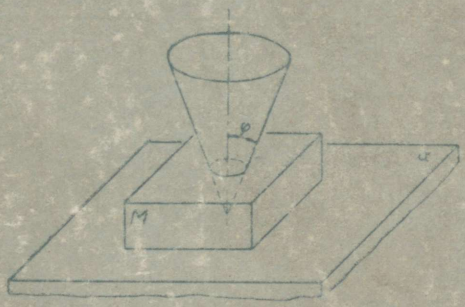
I. KATSENELENBOGEN ja A. POPOV

TEHNILINE MEHAANIKA



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

I. KATSENELENBOGEN JA A. POPOV

TEHNILINE MEHAANIKA

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1950

Originaali tiitel:

И. В. Каценеленбоген, А. А. Попов. Техническая механика.
Tõlkinud: A. Mutt.

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
16928
TARTU ÜLIKOOL

I JAGU.

TEOREETILINE MEHAANIKA.

Sissejuhatus.

Mehaanika on teadus, mis käsitleb kehade liikumist. Olles füüsika üheks osaks, leidis mehaanika laialdast rakendamist nii teoreetilistes teadustes (füüsika, astronoomia) kui ka tehnikas. Koos tehnika arenguga muutus mehaanika seaduste tundmine suuremal või väiksemal määral vajalikuks igale insener-tehnilisele töötajale. Ei ole näiteks võimalik ilma mehaanika abita tundma õppida auto materjalosa ja tema mehhanismide koostööst aru saada. Paljud ja mitmekesised mehaanika rakendamise juhud tehniliste ülesannete lahendamisel põhjustasid uue teadusharu — rakendusmehaanika — tekkimise, mis käsitleb mehaanika tulemuste rakendamist mehhanismidele ja masinatele.

Seepärast hakati mehaanikat kui teadust, mis käsitab kehade liikumist üldiselt, olenematult sellest, millised need kehad on (planeedid, masinad jne.), nimetama teoreetiliseks mehaanikaks.

Käesoleva õpiku esimene osa käsitleb teoreetilise mehaanika põhialuseid.

Keha liikumine on tema ümberpaigutumine ruumis aja vältel. Meie mõistame selle all muidugi materiaalset keha. Materiaalse keha liikumise mõningate küsimuste uurimisel on aga otstarbekohane piirduda keha ümberpaigutumise uurimisega ruumis aja vältel, arvestamata seda liikumist mõjutavaid füüsikalisi tegureid. Ette tõtates tuleb mainida, et liikumist mõjutavateks füüsikalisteks teguriteks on keha mass ja vaadeldavale kehale teistelt kehadelt mõjuvad jõud.

Teoreetilise mehaanika osa, mis uurib kehade liikumist, arvestamata seda liikumist mõjutavaid füüsikalisi tegureid, nimetatakse kinemaatikaks. Liikumise uurimine koos seda liikumist mõjutavate füüsikaliste tegurite arvestamisega moodustab dünaamika sisu.

Liikumise erijuhus on paigalseismine. Nende tingimuste uurimine, mille juures keha püsib paigal, moodustab staatika.

Meie algame teoreetilise mehaanika käsitlemist staatikast.

I OSA.

STAATIKA.

I peatükk.

Põhimõisted. Staatika aksioomid.

1. Kõva keha.

Keha nimetatakse kõvaks kehaks, kui selle keha kahe mistahes punkti vaheline kaugus ei muutu. Absoluutselt kõvu kehi looduses ei ole, sest kõik kehad deformeeruvad, muudavad oma kuju suuremal või väiksemal määral. Paljudel juhtudel aga on need muutused niivõrd väikesed, et neid võib mitte arvestada. Kui pigistada kätega kokku vedru, siis tema pikkus väheneb märgatavalt; kui aga sama jõuga suruda terasvarba, siis me ei märka selle pikkuse muutumist. Edaspidi, kui me räägime kehadest, siis mõistame selle all absoluutselt kõvu kehi.

Keha nimetatakse vabaks kehaks, kui selle ümberpaigutust mistahes suunas ei takista ükski teine keha. Mittevabaks ehk seotud kehaks nimetatakse keha siis, kui tema ümberpaigutamise võimalus on piiratud kas või ühes ainsas mingisuguses suunas.

Õhus lendav mürsk, lennuk või õhupall õhus on vabad kehad. Enamik meid ümbritsevatest kehadest on mittevabad. Toetatud tala, auto ratas on mittevabad kehad. Tala liikumine on takistatud tugedega, autoratta liikumist piirab tee, aga samuti ka telg, millele on asetatud ratas.

2. Inertsi aksioom. Tasakaal.

Nagu juba öeldud, staatika on teadus neist tingimustest, millede juures keha jääb liikumatuks. Need tingimused tuletuvad mõnedest põhialustest, mida ei tõestata. Selliseid põhialuseid nimetatakse aksioomideks. Nad on inimlike kogemuste üldistamised ja neid õigustab neist tehtud järelduste õigsus.

Esimene aksioom (inertsi aksioom). *Iga keha seisab paigal või liigub sirgjooneliselt ja ühtlaselt seni, kuni mõne teise keha mõju ei sunni teda muutma seda olekut.*

Sirgjoonelise ja ühtlase liikumise all mõistetakse sellist liikumist, mille juures keha kõik punktid liiguvad sirgjooneliselt ja ühtlase kiirusega.

Keha võib seista paigal (või liikuda sirgjooneliselt ja ühtlaselt), olles teiste kehade mõju all. Sel juhul teiste kehade mõjud vaadeldavale kehale tasakaalustuvad.

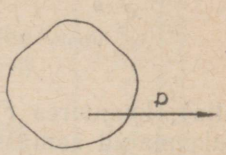
Eeltoodust lähtudes võime ütelda, et keha on tasakaalus, kui ta seisab paigal või liigub sirgjooneliselt ja ühtlaselt.

3. Jõud.

Kui üks keha, mõjutades teist, viib viimase tasakaalust välja, siis väljendame seda järgmiselt: esimene keha mõjutab teist teatava jõuga.

Jõu näideteks võivad olla lihaste jõud, raskus, kokkusurutud vedru elastsusjõud, õhu takistus, ühe keha surve teisele jne.

Iga jõudu iseloomustavad kolm omadust: 1) rakenduspunkt, 2) jõu mõjumissuund ja 3) jõu suurus.



Joon. 1.

1. Jõu rakenduspunkt on keha see punkt, millele mõjub jõud. Kui raskus on riputatud niidi otsa, siis raskuse see punkt, mille külge on seotud niit, on selle jõu rakenduspunktiks, millega niit mõjutab raskust.

2. Jõu mõjumissuund on see suund, millises hakkab keha antud jõu mõjul liikuma.

3. Jõu suurus. Mõõta jõu suurust tähendab võrrelda seda mingi teise jõuga, mis on võetud ühikuks. Jõudude suuruste võrdlemist saab põhjendada aksioomi abil, mida käsitleme edaspidi (p. 5).

Niisiis iseloomustavad jõudu tema rakenduspunkt, mõjumissuund ja suurus. Seetõttu kujutatakse jõudu noolega joonlõiguna (suunatud joonlõiguna). Joonlõigu algus asetseb jõu rakenduspunktis, joonlõigu pikkus vastab teatud mastaabis jõu suurusele ja nool joonlõigu lõpus näitab jõu mõjumissuunda.

Soovides alla kriipsutada, et jõud omab suunda, meie tähistame teda gooti tähega (𝔓 joon. 1). Jõu suurust tähistame tavalise suure tähega (P).

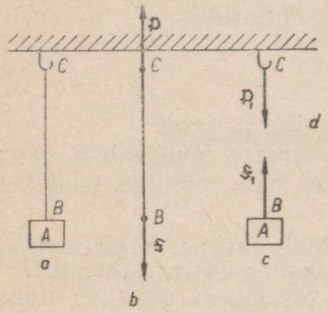
Sirget, mida mööda on suunatud jõud, nimetatakse jõu mõjusirgeks.

Kehale rakendatud jõudude kogumikku nimetatakse jõudude **süsteemiks.**

Jõudude süsteem on tasakaalus, kui ta, rakendatuna kehale, ei vii seda keha tasakaalu olekust välja.

4. Vastastikuse mõju aksioom.

Teine aksioom (vastastikuse mõju aksioom). *Mõjule vastab alati võrdne ja vastupidiselt suunatud vastumõju,* või teisiti — *kahe keha vastastikune mõju on võrdne ja suunatud vastupidiselt.*



Joon. 2.

Kui näiteks suruda käega lauale, siis käsi tunneb laua vastumõju.

Selle aksioomi mõtte kohaselt on iga jõu allikaks mateeria (keha). Mateeriata ei ole jõudu.

Vaatleme raskust A, mis on riputatud niidi BC abil konksu C otsa (joon. 2, a). Punktis B mõjub niit raskusele jõuga $\mathfrak{F}_1$, mis on suunatud alt üles (niit kannab raskust) (joon. 2, c). Vastavalt vastastikuse mõju aksioomile mõjub raskus niidile jõuga $\mathfrak{F}$ (joon. 2, b), mis on suunatud ülevalt alla (raskus tõmbab niiti alla), kusjuures $F = F_1$. Need kaks suuruselt võrdset jõudu on rakendatud samasse punkti, kuid erinevatele kehadele. Jõud $\mathfrak{F}$ on rakendatud niidile, jõud $\mathfrak{F}_1$ — raskusele.

Analoogilist pilti täheldame ka punktis C. Niit tõmbab konksu alla jõuga $\mathfrak{P}_1$ (joon. 2, d), konks mõjub niidile jõuga $\mathfrak{P}$, mis on suunatud alt üles (joon. 2, b), kusjuures $P = P_1$. Nagu eelmisel juhulgi, on need kaks jõudu rakendatud erinevatele kehadele: $\mathfrak{P}$ on rakendatud niidile, jõud $\mathfrak{P}_1$ konksule.

5. Kõva keha staatika aksioomid.

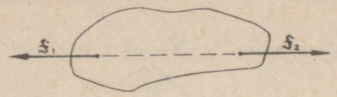
Kolmas aksioom. *Vabale kõvale kehale rakendatud kaks jõudu ei vii teda tasakaalu olekust välja siis ja ainult siis, kui need jõud on suuruselt võrdsed ja samal sirgel suunatud vastupidiselt* (jõud $\mathfrak{F}_1$ ja $\mathfrak{F}_2$ joonisel 3).

Selge on, et see aksioom ei ole rakendatav mittekõva keha kohta Rakendades joonisel 3 kujutatud jõud $\mathfrak{F}_1$ ja $\mathfrak{F}_2$ näiteks vedrule, märkame, et vedru hakkab liikuma. (Vedru meie ei saa lugeda kõvaks kehaks, sest tema keerdudevaheline kaugus muutub kokkusurumisel või venitamisel.)

Kolmas aksioom võimaldab meil võrrelda jõudude suurusi. Kaks

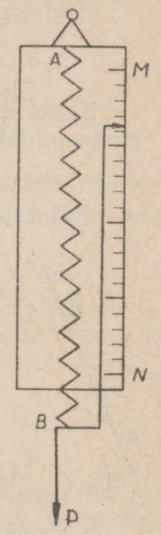
jõudu on võrdse suurusega, kui nad, rakendatuna vabale kõvale kehale samal sirgel, kuid vastupidistes suundades, ei vii keha tasakaalust välja.

Kui jõu $\mathfrak{F}$ tasakaalustamiseks on tarvis rakendada kehale vastassuunas kaks ühesuurust jõudu $\mathfrak{P}$, siis $F = 2P$.



Joon. 3.

Jõu mõõtmiseks kasutatavaid mõõteriistu nimetatakse dünamomeetriteks. Vedru-dünamomeetri (joon. 4) toime põhineb sellel, et vedru pikeneb võrdeliselt temale rakendatud jõuga. Vedru üks ots *A* kinnitatakse liikumatult dünamomeetri kere külge. Vedru teise otsa *B* on rakendatud mõõdetav jõud. Vedru pikenemist näitab osuti, mis liigub piki gradueeritud skaalat *MN*. Gradueerimist teostatakse järkjärgulise järjest suurema arvu sama kaaluga raskuste vedru külge riputamise teel.



Joon. 4.

Jõu ühikuna kasutatakse tehnikas sagedamini ühe liitri destilleeritud vee kaalu tühjuses temperatuuril 4° C (1 kilogramm).

Neljas aksioom. *Kõva keha tasakaal ei muutu, kui talle rakendada või temalt eemaldada vastastikku tasakaalustatud jõudude süsteem.*

Viimasest kahest aksioomist järeldub:

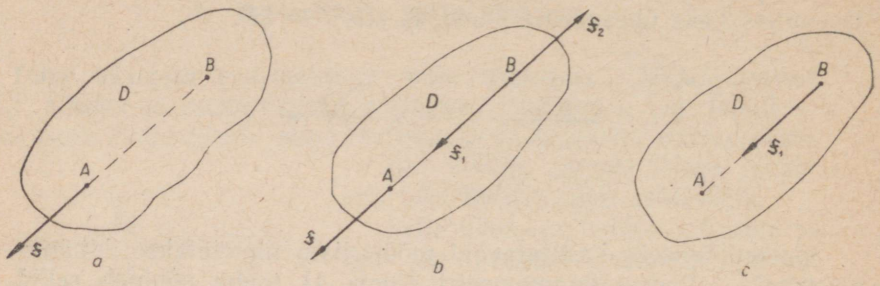
Kõva keha tasakaal ei muutu, kui kanname jõu rakenduspunkti piki mõjusirget üle kehal olevasse mistahes punkti.

Tõestus. Olgu keha *D* (joon. 5, a) tasakaalus mingi jõusüsteemi mõjul. Jõud $\mathfrak{F}$ on üks selle süsteemi jõududest. Rakendame punkti *B*, mis asub jõu $\mathfrak{F}$ mõjusirgel, veel kaks jõudu $\mathfrak{F}_1$ ja $\mathfrak{F}_2$ (joon. 5, b), mis on vastassuunalised ja suuruselt võrdsed jõuga *F*, s. t. $F_1 = F_2 = F$.

Kolmanda ja neljanda aksioomi kohaselt selle tõttu keha *D* tasakaal ei muutu. Ühe jõu $\mathfrak{F}$ asemel on meil nüüd kolm jõudu: $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ ja $\mathfrak{F}_2$ (joon. 5, b). Jõud $\mathfrak{F}$ ja $\mathfrak{F}_2$ on kolmanda aksioomi põhjal tasakaalus ja seetõttu võime nad neljanda aksioomi alusel eemaldada, ilma et selle juures keha tasakaal muutuks.

Eemaldades need kaks jõudu, saame ühe jõu $\mathfrak{F}_1$, mis on rakendatud punkti *B* (joon. 5, c). Niisiis punkti *A* rakendatud jõud $\mathfrak{F}$ on asendatud punkti *B* rakendatud võrdse suurusega jõuga $\mathfrak{F}_1$ ja selle asenduse tõttu ei ole keha tasakaal muutunud.

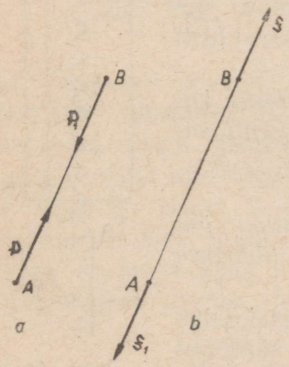
Tõestusest järeldub, et kõva keha tasakaalu kohta käiva ülesande lahenduseks on ükskõik, missugusesse jõu mõjusirgel asuvasse punkti on jõud rakendatud.



Joon. 5.

6. Ekvivalentsed jõudude süsteemid.

Kahte jõudude süsteemi nimetatakse ekvivalentseteks jõudude süsteemideks, kui ühte jõudude süsteemi on võimalik asendada teisega, ilma et seejuures muutuks vaba kõva keha tasakaal.



Joon. 6.

Ei tule aga arvata, et kaks ekvivalentset jõudude süsteemi on ühesuguse mõjuga.

Olgu näiteks varb AB (joon. 6, a) tasakaalus kahe sama suurusega jõu $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{P}_1$ mõjul. Selle jõudude süsteemi asendamisel kahe võrdse jõuga $\mathfrak{F}$ ja $\mathfrak{F}_1$ (joon. 6, b) varva tasakaal ei muutu, pinged varvas aga muutuvad, sest esimesel juhul on varb surutud, teisel juhul aga tõmmatud. Kolmandast ja neljandast aksioomist järeldub, et jõud $\mathfrak{F}$ võib olla ekvivalentne teise jõuga $\mathfrak{P}$ siis ja ainult siis, kui need jõud on suuruselt võrdsed ($F = P$) ja mõjuvad samal mõjusirgel samas suunas.

Kui jõudude süsteem $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ on ekvivalentne ühe jõuga $\mathfrak{R}$, siis nimetatakse viimast resultantjõuks ja jõude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ — komponentjõududeks.

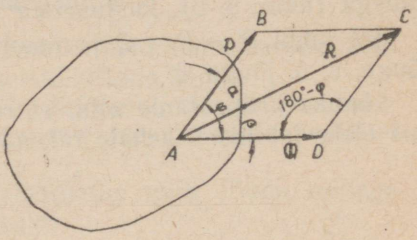
7. Rööpküliku aksioom.

Viies aksioom (rööpküliku aksioom). *Kahe samasse punkti rakendatud jõu resultantjõud on suuruselt ja suunalt võrdne rööpküliku diagonaaliga, mille külgedeks on antud jõud; resultantjõud on rakendatud samasse punkti.*

Joonisel 7 on kujutatud kaks jõudu $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$, mis on rakendatud punkti A. Ehitades nende jõudude põhjal rööpkülʼku, joonestame selle diagonaali AC. Suunatud sirglõik $\overline{AC}$ võrdub resultantjõuga $\mathfrak{R}$.

Kolmnurgas ABC on külg AC, mis kujutab resultantjõudu $\mathfrak{R}$, väiksem kahe teise külje AB ja BC, mis kujutavad jõude $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$, summast.

Seetõttu on ka resultantjõud väiksem komponentjõudude summast. Võib juhtuda, et resultantjõud on isegi väiksem kummastki komponentjõust. Näiteks joonisel 8 $P = 21$ kg, $Q = 26$ kg, $R = 12$ kg, järelikult jõud $\mathfrak{R}$, mille suurus on 12 kg, on ekvivalentne kahest jõust (21 kg ja 26 kg) koosneva jõusüsteemiga.



Joon. 7.

Näitame kuidas arvutada resultantjõudu antud komponentjõudude järgi.

Oletades, et jõud $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ on antud, loeme tuntuks nende jõudude suurusi P ja Q, samuti jõudude $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ suundade vahelist nurka φ (joon. 7).

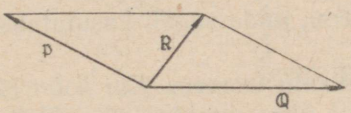
Kolmnurgast ABC saame:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos(180^\circ - \varphi).$$

Kuna $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$, siis

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\varphi}.$$

Juure ees on märk pluss, sest jõu suurus on positiivne suurus. Resultantjõu suunda saame määrata kas jõudude $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{R}$ vahelise nurgaga α, või jõudude $\mathfrak{Q}$ ja $\mathfrak{R}$ vahelise nurgaga β, kusjuures $\varphi = \alpha + \beta$.



Joon. 8.

Samast kolmnurgast leiame (siinuslause alusel), et

$$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(180^0 - \varphi)}.$$

Kuna $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$, siis

$$\sin\alpha = \frac{Q\sin\varphi}{R} \text{ ja } \sin\beta = \frac{P\sin\varphi}{R}.$$

Vaatleme kahte erijuhtu:

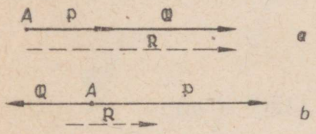
1. Jõud $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ asuvad samal sirgel ja on suunatud samas suunas (joon. 9, a).

Sel juhul $\varphi = 0$ ja $R = P + Q$, kusjuures resultantjõud on sama suunaga nagu komponentjõud.

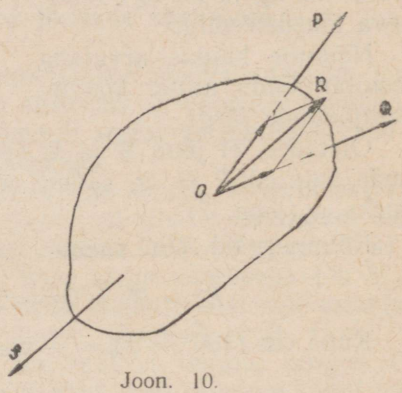
2. Jõud $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ asuvad samal sirgel, kuid on vastupidiste suundadega (joon. 9, b), kusjuures $P > Q$.

Sel juhul $R = P - Q$ ja resultantjõul on sama suund suurema jõuga, s. o. jõuga $\mathfrak{P}$.

Lõpuks kriipsutame alla, et resultantjõud ei ole reaalne jõud, mis oleks faktiliselt kehale rakendatud. Tegelikult on kehale raken-



Joon. 9.



Joon. 10.

datud kaks jõudu: $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$. Lahendades keha tasakaalu ülesannet, võime kaks jõudu $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ asendada ühe jõuga $\mathfrak{R}$.

Et keha tasakaal ei muutu jõu rakenduspunkti ümberpaigutamisega piki jõu mõjusirget, siis võib resultantjõu rakenduspunktiks võtta mistahes punkti tema mõjusirgel.

Tõestame teoreemi, mida sageli kasutatakse ülesannete lahendamisel.

Kolme jõu tasakaalu teoreem. *Kui kolm jõudu on tasakaalus ja kaks neist lõikuvad ühes punktis, siis läbib sama punkti ka kolmanda jõu mõjusirge.*

Olgu keha tasakaalus kolme jõu $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ ja $\mathfrak{F}$ mõjul (joon. 10), kusjuures kahe jõu, näiteks $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ mõjusirged lõikuvad punktis O.

Kandes jõud $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ punkti O, asendame nad ühe resultantjõuga $\mathfrak{R}$, mis on rakendatud samasse punkti. Selle jõu peab tasa-

kaalustama jõud $\mathfrak{F}$. Kolmanda aksioomi põhjal peavad jõud $\mathfrak{F}$ ja $\mathfrak{R}$ asuma samal sirgel, millest aga järgneb, et jõu $\mathfrak{F}$ mõjusirge peab läbima punkti *O*, mida oligi tarvis tõestada.

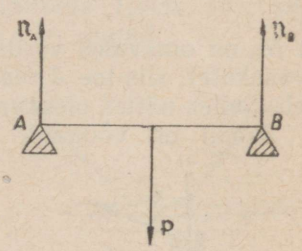
See teoreem annab kolme jõu tasakaalu tingimuse, s. t. tingimuse, ilma milleta tasakaal ei ole võimalik. Kuid see tingimus ei ole tasakaaluks küllaldane. Nimelt võib osutuda, et kolm jõudu $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ ja $\mathfrak{F}$ lõikuvad samas punktis, kuid ei ole tasakaalus. Näiteks kui joonisel 10 on jõud $\mathfrak{F}$ suunatud punkti *O* poole, s. t. vastupidiselt joonisel näidatule, siis ei ole tasakaal võimalik.

8. Toed ja reaktsioonid.

Nagu nimetatud p-s 1, ei ole enamik meid ümbritsevaid kehi vabad, nende liikumine on piiratud teiste kehade poolt.

Kehi, mis piiravad vaadeldava keha liikumist, nimetatakse tugedeks. Niidile riputatud raskusele on niit toeks, lauale asetatud kehale on laud toeks.

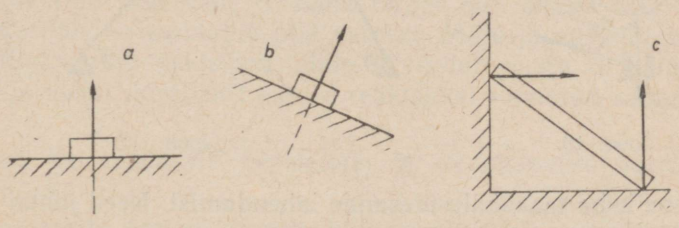
Antud keha ja toe vahel tekib vastastikune mõju. Jõudu, millega mõjub tugi kehale, nimetatakse toereaktsiooniks või ka lihtsalt reaktsiooniks. Jõudu, millega keha mõjub toele, nimetatakse keha surveks toele. Vastastikuse mõju aksioomi põhjal on surve ja reaktsioon suuruselt võrdsed, kuid suunatud vastupidiselt.



Joon. 11.

Eespool toodud näites (vt. joon. 2) on jõud $\mathfrak{F}_1$ niidi reaktsiooniks raskusele, ta on rakendatud raskusele ja on suunatud alt üles. Jõud $\mathfrak{F}$ on raskuse surve niidile, ta on rakendatud niidile ja suunatud alla.

Mehaanika ülesannete lahendamise seisukohalt erinevad reaktsioonid oluliselt teistest jõududest (näiteks raskusjõust, vedru elast-

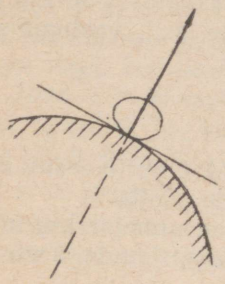


Joon. 12.

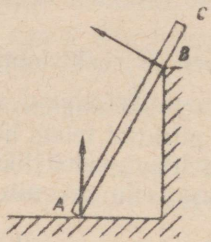
susjõust jne.). Jõu suurus, samuti ka suund on ette teada nii raskusjõu kui ka vedru elastsusjõu juures, s. t. enne selle keha tasakaalu-ülesande lahendamisele asumist, millele on jõud rakendatud. Sama aga ei saa ütelda toereaktsiooni kohta. Reaktsiooni suurus

ja suund olenevad sellest, missugused jõud on kehale rakendatud, samuti ka keha asendist. Seetõttu saame reaktsioone määrata alles pärast keha tasakaalu-ülesande lahendamist.

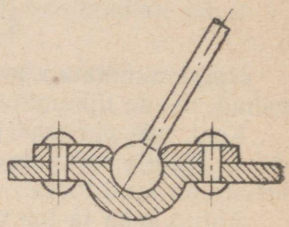
Näitena vaatleme tala AB (joon. 11), mis on keskelt koormatud raskusega P ja asub kahel toel (tala omakaalu me ei arvesta). Sümmeetria põhjal võime ütelda, et tugede A ja B reaktsioonid N_A



Joon. 13.



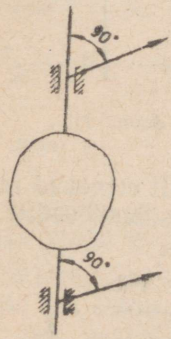
Joon. 14.



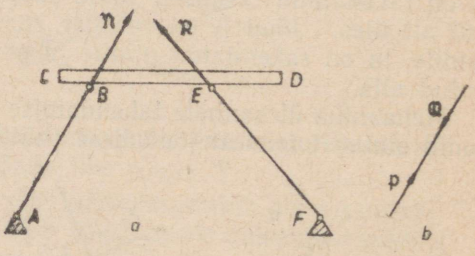
Joon. 15.

ja N_B on omavahel võrdsed. Kui nihutada raskust P toe A suunas (vasakule), siis toe A reaktsioon suureneb ja toe B reaktsioon väheneb. Selles näites olenevad toereaktsioonid raskuse asukohast talal.

Sageli on võimalik toereaktsiooni suunda kindlaks määrata



Joon. 16.



Joon. 17.

juba enne keha tasakaalu-ülesande lahendamist. Need juhud on toodud allpool.

Vaatleme mõningaid sagedamini esinevaid tugesid.

1. Keha toetub liikumatule tasapinnale, millel ta võib hõõrdumiseta libiseda. Reaktsioon on suunatud risti tasapinnaga keha suunas (joon. 12). Kui tasapinna asemel on keha toeks mingi teine pind, näiteks kerapind, siis reaktsioon on suunatud antud pinnale puutujaks oleva tasapinnaga risti või nagu öeldakse pinna nor-

maali pidi (kerapinna juures on reaktsioon suunatud kera raadiust pidi) (joon. 13).

2. Kui keha toetub oma sileda pinnaga liikumatule punktile, siis on reaktsioon suunatud keha pinna normaali pidi.

Esimese ja teise juhu erinevus selgub, kui vaatleme joonist 14. Redel AC toetub horisontaalsele põrandale punktis A ja vertikaalsele seinale punktis B. Põranda reaktsioon (punktis A) on põrandaga risti (1. juhtum), seina reaktsioon (punktis B) on risti redeliga (2. juhtum).

3. Kui tugi on selline, et kehal on liikumatu punkt, mille ümber ta võib pöörelda mistahes viisil, siis võib reaktsioonil olla mistahes seda punkti läbiv suund.

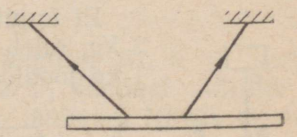
Sellise toe näiteks võib olla keratapp, kerašarniir (joon. 15) (kui mitte arvestada hõõrdumist).

