



A. LÕHMUS

*Arvutus-
praktikumí
juhend*

TALLINN 1968

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT
Matemaatika kateeder

A. Lõhmus

ARVUTUSPRAKTIKUMI JUHEND

Tallinn
1968

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра математики

А. Лыхмус

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ

На эстонском языке

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

72571

Vastutav toimetaja A. Jaanson

Trükkimisele antud 8.II 1968. Paber 60x84/16
Trükipg. 3,75. Tingpg. 3,39. Tiraaz 1500
TPI rotaprint. Tallinn, Pikk jalg 14
Tell.66 Hind 10 kop.

Sis

SISSEJUHATUSEKS

Arvutuspraktikum koosneb neljast laboratoorsest tööst; milledes vaadeldakse tulevastele inseneridele vajalikke matemaatilise analüüsi arvutuslikke ja ligikaudseid meetodeid ning nende kasutamist. Et enamik arvutuslikust tööst tehakse ligikaudsete arvudega ligikaudsete valemite põhjal, tuleb kõikide laboratoorsete tööde tegemisel silmas pidada ligikaudse arvutamise ja vea hindamise reegleid.

Toome ligikaudsete arvudega sooritatavate tehete tulemuste vea ja relatiivse vea ülemmäärad tabelina:

Tehe	Tulemuse vea ülemmäär	Relatiivse vea ülemmäär ($\delta_u = \frac{\Delta u}{ u }$)
$u = a + b + c$	$\Delta u = \Delta a + \Delta b + \Delta c$ ^x	$\delta_u = \frac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{a + b + c}$
$u = a - b$	$\Delta u = \Delta a + \Delta b$	$\delta_u = \frac{\Delta a + \Delta b}{ a - b }$
$u = a \cdot b$	$\Delta u = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a$	$\delta_u = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
$u = \frac{a}{b}$	$\Delta u = \frac{b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b}{b^2}$	$\delta_u = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
$u = a^n$	$\Delta u = n \cdot a^{n-1} \cdot \Delta a$	$\delta_u = n \cdot \frac{\Delta a}{a}$
$u = \sqrt[n]{a}$	$\Delta u = \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} \cdot \Delta a$	$\delta_u = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta a}{a}$
$u = \sin a$	$\Delta u = \cos a \cdot \Delta a$	$\delta_u = \cot a \cdot \Delta a$

^x Arvutuste seisukohalt kasulikum ülemmäär on alla kriipstatud.

Tehe	Tulemuse vea ülem- määr	Relatiivse vea ülemmäär ($\delta_u = \frac{\Delta u}{ u }$)
$u = \cos a$	$\Delta u = \sin a \cdot \Delta a$	$\delta_u = \tan a \cdot \Delta a$
$u = \tan a$	$\Delta u = \frac{\Delta a}{\cos^2 a}$	$\delta_u = \frac{2 \cdot \Delta a}{\sin 2a}$
$u = \cot a$	$\Delta u = \frac{\Delta a}{\sin^2 a}$	$\delta_u = \frac{2 \cdot \Delta a}{ \sin 2a }$
$u = \frac{1}{a}$	$\Delta u = \frac{\Delta a}{a^2}$	$\delta_u = \frac{\Delta a}{a} = \delta_a$
$u = \ln a$	$\Delta u = \frac{\Delta a}{a} = \delta_a$	$\delta_u = \frac{\Delta a}{a \ln a }$
$u = \log a$	$\Delta u = 0,4343 \cdot \delta_a$	$\delta_u = \frac{0,4343 \cdot \Delta a}{a \log a }$
$u = n^a$	$\Delta u = n^a \ln n \cdot \Delta a$	$\delta_u = \ln n \cdot \Delta a$
$u = e^a$	$\Delta u = e^a \cdot \Delta a$	$\delta_u = \Delta a$

Üldiselt mistahes funktsiooni $f(x)$ vea ja relatiivse vea ülemmäärad arvutatakse järgmiselt:

$$\Delta f(x) \approx df(x) = |f'(x)| \cdot \Delta x$$

ja

$$\delta_{f(x)} = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot \Delta x.$$

Tabelis toodud tehete lähteandmete vigade ülemmäärade ($\Delta a, \Delta b, \Delta c$) hindamine on üldiselt keerulisem küsimus, millega tegeleb vigade teooria. Et meid huvitab edaspidistes töodes põhiliselt arvutustulemuste viga vastavalt lähteandmete etteantud veale, siis lähteandmete vea määramist me siin ei vaatle.

Vaadeldes tulemuste vea ja relatiivse vea ülemmäärade avaldisi, näeme, et summa vea ülemmäär (samuti vahe vea ülem-

määr) võrdub liidetavate vigade ülemäärade summaga (võrdub vähendatava ja lahutatava vigade ülemäärade summaga). Korruptiivse relatiivse vea ülemäär võrdub tegurite ning jagatise relatiivse vea ülemäär jagatava ja jagaja relatiivsete vigade ülemäärade summaga.

Siit järelduvad ligikaudsete arvude ümardamise reeglid:

1. Ligikaudsete arvude liitmisel ja lahutamisel ümardame nad kuni kümnendkohani, mis on ühe võrra madalamat järku vähima täpsusega antud arvu viimasest kohast. Tulemust ümardame ühe koha võrra.

Näiteks	2,923	asemel liidame	2,92
	15,4671		15,47
	<u>6,1</u>		<u>6,1</u>
			24,49 = 24,5.

Kui liitmine (lahutamine) on aga vahepealne tehe, siis tulemust ei ümardata (jääb näiteks 24,49).

2. Ligikaudsete arvude korrutamisel või jagamisel jäetakse korrutises või jagatises nii palju kehtivaid numbreid, kui palju neid on kõige väiksema kehtivate numbrite arvuga arvus.

Näiteks $4270 \cdot 23 = 98 \cdot 10^3$ (mitte 98210).

Vahepealse tehte korral aga säilitatakse üks kehtiv number rohkem (nii tuleks kirjutada $982 \cdot 10^2$).

3. Astendamisel ja juurimisel jäetakse tulemusel nii palju kehtivaid numbreid, kui palju neid on astendatavas või juuritavas.

Analoogilisi järeldusi saab teha mistahes tehte korral.

Ümardamisel viimane säilitatav number suurendatakse ühe võrra, kui temale järgnev ärajäetav number on 5 või suurem (välja arvatud juhtum, kui ärajäetav 5 on ise saadud ümardamise teel). Viimane säilitatav number jääb muutmatuks, kui ärajäetav number on väiksem kui 5. See on nn. standardümardamine ja sellise ümardamise tulemusena saadud ligikaudse arvu vea ülemäär võrdub esimese ärajäetud kümnendkoha poole ühikuga (s.t. kirjutis 65 on samaväärne kirjutisega $65 \pm 0,5$). Saadud arvu kõiki kohti nimetatakse õigeteks kohtadeks.

Vea ja relatiivse vea ülemäärad ümardatakse erandina

alati ülespoole (seega, kui arvutuste tulemuseks saadi $\Delta a = 0,0421$ ja $a = 17,62$, kirjutatakse $a = 17,62 \pm 0,05$).

suur

I - p e a t ü k k

FUNKTSIOONIDE TABELITE KOOSTAMINE JA KASUTAMINE

Paljude arvutusmatemaatika ülesannete lahendamisel tuleb koostada funktsioonide tabelid või kasutada juba olemasolevaid. Siin piirdume algteadmistega ühe muutuja funktsiooni tabeli kohta.

§1. Ühe muutuja funktsiooni tabel

ja selle kasutamine

1. Tabeli koostis. Funktsiooni

$f(x)$

tabel koostatakse harilikult nii, et tabelis esinevad argumenti väärtused erinevad teineteisest konstantse suuruse h võrra:

x	y
x_0	$y_0 = f(x_0)$
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = f(x_1)$
$x_2 = x_1 + h$	$y_2 = f(x_2)$
...	...
$x_n = x_{n-1} + h$	$y_n = f(x_n)$
...	...

Positiivset arvu h (tabeli kahe teineteisele järgneva argumentiväärtuse vahet) nimetatakse tabeli sammuks. Suure ulatusega tabelid jaotatakse sageli osadeks; iga osa piirides on tabeli samm konstantne, kuid eri osades võib seejuures olla erinev samm.

Tabeli täpsus määratakse funktsiooni tabeliväärtuste õi-
gete kohtade arvuga. Näiteks "Пятизначные математические
таблицы" Б.И.Сегала и К.А.Семендяева annab funktsiooni vää-
rtused viie õige kohaga. Seejuures on harilikult tabeli igal
leheküljel funktsiooni kõik väärtused ümardatud ühesuguse jär-
guni. Seda järku nimetame funktsiooni tabeliväärtuste viima-
seks järguks (tabeli antud osa korral). Näiteks toome funkt-
siooni e^x tabeli kaks lõiku (eespool mainitud kogumikust):

x	e^x	x	e^x
1,000	2,7183 27	6,000	403,43 40
01	7210 27	01	403,83 41
02	7237 27	02	404,24 40
03	7264 28	03	404,64 41
04	7292 27	04	405,05 40
1,005	2,7319 27	6,005	405,45 41
06	7346 28	06	405,86 40
07	7374 27	07	406,26 41
08	7401 28	08	406,67 41
09	7429 27	09	407,08 40
1,010	2,7456	6,010	407,48

Siin samm $h = 0,001$; kõik funktsiooni väärtuste viis
kohta on õiged. Esimeses lõigus on funktsiooni tabeliväärtus-
te viimaseks järguks neljas kümnendkoht (10^{-4}) ja teises lõi-
gus teine (10^{-2}).

Ridade vahele on peene kirjaga märgitud funktsiooni kahe
teineteisele järgneva väärtuse vahe, mis on antud viimase
järgu ühikutes. Seda tabelivahet (diferentsi) tähistatakse ha-
rilikult Δy_n :

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = f(x_{n+1}) - f(x_n).$$

Hiljem vaatleme tabelivaheleid lähemalt.

Märgime veel, et eri tabelitel on ka erinevad iseärasused, millede kohta leidub alati andmeid tabelite kasutamisejuhendites. Nende andmetega tuleb tingimata tutvuda enne tabelite kasutamist.

2. Lineaarne interpolatsioon. Lineaarne interpolatsioon seisneb antud funktsiooni $f(x)$ asendamises mistahes tabeli lõigul $[x_0, x_1]$ lineaarse funktsiooniga y , mis on määratud võrrandiga

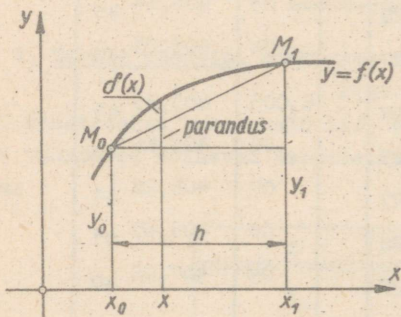
$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad (1.1)$$

kus $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$.

Geomeetriliselt

tähendab see joone

$y = f(x)$ punktide M_0 ja M_1 vahel asetseva kaare asendamist kõõluga M_0M_1 (vt. joon. 1). Analüütiliselt tähendab see aga seda, et suuruse y muutus lõigul $[x_0, x_1]$ loetakse võrdeliseks suuruse x muutusega, nagu nähtub võrrandist (1.1).



Joon. 1

Lineaarne interpolatsioon võimaldab

arvutada ligikaudu funktsiooni väärtusi argumenti vahepealseste väärtuste jaoks, mida ei ole tabelis. Selleks lahendatakse võrrand (1.1) y suhtes

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta y_0, \quad (1.2)$$

kus $h = x_1 - x_0$ on tabeli samm ja $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ on funktsiooni tabelivahe. Praktiliselt kasutatakse valemit (1.2) kujul

$$y = y_0 + \text{parandus},$$

kus $\text{parandus} = \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta y_0$. Kuna x kuulub vahemikku (x_0, x_1) ,

siis $0 < \frac{x - x_0}{h} < 1$, nii et parandus moodustab vahest Δy_0 pärisosa.

See parandus tuleb alati kirjutada funktsiooni tabeliväärtuste viimase järgu ühikutes.

N ä i d e. Arvutada $e^{1,00233}$ funktsiooni e^x abil Segal-Semendjajevi tabelite järgi (vt. lk.48).

