Ülesanne 1. Teostada järgmine korrutamine:

$$(4-a^2)\cdot\frac{3a}{2+a}.$$

Lahendus.

$$(4-a^2)\cdot\frac{3a}{2+a}=\frac{(4-a^2)\cdot 3a}{2+a}=\frac{3a(2+a)(2-a)}{2+a}=3a(2-a).$$

Ülesanne 2. Lihtsustada avaldis

$$\frac{x^2-4u^2}{x+u}\cdot\frac{x^2-u^2}{x+2u}.$$

Lahendus.

$$\frac{x^2-4u^2}{x+u}\cdot\frac{x^2-u^2}{x+2u}=\frac{(x+2u)(x-2u)}{x+u}\cdot\frac{(x+u)(x-u)}{x+2u}=$$
$$=\frac{(x+2u)(x-2u)\cdot(x+u)(x-u)}{(x+u)\cdot(x+2u)}=(x-2u)(x-u).$$

Ülesanded.

28. Teostada järgmised korrutamised:

1. $3\cdot\frac{5}{6}$
2. $14\cdot\frac{2}{7}$
3. $3a\cdot\frac{b}{6a}$
4. $\frac{a}{10b}\cdot 5b$
5. $\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{21}\cdot\frac{28}{45}$
6. $\frac{17}{18}\cdot\frac{27}{34}\cdot\frac{9}{16}$

7. $\left(-\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c^2}{a^2}$

8. $\left(-\frac{2a}{3b}\right)\cdot\left(-\frac{6c}{4a}\right)\cdot 2b$

9. $\frac{a^2+ab}{3bc}\cdot\frac{12c}{a^2-b^2}$

10. $\frac{x^2-y^2}{xy}\cdot\frac{y}{x^2+xy}$

11. $-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(-\frac{3a^2}{4a-4b}\right)$

12. $-\frac{10b^2-10a^2}{a^2}\cdot\left(-\frac{b^2+a^2}{5a+5b}\right)$

29. Teostada järgmised korrutamised:

1. $(2x-2a)\cdot\frac{c}{x-a}$

2. $(x+1)\cdot\frac{3}{x^2-1}$

3. $(2a-b)\cdot\frac{1}{b-2a}$

4. $\frac{4n+1}{6-10n}\cdot(5n-3)$

5. $\frac{x+7u}{x-7u}\cdot(x^2-49u^2)$

6. $\frac{m+n}{7m}\cdot\frac{5m}{2m-2n}$

7. $\frac{a}{a-b}\cdot\frac{a^2-b^2}{4ab}$

8. $\frac{m}{n-1}\cdot\frac{n^2-2n+1}{m+mn}$

9. $\frac{4ax-4x}{a+1}\cdot\frac{1}{4(a-1)}$

10. $\frac{x^2-u^2}{2a+2b}\cdot\frac{a+b}{3x+3u}$

30. Teostada järgmised korrutamised:

1. $\frac{x+a}{x-a}\cdot\frac{3a}{x^2-a^2}$

2. $\frac{x^2-1}{4}\cdot\frac{12}{x-1}$

3. $\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{5x}{x^2-1}$

4. $\frac{2}{3(z+2)}\cdot\frac{z^2-4}{8}$

5. $\frac{az-a^2}{2z}\cdot\frac{6z}{5a(z+1)}$

6. $\frac{9-z^2}{3z}\cdot\frac{z}{3+z}$

7. $\frac{u^2-4v^2}{8u}\cdot\frac{12u^2}{2u-4v}$

8. $\frac{s^2-3s}{7t}\cdot\frac{14t^2}{s^2-9}$

9. $\frac{4r^2+8r}{3r+9}\cdot\frac{15r+45}{14r^2+28r}$

10. $\frac{5p(p-q)}{3r(p+q)}\cdot\frac{3(p^2+q^2)}{5(p^2-q^2)}$

31. Teostada järgmised korrutamised:

1. $\frac{3a+3}{a^2+6a+9}\cdot\frac{6a+18}{a^2-1}$

2. $\frac{x^2+4x+4}{16b}\cdot\frac{24a}{x^2+5x+6}$

3. $\frac{5c^2-10bc}{x^2-5x-6}\cdot\frac{x^2-6x}{15c^2-60bc+60b^2}$

4. $\frac{(a+b)(m-n)}{a^2-9a+20}\cdot\frac{a^2-3a-4}{m^2-n^2}$

5. $\frac{3u-15}{2u+8}\cdot\frac{u^2+9u+8}{u^2+3u-40}$

6. $\frac{a}{a-b}\cdot\left(-\frac{b-a}{c}\right)$

7. $-\frac{ab+ac}{cd-bd}\cdot\frac{ab-ac}{bd+cd}$

8. $\frac{ad-ab}{bc+cd}\cdot\frac{ab+ad}{bc-cd}$

32. Teostada järgmised korrutamised:

1. $\left(\frac{a}{3}+\frac{4}{b}\right)\cdot\frac{3b}{4a}$

2. $\left(\frac{2x}{7y}-\frac{3y}{5x}\right)\cdot\left(\frac{35x^2}{6y^2}\right)$

3. $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)\cdot\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)$

4. $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{4}\right)\cdot\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{5}\right)$

5. $\left(\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-1}{a+1}\right)\cdot(a^2-1)$

6. $\left(\frac{a-3}{a+3}+\frac{a+3}{a-3}\right)\cdot(a^2-9)$

§ 9. Murdude jagamine.

Ülesanne 1. Teostada jagamine:

$$\frac{3a+2}{2}:(9a^2-4).$$

Lahendus. Korrutades murru nimetaja täisavaldisega, saame

$$\frac{3a+2}{2}:(9a^2-4)=\frac{3a+2}{2(9a^2-4)}=\frac{3a+2}{2(3a+2)(3a-2)}=\frac{1}{2(3a-2)}.$$

Ülesanne 2. Teostada jagamine:

$$(a+x)^2 : \frac{2a+2x}{6}.$$

Korrutades täisavaldise murru pöördväärtusega, saame:

$$(a+x)^2 : \frac{2a+2x}{6} = \frac{6 \cdot (a+x)^2}{2a+2x} = \frac{6(a+x)^2}{2(a+x)} =$$
$$= \frac{3(a+x)}{1} = 3(a+x).$$

Ülesanne 3. Teostada jagamine:

$$\frac{a^2-a-6}{x} : \frac{a+2}{x^2-x}.$$

Lahendus. Esimese murru lugeja tegureiks lahutamisel saame:

$$a^2-a-6 = a^2-3a+2a-6 = (a^2-3a)+(2a-6) =$$
$$= a(a-3)+2(a-3) = (a-3)(a+2).$$

Teise nimetaja saab tegureiks lahutada:

$$x^2-x = x(x-1).$$

Korrutades nüüd esimese murru teise murru pöördväärtusega ning taandades, saame:

$$\frac{a^2-a-6}{x} : \frac{a+2}{x^2-x} = \frac{(a-3)(a+2) \cdot x(x-1)}{x(a+2)} =$$
$$= \frac{(a-3)(x-1)}{1} = (a-3)(x-1).$$

Ülesanne 4. Lihtsustada järgmine, tähega x tähistatud avaldis:

$$x = \frac{n + \frac{2n-1}{n-2}}{n + \frac{n}{n-2}}.$$

L a h e n d u s. Lugeja teisendamine annab:

$$n+\frac{2n-1}{n-2}=\frac{n(n-2)+2n-1}{n-2}=\frac{n^2-2n+2n-1}{n-2}=\frac{n^2-1}{n-2}=$$
$$=\frac{(n+1)(n-1)}{n-2}.$$

Nimetaja teisendamisel saame:

$$n+\frac{n}{n-2}=\frac{n(n-2)+n}{n-2}=\frac{n^2-2n+n}{n-2}=\frac{n^2-n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{n-2}.$$

Seega

$$x=\frac{(n+1)(n-1)}{n-2}:\frac{n(n-1)}{n-2}=\frac{n+1}{n}.$$

T e i n e l a h e n d u s v i i s. Korrutades antud murru lugeja ja nimetaja ühe ning sama avaldisega, nimelt avaldisega $n-2$, saame:

$$x=\frac{n+\frac{2n-1}{n-2}}{n+\frac{n}{n-2}}=\frac{n^2-2n+2n-1}{n^2-2n+n}=$$
$$=\frac{n^2-1}{n^2-n}=\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-1)}=\frac{n+1}{n}.$$

Ülesanded.

33. Teostada järgmised jagamised:

1. $\frac{39}{67}:\frac{52}{134}$
2. $\frac{22}{35}:\frac{33}{70}$
3. $26:\frac{13}{15}$
4. $7:\frac{14}{15}$
5. $\frac{15}{16}:5$
6. $-\frac{5}{8}:15$
7. $\frac{a^2}{b^2}:\frac{b}{a}$
8. $-\frac{2x}{3y}:\left(-\frac{2y}{3x}\right)$.
9. $\frac{6a^2}{25b^2}:\frac{3a}{5b}$
10. $\frac{8m^2n}{15k}:\frac{2mn^2}{3k}$

34. Teostada järgmised jagamised:

1. $\frac{a+b}{c} : (a+b)$
2. $\frac{4n(p-q)}{p} : (p-q)$
3. $\frac{x^2-c^2}{7c} : (x+c)$
4. $\frac{m^2-mn}{6} : (3m-3n)$
5. $\frac{5a+1}{3} : (25a^2-1)$
6. $c^2 : \frac{-c^3}{a+b}$
7. $(2p+2q) : \frac{p+q}{5a}$
8. $(x+2y) : \left(-\frac{x+2y}{4n}\right)$
9. $(a-m)^2 : \frac{3a-3m}{8}$
10. $(14m-7) : \frac{4m^2-1}{9}$

35. Teostada järgmised jagamised:

1. $\frac{x^2-ax}{4a} : \frac{x}{8a^2}$
2. $\frac{2x-4}{5a} : \frac{x-2}{15a^2}$
3. $\frac{a^2-x^2}{ax} : \frac{a+x}{a^2x^2}$
4. $\frac{(m+n)^2}{4m-4n} : \frac{6m+6n}{m-n}$
5. $\frac{p^2+pq}{rx+sx} : \frac{p^3+p^2q}{rx^3+sx^3}$
6. $\frac{a+b}{a-b} : \frac{b+a}{b-a}$
7. $\frac{105f^2}{gh-1} : \frac{84fg}{1-gh}$
8. $\left(\frac{Q}{2}-\frac{2}{Q}\right) : \frac{Q+2}{4Q}$
9. $\frac{m^2-m-12}{a^2} : \frac{m-4}{a^2-a}$
10. $\frac{u^2-19u+90}{u^2-1} : \frac{u-10}{u+1}$
11. $\left(R^2-2+\frac{1}{R^2}\right) : 3\left(R-\frac{1}{R}\right)$
12. $-\frac{2a}{x-2} : \frac{4}{2-x}$

36. Teisendada järgmised avaldised nõnda, et neid oleks võimalik kirjutada üheainsa murrujoonega või murrujooneta:

1. $\frac{x+\frac{x}{2}}{x-\frac{x}{2}}$
2. $\frac{a+\frac{1}{3}}{x-\frac{1}{2}}$
3. $\frac{1+c}{1+\frac{1}{c}}$
4. $\frac{1-\frac{b}{a}}{a+b}$
5. $\frac{x+\frac{1}{2}y}{x-\frac{1}{3}y}-1$
6. $\frac{\frac{t}{r}}{q-\frac{t}{r}}$

7. $\dfrac{1-\dfrac{p}{q}}{\dfrac{q-p}{r}}$

10. $\dfrac{a+\dfrac{5}{6}b}{a-\dfrac{4}{9}b}-1$

13. $\dfrac{1-\dfrac{a}{z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$

8. $\dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}$

11. $\dfrac{1+\dfrac{1}{m-1}}{1-\dfrac{1}{m+1}}$

14. $\dfrac{\dfrac{a^2-4b^2}{27}}{a-2b}$

9. $\dfrac{\dfrac{m}{n}-\dfrac{p}{q}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{q}}$

12. $\dfrac{\dfrac{5m}{2n}}{\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{4}}$

15. $\dfrac{\dfrac{1}{c^3}-c}{c+1}+c$

§ 10. Murru astendamine.

Murru astendamisel mingi positiivse täisarvuga astendame selle arvuga murru lugeja ja nimetaja ning esimese tulemuse jagame teisega,

sest astme definitsioonist ja murdude korrutamise juhisest järeldub, et

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b\cdot b}=\frac{a^4}{b^4}.$$

Kui astendatav murd on taandumatu, siis on ka selle murru aste taandumatu murd.

Põhjendus. Kui antud murd on taandumatu, siis tähendab see seda, et tema lugejal ja nimetajal ei ole ühiseid tegureid; sellest järeldub, et selle murru astme lugeja ja nimetaja on samuti ühistegurita arvud, sest astme lugejaks on korrutis, milles iga tegur on võrdne antud murru lugejaga, astme nimetaja iga tegur on aga võrdne antud murru nimetajaga.

Sellest, et taandumatu murru aste on taandumatu murd, järeldame omakorda, et ühegi lihtmurru ega ühegi taandumatu liigmurru aste ei saa olla täisarv.

Näiteid.

1. $\left(2\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}=15\frac{5}{8}$.

2. $\left(\frac{2a^2}{3b^3}\right)^4=\frac{(2a^2)^4}{(3b^3)^4}=\frac{16a^8}{81b^{12}}$.

3. $\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b^2}{a}\right)^2=\left(\frac{a^2}{ab^2}+\frac{b^4}{ab^2}\right)^2=\left(\frac{a^2+b^4}{ab^2}\right)^2=\frac{a^4+2a^2b^4+b^8}{a^2b^4}$.

Ülesanded.

37. Teostada järgmised astendamised:

1. $\left(1\frac{1}{2}\right)^4$
2. $\left(3\frac{1}{8}\right)^3$
3. $\left(1\frac{1}{2}b\right)^2$
4. $\left(\frac{3}{4}y\right)^3$
5. $\left(-\frac{a^3}{b^2}\right)^4$
6. $\left(\frac{a^5}{b^7}\right)^6$
7. $\left(\frac{2a^4}{3b^3}\right)^2$
8. $\left(\frac{5a^3}{6b^2}\right)^4$
9. $\left(-\frac{a^7b}{c^2d^3}\right)^3$
10. $\left(\frac{mx^2}{ny^3}\right)^2$
11. $\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)^2$
12. $\left(\frac{m^3}{n^3}-\frac{n^3}{m^3}\right)^2$
13. $\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right)^2$
14. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$
15. $\left(\frac{3a+b}{a-b}\right)^2$

38. Lihtsustada järgmised avaldised:

1. $\left(1+a-\frac{a^2+3}{a+1}\right)\cdot\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}a\right)^2\right]$

2. $\left[\frac{a^2+ax}{2x}:(a^2-x^2)\right]\cdot\left[\frac{(a+x)^2}{4ax}-1\right]$

3. $\left(\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{4}-\frac{1}{4a}\right)$

4. $\left[\frac{a-x}{ax}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)\right]:\left[\frac{a^2+x^2}{ax}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)\right]$

5. $\left(a-2+\frac{1}{a}\right):\left(a^2-a-1+\frac{1}{a}\right)$

6. $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}+\frac{\frac{2}{ab}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}$

7. $\frac{a(a-b)-b(a+b)}{\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}}$

§ 11. Murdarvuliste kordajatega lineaarvõrrandid.

Murdarvuliste kordajatega lineaarvõrrandi lahendamisel toimime järgmiselt:

1. **korrutame kõik võrrandi liikmed võrrandis esinevate murdude ühise nimetajaga;**
2. **avame sulud, kui on sulgavaldisi, ja koondame, kui on sarnaseid liikmeid;**
3. **toome kõik otsitavaga liikmed võrrandi ühele poolele, kõik otsitavast vabad liikmed teisele poolele ja koondame;**
4. **kui otsitava kordaja nüüd ei ole 1, siis jagame võrrandi mõlemad pooled selle kordajaga.**

Leitud lahendi kontrollimiseks arvutame algvõrrandi vasaku poole väärtuse asetades otsitava asemele leitud arvu, samuti toimime võrrandi parema poolega ja võrdleme tulemusi: kui tulemused on võrdsed, siis leitud lahend on õige.

Murdarvuliste kordajatega lineaarvõrrand-süsteemi lahendamisel lihtsustame võrrandid, nagu juhatatud eespool antud juhise punktides 1, 2 ja 3, ning lahendame edasi kas liitmisvõtte või asetusvõtte abil.

Ü l e s a n n e 1. Lahendada võrrand:

$$\frac{7x+18}{3}-\frac{2}{5}(x+3)=\frac{3(x+2)}{2}+2\frac{2}{3}.$$

L a h e n d u s. Ühine nimetaja on 30.

$$\overset{10}{\frac{7x+18}{3}}-\overset{6}{\frac{2(x+3)}{5}}=\overset{15}{\frac{3(x+2)}{2}}+\overset{10}{\frac{8}{3}}$$

$$70x+180-12x-36=45x+90+80$$

$$58x+144=45x+170$$

$$58x-45x=170-144$$

$$13x=26$$

$$x=2.$$

Kontroll.

$$\frac{7\cdot 2+18}{3}-\frac{2}{5}(2+3)=\frac{14+18}{3}-2=\frac{32}{3}-2=8\tfrac{2}{3};$$

$$\frac{3\cdot 2+2}{2}+2\tfrac{2}{3}=\frac{3\cdot 4}{2}+2\tfrac{2}{3}=6+2\tfrac{2}{3}=8\tfrac{2}{3}.$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} \dfrac{2x+7}{9}-\dfrac{11y-8}{4}=5 \\[2ex] \dfrac{5x-2}{6}+\dfrac{5y-8}{4}=6 \end{cases}$$

Lahendus. Lihtsustame esimese võrrandi. Ühine nimetaja on siin 36; korrutame sellega kõik liikmed. Siinjuures peame silmas, et murrukriips asendab sulgusid, seega siis **murrukriipsu ärajätmisel, mille ees seisab märk miinus, tuleb murru lugejas esinevad märgid muuta vastupidisteks.**

Saame:

$$\frac{\overset{\overset{4}{\smile}}{2x+7}}{9}-\frac{\overset{\overset{9}{\smile}}{11y-8}}{4}=\overset{\overset{36}{\smile}}{5}$$

$$8x+28-99y+72=180$$

$$8x-99y+100=180$$

$$8x-99y=80.$$

Teisendame nüüd teise võrrandi. Korrutades siin iga liiget ühise nimetajaga 12, saame:

$$\frac{\overset{\overset{2}{\smile}}{5x-2}}{6}+\frac{\overset{\overset{3}{\smile}}{5y-8}}{4}=\overset{\overset{12}{\smile}}{6}$$

$$10x-4+15y-24=72$$

$$10x+15y-28=72$$

$$10x+15y=100$$

$$2x+3y=20.$$

Nüüd lahendame võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} 8x - 99y = 80 \\ 2x + 3y = 20. \end{cases}$$

Kasutame liitmisvõtet.

$$\begin{array}{r|c|r} 8x - 99y = 80 & 1 & 8x - 99y = 80 \\ 2x + 3y = 20 & 33 & 66x + 99y = 660 \\ \hline & & 74x = 740 \\ & & x = 10 \end{array}$$

Saime lahendi:

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 0. \end{cases}$$

Kontroll. Esimese võrrandi vasak pool annab:

$$\frac{2 \cdot 10 + 7}{9} - \frac{11 \cdot 0 - 8}{4} = \frac{27}{9} + \frac{8}{4} = 3 + 2 = 5.$$

Teise võrrandi vasaku poole väärtus on:

$$\frac{5 : 10 - 2}{6} + \frac{5 \cdot 0 - 8}{4} = \frac{48}{6} - \frac{8}{4} = 8 - 2 = 6.$$

Näeme, et lahend on õige.

Ülesanded.

39. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 1$
2. $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 23$
3. $\frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 19$
4. $2 = \frac{2x}{5} - \frac{x}{5}$
5. $2x + \frac{3}{4} = 3x + \frac{7}{8}$
6. $2\frac{1}{2} + \frac{5x}{3} = 0$
7. $\frac{x}{6} + \frac{x}{7} = \frac{x}{8}$
8. $\frac{2x}{x} - \frac{4x}{9} = 31 - \frac{3}{2}x$
9. $\frac{x}{2} - 1\frac{1}{2} = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$
10. $\frac{3x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{1}{3} = x - 2$

40. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{4}x - 1$

2. $1 - \frac{x}{3} = x - \frac{5}{3}$

3. $\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} - \frac{4x}{5} = 6\frac{1}{2}$

4. $1 - \frac{x}{2} = \frac{3}{4}(x + 3)$

5. $\frac{2}{3}\left(\frac{3x}{4} + \frac{5}{6}\right) = \frac{13}{18}$

6. $5 + \frac{3}{5}(3x - 5) = -\frac{2}{3}(2x - 3)$

7. $x + \frac{x+2}{3} = 5 + \frac{x+3}{2}$

8. $\frac{1-x}{2} + \frac{1-2x}{3} = \frac{1-3x}{4}$

9. $\frac{2x+1}{4} + \frac{4x}{5} = x + 2\frac{1}{2}$

10. $\frac{x-2}{2} - \frac{x-4}{4} = \frac{x-8}{8}$

11. $\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{6}\right)(x + 3)$

12. $2 + \frac{x-1}{2} = 10 - \frac{3x-1}{5}$

13. $(x + 4)(x - 4) = (x - 2)^2$

14. $(1 + x)^3 = x(3x + x^2) + 10$

15. $\frac{3x-1}{4} + \frac{4x-3}{6} + \frac{5x-7}{28} + 1 = 0$

41. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{3} - 1$

2. $\frac{x}{3} - \frac{1}{6} = \frac{x}{5} - \frac{1}{4}$

3. $1 + \frac{x}{2} = 3 - \left(1 - \frac{x}{3}\right)$

4. $4 + \frac{x-4}{5} = 5 + \frac{x-5}{4}$

5. $\frac{x-3}{6}=\frac{1}{2}-\frac{x}{3}$

6. $\frac{3}{4}(2-3x)=\frac{2}{5}(1-7x)$

7. $\frac{5}{2}(3x-1)=3(2x-1)$

8. $\frac{1}{6}(x-0{,}3)=\frac{1}{9}(2x+0{,}1)$

9. $4-\frac{1}{4}(1-x)=\frac{3}{8}(5-x)$

10. $\frac{2}{3}(2x+1)=\frac{3}{4}(2x-1)+1\frac{1}{2}$

42. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $2(4x+3)-\frac{3}{4}(8x+1)=4$

2. $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{2}{3}(x+2)=\frac{3}{4}(x+3)$

3. $\frac{3}{2}(x-1)=\frac{1}{4}(5x-3)$

4. $\frac{1}{5}(3x-4)=\frac{1}{7}(5x-6)$

5. $\frac{1}{2}(3-x)=1\frac{1}{4}-\frac{3}{8}(1-x)$

6. $\frac{2x-3}{5}=\frac{x}{4}$

7. $\frac{x-2}{3}=\frac{x-3}{2}$

8. $\frac{3x+2}{4}=\frac{5x-2}{6}+1$

9. $\frac{2x+3}{2}-3=\frac{4x-5}{3}$

10. $\frac{x}{3}-\frac{x-7}{4}=\frac{x}{5}$

11. $\frac{3x}{4}-\frac{x-4}{5}=1\frac{4}{5}-\frac{x+6}{6}$

12. $\frac{3x-2}{4}=\frac{5x}{21}-\frac{9(8-3x)}{35}$

13. $\frac{x}{5}+\frac{5(3x-1)}{6}=\frac{40x-11}{15}$

14. $\frac{10x-1}{3}-\frac{x}{2}-\frac{8(x+4)}{9}=0$

15. $\frac{5x-1}{3}-\frac{x}{3}=\frac{4(x+8)}{9}$

43. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=3 \\ x-y=9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{y}{4}-\frac{x}{3}=1\frac{1}{2} \\ y-\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=3\frac{3}{4} \\ \frac{x}{3}+y=10\frac{2}{3} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=14\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y-\frac{2}{3}x=5\frac{2}{3} \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{3x-y}{2}+x=y \\ \frac{x+3y}{3}-y=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{x+7}{2}+y=9 \\ \frac{y+15}{3}+x=11 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{1-2x}{3}+4y=13 \\ x+\frac{5+8y}{5}=1 \end{cases}$

44. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} \frac{h+5}{8}-\frac{k+4}{11}=0 \\ 3(h-1)+2(k+4)=28 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{3m+5}{7}=\frac{2m+n}{5} \\ 2(2-m)+3(n+7)=20 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{2p-3q}{4}=\frac{5p-8q}{4} \\ 3(p-q)-2(2p-3q)=1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{2x}{3}+\frac{5y}{6}=3 \\ 3(x-1)+y+3=7 \end{cases}$

45. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} \dfrac{3x+y-8}{4}=4 \\ \dfrac{5x-3y-5}{3}=7 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{7x+3y-2}{51}=2 \\ \dfrac{9x-5y+6}{20}=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}+\dfrac{5y+1}{4}=5\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3x+7}{4}+\dfrac{2y+9}{3}=7\dfrac{2}{3} \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dfrac{2x+5}{5}+\dfrac{3y+1}{7}=5\dfrac{1}{7} \\ \dfrac{3x-2}{7}+\dfrac{2y-3}{5}=3\dfrac{2}{5} \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{2x+3y-1}{5}+\dfrac{3x-y+8}{4}=4 \\ \dfrac{5x-y+1}{3}+\dfrac{x+2y+3}{5}=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{7x-y+2}{2}-\dfrac{3x+9y-1}{5}=7 \\ \dfrac{9x+2y+3}{3}+\dfrac{5x-y+14}{8}=10 \end{cases}$

§ 12. Võrrandid otsitavaga nimetajas.

Mõned võrrandid otsitavaga nimetajas taanduvad teisendamisel lineaarseiks võrrandeiks, kuid nende lahendamisel võib mõnikord esineda iseärasusi. Üks iseärasus on see, et mõne niisuguse võrrandi teisendamisel jõuame võrrandini, millel ei ole lahendit. Niisugusel juhul ei saa ka esialgsel võrrandil olla lahendit.

Ka võib juhtuda, et võrrandi teisendamisel jõuame niisuguse võrrandini, millel küll on lahend, kuid kontrollimisel selgub, et see lahend ei rahulda esialgset võrrandit; siis jällegi esialgsel võrrandil lahendit ei ole.

Nende iseärasuste tõttu, mis võrrandi lahendamisel otsitavaga nimetajas esineda võivad, peabki selliste võrrandite lahendeid tingimata kontrollima.