Sel juhul ei saa reaktsiooni suunda ette määrata, see selgub alles pärast keha tasakaalu-ülesande lahendamist.

4. Kui tugi on selline, et keha võib pöörelda liikumatu telje ümber, piki mida ta võib hõõrdumiseta libiseda (joon. 16), siis reaktsioonil võib olla teljega mistahes risti olev suund.

Tõepoolest, tugi (laagrid) ei luba mingisugust liikumist risti pöörlemisteljega.

5. Mõlema otsaga šarniirselt ühendatud varda reaktsioon, kui varrast mõjutavad ainult tema otsadele rakendatud jõud, on suunatud piki varrast.



Joon. 18.

Vaatleme varda AB (joon. 17, a) tasakaalu, kui ta toetab tala CD.

Joonisel 17, b on see varras kujutatud eraldi. Ta on kahe teda suruva jõu toimel tasakaalus. Need jõud on: $\mathfrak{Q}$ — tala poolt ja $\mathfrak{P}$ — šarniiri poolt. Kuna need jõud on tasakaalustatud, siis peavad nad olema suunatud piki ühte ja sama sirget AB. Seega tala survejõud $\mathfrak{Q}$ vardale on suunatud piki varrast. Mõju ja vastumõju aksioomi põhjal varda reaktsioon talale $\mathfrak{R}$ võrdub jõuga $\mathfrak{Q}$ ja on suunatud talle vastu. Järelikult on see reaktsioon suunatud samuti piki varrast.

Samuti ka varda EF reaktsioon $\mathfrak{R}$ on suunatud varrastpidi (joon. 17, a).

6. Kui varda asemel on niit, mille kaalu võib mitte arvestada, siis tõestame samuti nagu eelneval juhulgi, et niidi reaktsioon on suunatud piki niiti (joon. 18).

Erinevalt vardast ei saa niiti suruda, teda saab ainult tõmmata, mille tõttu reaktsioonil saab olla ainult üks suund ja nimelt kehalt niidi kinnituspunkti suunas.

II peatükk.

Vektoriaalarvutuse elemendid.

9. Vektorite liitmine ja lahutamine.

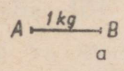
Iga suurust, mille iseloomustamiseks jätkub ainult ühest arvust, nimetatakse skalaarseks suuruseks või ka lihtsalt *skaalariks*. Aeg, temperatuur on skaalarid.

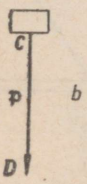
Suurust, mida iseloomustab peale arvu veel suund, nimetatakse vektoriaalseks suuruseks või lihtsalt *vektoriks*.

Vektoriaalse suuruse näitena võib nimetada jõudu. Edaspidi me tutvume ka teiste vektoriaalsete suurustega.

Vektorit märgitakse gooti tähega ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, ...) ja kujutatakse suunatud joonlõiguna, millel on vektori suund, pikkus aga võrdub (leppemastaabis) vektori arvulise väärtusega. Seda arvu (suunatud joonlõigu pikkust) nimetatakse vektori mooduliks ja teda tähistatakse sama tähega nagu vektoritki, kuid tavalises kirjas (P, Q, ...).

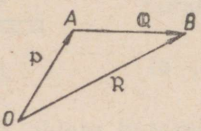
Mõnikord tähistatakse vektorit kahe tähega ja joonega nende peal, seejuures tähed märgivad vektori algust ja lõppu. Näiteks võime jõudu $\mathfrak{P}$ (joon. 19) tähistada $\overline{CD}$, s. t. $\mathfrak{P} = \overline{CD}$.





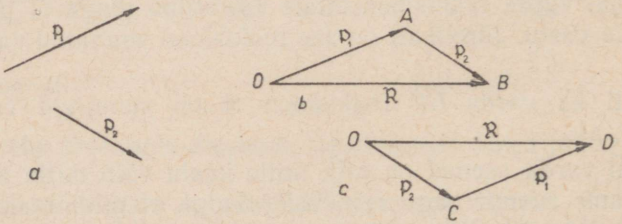
Joon. 19.

Et kujutada vektori abil koormuse kaalu, mis on 2 kg, tuleb määrata jõu mastaap (joonisel 19 vastab 1 kg joonlõigule AB), ja kanda joonisele vertikaalselt alla joonlõik CD (joon. 19, b), mille pikkus on AB pikkusest kaks korda suurem, ja selle joonlõigu otsale teha nool. Vektor $\mathfrak{P}$ on koormuse raskusjõud. Selle vektori moodul $P = 2$ kg.



Joon. 20.

Kaks vektorit on võrdsed, kui nad on paralleelsed, samaselt suunatud ja on ühesuguse mooduliga.



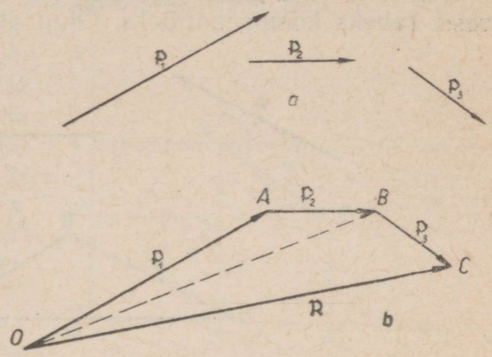
Joon. 21.

Vektoritega saame teostada skalaarsete suurustega (arvudega) analoogilisi operatsioone. Lähtume rööpküliku aksioomist, mis või-

maldab kahe antud vektori (jõu) olemasolu puhul leida kolmanda vektori (resultandi). Selleks peame ehitama rööpküliku (*ABCD* joonisel 7). Resultandi võime saada ka ainult kolmnurga ehitamisel.

Võtame mingi punkti *O* (joon. 20) ja joonestame sellest punktist vektori $\mathfrak{P}$, mille lõpust joonestame vektori $\mathfrak{Q}$. Siis sirglõik *OB*, mille algus on *O* ja lõpp *B* (vektori $\mathfrak{Q}$ lõpp), kujutab resultanti $\mathfrak{R}$.

Olgu antud kaks vektorit $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ (joon. 21, a). Vabalt võetud punktist *O* kanname joonisele vektori $\mathfrak{P}_1$ ja selle lõpust vektori $\mathfrak{P}_2$. Vektorit $\mathfrak{R}$, mille tõmbame vektori $\mathfrak{P}_1$ algusest vektori $\mathfrak{P}_2$ lõppu, nimetatakse vektorite $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ summaks. Teostatud operatsiooni nimetatakse vektorite liitmiseks ja teda kujutatakse järgmiselt: $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$. Kui me joonestame alguses vektori $\mathfrak{P}_2$ ja selle järele vektori $\mathfrak{P}_1$, siis saame kolmnurga *OCD* (joon. 21, c). See kolmnurk on võrdne kolmnurgaga *OAB* joonisel 21, b ja seetõttu külg *OD*, mis kujutab vektorite $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{P}_1$ summat, võrdub küljega *OB*, mis kujutab vektorite $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ summat. Niisiis ei muutu vektorite summa liidetavate kohtade vahetuse tõttu, s. t.



Joon. 22.

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_1.$$

See vektoriaalse liitmise omadus on analoogiline skalaarsete suuruste liitmise omadusega.

Et liita mitu vektorit, selleks liidame nad järjestikku paarikaupa. Olgu näiteks liita kolm vektorit: $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ (joon. 22, a). Liites neist kaks, $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$, saame nende summa (vektor $\overline{OB}$, mis on kujutatud joonisel 22, b kriipsjoonega); liites seejärel vektori $\overline{OB}$ vektoriga $\mathfrak{P}_3$, saame otsitava summa $\mathfrak{R}$, mis võrdub $\overline{OC}$-ga (joon. 22, b).

Niisiis selleks, et liita mitu vektorit, joonestatakse nad järjestikku üksteise järele. Tekib hulknurk (vektorite $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ puhul hulknurk *OABC*), millel üks külg puudub (antud juhul *OC*). Vektor, mille algus on hulknurga esimeses tipus *O* ja lõpp hulknurga viimases tipus *C*, on antud vektorite summaks.

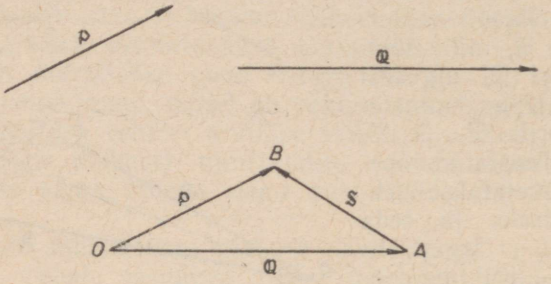
Ei ole raske kontrollida, et ka siin summa ei muutu liidetavate kohamuutuste tõttu.

Vektorite lahutamine on liitmisele vastupidine operatsioon. Kahe vektori $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ vaheks nimetatakse kolmandat vektorit $\mathfrak{S}$, mis lahutatavaga liitmisel annab vähendatava.

Vektorite $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ vahe saamiseks joonestame vabalt valitud punktist O mõlemad vektorid $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ ja seejärel ühendame nende lõpp-punktid vektoriga $\mathfrak{S}$. Tõepoolest, kolmnurgas OAB (joon. 23) on vektor $\mathfrak{P}$ vektorite $\mathfrak{Q}$ ja $\mathfrak{S}$ summa, järelikult

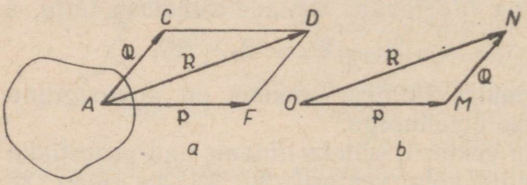
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}.$$

Vektorite lahutamise operatsiooni saame kasutada jõu lahutamisel kaheks komponentjõuks. Olgu antud jõud $\mathfrak{R}$, mis on raken-



Joon. 23.

datud keha punkti A (joon. 24, a). Seda jõudu on tarvis lahutada kaheks jõuks nii, et üks neist võrduks jõuga $\mathfrak{P}$, mis on rakendatud samasse punkti. Me vaatleme jõudu $\mathfrak{R}$ kui jõudude $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ resul-



Joon. 24.

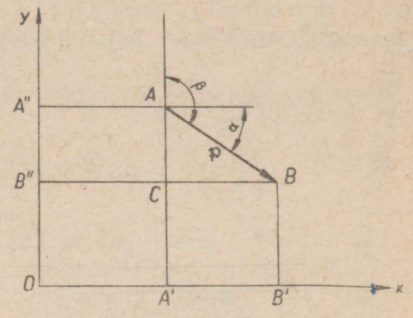
tanti. Üks neist jõududest ($\mathfrak{P}$) on antud, on tarvis leida teine. Rööpküliku aksioomist järgneb, et resultant on komponentide vektoriaalne summa. Seetõttu lahutame vektorist $\mathfrak{R}$ vektori $\mathfrak{P}$ ja saame vektori $\mathfrak{Q}$. See operatsioon on teostatud joonisel 24, b. Kuna jõudude rööpküliku aksioomi kohaselt jõud $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ ja $\mathfrak{R}$ on rakendatud samasse punkti, siis joonestame punktist A vektori $\overline{AC}$, mis võrdub vektoriga $\overline{MN}$ ja saamegi otsitava jõu $\mathfrak{Q}$.

Ei ole raske veenduda, et kujund $ACDF$ on rööpkülik, mille küljepikkused võrduvad komponentjõududega $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ ja diagonaal — resultantjõuga $\mathfrak{R}$.

10. Vektori projektsioon teljele.

Selleks, et praktiliselt leida mitme vektori summat, on tarvis joonestada hulknurk. See ei ole alati käepärane, näiteks juhul, kui liidetavad vektorid asetsevad eri tasapindades. On olemas teine meetod, kus geomeetriline ehitamine asendatakse skalaarsete suurustega teostatavate arvutustega. Seda meetodit nimetatakse projektsioonide meetodiks või analüütiliseks meetodiks.

Vaatleme esialgu vektoreid, mis asuvad ühes tasapinnas. Selles tasapinnas kujutame sirge Ox ja anname talle kindla suuna (joonisel 25 paremale). Nimetame teda x-teljeks. Punktist O joonestame risti teljega x telje y. Võtame tasapinnas xy vektori $\mathfrak{P}$. Selle vektori algusest tõmbame teljele x ristjoone AA'. Selle ristjoone lõikepunkti A' teljega x nimetatakse punkti A projektsiooniks teljele x. Analoogiliselt on punkt B' punkti B projektsiooniks teljele x, punktid A'' ja B'' aga punktide A ja B projektsioonideks teljele y.



Joon. 25.

Punktid A' ja B' on telje lõigu $A'B'$ lõpp-punktideks. Seda joonlõiku, võetuna vastava märgiga, nimetatakse vektori $\mathfrak{P}$ projektsiooniks teljele x. Projektsiooni märk määratakse kindlaks järgmiselt. Anname sirglõigule $A'B'$ suuna vektori $\mathfrak{P}$ alguse projektsioonist tema lõpu projektsiooni suunas, s. t. punktist A' punkti B' suunas. Kui see suund ühtib x-telje suunaga, siis projektsioon loetakse positiivseks, kui ta aga on vastupidine, siis on projektsioon negatiivne. Meie näites (joon. 25) on vektori $\mathfrak{P}$ projektsioon x-teljele positiivne, y-teljele aga — negatiivne (sest sirglõigu $A''B''$ suund on vastupidine y-telje suunale).

Vektori $\mathfrak{P}$ projektsiooni x-teljele tähistame P_x. Niisiis

$$P_x = A'B' \text{ ja } P_y = -A''B''.$$

Tähistame nurgad, mida moodustab vektor $\mathfrak{P}$ telgedega x ja y, tähtedega α ja β. Kolmnurgas ABC on külg AB võrdne P-ga, külg CB on võrdne $A'B'$-ga ja külg AC on võrdne $A''B''$-ga. Sellest kolmnurgast saame:

$$A'B' = P \cos \alpha$$

ja

$$A''B'' = P \cos (180° - \beta) = -P \cos \beta,$$

seepärast

$$P_x = A'B' = P \cos \alpha$$

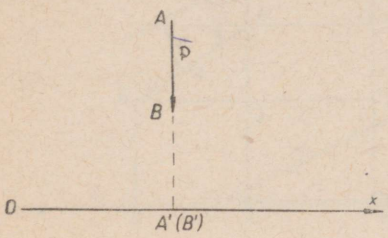
ja

$$P_y = -A''B'' = -(-P\cos\beta) = P\cos\beta.$$

Seega

$$P_x = P\cos\alpha, \quad P_y = P\cos\beta, \tag{1}$$

s. t. vektori projektsioon teljele võrdub vektori mooduli korrutisega selle nurga koosinusega, mille moodustab vektor teljega.

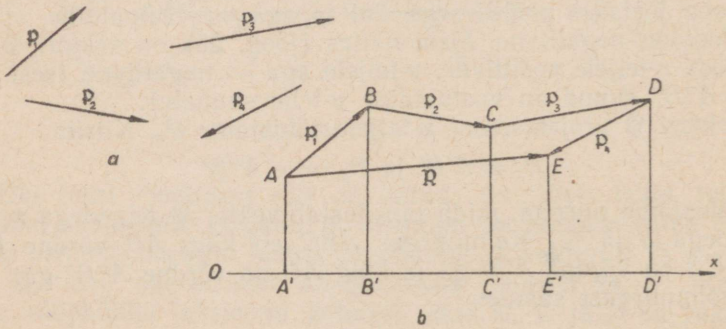


Joon. 26.

Kui see nurk on teravnurk (meie näites nurk α), siis $\cos\alpha > 0$ ja projektsioon on positiivne, kui see on aga nürinurk (meie näites nurk β), siis $\cos\beta < 0$ ja projektsioon on negatiivne. Lõpuks, kui see nurk on 90°, siis vektori projektsioon võrdub nulliga (sest $\cos 90° = 0$). See juht on kujutatud joonisel 26. Nagu nähtub jooniselt, punktid A' ja B' langevad x-teljel ühte punkti ja $P_x = A'B' = 0$.

Järelikult, kui vektor on teljega risti, siis tema projektsioon sellele teljele võrdub nulliga.

Teoreem. *Vektoriaalse summa projektsioon teljele on võrdne liidetavate vektorite projektsioonide summaga.*



Joon. 27.

Joonisel 27, a on kujutatud liidetavad vektorid $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ ja joonisel 27, b on kujutatud nende vektorite liitmise operatsioon:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 + \mathfrak{P}_4. \tag{2}$$

Projitseerime hulknurga $ABCDE$ kõik tipud x-teljele ja tähistame nende projektsioonid tähtedega A', B', C', D' ja E'. Sel juhul

$$P_{1x} = A'B'$$
$$P_{2x} = B'C'$$
$$P_{3x} = C'D'$$
$$P_{4x} = -D'E'.$$

Seepärast

$$P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + P_{4x} = A'B' + B'C' + C'D' - D'E' = A'E'.$$

Kuna $A'E'$ ei ole midagi muud kui vektori $\mathfrak{R}$ projektsioon x-teljele, s. t. $A'E' = R_x$, siis

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + P_{4x}, \qquad (3)$$

mis ongi toodud teoreemi tõestuseks.

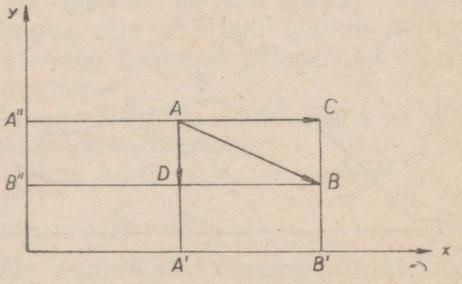
Kriipsutame alla vahet võrduste (2) ja (3) vahel. Võrdus (2) on vektoriaalne võrdus. Ta kujutab sümboolselt hulknurka $ABCDE$, ehk teisiti öeldes, selleks, et vahetult kasutada võrdust (2), tuleb tingimata joonestada välja hulknurk $ABCDE$. Võrdus (3) on tavaline algebraline võrdus, kus tuleb teostada tavaline algebraline liitmine, võttes pluss-märgiga positiivsed projektsioonid ja miinus-märgiga negatiivsed projektsioonid.

Tõestatud teoreem annab võimaluse leida vektoriaalset summat $\mathfrak{R}$ hulknurka ehitamata.

Tõepoolest, kui liidetavad vektorid $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ on antud, siis võib valemite (1) abil arvutada nende projektsioonid x- ja y-teljele ja seejärel, kasutades tõestatud teoreemi, leida otsitava vektori $\mathfrak{R}$ projektsioonid R_x ja R_y, s. t.

$$\left.\begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + P_{4x}, \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + P_{4y}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Selleks, et ehitada vektorit $\mathfrak{R}$, toimime järgmiselt. Võtame vabalt valitud punkti A (joon. 28) ja joonestame sellest punktist sirglõigu $AC = R_x$ x-teljega paralleelselt ja samas suunas, kui $R_x > 0$, ja vastassuunas, kui $R_x < 0$. Analoogiliselt joonestame sirglõigu $AD = R_y$ paralleelselt y-teljega, jälgides sama reeglit sirglõigu AD suuna kohta vastavalt R_y märgile (joonisel 28 on võetud juhtum, kus $R_x > 0$ ja AC suund langeb ühte x-telje suunaga, $R_y < 0$ ja AD suund on y-teljega vastupidine).



Joon. 28.

Ehitades sirglõikude AC ja AD põhjal ristküliku $ACBD$ veendume, et selle diagonaal AB annab just meile vajaliku vektori $\mathfrak{R}$. Tõepoolest ei ole raske veenduda, et vektori $\mathfrak{R}$ projektsioonid x- ja y-teljel võrduvad just R_x ja R_y-ga.

Vektori moodul R leitakse täisnurksest kolmnurgast ACB (või ADB), mille hüpotenuus on R ja kaatetid R_x ja R_y. Seega

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \tag{5}$$

III peatükk.

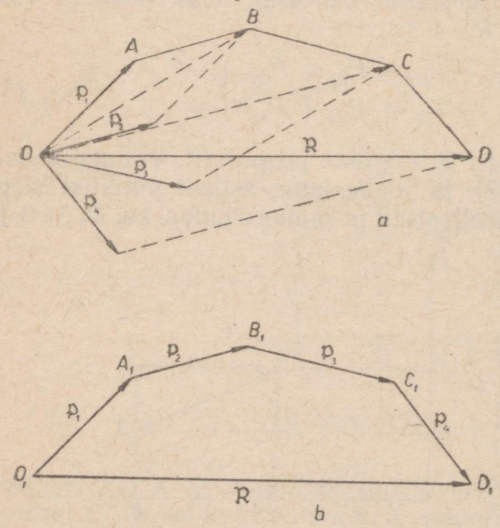
Ühte punkti rakendatud jõudude tasapinnaline süsteem.

11. Geomeetriline meetod.

Alustame staatika põhiülesande — jõudude mõju all oleva keha tasakaalu tingimuste leidmise — käsitlemist.

Alguses vaatleme juhtu, kus kõik kehale rakendatud jõud asuvad samas tasapinnas.

Esimeses järjekorras käsitleme jõudude süsteemi, mis on rakendatud keha ühte punkti. Samaselt tuleb käsitleda ka juhtu, kui jõud on rakendatud keha eri punktidesse, kuid nende mõjusirged lõikuvad ühes punktis. Tõepoolest, keha tasakaalu rikkumata võime kõikide jõudude rakenduspunktid üle viia sellesse lõikumispunkti ja nii saada ühte punkti rakendatud jõudude süsteemi.



Joon. 29.

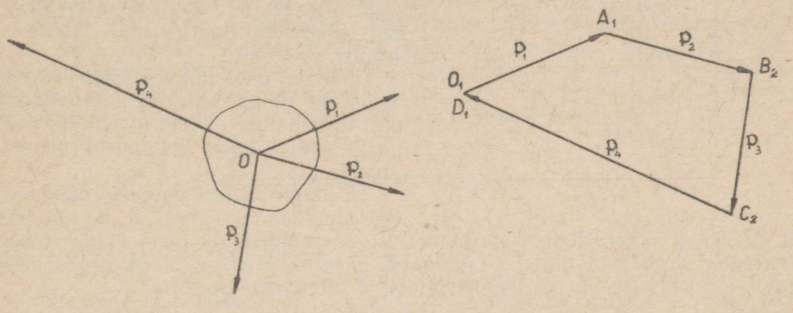
Olgu n jõudu, mis on rakendatud keha ühte punkti (joonisel 29, a on võetud neli jõudu). Liidame nad järjekorras rööpküliku reegli järgi. Alguses saame resultandi $\overline{OB}$ jõududele $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$, seejärel liidame selle resultandiga jõu $\mathfrak{P}_3$ ja saame kolme jõu $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{P}_3$ resultandi $\overline{OC}$, lõpuks saame jõu $\mathfrak{R} = \overline{OD}$, mis on antud jõusüsteemi resultandiks.

Liitmise operatsiooni saab teostada ka ilma rööpkülikute ehitamiseta. Selleks on küllaldane

ehitada hulknurk $O_1A_1B_1C_1D_1$ (joon. 29, b), mille küljed $\overline{O_1A_1}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1}$ võrduvad jõududega $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$.

Hulknurka $O_1A_1B_1C_1D_1$ nimetatakse jõuhulknurgaks. Külge O_1D_1 nimetatakse jõuhulknurga sulgevaks küljeks. Vektor $\mathfrak{R} = \overline{O_1D_1}$ annab resultandi suuruse ja suuna. Resultandi rakenduspunktiks on punkt O (joon. 29, a) või mistahes punkt resultandi mõjusirgel, mis läbib punkti O.

Võrreldes seda hulknurka hulknurgaga, mille saime vektorite summa leidmisel p-s 9, näeme, et resultant $\mathfrak{R}$ võrdub antud jõudude vektoriaalse summaga.



Joon. 30.

Ühte punkti rakendatud jõudude resultantjõud on rakendatud samasse punkti ja võrdub nende vektoriaalse summaga.

Kui kehale on rakendatud n jõudu $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ..., $\mathfrak{P}_n$, siis võime kirjutada:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n.$$

Kriipsutame veel kord alla, et see vektoriaalne võrdus on jõuhulknurga sümboolne kujutamine.

Oletame, et jõuhulknurga ehitamise tulemusena selle viimane tipp D_1 (joon. 30) langeb ühte esimese tipuga O_1. Sellist jõuhulknurka nimetatakse kinniseks jõuhulknurgaks. Resultant $\mathfrak{R}$ võrdub sel juhul ilmselt nulliga ja süsteem on tasakaalus. Vastupidi, kui jõusüsteem on tasakaalus, siis resultant võrdub nulliga ja jõuhulknurk on kinnine. Nii saame järgmise ühte punkti rakendatud jõusüsteemi tasakaalu tingimuse:

Ühte punkti rakendatud jõudude süsteemi tasakaaluks on tarvilik ja küllaldane, et jõuhulknurk oleks kinnine.

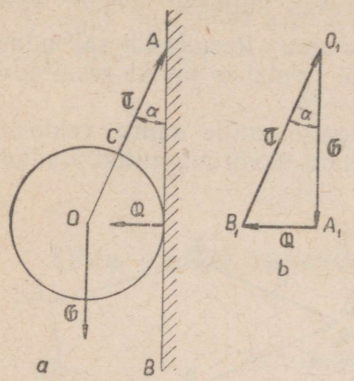
Sümboolselt võib seda kirjutada vektoriaalse võrdusena

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n = 0, \qquad (6)$$

mis tähendab, et antud jõudude vektoriaalne summa võrdub nulliga, s. o. nendest jõududest ehitatud jõuhulknurk on kinnine.

Ülesanne 1. Vertikaalsele siledale seinale AB (joon. 31, a) on riputatud nööri AC abil kera O. Nöör moodustab seinaga nurga α. Kera kaal on G. Leida nöörile mõjuv pingutusjõud ja kera surve seinale.

Kera O on tasakaalus kolme jõu mõjul: 1) kera kaal $\mathfrak{G}$, mis on rakendatud kera tsentrisse ja on suunatud vertikaalselt alla, 2) seina reaktsioon $\mathfrak{Q}$, mis on rakendatud kera kokkupuutepunkti seinaga ja on suunatud seinaga risti (vt. p. 8, juhtum 1), 3) nööri reaktsioon $\mathfrak{T}$, mis on rakendatud punkti C, kus nöör on kinnitatud kera külge, ja on suunatud mööda sirget AC, kui mitte arvestada nööri kaalu (vt. p. 8, juhtum 6).



Joon. 31.

Et kera on tasakaalus, siis kolm jõudu $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{Q}$ ja $\mathfrak{T}$ peavad lõikuma ühes punktis ja nimelt kera tsentris, mida läbivad jõud $\mathfrak{G}$ ja $\mathfrak{Q}$. Järelikult peab ka sirge AC, kui jõud on tasakaalus, läbima kera tsentri.

Nii on meil kolmest ühte punkti rakendatud jõust koosnev süsteem, mis on tasakaalus. Seetõttu peab jõuhulknurk (antud juhul kolmnurk) olema kinnine.

Ehitame selle kolmnurga. Vabalt võetud punktist O_1 (joon. 31, b) joonestame jõu $\mathfrak{G}$ ($O_1A_1 = G$). Selle jõu lõpust, s. t. punktist A_1, joonestame jõuga $\mathfrak{Q}$ paralleelse sirge ja punktist O_1 jõuga $\mathfrak{T}$ paralleelse sirge. Need sirged lõikuvad punktis B_1, mis on jõu $\mathfrak{Q}$ lõpuks ja jõu $\mathfrak{T}$ alguseks. Seetõttu

$$A_1B_1 = Q \quad \text{ja} \quad B_1O_1 = T.$$

Täisnurksest kolmnurgast $O_1A_1B_1$ leiame

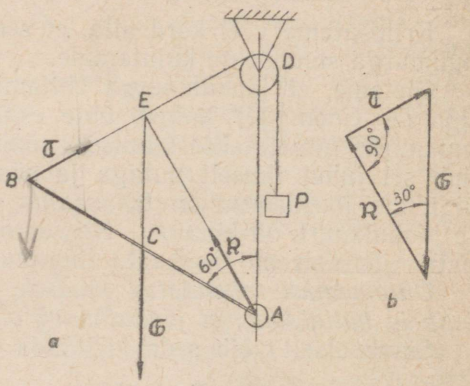
$$Q = G \operatorname{tg} \alpha \quad \text{ja} \quad T = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Me leidsime seina reaktsiooni $\mathfrak{Q}$ kerale. Kera surve seinale on ilmselt võrdne Q-ga, kuid vastupidise suunaga.

Ülesande 1 lahendamisel võime eritleda järgmisi etappe, mida on otstarbekohane kasutada kõigi staatika ülesannete lahendamisel.

1. etapp. Määrame kindlaks, missuguse keha tasakaalu kavatseme vaadelda. 1.-s ülesandes vaatlesime kera tasakaalu.