Siin $x = 1,00233$; $x_0 = 1,002$; $\frac{x - x_0}{h} = 0,33$; $\Delta y_0 = 27 \cdot 10^{-4}$.

Parandus

$$0,33 \cdot 27 \cdot 10^{-4} = 8,9 \cdot 10^{-4}.$$

Paranduse ümardame ja lisame ta $y_0 = e^{x_0}$ tabeliväärtusele.

Seega

$$\begin{aligned} y &= e^{1,00233} = 2,7237 \\ &\quad + \quad \quad \quad 9 \\ &= 2,7246. \end{aligned}$$

Kui tabelivahe Δy_0 on kõige rohkem kolmekohaline, siis on parandus sobiv leida võrdeliste osade tabeli järgi, mis harilikult lisatakse tabelitele, või arvutuslükatiga.

Võrrand (1.1) võimaldab leida ka argumendi x väärtusi funktsiooni $f(x)$ vahepealsete väärtuste korral, s.t. leida pöördfunktsiooni vahepealseid väärtusi (eeldades, et funktsioon vaadeldavas vahemikus on monotoonne). Selleks lahendame võrrandi (1.1) x suhtes:

$$x = x_0 + \frac{y - y_0}{\Delta y_0} h. \quad (1.3)$$

N ä i d e. Arvutada $\ln 406$ Segal-Semendjajevi tabelite järgi.

Kuna nimetatud tabelite hulgas ei ole naturaalogaritmi-de tabelit, siis kasutame pöördfunktsiooni e^x tabelit (vt. lk.248). Tähistame $\ln 406 = x$, siis $e^x = 406 = y$. Lähim tabeliväärtus on $y_0 = 405,86$ ja

$$y - y_0 = 0,14.$$

Paranduse arvutame valemist (1.3)

$$\frac{y - y_0}{\Delta y_0} h = \frac{0,14}{0,40} \cdot 0,001 = 0,35 \cdot 10^{-3} = 35 \cdot 10^{-5}$$

ja lisame selle argumendi x_0 väärtusele. Nii

$$\begin{aligned} x &= \ln 406 = 6,006 \\ &\quad + \quad 35 \\ &= 6,00635. \end{aligned}$$

M ä r k u s. Funktsiooni kahest tabeliväärtusest, mille vahel asetseb antud väärtus y , on algväärtusena y_0 sobiv võtta see, mis vastab argumendi väiksemale väärtusele. Kui tabeli samm on kujuga $h = 10^{-k}$, siis võib paranduse lihtsalt "lisada" väärtusele x_0 (vrd. viimane näide). See järeldeb sellest, et suhe $\frac{y - y_0}{\Delta y_0}$ on lihtmurd, mille korrutamine tabeli sammuga $h = 10^{-k}$ taandub koma nihutamisele k ühiku võrra.

Funktsiooni $f(x)$ asendamisel lineaarse funktsiooniga $y_0 + \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta y_0$ teeme vea $\Delta f(x)$, mis avaldub järgmiselt (joon. 1):

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x) - \left(y_0 + \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta y_0 \right) = \\ &= f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} [f(x_1) - f(x_0)]. \end{aligned}$$

Peale mõningaid teisendusi saame vea jaoks hinnangu lõigul $[x_0, x_1]$:

$$\Delta f(x) \leq \frac{M_2 h^2}{8}, \quad (1.4)$$

kus M_2 on $|f''(x)|$ suurim väärtus lõigul $[x_0, x_1]$ ja h - tabeli samm.

Vaatleme veel lineaarse interpolatsiooni lubatavust. Funktsiooni tabeli kohta öeldakse, et seal on lineaarne interpolatsioon lubatav kui lineaarse interpolatsiooni viga ei ületa funktsiooni tabeliväärtuste viimase järgu poolt ühikut.

Kui funktsiooni tabel sisaldab m õiget kümnendkohta, siis on (1.4) põhjal interpolatsiooni lubatavuseks piisav, et

$$\frac{M_2 h^2}{8} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-m} \quad \text{ehk} \quad M_2 h^2 \leq 4 \cdot 10^{-m}. \quad (1.5)$$

Siin eeldatakse, et on teada M_2 , mille leidmine aga praktikas sageli on raske.

Eeldades, et funktsiooni teine tuletis $f''(x)$ on monotoonne, võib tõestada: tabelis on lineaarne interpolatsioon lubatav, kui kõrvuti asuvad tabelivahed ei erine rohkem kui 4-ühiku võrra viimases järgus.

Mõlemas lk. 9 toodud näites funktsiooni e^x tabelite kohta rahuldavad tabelivahed nimetatud tingimust, kuna funktsioon e^x ja kõik ta tuletised on monotoonsed. Seetõttu on lineaarne interpolatsioon lubatav. Mittemonotoonsete funktsioonide korral tuleb nimetatud tunnust kasutada ettevaatlikult. Näiteks koostades tabelit funktsiooni $f(x) = H \sin \pi x$ jaoks punktides $x_n = n = 0, 1, 2, \dots$, saame tabeli ainult nullidest ja lineaarne interpolatsioon annab igas punktis nulli. Samal ajal aga funktsiooni tegelikud väärtused võnguvad vahemikus $-H$ kuni $+H$.

3. Vahede tabeli kasutamine kontrolliks.

Kui funktsiooni tabelivahed,

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \dots, \quad \Delta y_n = y_{n+1} - y_n, \quad \dots$$

ei osutu konstantseteks (ümardamisvigade piirides), siis on otstarbekohane tuua sisse teist järku vahed

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \quad \dots, \quad \Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n, \dots$$

Nii näiteks funktsiooni e^x tabeli korral sammuga $h = 0,02$ lõigul $[1,0; 1,1]$ saame

x	$e^x = y$	Vahed	
		Δy	$\Delta^2 y$
1,00	2,7183		
02	2,7732	549	
04	2,8292	560	11
06	2,8864	572	12
08	2,9447	583	11
1,10	3,0042	595	12

Vahede kirjutusviis on näha tabelist.

Vahede moodustamist võib jätkata. Üldiselt avaldub k-järku vahe kujul

$$\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n.$$

M ä r k u s. Lihtne on näha, et vahe järgu kasvamisega kasvab kiiresti ka nende ümardamisvigade ülemäär. Kui funktsiooniväärtuste y_0, y_1, \dots ümardamisvea ülemäär on $0,5 \cdot 10^{-m}$, siis esimest järku vahede $\Delta y_0, \Delta y_1, \dots$ vea ülemäär on juba $1 \cdot 10^{-m}$; teist järku vahedel aga $2 \cdot 10^{-m}$ jne. Kui veel arvestada, et vahede järgu kasvamisega nende absoluutväärtused harilikult kahanevad, siis on selge, et vahede arvutamise täpsus kahaneb kiiresti nende järgu kasvamisega (kasvab relatiivse vea ülemäär).

Paljudel juhtudel jõuame kõrgemat järku vahede arvutamisel veeruni, kus vahede erinevus ei ületa nende ümardamisvigade ülemäära. Selliseid vahesid nimetatakse praktiliselt konstantseteks. Niisugusel juhul kõrgemat järku vahesid ei arvutata. Kirjutades välja vahed kuni praktiliselt konstantsete vahede veeruni (incl.), saame nn. korrapärase vahede tabeli, millel on suur tähtsus tabelite kontrollimisel.

Kui vahede tabel on kõikjal korrapärane, välja arvatud üks osa, siis see viitab võimalikule veale tabelis. Vea kiireks avastamiseks on kasulik teada, kuidas üksik viga suurega ε levib vahede tabelis:

y	V a h e d			
	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
...			...	
y_{n-2}		$\Delta^2 y_{n-3}$		($+\varepsilon$)
	Δy_{n-2}		($+\varepsilon$)	
y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2+\varepsilon}$		($-\varepsilon$)
	$\Delta y_{n-1+\varepsilon}$		($-\varepsilon$)	

y	Vahed			
	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$y_n + \varepsilon$		$\Delta^2 y_{n-1} - 2\varepsilon$		$(+6\varepsilon)$
	$\Delta y_n - \varepsilon$		$(+3\varepsilon)$	
y_{n+1}		$\Delta^2 y_n + \varepsilon$		(-4ε)
	Δy_{n+1}		$(-\varepsilon)$	
y_{n+2}		$\Delta^2 y_{n+1}$		$(+\varepsilon)$
	

N ä i d e. Vaatleme tabelit:

n	y	Vahed:	
		Δy	$\Delta^2 y$
0	3,241	-103	
1	3,138	-91	12
2	3,047	-78	13
3	2,969	-65	13
4	2,904	-62	3
5	2,842	-26	36
6	2,816	-22	4
7	2,794	-8	14
8	2,786	+7	15
9	2,793		

Teist järku vahede ühtlase muutumise ebakorrapärasus riidades 4, 5, 6 viitab y_5 võimalikule veale. y_5 suurendamisel $11 \cdot 10^{-3}$ võrra saame korrapärase vahede tabeli:

4	2,904	-51	14
5	2,853	-37	14
6	2,816		15

Loomulikult on tarvis kontrollida y_5 väärtust vahetult, kuna tabeli korrapärasuse rikkumine võib olla tingitud funktsiooni omapärasustest. Üldiselt mitte igal funktsiooni tabelil ei ole korrapärase vahede tabelit.

M ä r k u s. Vahede tabeli korrapärasuse rikkumine ük-
sikus osas võib olla tingitud ka veast vahede arvutamisel.
Seetõttu tuleb kontrollida vahede arvutamise õigsust. Seda
võib teha nende vahetu summeerimise teel. Näiteks nii:

$$y_0 + (\Delta y_0 + \Delta y_1 + \dots + \Delta y_{n-1}) = y_n,$$

$$\Delta y_0 + (\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \dots + \Delta^2 y_{n-1}) = \Delta y_n,$$

.

§2. Funktsiooni tabuleerimise skeem
=====

Enne kui asuda vahetult funktsiooni väärtuste arvutami-
se juurde, on tarvis koostada arvutusprogramm, kindlaks mää-
rata operatsioonide järjekord ja vahepealsete tulemuste mär-
kimisviis.

Funktsiooni $y = f(x)$ väärtuste arvutamine antud valemi
järgi jaotatakse reaks elementaartehteks, mille all mõista-
me liitmist, lahutamist, korrutamist, jagamist või arvu leid-
mist tabelist (või mõõteriista skaalalt). Elementaartehte
tulemused kirjutatakse vastavate veergude kaupa arvutusplan-
ki. Kõik arvutused tehakse veergude kaupa, kirjutades veergu
vastava tehte tulemused kõigi argumenti väärtuste korral.
Sõltuvalt kasutatavatest arvutusvahenditest võib ühendada rea
elementaartehteid ilma vahepealseid tulemusi üles märkimata.

Näitena vaatleme funktsiooni

$$\frac{\alpha x^2 + \beta}{\gamma x + \sqrt{x}}$$

tabeli koostamiseks vajaliku arvutusplangi kuju, sõltuvalt
kasutatavatest arvutusvahenditest.

Kasutades arvutamiseks ainult arvutuslükatit, võib soo-
vitada arvutusplanki kujul:

n	x	x^2	αx^2	$\alpha x^2 + \beta$	$f x$	\sqrt{x}	$f x + \sqrt{x}$	$y = \frac{\alpha x^2 + \beta}{f x + \sqrt{x}}$	V a h e d		
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	Δy	$\Delta^2 y$...
0											
1											
2											
3											
...											

(veerud nummerdatakse viidete hõlbustamiseks, näiteks

$$(7) = (5) + (6) \text{ või } (8) = \frac{(4)}{(7)}).$$

Sama funktsiooni tabeli koostamisel arvutusmasina ja ruutude ning ruutjuurte tabeli abil võib arvutusplangil ära jätta veerud (2), (3), (5), (6), kui x^2 ja \sqrt{x} väärtused leitakse vahetult tabelist ilma interpoleerimata, ning arvutusplank oleks järgmine:

n	x	$\alpha x^2 + \beta$	$f x + \sqrt{x}$	$y = \frac{\alpha x^2 + \beta}{f x + \sqrt{x}}$	V a h e d		
					Δy	$\Delta^2 y$...
0							
1							
2							
3							
...							

Arvutusplangil peavad olema veerud tabelivahede jaoks, mida kasutatakse arvutuste kontrollimiseks ja samuti mõningate tabuleerimisega seotud ülesannete lahendamiseks (näiteks rüsimus lineaarse interpolatsiooni lubatavusest).