Ülesanne 1. Lahendada võrrand

$$\frac{x+1}{3x-7}=\frac{3x-8}{3(3x+4)}.$$

Lahendus. Võrde põhiomadus annab:

$$3(3x+4)(x+1)=(3x-7)(3x-8),$$

millest peale sulgude avamist saame

$$9x^2+21x+12=9x^2-45x+56$$

ehk koondades

$$66x=44,$$

seega

$$x=\frac{44}{66}=\frac{2}{3}.$$

Kontroll. Asetades leitud väärtuse x-i asemele lähtevõrrandisse, saame võrrandi vasakul poolel

$$\frac{\frac{2}{3}+1}{3\cdot\frac{2}{3}-7}=\frac{\frac{5}{3}}{-5}=-\frac{1}{3}$$

ja võrrandi paremal poolel

$$\frac{3\cdot\frac{2}{3}-8}{3\left(3\cdot\frac{2}{3}+4\right)}=\frac{2-8}{3(2+4)}=\frac{-6}{3\cdot 6}=-\frac{1}{3},$$

seega leitud x-i väärtus tõesti rahuldab võrrandit.

Ülesanne 2. Lahendada võrrand

$$\frac{4x+5}{7x-8}=\frac{4}{7}.$$

Lahendus. Võrde põhiomadus annab

$$7(4x+5)=4(7x-8);$$

sulgusid avades saame

$$28x+35=28x-32.$$

Lahutades võrduse kummastki poolest $28x$ näeme, et arv **35** peaks olema võrdne arvuga -32, mis on võimatu. Selles võrrandis peituv nõue pole rahuldatav, võrrandil pole lahendit.

Järelikult ka esialgsel võrrandil pole lahendit, niisiis ei saa olla niisugust arvu x, et murru $\frac{4x+5}{7x-8}$ väärtus tuleks $\frac{4}{7}$.

Ülesanne 3. Lahendada võrrand

$$\frac{4}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}.$$

Lahendus. Ühine nimetaja on x^2-1, vastavad laiendajad on $x-1$ ja $x+1$.

Niisiis

$$\frac{\overset{x-1}{\overbrace{4}}}{x+1}+\frac{\overset{x+1}{\overbrace{1}}}{x-1}=\frac{\overset{1}{\overbrace{2}}}{x^2-1}$$

$$4x-4+x+1=2$$

$$5x-3=2$$

$$5x=5$$

$$x=1.$$

Kontroll. Asetades leitud x-i väärtuse algvõrrandi vasakusse poolde, saame:

$$\frac{4}{2}+\frac{1}{0}.$$

Et nulliga ei saa jagada, siis puudub saadud avaldisel arvu tähendus; järelikult ta ei saa millegagi võrduda, mistõttu on täitsa ükskõik, kui suur tuleb võrrandi parema poole väärtus, kui $x = 1$. On selge, et arv 1 ei rahulda algvõrrandit. Sel võrrandil ei ole lahendit.

Ülesanne 4. Lahendada võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 1{,}5 \end{cases}$$

Lahendus. Rakendame nn. abiotsitavate võtet. Kirjutame antud võrrandid niisugusel kujul:

$$\begin{cases} 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{y} = 3 \\ 6 \cdot \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{y} = 1{,}5 \end{cases}$$

Märgime murrud $\frac{1}{x}$ ja $\frac{1}{y}$ vastavalt tähtedega u ja v, nii et

$$\frac{1}{x} = u \text{ ja } \frac{1}{y} = v.$$

Meie abiotsitavateks on u ja v.

Nüüd saame:

$$\begin{array}{l|r|rl} 3u + 2v = 3 & -2 & -6u - 4v = & -6 \\ 6u - 5v = 1{,}5 & 1 & 6u - 5v = & 1{,}5 \\ \hline & & -9v = & -4{,}5 \\ & & v = & 0{,}5. \end{array}$$

Järelikult

$$3u + 2 \cdot 0{,}5 = 3$$

$$u = \frac{2}{3}$$

Et $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$,

siis $\begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = 2 \end{cases}$

46. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{x+7}{12}=\frac{3}{4}$

2. $\frac{x-5}{16}=\frac{3}{8}$

3. $\frac{2y-9}{y+1}=\frac{5}{8}$

4. $\frac{5u+3}{7u-9}=\frac{8}{9}$

5. $\frac{8x+5}{2x-1}=5$

6. $\frac{7x+8}{2}=\frac{14x+5}{3}$

7. $\frac{4x-2}{6}=\frac{5x+8}{4}$

8. $\frac{16x-7}{15}=\frac{13x-7}{12}$

9. $\frac{10x-6}{9}=\frac{7x-27}{12}$

10. $\frac{5x+8}{4}=\frac{11x-2}{6}$

11. $\frac{4x-7}{6x+18}=\frac{7x+2}{10x+30}-\frac{11}{45}$

12. $\frac{4}{x+2}+\frac{2}{x-2}=\frac{5x+2}{x^2-4}$

13. $\frac{2}{x+2}+\frac{5}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$

14. $\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x-1}=\frac{2}{1-4x^2}$

15. $\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1+2x}=\frac{2}{1-4x^2}$

47. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{59}{5x-3}-\frac{23}{x+3}=0$

2. $\frac{41}{x-7}-\frac{92}{3x-4}=0$

3. $\frac{1}{x}+\frac{2x+5}{x+6}=2$

4. $\frac{1}{x-5}+\frac{2x-3}{x+2}=2$

5. $\frac{17}{x-3}-\frac{5-x}{22+x}=1$

6. $\frac{3x+2}{4x-1}=\frac{3}{4}$

7. $\frac{4x-5}{3x+2}-\frac{5x+1}{5x-1}=\frac{1}{3}$

8. $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}=\frac{20}{4x-7}$

9. $\frac{8}{x-13}+\frac{15}{3x-16}=\frac{13}{x-8}$

10. $\frac{1}{2x-3}+\frac{17}{6x+4}=\frac{10}{3x-6}$

11. $\frac{1}{x-5}-\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x}=0$

12. $\frac{x-1}{2x-1}-\frac{1}{2}=0$

48. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=25 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=26 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=7 \\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{5}{y}=-3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{10}{x}+\dfrac{9}{y}=8 \\ \dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{y}=5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{6}{x}-\dfrac{5}{y}-8=0 \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}-27=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{2}{3x}+\dfrac{1}{2y}=3 \\ \dfrac{5}{6x}-\dfrac{3}{4y}=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{18}{3x-2y}+\dfrac{11}{2x-3y}=13 \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{y-5}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{y-5}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+3}+\dfrac{9}{y+2}=5 \\ \dfrac{4}{x+3}-\dfrac{9}{y+2}=-1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{y+1}=1 \\ \dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{y+1}=5 \end{cases}$

§ 13. Lineaarvõrrandite abil lahenduvaid ülesandeid.

Näide. Vann täitub külma vee kraanist 20 minutiga. Kui aga külma ja sooja vee kraanid mõlemad on lahti, siis saab vann 12 minutiga täis. Mitme minutiga täitub vann, kui sooja vee kraan on üksi avatud?

L a h e n d u s.

Oletame, et sooja vee kraani kaudu täitub vann x minutiga.

Siis ühe minutiga sooja vee kraani kaudu täitub $\frac{1}{x}$ vannist,

külma „ „ „ „ $\frac{1}{20}$ „

mõlemate kraanide „ „ $\frac{1}{x}+\frac{1}{20}$ „

Ülesande andmeist aga järeldub, et mõlema kraani kaudu koos täitub ühe minutiga $\frac{1}{12}$ vannist, seega võime kirjutada võrrandi

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{20}=\frac{1}{12}.$$

Lahendame selle. Ühine nimetaja on $60x$, sellega iga liiget korrutades saame

$$60+3x=5x$$
$$2x=60$$
$$x=30.$$

K o n t r o l l: $\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{2+3}{60}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}.$

V a s t u s: Kui sooja vee kraan on üksi avatud, siis täitub vann 30 minutiga.

Ülesanded.

49. Tühjalt kaalus võianum $\frac{3}{4}$ kg, täidetult aga 5 korda niipalju. Mitu kilogrammi oli nõus võid?

50. Kui päriti Pythagoras'elt, mitu õpilast tal on, siis vastas ta: „Pool minu õpilastest uurib matemaatikat, neljandik loodus-lugu, seitsmes osa õpib vaikimist ning peale nende on mul veel 3 päris väikest poissi." Mitu õpilast tal oli? (S c h w e n t e r, a. 1636.)

51. 3 sõpra on võitnud teatava summa raha; esimene saab $\frac{1}{4}$ sellest, teine $\frac{1}{7}$, kolmas saab 17 kuldnat, mis järele jäid. Kui palju nad võitsid? (R i e s e, a. 1524.)

52. Demochares elas $\frac{1}{4}$ oma elueast poisikesena, $\frac{1}{5}$ noormehena, $\frac{1}{3}$ täisealise mehena ja puhkas 13 aastat oma tööst. Kui vanaks ta sai? (M e t r o d o r u s, a. 300 ümber.)

53. Veduri ratta ümbermõõt on 4 meetrit ja vaguni ratta ümbermõõt on 3 meetrit. Kui pikal teel teeb vaguni ratas 5000 pööret rohkem kui veduri ratas?

54. Poiss palgati 1. maist 10. septembrini maale karjaseks järgmise tasu eest: prii ülalpidamine, 600 rubla ja ühe ülikonna riie. Tervislikel põhjusil pidi poiss lahkuma kohalt 10. augustil ja sai tasuks lubatud ülikonnariide ja 300 rubla. Kui kallilt hinnati ülikond?

55. Samal ajal kui alevikust sõitis omnibus linna kiirusega 30 km tunnis, sõitis samasse linna talust, mis asetseb sama tee ääres 10 km linna poole, jalgrattur kiirusega 12 km tunnis. Kui kaugel alevikust jõudis omnibus jalgratturile järele?

56. Ehitatakse uus telefoniliin linnast alevikuni. Kui postid üles seada 50-meetrise vahega, siis tuleb valmismuretsetud postidest 60 tükki puudu; kui aga postide vahemaad suurendada 10 meetri võrra, siis jääb 80 posti üle. Kui kaugel asetseb alevik linnast?

57. Jääkelder tuleb jääga täita. Üks tööliste paar lubas selle töö teha 6 päevaga. Tööle võeti aga veel teine tööliste paar ja nüüd valmis töö 4 päevaga. Mitu päeva oleks kulunud tööks, kui oleks töötanud ainult teine tööliste paar?

58. Antud töö jõuab mees lõpetada 10, naine aga 15 päevaga. Tööle asusid 2 meest ja kahe päeva pärast veel 4 naist. Mitu päeva kulub töö lõpetamiseks?

59. Anum, mille põhjas on auk, täitub veega kraanist 8 minutiga. Täis anum jookseb põhjas oleva augu kaudu tühjaks 24 minutiga. Mitme minutiga täitub anum kraanist, kui auk anuma põhjas sulgeda?

60. Murru lugeja on nimetajast 7 võrra väiksem. Kui lugejat suurendada 10 võrra ja nimetajat suurendada 4 korda, siis murd taandub tulemuseks $\frac{1}{3}$. Leida murd.

61. Kui murru lugejat suurendada 2 korda ja nimetajat suurendada 5 võrra, siis saame murru $\frac{7}{8}$. Kui aga murru lugejat vähendada 1 võrra ja nimetajat suurendada 7 võrra, siis saame murru, mille väärtus on $\frac{1}{3}$. Missugune on see murd?

62. Pronks on vase ja inglistina sulam. Kui palju tuleb võtta vaske ja kui palju inglistina, et saada 17,4 g pronksi erikaaluga 8,7. Vase erikaal on 8,9 ja inglistina erikaal on 7,3.

63. Musiivkuld koosneb vasest ja tsingist. Kui palju tuleb võtta vaske erikaaluga 8,9 ja kui palju tsinki erikaaluga 7,1, et saada 124,5 g musiivkulda, mille erikaal on 8,3.

64. Leida arv, mille jagamisel 4-ga saame jäägi 1, aga ka jagamisel 5-ga saame jäägi 1, kusjuures esimene jagatis on teisest 4 võrra suurem.

65. Leida arv, mille jagamisel 5-ga saame jäägi 2, kuid jagamisel 8-ga saame jäägi 5, teades seejuures, et esimene jagatis on teisest 3 ühiku võrra suurem.

66. Missuguse ühe ja sama arvu võrra peab suurendama arvusid 2, 5, 22 ja 37, et saadud arvudest saaks moodustada võrde?

67. Missuguse ühe ja sama arvu võrra peab vähendama arvusid 6, 7, 36 ja 43, et saadud arvud oleksid proportsionaalsed?

68. Üks kilogramm kompvekke ja kolm tükki seepi maksab 15 rubla 60 kopikat. Kui kompvekkide hind tõuseks 25% ja seebi hind 10%, siis selle sama ostu eest tuleks maksta 18 rubla 96 kop. Kui palju maksab kg kompvekke ja kui palju tükk seepi?

69. Kui otsitav kahekohaline arv jagada samadest, kuid vastupidi järjestatud numbritest koosneva arvuga, siis jagatis on 1 ja jääk 9; kui aga otsitav arv jagada tema ristsummaga (numbrite summaga), siis on jagatis 5 ja jääk 11. Leida see kahekohaline arv.

§ 14. Täheliste kordajatega esimese astme võrrandid.

Olgu esitatud lahendamiseks järgmine ülesanne:

Avaldada trapetsi kõrgus h tema aluste a ja b ning pindala S kaudu.

Lahendamisel lähtume valemist

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Nüüd tuleb seda valemit vaadelda kui v õ r r a n d i t, milles a, b ja S on vastavates ühikutes antud suurused ja otsitavaks on suurus h, teisiti öeldes, see on t ä h e l i s t e k o r d a j a t e g a v õ r r a n d, mida antud juhul peame lahendama tähe h suhtes. Jagades võrrandi liikmed otsitava kordajaga, see tähendab avaldisega $\frac{a+b}{2}$, saame

$$h = S : \frac{a+b}{2} = \frac{2S}{a+b}.$$

Seega

$$h = \frac{2S}{a+b}.$$

Kui nõutakse eespool antud valemi järgi avaldada alus b, siis lahendame võrrandi

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

tähe b suhtes. Sel korral toimime järgmiselt.

Nimetaja kaotamiseks korrutame iga liikme 2-ga:

$$2S=(a+b)h;$$

avame sulud:

$$2S=ah+bh.$$

siit

$$bh=2S-ah$$

ja

$$b=\frac{2S-ah}{h}.$$

Seda mööda, kas võrrandi kordajad on tähelised või numbrilised, nimetame võrrandit vastavalt **täheliseks** või **numbriliseks võrrandiks**.

Ülesanne 1. Lahendada võrrand

$$\frac{n+x}{m}+\frac{m-x}{n}=2,$$

milles x on otsitav ning m ja n on antud arvud.

Lahendus. Vasakul poolel nõutud liitmist teostades saame

$$\frac{n(n+x)+m(m-x)}{mn}=2$$

ehk korrutamisaksioomi põhjal

$$n(n+x)+m(m-x)=2mn.$$

Sulgusid avades saame

$$n^2 + nx + m^2 - mx = 2mn$$

ehk

$$nx - mx = -n^2 + 2mn - m^2$$

ehk korrutades kumbagi poolt -1-ga

$$mx - nx = n^2 - 2mn + m^2$$

ehk kumbagi poolt tegureiks lahutades

$$(m - n)x = (n - m)^2;$$

jagades kummagi poole otsitava kordajaga, leiame:

$$x = \frac{(n-m)^2}{m-n} = \frac{(m-n)^2}{m-n}$$

ehk

$$x = m - n.$$

K o n t r o l l. Asetades leitud väärtuse x-i asemele antud võrrandi vasakusse poolde, leiame:

$$\frac{n + (m-n)}{m} + \frac{m - (m-n)}{n} = \frac{n + m - n}{m} + \frac{m - m + n}{n} =$$

$$= \frac{m}{m} + \frac{n}{n} = 1 + 1 = 2;$$

nagu peab olema.

Ü l e s a n n e 2. Lahendada võrrand

$$\frac{b}{4ax - a} - \frac{a(8x-1)}{4bx - b} = 2,$$

lugedes arvud a ja b andmeiks ja arvu x otsitavaks.

L a h e n d u s. Vasakul poolel seisvate murdude nimetajaid tegureiks lahutades saame

$$4ax - a = a(4x - 1) \quad \text{ja} \quad 4bx - b = b(4x - 1),$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$ab(4x - 1)$$

ja murdude laiendajad on vastavalt b ja a.

Saame

$$\frac{\overset{b}{\smile}\;b}{a(4x-1)}-\frac{\overset{a}{\smile}\;a(8x-1)}{b(4x-1)}=2\ \overbrace{}^{ab(4x-1)}$$

ehk korrutades avaldisega $ab(4x-1)$:

$$b^2-a^2(8x-1)=2ab(4x-1)$$

ehk sulgusid avades

$$b^2-8a^2x+a^2=8abx-2ab.$$

Siit

$$-8a^2x-8abx=-a^2-2ab-b^2$$

ehk korrutades kumbagi poolt -1-ga

$$8a^2x+8abx=a^2+2ab+b^2$$

ehk teisiti

$$8a(a+b)x=(a+b)^2;$$

jagades kumbagi poolt otsitava kordajaga, saame

$$x=\frac{a+b}{8a}.$$

K o n t r o l l. Asetades leitud väärtuse x-i asemele algvõrrandisse, leiame, et võrrandi esimene liige on

$$\frac{b}{4a\cdot\frac{a+b}{8a}-a}=\frac{b}{\frac{a+b}{2}-a}=\frac{2b}{a+b-2a}=\frac{2b}{b-a}.$$

Samuti leiame, et võrrandi teine liige on

$$\frac{a\left(8\cdot\frac{a+b}{8a}-1\right)}{4b\cdot\frac{a+b}{8a}-b}=\frac{a\left(\frac{a+b}{a}-1\right)}{b\cdot\frac{a+b}{2a}-b}=\frac{a+b-a}{\frac{b(a+b)-2ab}{2a}}=$$

$$=\frac{2ab}{ab+b^2-2ab}=\frac{2ab}{b^2-ab}=\frac{2ab}{b(b-a)}=\frac{2a}{b-a}.$$

Järelikult võrrandi vasak pool on

$$\frac{2b}{b-a}-\frac{2a}{b-a}=\frac{2b-2a}{b-a}=\frac{2(b-a)}{b-a}=2,$$

see tähendab, et lahend on õige.

Ülesanne 3. Missugusel x-i väärtusel on kehtiv järgmine võrre:

$$\frac{a-bx}{a+2b}=\frac{c-dx}{c+2d}?$$

Lahendus. Rakendades võrde põhiomadust, saame

$$(a-bx)(c+2d)=(a+2b)(c-dx).$$

Avame nüüd sulud:

$$ac+2ad-bcx-2bdx=ac-adx+2bc-2bdx.$$

Pärast võrrandi kummaski pooles esinevate samaste liikmete ac ja $-2bdx$ kaotamist saame

$$2ad-bcx=-adx+2bc.$$

Toome otsitavaga liikmed ühele, muud liikmed teisele poolele:

$$adx-bcx=2bc-2ad.$$

Võtame otsitava sulgude taha ja jagame kummagi poole otsitava kordajaga:

$$(ad-bc)x=2bc-2ad;$$

$$x=\frac{2bc-2ad}{ad-bc}.$$

Vaatame nüüd, kas saame leitud avaldist taandada. Lahutades lugeja tegureiks, näeme, et lugejas ja nimetajas saame võrdsed tegurid, kui nimetajas muudame märgid vastupidisteks, et murru väärtus seejuures ei muutuks, siis muudame ka murru märgi.

Nii saame:

$$x=\frac{2(bc-ad)}{ad-bc}=-\frac{2(bc-ad)}{bc-ad}=-2.$$

Kontroll. Asetame antud võrdes x-i asemele arvu -2; siis saame vasakul poolel

$$\frac{a-b\,.\,(-2)}{a+2b}=\frac{a+2b}{a+2b}=1$$

ja paremal poolel

$$\frac{c-d\cdot(-2)}{c+2d}=\frac{c+2d}{c+2d}=1,$$

järelikult lahend on õige.

Vastus. Antud võrre on kehtiv, kui $x=-2$.

Ülesanne 4. Kaks maalrit said maja värvimise eest tasu kokku a rubla. Esimene töötas p, teine q päeva. Mitu rubla peaks saama esimene ja mitu rubla teine maaler, eeldades, et mõlemad töötasid võrdvõimeliselt?

Lahendus. Oletame, et päevane teenistus on x rubla, siis sai esimene maaler px rubla, teine qx rubla. Kokku said nad a rubla, sellepärast kehtib võrrand

$$px+qx=a.$$

Siit

$$x(p+q)=a$$

$$x=\frac{a}{p+q}$$

Esimese maalri tasu rublades on $px=p\cdot\frac{a}{p+q}=\frac{ap}{p+q}$;

teise maalri tasu on $qx=q\cdot\frac{a}{p+q}=\frac{aq}{p+q}$.

Kontroll. Kokku said maalrid a rubla, seepärast saadud avaldiste summa peab olema a:

$$\frac{ap}{p+q}+\frac{aq}{p+q}=\frac{ap+aq}{p+q}=\frac{a(p+q)}{p+q}=a.$$

Õige.

Vastus. Esimene maaler peab saama $\frac{ap}{p+q}$ rubla, teine $\frac{aq}{p+q}$ rubla.

Kokkuvõttes:

täheliste kordajatega lineaarvõrrandi lahendamisel

1. **kui on murdusid, siis vabaneme murdudest, korrutades võrrandi kummagi poole liikmete ühisnimetajaga;**
2. **avame sulud ja, kui võimalik, koondame;**
3. **toome kõik otsitavaga liikmed ühele poolele ja kõik teised liikmed teisele poolele ja koondame, kui on sarnaseid liikmeid;**
4. **võtame otsitava sulgude taha ja jagame kummagi poole otsitava kordajaga;**
5. **kui võimalik, siis taandame leitud avaldise;**
6. **kontrollime vastust, asetades leitud avaldise otsitava asemele antud võrrandisse.**

Ülesanded.

70. Lahendada järgmised võrrandid x-i suhtes, teades, et a, b ja c on tuntud arvud.

1. $x+a=b$	2. $x+3b=5b$	3. $a-x=a+b$
$a+x=2a$	$x+3a=3a$	$4b-x=3b$
$x-b=a$	$x-5c=5c$	$5a-x=c-5a$
4. $x-a=12$	5. $x+a-b=a$	6. $n+x=3n-x$
$m-x=n$	$a-x=a-9$	$3x-a=2a$
$m-n+x=0$	$a+x=b-x$	$2x+s=4s-x$

71. Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $ax+bx=a-cx$
2. $(m-x)^2=(m+x)^2$
3. $(x-4a)^2=x(x+b)+b(7x+16b)$
4. $(x-b)(a+b)=(x+b)(a-b)$
5. $a(a-x)=b(b+x)$
6. $a(x-a)-b(x-2a)=b^2$
7. $x(a-x)-a^2=x(b-x)-b^2$

8. $a(a-x)=2ab-b(x+b)$

9. $2mx(mx-n)-2(mx-n)=mn(m+n)$

10. $(mx-n)(m+n)=(mx-nx+n)(m-n)$

72. Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $\frac{x}{a}=\frac{m}{n}$
2. $\frac{x}{c}+1=\frac{m}{n}$
3. $\frac{x}{a}+\frac{c}{b}=1$
4. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$
5. $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}$
6. $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}=c$
7. $\frac{1}{x-a}=\frac{2}{a}$
8. $\frac{x-a}{a}=\frac{c-b}{b}$
9. $\frac{x-a}{b}=\frac{x-b}{a}$
10. $\frac{a-x}{b}+\frac{b-x}{a}=2$

73. Lahendada järgmised võrrandid, lugedes tundmatuks tähte x:

1. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{1}{b}$
2. $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=0$
3. $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}-\frac{1}{ab}=1$
4. $\frac{x}{m}-2\frac{x}{n}=n^2-4m^2$
5. $a\cdot\frac{x}{b}-c\cdot\frac{x}{d}=1$
6. $ac\frac{x}{2}+c=bc\frac{x}{2}$
7. $np-\frac{nx}{3}=nq\cdot\frac{x}{3}$
8. $\frac{x}{p}+\frac{x}{q}+\frac{x}{r}=1$
9. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x}{c}=abc$
10. $x-\frac{x}{r}+\frac{x}{p}+\frac{x}{rp}=0$

74. Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $\frac{x-p}{q}=\frac{x-q}{p}$
2. $a(x+b)+b(x-a)=a+b$
3. $m(x+m)=n(n-x)$

4. $\frac{x}{p}+\frac{x}{q}=p+q$

5. $h(x-k)=h^2-kx$

6. $m(m-x)+n(n+x)=2mn$

7. $\frac{3x+2a}{2}=a+\frac{2x+5a}{3}$

8. $(p+1)(x+4)=(p+3)(x+2)$

9. $ax-\frac{b}{a}=1-bx$

10. $\frac{2}{3}(x-a)+\frac{3}{4}(x-2a)=\frac{5}{6}(x-4a)$

75. Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $\frac{m^2-x}{n}=\frac{n^2-x}{m}$

2. $\frac{n+x}{m}+\frac{m-x}{n}=2$

3. $\frac{x-h}{h+k}+\frac{x-k}{h-k}=1$

4. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=2$

5. $\frac{b+x}{a}=\frac{a-x}{b}$

6. $\frac{x}{m-n}+\frac{x}{m+n}=\frac{2mn}{m^2-n^2}$

7. $\frac{x-p}{q}+\frac{p-q}{p+q}=1$

8. $\frac{x+g}{f^2}+\frac{x}{fg}+\frac{x-f}{g^2}=0$

9. $\frac{ax-b}{a-b}=\frac{ax}{a+b}$

10. $\frac{x+a}{a+b}=\frac{x-a}{a-b}$

76. Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $\frac{ax+b}{c}-\frac{bx+c}{d}=1$

2. $\frac{a(a-x)}{b}-\frac{b(b+x)}{a}=2x$

3. $x-\frac{ax}{a+b}=\frac{ab}{a-b}-\frac{b^2x}{a^2-b^2}$

4. $\frac{ax-1}{bx}+\frac{bx-1}{ax}=2$

5. $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{m}{n}$

6. $\frac{x+a}{x}=\frac{x}{x-b}$

7. $\frac{a-x}{b-x}=\frac{x}{b+x}$

8. $\frac{a+x}{a-2x}=\frac{a-x}{a+2x}$

77. Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $\frac{x}{b^2}+\frac{x}{a^2}+\frac{x}{ab}=a^3-b^3$

2. $\frac{x}{ab^4}+\frac{3x}{a^2b^3}+\frac{3x}{a^3b^2}+\frac{x}{a^4b}=\frac{1}{b^4}-\frac{1}{a^4}$

3. $\frac{x}{c-d}-\frac{5c}{c+d}=\frac{2dx}{c^2-d^2}$

4. $\frac{a-x}{b-a}-\frac{x+a}{a+b}=\frac{2ax}{a^2-b^2}$

5. $\frac{6a+5b}{6a}-\frac{4bx}{3a^2}=1-\frac{bx}{a^2+ab}$

6. $\frac{x}{ab}+\frac{x}{ac}+\frac{x}{bc}-1=abc-(a+b+c)x$

7. $\frac{x+a}{a-b}+\frac{x-a}{a+b}=\frac{x+b}{a+b}+\frac{2(x-b)}{a-b}$.