2. etapp. Teeme kindlaks jõud, mis on kehale rakendatud. Välja arvatud raskusjõud, mis mõjub kaugusest, on kõik teised jõud rakendatud punktidesse, kus antud keha puutub kokku teiste kehadega.



Joon. 32.

3. etapp. Kasutades tasakaalu tingimusi, leiame tundmata suurused.

Ülesanne 2. Aknaraam AB (joon. 32, a) kaaluga $G = 2$ kg on pöörduv ümber šarniiri A ja on avatud 60°-se nurga võrra. Teda hoiab selles asendis nöör BDP, mis läheb üle ploki ja kannab teises otsas raskust P. Leida P suurus, mis on vajalik raami tasakaalus hoidmiseks, samuti ka šarniirile A mõjuva reaktsiooni suurus ja suund.

Raamile AB mõjuvad järgmised jõud: 1) raami kaal $\mathfrak{G}$, mis on rakendatud tema keskkohta C, 2) nööri reaktsioon $\mathfrak{T}$, mis on suunatud piki nööri ja võrdub raskusega P (kui mitte arvestada hõõrdumist plokis D ja nööri raskust), 3) šarniiri A reaktsioon $\mathfrak{R}$, mis läbib punkti A. $\mathfrak{R}$ suunda ei ole esialgu võimalik kindlaks määrata (vt. p. 8, juhtum 3).

Reaktsiooni $\mathfrak{R}$ suuna kindlaksmääramiseks rakendame kolme jõu tasakaalu teoreemi. Selle teoreemi järgi peab $\mathfrak{R}$ läbima jõudude $\mathfrak{G}$ ja $\mathfrak{T}$ mõjusirgete lõikepunkti E. Niisiis on $\mathfrak{R}$ suunatud mööda sirget AE.

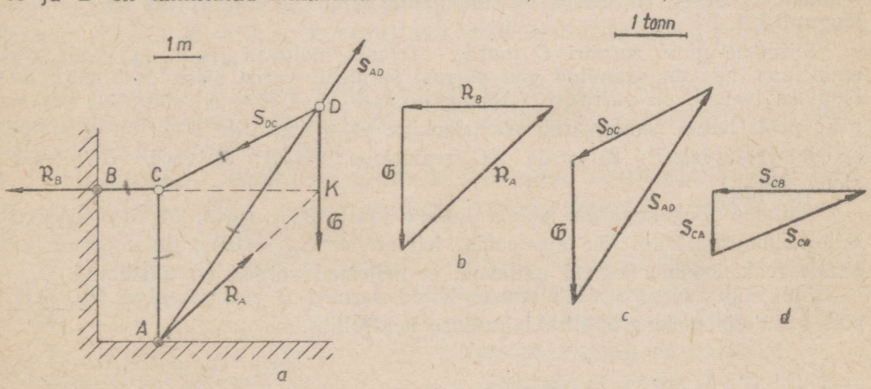
Sirge CE läbib kolmnurga ABD külje AB keskkohta paralleelselt küljega AD. Järelikult jagab punkt E külje BD pooleks. Kuna kolmnurk ABD on võrdhaarne ($AB = AD$), siis AE, olles võrdhaarse kolmnurga aluse poolitajaks, on ühtlasi ka tipunurga poolitaja, s. t. AE jagab nurga BAD pooleks.

Ehitame jõuhulknurga (joon. 32, b). Sellest kolmnurgast leiame:

$$T = P = G \sin 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ kg};$$

$$R = G \cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = 1{,}73 \text{ kg}.$$

Ülesanne 3. Tõstekraana (joon. 33, a) koosneb neljast vardast BC, CD, AD ja AC, mis on ühendatud šarniiridega A, B, C ja D, kusjuures šarniirid A ja B on kinnitatud liikumatult. On antud, et $AC = 3{,}4$ m, $CD = 4$ m,



Joon. 33.

$AD = 6{,}3$ m. Tõstetava koorma kaal $G = 2$ t. Varraste kaalu arvestamata leida toereaktsioonid $\mathfrak{R}_A$ ja $\mathfrak{R}_B$ ning sisejõud varrastes.

Iga varras on tasakaalus kahe jõu mõjul, mis talle on rakendatud tema otsadesse šarniiridest, kuhu varras kinnitub. Need jõud on suunatud piki varrast (vt. p. 8, juhtum 5) ja suruvad või tõmbavad seda varrast. Jõudu, mis surub või tõmbab varrast, nimetataksegi varda sisejõuks.

Lahendame ülesande graafiliselt. Valime pikkuse mastaabi ja kujutame selles mastaabis kraana. Punktist A joonestame mastaabis vertikaalselt ülesse $AC = 3{,}4$ m, edasi punktidest A ja C joonestame kaared raadiustega

6,3 m ja 4 m. Nende kaarte lõikepunkt on D. Pikkus BC ei ole ülesande lahendamisel oluline ja ta on vabalt valitav.

Vaatleme kraana tasakaalu. Talle mõjuvad järgmised jõud: 1) koorma raskus $\mathfrak{G}$, 2) šarniiri B reaktsioon $\mathfrak{R}_B$, mis on suunatud piki varrast (seda nõuavad varda BC tasakaalu tingimused), 3) šarniiri A reaktsioon $\mathfrak{R}_A$.

Jõu $\mathfrak{R}_A$ suuna leiame kolme jõu tasakaalu teoreemi abil, mille järgi reaktsioon $\mathfrak{R}_A$ peab läbima punkti K, kus lõikuvad jõudude $\mathfrak{G}$ ja $\mathfrak{R}_B$ mõjusirged. Ühendades sirgega punktid A ja K, leiame jõu $\mathfrak{R}_A$ mõjusirge.

Seejärel, valides jõu mastaabi, ehitame jõukolmnurga jõududele $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{R}_A$ (joon. 33, b). Selleks joonestame vabalt valitud punktist valitud mastaabis jõu $\mathfrak{G}$, tõmbame selle jõu algusest ja lõpust paralleeljooned jõududele $\mathfrak{R}_A$ ja $\mathfrak{R}_B$. Nende sirgete lõikumispunkt on jõu $\mathfrak{R}_A$ lõpuks ja jõu $\mathfrak{R}_B$ alguseks. Mõõtes valitud jõumastaabis selle kolmnurga küljed, saame $R_B = 2{,}1$ t ja $R_A = 2{,}9$ t.

Edasi leiame sisejõud varrastes. Selle asemel, et leida varda sisejõudu, s. t. jõudu, mis on rakendatud vardale šarniiri poolt, leiame temale vastupidise jõu, s. t. jõu, mis on rakendatud vardalt šarniirile.

Vaatleme šarniiri D tasakaalu. Talle mõjuvad jõud: 1) koormus $\mathfrak{G}$, 2) varda AD reaktsioon ($\mathfrak{S}_{AD}$), mis on suunatud mööda varrast AD, 3) varda DC reaktsioon ($\mathfrak{S}_{DC}$), mis on suunatud mööda varrast DC.

Ehitame jõukolmnurga (joon. 33, c). Mõõtes mastaabis selle kolmnurga külgi, leiame: $S_{DC} = 2{,}3$ t ja $S_{AD} = 3{,}6$ t.

Antud reaktsioonide suunad leiame samuti jõukolmnurgast. Rakendades leitud reaktsioonid $\mathfrak{S}_{DC}$ ja $\mathfrak{S}_{AD}$ mõttes šarniirile D (joonisel 33, a), näeme, et $\mathfrak{S}_{AD}$ on suunatud vardalt šarniiri poole. Siit järeldame, et jõud, millega mõjub šarniir vardale, on suunatud vastupidi, s. t. šarniirilt varda sisemusse, järelikult on varras surutud. Samal viisil arutades leiame, et varras DC on tõmmatud. Seega on varras DC tõmmatud jõuga 2,3 t ja varras AD surutud jõuga 3,6 t.

Siirdume nüüd šarniiri C juurde. Temale mõjuvad jõud: 1) varda CD reaktsioon, mis on suunatud piki varrast šarniirilt varda sisse, sest nagu me kindlaks tegime, on varras CD tõmmatud; see jõud $\mathfrak{S}_{CD}$ on suuruselt võrdne meie poolt leitud sama varda reaktsiooniga $\mathfrak{S}_{DC}$ šarniirile D ja on suunatud sellele vastupidiselt; 2) varda AC reaktsioon ($\mathfrak{S}_{CA}$); 3) varda BC reaktsioon ($\mathfrak{S}_{CB}$).

Ehitame jõukolmnurga, alates tuntud jõust $\mathfrak{S}_{CD}$ (joon. 33, d). Mõõtes selle kolmnurga külgi jõu mastaabis, leiame, et $S_{CA} = 0{,}9$ t ja $S_{CB} = 2{,}1$ t. Nende reaktsioonide suunad näitavad, et mõlemad vardad on tõmmatud.

Jõu $\mathfrak{S}_{BC}$ suurus võrdub ennem leitud šarniiri B reaktsiooniga R_B. Seda võib kasutada meie graafilise lahenduse kontrolliks.

12. Analüütiline meetod.

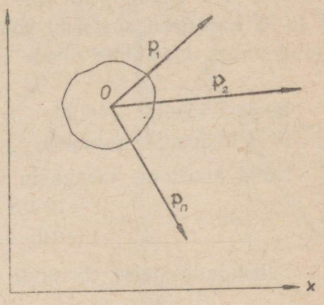
Näitame, kuidas leida ühte punkti rakendatud jõudude resultanti projektsioonide meetodil.

Olgu mingisse kehal olevasse punkti O rakendatud n jõudu: $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ..., $\mathfrak{P}_n$ (joon. 34). Kuna need jõud on antud, siis on teada ka nende moodulid P_1, P_2, ..., P_n, samuti ka nende suunad, s. t. on teada nurgad, mille need jõud moodustavad x- ja y-teljega, seepärast võime võrduste (1) abil arvutada nende jõudude projektsioonid x- ja y-teljele. Kuna resultant võrdub antud jõu-

dude vektoriaalse summaga, siis tema projektsioonid võime leida valemite (4) abil, mis annavad vektoriaalse summa projektsioonid telgedele, s. t.

$$\left.\begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \ldots + P_{nx}, \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \ldots + P_{ny}. \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

Edasi leiame resultandi mooduli valemi (5) abil: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$. Seejärel joonestame punktist O, kuhu peab olema rakendatud resultant, R_x ja R_y-ga võrdsed sirglõigud, nagu on näidatud p-s 10, ning leiame vektori $\mathfrak{R}$ kui külgede R_x ja R_y kaudu joonestatud rööpküliku diagonaali. Kui jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ süsteem on tasakaalus, siis resultant R võrdub nulliga, järelikult võrduvad nulliga ka tema projektsioonid R_x ja R_y. Võrduse (4') põhjal saame:



Joon. 34.

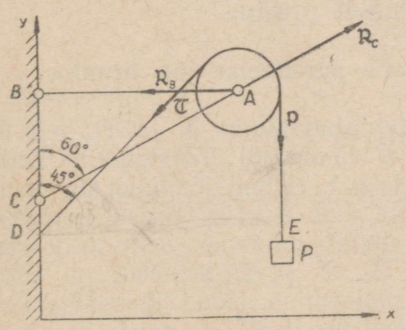
$$\left.\begin{aligned} P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx} &= 0, \\ P_{1y} + P_{2y} + \ldots + P_{ny} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Vastupidi, kui on täidetud võrdusе (7) tingimused, siis võrduse (4') põhjal leiame, et $R_x = 0$ ja $R_y = 0$ ja järelikult vastavalt võrdusele (5) ka $R = 0$, s. t. resultant võrdub nulliga ja järelikult on süsteem tasakaalus.

Nii jõuame järgmise ühte punkti rakendatud jõudude süsteemi tasakaalu tingimuse juurde, mis on samaväärne eelmises punktis formuleeritud tingimusega:

Ühte punkti rakendatud jõudude süsteemi tasakaaluks on tarvilik ja küllaldane, et nende jõudude projektsioonide summa nii x- kui ka y-teljele võrduks nulliga.

Võrrandit (7), mis väljendab selliselt formuleeritud tasakaalu võrrandit, nimetatakse ühte punkti rakendatud jõudude süsteemi tasakaalu võrrandiks.



Joon. 35.

Ülesanne 4. Plokki A hoiavad üleval kaks varrast AB ja AC, mis on šarniirselt kinnitatud vertikaalse seina külge, kusjuures varras AB on horisontaalne ja varras AC moodustab seinaga 60°-se nurga (joon. 35). Üle ploki on viidud nöör, mille üks ots D on kinnitatud seina külge nii, et nöör moodustab seinaga 45°-se nurga, teise otsa E külge on aga kinnitatud raskus $P = 10$ kg. Leida sisejõud varrastes AB ja AC, jättes arvestamata varraste, ploki ja nööri kaalu.

Vaatleme ploki A tasakaalu. Temale mõjuvad jõud: 1) vertikaalse nööri osa sisejõud $\mathfrak{P}$, mis võrdub raskuse kaaluga, s. o. 10 kg; 2) nööri kaldse osa sisejõud $\mathfrak{T}$, mis oma suuruselt on võrdne nööri vertikaalse osa sisejõuga, s. o. 10 kg, kui mitte arvestada hõõrdumist plokis; 3) varda AB reaktsioon $\mathfrak{R}_B$, mis on suunatud piki varrast; 4) varda AC reaktsioon $\mathfrak{R}_C$, mis on samuti suunatud piki varrast.

Asendame jõud $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{T}$ nende resultandiga $\mathfrak{N}$. Jõud $\mathfrak{N}$ peab läbima ploki tsentri, sest jõud $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{T}$ on suuruselt võrdsed. Pärast asendamist on meil ühte punkti, nimelt ploki tsentrisse rakendatud jõudude $\mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{R}_C$ ja $\mathfrak{N}$ süsteem. Sellele süsteemile saame rakendada tasakaalu võrrandeid (7). Selle asemel, et võtta jõu $\mathfrak{N}$ projektsioonid, võime võtta tema komponentide $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{T}$ projektsioonide summad. Nii saame võimaluse kasutada võrrandeid (7) neljast jõust $\mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{R}_C$, $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{T}$ koosneva süsteemi kohta. Suunates x- ja y-teljed nii, nagu on kujutatud joonisel, arvutame nende jõudude projektsioonid x- ja y-teljele.

	P	T	R_B	R_C
Projektsioonid x-teljele	0	$-10\cos 45°$	$-R_B$	$R_C\cos 30°$
Projektsioonid y-teljele	-10	$-10\cos 45°$	0	$R_C\cos 60°$

Nüüd koostame tasakaalu võrrandid:

$$-10\cos 45° - R_B + R_C\cos 30° = 0,$$
$$-10 - 10\cos 45° + R_C\cos 60° = 0.$$

Lahendades teise võrrandi, saame

$$R_C = \frac{10 + 10\cos 45°}{\cos 60°} = \frac{10 + 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 20 + 10\sqrt{2} \approx 34 \text{ kg}.$$

Asetades saadud R_C väärtuse esimesse võrrandisse, saame

$$R_B = R_C\cos 30° - 10\cos 45° \approx 34\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 22{,}5 \text{ kg}.$$

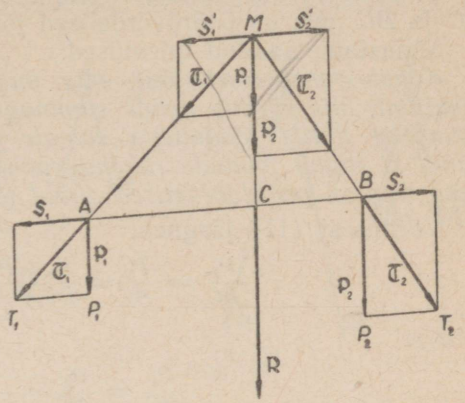
IV peatükk.

Kaks paralleelset jõudu.

13. Ühele poole suunatud kahe paralleelse jõu liitmine.

Vaatleme kahte ühele poole suunatud jõudu $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$, mis on rakendatud keha punktidesse A ja B (joon. 36). Tõestame, et kahte sellist jõudu saab asendada ühega, s. t. et neil jõududel on resultant. Selleks rakendame punktidesse A ja B kaks võrdset jõudu $\mathfrak{S}_1$ ja $\mathfrak{S}_2$, mis on suunatud sirgel AB vastassuundades. Selle tõttu keha tasakaal ei muutu. Jõudude $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{S}_1$ ja $\mathfrak{S}_2$ süsteem on ekvivalentne antud jõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ süsteemiga. Jõud $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{S}_1$ asendame nende resultandiga $\mathfrak{T}_1$ ja jõud $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{S}_2$ — nende resultandiga $\mathfrak{T}_2$. Seejärel viime jõud $\mathfrak{T}_1$ ja $\mathfrak{T}_2$ piki nende mõjusirgeid vii-

maste lõikumispunkti M. Nii on jõud $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ ekvivalentsed jõududega $\mathfrak{T}_1$ ja $\mathfrak{T}_2$, mis on rakendatud punkti M. Võttes jõud $\mathfrak{T}_1$ ja $\mathfrak{T}_2$ külgedeks, võib ehitada jõurööpküliku ja leida nende jõudude resultandi, mis oleks ka jõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ otsitavaks resultandiks. Edasise tõestuse huvides aga lahutame jõu $\mathfrak{T}_1$ uuesti jõududeks $\mathfrak{P}_1'$ ja $\mathfrak{S}_1'$, milledel on samad suunad nagu jõududel $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{S}_1$. Samuti lahutame ka jõu $\mathfrak{T}_2$ jõududeks $\mathfrak{P}_2'$ ja $\mathfrak{S}_2'$, millel on jõududega $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{S}_2$ samad suunad. Need kaks lahutamist kujunesid lihtsalt kahe rööpküliku paralleelseks üleviimiseks punktidest A ja B punkti M. Seetõttu $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_1'$; $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2'$; $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1'$; $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2'$.



Joon. 36.

Nii jõudsime punktidesse A ja B rakendatud jõududest $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ punkti M rakendatud jõudude $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_2'$, $\mathfrak{S}_1'$ ja $\mathfrak{S}_2'$ süsteemini. Jõud $\mathfrak{S}_1'$ ja $\mathfrak{S}_2'$ on vastastikku tasakaalustatud ja neid võib seepärast eemaldada. Jääb kaks jõudu $\mathfrak{P}_1'$ ja $\mathfrak{P}_2'$, mida saame asendada nende resultandiga $\mathfrak{R}$, mille moodul (suurus) on

$$R = P_1' + P_2' = P_1 + P_2. \tag{8}$$

Resultant $\mathfrak{R}$ on sama suunaga nagu antud jõud $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$. Seega on jõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ resultandiks $\mathfrak{R}$. Viime jõu $\mathfrak{R}$ tema mõjusirget mööda punkti C, kus see sirge lõikub sirgega AB.

Kolmnurkade MAC ja AT_1P_1 sarnasusest järgneb, et

$$\frac{P_1}{S_1} = \frac{MC}{AC},$$

kust saame

$$P_1 \cdot AC = S_1 \cdot MC. \tag{9}$$

Kolmnurkade MBC ja BT_2P_2 sarnasusest järgneb, et

$$\frac{P_2}{S_2} = \frac{MC}{BC},$$

kust saame

$$P_2 \cdot BC = S_2 \cdot MC. \tag{10}$$

Kuna $S_1 = S_2$, siis vastavalt võrranditele (9) ja (10)

$$P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC$$

ehk

$$\frac{AC}{BC} = \frac{P_2}{P_1}. \tag{11}$$

Viimane võrdus näitab, et punkt C jagab sirglõigu AB osadeks AC ja BC, mis on pöördvõrdelised jõududega P_1 ja P_2.

Sõnastame saadud tulemused:

Kahel paralleelsel jõul, mis on suunatud samale poole, on resultant, mis võrdub nende summaga, on nendega paralleelne ja suunatud antud jõududega samale poole. Resultandi rakenduspunkt C jagab jõudude rakenduspunkte ühendava sirge AB osadeks, mis on pöördvõrdelised antud jõududega.

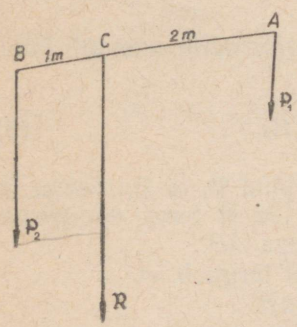
Võrdusest (11) järgneb:

$$\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{P_1 + P_2}{BC + AC} = \frac{R}{AB}.$$

Niisiis

$$\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{R}{AB}. \tag{12}$$

Resultandi ja tema rakenduspunkti leidmise ülesanne lahendub täielikult võrrandite (8) ja (12) abil. Need võrrandid võimaldavad lahendada ka vastupidist ülesannet: ühe jõu lahutamist kaheks talle paralleelseks komponendiks, mis on suunatud samale poole.



Joon. 37.

Näide. Olgu tarvis lahutada jõud $R = 6$ kg kaheks komponendiks, millest üks, $P_1 = 2$ kg, on rakendatud punkti A, mis asub punktist C (jõu R rakenduspunkt) kaugusel $AC = 2$ m (joon. 37).

Leiame teise komponendi P_2 ja tema rakenduspunkti B. Võrdusest (8) saame

$$P_2 = R - P_1 = 6 - 2 = 4 \text{ kg}.$$

Edasi leiame võrdustest (12)

$$\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC},$$

kust

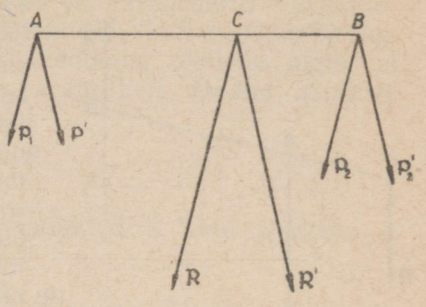
$$BC = \frac{P_1 \cdot AC}{P_2} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1 \text{ m}.$$

Märgime ära punkti C ühe tähtsa omaduse, mis tõstab teda esile kõikide teiste punktide hulgast sirgel MC (joon. 36), s. t. resultandi R mõjusirgel (nagu teada, võib võtta iga punkti sirgel MC jõu R rakenduspunktiks).

Punkti C asukoha sirgel AB määravad võrrandid (12). Nii on tema kaugus punktist A

$$AC = \frac{P_2}{R} \cdot AB.$$

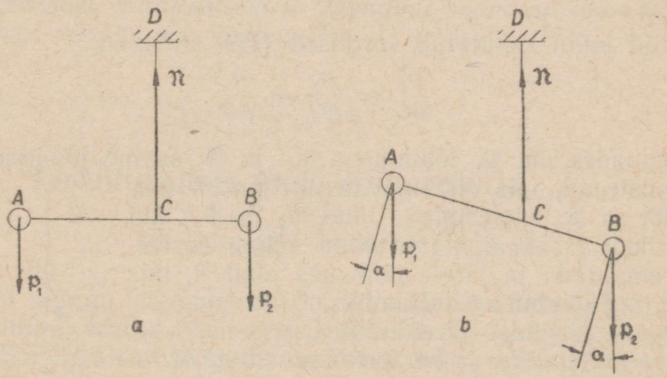
See kaugus ei olene sellest, kuidas on suunatud jõud $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ nende rakenduspunktides. Seepärast, kui pöörata jõud $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ nende rakenduspunktide ümber samale poole sama nurga võrra, siis uue jõudude $\mathfrak{P}_1'$ ja $\mathfrak{P}_2'$ süsteemi resultant on $\mathfrak{R}'$, mis läbib sama punkti C (joon. 38). Teisiti öeldes, jõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ pööramisel nende rakenduspunkti A ja B ümber resultant $\mathfrak{R}$ pöördub ümber punkti C.



Joon. 38.

Punkti C, millel on selline omadus, nimetatakse paralleelsete jõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ tsentriks.

Punkti C omaduse kasutamise näide. Vaatleme kahte koormust P_1 ja P_2, mis on ühendatud vardaga AB, mille kaalu võib mitte arvestada (joon. 39, a). Kui me varda riputame üles koormuste resultandi rakenduspunktis C, siis selle resultandi tasakaalustab niidi CD reaktsioon $\mathfrak{N}$ ja varras on tasakaalus. Nüüd pöörame varrast koos koormustega (joon. 39, b) ja leiame punkti, kuhu tuleks varras üles riputada, et ta oleks tasakaalus.



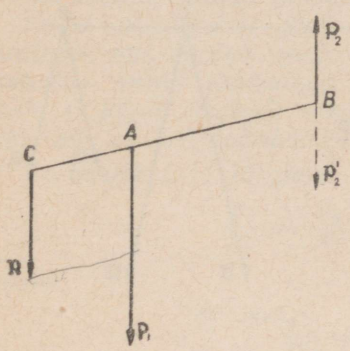
Joon. 39.

Varda uues asendis raskusjõud $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ jäävad vertikaalasendisse, kuid on varda suhtes pööratud nurga α võrra. Jõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ resultant on endiselt rakendatud punkti C ja samas punktis tuleb ka varras jälle üles riputada, et ta jääks tasakaalu.

14. Kahe mittevõrdse ja vastupidi suunatud paralleelse jõu liitmine.

Kahe vastupidiselt suunatud jõu liitmise ülesanne lahendub erinevalt olenevalt sellest, kas nende moodulid (suurused) on võrdsed või mitte. Käesolevas punktis vaatleme juhtu, kus nad ei ole võrdsed.

Olgu antud kaks jõudu $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ (joon. 40), kusjuures nende jõudude moodulid ei ole võrdsed. Olgu näiteks $P_1 > P_2$. Lahutame suurema jõu $\mathfrak{P}_1$ kaheks paralleelseks komponendiks, mis on suunatud samale poole nagu $\mathfrak{P}_1$. Ühe nendest $\mathfrak{P}_2'$ valime nii, et tema moodul oleks võrdne P_2-ga ($P_2' = P_2$), rakenduspunkt aga oleks punktis B, kuhu on rakendatud ka jõud $\mathfrak{P}_2$. Siis teine komponent (nimetame teda $\mathfrak{R}$) ja tema rakenduspunkt C leitakse võrduste (8) ja (12) abil. Kuna $\mathfrak{P}_1$ on jõudude $\mathfrak{P}_2'$ ja $\mathfrak{R}$ resultant, siis võrduse (8) alusel



Joon. 40.

$$P_1 = R + P_2' = R + P_2,$$

kust saame

$$R = P_1 - P_2.$$

Antud juhul kasutatud võrdused (12) annavad:

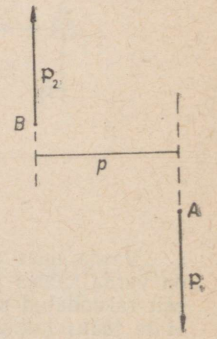
$$\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{R}{AB}. \qquad (13)$$

Asendades jõu $\mathfrak{P}_1$ jõududega $\mathfrak{P}_2'$ ja $\mathfrak{R}$, saame jõudude $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_2'$ ja $\mathfrak{R}$ süsteemi, mis on ekvivalentne antud jõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ süsteemiga. Jõud $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{P}_2'$ kui vastastikku tasakaalustatud jõud võime süsteemist eemaldada ja järele jääb üks jõud $\mathfrak{R}$, mis ongi antud jõudude resultandiks.

Jõuame järgmise järelduseni:

Kahe mittevõrdse ja vastupidi suunatud paralleelse jõu resultant võrdub nende jõudude vahega ja on suunatud suurema jõuga samale poole (s. t. antud juhul on suunatud jõuga $\mathfrak{P}_1$ samale poole).

Resultandi rakenduspunkt C asub komponentide rakenduspunkte ühendava sirge AB pikendusel suurema jõu taga. Punkti C kaugused



Joon. 41.

punktidest A ja B (komponentide rakenduspunktidest) on pöördvõrdelised nende jõudude suurusega.

Nagu eelmiselgi juhul (vt. p. 13) on punkt *C*, milles resultandi $\mathfrak{R}$ mõjusirge lõikab komponentjõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ rakenduspunkte ühendavat sirget *AB*, nende paralleeljõudude tsentriks.

15. Jõupaar.

Vaatleme nüüd juhtu, kus $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ on paralleelsed, vastupidiselt suunatud ja moodulilt võrdsed (joon. 41). Sellisel jõudude süsteemil ei ole resultanti. Et selles veenduda, oletame algul, et $P_1 > P_2$ (joon. 40). Siis eelmises paragrahvis toodud arutluse põhjal leiame nende resultandi valemi

$$R = P_1 - P_2$$

abil.

Kauguse *AC* resultandi rakenduspunktist *C* kuni punktini *A* saame valemi (13) järgi

$$AC = \frac{P_2 \cdot AB}{R} = \frac{P_2 \cdot AB}{P_1 - P_2}. \qquad (14)$$

Suurendame nüüd jõudu P_2, lähendades tema suurust P_1-le. Siis väheneb murru (14) nimetaja ja kaugus *AC* hakkab suurenema. Järelikult jõu P_2 mooduli lähenemisel jõu P_1 moodulile kaugeneb resultandi rakenduspunkt *C*. Piirjuhul, kui $P_2 = P_1$, *R* suurus läheneb nullile ja punkt *C* liigub lõpmatusse, mis tähendab seda, et sellel piirjuhul resultanti ei ole olemas.