Üheks tähtsamaks küsimuseks on funktsiooni arvutatavate väärtuste nõutava täpsuse kindlustamine. Algul võib teha "ligikaudse arvutuse" vähete kohtade arvuga (vt. näidistööd)

ja siis lahendada küsimus kohtade arvust, mis on nõutav arvutuste igal etapil.

Koostatud tabelit kontrollitakse vahede tabeli järgi või graafiliselt. Kui vahede tabel ei ole teatud vahemikus korrapärane või kui üksikute punktide asukoht graafikus äratub kahtlust, siis tuleb funktsiooni vastavad väärtused arvutada uuesti (või parandada või selgitada vea põhjus).

§3. Laboratoorne töö nr. 1

Funktsiooni tabuleerimine antud valemi

järgi antud täpsusega

Töö koosneb kahest osast.

1. Esimene osa - funktsiooni tabuleerimine arvutuslükatiga (antud vahemikus, antud sammuga) - kujutab endast eeltood ligikaudse arvutuse näol vähete kohtade arvuga, et määrata arvutusetappidel vajalik täpsus funktsiooni väärtuste saamiseks antud täpsusega.

Ülesanne. Koostada arvutuslükati abil funktsiooni $\frac{\alpha x^2 + \beta}{\int x + \sqrt{x}}$ tabel lõigul $[a; b]$ sammuga h ja konstrueerida funktsiooni graafik. Saadud väärtuste õigsust kontrollida graafiliselt.

Ülesande lahendamise juhend

1°. Tutvuda ülesandega, esitada kogu arvutus elementaar-tehete koguna.

2°. Valmistada arvutusplank, eraldades veeru iga elementaartehte jaoks. Täita argumendi x väärtuste veerg ($x_n = a + nh$)

3°. Tutvuda arvutamisega arvutuslükatil.

4°. Viia läbi kogu arvutus veergude kaupa, kasutades kõiki võimalusi arvutuse kiirendamiseks. Kõikides tulemustes kirjutada välja kõik arvutuslükatiga saadavad kohad.

5^o. Lõpptulemused ümardada ühesuguse järguni ja koostada vahepe tabel.

6^o. Võimaliku arvutusvea leidmiseks konstrueerida leitud punktide järgi antud funktsiooni graafik, ühendades punktid sileda joonega.

2. Teine osa - funktsiooni graafiline tabuleerimine antud täpsusega nii tiheda sammuga, et lineaarne interpolatsioon on lubatud. Argumendi samm määratakse esimeses osas saadud tulemuste järgi. Graafiku konstrueerimiseks arvutada funktsiooni väärtused kuue kuni kaheksa sobivalt valitud argumendi väärtuse x_i korral.

Ü l e s a n n e. Konstrueerida graafik esimeses osas antud funktsiooni jaoks lõigul $[c, d]$ argumendi niisuguse sammuga, et lineaarne interpolatsioon oleks lubatud ja et graafikust saaks lugeda funktsiooni väärtusi neljakohalise täpsusega.

Selline tabeli asendamine graafikuga on inseneripraktika seisukohalt väga oluline, kuna hoiab tunduvalt kokku arvutustele kuluvat aega, ei vähenda aga seejuures leitavate funktsiooni väärtuste täpsust, kui joonis (graafik) on tehtud vajaliku täpsusega. Pealegi on graafikust võimalik lugeda antud vahemikust mistahes argumendi väärtusele vastavat funktsiooni väärtust ilma interpoleerimata.

Ülesande lahendamise juhend

1^o. Määrata funktsiooni $\frac{ax^2 + \beta}{\sqrt{x}}$ tarvis lõigul $[c, d]$

niisugune samm, et lineaarne interpolatsioon oleks lubatud. Selleks kasutada teist järku vahesid, mis on töö esimese osa arvutustabelis, ja arvestada, et tabeli sammu vähenemisel λ korda vähenevad teised vahed ligikaudu λ^2 korda. Suuruse leidmiseks valida esimese osa tabeli vahemikust, mis hõlmab lõigu $[c, d]$, suurim teist järku vahe. Daks sammuks võtta arvutatule lähedane "ümargune" arv (ümardatud ülespoole).

2^o. Tutvuda tarvisminevate tabelite struktuuriga ja arvutamiseiga arvutusmasinal.

3°. Määrata igal arvutusetalpil säilitatav õigete kohtade arv, et kindlustada leitavate funktsiooni väärtuste neli õiget kohta. Määrata tabelist võetavate x^2 ja \sqrt{x} väärtuste kohtade arv.

4°. Arvutada veergude kaupa. Ümardada y lõppväärtused nelja kohani.

5°. Selliselt leitud kuus kuni kaheksa punkti $(x_1; y_1)$ kanda teljestikku millimeetripaberil ja ühendada sileda joonega. Teljestiku ühikuks võtta kaks kuni kümme deetsimeetrit. Joonis teha äärmiselt täpne.

6°. Töö vormistada kirjapoogna formaadis vastavalt nõutud vormile (kehtib kõigi nelja töö kohta), lisades millimeetripaberil saadud graafiku.

7°. Omandada vilumus saadud graafikust mistahes antud lõiku $[c, d]$ kuuluvale argumendi väärtusele vastava funktsiooni väärtuse leidmiseks küllaldase õigete kohtade arvuga.

Töö tegemise põhjalikumaks selgitamiseks ja vormistamise hõlbustamiseks antakse igale tööle vastav näidistöö. Töö esimesele osale vastav graafik kanda töö formaadis millimeetripaberile.

N ä i d i s
TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT
Matemaatika laboratoorium

L a b o r a t o o r n e t ö ö n r . 1

FUNKTSIOONI TABULEERIMINE ANTUD VALEMI JÄRGI
ANTUD TÄPSUSEGA

Rühm
Üliõpilane
Kontrollija
Kuupäev

1. o s a

Ü l e s a n n e. Koostada funktsiooni

$$\frac{0,382x^2 + 5}{0,4385x + \sqrt{x}}$$

tabel lõigul $[1,06; 8,26]$ sammuga $h = 0,72$ ja konstrueerida selle funktsiooni graafik. Arvutada arvutuslükatiga ja funktsiooni lõppväärtused anda täpsusega 10^{-2} .

Lahendus

n	x	x ²	0,382x ² + + 5	0,4385x	√x	0,4385x + + √x	y	Vahed	
								y	2 _y
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)=(4)+ + (5)	(7)= $\frac{(3)}{(6)}$	(8)	(9)
0	1,06	1,12	5,43	0,465	1,030	1,495	3,63	-69	
1	1,78	3,17	6,21	0,781	1,33	2,11	2,94	-18	51
2	2,50	6,25	7,39	1,10	1,58	2,68	2,76	4	22
3	3,22	10,4	8,97	1,41	1,79	3,20	2,80	14	10
4	3,94	15,5	10,92	1,73	1,98	3,71	2,94	22	8
5	4,66	21,7	13,29	2,04	2,16	4,20	3,16	27	5
6	5,38	28,9	16,04	2,36	2,32	4,68	3,43	31	4
7	6,10	37,2	19,2	2,67	2,47	5,14	3,74	33	2
8	6,82	46,5	22,8	2,99	2,61	5,60	4,07	34	1
9	7,54	56,9	26,7	3,31	2,75	6,06	4,41	38	4
10	8,26	68,2	31,1	3,62	2,87	6,49	4,79		

2. o s a

Ü l e s a n n e. Konstrueerida funktsiooni

$$\frac{0,382x^2 + 5}{0,4385x + \sqrt{x}}$$

graafik lõigul $[3; 6]$ niisuguse sammuga, et lineaarne interpolatsioon oleks lubatud ja graafikust saaks lugeda funktsiooni väärtusi nelja õige kohaga.

Lahendus. Neljakohalise täpsuse saamiseks tuleb antud funktsiooni väärtused ümardada kuni 10^{-3} . Siinjuures teist järku tabelivahed tuleb viia kuni $4 \cdot 10^{-3}$ ja kuna I osa ta-

belis lõigul $[2,50; 6,10]$ teist järku vahed saavutavad suuruse $10 \cdot 10^{-2}$, siis tuleb neid vähendada $\lambda^2 = \frac{10 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} = 25$ korda. Selleks peab tabeli samm vähenema $\sqrt{25} = 5$ korda. Et

$$\frac{h}{5} = \frac{0,72}{5} = 0,14, \text{ siis valime uueks sammuks } h_1 = 0,1.$$

Arvutame funktsiooni väärtused y_n vastavalt kuuete sobivalt valitud argumenti väärtusele x_n . Arvutused esitame tabelina ($x_n = x_0 + nh_1$):

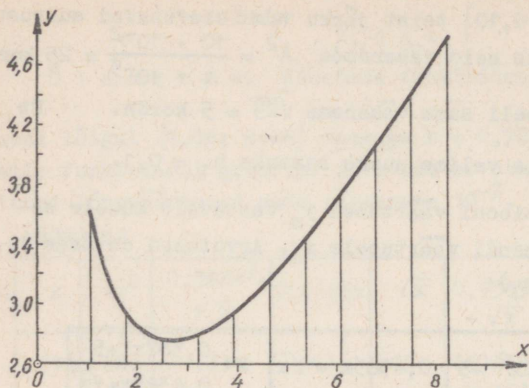
n	x	$0,382x^2 + 5$	$0,4385x + \sqrt{x}$	$y = \frac{0,382x^2 + 5}{0,4385x + \sqrt{x}}$
0	3,0	8,4380	3,0476	2,769
2	3,2	8,9117	3,1921	2,792
5	3,5	9,6795	3,4056	2,842
10	4,0	11,1120	3,7540	2,960
20	5,0	14,5500	4,4286	3,285
30	6,0	18,7520	5,0805	3,691

Lisa: töö formaadis joonis esimese osa tarvis ja vajaliku suurusega täpsusjoonis millimeetripaberil töö teise osa tarvis.

Leitud kuus punkti kanneme teljestikku millimeetripaberil, kusjuures ühikuke võtame kaks detsimeetrit. Punktid ühendame sileda joonega (kasutades lekaali).

Saadud graafikust loeme näiteks, et $y_1(3,1) = 2,779$, $y_7(3,7) = 2,885$, $y_{24}(5,4) = 3,440$ jne.

M ä r k u s e d. Esimeses osas veerg (3) sisaldab kaks elementaartehtet, kuna arvu 5 saab korrutisele peast liita. Korrutades lükatil teguriga 0,4385 (veerg (4)), tuleb tegur ümardada 0,439. Vahede korrapärasus tabeli ridades 3-10 näitab, et nendes ridades vigu ei ole. Joonistades esimesele osale vastava graafiku (joon. 2), näeme, et see on küllalt sile.



Joon. 2

Teises osas võib jätta vahele veerud (2), (4) ja (5), kandes tabelist leitud väärtused kohe masinasse. Arvestades suruste järku ja sissejuhatuses antud näpunäiteid, määrame vahepealsete tehete tulemuste kohtade arvu. Nimelt x^2 väärtused võtame nelja kohaga, summa $0,382 x^2 + 5$

kirjutame välja nelja kümnendkohaga jne.

II p e a t ü k k

LINEAARSETE ALGEBRALISTE VÕRRANDISÜSTEEMIDE LAHENDAMINE

§4. Tundmatute järkjärgulise elimineerimise võte

Piirdume siin kolme tundmatu ja kolme võrrandi juhuga. Olgu antud lineaarne võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = r_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = r_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = r_3 \end{cases} \quad (2.1)$$

nullist erineva determinandiga

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nagu teada, võib võrrandisüsteemi (4.1) lahendada Crameri valemite järgi:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & a_{12} & a_{13} \\ r_2 & a_{22} & a_{23} \\ r_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & r_1 & a_{13} \\ a_{21} & r_2 & a_{23} \\ a_{31} & r_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r_1 \\ a_{21} & a_{22} & r_2 \\ a_{31} & a_{32} & r_3 \end{vmatrix}}{D}. \quad (2.2)$$

Kuid nende determinantide arvutamine nõuab mitmekohaliste arvude puhul liiga palju korrutamisi ning liitmisi ja on seepärast praktiliselt ebasobiv (eriti rohkem kui kolme võrrandiga süsteemi korral).

Praktiliselt osutub palju efektiivsemaks tundmatute järkjärguline elimineerimine. Toome siin ühe arvutusskeemi, mis on küllalt lihtne ega nõua spetsiaalset selgitust.

Arvutuse ja kontrolli skeem

Võrrandite ja tehete tähistused	Arvutus	K o n t r o l l
A_1	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = r_1$	$s_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + r_1$
A_2	$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = r_2$	$s_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + r_2$
A_3	$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = r_3$	$s_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} + r_3$
(Esimese tundmatu kordajaga jagamine vastavalt igas võrrandis)		
$A'_1 = \frac{A_1}{a_{11}}$	$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{r_1}{a_{11}}$	$\frac{s_1}{a_{11}} (= 1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{13}}{a_{11}} + \frac{r_1}{a_{11}})$
$A'_2 = \frac{A_2}{a_{21}}$	$x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2 + \frac{a_{23}}{a_{21}}x_3 = \frac{r_2}{a_{21}}$	$\frac{s_2}{a_{21}} (= 1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} + \frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{r_2}{a_{21}})$
$A'_3 = \frac{A_3}{a_{31}}$	$x_1 + \frac{a_{32}}{a_{31}}x_2 + \frac{a_{33}}{a_{31}}x_3 = \frac{r_3}{a_{31}}$	$\frac{s_3}{a_{31}} (= 1 + \frac{a_{32}}{a_{31}} + \frac{a_{33}}{a_{31}} + \frac{r_3}{a_{31}})$

Võrrandite ja tehete tähistused	Arvutus	K o n t r o l l
---------------------------------	---------	-----------------

Esimese võrrandi lahutamine kõigist järgnevatest.¹

$B_2 = A_2' - A_1'$	$b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = r_2'$	$s_2' = \frac{s_2}{a_{21}} - \frac{s_1}{a_{11}} (= b_{22} + b_{23} + r_2')$
$B_3 = A_3' - A_1'$	$b_{32}x_2 + b_{33}x_3 = r_3'$	$s_3' = \frac{s_3}{a_{31}} - \frac{s_1}{a_{11}} (= b_{32} + b_{33} + r_3')$

Edasine tundmatute elimineerimine tehakse samas järjekorras.²

$B_2' = \frac{B_2}{b_{22}}$	$x_2 + \frac{b_{23}}{b_{22}}x_3 = \frac{r_2'}{b_{22}}$	$\frac{s_2'}{b_{22}} (= 1 + \frac{b_{23}}{b_{22}} + \frac{r_2'}{b_{22}})$
$B_3' = \frac{B_3}{b_{32}}$	$x_2 + \frac{b_{33}}{b_{32}}x_3 = \frac{r_3'}{b_{32}}$	$\frac{s_3'}{b_{32}} (= 1 + \frac{b_{33}}{b_{32}} + \frac{r_3'}{b_{32}})$
$C_3 = B_3' - B_2'$	$c_{33}x_3 = r_3''$	$s_3'' = \frac{s_3'}{b_{32}} - \frac{s_2'}{b_{22}} (= c_{33} + r_3'')$
$C_3' = \frac{C_3}{c_{33}}$	$x_3 = \frac{r_3''}{c_{33}}$	$\frac{s_3''}{c_{33}} (= 1 + \frac{r_3''}{c_{33}})$

¹ Kasutatakse tähistusi $b_{22} = \frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}$, $r_2' = \frac{r_2}{a_{21}} - \frac{r_1}{a_{11}}$ jne.

² Kasutatakse tähistusi $c_{33} = \frac{b_{33}}{b_{32}} - \frac{b_{23}}{b_{22}}$, $r_3'' = \frac{r_3'}{b_{32}} - \frac{r_2'}{b_{22}}$.

Erilist tähelepanu tuleb pöörata igas reas tehtavale arvutuste kontrollile kontrollsummade abil. Kontrollarvudega (iga võrrandi kordajate summadega) tehakse need samad tehted, mis vastavate kordajategagi. Iga võrrandi kordajate summa peab arvutuskäigus alati ühtima selle rea kontrollarvuga arvutustäpsuse piires.

Skeemis allakriipsutatud võrrandid (A_1', B_2', C_3') moodustavad süsteemi kujuga:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \vartheta_1 \\ x_2 + \beta_3 x_3 = \vartheta_2 \\ x_3 = \vartheta_3, \end{cases} \quad (2.3)$$

mis on samaväärne süsteemiga (2.1). Kirjutise lihtsustamiseks on süsteemis (2.3) kasutatud tähistusi:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{a_{12}}{a_{11}}, & \alpha_3 &= \frac{a_{13}}{a_{11}}, & \vartheta_1 &= \frac{r_1}{a_{11}}, \\ \beta_3 &= \frac{b_{23}}{b_{22}}, & \vartheta_2 &= \frac{r_2'}{b_{22}}, \\ \vartheta_3 &= \frac{r_3''}{c_{33}}. \end{aligned}$$

Viimane süsteemi (2.3) võrranditest annabki tundmatu x_3 väärtuse. Ülejäänud tundmatud leitakse järkjärgulise asendamisega eelnevasse võrrandisse:

$$\begin{cases} x_3 = \vartheta_3, \\ x_2 = \vartheta_2 - \beta_3 x_3, \\ x_1 = \vartheta_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3. \end{cases} \quad (2.4)$$

Üleminekut süsteemilt (2.1) süsteemile (2.3) nimetatakse e d a s i k ä i g u k s, süsteemist (2.3) lahendi (2.4) saamist aga t a g a s i k ä i g u k s.

Tagasikäigu kontrollimiseks kasutatakse seda asjaolu, et koos süsteemiga (2.1) on lahendatud kontrollsüsteem, mis erineb süsteemist (2.1) ainult vabaliikmete veeru poolest:

$$\begin{cases} a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3 = s_1, \\ a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3 = s_2, \\ a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3 = s_3, \end{cases} \quad (2.5)$$

kus kontrollsüsteemi lahend on tähistatud ($\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$).

Et kontrollarvudega s_1, s_2, s_3 sooritatakse needsamad tehted, mis parema poole arvudega r_1, r_2, r_3 , siis on süsteem (2.5) samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \alpha_3 \bar{x}_3 = \frac{s_1}{a_{11}}, \\ \bar{x}_2 + \beta_3 \bar{x}_3 = \frac{s_2}{b_{22}}, \\ \bar{x}_3 = \frac{s_3''}{c_{33}}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Kontrollsüsteemi lahend peab erinema antud süsteemi lahendist täpselt ühe võrra:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 + 1, \\ \bar{x}_2 = x_2 + 1, \\ \bar{x}_3 = x_3 + 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Viimast tõsiasja on kerge kontrollida avaldiste (2.7) vahetu asendamisega võrranditesse (4.5), näiteks:

$$\begin{aligned} & a_{11}(x_1 + 1) + a_{12}(x_2 + 1) + a_{13}(x_3 + 1) = \\ & = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) = \\ & = r_1 + a_{11} + a_{12} + a_{13} = s_1. \end{aligned}$$

Kui tingimused (2.7) on täidetud, siis võib lugeda arvutused veatuks.

Kogu eeltoodu illustreerimiseks anname näite skeemi kujul, milles süsteem (nelja tundmatu ja nelja võrrandiga) on antud tundmatute kordajate ja vabaliikmete kaudu, ümardamisvigade kuhjumise vältimiseks on arvutatud kahe tagavarakohaga, kusjuures edaspidistes arvutustes ümardatakse tulemusi vastavalt reeglitele.

Võrreldes antud süsteemi lahendit x_1 kontrollsüsteemi lahendiga \bar{x}_1 , on näha, et ümardamisvead ilmnevad alles teises tagavarakohas. Lahendil jäetagu kahtlased kohad ära. Seega $x_1 = 7,8012$, $x_2 = -5,2425$, $x_3 = -0,9031$, $x_4 = 3,3952$.

Võib aga juhtuda, et ka allesjäänud kohtadest osa on kahtlased. Seepärast on tarvis hinnata saadud lahendi viga.

Võrrandite ja tehete tähistused	Süsteemi kordajad				Vaba- liikmed	Kontroll- arvud
	x_1	x_2	x_3	x_4		
A_1	0,5174	0,2654	-0,2117	0,1699	3,413	4,1540
A_2	1,1301	1,6511	0,1227	1,2007	4,126	8,2306
A_3	0,4366	1,4222	-0,9808	1,6415	2,409	4,9285
A_4	0,2171	-1,0523	1,3418	2,0271	12,881	15,4147
$A_1' = \frac{A_1}{a_{11}}$	1	0,512949	-0,409161	0,328373	6,59644	8,028604
$A_2' = \frac{A_2}{a_{21}}$	1	1,461021	0,108574	1,062472	3,65100	7,283072
$A_3' = \frac{A_3}{a_{31}}$	1	3,257444	-2,246450	3,759734	5,51764	11,288364
$A_4' = \frac{A_4}{a_{41}}$	1	-4,847075	6,180562	9,337171	59,33210	71,002760
$B_2 = A_2' - A_1'$	-	0,948072	0,517735	0,734099	-2,94544	-0,745532
$B_3 = A_3' - A_1'$	-	2,744495	-1,837289	3,431361	-1,07880	3,259760
$B_4 = A_4' - A_1'$	-	-5,360024	6,589723	9,008798	52,73566	62,974156
$B_2' = \frac{B_2}{b_{22}}$	-	1	0,546092	0,774307	-3,10677	-0,786366
$B_3' = \frac{B_3}{b_{32}}$	-	1	-0,669445	1,250271	-0,39308	1,187745
$B_4' = \frac{B_4}{b_{42}}$	-	1	-1,229420	-1,680738	-9,83870	-11,748851
$C_3 = B_3' - B_2'$	-	-	-1,215537	0,475964	2,71369	1,974111
$C_4 = B_4' - B_2'$	-	-	-1,775512	-2,455045	-6,73193	-10,962485
$C_3' = \frac{C_3}{c_{33}}$	-	-	1	-0,391567	-2,23250	-1,624065
$C_4' = \frac{C_4}{c_{43}}$	-	-	1	1,382725	3,79154	6,174267
$D_4 = C_4' - C_3'$	-	-	-	1,774292	6,02404	7,798332
$D_4' = \frac{D_4}{d_{44}}$	-	-	-	1	3,39518	4,395180
Tagasil- kaik				$x_4 =$	3,39518	4,395180
			$x_2 = 1,32944 - 2,23250 =$	$=$	-0,90306	0,09694
		$x_2 = 0,49315 - 2,62891 - 3,10677 =$	$=$	-5,24253	-4,24253	
	$x_1 = 2,68915 - 0,36950 - 1,11488 + 6,59644 =$		$=$	7,80121	8,80121	

§5. Lahendi vea hinnang

1. Tundmatute elimineerimise võtte on täpne. Kuid vahetulemuste ümardamine arvutuskäigus viib selleni, et lõpptulemuseks saame süsteemile ligikaudse lahendi. Eriti ohtlik on täpsuse kadu teineteisele lähedaste arvude (numbrite) lahutamisel.

Tundmatute järkjärgulise elimineerimise võttega saadava lahendi täpsust saab mõningal määral suurendada, grupeerides võrrandeid ja tundmatuid nii, et võrrandisüsteemi suurim kordaja on esimeseks kordajaks esimeses võrrandis. Seda nimetatakse Gaussi skeemiks peaelemendi valikuga. Kuid alati jääb alles lahendi vältimatu viga, mida põhjustab võrrandi laad. See viga võib olla suur, kui süsteemi determinant on väike süsteemi kordajatega võrreldes. Sellised süsteemid nõuavad erilist uurimist. Siin vaatleme lahendi vältimatu vea hinnangut niisuguste süsteemide korral, kus kordajate väike muutus kutsub esile ka lahendi suhteliselt väikese muutuse.

2. Lahendi sõltuvus võrrandite vabaliikmetest. Avaldame süsteemi (2.1) lahendi ilmutatud kujul võrrandite paremate poolte, s.t. vabaliikmete r_1, r_2, r_3 kaudu. Selleks arendame determinandid Crameri valemite (2.2) vabaliikmete veeru järgi. Saame valemid järgmisel kujul:

$$\begin{cases} x_1 = r_1 x_1^{(1)} + r_2 x_1^{(2)} + r_3 x_1^{(3)}, \\ x_2 = r_1 x_2^{(1)} + r_2 x_2^{(2)} + r_3 x_2^{(3)}, \\ x_3 = r_1 x_3^{(1)} + r_2 x_3^{(2)} + r_3 x_3^{(3)}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Siit on näha, et kui $r_1 = 1, r_2 = 0, r_3 = 0$, kehtivad võrranded

$$x_1 = x_1^{(1)}, x_2 = x_2^{(1)}, x_3 = x_3^{(1)}.$$

See tähendab, et $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$ osutub niisuguse

süsteemi lahendiks, millel on samad kordajad a_{ij} mis süsteemil (2.1), ainult vabaliikmeteks on

$$r_1^{(1)} = 1, r_2^{(1)} = 0, r_3^{(1)} = 0.$$

Täpselt samuti osutub $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$ analoogilise süsteemi lahendiks vabaliikmetega

$$r_1^{(2)} = 0, r_2^{(2)} = 1, r_3^{(2)} = 0$$

ja $(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})$ süsteemi lahendiks vabaliikmetega

$$r_1^{(3)} = 0, r_2^{(3)} = 0, r_3^{(3)} = 1.$$

Lahendades kolm süsteemi ülaltoodud vabaliikmetega, võime avaldada ükskõik milliste vabaliikmetega süsteemi (2.1) lahendi valemite (2.8) põhjal $x_1^{(k)}$ kaudu. Märgime, et tundmatute järkjärgulise elimineerimise skeem lubab korraga lahendada ükskõik mitu samade kordajatega, kuid erinevate vabaliikmetega võrrandisüsteemi, näiteks nagu seda on tehtud lk. 24 toodud skeemis vabaliikmete r_1, r_2, r_3 ja s_1, s_2, s_3 puhul.

Et arvud $x_1^{(k)}$ ei sõltu vabaliikmetest r_1, r_2, r_3 , siis lubavad valemid (2.8) lihtsalt uurida süsteemi (2.1) lahendi vea sõltuvust vabaliikmete vigadest. Loeme tundmatute kordajad a_{ij} täpseteks arvudeks, vabaliikmed r_1, r_2, r_3 aga ligikaudseteks arvudeks vea ülemmääradega $\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta r_3$. Edasi eeldame, et $x_1^{(k)}$ on vastavate süsteemide täpsed lahendid. Siis järeldub valemist

$$x_2 = r_1 x_1^{(1)} + r_2 x_1^{(2)} + r_3 x_1^{(3)},$$

et x_1 väärtuse vea ülemmäär, mis tekib vabaliikmete vigade ülemmääradest, on

$$\Delta x_1 = \Delta r_1 |x_1^{(1)}| + \Delta r_2 |x_1^{(2)}| + \Delta r_3 |x_1^{(3)}|.$$

Kui vabaliikmete vigade ülemmäärad ei ületa λ , siis x_1 väärtuse vea ülemmäär hinnatakse järgmiselt:

$$\Delta x_1 \leq (|x_1^{(1)}| + |x_1^{(2)}| + |x_1^{(3)}|).$$

Analoogilised hinnangud saadakse ka vigade ülemmääradele Δx_2 ja Δx_3 . Tähistades

$$\sigma_i = |x_i^{(1)}| + |x_i^{(2)}| + |x_i^{(3)}|, (i = 1, 2, 3), \quad (2.9)$$

kirjutame hinnangud lahendi vigade ülemmääradele, mida on põhjustanud vabaliikmete vead, järgmisel kujul:

$$\begin{cases} \Delta x_1 \leq \lambda \sigma_1, \\ \Delta x_2 \leq \lambda \sigma_2, \\ \Delta x_3 \leq \lambda \sigma_3. \end{cases} \quad (2.10)$$

3. Lahendi vea hinnang. Et hinnata lahendi vea ülemmäära, mis on tekkinud tundmatute kordajatest, seome selle küsimuse eespool vaadeldud lahendi vigade ülemmääradega, mis on tingitud vabaliikmete vigadest.

Kuna võrrand

$$(a_{11} + \alpha) \tilde{x}_1 + a_{12} \tilde{x}_2 + a_{13} \tilde{x}_3 = r_1$$

on samaväärne võrrandiga

$$a_{11} \tilde{x}_1 + a_{12} \tilde{x}_2 + a_{13} \tilde{x}_3 = r_1 - \alpha \tilde{x}_1,$$

siis tekitab kordaja a_{11} viga α lahendis samasuguse vea, nagu viga αx_1 vabaliikmes muutmata kordajate korral. Siin on $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ -ga tähistatud muudetud süsteemi lahendit (milles kordaja a_{11} on muudetud kordajaks $a_{11} + \alpha$).

Nagu juu varem märgitud, vastleme ainult selliseid süsteeme, milledes tundmatute kordajate väike muutus tekitab ka lahendi suhteliselt väikese muutuse. Seepärast võime väikesest α -st sõltuvate vigade hinnangutes asendada lahendi $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ süsteemi (2.1) juba leitud lahendiga (x_1, x_2, x_3) .

Tähistame ε -ga tundmatute kõigi kordajate vea ülemmäära. Küllalt väikese ε korral võib oletada, et tundmatute kõigi kordajate vead mõjutavad lahendit mitte rohkem kui viga $\varepsilon(|x_1| + |x_2| + |x_3|)$ võrrandite vabaliikmetes. Hinnanguid (2.10) arvesse võttes saame siit järgmise j u h i s e.

Kui tundmatute kordajate vigade ülemmäär on ε ja kui va-

baliikmete vigade ülemäär on τ , siis on lahendi vigade ülemäär

$$\begin{cases} \Delta x_1 \leq [\tau + \varepsilon(|x_1| + |x_2| + |x_3|)] \sigma_1, \\ \Delta x_2 \leq [\tau + \varepsilon(|x_1| + |x_2| + |x_3|)] \sigma_2, \\ \Delta x_3 \leq [\tau + \varepsilon(|x_1| + |x_2| + |x_3|)] \sigma_3, \end{cases} \quad (2.11)$$

kus $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ on määratud valemitega (2.9).

Hinnang (2.11) saadakse hinnangust (2.10) asendamisel avaldisega $\tau + \varepsilon(|x_1| + |x_2| + |x_3|)$. Hinnangut (2.11) võib kasutada, kui korrutis $\varepsilon(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ ei ületa suurusjärgult suurus 0,02 kuni 0,05 (seda väidet me ei tõesta).

4. Märkus süsteemi lahendi leidmise kohta. Süsteemi lahendi teadmine ilma tema vea ülemäärana võimalikku suurust teadmata omab praktiliselt vähe tähtsust. Hinnangute (2.11) kasutamiseks on tarvis leida kõik $x_1^{(k)}$, s.t. lahendada kolm süsteemi, mis on analoogilised antud süsteemiga ning erinevad temast vabaliikmete $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ja $(0, 0, 1)$ poolest. Kuid kolme niisuguse süsteemi lahendamine teeb antud süsteemi lahendi leidmise sama võttega juba üleliigseks, sest viimast võib lihtsalt avaldada $x_1^{(k)}$ kaudu valemite (2.8) abil. Eriti suur tähtsus on sel siis, kui tuleb lahendada palju süsteeme, mis erinevad ainult vabaliikmete poolest. Sel juhul lahendame süsteemi kahes etapis: esialgu lahendame üheaegselt kolm eritüüpi süsteemi $x_1^{(k)}$ leidmiseks, seejärel aga arvutame $x_1^{(k)}$ abil lahendi antud süsteemile ja hindame selle lahendi vea.

Jääb veel järele sobival viisil valida kontrollarvud s_1, s_2, s_3 kõigi arvutuste õigsuse kontrollimiseks. Kontrollarvudeks sobivad ka siin võtta vastavalt esimese, teise ja kolmanda rea kõigi arvude summad:

$$\begin{cases} s_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + r_1^{(1)} + r_1^{(2)} + r_1^{(3)} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + 1, \\ s_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + r_2^{(1)} + r_2^{(2)} + r_2^{(3)} = a_{21} + a_{22} + a_{23} + 1, \\ s_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} + r_3^{(1)} + r_3^{(2)} + r_3^{(3)} = a_{31} + a_{32} + a_{33} + 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Lahendades süsteemi, mille vabaliikmeteks on s_1, s_2, s_3 , koos ülaltoodud kolme eritüüpi süsteemiga, avaneb meil võimalus kontrollida arvutusi skeemi igas reas, analoogiliselt skeemiga lk. 24. Peale selle saame kontrollida kõiki leitud $x_1^{(k)}$. Tõepoolest, kui kontrollsüsteemi lahendit tähistada ($\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$), siis on kerge veenduda, et peavad kehtima järgmised seosed:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)} + 1, \\ \bar{x}_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)} + 1, \\ \bar{x}_3 = x_3^{(1)} + x_3^{(2)} + x_3^{(3)} + 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Seda on võimalik näha täpselt samuti, nagu lk. 26; näiteks

$$\begin{aligned} & a_{11} (x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)} + 1) + a_{12} (x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)} + 1) + \\ & + a_{13} (x_3^{(1)} + x_3^{(2)} + x_3^{(3)} + 1) = r_1^{(1)} + r_1^{(2)} + r_1^{(3)} + a_{11} + \\ & + a_{12} + a_{13} = s_1. \end{aligned}$$

§6. Laboratoorne töö nr. 2

Lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine

ja vea hinnang

Ü l e s a n n e. Lahendada nelja tundmatuga ja nelja võrrandiga süsteem

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = r_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 = r_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 = r_3, \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 = r_4. \end{cases} \quad (2.1)$$

Hinnata saadud lahendi viga, lugedes õigeteks kõik antud kordajate kohad (vea ülemäär ei ületa viimase koha poolt

ühikut ja eeldatakse, et hinnangute (2.11) rakendatavuse tingimused on täidetud).

Ülesande lahendamise juhend

1^o. Arvutuste üksiktulemused kantakse tabelisse näidistöö kohaselt.

2^o. Kõik arvutused tehakse ridade kaupa arvutusplangi vasakpoolses veerus toodud skeemi järgi. Arvutusi kontrollitakse kontrollarvude abil analoogiliselt lk. 24 toodud skeemile. Pärast iga tehet kõigi ühes reas asetsevate arvudega tuleb tingimata kontrollida võrdust kontrollarvu ja selle rea ülejäänud arvude summa vahel. Kui erinevus ületab ümardamisvea, tuleb rida uuesti arvutada.

3^o. Saadud lahendeid $x_i^{(k)}$ kontrollitakse nii kontrollsüsteemi lahendiga võrdlemise teel valemite (2.13) järgi kui ka nende asendamise teel leheküljel 31 kirjeldatud erikujulistesse võrrandisüsteemidesse. Antud süsteemi lahend leitakse $x_i^{(k)}$ abil, kasutades valemeid (2.8). Selle lahendi viga hinnatakse samuti $x_i^{(k)}$ abil, kasutades selleks valemeid (2.11). Lahendit kontrollitakse tema asendamise teel antud võrrandisüsteemi (muidugi juba pärast saadud lahendi ümardamist).

4^o. Kogu arvutus viiakse läbi kahe-kolme tagavarakohaga. Lõpptulemuse ümardamine toimub kohe pärast lahendi vea hindamist. Lõpptulemuse ümardamisel tuleb silmas pidada, et valemite (2.11) järgi hindame viga tavaliselt üle ja seepärast on otstarbekas säilitada üks kahtlane koht.

N ä i d i s

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT
Matemaatika laboratoorium

L a b o r a t o o r n e töö nr. 2

LINEAARSE VÖRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE
JA VEA HINNANG

Rühm
Üliõpilane
Kontrollija
Kuupäev

Ü l e s a n n e. Lahendada nelja tundmatuga ja nelja võrrandiga süsteem:

$$\begin{cases} 0,5174 x_1 + 0,2654 x_2 - 0,2117 x_3 + 0,1699 x_4 = 3,413 \\ 1,1301 x_1 + 1,6511 x_2 + 0,1227 x_3 + 1,2007 x_4 = 4,126 \\ 0,4366 x_1 + 1,4222 x_2 - 0,9808 x_3 + 1,6415 x_4 = 2,409 \\ 0,2171 x_1 - 1,0523 x_2 + 1,3418 x_3 + 2,0271 x_4 = 12,881. \end{cases}$$

Hinnata saadud lahendi viga, lugedes õigeteks kõik antud kordajate kohad.

(Tabel arvutustega vt. lk. 37.)

Süsteemi lahendid saame valemite (2.8) abil:

$$x_1 = 7,801212 \quad x_2 = -5,242539 \quad x_3 = -0,903054 \quad x_4 = 3,395185.$$

- Hindame lahendi viga. Kordajate absoluutse vea ülemmäär $\varepsilon = 0,00005$, vabaliikmete absoluutse vea ülemmäär $\zeta = 0,0005$.

Leiame (ümardades suurema poole!):

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 17,35,$$

$$\sigma_1 = |x_1^{(1)}| + |x_1^{(2)}| + |x_1^{(3)}| + |x_1^{(4)}| = 2,62,$$

$$\sigma_2 = |x_2^{(1)}| + |x_2^{(2)}| + |x_2^{(3)}| + |x_2^{(4)}| = 2,23,$$

$$\sigma_3 = |x_3^{(1)}| + |x_3^{(2)}| + |x_3^{(3)}| + |x_3^{(4)}| = 2,51,$$

$$\sigma_4 = |x_4^{(1)}| + |x_4^{(2)}| + |x_4^{(3)}| + |x_4^{(4)}| = 0,94 \quad \text{ja}$$

$$\zeta + \varepsilon \cdot (|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|) = 0,0005 + 0,00005 \cdot 17,35 \approx$$

$$\approx 0,0014.$$

Seega saame lahendi vea hindamisel

$$\Delta x_1 \leq 0,0014 \cdot 2,62 < 0,004,$$

$$\Delta x_2 \leq 0,0014 \cdot 2,23 < 0,004,$$

$$\Delta x_3 \leq 0,0014 \cdot 2,51 < 0,004,$$

$$\Delta x_4 \leq 0,0014 \cdot 0,94 < 0,002,$$

kusjuures tingimus hinnangu rakendamiseks on täidetud:

$$\varepsilon \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) = 0,00005 \cdot 8,3 = 0,000415 \ll 0,01.$$

Seega saame lahendiks:

$$x_1 = 7,801 \pm 0,004 ,$$

$$x_2 = -5,242 \pm 0,004,$$

$$x_3 = -0,903 \pm 0,004,$$

$$x_4 = 3,395 \pm 0,002.$$

Lahendi kontrollimisel (asetamisega süsteemi) saame:

$$0,5174 \cdot 7,801 + 0,2654 \cdot (-5,242) - 0,2117 \cdot (-0,903) + 0,1699 \cdot 3,395 = 3,4130$$

$$1,1301 \cdot 7,801 + 1,6511 \cdot (-5,242) + 0,1227 \cdot (-0,903) + 1,2007 \cdot 3,395 = 4,1264$$

$$0,4366 \cdot 7,801 + 1,4222 \cdot (-5,242) - 0,9809 \cdot (-0,903) + 1,6415 \cdot 3,395 = 2,4093$$

$$0,2171 \cdot 7,801 - 1,0523 \cdot (-5,242) + 1,3418 \cdot (-0,903) + 2,0271 \cdot 3,395 = 12,8801.$$

Kokkulangevus süsteemi vabaliikmetega on täiesti rahuldav.

Võrrandite ja tehete tabelid	Süsteemi kordajad				Teisendatud süsteemide vabaliikmed				Kontrollveerg
	x_1	x_2	x_3	x_4	(1)	(2)	(3)	(4)	
A_1	0,5174	0,2654	-0,2117	0,1699	1	0	0	0	1,7410
A_2	1,1301	1,6511	0,1227	1,2007	0	1	0	0	5,1046
A_3	0,4366	1,4222	-0,9808	1,6415	0	0	1	0	3,5195
A_4	0,2171	-1,0523	1,3418	2,0271	0	0	0	1	3,5337
$A_1^v = \frac{A_1}{a_{11}}$	1	0,512949	-0,409161	0,328373	1,932741	0	0	0	3,364901
$A_2^v = \frac{A_2}{a_{21}}$	1	1,461021	0,108574	1,062472	0	0,884877	0	0	4,516945
$A_3^v = \frac{A_3}{a_{31}}$	1	3,257444	-2,246450	3,759734	0	0	2,290426	0	8,061154
$A_4^v = \frac{A_4}{a_{41}}$	1	-4,847075	6,180562	9,337171	0	0	0	4,606172	16,276830
$B_2 = \frac{A_2 - A_1}{a_{21} - a_{11}}$	-	0,948072	0,517735	0,734099	-1,932741	0,884877	0	0	1,152044
$B_3 = \frac{A_3 - A_1}{a_{31} - a_{11}}$	-	2,744495	-1,837289	3,431361	-1,932741	0	2,290426	0	4,696253
$B_4 = \frac{A_4 - A_1}{a_{41} - a_{11}}$	-	-5,360024	6,589723	9,008798	-1,932741	0	0	4,606172	12,911929
$B_2^v = \frac{B_2}{b_{22}}$		1	0,546092	0,774307	-2,03861	0,933344	0	0	1,215144
$B_3^v = \frac{B_3}{b_{32}}$		1	-0,669445	1,250271	-0,704225	0	0,834553	0	1,711154
$B_4^v = \frac{B_4}{b_{42}}$		1	-1,229420	-1,680738	0,360584	0	0	-0,859356	-2,408931
$C_3 = \frac{B_3 - B_2}{b_{32} - b_{22}}$	-	-	-1,215537	0,475964	1,334376	-0,933344	0,834553	0	0,496010
$C_4 = \frac{B_4 - B_2}{b_{42} - b_{22}}$	-	-	-1,775512	-2,455045	2,399185	-0,933344	0	-0,859356	-3,624075
$D_3 = \frac{C_3}{c_{33}}$			1	-0,391567	-1,097767	-0,767845	-0,686571	0	0,408058
$C_4 = \frac{C_4}{c_{43}}$			1	1,382725	-1,351264	0,525676	0	0,484005	2,041144
$D_4 = \frac{C_4 - C_3}{c_{43} - c_{33}}$			-	1,774292	-0,253497	-0,242169	0,686571	0,484005	2,449202
$D_4^v = \frac{D_4}{d_{44}}$				1	-0,142872	-0,136488	0,386955	0,272788	11,380383
Tegasi- mäik			x_3	x_4	-0,142872	-0,136488	0,386955	0,272788	1,380383
					-1,153711	0,714401	-0,535052	0,106815	0,132454
					-1,297942	0,648399	-0,007434	-0,269553	0,073972
	x_1	x_2			2,173380	0,004272	-0,342175	0,092395	2,927872

III p e a t ü k k

FUNKTSIOONI LÄHENDAMINE ANTUD FUNKTSIOONIGA VÄHIMRUUTUDE MEETODIL

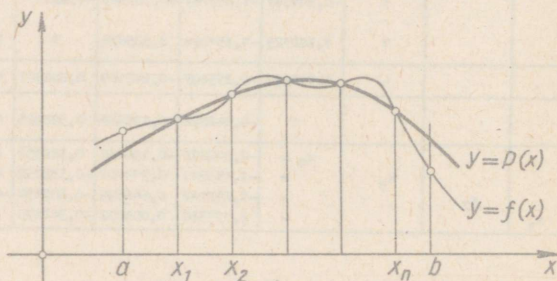
Praktikas saadakse tihti funktsionaalne sõltuvus vaadeldavate muutuvate suuruste vahel katsemõõtmiste tulemusena:

x	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n	(3.1)
y	y_1	y_2	y_3	\dots	y_n	

Seejuures pole funktsiooni $f(x)$ avaldis teada ja seda ei saa ka antud tabeli kaudu vahetult leida. Sel juhul tuleb leida arvutamise mõttes võimalikult lihtne funktsioon (näiteks polünoom), mis esitaks funktsiooni $f(x)$ küllaldase täpsusega antud lõigul $x_i \in [a, b]$, kus $i = 1, 2, \dots, n$. See toimub nn. "funktsiooni interpoleerimise ülesande" kaudu: leida antud funktsiooni $f(x)$ jaoks polünoom $P(x)$, mis antud väärtuste x_1, x_2, \dots, x_n korral omandaks väärtused

$$P(x_1) = f(x_1), P(x_2) = f(x_2), \dots, P(x_n) = f(x_n)$$

(vt. joonis 3).



Joon. 3

Paljudel juhtudel osutub aga interpolatsioonipolünoomide kasutamine ebaotstarbekaks, kuna nad kas moonutavad liige tugevasti tegelikku sõltuvust $f(x)$ või on lähendfunktsiooni võimalik saada hoopis lihtsamal kujul mõne teise meetodiga.

§7. Ülesande püstitamine.

Lähendfunktsiooni valik

Olgu mõõtmistulemused esitatud tabelina (3.1) ja sellele vastav empiiriline valem on

$$y = \varphi(x),$$

kus funktsioon $\varphi(x)$ sõltub mingitest suvalistest parameetritest. Vaheleid

$$\varphi(x_k) - y_k = v_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2)$$

nimetame hälveteks. Funktsioonis $\varphi(x)$ esinevad parameetrid tuleb valida nii, et hälbed v_k oleksid mingis mõttes vähimad. Sellise valiku kasutatavam kriteerium - nõue, et hälvete ruutude summa

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$$

oleks minimaalne - ongi vähimruutude meetodi aluseks.

Olgu lähendfunktsiooniks $\varphi(x)$ polünoom

$$(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m, \quad (3.3)$$

kusjuures $a_0 \neq 0$.

Ülesanne funktsiooni $f(x)$ lähendamisel polünoomiga $\varphi(x)$ ($m > 1$) vähimruutude meetodil on järgmine: määrata polünoomi (3.3) kordajad a_1, a_2, \dots, a_m nii, et antud arvu m korral $\sum_1 v_i^2$ oleks minimaalne.

Märgime, et juhul $m \geq n$ on lõpmata hulk polünoome (3.3) ja juhul $m = n - 1$ täpselt üks selline polünoom (3.3), mis rahuldavad tingimust $\sum_1 v_i^2 = 0$ ja annavad peatüki sissejuha-

tuses esitatud "funktsiooni interpoleerimise ülesande" lahendi. Meie eeldame käesolevas peatükis, et $m < n - 1$. Sel juhul kehtib polünoomi (3.3) kordajate a_1, a_2, \dots, a_m mistahes reaalarvuliste väärtuste korral võrratus $\sum_1 v_i^2 \geq 0$. Seega on $\sum_1 v_i^2$ m -muutuja a_1, a_2, \dots, a_m mittenegatiivne funktsioon ja tal on alati olemas miinimum.

On selge, et lähendpolünoom (3.3) on seda lihtsam, mida väiksem on naturaalarv m . Teiselt poolt toob aga polünoomi (3.3) astme liigne alandamine kaasa vastava $\sum_1 v_i^2$ miinimumi suurenemise. Kuidas siis valida sobiv aste m ?

Lähendpolünoomi sobiva astme m valik toimub tabelis (3.1) esitatud funktsiooni väärtuste vastavat järku vahede põhjal. Vaatleme esimest, teist jne., üldiselt i -ndat järku vahesid:

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= y_{k+1} - y_k, \\ \Delta^2 y_k &= \Delta y_{k+1} - \Delta y_k, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta^i y_k &= \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k. \end{aligned}$$

Vaadeldava ülesande korral need vahed ei pruugi vastata võrdse sammuga h valitud argumendi järgnevatele väärtustele (s.t. ei pea kehtima võrdus $x_k = x_1 + (k - 1)h$). Kõrvuti tavaliste vahedega vaatleme veel nn. jagatud vahesid

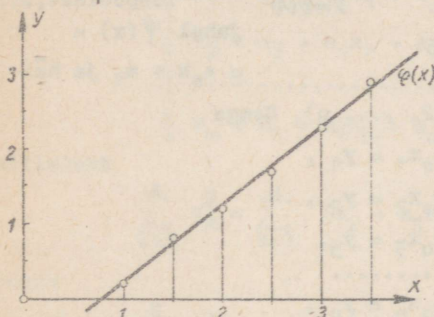
$$\begin{aligned} \overline{\Delta y_k} &= \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}, \text{ kus } \Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \\ \overline{\Delta^2 y_k} &= \frac{\overline{\Delta y_{k+1}} - \overline{\Delta y_k}}{x_{k+2} - x_k}, \\ &\dots\dots\dots \\ \overline{\Delta^i y_k} &= \frac{\overline{\Delta^{i-1} y_{k+1}} - \overline{\Delta^{i-1} y_k}}{x_{k+i} - x_k}. \end{aligned}$$

Kui katsetulemuste tabeli (3.1) samm h on jääv, toimub m valik tavaliste vahede põhjal, kui aga samm h on muutuv, siis jagatud vahede põhjal.

Lineaarne polünoom ($m = 1$) sobib lähendpolünoomiks ainult sel juhul, kui esimest järku vahed erinevad vähe üksteisest.

N ä i d e 1. (Samm $h = 0,5$ on jääv)

x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
y	0,2	0,8	1,2	1,7	2,3	2,9
Δy	6	4	5	6	6	



Joon. 4

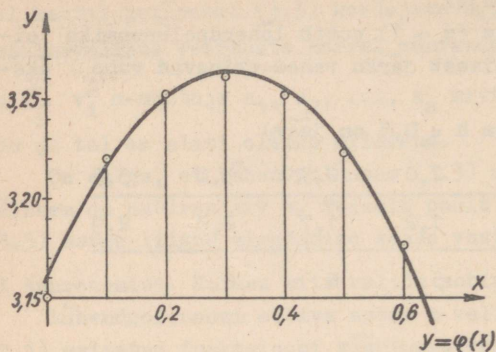
Kui esimest järku vahed erinevad tunduvalt üksteisest, teist järku vahed on aga praktiliselt jäävad, siis kasutame lähendamiseks ruutpolünoomi (paraboolne lähendamine) ($m = 2$).

N ä i d e 2. (Samm $h = 0,1$ on jääv)

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y	3,230	3,253	3,261	3,252	3,223	3,176
Δy	23	8	-9	-29	-47	
$\Delta^2 y$	-15	-17	-20	-18		

Täpselt analoogilistel kaalutlustel toimub lähendamine kolmanda astme või üldiselt i -nda astme polünoomiga.

Vaadeldud näidetes oli tabeli samm h jääv, mistõttu lähendpolünoomi astme m valik toimus tavaliste vahede kaudu. Kui aga samm h on muutuv, tuleb kasutada jagatud vahesid. On



Joon. 5

lihtne veenduda, et kui tabeliandmed vastavad täpselt lineaarsele sõltuvusele, peavad esimest järku jagatud vahed olema jäävad.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \dots = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

Tõepoolest, sel juhul $\psi(x) =$

$$= a_0 x + a_1 \text{ ja h\ddot{a}l-}$$

bed $\psi(x_k) - y_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Seega

$$a_1 + a_0 x_1 = y_1,$$

$$a_1 + a_0 x_2 = y_2,$$

$$a_1 + a_0 x_3 = y_3,$$

.....

$$a_1 + a_0 x_n = y_n,$$

millest vastavate võrduste lahutamisel saame

$$a_0 (x_2 - x_1) = y_2 - y_1,$$

$$a_0 (x_3 - x_2) = y_3 - y_2,$$

.....

ja edasi

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \dots = a_0.$$

süsteemina, mille lahend a_0, a_1, a_2 määrabki otsitud polünoomi.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \sum_{k=1}^n x_k^4 + a_1 \sum_{k=1}^n x_k^3 + a_2 \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k, \\ a_0 \sum_{k=1}^n x_k^3 + a_1 \sum_{k=1}^n x_k^2 + a_2 \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \\ a_0 \sum_{k=1}^n x_k^2 + a_1 \sum_{k=1}^n x_k + n \cdot a_2 = \sum_{k=1}^n y_k. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Funktsiooni $f(x)$ lähendamisel lineaarse polünoomiga $\Psi(x) = a_0 x + a_1$ oleks normaalvõrrandite süsteem (3.4) järgmine:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \sum_{k=1}^n x_k^2 + a_1 \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \\ a_0 \sum_{k=1}^n x_k + a_1 \cdot n = \sum_{k=1}^n y_k. \end{array} \right.$$

Täiesti analoogiliselt saab normaalvõrrandite süsteemi lähendpolünoomi kordajate a_0, a_1, \dots, a_m määramiseks funktsiooni $f(x)$ lähendamisel mistahes m -inda astme polünoomiga (3.3).

Funktsiooni lähendamisel funktsiooniga $ax + b + \frac{c}{x}$ on

$$\sum_{k=1}^n v_k^2 = \sum_{k=1}^n (ax_k + b + \frac{c}{x_k} - y_k)^2,$$

millest ekstreemumi tarvilikud tingimused on:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial a} = 2 \sum_{k=1}^n (ax_k + b + \frac{c}{x_k} - y_k)x_k = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{k=1}^n (ax_k + b + \frac{c}{x_k} - y_k) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial c} = 2 \sum_{k=1}^n (ax_k + b + \frac{c}{x_k} - y_k) \cdot \frac{1}{x_k} = 0. \end{array} \right.$$

Seega normaalvõrrandite süsteem kordajate a , b ja c määramiseks saab kuju

$$\begin{cases} a \sum_{k=1}^n x_k^2 + b \sum_{k=1}^n x_k + nc = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \\ a \sum_{k=1}^n x_k + nb + c \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} = \sum_{k=1}^n y_k, \\ na + b \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} + c \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{x_k}. \end{cases} \quad (3.5)$$

§9. Laboratoorne töö nr. 3

Funktsiooni lähendamine funktsiooniga $ax+b+\frac{c}{x}$

vähimruutude meetodil

Ülesanne. Leida vähimruutude meetodil tabeliga

x	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
y	y_1	y_2	y_3	\dots	y_n

esitatud funktsiooni lähendfunktsioon $ax + b + \frac{c}{x}$.

Ülesande lahendamise juhend

1°. Normaalvõrrandite süsteemi (3.5) väljakirjutamiseks täita tabel

x	y	$\frac{1}{x}$	x^2	$\frac{1}{x^2}$	xy	$\frac{y}{x}$
x_1	y_1	\dots	\dots	\dots	\dots	$\frac{y_1}{x_1}$
x_2	y_2	\dots	\dots	\dots	\dots	$\frac{y_2}{x_2}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_n	y_n	\dots	\dots	\dots	\dots	$\frac{y_n}{x_n}$
$\sum x_k$	$\sum y_k$	$\sum \frac{1}{x_k}$	$\sum x_k^2$	$\sum \frac{1}{x_k^2}$	$\sum x_k y_k$	$\sum \frac{y_k}{x_k}$

2°. Kirjutada välja normaalvõrrandite süsteem (3.5) ning lahendada see Gaussi skeemiga, määrates kordajad a , b ja c (vt. laboratoorne töö nr.2). Nii tabeli täitmisel kui ka süsteemi lahendamisel säilitada üks tagavarakoht, võrreldes lähtetabeli andmete täpsusega. Lähendfunktsiooni kirjutada aga kordajate a , b , c väärtused sama kohtade arvuga (tüvenumbrite arvuga), mis on lähtetabeli andmetel.

3°. Kirjutada välja saadud lähendpolünoom, võttes kordajad lubatud arvu kohtadega.

N ä i d i s

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT
Matemaatika laboratoorium

L a b o r a t o o r n e t ö ö n r . 3

FUNKTSIOONI LÄHENDAMINE RUUTPOLÜNOOMIGA
VÄHIMRUUTUDE MEETODIL

Rühm.....
Üliõpilane.....
Kontrollija.....
Kuupäev.....

Ü l e s a n n e. Leida vähimruutude meetodil tabeliga

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	3,261	3,252	3,228	3,181	3,117	3,034

esitatud funktsiooni lähendfunktsioon kujul $ax + b + \frac{c}{x}$.

L a h e n d u s. Täidame tabeli

x	y	$\frac{1}{x}$	x^2	$\frac{1}{x^2}$	xy	$\frac{y}{x}$
0,5	3,261	2,000	0,25	4,000	1,6305	6,522
0,6	3,252	1,667	0,36	2,778	1,9512	5,420
0,7	3,228	1,429	0,49	2,041	2,2596	4,611
0,8	3,181	1,250	0,64	1,562	2,5448	3,976
0,9	3,117	1,111	0,81	1,235	2,8053	3,463
1,0	3,034	1,000	1,00	1,000	3,0340	3,034
4,5	19,073	8,457	3,55	12,616	14,2254	27,026

Saame süsteemi

$$\begin{cases} 3,55 a + 4,5 b + 6 c = 14,2254 , \\ 4,5 a + 6 b + 8,457 c = 19,073 , \\ 6 a + 8,457 b + 12,616 c = 27,026 . \end{cases}$$

Lahendame süsteemi

Süsteemi kordajad			Vaba- liikmed	Rea- summa	Kontroll- arv
a	b	c			
3,55	4,500	6,000	14,2254	28,2754	28,2754
4,50	6,000	8,457	19,0730	38,0300	38,0300
6,00	8,457	12,616	27,0260	54,0990	54,0990
1	1,2676	1,6901	4,0072	7,9649	7,9649
1	1,3333	1,8793	4,2384	8,4510	8,4511
1	1,4095	2,1027	4,5043	9,0165	9,0165
-	0,0657	0,1892	0,2312	0,4861	0,4862
-	0,1419	0,4126	0,4971	1,0516	1,0516
	1	2,8798	3,5190	7,3988	7,4003
	1	2,9077	3,5032	7,4109	7,4109
	-	0,0279	-0,0158	0,0121	0,0106
		1	-0,5663	0,4337	0,3799
	$c = -0,5663$				
	$b = 3,5190 + 1,6308 = 5,1498$				
$a = 4,0072 + 0,9571 - 6,5279 = -1,5636$					

Seega otsitud lähendfunktsioon on

$$\psi(x) = -1,56x + 5,15 - \frac{0,57}{x}$$

I V p e a t ü k k

ESIMEST JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDI LIGIKAUDNE LAHENDAMINE

Tehnilistes ülesannetes, mis viivad mingi diferentsiaalvõrrandi lahendamisele, tuleb enamatel juhtudel leida selle võrrandi erilahend, mis rahuldab antud algtingimusi. Kõiki esimest järku võrrandeid (kõrgemat järku võrranditest rääkimata) pole vahetult võimalik integreerida. Neil juhtudel kasutatakse diferentsiaalvõrrandi ligikaudset lahendamist mitmesuguste arvuliste meetoditega.

§10. Euleri meetod =====

Olgu vaja leida võrrandi

$$y' = f(x, y) \quad (4.1)$$

ligikaudne lahend lõigul $[a, b]$, mis rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$, $x_0 = a$. Euleri meetod seisneb selles, et lõik $[x_0, b]$ jaotatakse n küllalt väikeseks osalõiguks, mille pikkused on võrdsed ja võrduvad arvuga

$$h = \frac{b - x_0}{n}.$$

Igal selliselt saadud osalõigul $[x_k, x_{k+1}]$, kus

$$x_k = x_0 + kh \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

asendatakse diferentsiaalvõrrandi (4.1) otsitav integraaljoon sellele osalõigu vasakpoolsest otspunktist x_k tõmmatud puutu-
ja

$$y - y_k = f(x_k, y_k)(x - x_k) \quad (4.2)$$

lõiguga [lähtevõrrandist (4.1) on puutuja tõus punktis x_k
 $y'_k = f(x_k, y_k)$] (joon. 6).

Saadud murdjoonelist integraaljoone lähendit nimetatakse

Euleri murdjooneks. Seega saab lahendi y ligikaudsed väärtused punktides $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, b$ arvutada valemitega

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

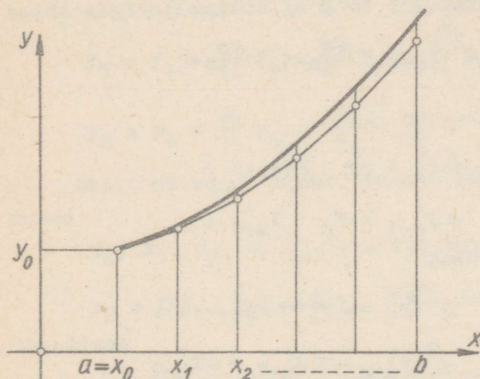
ehk

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h,$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h. \quad (4.3)$$



Euleri meetodi rakendamisel tehtav viga sõltub otseselt sammu h väärtusest. Sobivalt väikese sammu väärtusega on võimalik saada lahendi ligikaudsed väärtused küllaldase täpsusega.

Joon. 6

§11. Adamsi meetod

Adamsi meetod, mis põhineb Taylori valemil, annab tunduvalt suurema täpsuse kui Euleri meetod. Geomeetriliselt tähendab Adamsi meetodi rakendamine otsitava integraaljoone asendamist teise, kolmanda või kõrgema astme polünoomiga, sõltuvalt Adamsi valemis võetud liikmete arvust. Antud käsitluses rakendame Adamsi valemit nelja liikmega ehk valemit teist järku vahedega, millele vastab teise astme polünoom.

Otsime jälle võrrandi (4.1)

$$y' = f(x, y)$$

lahendit lõigul $[x_0, b]$, mis rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$.

Tähistame lahendi ligikaudsed väärtused punktides x_1, x_2, \dots, x_n vastavalt y_1, y_2, \dots, y_n , tuletiste ligikaudsed väärtused $y'_1, y'_2, \dots, y'_n, y''_1, y''_2, \dots, y''_n$ jne. Defineerime järgmised vahed:

Esimest järku vahed

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1},$$

teist järku vahed

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots, \\ \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$$

jne. ning

tuletiste esimest järku vahed

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0, \quad \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1, \dots, \\ \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1},$$

tuletiste teist järku vahed

$$\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0, \quad \Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1, \dots, \\ \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2}$$

jne.

Kirjutame nüüd võrrandi (4.1) lahendi jaoks välja Taylorigi valemi punkti $x = x_0$ ümbruses:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1!} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''_0 + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y'''_0 + \dots + \\ + \frac{(x - x_0)^k}{n!} y^{(k)}_0 + R_k. \quad (4.4)$$

Valemi (4.4) põhjal arvutame väärtused y_1 ja y_2 argumendi väärtustel $x_1 = x_0 + h$ ja $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$, piirdues valemis nelja esimese liikmega. Suurused y'_0, y''_0 ja y'''_0 leiame võrrandist (4.1) järgmiselt:

$$y'_0 = f(x_0, y_0),$$

diferentseerides võrrandit (4.1) argumendi x järgi, saame:

$$y_0'' = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0)$$

ja

$$y_0''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y_0''.$$

Väärtuste y_1 ja y_2 arvutamiseks on seega valemid (y_0 on teada algtingimusest ja h on argumendi samm):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!} y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' ,$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1!} y_0' + \frac{(2h)^2}{2!} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0''' . \quad (4.5)$$

Seega on meil Adamsi valemi lähteandmetena teada suurused

$$x_0, x_1, x_2, h, y_0, y_1, y_2, y_0', y_1' = f(x_1, y_1)$$

$$y_2' = f(x_2, y_2), \Delta y_0', \Delta y_1' \text{ ja } \Delta^2 y_0', \text{ mis kanname}$$

tabelisse

k	x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
0	x_0	y_0	y_0'		
				$\Delta y_0'$	
1	x_1	y_1	y_1'		$\Delta^2 y_0'$
				$\Delta y_1'$	
2	x_2	y_2	y_2'		...
				...	
...

(4.6)

Adamsi valemi enda saame aga järgmiselt. Oletame, et on teada lähendite lähisväärtused

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_k,$$

seega saab eelkäsitletu põhjal leida ka suurused

$$y'_0, y'_1, y'_2, \dots, y'_k$$

ning edasi

$$\Delta y'_0, \Delta y'_1, \Delta y'_2, \dots, \Delta y'_{k-1}$$

ja

$$\Delta^2 y'_0, \Delta^2 y'_1, \Delta^2 y'_2, \dots, \Delta^2 y'_{k-2}.$$

Nüüd määrame lahendi y_{k-1} väärtuse Taylori valemist (4.4), eeldades, et $x_0 = x_k$, $x = x_{k+1} = x_k + h$, ja piirdume jälle nelja esimese liikmega:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1!} y'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \frac{h^3}{3!} y'''_k. \quad (4.7)$$

Et määrata paremal olevaid suurusi y''_k ja y'''_k , kasutame teadaolevaid tuletiste esimest ja teist järku vahesid. Selleks esitame Taylori valemi (4.4) kaudu tuletise y'_{k-1} eeldusel, et $x_0 = x_k$, $x - x_0 = -h$:

$$y'_{k-1} = y'_k + \frac{(-h)}{1!} y''_k + \frac{(-h)^2}{2!} y'''_k;$$

ning tuletise y'_{k-2} eeldusel, et $x_0 = x_k$, $x - x_0 = -2h$:

$$y'_{k-2} = y'_k + \frac{(-2h)}{1!} y''_k + \frac{(-2h)^2}{2!} y'''_k.$$

Kahest viimasest võrdusest lähtudes saame:

$$y'_k = y'_{k-1} = \Delta y'_{k-1} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{h^2}{2} y'''_k,$$

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta y'_{k-2} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{3h^2}{2} y'''_k,$$

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta^2 y'_{k-2} = h^2 y'''_k,$$

millest

$$y'''_k = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y'_{k-2}$$

ja

$$y''_k = \frac{\Delta y'_{k-1}}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-2}}{2h}.$$

Asetades saadud tuletiste avaldised valemisse (4.7) saamegi Adamsi valemi nelja liikmega ehk teist järku vahedega:

$$y_{k+1} = y_k + h y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2}. \quad (4.8)$$

Selle valemi põhjal saame leida väärtuse y_3 , kui on teada väärtused y_0, y_1, y_2 , ning edasi saab juba leida y_4, y_5 jne.

Valemi (4.8) kaudu arvutades on leitud y_{k+1} väärtuse absoluutne viga järgust h^3 , et aga valemieni (4.8) jõutakse rea eelarvutuste kaudu, siis summaarne absoluutne viga on tegelikult juba järgus h^2 .

Et saada suuremat täpsust, võib kasutada Adamsi valemid viie, kuue jne. liikmega:

$$y_{k+1} = y_k + h y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{3h}{8} \Delta^3 y'_{k-3}, \quad (4.9)$$

$$y_{k+1} = y_k + h y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{3h}{8} \Delta^3 y'_{k-3} + \frac{251h}{720} \Delta^4 y'_{k-4} \dots$$

Seejuures aga suureneb tunduvalt arvutuste maht ja kogu arvutustöö läheb keerulisemaks, mistõttu näidistöös piirdume Adamsi valemis ainult nelja liikmega. Eelmainitud täpsus on kindlustatud, kui tuletise teist järku vahed tabelis (4.6) erinevad vähe üksteisest.

§12. Laboratoorne töö nr. 4

Esimest järku diferentsiaalvõrrandi ligi-

kaudne integreerimine Adamsi meetodil

Ü l e s a n n e. Arvutada võrrandi $y' = f(x, y)$ ligikaudne lahend lõigul $[x_0, b]$, mis rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$.

Ülesande lahendamise juhend

- 1°. Leida suurused y_0^I , y_0^{II} ja y_0^{III} ning valemitest (4.5) arvutada väärtused y_1 ja y_2 .
- 2°. Valmistada tabel (4.6), võttes selles vajaliku arvu ridu, ning kanda leitud väärtused tabelisse, täites ka kõik ülejäänud võimalikud lahtrid. Lisada veerg $\Delta^3 y^I$ väärtustega.
- 3°. Rakendades järk-järgult Adamsi valemit viie liikmega (4.9), leida kõik nõutud väärtused y_k , kandes tulemused tabelisse (4.6) ning täites pidevalt tabeli võimalikud ülejäänud lahtrid.

N ä i d i s
TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT
Matemaatika laboratoorium

L a b o r a t o o r n e t ö ö n r . 4

ESIMEST JÄRKU DIFERENTSIAALVÖRRANDI LIGI-
KAUDNE INTEGREERIMINE ADAMSI MEETODIL

Rühm.....
Üliõpilane.....
Kontrollija.....
Kuupäev.....

Ü l e s a n n e. Leida võrrandi $y' = y^2 + x$ lahendi liigikaudsed väärtused lõigul $[0, 0,5]$ sammuga $h = 0,1$, kui lahend rahuldab algtingimust $y(0)=1$. Arvutused teha nelja kohaga pärast koma.

Lahendus.

$$x_0 = 0; x_1 = 0,1; x_2 = 0,2; x_3 = 0,3; x_4 = 0,4; x_5 = 0,5.$$

Võrrandist ja algtingimusest

$$y_0 = 1,$$

$$y'_0 = 1^2 + 0 = 1,$$

$$y'' = 2yy' + 1; \text{ millest } y''_0 = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 = 3,$$

$$y''' = 2[(y')^2 + yy''], \text{ millest } y'''_0 = 2(1 + 1 \cdot 3) = 8.$$

Valemitest (4.5) arvutame

$$y_1 = 1 + 0,1 \cdot 1 + \frac{0,01}{2} \cdot 3 + \frac{0,001}{6} \cdot 8 = 1,1163$$

$$y_2 = 1 + 0,2 \cdot 1 + \frac{0,04}{2} \cdot 3 + \frac{0,008}{6} \cdot 8 = 1,2707.$$

Võrrandist

$$y'_1 = (1,1163)^2 + 0,1 = 1,3461.$$

$$y'_2 = (1,2707)^2 + 0,2 = 1,8147.$$

Täidame tabeli alguse:

k	x_k	y_k	y'_k	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
0	0	1,0000	1,0000		
				0,3461	
1	0,1	1,1163	1,3461		0,1225
				0,4686	
2	0,2	1,2707	1,8147		0,2092
				0,6778	
3	0,3	1,4807	2,4925		0,3718
				1,0496	
4	0,4	1,7726	3,5421		
5	0,5	2,1948			

Valemist (4.8) ja võrrandist:

$$y_3 = 1,2707 + 0,1 \cdot 1,8147 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,4686 + \frac{0,5}{12} \cdot 0,1225 = 1,4807,$$

$$y_3' = (1,4807)^2 + 0,3 = 2,4925;$$

$$y_4 = 1,4807 + 0,1 \cdot 2,4925 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,6778 + \frac{0,5}{12} \cdot 0,2092 = 1,7726,$$

$$y_4' = (1,7726)^2 + 0,4 = 3,5421;$$

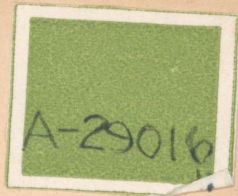
$$y_5 = 1,7726 + 0,1 \cdot 3,5421 + \frac{0,1}{2} \cdot 1,0496 + \frac{0,5}{12} \cdot 0,3718 = \underline{2,1948}.$$

M ä r k u s. Kuna tabelist on näha, et tuletise teist järku vahed ei ole stabiilsed, vaid kasvavad; kolmandat järku vahed erinevad vähe üksteisest (s.t. on praktiliselt jäävad) oleks tulnud ka antud näidistöö korral kasutada Adamsi valemit viie liikmega ehk kolmandat järku vahedega. Lahendi täpne väärtus $y_5 = 2,114$, seega absoluutne viga on 0,081, relatiivne viga $\frac{0,081}{2,114} = 0,038 = 3,8\%$.

Sisukord

	lk.
Sissejuhatuseks	3
I peatükk. Funktsioonide tabelite koostamine ja kasutamine	6
§1. Ühe muutuja funktsiooni tabel ja selle kasutamine	6
§2. Funktsiooni tabuleerimise skeem	14
§3. Laboratoorne töö nr. 1. Funktsiooni tabuleerimine antud valemi järgi antud täpsusega	16
Näidis	19
II peatükk. Lineaarsete algebraliste võrrandisüsteemide lahendamine	22
§4. Tundmatute järkjärgulise elimineerimise võtte	22
§5. Lahendi vea hinnang	28
§6. Laboratoorne töö nr. 2. Lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine ja vea hinnang	32
Näidis	34
III peatükk. Funktsiooni lähendamine antud funktsiooniga ruutude meetodil	38
§7. Ülesande püstitamine. Lähendfunktsiooni valik	39
§8. Funktsiooni lähendamine ruutpolünoomiga, lineaarse polünoomiga ja funktsiooniga	
$ax + b + \frac{c}{x}$ vähimruutude meetodil	42
§9. Laboratoorne töö nr. 3. Funktsiooni lähendamine funktsiooniga $ax + b + \frac{c}{x}$ vähimruutude meetodil	45
Näidis	47
IV peatükk. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi ligikaudne lahendamine	50
§10. Euleri meetod	50
§11. Adamsi meetod	51
§12. Laboratoorne töö nr. 4. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi ligikaudne integreerimine Adamsi meetodil	55
Näidis	57

Hind 10 kop.



TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00313833 8