8. $\frac{b}{a+x}-\frac{c}{a-x}=\frac{a(b-3c)}{2(a^2-x^2)}$

9. $\frac{x+b}{a+b}-\frac{x-b}{a-b}=\frac{b+x}{a^2+2ab+b^2}-\frac{x-b}{a^2-b^2}+\frac{2x}{a}$

10. $\frac{m\left(x+\frac{nr}{m}-r\right)}{nx}+\frac{n\left(x+\frac{mr}{n}-r\right)}{mx}=2$

78. Missuguse x-i väärtuse puhul on kehtivad järgmised võrded?

1. $\frac{x}{n}=\frac{c}{a}$

2. $\frac{2a}{x}=\frac{4}{5a}$

3. $\frac{a+x}{m}=\frac{a}{m}$

4. $\frac{5x-c}{f}=\frac{5-c}{f}$

5. $\frac{x+1}{a}=\frac{1}{a+b}$

6. $\frac{m+x}{x-nx}=\frac{n}{m}$

7. $\frac{x-p}{p+q}=\frac{x+p}{p-q}$

8. $\frac{2x-1}{g-h}=\frac{x}{2g+h}$

79. Missuguse x-i väärtuse juures on kehtivad järgmised võrded?

1. $\frac{a}{1-x}=\frac{b}{1+x}$
2. $\frac{m}{x-m}=\frac{n}{x+m}$
3. $\frac{p-q}{p-qx}=\frac{r-s}{r+sx}$
4. $\frac{x+p}{x-1}=\frac{x-p}{x+1}$
5. $\frac{mx+2m}{mx+2n}=\frac{mx-2m}{mx-2n}$
6. $\frac{ax-5b}{cx-5d}=\frac{ax+3d}{cx+3d}$

80. Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

1. $\frac{x}{x+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$
2. $\frac{1}{\frac{x}{a}-\frac{x}{b}}=\frac{1}{1}$
3. $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}$
4. $\frac{\frac{1}{ax-n}}{ax+n}=\frac{\frac{1}{cx+n}}{cx-n}$
5. $\frac{\frac{a+x}{b+x}}{a+b}=\frac{\frac{a-x}{b+x}}{a+b}$
6. $\frac{1-\frac{x+a}{x-b}}{1-\frac{x-a}{x+b}}=\frac{1}{1}$

81. Avaldada järgmistest valemitest suurused, mis sulgudes märgitud:

1. $S=ab$ $[b]$
2. $S=\frac{1}{2}ah$ $[h]$
3. $C=2\pi r$ $[r]$
4. $S=2\pi rh$ $[r]$
5. $V=\pi r^2h$ $[h]$
6. $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ $[h]$
7. $H=\pi-\frac{h}{n}$ $[n]$
8. $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$ $[a]$
9. $J=\frac{nE}{R+nr}$ $[n]$
10. $\frac{1}{f}+\frac{1}{a}=\frac{2}{k}$ $[f]$

82. Avaldada järgmistest valemitest suurused, mis sulgudes märgitud:

1. $M = \frac{a}{b+N}$ [N]

2. $H = K(1-z)$ [z]

3. $A = 2(bh + hl + lb)$ [l]

4. $l = \frac{S}{\pi r} - r$ [S]

5. $S = 2\pi r(r+h)$ [h]

6. $Y - y = m(X - x)$ [X]

7. $U = \frac{p}{q} - v$ [q]

8. $d = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ [f]

9. $J = \frac{E}{R-r}$ [R]

10. $\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$ [w]

83. Lapse sünniajal saab isa v aastat vanaks. Mitme aasta pärast on isa oma lapsest kaks korda vanem?

84. Kahe arvu summa on s. Mis arvud need on, kui üks on a võrra teisest suurem?

85. Lehekandja teenib kuus a rubla, varustades m tellijat. Mitu tellijat ta peab juurde saama, et teenida kuus b rubla?

86. Kooli lõpueksamil $p\%$ õpilastest sooritas eksami hästi ja $q\%$ rahuldavalt. Eksami sooritamine ebaõnnestus N õpilasel. Mitu õpilast oli eksamil?

87. Toa tapeetimiseks ostetud a rulli tapeti ja b rulli poordi eest maksti kokku k rubla. Kui kallis on rull tapetit, kui poordirulli hind moodustab $\frac{3}{5}$ tapetirulli hinnast?

88. Kullasepp sulatas kokku a-proovilisi ja b-proovilisi vanu kuldasju ja sai c-proovilise sulami, kaaluga k grammi. Teades, et proov näitab, mitu grammi puhast kulda tuleb 1000 grammi sulami kohta, leida, mitu grammi oli a-proovilist kulda.

§ 15. Täheliste kordajatega lineaarvõrrand-süsteem.

Ülesanne 1. Lahendada tähtede x ja y suhtes võrrandsüsteem

$$\begin{cases} ax + by = c \\ y = mx. \end{cases}$$

Lahendus. Rakendame asetusvõtet. Asetame esimesse võrrandisse y asemele tema väärtuse, mis teise võrrandiga määratud:

$$ax + bmx = c$$
$$x(a + bm) = c$$
$$x = \frac{c}{a + bm}$$

Tähe y väärtuse leiame nüüd teisest võrrandist:

$$y = m \cdot \frac{c}{a + bm} = \frac{cm}{a + bm}.$$

Kontroll. Arvutame algsüsteemi esimese võrrandi vasaku poole väärtuse, asendades seal x ja y leitud avaldistega:

$$a \cdot \frac{c}{a + bm} + b \cdot \frac{cm}{a + bm} = \frac{ac}{a + bm} + \frac{bcm}{a + bm} = \frac{ac + bcm}{a + bm} =$$
$$= \frac{c(a + bm)}{a + bm} = c.$$

Õige.

Vastus.
$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{a+bm} \\ y = \dfrac{cm}{a+bm} \end{cases}$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx - dy = n. \end{cases}$$

Lahendus. Kui ülesandes ei ole teisiti nõutud, siis loeme otsitavateks tähestiku lõpu tähed, seega antud juhul x ja y.

Kasutame liitmisvõtet.

$$\begin{array}{l|c|l} ax + by = m & d & adx + bdy = dm \\ cx - dy = n & b & bcx - bdy = bn \\ \hline & & adx + bcx = dm + bn \\ & & x(ad + bc) = dm + bn \\ & & x = \dfrac{dm + bn}{ad + bc}; \end{array}$$

$$\begin{array}{l|c|l} ax + by = m & c & acx + bcy = cm \\ cx - dy = n & -a & -acx + ady = -an \\ \hline & & bcy + ady = cm - an \\ & & y(bc + ad) = cm - an \\ & & y = \dfrac{cm - an}{ad + bc}. \end{array}$$

Kontroll. Arvutame algsüsteemi esimese võrrandi vasaku poole väärtuse:

$$a \cdot \frac{dm + bn}{ad + bc} + b \cdot \frac{cm - an}{ad + bc} = \frac{adm + abn}{ad + bc} + \frac{bcm - abn}{ad + bc} =$$

$$= \frac{adm + abn + bcm - abn}{ad + bc} = \frac{adm + bcm}{ad + bc} = \frac{m(ad + bc)}{ad + bc} = m. \text{ õige.}$$

Kui leitud avaldised asetada x ja y asemele algsüsteemi teise võrrandi vasakusse poolde, siis õigete avaldiste puhul saame selle vasaku poole väärtuseks n.

Vastus.
$$\begin{cases} x = \dfrac{dm + bn}{ad + bc} \\ y = \dfrac{cm - an}{ad + bc} \end{cases}$$

Ülesanne 3. Lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x+y} + \dfrac{b}{x-y} = c \\ \dfrac{m}{x+y} + \dfrac{n}{x-y} = p. \end{cases}$$

Lahendus. Lahendame abiotsitavate võttega.

Tähistame murrud $\dfrac{1}{x+y}$ ja $\dfrac{1}{x-y}$ vastavalt tähtedega u ja v, nii et

$$\frac{1}{x+y} = u \quad \text{ja} \quad \frac{1}{x-y} = v.$$

Murdu $\dfrac{a}{x+y}$ võib kujutada nüüd järgmiselt:

$$\frac{a}{x+y} = a \cdot \frac{1}{x+y} = au.$$

Toimides samal viisil teiste murdudega, saame algsüsteemi asemele uue:

$$\begin{cases} au + bv = c \\ mu + nv = p. \end{cases}$$

Nüüd lahendame selle süsteemi u ja v suhtes.

Lahendina u ja v jaoks saadud avaldised kirjutame vastavalt võrdseks murdudega

$$\frac{1}{x+y} \text{ ja } \frac{1}{x-y}.$$

Nii saame lõpuks x ja y suhtes lineaarse võrrandsüsteemi, millest saame need otsitavad avaldada. Kontrolli teostame nii, nagu eespool juhatatud.

Ülesanne 4. Messing (ehk valgevask) on vase ja tsingi sulam. Kui võtta a grammi vaske ja b grammi tsinki, siis saame messingi hinnaga m rubla gramm; kui aga sulatada kokku b grammi vaske ja a grammi tsinki, siis saame sulami, mille hind on n rubla gramm. Kui palju maksab gramm vaske ja kui palju gramm tsinki?

Lahendus. Tähistame vase grammi hinna tähega x ja tsingi grammi hinna tähega y.

Esimesel juhul saame siis $a+b$ grammi sulamit koguhinnaga $ax+by$ rubla; ülesande andmete järgi maksab see sulam $m(a+b)$ rubla. Selle põhjal võime kirjutada võrrandi

$$ax+by=m(a+b).$$

Samasuguse arutlusega saame teise sulami jaoks võrrandi

$$bx+ay=n(a+b).$$

Selleks, et saada avaldised x ja y jaoks, lahendame nende tähtede suhtes võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} ax+by=m(a+b) \\ bx+ay=n(a+b) \end{cases}$$

Lahendame liitmisvõttega.

$$\begin{array}{l|c|l} ax+by=m(a+b) & a & a^2x+aby=am(a+b) \\ bx+ay=n(a+b) & -b & -b^2x-aby=-bn(a+b) \\ \hline & & a^2x-b^2x=am(a+b)-bn(a+b) \\ & & x(a^2-b^2)=(a+b)(am-bn) \\ & & x=\dfrac{(a+b)(am-bn)}{a^2-b^2}=\dfrac{am-bn}{a-b}. \end{array}$$

Samal viisil arvutame y.

$$\begin{array}{l|c|l} ax+by=m(a+b) & b & abx+b^2y=bm(a+b) \\ bx+ay=n(a+b) & -a & -abx-a^2y=-an(a+b) \\ \hline \end{array}$$

$$b^2y-a^2y=bm(a+b)-an(a+b)$$

$$y(b^2-a^2)=(a+b)(bm-an)$$

$$y=\frac{(a+b)(bm-an)}{b^2-a^2}=\frac{bm-an}{b-a}.$$

K o n t r o l l. Kontrolliks arvutame saadud hindade põhjal esimese sulami, mida pidi saama $a+b$ grammi, ühe grammi hinna. Ülesande andmete järgi on see m rubla; kui saadud hinnaavaldised on õiged, siis kontroll peab andma sama tulemuse.

a grammi vaske maksab $a\cdot\frac{am-bn}{a-b}$ rubla;

b grammi tsinki maksab $b\cdot\frac{bm-an}{b-a}$ rubla.

Kogu sulami väärtus rublades on siis

$$a\cdot\frac{am-bn}{a-b}+b\cdot\frac{bm-an}{b-a}=\frac{a^2m-abn}{a-b}+\overbrace{\frac{b^2m-abn}{b-a}}^{-1}=$$

$$=\frac{a^2m-abn}{a-b}+\frac{abn-b^2m}{a-b}=\frac{a^2m-abn+abn-b^2m}{a-b}=$$

$$=\frac{a^2m-b^2m}{a-b}=\frac{m(a^2-b^2)}{a-b}=\frac{m(a+b)(a-b)}{a-b}=m(a+b).$$

Ühe grammi hinna saamiseks jagame saadud avaldise grammide arvuga, s. o. avaldisega $a+b$, siis saame

$$\frac{m(a+b)}{a+b}=m.$$

See näitab, et meie lahendus on õige.

V a s t u s. Gramm vaske maksab $\frac{am-bn}{a-b}$ rubla ja gramm tsinki $\frac{bm-an}{b-a}$ rubla.

Ülesanded.

89. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} x+y=a \\ y=x \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y=b \\ y-x=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} ax+y=b \\ y=cx \end{cases}$ 4. $\begin{cases} ax+by=1 \\ y=2x \end{cases}$

90. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} x+y=m \\ x-y=n \end{cases}$

2. $\begin{cases} ax+by=c \\ x+y=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=n \end{cases}$

4. $\begin{cases} px+qy=(p+q)^2 \\ px-qy=p^2-q^2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} a^2x+y=a^3 \\ (a+1)x+1=y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=py+q \\ y=ax+b \end{cases}$

7. $\begin{cases} y=x-q \\ qx+py=p^2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} ax+y=a^2 \\ y=x+1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} ax-by=a^2 \\ (b-a)x+ay=b^2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} nx+my=0 \\ x+y=m-n \end{cases}$

91. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=b \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3a \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=a \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=a^2+b^2 \\ \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=a^2-b^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}=a+b \\ \frac{a^2}{x}-\frac{b^2}{y}=a-b \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{m}{x}-\frac{n}{y}=m-n \\ \frac{n}{x}+\frac{m}{y}=m+n \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=a+1 \\ \frac{b}{x}+\frac{a}{y}=\frac{a}{b}+b \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{m^2}{x-m}+\frac{n^2}{y-n}=m+n \\ \frac{m^2}{x-m}-\frac{n^2}{y-n}=m-n \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{a}{x+a}+\frac{b}{y+b}=1 \\ \frac{b}{x+a}+\frac{a}{y+b}=\frac{a^2+b^2}{2ab} \end{cases}$

92. Kahe arvu jagatis on m; nende arvude summa on s. Leida need arvud.

93. Vaiba pikkus ületab laiuse a cm võrra; vaiba ümbermõõt on $2p$ cm. Kui pikk ja kui lai on vaip?

94. Artell ostis tinavalget ja tsinkvalget kokku m kilogrammi ja maksis k rubla. Kilogramm tinavalget maksis a rubla ja kilogramm tsinkvalget b rubla. Kui palju maksti kummagi värvi eest?

95. Kahenumbrilise arvu ristsumma on s. Kui selle arvu numbrid vahetada ja sel teel saadud uus arv lahutada endisest, siis saame d. Leida see kahenumbriline arv.

96. Kaks jalgratturit on teineteisest d kilomeetri kaugusel. Kui nad sõidavad teineteisele vastu, siis nad kohtuvad m tunni pärast; kui üks sõidab teisele järgi, siis toimub kohtumine n tunni pärast. Kui suure kiirusega sõidab kumbki jalgrattur?

97. Elumaja taastamistöödel töötab mehi ja naisi, kokku m inimest; mehi on a võrra rohkem kui naisi. Mitu meest ja mitu naist töötab elumaja taastamisel?

98. Kooperatiivis müüdi n kilogrammi kaht sorti kaupa, esimene sort hinnaga a rbl. kilogramm, teine sort hinnaga b rbl. kilogramm, seejuures saadi kogu esimese sordi kauba eest c rubla rohkem kui teise sordi eest. Mitu kilogrammi müüdi esimest ja mitu kilogrammi teist sorti kaupa?

99. Kommertskauplus sai koguse suhkrut, millest oli vaja teha ettenähtud arv pakke. Kui igasse pakki panna a kilogrammi suhkrut, siis jääb m kilogrammi üle; kui igasse pakki panna aga b kilogrammi, siis tuleb n kilogrammi suhkrut puudu.

Mitu pakki oli vaja teha ja mitu kilogrammi sai kommertskauplus suhkrut?

Peatükk II.

Ruutjuur.

§ 16. Seose $y = x^2$ graafik.

Olgu antud ruut, mille külg on x sentimeetrit. Selle ruudu pindala y on siis x^2 ruutsentimeetrit:

$$y = x^2.$$

Viimane võrdus kujutab seost ruudu külje ja ruudu pindala vahel. Uurime seda seost lähemalt, arvestamata tema päritolu.

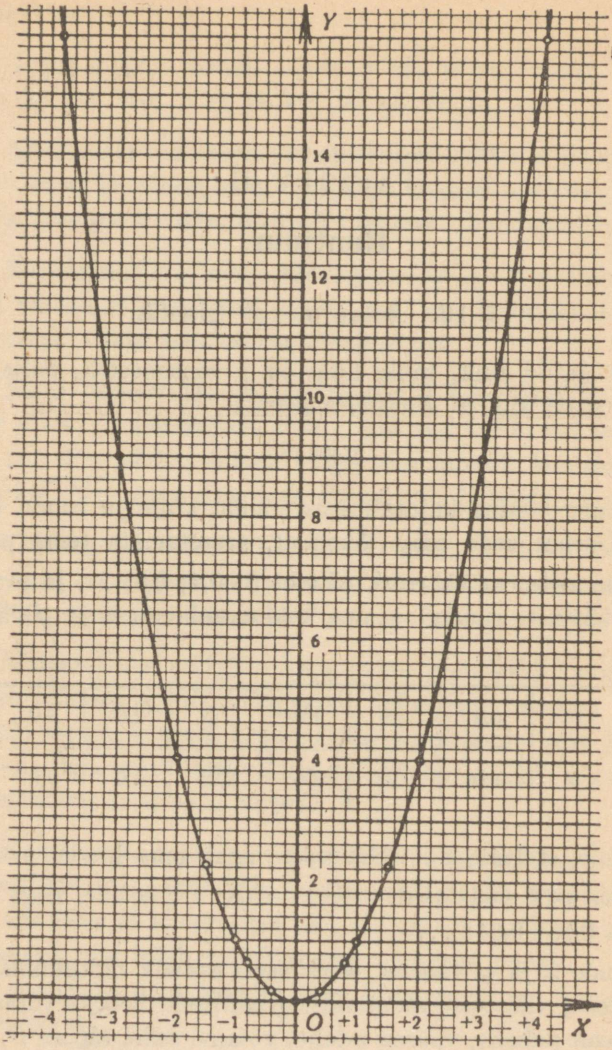
Andes x-ile rea väärtusi, näiteks 0; 0,4; 0,8; ... ja arvutades nende väärtuste ruudud, saame kokkukuuluvate x ja y väärtuste tabeli:

x	0	0,4	0,8	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
y	0	0,16	0,64	1,0	2,25	4,0	9,0	16,0

Näeme, et igale x-i väärtusele vastab oma kindel y väärtus.

Andes x-ile väärtused —0,4; —0,8; ... saame, nagu ennem, y jaoks 0,16; 0,64; ...

Arvude x ja y vahelist seost saab esitada näitlikumal viisil, kujutades y väärtuste muutumist graafiliselt. Selleks võtame lehe millimeeter-paberit, valime x-telje, võtame sellel alguse O, valime sobiva kujutamisühiku ja kujutame x-teljel väärtused —4,0; ... 0; 0,4; 0,8; ... 4,0. Punktist O tõmbame risti x-teljega y-telje.



Parabool.

Arve —4,0; —3,0; ... kujutavaist punktidest tõmbame y-teljega rööbikud sirged ja kujutame neil, alates x-teljest, kohaselt valitud kujutamisühiku abil y väärtused 16,0; 9,0; ...

Pilk saadud joonisele näitab, et nende y-lõikude lõpud asetsevad ladusal kõveral. See kõver kannab p a r a b o o l i nime. Ta kujutab arvu ruudu muutumist arvu muutudes.

§ 17. Ruutjuur.

Eelmises paragrahvis saadud joonist saab kasutada a r v u t u s a b i n õ u n a. Tõepoolest, olgu antud mingi x-i väärtus, näiteks $x = 2{,}8$; küsime, kui suur on x^2. Otsime x-teljel punkti $x = 2{,}8$; liigume seda punkti läbivat ristsirget mööda üles kõverani ja loeme saadud lõigu pikkuse 7,8. Möödapääsematute väikeste mõõtmis- ja joonestamisvigade tõttu saadus ei ole täpne: $2{,}8^2 = 7{,}84$; saadus on aga täpsele väärtusele väga lähedal, erinedes temast kõigest 0,04 võrra.

Veelgi tulusam on joonise kasutamine p ö ö r d ü l e s a n d e lahendamisel. Tõepoolest, olgu antud mingi y väärtus, näiteks 3,7; kui suur on vastav x? Teiste sõnadega: missuguse arvu ruut on 3,7? Küsimuse lahendamiseks võtame y-teljel punkti 3,7 ja tõmbame sellest punktist rööbiku x-teljega, nihkume piki seda rööbikut kõverani, sealt ristsihis alla x-teljeni ja loeme siin k a k s väärtust

$$-1{,}9 \text{ ja } +1{,}9.$$

Kontroll annab

$$(-1{,}9)^2 = (+1{,}9)^2 = 3{,}61,$$

mis on antud väärtusest umbes 0,1 võrra väiksem.

Esimeses ülesandes oli antud x, otsiti selle ruutu y; tehet, mille abil see y saadakse, nimetatakse x-i r u u d u l e i d m i s e k s. Teises ülesandes oli antud x-i ruut y; otsiti arvu x; tehet, mille abil see x saadakse, nimetatakse y r u u t j u u r e l e i d m i s e k s.

Leida ruutjuur arvust A tähendab leida niisugune arv, mille ruut on võrdne A-ga.

Nõudeid liita, lahutada, korrutada ja jagada me oleme märkinud sümbolitega $+$, $—$, $\cdot$, $:$; nõuet „leida ruutjuur arvust A" märgime sümboliga $\sqrt{A}$, loe: ruutjuur arvust A.

Kirjutisi

$$a + b \qquad a — b \qquad a \cdot b \qquad a : b$$

oleme mõistnud aga mitte ainult nõuetena toimetada liitmise, lahutamise jne. tehteid, vaid ka sümbolitena nende tehete tulemuste tähistamiseks. Nii tähendab näiteks kirjutis $a + b$ arvude a ja b summat, kirjutis $a \cdot b$ arvude a ja b korrutist. Samuti näeme ka sümbolis

$$\sqrt{A}$$

mitte ainult ruutjuure leidmise nõuet, vaid ka selle tehte tulemuse tähist. Nii kirjutame:

$$\sqrt{16} = 4 \qquad \sqrt{49} = 7 \qquad \sqrt{3{,}7} \approx 1{,}93.$$

Summa, vahe, korrutise ja jagatise määramisel jõudsime ikka ühele ja ainsale tulemusele. Ruutjuure määramine seevastu viib meid alati kahele tulemusele. Tõepoolest, nõutagu arvu, mille ruut on A. Märgime otsitava tähega x; siis peab olema

$$x^2 = A.$$

Rahuldagu seda nõuet positiivne arv a, nii et

$$a^2 = A;$$

siis rahuldab seda nõuet ka negatiivne arv $—a$; tõepoolest

$$(—a)^2 = a^2,$$

seega ka

$$(— a)^2 = A.$$

Niisiis peaksime kirjutama

$$\sqrt{A} = a \quad \text{ja ka} \quad \sqrt{A} = -a.$$

See tähendab aga, et sümbolil $\sqrt{A}$ on **k a k s** tähendust. Kõiki seni tarvitusel olnud kirjutisi, nagu

$$A + 2, \quad A - 2, \quad 2A, \quad \frac{A}{2}, \quad A^2$$

tuli ikka mõista vaid **ü h e s** tähenduses. Tahtes ka sümbolit

$$\sqrt{A}$$

mõista **ü h e s a i n s a s** tähenduses, lepime kokku tähistada sellega ikka vaid võrrandi $x^2 = A$ **p o s i t i i v s e t** lahendit. Nii kirjutame, et võrrandi

$$x^2 = 64$$

lahendamisel saame

$$x_1 = \sqrt{64} = 8 \quad \text{ja} \quad x_2 = -\sqrt{64} = -8.$$

Olgu tähendatud, et teaduslikus kirjanduses sümbolit $\sqrt{A}$ sageli mõistetakse **k a h e s e n a**; sel puhul võrrandi $x^2 = 64$ lahendid esinevad kujul

$$x = \sqrt{64},$$

ehk täielikumalt

$$x_1 = |\sqrt{64}| = 8 \quad \text{ja} \quad x_2 = -|\sqrt{64}| = -8.$$

On kokkuleppe asi, kuidas mõista üht või teist sümbolit.

Mõned matemaatikud nimetavad arvu positiivset ruutjuurt selle arvu **a r i t m e e t i l i s e k s r u u t j u u r e k s**, teist, negatiivset juure väärtust, arvu **a l g e b r a l i s e k s** ruutjuureks.

Meie kokkuleppe järgi mõistame edaspidi sümboli $\sqrt{64}$ all siis selle juure aritmeetilist väärtust 8, ja kirjutame

$$\sqrt{64} = 8.$$

Kui on tarvis mõlemaid ruutjuure väärtusi arvestada, siis üheainsa võrduse abil kirjutades paneme juure ette kaks märki:

$$\pm\sqrt{64} = \pm 8.$$

100. Kasutades seose $y = x^2$ graafikut määrata järgmiste arvude ruudud:

1.	1,6	0,5	1,8	2,5	2,9
2.	3,2	3,8	4,2	4,4	4,5

101. Kasutades seose $y = x^2$ graafikut määrata järgmiste arvude ruutjuured:

1.	1,44	1,56	1,69	1,90	2,00
2.	2,50	2,90	3,24	3,60	4,40
3.	5,00	6,52	7,00	7,50	8,40

102. Kui pikk peab olema ruudukujulise näitelina äär, et lina pindala oleks 10 ruutmeetrit?

103. Ristküliku mõõtmed on 3 ja 5 sentimeetrit. Kui pikk on selle ristkülikuga pindvõrdse ruudu külg?

§ 18. Arvu ruutimine.

Antud arvu ruudu arvutamist ehk ruutimist on võimalik korraldada nii, et sellest arvutusest saab kergesti tuletada ruutjuure arvutamise eeskirja ehk ruutjuure algoritmi, sest ruutjuure arvutamine ja ruutimine on teineteise pöördtehted, nagu seda on liitmine ja lahutamine ning korrutamine ja jagamine.

Seks otstarbeks arvu korrutamise asemel iseendaga rakendame kaksliikme ruutimise valemit

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

mille seekord teisendame meie ülesande jaoks sobivamaks, viies arendise kahest viimasest liikmest teguri b sulgude taha, nii et saame

$$(a + b)^2 = a^2 + (2a + b)\, b.$$

Kaksliikme ruutimise valemi võime sõnastada nüüd nii:

k a h e a r v u s u m m a r u u t v õ r d u b k a k s l i i k m e g a, m i l l e e s i m e s e k s l i i k m e k s o n e s i m e s e a r v u r u u t; t e i s e l i i k m e s a a m i s e k s t u l e b e s i m e s e a r v u k a h e k o r d s e j a t e i s e a r v u s u m m a k o r r u t a d a t e i s e a r v u g a.

Selle valemi järgi võime näiteks 47^2 arvutada nüüd järgmiselt:

$$47^2 = (40 + 7)^2 = 40^2 + (2 \cdot 40 + 7) \cdot 7 = 40^2 + 87 \cdot 7.$$

Arvutuse võime korraldada nii:

$$\begin{array}{l} 40 \cdot 40 = 1600 \\ 87 \cdot \ \ 7 = \ \ 609 \\ \hline 47^2 \quad\ = 2209. \end{array}$$

Siin arvud 1600 ja 609 on osakorrutisteks. Nagu teame, kahe arvu korrutise arvutamisel jäetakse osakorrutistes otsmised nullid kirjutamata, seejuures silmas pidades, et need osakorrutised parajasse kohta paigutatakse. Kui meie oma ruutimise näites selle eeskujul otsmised nullid kirjutamata jätame, siis näeme, et t e i s e o s a k o r r u t i s e v i i m a n e n u m b e r o n e s i m e s e o s a k o r r u t i s e p a r e m p o o l s e s t n u m b r i s t k a h e k o h a v õ r r a p a r e m a l e n i h u t a t u d.

Kui tahame arvutada $47{,}5^2$, siis rakendame kaksliikme ruutimisvalemit teiskordselt:

$$\begin{aligned} 47{,}5^2 &= (47 + 0{,}5)^2 = 47^2 + (2 \cdot 47 + 0{,}5) \cdot 0{,}5 = \\ &= 47^2 + 94{,}5 \cdot 0{,}5. \end{aligned}$$

Et meil 47^2 on eespool juba arvutatud, siis tuleb senisele arvutusele veel lisaks korrutamine $94{,}5 \cdot 0{,}5$ ja tulemuse liitmine; kogu arvutuse võime siis kirjutada nii:

$$\begin{array}{lcr} 40 \cdot 40 & = & 1600 \\ 87 \cdot 7 & = & 609 \\ 94{,}5 \cdot 0{,}5 & = & 47{,}25 \\ \hline & & 2256{,}25 \end{array}$$

Kui nullid lõpus kirjutamata jätame, siis on viimase arvutuse kirjutis järgmine:

$$\begin{array}{r}
4 \cdot 4 = 16 \\
87 \cdot 7 = 609 \\
94{,}5 \cdot 0{,}5 = 47{,}25 \\
\hline
2256{,}25
\end{array}$$

Sama valemi veelkordsel rakendamisel saame arvutada näiteks $47{,}52^2$, sest

$$47{,}52^2 = (47{,}5 + 0{,}02)^2 = 47{,}5^2 + (2 \cdot 47{,}5 + 0{,}02) \cdot 0{,}02 =$$
$$= 47{,}5^2 + 95{,}02 \cdot 0{,}02.$$

Korraldades arvutuse nii, nagu tegime eespool, saame:

$$\begin{array}{r}
4 \cdot 4 = 16 \\
87 \cdot 7 = 609 \\
94{,}5 \cdot 0{,}5 = 47{,}25 \\
95{,}02 \cdot 0{,}02 = 1{,}9004 \\
\hline
2258{,}1504
\end{array}$$

Osakorrutistes võib ka komad kirjutamata jätta, nagu nad jäetakse harilikult kirjutamata osakorrutistes korrutamistehtel. Koma asetamine õigesse kohta lõputulemuses ei tee mingit raskust ei ühel ega teisel juhul.

Jättes osakorrutistes komad kirjutamata, saame oma ruutimise arvutuse järgmisel kujul:

$$\begin{array}{r}
4 \cdot 4 = 16 \\
87 \cdot 7 = 609 \\
945 \cdot 5 = 4725 \\
9502 \cdot 2 = 19004 \\
\hline
2258{,}1504
\end{array}$$

Vaadeldes neid tegureid, millede korrutamine annab vastava osakorrutise, näeme, et

1) esimese osakorrutise saamiseks tuleb ruuditava arvu esimene number korrutada iseendaga, ehk, teisiti öeldes, tuleb võtta esimese numbri ruut;

2) teise osakorrutise teguripaar saadakse järgmiselt: esimese osakorrutise tegurite summa (s. o. ruuditava arvu algusnumbri kahekordne) annab esimese teguri ilma lõpunumbrita, lõpunumbriks kui ka teiseks teguriks on ruuditava arvu teine number;

3) kolmas ja kõik edasised teguripaarid saadakse sel teel, et eelmise osakorrutise tegurite summa annab alati uuele osakorrutisele esimese teguri ilma lõpunumbrita, esimese teguri lõpunumbriks kui ka teiseks teguriks on ruuditava arvu järgmine number.

Et liitmised, mis vaja teha osakorrutise teguripaari ühe teguri saamisel, oleks mugavalt teostatavad, selleks kirjutame liidetavad üksteise alla. Seda ja kõike eespoolöeldut arvesse võttes saame arvu ruutimise jaoks järgmise skeemi:

$$\begin{array}{r|r}
\multicolumn{2}{c}{47{,}52^2} \\
\hline
4 & \\
4 & 16 \\
\hline
87 & \\
7 & 609 \\
\hline
945 & \\
5 & 4725 \\
\hline
9502 & \\
2 & 19004 \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{2258{,}1504}
\end{array}$$

Arvutame selle ruutimis-skeemi järgi 32^2.

$$\begin{array}{r|r}
\multicolumn{2}{c}{32^2} \\
\hline
3 & \\
3 & 9 \\
\hline
62 & \\
2 & 124 \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{1024}
\end{array}$$

104. Arvutada ruutimis-skeemi järgi järgmised ruudud:

$$28^2;\ 326^2;\ 43{,}1^2;\ 2754^2;\ 37{,}38^2.$$

§ 19. Ruutjuure leidmise algoritm *.

Ruutjuure leidmise algoritm on võte ruutjuure kiireks määramiseks. Võtte käsitlemist toimetame kahes osas: esimeses selgitame, mitu numbrit on ruutjuures, teises — missugused on ruutjuure numbrid. Asume esimese küsimuse käsitlemisele.

Iga ühekohaline arv a rahuldab tingimust

$$1 \leqslant a < 10;$$

sellest järeldub, et

$$1 \leqslant a^2 < 100;$$

see tähendab, et ühekohalise arvu ruut on ühe või kahekohaline arv. Iga kahekohaline arv b rahuldab tingimust

$$10 \leqslant b < 100;$$

sellest järeldub, et

$$100 \leqslant b^2 < 10\,000;$$

see tähendab, et kahekohalise arvu ruut on kolme- või neljakohaline arv. Mõttekäiku üldistades näeme, et n-kohalise arvu ruudul on kas $2n - 1$ või $2n$ numbrit. Ümberpöördult: ruutjuur arvust, millel on $2n - 1$ või $2n$ numbrit, on n-kohaline arv.

Arvestades koma paigutamise juhist korrutises kümnendmurdude korrutamisel, võime öelda, et kui arvul on 1 number koma

---

* Sõna *algoritm* on tuletatud matemaatik Al-Khwārizmī nimest ning tähendab arvutuseeskirja.

Keskajal nimetati *algorithmus*'eks araablasilt õpitud arvutamiskunsti nn. araabia numbritega; uue arvutusviisi tundjaid nimetati a l g o r i t m i k u i k s, vastandina a b a t s i s t i d e l e, kelleks nimetati arvutuslaual (*abacus*) arvutavaid aritmeetikuid.

järel, siis tema ruudul on 2 numbrit koma järel; kui aga arvul on 2 numbrit koma järel, siis arvu ruudul on koma järel 4 numbrit. Üldiselt, kui arvul on koma järel n numbrit, siis selle arvu ruudul on $2n$ numbrit koma järel. Ümberpöördult: ruutjuurel arvust, millel koma järel on $2n$ numbrit, on koma järel n numbrit.

Siit järeldub võte numbrite arvu määramiseks arvu ruutjuures:

rühmitame juuritava arvu numbrid kahenumbrilisteks rühmadeks, alates komast, suundudes vasakule ja paremale poole, kusjuures viimane vasakpoolne rühm võib jääda ühenumbriliseks; viimane parempoolne rühm, kui ta ühenumbriline tuleb, täiendatakse kahenumbriliseks nulli abil. Nii tekkinud numbrirühmade hulk annab ruutjuure numbrite arvu.

Näiteks $\sqrt{190854225}$ on viiekohaline arv, sest juuritava arvu numbrite rühmitamisel saame

$$1'90'85'42'25,$$

s. o. viis rühma.

Kuid $\sqrt{660{,}5}$ on kolmenumbriline arv, sest nüüd saame rühmitamisel kolm numbrirühma ja nimelt:

$$6'60{,}50.$$

Asume nüüd ruutjuure numbrite otsimisele. Selgitame seda $\sqrt{1024}$ arvutamisel. Rühmitades juuritava arvu numbrid, saame 10'24; numbrirühmi on 2, seega $\sqrt{1024}$ on k a h e k o h a l i n e a r v, ta koosneb kümnelistest ja ühelistest. Käsitades ruutjuure arvutamist ruutimisele vastassuunalise tehtena, võib öelda, et antud on arvu ruut, tuleb leida arv ehk teisiti öeldes, tuleb leida arvu numbrid. Ruutimise arvutuskäigule tagasi vaadates näeme, et arvu ruudu esimene numbrirühm koosneb peaasjalikult esimesest osakorrutisest, sest teistest osakorrutistest tuleb siia ainult pisut juurde. See tähendab, et arvu ruudu esimene numbrirühm on peaaegu võrdne arvu esimese numbri ruuduga, täpsemalt väljendades, otsitava ruutjuure esimese numbri ruut on kas võrdne juuritava arvu esimese numbrirühmaga, või on sellest väiksem.

Siit saame juhise ruutjuure esimese numbri leidmiseks: suurim täisarv, mille ruut mahub juuritava esimesse numbrirühma, on ruutjuure esimene number ehk teisiti sõnastades, *võtame juuritava arvu esimesest numbrirühmast suurima täisarvulise ruutjuure.*

Antud juhul esimene numbrirühm on 10, sellest suurim täisarvuline ruutjuur on 3. Seega otsitava arvu esimene number on 3.

Leitud esimese numbri ruut on esimeseks osakorrutiseks, mis juuritavast arvust lahutatakse. Selle osakorrutise tegurid jäetakse lühiduse otstarbel kirjutamata. Kõigi järgnevate osakorrutiste tegurid kirjutatakse ruutimise võtte eeskujul muust arvutusest vasakule ja eraldatakse temast püstkriipsuga.

Just nagu ruutimisvõtte puhulgi, saadakse igale osakorrutisele esimene tegur ilma oma lõpunumbrita eelmise teguripaari liitmise teel; kirjutamata jäetud teguripaar, mis andis esimese osakorrutise (esimese numbri ruudu), liidetakse peast; et need tegurid on võrdsed, siis nende liitmine on samaväärne teguri kahekordistamisega $(3 + 3 = 2 \cdot 3 = 6)$. Teise osakorrutise teine tegur, mis on ühtlasi esimese teguri lõpunumbriks ja ka otsitava ruutjuure vastavaks numbriks, leitakse jagamise teel, nagu allpool selgub.

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{10'24} = 32 \\ & 9 \\ \hline 62 & 124 \\ 2 & 124 \end{array}$$

Ruutjuure väärtuse teine number, nimelt 2, on määratud sellega, et temaga moodustatud osakorrutis $62 \cdot 2$ on võrdne esimese jäägiga 124. Järelikult teise teguri 2 saaksime jagamisel $\frac{124}{62}$, kui teaksime tervet jagajat; et aga jagaja lõpunumber on teadmata, seda alles otsime, siis piirdume ümardatud jagamisega, jättes jagajas ära viimase teadmata numbri, samuti jättes ära viimase numbri ka jäägis, mistõttu mõlemad arvud ligikaudu kümme korda vähenevad.

Niisiis jagatise $\frac{124}{62}$ asemel kasutame jagatist $\frac{12}{6}$, mis annab teise numbri 2.

Kui antud juuritaval arvul on numbrirühmi rohkem kui kaks, siis leiame ruutjuure kolmanda ja iga järgneva numbri samuti järgneva numbrirühma abil, nagu leidsime teise numbri teise numbrirühma abil: eelmise osakorrutise lahutamisel saadud vahe koos juuritava arvu järgneva numbrirühmaga moodustab alati vastava jäägi, mille kaudu uus ruutjuure number leitakse, — jäägis jätame ära viimase numbri ning nii saadud arvu jagame eelmise teguripaari summaga — nii saadud jagatis ongi järgmine ruutjuure number. Et jagamine toimub ümardatud arvudega, siis juhtub mõnikord, et jagamine annab õigest suurema numbri, mida näeme sellest, et osakorrutis ei mahu jääki; sel korral proovime väiksemaid numbreid, kuni saame suurima osakorrutise, mis mahub jääki.

N ä i d e 1.

$$\sqrt{1'90'85'42'25} = 13815$$

	1
23	90
3	69
268	2185
8	2144
2761	4142
1	2761
27625	138125
5	138125

Ruutjuure esimese numbri leidmiseks võtame juuritava arvu esimesest numbrirühmast ruutjuure, saame 1, selle kirjutame tulemuse kohale võrdusmärgi järele.

Leitud esimese numbri kahekordse kirjutame püstkriipsust vasakule.

Juure teise numbri saamiseks jagame lõpunumbrita esimese jäägi, s. o. 9 arvuga 2, saame 4; kuid et $24 \cdot 4 = 96$, seega suurem kui jääk 90, siis proovime väiksemat numbrit, kolme; see sobib. Juure teine number on siis 3.

Juure kolmanda, neljanda ja viienda numbri leiame järgmiste jagamiste abil:

$$\frac{218}{26} \approx 8\,; \quad \frac{414}{276} \approx 1\,; \quad \frac{13812}{2762} \approx 5.$$

Juuritava arvu rühmitamine määrab ka koma asukoha ruutjuures, sest arvutatav ruutjuure number kuulub alati niimitmendale kohale enne või pärast koma, kuimitmes, komast arvates, on see numbrirühm, mille abil vastavat numbrit arvutame.

N ä i d e 2. Arvutada $\sqrt{32652{,}49}$.

Juuritava arvu numbrite rühmitamine osutab, et juurel on kolm numbrit enne koma.

$$\sqrt{3'26'52{,}49} = 180{,}7$$

$$\begin{array}{r|r}
 & 1 \\ \hline
28 & 226 \\
8 & 224 \\ \hline
3607 & 252\,49 \\
7 & 252\,49 \\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r}
\hline
360 & 252 \\
0 & 000 \\ \hline
360 & 25249
\end{array}$$

Kolmandaks ruutjuure numbriks tuleb 0, nagu näitab jagamine 25 : 36. Kui kirjutaksime kõik tehted nulliga, nagu teeme iga muu numbriga, siis võtaks vastav kirjutise osa kõrvalnäidatud kuju. Endastmõistetavalt võime kirjutist lühendada, nagu see on teostatud arvutamisel.

N ä i d e 3. Leida ruutjuur arvust 0,000784.

Juuritava arvu numbrite rühmitamisest nähtub, et juure number enne koma ja esimene number pärast koma on nullid.

$$\sqrt{0{,}00'07'84} = 0{,}028$$

$$\begin{array}{r|r}
\multicolumn{2}{c}{4} \\
\hline
49 & 384 \\
9 & 441 \\
\hline
48 & 384 \\
8 & 384 \\
\hline
\end{array}$$

N ä i d e 4. Leiame $\sqrt{289567}$.

Rühmitame juuritavas numbrid paarikaupa, sammudes paremalt poolt vasakule; saame

$$28'95'67;$$

siit näeme, et otsitav ruutjuur on kolmekohaline arv. Selle leidmine võib toimuda nii, nagu allpool näidatud:

$$\sqrt{28'95'67} = 538 \text{ puudusega}$$
$$25 \qquad \text{või } 539 \text{ liiaga.}$$

$$\begin{array}{r|r}
\hline
103 & 395 \\
3 & 309 \\
\hline
1068 & 8667 \\
8 & 8544 \\
\hline
 & +123
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|r}
1069 & 8667 \\
9 & 9621 \\
\hline
 & -954
\end{array}$$

$$538 < \sqrt{289567} < 539.$$

M ä r k u s. Eelmises näites ruutjuure leidmisel me ei saanud otsitavat juurt t ä p s e l t; leidsime ainult kaks teineteisele järgnevat täisarvu, mille vahel asetseb otsitav ruutjuur:

$$538 < \sqrt{289567} < 539.$$

Neid kaht arvu nimetame otsitava ruutjuure l ä h i s v ä ä r t u s t e k s; esimene neist on p u u d u s e g a, teine l i i a g a.

Arvude 538 ja 539 vahe on 1. Et $\sqrt{289567}$ asetseb nende arvude vahel, siis ta erineb kummastki vähem kui ühe võrra. Seega võrduste

$$\sqrt{289567} = 538 \quad \text{ja} \quad \sqrt{289567} = 539$$

viga ei küüni üheni.

Ülesanded.

105. Arvutada järgmiste arvude ruutjuured:

1.	2.	3.
361	5329	54756
576	8464	71824
784	1369	56169
841	4225	17424
529	6084	831744

4.	5.
51955264	722500
89908324	608400
1018081	211600
49126081	31360000
81108036	96040000

106. Arvutada järgmised ruutjuured:

1.	2.	3.
$\sqrt{718{,}24}$	$\sqrt{2590{,}81}$	$\sqrt{42436}$
$\sqrt{0{,}501264}$	$\sqrt{5{,}6169}$	$\sqrt{91204}$
$\sqrt{0{,}00361}$	$\sqrt{0{,}5329}$	$\sqrt{501264}$
$\sqrt{48{,}8601}$	$\sqrt{0{,}0000169}$	$\sqrt{64144081}$
$\sqrt{70{,}0569}$	$\sqrt{5632{,}5025}$	$\sqrt{81144064}$

107. Individuaalelamu ehitaja sai ristküliku-kujulise ehituskrundi, mille pikkus on 39 m ja laius on 12 m. Ta tahab selle vahetada samasuure ruudukujulise krundiga. Millised peavad olema uue krundi mõõtmed?

108. Kuubi täispindala on 253,5 dm^2. Mitu cm on selle kuubi serv?

§ 20. Ruutjuure leidmine etteantud täpsusega.

Leida arvu a ruutjuur veaga alla $\frac{1}{n}$ tähendab leida 2 arvu, mille vahe on $\frac{1}{n}$ ja mille ruutude vahel asetseb arv a.

Kõnesolevaid arve võime tähistada $\frac{x}{n}$ ja $\frac{x+1}{n}$. Nad peavad rahuldama nõuet, et

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 < a < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2.$$

Korrutades võrratuste kõiki liikmeid ühe ja sama arvuga n^2, saame

$$x^2 < an^2 < (x+1)^2.$$

Arvud x ja $x+1$ erinevad 1 võrra ja nende ruutude vahel asetseb arv an^2. Seega on meie ülesanne taandunud arvu an^2 ruutjuure leidmisele veaga alla 1. Viimast ülesannet oskame aga juba lahendada ruutjuure leidmise algoritmiga.

N ä i d e. Leiame ruutjuure arvust 2 veaga alla 0,0001.

Meie juhul on $a = 2$, $n = 10\,000$; seega

$$n^2 = 100\,000\,000 \text{ ja } an^2 = 200\,000\,000.$$

Ruutjuure leidmise algoritm annab:

$$\sqrt{200000000} = 14142 \text{ puudusega}$$
$$\text{või } 14143 \text{ liiaga.}$$

Jagades leitud arvud 10 000-ga saame:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142 \text{ puudusega}$$
$$\text{või } 1{,}4143 \text{ liiaga.}$$

Kontroll annab:

$$1{,}4142^2 = 1{,}99996164;$$

see on väiksem kui 2, erinedes sellest vähem kui 0,0001 võrra;

$$1{,}4143^2 = 2{,}00024449;$$

see on suurem kui 2, erinedes sellest vähem kui 0,0003 võrra.

Nõuet, arvutada ruutjuur veaga alla 0,0001, võib asendada nõudega, arvutada see ruutjuur täpsusega 0,0001 ehk nelja kohaga pärast koma, siinjuures silmas pidades, et tulemus tuleb võtta puudusega, kui järgnev arvutatav ruutjuure number, antud juhul viies number, on väiksem kui 5; tulemus tuleb võtta liiaga, kui järgnev number on 5 või sellest suurem. Kui nii teeme, siis arvutatud ruutjuure viga ei ületa 0,00005, see tähendab, ei ületa poolt viimase koha ühikust, seega on ta kindlasti alla 0,0001.

Nüüd võime ülesande „leida ruutjuur arvust 2 veaga alla 0,0001" samastada ülesandega „leida ruutjuur arvust 2,0000 0000 nelja kohaga pärast koma". Komale järgnevad nullid võib arvutamisel esialgu jätta kirjutamata ja lisada nad ruutjuure iga numbri arvutamisel paarikaupa vastavale jäägile. Algoritmi rakendus kujuneb siis järgmiseks:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142 \text{ (puudusega)}$$

	1
24	100
4	96
281	400
1	281
2824	11900
4	11296
28282	60400
2	56564
	3836 < 14142

Kas leitud ruutjuure lähisväärtus tuleb võtta puudusega või liiaga, seda saab kontrollida otsese leitud väärtuse ruutimise või järgneva numbri arvutamise asemel leitud ruutjuure väärtuse ja viimase jäägi võrdlemise teel.

Meie arvutamise näites on viimaseks jäägiks 0,00003836; et arvutamisel on nullid ja komad kirjutamata, siis on kirjutises näha ainult selle jäägi numbrid 3836. Meie nägime eespool, et arvutamisel saame ruutjuure numbrid ühed ja samad, kas arvutame ruutjuure arvust 200000000 või arvust 2,00000000; esimesel juhul saame ruutjuure lähisväärtuseks 14142 ja viimaseks jäägiks 3836; teisel juhul on lähisväärtuseks 1,4142 ja viimaseks jäägiks 0,00003836. Niisiis selle asemel, et kontrollida tulemust 1,4142 jäägi 0,00003836 abil, võime kontrollida arvu 14142 jäägi 3836 abil. Lühidalt: senileitud ruutjuure lähisväärtuse võrdlemisel viimase jäägiga jätame komad mõlemas ära.

Kui ruutjuure leidmisel tekkinud viimane jääk on väiksem kui leitud ruutjuure lähisväärtus, koma asukoht mõlemas arvestamata, siis ruutjuure lähisväärtus tuleb võtta puudusega; kui viimane jääk ületab senileitud ruutjuure lähisväärtuse, koma asukoht samuti mõlemas arvestamata, siis tuleb lähisväärtus võtta liiaga, see tähendab, ruutjuure senileitud viimast numbrit tuleb 1 võrra suurendada.

Meie viimases arvutuses on viimane jääk $3836 < 14142$, sellepärast võtame ruutjuure väärtuse puudusega, see tähendab, tema viimane number 2 jääb kehtima.

Jäägi ja lähisväärtuse võrdlemise võtet põhjendame järgmiselt.

Oletame, et senileitud ruutjuure väärtus on a (kusjuures a on väljendatud senileitud ruutjuure väärtuse viimase koha ühikuis). Et nüüd teada saada, kas a on niisugune arv, mis ruutjuure täpsest väärtusest ei erine rohkem kui viimase koha poole ühiku võrra, selleks peaksime teadma, kas ruutjuure täpne väärtus on väiksem kui $a + 0{,}5$, või mitte. Et selgusele jõuda, kas ruutjuure täpne väärtus on väiksem kui $a + 0{,}5$ või on ta sellega võrdne või koguni suurem, selleks võrdleme avaldise $a + 0,5$ ruutu juuritava arvuga, s. t. võrdleme juuritava arvuga avaldist $(a + 0,5)^2$ ehk avaldist $a^2 + a + 0,25$, sest $(a + 0,5)^2 = a^2 + a + 0,25$.

Et arvu a leidmisel on a^2 juba juuritavast lahutatud, siis jätame võrdlemisel nii juuritavas kui ka meie avaldises a^2 arvestamata, see tähendab, võrdleme jääki, mis tekkis arvu a leidmisel, avaldisega $a + 0,25$; et liige 0,25 tuleks mahutada alles järgnevasse juuritava numbrirühma, siis võrdleme jääki lihtsalt arvuga a.

Etteantud täpsusega ruutjuure arvutamisel on otstarbekohane kirjutada viimane leitud number oma kohale alles siis, kui kontroll on teostatud, tarbekorral viimast numbrit ühe võrra suurendades.

Toome selgituseks veel ühe näite.

Arvutada ruutjuur arvust 51,1 täpsusega 0,01.

$$\sqrt{51,10} = 7,15 \text{ (liiaga)}$$

$$\begin{array}{r|r} & 49 \\ \hline 141 & 210 \\ 1 & 141 \\ \hline 1424 & 6900 \\ 4 & 5696 \\ \hline & 1204 > 714 \end{array}$$

Ülesanded.

109. Leida järgmiste juurte väärtused kolme kohaga pärast koma:

1. $\sqrt{3}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{13}$ $\sqrt{14}$

2. $\sqrt{17}$ $\sqrt{20}$ $\sqrt{32}$ $\sqrt{38}$ $\sqrt{45}$

110. Leida järgmiste juurte väärtused, kui võimalik, siis täpselt, kui mitte, siis täpsusega 0,001:

1. $\sqrt{5,34}$	2. $\sqrt{19,0822}$	3. $\sqrt{0,9956}$
$\sqrt{7,89}$	$\sqrt{145,0378}$	$\sqrt{0,524341}$
$\sqrt{65,72}$	$\sqrt{2,159670}$	$\sqrt{0,0150803}$
$\sqrt{81,46}$	$\sqrt{387,684}$	$\sqrt{0,001909}$
$\sqrt{95,37}$	$\sqrt{5639,05}$	$\sqrt{0,000672}$

111. Leida järgmiste juurte väärtused, kui võimalik siis täpselt, kui mitte, siis veaga alla 0,0001:

1. $\sqrt{46,3761}$	2. $\sqrt{0,0961}$	3. $\sqrt{980100}$
$\sqrt{54,256}$	$\sqrt{35,1649}$	$\sqrt{3500}$
$\sqrt{200}$	$\sqrt{5400}$	$\sqrt{182,25}$
$\sqrt{130}$	$\sqrt{3,72}$	$\sqrt{670000}$
$\sqrt{2530}$	$\sqrt{12,5}$	$\sqrt{500000}$

112. Ringi pindala on 158 cm^2. Arvutada selle ringi raadius täpsusega 1 mm.

113. Ruudukujulise nahatüki pindala on 7,5 dm^2. Leida selle nahatüki serva pikkus veaga alla 1 mm.

114. Peipsi järve pindala on 3584 km^2. Kui pika küljega ruudu kataks nii suur veepind?

§ 21. Irratsionaalarv.

Ülesanne. Kui pika peab võtma ruudu külje, et ruudu pindala oleks 2 ruutmeetrit?

Lahendus. Olgu nõutava ruudu külje pikkus x meetrit. Siis on tema pindala x^2 ruutmeetrit; seega peab olema

$$x^2 = 2.$$

Katsudes seda nõuet rahuldada täisarvuga näeme, et

$$1^2 = 1 < 2 \qquad 2^2 = 4 > 2$$

ja veelgi suuremad on 3^2, 4^2, 5^2 jne. Nii näeme, et ei leidu täisarvu, mille ruut on 2.

Katsume nõuet $x^2 = 2$ rahuldada murdarvuga, näiteks murruga $\frac{a}{b}$. Loomulikult võtame proovitava murru tema lihtsamal, see on taandatud kujul; sel juhul a ja b on ühistegurita arvud.

Kirjutame murru $\frac{a}{b}$ nii, et tema lugeja ja nimetaja esineksid algtegureiks lahutatuina:

$$\frac{a}{b} = \frac{h \cdot k \cdot l \cdots n}{p \cdot q \cdot r \cdots v};$$

siin on lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja tegureist. Ruutu tõstes saame

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{h \cdot h \cdot k \cdot k \cdot l \cdot l \cdots n \cdot n}{p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot r \cdot r \cdots v \cdot v}.$$

Näeme, et ka sellel murrul lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja teguritest, seega ka murd $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ on taandumatu. Meie nõude kohaselt peab

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2,$$

tähendab, kõnesolev murd $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ peab olema taanduv täisarvule 2. Murd ei saa korraga olla taandumatu ja taanduv. Seega peab meie nõudes peituma viga. See tähendab, et ei leidu ka murdarvu, mille ruut on 2.

Ülaltoodust näeme, et põhimõtteliselt on võimatu nõuet $x^2 = 2$ täpselt rahuldada täis- või murdarvuga.

Küll aga on võimalik nõuet rahuldada ligikaudu, ja pealegi nii hästi kui iganes soovime. Rakendades ruutjuure leidmise algoritmi ja järk-järgult viga vähendades näeme, et

$$1 < x < 2$$

$$1{,}4 < x < 1{,}5$$

$$1{,}41 < x < 1{,}42$$

$$1{,}414 < x < 1{,}415$$

$$1{,}4142 < x < 1{,}4143$$

$$1{,}41421 < x < 1{,}41422$$

jne.

Nii seisab arv x suletuna järjest kitsamasse ja kitsamasse vahemikku. Vasakpoolses tulbas seisavad x-i lähisväärtused puudusega, parempoolses tulbas x-i lähisväärtused liiaga. Vastavate lähisväärtuste viga järjest väheneb: esimeses reas ei küüni viga 1-ni, teises reas ei küüni ta 0,1-ni, kolmandas reas ei küüni ta 0,01-ni jne. Nii ühe kui teise tulba lähisväärtused juhivad meid x-i väärtusele:

$$x = 1{,}41421\ldots$$

Selles kirjutises numbrite jada ei lõpe.

Tõepoolest, kui see poleks nii, siis seisaks meie ees tavaline kümnendmurd ning selle ruut oleks 2; eespooltõestatu põhjal pole säärast murdu olemas. Seega on x lõputa kümnendmurd. Seda lõputa kümnendmurdu pole võimalik kirjutada ühegi hariliku murruna; vastasel korral leiduks niisugune harilik murd, mille ruut on 2.

Täisarve ja harilikke murde nimetasime koos ratsionaalseteks arvudeks.

Arve, mida ei saa kirjutada ei täisarvuna ega hariliku murruna, nimetame irratsionaalseteks arvudeks.

Murru 1,41421 ... saamislugu tagab, et tema ruut on 2:

$$(1{,}41421\ldots)^2=2;$$

vastavalt sellele kirjutame selle lõputa kümnendmurru lühiduse mõttes sümboliga $\sqrt{2}$.

Üldiselt:

kujutagu sümbol $\sqrt{A}$ ratsionaalset või irratsionaalset arvu, ikka on $(\sqrt{A})^2=A$.

Nagu $\sqrt{2}$, nii kujutavad ka $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ irratsionaalseid arve.

§ 22. Arvuvalla tihendamine irratsionaalsete arvudega.

Omal ajal laiendasime arvude valda, luues positiivsete arvude kõrvale negatiivsed arvud. Siis tihendasime arvuvalda murdarvudega ja saime nii ratsionaalsete arvude valla. Irratsionaalsete arvude loomisega ratsionaalsete arvude vahele tihendame arvuvalda veelgi. Negatiivsete arvude loomisega said sümbolid, nagu

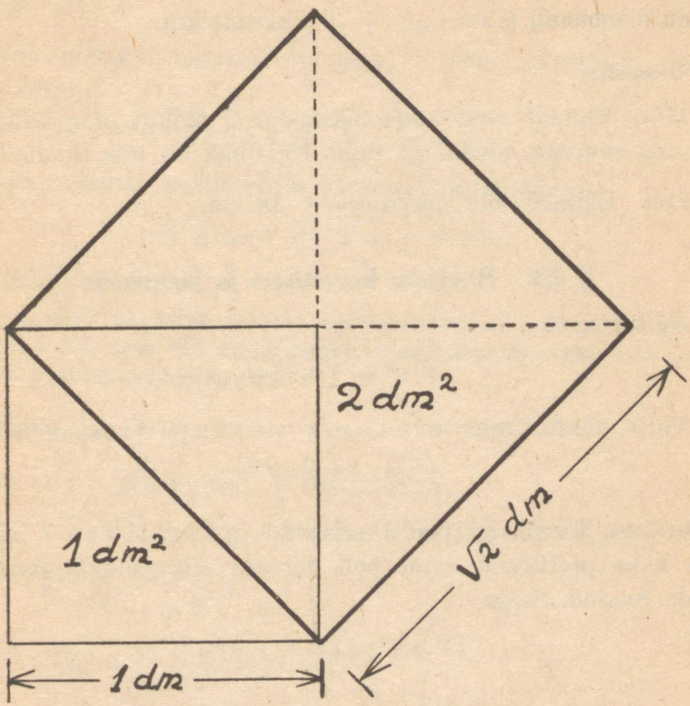
$$-1, \quad -5, \quad -7\frac{1}{2},$$

kindla mõtte ja sisu. Irratsionaalarvude loomisega saavad mõtte ka sümbolid nagu

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{5\frac{1}{2}},$$

milledel pole vastet täis- ja murdarvude vallas. On tõestatud, et arvutamise põhiseadused jäävad kehtima ka irratsionaalsete arvude puhul. Ratsionaalsed ja irratsionaalsed arvud moodustavad koos reaalarvude valla.

Irratsionaalarvu kuuluvust reaalarvude valda illustreerigu näitena järgmine asjaolu: vaatamata sellele, et $\sqrt{2}$ ei ole täpselt väljendatav ühegi täisarvu ega ühegi murru abil, on ometi võimalik anda täpne konstruktsioon sirkli ja joonlaua abil joonlõigu joonestamiseks, mille pikkus on täpselt $\sqrt{2}$ dm.



Irratsionaalse pikkusega joonlõik.

Kui ehitame ruudu külje pikkusega 1 dm (vt. joonis), siis selle pindala on 1 dm². Kui nüüd pikendame ühe paari lähisküljgi oma pikkuse võrra ja võtame pikendatud küljed uue nelinurga diagonaalideks, siis uus nelinurk on ruut pindalaga 2 dm². Seda näeme sellest, et uus ruut koosneb neljast niisugusest tükist, nagu neid esialgses ruudus on kaks.

Uue ruudu külje pikkuse leidmiseks peame arvutama ruutjuure arvust 2, seega see pikkus on $\sqrt{2}$ dm. Joonisel näeme, et uue ruudu külg on esialgsele ruudule diagonaaliks, seepärast võime öelda, et kui ruudu külje pikkus on 1 pikkusühik, siis ruudu diagonaali pikkus on $\sqrt{2}$ pikkusühikut.

Ülesanded.

115. Ehitada ruut külje pikkusega 2 ühikut ning selle abil 2 korda suurema pindalaga ruut. Kui pikk on uue ruudu külg?

116. Ehitada lõik pikkusega $\sqrt{18}$ cm.

§ 23. Ruutjuur korrutisest ja jagatisest.

Näitame, et

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Väite tõestamiseks oletame vastupidist, nimelt, et

$$\sqrt{ab} \neq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Võrratuse kummalgi poolel seisavad positiivsed arvud. Kui kaks positiivset arvu pole võrdsed, siis pole võrdsed ka nende ruudud. Seega

$$(\sqrt{ab})^2 \neq (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$$

ehk

$$(\sqrt{ab})^2 \neq (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2$$

ehk

$$ab \neq a \cdot b,$$

mis on võimatu. Tehtud oletusest järeldub võimatu tulemus; järelikult on see oletus vale ja seega meie väide õige.

Samal viisil saame näidata, et

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Tõestatud võrdustes võib vahetada pooled. Nii tõestatud võrdused kui ka need, mis saame poolte vahetamisel, leiavad kasutamist avaldiste teisendamisel, eriti teguri viimisel juuremärgi alla ja teguri toomisel juuremärgi ette.

Olgu näiteks tegemist juurega $\sqrt{n^2a}$. Tõestatud lause põhjal saame

$$\sqrt{n^2a} = \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{a} = n\sqrt{a}.$$

Samu võrdusi vastupidises suunas lugedes saame

$$n\sqrt{a} = \sqrt{n^2} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{n^2a}.$$

Kokkuvõttes:

arvu, mille ruut esineb tegurina ruutjuure märgi all, võib võtta tegurina juuremärgi ette; arvu, mis seisab tegurina juuremärgi ees, võib võtta ruutu tõstetult tegurina juuremärgi alla.

Näiteid.

1. $\sqrt{81 \cdot 169} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{169} = 9 \cdot 13.$
2. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$
3. $\sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}.$
4. $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3.$
5. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$
6. $3\sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{9 \cdot \frac{10}{9}} = \sqrt{10}.$

7. Ülesanne. Olgu teada, et $\frac{m}{n} = n\sqrt{\frac{a}{b}}$. Määrata b.

Lahendus. Jagades kummagi poole arvuga n, saame

$$\frac{m}{n^2} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Tõstame nüüd võrduse kummagi poole ruutu, siis saame

$$\frac{m^2}{n^4} = \frac{a}{b}$$

ja siit, rakendades võrde omadust, leiame, et

$$b = \frac{an^4}{m^2}.$$

Ülesanded.

117. Tuua tegur juuremärgi ette:

1. $\sqrt{12}$ $\sqrt{72}$ $\sqrt{200}$ $\sqrt{288}$ $\sqrt{32}$

2. $\sqrt{18}$ $\sqrt{75}$ $\sqrt{300}$ $\sqrt{125}$ $\sqrt{162}$

118. Leida järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\sqrt{9 \cdot 144}$, $\sqrt{25 \cdot 100}$, $\sqrt{169 \cdot 4}$, $\sqrt{225 \cdot 16}$, $\sqrt{49 \cdot 64}$

2. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$, $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

3. $\sqrt{\frac{9}{4}}$, $\sqrt{\frac{36}{25}}$, $\sqrt{\frac{9}{100}}$, $\sqrt{\frac{121}{144}}$, $\sqrt{\frac{225}{64}}$

4. $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

119. Viia tegur juuremärgi alla:

1. $2\sqrt{5}$ $\quad 5\sqrt{2}$ $\quad 10\sqrt{7}$ $\quad 6\sqrt{1,5}$ $\quad 12\sqrt{2,5}$

2. $12\sqrt{0,5}$ $\quad 3\sqrt{3}$ $\quad 4\sqrt{3}$ $\quad 7\sqrt{10}$ $\quad 10\sqrt{0,2}$

§ 24. Ülesandeid kordamiseks.

120. Olgu teada, et $\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{p}{q}}$. Määrata siit q.

121. On antud võrre $\frac{P^2}{m^2}=\frac{Q}{n^2}$. Määrata m.

122. Olgu teada, et $u=\frac{a}{b}\sqrt{f}$. Avaldada siit f.

123. Avaldada valemist $T=\sqrt{\frac{u}{v}}$ suurus u.

124. Olgu võrdes $\frac{px}{q}=\frac{r}{sx}$ kõik arvud positiivsed. Avaldada x.

125. Olgu $qh=\sqrt{\frac{q^3}{k}}$. Avaldada siit q.

126. Määrata valemist $t=\frac{3}{4}\sqrt{h}$ suurus h.

127. Olgu $z=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{x}{u}}$. Avaldada u.

128. Olgu teada, et $v=\left(\frac{Mu}{h}\right)^2$. Avaldada siit h.

129. Olgu teada, et $p\sqrt{q}=r\sqrt{s}$. Avaldada siit s.

130. Arvutada $\sqrt{17}$ veaga alla 0,00001.

131. Arvutada $\sqrt{10}$ veaga alla 0,01.

132. Kasutades ruutjuurte tabelit arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$	2. $7\sqrt{12}$	3. $\sqrt{31}:4$
$\sqrt{7}-\sqrt{5}$	$12\sqrt{15}$	$\sqrt{55}:12$
$\sqrt{12}+\sqrt{15}$	$0{,}3\sqrt{19}$	$\sqrt{63}:0{,}3$
$\sqrt{23}-\sqrt{19}$	$1{,}8\sqrt{23}$	$\sqrt{92}:1{,}7$
$\sqrt{100}-\sqrt{75}$	$0{,}01\sqrt{37}$	$\sqrt{111}:8{,}9$

4. $\sqrt{5}+\sqrt{8}$	5. $3\sqrt{17}+2\sqrt{15}-0{,}5\sqrt{8}$
$\sqrt{7}-\sqrt{4}$	$4\sqrt{2}+7\sqrt{2}-2$
$\sqrt{10}+\sqrt{11}$	$5\sqrt{7}\cdot\sqrt{11}+3\sqrt{19}\cdot\sqrt{21}$
$\sqrt{19}-\sqrt{14}$	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$
$\sqrt{10}+\sqrt{20}$	$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{5}-2\sqrt{6}$

Peatükk III.

Ruutvõrrand.

§ 25. Ruutvõrrandi üldkuju.

Olgu antud mingi võrrand, milles pole liikmeid otsitavaga nimetajas. Võtame võrrandi liikmed vasakule poolele nii, et paremale poolele jääks üksainus liige null; avame kõik sulud ja koondame vasaku poole;

kui peale sulgude avamist ja koondamist kõrgeim aste, milles esineb otsitav, on teine aste, siis nimetame võrrandit teise astme võrrandiks ehk ruutvõrrandiks.

Sama nimetuse anname sel korral ka lähtevõrrandile. Nii on võrrandid

$$x^2 = 7 \qquad 4x^2 = 9 \qquad \frac{1}{2}x^2 = x + 10$$

$$5x^2 - 4 = x \qquad 0{,}3x^2 + 0{,}7x - 10 = 0$$

kõik ruutvõrrandid. Seevastu võrrandid

$$\frac{4}{x^2} - x = 7 \qquad \frac{2x}{x-3} = 5 \qquad x^3 = 2x^2 + 10$$

pole ruutvõrrandid.

Ruutvõrrandis peab esinema liige otsitava ruuduga; peale selle võib esineda liige otsitava esimese astmega ning otsitavast vaba liige. Kui need liikmed tähistame ax^2, bx ja c, saame võrrandi kirjutada kujul

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

See on r u u t v õ r r a n d i ü l d k u j u. Selles võrrandis a ei saa olla null, sest vastasel korral, kui $a = 0$, võrrand poleks enam ruutvõrrand.

Võime ikka oletada, et $a > 0$; kui see poleks nii, saavutaksime selle, korrutades võrrandi kumbagi poolt —1-ga.

Jagades viimase võrrandi kõiki liikmeid arvuga a, saame

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0;$$

valides kordajate $\frac{b}{a}$ ja $\frac{c}{a}$ jaoks uued tähised p ja q, saame võrrandi kirjutada kujul

$$x^2 + px + q = 0.$$

Sel kujul kirjutatud ruutvõrrandit nimetame t a a n d a t u d r u u t v õ r r a n d i k s.

Kokkuvõttes:

võrrandit $ax^2 + bx + c = 0$ nimetame ü l d k u j u l i s e k s ruutvõrrandiks, võrrandit $x^2 + px + q = 0$ t a a n d a t u d ruutvõrrandiks.

Võib juhtuda, et ruutvõrrandis puudub teine või kolmas liige või mõlemad;

kui ruutvõrrandis puudub otsitavast vaba liige või liige otsitava esimese astmega, siis nimetame ruutvõrrandit m i t t e t ä i e l i k u k s.

§ 26. Mittetäielike ruutvõrrandite lahendamine.

1. j u h t u m. Kui ruutvõrrandi vabaliige on null, omab võrrand kuju

$$ax^2 + bx = 0.$$

Selle lahendamiseks võtame vasakul poolel otsitava sulgude ette; saame

$$x(ax + b) = 0.$$

Viimane võrdus nõuab, et tegurite x ja $ax+b$ korrutis oleks null. Korrutis on aga ainult siis null, kui tegurite hulgas esineb null. Et siin on kaks tegurit, siis on võrrandi rahuldamiseks kaks võimalust: 1) kui esimene tegur võetakse nulliks, siis korrutis tuleb null, hoolimata teise teguri väärtusest; 2) kui esimest tegurit ei võeta nulliks, siis teine tegur peab olema null. Kaks võrrandi rahuldamise võimalust annavadki kaks lahendit — esimesele võimalusele vastavalt saame

$$x_1=0$$

ja teisele võimalusele vastavalt

$$ax_2+b=0,$$

millest

$$x_2=-\frac{b}{a}\cdot$$

Kontrollimisel selgub, et nii 0 kui ka $-\frac{b}{a}$ rahuldavadki antud võrrandit.

Ülesanne. Lahendada võrrand $4x^2+3x=0$.

Lahendus. Kirjutame antud võrrandi kujul

$$x\,(4x+3)=0.$$

Siit järeldame, et

$$x_1=0 \text{ ja } 4x_2+3=0,$$

see tähendab, et

$$x_1=0 \text{ ja } x_2=-\frac{3}{4}\cdot$$

Kontroll.

$$4\cdot 0^2+3\cdot 0=0; \text{ samuti } 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=$$

$$=4\cdot\frac{9}{16}-\frac{9}{4}=0.$$

2. juhtum. Kui ruutvõrrandis puudub liige otsitava esimese astmega, omab võrrand kuju

$$ax^2+c=0.$$

Siit saame

$$ax^2=-c$$

ja

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

Kui avaldis $-\frac{c}{a}$ on positiivne, saame kaks lahendit:

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{ja} \quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Kui avaldis $-\frac{c}{a}$ on negatiivne, siis meie võrrandil ei ole lahendit; tõepoolest, nõuet

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

sel juhul täita ei saa, sest vasakul poolel seisab ruut — see oma loomult ei saa iialgi olla negatiivne arv, paremal aga just on negatiivne.

Kui $c=0$, siis on ka $-\frac{c}{a}=0$, seega võrrand nõuab, et $x^2=0$, järelikult võrrandil on kaks teineteisega võrdset lahendit:

$$x_1=0 \quad \text{ja} \quad x_2=0.$$

Näiteid.

1. $9x^2-16=0$; $x^2=\frac{16}{9}$, $x_1=\frac{4}{3}$ ja $x_2=-\frac{4}{3}$.

Võrrandil on kaks lahendit.

2. $x^2+10=0$; $x^2=-10$.

Võrrandil pole lahendit.

133. Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

1. $x^2 = 529$	2. $x^2 = \frac{16}{81}$	3. $5x^2 = 0{,}0716$
$x^2 = 343$	$x^2 = 0{,}64$	$6x^2 = 25{,}1001$
$x^2 = 363$	$x^2 = 0{,}5776$	$1{,}3x^2 = 2{,}873$
$x^2 = 1116$	$x^2 = 0{,}0275$	$0{,}16x^2 = 0{,}261$
$x^2 = 2701$	$x^2 = 0{,}8464$	$0{,}75x^2 = 0{,}111$

134. Lahendada järgmised ruutvõrrandid, rakendades korrutise nulliks taandumise tingimust:

1. $x(x+2) = 0$	2. $x^2 - 13x = 0$
$(x-4)(x+5) = 0$	$6x^2 + 8x = 0$
$(x-3)(x-7) = 0$	$9x^2 - 2x = 0$
$3x(7x-8) = 0$	$5x^2 + 12x = 0$
$5(x+1)x = 0$	$2x^2 + \frac{4}{3}x = 0$

§ 27. Ruutvõrrandi $(x+m)^2 = n$ lahendamine.

Võrrandi $(x+m)^2 = n$ vasak pool on täisruut. Kui $n < 0$, pole võimalik seatud nõuet rahuldada, sest täisruudu väärtus ei saa iialgi olla negatiivne. Sel juhul võrrandil pole lahendit.

Kui $n = 0$, siis võrrand on $(x+m)^2 = 0$,

seega

$$(x+m)(x+m) = 0,$$

niisiis

$$x_1 = -m \quad \text{ja} \quad x_2 = -m,$$

seega on võrrandil kaks teineteisega võrdset lahendit.

Kui $n > 0$, saame

$$x + m = \pm \sqrt{n},$$

seega

$$x = -m \pm \sqrt{n},$$

millest leiame võrrandi kaks lahendit:

$$x_1 = -m + \sqrt{n} \quad \text{ja} \quad x_2 = -m - \sqrt{n}.$$

Ülesanne. Lahendada võrrand

$$(x + 3)^2 = 25.$$

Lahendus. Saame

$$x + 3 = \pm \sqrt{25}$$

ehk

$$x + 3 = \pm 5;$$

seega $x_1 = -3 + 5 = 2$ ja $x_2 = -3 - 5 = -8.$

Ülesanded.

135. Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

1. $(x - 2)^2 = 16$ 2. $(x - 1{,}4)^2 = 33{,}64$

$(x + 5)^2 = 25$ $\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{36}{81}$

$(x - 9)^2 = 529$ $\left(x - \frac{6}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$

$(x - 0{,}3)^2 = 1{,}69$ $\left(x + 8\frac{1}{2}\right)^2 = 52\frac{9}{16}$

$(x - 1{,}2)^2 = 1{,}44$ $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 28\frac{4}{9}$

136. Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

1. $(x-3)^2=8$

   $(x+4)^2=12$

   $(x+10)^2=10$

   $(x-1)^2=3$

   $(x+7)^2=17$

2. $(x-1{,}2)^2=1{,}43$

   $(x-0{,}2)^2=0{,}5$

   $(x+0{,}5)^2=2{,}27$

   $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=1\frac{2}{9}$

   $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2=3\frac{1}{4}$

§ 28. Taandatud ruutvõrrandi lahendamine.

Ülesanne 1. Lahendada võrrand $x^2+6x+9=49$.

Lahendus. Kirjutades antud võrrandi kujul

$$(x+3)^2=49$$

näeme, et ta kuulub eespool-käsiteldud võrrandiliiki. Lahendades saame

$$x+3=\pm\sqrt{49},$$

seega

$$x+3=\pm 7,$$

niisiis

$$x=-3\pm 7,$$

järelikult

$$x_1=-3+7 \quad \text{ja} \quad x_2=-3-7$$

ehk

$$x_1=4 \quad \text{ja} \quad x_2=-10.$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrand $x^2+6x=55$.

Lahendus. Võrreldes seda võrrandit eelmises ülesandes esinenud võrrandiga, paneme tähele, et vasakud pooled erinevad vaid vabaliikme 9 võrra. Liidame selle arvu vasaku poolega ja teeme sama ka parema poolega, et võrdus jääks jõusse; saame:

$$x^2 + 6x + 9 = 55 + 9$$

ehk

$$(x + 3)^2 = 64 ;$$

siit

$$x + 3 = \pm \sqrt{64}$$

ehk

$$x + 3 = \pm 8$$

ehk

$$x = -3 \pm 8$$

ehk

$$x_1 = -3 + 8 = 5 \quad \text{ja} \quad x_2 = -3 - 8 = -11.$$

Ülesanne 3. Lahendada võrrand $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Lahendus. Teisendame antud võrrandi nii, et võrrandi vasak pool on täisruut. Selleks viime vabaliikme paremale poolele; saame

$$x^2 + 3x = 10.$$

Tähele pannes, et avaldist $3x$ võime kirjutada kujul $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x$, näeme, et vasak pool saab täisruuduks, kui temaga liidame $\left(\frac{3}{2}\right)^2$; et võrdus jääks jõusse, tuleb sedasama teha ka parema poolega; nii saame

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Seega on

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{4}$$

ehk

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} ;$$

siit

$$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{49}{4}}=\pm\frac{7}{2},$$

see tähendab

$$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{7}{2},$$

seega

$$x_1=-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=2 \quad \text{ja} \quad x_2=-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}=-5.$$

Praegu arendatud mõttekäik leiab rakendamist järgmises paragrahvis taandatud ruutvõrrandi lahendusvalemi tuletamisel.

Ülesanded.

137. Täiendada järgmised avaldised täisruutudeni:

1. x^2+14x	2. x^2+7x	3. $x^2+\frac{2}{3}x$
x^2+8x	$x^2-0{,}8x$	$x^2-\frac{3x}{4}$
x^2-100x	$x^2+1{,}4x$	$x^2-0{,}2x$
x^2-5x	$x^2+\frac{1}{2}x$	$x^2+7{,}2x$
x^2+x	$x^2-\frac{4}{5}x$	$x^2-0{,}04x$

138. Täiendada järgmised avaldised täsruutudeni:

1. a^2+6a	2. f^2+7f	3. m^2-11m
b^2+2b	g^2-9g	$n^2+1{,}4n$
c^2-8c	h^2-3h	$p^2+\frac{2}{5}p$
d^2-16d	$i^2+0{,}46i$	q^2-q
c^2+24c	$k^2-\frac{5}{6}k$	$r^2-\frac{4r}{3}$

139. Lahendada järgmised ruutvõrrandid, tarvitades täisruuduni täiendamise võtet:

1. $x^2 - 2x = 3$	2. $p^2 + 3p - 18 = 0$
$y^2 + 4y = 5$	$q^2 - 7q + 10 = 0$
$z^2 - 6z = -8$	$r^2 - r - 12 = 0$
$u^2 - 8u = 9$	$s^2 + 5s + 6 = 0$
$v^2 - 10v = 11$	$t^2 - 3t - 9 = 0$

§ 29. Taandatud ruutvõrrandi lahendusvalem.

Kirjutame antud võrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

kujul

$$x^2 + px = -q$$

ja täiendame vasaku poole täisruuduni; selleks liidame vasaku poolega liikme $\left(\frac{p}{2}\right)^2$; et võrdus jääks jõusse, teeme seda ka parema poolega; nii saame

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

ehk

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Kui nüüd ilmneb, et avaldis $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ on negatiivne, siis võrrandil ei ole lahendeid, sest ei saa kehtida võrdus, mille üks pool on mingi arvu ruut ja teine pool on negatiivne arv.

Kui avaldis $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ei ole negatiivne, siis, võttes viimase võrduse kummastki poolest ruutjuure, saame kaks lineaarset võrrandit, mis ühe võrduse abil väljenduvad järgmiselt:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

seega

$$\boldsymbol{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.}$$

Saadud võrdust nimetame taandatud ruutvõrrandi *lahendusvalemiks*; sõnastame selle järgmiselt:

taandatud ruutvõrrandi lahendeiks on vastasmärgiga võetud pool otsitava esimese astme kordajast $\pm$ ruutjuur selle poole kordaja ruudu ja vabaliikme vahest. vastasmärgiga

Ülesanne. Lahendada võrrand $x^2 - x - 20 = 0$.

Lahendus. Siin on $p = -1$, $q = -20$, seega

$$\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Järelikult

$$x = -\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-20)}$$

ehk

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20}$$

ehk

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ ja } x_2 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Leitud arvude 5 ja —4 asetamine x-i asemele võrrandi vasakusse poolde kinnitab, et need arvud tõesti on võrrandi lahendid.

Eespool saadud lahendusvalemil on mõtet ainult siis, kui juurealune avaldis on positiivne või null:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0,$$

see tähendab, kui

$$p^2 - 4q \geqslant 0.$$

Kui

$$p^2 - 4q > 0,$$

siis on võrrandil kaks erinevat lahendit:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ja

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Kui

$$p^2 - 4q = 0,$$

siis on võrrandil kaks teineteisega võrdset lahendit:

$$x_1 = -\frac{p}{2} \text{ ja } x_2 = -\frac{p}{2}.$$

Kui

$$p^2 - 4q < 0,$$

siis võrrandil pole üldse lahendit, nagu eespool selgus.

Avaldist $p^2 - 4q$ nimetame taandatud ruutvõrrandi diskriminandiks.

Ladinakeelne sõna *discriminans* tähendab — eraldaja ehk vahetegija.

Diskriminandi märk määrab, kas võrrandil on lahendeid või mitte. Kui võrrandi vabaliige q on negatiivne, siis kindlasti võrrandil on kaks erinevat lahendit, sest siis on $p^2 - 4q$ kahtlematа positiivne. Muil juhtumeil tuleb lahendite olemasolu küsimuse otsustamiseks diskriminant arvutada.

Diskriminanti tähistatakse sageli tähega d. Diskriminandi d kaudu võime taandatud ruutvõrrandi lahendamisvalemi kirjutada kujul

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{d}}{2}.$$

140. Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$x^2 - x - 6 = 0$
$x^2 + 5x + 6 = 0$
$x^2 + 8x + 15 = 0$

2. $x^2 - 7x + 12 = 0$
$x^2 + 3x - 4 = 0$
$x^2 - 3x - 10 = 0$
$x^2 + 8x + 7 = 0$
$x^2 + 15x + 56 = 0$

141. Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

1. $x^2 - 6x + 4 = 0$
$x^2 + 8x + 13 = 0$
$x^2 - 5x + 3 = 0$
$x^2 - x - 50 = 0$
$x^2 + 7x - 5 = 0$

2. $x^2 + 5x + 4 = 0$
$x^2 - 9x - 1 = 0$
$x^2 + 2x + 0{,}7 = 0$
$x^2 + 0{,}8x - 1 = 0$
$x^2 + 5x + 6{,}5 = 0$

142. Lahendada järgmised ruutvõrrandid. Kus lahendit täpselt leida ei saa, määrata ta veaga alla 0,01. Kontrollida saadusi.

1. $x^2 - 9x - 36 = 0$
$x^2 + 7x - 7 = 0$
$x^2 - x - 20 = 0$
$x^2 + 2x - 2 = 0$
$x^2 - 20x + 91 = 0$

2. $x^2 - 8x + 9 = 0$
$x^2 + 5x - 66 = 0$
$x^2 + 4x + 4 = 0$
$x^2 + 7x - 120 = 0$
$x^2 - 3x - 5\frac{2}{5} = 0$

3. $x^2 + 3x - 19 = 0$
$x^2 - 11x + 10 = 0$
$y^2 - 4y + 6 = 0$
$y^2 + 9y + 12 = 0$
$z^2 - 7z - 8 = 0$

4. $u^2 - 6u + 4 = 0$
$u^2 + 13u - 14 = 0$
$v^2 - v + 42 = 0$
$v^2 - 9v + 7 = 0$
$w^2 + 15w - 1 = 0$

143. Jaotada lõik, mille pikkus on 30 cm, kahte ossa nõnda, et suurema osa jagatis kogu lõiguga on sama, mis väiksema osa jagatis suurema osaga.

144. Kahe arvu vahe on 6; samade arvude ruutude summa on 260. Mis arvud need on?

145. Kahe järjestikuse täisarvu korrutis on 156. Mis arvud need on?

146. Kahe teineteisele järgneva täisarvu ruutude summa on 85. Mis arvud need on?

147. Kahe järjestikuse paarisarvu korrutis on 288. Mis arvud need on?

148. Jaotada arv 19 kahte niisugusesse ossa, et nende osade ruutude summa oleks 181.

149. Kahe teineteisele järgneva paarituarvu korrutis on 1295. Mis arvud need on?

150. Kahest arvust on üks sajast niipalju suurem, kui teine on sajast väiksem. Arvude korrutis on 9639. Mis arvud need on?

§ 30. Üldkujulise ruutvõrrandi lahendusvalem.

Nagu ülalpool nägime, ruutvõrrandi üldkuju on

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Ka selle võrrandi saame lahendada täisruuduni täiendamise võttega. Selleks korrutame võrrandi kõiki liikmeid avaldisega $4a$, siis saame

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

ehk viies vabaliikme paremale poolele

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac;$$

lisame nüüd mõlemale poolele uue liikme b^2, siis saame

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Võrrandi vasak pool ongi nüüd täisruut, ta on võrdne nimelt avaldisega $(2ax+b)^2$, järelikult võime võrrandi nüüd kirjutada kujul

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Siit näeme, kas võrrand on lahenduv või mitte: kui kordajad a ja b ning vabaliige c on niisugused, et $b^2 - 4ac$ tuleb negatiivne, siis võrrandil lahendeid ei ole, nagu taandatud võrrandi puhulgi, sest siis võrrand nõuab, et $(2ax+b)^2$ oleks negatiivne, see on aga võimatu.

Kui $b^2 - 4ac$ ei ole negatiivne, siis saab võrrandist järeldada, et

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Otsitava x avaldamiseks tuleb nüüd liige b viia paremale poolele ja siis mõlemat poolt jagada kordajaga $2a$; saame

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

See on üldkujulise ruutvõrrandi l a h e n d u s v a l e m; selle võime sõnastada järgmiselt:

üldkujulise ruutvõrrandi lahend on murd; selle nimetaja on otsitava ruudu kordaja kahekordne; lugeja aga on vastasmärgiga võetud otsitava esimese astme kordaja $\pm$ ruutjuur selle kordaja ruudu ja neljakordse otsitava ruudu kordaja ja vabaliikme korrutise vahest.

Saadud valemil on mõtet ainult siis, kui juurealune avaldis on positiivne või null, niisiis neil juhtumeil, kui lahendid on olemas.

Kui

$$b^2 - 4ac > 0,$$

siis on kõnesoleval ruutvõrrandil 2 e r i n e v a t lahendit:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kui

$$b^2 - 4ac = 0,$$

siis on võrrandil 2 võrdset lahendit:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} \text{ ja } x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Kui

$$b^2 - 4ac < 0,$$

siis võrrandil pole üldse lahendit.

Avaldist $b^2 - 4ac$ nimetame üldkujulise ruutvõrrandi diskriminandiks.

Seda diskriminanti tähistatakse sageli tähega D. Diskriminandi märk määrab, kas võrrandil on lahendeid või mitte.

Diskriminandi D kaudu võime üldkujulise ruutvõrrandi lahendusvalemi kirjutada kujul:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Üldkujulise ruutvõrrandi lahendusvalem on rakendatav ka kõigi erikujuliste ruutvõrrandite lahendamisel:

kui $a = 1$, siis võrrand osutub taandatud ruutvõrrandiks $x^2 + bx + c = 0$ ja valem annab tema lahendid

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2};$$

kui $b = 0$, siis võrrand osutub mittetäielikuks ruutvõrrandiks (§ 26, 2. juhtum) $ax^2 + c = 0$ ja valem annab tema lahendid

$$\frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a} \text{ ehk lihtsustatult } \pm\sqrt{-\frac{c}{a}};$$

kui $c = 0$, siis võrrand on ka mittetäielik, nimelt $ax^2 + bx = 0$ (§ 26, 1. juhtum) ja valemi järgi saame lahendid

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} \text{ ehk } \frac{-b \pm b}{2a} \text{ ehk eraldi kirjutades } 0 \text{ ja } -\frac{b}{a}.$$

Ülesanne 1. Lahendada võrrand $6x^2+7x-3=0$.

Lahendus. Võrrandi diskriminant

$$D=7^2-4\cdot 6\cdot(-3)=49+72=121;$$

D on positiivne, seega võrrandil peab olema kaks erinevat lahendit.

Lahendusvalem annab:

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{121}}{12}=\frac{-7\pm 11}{12}.$$

Seega

$$x_1=\frac{-7+11}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

ja

$$x_2=\frac{-7-11}{12}=-\frac{18}{12}=-\frac{3}{2}.$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrand $3x^2-x-1=0$.

Lahendus. Võrrandi diskriminant

$$D=(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-1)=1+12=13;$$

D on positiivne, seega võrrandil peab olema kaks erinevat lahendit.

Lahendusvalem annab:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}.$$

Seega

$$x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{6} \quad \text{ja} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{6}.$$

Ülesanne 3. Lahendada võrrand $5x^2-4x+7=0$.

Lahendus. Võrrandi diskriminant

$$D=(-4)^2-4\cdot 5\cdot 7=16-140=-124;$$

D on negatiivne, seega võrrandil lahendit pole.

§ 31. Üldkujulise ruutvõrrandi lahendusvalem erijuhul, kui kordaja *b* on paarisarv.

Kui üldkujulises ruutvõrrandis kordaja b on paarisarv, siis saab lahendusvalemi lihtsamaks teisendada. Paarisarvulise kordaja b võime kirjutada kujul

$$b = 2k.$$

Asendades valemis

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

suuruse b avaldisega $2k$, saame

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} =$$

$$= \frac{2(-k \pm \sqrt{k^2 - ac})}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Nii et

$$\boldsymbol{x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}}.$$

Nagu näeme, see valem on üldisest valemist sellepoolest lihtsam, et juuremärgi all puudub kordaja 4 ja nimetajas puudub kordaja 2.

Ülesanne. Lahendada võrrand

$$63x^2 + 62x + 15 = 0.$$

Lahendus. Nüüd $b = 62 = 2 \cdot 31$, seega $k = 31$.

Rakendades lihtsustatud lahendusvalemit, saame

$$x = \frac{-31 \pm \sqrt{961 - 945}}{63} = \frac{-31 \pm \sqrt{16}}{63} = \frac{-31 \pm 4}{63};$$

$$x_1 = \frac{-31 + 4}{63} = -\frac{27}{63} = -\frac{3}{7};$$

$$x_2 = \frac{-31 - 4}{63} = \frac{-35}{63} = -\frac{5}{9}.$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrand

$$\frac{15x}{2(x-3)}-\frac{x}{2(x+3)}+\frac{9}{x^2-9}=0.$$

Lahendus. Võrrandis esinevate murdude ühine nimetaja on $2\,(x^2-9)$, seega vastavad laiendajad on $x+3$, $x-3$ ja 2.

Niisiis

$$\frac{\overbrace{15x}^{x+3}}{2(x-3)}-\frac{\overbrace{x}^{x-3}}{2(x+3)}+\frac{\overbrace{9}^{2}}{x^2-9}=0$$

$$15x^2+45x-x^2+3x+18=0$$

$$14x^2+48x+18=0$$

$$7x^2+24x+9=0$$

$$x=\frac{-12\pm\sqrt{144-63}}{7}=\frac{-12\pm\sqrt{81}}{7}=\frac{-12\pm 9}{7};$$

$$x_1=\frac{-12+9}{7}=-\frac{3}{7};\ x_2=\frac{-12-9}{7}=-3.$$

Kontroll. Asetame esimese leitud lahendi algvõrrandi vasakusse poolde x-i asemele, siis saame

$$\frac{15\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)}{2\cdot\left(-\frac{3}{7}-3\right)}-\frac{-\frac{3}{7}}{2\cdot\left(-\frac{3}{7}+3\right)}+\frac{9}{\frac{9}{49}-9}=$$

$$=\frac{-\frac{45}{7}}{-\frac{48}{7}}+\frac{\frac{3}{7}}{\frac{36}{7}}+\frac{9}{\frac{9-441}{49}}=\frac{45}{48}+\frac{3}{36}+\frac{9\cdot 49}{-432}=$$

$$=\frac{15}{16}+\frac{1}{12}-\frac{49}{48}=0.$$

Näeme, et lahend $-\frac{3}{7}$ rahuldab võrrandit, seetõttu võib arvata, et arvutused on õiged ja et ka teine lahend on õigesti arvutatud; et aga antud võrrandis otsitav esineb nimetajas, siis peab ka teist lahendit proovima, sest võib juhtuda, et arvutused on küll õiged, aga mõni lahendiks saadud arv ei rahulda algvõrrandit.

Kui $x = -3$, siis algvõrrandi vasak pool saab kuju

$$\frac{15(-3)}{2(-3-3)} - \frac{-3}{2(-3+3)} + \frac{9}{(-3)^2-9}$$

ehk

$$\frac{-45}{-12} - \frac{-3}{2 \cdot 0} + \frac{9}{9-9};$$

et siin esinevad jagamised nulliga, siis pole sel avaldisel arvu tähendust ega saa ta võrduda võrrandi parema poole väärtusega. Järelikult arv -3 ei ole algvõrrandi lahend.

Ülesanded.

151. Leida järgmiste ruutvõrrandite lahendid, rakendades võrrandi lahendusvalemit, ja kontrollida saadusi:

1. $3x^2 - 2x - 8 = 0$	2. $13x^2 - 11x - 2 = 0$
$2x^2 + 9x + 10 = 0$	$9x^2 + 12x - 5 = 0$
$4x^2 + 7x - 2 = 0$	$4x^2 - 4x - 3 = 0$
$2x^2 - 5x + 2 = 0$	$8 + 11x - 10x^2 = 0$
$3x^2 - 8x - 3 = 0$	$2 + 3x - 2x^2 = 0$

152. Leida järgmiste ruutvõrrandite lahendid veaga alla 0,1, tarvitades lahendusvalemit, ja kontrollida saadusi:

1. $x^2 + 9x - 5 = 0$	2. $5a^2 - 11a + 3 = 0$
$2y^2 + y - 7 = 0$	$3b^2 + 12b - 17 = 0$
$3z^2 - 8z + 4 = 0$	$6c^2 - 13c - 15 = 0$
$2u^2 + 3u - 1 = 0$	$d^2 - 14d + 4 = 0$
$3v^2 - 10v + 10 = 0$	$e^2 - 16e + 11 = 0$

153. Allpool järgneb 10 ruutvõrrandit. Anda nende ratsionaalsed lahendid täpselt, nende irratsionaalsed lahendid aga ligikaudu veaga alla 0,01.

1. $3x^2+5x-2=0$	2. $4m^2+45m-36=0$
$2u^2+5u+2=0$	$10n^2+21n-10=0$
$s+6=2s^2$	$9q^2+30q-24=0$
$6a^2-17a-14=0$	$1{,}4z^2+5z=2{,}4$
$10p-21=6p^2-13p$	$w^2-1{,}6w+0{,}3=0$

154. Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

1. $2x^2-7x+5=0$	2. $7x^2-42x+36=0$
$x^2+23x-10=0$	$69x^2-x-55=0$
$6x^2+4x-3=0$	$9x^2+50x-121=0$
$3x^2+18x-8=0$	$1{,}2x^2+8{,}3x-23{,}6=0$
$4x^2-13x-17=0$	$3{,}4x^2-2{,}5x-6=0$

155. Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

1. $x(x+2)=35$	2. $(x+7)^2=28x$
$x^2=3(2x-3)$	$4=(x-5)^2$
$2(x^2-9)=5(x-4)$	$(x-5)(7-x)=1$
$(x-1)^2=x+1$	$x^2=2(x+8)(x-6)$
$(1+2x)(1-2x)=3x$	$(2x-7)(x-3)=4x$

3. $9x(x+1)=2(6x+1)$
$(1+x)^2=(1-2x)^2$
$(3x-2)(2x-1)=x$
$(3-x)^2=(1+3x)(9-x)$
$(2x+3)^2=(3x-2)(x+8)$

4. $(3x-1)(x-2)=(x+2)(x-1)$
$(4x-1)^2=(4x+1)(8x-5)$
$(5x+7)^2-(2x+1)^2=0$
$2(x-1)(2x+1)=(4x-1)(2x-3)$
$(8x+3)(4x+1)=2(x+1)(4x+3)$

156. Allpool on antud 10 ruutvõrrandit. Ilma võrrandit lahendamata otsustada, kas võrrandil on lahendeid, kas nad on ratsionaalsed ja kas nad on teineteisega võrdsed või mitte.

1.	2.
$3x^2 - 8x + 5 = 0$	$9x^2 + 12x + 4 = 0$
$x^2 - 4x + 8 = 0$	$7z^2 + 3z = 0$
$a^2 + 3a - 1 = 0$	$u^2 + 2u + 3 = 0$
$5c^2 - 3c = 2$	$5v^2 + 7v + 3 = 0$
$3n^2 = 7n + 6$	$w^2 - 6w + 4 = 0$

157. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{19x}{x+1} + \frac{11x}{x-1} = \frac{6}{x^2-1}$

2. $\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x(1-x)} = \frac{x-2}{x(x+1)}$

3. $\frac{1}{12-5x} + \frac{1}{5x-12} = 1 + \frac{120}{(12-5x)^2}$

4. $3(2x-3) - \frac{22}{x} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot 5$

5. $\frac{9-x}{2} + \frac{4}{x-2} = \frac{3(x-1)}{2}$

6. $11x^2 + 7x - \frac{3}{7} = 4x(x+1) + 1$

7. $\frac{x-3}{x+4} + \frac{x-4}{2(x-1)} = \frac{1}{2}$

8. $\frac{3x+2}{2x-1} + \frac{7-x}{2x+1} = \frac{7x-1}{4x^2-1} + 5$

9. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0$

10. $\frac{3}{5(x^2-1)} + \frac{1}{10(x+1)} = \frac{23}{238}$

11. $\frac{8}{3x-5} + \frac{9}{5x-8} = \frac{20}{7x-25}$

12. $\frac{2x+1}{7-x} + \frac{4x+1}{7+x} = \frac{45}{49-x^2} + 1$

13. $\frac{2(x+7)}{x+1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+11}{x^2-1}+4$

14. $7+\frac{1}{x-1}=\frac{x^2}{x-1}$

15. $\frac{x}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)^2}$.

§ 32. Ruutvõrrandi koostamise ja lahendamise näiteid.

Ülesanne 1. Ristkülikukujuline spordiväljak on 88 aari suur. Kui üht tema külge vähendada 2 m võrra, teist aga suurendada 10 m võrra, saame ruudukujulise väljaku. Kui suur on selle ruudu külg?

Lahendus. Olgu ruudu külg x meetrit. Siis on ristküliku küljed meetrites $x+2$ ja $x-10$. Seega ristküliku pindala on ruutmeetrites

$$(x+2)(x-10)$$

ehk

$$x^2-8x-20.$$

Teiselt poolt see pindala on 88 aari ehk 8800 ruutmeetrit. Järelikult

$$x^2-8x-20=8800$$

ehk

$$x^2-8x-8820=0.$$

Võrrandi lahendusvalem annab:

$$x=4\pm\sqrt{8836}$$

ehk

$$x=4\pm 94;$$

seega

$$x_1=4+94=98 \quad \text{ja} \quad x_2=4-94=-90.$$

Et ruudu külg on oma loomult positiivne suurus, siis x_2 meie ülesande lahendina ei tule arvesse. Ainsaks ülesande lahendiks jääb arv 98; see tähendab, et otsitav ruudu külg on 98 m.

K o n t r o l l: väljaku küljed on meetrites $98+2=100$ ja $98-10=88$; seega väljaku pindala on $100 \cdot 88$ ehk 8800 ruutmeetrit ehk 88 aari, nagu peab olema.

Ü l e s a n n e 2. Ema kingib tütrele 216 rubla taskurättide ostmiseks. Poes selgub, et rätid on vahepeal hinnas langenud 1 rubla tükilt, mille tõttu neid rätte saaks kingitud raha eest osta 3 tükki enam kui kavatseti. Mitu rätti kavatseti osta?

L a h e n d u s. Olgu osta soovitud rättide arv x. Nende eelarvestatud tükihind oleks siis $\frac{216}{x}$ rubla. Räti hind poes on sellest 1 rubla madalam, seega

$$\frac{216}{x}-1$$

rubla. Selle tükihinna puhul saaks rätte osta 3 tükki enam kui kavatseti, niisiis

$$x+3.$$

Rättide koguhinna rublades saame kujul

$$(x+3)\left(\frac{216}{x}-1\right);$$

see koguhind oli 216 rubla, järelikult

$$(x+3)\left(\frac{216}{x}-1\right)=216.$$

Et $x \neq 0$, siis võime x-iga korrutada võrrandi kumbagi poolt; saame

$$(x+3)(216-x)=216x$$

ehk

$$216x+648-x^2-3x=216x$$

ehk

$$-x^2-3x+648=0$$

ehk jagades võrrandi kumbagi poolt -1-ga

$$x^2+3x-648=0.$$

Otsitava x määramine nõuab taandatud ruutvõrrandi lahendamist. See annab

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 648} = \frac{-3 \pm \sqrt{2601}}{2}$$

ehk

$$x_1 = \frac{-3+51}{2} = 24 \text{ ja } x_2 = \frac{-3-51}{2} = -27.$$

Et rättide arv on oma loomult positiivne, siis teine lahend ei tule arvesse. Seega kavatseti osta taskurätte 24 tükki ehk 2 tosinat. Räti eelarvestatud hinna saame jagades 216 rubla 24-ga; nii leiame:

216 rubla : 24 = 9 rubla.

Kontroll: 9 — 1 = 8; nii mitu rubla maksab rätt poes; 216 : 8 = 27; nii mitu rätti saaks osta; see arv on just kolme võrra suurem 24-st, nagu peab olema.

Ülesanne 3. Kahe koha A ja B vaheline kaugus on 349 km. Kohast A lahkub sõiduk koha B suunas. Üks tund hiljem lahkub kohast B teine sõiduk koha A suunas. Teise sõiduki kiirus on 8 km võrra tunnis väiksem kui esimese kiirus. Sõidukid kohtuvad 216 km kaugusel kohast A. Kui suure kiirusega liigub kumbki sõiduk?

Lahendus. Olgu esimese sõiduki kiirus v kilomeetrit tunnis; siis on teise kiirus $(v-8)$ kilomeetrit tunnis. Kuni kohtumiseni tuli esimesel sõidukil katta 216 km, teisel 349 — 216 ehk 133 km. Selleks kulus aega

esimesel $\frac{216}{v}$ tundi,

teisel $\frac{133}{v-8}$ tundi.

Esimese aeg on teisest ühe tunni võrra pikem, seega

$$\frac{216}{v} - \frac{133}{v-8} = 1.$$

Saadud võrrandi lahendamiseks vabaneme murdudest:

$$216(v-8)-133v=v(v-8);$$

avame sulud:

$$216v-1728-133v=v^2-8v;$$

viime liikmed vasakule poolele, koondame ja korrutame —1-ga; see annab:

$$v^2-91v+1728=0.$$

Võrrandi diskriminant on

$$91^2-4\cdot 1728=1369;$$

et see diskriminant on positiivne, siis on võrrandil 2 erinevat lahendit. Lahendusvalem annab:

$$v=\frac{91\pm\sqrt{1369}}{2} \text{ ehk } v=\frac{91\pm 37}{2};$$

seega

$$v_1=64 \quad \text{ja} \quad v_2=27.$$

Niisiis on esimese sõiduki kiirus kas 64 km tunnis või 27 km tunnis ning teise sõiduki kiirus sellele vastavalt kas 56 km tunnis või 19 km tunnis.

Kontrollime tulemusi ülesande teksti varal.

Esimese lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega

$$\frac{216}{64} \text{ ehk } 3\frac{3}{8} \text{ tundi, teine seevastu } \frac{133}{56} \text{ ehk } 2\frac{3}{8} \text{ tundi;}$$

aegade vahe on $3\frac{3}{8}-2\frac{3}{8}$ ehk 1 tund, nagu peab olema.

Teise lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega

$$\frac{216}{27} \text{ ehk 8 tundi, teine seevastu } \frac{133}{19} \text{ ehk 7 tundi;}$$

aegade vahe on $8-7$ ehk 1 tund, nagu peab olema. Mõlemad lahendipaarid kõlbavad.

§ 33. Ruutvõrrandi abil lahenduvaid ülesandeid.

158. Ruudukujulisest papitükist valmistatakse karp mahuga 8 dm^3. Selleks lõigatakse nurkadest välja ruudud küljepikkusega 5 cm. Missuguse küljepikkusega on papitükk?

159. Kui ruudu üht külge suurendada 3 korda ja teist vähendada 2 m võrra, siis ruudu pindala suureneb 2 korda. Kui pikk on ruudu külg?

160. Kas on olemas kolm järjestikust paarisarvu, mis võiksid olla täisnurkse kolmnurga külgede mõõtarvudeks?

161. Kahe järjestikuse paarisarvu ruutude summa on 100. Mis arvud need on?

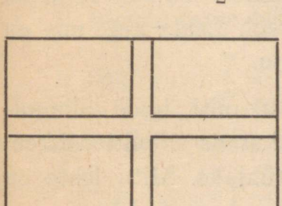
162. Kahe järjestikuse arvu ruutude vahe on 49. Mis arvud need on?

163. Arvu ja tema ruudu summa on 30. Mis arv see on?

164. Kiht pingpongi-palle katab karbi ruudukujulise põhja. Pärast ühe pallirea väljavõtmist jääb karpi veel 20 palli. Mitu palli on reas?

165. Ristküliku pikkus ületab laiuse ühe meetri võrra. Ristküliku pindala on 56 ruutmeetrit. Leida ristküliku mõõtmed.

166. Võõrastetoa põrandat, mille kuju on ristkülik ja mõõtmed 4,8 ja 5,5 m, tahetakse katta vaibaga nõnda, et vaiba ümber jääks igast küljest ühelaiune riba põrandat vabaks, vaip aga kataks parajasti $\frac{1}{2}$ põrandapindalast. Kui suur peab vaip olema?



167. Aia suurus on 160 korda 240 ruutmeetrit. Pikuti ja risti minevate teede alla (vaata joonist!) tahetakse võtta osa aiast, kuid mitte rohkem kui 2% kogu aia maa-alast. Kui suure võib valida ülimalt tee laiuse?

168. Kahe arvu vahe on 7; nende arvude korrutis on 368. Leida need arvud.

169. Mänguväli on ristkülikukujuline mõõtmetega 8 m ja 4 m. Mänguvälja pindala tehakse kaks korda suuremaks, suurendades võrdselt pikkust ja laiust. Kui palju tuleb pikendada kumbagi?

170. Paberitükist, mille mõõtmed on 24 ja 18 cm, lõigatakse igast neljast küljest ära võrdlaiused ribad. Ülejäänud ristkülikukujuline paber on pindalalt just pool paberitüki algpindalast. Kui laiad on äralõigatud ribad?

171. Pilt, mille mõõtmed on 20 ja 16 cm, on raamis, mille esipindala on 352 cm^2. Kui lai on pildi raam?

172. Ristkülikukujulisel papitükil, mille pikkus on 1,5 korda suurem tema laiusest, lõigatakse nurkadest ära ruudud küljega 3 cm. Murdes ülejääva osa sobivalt kokku, saadakse karp ruumalaga 216 cm^3. Kui suured on papitüki mõõtmed?

173. Raamatukappi võib mahutada 640 ühesuurust raamatut, igale riiulile ühepalju raamatuid. Kui igale riiulile panna 8 raamatut rohkem kui esialgu määratud, siis jääb 4 riiulit tühjaks. Mitu riiulit on raamatukapil?

174. Kaks bussi sõidavad kahe linna vahet, mis on võrdne 72 km. Et esimene buss sõidab tunnis 4 km rohkem kui teine, siis sõidab ta nimetatud tee 15 minuti võrra lühema aja jooksul ära kui teine. Kui suure kiirusega liiguvad bussid?

175. Raudteejaama veetorni paak täitub peapumba kaudu 2,5 tunni võrra kiiremini kui tagavarapumba kaudu. Mõlema pumba töötades täitub paak 3 tunni jooksul. Leida aeg, mis on tarvilik paagi täitumiseks peapumba kaudu.

176. Albumisse kavatseti kleepida 240 pilti, igale albumilehele ühepalju pilte. Kui igale lehele mahutada 2 pilti rohkem kui esialgu otsustatud, siis jääb 6 lehte tühjaks. Mitu lehte on albumis?

177. Kauplus vajab kaste 378 õuna pakkimiseks. Kui igasse kasti pandaks 9 õuna rohkem kui kavatsetud, siis vajataks kaste ühe võrra vähem. Mitu kasti on vaja?

178. Turist kavatses matkata 252 km. Et ta iga päev 3 km rohkem matkas kui kavatsetud, siis kestis matk 2 päeva vähem. Mitu päeva kestis matk?

179. Kahe aleviku vaheline kaugus on sillutatud maantee kaudu 26 km, halva külatee kaudu 18 km. Autobus ja hobusõiduk asuvad ühel ajal teele; esimene valib pikema, kuid parema tee, teine lühema, kuid halvema. Et autobus tunnis 15 km võrra rohkem sõidab kui hobusõiduk, jõuab ta sihtjaama viimasest 55 minutit varem. Kui suure kiirusega liigub autobus?

§ 34. Taandatud ruutvõrrandi lahendite omadused.

Taandatud ruutvõrrandi

$$x^2+px+q=0$$

lahendamisel leidsime, et

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

ja

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Moodustame lahendite summa; et liitmisel juured koonduvad, siis saame:

$$x_1+x_2=-\frac{p}{2}+\left(-\frac{p}{2}\right)=-p.$$

Moodustame lahendite korrutise; saame:

$$x_1\cdot x_2=\left[-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right]\cdot\left[-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right].$$

Rakendades summa ja vahe korrutise valemit, leiame:

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q.$$

Niisiis

$$x_1 + x_2 = -p$$

ja

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Tulemuse võime sõnastada järgmiselt:

taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub otsitava esimese astme vastasmärgilise kordajaga; lahendite korrutis võrdub vabaliikmega.

Ülesanne.

180. Allpool järgneb rida võrrandeid. Otsustada diskriminandi abil, neid võrrandeid lahendamata, missugused on lahenduvad, missugused mitte, ja lahenduvail võrrandeil otsustada eelnenud lause järgi, kas lahendid on positiivsed või negatiivsed või on üks lahend positiivne ja teine negatiivne.

1. $x^2 - 11x + 28 = 0$
$x^2 + 4x - 227 = 0$
$x^2 + 13x + 59 = 0$
$x^2 - 13x + 36 = 0$
$x^2 + 8x - 105 = 0$

2. $x^2 - 12x + 61 = 0$
$x^2 + 14x + 48 = 0$
$x^2 - 16x + 63 = 0$
$x^2 - 17x - 38 = 0$
$x^2 - 19x + 92 = 0$

§ 35. Ruutvõrrandi koostamine antud lahendite järgi.

Ülesanne. Koostada ruutvõrrand, millel on antud lahendid x_1 ja x_2.

Lahendus. Eespool-tuletatud lause põhjal on

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

ehk teisiti

$$p = -(x_1 + x_2) \text{ ja } q = x_1 \cdot x_2.$$

Seega nõutud ruutvõrrand on

$$x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Näide. Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on $-\frac{1}{2}$ ja $+\frac{1}{6}$.

Antud lahendite summa

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{-3+1}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3};$$

lahendite korrutis $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}$.

Järelikult $p=\frac{1}{3}$ ja $q=-\frac{1}{12}$ ning seega otsitav ruutvõrrand on

$$x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}=0.$$

Korrutades kumbagi poolt 12-ga, saame samade lahenditega üldkujulise ruutvõrrandi

$$12x^2+4x-1=0.$$

Ülesanded.

181. Kirjutada ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

1.	3 ja 4	2.	$\frac{1}{2}$ ja 0
	—5 ja 10		$\frac{5}{8}$ ja $-\frac{2}{3}$
	—2 ja —6		2,3 ja —1,1
	—9 ja 7		4,5 ja —0,9
	2 ja —2		3 ja $-\frac{1}{3}$

182. Koostada ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

1. $1+\sqrt{2}$ ja $1-\sqrt{2}$
2. $2+\sqrt{3}$ ja $2-\sqrt{3}$

3. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ja $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

4. $\frac{5+\sqrt{3}}{4}$ ja $\frac{5-\sqrt{3}}{4}$

5. $2\sqrt{7}$ ja $-2\sqrt{7}$

6. $3\sqrt{2}$ ja $-3\sqrt{2}$.

§ 36. Ruuttrinoomi tegureiks lahutamine.

Avaldist

$$az^2 + bz + c,$$

milles a, b ja c tähendavad mingeid arve, nimetame suuruse z ruutkolmliikmeks ehk ruuttrinoomiks. Selle avaldise tegureiks lahutamist saab alustada arvu a sulgude ette toomisega:

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right).$$

Tähistades $\frac{b}{a}$ ja $\frac{c}{a}$ lühemalt — tähtedega h ja k —, saame

$$az^2 + bz + c = a\,(z^2 + hz + k).$$

Nii jääb veel tegureiks lahutada juba lihtsam ruuttrinoom

$$z^2 + hz + k.$$

Sellekujulisi kolmliikmeid saame harilikult lihtsate lineaarsete kaksliikmete korrutamisel; näiteks

$$(z+2)(z+3) = z^2 + 3z + 2z + 6 = z^2 + 5z + 6.$$

Kui tähistame tähtedega f ja g mingit kaht arvu, siis saame üldiselt, rakendades kaksliikmete korrutamise võtet,

$$(z+f)\,(z+g) = z^2 + (f+g)\,z + fg.$$

Lugedes saadud võrdust vastassuunas, näeme, et kolmliige

$$z^2 + (f+g)\,z + fg$$

on esitatav korrutisena

$$(z+f)\,(z+g).$$

Järelikult ruuttrinoomi z^2+hz+k oskame otsekohe teisendada kahe lineaarse teguri korrutiseks $(z+f)(z+g)$, kui aga on teada niisugused arvud f ja g, millede summa on h ja korrutis on k. Mõnikord saab niisuguseid arve hõlpsasti leida proovimise teel; näiteks trinoomi $z^2+8z+15$ puhul on kerge näha, et need arvud on 3 ja 5, mistõttu

$$z^2+8z+15=(z+3)(z+5).$$

Märksa raskem, näiteks, on proovimisel otsusele jõuda, et

$$z^2-5z-36=(z+4)(z-9).$$

Kui proovimine ruttu eesmärgile viib, võime teda edukalt tarvitada. Ometi peame varuks nõutama ka algebralise võtte, mida saaksime rakendada kõigil juhtumeil, eriti kui arvud h ja k on suured ja proovimine läheks lootusetult pikaks, ning mis võimaldaks ka otsustada, kunas üldse on ruuttrinoom esitatav lineaarsete tegurite korrutisena.

Niisuguse algebralise võtte saamiseks tuletame meelde taandatud ruutvõrrandi omadusi: kaks arvu, millede summa on $-h$ ja korrutis on k, osutuvad ruutvõrrandi

$$x^2+hx+k=0$$

lahenditeks. Kui tähistame neid lahendeid, nagu harilikult, x_1 ja x_2, siis võrdustest

$$x_1+x_2=-h$$
$$x_1\cdot x_2=k$$

saame järeldada, et

$$(-x_1)+(-x_2)=h$$
$$(-x_1)\cdot(-x_2)=k.$$

Järelikult ruuttrinoomi z^2+hz+k tegureiks lahutamisel tarvisminevad arvud ongi $-x_1$ ja $-x_2$.

Saadud võtte võime sõnastada nõnda:

et lahutada ruuttrinoom $z^2 + hz + k$ tegureiks, lahendame võrrandi $x^2 + hx + k = 0$; leitud lahendite x_1 ja x_2 abil ruuttrinoom lahutub tegureiks järgmiselt:

$$z^2 + hz + k = (z - x_1)(z - x_2).$$

Kui võrrandil $x^2 + hx + k = 0$ ei ole lahendeid, siis tähendab see seda, et ei leidu niisugust arvupaari $-x_1$ ja $-x_2$, millede summa oleks h ja korrutis k; järelikult sel juhtumil ruuttrinoom ei ole esitatav lineaarsete tegurite korrutisena.

Et üldkujulise ruuttrinoomi $az^2 + bz + c$ tegureiks lahutamist jätkata — kujult $a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right)$, milleni ta viisime paragrahvi alguses, — tuleks lahendada võrrand $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Sel võrrandil on aga samad lahendid, mis võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$. Seepärast saame üldkujulise ruuttrinoomi kohta niisuguse juhise:

et lahutada ruuttrinoom $az^2 + bz + c$ tegureiks, lahendame võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$; leitud lahendite x_1 ja x_2 abil ruuttrinoom lahutub siis tegureiks järgmiselt:

$$az^2 + bz + c = a(z - x_1)(z - x_2).$$

Kui võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ ei ole lahendeid, siis ruuttrinoom $az^2 + bz + c$ tegureiks ei lahutu.

Ülesanne 1. Lahutada tegureiks trinoom

$$z^2 - 7z + 6$$

Lahendus. Võrrandi $x^2 - 7x + 6 = 0$ lahendamisel saame:

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

ehk

$$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

seega

$$z^2 - 7z + 6 = (z - 6)(z - 1).$$

Ülesanne 2. Lahutada tegureiks trinoom

$$3u^2 - 7u + 4.$$

Lahendus.

Võrrandi

$$3x^2 - 7x + 4 = 0$$

lahendamine annab:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6};$$

seega

$$x_1 = \frac{7+1}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Järelikult

$$3u^2 - 7u + 4 = 3(u-1)\left(u - \frac{4}{3}\right)$$

ehk

$$3u^2 - 7u + 4 = (u-1)(3u-4).$$

Ülesanded.

183. Lahutada järgmised trinoomid tegureiks:

1. $v^2 - v - 30$	2. $p^2 + 5p - 66$
$v^2 - 3v - 40$	$q^2 - 8q - 20$
$w^2 - 10w - 24$	$q^2 + 8q - 9$
$w^2 - 5w - 24$	$n^2 - n - 72$
$p^2 - 17p + 70$	$m^2 - m - 12$

184. Lahutada järgmised trinoomid tegureiks:

1. $a^2 - 20a + 36$	2. $k^2 + k - 132$
$c^2 + 14c + 48$	$m^2 + 11m - 42$
$2f^2 - 7f - 4$	$12n^2 + 5n - 3$
$3h^2 + 5h - 2$	$4p^2 - 16p + 15$
$5l^2 - 14l + 8$	$6r^2 + 5r - 1$

§ 37. Bikvadraatvõrrandi lahendamine.

Ruutvõrrandi kaudu lahenevad ka mõned võrrandid, mille aste on kõrgem kui 2, näiteks ruudu-ruutvõrrand ehk bikvadraatvõrrand

$$az^4 + bz^2 + c = 0.$$

Tõepoolest, tähistades z^2 tähega x näeme, et

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Olgu selle ruutvõrrandi lahendid x_1 ja x_2. Nõutavad z-i väärtused saame siis lahendades võrrandid

$$z^2 = x_1 \text{ ja } z^2 = x_2.$$

Ü l e s a n n e. Lahendada võrrand:

$$z^4 — 14z^2 — 32 = 0.$$

L a h e n d u s. Võttes $z^2 = x$ saame:

$$x^2 — 14x — 32 = 0.$$

Selle võrrandi lahendid on 16 ja —2.

Tähendab:

$$\text{kas } z^2 = 16 \text{ või } z^2 = —2.$$

Teist nõuet rahuldada ei saa, sest z^2 ei saa olla negatiivne. Esimesest aga saame

$$z_1 = 4 \text{ ja } z_2 = —4.$$

Kontroll: $4^4 — 14 \cdot 4^2 — 32 = 256 — 224 — 32 = 0$
ja samuti $(—4)^4 — 14 \cdot (—4)^2 — 32 = 0$, nagu peab olema.

185. Lahendada võrrandid:

1. $x^4 - 625 = 0$
   $x^4 - 74x^2 + 1225 = 0$
   $16x^4 - 17x^2 + 1 = 0$
   $3x^4 - 28x^2 - 20 = 0$
   $2x^4 - 7x^2 - 99 = 0$

2. $x^4 - 125x^2 + 2500 = 0$
   $x^4 - 641x^2 + 5000 = 0$
   $100x^4 - 161x^2 - 144 = 0$
   $16x^4 - 73x^2 + 36 = 0$
   $36x^4 - 109x^2 + 3 = 0$

§ 38. Ruutvõrrand-süsteem.

Olgu tegemist süsteemiga, mis koosneb kahest võrrandist kahe tundmatuga.

Kui üks süsteemi võrrandeist on ruutvõrrand, teine aga kas ruutvõrrand või lineaarvõrrand, siis nimetame süsteemi ruutvõrrand-süsteemiks.

Näiteks on süsteemid

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 32 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

ruutvõrrand-süsteemid.

Süsteemi nimetame ka siis ruutvõrrand-süsteemiks, kui tema võrrandeis ei esine ei liiget x^2-ga ega ka liiget y^2-ga, küll aga liige *tundmatute korrutisega* xy. Näiteks on süsteem

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 5 \end{cases}$$

ruutvõrrand-süsteem.

Käsitleme allpool ainult mõnda ruutvõrrand-süsteemi eritüüpi.

1. *tüüp.* Üks süsteemi võrrandeist on ruutvõrrand, teine lineaarvõrrand.

Niisugust süsteemi näeme esimeses ülaltoodud näites. Kõnesolevat tüüpi võrrandsüsteem lahendub järgmiselt: avaldame lineaarvõrrandist ühe tundmatu ja asetame leitud avaldise selle tundmatu asemele ruutvõrrandisse; saame ühe tundmatuga ruutvõrrandi; seda lahendades ja lineaarset võrrandit arvestades leiame süsteemi lahendid.

N ä i d e. Lahendame süsteemi:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases}$$

Esimesest võrrandist saame

$$y = 10 - 2x,$$

seega järeldub teisest, et

$$x^2 + (10 - 2x)^2 = 65$$

ehk

$$x^2 + 100 - 40x + 4x^2 = 65$$

ehk

$$5x^2 - 40x + 35 = 0$$

ehk

$$x^2 - 8x + 7 = 0,$$

millest

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_2 = 7$$

ja järelikult

$$y_1 = 8 \quad \text{ja} \quad y_2 = -4.$$

Meie süsteemil on kaks lahendit

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 8 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = -4. \end{cases}$$

2. t ü ü p. Võrrandeis esinevad tundmatud ainult teises astmes. Kui võtame tundmatute ruudud abitundmatuiks, saame juba nende leidmiseks lineaarvõrrand-süsteemi.

N ä i d e. Süsteemis

$$\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 = 5 \\ 2x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

võtame x^2 ja y^2 abitundmatuiks u ja v; et süsteemi

$$\begin{cases} 5u - 3v = 5 \\ 2u - v = 7 \end{cases}$$

lahendiks on

$$\begin{cases} u = 16 \\ v = 25, \end{cases}$$

siis $x^2 = 16$ ja $y^2 = 25$. Järelikult saame antud süsteemile neli lahendit:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 4 \\ y_3 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -4 \\ y_4 = -5. \end{cases}$$

Muid ruutvõrrand-süsteemi tüüpe ja nende lahendamisvõtteid õpime tundma järgnevaist näidisülesandeist.

Ülesanne 1. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 7. \end{cases}$$

Lahendus. Jagamisaksioomi põhjal saame

$$x - y = 3;$$

et

$$x + y = 7,$$

siis

$$2x = 10,$$

seega

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2. \end{cases}$$

Ülesanne 2. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 56. \end{cases}$$

L a h e n d u s. Taandatud ruutvõrrandi lahendite omaduste põhjal osutuvad x ja y lihtsalt võrrandi

$$z^2 - 18z + 56 = 0$$

lahenditeks. Selle ruutvõrrandi lahendamisel saame:

$$z = 9 \pm \sqrt{81 - 56} = 9 \pm \sqrt{25} = 9 \pm 5$$

ehk

$$z_1 = 14 \quad \text{ja} \quad z_2 = 4\,.$$

Et antud süsteemis esinevad x ja y sümmeetriliselt — kummagi võrrandi tähendus ei muutu tundmatute x ja y vahetamisel, siis võib ka lahendis nende väärtused vahetada. Järelikult

$$\begin{cases} x_1 = 14 \\ y_1 = 4 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 14\,. \end{cases}$$

M ä r k u s. Et ülesanded 1 ja 2 on ühtlasi erijuhtumid esimesest tüübist (üks süsteemi võrrandeist on nimelt lineaarne), oleksime neid saanud lahendada ka esimese tüübi üldvõtte abil. Toodud lahenduste eesmärgiks on aga hõlbustavate erivõtete tutvustamine.

Ü l e s a n n e 3. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

L a h e n d u s. Korrutame teise võrrandi 2-ga; saame:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

Üks kord võrrandite vastavaid pooli liites, teine kord lahutades saame:

$$(x + y)^2 = 16$$

ja

$$(x - y)^2 = 4\,.$$

Seega

$$x + y = \pm 4$$

ja

$$x - y = \pm 2.$$

See annab 4 võrrandsüsteemi; neist esimene on

$$\begin{cases} x + y = +4 \\ x - y = +2 \end{cases}$$

Selle lahendamisel saame esimese süsteemi lahendi

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

Kolme ülejääva süsteemi lahendid on

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -1 \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

Kokkuvõttes:

olgu antud lahendada ruutvõrrand-süsteem; kui üks antud võrrandeist on lineaarne, siis elimineerime selle abil ühe tundmatuist; kui kumbki võrrandeist on teise astme võrrand, siis püüame tuletada niisugust võrrandit, milles vähemalt üks tundmatu esineb esimeses astmes; edasi toimime, nagu eespool seletatud.

Ülesanded.

186. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} x^2 = y \\ x + y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y^2 + 7x = 11 \\ 7x - 3y = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + 2x = 7y + 50 \\ 6x = 7y + 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x^2 + 2y = 12 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 = y + 28 \\ 2x = y + 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x^2 + 13 = 21y \\ 2x - 1 = 3y \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5y^2 = 8x \\ 5y - 2 = 5x \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 = 4y \\ x + 3 = 2y \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x = 2y^2 \\ 2x = 4y + 9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y^2 = 14x + 79 \\ 5y = 7x + 4 \end{cases}$

187. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=29 \\ x-y=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=12 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y-x=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ y+x=2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy+3=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y+7=0 \\ xy=10 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y-x=7 \\ xy+10=0 \end{cases}$

188. Kahe järjestikuse paarituarvu korrutis on 195. Leida need arvud.

189. Kahe järjestikuse paarisarvu ruutude summa on 340. Leida need arvud.

190. Jaotada lõik, mille pikkus on 15 cm, kahte ossa nõnda, et neile osadele ehitatud ristküliku pindala oleks

1. 26 cm^2
2. 14 cm^2
3. 44 cm^2
4. 56 cm^2

191. Ristküliku ümbermõõt on 88 dm, tema pindala 459 dm^2. Kui pikad on ristküliku küljed?

192. Kahe arvu summa on 34; nende arvude korrutis on 285. Mis arvud need on?

193. Kahe arvu vahe on 26; nende arvude korrutis on 407. Mis arvud need on?

Peatükk IV.

Ülesandeid kordamiseks.

194. Raudteerongil sõites tundub järjest üksikuid tõukeid; need on tingitud rööbaste jätkukohtadest. Reisija loendab minutis N tõuget. Mitu kilomeetrit sõidab rong tunnis, kui rööbaste pikkus on p meetrit?

195. Olgu antud murdude jada:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \text{ jne.}$$

Missugune murd seisab n-ndal kohal? $(n-1)$-sel kohal? $(n+2)$-sel kohal?

196. Liita avaldised

$$\frac{5}{6}(u+2) \qquad \frac{4}{9}(u-4) \qquad \frac{7}{18}(u+8).$$

197. Lahutada avaldisest $\frac{5}{6}(D-4)$ avaldis $\frac{4}{3}(D+2)$.

198. Lihtsustada avaldised:

$$\frac{1}{2}(t+2)+\frac{2}{3}(2t+3)+\frac{5}{6}(5t+6)$$

$$\frac{6p}{7}+\frac{4q}{3}-\frac{5}{21}(7q-2p)$$

$$1\frac{5}{6}-\frac{3s}{8}-\frac{5}{12}(2-3s)$$

$$\frac{7}{10}(1+9R)+\frac{4}{5}(1-6R)$$

$$x-\frac{1-x}{2}-\frac{5}{6}(1+x)$$

199. Arendada järgmised korrutised ja astmed:

1. $(7m-2n)(3m+n)$

$(1+5p)(1-5p)$

$\left(\frac{1}{4}-q\right)^2$

$\left(1-\frac{v}{2}\right)^2$

$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{a}+1\right)$

2. $\left(\frac{2}{3}t+9\right)^2$

$(1+st)^2$

$(0{,}3+2u)(0{,}3-2u)$

$(1-0{,}2z)(1-0{,}2z)$

$\left(\frac{2}{3}h-\frac{3}{4}k\right)^2$

3. $(kx+1)^2$

$(3m-0{,}1n)^3$

$\left(1+\frac{x}{a}\right)^3$

$\left(\frac{1}{2}ab-u\right)^2$

$\left(1+\frac{nz}{5}\right)^2$

4. $\left(x-\frac{1}{2}x\right)^3$

$(1-ax)(1+ax)$

$\left(\frac{1}{3}+n\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)$

$\left(a-\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{x}{3}\right)$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$

200. Anda üldine avaldis kahekohalise arvu ruudu jaoks, tähistades kümneliste numbrit tähega u ja üheliste numbrit tähega v.

201. Olgu $a=-5$, $b=+8$. Arvutada neil andmeil järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

$$(a+b)\cdot(2a+3);\quad (a+b)\cdot 2a+3;\quad a+b\cdot(2a+3).$$

202. Kulumise tõttu kaotab mootorratas aasta jooksul $p\%$ väärtusest, mis tal on aasta alguses. Kui suur on mootorratta väärtus praegu, kui tema eest 2 aastat tagasi maksti M rubla?

203. n rida sportlasi reavahega d meetrit marsib kiirusega v meetrit sekundis auvõõraste tribüüni eest mööda, mille pikkus on l meetrit. Kui palju aega nõuab möödamarssimine?

Näide. $n=200$; $d=1{,}8$; $v=2{,}6$; $l=20$. Arvutada t.

204. Kuubi serv pikkusega 1 dm paisus soojenedes s dm võrra. Kui suur on paisunud kuubi ruumala?

205. Olgu teada, et $x + \frac{1}{x} = 3$. Arvutada $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

206. Olgu teada, et $u + \frac{1}{u} = 10$. Arvutada $u^3 + \frac{1}{u^3}$.

207. Arendada järgmised korrutised:

1. $\left(\frac{2u^3}{3} - \frac{3v^2}{4}\right)\left(\frac{2u^3}{3} + \frac{3v^2}{4}\right)$
2. $(a^2 + 9)(a + 3)(a - 3)$
3. $(x^2 - ax + 1)(x^2 + 4ax + 1)$
4. $(N - u)^2 (N + u)^2$
5. $(z - 4)(z^2 + 4z + 16)$
6. $(n - 1)^3 (n^2 + 2n + 1)$

208. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 9$
2. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11$
3. $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{6} = 18$
4. $2 = \frac{2x}{3} - \frac{x}{3}$
5. $\frac{6}{7}x - \frac{8}{9}x = 2x$
6. $\frac{16}{27}x = 10 + \frac{x}{9}$
7. $\frac{2x}{3} - \frac{4x}{9} = 31 - \frac{3x}{2}$
8. $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} + \frac{x}{5} = \frac{x}{3} - 13$
9. $\frac{3x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{1}{3} = x - 2$
10. $\frac{3x}{4} - 11\frac{x}{8} = -x + \frac{1}{2}$

209. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{x + 2}{5} = \frac{2x - 10}{3}$
2. $\frac{x + 3}{4} + \frac{1 - 3x}{7} = 0$
3. $\frac{3x - 2}{7} + \frac{x - 2}{2} = 1\frac{1}{2}$
4. $\frac{x + 5}{4} - \frac{1 - x}{6} = 4$
5. $\frac{x + 3}{4} - \frac{x - 3}{3} = 5 + x$
6. $\frac{19x}{25} - \frac{13x + 2}{15} = 2$
7. $4x + \frac{6x}{7} = \frac{3x + 2}{2} + 46$
8. $\frac{x - 15}{18} - \frac{6x + 5}{14} = \frac{x}{7}$
9. $\frac{1}{2} + \frac{5x}{11} = \frac{4 - x}{23}$
10. $\frac{2x + 5}{3} - \frac{3x + 7}{4} = \frac{1}{4}$

210. Veepaaki suubub 4 toru; esimese töötamisel täituks paak ühe tunniga, teise töötamisel 2, kolmanda töötamisel 3 ja neljanda töötamisel 4 tunniga. Kui kiiresti täitub ta, kui tööl on kõik neli toru korraga? (Maximus Planudes, a. 1350.)

211. Leida $p\%$ rahasummast a rubla b kopikat.

212. Avaldada võrdusest $H = \frac{2xy}{x+y}$ suurus x.

213. Leida järgmiste avaldiste pöördväärtused:

$$\frac{5}{11} \qquad 2\frac{3}{4} \qquad \frac{a^2}{bc} \qquad 1+\frac{1}{a} \qquad p-\frac{1}{p}.$$

214. Lahutada tegureiks avaldised:

1. $6ac + 15bd + 9bc + 10ad$ 2. $3N^2 - 4Nx + x^2$
$h^2k^2 - 4h^2 - k^2 + 4$ $2c^2 + cu - u^2$
$6l^2 - 13lm + 6m^2$ $x^2 - 7x - 18$

215. Lahutada tegureiks avaldised:

1. $p^2 + 2ap + a^2 - b^2$
2. $(2x + a)^2 - (3x + 2a)^2$

216. Leida avaldiste

$$m^2n - mn^2, \quad m^3 - mn^2 \quad \text{ja} \quad m^3 - 2m^2n + mn^2$$

suurim ühistegur.

217. Leida avaldiste

$$4a^2u - 9u^3, \quad 4a^2u - 6au^2 \quad \text{ja} \quad 4a^2u - 12au^2 + 9u^3$$

suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

218. Taandada murrud:

1. $\frac{10u^2 + u - 21}{15u^2 - u - 28}$ 2. $\frac{4ax}{(1+a)^2 - (1-a)^2}$

219. Teostada järgmised jagamised, enne jagatavat ja jagajat tegureiks lahutades:

$$(nx + ny + 5x + 5y) : (x + y)$$
$$(mz - nz + 3m - 3n) : (m - n)$$
$$(ax^2 - ax - x^2 + x) : (x^2 - x)$$
$$(16mn - 12n^2 + 8mp - 6np) : (2n + p)$$
$$(a^4 - a^3 - a^2 + a) : (a^2 - 1)$$

220. Lahutada järgmised avaldised tegureiks:

1. $\frac{1}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h$ 2. $x^2 + 3nx + 2n^2$

$T^2 + 20T - 525$ $1 - a^2 - b^2 + a^2b^2$

$A^2 + 2A - 899$ $x^2 - 1 - ax - a$

221. Leida avaldiste

$$2R^2 - 7R - 15, \quad 2R^2 - 24R + 70 \quad \text{ja} \quad 2R^2 - 11R - 21$$

väikseim ühiskordne.

222. Kaks raudteerongi, mille pikkused on l meetrit, sõidavad rööbikutel teedel. Nõutakse valemit aja arvutamiseks, mis kulub

1. teise rongi möödasõiduks esimesest, kui esimene seisab paigal ja teine liigub kiirusega v meetrit sekundis;

2. rongide teineteisest möödasõiduks, kui mõlemad liiguvad samas suunas, üks kiirusega u, teine kiirusega v meetrit sekundis ja kui $v > u$;

3. rongide teineteisest möödasõiduks, kui mõlemad liiguvad vastassuunas, üks kiirusega u ja teine kiirusega v meetrit sekundis.

223. Arvutada avaldise

$$\frac{x^2}{p(p+1)(p+2)} - \frac{(p+3)x}{p(p+1)(p+2)} + \frac{1}{p}$$

väärtus, kui $x = p + 1$.

224. Lihtsustada avaldised:

1. $$\frac{2}{r-5}-\frac{3}{r+5}+\frac{5(r-1)}{r^2-25}$$

2. $$1+\frac{2}{w+3}-\frac{6}{w+4}.$$

225. Kas on kehtiv võrre

1. $$\frac{a^2-ax}{a^2-x^2}=\frac{an}{an+xn}\,?$$

2. $$(a^2-b^2):(a-b)=(a^3+b^3):(a^2+b^2)\,?$$

226. Lihtsustada järgmised avaldised:

1. $$\left(\frac{24a+2x}{4}-2x\right):\left(3\frac{5}{6}\,a-\frac{5x+3a}{6}\right)$$

2. $$\frac{c+3}{c^2+3c+2}-\frac{c+1}{c^2+5c+6}$$

3. $$\frac{2}{(k-1)^2}-\frac{2}{(k+1)^2}+\frac{3}{k^2-1}$$

227. Näidata, et $p:q=r:s$, kui

$$(pq+rs)^2=(p^2+r^2)\ (q^2+s^2).$$

228. Sooritada nõutavad tehted ja anda tulemused võimalikult lihtsal kujul:

1. $$\frac{4x^2-9y^2}{a^2b^2}\cdot\frac{ab}{(2x+3y)^2}$$

2. $$\frac{9x^5y^3}{35a^8b^9}:\frac{12xy^7}{49a^{13}b^{10}}$$

3. $$\frac{7}{3}(3a-2b)\cdot\frac{3}{12a^2-8ab}$$

4. $$\left(\frac{9x^2}{a^2}-1\right):\left(\frac{3x}{a}+1\right)$$

229. Lihtsustada avaldised:

1. $\left(\frac{x+y}{y}-2\right)^4\cdot\left(\frac{x^2}{x^2-y^2}-1\right)^2$

2. $2\left(\frac{5p-6q}{4p-3q}\right)-3\left(\frac{3q-2p}{3q-4p}\right)$

3. $\frac{p}{pq-q^2}+\frac{q}{pq-p^2}$

4. $\left(N-\frac{1}{N}\right)\left(N+\frac{1}{N}+2\right):\left(1-\frac{1}{N^2}\right)\left(\frac{1}{N}+1\right)$

5. $\left(1+\frac{a-x}{a+x}\right)\left(2-\frac{a^2-ax}{a-x}\right):\frac{a-2x}{a+x}$.

6. $\frac{x-5}{2x}\left(\frac{1}{x^2-8x+15}-\frac{1}{x^2-2x-15}\right)$

230. Liita murrud:

$$\frac{2a-b}{ab-a^2},\ -\frac{3a+b}{ab+a^2}\ \text{ja}\ \frac{a-2b}{a^2-b^2}.$$

231. Teisendada võrre

$$\frac{a^2-b^2}{2ab}:(3a^2+ab-2b^2)=\frac{a-b}{3a-2b}:2ab$$

nii, et tema liikmed oleksid võimalikult lihtsad täisavaldised.

232. Olgu $\frac{a}{x}=p$. Avaldada p kaudu murrud

$$\frac{3a}{x}\qquad\frac{a}{2x}\qquad\frac{4a}{3x}\qquad\frac{a^2}{x^2}\qquad\frac{a+nx}{x}$$

233. Määrata murdude $\frac{m^2}{n}$ ja $\frac{m}{n^2}$ korrutis ja jagada see murruga $\left(\frac{m}{n}\right)^2$.

234. Otsustada jagamist sooritamata, missuguse jäägi saame, kui arvu 421 574 607 jagame arvuga 2, arvuga 3, arvuga 4, arvuga 5, arvuga 9, arvuga 10, arvuga 25.

235. Kolmekohalisel arvul on üks ja sama arv sajalisi, kümnelisi ja ühelisi. Kas see arv jagub kolmega?

236. A. 1934 toimetatud rahvaloenduse andmeil oli Eestis elanikke 1 126 413, neist linnaelanikke 323 007. Anda nende arvude suhte jaoks rida ligikaudseid väärtusi ümmargustes arvudes ja määrata igal juhul, kas lähisväärtus annab kujutatava suuruse liiaga või puudusega.

236a. Sama ülesanne järgmistel andmetel: rahvaloenduse andmeil 1939 oli Nõukogude Liidus 170 467 252 elanikku, neist linnades 55 909 924.

237. Rakendades võrde põhiomadust, avaldada:

seosest	suurus	seosest	suurus
1. $\frac{I}{E}=\frac{1}{R+r}$	r	3. $\frac{P}{2Q}=\frac{R}{R-r}$	R
2. $\frac{I}{R}=\frac{c}{R+1}$	R	4. $\frac{F-1}{G+2}=\frac{R+r}{R-r}$	r

238. Lahendada võrrandid:

1. $\frac{1}{x}=1-\frac{x}{x+4}$

2. $x+5=\frac{x^2+11}{x+7}$

3. $\frac{16}{3x-4}=\frac{22}{2x+3}$

4. $\frac{x-4}{x-2}=\frac{x-2}{x+4}$

5. $\frac{2}{x}-\frac{3}{5-x}=\frac{5}{x-2}$

6. $\frac{x}{x-1}-\frac{5}{6}=\frac{x+1}{6x-12}$

7. $\frac{3}{x-5}-\frac{x-2}{3x-15}=\frac{x+2}{4x-20}$

8. $\frac{7}{x-5}+\frac{2}{x+5}=\frac{40-x}{x^2-25}$

9. $\frac{2x^2+3}{x^2-8x+16}-1=\frac{x-3}{x-4}$

10. $\frac{3x-1}{x^2+4x+4}=\frac{x+5}{x^2-4}+\frac{2}{x+2}$

239. Olgu $\frac{a}{b}=\frac{5}{7}$. Arvutada siit järgmiste murdude väärtused:

$$\frac{a+b}{a} \qquad \frac{3a+b}{a+b} \qquad \frac{3a-b}{2a-b} \qquad \frac{a+3b}{5a-2b}$$

240. Kaks teineteisele järgnevat täisarvu rahuldavad tingimust, et $\frac{5}{9}$ suuremast on ühe võrra väiksem kui $\frac{3}{5}$ väiksemast. Mis arvud need on?

241. Lahendada järgmised võrrandid, lugedes tundmatuks tähte x:

1. $x + a = b$

$x - c = n$

$p = q - x$

$h + 2x = k + x$

$x + a = 2x + a$

2. $4x - b = 2b$

$7x + n = 3n + n$

$\frac{1}{2}x + b = 2a$

$4a = \frac{2}{3}x - 3b$

$0{,}6x + 0{,}5a = x - 0{,}7a$

242. Lahendada järgmised võrrandid, lugedes tundmatuks tähte x:

1. $ax + b = 6b$

$px + q = q$

$mx = m^2 - m$

$\frac{x}{c} = 1$

$\frac{x}{a} = b + a$

$\frac{x}{3n} = 0$

2. $g = \frac{hx}{g}$

$\frac{ax}{n} = an + a$

$3x - \frac{1}{2a} = 2x + \frac{1}{3a}$

$7x = \frac{4}{a} - \frac{2}{b} + 5x$

$a(x - b) = 0$

$3(c - 1)x = 3c^2 - 3$

243. Tööstuse meister saab 42 töötunni eest nädalas iga töötunni tasuks a rubla ja iga ületunni eest b rubla. Mitu ületundi peab ta tegema, et saada nädala tasuks c rubla?

244. Valemis $F = \frac{Mm}{r^2}$ kõik tähed tähendavad positiivseid suurusi. Avaldada r.

245. Olgu $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Avaldada y.

246. Määrata l, teades, et $S=\frac{n}{2}\ (a+l)$.

247. On antud valem $F=\frac{Wv^2}{rg}$. Määrata siit suurus v.

248. Olgu teada, et $w=(m-\frac{1}{2}q)^2$. Avaldada siit m.

249. Olgu teada, et $q=c\sqrt{cn}$. Avaldada siit n.

250. Olgu teada, et $u=s\sqrt{a-t^2}$. Avaldada a.

251. Määrata H, teades, et

$$n=\sqrt{\frac{3H}{7k}}.$$

252. Valemis $p=\frac{5k}{7h^2}$ tähed k, h ja p tähendavad positiivseid arve. Avaldada h.

253. Arvutada $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ja $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, määrates ruutjuured veaga alla 0,001.

254. Olgu teada, et $P=(3aL)^2$, kus kõik tähed tähendavad positiivseid arve. Avaldada L.

255. Missugused kaks x-i väärtust rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2+8x+7}{4}=2(x+2)?$$

256. Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

1. $x^2=3(2x-3)$
$x(x+8)=8(x+2)$
$3(x+4)=x(x-4)$
$5(4x+5)-4x(x+5)=0$
$x^2=2(x+8)(x-6)$

2. $9x(x+1)=2(6x+1)$

$(1+x)^2=(1-2x)^2$

$(3x-2)(2x-1)=x$

$(2x-1)(x+3)=(x+1)^2$

$(3-x)^2=(1+3x)(9-x)$

3. $(2x-1)^2=(2x+1)(4x-3)+2$

$(2x-2)^2=(x+1)(x-1)$

$(2x-1)(1-2x)=(2x+5)(1-x)$

$2(x-1)(2x+1)=(4x-1)(2x-3)$

$(8x+3)(4x+1)=2(x+1)(4x+3)$

257. Moodustada ruutvõrrandid, mille lahendeiks on:

1. -3 ja -7

$-\frac{3}{4}$ ja 5

$\sqrt{\frac{3}{7}}$ ja $-\sqrt{\frac{3}{7}}$

$-0{,}5$ ja $0{,}8$

$-1{,}4$ ja $-1{,}5$

2. $\frac{2}{3}$ ja $-\frac{1}{5}$

$\frac{1}{2}+\sqrt{3}$ ja $\frac{1}{2}-\sqrt{3}$

$\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$ ja $\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$

$1{,}4+\sqrt{0{,}96}$ ja $1{,}4-\sqrt{0{,}96}$

$\frac{6+\sqrt{6}}{5}$ ja $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$

258. Määrata võrrandi

$$x+\frac{1}{x}=4$$

lahend ligikaudu, veaga alla 0,01.

259. Lahendada võrrandid:

1. $\frac{2}{x-1}=2-\frac{3}{x-3}$

2. $\frac{x-3}{x-4}=\frac{x+5}{2x-5}$

260. Avaldada järgmistest valemitest suurused, mis sulgudes märgitud:

1. $v=p\sqrt{q-n}$ $[n]$

2. $s=kt^2-h$ $[t]$

3. $r=\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$ $[V]$

4. $t=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ $[g]$

5. $k=(z-h)^2$ $[h]$

6. $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $[x]$

7. $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ $[r]$

8. $A=r^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ $[r]$

9. $X=a(h-1)^2$ $[h]$

10. $v=1+\sqrt{u+1}$ $[u]$

261. Leida võrdest

$$\frac{a^2-a-6}{a+4}:x=x:\frac{a^2+a-12}{a+2}$$

arv x.

262. Määrata järgmistest võrretest arv x:

1. $5:\frac{1}{36}=x^2:1\frac{1}{4}$
2. $7{,}5:x=x:13{,}872$
3. $1{,}44:x=x:0{,}36$
4. $x:3\frac{1}{16}=1:169x$

263. Lahendada võrrandid:

1. $$\frac{2x+4\frac{1}{3}}{5}-\frac{3x+5}{5x-25}-\frac{x}{2{,}5}=0$$
2. $$\frac{x^2-30x+2}{6x^2-6}+\frac{3x+2}{2x-2}-\frac{5x-1}{3x+3}=0$$
3. $$\frac{3x}{x+5}+\frac{2x}{2x-10}=\frac{9(x^2-15)}{x^2-25}-5$$

264. Heinamaa sees on ristkülikuline põld, mõõtmetega 190 ja 120 m. Kui laial ribal peab põllu äärt mööda heina maha niitma, et niidetud riba moodustaks 10 aari?

265. Kui risttahukalise paku servi suurendada vastavalt 3, 4 ja 5 cm võrra, saab ta kuubiks ja tema ruumala kasvab 2380 cm³ võrra. Leida risttahuka mõõtmed.

266. Traaditükist, mille pikkus on 20 cm, painutati ristkülik pindalaga 22 cm². Kui pikad on selle ristküliku küljed?

267. Kahe järjestikuse arvu ruutude summa on 113. Mis arvud need on?

268. Ristkülikulisel muruplatsil, mille mõõtmed on 36 m ja 20 m, on tarvis ääred kaevata peenraks, mis ümbritseks muruplatsi. Kui lai tuleks kaevata peenar, et peenra pindala moodustaks 15% muruplatsi endisest pindalast?

269. Kahe arvu summa on 75 ja korrutis 1376. Leida need arvud.

270. Ristküliku pindala on 84 cm^2; selle ristküliku ümbermõõt on 40 cm. Leida ristküliku pikkus ja laius.

271. Mesilasteparvest asus $\frac{1}{5}$ kadamba õitele, $\frac{1}{3}$ silindha õitele. Kolmekordne nende osade vahe lendas kutaja õitele; ainult üks mesilane jäi järele, hõljudes õhus üles ja alla, meelitatuna jasmiini ja pandaani magusast lõhnast. Kui palju mesilasi oli parves? (B h a s k a r a, a. 1150 ümber.)

272. Lootoslillede hulgast ohverdati jumal Šiva'le $\frac{1}{3}$, Višnu'le $\frac{1}{5}$, Päikesele $\frac{1}{6}$, Bhavan'ile $\frac{1}{4}$. Ülejäänud 6 lille sai austamisväärne õpetaja. Kui palju oli lilli? (B h a s k a r a, a. 1150 ümber.)

273. Laiskleja on alates 18. eluaastast $\frac{3}{8}$ oma ajast maganud, $\frac{1}{16}$ söönud ja joonud, $\frac{1}{4}$ jalutanud, $\frac{3}{16}$ mänge mänginud, $\frac{1}{16}$ kiiktoolis haigutanud ja 2 aastat ka töötanud. Kui vanalt ta suri? (H e i s, 1880.)

274. Jaanil on 90 rubla, Reinul 70. Üks on teisele võlgu. Võla tasumise järel oleks Jaanil $\frac{5}{3}$ Reinu rahast. Kui suur on võlg? Kes on võlgnik?

275. Tallinnast Tartu ja tagasi sõiduks kulus autol kokku 10 tundi 20 minutit. Mitu km on maanteed mööda Tallinnast Tartu, kui auto keskmine kiirus sinnasõidul oli 60 kilomeetrit tunnis ja tagasisõidul 40 kilomeetrit tunnis ja kui Tartus peatuti 2 tundi?

276. Kell on kolme ja nelja vahel ja minutinäitaja katab tunninäitajat. Kui palju on kell?

277. Poiss käis jalgrattaga raudteejaamas. Minnes oli tuul vastu, tulles tagant, mistõttu sinnasõit toimus kiirusega 12 km tunnis ja tagasisõit kiirusega 18 km tunnis. Jaamas kulus tal aega $\frac{1}{2}$ tundi. Kogu reis aga kestis 3 tundi. Kui kaugel raudteejaamast elas poiss?

278. Lasnamäe lennuväljalt lendas lennuk Narva suunas kiirusega 100 km tunnis. 20 minutit hiljem lendas sellele järele teine lennuk kiirusega 120 km tunnis. Tallinn—Narva lennuliini pikkus on 200 km. Kui kaugel Narva linnast jõudis teine lennuk esimesele järele?

279. Leida kolme arvu aritmeetiline keskmine, teades, et see keskmine ületab üht arvu 3 võrra ja kahe teise arvu summa on 29.

280. Teatav töö peab olema lõpetatud 24 päevaga. Tööline *T* lõpetaks töö üksinda töötades 18 päevaga; tööline *U* lõpetaks töö üksinda töötades 30 päevaga. Töö on niisugune, et korraga saab rakendada tööle ainult ühe töölise. Kui kaua peab töötama tööline *T*, et selle järel tööline *U* võiks lõpetada töö täpselt tähtpäevaks?

281. Lahendada võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3-y}=\dfrac{5}{7} \\ \dfrac{4-x}{y+5}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-5=3y \\ 7-2x=4y \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x+4y+10=0 \\ 7x+6y+13=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{15}{x}+\dfrac{12}{y}=1 \\ \dfrac{20}{x}+\dfrac{18}{y}=1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{y+4}{y-2} \\ 3x+2=2y+1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{9}{x}+\dfrac{4}{y}=2 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{8}{y}=3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 = 9y \\ y = 2(x-4) \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{14}{x} + \frac{63}{y} = 18 \\ \frac{21}{x} + \frac{45}{y} = 16 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x + 3y = 18 \\ 11x - 9y = 24 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5{,}6x + 1{,}8y = 30{,}3 \\ 4{,}3x + 1{,}2y = 21{,}9 \end{cases}$

282. Jõel ühendust pidav aurik liigub pärivoolu kiirusega 15 km tunnis, vastuvoolu kiirusega 9 km tunnis. Määrata auriku kiirus seisvas vees ja jõe veevoolu kiirus.

283. Kahekohalise arvu ristsumma on 13; kui jagame kümneliste arvu üheliste arvuga, siis saame jagatise 2 ja jäägi 1. Leida see kahekohaline arv.

284. Kahekohalise arvu kümnelisi on 3 võrra vähem kui ühelisi. Kui liita selle arvuga 27, siis saame arvu, mille saaksime vahetades antud arvu kümnelised ja ühelised. Mis arv see on?

285. Mitu liitrit 5%-list ja mitu liitrit 2%-list soolalahust tuleks segada, et saada 12 liitrit 3%-list soolalahust?

286. Kui palju tuleks võtta 540-proovilist ja kui palju 960-proovilist kulda, et saada 24 g sulamit, mille proov oleks 750? (Proov näitab, mitu grammi puhast kulda tuleb 1000 g sulami kohta.)

827. Kaks vaatlejat asetsevad vastavalt pealetuult ja allatuult kaugustel a ja b kilomeetrit kahurist. Esimene kuuleb pauku n sekundit, teine m sekundit pärast lasku. Arvutada neist andmeist tuule ja heli kiirus.

288. Mootorratturi ajaarvestus näitab, et sõites kiirusega 60 km tunnis ta jõuaks sihtkohta 1 tund hiljem kui tarvis; sõites aga kiirusega 72 km tunnis ta jõuaks kohale $\frac{1}{2}$ tundi varem kui tarvis. Kui kaugel on sihtkoht lähtekohast ja mitme tunni pärast mootorrattur peab olema kohal?

289. Kaks tigu asetsevad kõrgel puul kohtadel, millede vaheline kaugus on 18 jalga. Kui nad teineteisele vastu liiguksid, siis kohtuksid nad 1,5 tunni pärast; kui nad teineteist hakkaksid taga ajama, jõuaks kiirem neist aeglasemale 9 tunni pärast järele. Kui suure kiirusega liigub kumbki tigu?

290. Kahekohalise arvu jagamisel tema numbrite summaga saame jagatise 7 ja jäägi 3; jagamisel numbrite vahega saame jagatise 18 ja jäägi 1. Missugune kahekohaline arv see on?

291. Muul ja eesel sammusid raskesti koormatult turule. Muul kurtis oma seltsilisele õiglusetut koormamist: „Kui sina annaksid minule 1 mõõdu oma koormast, saaks minu koorem sinu omast kaks korda suuremaks; kui mina annaksin omast koormast ühe mõõdu sinule, oleks meil võrdpalju kanda.” Arvutaja, ütle, kui rasked koormad olid neil kanda? (Olevat antud ülesandena Aleksandria ülikoolis, u. a. 300 e. u. a.)

292. Kahe arvu suhe on $\frac{a}{b}$; nende arvude vahe on c. Leida need arvud.

293. Kui tasuda tehtud laen 6 kuu pärast, siis tuleks maksta ühes intressiga 184,05 rubla; kui aga tasuda laen 1 aasta 4 kuu pärast, siis tuleks maksta ühes intressiga 190,80 rubla. Kui suur on laen ja kui suur on intressimäär?

294. Kui murru lugejaga liidame 5, taandub murd 1-ks; kui aga murru nimetajast lahutame 11, taandub ta 3-ks. Leida see murd.

295. Kaks töölist suudaksid lõpetada ettevõetud töö, kui esimene töötaks 10 päeva ja teine 5 päeva. Tegelikult töötas esimene 2 päeva ja teine 6 päeva, kusjuures teostati 60% kogu tööst. Mitme päevaga oleks kumbki tööline selle töö üksinda ära teinud?

SISUKORD.

I. Algebraline murd.

II. Ruutjuur.

III. Ruutvõrrand.

MB 00434

Vastutav toimetaja A. H u m al. Ladumisele antud 10. X 1945. Trükkimisele antud 12. II 1946. Paber 56 × 79, 1/16. Trükiarv 10200 eks. Trükipoognaid 9,5. Trükitähti trükipoognas 42240. Arvutuspoognaid 10,20. Tellimise nr. 1514. Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartus.

На эстонском языке.

А. В и х м а н, Учебник Алгебры для VIII класса.