Kahest võrdsest, paralleelsest ja vastupidi suunatud jõust koosnevat süsteemi nimetatakse jõupaariks.

V peatükk.

Tasapinnaliste jõupaaride teooria.

16. Jõupaari moment.

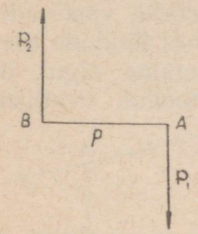
Eelnenust nähtub, et jõupaaril on, võrreldes mistahes teise jõudude süsteemiga, teatud iseärasused. Nimelt on igal kahest jõust koosneval tasapinnalisel jõudude süsteemil, välja arvatud jõupaar, resultant. Tõepoolest, kaks samas tasapinnas asuvat jõudu kas lõikuvad või on paralleelsed. Esimesel juhul leitakse nende resultant jõuröövpküliku abil, teisel juhul aga p-s 13 ja 14 käsiteldud reeglite järgi. Jõupaaril ei ole resultanti.

Käesolev peatükk käsitleb jõupaari teooriat. Meie piirdume selle juhu vaatlemisega, kui kõik jõupaarid asuvad samas tasapinnas. Jõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ paari tähistame edaspidi $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)$.

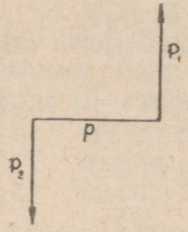
Jõupaari õlaks nimetatakse jõupaari moodustavate jõudude mõjusirgete vahelist kaugust p (joon. 41).

Paigutades jõud $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ piki nende mõjusirgeid ümber, võime kujutada jõupaari selliselt, et nende jõudude rakenduspunktide vahe võrduks jõupaari õlaga (joon. 42).

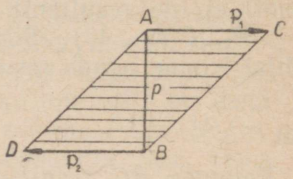
Jõupaari momendiks nimetatakse ühe jõupaari moodustava jõu mooduli (suuruse) korrutist jõupaari õlaga. Momendi märk võib olla pluss või miinus.



Joon. 42.



Joon. 43.



Joon. 44.

Momendi märk määratakse kindlaks järgmiselt: kui jõupaar püüab joonise tasapinda pöörata kella osuti liikumise suunas, siis loetakse moment positiivseks, kui see toimub aga kella osuti liikumisele vastassuunas, siis on moment negatiivne.

Tähistades jõupaari õlga tähega p ja jõupaari momenti tähega m, saame joonisel 42 kujutatud jõupaari kohta

$$m = P_1 \cdot p$$

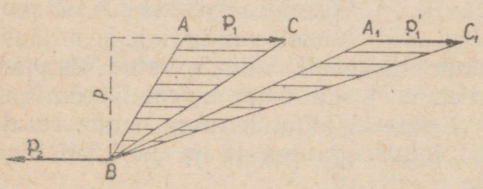
ja joonisel 43 kujutatud jõupaari kohta

$$m = -P_1 \cdot p.$$

Jõupaari momendile võime anda ka geomeetrilise seletuse.

Ehitame rööpküliku $ACBD$, mille kaheks küljeks on jõud $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ (joon. 44). Selle rööpküliku pindala on $P_1 \cdot p$, s. t. võrdub arvuliselt jõupaari momendiga.

Kuna selle rööpküliku pindala võrdub kolmnurga ABC kahe pindalaga, siis jõupaari moment võrdub arvuliselt sellise kolmnurga kahekordse pindalaga, mille aluseks on üks jõupaari jõududest ja tipuks jõupaari teise jõu rakenduspunkt.



Joon. 45.

Nii rööpküliku kui ka kolmnurga pindala ilmselt ei muutu, kui paigutada jõud $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ ümber piki nende mõju-

sirgeid (joon. 45): kolmnurga ABC pindala on $\frac{1}{2}P_1 \cdot p$ ja ka kolmnurga A_1BC_1 pindala on $\frac{1}{2}P_1 \cdot p$.

Kui jõudu mõõta kilogrammides ja õlga meetrites, siis jõupaari moment väljendub kilogramm-meetrites.

17. Ekvivalentsed jõupaarid.

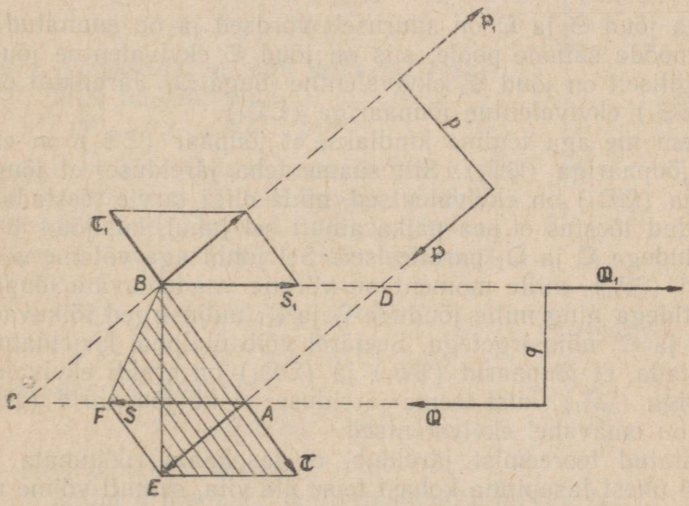
Tõestame jõupaaride teooria järgmise põhiteoreemi:

Kui kahe jõupaari momendid on võrdsed, siis need jõupaarid on ekvivalentsed.

Olgu antud kaks jõupaari ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$) ja ($\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$), mille momendid on võrdsed, s. t.

$$P \cdot p = Q \cdot q. \tag{15}$$

Tõestame, et need jõupaarid on ekvivalentsed, s. o. et saame ühe jõupaari asendada teisega tasakaalu rikkumata.



Joon. 46.

Pikendame jõudude $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{P}_1$ (joon. 46) mõjusirgeid lõikumiseni jõudude $\mathfrak{Q}$ ja $\mathfrak{Q}_1$ mõjusirgetega punktides A, B, C ja D. Kujund $ACBD$ on rööpkülik. Kanname jõu $\mathfrak{P}$ piki tema mõjusirget punkti A ja lahutame ta kaheks komponendiks, millest ühe ($\mathfrak{S}$) suuname jõu $\mathfrak{Q}$ mõjusirget pidi ja teise ($\mathfrak{T}$) rööpküliku $ACBD$ diagonaali AB pidi. Samal viisil kanname jõu $\mathfrak{P}_1$ üle punkti B ja lahutame ta kaheks komponendiks: $\mathfrak{S}_1$, mis on suunatud jõu $\mathfrak{Q}_1$ mõjusirget pidi, ja $\mathfrak{T}_1$, mis on suunatud diagonaali AB pidi.

Jooniselt on näha, et $T_1 = T$ ja $S_1 = S$. Jõud $\mathfrak{T}$ ja $\mathfrak{T}_1$ kui vastastikku tasakaalustatud jõud võime süsteemist eemaldada ja

jõuame järelduseni, et jõupaar ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$) on ekvivalentne jõupaariga ($\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$). Võrdleme nende jõupaaride momente. Momentide märgid on ühesugused, sest pöörlemise suund on mõlemal jõupaaril sama (kella osuti liikumise suunas). Jõupaari ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$) momendi arvuline suurus on võrdne kolmnurga *ABE* kahekordse pindalaga, jõupaari ($\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$) moment võrdub kolmnurga *ABF* kahekordse pindalaga. Nende kolmnurkade pindalad on võrdsed, sest neil on ühine alus *AB* ja nende tipud asuvad sirgel *EF*, mis on paralleelne alusega *AB*. Seepärast on jõupaaride ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$) ja ($\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$) momendid võrdsed. Teiselt poolt võrdub jõupaari ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$) moment $P \cdot p$ ja jõupaari ($\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$) moment võrdub $S \cdot q$, sest selle jõupaari õlg on q. Niisiis

$$P \cdot p = S \cdot q.$$

Võrreldes seda võrdust võrdusega (15), saame

$$Q \cdot q = S \cdot q,$$

kust $S = Q$ ja järelikult $S_1 = Q_1$.

Kuna jõud $\mathfrak{S}$ ja $\mathfrak{Q}$ on suuruselt võrdsed ja on suunatud sama sirget mööda samale poole, siis on jõud $\mathfrak{S}$ ekvivalentne jõuga $\mathfrak{Q}$. Analoogiliselt on jõud $\mathfrak{S}_1$ ekvivalentne jõuga $\mathfrak{Q}_1$. Järelikult on jõupaar ($\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$) ekvivalentne jõupaariga ($\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$).

Varem me aga tegime kindlaks, et jõupaar ($\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$) on ekvivalentne jõupaariga ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$). Siit saame teha järelduse, et jõupaarid ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$) ja ($\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$) on ekvivalentsed, mida oligi tarvis tõestada.

Toodud tõestus ei pea paika ainult sel juhul, kui jõud $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{P}_1$ on jõududega $\mathfrak{Q}$ ja $\mathfrak{Q}_1$ paralleelsed. Sel juhul aga võtame veel ühe jõupaari ($\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$), mille moment on võrdne vaadeldavate jõupaaride momentidega ning mille jõudude $\mathfrak{F}$ ja $\mathfrak{F}_1$ mõjusirged lõikuvad jõudude $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ mõjusirgetega. Seejärel võib ülalpool kirjeldatud viisil tõestada, et jõupaarid ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$) ja ($\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$) on eraldi ekvivalentsed jõupaariga ($\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$), kust teeme järelduse, et ka jõupaarid ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$) ja ($\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$) on omavahel ekvivalentsed.

Tõestatud teoreemist järeldub, et tasakaalu rikkumata võime jõupaari ühest tasapinna kohast teise üle viia, samuti võime muuta jõude ja õlgu nii, et jõupaari moment ei muutuks. Siit järgneb, et jõupaar on antud, kui on antud tema moment.

18. Jõupaaride liitmine. Jõupaaride tasakaal.

Teoreem. *Mistahes arvu jõupaaride süsteem on ekvivalentne ühe jõupaariga, mille moment on võrdne antud jõupaaride momentide summaga.*

Tõestus. Olgu antud näiteks kolm jõupaari, mille momendid on m_1, m_2, m_3. Ekvivalentsuse teoreemi põhjal, mis on toodud eelmises p-s, võime kujutada kõiki neid kolme jõupaari selliselt, et neil oleks sama õlg p. Tähistame esimese jõupaari jõud tähte-

dega $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_1'$, teisel paaril — $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{P}_2'$ ja kolmandal paaril $\mathfrak{P}_3$ ja $\mathfrak{P}_3'$. Need jõud tulevad suunata nii, et positiivse momendiga jõupaar pööraks joonise tasapinda kella osuti liikumise suunas ja negatiivse momendiga jõupaar — kella osuti liikumise vastu. Joonisel 47 on kujutatud jõupaarid momentidega $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ ja $m_3 < 0$. Jõupaari momendi määrangu kohaselt:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= P_1 \cdot p; \\ m_2 &= P_2 \cdot p; \\ m_3 &= -P_3 \cdot p. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Nüüd võib vaadelda kolme jõupaari kui kuue jõu kogumikku, millest kolm on rakendatud punkti B (jõud $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{P}_3$), teised kolm aga punkti A ($\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_2'$ ja $\mathfrak{P}_3'$). Liites punkti B rakendatud jõud, saame ühe resultandi $\mathfrak{Q}$, mille moodul on

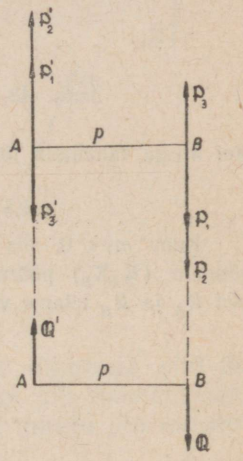
$$Q = P_1 + P_2 - P_3,$$
$$\text{kui } P_1 + P_2 > P_3.$$

Punkti A rakendatud jõud annavad resultandi Q', mille moodul on

$$Q' = P_1' + P_2' - P_3'.$$

On selge, et $Q' = Q$ ja et need jõud on vastupidiste suundadega. Teisiti öeldes, jõud $\mathfrak{Q}$ ja $\mathfrak{Q}'$ moodustavad jõupaari, mis on ekvivalentne antud jõupaaridega. Selle jõupaari moment m on

$$m = Q \cdot p = (P_1 + P_2 - P_3)p =$$
$$= P_1 \cdot p + P_2 \cdot p + (-P_3 \cdot p),$$



Joon. 47.

või arvestades võrdusi (16),

$$m = m_1 + m_2 + m_3,$$

millega ongi teoreem tõestatud.

Kui on antud n jõupaari, mille momendid on $m_1, m_2, \ldots, m_n$, siis leiame analoogiliselt:

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n. \tag{17}$$

Kasutades viimast võrdust, tuleb meeles pidada, et suurused $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tulevad võtta kas plussiga või miinusega, vastavalt sellele, kuhu poole pöörab tasapinda vastav jõupaar.

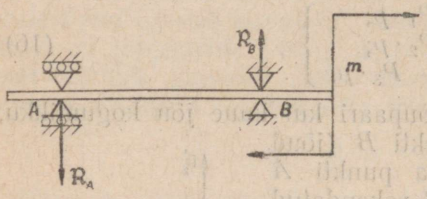
Siirdume jõupaari süsteemi tasakaalu tingimuste kindlaksmääramise juurde. Kuna igasugune jõupaaride süsteem on ekvivalentne ühe jõupaariga, üks jõupaar saab olla tasakaalus aga ainult siis, kui tema moment m on null, siis võrduse (17) põhjal jõuame järgmise jõupaaride süsteemi tasakaalu tingimuseni:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0, \tag{18}$$

s. t. *jõupaaride süsteemi tasakaaluks on tarvilik ja küllaldane, et nende jõupaaride momentide summa võrduks nulliga.*

Ülesanne 5. Talale, mis asub kahel toel A ja B (joon. 48), on rakendatud jõupaar, mille moment $m = 16$ kgm. Arvestamata tala omakaalu leida toereaktsioonid A ja B, kui $AB = 2$ m.

Tala on tasakaalus järgmiste tegurite mõjul: 1) jõupaari moment m; 2) toe A reaktsioon $\mathfrak{R}_A$; 3) toe B reaktsioon $\mathfrak{R}_B$.



Joon. 48.

Pole raske veenduda, et $\mathfrak{R}_A$ ja $\mathfrak{R}_B$ moodustavad jõupaari. Kui see poleks nii, siis kahel jõul $\mathfrak{R}_A$ ja $\mathfrak{R}_B$ oleks resultant, mis peaks olema tasakaalus jõupaariga m, mis on võimatu. Niisiis on meil kahest jõupaarist koosnev süsteem, mis on tasakaalus. Tasakaalu tingimustest (18) lähtudes

$$m_1 + m = 0,$$

kui m_1-ga tähistada jõupaari $(\mathfrak{R}_A \mathfrak{R}_B)$ momenti. Siit

$$m_1 = -m = -16 \text{ kgm}.$$

Kuna $m_1 < 0$, siis reaktsioonid $\mathfrak{R}_A$ ja $\mathfrak{R}_B$ peavad olema suunatud nii, et jõupaar $(\mathfrak{R}_A \mathfrak{R}_B)$ pööraks tala kella osuti liikumise vastu (joon. 48). Suurused R_A ja R_B leiame võrdusest

$$R_A = R_B = \frac{m}{AB} = \frac{16}{2} = 8 \text{ kg}.$$

VI peatükk.

Tasapinnalise jõudude süsteemi üldjuhtum.

19. Jõu moment punkti suhtes.

Oleme jõudnud mehaanika ühe tähtsama mõiste juurde — jõu momendi mõiste juurde punkti suhtes.

Olgu antud jõud $\mathfrak{P}$ ja mingi punkt O (joon. 49, a). Punktist O kujutame ristjoone jõu $\mathfrak{P}$ mõjusirgele. Selle ristjoone pikkust p nimetame jõu $\mathfrak{P}$ õlaks punkti O suhtes.

Jõu momendiks punkti suhtes nimetatakse jõu mooduli (suuruse) korrutist jõu õlaga, võetuna märgiga pluss või miinus.

Momendi märgi määrame analoogiliselt sellega, nagu tegime seda jõupaari momendi juures. Kujutame ette, et jõu mõjumise tasapind on kinnitatud punktis O. Kui jõud $\mathfrak{P}$ pöörab seda tasapinda punkti O ümber kella osuti liikumise suunas, siis loeme jõu $\mathfrak{P}$ momendi punkti O suhtes positiivseks, kui aga jõud $\mathfrak{P}$ pöörab tasapinda punkti O ümber kella osuti liikumisele vastassuunas — siis negatiivseks.

Tähistades jõu $\mathfrak{P}$ momenti O suhtes $m_0(\mathfrak{P})$ võime joonisel 49, a kujutatud juhu jaoks kirjutada:

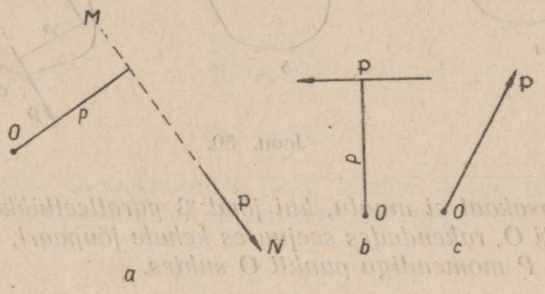
$$m_0(\mathfrak{P}) = P \cdot p.$$

Joonisel 49, b kujutatud juhu jaoks võime kirjutada:

$$m_0(\mathfrak{P}) = -P \cdot p.$$

Punkti O, mille suhtes võetakse jõu moment, nimetatakse momentide tsentriks.

Kui jõu mõjusirge läbib momentide tsentrit, siis õlg võrdub nulliga ja jõu moment võrdub samuti nulliga (joon. 49, c).



Joon. 49.

Märgime veel, et kui jõu rakenduspunkti nihutada piki jõu mõjusirget (joonisel 49, a piki sirget MN), siis jõu moment jääb muutumatuks, sest sellise nihutamise juures ei muutu jõu moodul, tema õlg ega ka pööramise suund.

20. Tasapinnalise jõudude süsteemi taandamine jõuks ja jõupaariks.

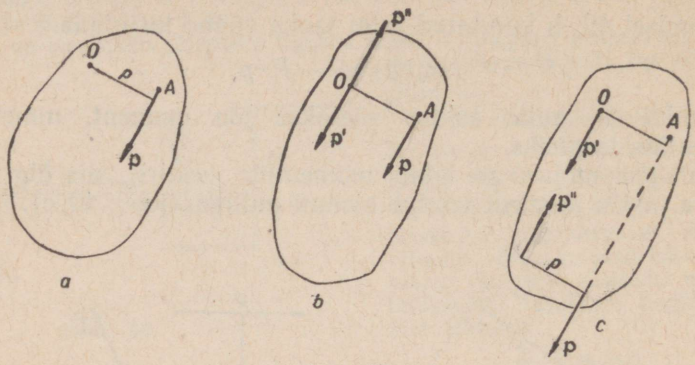
Vaatleme nüüd jõudude süsteemi, mis on asetatud ükskõik kuidas tasapinnal, s. t. tasapinnalise jõudude süsteemi kõige üldisemat juhtu.

Esialgu peatume tähtsal muundamisel, mis on meie poolt edaspidi kasutatava meetodi aluseks.

Olgu antud jõud $\mathfrak{P}$, mis on rakendatud tasakaalus oleva kõva keha punkti A (joon. 50, a). Muidugi on jõud $\mathfrak{P}$ ainult üks kehale rakendatud jõududest, ülejäänud jõude ei ole joonisel näidatud. Rakendame mingisse sama keha punkti O kaks jõudu $\mathfrak{P}'$ ja $\mathfrak{P}''$, mis on moodulilt võrdsed jõuga $\mathfrak{P}$, talle paralleelsed ja suunatud vastassuundades (joon. 50, b). Sellest keha tasakaal ei muutu. Seetõttu jõudude $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ ja $\mathfrak{P}''$ süsteem on ekvivalentne antud jõuga $\mathfrak{P}$.

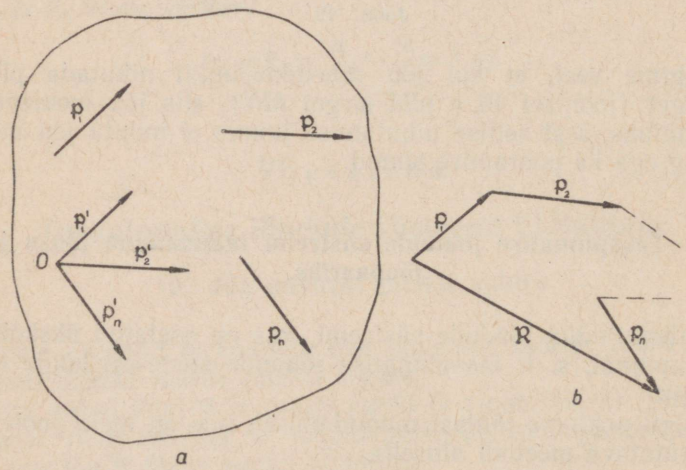
Rühmitame selle süsteemi selliselt: jõud $\mathfrak{P}'$ ja jõupaar ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}''$) (joon. 50, c). Niisiis on antud jõud $\mathfrak{P}$ ekvivalentne jõust $\mathfrak{P}'$ ja jõu-

paarist ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}''$) koosneva süsteemiga. Jõud $\mathfrak{P}'$ võrdub jõuga $\mathfrak{P}$ ja on rakendatud punkti O. Jõupaari ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}''$) moment $m = P \cdot p$, s. t. võrdub jõu $\mathfrak{P}$ momendiga punkti O suhtes. Nii jõuame teoreemini:



Joon. 50.

Keha tasakaal ei muutu, kui jõud $\mathfrak{P}$ paralleellükkega viia mingisse punkti O, rakendades seejuures kehale jõupaari, mille moment võrdub jõu P momendiga punkti O suhtes.



Joon. 51.

Sama teoreemi võime väljendada ka teisiti: jõud $\mathfrak{P}$ on ekvivalentne süsteemiga, mis koosneb jõust $\mathfrak{P}'$ $(= \mathfrak{P})$, mis on rakendatud mingisse punkti O ja jõupaarist, mille moment võrdub jõu $\mathfrak{P}$ momendiga punkti O suhtes.

Vaatleme nüüd tasapinnal n jõudu $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ (joon. 51, a). Viime kõik jõud eelmise teoreemi põhjal paralleel-lükkega mingisse

punkti O, rakendades selle juures kehale n jõupaari. Saame uue jõudude süsteemi, mis on endisega ekvivalentne ja koosneb n jõust $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_2'$, ..., $\mathfrak{P}_n'$, mis on rakendatud punkti O ja n jõupaarist, millede momendid võrduvad antud jõudude momentidega punkti O suhtes:

$$m_1 = m_0(\mathfrak{P}_1);$$
$$m_2 = m_0(\mathfrak{P}_2);$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$m_n = m_0(\mathfrak{P}_n).$$

Jõud $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_2'$, ..., $\mathfrak{P}_n'$ võrduvad vastavate jõududega $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ..., $\mathfrak{P}_n$, s. t.

$$\mathfrak{P}_1' = \mathfrak{P}_1;$$
$$\mathfrak{P}_2' = \mathfrak{P}_2;$$
$$\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{P}_n' = \mathfrak{P}_n.$$

Liites punkti O rakendatud jõud, saame nende resultandi $\mathfrak{R}$, mis võrdub antud jõudude vektoriaalse summaga

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n \qquad (19)$$

ja mis on rakendatud punkti O. Tuletame meelde, et viimane võrdus tähistab seda, et jõud $\mathfrak{R}$ saadakse antud jõududest ehitatud jõuhulknurga sulgeva küljena. See hulknurk on kujutatud joonisel 51, b.

Edasi liidame n jõupaari. Jõupaaride liitmise teoreemi põhjal need n jõupaari saab asendada neile ekvivalentse jõupaariga, mille moment võrdub antud jõupaaride momentide summaga, s. t. võrdub antud jõudude $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ..., $\mathfrak{P}_n$ momentide summaga punkti O suhtes:

$$m = m_0(\mathfrak{P}_1) + m_0(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_0(\mathfrak{P}_n). \qquad (20)$$

Nii saime antud jõudude $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ..., $\mathfrak{P}_n$ süsteemi asemele, mis asetses tasapinnal ükskõik kuidas, sellega ekvivalentse süsteemi, mis koosneb ühes jõust $\mathfrak{R}$, mis on võrdne antud jõudude vektoriaalse summaga ja rakendatud punkti O, ja ühest jõupaarist, mille moment m võrdub antud jõudude momentide summaga punkti O suhtes. Jõuame teoreemini: *iga tasapinnaline jõudude süsteem on ekvivalentne süsteemiga, mis koosneb ühest jõust ja ühest jõupaarist.*

Tõestatud teoreem võimaldab iseloomustada iga tasapinnalist jõudude süsteemi kahe suuruse abil: üks neist on vektoriaalne — $\mathfrak{R}$, mida määrame võrduse (19) abil, teine on skalaarne, mida määrame võrduse (20) abil.

21. Tasapinnalise jõudude süsteemi tasakaal.

Vaatleme nüüd jõudude süsteemi, mis on tasakaalus. Eelmises punktis käsitletud viisil võime selle süsteemi asendada ühe jõuga $\mathfrak{R}$ ja ühe jõupaariga m. Kuna see süsteem (jõud ja jõupaar) on ekvivalentne esialgsega, siis ka tema peab olema tasakaalus. Jõud ja jõupaar aga ei saa teineteist vastastikku tasakaalustada. Seepärast antud jõudude süsteemi tasakaalust järgneb, et peab olema rahuldatud kaks järgmist võrrandit:

$$\mathfrak{R} = 0,$$
$$m = 0.$$

Arvestades võrrandeid (19) ja (20) saame

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n = 0;$$
$$m_0(\mathfrak{P}_1) + m_0(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_0(\mathfrak{P}_n) = 0.$$

Esimesest võrrandist järgneb, et antud jõududest ehitatud jõuhulknurk peab olema suletud ja järelikult nende jõudude projektsioonide summa nii x- kui ka y-teljele peab võrduma nulliga. Teisest võrrandist järgneb, et antud jõudude momentide summa mingi punkti O suhtes peab võrduma nulliga.

Niisiis, *tasapinnalise jõudude süsteemi tasakaaluks on tarvis, et nende jõudude projekisioonide summa nii x- kui ka y-teljele võrduks nulliga ja et nende jõudude momentide summa mistahes punkti suhtes võrduks samuti nulliga, s. t. peavad olema rahuldatud kolm võrrandit:*

$$\left.\begin{aligned} P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx} &= 0, \\ P_{1y} + P_{2y} + \ldots + P_{ny} &= 0, \\ m_0(\mathfrak{P}_1) + m_0(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_0(\mathfrak{P}_n) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Võrrandeid (21) nimetatakse tasapinnalise jõudude süsteemi tasakaalu võrrandeiks, kuna nad väljendavad tasakaalu tingimusi.

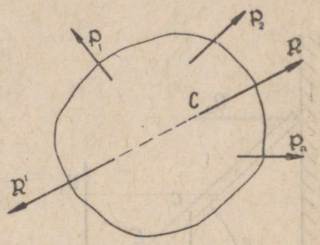
Võrrandid (21) on jõudude süsteemi tasakaaluks ka küllaldased, s. t., kui võrrandite (21) tingimused on täidetud, siis on jõudude süsteem tasakaalus. Tõepoolest esimesest kahest võrrandist järgneb (vt. p. 12), et jõuhulknurk, mis on ehitatud jõududest $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$, on suletud, s. t. $\mathfrak{R} = 0$, viimasest võrrandist aga järgneb, et $m = 0$. Kui aga $\mathfrak{R} = 0$ ja $m = 0$, siis tähendab see seda, et antud jõudude süsteem on ekvivalentne jõuga $\mathfrak{R} = 0$ ja jõupaariga, mille moment võrdub nulliga, s. t. antud jõudude süsteem on tasakaalus.

22. Resultandi momendi teoreem. Ülesandeid.

Kui jõudude süsteemil on resultant, siis selle resultandi moment mistahes punkti suhtes võrdub komponentide momentide summaga sama punkti suhtes.

Oletame, et jõudude süsteemil $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ on resultant $\mathfrak{R}$, mis on rakendatud punkti C (joon. 52). See tähendab, et antud süsteem on ekvivalentne jõuga $\mathfrak{R}$.

Vaatleme teist, jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{R}'$ süsteemi, kus jõud $\mathfrak{R}'$ on jõuga $\mathfrak{R}$ võrdse suurusega, samal mõjusirgel, kuid vastupidi suunatud.



Joon. 52.

Jõud $\mathfrak{R}'$ tasakaalustab jõu $\mathfrak{R}$, järelikult tasakaalustab ta ka jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ süsteemi, mis on ekvivalentne jõuga $\mathfrak{R}$, teisiti öeldes — jõudude süsteem $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{R}'$ on tasakaalus. Kirjutame ühe tasakaalu võrrandi, ja nimelt selle, mis näitab, et kõikide jõudude momentide summa mistahes punkti O suhtes on võrdne nulliga:

$$m_0(\mathfrak{P}_1) + m_0(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_0(\mathfrak{P}_n) + m_0(\mathfrak{R}') = 0.$$

Teiselt poolt peab jõudude $\mathfrak{R}$ ja $\mathfrak{R}'$ momentide summa, kuna need jõud on omavahel tasakaalus, punkti O suhtes samuti võrduma nulliga:

$$m_0(\mathfrak{R}) + m_0(\mathfrak{R}') = 0.$$

Võrreldes neid kahte võrrandit, järeldame, et

$$m_0(\mathfrak{R}) = m_0(\mathfrak{P}_1) + m_0(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_0(\mathfrak{P}_n).$$

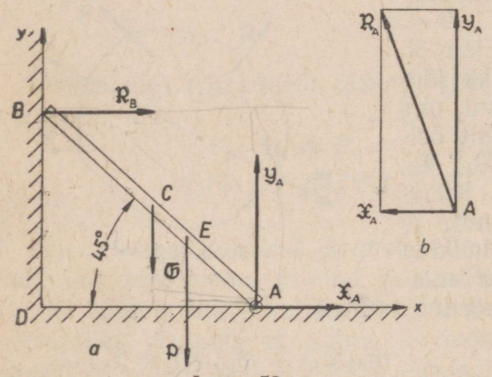
Viimane võrdus tõestab esitatud teoreemi.

Ülesanne 6. Sileda vertikaalse seina najale on pandud 45° all redel AB (joon. 53, a), mis on punktis A kinnitatud šarniirselt. Redeli kaal 20 kg on rakendatud redeli keskkohta C. Punktis E, mis asub $^1/_3$ redeli pikkusel, arvates punktist A, on inimene, kes kaalub 60 kg. Leida redeli surve seinale ja šarniirile A.

Vaatleme redeli tasakaalu koos inimesega. Mõjuvad jõud on: 1) $\mathfrak{G}$ — redeli kaal, 2) $\mathfrak{P}$ — inimese kaal, 3) $\mathfrak{X}_B$ — seina reaktsioon, mis on suunatud seinaga risti (p. 8, juhtum 1), 4) $\mathfrak{X}_A$ — šarniiri A reaktsioon. Selle reaktsiooni suund on kuni ülesande lahenduseni tundmata (p. 8, juhtum 3). Lahutame reaktsiooni $\mathfrak{X}_A$ kaheks komponendiks $\mathfrak{X}_A$ ja $\mathfrak{Y}_A$, millede suunad on paralleelsed x- ja y-telgedega. Leides tasakaalu võrrandite abil mõlemad komponendid X_A ja Y_A, saame teada ka R_A mooduli (suuruse) ja suuna.

Kasutame tasakaalu võrrandeid (21). x- ja y-teljed suuname nii, nagu on kujutatud joonisel 53, a. Momentide tsentriks võtame punkti A. Alguses arvutame jõudude projektsioonid ja momendid ning kirjutame tulemused üles. (Jõudude $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{R}_B$ õlgade arvutamisel pöörame tähelepanu sellele, et kolmnurk ABD on võrdhaarne. Võrdsete külgede BD ja AD pikkuse tähistame tähega a. Jõu $\mathfrak{P}$ õlg on $\frac{1}{3}a$, jõu $\mathfrak{G}$ õlg — $\frac{1}{2}a$ ja jõu $\mathfrak{R}_B$ õlg — a.)

	G	P	R_B	X_A	Y_A
Projektsioonid x-teljele	0	0	R_B	X_A	0
Projektsioonid y-teljele	-20	-60	0	0	Y_A
Momendid punkti A suhtes . . .	$-20 \cdot \frac{a}{2}$	$-60 \cdot \frac{a}{3}$	$R_B \cdot a$	0	0



Joon. 53.

Koostame tasakaalu võrrandid:

$$R_B + X_A = 0;$$

$$-20 - 60 + Y_A = 0;$$

$$-20 \cdot \frac{a}{2} - 60 \cdot \frac{a}{3} + R_B \cdot a = 0.$$

Lahendades need võrrandid, leiame:

$$R_B = 10 + 20 = 30 \text{ kg};$$
$$Y_A = 20 + 60 = 80 \text{ kg};$$
$$X_A = -R_B = -30 \text{ kg}.$$

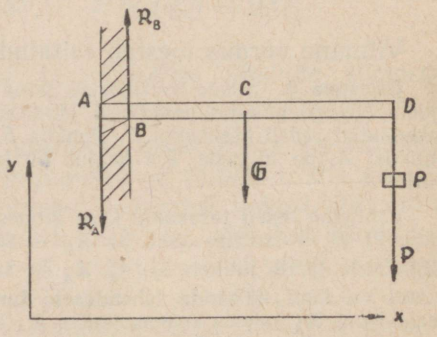
Me saime X_A väärtuse negatiivsena. See tähendab, et komponent X_A on suunatud meie poolt joonisel 53, a märgitud suunale vastassuunas. $\mathfrak{R}_A$ leidmiseks kanname X_A ja Y_A suurused joonisele, nagu see on näidatud joonisel 53, b, ja ehitame rööpküliku. R_A suuruse võime leida valemi

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$$

järgi.

Leidsime reaktsioonid $\mathfrak{R}_A$ ja $\mathfrak{R}_B$, ülesandes aga on vaja leida surved. Surved on mõju ja vastumõju aksioomi põhjal võrdsed leitud reaktsioonidega, kuid suunatud vastupidiselt.

Nagu selle ülesande lahendamisest nähtub, on otstarbekohane valida momentide tsenter nii, et seda punkti läbiksid kahe tundmatu jõu mõjusirged (antud ülesandes punkt A, mida läbivad jõud $\mathfrak{X}_A$ ja $\mathfrak{Y}_A$). Siis nende kahe jõu momendid võrduvad nulliga ja momentide võrrandis on üksainus tundmatu.



Joon. 54.

Ülesanne 7. Tala, mille pikkus on 3 m ja mis kaalub 500 kg, on müüritud ühte otsa pidi seinasse, mille paksus on 40 cm, nii, et ta toetub seinale punktides A ja B (joon. 54). Tala vaba ots D on koormatud raskusega $P = 3$ t. Leida toereaktsioonid A ja B.

Vaatleme koormatud tala tasakaalu. Talale mõjuvad jõud: 1) $\mathfrak{G}$ — tala omakaal, mis on rakendatud tala keskkohta C, 2) $\mathfrak{P}$ — raskus, 3) $\mathfrak{R}_B$ — toe B reaktsioon, mis on suunatud risti talaga, (p. 8, juhtum 2), 4) $\mathfrak{R}_A$ — toe A reaktsioon, mis on samuti suunatud risti talaga.

Meil on neljast paralleelsest jõust $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}_A$, $\mathfrak{R}_B$ koosnev süsteem. Nende kõikide projektsioonid x-teljele on nullid. Selle tõttu muutub esimene võrrand (21) samasuseks ja jääb järele veel kaks tasakaalu võrrandit. Suunates y-telje vertikaalselt ja valides momentide tsentriks punkti A, saame (jõud on väljendatud tonnides, õlad — meetrites):

	G	P	R_A	R_B
Projektsioonid y-teljele	$-0{,}5$	-3	$-R_A$	R_B
Momendid punkti A suhtes	$0{,}5 \cdot 1{,}5$	$3 \cdot 3$	0	$-R_B \cdot 0{,}4$

Koostame tasakaalu võrrandid:

$$-0{,}5 - 3 - R_A + R_B = 0;$$
$$0{,}5 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 3 - R_B \cdot 0{,}4 = 0.$$

Lahendades neid, leiame:

$$R_B = \frac{0{,}75 + 9}{0{,}4} = 24{,}375 \text{ t};$$
$$R_A = R_B - 0{,}5 - 3 = 24{,}375 - 0{,}5 - 3 = 20{,}875 \text{ t}.$$

Esimese võrrandi asemel võime võtta momentide võrrandi punkti B suhtes. Siis saaksime järgmise võrrandi:

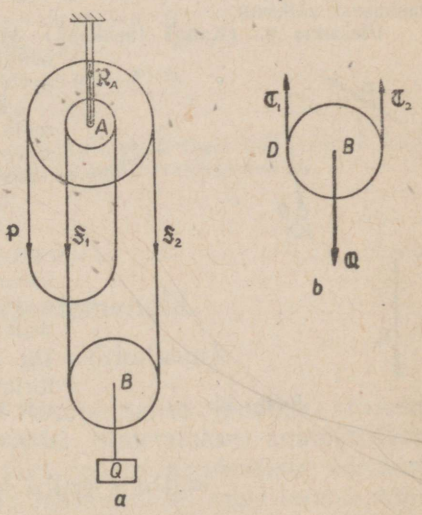
$$-R_A \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 1{,}1 + 3 \cdot 2{,}6 = 0,$$

kust saame:

$$R_A = \frac{7{,}8 + 0{,}55}{0{,}4} = 20{,}875 \text{ t}.$$

Ülesanne 8. Diferentsiaalplokk (joon. 55, a) koosneb liikumatust kaksikplokist A, mille ketirataste raadiused on R ja r. Üle ploki ketirataste läheb lõputu kett, mis haarab ka liikuva ploki B. Kett läheb väikeselt ketirattalt alla, sealt ümber liikuva ploki B uuesti üles suuremale ketirattale ja seda ületades ripub vaba aasana, suundudes uuesti väikese ketirattale. Suurelt ketirattalt alla rippuvale ketiharule on rakendatud jõud P. Leida jõu P ja tõstetava raskuse Q suhe, kui ei arvesta hõõrdumist.

Vaatleme alguses liikuva ploki B tasakaalu (joon. 55, b). Temale mõjuvad järgmised jõud: raskus $\mathfrak{Q}$ ja kummaski keti harus reaktsioonid $\mathfrak{T}_1$ ja $\mathfrak{T}_2$.



Joon. 55.

Momentide võrrandist punkti D suhtes leiame:

$$T_2 = \frac{Q}{2}.$$

Selge on, et ka

$$T_1 = \frac{Q}{2}.$$

Nüüd vaatleme ploki A tasakaalu (joon. 55, a). Temale mõjuvad järgmised jõud: jõud $\mathfrak{P}$, rippuvate ja plokki B haaravate keti osade sisejõud $\mathfrak{F}_1$ ja $\mathfrak{F}_2$ ning plokki A hoidva konksu reaktsioon $\mathfrak{R}_A$. Sisejõud F_1 ja F_2 võrduvad eespool leitud reaktsioonidega T_1 ja T_2:

$$F_1 = F_2 = \frac{Q}{2}.$$

Ülesande lahendamiseks on tarvis kirjutada ainult üks tasakaalu võrrand — momentide võrrand ploki A tsentri suhtes:

$$-P \cdot R - \frac{Q}{2} \cdot r + \frac{Q}{2} \cdot R = 0.$$

Sellest võrrandist saame:

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{R - r}{R}.$$

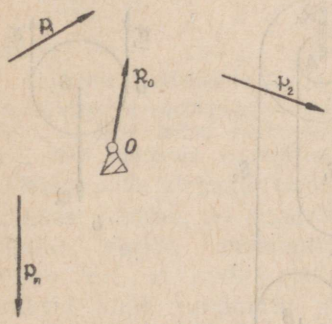
Siit nähtub, et mida väiksem on vahe $R - r$, seda väiksem võib olla jõud P võrreldes Q-ga.

Olgu näiteks $R = 25$ cm, $r = 24$ cm, siis

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{25 - 24}{25} = \frac{Q}{50},$$

s. t. raskuse Q ülestõstmiseks on vaja jõudu P, mis on 50 korda tõstetavast raskusest väiksem.

Ülesanne 9. (Kangi tasakaal.) Missugust tingimust peavad rahuldama kangile rakendatud jõud, et kang jääks tasakaalu?



Joon. 56.

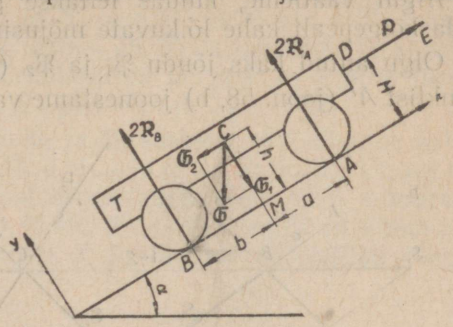
Kangiks nimetatakse keha, mis saab pöörelda liikumatu telje ümber ja millele on rakendatud jõud tasapinnas, mis on risti pöörlemisteljega.

Olgu kang tasakaalus jõudude $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ..., $\mathfrak{P}_n$ mõjul, mis asuvad pöörlemisteljega risti asuvas joonise tasapinnas (joon. 56). Peale nende jõudude mõjub kangile veel telje reaktsioon, mis on suunatud risti teljega. Selle reaktsiooni tähistame $\mathfrak{R}_0$. Jõudude $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ..., $\mathfrak{P}_n$ ja $\mathfrak{R}_0$ süsteem on tasakaalus. Kirjutame ühe tasakaalu võrrandi — momentide võrrandi punkti O suhtes. Reaktsiooni $\mathfrak{R}_0$ moment punkti O suhtes on null. Järelikult

$$m_0(\mathfrak{P}_1) + m_0(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_0(\mathfrak{P}_n) = 0.$$

Niisiis on kangi tasakaaluks tarvis, et mõjuvate jõudude momentide summa liikumatu punkti suhtes võrduks nulliga.

Ülesanne 10. Auto veab järelvankrit T trossi DE abil (joon. 57). Tross on teepinnaga paralleelne ja viimane moodustab horisondiga nurga α. Trossi ja teepinna vaheline kaugus on H. Järelvankri kaal G on rakendatud punkti C, kaugusel $CM = h$ tee pinnast. Rataste teepinnaga kokkupuutepunktide A ja B kaugus punkti C projektsioonist M teepinnale on: $AM = a$ ja $BM = b$. Leida trossi sisejõud ja rataste surve teele, kui süsteem on tasakaalus ja kui seejuures hõõrdumist mitte arvestada.



Joon. 57.

Järelvanker on tasakaalus järgmiste jõudude mõjul: järelvankri kaal $\mathfrak{G}$, mis on suunatud vertikaalselt alla, trossi sisejõud $\mathfrak{P}$, mis on suunatud piki trossi, ja reaktsioonid $2\mathfrak{R}_A$ ja $2\mathfrak{R}_B$, mis on suunatud risti teepinnaga. Tee reaktsioon kummalegi esirattale võrdub $\mathfrak{R}_A$-ga. Meie võtame nende resultandi $2\mathfrak{R}_A$; sama on maksev ka tagarataste kohta. Suuname x- ja y-teljed nii, nagu on näidatud joonisel 57. Momentide tsentriks võtame punkti B. Kirjutame kolm tasakaalu võrrandit (jõu $\mathfrak{G}$ momendi arvutamisel lahutame ta kaheks komponendiks; teepinnaga risti suunatud jõuks $G_1 = G\cos\alpha$ ja teepinnaga paralleelselt suunatud jõuks $G_2 = G\sin\alpha$):

$$P - G\sin\alpha = 0;$$
$$2R_A + 2R_B - G\cos\alpha = 0;$$
$$P \cdot H + G\cos\alpha \cdot b - G\sin\alpha \cdot h - 2R_A(a+b) = 0.$$

Lahendades need võrrandid, saame:

$$P = G\sin\alpha;$$
$$R_A = \frac{G(b\cos\alpha - h\sin\alpha) + P \cdot H}{2(a+b)};$$
$$R_B = \frac{G(a\cos\alpha + h\sin\alpha) - P \cdot H}{2(a+b)}.$$

Niisiis on trossi sisejõud $G\sin\alpha$, rataste surved teele on võrdsed leitud reaktsioonidega R_A ja R_B ja on suunatud vastupidi reaktsioonidele.

VII peatükk.

Grafostaatika elemendid.

23. Jõuhulknurk ja nöörhulknurk.

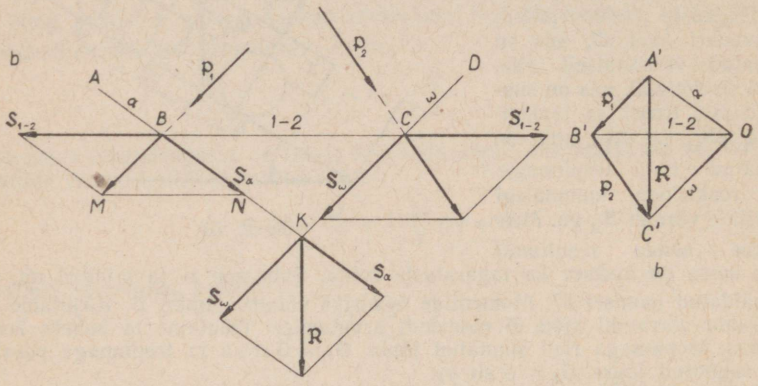
Eelmises peatükis käsitletud tasapinnalise jõudude süsteemi tasakaaluülesande lahendamise viisi nimetatakse analüütiliseks. Tasakaalu tingimused antakse selle juures algebraliste võrranditena (tasakaalu võrrandid), mille lahendamisel meie leiame tundmatud suurused.

On olemas veel ülesande graafilise lahendamise viis, mille juu-

res tundmatud leitakse graafiliselt. Käesolevas peatükis käsitleme tasapinnalise jõudude süsteemi tasakaaluülesande lahendamise graafilist meetodit.

Algul vaatleme, kuidas leitakse graafiliselt resultant. Teeme seda kõigepealt kahe lõikuvate mõjusirgetega jõu puhul.

Olgu antud kaks jõudu $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ (joon. 58, a). Vabalt võetud punktist A' (joon. 58, b) joonestame valitud mastaabis vektori $\overline{A'B'}$,



Joon. 58.

mis võrdub jõuga $\mathfrak{P}_1$. Edasi joonestame punktist B' vektori $\overline{B'C'}$, mis on võrdne jõuga $\mathfrak{P}_2$. Saame jõukolmnurga $A'B'C'$, mille sulgev külg $\overline{A'C'}$ võrdub jõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ resultandiga $\mathfrak{R}$. Resultandi mõjusirge leidmiseks teostame järgmise konstruktsiooni.

Valime joonisel 58, b mingi punkti O, nimetame teda pooluseks. Punkti O ühendame jõukolmnurga tippudega A', B' ja C' kiirte OA', OB' ja OC' abil. Esimese kiire OA' tähistame α-ga, viimase kiire OC' tähistame ω-ga ja kiire OB' arvudega $1-2$, s. t. märgime ta arvudega, mis vastavad selle kiirega seoses olevatele jõududele.

Joonisel 58, a tõmbame mingist punktist A sirge AB, mis on paralleelne kiirega α, lõikumiseni jõu $\mathfrak{P}_1$ mõjusirgega, s. t. kuni punktini B. Punktist B tõmbame sirge BC, mis on paralleelne kiirega $1-2$, kuni lõikumiseni jõu $\mathfrak{P}_2$ mõjusirgega, s. t. punktini C. Punktist C tõmbame kiirega ω paralleelse sirge CD. Punkt D võetakse vabalt nagu A-gi.

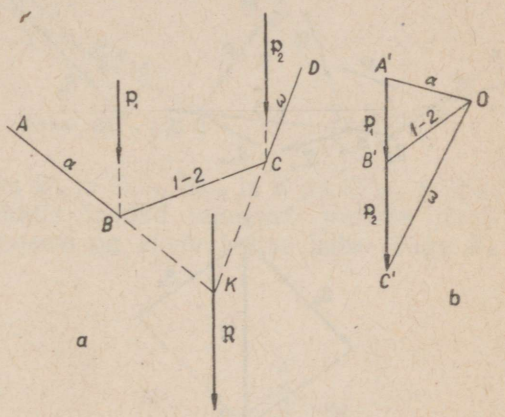
Kujundit $ABCD$ nimetatakse nöörhulknurgaks. Pikendades nöörhulknurga külgi α ja ω teineteisega lõikumiseni, leiame punkti K, mis on, nagu me edaspidi tõestame, jõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ resultandi $\mathfrak{R}$ mõjusirgel.

Tõestuseks viime jõu $\mathfrak{P}_1$ punkti B ja lahutame ta kaheks komponendiks $\mathfrak{S}_\alpha$ ja $\mathfrak{S}_{1-2}$, suunates neid piki nöörhulknurga külgi α ja $1-2$.

Kolmnurgad BMN (joon. 58, a) ja $A'B'O$ (joon. 58, b) on võrdsed, sest külg BM võrdub küljega $A'B'$ (kumbki neist võrdub P_1-ga), peale selle ühe kolmnurga kõik nurgad võrduvad teise kolmnurga vastavate nurkadega kolmnurga vastavate külgede paralleelsuse tõttu. Siit järeldame, et $S_\alpha = A'O$, ja $S_{1-2} = OB'$. Samal viisil viime jõu $\mathfrak{P}_2$ üle punkti C (joon. 58, a) ja lahutame ta kaheks komponendiks $\mathfrak{S}'_{1-2}$ ja $\mathfrak{S}_\omega$ nöörhulknurga külgede *1—2* ja ω järgi. Nagu eespoolgi, veendume, et $S'_{1-2} = B'O$ ja $S_\omega = OC'$.

Järelikult on antud jõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ süsteem ekvivalentne nelja jõuga $\mathfrak{S}_\alpha$, $\mathfrak{S}_{1-2}$, $\mathfrak{S}'_{1-2}$ ja $\mathfrak{S}_\omega$. Jõud $\mathfrak{S}_{1-2}$ ja $\mathfrak{S}'_{1-2}$ on võrdsed ning on suunatud piki sama sirget vastassuundades. Neid võib seepärast eemaldada. Jäävad järele kaks jõudu $\mathfrak{S}_\alpha$ ja $\mathfrak{S}_\omega$, millised viime üle nende mõjusirgete lõikumispunkti K ja liidame rööpküliku reegli järgi. Saame resultandi $\mathfrak{R}$, mis on ilmselt võrdne $\overline{A'C'}$-ga ja läbib punkti K, mida oligi tarvis tõestada.

Sama lahendusviisi kasutame ka kahe paralleeljõu puhul (joon. 59, a). Jõukolmnurk $A'B'C'$ muutub sel juhul sirgjooneks. Resultant $\mathfrak{R}$ on ka siin võrdne sulgeva küljega $\overline{A'C'}$ (joon. 59, b). Ülejäänud konstrueerimine toimub samuti nagu eelmisel juhul.



Joon. 59.

Minnes üle üldjuhuse juurde, vaatleme mistahes arvust jõududest koosnevat süsteemi tasapinnal (joonisel 60, a on võetud neli jõudu $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ ja $\mathfrak{P}_4$). Ehitame jõuhulknurga $A'B'C'D'E'$ (joon. 60, b), mille sulgev külg $A'E'$ on võrdne resultandiga $\mathfrak{R}$. Ühendame pooluse O kiirte α, *1—2*, *2—3*, *3—4* ja ω abil jõuhulknurga tippudega A', B', C', D', E'.

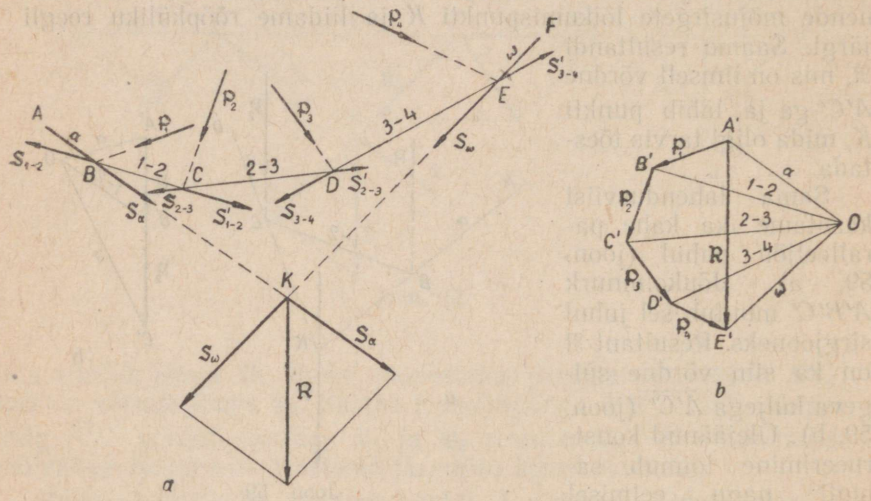
Vabalt valitud punktist A (joon. 60, a) joonestame kiirega α paralleelse sirge AB lõikumiseni jõu $\mathfrak{P}_1$ mõjusirgega. Punktist B joonestame kiirega *1—2* paralleelselt sirge BC kuni lõikumiseni jõu $\mathfrak{P}_2$ mõjusirgega jne. Saame nöörhulknurga $ABCDEF$, mille äärmisi külgi α ja ω pikendame nende lõikumiseni punktis K, mida läbib resultant $\mathfrak{R}$.

Tõestus toimub samal viisil nagu kahe jõu puhul. Viime jõud $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ ja $\mathfrak{P}_4$ punktidesse B, C, D, E ja lahutame nad komponentideks: jõu $\mathfrak{P}_1$ — jõududeks $\mathfrak{S}_{1-2}$ ja $\mathfrak{S}_\alpha$ nöörhulknurga külgede *1—2* ja α järgi, jõu $\mathfrak{P}_2$ — jõududeks $\mathfrak{S}'_{1-2}$ ja $\mathfrak{S}_{2-3}$, jõu $\mathfrak{P}_3$ — jõududeks

$\mathfrak{S}'_{2-3}$ ja $\mathfrak{S}_{3-4}$, jõu $\mathfrak{P}_4$ — jõududeks $\mathfrak{S}'_{3-4}$ ja $\mathfrak{S}_\omega$ (joonisel 60, a ei ole see lahutamine teostatud mastaabis). Nagu eespoolgi, veendume, et

$$S_\alpha = OA',$$
$$S_{1-2} = S'_{1-2} = OB',$$
$$S_{2-3} = S'_{2-3} = OC',$$
$$S_{3-4} = S'_{3-4} = OD',$$
$$S_\omega = OE'.$$

Selle tulemusena on antud jõudude $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ ja $\mathfrak{P}_4$ süsteem asendatud kaheksast jõust $\mathfrak{S}_\alpha$, $\mathfrak{S}_{1-2}$, $\mathfrak{S}'_{1-2}$, $\mathfrak{S}_{2-3}$, $\mathfrak{S}'_{2-3}$, $\mathfrak{S}_{3-4}$, $\mathfrak{S}'_{3-4}$ ja S_ω koosneva ekvivalentse süsteemiga. Jõud $\mathfrak{S}_{1-2}$ ja $\mathfrak{S}'_{1-2}$, $\mathfrak{S}_{2-3}$ ja



Joon. 60.

$\mathfrak{S}'_{2-3}$, $\mathfrak{S}_{3-4}$ ja $\mathfrak{S}'_{3-4}$ tasakaalustavad paarikaupa teineteist ja järele jäävad kaks jõudu S_α ja S_ω, millised viime punkti K ja liidame rööpküliku reegli järgi. Saame resultandi $\mathfrak{R}$, mis võrdub jõuhulknurga sulgeva küljega $A'E'$ ja läbib punkti K.

24. Tasakaalu graafilised tingimused.

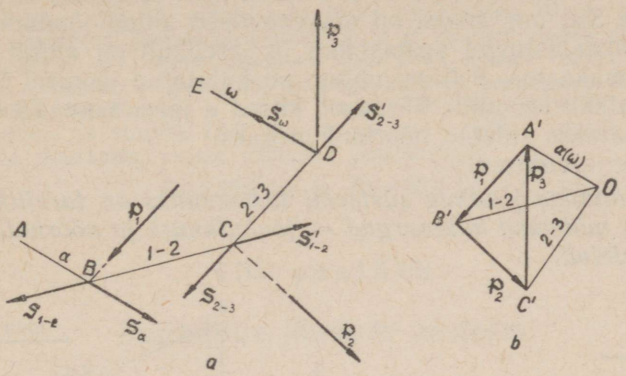
Eelmises paragrahvis väljendatud kaalutlused lubavad teha järelduse, et kui antud jõududest $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ..., $\mathfrak{P}_n$ ehitatud jõuhulknurk ei ole suletud, siis sellel jõudude süsteemil on resultant, s. t. ta on ekvivalentne ühe jõuga.

Vaatleme juhtu, kui jõuhulknurk on suletud.

Olgu antud kolm jõudu $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{P}_3$, millede jõuhulknurk on suletud (joon. 61). See tähendab, et viimase jõu $\mathfrak{P}_3$ lõpp langeb ühte esimese jõu $\mathfrak{P}_1$ algusega (punkt A' joonisel 61, b). Sel juhul

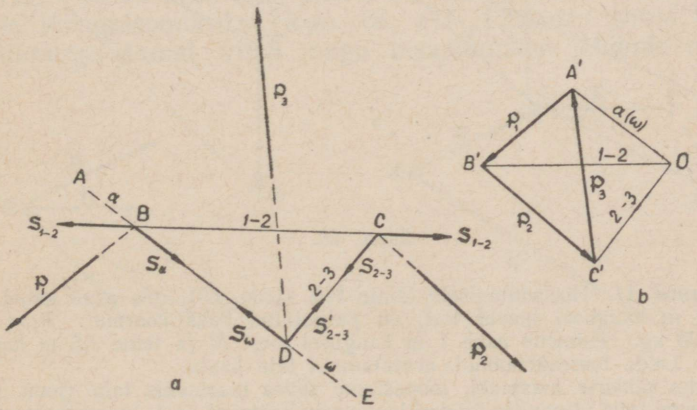
langevad esimene ja viimane kiir α ja ω ühte. Järelikult on nöörhulknurga küljed α ja ω (joon. 61, a) paralleelsed.

Viies jõu $\mathfrak{P}_1$ punkti B, jõu $\mathfrak{P}_2$ — punkti C ja jõu $\mathfrak{P}_3$ — punkti D,



Joon. 61.

lahutame nad komponentideks $\mathfrak{S}_\alpha$ ja $\mathfrak{S}_{1-2}$, $\mathfrak{S}_{2-3}$ ja $\mathfrak{S}'_{1-2}$, $\mathfrak{S}'_{2-3}$ ja $\mathfrak{S}_\omega$, s. t. korrates eelmises punktis toodud tegevust, jõuame järelduseni, et antud jõudude süsteem on ekvivalentne kahe jõuga S_α



Joon. 62.

ja S_ω nagu varemgi. Antud juhul on need jõud võrdsed moodulilt, sest

$$S_\alpha = S_\omega = OA'.$$

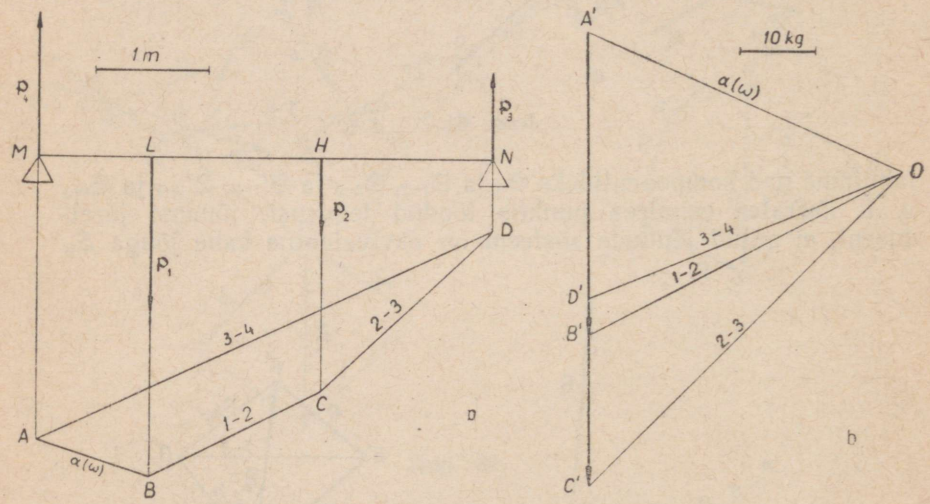
Nad on paralleelsed, sest kiired α ja ω on paralleelsed, ja vastupidiselt suunatud (joon. 61, a). Järelikult jõudude $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{P}_3$ süsteem on ekvivalentne jõupaariga $(\mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{S}_\omega)$.

Selleks, et jõudude süsteem oleks tasakaalus, on tarvis, et jõupaar ($\mathfrak{S}_\alpha\ \mathfrak{S}_\omega$) oleks tasakaalus, s. t. et tema õlg võrduks nulliga. See on võimalik aga ainult siis, kui nöörhulknurga äärmised küljed α ja ω langevad ühte, s. t. asuvad ühel ja samal sirgel. Siis jõud S_α ja S_ω, mis kokku on ekvivalentsed antud jõudude süsteemiga, tasakaalustuvad vastastikku ja järelikult on antud jõudude süsteem tasakaalus. Selline juhtum on kujutatud joonisel 62.

Nöörhulknurka, mille äärmised kiired α ja ω asuvad samal sirgel, nimetatakse suletud nöörhulknurgaks.

Jõuame järelduseni:

Tasapinnalise jõudude süsteemi tasakaaluks on tarvilik ja küllaldane, et mõlemad hulknurgad — jõuhulknurk ja nöörhulknurk — oleksid suletud.



Joon. 63.

Ülesanne 11. Horisontaalsele talale *MN* (joon. 63), mis asub kahel teineteisest 4 m kaugusel oleval toel, on paigutatud kaks koormat: $P_1 = 40$ kg ja $P_2 = 20$ kg. Esimene asub 1 m kaugusel toest *M* ja teine 1,5 m kaugusel toest *N*. Leida toereaktsioonid, arvestamata tala kaalu.

Valides pikkuse mastaabi, joonestame selles mastaabis tala (joon. 63, a) ja paigutame talle ülesandes toodud kaugusele koormad (s. t. joonestame mastaabis $MN = 4$ m, $ML = 1$ m ja $HN = 1{,}5$ m).

Talale mõjub neli jõudu: $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ ja tugede *N* ja *M* reaktsioonid, mida tähistame $\mathfrak{P}_3$ ja $\mathfrak{P}_4$. Need neli jõudu on tasakaalus, tähendab nii jõuhulknurk kui ka nöörhulknurk peavad olema suletud. Enne jõuhulknurga ehitamist valime jõu mastaabi. Seejärel joonestame tuntud jõud $A'B' = \mathfrak{P}_1$ ja $B'C' = \mathfrak{P}_2$ (joon. 63, b). Tõmbame kiired α, *1—2*, *2—3* ja ω, kusjuures viimane kiir langeb ühte esimese kiirega. Kiirt *3—4* me esialgu joonestada ei saa, sest jõu $\mathfrak{P}_3$ suurus on tundmata ja selle tõttu on tundmata ka jõuhulknurga tipu D' asukoht (jõu $\mathfrak{P}_3$ lõpp ja jõu $\mathfrak{P}_4$ algus). Ülesande lahendamine seisabki kiire *3—4* leidmises. Teda saab leida nöörhulknurga kaudu.

Nöörhulknurga esimese kiire α (ta on ka ω) joonestame mistahes punk-

tist A jõu $\mathfrak{P}_4$ mõjusirgel lõikumiseni jõu $\mathfrak{P}_1$ mõjusirgega, edasi joonestame külje *1—2* lõikumiseni jõu $\mathfrak{P}_2$ mõjusirgega ja lõpuks külje *2—3* lõikumiseni jõu $\mathfrak{P}_3$ mõjusirgega. Viimase külje *3—4* joonestame lähtudes sellest, et meie joonis rahuldaks kahte tingimust: 1) külg *3—4* peab sulgema nöörhulknurga, 2) külg *3—4* peab ühendama nöörhulknurga kahte tippu, ühte — jõu $\mathfrak{P}_3$ mõjusirgel ja teist — jõu $\mathfrak{P}_4$ mõjusirgel. Neile tingimustele vastab ilmselt sirglõik DA. Seepärast, ühendades punktid A ja D sirgega, saame viimase nöörhulknurga külje, mis annab tundmatu kiire *3—4* suuna. Nüüd jääb järele joonestada poolusest O (joon. 63, b) sirge, mis on paralleelne AD-ga, lõikumiseni jõu $\mathfrak{P}_3$ mõjusirgega, s. t. kuni punktini D'. Sirglõik $C'D'$ annab meile jõu $\mathfrak{P}_3$ suuruse ja sirglõik $D'A'$ jõu $\mathfrak{P}_4$ suuruse. Mõõtes nende sirglõikude pikkuse jõu mastaabis, saame otsitavad reaktsioonid:

$$P_3 = 22{,}5 \text{ kg} \quad \text{ja} \quad P_4 = 37{,}5 \text{ kg}.$$

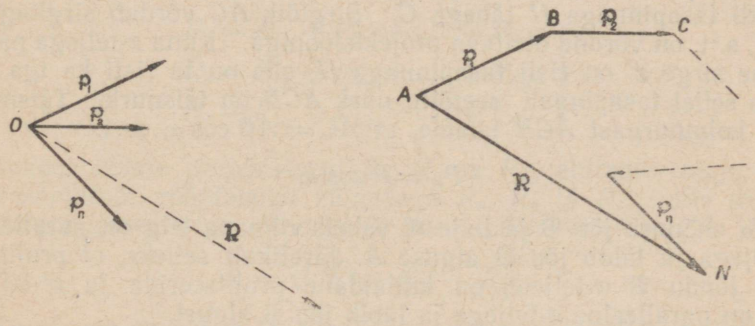
VIII peatükk.

Ruumiline jõudude süsteem.

25. Ühte punkti rakendatud jõudude süsteem.

Nüüd vaatleme juhtu, kus kehale rakendatud jõud asuvad eri tasapindades. Sellist jõudude süsteemi nimetatakse ruumiliseks jõudude süsteemiks.

Esialgu vaatleme ühte punkti rakendatud jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ süsteemi. Viime need jõud punkti O, mis on nende jõudude mõjusirgete lõikumispunktiks (joon. 64, a). Ehitades antud jõudude jõuhulknurga samal viisil nagu tasapinnalise jõudude süsteemi



Joon. 64.

puhul (vt. p. 12), leiame, et resultant $\mathfrak{R}$ võrdub selle hulknurga sulgeva küljega AN ja on rakendatud punkti O. Hulknurk $ABC \ldots N$ aga ei ole tegelikult ühes tasapinnas ja tema ehitamist ei saa teostada paberil. Seetõttu leitakse resultant projektsioonide meetodil.

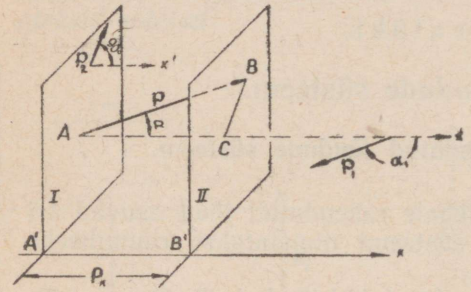
Alguses määrame kindlaks, mida tuleb mõista jõu projektsiooni all juhul, kui jõud ja telg asuvad eri tasapindades.

Olgu antud jõud $\mathfrak{P}$ ja telg x (joon. 65). Püstitame jõu $\mathfrak{P}$ algu-

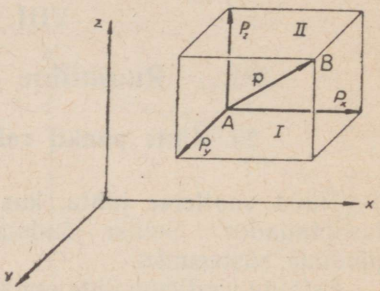
TRÜ Raamatukogu

sest A ja lõpust B kaks tasapinda I ja II, mis on teljega x risti. Kaugus nende tasapindade vahel on võrdne nende tasapindade poolt x-teljest äralõigatud sirglõiguga $A'B'$. Seda sirglõiku, võetuna vastava märgiga, nimetataksegi jõu $\mathfrak{P}$ projektsiooniks x-teljele. Projektsiooni märk määratakse meile juba tuntud viisil. Nimelt: kui sirglõigu suund tema algusest A' lõpu B' poole langeb ühte x-telje suunaga, siis projektsioon on positiivne, kui aga see suund on vastupidine, siis projektsioon on negatiivne.

Jõu $\mathfrak{P}$ projektsiooni P_x arvutamiseks võime kasutada valemit (1), mis oli tuletatud juhu jaoks, kui jõud ja telg asuvad ühes tasapinnas. Joonestame läbi punkti A (jõu $\mathfrak{P}$ algus) sirge x',



Joon. 65.



Joon. 66.

mis on paralleelne x-teljega, ja tähistame selle sirge lõikumispunkti tasapinnaga II tähega C. Sirglõik AC võrdub sirglõiguga $A'B'$, s. t. on võrdne otsitava projektsiooniga. Kuna x-teljega paralleelne sirge x' on risti tasapinnaga II, siis on ta risti ka iga sirgega sellel tasapinnal; seetõttu nurk ACB on täisnurk. Täisnurksest kolmnurgast ACB leiame, et $AC = AB \cos \alpha$, s. t.

$$P_x = P \cos \alpha,$$

kus α on nurk jõu $\mathfrak{P}$ ja telje x' vahel; viimane telg on paralleelne x-teljega ja läbib jõu $\mathfrak{P}$ alguse A. Järelikult selleks, et projitseerida jõudu $\mathfrak{P}$ x-teljele, on küllaldane projitseerida ta x'-teljele, mis on paralleelne x-teljega ja läbib jõu $\mathfrak{P}$ algust.

Kui nurk α on teravnurk, nagu joonisel 65, siis $\cos \alpha > 0$ ja projektsioon on positiivne. Kui nurk α on nürinurk, siis $\cos \alpha < 0$ ja projektsioon on negatiivne. Viimane juhtum esineks siis, kui jõul $\mathfrak{P}$ oleks joonisel 65 kujutatud suunale vastupidine suund, s. t. jõud $\mathfrak{P}$ oleks suunatud B-st A-sse. Nii moodustab jõud $\mathfrak{P}_1$ joonisel 65 x-teljega nürinurga ja tema projektsioon on negatiivne. Lõpuks, kui nurk α on täisnurk, siis $\cos \alpha = \cos 90° = 0$ ja jõu projektsioon teljele on null. Nii näiteks tasapinnas I asuva jõu $\mathfrak{P}_2$ projektsioon x-teljele on null, kuna x-telg, olles risti tasapinnaga I,

on ühtlasi risti ka iga sirgega sellel tasapinnal. Järelikult ta on risti ka jõuga $\mathfrak{P}_2$.

Kui on teada jõu $\mathfrak{P}$ projektsioonid P_x, P_y ja P_z kolmele üksteisega risti olevale teljele x, y ja z, siis on kerge leida jõudu $\mathfrak{P}$. Selleks joonestame jõu $\mathfrak{P}$ rakenduspunktist A (joon. 66) kolm sirglõiku P_x, P_y ja P_z, mis on paralleelsed x-, y- ja z-telgedega. Need sirglõigud joonestame tema märgile vastavas suunas (s. t. teljega ühes suunas, kui projektsioon on positiivne ja teljega vastassuunas, kui projektsioon on negatiivne). Seejärel ehitame nende jõudude alusel rööptahuka ja tõmbame diagonaali. See diagonaal võrdub suuruselt ja suunalt just otsitava jõuga $\mathfrak{P}$. Selles on kerge veenduda lihtsa kontrolli teel. Leiame näiteks jõu $\mathfrak{P}$ projektsiooni z-teljele. Selleks joonestame läbi I ja II tasapinna punktide A ja B ristjooned z-teljele. Otsitav projektsioon on võrdne kaugusega tasapindade I ja II vahel, mis on just võrdne P_z-ga.

Jõu P mooduli (suuruse) leiame rööptahuka diagonaali pikkusena, mis nagu teada, võrdub ruutjuurega rööptahuka kolme mõõte ruutude summast:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}. \tag{22}$$

Vaatleme resultandi leidmist projektsioonide meetodil. Kõigepealt määrame punktis 10 toodud arutluste põhjal kindlaks, et resultandi $\mathfrak{R}$ projektsioon kui jõuhulknurga sulgeva jõu projektsioon võrdub komponentjõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ projektsioonide summaga. Siit võrduksid resultandi $\mathfrak{R}$ projektsioonid R_x, R_y ja R_z kolmele üksteisega risti asuvale teljele

$$\left.\begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx}; \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y} + \ldots + P_{ny}; \\ R_z &= P_{1z} + P_{2z} + \ldots + P_{nz}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Teades kolme projektsiooni R_x, R_y ja R_z, ehitame, nagu eespool näidatud, rööptahuka külgedega R_x, R_y ja R_z, mille diagonaal on võrdne $\mathfrak{R}$-iga. Moodul R arvutatakse valemi (22) järgi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Tasakaalu tingimus jääb samaks, mis tasapinnalisegi süsteemi kohta:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n = 0,$$

millest saame kolm tasakaalu võrrandit:

$$\left.\begin{aligned} P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx} &= 0; \\ P_{1y} + P_{2y} + \ldots + P_{ny} &= 0; \\ P_{1z} + P_{2z} + \ldots + P_{nz} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

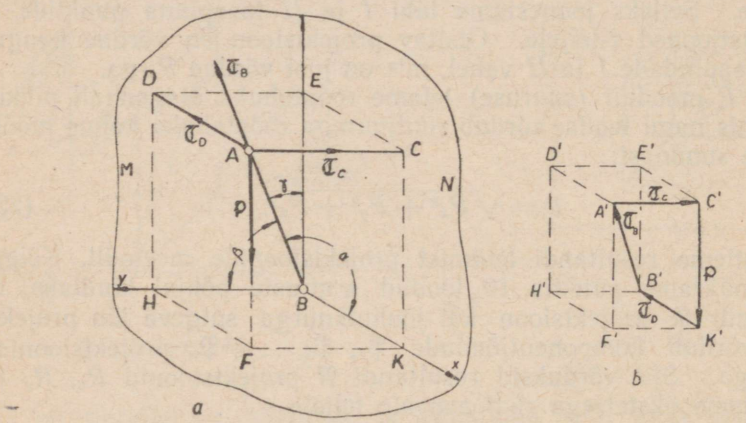
Seega: *Ühte punkti rakendatud jõudude süsteemi tasakaaluks on tarvilik ja küllaldane, et jõudude projektsioonide summa igale teljele (x-, y-, z-) oleks võrdne nulliga.*

Ülesanne 12. Leida sisejõud vardas *AB* (joon. 67) ja kettides *AC* ja *AD*, mis kannavad koormat $P = 42$ kg, kui $AB = 145$ cm, $AC = 80$ cm, $AD = 60$ cm. Ristküliku *CADE* tasapind on horisontaalne, tasapinnad *M* ja *N* aga vertikaalsed.

Vaatleme šarniiri *A* tasakaalu. Šarniirile *A* mõjuvad: raskusjõud $\mathfrak{P}$, varda *AB* reaktsioon $\mathfrak{T}_B$ ja kettide *AC* ja *AD* reaktsioonid $\mathfrak{T}_C$ ja $\mathfrak{T}_D$.

Varras *AB* on surutud, seepärast $\mathfrak{T}_B$ on suunatud *B*-st *A*-sse. Ketid on tõmmatud, mispärast reaktsioonide $\mathfrak{T}_C$ ja $\mathfrak{T}_D$ suund on *A*-st *C*-sse ja *D*-sse.

Valides koordinaatide alguseks punkti *B*, joonestame teljed *x*, *y* ja *z* (joon. 67, a): *x*-telg paralleelselt *DA*-ga, *y*-telg — paralleelselt *CA*-ga ja *z*-telg



Joon. 67.

vertikaalselt mööda sirget *BE*, millel lõikuvad tasapinnad *M* ja *N*. Projitseerime kõik jõud telgedele *x*, *y* ja *z*.

	P	T_D	T_C	T_B
Projektsioonid *x*-teljele . . .	0	$-T_D$	0	$T_B \cos\alpha$
Projektsioonid *y*-teljele . . .	0	0	$-T_C$	$T_B \cos\beta$
Projektsioonid *z*-teljele . . .	$-P$	0	0	$T_B \cos\gamma$

Nurgad α, β ja γ moodustuvad telgede *x*, *y* ja *z* ning jõu $\mathfrak{T}_B$ vahel. Need nurgad võrduvad nurkadega, mis moodustuvad rööptahuka *ADECKBHF* diagonaali *BA* ja tema servade *BK*, *BH* ja *BE* vahel. Seepärast

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{BK}{BA}; \\ \cos\beta &= \frac{BH}{BA}; \\ \cos\gamma &= \frac{BE}{BA}. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Ülesande järgi on $BA = 145$ cm, $BK = 60$ cm ja $BH = 80$ cm.

Rööptahuka diagonaali teoreemist järgneb, et

$$BA^2 = BE^2 + BK^2 + BH^2,$$

kust saame

$$BE = \sqrt{BA^2 - BK^2 - BH^2} = \sqrt{145^2 - 60^2 - 80^2} = 105 \text{ cm}.$$

Võrdusest (a) leiame:

$$\cos\alpha = \frac{60}{145} = \frac{12}{29};$$
$$\cos\beta = \frac{80}{145} = \frac{16}{29};$$
$$\cos\gamma = \frac{105}{145} = \frac{21}{29}.$$

Koostame tasakaalu võrrandid:

$$-T_D + T_B\cos\alpha = 0;$$
$$-T_C + T_B\cos\beta = 0;$$
$$-P + T_B\cos\gamma = 0.$$

Viimasest võrrandist leiame, et

$$T_B = \frac{42 \cdot 29}{21} = 58 \text{ kg}.$$

Asendades saadud T_B väärtuse teise kahte võrrandisse, leiame:

$$T_D = T_B\cos\alpha = 58 \cdot \frac{12}{29} = 24 \text{ kg};$$

$$T_C = T_B\cos\beta = 58 \cdot \frac{16}{29} = 32 \text{ kg}.$$

Ülesannet saab lahendada ka teisel, geomeetrilisel meetodil.

Ehitame jõuhulknurga $C'K'B'A'C'$ jõududest $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{T}_D$, $\mathfrak{T}_B$ ja $\mathfrak{T}_C$ (joon. 67, b). See hulknurk peab olema suletud, sest jõud on tasakaalus. Hulknurga küljed $A'C'$, $C'K'$, $K'B'$ on rööptahuka $A'C'K'F'H'B'E'D'$, mis on sarnane rööptahukaga $ACKFHDEB$ (joon. 67, a), servadeks ja $B'A'$ tema diagonaaliks. Seepärast võime kirjutada võrded

$$\frac{P}{BE} = \frac{T_C}{AC} = \frac{T_B}{BA} = \frac{T_D}{BK}$$

ehk

$$\frac{42}{105} = \frac{T_C}{80} = \frac{T_B}{145} = \frac{T_D}{60},$$

kust saame:

$$T_C = \frac{42 \cdot 80}{105} = 32 \text{ kg};$$

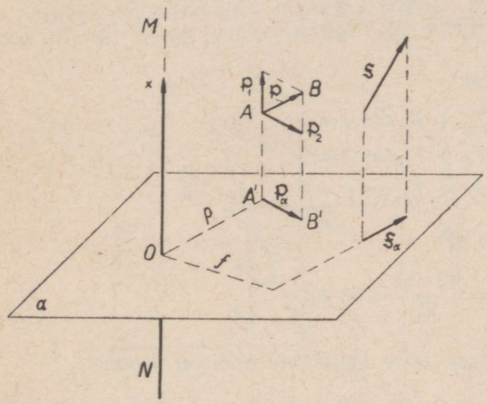
$$T_B = \frac{42 \cdot 145}{105} = 58 \text{ kg};$$

$$T_D = \frac{42 \cdot 60}{105} = 24 \text{ kg}.$$

26. Jõu moment telje suhtes.

Ruumilise jõudude süsteemi tasakaalu ülesande lahendamiseks tuleb kasutada mõistet jõu momendist telje suhtes, mida võib vaadelda jõu momendi mõiste üldistamisena.

Olgu antud jõud $\mathfrak{P}$ ja telg x (joon. 68). Püstitame tasapinna α risti teljega x ja projitseerime sellele tasapinnale jõu $\mathfrak{P}$. Selleks joonestame jõu $\mathfrak{P}$ algusest A ja lõpust B ristjooned tasapinnani α; nende ristjoonte lõikumispunktid A' ja B' tasapinnaga α ühendame vektoriga $\overline{A'B'} = \mathfrak{P}_\alpha$. See vektor $\mathfrak{P}_\alpha$ ongi jõu $\mathfrak{P}$ projektsioon tasapinnale α. Seda vektorit võib vaadelda jõu $\mathfrak{P}$ ühe komponentjõuna, kui $\mathfrak{P}$ lahutada komponentideks kahes suunas: paralleelselt x-teljega ja risti x-teljega. See lahutamine on kujutatud joonisel 68, kus üks komponent, mis on paralleelne x-teljega on tähistatud $\mathfrak{P}_1$, teine komponent — $\mathfrak{P}_2$. Viimane ongi võrdne vektoriga $\mathfrak{P}_\alpha$, mida võib vaadelda kui jõudu. Jõu $\mathfrak{P}_\alpha$ momenti x-telje ja tasapinna α lõikepunkti O suhtes nimetatakse jõu $\mathfrak{P}$ momendiks x-telje suhtes.



Joon. 68.

Jõu $\mathfrak{P}$ momendi arvuline suurus telje x suhtes võrdub jõu $\mathfrak{P}$ korrutisega õlaga p punkti O suhtes. Selle momendi märk määratakse järgmiselt. Vaatame piki x-telge tema positiivsest suunast, s. t. punktist M punkti N suunas (joon. 68). Kui me selle juures näeme, et jõud $\mathfrak{P}$ pöörab tasapinda α x-telje ümber kella osuti liikumise suunas, siis loeme jõu $\mathfrak{P}$ momendi x-telje suhtes positiivseks, on aga pööramise suund vastupidine, siis negatiivseks. Nii on joonisel 68 jõu $\mathfrak{P}$ moment x-telje suhtes positiivne, jõu $\mathfrak{F}$ moment aga negatiivne. Tähistades jõu $\mathfrak{P}$ momenti x-telje suhtes $m_x(\mathfrak{P})$, võime jõudude $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{F}$ kohta kirjutada:

$$\left.\begin{aligned} m_x(\mathfrak{P}) &= P_\alpha p; \\ m_x(\mathfrak{F}) &= -F_\alpha f. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

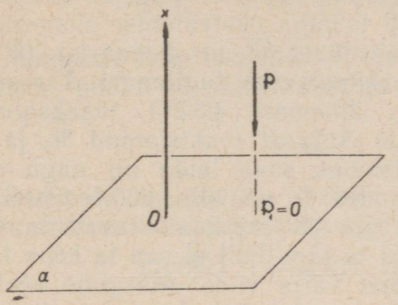
Seega: *jõu momendiks telje suhtes nimetatakse teljega risti asuvale tasapinnale võetud jõu projektsiooni momenti telje ja tasapinna lõikumispunkti suhtes.*

Momendi märgi määramisel tuleb vaadata tasapinnale telje positiivsest suunast.

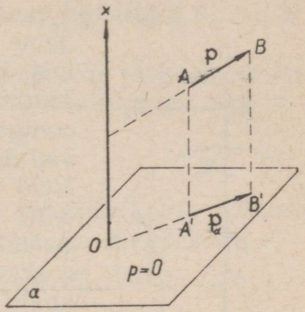
Vaatleme mõnda erijuhtu.

1. Jõud $\mathfrak{P}$ on paralleelne x-teljega (joon. 69). Sel juhul jõu $\mathfrak{P}$ projektsioon tasapinnale α võrdub nulliga. Järelikult jõu $\mathfrak{P}$ moment x-telje suhtes on null.

2. Jõu $\mathfrak{P}$ mõjusirge lõikub x-teljega (joon. 70). Sel juhul jõu $\mathfrak{P}$ projektsioon $\mathfrak{P}_\alpha$ tasapinnale α lõikub samuti x-tel-



Joon. 69.



Joon. 70.

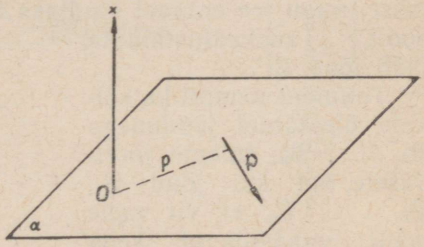
jega, s. t. läbib x-telje lõikepunkti O tasapinnaga α. Seepärast õlg p võrdub nulliga ja jõu $\mathfrak{P}$ moment x-telje suhtes võrdub nulliga.

Võrrandist (25) nähtub, et jõu moment telje suhtes võib võrduda nulliga ainult siis, kui $P_\alpha = 0$ või $p = 0$, s. t. ainult kahel toodud juhul.

Seega: *jõu moment telje suhtes võrdub nulliga, kui jõud on teljega paralleelne või lõikub temaga.*

3. Jõud $\mathfrak{P}$ asub tasapinnas, mis on x-teljega risti (joon. 71). Võttes selle tasapinna tasapinnaks α, näeme, et jõu $\mathfrak{P}$ projektsioon $\mathfrak{P}_\alpha$ tasapinnale α võrdub jõu $\mathfrak{P}$ enesega.

Seepärast jõu $\mathfrak{P}$ moment x-telje suhtes langeb ühte sama jõu momendiga punkti O suhtes.



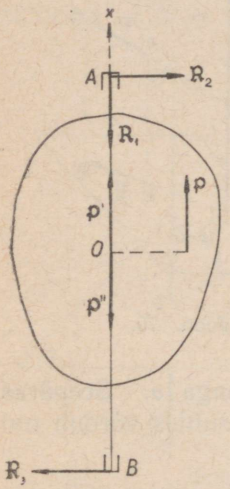
Joon. 71.

Ei ole raske veenduda, et eespool defineeritud moment punkti suhtes (p. 19) ei ole midagi muud, kui jõu moment telje suhtes, mis on risti tasapinnaga, milles asuvad jõud ja punkt.

27. Liikumatu telje ümber pöörelda võiva keha tasakaal.

Vaatleme kõva keha, mis võib hõõrdumiseta pöörelda liikumatu telje ümber. Selline juhus esineks näiteks võlli hõõrdumiseta pöörlemisel laagrites.

Oletame, et vaadeldavale kehale on rakendatud jõud $\mathfrak{P}$, mis on paralleelne pöörlemisteljega (telg x joonisel 72). Selgitame, kas selline jõud viib keha tasakaalu olekust välja. Selleks viime jõu $\mathfrak{P}$ p-s 20 käsitletud meetodil punkti O pöörlemisteljel, s. t. asendame jõu $\mathfrak{P}$ temaga ekvivalentse süsteemiga, mis koosneb jõust $\mathfrak{P}'$ ja jõupaarist ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}''$). Jõud $\mathfrak{P}'$ tasakaalustub tugilaagri A reaktsiooniga $\mathfrak{R}_1$. Jõupaari ($\mathfrak{P}\mathfrak{P}''$) tasakaalustavad laagrite A ja B reaktsioonid $\mathfrak{R}_2$ ja $\mathfrak{R}_3$. Neid reaktsioone saab leida nii nagu seda tehti ülesandes 5. Niisiis pöörlemisteljega paralleelse jõu $\mathfrak{P}$ tasakaalustavad laagrite reaktsioonid ja järelikult ei saa ta keha tasakaalu olekust välja viia. Märgime veel, et sellise jõu moment telje suhtes on null, nagu see järgneb eelmises punktis öeldust.



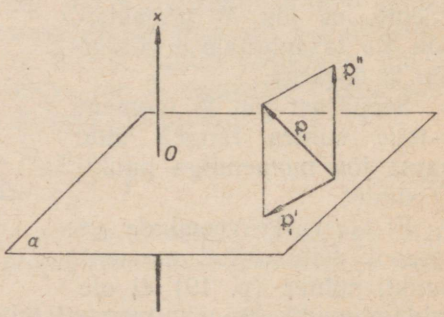
Joon. 72.

Nüüd lahendame üldisema küsimuse: missugust tingimust peab rahuldama jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ süsteem, et liikumatu telje ümber pöörelda võiv keha jääks nende jõudude toimel tasakaalu?

Algul oletame, et kõikide jõudude rakenduspunktid asetsevad ühel ja samal tasapinnal α, mis on risti pöörlemisteljega. Joonisel 73 on kujutatud üks neist jõududest $\mathfrak{P}_1$. Lahutame selle kaheks komponendiks: $\mathfrak{P}_1''$, mis on paralleelne pöörlemisteljega, ja $\mathfrak{P}_1'$, mis on risti pöörlemisteljega ja järelikult asub tasapinnas α.

Jõud $\mathfrak{P}_1''$, mis on paralleelne pöörlemisteljega, tasakaalustatakse, nagu me eespool kindlaks määrasime, laagrite reaktsioonide poolt. Tasakaalustamata jääb jõud $\mathfrak{P}_1'$.

Toimides samuti ka kõikide ülejäänud jõududega $\mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$, tuleme järeldusele, et kui jõud $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ ei vii meie poolt vaadeldavat keha tasakaalu olekust välja, siis ei toimu see ka jõudude $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots, \mathfrak{P}_n'$ mõjul, mis asuvad samas tasapinnas α. Nii kuju-



Joon. 73.

neb jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ mõju all oleva keha tasakaalu tingimuste kindlaksmääramine sama keha tasakaalu kindlaksmääramiseks, kui talle mõjuvad jõud $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots, \mathfrak{P}_n'$, mis asuvad samas teljega risti olevas tasapinnas α, s. t. juba leitud kangi tasakaalu tingimuste kordamiseks.

Selle ülesande lahendamisel (vt. ülesanne 9, p. 22) leidsime, et kangi tasakaaluks on vajalik, et kangile mõjuvate momentide summa liikumatu punkti O suhtes peab olema null:

$$m_0(\mathfrak{P}_1') + m_0(\mathfrak{P}_2') + \ldots + m_0(\mathfrak{P}_n') = 0.$$

Momendi definitsioonist telje suhtes (p. 26) järgneb, et jõu $\mathfrak{P}_1'$ moment punkti O suhtes võrdub jõu $\mathfrak{P}_1$ momendiga telje x suhtes, s. t.

$$m_0(\mathfrak{P}_1') = m_x(\mathfrak{P}_1).$$

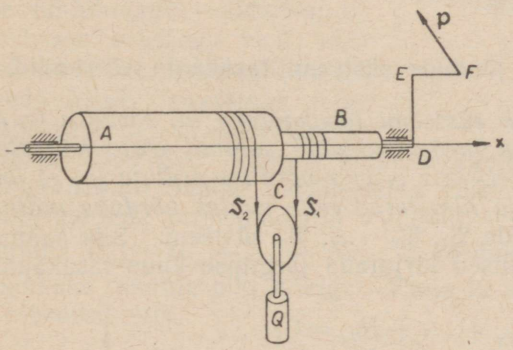
Sama on maksev ka kõikide teiste jõudude kohta. Seepärast võib saadud tasakaalu tingimust väljendada järgmiselt:

$$m_x(\mathfrak{P}_1) + m_x(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_x(\mathfrak{P}_n) = 0. \qquad (26)$$

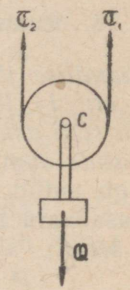
Seega: *selleks, et liikumatu telje ümber pöörelda võiv keha oleks tasakaalus, on vajalik, et jõudude momentide summa pöörlemistelje suhtes oleks võrdne nulliga.*

Tasakaalu tingimus (26) on tuletatud eeldusel, et kõikide jõudude rakenduspunktid asuvad ühes tasapinnas. See tingimus aga on õige ka mistahes jõudude süsteemi jaoks, sest iga jõudu $\mathfrak{P}$, mille rakenduspunkt ei ole tasapinnas α, võib vastavalt ümber moodustada.

Ülesanne 13. Diferentsiaalpöör koosneb kahest trumlist A ja B, mille raadiused on R ja r (joon. 74). Trumlitele on keritud köis, mis haarab liikuva ploki C, mille külge omakorda on kinnitatud koorem Q. Pööra pööramisel telje x ümber ühelt trumlilt maha keritav köis keritakse teisele trumlile, kusjuures trumlitelt alla rippuvad köie osad on paralleelsed. Käepidemele EF on rakendatud jõud $\mathfrak{P}$, mis on risti tasapinnaga DEF. Vända DE pikkus



Joon. 74.



Joon. 75.

on l. Leida jõudude P ja Q suhe tasakaalu puhul, arvestamata selle juures hõõrdumist laagrites.

Selle ülesande lahendamiseks vaatleme alguses ploki C tasakaalu. Plokile C mõjuvad: koorma $\mathfrak{Q}$ kaal ja kõieharude reaktsioonid $\mathfrak{T}_1$ ja $\mathfrak{T}_2$ (joon. 75). On selge, et

$$T_1 = T_2 = \frac{Q}{2}.$$

Seejärel vaatleme pööra tasakaalu. Pöörale mõjuvad peale laagrite reaktsioonide veel järgmised jõud: 1) $\mathfrak{P}$ — käepidemele rakendatud jõud, 2) $\mathfrak{S}_1$ ja $\mathfrak{S}_2$ — rippuvate kõieosade poolt pöörale mõjuvad jõud. On selge, et

$$S_1 = S_2 = T_1 = T_2 = \frac{Q}{2}.$$

Kasutame eespool tuletatud tasakaalu tingimust (26); meil on:

$$m_x(\mathfrak{P}) = P \cdot l;$$

$$m_x(\mathfrak{S}_1) = S_1 \cdot r = \frac{Q}{2} \cdot r;$$

$$m_x(\mathfrak{S}_2) = -S_2 \cdot R = -\frac{Q}{2} \cdot R.$$

Vastavalt võrrandile (26) saame:

$$P \cdot l + \frac{Q}{2} \cdot r - \frac{Q}{2} \cdot R = 0,$$

kust

$$P = \frac{R - r}{2l} \cdot Q.$$

Kui $R = 25$ cm, $r = 23$ cm, $l = 40$ cm, siis

$$P = \frac{25 - 23}{2 \cdot 40} \cdot Q = \frac{Q}{40},$$

s. t. selleks, et tõsta koormat Q, on tarvis rakendada jõudu P, mis on 40 korda koorma Q kaalust väiksem.

28. Ruumilise jõudude süsteemi tasakaalu võrrandid.

Ruumilise jõudude süsteemi tasakaaluks on tarvilik ja küllaldane, et: 1) jõudude projektsioonide summa igale kolmele üksteisega risti asuvale teljele x, y ja z võrduks nulliga ja 2) jõudude momentide summa iga nimetatud telje suhtes võrduks nulliga.

Olgu antud jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ süsteem. Siis saame toodud tasakaalu tingimused kirjutada järgmise kuue tasakaalu võrrandi kujul:

$$\left.\begin{aligned}
&P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx} = 0;\\
&P_{1y} + P_{2y} + \ldots + P_{ny} = 0;\\
&P_{1z} + P_{2z} + \ldots + P_{nz} = 0;\\
&m_x(\mathfrak{P}_1) + m_x(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_x(\mathfrak{P}_n) = 0;\\
&m_y(\mathfrak{P}_1) + m_y(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_y(\mathfrak{P}_n) = 0;\\
&m_z(\mathfrak{P}_1) + m_z(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_z(\mathfrak{P}_n) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Toodud tasakaalu tingimuste õigsuse tõestamisel me ei peatu. Nende tingimuste sisu selgitame järgmiste kaalutlustega.

Kui jõudude süsteem on tasakaalus, siis see tähendab (vt. p. 3), et see süsteem, rakendatuna tasakaalus olevale vabale kehale, ei vii teda tasakaalust välja. Selle vaba keha tasakaal ei muutu, kui teda toestada, sest toed ainult piiravad tema liikumise võimalusi. Asetame sellele kehale sellise toe, et ta saab ainult pöörelda x-telje ümber, s. t. asetame ta laagritele, mis asuvad x-teljel. Kui vaba keha on tasakaalus jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ toimel, siis pärast nimetatud laagrite kasutamisele võtmist ei saa nimetatud jõudude süsteem teda tasakaalust välja viia.

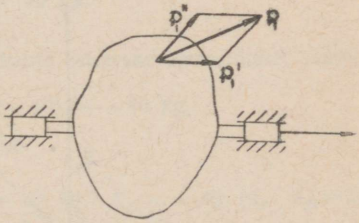
Pärast seda me võime rakendada selle keha juures eelmises p-s tuletatud tasakaalu tingimust. Saame neljanda tasakaalu võrrandi (27):

$$m_x(\mathfrak{P}_1) + m_x(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_x(\mathfrak{P}_n) = 0.$$

Analoogiliselt saame ka viienda ja kuuenda tasakaalu võrrandi. Esimese tasakaalu võrrandi

$$P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx} = 0$$

saamiseks toestame keha nii, et ta saab liikuda ainult piki x-telge. Selleks jätkub näiteks, kui ühendada keha kahe liuguriga, mis liiguvad x-teljega paralleelsetel juhtpindadel, nagu näidatud joonisel 76. Lahutame ühe jõu $\mathfrak{P}_1$ kaheks komponentjõuks: x-teljega paralleelseks $\mathfrak{P}_1'$ ja x-teljega risti olevaks $\mathfrak{P}_1''$. Jõud $\mathfrak{P}_1''$ tasakaalustatakse juhtpindade reaktsioonidega, sest see x-teljega risti asuv jõud ei saa anda kehale liikumist piki seda telge, igasugune teine keha liikumine aga ei ole võimalik.



Joon. 76.

Jääb järele jõud $\mathfrak{P}_1'$. Samuti toimime ka teiste süsteemi kuuluvate jõududega. Saame paralleelsete jõudude $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots, \mathfrak{P}_n'$ süsteemi, millede projektsioonid x-teljele on $\mathfrak{P}_{1x}, \mathfrak{P}_{2x}, \ldots, \mathfrak{P}_{nx}$. Kui summa $P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx}$ ei võrduks nulliga, siis antud keha hakkaks liikuma piki x-telge. Kuna ta aga peab jääma tasakaalu olekusse, siis

$$P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx} = 0.$$

Samal viisil saame ka kaks järgmist võrrandit:

$$P_{1y} + P_{2y} + \ldots + P_{ny} = 0;$$
$$P_{1z} + P_{2z} + \ldots + P_{nz} = 0.$$

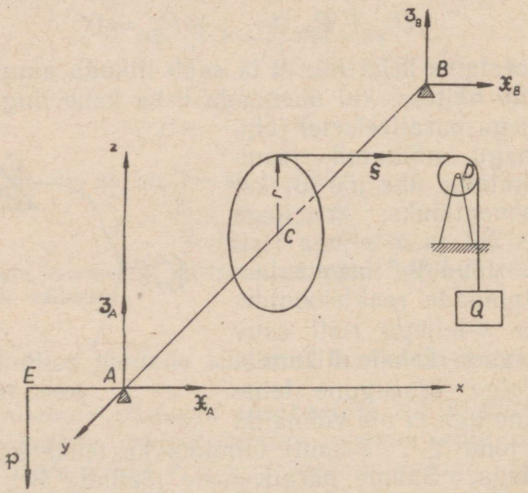
Käsitletud kaalutlused selgitavad kuue tasakaalu võrrandi (27) füüsikalist mõtet, mis seisab selles, et nende võrrandite poolt väljendatud tingimuste täitmine tagab keha liikumise võimatust ükskõik missuguses suunas.

P-s 22 toodud arutlusi korrates jõuame teoreemini:

Kui jõudude süsteemil on resultant, siis selle resultandi moment mingi telje suhtes võrdub komponentjõudude momentide summaga sama telje suhtes.

Ülesanne 14. Pööra abil, mis on skemaatiliselt kujutatud joonisel 77, tõstetakse koormat $Q = 80$ kg. Trumli läbimõõt $r = 5$ cm. Vända pikkus $AE = 40$ cm. $AC = CB = 50$ cm. Leida töölise poolt käepidemele rakendatud jõud P ja laagrite reaktsioonid A ja B pööra sellises asendis, kus vänt AE on horisontaalne ja jõud $\mathfrak{P}$ vertikaalne. Hõõrdumist ei tule arvestada.

Pöörale mõjuvad järgmised jõud: 1) töölise poolt rakendatud jõud $\mathfrak{P}$, 2) jõud $\mathfrak{S}$, millega köis mõjutab trumlit, ta on suunatud piki köit, s. t. horisontaalselt ja tema suurus võrdub koorma raskusega Q (kui mitte arvestada hõõrdumist plokis D); 3) laagri A reaktsioon $\mathfrak{R}_A$; see reaktsioon on hõõrdumise



Joon. 77.

puududes suunatud risti teljega AB; kuna reaktsiooni $\mathfrak{R}_A$ täpne suund on tundmata, siis lahutame ta kaheks komponendiks X_A ja Z_A piki x- ja z-telgi; 4) laagri B reaktsioon $\mathfrak{R}_B$, mille lahutame samuti kaheks komponendiks X_B ja Z_B.

Koordinaatide alguseks valime punkti A. x-, y- ja z-teljed suuname nii, nagu kujutatud joonisel 77.

Tasakaalu võrrandite (27) koostamiseks arvutame jõudude projektsioonid x-, y- ja z-telgedele ja jõudude momendid samade telgede suhtes.

	P	F	X_A	Z_A	X_B	Z_B
Projektsioonid x-teljele . . .	0	80	X_A	0	X_B	0
Projektsioonid y-teljele . . .	0	0	0	0	0	0
Projektsioonid z-teljele . . .	$-P$	0	0	Z_A	0	Z_B
Momendid x-telje suhtes . . .	0	0	0	0	0	$-Z_B \cdot 100$
Momendid y-telje suhtes . . .	$-P \cdot 40$	$80 \cdot 5$	0	0	0	0
Momendid z-telje suhtes . . .	0	$80 \cdot 50$	0	0	$X_B \cdot 100$	0

Kirjutame tasakaalu võrrandid. Üks neist võrranditest, nimelt projektsioonide võrrand y-teljele muutub samasuseks, sest kõik jõud on teljega y risti ja nende projektsioonid sellele teljele on nullid. Jääb järele viis võrrandit:

$$80 + X_A + X_B = 0;$$
$$-P + Z_A + Z_B = 0;$$
$$-Z_B \cdot 100 = 0;$$
$$-P \cdot 40 + 80 \cdot 5 = 0;$$
$$80 \cdot 50 + X_B \cdot 100 = 0.$$

Lahendades kolm viimast võrrandit, leiame:

$$Z_B = 0;$$
$$P = \frac{80 \cdot 5}{40} = 10 \text{ kg};$$
$$X_B = -\frac{80 \cdot 50}{100} = -40 \text{ kg}.$$

Asetades saadud X_B, Z_B ja P väärtused kahte esimesse võrrandisse, saame:

$$X_A = -80 - X_B = -80 - (-40) = -40 \text{ kg},$$
$$Z_A = P = 10 \text{ kg}.$$

Niisiis $P = 10$ kg, $X_A = -40$ kg, $Z_A = 10$ kg, $X_B = -40$ kg, $Z_B = 0$.

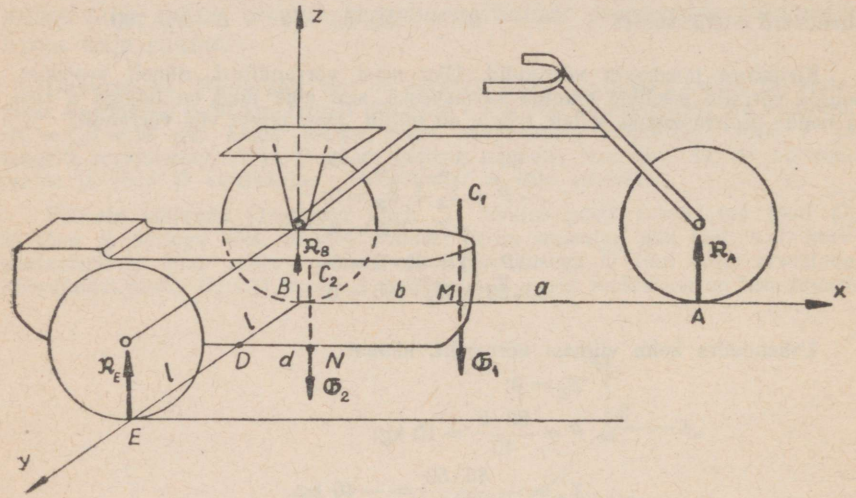
Kuna $Z_B = 0$, siis laagri B reaktsioon $\mathfrak{R}_B$ on suunatud piki x-telge ja seejuures vastupidi joonisel näidatud X_B suunaga, sest reaktsiooni X_B projektsioon on negatiivne. Reaktsioonil R_A on kaks komponenti: Z_A, mis on suunatud, nagu see on näidatud joonisel ja X_A, mis on suunatud joonisel näidatule vastupidiselt, sest $X_A < 0$.

Ülesanne 15. Leida külgkorviga mootorratta rataste surve teele (joon. 78). Mootorratta kaal $\mathfrak{G}_1$ on suunatud piki vertikaali C_1M, mis lõikab teed punktis M, kusjuures $AM = a$ ja $BM = b$. Külgkorvi kaal $\mathfrak{G}_2$ on suunatud mööda vertikaali C_2N, mis asub punktist D kaugusel $DN = d$. Punkt D on sirge BE keskkohal, kusjuures BE ühendab tagumiste rataste kokkupuutepunkte teega $BD = DE = l$.

Mootorrattale koos külgkorviga mõjuvad järgmised jõud: mootorratta kaal $\mathfrak{G}_1$, külgkorvi kaal $\mathfrak{G}_2$ ja tee reaktsioonid $\mathfrak{R}_A$, $\mathfrak{R}_B$ ja $\mathfrak{R}_E$, mis on suunatud risti teega. Suuname koordinaatteljed x, y ja z nii, nagu on kujutatud joonisel 78: z-telg vertikaalselt, x-telg piki sirget BA ja y-telg piki sirget BE. Kuna kõik jõud on paralleelsed z-teljega, siis: 1) kõikide jõudude projektsioonid x-teljele on võrdsed nulliga; 2) kõikide jõudude projektsioonid y-teljele on võrdsed nulliga; 3) kõikide jõudude momendid z-telje suhtes võrduvad nulliga.

Seetõttu tasakaalu võrranditest (27) muutuvad kolm, nimelt esimene, teine ja kuues, samasusteks. Tasakaalu tingimused väljenduvad ainult järgmise kolme võrrandiga:

$$P_{1z} + P_{2z} + \ldots + P_{nz} = 0;$$
$$m_x(\mathfrak{P}_1) + m_x(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_x(\mathfrak{P}_n) = 0;$$
$$m_y(\mathfrak{P}_1) + m_y(\mathfrak{P}_2) + \ldots + m_y(\mathfrak{P}_n) = 0.$$



Joon. 78.

Arvutame jõudude projektsioonid ja momendid:

	G_1	G_2	R_A	R_B	R_E
Projektsioonid z-teljele . . .	$-G_1$	$-G_2$	R_A	R_B	R_E
Momendid x-telje suhtes . .	0	$-G_2 \cdot l$	0	0	$R_E \cdot 2l$
Momendid y-telje suhtes . .	$G_1 \cdot b$	$G_2 \cdot d$	$-R_A(a+b)$	0	0

Koostame tasakaalu võrrandid:

$$-G_1 - G_2 + R_A + R_B + R_E = 0;$$
$$-G_2 \cdot l + R_E \cdot 2l = 0;$$
$$G_1 \cdot b + G_2 \cdot d - R_A(a+b) = 0.$$

Lahendades need võrrandid, saame:

$$R_A = \frac{G_1 \cdot b + G_2 \cdot d}{a+b};$$

$$R_E = \frac{1}{2} \cdot G_2;$$

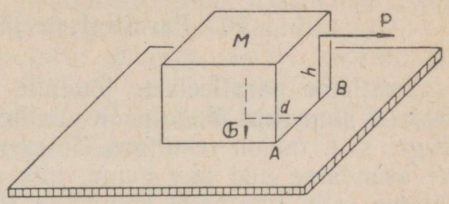
$$R_B = \frac{2G_1 \cdot a + G_2(a+b-2d)}{2(a+b)}.$$

Otsitavad rataste surved teele on võrdsed leitud reaktsioonidega ja on suunatud neile vastupidiselt.

29. Kummumiskindlus.

Mõnikord on tegemist kehadega, mis võivad kummuda mingi telje ümber ja on tarvis kindlaks määrata tingimused, mille juures kummumist ei toimu.

Vaatleme näiteks rööptahukat M (joon. 79), mis võib temale rakendatud jõu $\mathfrak{P}$ mõjul pöörduda (kummuda) telje AB ümber kella osuti liikumise suunas, kui vaadata punktist A punkti B poole. Kehale M mõjuvad jõud võime jagada kahte rühma: 1) kummutavad jõud (jõud $\mathfrak{P}$); 2) kummutamisele vastu töötavad jõud (meie näites rööptahuka kaal $\mathfrak{G}$).



Joon. 79.

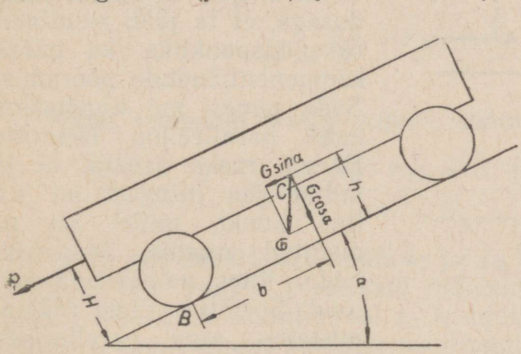
On selge, et kummumist ei toimu, kui

$$Gd \geqslant Ph, \qquad (28)$$

kus Gd ja Ph on kummutamist takistavate ja kummutavate jõudude momentide aritmeetilised suurused telje AB suhtes.

Meie poolt saadud tingimus (28) näitab, et kummumist ei toimu, kui kummutamist takistav moment (Gd) on suurem kummutavast momendist (Ph).

Ülesanne 16. Auto, kaaluga $\mathfrak{G}$, asub tasapinnal, mis on horisondi suhtes kaldu nurga α all (joon. 80), ja veab mäkke järelvankrit (joonisel ei ole näidatud) jõuga $\mathfrak{P}$. Missugust tingimust peab jõud $\mathfrak{P}$ rahuldama, et ei toimuks auto kummumist (ümber telje B)?



Joon. 80.

Autole mõjuvad jõud: 1) kummutav jõud $\mathfrak{P}_1$, millega järelvanker tõmbab autot alla: ta võrdub jõuga $\mathfrak{P}$ ja on suunatud sellele vastupidi; 2) kummutamist takistav auto kaal $\mathfrak{G}$, mis on rakendatud punkti C (auto raskuskese).

Kummutav moment võrdub korrutisega PH, kus H on trossi kinnituspunkti kõrgus teest.

Kummutamist takistava momendi arvutamiseks on otstarbekohane lahutada jõud G kaheks komponendiks: üheks — tee tasapinnaga risti olevaks jõuks, mille suurus on $G \cos \alpha$, ja teiseks — tee tasapinnaga paralleelseks jõuks, mille suurus on $G \sin \alpha$.

Resultandi momendi teoreemi järgi võrdub otsitav moment komponentjõudude momentide summaga. Kuna teega paralleelse komponendi moment on negatiivne, siis kummutamist takistav moment on võrdne

$$Gb \cos \alpha - Gh \sin \alpha.$$

Kauguste b ja h tähendused on selged jooniselt 80. Vastavalt tingimusele (28) saame:

$$Gb\cos\alpha - Gh\sin\alpha \geqslant PH,$$

kust

$$P \leqslant \frac{G}{H}(b\cos\alpha - h\sin\alpha).$$

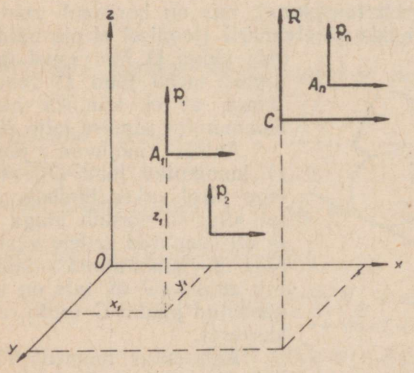
30. Paralleelsete jõudude tsenter.

Vaatleme paralleelsete jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ süsteemi, kui jõud on suunatud ühele poole. Selline süsteem on ekvivalentne ühe jõuga, s. t. tal on resultant. Tõepoolest, liites kaks jõudu (p. 13), me asendame nad ühe jõuga, mis võrdub nende summaga; edasi liidame selle summaga kolmanda jõu jne. Tulemusena saame ühe jõu $\mathfrak{R}$, mis ongi jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ süsteemi resultant. On selge, et

$$R = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$

ja et resultant $\mathfrak{R}$ on suunatud samale poole, kuhu jõud $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$. Resultandi rakenduspunktiks võib võtta iga punkti tema mõjusirgel.

P. 13 lõpus me näitasime, et see kahe jõu resultandi rakenduspunkt, mis asub komponentjõudude rakenduspunkte ühendaval sirgel, on sellise omadusega, et ta jääb resultandi rakenduspunktiks ka pärast komponentjõudude pööramist. Seda punkti me nimetasime kahe paralleeljõu tsentriks. Ei ole raske arvata, et ka mitme jõu liitmisel on selline punkt, millel on nimetatud omadus. Teda võib leida, liites paarikaupa kõik jõud. Seetõttu võime rääkida mistahes arvu paralleelsete jõudude tsentrist.



Joon. 81.

Paralleelsete jõudude tsentriks nimetatakse niisugust punkti resultandi mõjusirgel, mida läbib resultant ka siis, kui kõiki jõude pöörata sama nurga võrra nende rakenduspunktide ümber, säilitades seejuures nende paralleelsust.

Paralleelsete jõudude tsentri saame leida, nagu eespool näidatud, kõikide jõudude järkjärgulise liitmise teel. Selline meetod aga, kuigi ta on väga hästi kasutatav kahe paralleeljõu puhul, muutub raskesti käsitatavaks paljude jõudude puhul.

Paralleelsete jõudude tsentri võib määrata tema koordinaatide kaudu. On teada, et punkti asukoht ruumis on määratud kolme koordinaadi x, y, z kaudu. Koordinaat x võrdub vastava märgiga võetud sirglõiguga koordinaatide algusest kuni x-telje lõikumiseni tasapinnaga, mis läbib antud punkti ja on risti x-teljega. Analoogiliselt määratakse ka kaks teist koordinaati y ja z.

Võtame koordinaatide x, y ja z süsteemi selliselt, et z-telg oleks suunatud paralleelselt antud jõududega (joon. 81). Olgu jõu $\mathfrak{P}_1$ rakenduspunkti A_1 koordinaadid x_1, y_1 ja z_1, A_2 koordinaadid — x_2, y_2 ja z_2 jne. Otsitava paralleelsete jõudude tsentri koordinaadid olgu x_C, y_C ja z_C.

x_C, y_C ja z_C leidmiseks kasutame resultandi momendi teoreemi, võttes momendid x-telje suhtes. Saame:

$$\begin{aligned} m_x(\mathfrak{P}_1) &= P_1 y_1, \\ m_x(\mathfrak{P}_2) &= P_2 y_2, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ m_x(\mathfrak{P}_n) &= P_n y_n, \\ m_x(\mathfrak{R}) &= R y_C. \end{aligned}$$

Kuna resultandi moment võrdub komponentjõudude momentide summaga, siis

$$R y_C = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n,$$

kust saame

$$y_C = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n}{R}.$$

Võttes momendi y-telje suhtes, saame analoogiliselt:

$$x_C = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n}{R}.$$

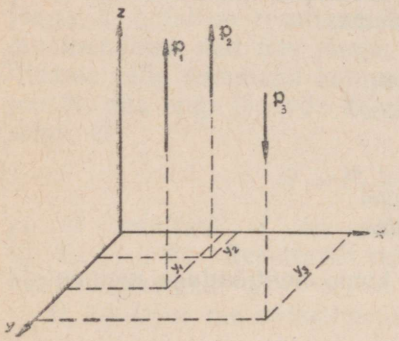
Nii on siis kaks koordinaati x_C ja y_C leitud. Ei ole raske veenduda, et igal punktil resultandi mõjusirgel on need kaks koordinaati. Kolmanda koordinaadi z_C leidmiseks, mis eraldab otsitavat punkti C igast teisest punktist resultandi mõjusirgel, tuleb pöörata kõiki jõude. Siis pöördub ka resultant punkti C ümber, nagu see järeldub paralleeljõudude tsentri definitsioonist. Pöörame jõude $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ..., $\mathfrak{P}_n$ nende rakenduspunktide A_1, A_2, ..., A_n ümber nii, et nad muutuksid paralleelseteks x-teljega ja rakendame pööratud jõudude kohta resultandi momendi teoreemi, võttes momendid y-telje kohta. Siis leiame:

$$z_C = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \dots + P_n z_n}{R}.$$

Nii saame paralleelsete jõudude tsentri koordinaatide leidmiseks järgmised valemid:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n}{R}; \\ y_C &= \frac{P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots + P_ny_n}{R}; \\ z_C &= \frac{P_1z_1 + P_2z_2 + \ldots + P_nz_n}{R}. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Kui meil on paralleelsete jõudude süsteem, milles mõnel jõul on vastupidine suund meie poolt eeldatule, siis valemid (29) jäävad maksvaks, kui z-teljega vastupidiselt suunatud jõudude märgiks võtta miinus.



Joon. 82.

Näiteks jõudude $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{P}_3$ tsenter (joon. 82) arvutatakse järgmise valemiga:

$$y_C = \frac{P_1y_1 + P_2y_2 - P_3y_3}{R},$$

sest jõu $\mathfrak{P}_3$ moment x-telje suhtes on negatiivne, kuna jõudude $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ moment sama telje suhtes on positiivne. Muidugi on sel juhul

$$R = P_1 + P_2 - P_3.$$

IX peatükk.

Raskuskese.

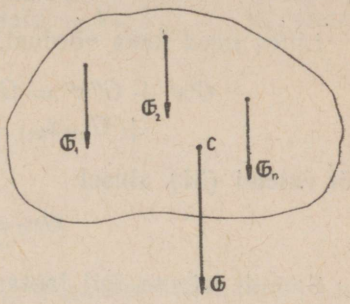
31. Keha raskuskese.

Igal kehal maakeral on raskus. Raskus on tingitud maakera külgetõmbejõust. Kujutleme, et keha koosneb suurest hulgast niivõrd väikestest osakestest, et nende mõõteid võib mitte arvestada ja neid osi lugeda punktideks. Nende osakeste raskusjõude võib lugeda paralleelseteks (joon. 83). Nad on kõik suunatud ühele poole. Seetõttu nende resultant võrdub nende summaga.

Raskusjõudude resultanti nimetame keha kaaluks. Kui G on keha kaal ja G_1, G_2, ..., G_n on keha üksikute osakeste raskusjõud, siis

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n.$$

Kui keha muudab oma asendit ruumis, siis keha osakeste raskusjõud üldiselt pöörduvad keha suhtes oma rakenduspunktide ümber, nagu see on kujutatud joonisel 39 (vt. p. 13). Seejuures keha kaal G (resultant) pöördub keha osakeste paralleelsete raskusjõudude tsentri ümber. Järelikult on keha mistahes asendi juures keha osakeste paralleelsete raskusjõudude tsenter keha kaalu rakenduspunktiks.



Joon. 83.

Keha raskuskeskmeks nimetatakse niisugust punkti, mis on keha kaalu rakenduspunktiks keha mistahes asendis.

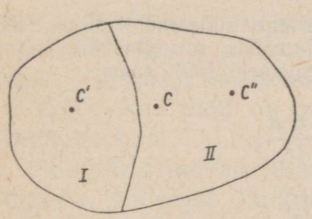
Eespool öeldust lähtudes võib selle definitsiooni asendada järgmisega:

Raskuskeskmeks nimetatakse keha osakeste paralleelsete raskusjõudude tsentrit.

Tuleb meeles pidada, et raskuskese on geomeetriline punkt ja ei ole kuidagiviisi keha punktiks, ta võib asuda ka seal, kus ei ole mingisugust keha punkti. Nii näiteks on metallrõnga raskuskese tema tsentris, s. t. seal, kus ei ole mingisugust rõnga punkti.

Keha raskuskeskme koordinaate võime leida valemite (29) abil, kui jõud $P_1, P_2, \ldots, P_n, R$ asendada jõududega $G_1, G_2, \ldots, G_n, G$. Nii saame raskuskeskme koordinaatide jaoks järgmised valemid:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{G_1x_1 + G_2x_2 + \ldots G_nx_n}{G}; \\ y_C &= \frac{G_1y_1 + G_2y_2 + \ldots + G_ny_n}{G}; \\ z_C &= \frac{G_1z_1 + G_2z_2 + \ldots + G_nz_n}{G}. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$



Joon. 84.

Jaotame keha kaheks mistahes suurusega osaks I ja II (joon. 84). Olgu osa I raskuskeskme C' koordinaadid x', y', z', tema kaal — G', osa II raskuskeskme C'' koordinaadid x'', y'', z'', tema kaal — G''.

Kirjutame esimese võrranditest (30) järgmisel kujul:

$$Gx_C = G_1x_1 + G_2x_2 + \ldots + G_nx_n. \qquad (31)$$

Olgu osadel, mis kuuluvad osa I koosseisu, numbrid $1, 2, \ldots, k$ ja osa II koosseisu kuuluvatel osadel numbrid $k+1, k+2, \ldots, n$.

Kasutades võrrandit (31) eraldi keha *I* ja keha *II* kohta, kirjutame:

$$G'x' = G_1x_1 + G_2x_2 + \ldots + G_kx_k;$$
$$G''x'' = G_{k+1}x_{k+1} + G_{k+2}x_{k+2} + \ldots + G_nx_n.$$

Liites need kaks võrdust, saame:

$$G'x' + G''x'' = G_1x_1 + G_2x_2 + \ldots + G_kx_k + \\ + G_{k+1}x_{k+1} + G_{k+2}x_{k+2} + \ldots + G_nx_n$$

või valemi (31) alusel

$$Gx_C = G'x' + G''x''.$$

Samuti leiame, kui jaotame keha kolmeks osaks:

$$Gx_C = G'x' + G''x'' + G'''x'''.$$

Analoogiliselt võime toimida, jaotades keha mistahes arvuks osadeks. Seejuures saadavad valemid on analoogilised valemiga (31).

Seetõttu on meil õigus valemis (31) ja järelikult ka valemites (30) lugeda G_1, G_2, ..., G_n nii keha väga väikeste osade, mida võtame punktidena, kui ka keha lõplike osade kaaluks ja vastavalt sellele lugeda ka x_1, y_1 ja z_1, x_2, y_2 ja z_2, ..., x_n, y_n ja z_n keha punktide koordinaatideks või tema osade raskuskeskmete koordinaatideks, millisteks on keha jaotatud. See annab võimaluse leida keha raskuskeset, kui on teada tema osade raskuskeskmed.

Ülesanne 17. Leida külgkorviga mootorratta (vt. joon. 78) raskuskese järgmistel andmetel: mootorratta kaal on G_1, tema raskuskese asub kõrgusel $C_1M = h_1$ tee pinnast ja punkti C_1 projektsiooni M kaugus mootorratta tagumise ratta teega kokkupuutepunktist B on $BM = b$. Külgkorvi kaal on G_2, tema raskuskeskme asukoht on määratud kõrgusega $C_2N = h_2$ teest ja kaugusega $DN = d$. $BD = DE = l$.

Koordinaatide alguse paigutame punkti B, z-telje suuname vertikaalselt üles, x-telje sirget BA mööda ja y-telje sirget BE mööda, mis ühendab tagumiste rataste teega kokkupuutepunkte. Kasutades valemeid (30), saame:

$$x_C = \frac{G_1x_1 + G_2x_2}{G} = \frac{G_1b + G_2d}{G_1 + G_2},$$
$$y_C = \frac{G_1y_1 + G_2y_2}{G} = \frac{G_2l}{G_1 + G_2},$$
$$z_C = \frac{G_1z_1 + G_2z_2}{G} = \frac{G_1h_1 + G_2h_2}{G_1 + G_2},$$

sest

$$x_1 = b, \quad x_2 = d,$$
$$y_1 = 0, \quad y_2 = l,$$
$$z_1 = h_1, \quad z_2 = h_2.$$

32. Homogeense keha raskuskese.

Keha nimetatakse homogeenseks, kui tema mingi osa kaalu suhe selle ruumalaga on jääv suurus keha kõikide osade kohta. Seda suhet nimetatakse erikaaluks. Tähistades erikaalu tähega γ, keha ruumala — V, keha osakeste ruumala — $V_1, V_2, \ldots, V_n$, võime homogeense keha kohta kirjutada:

$$\begin{aligned} G &= \gamma V; \\ G_1 &= \gamma V_1; \\ G_2 &= \gamma V_2; \\ &\cdots \\ &\cdots \\ G_n &= \gamma V_n. \end{aligned}$$

Asetades ruumalade $V_1, V_2, \ldots, V_n, V$ kaudu väljendatud kaalud $G_1, G_2, \ldots, G_n, G$ võrdusesse (31), saame

$$\gamma V x_C = \gamma V_1 x_1 + \gamma V_2 x_2 + \ldots + \gamma V_n x_n$$

või pärast γ-ga taandamist

$$V x_C = V_1 x_1 + V_2 x_2 + \ldots + V_n x_n, \tag{32}$$

kust saame

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + \ldots + V_n x_n}{V}; \\ \text{analoogiliselt võime saada} \\ y_C &= \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2 + \ldots + V_n y_n}{V}; \\ z_C &= \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + \ldots + V_n z_n}{V}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Sellised on homogeense keha raskuskeskme koordinaatide valemid. Neis puudub antud ruumala täitvat ainet iseloomustav suurus γ. Seetõttu mõnikord räägitakse homogeense keha raskuskeskme asemel ruumala raskuskeskmest. Nii räägitakse kera raskuskeskmest, silindri raskuskeskmest jne. Kera raskuskeskme leidmisel on ükskõik, kas meil on puidust või terasest kera, peaasi, et ta on homogeenne.

Sageli esinevad juhud, kus väikese paksusega keha kaalu võib lugeda ühtlaselt jaotatuks pinnale (näiteks õhuke homogeenne plaadike). Sel juhul kirjutatakse valemite (32) ja (33) asemel analoogilised võrrandid, kus ruumalade $V_1, V_2, \ldots, V_n, V$ asemel esinevad pinnad $F_1, F_2, \ldots, F_n, F$, ja räägitakse pinna raskuskeskmest. Nii kujuneb võrrand (32) õhukese homogeense plaadi puhul järgmiseks:

$$F x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots + F_n x_n. \tag{34}$$

Analoogiliselt toimitakse ka neil juhtudel, kui keha kaalu võib lugeda ühtlaselt jaotatuks joonele (näiteks peenike homogeenne traat). Võrrand (32) asendub sel juhul võrrandiga

$$Lx_C = L_1x_1 + L_2x_2 + \ldots + L_nx_n, \qquad (35)$$

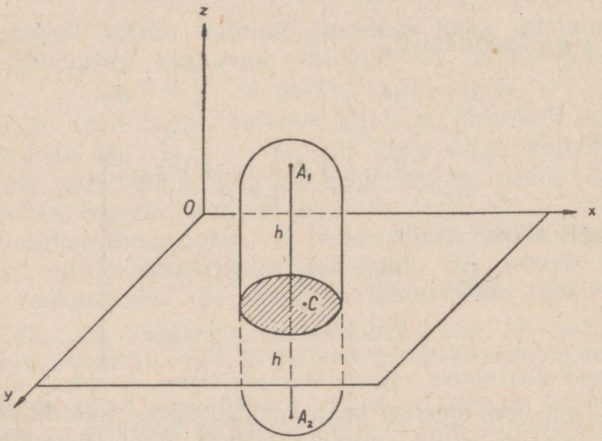
kus L on kogu traadi pikkus ja $L_1, L_2, \ldots, L_n$ traadi üksikute osade pikkused.

Analoogiliselt asendatakse ka võrrandid (33). Sel juhul räägitakse joone raskuskeskmest.

33. Sümmeetrilise keha raskuskese.

Teoreem 1. *Kui kehal on sümmeetriatasapind, siis tema raskuskese asub selles tasapinnas.*

Joonestame z-telje risti sümmeetriatasapinnaga, x- ja y-teljed võtame selles tasapinnas (joon. 85). Kuna tasapind xy on sümmeetriatasapind, siis igale keha osakesele A_1, mille kaal on G_1 ja mis asub kaugusel h sellest tasapinnast, vastab teine keha osakene A_2 kaaluga $G_2 = G_1$ ja mis asub teisel pool sümmeetriatasapinda samal kaugusel h. Siit järgneb, et nende osakeste koordinaadid z_1 ja z_2 on oma absoluutväärtuselt võrdsed, kuid erinevate märkidega, s. t. $z_2 = -z_1$. Seetõttu $G_1z_1 + G_2z_2 = 0$.



Joon. 85.

Samuti võime kirjutada teise osakestepaari A_3 ja A_4 kohta:

$$G_3z_3 + G_4z_4 = 0.$$

Nii võime lõpuks kirjutada:

$$G_1z_1 + G_2z_2 + \ldots + G_nz_n = 0$$

ja järelikult vastavalt võrrandile (30)

$$z_C = \frac{G_1 z_1 + G_2 z_2 + \ldots + G_n z_n}{G} = 0.$$

Järelikult asub raskuskese C tasapinnas xy, s. t. sümmeetriatasapinnas.

Analoogiliselt tõestuvad ka kaks järgmist teoreemi:

Teoreem 2. *Kui kehal on sümmeetriatelg, siis tema raskuskese asub sellel teljel.*

Teoreem 3. *Kui kehal on sümmeetriatsenter, siis selle keha raskuskese asub selles punktis.*

Toome sümmeetriliste kehade näiteid.

1. Homogeense kera raskuskese asub tema tsentris, sest seal on ka tema sümmeetriatsenter.

2. Silindri telg on tema sümmeetriateljeks. Tasapind, mis lõikab silindri telge keskkohalt temaga risti, on silindri sümmeetriatasapinnaks. Homogeense silindri raskuskese asub tema telje keskkohas.

3. Auto sümmeetriatasapinnaks võib lugeda vertikaalset tasapinda, mis läbib esi- ja tagasilla keskkohti. Selles tasapinnas asub ka auto raskuskese.

34. Lihtsamate kujundite raskuskese.

Leiame sirge, keskelt täisnurkselt painutatud peenikese varda raskuskeskme. Varda pikkus on $2l$ (joon. 86). Jaotame varda kahte ossa I ja II, mille pikkused $AO = OB = l$. x- ja y-teljed suuname nii, nagu see on kujutatud joonisel 86. Kasutades valemeid (30), milledes kaalu asemele võtame pikkuse, saame:

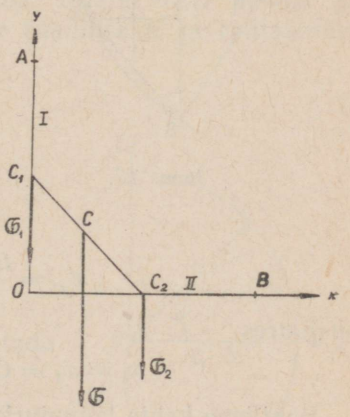
$$x_C = \frac{L_1 x_1 + L_2 x_2}{L};$$

kuna

$$L_1 = L_2 = l, \quad L = 2l;$$

$$x_1 = 0 \text{ ja } x_2 = \frac{l}{2},$$

siis



Joon. 86.

$$x_C = \frac{0 + l \cdot \frac{l}{2}}{2l} = \frac{l}{4}.$$

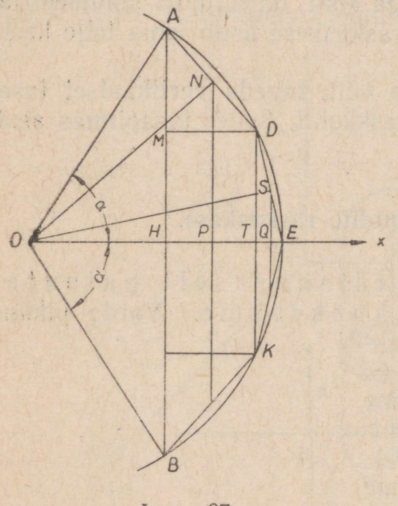
Analoogiliselt

$$y_C = \frac{l}{4}.$$

Siin on võimalik leida raskuskeset ka konstrueerimise teel. Osade *I* ja *II* raskuskeskmed asuvad nende keskkohtades. Varda osade kaal on võrdne. Tuleb leida kahe võrdse suurusega paralleelse jõu $\mathfrak{G}_1$ ja $\mathfrak{G}_2$ tsenter. Ühendades nende jõudude rakenduspunktid C_1 ja C_2 sirgega, leiame otsitava punkti *C* sirglõigu C_1C_2 keskkohal.

Ringjoone kaare raskuskese. Leiame sellise peenikese traadi raskuskeskme, mis on painutatud kaarena, mille raadius on $OA = R$ (joon. 87).

Sirge *OE*, mis jagab kaare *AEB* kesknurga *AOB* pooleks, on selle kaare sümmeetriatelg. Kaare raskuskese asub sellel teljel. Võtame selle sirge *x*-teljeks koordinaatide algusega ringi tsentris *O*. Kuna otsitav raskuskese asub *x*-teljel, siis on küllaldane, kui leiame selle punkti ühe koordinaadi ja nimelt x_C.



Joon. 87.

Jaotame kaare *AEB* mitmeks võrdseks osaks (joonisel 87 on kaar jaotatud neljaks osaks) ja joonestame kõõlud *AD*, *DE*, *EK* ja *KB*. Leiame esialgu murdjoone *ADEKB* raskuskeskme koordinaadi x'_C. Murdjoon *ADEKB* koosneb neljast võrdsest kõõlust; iga kõõlu pikkuse tähistame *l*-iga. Siis on kogu murdjoone pikkus $4l$. Iga kõõlu raskuskese asub selle keskkohal. Niisiis

$$x'_C = \frac{lx_1 + lx_2 + lx_3 + lx_4}{4l}, \tag{36}$$

kusjuures

$$x_1 = x_4 = OP \quad \text{ja} \quad x_2 = x_3 = OQ.$$

Vaatleme kahte kolmnurka: *AMD* ja *ONP*. Need kolmnurgad on sarnased, sest ühe kolmnurga küljed on vastavalt risti teise kolmnurga külgedega. Järelikult on ühe kolmnurga nurgad vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega. Seega

$$\angle ONP = \angle ADM.$$

Kolmnurkade AMD ja ONP sarnasusest järgneb:

$$\frac{OP}{AM} = \frac{ON}{AD}$$

ehk

$$\frac{x_1}{AM} = \frac{ON}{l},$$

kust

$$x_1 l = AM \cdot ON.$$

Analoogiliselt

$$x_2 l = OS \cdot DT.$$

Kuna $x_3 = x_2$, $x_4 = x_1$ ja $ON = OS$, siis vastavalt võrdusele (36) saame:

$$x'_C = \frac{AM \cdot ON + DT \cdot ON + DT \cdot ON + AM \cdot ON}{4l},$$

kust

$$x'_C = \frac{2ON(AM + DT)}{4l} = \frac{ON \cdot 2AH}{4l} = \frac{ON \cdot AB}{4l}.$$

Kui hakkame suurendama kaare sisse joonestatud murdjoone külgede arvu, vähendades iga kõõlu pikkust, siis jõuame piirini. Murdjoone, pikkusega $4l$, piiriks on kaare AEB pikkus, ON piiriks on ringjoone raadius R. Seetõttu on ringjoone kaare koordinaat x_C järgmine:

$$x_C = \lim x'_C = \frac{R \cdot AB}{L}. \qquad (37)$$

Tähistame α-ga poolt nurgast AOB. Kaare AEB pikkus on tuntud geomeetria valemi järgi võrdne raadiuse R ja radiaanides väljendatud kesknurga korrutisega:

$$L = 2\alpha \cdot R.$$

Kolmnurgast OAH leiame:

$$AH = \frac{AB}{2} = R \sin \alpha,$$

kust saame

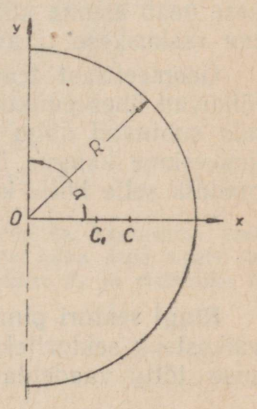
$$AB = 2R \sin \alpha.$$

Seetõttu võime võrduse (37) kirjutada järgmisel kujul:

$$x_C = \frac{R \cdot 2R \sin \alpha}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

Lõplikult

$$x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \qquad (38)$$



Joon. 88.

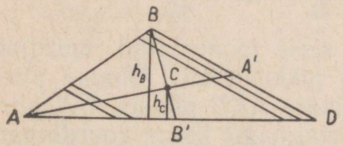
Kasutame seda valemit poole ringjoone raskuskeskme leidmiseks, kui $R = 3{,}3$ cm (joon. 88). Antud juhul $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ja $\sin\alpha = 1$.

$$x_C = \frac{R \cdot 1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi} \approx \frac{2R}{\frac{22}{7}} = \frac{7}{11}R = 2{,}1 \text{ cm}.$$

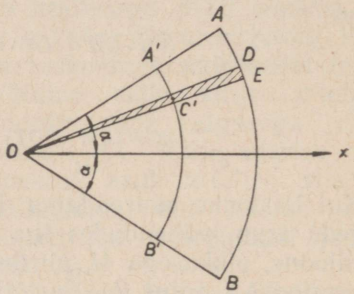
Niisiis $OC = 2{,}1$ cm.

Kolmnurga pinna raskuskese. Leiame õhukese kolmnurgakujulise plaadikese raskuskeskme (joon. 89).

Jaotame kolmnurga kitsasteks külgedega BD paralleelseteks ribadeks. Riba raskuskese asub tema keskkohas. Seetõttu asuvad kõikide ribade raskuskeskmed külje BD poolitajal AA'. Me võime



Joon. 89.



Joon. 90.

ribade raskusjõude vaadelda kui paralleelsete jõudude süsteemi, mis on rakendatud küljepoolitaja AA' punktidesse. Nende paralleelsete jõudude tsenter asub samuti sellel küljepoolitajal. Järelikult asub ka kolmnurga pinna raskuskese küljepoolitajal AA'.

Jaotades kolmnurga pinna ribadeks, mis on paralleelsed kolmnurga küljega AD, tuleme järeldusele, et kolmnurga pinna raskuskese peab asuma külje AD poolitajal BB'. Siit järeldame, et otsitav raskuskese C asub küljepoolitajate lõikepunktis.

Geomeetriast teame, et kolmnurga kõik kolm küljepoolitajat lõikuvad ühes punktis ja et see punkt jaotab iga poolitaja osadeks, mis suhtuvad nagu 1 : 2. Siit järgneb, et kolmnurga pinna raskuskeskme kaugus ükskõik missugusest tema küljest on üks kolmandik selle külje kaugusest vastastipuni, s. t.

$$h_C = \frac{1}{3} h_B.$$

Ringi sektori pinna raskuskese. Jagame sektori OAB (joon. 90) väikesteks sektoriteks ODE. Iga sellist sektorit võib tema väiksuse tõttu vaadelda kolmnurgana, mille pinna raskuskese asub külje poolitajal (s. t. raadiusel) kaugusel $\frac{2}{3}R$ kolmnurga tipust.

Nii asub sektori ODE pinna raskuskese punktis C', mille kaugus punktist O on $OC' = \frac{2}{3}R$. Joonestame ümber punkti O kaare $A'B'$, mille raadius $r = \frac{2}{3}R$. Sellel kaarel asuvad kõikide väikeste sektorite pindade raskuskeskmed. Kuna aga kõikidel väikestel sektoritel on võrdsed pindalad, siis nende kaalud on võrdsed. Nii kujuneb sektori OAB raskuskeskme leidmise ülesanne kaare $A'B'$ punktidesse rakendatud paralleelsete ja võrdsete jõudude tsentri leidmiseks. Viimase ülesande lahendasime eespool, leides kaare raskuskeskme. Kasutades võrdust (38) kaare $A'B'$ juures, leiame selle kaare, järelikult ka sektori pinna raskuskeskme koordinaadi x_C:

$$x_C = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

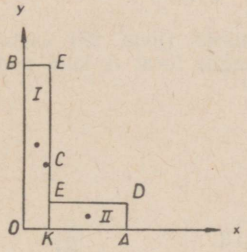
Poolringi pinna (joon. 88) raskuskeskme koordinaat on:

$$x_{C_1} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} \cdot 2{,}1 = 1{,}4 \text{ cm}.$$

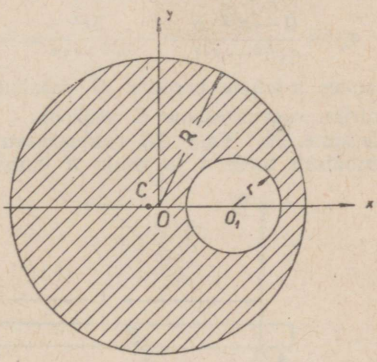
Poolringi raskuskeskme asukoht on joonisel 88 tähistatud C_1-ga.

Ülesanne 18. Leida nurgiku raskuskese, kui tema mõõted on (joon. 91): $AO = 6$ cm, $OB = 10$ cm, $AD = 2$ cm.

Suuname x- ja y-teljed joonise 91 kohaselt ja jaotame kogu pinna kaheks



Joon. 91.



Joon. 92.

ristkülikuks I ($OBEK$) ja II ($EDAK$). Kummagi ristküliku raskuskese asub vastaskülgede keskkohti ühendavate sirgete lõikepunktis, kuna need sirged on ristküliku sümmeetriateljed. Tähistame ristküliku I pinna F_1 ja ristküliku II pinna F_2, kogu nurgiku pinna aga F-iga. Leiame, et

$$F_1 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ cm}^2;$$
$$F_2 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^2;$$
$$F = F_1 + F_2 = 28 \text{ cm}^2;$$
$$x_1 = 1 \text{ cm}; \quad x_2 = 4 \text{ cm}; \quad y_1 = 5 \text{ cm}; \quad y_2 = 1 \text{ cm}.$$

Otsitava raskuskeskme koordinaadid x_C ja y_C leiame järgmiselt:

$$x_C = \frac{F_1x_1 + F_2x_2}{F} = \frac{20 \cdot 1 + 8 \cdot 4}{28} = \frac{52}{28} = 1\frac{6}{7} \text{ cm},$$

$$y_C = \frac{F_1y_1 + F_2y_2}{F} = \frac{20 \cdot 5 + 8 \cdot 1}{28} = \frac{108}{28} = 3\frac{6}{7} \text{ cm}.$$

Leitud koordinaatide abil võime nurgiku raskuskeskme C kanda joonisele.

Ülesanne 19. