ISSN 0494-7304 0132-053x

TARTU ÜLIKOOLI

TOIMETISED

ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

953

RINGID JA POOLRÜHMAD
RINGS AND SEMIGROUPS

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid

TARTU 1992

TARTU ÜLIKOOLI TOIMETISED
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
Alustatud 1893.a. VIHIK 953

RINGID JA POOLRÜHMAD
RINGS AND SEMIGROUPS

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid
töid

TARTU 1992

Tartu Ülikooli toimetised
Vihik 953
RINGID JA POOLRÜHMAD
Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid
Tartu Ülikool
EE2400 Tartu, Ülikooli 18
Vastutav toimetaja M. Kilp
5,88.6,0.T.514.230
TÜ trükikoda. EE2400 Tartu, Tiigi 78

Tartu Ülikooli Toimetised, 953 (1992), 3 - 6.

REDUCING OF RELATION ALGEBRAS TO SEMIGROUPS

D.A. Bredikhin

Saratov Polytechnical Institut

By a relation algebra we mean an algebra $\mathfrak{A} = (A; \cdot, ^{\smile}, 1', \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ such that $(A; \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ is a Boolean algebra, $(A; \cdot, 1')$ is a monoid, $^{\smile}$ is an involutive anti-automorphism of $(A, \cdot, 1')$, $\cdot$ and $^{\smile}$ are distributive over $\vee$, and for all $a, b \in A$, $a^{\smile}(ab)^{-} \le b^{-}$ [1].

The following condition is very important in the theory of relation algebras and its applications to logic [1]:

$$(\exists\ u,\ v)\quad u^{\smile}u \le 1' \ \&\ v^{\smile}v \le 1' \ \&\ u^{\smile}v = 1\ . \qquad \text{(I)}$$

Denote by $\mathfrak{K}$ the class of all relation algebras satisfying the condition (I).

We associate to each relation algebra $\mathfrak{A}$ the semigroup $\mathfrak{A}^* = (A; \cdot, ^*)$ with the additional unary operation * such that $a^* = 1' \wedge a$. Let $\mathfrak{K}^* = \{\mathfrak{A}^* \mid \mathfrak{A} \in \mathfrak{K}\}$. Theorems 1 and 2 below show that each relation algebra $\mathfrak{A}$ belonging to $\mathfrak{K}$ can be reduced to $\mathfrak{A}^*$.

Denote by $\mathrm{Alg}(\mathfrak{A})$ the set of all algebraic functions of an algebra $\mathfrak{A}$ [2]. Note that algebraic functions are often called polynomial functions.

THEOREM 1. For each relation algebra $\mathfrak{A}$ belonging to $\mathfrak{K}$,

$$\mathrm{Alg}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Alg}(\mathfrak{A}^*).$$

THEOREM 2. Suppose that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are relation algebras such that $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}$ and $\mathfrak{A}^*$ is isomorphic to $\mathfrak{B}^*$. Then the relation algebras $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are isomorphic.

Proof. It is known [1] that any $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}$ is representable. This means that $\mathfrak{A}$ is isomorphic to some algebra of binary relations of the form $(\Phi; \circ, ^{\smile}, \Delta, \cup, \cap, -, \varnothing, E)$ where E is an equivalence relation on the set X, Φ is the set of all binary relations R on X such that $R \le E$, $\circ$ and $^{\smile}$ are the relation product and the relation inverse respectively, i.e.

$$R \circ G = \{(x,y) \mid (\exists z) \quad (x,z) \in R \ \ \& \ \ (z,y) \in G\}\ ,$$

$$R^{\smile} = \{(x,y) \mid (y,x) \in R\}\ ,$$

$\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ is the diagonal relation and

$$R^{-} = E \setminus R = \{(x,y) \mid (x,y) \in E \ \ \& \ \ (x,y) \notin R\}\ .$$

So, without loss of generality, we may suppose that $\mathfrak{A} = (\Phi; \circ, ^{\smile}, \Delta, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, E)$.

Denote by $\mathrm{Re}(a,b)$ the following formula:

$$a^{\smile}a < 1' \quad \& \quad b^{\smile}b < 1' \quad \& \quad a^{\smile}b = 1 \ .$$

We shall write a^{**} instead of $(a^{*})^{*}$. Note that if $R \in \Phi$ then

$$R^{*} = \Delta \wedge R^{-} = \{(x,x) \mid (x,x) \notin R\}$$

and

$$R^{**} = \Delta \wedge R = \{(x,x) \mid (x,x) \in R\} \ .$$

LEMMA 1. If $R, G, U \in \Phi$ and $\mathrm{Re}(U,V)$ holds on $\mathfrak{A}$, then

$$E = U^{\smile}\circ V \ , \ \Delta = (U^{\smile}\circ V)^{**} \ ,$$
$$R = V^{\smile}\circ(U\circ R\circ V^{\smile})^{**}\circ U \ ,$$
$$R^{-} = U^{\smile}\circ(U\circ R\circ V^{\smile})^{*}\circ V \ ,$$
$$R \cap G = U^{\smile}\circ(U\circ R\circ V^{\smile})^{**}\circ(U\circ G\circ V^{\smile})^{**}\circ V \ ,$$
$$R \cup G = U^{\smile}\circ((U\circ R\circ V^{\smile})^{*}\circ(U\circ G\circ V^{\smile})^{*})^{*}\circ V \ .$$

Proof. It follows from $U^{\smile}\circ U \subset \Delta$ and $V^{\smile}\circ V \subset \Delta$ that U and V are functions. Therefore, we can write $y = U(x)$ and $y = V(x)$ instead of $(x,y) \in U$ and $(x,y) \in V$. Since $E = U^{\smile}\circ V$, we have that for each pair $(x,y) \in E$ there exists $z \in X$ such that $U(z) = x$ and $V(z) = y$.

By the definition of $\mathrm{Re}(U,V)$ we have $U^{\smile}\circ V = E$ and $(U^{\smile}\circ V)^{**} = E^{**} = E \cap \Delta = \Delta$.

Suppose that $(x,y) \in U^{\smile}\circ(U\circ R\circ V^{\smile})^{*}\circ V$. Then $x = U(z)$ and $y = U(z)$ for some $z \in X$ such that $(z,z) \in U\circ R\circ V'$, hence $(y,x) = (U(z)) \in R$, i.e. $(x,y) \in R^{\smile}$. Conversely, $(x,y) \in R^{\smile}$ implies $(y,x) \in R$. Since $U(z) = y$, $V(z) = y$ and $V(z) = x$ for some $z \in X$, we have $(z,z) \in (U\circ R\circ V^{\smile})^{**}$, hence $(x,y) = (V(z), U(z)) \in V^{\smile}\circ(U\circ R\circ V^{\smile})^{**}\circ U$. Thus $R^{\smile} = V^{\smile}\circ(U\circ R\circ V^{\smile})^{**}\circ U$.

Suppose that $(x,y) \in U^{\smile}\circ(U\circ R\circ V^{\smile})^{*}\circ V$. Then $x = U(z)$ and $y = V(z)$ for some z such that $(z,z) \in (U\circ R\circ V^{\smile})^{*}$, hence $(z,z) \notin U\circ R\circ V^{\smile}$, thus $(x,y) = (U(z), V(z)) \notin R$, i.e. $(x,y) \in R^{-}$. Conversely, if $(x,y) \notin U^{\smile}\circ(U\circ R\circ V^{\smile})^{*}\circ V$, $U(z) = x$ and $V(z) = y$, then $(z,z) \notin (U\circ R\circ V^{\smile})^{*}$ or equivalently, $(z,z) \in U\circ R\circ V^{\smile}$. It follows that $(x,y) = (U(z), V(z)) \in R$, i.e. $(x,y) \notin R^{-}$. Therefore, $R^{-} = U^{\smile}\circ(U\circ R\circ V^{\smile})^{*}\circ V$.

Suppose that $(x,y) \in U^{\smile}\circ(U\circ R\circ V^{\smile})^{**}\circ(U\circ G\circ V^{\smile})^{**}\circ V$. Then there exists $(z,z) \in (U\circ R\circ V^{\smile})^{**}\circ(U\circ G\circ V^{\smile})^{**}$ such that $x = U(z)$ and $y = V(z)$. It follows that $(z,z) \in U\circ R\circ V^{\smile}$ and $(z,z) \in U\circ G\circ V^{\smile}$, hence $(x,y) = (U(z), V(z)) \in R$ and $(x,y) = (U(z), V(z)) \in G$, i.e. $(x,y) \in R \cap G$. Conversely, if (x,y)

is in $R \cap G$ then $(x,y) \in R$ and $(x,y) \in G$. Since $x = U(z)$ and $y = V(z)$ for some z, we have $(z,z) \in (U \circ R \circ V^{\sim})^{**}$ and $(z,z) \in (U \circ G \circ V^{\sim})^{**}$, hence $(z,z) \in (U \circ R \circ V^{\sim})^{**} \circ (U \circ G \circ V^{\sim})^{**}$ and thus $(x,y) = (U(z), V(z)) \in U^{\sim} \circ (U \circ R \circ V^{\sim})^{**} \circ (U \circ G \circ V^{\sim})^{**}$. Hence $(x,y) = (U(z), V(z)) \in U^{\sim} \circ (U \circ R \circ V^{\sim})^{**} \circ (U \circ G \circ V^{\sim})^{**} \circ V$. Therefore, $R \cap G = U^{\sim} \circ (U \circ R \circ V^{\sim})^{**} \circ (U \circ G \circ V^{\sim})^{**} \circ V$.

Suppose that $(x,y) \in U^{\sim} \circ ((U \circ R \circ V^{\sim})^{*} \circ (U \circ G \circ V^{\sim})^{*})^{*} \circ V$. Then there exists z such that $x = U(z)$ and

$$(z,z) \in ((U \circ R \circ V^{\sim})^{*} \circ (U \circ G \circ V^{\sim})^{*})^{*} = ((U \circ R \circ V^{\sim})^{*} \circ (U \circ G \circ V^{\sim})^{*})^{*} = \\ = (U \circ R \circ V^{\sim})^{**} \cup (U \circ G \circ V^{\sim})^{**},$$

hence $(z,z) \in U \circ R \circ V^{\sim}$ or $(z,z) \in U \circ G \circ V^{\sim}$. It follows that $(x,y) = (U(z), V(z)) \in R$ or $(x,y) = (U(z), V(z)) \in G$, i.e. $(x,y) \in R \cup G$. Conversely, if $(x,y) \in R \cup G$, then either $(x,y) \in R$ or $(x,y) \in G$. Since $x = U(z)$ and $y = V(z)$ for some z, we have $(z,z) \in (U \circ R \circ V^{\sim})^{**}$ or $(z,z) \in (U \circ G \circ V)^{**}$, hence

$$(z,z) \in (U \circ R \circ V^{\sim})^{**} \cup (U \circ G \circ V^{\sim})^{**} = ((U \circ R \circ V^{\sim})^{*} \cap (U \circ G \circ V^{\sim})^{*})^{*} = \\ = ((U \circ R \circ V^{\sim})^{*} \circ (U \circ G \circ V^{\sim})^{*})^{*}.$$

It follows that

$$(x,y) = (U(z), V(z)) \in U^{\sim} \circ ((U \circ R \circ V^{\sim})^{*} \circ (U \circ G \circ V^{\sim})^{*})^{*} \circ V.$$

Therefore, $R \cup G = U^{\sim} \circ ((U \circ R \circ V^{\sim})^{*} (U \circ G \circ V^{\sim})^{*})^{*} \circ V$.

Lemma 1 immediately implies Theorem 1.

Denote by $\mathrm{Qe}(a,b,c,d)$ the following formula:

$$(\forall t) \quad ca = db \ \& \ (ac)^{**} a = a \ \& \ c(ac)^{**} = c \ \& \\ \& \ (bd)^{**} b = b \ \& \ d(bd)^{**} = d \ \& \\ \& \ cat = tca = t \ \& \ c(atd)^{**} b = t.$$

LEMMA 2. If $U, V \in \Phi$, $\mathrm{Re}(U,V)$ implies $\mathrm{Qe}(U, V, U^{\sim}, V^{\sim})$.

Suppose that $U, V, R \in \Phi$ and

$$U^{\sim} \circ U \subset \Delta, \ V^{\sim} \circ U \subset \Delta, \ U^{\sim} \circ V = E.$$

Since for each $x \in X$ there exists z such that $U(z) = x = V(z)$, we have $U^{\sim} \circ U = V^{\sim} \circ V = \Delta$ and $U^{\sim} \circ U \circ R = R \circ U^{\sim} \circ U = R$.

If $(x,y) \in U$ then $(x,x) \in (U \circ U^{\sim})^{**}$ and $(x,y) \in (U \circ U^{\sim})^{**} \circ U$, hence $U \subset (U \circ U^{\sim})^{**} \circ U$. Conversely, $(U \circ U^{\sim})^{**} \circ U \subset \Delta \circ U = U$. Therefore, $(U \circ U^{\sim})^{**} \circ U = U$. Analogously, $U^{\sim} \circ (U \circ U^{\sim})^{**} = U^{\sim}$, $(V \circ V^{\sim})^{**} \circ V = V$, $V^{\sim} \circ (V \circ V^{\sim})^{**} = V^{\sim}$.

Suppose that $(x,y) \in R$. Since $x = U(z)$ and $y = V(z)$ for some z, we have $(z,z) \in (U \circ R \circ V^{\sim})^{**}$, hence

$$(x,y) = (U(z), V(z)) \in U^{\sim} \circ (U \circ R \circ V\ )^{**} \circ V$$

2

Conversely, $U^{\smile}\circ(U\circ R\circ V^{\smile})^{**}\circ V \subset U^{\smile}\circ U\circ R\circ V^{\smile}\circ V = \Delta\circ R\circ\Delta = R$ and so we have the equality $U^{\smile}\circ(U\circ R\circ V^{\smile})^{**}\circ V = R$.

LEMMA 3. Suppose that $\mathfrak{B}$ is a relation algebra and $\mathrm{Qe}(a,b,c,d)$ holds on $\mathfrak{B}$. Then $c = a^{\smile}$, $d = b^{\smile}$ and $\mathrm{Re}(a,b)$ holds on $\mathfrak{B}$.

Note that each relation algebra satisfies the identity $ab \wedge cd \le a(a^{\smile}c \wedge bd^{\smile})d$ [3]. We shall use it without explicite reference. Since $ca = db$ and $cat = tca = t$ for all t, we have $ca = db = 1'$.

Further,

$$a = (ac)^{**}a = (ac\wedge 1')a \le (a\wedge c^{\smile})ca \le c^{\smile}ca = c^{\smile}1' = c^{\smile}.$$

Analogously, $c \le a^{\smile}$ and thus $c = a^{\smile}$ and in the same we get the equality $d = b^{\smile}$.

Since $1 = c(a1d)^{**}b \le cb = a^{\smile}b$, we have $a^{\smile}b = 1$.

It is easy to see that Lemmas 1-3 imply Theorem 2.

REFERENCES

1. T a r s k i A. and G i v a n t S.A. A formalization of set theory without variables. AMS Colloquium publication, Providence, Rhode Island, vol.41, 1987.
2. G r ä t z e r G. Universal Algebra, Princeton, 1968.
3. C h i n L.H. and T a r s k i A. Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras, Univ. Calif. Publ. Math., 1, 1951, p. 341-383.

Received
24 I 1991

RELATSIOONIALGEBRATE TAANDAMINE POOLRÜHMADELE

D.A.Bredihin

R e s ü m e e

Artiklis on vaatluse all relatsioonialgebrad, mis defineeris A.Tarski töös [1]. Tähelepanu on keskendatud nende algebrate ühele klassile $\mathcal{K}$, mis omab erilist tähtsust loogikas. Igale algebrale $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ seatakse vastavusse täiendava unaarse tehtega $*$ poolrühm $\mathfrak{A}^*$. Tõestatakse, et algebra $\mathfrak{A}$ ja poolrühma $\mathfrak{A}^*$ algebralised (teises terminoloogias polünomiaalsed) funktsioonid ühtivad ja et kaks relatsioonialgebrat $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$, kus $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, on isomorfsed parajasti siis kui on isomorfsed vastavad poolrühmad $\mathfrak{A}^*$ ja $\mathfrak{B}^*$.

Tartu Ülikooli Toimetised, 953 (1992), 7 - 18.

SEMI-SYMMETRIC FUNDAMENTAL TRIPLETS

Ü. Lumiste
Department of Algebra and Geometry

1. **Introduction.** In the differential geometry of submanifolds there is a great deal of concepts and results connected with an arbitrary fixed point of a given submanifold. They can be treated in a purely algebraic way and lead to the next concept.

Let V be a real Euclidean vector space with the scalar product $\langle\ ,\ \rangle$, T its vector subspace and $h : T \times T \to T^{\perp}$ a symmetric bilinear map, where $T^{\perp}$ is the orthogonal complement of T in V. Then (V, T, h) is called a *fundamental triplet*, T and $T^{\perp}$ a *basic* and *normal* subspace, respectively, h a *fundamental map*, V a *total* space.

We can say that the fundamental triplets linearize in a certain sense the submanifolds in Euclidean spaces (similarly as Lie algebras linearize Lie groups etc.).

The linear map $A_{\xi} : T \to T$ defined for every $\xi \in T^{\perp}$ by $\langle A_{\xi}X, Y\rangle = \langle h(X,Y), \xi\rangle$ is called a *shape operator* for ξ. The skew-symmetric bilinear maps $R : T \times T \to \mathrm{End}\,T$ and $R^{\perp} : T \times T \to \mathrm{End}\,T^{\perp}$, defined by

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle - \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle \tag{1.1}$$

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_{\xi}, A_{\eta}]X, Y\rangle, \tag{1.2}$$

are the *curvature operator* and the *normal curvature operator*, respectively.

Here (1.1) shows that R has all algebraic properties of the curvature tensor of a Riemannian space (e.g. is skew-symmetric also with respect to Z, W etc.) and can be considered also as a symmetric linear map $\Lambda^2 T \to \Lambda^2 T$ (see [8], [18]). The main result, obtained in [18], gives necessary and sufficient conditions for a general curvature operator $R : \Lambda^2 T \to \Lambda^2 T$ to be represented as (1.1) of a fundamental triplet with $\dim T^{\perp} = 1$: for the general case $\dim T^{\perp} > 1$ the corresponding factorization problem is stated in [18].

If $R \equiv 0$ (resp. $R^{\perp} \equiv 0$) then the fundamental triplet is said to be *flat* (resp. *normally flat*). From (1.2) it is seen that $R^{\perp} \equiv 0$ iff A_{ξ} and A_{η} commute for every two $\xi, \eta \in T^{\perp}$ and thus are simultaneously diagonalizable.

In this paper we investigate a special class of fundamental triplets. Let

$$h(R(X,Y)Z,W) + h(Z,R(X,Y)W) - R^{\perp}(X,Y)h(Z,W) = 0 \qquad (1.3)$$

for every four $X, Y, Z, W \in T$; Then the fundamental triplet is said to be *semi-symmetric*. The condition (1.3), determining our class, is inspired by the applications in the geometry of symmetric submanifolds (see [2], [7]), in particular, of the symmetric orbits in R^n of some Lie subgroups $G \subset SO(n,\mathbb{R})$ (these orbits are minimal submanifolds in hyperspheres; see [7]). On the other hand (1.3) determines the semi-symmetric submanifolds (see [9], [15]; called also semi-parallel, see [4], [5]).

Our purpose is to prove some classification theorems for the semi-symmetric fundamental triplets.

2. Umbilities.

The vector $H \in T^{\perp}$, defined by

$$\langle H,\xi\rangle = \frac{1}{m}(\text{trace } A_{\xi}) ,$$

where $m = \dim T$, $\xi \in T^{\perp}$, is called a *mean curvature vector*.

Lemma (E.Backes [1]). *If* (V,T,h) *is semi-symmetric and* $H = 0$, then $h \equiv 0$.

In the proof given in [1] the bilinear map $S : T \times T \longrightarrow T$, defined by $\langle S(X,Y)Z,W\rangle = \langle h(X,Y),h(Z,W)\rangle$ and the trilinear map $\{\ \ \} : T \times T \times T \longrightarrow T$, defined by

$$\{XYZ\} = S(X,Y)Z - S(Y,Z)X - S(Z,X)Y$$

are used. Here $\{\ \ \}$ introduces the structure of a euclidean Jordan triple system in T (see [16], [1]). Lemma follows now from the results of the theory of these triple systems.

Further in the classification of the semi-symmetric fundamental triplets we can thus propose $H \neq 0$.

A fundamental triplet is said to be *umbilic* with respect to $\xi \in T^{\perp}$, if there is a $\lambda_{\xi} \in \mathbb{R}$ so that $A_{\xi} = \lambda_{\xi}\,\mathrm{Id}$ (i.e. $\langle h(X,Y),\xi\rangle = \lambda_{\xi}\langle X,Y\rangle$), *pseudoumbilic*, if it is umbilic with respect to H and *totally umbilic*, if it is umbilic with respect to every $\xi \in T^{\perp}$. In the last case there is a $\Lambda \in T^{\perp}$, so that $h(X,Y) = \Lambda\langle X,Y\rangle$ (cf. [3], p. 43; note that we include also the case $\Lambda = 0$).

From (1.1), (1.2) and (1.3) it follows directly, that every totally umbilic fundamental triplet is semi-symmetric and normally flat.

Let (V, T, h) be a fundamental triplet, V' and T' vector subspaces in V and T, respectively; let $h' = h|_{T'}$ take the values in V' (thus in the orthogonal complement $T'^{\perp}$ of T' in V'). Then (V', T', h') is called a fundamental *subtriplet* of (V, T, h). The latter is said to be the *orthogonal direct sum* of its subtriplets (V', T', h') and (V'', T'', h'') if $V = V' \oplus V''$, $T = T' \oplus T''$ (the orthogonal direct sums) and $h(X'+X'', Y'+Y'') = h'(X', Y') + h''(X'', Y'')$.

The fundamental triplet (V, T, h) is called *reducible*, if it is an orthogonal direct sum of its fundamental subtriples with $T' \neq \{0\}$; otherwise it is called *irreducible*.

A property of the fundamental triplet is said to be *heritable*, if its validity for a reducible triplet leads to its validity for every direct component, and *extendible*, if such implication holds in the opposite direction.

It can be established directly that flatness, normal flatness and semi-symmetricity are heritable and extendible properties; the first two imply the third, as it can be seen from (1.3).

Theorem 1. *A fundamental triplet is semi-symmetric and normally flat iff it is an orthogonal direct sum of the totally umbilic fundamental triplets.*

Proof. If $R^{\perp} \equiv 0$ then due to (1.2) A_{ξ} and A_{η} are diagonalizable simultaneously for every $\xi, \eta \in T^{\perp}$ and the orthogonal base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ in T can be taken so that $h_{ij} = \Lambda_i \delta_{ij}$, where $h_{ij} = h(e_i, e_j)$. Suppose that there are r distinct vectors $\Lambda_{(1)}, \ldots, \Lambda_{(r)}$ among $\Lambda_i \in T^{\perp}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, and let

$$h_{i_\rho j_\rho} = \Lambda_{(\rho)} \delta_{i_\rho j_\rho}, \quad h_{i_\rho j_\sigma} = 0 \ (\rho \neq \sigma) . \tag{2.1}$$

Complementing the base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ to the full orthonormal base in V, denoting by $\{\omega^1, \ldots, \omega^m; \omega^{m+1}, \ldots, \omega^n\}$ the corresponding dual base and introducing the 2-forms

$$\Omega^j_i = R^j_{i,kl} \omega^k \wedge \omega^l, \quad \Omega^\beta_\alpha = R^\beta_{\alpha,kl} \omega^k \wedge \omega^l, \tag{2.2}$$

where $R(e_k, e_l) = e_j R^j_{i,kl}$ and $R^{\perp}(e_k, e_l) e_\alpha = e_\beta R^\beta_\alpha(e_k, e_l)$, we can write (1.3) in the form

$$h^\alpha_{pj} \Omega^p_i + h^\alpha_{ip} \Omega^p_j - h^\beta_{ij} \Omega^\alpha_\beta = 0. \tag{2.3}$$

3

Thus due to (2.1) and $\Omega^{\alpha}_{\beta} = 0$ (this is equivalent with $R^{\perp} \equiv 0$),

$$(\Lambda^{\alpha}_{(\sigma)} - \Lambda^{\alpha}_{(\rho)})\Omega^{j_\sigma}_{i_\rho} = 0 \quad (\rho \neq \sigma).$$

Since $\Lambda_{(\sigma)} \neq \Lambda_{(\rho)}$, we have $\Lambda^{\beta}_{(\sigma)} - \Lambda^{\beta}_{(\rho)} \neq 0$ for $\rho \neq \sigma$ and for some value $\beta \in \{m+1, \dots, n\}$, hence $\Omega^{j_\sigma}_{i_\rho} = 0$. Now (1.1) gives $\langle \Lambda_{(\rho)}.\Lambda_{(\sigma)} \rangle = 0$. This shows that the span $\{h(X,Y) \mid X, Y \in T\}$ splits, due to (2.1), into the orthogonal direct sum of the one-dimensional subspaces l_ρ determined by nonzero $\Lambda_{(\rho)}$. Each of them corresponds to the eigenspace $T_{(\rho)} = \mathrm{span}\{e_{i_\rho}\}$. The total space V splits into the orthogonal direct sum of $V_{(\rho)}$ where $T_{(\rho)} \oplus l_{(\rho)} \subset V_{(\rho)}$. Hence the considered triplet (V, T, h) splits into the orthogonal direct sum of triplets $(V_{(\rho)}, T_{(\rho)}, h_\rho)$, each of which is, due to (2.1), totally umbilic.

Conversely, it is clear that an orthogonal direct sum of the totally umbilic fundamental triplets is semi-symmetric and normally flat; it follows from the extensibility of the last two properties. ■

Let us denote $m_1 = \dim \mathrm{span}\ \{h(X,Y) \mid X, Y \in T\}$ and call it the *principal codimension* of (V, T, h).

Corollary 1. If a semi-symmetric fundamental triplet satisfies $m_1 \leq 2$ then it is normally flat and thus is an orthogonal direct sum of the totally umbilic fundamental triplets.

In fact, summing in (2.3) by $i = j$ we obtain, due to the symmetricity of h_{ij} and skew-symmetricity of Ω^j_i, that

$$H^{\beta}\Omega^{\alpha}_{\beta} = 0. \tag{2.4}$$

Here $\Omega^{\alpha}_{\beta} = -\Omega^{\beta}_{\alpha}$, thus by $m_1 \leq 2$ in a suitable base we have $h^{\alpha}_{ij} = 0$, $H^{\alpha} = 0$ for $\alpha \in \{m+3, \dots, n\}$, and due to (1.1) and (2.3) $\Omega^{\alpha}_{m+1} = \Omega^{\alpha}_{m+2} = 0$, $H^{m+1}\Omega^{m+2}_{m+1} = 0$, $\alpha \in \{m+3, \dots, n\}$. Here $H = 0$ yields $h = 0$, $R^{\perp} = 0$; if $H \neq 0$ we get $\Omega^{m+2}_{m+1} = 0$ and also $R^{\perp} = 0$.

Corollary 2. If a semi-symmetric fundamental triplet is flat then it is also normally flat and is a direct sum of the fundamental triplets with onedimensional basic subspaces.

In fact, if $\Omega^j_i = 0$, then $h^{\beta}_{ij}\Omega^{\alpha}_{\beta} = 0$; in a suitable base $\Omega^{\alpha}_{\beta} = 0$ for $\alpha \in \{m_1+1, \dots, n\}$ and the matrix $\|h^{\beta}_{ij}\|$ with row index (ij) and column index $\beta \in \{m+1, \dots, m+m_1\}$ has the rank

m_1 and thus a nonzero ($m_1 \times m_1$)-determinant. Hence $\Omega^\alpha_\beta = 0$. For the totally umbilic fundamental triplet with k-dimensional basic subspace, $k > 1$, we have, due to (1.1)

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \Lambda, \Lambda\rangle(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle)$$

and this is identically zero only in the case of $\dim T = 1$. (The fact that $\Lambda = 0$ yields $H = 0$ is used here, thus $h = 0$, and this $(V, T, 0)$ is trivially the direct sum of the fundamental triplets with onedimensional basic subspaces; the latter are always umbilic.)

These results show that in the further classification of the semi-symmetric fundamental triplets we can omit normally flat triplets, together with them also the flat triplets, as well as triplets with $m_1 \leq 2$.

3. Decomposition theorem. The reducing of the classification problem can be prolonged. The next theorem shows that we can omit the triplets, which are not pseudoumbilic.

Theorem 2. *If a semi-symmetric fundamental triplet (V, T, h) is not pseudoumbilic, i.e. its shape operator A_H for the mean curvature vector H has r different eigenvalues, $r>1$, then this triplet is a direct sum of r semi-symmetric pseudo-umbilic fundamental triplets (V_ρ, T_ρ, h_ρ), $\rho \in \{1, \ldots, r\}$, where $T_1, \ldots, T_r$ are the eigenspaces of A_H and every V_ρ contains T_ρ and the span $\{h_\rho(X_\rho, Y_\rho) \mid X_\rho, Y_\rho \in T_\rho\}$.*

Proof. Multiplying in (2.3) by H^α and summing by α we get, due to (2.4),

$$(A_H)^j_k \Omega^k_i - (A_H)^k_i \Omega^j_k = 0.$$

With respect to the canonical basis of A_H this gives

$$(\lambda_\sigma - \lambda_\rho)\Omega^{j_\sigma}_{i_\rho} = 0 \quad (\rho \neq \sigma)$$

and yields $\Omega^{j_\sigma}_{i_\rho} = 0$ $(\rho \neq \sigma)$, thus, due to (2.2) and (1.1),

$$\langle h_{i_\rho k_\rho}, h_{j_\sigma l_\sigma}\rangle = 0.$$

Denoting $h|_{T_\rho} = h_\rho$ we get the validity of the assertions, similarly as in the proof of the preceeding theorem. ■

Remark 1. Theorem 2 is the algebraic part of the first decomposition theorem in [9], [10], which for its part includes the decomposition of symmetric submanifolds in [6]. It reduces the classification of the semi-symmetric fundamental triplets to the case of pseudoumbilic triplets. Recall, that above we have reduced this to the case of normally nonflat triplets, especially to the case $m_1 > 2$.

4. The cases with great m_1. If dim $T = m$, the maximal value of m_1 is the number of h_{ij} with $1 \le i < j \le m$, i.e. $\frac{1}{2}m(m + 1)$. If $m_1 = \frac{1}{2}m(m + 1)$, all vectors h_{ij} are linear independent.

Since (2.3) gives, due to (1.1),

$$\Sigma_k\{h_{kj}\langle h_{i[p}, h_{q]k}\rangle + h_{ik}\langle h_{j[p}, h_{q]k}\rangle - \langle h_{ij}, h_{k[p}\rangle h_{q]k}\} = 0 \quad (4.1)$$

where [,] denotes the alternation we obtain for the considered case

$$\langle h_{ij}, h_{kl}\rangle = \varkappa^2(2\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

where $\varkappa$ is some positive real number (cf. [12]). Geometrically this means that $h_{11}, \ldots, h_{mm}$ are sidevectors of a regular simplex with the side-lenght $2\varkappa$ in some m-dimensional subspace of $T^{\perp}$ and $\frac{1}{2}m(m - 1)$ vectors h_{ij} $(i \ne j)$ are mutually orthogonal vectors with the lenght $\varkappa$ in the orthogonal complement of this subspace in $T^{\perp}$. Here the orthogonal base $\{e_i\}$ can be altered in T by the orthogonal transformations and then the set of h_{ij} alters as a symmetric 2-tensor.

Hence the next theorem holds.

Theorem 3. *There exists a class of mutually similar semi-symmetric fundamental triplets with maximal value of the principal codimension.*

The semi-symmetric fundamental triplet considered in this theorem, is called the *Veronese triplet.* It can be realized as the osculating structure of the m-dimensional Veronese submanifold in the $\frac{1}{2}m(m + 3)$ dimensional Euclidean space at some of its point; this submanifold is symmetric (more exactly, is maximal symmetric in the sense of [17]) and, lies in a hypersphere as a minimal submanifold of the latter [12], [17].

Theorem 4. *There is no semi-symmetric fundamental triplets with* dim $T = m \ge 3$ *and* $\frac{1}{2}m(m + 1) > m_1 \ge \frac{1}{2}m(m - 1) + 2$.

Proof. In this case there are some linear dependences $h_{ij}\xi^{ij}_{(\phi)} = 0$, one of which can be canonized and then given as

$$h_{mm} = \sum_{a=1}^{m-1} \mu_a h_{aa}. \tag{4.2}$$

The inequalities for m_1 show that $h_{11}, h_{22}, \dots, h_{(m-1)(m-1)}$ can not be mutually collinear.

At first we prove the theorem for pseudoumbilic triplets. For them (4.2) after scalar multiplying by H gives $\lambda_H = \sum_{a=1}^{m-1} \mu_a \lambda_H$. Here $\lambda_H = 0$ is impossible, because then $\langle h_{ij}, H\rangle = 0$ and thus $\|H\|^2 = 0$, but this yields, due to the Lemma, a contradiction $h = 0$. Hence $\Sigma \mu_a = 1$.

Let us take (4.1) with $i = j = k = a$, $l = b \neq a$; the coefficient before h_{ab} gives

$$3\langle h_{aa}, h_{bb}\rangle - 2\langle h_{ab}, h_{ab}\rangle - \langle h_{aa}, h_{aa}\rangle = 0$$

for every two different values a and b, $1 \le a \le m-1$, $1 \le b \le m-1$. Thus $\langle h_{aa}, h_{aa}\rangle = \langle h_{bb}, h_{bb}\rangle$, consequently

$$\|h_{11}\|^2 = \|h_{22}\|^2 = \dots = \|h_{(m-1)(m-1)}\|^2 = \sigma^2 > 0.$$

Now (4.1) by $i = j = a$, $k = b \neq a$, $l = m$ before h_{bm} leads to

$$\mu_a\sigma^2 + (\mu_b - 1)\langle h_{aa}, h_{bb}\rangle + \mu_c\langle h_{aa}, h_{cc}\rangle + \Sigma \mu_d \langle h_{aa}, h_{dd}\rangle = 0,$$

where c is a value, different from a and b, and (if $m > 3$) the sum is taken by all values d, different from a, b, c,. Here b and c can be exchanged and thus $\langle h_{aa}, h_{bb}\rangle = \langle h_{aa}, h_{cc}\rangle$. Hence $\langle h_{aa}, h_{bb}\rangle = \tau$ independently from a and b. So we get

$$\mu_a\sigma^2 + (\sum_{a\neq b} \mu_b - 1)\tau = 0$$

and for the pseudoumbilic case this gives $\mu_a(\sigma^2 - \tau) = 0$, thus $\sigma^2 - \tau = 0$ and $\langle h_{aa}, h_{aa} - h_{bb}\rangle = 0$, $\langle h_{bb}, h_{aa} - h_{bb}\rangle = 0$. Now we have a contradiction: $\|h_{aa} - h_{bb}\| = 0$ and $h_{aa} = h_{bb}$, $a \neq b$, but $h_{11}, \dots, h_{(m-1)(m-1)}$ can not be mutually collinear.

It remains to consider the case of Theorem 2. Then the maximal value of m_1 is $\frac{1}{2}p(p+1) + \frac{1}{2}(m-p)(m-p+1) = \frac{1}{2}m(m-1) + m(1-p) + p^2$, where $1 \le p \le \frac{m}{2}$, but this is by $m \ge 3$ less than $\frac{1}{2}m(m-1) + 2$. ■

5. The case $m_1 = 3$. The first value of m_1 which needs the further investigation is, due to Theorems 1 and 2, the case of the next theorem.

4

Theorem 5. *The dimension* $m = \dim T$ *of the basic subspace of a normally nonflat pseudoumbilic semi-symmetric fundamental triplet* (V,T,h) *with principal codimension* $m_1 = 3$ *can be only* $m = 2$ *or* $m = 3$.

Proof. In the case $m = 2$ the existence of a such triplet follows from Theorem 3, where the description for this triplet up to similarities is also given.

Next we consider the case $m \geq 3$. Lemma gives that $H \neq 0$ always if $m_1 > 0$. Moreover, e_α can be always taken in the m_1-dimensional span of h_{ij} so that $h_i^\alpha = 0$ for $\alpha > m_1$. In particular let e_{m+1} be collinear to H, so that $H = \lambda e_{m+1}$, $\lambda > 0$. Then

$$\sum_{i=1}^{m} h_{ii}^{\bar{k}} = 0 \quad \text{for} \quad k > 1 \tag{5.1}$$

here and below $\bar{k} = m + k$. Due to (2.4) and pseudoumbilicity, respectively,

$$\Omega_{\bar{1}}^{\alpha} = 0, \; h_{ij}^{\bar{1}} = \lambda\delta_{ij} .$$

Since $R^\perp \neq 0$, among the other Ω_α^β at least one is nonzero and $e_{\bar{k}}$ (k > 2) can be renumerated so that $\Omega_{\bar{2}}^{\bar{3}} \neq 0$. After that $h_{ij}^{\bar{2}}$ can be canonized by the suitable choice of $\{e_i\}$; this gives $h_{ij}^{\bar{2}} = 0$ $(i \neq j)$ and

$$\Omega_{\bar{2}}^{\bar{3}} = \sum_{i<j} h_{ij}^{\bar{3}}(\mu_j - \mu_i)\omega^i \wedge \omega^j \neq 0,$$

where $\mu_i = h_{ii}^{\bar{2}}$ and $\mu_1 + \ldots + \mu_m = 0$ due to (5.1). Now e_i can be renumerated so that

$$h_{12}^{\bar{3}}(\mu_2 - \mu_1) \neq 0. \tag{5.2}$$

Further we repeatedly use the semi-symmetricity condition (2.3) by several values of α, i, j and refer this by $[\alpha, ij]$; if we take the coefficient by k, l, then we write $[\alpha, ij|kl]$. For the case $m_1 = 3$ the condition $[\bar{2}, ii]$ gives $h_{ii}\Omega_{\bar{2}}^{3} = 0$, thus $h_{ii}^{\bar{3}} = 0$. Now for the case $m \geq 3$

$$[\bar{2},12|1p] : \qquad h_{1p}^{\bar{3}}(\mu_2 + \mu_p - 2\mu_1) = 0.$$

$$[\bar{2},12|2p] : \qquad h_{2p}^{\bar{3}}(\mu_1 + \mu_p - 2\mu_2) = 0, \tag{5.3}$$

where $p \in \{3,\ldots,m\}$. Hence $h_{1p}^{\bar{3}}h_{2p}^{\bar{3}} = 0$, because $h_{1p}^{\bar{3}}h_{2p}^{\bar{3}} \neq 0$ yields a contradiction $\mu_2 - \mu_1 = 0$ to (5.2).

Let us consider first the case when either all $h^{\bar{3}}_{1p} = 0$ or all $h^{\bar{3}}_{2p} = 0$; if $m = 3$, this is the only case. Since (5.2) allows to exchange the roles of 1 and 2, we can take $h^{\bar{3}}_{1p} = 0$. Now

$[\bar{2},1p|1p]$: $\qquad (\mu_p - \mu_1)(\lambda^2 + \mu_1\mu_p) = 0$

$[\bar{2},2p|2p]$: $\qquad (\mu_p - \mu_2)[\lambda^2 + \mu_2\mu_p - 2(h^{\bar{3}}_{2p})^2] = 0.$

Here $\mu_p = \mu_2$, $\mu_p \neq \mu_1$ leads to $\lambda^2 + \mu_1\mu_2 = 0$ and now

$[\bar{2},12|12]$: $\qquad \lambda^2 + \mu_1\mu_2 - 2(h^{\bar{3}}_{12})^2 = 0$

gives a contradiction to (5.2). If $\mu_p = \mu_1$, $\mu_p \neq \mu_2$ then $\lambda^2 + \mu_1\mu_2 - 2(h^{\bar{3}}_{2p})^2 = 0$, but (5.3) gives $h^{\bar{3}}_{2p} = 0$ and we return to the previous case. Hence $\mu_p \neq \mu_1$, $\mu_p \neq \mu_2$ and

$$\lambda^2 + \mu_1\mu_p = 0,\ \lambda^2 + \mu_2\mu_p - 2(h^{\bar{3}}_{2p})^2 = 0.$$

Thus

$$(\mu_1 - \mu_2)\mu_p + 2(h^{\bar{3}}_{2p})^2 = 0.$$

Here $h^{\bar{3}}_{2p} = 0$ is impossible: then $\mu_p = 0$ and $\lambda = 0$. Hence $h^{\bar{3}}_{2p} \neq 0$ and (5.3) yields

$$\mu_1 + \mu_p - 2\mu_2 = 0,$$

i.e. $\mu_3 = \ldots = \mu_m (= \mu)$ and from $\Sigma\, \mu_i = 0$ we have $\mu_1 + \mu_2 + (m - 2)\mu = 0$. Thus $\mu_1 = (1 - \frac{2}{3}m)\mu$, $\mu_2 = (1 - \frac{m}{3})\mu$ and now $\lambda^2 = (\frac{2}{3}m - 1)\mu$, $(h^{\bar{3}}_{2p})^2 = \frac{m}{6}\mu^2$, $(h^{\bar{3}}_{12})^2 = \frac{1}{6}m(\frac{2}{3}m - 1)\mu^2$.

Substituting this into

$[\bar{3},22]$: $\qquad -2h^{\bar{3}}_{12}\Omega^2_1 + 2h_{2p}\Omega^p_2 - \mu_2\Omega^{\bar{3}}_2 = 0$

we get after some calculations, that $m = 3$. Now all $[\alpha|ij]$, i.e.(2.3) in general, are satisfied. This shows that by $m = m_1 = 3$ there exists a normally nonflat pseudoumbilic semi-symmetric fundamental triplet, determined up to similarities (this is the osculating structure of the symmetric Segre submanifold $S_{(2,1)}$; cf [13], [14]), but $m > 3$ is here impossible.

The similar calculations give that $m > 3$ is impossible also in the remaining cases. ■

Remark 2. It is shown in [13] that the osculating structure of the symmetric Segre submanifold $S_{(2,1)}$ is the only irreducible semi-symmetric fundamental triplet, with $m = m_1 = 3$, up to similarities.

6. The classification problem. The theorems above are the first steps to the general classification problem: to describe all semi-symmetric fundamental triplets. Algebraically this is the next problem. The semi-symmetricity condition (2.3) in its coordinate form is due to (1.1) an overdetermined system of $\frac{1}{4}m^2(m^2 - 1)m_1$ homogeneous algebraic equations of the third degree on the $\frac{1}{2}m(m + 1)m_1$ essential coordinates h^{α}_{ij} of the fundamental map h. The semi-symmetric fundamental triplets are given by the solutions of this system as the points of the corresponding 0-dimensional algebraic submanifold in the $[\frac{1}{2}m(m + 1)m_1 - 1]$-dimensional real projective space.

In the concluding remarks of Sections 2 and 3 we have restricted this problem; the same is done by Theorems 4 and 5. The full classification is done, up to now, only for the cases $m = 2$ and $m = 3$ (see the algebraic parts of [4] and [13], respectively; the case $m = 1$ is trivial), as well as for $m_1 = 1$, $m_1 = 2$ (see [5], [11]) and $m_1 = 3$. All this follows also from our results above, except the case $m = 3$, $m_1 = 4$. This last case is treated in [13] and leads to the orthogonal direct sum of a Veronese triplet with $m = 2$ (for it $m_1 = 3$) and a triplet with $m = m_1 = 1$.

References

1. B a c k e s, E. Geometric applications of euclidean Jordan triple systems. Manuscr. math., 1983., 42, No.2-3, 265-272.
2. B a c k e s, E., R e c k z i e g e l, H. On symmetric submanifolds of spaces of constant curvature. Math. Ann., 1983, 263, No. 4, 419-433.
3. C h e n B. - Y. Geometry of Submanifolds. New York: Marcel Dekker, 1973.
4. D e p r e z, J. Semi-parallel surfaces in Euclidean space. J. Geom., 1985, 25, No. 2, 192-200.
5. D e p r e z, J. Semi-parallel immersions. Geom. and topol. of submanifolds: Proc. Meeting at Luminy, Marseille, 18-23 May 1987. Singapore and al., 1989, 73-88.

6. F e r u s, D. Produkt-Zerlegung von Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform. Math. Ann., 1974, 211, No. 1, 1-5.

7. F e r u s, D. Symmetric submanifolds of Euclidean space. Math. Ann., 1980, 247, No. 1, 81-93.

8. J a c o b o w i t z, H. Curvature operators in the exterior algebra. Linear and Multilinear Algebra, 1979, 7, 93-105.

9. L u m i s t e, Ü. Decomposition and classification theorems for semi-symmetric immersions. Proc. Acad. sci. Estonia. Phys. Math., 1987, 36, No. 4, 414-417.

10. L u m i s t e, Ü. Decomposition of semi-symmetric submanifolds. Tartu Ülik. Toimetised, Acta et comm. Univ. Tartuensis, 1988, No. 803, 69-78.

11. L u m i s t e, Ü. Classification of two-codimensional semi-symmetric submanifolds. Tartu Ülik. Toimetised. Acta et comm. Univ. Tartuensis, 1988, No. 803, 79-94.

12. L u m i s t e, Ü. Semi-symmetric submanifolds with maximal first normal space. Proc. Acad.sci. Estonia. Phys. Math., 1989, 38, No. 4, 453-457.

13. L u m i s t e, Ü. Classification of three-dimensional semi-symmetric submanifolds in Euclidean spaces. Tartu Ülik. Toimetised, Acta et comm. Univ. Tartuensis, 1990, No. 899, 29-44.

14. L u m i s t e, Ü. Second order envelopes of symmetric Segre submanifolds. Tartu Ülik. Toimetised. Acta et Comm. Univ. Tartuensis, 1991, No. 930, 15-26.

15. L u m i s t e, Ü. Semi-symmetric submanifolds. Itogi nauki i tehn. VINITI. Probl. geom., 1991, v. 23, 3-28 (Russian, transl. into Engl. by AMS).

16. M e y b e r g, K. Jordan-Tripelsysteme und die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren. Math. Z., 1970, 115, 58-78.

17. M u l l a r i, R., On the maximal symmetric surfaces in n-dimensional Euclidean space. Tartu Ülik. Toimetised, 1962, No. 129, 62-73 (Russian, Summary in German).

18. V i l m s, J. Factorization of curvature operators. Trans. Amer. Math. Soc., 1980, 260, No. 2, 595-605.

Received
Jan. 30, 1992

POOLSÜMMEETRILISED FUNDAMENTAALKOLMIKUD

Ü.Lumiste

R e s ü m e e

Tõestatakse viis teoreemi, mis taandavad üldiste poolsümmeetriliste fundamentaalkolmikute (V,T,h) klassifitseerimise teatavate spetsiaalsemate klasside uurimisele.

Siin fundamentaalkolmik (V,T,h) koosneb reaalsest eukleidilisest vektorruumist V, selle alamvektorruumist T ja sümeetrilisest bilineaarkujutusest $h : T \times T \longrightarrow T^{\perp}$, kus $T^{\perp}$ on T ortogonaaltäiend ruumis V. Poolsümmeetrilised fundamentaalkolmikud on iseloomustatud tingimusega (1.3), kus R ja $R^{\perp}$ määratakse valemitega (1.1) ja (1.2).

Teoreem 1 väidab, et kui poolsümmeetrilise fundamentaalkolmiku (V,T,h) korral $R^{\perp} = 0$, siis ta on täielikult ombiliste fundamentaalkolmikute ortogonaalne otsesumma. Teoreem 2 taandab üldiste poolsümmeetriliste fundamentaalkolmikute klassifitseerimise analoogiliselt poolsümmeetriliste pseudoombiliste fundamentaalkolmikute uurimisele. Teoreem 3 käsitleb viimaseid maksimaalse dim span $h(X,Y)$ puhul (nn. Veronese kolmikud). Teoreemist 4 selgub, et kõnesolev dimensioon, kui ta ei ole maksimaalse väärtusega, peab olema sellest vähemalt $\dim T - 1$ võrra väiksem. Teoreem 5 väidab, et kui $R^{\perp} \neq 0$ ja dim span $h(X,Y) = 3$, siis kas $\dim T = 2$ või $\dim T = 3$.

Tartu Ülikooli Toimetised, 953 (1992), 19 - 28.

Wreath products and filter products of semigroups.

by J. D. P. Meldrum.

Department of Mathematics, University of Edinburgh, Scotland.

The idea of filter products and, in particular, ultraproducts is of great importance in model theory, but does not seem to be used much in the theory of particular algebraic structures. The work presented here links together the ideas of restricted and complete wreath products and ultraproducts of semigroups. It is a generalization of work of Bryant and Groves [1], which contains the corresponding result for groups, and which provided a great deal of help with these results. In order to obtain the right type of structures we need to restrict the class of semigroups under consideration. In section 1, the necessary background is given. The main results are proved in section 2. For basic results and definitions about semigroups we refer to Howie [3], and for those concerning filters and filter products we refer to Chang and Keisler [2].

1. Background.

We start first by considering wreath products. The construction we use is that of transformation wreath products, that is we consider our semigroups to be transformation semigroups and define the wreath product as a transformation semigroup. An element of the semigroup is written on the right of the element of the set on which it acts. Indeed so are all mappings.

<u>Definition</u> <u>1.1.</u> Let (X,S) and (Y,T) be two semigroups of

transformations. Denote by S^Y the semigroup of all mappings from Y to S with the standard product of functions making S^Y a direct power of S. Define $S^Y.T = \{(f,t);\ f \in S^Y,\ t \in T\}$ to be a semigroup of transformations of $X \times Y$, the Cartesian product of X and Y, by

$$(x,y)(f,t) = (x.(y)f,\ y.t)$$

for all $x \in X$, $y \in Y$, $f \in S^Y$, $t \in T$. This product of (X,S) and (Y,T) is called the **(complete or Cartesian) (transformation) wreath product**, where the words in brackets are generally omitted, and it is denoted $S\ Wr_Y\ T$.

Note that the abstract semigroup of $S\ Wr_Y\ T$ depends crucially on the action of T on Y, but not of that of S on X. This is reflected in the notation and in the fact that at times we are rather vague about the set X. If we are given semigroups without any associated sets on which they act, we use the right regular representation.

An immediate consequence of the definition gives the following rule for products in a wreath product.

<u>Lemma</u> <u>1.2.</u> **Let (X,S) and (Y,T) be two transformation semigroups. Let (f,t), (g,u) be two elements of $S\ Wr_Y\ T$. Then**

$$(f,t)(g,u) = (f.{}^tg,tu)$$

where $(y)^tg = (yt)g$.

For what comes later we need to define the restricted wreath product of two transformation semigroups and the semigroups need to belong to a restricted class.

<u>Definition</u> <u>1.3.</u> Let (X,S) and (Y,T) be transformation semigroups. We say that the ordered pair $(Y,T),(X,S) \in \mathfrak{R}$ if

(a) S is a monoid and $1 \in S$ is the identity map on X;

(b) for all $t \in T$ and all $z \in Y$, $|\{y;\ yt = z\}|$ is finite (it can be empty).

We can now define $S^{(Y)}$ as $\{f \in S^Y;\ (y)f = 1$ for all but a finite subset of $Y\}$. The subsemigroup $S^{(Y)}T = \{(f,t);\ f \in S^{(Y)},\ t \in T\}$ acting on $X \times Y$ is called the **restricted (permutation) wreath product** of (X,S) and (Y,T) denoted $S\ wr_Y\ T$. Again the word in brackets is generally omitted.

When S is a monoid, whether we are considering the complete or restricted wreath product, we call $\{y; (y)f \neq 1\}$ the **support** of $f \in S^Y$, and denote it by $\sigma(f)$. Hence $S^{(Y)} = \{f \in S^Y; \sigma(f) \text{ is finite}\}$. While the necessity of (a) in definition 1.3 is immediately obvious, we can see that (b) is necessary if $S^{(Y)}T$ is to be a subsemigroup, in view of the multiplication rule in lemma 1.2.

We now turn our attention to filters. A **filter** $\mathcal{F}$ on a set X is a set of subsets of X such that (i) $\phi \notin \mathcal{F}$, (ii) if $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ then $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$ and (iii) if $A \in \mathcal{F}$ and $B \supseteq A$, then $B \in \mathcal{F}$. An **ultrafilter** is a maximal filter. A basic result shows that $\mathcal{F}$ is an ultrafilter if and only if for any subset S of X either S or its complement $C(S)$ is in $\mathcal{F}$. After this reminder of some basic facts about filters, we can define filter products of semigroups.

Definition 1.4. Let I be a set and $\mathcal{F}$ be a filter on I. Let $\{S_i; i \in I\}$ be a set of semigroups and define $S = \Pi_I S_i$ to be the complete product of the set of semigroups $\{S_i; i \in I\}$. Define a relation ρ on S by

$$\rho = \{(f,g); \{\alpha; (\alpha)f = (\alpha)g\} \in \mathcal{F}\}.$$

Lemma 1.5. **The relation ρ defined in definition 1.4 is a congruence.**

The proof is a matter of routine checks and so will be omitted.

The semigroup S/ρ is called the filter product of the set of semigroups $\{S_i; i \in I\}$ determined by $\mathcal{F}$. It is sometimes denoted by $S/\mathcal{F}$ or $\Pi_{\mathcal{F}} S_i$.

We now look at the filter product of transformation semigroups. Let $\{(X_i, S_i); i \in I\}$ be a set of transformation semigroups, and let $\mathcal{F}$ be a filter on I. We can now define $X = \Pi_{\mathcal{F}} X_i$ and $S = \Pi_{\mathcal{F}} S_i$, where the filter product of the set of sets $\{X_i; i \in I\}$ is defined in the obvious way. The expected relation between S and X actually holds.

Lemma 1.6. **Let $\{(X_i, S_i); i \in I\}$, X and S be as defined above. There is a natural action of S on X which makes (X,S) a transformation semigroup.**

Proof. Without loss of generality we can use α to represent both the canonical mapping $\Pi_I X_i \to \Pi_{\mathcal{F}} X_i$ and the canonical mapping $\Pi_I S_i \to \Pi_{\mathcal{F}} S_i$. The obvious definition of an action of S on X is

$$(x)\alpha(s)\alpha = (xs)\alpha$$

where $x \in \Pi_I X_i$, $s \in \Pi_I S_i$. To check that it works we need to show that the action is well-defined and that it is faithful. Let $x\alpha = x'\alpha$, $s\alpha = s'\alpha$. Then $J := \{i \in I; x_i = x'_i\} \in \mathcal{F}$ and $K := \{i \in I; s_i = s'_i\} \in \mathcal{F}$ where $x = (x_i)_{i\in I}$, $s = (s_i)_{i\in I}$, $x' = (x'_i)_{i\in I}$, $s' = (s'_i)_{i\in I}$. It follows that $J \cap K \in \mathcal{F}$ and certainly $\{i \in I; x_is_i = x'_is'_i\} \supseteq J \cap K$, so $\{i \in I; x_is_i = x'_is'_i\} \in \mathcal{F}$. Thus $(xs)\alpha = (x's')\alpha$ and the action is well-defined. To show that it is faithful, we need to show that if $(x)\alpha(s)\alpha = (x)\alpha(s')\alpha$ for all $x \in \Pi_I X_i$, then $(s)\alpha = (s')\alpha$. So assume that $(x)\alpha(s)\alpha = (x)\alpha(s')\alpha$ and use the same notation as earlier. Then $(xs)\alpha = (xs')\alpha$ for all $x \in X$. Hence $\{i \in I; x_is_i = x_is'_i\} \in \mathcal{F}$ for all $x \in X$. Given $s_i \neq s'_i$, there exists $y_i \in X_i$ such that $y_is_i \neq y_is'_i$. Let $y := (y_i)_{i\in I}$. Then $\{i \in I; y_is_i = y_is'_i\} = \{i \in I; s_i = s'_i\}$. Hence $(ys)\alpha = (ys')\alpha$ forces $(s)\alpha = (s')\alpha$ as we hoped.

We close this section with a very easy result that we will need later.

<u>Lemma</u> <u>1.7.</u> **Let $\{(X_i,S_i);\ i \in I\}$ be a family of transformation semigroups, and let (Y,T) be a transformation semigroup. If (X_i,S_i), $(Y,T) \in \mathcal{R}$ for each $i \in I$ and if $\mathcal{F}$ is a filter on I, then $(X,\Pi_{\mathcal{F}}S_i)$, $(Y,T) \in \mathcal{R}$, where $(X,\Pi_{\mathcal{F}}S_i)$ is the transformation semigroup defined just before lemma 1.6.**

<u>Proof.</u> Note that if each S_i is a monoid, then so is $\Pi_I S_i$ and $\Pi_{\mathcal{F}} S_i$. The rest of the conditions for a pair of transformation semigroups to belong to $\mathcal{R}$ only concerns (Y,T).

2. Some embedding theorems.

Our main results consist of three embedding theorems. The first one follows immediately.

<u>Theorem</u> <u>2.1.</u> **Let $\{(X_i,S_i);\ i \in I\}$ be a family of transformation semigroups, and let (Y,T) be a transformation semigroup such that (X_i,S_i), $(Y,T) \in \mathcal{R}$ for each $i \in I$. Let $\mathcal{F}$ be a filter on I. Then $(\Pi_{\mathcal{F}}S_i)\ \mathrm{wr}_Y\ T$ is isomorphic to a subsemigroup of $\Pi_{\mathcal{F}}(S_i\ \mathrm{wr}_Y\ T)$.**

<u>Proof.</u> Lemma 1.7 ensures that $(\Pi_{\mathcal{F}}S_i)\ \mathrm{wr}_Y\ T$ is defined. Let θ be the

natural epimorphism $\Pi_I S_i \to \Pi_{\mathcal{F}} S_i$ given in the definition of the filter product. Then there exists an induced homomorphism

$$\phi: (\Pi_I S_i) \text{ wr}_Y T \to (\Pi_{\mathcal{F}} S_i) \text{ wr}_Y T$$

where ϕ is an epimorphism given by

$$(f,t)\phi = (f\theta',t)$$

and $f\theta'$ is given by

$$(y)f\theta' = ((y)f)\theta.$$

Let α be the natural epimorphism $\Pi_I(S_i \text{ wr}_Y T) \to \Pi_{\mathcal{F}}(S_i \text{ wr}_Y T)$. Let β be the homomorphism $(\Pi_I S_i) \text{ wr}_Y T \to \Pi_I(S_i \text{ wr}_Y T)$ defined by

$$(f,t)\beta = (f\pi_i,t)_{i \in I}$$

where $(y)(f\pi_i) = (i)(y)f$. We use π with a suitable suffix to indicate the appropriate projection map consistently in the rest of the paper. It is easy to see that β is a homomorphism, in fact a monomorphism.

We now check that Ker $\beta\alpha$ = Ker ϕ. If $(f,t)\beta\alpha = (g,u)\beta\alpha$, where $f,g \in (\Pi_I S_i)^Y$, $t,u \in T$, then $((f\pi_i,t)_{i\in I})\alpha = ((g\pi_i,u)_{i\in I})\alpha$. Hence by definition of the filter product we have $\{i \in I;\ (f\pi_i,t) = (g\pi_i,u)\} \in \mathcal{F}$. In particular $t = u$ and $\{i \in I;\ (i)(y)f = (i)(y)g \text{ for all } y \in Y\} \in \mathcal{F}$. Now consider $(f,t)\phi = (g,u)\phi$. By definition of ϕ, this is equivalent to $(f\theta',t) = (g\theta',u)$. Thus $t = u$ and $f\theta' = g\theta'$. We narrow our attention to $f\theta' = g\theta'$. By definition this is equivalent to $((y)f)\theta = ((y)g)\theta$ for all $y \in Y$. Finally, by the definition of filter product this becomes $\{i \in I;\ (i)(y)f = (i)(y)g \text{ for all } y \in Y\}$. As we can restrict ourselves to the union of the support of f and the support of g when considering the range of y in Y, we get a finite intersection of sets in $\mathcal{F}$, hence a set in $\mathcal{F}$. This completes the check that Ker $\beta\alpha$ = Ker ϕ.

This means that $(\Pi_{\mathcal{F}} S_i) \text{ wr}_Y T = \text{Im } \phi \cong (\Pi_I S_i) \text{ wr}_Y T/\text{Ker } \phi = (\Pi_I S_i) \text{ wr}_Y T/\text{Ker } \beta\alpha$ which is isomorphic to a subsemigroup of $\Pi_{\mathcal{F}}(S_i \text{ wr}_Y T)$, completing the proof.

The next result forms a pair with the one we have just finished. But the hypotheses are stronger.

__Theorem 2.2.__ Let (X,S) be a transformation semigroup and let $\{(Y_i,T_i);\ i \in I\}$ be a set of transformation semigroups. Let $\mathcal{F}$ be an ultrafilter. Let $(X,S), (Y_i,T_i) \in \mathfrak{R}$

6*

for each i and let (X,S), $(\Pi_{\mathcal{F}}Y_i, \Pi_{\mathcal{F}}T_i) \in \mathcal{R}$. Then $S \text{ wr}_Y \Pi_{\mathcal{F}}T_i$ is isomorphic to a subsemigroup of $\Pi_{\mathcal{F}}(S \text{ wr}_Y T_i)$, where $Y = \Pi_{\mathcal{F}}Y_i$.

Proof. Let $\alpha : \Pi_I T_i \to \Pi_{\mathcal{F}}T_i$ be the natural homomorphism. We will also use α to represent the natural map $\Pi_I Y_i \to \Pi_{\mathcal{F}}Y_i = Y$. If $t\alpha = t'\alpha$, where $t,t' \in \Pi_I T_i$, then $\{i \in I;\ t_i = t'_i\} \in \mathcal{F}$. If $t\alpha \neq t'\alpha$, then $\{i \in I;\ t_i = t'_i\} \notin \mathcal{F}$. As $\mathcal{F}$ is an ultrafilter it follows that $\{i \in I;\ t_i \neq t'_i\} \in \mathcal{F}$ in this case, using the fact that the two sets $\{i \in I;\ t_i = t'_i\}$ and $\{i \in I;\ t_i \neq t'_i\}$ are complements and so one of them must belong to the ultrafilter $\mathcal{F}$. Thus $\{i \in I;\ t_i = t'_i$ if and only if $t\alpha = t'\alpha\} \in \mathcal{F}$, and for any finite subset $J \subseteq \Pi_I Y_i$, $I_J = \{i \in I;\ y_i = y'_i$ if and only if $y\alpha = y'\alpha$ for all $y,y' \in J\}$ is in $\mathcal{F}$.

Let $f \in S^{(Y)}$. We need to define $f^* \in \Pi_{\mathcal{F}}S^{(Y_i)}$. Choose $J \subseteq \Pi_I Y_i$ such that $|J| < \infty$ and $J\alpha \supseteq \sigma(f)$. As above $I_J \in \mathcal{F}$. Let $i \in I_J$. Then we can define a function $f_{J,i}$ by

$$(y\pi_i)f_{J,i} = (y\alpha)f \text{ for all } y \in J$$

and extending the definition of $f_{J,i}$ to be an element of $S^{(Y_i)}$ by

$$(y_k)f_{J,i} = 1 \text{ if } y_k \in Y_i - J\pi_i.$$

If $i \notin I_J$ then $f_{J,i}$ is defined to be the trivial element of $S^{(Y_i)}$, mapping every element of Y_i to the identity of S. Finally define $f_J \in \Pi_I S^{(Y_i)}$ by

$$(i)f_J = f_{J,i},$$

and f^* to be $f_J\beta$ where β is the natural homomorphism $\Pi_I S^{(Y_i)} \to \Pi_{\mathcal{F}}S^{(Y_i)}$.

Our next job is to show that the definition of f^* is independent of the choice of J. So let K be an alternative choice to J. Then $J \cup K$ is still finite and is also an alternative to J. We have $I_{J\cup K} \in \mathcal{F}$. Then we only need to show that $f_{J,i} = f_{K,i}$ for all $i \in I_{J\cup K}$. So consider $i \in I_{J\cup K}$. Let $y_i \in Y_i$. We need to show that $(y_i)f_{J,i} = (y_i)f_{K,i}$. If $(y_i)f_{J,i} \neq 1$ then $y_i = y\pi_i$ for some $y \in J$ such that $(y\alpha)f \neq 1$. Thus $y\alpha \in \sigma(f)$ and we can find $z \in K$ such that $z\alpha = y\alpha$. Since $i \in I_{J\cup K}$, and using the definition of $I_{J\cup K}$, we deduce that $z_i = y_i$. Hence

$$(y_i)f_{K,i} = (z_i)f_{K,i} = (z\alpha)f = (y\alpha)f = (y_i)f_{J,i}.$$

Similarly, if $y_i f_{K,i} \neq 1$ then $(y_i)f_{K,i} = (y_i)f_{J,i}$. Otherwise we have $(y_i)f_{J,i} = 1 = (y_i)f_{K,i}$. So f^* is well-defined.

We now turn to $\Pi_{\mathcal{F}}(S \text{ wr}_Y T_i) = \Pi_{\mathcal{F}}(S^{(Y_i)}.T_i$. There is a natural isomorphism with $\Pi_{\mathcal{F}} S^{(Y)} . \Pi_{\mathcal{F}} T_i$. So we define a mapping $\gamma : S \text{ wr}_Y \Pi_{\mathcal{F}} T_i \to \Pi_{\mathcal{F}}(S \text{ wr}_Y T_i)$ by

$$(f,t)\gamma = (f^*,t) \text{ for all } t \in \Pi_{\mathcal{F}} T_i,\ f \in S^{(Y)}.$$

We need to show that γ is a homomorphism. Because of the definition of γ and of the product of two elements of a wreath product, it suffices to show that $({}^t f)^* = {}^t(f^*)$ and $(fg)^* = f^* g^*$.

Let $J \subseteq \Pi_I Y_i$ be such that $|J| < \infty$ and $J\alpha \supseteq \sigma(f)$. Let $t' \in \Pi_I T_i$ be such that $t'\alpha = t$. Then $K := \{y; (y)t' \in J\}$ is a finite subset of $\Pi_I Y_i$ by hypothesis and $K\alpha \supseteq \sigma({}^t f)$. We know that $I_J \cap I_K \in \mathcal{F}$ since I_J and I_K are both in $\mathcal{F}$. So we only need to show that

$$({}^t f)_{K,i} = {}^{t'}(f_{J,i}) \text{ for all } i \in I_J \cap I_K.$$

Let $i \in I_J \cap I_K$. Then $\sigma({}^{t'}(f_{J,i})) \subseteq \{y_i; y_i t'_i \in J\}$ which also contains $\sigma(({}^t f)_{K,i})$. For all $y \in J$, $y = (y_i)$, we have

$$(y_i)^{t'}(f_{J,i}) = (y_i t'_i) f_{J,i} = ((yt)\alpha)f,$$
$$(y_i)({}^t f)_{K,i} = (y\alpha)({}^t f) = (y\alpha)(t\alpha)f = ((yt)\alpha)f$$

which provides us with what we need.

The next step is to show that $(fg)^* = f^* g^*$ is satisfied. Choose $J \subseteq \Pi_I Y_i$ such that $|J| < \infty$ and $J\alpha \supseteq \sigma(f) \cup \sigma(g)$. Define $I_J \in \mathcal{F}$ as usual. It is enough to show that if $i \in I_J$ then $(fg)_{J,i} = (f)_{J,i}(g)_{J,i}$. Let $y \in J$. If $i \in I_J$, then

$$\begin{aligned}(y_i)(fg)_{J,i} &= (y\alpha)(fg) = (y\alpha)f(y\alpha)g \\ &= (y_i)(f)_{J,i}(y_i)(g)_{J,i}.\end{aligned}$$

It follows easily from this that $(fg)_{J,i} = (f)_{J,i}(g)_{J,i}$ and we have finished this step.

Finally we need to show that γ is one-to-one. This will follow if we can show that the map $f \to f^*$ is one-to-one. So assume that $f^* = g^*$. Then, for all $y \in J$, it is a consequence of the definition that $(y\alpha)f = (y\alpha)g$, where $J \subseteq \Pi_I Y_i$ is chosen to be finite and to contain $\sigma(f) \cup \sigma(g)$. This forces $(y\alpha)f = (y\alpha)g$ for all $y \in \Pi_I Y_i$ and hence $f = g$, our final step being now complete.

The final embedding theorem is, strictly speaking, not an embedding theorem, but is in the same spirit as the two theorems we have just proved.

Theorem 2.3. Let (X,S) and (Y,T) be a pair of transformation semigroups in $\mathfrak{K}$. Then $S\ \mathrm{Wr}_Y\ T$ is isomorphic to a homomorphic image of a subsemigroup of an ultrapower of $S\ \mathrm{wr}_Y\ T$.

Proof. Let $I := \{Z \subseteq Y;\ |Z| < \infty\}$. Then, for each $y \in Y$, let $I_y := \{Z \in I;\ y \in Z\}$. It is obvious that the sets I_y have the finite intersection property. Note that $I_y \cap I_z$ is the set of all finite subsets of Y containing $\{y,z\}$. By the properties of filters we can deduce that there exists an ultrafilter $\mathcal{F}$ on I such that $I_y \in \mathcal{F}$ for each $y \in Y$: see Proposition 4.1.3 of [2]. For each $J \in I$ we define U_J to be an isomorphic copy of $S\ \mathrm{wr}_Y$ T. The ultrapower of $S\ \mathrm{wr}_Y\ T$ we work with is $\Pi_{\mathcal{F}} U_J$.

Let $S_J^{(Y)}$ be the base subsemigroup of U_J, using an obvious extension of notation. Let $f \in \Pi_{\mathcal{F}} S_J^{(Y)}$, $g \in S^Y$. We will say that f approximates g if, for all $y \in Y$, there exists $F \in \mathcal{F}$ such that

$$(y)(f\pi_J) = (y)g$$

for all $J \in F$. For each $K \in I$, let g_K be the element of $S^{(Y)}$ which agrees with g on K and is the map to the identity of S on $Y - K$. Define $h \in \Pi_I S_L^{(Y)}$ by $(K)h = g_K$. Then for all $y \in Y$, we can choose $I_y \in \mathcal{F}$ and it follows that

$$(y)((K)h) = (y)g_K = (y)g$$

for all $K \in I_y$, since $y \in K$ in this case. Thus $h\alpha$ approximates g, where α is the natural homomorphism $\Pi_I S_J^{(Y)} \to \Pi_{\mathcal{F}} S_J^{(Y)}$. Hence every element of S^Y is approximated by an element of $\Pi_I S_J^{(Y)}$, extending in an obvious way the definition of approximation.

We now show that if f approximates g then g is uniquely determined by f. Suppose that f approximates both g and g'. Then, for all $y \in Y$, we have that there exists F and F' in $\mathcal{F}$ such that

$$(y)(f\pi_J) = (y)g \text{ for all } J \in F,$$
$$(y)(f\pi_{J'}) = (y)g' \text{ for all } J' \in F'.$$

But $F \cap F' \neq \phi$ and lies in $\mathcal{F}$. So for all K in $F \cap F' \in \mathcal{F}$ we have

$$(y)(f\pi_K) = (y)g = (y)g'.$$

Hence $g = g'$. This enables us to write $g = f\theta$ where θ is a well-defined mapping.

Let $A \subseteq \Pi_I S_J^{(Y)}$ be the set of all elements in $\Pi_I S_J^{(Y)}$ which approximate an element of S^Y. Then $A\theta = S^Y$ by what we have just proved. Choose $f, f' \in A$. Then we have that, for all $y \in Y$, there exists $f \in \mathcal{F}$ such that

$$(y)(f\pi_J) = (y)g \text{ for all } J \in F,$$

and there exists $F' \in \mathcal{F}$ such that

$$(y)(f'\pi_{J'}) = (y)g' \text{ for all } J' \in F'.$$

So, for all $y \in Y$, there exists $F \cap F' \in \mathcal{F}$ such that

$$(y)(f\pi_K) = (y)(f'\pi_K) = (y)g \cdot (y)g'$$

for all $K \in F \cap F'$ and so

$$(y)((ff')\pi_K) = (y)(gg').$$

We have shown that $(ff')\theta = f\theta \cdot f'\theta$. Thus A is a subsemigroup of $\Pi_I S_J^{(Y)}$ and θ is a homomorphism from A onto S^Y.

Our next step is to show that for all $f \in A$, and for all $t \in T$, we have $({}^t f)\theta = {}^t(f\theta)$. Since $f \in A$, we know that for all $y \in Y$, there exists $F \in \mathcal{F}$ such that

$$(yt)(f\pi_J) = (yt)(f\theta) \text{ for all } J \in F$$

and we deduce that

$$(y)(({}^t f)\pi_J) = (y)({}^t(f\theta)) \text{ for all } J \in F.$$

Thus ${}^t f \in A$ and $({}^t f)\theta = {}^t(f\theta)$.

Let $\Delta : T \to \Pi_I(S \text{ wr}_Y T)$ be the diagonal embedding, namely $(t\Delta)_J = t$ for all $J \in I$. Then $A.(T\Delta)$ is a subsemigroup of $\Pi_I(S \text{ wr}_Y T)$ by what we have just proved, and

$$(f, t\Delta)(f', t'\Delta) = (f\,{}^t f', (tt')\Delta).$$

Thus θ can be extended to a mapping, which we will also call θ, $A.(T\Delta) \to S \text{ Wr}_Y T$, by the following definition

$$(f, t\Delta)\theta = (f\theta, t)$$

7*

and θ is obviously onto, since $A\theta = S^Y$. It follows that

$$A.T\Delta/\mathrm{Ker}\ \theta \cong S\ \mathrm{Wr}_Y\ T.$$

To finish the proof we consider the natural homomorphism $\beta : \Pi_I(S\ \mathrm{wr}_Y\ T) \rightarrow \Pi_{\mathcal{F}}(S\ \mathrm{wr}_Y\ T)$ in order to show that there is an isomorphic copy of $A.T\Delta/\mathrm{Ker}\ \theta$ in $\Pi_{\mathcal{F}}(S\ \mathrm{wr}_Y\ T)$. Consider $(\ell,\ell') \in \mathrm{Ker}\ \beta \cap A.T\Delta$, where $\ell = (f,t\Delta)$, $\ell' = (f',t'\Delta)$ using the notation that we have introduced above. Then $t\Delta = t'\Delta$ and so $t = t'$. Also $K := \{J \in I;\ f\pi_J = f'\pi_J\} \in \mathcal{F}$. It follows that for all $y \in Y$, there exist $F,F' \in \mathcal{F}$ such that

$$(y)(f\pi_J) = (y)g \text{ for all } J \in F,$$
$$(y)(f'\pi_J) = (y)g' \text{ for all } J \in F',$$

where $g = f\theta$, $g' = f'\theta$. Then $F \cap F' \cap K \in \mathcal{F}$ and for all $J \in F \cap F' \cap K$ we have

$$(y)(f\pi_J) = (y)(f'\pi_J)$$

and so $(y)g = (y)g'$ for all $y \in Y$. Thus $(f,f') \in \mathrm{Ker}\ \theta$ and we conclude that

$$\mathrm{Ker}\ \beta \cap A.T\Delta \subseteq \mathrm{Ker}\ \theta.$$

Then $(A.T\Delta)\beta \cong A.T\Delta/\mathrm{Ker}\ \beta \cap A.T\Delta$ and $A.T\Delta/\mathrm{Ker}\ \theta$ is a homomorphic image of $(A.T\Delta)\beta$, finishing the proof.

An immediate corollary of some interest is the following.

__Corollary 2.4.__ $S\ \mathrm{Wr}_Y\ T$ **and** $S\ \mathrm{wr}_Y\ T$ **determine the same variety.**

References.

1. R. M. Bryant and J. R. J. Groves. Wreath products and ultraproducts of groups. Quart. J. Math. Oxford (2) 29 (1978), 301-308.

2. C. C. Chang and H. J. Keisler. Model Theory. North-Holland, (Amsterdam). 1973.

3. J. M. Howie. An Introduction to Semigroup Theory. Academic Press, (London). 1976.

Received
15 I 1991

POOLRÜHMADE PÕIMIK- JA FILTERKORRUTISED

J.D.P.Meldrum

R e s ü m e e

Käesolevas töös on vaatluse all seosed teisenduste poolrühmade põimik- ja filterkorrutiste (eriti põimik- ja ultrakorrutiste) vahel. Sellega üldistatakse artiklis [1] teisenduste rühmade kohta saadud tulemusi.

Tartu Ülikooli Toimetised, 953 (1992), 29 - 46.

WREATH PRODUCT FUNCTOR OF ACTS.

Peeter Normak [1)]

Tallinn Pedagogical University

Let U be a wreath product of monoids S and T by a left S-act A. Let W be the full subcategory of U-Act, consisting of all objects of the form ${}_S\mathrm{Awr}_T\mathrm{B}$, ${}_T\mathrm{B} \in$ T-Act. We construct certain functors between the categories T-Act, W and U-Act and find conditions under which these functors preserve or reflect projective objects.

1. INTRODUCTION

The central question in all papers about wreath products of acts was to determine under which conditions certain properties of a left S-act ${}_S\mathrm{A}$ and a left T-act ${}_T\mathrm{B}$ carry over to the wreath product ${}_S\mathrm{Awr}_T\mathrm{B}$, considered as a left U-act, where U is the wreath product of the monoid S and T by ${}_S\mathrm{A}$ (cf. [2], [3], [6]). In this paper another approach to this question is presented, inspired by the role the Hom- and $\otimes$ - functor play in algebra. More exactly, if the monoids S and T and the left S-act ${}_S\mathrm{A}$ are fixed, then ${}_S\mathrm{Awr}$ - can be considered as a functor, say ϕ from the category T-Act to W. The latter can be embedded (say, via ϕ_1) into U-Act. It is shown that there exist also functors ψ_1: U-Act $\longrightarrow$ W and ψ: W $\longrightarrow$ T-Act such that if ${}_S\mathrm{A}$ is indecomposable, then the functors $\psi\phi$ and $\psi\psi_1\phi_1\phi$ are

1) The author gratefully acknowledges the support of a grant by the Deutschen Akademischen Austauschdienst.

naturally equivalent to the identity functor of the category T-Act.

The natural question arises under which conditions these functors (and the compositions of them) preserve or reflect certain algebraical properties. In particular, the question which properties of a wreath product AwrB can be "projected" to the second component B is equivalent to the question which properties would be reflect by the functor $\phi_1\phi$. In this paper projective objects are taken into consideration.

2. BASIC DEFINITIONS AND RESULTS

In the following, S and T will always stand for monoids. A <u>left</u> S-<u>act</u> $_SA$ is a set A on which S acts unitarily from the left in the usual way, that is to say

$$(s_1s_2)a = s_1(s_2a),\ 1a = a \text{ for } a \in A,\ s_1, s_2 \in S,$$

where 1 denotes the identity of S.

For two S-acts $_SA$ and $_SB$ a mapping α: A $\longrightarrow$ B is called S-<u>homomorphism</u> if $\alpha(sa) = s\alpha(a)$ for all $(s,a) \in S \times A$. By S-Act we denote the category of all left S-acts. A left act with one generating element is called <u>cyclic</u>. By Θ we denote the one element act. Note that the <u>coproduct</u> $\amalg$ in the category S-Act is the disjoint union and that a <u>free left</u> S-<u>act</u> F with basis X is isomorphic to the coproduct of $|X|$ copies of S, S being considered as a left S-act over itself. A left S-act is called <u>indecomposable</u> if it cannot be presented as a coproduct of subacts. Obviously, $_SA$ is indecomposable if and only if for every two elements $a', a'' \in A$ there exist elements $s_0,\dots,s_{n-1},p_0,\dots,p_{n-1}$ in S and $a' = a_0, a_1,\dots,a_n = a''$ in A such that $s_ia_i = p_ia_{i+1}$, $i = 0,1,\dots,n-1$. Epimorphisms in S-Act are surjections and monomorphisms are injections.

Let W be a subcategory of S-Act. An S-act $_SA$ in W is called <u>projective in</u> W, if for every epimorphism ε: $_SX \longrightarrow {_SY}$ and for every homomorphism φ: $_SA \longrightarrow {_SY}$ in W there exists a homomorphism $\bar{\varphi}$: $_SA \longrightarrow {_SX}$ in W such that $\varepsilon\bar{\varphi} = \varphi$.

Let X, Y be sets. By F(X, Y) we denote the set of all mappings $f\colon X \longrightarrow Y$. By c_y, $y \in Y$, we denote the mapping in $F(X, Y)$ with $c_y(x) = y$ for all $x \in X$. By $U = U(S, T, A) = S \times F(A, T)$ denote *the wreath product of monoids* S *and* T *by the left* S-*act* ${}_SA$ and by ${}_SAwr_TB = A \times B$ denote the *wreath product of the* S-*act* ${}_SA$ *with the* T-*act* ${}_TB$ *over* U. Composition in U given by

$$(s, f)(r, g) = (sr, f_rg) \quad \text{where} \quad (f_rg)(a) = f(ra)g(a),$$
$$(s, f), (r, g) \in U, a \in A.$$

The action of U on ${}_SAwr_TB$ is given by

$$(r,f)(a,b) = (ra,f(a)b) \quad \text{for} \quad (r,f) \in U, (a,b) \in {}_SAwr_TB.$$

The undefined notions from category theory can be found, for example, in [1].

We recall the following facts:

2.1. LEMMA ([4], Proposition 3.3). *Let* $P_i \in$ S-Act, $i \in I$. *The* S-*act* $\coprod_{i\in I} P_i$ *is projective iff* P_i *is projective for every* $i \in I$.

2.2. LEMMA ([4], Corollary 3.8). *The* S-*act* P *is projective iff* $P = \coprod_{i\in I} Se_i$, *where* $e_i^2 = e_i \in S$, $i \in I$.

2.3. LEMMA ([6], Theorem 2). *A left* U-*act* ${}_SAwr_TB$ *is projective in* U-Act *if and only if* ${}_SA$ *and* ${}_TB$ *are projective* S-*act and* T-*act, respectively, and either the monoid* T *contains a right zero or* $A \cong Sv$, $v \in S$, *and there exists an element* $s \in S$ *such that* $v = sSv$.

2.4. LEMMA ([6], Lemma 3). *The left* U-*acts* $(\coprod_I {}_SA_i)wr_TB$ *and* $\coprod_I ({}_SA_iwr_TB)$ *are isomorphic*.

2.5. LEMMA ([6], Lemma 4). *The left* U-*acts* ${}_SAwr(\coprod_I {}_SB_i)$ *and* $\coprod_I ({}_SAwr_TB_i)$ *are isomorphic*.

2.6. LEMMA ([6], Lemma 5). *If* $\varphi\colon {}_TX \longrightarrow {}_TY$ *is a homomorphism* of left T-acts, then for every monoid S and left S-act ${}_SA$ the mapping $\bar{\varphi}: {}_SAwr_TX \longrightarrow {}_SAwr_TY$ given by $\bar{\varphi}(a, x) = (a, \varphi(x))$, $(a, x) \in A \times X$, is a homomorphism of U-acts. Moreover, if φ is a monomorphism (epimorphism), then $\bar{\varphi}$ is also a monomorphism (epimorphism).

2.7. LEMMA ([4], Lemma 5.2). The following properties of an idempotent $e \in S$ are equivalent:

1) There exists an element $s \in S$ such that $e = sSe$.
2) $eSe = e$.
3) $|\mathrm{End}\ Se| = 1$.

3. THE CATEGORY W

Let U be the wreath product of the monoids S and T by the left S-act ${}_SA$.

3.1. By W we denote the full subcategory of U-Act consisting of all U-acts of the form ${}_SAwr_TX$, ${}_TX \in$ T-Act.

This section contains some preliminary lemmas about W, used in the following sections. We also describe projective objects in W in case all epimorphisms in W are surjections.

Let $a \in {}_SA$ be an element. With ρ_a we denote the following left congruence on the monoid S: $s_1\rho_a s_2$ iff $s_1a = s_2a$.

3.2. LEMMA. Let $\varphi: {}_SAwr_TX \longrightarrow {}_SAwr_TY$ be an U-homomorphism with $\varphi(a,x) = (a',y)$ for $(a,x) \in A \times X$, $(a',y) \in A \times Y$. Then either $a = a'$ and $\rho_x \subseteq \rho_y$ or $\rho_a \subseteq \rho_{a'}$, and $y = \theta$.

Proof. If $\varphi(a,x) = (a',y)$, then for every $(s,f) \in U$ we have $\varphi(sa,f(a)x) = \varphi((s,f)(a,x)) = (s,f)\varphi(a,x) = (s,f)(a',y) = (sa',f(a')y)$. Assume that $a = a'$ and that $t,v \in T$ are elements such that $t\rho_x v$. Then $(a',ty) = (1,c_t)(a',y) = (1,c_t)\varphi(a,x) = \varphi((1,c_t)(a,x)) = \varphi(a,tx) = \varphi(a,vx) = \varphi((1,c_v)(a,x) = (1,c_v)\varphi(a,x) = (1,c_v)(a',y) = (a',vy)$. Hence $ty = vy$ and therefore we have $\rho_x \subseteq \rho_y$. Assume now that $a \neq a'$. Let $s_1,s_2 \in S$ be arbitrary elements such that $s_1\rho_a s_2$ and let $t \in T$ be any element. Let $g: A \longrightarrow T$ be the function such that for $a'' \in A$,

$$g(a'') = \begin{cases} t \text{ if } a'' = a' \\ 1 \text{ if } a'' \neq a'. \end{cases}$$

Then $(s_1a',ty)=(s_1a',g(a')y) = (s_1,g)(a',y) = (s_1,g)\varphi(a,x) = = \varphi((s_1,g)(a,x)) = \varphi(s_1a,g(a)x) = \varphi(s_2a,x) = \varphi((s_2,c_1)(a,x)) = (s_2,c_1)\varphi(a,x) = (s_2,c_1)(a',y) =(s_2a',y)$. Hence $s_1a' = s_2a'$ and $ty = y$ from which we conclude that $\rho_a \leq \rho_{a'}$ and $y = \theta$.

3.3. COROLLARY. <u>Let</u> $(Sa)wrTx$, $a \in A$, $x \in X$ <u>be a cyclic</u> U-<u>act in</u> W <u>and let</u> ${}_SAwr_TY$ <u>be an arbitrary object in</u> W. <u>Then the mapping</u> $(a,x) \longrightarrow (a',y)$,$(a',y) \in AwrY$, <u>can be extended to a</u> U-<u>homomorphism if and only if either</u> $a = a'$ <u>and</u> $\rho_x \leq \rho_y$ <u>or</u> $\rho_a \leq \rho_{a'}$ <u>and</u> $y = \theta$.

Proof. By Lemma 3.2 we have to prove that under the above conditions the mapping $(a,x) \longmapsto (a',y)$ can be extended to U-homomorphism.Set $\varphi(sa,tx) = (sa',ty)$, $s \in S$, $t \in T$. It is clear that φ is correctly defined. For every $(s',f) \in U$ we have $\varphi((s',f)(sa,tx)) = \varphi(s'sa,f(sa)tx) = = (s'sa',f(sa)ty) = (s'sa',f(sa')ty) = (s',f)(sa',ty) = (s',f)\rho(sa,tx)$.

As we see from Example 3.5 below, we have the following

3.4. LEMMA. <u>The epimorphisms in</u> W <u>need not necessarily be surjective mappings.</u>

3.5. EXAMPLE. Let $S = (\mathbb{N},\cdot)$ be the monoid of natural numbers under multiplication and let ${}_SA = {}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}$. Let $k >0$, $k \in \mathbb{N}$ and let T be an arbitrary monoid. Consider the mapping $\gamma : {}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr_T\theta \longrightarrow {}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr_T\theta$ defined by $\gamma(n,\theta) = (kn,\theta)$, $n \in \mathbb{N}$. It is clear that γ is a U-homomorphism that is not surjective. Let now $\alpha,\beta : {}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr_T\theta \longrightarrow {}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr_TX$ be U-homomorphisms such that $\alpha\gamma = \beta\gamma$. By Lemma 3.2 we have that ${}_T\theta \leq {}_TX$ and that $\alpha({}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr_T\theta) \leq {}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr\,{}_T\theta$, $\beta({}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr_T\theta) \leq {}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr_T\theta$. Let $\alpha(1,\theta) = (n_1,\theta)$ and $\beta(1,\theta) = (n_2,\theta)$. Then $(kn_1,\theta) = (k,c_1)(n_1,\theta) = (k,c_1)\alpha(1,\theta)= \alpha((k,c_1)(1,\theta))= \alpha(k,\theta) = \alpha\gamma(1,\theta) = \beta\gamma(1,\theta) = \beta(k,\theta) = \beta((k,c_1)(1,\theta)) = (k,c_1)\beta(1,\theta) = (k,c_1)(n_2,\theta) = (kn_2,\theta)$. Hence $kn_1 = kn_2$ and

9

therefore $n_1 = n_2$, that is $\alpha = \beta$. This means that γ is an epimorphism.

Using the last Example 3.5 we get the following

3.6. PROPOSITION. The category W does not necessarily have projective objects.

Proof. Let ${}_S A = {}_S S = (\mathbb{N}, \cdot)$ and let $k > 1$ be a natural number. By Example 3.5 the mapping $\varepsilon : {}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr_T\theta \longrightarrow {}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr_T\theta$ defined by $\varepsilon(n,\theta) = (kn,\theta)$ is an epimorphism. Let ${}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr_T X \in W$ be an arbitrary object. Define a mapping $\varphi : {}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr_T X \longrightarrow {}_{\mathbb{N}}\mathbb{N}wr_T\theta$ by $\varphi(n,x) = ((k-1)n,\theta)$, $(n,x) \in \mathbb{N} \times X$. For every $(s,f) \in U$ we have $\varphi((s,f)(n,x)) = \varphi(sn, f(n)x) = ((k-1)sn,\theta) = (s(k-1)n,\theta) = (s,f)((k-1)n,\theta) = (s,f)\varphi(n,x)$. Hence φ is a U-homomorphism. From Corollary 3.3 it follows that φ is correctly defined. Because for all $x \in {}_T X$ we have $\varphi(1,x) = (k-1,\theta) \notin \varepsilon({}_S Awr_T\theta)$, we get that $\varepsilon\psi \neq \varphi$ for all homomorphisms $\psi : {}_S Awr_T X \longrightarrow {}_S Awr_T\theta$.

For our further purposes we need the following

3.7. LEMMA. If ${}_S Awr_T T$ is projective in W, then epimorphisms in W are surjections.

Proof. Let $\varepsilon : {}_S Awr_T X \longrightarrow {}_S Awr_T Y$ be an epimorphism in W and let $(a,y) \in A \times Y$ be an arbitrary element. Define a mapping $\varphi : {}_S Awr_T T \longrightarrow {}_S Awr_T Y$ setting $\varphi(a,t) = (a,ty)$, $(a,t) \in A \times T$. By Lemma 2.6 φ is a correctly defined U-homomorphism. By projectivity of ${}_S Awr_T T$ there exists a U-homomorphism $\bar{\varphi} : {}_S Awr_T T \longrightarrow {}_S Awr_T X$ such that $\varepsilon\bar{\varphi} = \varphi$. Hence $(a,y) \in \varepsilon({}_S Awr_T X)$.

3.8. DEFINITION. Call a left S-act ${}_S A$ in some subcategory W of S-Act sur-projective in W if for every surjective homomorphism $\sigma : {}_S X \longrightarrow {}_S Y$ and for every homomorphism $\varphi : {}_S A \longrightarrow {}_S Y$ in W there exists a homomorphism $\bar{\varphi} : {}_S A \longrightarrow {}_S X$ in W such that $\sigma\bar{\varphi} = \varphi$.

Now we can prove the following

3.9. THEOREM. An U-act ${}_S\mathrm{Awr}_T B$ is sur-projective in W if and only if ${}_S A$ and ${}_T B$ are projective in S-Act and T-Act, respectively, and either the monoid T contains a right zero or ${}_S A \cong Se$ with $eSe = e$.

Proof. Sufficiency follows from Lemma 2.3 and from the fact that every surjective homomorphism in W is an epimorphism in U-Act.

Necessity. From the proof of Lemma 2.3 it follows that ${}_S A$ and ${}_T B$ are projective in S-Act and T-Act, respectively. By Lemma 2.2 we have that ${}_S A \cong \coprod_{i\in I} Se_i$, $e_i^2 = e_i$, $i \in I$. Assume that $|I| > 1$ and that $i \neq j$, $i,j \in I$. Consider the diagram

$$\begin{array}{ccc} & & {}_S\mathrm{Awr}_T B \\ & & \big\downarrow \varphi \\ {}_S\mathrm{Awr}_T T & \xrightarrow[\pi]{} & {}_S\mathrm{Awr}_T \theta \end{array} , \qquad (*)$$

where

$$\varphi(se_k, b) = \begin{cases} (se_k, \theta) & \text{if } k \neq i \\ (se_i e_j, \theta) & \text{if } k = i \end{cases}$$

and

$$\pi(se_k, t) = (se_k, \theta), \qquad (se_k, t) \in A \times T.$$

From Corollary 3.3 it follows that φ and π are correctly defined U-homomorphisms. By hypothesis there exists a homomorphism $\psi : {}_S\mathrm{Awr}_T B \longrightarrow {}_S\mathrm{Awr}_T T$ such that $\pi\psi = \varphi$. Let for $b \in {}_T B$ $\psi(e_i, b) = (a, t_0)$, $(a, t_0) \in A \times T$. Then obviously $a \in Se_j$. Hence $a \neq e_i \in Se_i$ (remember that $Se_i \cap Se_j = \emptyset$) and by Lemma 3.2 we have that t_0 is a right zero of T. Assume now that T does not contain a right zero. Then by the above $A \cong Se$, $e^2 = e$. Let $\chi : Se \longrightarrow Se$ be an arbitrary homomorphism. Consider the diagram (*), where φ and π are defined by

$$\varphi(se, b) = (\chi(se), \theta), \quad b \in {}_T B, \ s \in S;$$

$$\pi(se, t) = (se, \theta), \qquad t \in T, \ s \in S.$$

From Corollary 3.3 it follows that φ and π are correctly defined U-homomorphisms. By hypothesis there exists a homomorphism $\psi : {}_S\mathrm{Awr}_T B \longrightarrow {}_S\mathrm{Awr}_T T$ such that $\pi\psi = \varphi$. Using Lemma 3.2 we get that for every $b \in B$ there exists an element $t' \in T$ such that $\psi(e,b) = (e,t')$. We have $(e,\theta) = \pi(e,t') = \pi\psi(e,b) = \varphi(e,b) = (\chi(e),\theta)$. Hence $\chi(e) = e$ and therefore $|\mathrm{End}\ Se| = 1$. From Lemma 2.7 it follows that $eSe = e$.

4. THE FUNCTORS BETWEEN T-ACT, W AND U-ACT.

In this section we construct functors $\phi = {}_S\mathrm{Awr}\text{-}$: T-Act $\longrightarrow$ W, ψ_1 : U-Act $\longrightarrow$ W and ψ : W $\longrightarrow$ T-Act such that in case if A is indecomposable $\psi\phi$ and $\psi\psi_1\phi_1\phi$ are naturally equivalent to the identity functor $\mathrm{id}_{T\text{-Act}}$ of the category T-Act, where ϕ_1 : W $\longrightarrow$ U-Act is the embedding functor:

$$\text{T-Act} \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} W \underset{\psi_1}{\overset{\phi_1}{\rightleftarrows}} \text{U-Act}.$$

As in Section 3, let U be the wreath product of monoids S and T by the left S-act ${}_SA$. For every ${}_TB \in$ T-Act define $\phi({}_TB) = {}_S\mathrm{Awr}_T B$. If $\varphi : {}_TB \longrightarrow {}_TC$ is a T-homomorphism, then define $\phi(\varphi) : {}_S\mathrm{Awr}_T B \longrightarrow {}_S\mathrm{AwrC}_T$ setting $\phi(\varphi)(a,b) = (a,\varphi(b))$, $(a,b) \in A \times B$. By Lemma 2.6 we have that $\phi(\varphi)$ is a U-homomorphism for every T-homomorphism φ. Further, if $\chi: {}_TC \longrightarrow {}_TD$ is a T-homomorphism, then for every $(a,b)\in A \times B$ we have $\phi(\chi\varphi)(a,b) = (a,(\chi\varphi)(b)) = (a,\chi(\varphi(b))) = \phi(\chi)(a,\varphi(b)) = \phi(\chi)\phi(\varphi)(a,b)$. Obviously $\phi(1_B) = 1_{\phi(B)}$. Hence we have the following

4.1. PROPOSITION. <u>The mapping</u> ϕ : T-Act $\longrightarrow$ W, <u>such that</u> $\phi({}_TB) = {}_S\mathrm{Awr}_T B$, ${}_TB \in$ T-Act, <u>and</u> $\phi(\alpha)(a,b) = (a,\alpha(b))$, $\alpha \in \mathrm{Hom}_T({}_TB,{}_TC)$, <u>is a functor</u>.

Let ${}_UX$ be an arbitrary U-act. Define on X an equivalence ρ as follows

$$x_1 \rho x_2 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\, x_1 = y_0,\ y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = x_2 \text{ in } {}_U X \\ \exists\, s_0, \dots, s_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1} \in S \text{ such that } \quad (**) \\ (s_i, c_1) y_i = (p_i, c_1) y_{i+1},\ i = 0,1,\dots,n-1. \end{cases}$$

Define on the set $X_{/\rho}$ the action of T, setting $t\bar{x} = \overline{(1,c_t)x}$, where $\bar{x}$ denotes the equivalence class of ρ, containing element x. This action is correctly defined. For, let $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, that is there exist elements y_i, s_i, p_i such that the equations in (**) hold. Then $(s_i,c_1)(1,c_t)y_i = (1,c_t)(s_i,c_1)y_i = (1,c_t)(p_i,c_1)y_{i+1} = (p_i,c_1)(1,c_t)y_{i+1}$ for all $i = 0,1,\dots,n-1$. Hence $((1,c_t)x_1)\rho((1,c_t)x_2)$, which means $t\bar{x}_1 = t\bar{x}_2$. We also have $t(v\bar{x}) = t(\overline{(1,c_v)x}) = \overline{(1,c_t)(1,c_v)x} = \overline{(1,c_{tv})x} = (tv)\bar{x}$ for all $t,v \in T$. Obviously $1\bar{x} = \bar{x}$. Hence $X_{/\rho}$ can be considered as a left T-act.

If ${}_U X = {}_S A \mathrm{wr}_T B$, then we obviously have the following

4.2. PROPOSITION. <u>For</u> $(a_1,b_1), (a_2,b_2) \in {}_S A\mathrm{wr}_T B$, $(a_1,b_1)\rho(a_2,b_2)$ <u>if and only if</u> $b_1 = b_2$ <u>and</u> a_1 <u>and</u> a_2 <u>belong to the same indecomposable component of</u> A. <u>Hence</u> $(A\mathrm{wr}B)_{/\rho} \cong \coprod_I B$, <u>where</u> I <u>is the set of indecomposable components of</u> ${}_S A$.

4.3. COROLLARY. <u>If</u> ${}_S A$ <u>is indecomposable, then for every</u> T-<u>act</u> ${}_T B$ <u>and elements</u> $(a_1,b_1), (a_2,b_2) \in {}_S A\mathrm{wr}_T B$, $(a_1,b_1)\rho(a_2,b_2)$ <u>if and only if</u> $b_1 = b_2$.

4.4. COROLLARY. <u>If</u> ${}_S A$ <u>is indecomposable, then for every</u> T-<u>act</u> ${}_T B$, ${}_T({}_S A\mathrm{wr}_T B)_{/\rho} \cong {}_T B$.

4.5. COROLLARY. <u>If</u> ${}_S A$ <u>is indecomposable, then</u> ${}_S A\mathrm{wr}_T B \cong {}_S A\mathrm{wr}_T C$ <u>iff</u> ${}_T B \cong {}_T C$.

4.6. REMARK. If ${}_S A$ is not indecomposable, then Corollaries 4.3 - 4.5 do not follow. For example, let ${}_S A = \coprod_{i\in\mathbb{N}} \theta_i$, ${}_T B = \theta$

and ${}_TC = \theta_1 \amalg \theta_2$. Then $\varphi : {}_S A wr_T B \longrightarrow {}_S A wr_T C$, defined by

$$\varphi(\theta_i,\theta) = \begin{cases} (\theta_i,\theta_1) & \text{if } i = 2k+1 \\ (\theta_{i/2},\theta_2) & \text{if } i = 2k \end{cases}$$

is an isomorphism of U-acts, but ${}_TB$ and ${}_TC$ are not isomorphic. Moreover, ${}_T({}_S A wr_T B)/\rho \cong \coprod_{i\in\mathbb{N}} \theta_i \not\cong {}_TB$.

4.7. LEMMA. <u>Let</u> $\alpha : {}_S A wr_T B \longrightarrow {}_S A wr_T C$ <u>be a</u> U-<u>homomorphism and let</u> a_0, a_1 <u>belong to the same indecomposable component of</u> A. <u>Then for every</u> $b \in {}_TB$, $\alpha(a_0,b)\rho\alpha(a_1,b)$.

Proof. By hypothesis there exist elements $a^{(1)},\dots,a^{(n)} \in A$, $s_1,\dots,s_n,t_1,\dots,t_n \in S$ such that $s_1a^{(1)} = a_0$, $t_na^{(n)} = a_1$, and $t_ia^{(i)} = s_{i+1}a^{(i+1)}$, $i = 1,\dots,n-1$. Denote $\alpha(a^{(i)},b)$ with $(a_{(i)},c_{(i)})$, $i = 1,\dots,n$. We have $\alpha(a_0,b)=\alpha(s_1a^{(1)},b) = (s_1,c_1)\alpha(a^{(1)},b) = (s_1a_{(1)},c_{(1)})$ and $\alpha(a_1,b)= \alpha(t_na^{(n)},b)= (t_n,c_1)\alpha(a^{(n)},b) = (t_na_{(n)},c_{(n)})$. Further, $(t_ia_{(i)},c_{(i)}) = \alpha(s_{i+1}a^{(i+1)},b) = (s_{i+1}a_{(i+1)},c_{(i+1)})$, $i = 1,\dots,n-1$. Hence $c_{(i)} = c_{(1)}$ for all i and $s_1a_{(1)}$, $t_na_{(n)}$ belong to the same indecomposable component of ${}_SA$. By Proposition 4.2 we have that $\alpha(a_0,b) = (s_1a_{(1)},c_{(1)})\rho(t_na_{(n)},c_{(n)}) = \alpha(a_1,b)$.

Now we can prove the following

4.8. THEOREM. <u>The mapping</u> $\psi : W \longrightarrow$ T-Act <u>such that</u> $\psi({}_S A wr_T B) = {}_T({}_S A wr_T B)/\rho$ <u>and</u> $\psi(\alpha)\overline{(a,b)} = \overline{\alpha(a,b)}$ <u>for a</u> U-<u>homomorphism</u> $\alpha : {}_S A wr_T B \longrightarrow {}_S A wr_T C$ <u>and</u> $(a,b) \in {}_S A wr_T B$ <u>is a functor. Moreover, if</u> ${}_SA$ <u>is indecomposable, then</u> $\psi\phi$ <u>is naturally equivalent to the functor</u> $id_{T\text{-}Act}$.

Proof. From Proposition 4.2 and Lemma 4.7 it follows that ψ is correctly defined. Let now $\beta : {}_S A wr_T C \longrightarrow {}_S A wr_T D$ be another homomorphism. Then we have $\psi(\beta\alpha)\overline{(a,b)} = \overline{(\beta\alpha)(a,b)} = \overline{\beta(\alpha(a,b))} = \psi(\beta)\overline{\alpha(a,b)} = \psi(\beta)\psi(\alpha)\overline{(a,b)}$, $(a,b) \in {}_S A wr_T B$.

Obviously $\psi(1_{AwrB}) = 1_{(AwrB)/\rho}$. Hence ψ is a functor. Let now ${}_SA$ be indecomposable. For every ${}_TB \in$ T-Act, define $\rho_B : \psi\phi({}_TB) \longrightarrow {}_TB$, putting $\rho_B(a,b) = b$. From Corollary 4.3 it follows that ρ_B is a correctly defined T-isomorphism. For a T-homomorphism $\varphi : {}_TB \longrightarrow {}_TC$ we have $(\rho_C \cdot \psi\phi(\varphi))(a,b) = \rho_C\phi(\varphi)(a,b) = \rho_C(a,\varphi(b)) = \varphi(b) = (\varphi\cdot\rho_B)(a,b)$, $(a,b) \in {}_SAwr_TB$. Hence $\psi\phi$ is naturally equivalent to the identity functor $id_{T\text{-}Act}$ of the category T-Act.

4.9. THEOREM. The mapping ψ_1 : U-Act $\longrightarrow$ W such that $\psi_1({}_UX) = {}_SAwr_T(X_{/\rho})$ and $\psi_1(\alpha)(a,\bar{x}) = \overline{(a,\alpha(x))}$ for $\alpha : {}_UX \longrightarrow {}_UY$ is a functor. Moreover, if ${}_SA$ is indecomposable, then $\psi\psi_1\phi_1\phi$ is naturally equivalent to the identity functor $id_{T\text{-}Act}$ of the category T-Act.

Proof. Obviously ψ_1 is correctly defined. Further,

$\psi_1(\alpha)((s,f)(a,\bar{x})) = \psi_1(\alpha)(sa,f(a)\bar{x}) = \psi_1(\alpha)(sa,\overline{(1,c_{f(a)})x}) = (sa,\overline{\alpha((1,c_{f(a)})x)}) = (sa,\overline{(1,c_{f(a)})\alpha(x)}) = (sa,f(a)\overline{\alpha(x)}) = (s,f)(a,\overline{\alpha(x)}) = (s,f)(\psi_1(\alpha)(a,\bar{x}))$ for all $(s,f) \in U$ and $(a,\bar{x}) \in {}_SAwrX_{/\rho}$. Hence $\psi_1(\alpha)$ is a U-homomorphism for every U-homomorphism α. Let $\beta : {}_UY \longrightarrow {}_UZ$ be an other U-homomorphism. Then $(\psi_1(\beta\alpha))(a,\bar{x}) = (a,\overline{(\beta\alpha)(x)}) = (a,\overline{\beta(\alpha(x))}) = \psi_1(\beta)(a,\overline{\alpha(x)}) = (\psi_1(\beta)\cdot\psi_1(\alpha))(a,\bar{x})$, $(a,\bar{x}) \in {}_SA \text{ wr } (X_{/\rho})$. Obviously $\psi_1(1_x) = 1_{Awr(X/\rho)}$. Hence ψ_1 is a functor. Let now ${}_SA$ be indecomposable. For every ${}_TB \in$ T-Act define a mapping ρ_B: $\psi\psi_1\phi_1\phi({}_TB) \longrightarrow {}_TB$, putting $\rho_B(a_1,\overline{(a_2,b)}) = b$. From Corollary 4.3 it follows that ρ_B is correctly defined. It can be easily shown that ρ_B is an isomorphism and that $\rho_C\cdot\psi\psi_1\phi_1\phi(\varphi) = \varphi\rho_B$ for every homomorphism $\varphi : {}_TB \longrightarrow {}_TC$. Hence $\psi\psi_1\phi_1\phi$ is naturally equivalent to the identity functor $id_{T\text{-}Act}$ of the category T-Act.

4 .10. REMARK. If ${}_SA$ is not indecomposable, then there does not necessarily exist a functor ψ : W $\longrightarrow$ T-Act such that $\psi\phi \cong id_{T\text{-}Act}$. For example, let $A \cong \theta \amalg \theta$. Consider $B \cong \theta\amalg\theta$. Then $End_TB \cong \{1;a;o_1;o_2 \mid o_iu = o_i,\ u \in End\,B;\ a^2 = 1;\ ao_i = o_j,\ \{i,j\} = \{1;2\}\}$. Hence if there exists a functor

$\psi : W \longrightarrow$ T-Act such that $\psi\phi \cong id_{T\text{-Act}}$ we have that $H = End(A wrB) = H_1 \dot{\cup} H_2 \dot{\cup} H_3 \dot{\cup} H_4$, where $\psi(H_1) = 1$, $\psi(H_2) = a$, $\psi(H_3) = O_1$, $\psi(H_4) = O_2$, $H_3H \subseteq H_3$ and $H_4H \subseteq H_4$. One can show that $Aut(AwrB) = H_1 \cup H_2$. Obviously $AwrB \cong \coprod_{i=0}^{3} \theta_i$. Denote with $\varphi_i \in H$, $i = 0,1,2,3$ the homomorphisms such that

$$\varphi_i(\theta_j) = \begin{cases} \theta_j & \text{if } i \neq j \\ \theta_{i+1(\mathrm{mod}\ 4)} & \text{if } i = j. \end{cases}$$

Obviously $\varphi_i \in H_3 \cup H_4$ for $\forall\ i \in \{1;2;3;4\}$. Since every nonisomorphic homomorphism of AwrB can be written in the form $\varphi_i\varphi$ for some $\varphi \in H$ and $i \in \{1;2;3;4\}$, we have that there exist $g,r \in \{0,1,2,3\}$, $g \neq r$, such that $\varphi_g \in H_3$ and $\varphi_r \in H_4$. Without restriction of generality we can assume that $g = 2$ and $r = 3$. Let $\varphi \in H$ be a homomorphism such that $\varphi(\theta_0) = \theta_0$, $\varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2) = \varphi(\theta_3) = \theta_1$. Then $\varphi = \varphi_2\varphi \in H_3$ and $\varphi = \varphi_3\varphi \in H_4$, a contradiction.

Finally, we have the following

4.11. PROPOSITION. The functor ϕ is dense and faithful, the functor $\phi_1\phi$ is faithful and the functor $\psi\psi_1$ is full.

Remember that functor ϕ_1 is an embedding and hence faithful. From Lemma 3.2 it follows that if A is indecomposable, then ϕ is full (or, equivalently, $\phi_1\phi$ is full or ψ is faithful) iff End A = {1}. Functor ψ_1 is faithful iff $\psi\psi_1$ is faitful iff $S = \{1\}$ and $|A| = 1$ (and hence $U \cong T$). For the proof, assume that there exists an element $s \neq 1$ in S. Then obviously $(1,c_1)\rho(s,c_1)$ and for the U-homomorphism $\varphi : U \longrightarrow U$ such that $\varphi(u,f) = (u,f)(s,c_1) = (us,f)$ we have $\psi_1(\varphi) = \psi_1(1_U)$. Hence then ψ_1 is not faithful.

From [1, Proposition 12.8] we get

4.12. COROLLARY. The functors ϕ, ϕ_1 and $\phi_1\phi$ reflect monomorphisms, epimorphisms, bimorphisms, constant morphisms, and commutative triangles.

5. PROJECTIVITY

In this section we present conditions, under which the functors ϕ, ψ, ϕ_1, ψ_1, $\phi_1\phi$ and $\psi\psi_1$ preserve or reflect projective objects.

From Lemma 2.3, Proposition 4.2, and Theorem 3.9 we get the following

5.1. PROPOSITION.

1) The functor ϕ reflects projective objects.
2) The functor ϕ_1 preserves projective objects.
3) The functor ψ preserves projective objects.
4) The functor $\phi_1\phi$ reflects projective objects.

Further, using Lemma 2.3, Lemma 3.7, and Theorem 3.9, we get the following

5.2. PRPOSITION. The functor ϕ preserves (the functor ψ reflects) projective objects if and only if all epimorphisms in W are surjections, ${}_SA$ is projective and either T contains a right zero or $A \cong Se$ with $eSe = e$.

5.3. PROPOSITION. The functor ϕ_1 reflects projective objects if and only if one the following conditions hold:

1) All epimorphisms in W are surjections.
2) ${}_SA$ is not projective.
3) The monoid T does not contain a right zero and ${}_SA \not\cong Se$ for every idempotent $e \in S$ such that $eSe = e$.

Next we need some lemmas. First, denote with g^t, $t \in T$, $g \in F(A,T)$, the function in $F(A,T)$ such that $g^t(a) = tg(a)$ for all $a \in A$.

5.4. LEMMA. Let $(\varepsilon,f) \in U$ be an idempotent. Then we have $(U(\varepsilon,f))/_\rho \cong \prod_{\varepsilon A} Tf(\varepsilon a)$.

Proof. By definition of ρ we obviously have $(U(\varepsilon,f))/_\rho = \{g_\varepsilon f \mid g \in F(A,T)\}$. Define a mapping $\varphi : (U(\varepsilon,f))/_\rho \longrightarrow \prod_{\varepsilon A} Tf(\varepsilon a)$, setting $(\varphi(g_\varepsilon f))(\varepsilon a) = g(\varepsilon a)f(\varepsilon a)$. φ is correctly defined. For, let $g_\varepsilon f = h_\varepsilon f$ for some $g,h \in F(A,S)$.

Then we have $g(\varepsilon a)f(a) = h(\varepsilon a)f(a)$, for all $a \in A$. In particular, $g(\varepsilon a)f(\varepsilon a) = g(\varepsilon\varepsilon a)f(\varepsilon a) = h(\varepsilon\varepsilon a)f(\varepsilon a) = h(\varepsilon a)f(\varepsilon a)$ for all $\varepsilon a \in \varepsilon A$. From $\varphi(tg_\varepsilon f)(\varepsilon a) = \varphi(g_\varepsilon^t f)(\varepsilon a) = g_\varepsilon^t(\varepsilon a)f(\varepsilon a) = tg(\varepsilon a)f(\varepsilon a) = t\varphi(g_\varepsilon f)(\varepsilon a)$, $\varepsilon a \in \varepsilon A$, we get that φ is a T-homomorphism. Let now $g_\varepsilon f \neq h_\varepsilon f$ for some $g,h \in F(A,T)$. Then there exists an element $a \in A$ such that $g(\varepsilon a)f(a) \neq h(\varepsilon a)f(a)$. From $f_\varepsilon f = f$ we have $g(\varepsilon a)f(\varepsilon a)f(a) = g(\varepsilon a)f(a) \neq h(\varepsilon a)f(a) = h(\varepsilon a)f(\varepsilon a)f(a)$. Hence for this $a \in A$, $g(\varepsilon a)f(\varepsilon a) \neq h(\varepsilon a)f(\varepsilon a)$. This means that $\varphi(g_\varepsilon f)(\varepsilon a) \neq \varphi(h_\varepsilon f)(\varepsilon a)$. Hence $\varphi(g_\varepsilon f) \neq \varphi(h_\varepsilon f)$ and therefore φ is a monomorphism. Let now $(t_{\varepsilon a}f(\varepsilon a)) \in \underset{\varepsilon A}{\pi}\, Tf(\varepsilon a)$ be an arbitrary element. Let $g : A \longrightarrow T$ be a mapping such that

$$g(a) = \begin{cases} t_a\,, & \text{if } a = \varepsilon a \\ t_0\,, & \text{if } a \neq \varepsilon a, \end{cases}$$

where t_0 is an arbitrary element from T. Then $\varphi(g_\varepsilon f)(\varepsilon a) = g(\varepsilon a)f(\varepsilon a) = t_{\varepsilon a}f(\varepsilon a)$, $\varepsilon a \in \varepsilon A$. Hence φ is a surmorphism and therefore φ is an isomorphism.

5.5. LEMMA. <u>Assume that the monoid</u> T <u>contains a right zero and that</u> $|A| > 1$. <u>Then the</u> T-act $(U(1,f))_{/\rho}$ <u>is projective for every idempotent of the form</u> $(1,f)$ <u>if and only if</u> $T = \{1\}$.

Proof. Sufficiency is obvious.
Necessity. Let n be a (fixed) right zero of T and let $a_1 \neq a_2$ be two elements of A. Define a mapping $f : A \longrightarrow T$, setting

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in \{a_1,a_2\} \\ n & \text{if } a \notin \{a_1,a_2\}. \end{cases}$$

It is clear that $(1,f) \in U$ is an idempotent. By Lemma 5.4 we have that $(U(1,f))_{/\rho} \cong \underset{A}{\pi}\, Tf(a) \cong T\,\pi\,T$. By hypothesis and by Lemma 2.2 we have an isomorphism $\varphi : T\,\pi\,T \longrightarrow \underset{I}{\amalg} Te_i$, $e_i^2 = e_i \in T$, $i \in I$. Let $\varphi(1,1) \in Te_k$, $k \in I$. If $z \in T$ is a right zero, we get from $z(1,z) = (z,z) = z(1,1)$ that $\varphi(1,z) \in Te_k$. If $t \in T$ is an arbitrary element, we get from $(t,z) = t(1,z)$

that $\varphi(t,z) \in Te_k$. Analogously $\varphi(z,t) \in Te_k$ for all right zeros z of T and all elements $t \in T$. Let now $(t_1,t_2) \in T \pi T$ be an arbitrary element. Then by above $\varphi(z(t_1,t_2)) = \varphi(zt_1,zt_2) \in Te_k$. Hence $T \pi T$ is a cyclic T-act. By [5, Proposition 5] the monoid T is finite. Let $|T| = m$. Then from $m^2 = |T \pi T| = |Te_k| \le |T| = m$ we get that $m = 1$. Hence $T = \{1\}$.

Now we are able to prove the following

5.6. THEOREM. <u>The functor ψ_1 preserves projective objects if and only if all epimorphisms in W are surjections</u>, A <u>is projective and one of the following conditions hold</u>:

1) T <u>contains a right zero and</u> $|A| = 1$;
2) $T = \{1\}$;
3) $A \cong Se$, $eSe = e$ <u>and</u> $\underset{i\in\varepsilon A}{\pi} Th_i$, $h_i^2 = h_i \in T$, <u>is projective for every idempotent</u> $\varepsilon^2 = \varepsilon \in S$.

Proof. Sufficiency follows from Lemma 2.2, Lemma 5.4, and Theorem 3.9 (remark, that in Lemma 5.4 every $f(\varepsilon a)$, $\varepsilon a \in \varepsilon A$, is an idempotent).
Necessity. Because the category U-Act has projective objects and every projective act is obviously sur-projective, we get from Theorem 3.9 that A is projective and that either $A \cong Se$, $eSe = e$ or T contains a right zero. From Lemmas 2.3 and 3.7 it follows that epimorphisms in W are surjections. If the monoid T contains a right zero and $|A| > 1$, then $T = \{1\}$ by Lemma 5.5. Let now $A \cong Se$, $eSe = e$ and $\underset{i\in\varepsilon A}{\pi} Th_i$, $h_i^2 = h_i \in T$, is a direct product, where $\varepsilon \in S$ is an idempotent. Consider the function $f : A \longrightarrow T$ such that $f(a) = h_{\varepsilon a}$ for all $a \in A$. Then $f(\varepsilon a)f(a) = h_{\varepsilon\cdot\varepsilon a}h_{\varepsilon a} = h_{\varepsilon a}h_{\varepsilon a} = h_{\varepsilon a} = f(a)$, $a \in A$. Hence $(\varepsilon, f) \in U$ is an idempotent and we get from Lemmas 2.2 and 5.4 and Theorem 3.9 that $\underset{i\in\varepsilon A}{\pi} Th_i$ is projective.

By Lemma 2.3 we immediately have

5.7. PROPOSITION. <u>The functor $\phi_1\phi$ preserves projective objects if and only if</u> $_SA$ <u>is projective and either the</u>

monoid T contains a right zero or $A \cong Se$ where $eSe = e$.

By Lemmas 2.2 and 5.4 we have the following

5.8. PROPOSITION. The functor $\psi\psi_1$ preserves projective objects if and only if $\pi_{i\in\varepsilon A} Th_i$ is projective for every set of idempotents $\varepsilon \in S$ and $h_i \in T$, $i \in \varepsilon A$.

The following two propositions give an answer to the question when the functors ψ_1 and $\psi\psi_1$ reflect projective objects.

5.9. PROPOSITION. The functor $\psi\psi_1$ reflects projective objects if and only if $S = \{1\}$ and every $\pi_{|A|}$ T-act X is projective whenever X as T-act is.

Proof. Let I be the set of indecomposable components of A. Then for every S-act X and every T-act ${}_TB$ we have $\psi\psi_1({}_SX\mathrm{wr}_TB) = \psi({}_SA\mathrm{wr}_T(\pi_I{}_TB)) \cong \pi_I \psi({}_SA\mathrm{wr}_TB) \cong \pi_I (\pi_I{}_TB) =$ $= \pi_{I\times I}{}_TB$. Hence, if $\psi\psi_1$ reflects projective objects, then ${}_SX\mathrm{wr}_TT$ is projective for all left S-acts ${}_SX$. By Lemma 2.3 we get that all left S-acts are projective. By [7] this is equivalent to the equality $S = \{1\}$. Then $U = S \times F(A,T) \cong$ $\cong \pi_{|A|} T$ and ρ_X is equal to the diagonal congruence for every U-act X. For a U-act ${}_UX$ we have now $\psi\psi_1({}_UX) = \psi({}_SA\mathrm{wr}X) =$ $= \amalg_{|A|} X$. Hence the functor $\psi\psi_1$ reflects projective objects if and only if $S = \{1\}$ and every $\pi_{|A|}$ T-act X is projective whenever X as a T-act is.

From Lemma 2.3 and Theorem 3.9 we get the following

5.10. PROPOSITION. The functor ψ_1 reflects sur-projective objects if and only if one of the following conditions hold:

1) ${}_SA$ is not projective.
2) T does not contain a right zero and $A \not\cong Se$ for every idempotent $e \in S$ such that $eSe = e$.
3) The functor $\psi\psi_1$ reflects projective objects.

Denote by C the following property : ${}_SA$ is projective and either the monoid T contains a right zero or $A \cong Se$, where $eSe = e$. Then the results of Section 5 can be presented as follows:

	ϕ	ϕ_1	ψ	ψ_1	$\phi_1\phi$	$\psi\psi_1$
preserves projective objects	epimorphisms in W are sur & C	$\forall$	$\forall$	5.6	C	$\pi\, Th_i$, εA is projective for $\forall\varepsilon^2=\varepsilon\in S$ and $h_i^2=h_i\in T$, $i\in\varepsilon A$
reflects projective objects	$\forall$	5.3	epimorphisms in W are sur & C	5.10	$\forall$	5.9

REFERENCES

1. Herrlich, H. and G. Strecker, Category theory, Allyn and Bacon, Boston, 1973.

2. Kilp, M. and U. Knauer and A. V. Mikhalev, Wreath products of acts over monoids, II. Torsion free and divisible acts , J.Pure Appl.Algebra 58(1989),19-27.

3. Knauer, U. and A. V. Mikhalev, Wreath products of acts over monoids, I. Regular and inverse acts, to appear in J.Pure Appl.Algebra 51(1988),251-260.

4. Knauer, U., Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids, Semigroup Forum 3 (1973), 359-370.

5. Normak, P., On noetherian and finitely presented acts, Tartu Riikl. Ül. Toimetised 431 (1977), 37-46 (in Russian).

6. Normak, P., Strong flatness and projectivity of the wreath product of acts, Abelevy Gruppy i Moduli, Tomsk 1982, 158-165 (in Russian).

7. Skornjakov, L. A., On homological classification of monoids, Siber. Matem. Z 10 (1969), 1139-1143 (in Russian).

Received

01 IV 1991

POLÜGOONIDE PÕIMIKKORRUTAMISE FUNKTOR

P.Normak

R e s ü m e e

Olgu U monoidide S ja T põimikkorrutis üle S - polügooni $_SA$ ja olgu W kategooria U-Act täielik alamkategooria, mis koosneb U-polügoonidest kujul $_SXwr_TY$. Artiklis konstrueeritakse teatud loomulikud funktorid kategooriate T-Act, W ja U-Act vahel ning leitakse tingimused, mille korral need funktorid säilitavad ja reflekteerivad projektiivsed objektid.

Tartu Ülikooli Toimetised, 953 (1992), 47 - 52.

ON CHECKING IDENTITIES IN FINITE-DIMENSIONAL ALGEBRAS BY COMPUTER

R. Roomeldi
Laboratory of Applied Mathematics

1. Introduction. In [4] we described a program system which computes the values of polynomials in finite-dimensional algebras. When we have to check whether the given polynomial is an identity in some variety V we first compute its values in known finite-dimensional algebras of V, and if we have a nonzero value for some arguments, this polynomial is a nonidentity in V. On the other hand, if this polynomial takes in all the known examples only zero values, we may conjecture that this polynomial is an identity in V.

In several cases the identities which have to be proved or disproved have high degree and are rather complicated. Therefore, in general, it might happen, that it is very difficult to compute their values for arbitrary arguments. In the above mentioned system [4] the coordinates of variables of polynomials are given by random values. The indeces of nonzero coordinates in it are chosen also by randomizing. If a nonzero value is found, then the system automatically chooses a simpler set of arguments by decreasing the number of nonzero coordinates.

This program system was written in FORTRAN for IBM-370 compatible computers during my sabbatical period in 1985 at the Institute of Mathematics in Novosibirsk.

In this paper we describe a new version of this program system (named FINDIM), written in TURBO PASCAL for IBM PC. New possibilities are, for example, defining of new functions, which help us to simplify step by step the description of polynomials; using random parameters in structure constants; using of real values (in addition to integers) for parameters and coordinates of variables etc. Using this system it is also possible to try to generate some new examples of algebras for which the given polynomial would be a nonidentity. This can be done by exchanging or adding some parameters in structure constants of given examples.

2. Describing of finite-dimensional algebras. To describe a finite-dimensional algebra we give the multiplication rule of it. The program asks would we like to input this rule from the disc file or immediately from the keyboard. At first we must enter the dimension of the algebra

DIM:3

There are 3 possibilities to give the multiplication:

1) by giving of all NonZero Products $e_{ij} = e_i e_j$ of basic elements e_i , for example,

*NZP: e(1,2)=Alpha*e1 e(1,3)=-Beta*e2 e(2,1)=e1+e2 e(2,2)=2*e3*

2) the same algebra may be given by the matrix (e_{ij}) as a MultiPlication Table

MPT:

0	*Alpha*e1*	*-Beta*e2*
e1+e2	*2*e3*	*0*
0	*0*	*0*

3) you may write your own Multiplying PRogram (for elements of algebra by giving the name of the corresponding procedure in PASCAL)

MPR:<the name of the multiplying procedure>

This possibility was used in the first version [4] for the exceptional 27-dimensional Jordan algebra $H(C_3)$, because it is quite difficult to give all 729 products e_{ij} explicitly and there exists more suitable multiplying rule for elements of $H(C_3)$ in the matrix form (see [6]).

The system FINDIM automatically separates parameters from e_{ij} (Alpha and Beta in the example above). Later the random values will be assigned them.

3. Defining functions. In several cases the polynomials we are interested in have high degrees, are in complicated form and have similar parts. To represent the given polynomials in a simpler form, we give a possibility to define new functions.

At first some set of standard operations is read from the special file STOPER, which contains for each operation beginning, middle and last symbols, number and types of arguments. These operations are addition, subtraction, multiplication, commutation $[x,y] = xy - yx$, Jordan multiplication $x.y = xy + yx$, association $(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$ etc. The corresponding procedures belong to a PASCAL unit.

New FUNctions may be infix or prefix, for example,

*FUN:x~y=((2*x)*y)-(y*x)* *FUN:u(x,y)=(x~y)~y*

FUN:<x,y,z>=((x~y)~z)-((z~y)~x)

Here the brackets are needed, because the priority of operations and functions is not realized in FINDIM as, for example, in the case of REDUCE-system.

4. Computing values of polynomials. When the algebra and supplementary functions have been defined, we may CoMPute values of one or more polynomials, for example, by

CMP:v(x,y,z)=<u(x,y),x,z>

CMP:w(x,y,z)=u(x,<x,y,z>)-u(x,<x,z,y>)

The coefficients of functions and polynomials must be integers, which is not a strong restriction, because rational coefficients are reduced to integers.

After the input of all polynomials the first part of FINDIM-system writes the disc file SCANOUT as the PASCAL unit containing all parameters and procedures. It computes the values of standard operations, new functions and polynomials.

Then we have to run the second part of FINDIM, compiling at first the unit SCANOUT. After that the program asks on the screen of computer <u>the type of values of parameters</u> (integer or real). In most cases the values of structure constants are integers or rational numbers, thus the real values are quite useful. The user is also asked about the <u>interval</u> in which random values <u>of parameters</u> are generated.

In the same way questions about the type and interval of <u>coordinates of arguments of polynomials</u> are given. Then <u>the sum of numbers of nonzero coordinates of all arguments</u> is asked (corresponding indeces are also generated in a random way). At last the user must enter <u>the number</u> M of such <u>sets of arguments</u>.

The computing process is stopped in two cases: when the first nonzero value of the polynomial has been found or when all M values are zero.

In the first case we have proved that this polynomial is not an identity. To fix it we may print the arguments and choose the simplest set of arguments by minimizing the number of nonzero coordinates. Sometimes it is useful to generate also the new random values for the parameters in e_{ij}. If we had the random real parameters or coordinates, we may choose simpler integer values.

In the second case we may increase the number of nonzero coordinates, consider the random real values (if we had integers before) or change the random parameters of e_{ij}. In the last case we would like to warn the user that some parameters of the algebra may have the "critical values" in which all the polynomials of special form may have only zero values. Therefore we suggest to increase the integer interval for the parameters if all values of polynomial are zero.

When one polynomial has been checked, FINDIM suggests us to check the next one.

It may be happen that some polynomial f has only zero random values for many examples of finite-dimensional algebras of some variety V. Then we can try to prove it for these examples by REDUCE or for the variety V by the system [3] proving identities of degree ≤ 6 in free algebras.

5. **Example 1.** We consider the 8-dimensional algebra given by Thedy [5] as an example which shows that the splitting theorem for radical is not valid in right alternative algebras. The multiplying table of this algebra contains 5 parameters: Alpha, Eps, Kappa, Ksi and Tau.

```
DIM:8
MPT:
e1       0       e3       e6        e5        0 -Kappa*Tau*e5+e7  0
 0       e2       0      e4-e6       0        e6    Kappa*Tau*e5  e8
 0       e3   Eps*e5   e1+Alpha*e5-e8    0     1/Kappa*e7-Tau*e5
                                         -Ksi*e5  (1+Ksi)/Kappa*e5
e4-e6    e6    e2+Tau*e5+Eps*Kappa*e6+e8    Kappa*(Alpha+Tau)*e6
 Kappa*Tau*e5+Kappa*e8 0 Kappa*Tau*Kappa*Tau*e5-Kappa*Tau*e7+
                    Kappa*(1-Ksi)*e6  -Tau*Kappa*Tau*e5+Tau*e7+Ksi*e6
e5       0        0  e7-Kappa*Tau*e5  0       0        0        0
 0       e6       e8+Tau*e5      0       0       0        0        0
Kappa*Tau*e5    -Kappa*Tau*e5+e7   e5   -Kappa*Tau*Kappa*Tau*e5+
                                  Kappa*Tau*e7    0     0     0     0
e8        0       0  e6+Tau*Kappa*Tau*e5-Tau*e7  0     0     0     0
FUN:x^y=(x,x,(x,x,y))             CMP:f(a,b)=a^[a,b]
```

The polynomial f is in two variables a and b, both with 8 coordinates. At first FINDIM generates 10 nonzero real coordinates (the maximum is 8*2 = 16) and a nonzero value is found for the first pair of a and b. Then the simpler pair of arguments a and b with only 3 nonzero integer coordinates

a = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), b = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)

in the case of random integer parameters

Alpha = 1, Eps = -1, Kapa = 1, Ksi = 2, Tau = -2

was found for which

a^[a,b] = (a,a,(a,a,[a,b])) = (0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0) ≠ 0.
Therefore a^[a,b] is a nonidentity in free right alternative algebra of rank 2 (see the Shirshov's problem 160 in [1]).

6. Example 2. We repeat the example from [4] which handles the polynomial of Medvedev [2] in 27-dimensional simple exceptional Jordan algebra $H(C_3)$. The multiplication of elements is given in the matrix form (see [6]) by a special PASCAL-procedure Jord27

```
DIM:27  MPR:Jord27
FUN:x~y={x,y,x}
FUN:x%y=(x*y)*y
FUN:m(x,y,z,t)=2*(y*x)~{z,y,t}+4*(-{y*y,x*z,t}-{y,{x,y,z},t}+
   2*{x%y,z,t}-2*{x*y,z*y,t}+2*{x,z*y,y}*t)*(y*x)-{x~y,y~z,t}-
   4*(2*{x*y,z%y,t}-2*{x%y,z*y,t}-2*{x,z%y,y}*t+{y*y,z*y*x,t}+
   {y,{x,y,z*y},t})*x-4*{y*x,{y*z,y,t},x}-2*{y*y,x*x*(z*y),t}-
   2*{y,{x*x,y,z*y},t}+4*{(x*x)%y,z*y,t}-4*{x*x*y,z%y,t}+
                              4*{x*x,z%y,y}*t+2*x~{z%y,y,t}
CMP:s(x,y,z,t)=-m(x,y,z,t*t)+2*m(x,y,z,t)*t+
                           2*t~{y,z,(y*x)*(y*z)}-t~{y*y,z,x~y}
```

If we denote the elements of $H(C_3)$ by

$$A = (a_i) = \begin{bmatrix} a_1 & (a_4 \div a_{11}) & (a_{12} \div a_{19}) \\ \overline{(a_4 \div a_{11})} & a_2 & (a_{20} \div a_{27}) \\ \overline{(a_{12} \div a_{19})} & \overline{(a_{20} \div a_{27})} & a_3 \end{bmatrix},$$

then the nonzero value of the Medvedev function S=s(A,B,C,D) with one nonzero coordinate $s_{27}=64$ was computed for A, B, C, D with M=8 nonzero coordinates $a_4=a_{13}=b_7=b_{21}=c_{24}=c_{27}=d_6=d_{21}=2$. Therefore s(x,y,z,t) as an identity in all special Jordan algebras [2] is a nonidentity in the variety of all Jordan algebras.

References

1. D n e s t r o v s k a y a note-book, unsolved problems in the ring and module theory.-Novosibirsk,1982 (in Russian).
2. M e d v e d e v Yu. A. On nil-elements of free Jordan algebra // Siberian Math. J. - 1985.-V.26,N.2.-P.140-148 (in Russian).
3. R o o m e l d i R. Processing identities in free nonassociative rings by computer // Tartu Ül. Toimetised.-1987.-V.764.-P.109-122 (in Russian).
4. R o o m e l d i R. On the proof of nonidentities in finite-dimensional algebras using a computer // Tartu Ül. Toimetised.-1989.-V.836.-P.126-133 (in Russian).
5. T h e d y A. Right alternative algebras and Wedderburn principal theorem // Proc. Amer. Math. Soc. - V.72, N.3.-P.427-435.
6. Z h e v l a k o v K. A., S l i'n'k o A. M., S h e s t a k o v I. P., S h i r s h o v A. I. Rings that are nearly associative.-Moscow : Nauka, 1978 (English translation: New York : Academic Press, 1982).

Received
02 VI 1992

SAMASUSTE KONTROLLIMISEST LÕPLIKUMÕÕTMELISTES ALGEBRATES ARVUTI ABIL

R.Roomeldi

R e s ü m e e

Artiklis kirjeldatakse programmsüsteemi FINDIM, mis võimaldab teatava tõenäosusega kontrollida, kas vaadeldav polünoom on samasus antud lõplikumõõtmelises algebras. Eriti kasulik on see süsteem juhul, kui algebra mõõde on suur ja uuritav polünoom kõrge astme ning keerulise ehitusega. Seejuures võivad algebrate struktuurikonstandid sisaldada parameetreid, millele genereeritakse juhuslikud täis- või reaalarvulised väärtused soovitud vahemikust [n,m]. Analoogiliselt genereeritakse ka kontrollitava polünoomi argumentide nullist erinevad koordinaadid, millede arvu annab samuti ette kasutaja.

Lõpuks esitatakse kaks näidet samasuste otsimisest 8- ja 27-mõõtmelistes algebrates.

Tartu Ülikooli Toimetised, 953 (1992), 53 - 66.

СТРОГО РЕГУЛЯРНЫЕ ТОЖДЕСТВА ТЕЛ

О.К.Бесолов (Владикавказ)

Одним из интересных, со многих точек зрения, классов алгебр без нильпотентных элементов является класс строго (или абелево) регулярных алгебр - регулярных алгебр без нильпотентных элементов. Строго регулярные алгебры (особенно коммутативные) привлекали внимание многих авторов, благодаря взаимосвязям с теорией тел и многими другими смежными областями математики.

При "каноническом подходе" строго регулярная алгебра S характеризуется тем свойством, что на S <u>однозначно</u> определяются две дополнительные унарные операции $x \to x'$ и $x \to e_x$, связанные с умножением тождествами

$$\left.\begin{array}{l} e_x^2 = e_x\ ,\ e_x y = y e_x\ ,\ x e_x = x\ , \\ x x' = e_x = x' x\ ,\ x' e_x = x'\ . \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Из тождеств (*) вытекает, что класс $\mathcal{S}$ всех строго регулярных алгебр является многообразием указанных алгебраических систем, к которому можно применять общие методы, результаты и конструкции теории многообразий. При этом оказывается, что многообразие $\mathcal{S}$ порождается, как многообразие, всеми телами с заданными на них унарными операциями, определенными

$$a' = \begin{cases} a^{-1}, & \text{если } a \neq 0 \\ 0, & \text{если } a = 0 \end{cases} \qquad e_a = \begin{cases} 1, & \text{если } a \neq 0 \\ 0, & \text{если } a = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

где 1 - единица рассматриваемых тел. Указанный подход естественно приводит к многообразиям строго регулярных алгебр (подмногообразия многообразия S) и строго регулярным тождествам (элементам абсолютно свободной строго регулярной алгебры, переходящим в нуль при любом гомоморфизме в рассматриваемую строго регулярную алгебру). При этом мы будем применять, без особых оговорок, основные понятия, конструкции, методы и результаты общей теории многообразий алгебраических систем (все, что нам необходимо, можно найти в монографии [1] А.И.Мальцева и многих других монографиях).

Исследования строго регулярных алгебр в контексте многообразий уже начались в ряде работ (см. например [2] - [6]). В настоящей работе мы продолжим эти исследования, обращая особое внимание на специфику строго регулярных тождеств и многообразий строго регулярных алгебр.

Для начала отметим первое (и основное) специфичное свойство многообразий строго регулярных алгебр - все они порождаются некоторым набором $\{Q_i \mid i \in I\}$ тел, что мы будем записывать в виде равенства $\mathfrak{M}' = \mathrm{Var}'(\{Q_i \mid i \in I\})$ (это многообразие строго регулярных алгебр, порожденное указанными телами).

Все рассматриваемые в работе алгебры - ассоциативные алгебры над некоторым фиксированным полем Φ, которое мы будем называть основным.

В силу специфики многообразий строго регулярных алгебр строго регулярные тождества - это на самом деле "тождества" тел. Наша основная цель - показать, что строго регулярные тождества дают более полную информацию о телах, чем обычные тождества.

В связи с этим напомним, что тела R и Q (являются алгебрами и строго регулярными алгебрами!) имеют одинаковые тождества тогда и только тогда, когда их размерности над центром совпадают, что мы символически запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Var}(Q) = \mathrm{Var}(R) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \dim_Z Q = \dim_\zeta R\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В частности, все тела, бесконечномерные над центром, "имеют одинаковые тождества" - они не являются PI-телами, т.е. не имеют вообще никаких нетривиальных тождеств.

§ 1. Поведение строго регулярных тождеств и многообразий строго регулярных алгебр существенно зависит от выбора основного поля Φ (см., например, работы [7] - [10]). Поэтому мы несколько уточним выбор основного поля Φ.

<u>Начиная с этого момента</u> будем предпологать, что основное поле Φ выбрано так, что существуют алгебры, являющиеся конечномерными телами "со сколь угодно большой" размерностью над своим центром. Другими словами, согласно (1) нет общего "обыкновенного" тождества, справедливого сразу на всех конечномерных телах, допустимых для рассмотрения.

Отметим, что такой выбор основного поля всегда можно обеспечить рассматривая например, поля рациональных дробей над очень многими конкретными полями (см. например, монографию [11] Р.Пирса, гл. 17-20).

Оказывается, что при таком выборе основного поля строго регулярные тождества дают полную информацию о рассматриваемых конечномерных телах.

Теорема 1. Конечномерные тела R и Q имеют одинаковые строго регулярные тождества тогда и только тогда, когда они изоморфны.

Таким образом мы должны доказать, что для рассмотрения конечномерных тел (являющихся алгебрами) справедлива импликация

$$\mathrm{Var}'(Q) = \mathrm{Var}'(R) \quad \rightarrow \quad Q \simeq R . \tag{2}$$

Для доказательства этой теоремы нам потребуется некоторый вспомогательный аппарат.

Теорема А (см. [6] - [9]). Пусть S - ненулевая строго регулярная PI-алгебра, которая конечно порождена как строго регулярная алгебра. Тогда для некоторого набора PI-тел Q_i, (являющихся гомоморфными образами алгебры S) справедливо соотношение:

$$\prod_{i\in I} Q_i \supset S \supset \bigoplus_{i\in I} Q_i = \mathrm{Soc}(S) , \tag{3}$$

т.е. S имеет ненулевой цоколь $\mathrm{Soc}(S)$ с нулевым аннулятором.

Подробное и полное доказательство смотри в работе [6].

Теорема Б (о подъеме). Пусть $\mathfrak{M}'$ - невырожденное многообразие строго регулярных алгебр и $\mathfrak{S} = \langle\mathscr{X}\rangle'$ - свободная в $\mathfrak{M}'$ строго регулярная алгебра конечного ранга, т.е. с конечным множеством $\mathscr{X} = \{x_i \mid 1 \le i \le n\}$ свободных порождающих. Пусть конечномерная строго регулярная алгебра $\bar{\mathfrak{S}}$ является гомоморфным образом алгебры $\mathfrak{S}$.

Тогда в $\mathfrak{S}$ есть подалгебра, изоморфная $\bar{\mathfrak{S}}$.

Доказательство. Отметим, что мы не потребовали существования в $\mathfrak{S}$ обыкновенных тождеств, т.е. $\mathfrak{S}$ может и не быть PI-алгеброй.

Пусть нам задан гомоморфизм $\phi : \mathfrak{S} \longrightarrow \bar{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}\phi$ на конечномерную алгебру $\bar{\mathfrak{S}}$. Конечно можно считать, что $\bar{\mathfrak{S}} \neq 0$. Выбираем в алгебре $\bar{\mathfrak{S}}$ базис и записываем соответствующую таблицу умножения базисных элементов

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{S}} &= \sum_{i=1}^{d} \phi b_i , \\ b_i b_j &= \sum_{k=1}^{d} \beta_{ijk} b_k . \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Без ограничения общности можно считать, что множество $\mathscr{X}\phi = \{x_i\phi \mid 1 \le i \le n\}$ является линейно независимым подмножеством в $\bar{\mathfrak{S}}$ (иначе мы можем уменьшить $\mathfrak{X}$ и получить $\bar{\mathfrak{S}}$ в качестве гомоморфного образа при том же ϕ, относительно свободной строго регулярной алгебры меньшего ранга). Учитывая это мы можем включить множество $\mathfrak{X}\phi$ в базис $\{b_k | 1 \le k \le d\}$ алгебры $\bar{\mathfrak{S}}$. Так и сделаем.

По условию, $\bar{\mathfrak{S}}$ - конечномерная строго регулярная алгебра (т.е. конечная прямая сумма конечномерных тел). Поэтому все подалгебры в $\bar{\mathfrak{S}}$ будут строго регулярны (как конечномерные алгебры без нильпотентных элементов).

Поэтому каждый элемент алгебры $\bar{\mathfrak{S}}$ можно записывать как образ $g\phi$ некоторого полинома $g(x_1, \ldots, x_n)$ (элемента алгебры $\mathfrak{S}$) от "некоммутирующих" переменных x_j. В частности, указанный вид имеют и базисные элементы b_i. Запишем их соответствующие представления в виде полиномов

$$\forall\ 1 \le i \le d \qquad b_i = [f_i(x_1, \ldots, x_n)]\phi\ . \tag{5}$$

Отметим, что согласно включению

$$\mathfrak{X}\phi \subseteq \{b_i | \ 1 \le i \le d\}$$

среди полиномов f_i имеются и свободные порождающие x_k.

Учитывая (4) и (5) получаем конечный набор полиномов

$$g_{ij} = f_i f_j - \Sigma\, \beta_{ijk} f_k\ , \tag{6}$$

для элементов $\beta_{ijk} \in \Phi$, взятых из (4) и полиномов f_i, взятых из (5). По построению получаем, что для ядра $\operatorname{Ker}\phi$ гомоморфизма $\phi : \mathfrak{S} \to \bar{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}\phi$ в <u>конечнопорожденной</u> строго регулярной алгебре $\mathfrak{S}$ справедливо включение:

$$\operatorname{Ker}\phi \supseteq e\mathfrak{S}\ , \tag{7}$$

где e - наименьшая верхняя грань всех идемпотентов $e_{g_{ij}}$, $1 \le i, j \le d$ (см. начало работы). Далее строим идемпотент $e^* = 1 - e$, где 1 - единица алгебры $\mathfrak{S}$ и получаем соотношения

$$\left.\begin{aligned} e^* &= \wedge\, e^*_{g_{ij}} = 1 - e\ , \\ \mathfrak{S} &= e\mathfrak{S} \oplus e^*\mathfrak{S}\ , \\ e^*\mathfrak{S} &= \langle e^* x_k |\ 1 \le k \le n \rangle' \supseteq e^*\mathfrak{A} = \\ &= \langle e^* x_k |\ 1 \le k \le n \rangle\ , \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $\langle M \rangle$ - подалгебра, порожденная непустым подмножеством M, а $\langle M \rangle'$ - строго регулярная подалгебра, порожденная непустым подмножеством M.

По построению, согласно (4)-(8) получаем соотношения

$$\left.\begin{aligned} &e^* f_i = f_i(e^*_{x_1}, \ldots, e^*_{x_n}) \in e^*\mathbb{A}\,, \\ &e^* g_{ij} = (e^* f_i \cdot e^* f_j - \Sigma\, \beta_{ijk} e^* f_k) = 0\,, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

причем оказывается $\phi(e^*)$ - единица алгебры $\mathbb{S}$, так как $\phi(e) = 0$. Но тогда применяя все соотношения (4)-(9) получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\forall\ 1 \le i \le d \quad f_i\phi = (e^* f_i)\phi = b_i\,, \\ &e^* f_i \cdot e^* f_j = \Sigma\, \beta_{ijk}\, e^* f_k\,, \\ &e^*\mathbb{S} \supseteq e^*\mathbb{A} \supseteq \sum_{k=1}^{d} \Phi e^* f_k = A\,. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Второе из соотношений (10) показывает, что подпространство A является конечномерной подалгеброй алгебры $\mathbb{S}$, а потому строго регулярной подалгеброй. Кроме того, по построению полиномов f_i (см. сказанное после соотношений (5)), в строго регулярной подалгебре A содержатся все порождающие элементы строго регулярной алгебры $e^*\mathbb{S}$, согласно (8) и сказанному. Поэтому все включения последнего из соотношений (10) превращается в равенства.

Но первое из соотношений (10) показывает, что линейно порождающее подмножество $\{e^* f_k |\ 1 \le k \le n\ \}$ алгебры $e^*\mathbb{S} = A$ оказывается линейно независимым, т.к. гомоморфизм ϕ отображает его на базис алгебры $\mathbb{S}$. В результате оказалось, что алгебра $\mathbb{S}$ и подалгебра (идеал!) $A = e^*\mathbb{S}$ свободной в $\mathfrak{M}'$ строго регулярной алгебры $\mathbb{S}$ имеют одинаковую размерность и задаются одной и той же таблицей умножения базисных элементов (ср. с (10) и (4)). Но тогда, очевидно, алгебры A и $\mathbb{S}$ изоморфны. Теорема доказана.

Обращаем внимание на то, что в доказательстве теоремы возникла подалгебра $\mathbb{A} = \langle x_k |\ 1 \le k \le n\ \rangle$ относительно свободной строго регулярной алгебры $\mathbb{S} = \langle x_k |\ 1 \le k \le n\ \rangle'$. Оказывается Теорема Б является в некотором смысле усилением Теоремы А. Это показывает с очевидностью вытекающее из Теоремы Б

<u>Следствие</u> 1. В условиях Теоремы Б относительно свободная строго регулярная алгебра $\mathbb{S}$ (не обязательно являющаяся PI-алгеброй!) имеет ненулевой цоколь $\mathrm{Soc}(\mathbb{S}) \supseteq e^*\mathbb{S} \simeq \mathbb{S} \ne 0$.

Доказательство Теоремы 1. Учитывая конечномерность алгебр Q и R

$$\left.\begin{array}{l} \dim Q = r \ge \dim R \ge 1 , \\ \mathfrak{M}' = \mathrm{Var}'(R) = \mathrm{Var}'(Q) \end{array}\right\} \qquad (11)$$

и строим свободную в $\mathfrak{M}'$ строго регулярную алгебру $\mathfrak{S}$. При этом мы предполагаем, что $R \neq 0$ (иначе нужное нам соотношение (2) будет тривиально).

В результате мы попадаем в условия теорем А и Б - из конечномерности алгебры R легко вытекает, что все алгебры из многообразия $\mathfrak{M}'$ являются PI-алгебрами. Поэтому применяя эти теоремы, получаем соотношение

$$\Pi D_j \supseteq \mathfrak{S} \supseteq \oplus Q_i = \mathrm{Soc}(\mathfrak{S}) \qquad (12)$$

для некоторых алгебр D_j, изоморфных R.

Из (11), (12) и теоремы Б вытекает, что тело Q изоморфно вкладывается в $\mathrm{Soc}(\mathfrak{S})$ алгебры $\mathfrak{S}$. Поэтому тело Q вкладывается изоморфно в некоторое из тел Q_i. Но снова в силу (12), применяя канонические проектирования ΠD_j на его компоненты $D_j \simeq R$, получаем с очевидностью, что все тела Q_i (и любое подтело алгебры $\mathfrak{S}$) изоморфно вкладываются в тело R. Поэтому и тело Q изоморфно вкладывается в тело R. Но тогда, согласно (11) тела R и Q являются изоморфными алгебрами в силу их конечномерности.

Теорема 1 доказана.

§ 2. С помощью теоремы о подъеме можно строить конкретные "существенно" строго регулярные тождества и показать, с их помощью, что строго регулярные тождества действительно дают более полную информацию о конечномерных телах, согласно Теореме 1. Для этого мы рассмотрим известную конструкцию тел кватернионов.

По определению (см. монографию [11], гл. I, (§ 1 - 6 стр. 27) алгебра кватернионов над полем F - это четырехмерное пространство над F с базисом $\{1, i, j, k\}$, определяющими соотношениями $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$, $ij = -ji = k$ для фиксированных ненулевых $\alpha, \beta \in F$ и определяющими соотношениями, говорящими о том, что 1 является единицей рассматриваемой алгебры $Q = \left[\frac{\alpha, \beta}{F}\right]$.

Учитывая теорему о подъеме и ее доказательство будем записывать базис алгебры кватернионов в виде $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, а таблицу умножения в компактном виде:

	b_1	b_2	b_3	b_4
b_1	b_1	b_2	b_3	b_4
b_2	b_2	αb_1	b_4	αb_3
b_3	b_3	$-b_4$	βb_1	$-\beta b_2$
b_4	b_4	$-\alpha b_3$	βb_2	$-\alpha\beta b_1$

(13)

Таким образом, согласно (4)-(13) справедливо, например, соотношение $b_2 b_4 = \alpha b_3$, т.е. в этом конкретном случае имеется только одна ненулевая "структурная константа" $\beta_{243} = \alpha$, а все остальные структурные константы β_{24i} - нулевые.

Продолжая двигаться по доказательству теоремы о подъеме строим абсолютно свободную (или свободную в соответствующем многообразии $\mathfrak{M}'$) строго регулярную алгебру $\mathfrak{S} = \langle x_1, x_2 \rangle'$ и строим полиномы f_1, f_2, f_3, f_4 соответствующие базису рассматриваемой алгебры $Q = \left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$ кватернионов, считая, что Q - тело.

Один из возможных выборов следующий:

$$f_1 = \alpha^{-1}x_1^2,\ f_2 = x_1,\ f_3 = x_2,\ f_4 = x_1 x_2 \tag{14}$$

в соответствии с (5).

Учитывая (13), (14), (4), (5), строим согласно (6) и сказанному полиномы g_{ij}, а по ним строго регулярные "полиномы"

$$h_Q(x_1, x_2) = (e_{x_1} \nabla e_{x_2}) - \nabla e_{g_{ij}} \tag{15}$$

По построению и согласно сказанному в начале работы (см. соотношения (*), (**)), указанный в (15) элемент $h_Q(x_1, x_2)$ является идемпотентным в абсолютно свободной строго регулярной алгебре $\mathfrak{S} = \langle x_1, x_2 \rangle'$, а первое из входящих в него слагаемых $e_{x_1} \nabla e_{x_2}$ - единица алгебры $\mathfrak{S}$.

Будем считать для конкретности, что Φ совпадает с полем $\mathcal{R}$ всех рациональных чисел. В этом случае легко строятся неизоморфные и некоммутативные тела кватернионов. Например, если простое число p имеет вид $p = 3 + 4t$, то с каждым таким p связывается тело $U_p = \left(\frac{-1,p}{\Phi}\right)$ (см. [11], гл. I, стр. 35).

Обратим внимание на то, что в Теореме 1 мы совершенно не учитывали наш специальный вид основного поля Φ - эта теорема <u>справедлива при любом выборе основного поля.</u>

Следствие 2. Пусть при указанных обозначениях и $\Phi = \mathfrak{R}$ выбраны два неизоморфных тела кватернионов - для конкретности, тела U_7 и U_{11}. Пусть Q - любое из этих тел и мы построим по нему строго регулярный "полином" - идемпотент $h_Q(x_1, x_2)$.

Тогда справедливы утверждения:

а) Тела U_7 и U_{11} являются неизоморфными телами кватернионов. В частности их центром является Φ и они имеют размерность 4.

б) Указанные тела имеют одинаковые "обычные" тождества.

в) Идемпотент $h_Q(x_1, x_2)$ не является тождеством на "своем" теле Q, но является нетривиальным строго регулярным тождеством на втором из оставшихся тел U_7, U_{11}.

Действительно, справедливость утверждения а) была отмечена (см. монографию [11], гл. I. стр. 35). Из утверждения а) вытекает утверждение б) согласно соотношению (1), начавшему постановку задачи. Осталось убедиться в справедливости утверждения в).

Пусть, например, $Q = U_7$. Согласно (13) и построению тела $Q = \left[\frac{-1,7}{\Phi}\right]$ кватернионов, алгебра Q порождается и как тело (т.е. как строго регулярная алгебра) и как алгебра элементами b_2, b_3. Учитывая это, строим гомоморфизм $\phi : \mathfrak{S} \to Q$ продолжая отображение $x_1 \to b_2$, $x_2 \to b_3$. Тогда, согласно (13), (14), (4), (5) и (6), (15), (8), (9) идемпотент $h_Q(x_1, x_2)$ переходит в единицу $h_Q(b_2, b_3) = (e_{b_2} \vee e_{b_3}) - 0$ тела Q.

Поэтому h_Q не является строго регулярным тождеством на Q.

С другой стороны, пусть наша $\mathfrak{S}$ - любое двупорожденное тело, в которое не вкладывается изоморфно наше тело Q (например, $\mathfrak{S}$ - оставшееся тело U_{11}). Допустим, что h_Q не является строго регулярным тождеством на $\mathfrak{S}$. Тогда для некоторых q_1 и q_2 из $\mathfrak{S}$ элемент $h_Q(q_1, q_2)$ - ненулевой. Продолжаем отображение $x_1 \to q_1$, $x_2 \to q_2$ до гомоморфизма $\psi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$.

По построению

$$h_Q\psi = h_Q(q_1, q_2) = (e_{q_1} \vee e_{q_2}) - \bar{e} \tag{16}$$

для некоторого идемпотента $\bar{e}$ тела $\mathfrak{S}$ (см. (15), (16)). Первый из идемпотентов, входящих в (16) является единицей подалгебры $\langle q_1, q_2\rangle = \langle q_1, q_2\rangle'$, а $\bar{e}$ - какой-то идемпотент из этой подалгебры. Но, по предположению, $h_Q\psi \neq 0$. Поэтому указанная подалгебра ненулевая, т.е. подтело тела $\mathfrak{S}$. Но тогда, снова в силу (16) и (15), $e = 0$ и $h_Q\Psi = e_{q_1} \vee e_{q_2}$ – единица этого подтела.

Учитывая соотношения (4) – (10), с заменой ϕ на ψ, получаем, согласно теореме о подъеме, что подтело $\langle q_1, q_2 \rangle$ является гомоморфным образом алгебры, заданной определяющими соотношениями $f_i f_j = \sum' \beta_{ijk} f_k$, которые использовались при построении "полинома" h_Q. Но снова согласно доказательству теоремы о подъеме указанные определяющие соотношения задают тело Q (даже как алгебру!). Поэтому подтело $\langle q_1, q_2 \rangle$ оказалось изоморфным телу Q, как ненулевой гомоморфный образ этого тела.

В результате получилось, что тело Q изоморфно вкладывается в тело $\mathfrak{S}$. Следствие доказано.

Мы показали, что в теореме 1 строго регулярное тождество нельзя заменить обычными тождествами (ср. соотношения (1) и (2)).

Рассмотрим теперь ситуацию особенно специфичную для строго регулярных тождеств. Будем искать нетривиальное строго регулярное тождество на телах, бесконечномерных над своими центрами (на которых обычных тождеств, кроме тривиального, нет!).

Для получения более конкретных и полных результатов еще раз уточним выбор основного поля Φ. А именно, будем считать, что основное поле Φ позволяет связать с бесконечным множеством простых чисел p такие <u>некоммутативные</u> тела $Q_p = \langle a, b \rangle$, что $\dim Q_p = p^2$.

Зафиксируем бесконечное множество Π простых чисел, для которых существуют указанные тела и с каждым $p \in \Pi$ свяжем точно одно соответствующее тело

$$\left.\begin{aligned} &Q_p = \langle a, b\rangle^* = \langle a, b\rangle , \\ &\dim Q_p = p^2 ,\ ab \neq ba . \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Из (17) вытекает, что для каждого из этих тел центром является наше основное поле Φ.

Теперь уточним выбор "основного класса" алгебр – в качестве основного класса берем многообразие

$$\mathfrak{F} = \mathrm{Var}(\{Q_p \mid p \in \Pi\}) \qquad (18)$$

алгебр, порожденное выбранными телами Q_p. Одновременно возникает и многообразие

$$\mathfrak{F}' = \mathrm{Var}'(\{Q_p \mid p \in \Pi\}) \qquad (19)$$

строго регулярных алгебр, порожденное теми телами. Рассматриваемые в следующей теореме алгебры – только алгебры из основного класса $\mathcal{F}$.

Теорема 2. С каждым непустым подмножеством Γ множества Π простых чисел свяжем многообразие

$$\mathfrak{M}'_{\Gamma} = \mathrm{Var}'(\{Q_p \mid p \in \Gamma\}) \tag{20}$$

строго регулярных алгебр, порожденное указанными телами. Многообразия $\mathfrak{M}'_{\Gamma_1}$, $\mathfrak{M}'_{\Gamma_2}$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают множества Γ_1 и Γ_2.

Доказательство. Зафиксируем непустое множество $\Gamma \subseteq \Pi$ и построим соответствующее многообразие $\mathfrak{M}'_{\Gamma}$. Согласно (17) – (20), многообразие $\mathfrak{M}'_{\Gamma}$ порождается указанными 2-порожденными телами.

Учитывая сказанное и очевидную невырожденность многообразия $\mathfrak{M}'_{\Gamma}$, строим свободную в $\mathfrak{M}'_{\Gamma}$ строго регулярную алгебру $\mathbb{S} = \langle x_1, x_2\rangle'$ ранга 2. В результате мы попадаем в ситуацию, описанную в теореме о подъеме.

Учитывая специфику многообразия $\mathfrak{M}'_{\Gamma}$ (см. (20)) и специфику тел Q_p (см. (17)) получаем соотношение

$$\Pi\, D_j \supseteq \mathbb{S} \supseteq \oplus\, Q_i = \mathrm{Soc}(\mathbb{S}) \ , \tag{21}$$

где D_j – алгебры, изоморфные некоторым телам Q_p с $p \in \Gamma$. При этом, согласно теореме о подъеме, среди тел Q_i, входящих в цоколь $\mathrm{Soc}(\mathbb{S})$, имеются с точностью до изоморфизма, все 2-порожденные конечномерные тела, являющиеся алгебрами из многообразия $\mathfrak{M}'_{\Gamma}$.

Но, снова в силу соотношения (21), применяя "канонические" проектирования $\Pi_j : \Pi D_j \to D_j$ мы легко получаем, что все ненулевые подтела Q алгебры $\mathbb{S}$ изоморфно вкладываются в тело $D_j \approx Q_p$ для подходящего (единственного!) простого числа $p \in \Gamma$.

В результате получается, что множество

$$\{Q \mid Q - \text{2-порожденное тело, } 2 \le \dim Q < \aleph_0 \ , \ Q \in \mathfrak{M}'_{\Gamma}\}$$

и множество $\{Q_p \mid p \in \Gamma\}$ совпадают с точностью до изоморфизма алгебр. После этого становится очевидным, что теорема доказана.

Следствие 3. В "основном" многообразии $\mathcal{F}'$ строго регулярных алгебр имеется по крайней мере континуум попарно различных подмногообразий.

В самом деле континуум "обеспечивают" уже многообразия $\mathfrak{M}'_\Gamma$ в виду бесконечности множества П.

Следствие 4. В "основном" многообразии $\mathcal{F}'$ строго регулярных алгебр имеются тела бесконечномерные над своим центром. "Почти для каждого" из этих тел найдется справедливое на нем нетривиальное строго регулярное тождество.

Доказательство. Произвольным образом выберем бесконечное собственное подмножество Г в П, учитывая бесконечность П. Строим соответствующие многообразия $\mathfrak{M}'_\Gamma$ строго регулярных алгебр.

Пусть $\mathbb{S} = \langle x_1, x_2\rangle'$ свободная в $\mathfrak{M}'_\Gamma$ строго регулярная алгебра ранга 2. Строим в $\mathbb{S}$ подалгебру $\mathbb{A} = \langle x_1, x_2\rangle$. Согласно критерию приведенной свободы (см. работы [6]-[10]), алгебра $\mathbb{A}$ является относительно свободной алгеброй (т.е. $\mathbb{A}$ - свободна в некотором невырожденном многообразии алгебр).

Учитывая специфику алгебры $\mathbb{S}$, строим гомоморфизмы $\psi_p : \mathbb{S} \to Q_p$ для всех $p \in \Gamma$. Но все алгебры Q_p являются 2-порожденными алгебрами (см. (17)). Поэтому, считая, что $Q_p = \mathbb{S}\psi_p$, получаем равенство $Q_p = \mathbb{A}\psi_p$ для тех же p. Но, снова в силу (17) и (20), размерности тел Q_p над их центром (основным полем Ф!) не ограничены в совокупности, в силу бесконечности Г.

В результате оказалось, что в алгебре $\mathbb{A}$ нет нетривиальных "обычных" тождеств, т.е. $\mathbb{A}$ - абсолютно свободная алгебра ранга 2. Поэтому $\mathbb{A}$ - алгебра без делителей нуля, т.е. множество $\mathbb{A}\setminus\{0\}$ - мультипликативно замкнутая подсистема в строго регулярной алгебре $\mathbb{S}$. Применяя лемму Куратовского - Цорна вкладываем мультипликативно замкнутую подсистему $\mathbb{A}\setminus\{0\}$ в максимальную мультипликативно замкнутую подсистему M, не содержащую нуля.

Согласно известным результатам структурной теории алгебр без нильпотентных элементов (см. монографию [12], гл. 4 и лемму об универсальном обращении из работ [6]-[9]) с M связывается идеал

$$M' = \{s \in \mathbb{S} \mid ms = 0 \text{ для некоторого } m \in M\} \qquad (22)$$

строго регулярной алгебры $\mathbb{S}$, причем оказывается, согласно (22), что $M \cap M' = \emptyset$, т.е. $\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{S}/M'$ - тело (как строго регулярная алгебра без делителей нуля). По построению, $\mathbb{A} \cap M' = 0$ и потому абсолютно свободная алгебра $\mathbb{A}$ ранга 2 изоморфно вкладывается в тело $\bar{\mathbb{S}} \in \mathfrak{M}'_\Gamma \subseteq \mathcal{F}'$.

В результате получилось, что $\mathfrak{S}$ - тело, бесконечномерное над своим центром (так как оно не имеет "обычных" тождеств), принадлежащее $\mathcal{F}'$.

С другой стороны, $\mathfrak{S} \in \mathfrak{M}_\Gamma'$ и, в силу теоремы 2, $\mathfrak{M}_\Gamma'$ - невырожденное собственное многообразие строго регулярных алгебр, как собственное подмногообразие многообразия $\mathcal{F}'$. Поэтому существуют нетривиальные строго регулярные тождества, справедливые на всех алгебрах из $\mathfrak{M}_\Gamma'$, в том числе и на алгебре $\mathfrak{S}$. Это и заканчивает доказательство.

В заключении объясним, почему мы выбираем основное поле Φ некоторым "специальным" образом. Дело в том, что если, например, основное поле Φ является алгебраически замкнутым, то никаких конечномерных тел, кроме Φ у нас не будет и потому, например, теорема 1 становится тривиальной. Тем не менее даже в этом случае можно привести примеры нетривиальных строго регулярных тождеств, справедливых на телах, бесконечномерных над своим центром (и на всех PI-телах, см. [13]).

Данная работа возникла при обсуждении с Ю.М.Рябухиным, за что автор ему глубоко благодарен.

Литература

1. М а л ь ц е в А.И. Алгебраические системы. Москва, 1970.
2. B u r g e s s W.D., On free commutative regular rings. Commun. Algebra, 1980, 8, No. 7, 671-683.
3. P o p e s c u N., V r a c i u C., Sur la structure des anneaux absoluments plats commutatifs. J. Algebra, 1976, 40, No. 2, 364-383.
4. Б е с о л о в О.К. О многообразиях строго регулярных алгебр I. XVIII Всесоюзн. алгебраическая конф.: Тез. сообщений. -Кишинев, 1985. -ч. I, -с. 53.
5. Г р и г о р Р.С., Р я б у х и н Ю.М. Абсолютно свободная строго регулярная алгебра ранга один. XVIII Всесоюзн. алгебраическая конф.: Тез. сообщений. -Кишинев, 1985, -ч. I, -с. 136.
6. Р я б у х и н Ю.М. Строго регулярные алгебры и PI-алгебры без нильпотентных элементов. I, II. стр. 44-73, 74-91. В кн. Строго регулярные алгебры и топологии. (Мат. исслед., вып. 91). Кишинев: Штиинца, 1987.
7. Б е с о л о в О.К. О многообразиях строго регулярных алгебр I. - В кн.: Алгебра и кольца (Мат. исслед., вып. 90), Кишинев: Штиинца, 1986, с. 3-27.

8. Б е с о л о в О.К. О многообразиях строго регулярных алгебр II. - Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн.и мат. наук, 1986, № 3, с. 8-12.
9. Р я б у х и н Ю.М., Б е с о л о в О.К. Строго регулярные алгебры и PI-алгебры без нильпотентных элементов. XIX Всесоюзн. алгебр. конф., Львов, 1987. -ч. I, -с. 245.
10. Г р и г о р Р.С., Р я б у х и н Ю.М. Абсолютно свободная строго регулярная алгебра ранга 1. Алгебра и кольца. Кишинев: Штиинца, 1986, с. 48-50.
11. П и р с Р. Ассоциативные алгебры. Москва, 1986.
12. А н д р у н а к и е в и ч В.А., Р я б у х и н Ю.М. Радикалы алгебр и структурная теория. Москва, 1979.
13. Б е с о л о в О.К., Г р и г о р Р.С. Нетривиальные строго регулярные тождества на строго регулярных PI-алгебрах. XIX Всесоюзн. алгебр. конф., Львов, 1987 г.: Тез. докл. -ч. 1, -с. 36.

Поступило
19.04.1991

KORPUSTE RANGELT REGULAARSED SAMASUSED

O.K.Besolov (Vladikavkaz)

R e s ü m e

On teada, et rangelt regulaarsete assotsiatiivsete algebrate klass üle mingi fikseritud kommutatiivse korpuse Φ osutub muutkonnaks, kui tavalistele algebra tehetele lisada kaks täiendavat unaarset tehet ning iga selle muutkonna alammuutkond on tekitatud selles sisalduvate (üldiselt mittekommutatiivsete) korpuste poolt. Seega on neid alammuutkondi määravad "rangelt regulaarsed" samasused sisuliselt korpuste samasused. Selgub, et rangelt regulaarsed samasused kannavad endas oluliselt rohkem informatsiooni korpuste kohta kui tavalised samasused. Käesolevas artiklis tõestatakse, et lõplikumõõtmelised korpused üle sama põhikorpuse Φ omavad samu rangelt regulaarseid samasusi siis ja ainult siis, kui nad on isomorfsed (Teoreem 1). Samuti näidatakse, et sobivalt valitud põhikorpuse Φ korral sisaldab kõigi rangelt regulaarsete Φ-algebrate muutkond vähemalt kontiinuum alammuutkonda (Teoreem 2 ja Järeldus 3).

STRICTLY REGULAR IDENTITIES OF SKEW-FIELDS

O.K.Besolov (Vladikavkaz)

S u m m a r y

It is well known that a class of all strictly regular associative algebras over a field Φ is a variety if two new unary operations are added to the usual operations of an algebra. Moreover, any subvariety of the variety of all strictly regular Φ-algebras is generated by the skew-fields contained in this variety. Therefore the "strictly regular" identities determining these subvarieties are actually identities of skew-fields. It is known that strictly regular identities carry much more information about skew-fields than the usual ones. In this paper it is proved that two finite dimensional skew-fields over a field Φ are isomorphic if and only if they possess the same strictly regular identities (Theorem 1). Also it is shown that there exists a field Φ such that the variety of all strictly regular Φ-algebras contains at least continuum of subvarieties (Theorem 2 and Corollary 3).

Tartu Ülikooli Toimetised, 953 (1992), 67 - 82.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ АЛГЕБР С РЕКУРСИВНЫМ БАЗИСОМ В НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

О.В.Гателюк
Омский институт инженеров ж/д транспорта
Г.П.Кукин
Омский государственный университет

Наша статья посвящена алгебраической характеризации алгебр с рекурсивным базисом в некоторых многообразиях. Она продолжает (и уточняет) результаты, сообщенные на 17 Всесоюзной алгебраической конференции [5].

Формулировка и доказательство теорем 1, 2, 3, 4 для алгебр Ли принадлежит Г.П.Кукину. О.В.Гателюк нашел ряд многообразий, для которых эти результаты справедливы, а доказательства единообразны. Для каждого такого многообразия (или серии многообразий) развивается техника, аналогичная методу композиции А.И.Ширшова в теории алгебр Ли; эта часть работы также выполнена О.В.Гателюком.

Первоначально аналогичные теоремы были получены в теории групп. Это теоремы Буна-Хигмана (см. [9], с. 293) и теорема Макинтайра-Ноймана (см. [9], с. 310-314). Они основаны на теореме Хигмана о том, что конечнопорожденная (к.п.) группа рекурсивно определена (р.о.) тогда и только тогда, когда она вложима в конечноопределенную (к.о.) группу.

Далее аналоги теоремы Хигмана были установлены для полугрупп, инверсных полугрупп, а в теории алгебр В.Я.Беляевым [1] для ассоциативных алгебр, Г.П.Кукиным [8] для алгебр Ли. Здесь и далее основное поле F конечнопорождено над простым подполем - это существенно для справедливости результатов типа теоремы Хигмана.

В статье [7] был предложен список аксиом, при выполнении которых квазимногообразие $\mathfrak{K}$ алгебр над полем F - хигманово (т.е. в нем выполнены теоремы типа Хигмана). Отсюда теоремы В.Я.Беляева и Г.П.Кукина получаются как частные случаи; впрочем, проверка аксиом для конкретных многообразий алгебр нетривиальна.

Вначале мы предполагали продолжить список аксиом так, чтобы при выполнении новых аксиом были справедливы аналоги теорем Буна-Хигмана и Макинтайра-Ноймана. Здесь первым этапом было - обеспечить выполнение следующей теоремы Л.А.Бокутя, доказанной для алгебр Ли и ассоциативных алгебр.

Определение. Пусть F - нумерованное поле, L - алгебра над полем F и существует алгоритм, который для любого конечного множества T элементов алгебры L вопрос о линейной зависимости T сводит к проблеме равенства в F. Тогда говорят, что *алгебра* L *обладает рекурсивным базисом.*

Теорема [2]. *Пусть L - алгебра Ли с рекурсивным базисом над полем F. Тогда L вложима в простую рекурсивно определенную алгебру $\tilde{L}$, также обладающую рекурсивным базисом.*

Аксиома, накладываемая на (квази-)многообразие для выполнения аналогичной теоремы, должна иметь сложную структуру. Во-первых, прежние аксиомы уже говорят о том, какие (квази-)тождества выполнены на (квази-)многообразии. Во-вторых, новая аксиома должна определять структурные свойства свободных алгебр данного квазимногообразия, чтобы выполнялся (в какой-то форме) аналог следующей леммы Л.А.Бокутя.

Лемма [2]. *Пусть L - алгебра Ли с порождающими $\{x_i\}$ и определяющими соотношениями $\{r_\alpha\}$, $f,h \neq 0$ произвольные фиксированные элементы L. Тогда алгебра L вложима в алгебру Ли $\tilde{L}$ с порождающими $\{x_i, y, z\}$ и определяющими соотношениями $\{r_\alpha,\ (yf)z = h\}$.*

В третьих, аксиома должна определять алгоритмические свойства алгебр (если в последней лемме алгебра L имеет рекурсивный базис, то это же верно для $\tilde{L}$).

Мы решили не идти по этому пути. Если уже найдено хигманово (квази-)многообразие алгебр (удовлетворяющее аксиомам A1 - A5, см. ниже, то мы проверяем в этом (квази-)многообразии выполнимость дополнительных условий, из которых вытекают нужные результаты.

Мы пользуемся стандартными обозначениями:

$xy\ldots z=(\ldots(xy)\ldots)z$ - правонормированная расстановка скобок,

$[x,y] = xy - yx$ - коммутатор,

$(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$ - ассоциатор,

L_a (R_a) - оператор левого (и правого) умножения на элемент $a \in A$.

Далее $\mathfrak{N}$ - многообразие алгебр над полем F из следующего списка:

- многообразие всех алгебр Ли,
- многообразие всех ассоциативных алгебр,
- многообразие квазиассоциативных алгебр (см. [6], тождества $(x,y,z) = \alpha[y,[x,z]]$, где $\alpha \in F$, $\alpha \neq -1/4$ и
$$(x,y,z) + (y,z,x) + (z,x,y) = 0 \ ),$$
- многообразие D-алгебр (тождество $xyz = xzy + x(yz)$),
- многообразие $\mathfrak{M}_{-1/3}$ (тождество
$$(x,y,z) = 1/3(yxz - yzx + [z,x]y) \ ).$$

Понятно, что для многообразия $\mathfrak{N}^*$, состоящего из алгебр A^*, антиизоморфных алгебрам $A \in \mathfrak{N}$, справедливы те же результаты.

Теорема [7]. *Пусть $\mathfrak{L}$ - квазимногообразие алгебр над полем F, на алгебрах которого выполнены следующие условия:*

A1. $xy = \rho_i yx \Rightarrow R_x R_y = \alpha_i R_y R_x$ $(1 \leq i \leq I)$, $\alpha_i = 1$ при $\rho_i = 1$, где R_x - оператор правого умножения на x.

A2. Предположим, что S - алгебра из квазимногообразия $\mathfrak{L}$ с порождающими $\{b_l, a_j\}$ и определяющими соотношениями
$$a_j a_k = \rho_i a_k a_j, \quad b_l a_{j_1} \ldots a_{j_l} = \gamma b_s a_{n_1} \ldots a_{n_m}, \quad \gamma \in F,$$
расстановка скобок в словах правонормированная. Тогда правый модуль M в S, порожденный элементами $\{b_l\}$ над ассоциативной алгеброй $\mathcal{A} = \{R_{a_j} \mid R_{a_j} R_{a_k} = \alpha_i R_{a_k} R_{a_j}\}$ имеет определяющие соотношения:
$$b_l R_{a_{j_1}} \ldots R_{a_{j_l}} = \gamma b_s R_{a_{n_1}} \ldots R_{a_{n_m}}.$$

A3. $xy = \sigma_l yx \Rightarrow L_x R_y = R_y L_x$, $\sigma_l \in \{\rho_i \mid 1 \leq i \leq I\}$, $1 \leq l \leq \mathfrak{L}$, где L_x - оператор левого умножения на x.

A4. В свободной алгебре A квазимногообразия $\mathfrak{L}$ со свободными порождающими $\{b_l, a_j\}$ правый идеал B, порожденный элементами вида $\{b_l\}$, является свободной алгеброй счетного ранга квазимногообразия $\mathfrak{L}$.

A5. Пусть S - алгебра из квазимногообразия $\mathfrak{L}$ с порождающими $\{b_l, z_j, x_i, x_*, y_*, y\}$ и определяющими соотношениями вида $a_j a_k = \tau_k a_k a_j$, $\tau_m \in \{\rho_i, \sigma_l\}$, $\{a_k, a_j\} \neq \{x_*, y_*\}$, $\sum \gamma_m v_m(n,D) = 0$; $yz_j = \tau_m z_j y$, где $\gamma_m \in F$, $v_m(n,D)$ - правонормированные слова вида
$$P = \{b_l z_{j_1} \ldots z_{j_k} x_{i_1} \ldots x_{i_l} x_*^p y_*^n y^D\}, \quad n,D \in \{0,1\}.$$

Пусть $B(P_0)$ - подалгебра в S с порождающим множеством $P_0 = \{v_m(1,1)\} \subset P$. Если I - идеал подалгебры $B(P_0)$, порожденный множеством $Q = \{q_i\}$, J - порожденный им идеал в S, то идеал $J \cap B(P_0)$ порожден всеми элементами вида

$$\{q_i z_{k_1} \dots z_{k_m} ;\ q_i \in Q;\ k_1 \le \dots \le k_m,\ m = 0,1,2,\dots\}.$$

Тогда любая рекурсивно определенная в квазимногообразии $\mathfrak{K}$ *алгебра A вложима в алгебру* $\tilde{A}$, *конечноопределенную в* $\mathfrak{K}$.

Следствие [2]. *Квазимногообразие, удовлетворяющее условиям теоремы, хигманово.*

Известно, что многообразия $\mathfrak{N}$ из списка, приведенного выше - хигмановы.

Замечание 1. В условии A3 можно считать, что $x \ne y$. Это легко понять, проанализировав доказательство теоремы в [7]. Если же допустить, что $x = y$, то приходим к условию $L_x R_x = R_x L_x$, то есть рассматриваем лишь эластичные алгебры, что существенно сужает поле зрения.

Замечание 2. В работе А.И.Дедкова [6] были найдены тождества для квазиассоциативных алгебр:

$$(x,y,z) = \alpha[y,[x,z]], \text{ где } \alpha \ne -1/4,\ \alpha \in F \quad (1)$$

$$(x,y,z) + (y,z,x) + (z,x,y) = 0 \quad (2)$$

Покажем, что тождество (2) следует из тождества (1). Обозначим левую часть тождества (2) через $S(x,y,z)$. Легко проверить, что в любой алгебре выполняется следующее тождество

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = S(x,y,z) - S(y,x,z) \quad (3)$$

В силу тождества (1) $S(x,y,z)$ - кососимметрическая функция своих аргументов и потому $-\alpha S(x,y,z) = 2S(x,y,z)$ и при $\alpha \ne -2$ мы имеем $S(x,y,z) = 0$. Если же $\alpha = -2$, то тождество (3) не приводит к цели, но, однако, в работе [4] показано, что при $\alpha \ne -1$ из тождества (1) следует тождество:

$$(x,y,z) = \frac{\alpha}{\alpha + 1}(yxz - yzx + [z,x]y) \quad (4)$$

Тогда, сделав циклические перестановки в (4) и сложив полученные тождества, мы получим требуемое.

Замечание 3. Пусть λ - коэффициент мутации, тогда коэффициент α в тождестве (1) связан с коэффициентом мутации соотношением $\lambda(\lambda-1) = \alpha^2(2\lambda-1)^2$, (а не $\lambda(\lambda-1) = \alpha$, как указано в статье [6], стр. 170, в формулировке теоремы 1).

§1. Вложение в простые алгебры.

Здесь нам потребуется база свободного произведения алгебр в изучаемых многообразиях. Она найдена для ассоциативных алгебр [10] и алгебр Ли [13], в многообразии

D-алгебр – по аналогии с алгебрами Ли (см. [7] и [13]). Сложнее построить базу в свободном произведении алгебр из $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_{-1/3}$.

Предложение 1. *База алгебры A, свободной в многообразии $\mathfrak{M}_{-1/3}$ состоит из правонормированных слов от свободных порождающих $X = \{x_1 \geq x_2 \geq \ldots\}$, причем при перемножении двух правонормированных слов с коэффициентами 1 в произведении получаются слова того же самого состава и с той же самой последовательностью букв, что и в перемножаемых словах с коэффициентом 1, а остальные слова – с меньшими коэффициентами.*

Доказательство. Для $n = 3$ утверждение следует из основного тождества многообразия. Пусть S_1 и S_2 – два правонормированных слова суммарной степени n. Если S_2 – буква, то все доказано. Пусть для слов суммарной степени < n утверждение доказано. Пусть оно доказано для всех слов, у которых слово S_1 имеет степень k, а слово S_2 – степень меньшую или равную k. Тогда $S_1S_2 = (S_1'x_{i_1})(S_2'x_{i_2})$, где x_{i_1}, x_{i_2} – буквы.

$$(S_1'x_{i_1})(S_2'x_{i_2}) = ((S_1'x_{i_1})S_2')x_{i_2} - 1/3(S_2'x_{i_2})(S_1'x_{i_1}) -$$
$$-(S_2'(S_1'x_{i_1}))x_{i_2} + ((S_1'x_{i_1})x_{i_2})S_2' - (x_{i_2}(S_1'x_{i_1}))S_2' \qquad (*)$$

Из этих слов под предположение индукции не подпадает лишь слово $(S_2'x_{i_2})(S_1'x_{i_1})$. Применив (*) к этому слову, мы снова получим выражение, у которого все слова подпадают под предположение индукции, а слово $(S_1'x_{i_1})(S_2'x_{i_2})$ появится с коэффициентом 1/9. Таким образом, мы можем выразить слово S_1S_2 через меньшие слова, а поскольку слово $(S_2'(S_1'x_{i_1}))x_{i_2}$ подпадает под предположение индукции, получаем, что при правонормированном слове того же состава и в том же порядке, что и в слове $(S_1'x_{i_1})(S_2'x_{i_2})$, коэффициент будет равным 1, а остальные слова будут иметь другие, отличные от 1 коэффициенты. Из последнего замечания следует, что правонормированные слова образуют базу алгебры, свободной в многообразии $\mathfrak{M}_{-1/3}$. Предложение доказано.

Пусть L_α ($\alpha \in I$) – некоторое множество алгебр из многообразия $\mathfrak{M}_{-1/3}$. Рассмотрим алгебру $L = * L_\alpha$ ($\alpha \in I$) ([11], с.299). Выберем в алгебре L произвольную базу. При этом получим множество $S = \{e_{\alpha\gamma}\}$, $\alpha \in I$, $\gamma \in J_\alpha$. Рассмотрим множество $R = \{f_{\alpha\gamma}\}$, $\alpha \in I$, $\gamma \in J_\alpha$, находящееся во взаимно однозначном соответствии с множеством S. Сделаем R множеством свободных образующих свободной алгебры $\mathfrak{L}$. Рассмотрим в алгебре $\mathfrak{L}$ идеал Q, порожденный элементами

$$q_{\alpha\gamma\sigma} = f_{\alpha\gamma}f_{\alpha\sigma} - \sum_\tau p^\tau_{\alpha\gamma\sigma}f_{\alpha\tau} ,$$

если в алгебре L_α справедливо равенство $e_{\alpha\gamma}e_{\alpha\sigma} = \sum_\tau p^\tau_{\alpha\gamma\sigma}e_{\alpha\tau}$. Упорядочим каждое из множеств индексов J_α.

Определение 1. Базисное слово v алгебры $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}_{-1/2}$ назовем *особым*, если его ассоциативный носитель не содержит подслов вида $f_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta'}$, $\beta > \beta'$.

Лемма 1. *Элемент $t \in \mathfrak{L}$ только тогда принадлежит идеалу Q, когда в его разложение по базе среди слов наивысшей степени есть неособые слова.*

Доказательство. Пусть элемент $t \in \mathfrak{L}$ принадлежит идеалу Q, то есть представляется в виде линейной комбинации произведений элементов $q_{\alpha\gamma\sigma} = f_{\alpha\gamma}f_{\alpha\sigma} - \sum_\tau p^\tau_{\alpha\gamma\sigma}f_{\alpha\tau}$ на элементы множества $R = \{f_{\alpha\gamma}\}$. Найдем член с наибольшим по модулю коэффициентом. Можно считать, что он равен единице. В силу предложения 1 в разложении по базе из право-нормированных слов с коэффициентом 1 встретится слово $d_1 = (\ldots(c_1c_2)\ldots)c_n)f_{\alpha\gamma})f_{\alpha\sigma})g_1)\ldots)g_r$. Если остальные коэффициенты будут меньше, то лемма доказана.

Если же слов с наибольшим коэффициентом будет несколько, то возможны следующие случаи:

1. Если в одном из слов наивысшей степени d_i элемент $f_{\alpha\gamma}f_{\alpha\sigma}$ является подсловом одного из слов $c'_1c'_2\ldots c'_s$ или $f'_1f'_2\ldots f'_r$. Тогда, применяя основное тождество, мы получим, что с некоторым коэффициентом в разложение входит слово

$$(\ldots(c_1c_2)\ldots)f_{\alpha\gamma})f_{\alpha\sigma})c_n)g_1)g_2)\ldots)g_r.$$

Однако, для получения аналогичного слова при преобразовании слова d_i тождество придется применить большее число раз, а потому коэффициент будет другой (меньше), и данное слово не сократится.

2. Если слово имеет вид

$$(\ldots(c_1c_2)\ldots)c_s)f_{\alpha\beta})f_{\alpha\gamma})f_{\alpha\sigma})g_1)\ldots)g_r,$$

а сами произведения имеют вид:

$$v_1 = c_1c_2\ldots c_s(f_{\alpha\beta}f_{\alpha\gamma} - \sum_\tau p^\tau_{\alpha\beta\gamma}f_{\alpha\tau})f_{\alpha\sigma}d_1d_2\ldots d_r \quad \text{и}$$

$$v_2 = c_1c_2\ldots c_s f_{\alpha\beta}(f_{\alpha\gamma}f_{\alpha\sigma} - \sum_\tau p^\tau_{\alpha\gamma\sigma}f_{\alpha\tau})d_1d_2\ldots d_r\ ,$$

но тогда в силу основного тождества и предложения 1 слово

$$v^* = c_1c_2\ldots c_s f_{\alpha\gamma}f_{\alpha\sigma}f_{\alpha\beta}d_1d_2\ldots d_r$$

будет иметь коэффициент, отличный от нуля, а поскольку количество слов данного состава конечное число, следовательно, возможна индукция по словам с наивысшим старшим коэффициентом. Лемма доказана.

Теорема 1. *Образы особых слов образуют базу алгебры* $L = \bar{L}/Q$.

Доказательство. Линейная зависимость особых слов следует из леммы 1. Докажем, что образы правонормированных слов в алгебре L представимы в виде комбинации особых слов. Правонормированное слово не является особым в следующих случаях:

1. Содержит подслово вида $f_{\alpha\beta}f_{\alpha\gamma}f_1\ldots f_n$, $\beta>\gamma$. В этом случае, так как $f_{\alpha\beta}f_{\alpha\gamma} - \sum_\tau p^\tau_{\alpha\beta\gamma}f_{\alpha\tau} \equiv 0(\mathrm{mod}\ Q)$, это слово можно заменить линейной комбинацией слов меньшей степени.

2. Содержит подслова вида $f_1f_{\alpha\beta}f_{\alpha\gamma}f_2\ldots f_n$, $\beta>\gamma$, тогда, применив основное тождество, мы получим выражение этого слова через особые слова.

3. Если же вид слова таков: $f_1f_2\ldots f_s f_{\alpha\beta}f_{\alpha\gamma}f_{s+1}\ldots f_n$, $\beta>\gamma$, то, применив основное тождество и индукцию по наибольшему коэффициенту, как в предложении 1, мы получим требуемое представление через особые слова. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть F – счетное поле, L – алгебра одного из многообразий $\mathfrak{N}$ (см. список в начале статьи) с рекурсивным базисом. Тогда L вложима в простую алгебру P этого же многообразия. При этом алгебру P можно выбрать центральной.*

Доказательство. При доказательстве этой леммы считаем, что L – алгебра Ли. Для алгебр из многообразий $\mathfrak{N}$ доказательство проходит по этой же схеме.

Пусть a_1, a_2 – фиксированные ненулевые элементы алгебры L, Если они линейно зависимы, то порождают в $L_0 = L$ одинаковые идеалы. Пусть теперь a_1 и a_2 линейно независимы. Включим их в рекурсивный базис $\{a_i\}$. Свободное произведение $\Lambda = L*(x)*(y)$ алгебры Ли L и одномерных алгебр с базисами $x = x_{12}, y = y_{12}$ профакторизуем по соотношению $(xa_1)y = a_2$. В силу метода композиции А.И.Ширшова [12] (для алгебр из многообразия $\mathfrak{M}_{-1/3}$ доказательство в духе теоремы 1), базис фактор-алгебры $\bar\Lambda = {}^{\Lambda}/_{(xa_1)y=a_2}$ состоит из правильных (правонормированных для алгебр из многообразия $\mathfrak{M}_{-1/3}$) в алфавите $\{a_i,x,y\}$, $\{x>a_1>a_2>\ldots>y\}$, слов, ассоциативные носители которых не содержат подслов a_ia_j $(i>j)$, xa_1y. Очевидно, что построенная фактор-алгебра $\bar\Lambda$ содержит подалгебру L, причем $Ид_{\bar\Lambda}(a_1) \supseteq Ид_{\bar\Lambda}(a_2)$. Аналогично вложим алгебру $\bar\Lambda$ в алгебру L_1, причем $Ид_{L_1}(a_1) = Ид_{L_1}(a_2)$.

Итерируя процесс, получим возрастающую цепь алгебр Ли $L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots$, причем в алгебре Ли $\hat L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$ идеалы, порожденные любыми двумя ненулевыми элементами $b,c \in L$ совпадают. Тем же свойством обладает алгебра $L(1) = \hat L*(t_1)$. В свободном произведении $L(1)$ элемент $(bt_1)(ct_1)$, $b,c \in L$ равен нулю тогда и только тогда, когда элементы b и c линейно зависимы над F. Поэтому алгебра $L(1)$ центральна. Итерируя этот процесс, получим цепь центральных простых алгебр Ли над F: $L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots$. Причем любые два элемента $u,v \in L(i)$, $u,v \neq 0$ порождают в $L(j)$ $(i<j)$ одинаковые идеалы. Поэтому центральная алгебра $P = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$ проста. По построению алгебр $L_i, L(i)$ базис алгебры P рекурсивен. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть основное поле F конечнопорождено над простым подполем. Конечнопорожденная алгебра L одного из многообразий $\mathfrak{N}$ обладает рекурсивным базисом тогда и только тогда, когда L вложима в простую центральную подалгебру P конечноопределенной алгебры $\tilde L$ в многообразии $\mathfrak{N}$ над полем F.*

Доказательство. Пусть алгебра L имеет рекурсивный базис. По Лемме 2 алгебра L вложима в простую центральную алгебру P с рекурсивным базисом. Алгебра P рекурсивно определена , а поскольку многообразие $\mathfrak{N}$ хигманово, вложима в к.о. алгебру $\tilde L$ над F.

Теперь рассмотрим к.п. алгебру L, лежащую в простой подалгебре P к.о. алгебры $\tilde L$. Покажем, что в алгебре разрешима проблема равенства. Пусть $a \in L$, оператор r пробегает алгебру T умножений на алгебре P. Зафиксируем ненулевой элемент $p \in P$. Поскольку алгебра $\tilde L$ к.о., то множество записей $h \in L$, равных нулю, рекурсивно перечислимо. При этом $ar - p = 0$ при некотором r тогда и только тогда, когда $a \neq 0$. Итак, существует алгоритм A_1, выясняющий, равен нулю элемент $a \in L$ или нет.

Пусть теперь $\{a_i | 1 \leq i \leq n\}$ линейно зависимые элементы алгебры L. Перечисляя записи $\Sigma\gamma_i a_i$ $(\gamma \in F)$ и сравнивая их с нулем, можно найти коэффициенты $\{\gamma_i\}$.

Пусть теперь элементы $\{a_i | 1 \le i \le n\} \subset L$ линейно независимы над F. Векторное пространство P является точным неприводимым модулем над алгеброй T умножений. Поскольку алгебра P центральна, централизатор модуля P над T совпадает с основным полем. Тогда по теореме плотности существуют элементы $t_k \in T$, такие, что $a_k t_k \ne 0$, $a_i t_k = 0$ $(i<k)$ при $k = 1,2,\dots,n$. Перечисляя наборы элементов $(t_1,t_2,\dots,t_n)$, где $t_k \in T$, мы найдем, что множество $\{a_i\}$ линейно независимо. Теорема доказана.

§2. Вложения в экзистенциально замкнутые алгебры.

Пусть Q - некоторое квазимногообразие (многообразие) алгебр. Пусть $\Lambda_0 = \Lambda * L(x_1,x_2,\dots)$ свободное произведение алгебры $\Lambda \in Q$ со свободной алгеброй $L(x) \in Q$. Элементы $u \in \Lambda_0$ записываем в виде $u = u(g_i,x_j)$, где $g_i \in \Lambda$.

Определение 2. Алгебра $A \in Q$ над полем F называется *экзистенциально замкнутой* (э.з.), если произвольная конечная система равенств

$$u_k(g_i,x_j) = 0, \quad 1 \le k \le K$$

и неравенств (т.е. отрицаний равенств)

$$v_t(g_i,x_j) \ne 0, \quad 1 \le t \le T$$

допускающая решение в некоторой алгебре $A_1 \in Q$, содержащей A, имеет решение уже в алгебре A.

Пусть $P = P^{(n)}$ - предикат на декартовой степени алгебры Λ над полем F. Значение $P(v^{(1)},v^{(2)},\dots,v^{(n)})$ истинно для $v^{(1)},v^{(2)},\dots,v^{(n)} \in \Lambda$ тогда и только тогда, когда элементы $v^{(1)},v^{(2)},\dots,v^{(n)}$ линейно независимы.

Временно введем следующий термин. Алгебру A над полем F назовем *алгебраически замкнутой* (а.з.), если любая конечная система соотношений

$$u_k(g_i,x_j) = 0, \quad 1 \le k \le K$$

$$P(v_t^{(1)}(g_i,x_j), v_t^{(2)}(g_i,x_j),\dots,v_t^{(n)}(g_i,x_j)); \quad 1 \le t \le T$$

допускающая решение в некоторой алгебре $A_1 \in Q$, содержащей A, имеет решение уже в алгебре A.

Предложение 2. *Алгебра $A \in Q$ над полем F является экзистенциально замкнутой тогда и только тогда, когда A - алгебраически замкнута.*

Доказательство. Пусть A - а.з. Рассмотрим произвольную конечную систему: $u_k(g_i,x_j) = 0$, $v_t(g_i,x_j) \ne 0$ $(g_i \in A)$.

совместимую в некоторой алгебре $A_1 \supseteq A$. Возьмем свободное произведение A_1*X алгебры A_1 с однопорожденной алгеброй X в квазимногообразии Q. Тогда два элемента $v_t(g_i,\bar{x}_j)$ и x (где $\bar{x}_j \in A_1$) линейно независимы в A_1*X для каждого t, то есть

$$u_k(g_i,\bar{x}_j) = 0 \quad 1\le k\le K, \quad P(v_t(g_i,\bar{x}_j),x) \quad 1\le t\le T$$

в алгебре $A_1*X \supseteq A$. Поскольку алгебра A - а.з., то эта система условий имеет решение уже в алгебре A. Тогда для подходящих $\tilde{x}_j \in A$

$$u_k(g_i,\tilde{x}_j) = 0 \quad 1\le k\le K, \quad v_t(g_i,\tilde{x}_j) \ne 0 \quad 1\le t\le T,$$

в алгебре A, и алгебра A является э.з.

Пусть теперь алгебра A э.з., а система

$$u_k(g_i,x_j) = 0$$

$$P(v_t^{(1)}(g_i,x_j),v_t^{(2)}(g_i,x_j),\ldots,v_t^{(n)}(g_i,x_j))$$

совместима в некоторой алгебре $A_1 \supseteq A$. Тогда в алгебре A_1*X

$$u_k(g_i,\bar{x}_j) = 0$$

$$(v_t^{(1)}(g_i,\bar{x}_j)\cdot x)\cdot(v_t^{(2)}(g_i,\bar{x}_j)\cdot x)\cdot\ldots\cdot(v_t^{(n)}(g_i,\bar{x}_j)\cdot x) \ne 0$$

для $\bar{x}_j \in A_1$. Следовательно, эта система условий совместна и в алгебре A (и с заменой $\bar{x}_j \in A_1$ на $\tilde{x}_j \in A$). Тогда в алгебре A

$$u_k(g_i,\tilde{x}_j) = 0$$

$$P(v_t^{(1)}(g_i,\tilde{x}_j),v_t^{(2)}(g_i,\tilde{x}_j),\ldots,v_t^{(n)}(g_i,\tilde{x}_j)).$$

Итак, алгебра A - а.з. Предположение доказано. В дальнейшем термины э.з. и а.з. - синонимы.

Лемма 3. *Пусть основное поле F конечнопорождено над простым подполем. Конечнопорожденная алгебра $\Lambda \in \mathfrak{N}$ (см. список в начале статьи), обладающая рекурсивным базисом над полем F, вложима в каждую экзистенциально замкнутую алгебру $B \in \mathfrak{N}$ над полем F.*

Доказательство. По лемме 2 Λ вложима в простую подалгебру S к.о. алгебры $H = \langle z_1,\ldots,z_n; r_1,\ldots,r_m\rangle$. Выберем $0 \ne w \in S$. Система уравнений и соотношений

$$r_i(z_j) = 0, \quad w(z_j) \ne 0$$

имеет решение в $B\times H$ и, следовательно, в B, так как B - э.з. Пусть $b_1,\ldots,b_n$ - элементы из B, удовлетворяющие выписанным уравнениям. Отображение $z_i \longrightarrow b_i$ определяет гомоморфизм $\phi: H \longrightarrow B$, поскольку каждое определяющее соотношение r_i алгебры H переходит в нуль. Поскольку S проста, то из $\phi(v) = 0$ для произвольного $0 \ne v \in S$ следует $\phi(w) = 0$. Однако $\phi(w) \ne 0$. Значит, ограничение отображения ϕ на S является вложением. В частности, ϕ вкладывает Λ в B. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть поле F конечнопорождено над простым подполем, Q - произвольное (квази)многообразие алгебр над F. Если конечнопорожденная алгебра $\Lambda \in Q$ вложима в произвольную экзистенционально замкнутую алгебру $B \in Q$, то Λ обладает рекурсивным базисом.*

Доказательство. Предположим, что к.п. алгебра Λ над F вложима в произвольную э.з. алгебру из квазимногообразия Q над F. Поскольку теорема Макинтайра из теории групп имеет общеалгебраический характер (см. [9] стр. 311-314), поэтому в алгебре Λ разрешима проблема равенства (с помощью некоторого алгоритма α_1).

Покажем, что существует алгоритм, который для любых $v,v' \in \Lambda$ определяет, истинно или ложно значение предиката $P(v,v')$, введенного выше. Тем самым, для любого множества из двух элементов алгоритм α_2 определяет, линейно зависимо ли оно или нет. Доказательство проведем от противного.

Пусть дана алгебра $H = \langle h_1,\ldots,h_n | r_1,r_2,\ldots\rangle$ с неразрешимой проблемой линейной зависимости двух элементов. Построим а.з. алгебру $\mathcal{A}$, в которую H нельзя вложить.

Пусть $x_1,x_2,\ldots$ - перечисление счетного множества символов (они окажутся порождающими алгебры $\mathcal{A}$). Пусть $v_1,v_2,\ldots$ - счетное множество переменных. Пусть также $S_0,S_1,\ldots$ - перечисление всех конечных множеств уравнений и предикатов $P(v,v')$, включающих в себя элементы x и v. Рассмотрим, наконец, перечисление $\tau_1,\tau_2,\tau_3,\ldots$ - всех n-ок элементов от x_i и множество $z_1,\ldots,z_n$ из n переменных, отличных от x_i и v_i.

Построим множества X_k и Σ_k по индукции. Пусть $X_0 = \Sigma_0 = \emptyset$, Допустим, что Σ_{k-1} и X_{k-1} уже определены. Построим X_k и Σ_k.

Предположим сначала, что k нечетно, $k = 2i + 1$. Тогда X'_k состоит из X_{k-1} и всех порождающих символов x_j, встречающихся в записи системы S_i.

Рассмотрим систему S_i, скажем

$$w_h(x_j,v_j) + \gamma_{v_h} w'_h(x_j,v_j) = 0,$$

$$P_l(u(x_j,v_j);u'(x_j,v_j)),\ l=1,\ldots,d.$$

Предположим, что система $\Sigma_{k-1}\cup S_i$ совместима. Допустим, что переменные, встречающиеся в S_i - это $v_{j_1},\ldots,v_{j_q}$. Выберем порождающие символы $x_{k_1},\ldots,x_{k_q}$, не встречающиеся в X'_k (это возможно, так как множество X'_k конечно).

Пусть X_k - это x'_k и $x_{k_1},\ldots,x_{k_q}$. Пусть также Σ_k - это Σ_{k-1} и

$$w_h(x_j,x_{k_j}) + \gamma_{v_h} w'_h(x_j,x_{k_j}) = 0,\ h = 1,\ldots,m,$$
$$P_l(u(x_j,x_{k_j});u'(x_j,x_{k_j})),\ l=1,\ldots,d.$$

Понятно, что система Σ_k совместима. Если $\Sigma_{k-1}\cup S_i$ несовместима, то положим $X_k = X'_k$ и $\Sigma_k = \Sigma_{k-1}$. Допустим теперь, что $k = 2i$. Пусть $\tau_i = \langle t_1,\ldots,t_n\rangle$ есть i-тая n-ка из списка всех элементов от порождающих, встречающихся в компонентах n-ки τ_i. Определим четыре множества элементов от переменных $z_1,\ldots,z_n$:

$$\Delta^+ = \{w(z_1,\ldots,z_n),w'(z_1,\ldots,z_n) \mid \exists\gamma_W \in F : w(h_1,\ldots,h_n) + \\ + \gamma_W w'(h_1,\ldots,h_n) = 0 \text{ в } H\},$$

$$\Delta^-=\{u(z_1,\ldots,z_n),u'(z_1,\ldots,z_n) \mid P(u(h_1,\ldots,h_n),u'(h_1,\ldots,h_n))\}$$

Заметим, что поскольку проблема линейной зависимости двух элементов неразрешима, то хотя бы одно из множеств Δ^+ и Δ^- не является рекурсивно перечислимым.

Пусть A_k - алгебра с порождающим множеством X_k, определяющие соотношения которой суть равенства $w + \gamma w' = 0$ в Σ_{k-1}. Пусть

$$D^+ = \{w(z_1,\ldots,z_n),w'(z_1,\ldots,z_n) \mid \exists\gamma_W \in F : w(t_1,\ldots,t_n) + \\ + \gamma_W w'(t_1,\ldots,t_n) = 0 \text{ в } A_k\}.$$

Поскольку A_k к.о., D^+ рекурсивно перечислимо.

Для каждой пары элементов $u(z_1,\ldots,z_n)$, $u'(z_1,\ldots,z_n)$ определим $A_{k,u,u'}$ как алгебру, получающуюся из A_k добавлением определяющего соотношения

$$u(t_1,\ldots,t_n) + \gamma_u u'(t_1,\ldots,t_n),\ \gamma_u \in F.$$

Поскольку каждая $A_{k,u,u'}$ конечно представлена, множество таких элементов от порождающих x_k, равных нулю, в $A_{k,u,u'}$ рекурсивно перечислимо. Использую диагональную нумерацию, видим, что множество

$D^-=\{u_i(z_1,\ldots,z_n),u'_i(z_1,\ldots,z_n) \mid$ в Σ_{k-1} истинен предикат $P(u_i,u'_i)$, причем $w_i + \gamma_{v_i} w'_i = 0$, где $\gamma_{v_i} \in F$ в $A_{k,u,u'}\}$ рекурсивно перечислимо. Иначе, пара u_1, u_2 лежит в D^-, если добавление соотношения $u + \gamma u' = 0$ противоречит линейной зависимости элементов w_i и w'_i в Σ_{k-1}.

Поскольку D^+ и D^- оба рекурсивно перечислимы, а одно из Δ^+, Δ^- не является таковым, то либо $D^+ \neq \Delta^+$, либо $D^- \neq \Delta^-$. Рассмотрим эти возможности. Допустим, что $\Delta^+\setminus D^+ \neq \emptyset$. Выберем $(v,v') \in \Delta^+\setminus D^+$. Тогда $P(v,v')$ истинен в A_k. Образуем Σ_k добавлением соотношения $P(v(t_1,\ldots,t_n),v'(t_1,\ldots,t_n))$ к Σ_{k-1}

(понятно, что Σ_k совместна). Если $D^+\setminus\Delta^+ \neq \emptyset$, то выберем $(v,v') \in D^+\setminus\Delta^+$. Тогда существует $\gamma_v \in F$, такое, что $v(t_1,\ldots,t_n) + \gamma_v v'(t_1,\ldots,t_n) = 0$ в A_k. Образуем Σ_k добавлением уравнения $v(t_1,\ldots,t_n) + \gamma_v v'(t_1,\ldots,t_n)$ k Σ_{k-1}. Поскольку пара $(v,v') \notin D^-$ то все предикаты P из Σ_{k-1} истинны в $A_{k,u,u'}$ и Σ_k совместна. Если $D^+ = \Delta^+$ и $D^-\setminus\Delta^- \neq \emptyset$, то выберем $(v,v') \in D^-\setminus\Delta^-$. Поскольку $(v,v') \in D^-$, то $P(v(t_1,\ldots,t_n),v'(t_1,\ldots,t_n))$ истинен в A_k. Образуем Σ_k добавлением соотношения $\{P(v(t_1,\ldots,t_n),v'(t_1,\ldots,t_n)\}$ к Σ_{k-1}. Если $D^+ = \Delta^+$ и $D^-\setminus\Delta^- \neq \emptyset$, то выберем $(v,v') \in \Delta^-\setminus D^-$. Образуем Σ_k добавлением уравнения

$$v(t_1,\ldots,t_n) + \gamma_v v'(t_1,\ldots,t_n) = 0$$

к Σ_{k-1}. Поскольку $(v,v') \notin D^-$, все соотношения типа "предикат P истинный" из Σ_{k-1} выполняются в $A_{k,u,u'}$ и Σ_k совместна.

Пусть B - произвольная алгебра с множеством порождающих $X \supseteq X_k$, в которых выполнены все уравнения и соотношения из Σ_k. Возможное соответствие $h_j \to t_j$ не может определять изоморфизм, поскольку оно некорректно на паре $(v(h_1,\ldots,h_n),v'(h_1,\ldots,h_n))$, где выбор (v,v') определен выше.

Используя индукцию, можно считать, что множества Σ_k определены для всех $k \geq 0$. Положим $\Sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty}\Sigma_k$. Пусть A - алгебра с порождающим множеством $X = \{x_1,x_2,\ldots\}$ и множеством определяющих соотношений, состоящих из всех уравнений вида $w + \gamma_v w' = 0$ из Σ. Утверждается, что все уравнения и соотношения одновременно удавлетворяются в A. Это ясно для уравнений, поскольку они являются определяющими соотношениями. Предположим теперь, что соотношение $P(u,u')$ находится в Σ, а из определяющих соотношений для A вытекает соотношение $u + \gamma_u u' = 0$. Тогда это соотношение выводится из конечного числа соотношений $w_1 + \gamma_{v_1} w_1' = 0,\ldots,w_m + \gamma_{v_m} w_m' = 0$. Выберем индекс k столь большим, чтобы все уравнения $w_j + \gamma_{v_j} w_j' = 0$ $(j = 1,\ldots,m)$ и соотношение $P(u,u')$ лежали в Σ_k. Получим противоречие с тем, что Σ_k совместно. Поскольку все соотношения из Σ выполняются в A, алгебра A э.з. и никакая ее подалгебра не изоморфна алгебре H.

Проведенное рассуждение показывает, что существует алгоритм α_2, определяющий линейную зависимость или независимость двух элементов в Λ. Аналогично доказывается и существование алгоритма α_k, отвечающего на вопрос о линейной зависимости или независимости k элеменов (нужно только рассмотреть предикат $P(u_1,\dots,u_n)$). Таким образом, алгебра Λ обладает рекурсивным базисом. Теорема доказана.

Лемма 3 и теорема 3 дают следующую характеризацию алгебр одного из многообразий $\mathfrak{N}$ (список см. в начале статьи).

Теорема 4. *Пусть основное поле F конечнопорождено над простым подполем. Конечнопорожденная алгебра $\Lambda \in \mathfrak{N}$ имеет рекурсивный базис тогда и только тогда, когда Λ вложима в каждую экзистенциально замкнутую алгебру из $\mathfrak{N}$ над полем F.*

Авторы благодарны И.П.Шестакову за ряд ценных замечаний.

Литература

1. Беляев В. Я. Подкольца конечноопределенных ассоциативных колец // Алгебра и логика. - 1978. - Т.17.№6.- С.627-638.

2. Бокуть Л. А. Об алгебраически замкнутых и простых алгебрах Ли // Труды МИАН им. В.А.Стеклова.- 1978.- Т.148.-С.30-42.

3. Гателюк О. В. Поиск многообразий Хигмана // VI Всес. школа по теории многообразий алгебраических систем (тезисы сообщений).-Магнитогорск, 1990.-С.11.

4. Гателюк О. В. Поиск многообразий Хигмана // Деп. ВИНИТИ 15.03.90 № 1414 - В 90.

5. Гателюк О. В., Кукин Г. П. Характеризация алгебр Ли с разрешимой проблемой равенства // XVII Всес. алгебраическая конференция (тезисы докладов).- Минск, 1983.-С.51.

6. Дедков А. И. Некоторые свойства квазиассоциативных и квазиальтернативных алгебр // Сиб. матем. журн.-1989.- Т.30, №3.-С.169-174.

7. Епанчинцев В. И., Кукин Г. П. О квазимногообразиях Хигмана // Вычислимые инварианты в теории алгебраических систем.-Новосибирск,1987.-С.90-109.

8. Кукин Г. П. Подалгебры конечноопределенных лиевых алгебр // Алгебра и логика.-1979.-Т.18,№3.-С.311-327.

9. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп .-М.:Мир, 1980.

10. Мальцев А. И. О представлении бесконечных алгебр // Мат. сб.-1943,№2-3.-С.263-285.

11. М а л ь ц е в А. И. Алгебраические системы.- М.: Наука, 1970.

12. Ш и р ш о в А. И. Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли // Сиб. матем. журн.- 1962.- Т.3, №2.- С.292-296.

13. Ш и р ш о в А. И. Об одной гипотезе теории алгебр Ли // Сиб. матем. журн.-1962.-Т.3,№2.-С.297-301.

14. B e r g m a n G. The diamond lemma for ring theory // Adv. Math.-1989.-V.29,№2.-P.178-218.

Поступило
07 VI 1991

REKURSIIVSE BAASIGA ALGEBRATE ALGEBRALINE ISELOOMUSTUS TEATAVATES MUUTKONDADES

O.V.Gateljuk, G.P.Kukin

R e s ü m e e

Antud töö põhieesmärk on anda rekursiivse baasiga algebrate algebraline iseloomustus.

Olgu F - korpus, mis on lõplikult moodustatud üle oma lihtsa alamkorpuse. Olgu A - F-algebra ühest järgmistest muutkondadest $\mathfrak{N}$:

a) Lie algebrate muutkond;

b) assotsiatiivsete algebrate muutkond;

c) kvaasiassotsiatiivsete algebrate muutkond;

d) D-algebrate muutkond (samasus xyz = xzy + x(yz));

e) muutkond $\mathfrak{M}_{-1/3}$

$$(\text{samasus } (x,y,z) = \tfrac{1}{3}(yxz - yzx + [z,x]y)$$

Teoreem 2. *Lõplikult moodustatud F-algebra A suvalisest muutkonnast $\mathfrak{N}$ omab rekursiivset baasi parajasti siis, kui A on sisestatav mingi lõplikult määratud algebra $\mathfrak{L} \in \mathfrak{N}$ mingisse lihtsasse alamalgebrasse P.*

Definitsioon. Algebrat A (kvaasi)muutkonnast Q nimetame *eksistentsiaalselt kinniseks,* kui iga lõplik võrduste ja mittevõrduste süsteem

$$u_k(g_i,x_j) = 0, \quad 1 \le k \le K;$$
$$v_t(g_i,x_j) \ne 0, \quad 1 \le t \le T,$$

kus $g_i \in A$ ja x_j on muutujad, omades lahendit algebras $A_1 \in Q$, $A_1 \supseteq A$, omab lahendit ka algebras A.

Teoreem 4. *Lõplikult moodustatud F-algebra $A \in \mathfrak{N}$ omab rekursiivset baasi parajasti siis, kui A on sisestatav muutkonna $\mathfrak{N}$ igasse eksistentsiaalselt kinnisesse F-algebrasse.*

AN ALGEBRAIC CHARACTERIZATION OF ALGEBRAS WITH A RECURSIVE BASE IN SOME VARIETIES

O.V.Gateljuk, G.P.Kukin

S u m m a r y

The main objective of this paper is to give an algebraic characterization of algebras with a recursive base.

Let F be a field, finitely generated over its own subfield. Let A be an F-algebra from one of the following varieties $\mathfrak{N}$:

a) a variety of Lie algebras;

b) a variety of associative algebras;

c) a variety of quasiassociative algebras;

d) a variety of D-algebras (an identity $xyz = xzy + x(yz)$);

e) a variety $\mathfrak{M}_{-1/3}$ (an identity $(x,y,z) = \frac{1}{3}(yxz - yzx + [z,x]y)$)

Theorem 2. *The finitely generated F-algebra A from the variety $\mathfrak{N}$ has a recursive base if and only if A may be embedded into a simple subalgebra P of a finitely presented algebra $\mathfrak{L} \in \mathfrak{N}$.*

Definition. An algebra A from the (quasi)variety Q is called *existentially closed,* if any finite system of equalities and inequalities

$$u_k(g_i,x_j) = 0, \quad 1 \le k \le K;$$
$$v_t(g_i,x_j) \ne 0, \quad 1 \le t \le T,$$

where $g_i \in A$, x_j - variables, having a solution in $A_1 \in Q$, $A_1 \supseteq A$, . has a solution in the algebra A.

Theorem 4. *A finitely generated F-algebra $A \in \mathfrak{N}$ has a recursive base if and only if A may be embedded into any existentially closed F-algebra of the variety $\mathfrak{N}$.*

Tartu Ülikooli Toimetised, 953 (1992), 83 - 94.

ЦЕНТР И КОММУТАТИВНОСТЬ СПЛЕТЕНИЙ МОНОИДОВ С КАТЕГОРИЯМИ

В.Фляйшер
Кафедра математического анализа

В настоящей работе описывается центр сплетения моноидов с категориями. Получены необходимые и достаточные условия коммутативности таких сплетений. Аналогичные вопросы рассматривались для сплетений полугрупп [2,4] и изотонных сплетений упорядоченных полугрупп [3]. Ряд результатов из этих работ получено здесь в качестве следствий.

1. <u>Основные понятия</u>. Напомним ряд определений, необходимых нам в дальнейшем.

Пусть S - моноид с единицей 1_S. Через $C(S)$ будем обозначать *центр* моноида S, т.е. $C(S) = \{x \in S | \forall s \in S \ \ xs = sx\}$. Множество A называется *левым S-полигоном*, если для любых $s \in S$, $a \in A$ определено умножение $sa \in A$ так, что $s(ta) = (st)a$, $1_S a = a$ для любых $s, t \in S$, $a \in A$.

Конструкция сплетения моноидов с малыми категориями была введена в работе [1] как обобщение обычной конструкции сплетения моноидов, а также полугрупп эндоморфизмов полигонов. Пусть K - произвольная малая категория с множеством объектов $A = \mathrm{Ob}\ K$ и множеством морфизмов $M = \mathrm{Mor}\ K$. Для произвольных $a, b \in A$ через $M(a,b)$ будем обозначать множество морфизмов из объекта a в объект b. Через $F(A,M)$ обозначается множество всех отображений из множества объектов A в множество морфизмов M категории K. Пусть S - произвольный моноид и $A = \mathrm{Ob}\ K$ есть левый S-полигон. На множестве пар

$$\mathfrak{A} = \{(s,f) |\ s \in S,\ f \in F(A,M),\ \forall\, a \in A\ \ f(a) \in M(a, sa)\}$$

определим умножение следующим образом: для любых $(s,f), (t,g)$ из $\mathfrak{A}$

$$(s,f)(t,g) = (st, f_t g)$$

где $(f_t g)(a) = f(ta)g(a)$ для любого $a \in A$. Множество $\mathfrak{A}$ относительно введенного умножения является моноидом, где роль единицы играет пара $(1_S, e)$, $e(a) = \mathrm{id}_a$ для любого $a \in A$. Моноид $\mathfrak{A}$ называется *сплетением моноида S с малой категорией K* и обозначается $\mathfrak{A} = S \mathrm{\ wr\ } K$. Нас будет интересовать центр $S(\mathfrak{A})$ моноида $\mathfrak{A} = S \mathrm{\ wr\ } K$, являющегося сплетением моноида S с малой категорией K.

Пусть K - малая категория, $A = \mathrm{Ob}\ K$, $M = \mathrm{Mor}\ K$. Множество морфизмов $P \subseteq M$ называется *идеалом* в категории K, если для любых $\pi \in P$, $\alpha, \beta \in M$ из того, что произведение морфизмов $\alpha\pi\beta$ определено, вытекает $\alpha\pi\beta \in P$. Если U - некоторое множество морфизмов, то множество морфизмов

$$\langle U \rangle = \{\alpha\nu\beta \in M \mid \nu \in U,\ \alpha, \beta \in M\}$$

является, легко видеть, идеалом в категории K, причем наименьшим из содержащих множество U. Поэтому идеал $\langle U \rangle$ называется *идеалом, порожденным множеством морфизмов* U. Идеал P в категории K называется *нулевым*, если для любых морфизмов $\alpha, \beta \in P$ из того, что $\alpha, \beta \in \mathrm{M}(a, b)$ при некоторых $a, b \in A$ вытекает $\alpha = \beta$.

<u>Согласованность</u>. Пусть $A = \mathrm{Ob}\ K$ является левым полигоном над моноидом S. Мы скажем, что моноид S *согласован* с категорией K, если для любых $a, b \in A$, $M(a, b) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда существует $s \in S$ так, что $sa = b$.

Следующее утверждение показывает, что при рассмотрении сплетения моноида S с малой категорией K без ограничения общности, можно предполагать, что моноид S согласован с категорией K.

<u>Лемма</u>. *Для сплетения S wr K моноида S с малой категорией K существуют подмоноид $S' \subseteq S$ и подкатегория $K' \subseteq K$ такие, что S wr $K = S'$ wr K', причем моноид S' согласован с категорией K'.*

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим

$$\mathfrak{U} = S \text{ wr } K = \{(s, f) \mid s \in S,\ f \in F(A, M),\ f(a) \in M(a, sa),\ a \in A\}$$

и пусть $S' = \{s \in S \mid \exists\ f \in F(A, M)$ так, что $(s, f) \in \mathfrak{U}\}$. Определим подкатегорию $K' \subseteq K$ так, что $\mathrm{Ob}\ K' = \mathrm{Ob}\ K = A$ и для любых $a, b \in A$

$$M_{K'}(a, b) = \{\alpha \in M_K(a, b) \mid \exists (s, f) \in S \text{ wr } K \text{ так, что } f(a) = \alpha\}.$$

Легко проверить, что $S' \subseteq S$ есть подмоноид, а K' есть подкатегория малой категории K, причем S wr $K = S'$ wr K', так как для любого $(s, f) \in S$ wr K мы имеем $s \in S'$ и $f(a) \in M_{K'}(a, sa)$, т.е. S wr K', а обратное включение очевидно.

Остается показать, что S' согласован с K'. Если $M_{K'}(a, b)$ непусто, то существует морфизм $\alpha \in M_{K'}(a, b)$ и значит найдется такой элемент $(s, f) \in S$ wr K, что $f(a) = \alpha$ и $sa = b$. Обратно, если $sa = b$ для $s \in S'$, то существует $(s, f) \in S$ wr K, причем $f(a) \in M_K(a, b)$ и, следовательно, $f(a) \in M_{K'}(a, b)$, т.е. множество $M_K(a,b)$ непусто. Лемма доказана.

В дальнейшем, говоря о сплетении моноида S с категорией K, мы будем всегда предполагать, что моноид S согласован с категорией K.

3. Центр сплетения. Пусть K - малая категория, $A = \mathrm{Ob}\, K$ есть левый полигон над моноидом S, согласованным с категорией K. Мы будем рассматривать элементы центра $C(\mathfrak{A})$ сплетения $\mathfrak{A} = S \mathrm{\,wr\,} K$.

Лемма 3.1. *Для произвольного* $(s,f) \in \mathfrak{A}$ из $(s,f) \in C(\mathfrak{A})$ *следует* $s \in C(S)$.

Доказательство следует непосредственно из правила умножения элементов в $\mathfrak{A}$.

Лемма 3.2. Пусть $(s,f) \in C(\mathfrak{A})$ *и пусть* $B = \{a \in A \mid sa \neq a\}$. *Множество морфизмов* $U = \{f(a) \mid a \in B\}$ *порождает в категории K нулевой идеал.*

Доказательство. Лемма, очевидно, будет доказана. если мы покажем, что для любого $a \in B$ и произвольных морфизмов $\alpha, \alpha' \in M(c,a)$, $\beta, \beta' \in M(sa,b)$, где $c, b \in A$, выполняется

$$\beta f(a)\alpha = \beta' f(a)\alpha'.$$

Покажем вначале, что $\beta f(a) = \beta' f(a)$. Из согласованности моноида S с категорией K вытекает, что существует такой $t \in S$, что $t(sa) = b$. Рассмотрим элемент $(t,g) \in \mathfrak{A}$, где $g : A \to M$, причем $g(sa) = \beta$. Тогда, ввиду $(s,f)(t,g) = (t,g)(s,f)$, имеем $f(ta)g(a) = g(sa)f(a)$, т.е. $\beta f(a) = f(ta)g(a)$. Пусть теперь $(t,g^*) \in \mathfrak{A}$ такой элемент, что $g^*(sa) = \beta'$ и $g^*(d) = g(d)$ для любого $d \neq sa$. Поскольку $a \in B$, т.е. $a \neq sa$, то, в частности, $g^*(a) = g(a)$. Ввиду $(s,f)(t,g^*) = (t,g^*)(s,f)$, мы получаем $f(ta)g^*(a) = g^*(sa)f(a)$, следовательно, $\beta' f(a) = f(ta)g^*(a) = f(ta)g(a)$. Таким образом, отсюда следует $\beta f(a) = \beta' f(a)$.

Пусть теперь $\alpha, \alpha' \in M(c,a)$ - произвольные морфизмы, причем $c \in A$. Снова, ввиду согласованности моноида S с категорией K, существует такой $r \in S$, что $rc = a$. Рассмотрим элемент $(r,q) \in \mathfrak{A}$, где $q(c) = \alpha$. Тогда, ввиду $(s,f)(r,q) = (r,q)(s,f)$, мы имеем $f(rc)q(c) = q(sc)f(c)$, т.е. $f(a)\alpha = q(sc)f(c)$. Пусть $(r,q^*) \in \mathfrak{A}$ такой элемент, что $q^*(c) = \alpha'$ и $q^*(d) = q(d)$ для любого $d \neq c$. Заметим, что $sc \neq c$, в противном случае, пользуясь по лемме 3.1 тем, что $s \in C(S)$, мы бы имели $sa = s(rc) = r(sc) = rc = a$, что противоречит предположению $a \in B$. Следовательно, $q^*(sc) = q(sc)$. Ввиду равенства

$(s,f)(r,q^*) = (r,q^*)(s,f)$ мы имеем $f(rc)q^*(c) = q^*(sc)f(c)$, т.е. $f(a)\alpha' = q^*(sc)f(c) = q(sc)f(c)$. Таким образом, отсюда вытекает $f(a)\alpha = f(a)\alpha'$. Этим исчерпывается доказательство леммы.

Центром $C(L)$ произвольной категории L называется совокупность всех естественных преобразований тождественного функтора Id_L. Таким образом, функция $f : \mathrm{Ob}\, L \to \mathrm{Mor}\, L$ принадлежит центру $C(L)$ тогда и только тогда, когда для каждого $a \in \mathrm{Ob}\, L$, $f(a) \in M(a,a)$ и для любого морфизма $\alpha \in M_L(b,c)$ имеет место следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f(b)"'] & c \arrow[d, "f(c)"] \\ b \arrow[r, "\alpha"'] & c \end{tikzcd}$$

т.е. $\alpha f(b) = f(c)\alpha$.

<u>Лемма 3.3</u>. *Пусть $(s,f) \in C(\mathfrak{A})$ и пусть $D = \{a \in A \mid sa = a\}$. Множество морфизмов $V = \{f(a) \mid a \in D\}$ принадлежит центру полной подкатегории $L \subseteq K$, для которой $\mathrm{Ob}\, L = D$.*

<u>Доказательство</u>. Пусть $\alpha \in M(c,d)$ - произвольный морфизм подкатегории L, т.е. $c,d \in D$ и, значит, $sc = s$; $sd = d$. Ввиду согласованности моноида S с категорией K существует $t \in S$ такой, что $tc = d$. Пусть $(t,g) \in \mathfrak{A}$, где $g(c) = \alpha$. Тогда ввиду $(s,f)(t,g) = (t,g)(s,f)$, выполняется $f(tc)g(c) = g(sc)f(c)$, т.е. $f(d)\alpha = \alpha\, f(c)$, и значит диаграмма

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f(c)"'] & d \arrow[d, "f(d)"] \\ c \arrow[r, "\alpha"'] & d \end{tikzcd}$$

коммутативна. Отсюда вытекает, что множество морфизмов $V = \{f(a) \mid a \in D\}$ является естественным преобразованием тождественного функтора Id_L, т.е. $V \in C(L)$. Лемма доказана.

<u>Лемма 3.4</u>. *Пусть $(s,f) \in C(\mathfrak{A})$, $B = \{a \in A \mid sa \neq a\}$ и $D = \{a \in A \mid sa = a\}$. Для произвольных $b \in B$, $d \in D$ всегда $M(d,b) = \varnothing$.*

<u>Доказательство</u>. Пусть $\alpha \in M(d,b)$ для некоторых $d \in D$, $b \in B$. Тогда из согласованности моноида S с категорией K существует $t \in S$ такой, что $td = b$ по лемме 3.1 $s \in C(S)$ и, следовательно, $st = ts$. Отсюда вытекает

$$sb = s(td) = t(sd) = td = b,$$

что противоречит предположению $b \in B$, т.е. $sb \neq b$. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть* $(s,f) \in C(\mathfrak{A})$, $U = \{f(a) \mid a \in A,\ sa \neq a\}$, $V = \{f(a) \mid a \in A,\ sa = a\}$ *и пусть* L *– полная подкатегория категории* K, *причем* $\mathrm{Ob}\, L = \{a \in A \mid sa = a\}$. *Для любых* $f(a) \in V$, $\alpha \in \mathrm{Mor}\, K \setminus \mathrm{Mor}\, L$ *если определено произведение* $f(a)\alpha$, *то* $f(a)\alpha \in \langle U \rangle$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Mor}\, K \setminus \mathrm{Mor}\, L$, т.е. $\alpha \in M(b,c)$ для некоторых $b, c \in \mathrm{Ob}\, K$, причем из $\alpha \notin \mathrm{Mor}\, L$ следует $sb \neq b$. Так как $f(a) \in V$, т.е. $sa = a$, то из существования произведения $f(a)\alpha$ вытекает $c = a$, т.е. $\alpha \in M(b,a)$. Из согласованности моноида S с категорией K вытекает существование элемента $t \in S$ такого, что $tb = a$. Пусть $(t,g) \in \mathfrak{A}$, где $g(b) = \alpha$. Из равенства $(s,f)(t,g) = (t,g)(s,f)$ вытекает $f(tb)g(b) = g(sb)f(b)$, т.е. $f(a)\alpha = g(sb)f(b)$. Так как $sb \neq b$, то $f(b) \in U$ и по лемме 3.2 $g(sb)f(b)$ принадлежит нулевому идеалу $\langle U \rangle$, порожденному множеством морфизмов U, т.е. $f(a)\alpha \in \langle U \rangle$. Лемма доказана.

Последняя лемма показывает, что если $(s,f) \in C(\mathfrak{A})$, то морфизмы из $V = \{f(a) \mid a \in A,\ sa = a\}$ являются *левыми аннуляторами* для морфизмов из $\mathrm{Mor}\, K \setminus \mathrm{Mor}\, L$ относительно нулевого идеала $\langle U \rangle$, порожденного морфизмами из $U = \{f(a) \mid a \in A,\ sa \neq a\}$. Лемма 3.4 показывает, что морфизмы из V, условно говоря, являются и правыми аннуляторами для морфизмов из $\mathrm{Mor}\, K \setminus \mathrm{Mor}\, L$ относительно $\langle U \rangle$, поскольку соответствующих произведений морфизмов просто не существует.

Теорема 3.6. *Пусть* (s,f) *– некоторый элемент из* $\mathfrak{A} = S \mathrm{wr}\, K$, *где* S *– некоторый моноид,* K *– малая категория. Пусть* $U = \{f(a) \mid a \in A,\ sa \neq a\}$, $V = \{f(a) \mid a \in A,\ sa = a\}$ *– полная подкатегория категории* K, *для которой* $\mathrm{Ob}\, L = \{a \in A \mid sa = a\}$. *Элемент* (s,f) *принадлежит центру* $C(\mathfrak{A})$ *тогда и только тогда, если выполнены следующие условия:*

1) $s \in C(S)$, $V \in C(L)$;

2) *идеал* $\langle U \rangle$, *порожденный множеством морфизмов* U, *является нулевым, причем морфизмы из* V *являются левыми аннуляторами для* $\mathrm{Mor}\, K \setminus \mathrm{Mor}\, L$ *относительно идеала* $\langle U \rangle$.

Доказательство. Необходимость следует из лемм 3.1, 3.2, 3.3, 3.5.

Достаточность. Предположим, что выполнены условия 1) и 2) и пусть (t,g) - произвольный элемент из $\mathfrak{A} = S \,\mathrm{wr}\, K$. Покажем, что $(s,t)(t,g) = (t,g)(s,f)$. Так как из 1) следует $st = ts$, то нам достаточно показать, что $f_t g = g_s f$, т.е. $f(ta)g(a) = g(sa)f(a)$ для любого $a \in A$.

Пусть $a \in A$. Если $sa \ne a$, то $f(a) \in U$ и значит $g(sa)f(a) \in \langle U\rangle$. Покажем, что в этом случае также $f(ta)g(a) \in \langle U\rangle$. Действительно, если $sta \ne ta$, то $f(ta) \in U$ и, следовательно, $f(ta)g(a) \in \langle U\rangle$. В противном случае, если $sta = ta$, то $f(ta) \in V$ и поскольку морфизмы из V есть левые аннуляторы относительно $\langle U\rangle$ для морфизмов из $\mathrm{Mor}\, K \setminus \mathrm{Mor}\, L$ и, очевидно, $g(a) \notin \mathrm{Mor}\, L$, ввиду $sa \ne a$, то $f(ta)g(a) \in \langle U \rangle$. Таким образом, $g(sa)f(a) \in \langle U\rangle$ и $f(ta)g(a) \in \langle U\rangle$. Кроме того, $g(sa)f(a)$, $f(ta)g(a) \in M(a, sta)$ и, поскольку $\langle U\rangle$ есть нулевой идеал, $g(sa)f(a) = f(ta)g(a)$.

Предположим теперь, что $sa = a$, т.е. $f(a) \in V$. Тогда $s(ta) = t(sa) = ta$, т.е. $f(ta) \in V$ и в этом случае $a, ta \in \mathrm{Ob}\, L$. Теперь равенство $f(ta)g(a) = g(sa)f(a)$ вытекает из того, что по предположению $V \in \mathrm{C}(L)$, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{g(a)} & ta \\ {\scriptstyle f(a)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f(ta)} \\ a & \xrightarrow[g(a)]{} & ta \end{array}$$

коммутативна. Теорема доказана.

Категория K называется связной, если для любых $a, b \in \mathrm{Ob}\, K$ выполняется $M(a,b) \ne \varnothing$. Заметим, что если моноид S согласован со связной категорией K, то S действует на $A = \mathrm{Ob}\, K$ транзитивно, т.е. для любых $a, b \in A$ существует $s \in S$ так, что $sa = b$.

Следствие 3.7. *Пусть K - связная малая категория и моноид S согласован с K. Элемент (s,f) принадлежит центру $\mathrm{C}(\mathfrak{A})$ сплетения $\mathfrak{A} = S \,\mathrm{wr}\, K$ тогда и только тогда, когда либо*

1) *$s \in \mathrm{C}(S)$, $sa \ne a$ для каждого $a \in A$ и $\{f(a) \mid a \in A\}$ порождает в K нулевой идеал, либо*

2) *$s \in \mathrm{C}(S)$, $sa = a$ для каждого $a \in A$ и $\{f(a) \mid a \in A\} \in \mathrm{C}(K)$.*

Доказательство. На основании леммы 3.4 либо $A = B = \{a \in A \mid sa \ne a\}$, либо $A = D = \{a \in A \mid sa = a\}$. Все остальное вытекает из теоремы 3.6.

4. Коммутативность. Здесь мы рассмотрим условия коммутативности сплетения $\mathfrak{A} = S \operatorname{wr} K$ моноида S с малой категорией K.

Лемма 4.1. *Если сплетение $\mathfrak{A} = S \operatorname{wr} K$ коммутативно, то S - коммутативный моноид.*

Доказательство очевидным образом вытекает из правила умножения элементов в $\mathfrak{A}$.

Произвольный морфизм $\alpha \in M(a,b)$ в категории K назовем дугой, если $a \neq b$, и соответственно, петлей, если $a = b$.

Лемма 4.2. *Если сплетение $\mathfrak{A} = S \operatorname{wr} K$ коммутативно, то для любого $a \in A = \operatorname{Ob} K$ моноид $\operatorname{Mor}(a,a)$ коммутативен.*

Доказательство. Пусть $\alpha,\beta \in \operatorname{Mor}(a,a)$ для некоторого $a \in A$. Рассмотрим элементы $(1_S, f)$, $(1_S, g) \in \mathfrak{A}$, где $f(a) = \alpha$, $g(a) = \beta$. Тогда из $(1_S,f)(1_S,g) = (1_S,g)(1_S,f)$ вытекает $\alpha\beta = \beta\alpha$. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Пусть сплетение $\mathfrak{A} = S \operatorname{wr} K$ коммутативно. Для произвольной дуги α и произвольной петли ν в категории K из существования произведения $\alpha\nu$ $(\nu\alpha)$ вытекает $\alpha\nu = \alpha$ $(\nu\alpha = \alpha)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in M(a,b)$, $\nu \in M(a,a)$, где a,b - некоторые объекты из $A = \operatorname{Ob} K$. Из согласованности моноида S с категорией K существует $(s,f) \in \mathfrak{A}$ так, что $sa = b \neq a$, $f(a) = \alpha$. Так как $(s,f) \in \mathfrak{A} = C(\mathfrak{A})$, то по лемме 3.2 $f(a)\nu$ принадлежит нулевому идеалу, порожденному множеством морфизмов $U = \{f(c) \mid c \in A,\ sc \neq c\}$. Так как $f(a)$, $f(a)\nu \in \langle U \rangle$ и, кроме того, $f(a), f(a)\nu \in M(a,b)$, то $f(a)\nu = f(a)$, т.е. $\alpha\nu = \alpha$. Аналогично доказывается второе утверждение, т.е. если существует $\nu\alpha$, то $\nu\alpha = \alpha$.

Мы скажем, что в категории K произведение дуг *определяется объектами*, если для любых $a,b,c \in A = \operatorname{Ob} K$ $(a \neq b \neq c)$ и любых морфизмов $\alpha,\beta \in M(a,b)$, $\gamma,\delta \in M(b,c)$ категории K выполняется $\gamma\alpha = \delta\beta$.

Лемма 4.4. *Если сплетение $\mathfrak{A} = S \operatorname{wr} K$ коммутативно, то в категории K произведение дуг определяется объектами.*

Доказательство. Пусть $a,b,c \in A = \operatorname{Ob} K$ $(a \neq b \neq c)$ и пусть $\alpha,\beta \in M(a,b)$, $\gamma,\delta \in M(b,c)$. Из согласованности моноида S с категорией K следует существование таких элементов (s,f), $(t,g) \in \mathfrak{A}$, что $sa = b$, $f(a) = \alpha$, $tb = c$, $g(b) = \delta$. На основании леммы 3.2 имеем $\gamma f(a) = \delta f(a)$, поскольку оба эти морфизмы $\gamma f(a)$, $\delta f(a) \in M(a,c)$ принадлежат одному и тому же нулевому идеалу, т.е. $\gamma\alpha = \delta\alpha$. С другой стороны из той же леммы 3.2 вытекает $g(b)\alpha = g(b)\beta$, поскольку $(t,g) \in C(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$, т.е. $\delta\alpha = \delta\beta$. Таким образом, $\gamma\alpha = \delta\beta$ и лемма доказана.

Теорема 4.5. *Сплетение $\mathfrak{A} = S \operatorname{wr} K$ коммутативно тогда и только тогда, когда S - коммутативный моноид, а категория K удовлетворяет следующим условиям*

1). *произведение петель коммутативно, т.е. для любого $a \in A = \mathrm{Ob}\, K$ моноиды $M(a,a)$ коммутативны*

2) *дуги являются нулями для петель, т.е. для любых $a, b \in A$ $(a \neq b)$ и произвольных $\alpha \in M(a,b)$, $\gamma \in M(a,a)$, $\beta \in M(b,b)$ выполняется $\alpha\gamma = \beta\alpha = \alpha$*

3) *произведение дуг определяется объектами* .

Доказательство. Необходимость следует из лемм 4.1, 4.2, 4.3, 4.4.

Достаточность. Пусть (s,f), (t,g) - произвольные элементы из $\mathfrak{A} = S \operatorname{wr} K$. Покажем, что $(s,f)(t,g) = (t,g)(s,f)$. Из коммутативности S следует $st = ts$, поэтому достаточно показать, что $f(ta)g(a) = g(sa)f(a)$ для любого $a \in A$. Рассмотрим несколько случаев.

1. Если $ta = sa = a$, то равенство $f(a)g(a) = g(a)f(a)$ следует из коммутативности моноида $M(a,a)$.

2. Предположим, что $ta = a$, $sa \neq a$. Тогда $g(a)$ является петлей, а также $g(sa)$ является петлей, поскольку $t(sa) = s(ta) = sa$. Из свойства 2) теперь вытекает

$$f(ta)g(a) = f(a)g(a) = f(a) = g(sa)f(a),$$

поскольку $f(a)$ является, ввиду $sa \neq a$, дугой. В случае $ta \neq a$, $sa = a$ доказательство аналогичное.

3. Предположим, наконец, что $ta \neq a$, $sa \neq a$. В этом случае все морфизмы $f(ta)$, $g(a)$, $g(sa)$, $f(a)$ являются дугами, а поскольку, ввиду условия 3), произведение дуг определяется объектами и

$$f(ta)g(a),\ g(sa)f(a) \in M(a, tsa = sta),$$

то $f(ta)g(a) = g(sa)f(a)$. Теорема доказана.

5. Сплетения моноидов. Пусть S и R - моноиды и пусть A есть левый S-полигон. Через $F(A,R)$ обозначим совокупность всех отображений множества A в множество R . *Сплетением моноидов S и R при помощи левого S-полигона A* называется совокупность пар $S \times F(A,R)$, на которой определена операция умножения следующим образом: для любых $(s,f),(t,g) \in S \times F(A,R)$

$$(s, f)(t, g) = (st, f_t g),$$

где $(f_t g)(a) = f(ta)g(a)$ для любого $a \in A$. Такое сплетение обозначаем через $(S \text{ wr } R| \ A)$.

Конструкция сплетения моноидов с малыми категориями обобщает конструкцию сплетения моноидов. Пусть $(S \text{ wr } R| \ A)$ - сплетение моноидов S и R при помощи левого S-полигона A. Рассмотрим малую категорию K, объекты которой суть свободные циклические правые R-полигоны aR $(a \in A)$, а морфизмы - их R-гомоморфизмы. Как показано в работе [1], если каждому элементу $(s, f) \in (S \text{ wr } R \mid A)$ сопоставить элемент $(s, f^*) \in S \text{ wr } K$ такой, что $f^*(aR) \in \mathrm{Hom}_R(aR, saR)$, причем

$$f^*(aR)(ax) = (sa)f(a)x$$

для любого $x \in R$, то мы получим изоморфизм $(S \text{ wr } R| \ A) \cong$ $\cong S \text{ wr } K$.

Имея в виду этот изоморфизм, сделаем ряд следствий для сплетений моноидов из результатов, изложенных в предыдущих разделах.

Пусть $D = (S \text{ wr } R| \ A)$ - сплетение произвольных моноидов S и R при помощи левого S-полигона A. Пусть K - малая категория, объекты которой суть свободные циклические правые R-полигоны aR $(a \in A)$, а морфизмы - их R-гомоморфизмы.

<u>Лемма 5.1</u>. *В категории K морфизм $\alpha \in M(aR, bR)$ принадлежит нулевому идеалу тогда и только тогда, если $\alpha(a) = b0_K$, где 0_K - двусторонний нуль моноида R.*

<u>Доказательство</u>. Если $\alpha \in M(aR, bR)$ принадлежит нулевому идеалу, то $\alpha = \beta\alpha\gamma$ для любых $\gamma \in M(aR, aR)$, $\beta \in M(bR, bR)$. Пусть x, y - произвольные элементы из R и пусть $\gamma(a) = ax$, $\beta(b) = by$. Тогда, если $\alpha(a) = br$, то

$$br = \alpha(a) = (\beta\alpha\gamma)(a) = \beta\alpha(ax) = \beta(brx) = byrx,$$

т.е. $r = yrx$, поскольку bR - свободный R-полигон. Отсюда следует, что $r = 0_R$ есть нуль моноида R. Обратное утверждение очевидно.

<u>Лемма 5.2</u>. *Морфизм $\alpha \in M(aR, aR)$ является левым аннулятором для морфизмов из $M(bR, aR)$ относительно нулевого идеала тогда и только тогда, если $\alpha(a) = a0_R$.*

<u>Доказательство</u>. Пусть $\alpha(a) = ar$, $r \in R$ и пусть $\beta \in$ $\in M(bR, aR)$ так, что $\beta(b) = a$. По предыдущей лемме $\alpha\beta(b) =$ $a0_R$, т.е. $ar = a0_R$ и значит $r = 0_R$. Обратное утверждение оче-

видно.

Лемма 5.3. Набор морфизмов $\{f^*(aR) \mid a \in A\}$ принадлежит центру $C(K)$ категории K тогда и только тогда, если существует такой $r \in C(R)$, что $f^*(aR) : a \to ar$ для любого $a \in A$.

Доказательство. Из $\{f^*(aR) \mid a \in A\} \in C(K)$ следует, что для любого морфизма $\alpha \in M(aR, bR)$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} aR & \xrightarrow{\alpha} & bR \\ {\scriptstyle f^*(aR)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*(bR)} \\ aR & \xrightarrow{\alpha} & bR \end{array}$$

коммутативна, т.е. $f^*(bR)\alpha = \alpha f^*(aR)$. Пусть $f^*(aR) : a \to au$, $f^*(bR) : b \to bv$, $\alpha(a) = bx$ для некоторых $u, v, x \in R$. Тогда

$$(f^*(bR)\alpha)(a) = f^*(bR)(bx) = bvx\ ,$$

$$(\alpha\, f^*(aR))(a) = \alpha(au) = bxu\ ,$$

т.е. $vx = xu$. Так как α - произвольный морфизм, то x произвольный элемент из R. Отсюда вытекает, что $u = v$ (при $x = 1_R$) и этот элемент принадлежит центру $C(R)$. Обратное утверждение очевидно.

Лемма 5.4. *Если* $(s, f) \in C(\mathfrak{B})$, *то* $f(a) = f(ta)$ *для любых* $a \in A$, $t \in S$.

Доказательство. Пусть $a \in A$, $t \in S$. Если $sa = a$, то $sta = tsa = ta$. Из леммы 3.3 следует, что $f^*(aR)$ и $f^*(taR)$ принадлежат некоторому множеству морфизмов из центра подкатегории категории K и, следовательно, по лемме 5.3 $f(a) = f(ta) \in C(R)$.

Если $sa \neq a$ и $sta \neq a$, то из леммы 3.2 и леммы 5.1 вытекает $f(a) = f(ta) = 0_R$, где 0_R - двусторонний нуль моноида R.

Если $sa \neq a$ и $sta = ta$, то, как и в предыдущем случае, $f(a) = 0_R$, а по лемме 3.5 $f^*(taR)$ есть левый аннулятор для $M(aR, taR)$ и значит по лемме 5.2, $f(ta) = 0_R$. Лемма доказана.

Определим на левом S-полигоне A конгруэнцию ρ следующим образом для любых $a, b \in A$

$$(a, b) \in \rho \leftrightarrow \text{существуют } n \in \mathbb{N},\ c_0 = a,\ c_1, \ldots, c_n = b \in A$$
$$\text{так что } Sc_{i-1} \cap Sc_i \neq \emptyset \quad \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

Нетрудно видеть, что разбиение A по конгруэнции ρ есть разложение S-полигона A на неразложимые подполигоны $A = \bigcup A_j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ для любых $i, j \in J$ $(i \neq j)$.

__Теорема 5.5__ (ср. [3], 2.7, 2.10). *Пусть* $(s,f) \in \mathfrak{B} = (S \text{ wr } R|A)$ *и пусть* $A = \bigcup_{j \in J} A_j$ *разложение левого* S-*полигона* A *на неразложимые подполигоны. Тогда* $(s,f) \in C(\mathfrak{B})$ *в том и только в том случае, если* $s \in C(S)$ *и для каждого* $j \in J$ *существует* $r_j \in C(R)$ *так, что* $f(A_j) = r_j$, *причем если* s *действует на* A_j *нетождественным образом, т.е.* $sa \neq a$ *для некоторого* $a \in A_j$, *то* $r_j = 0_R$ - *двусторонний нуль моноида* R.

__Доказательство. Необходимость__ вытекает из доказательства леммы 5.4 и правила задания конгруэнции ρ, осуществляющей разбиение S-полигона A на неразложимые подполигоны.

__Достаточность__ следует из лемм 5.1, 5.2, 5.3 и теоремы 3.6.

__Теорема 5.6__ ([3], 3.4, 3.6). *Сплетение* $\mathfrak{B} = (S \text{ wr } R \mid A)$ *коммутативно тогда и только тогда, когда* S *и* R - *коммутативные моноиды и* S *действует на* A *тождественно, т.е.* $sa = a$ *для любых* $s \in S$, $a \in A$.

__Доказательство. Достаточность__ очевидна.

__Необходимость__. Если $sa \neq a$ при некоторых $s \in S$, $a \in A$, то в категории K ($\text{Ob } K = \{aR| \ a \in A\}$) имеются морфизмы типа дуги. Тогда по теореме 4.5 для дуг из $M(aR, saR)$ выполняются свойства 2) и 3), что, очевидно, возможно лишь если $|S \cdot S| = 1$, т.е. $S = 1_S$, что противоречит условию $sa \neq a$. Таким образом, $sa = a$ для всех $s \in S$, $a \in A$, т.е. в категории K все морфизмы являются петлями. По свойству 1) теоремы 4.5 $\text{Mor}(aR, aR) \cong R$ является коммутативным моноидом.

Der Autor dankt dem DAAD für finanzielle Unterstützung, dem Fachbereich Mathematik der Universität Oldenburg für die besonders guten Arbeitsmöglichkeiten und Professor Ulrich Knauer für nützliche Beratungen.

Литература

1. Ф л я й ш е р В. Г. О сплетениях моноидов с категориями. Изв. АН СССР, 1986, т. 35, N 3, 237-243.

2. H u n t e r, R. P., Some results on wreath products of semigroups, Bull. Soc. Math. Belg., 18, 1966, 3-16.

3. K n a u e r, U., M i k h a l e v, A. Center and commutativity for wreath products of ordered semigroups, Arch. Math., 44, 1985, 397-402.

4. M o o r s, R., Note sur le "wreath product" de deux demigroups, Bull. Soc. Roy. Sci. Liege, 38, 1969, 116-124.

Поступило
12 XII 1991

CENTER AND COMMUTATIVITY FOR WREATH PRODUCTS OF MONOIDS WITH CATEGORIES

V.Fleischer

S u m m a r y

In this paper the center of the wreath product of a monoid S with a small category K is characterized. Necessary and sufficient conditions for the commutativity for such wreath products are given. As corollaries we obtain the characterizations of the center and commutativity for wreath products of monoids established by U.Knauer and A.Mikhalev in [3].

MONOIDI JA KATEGOORIA PÕIMIKU TSENTER JA KOMMUTATIIVSUS

V.Fleischer

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis antakse iseloomustus monoidi ja väikese kategooria põimiku tsentrile. On leitud tarvilikud ja piisavad tingimused selliste põimikute kommuteeruvuseks. Neist tulemustest järelduvad varem U.Knaueri ja A.Mihhaljovi [3] poolt saadud tsentri iseloomustus ja kommuteeruvuse kriteerium monoidide põimiku jaoks.

CONTENTS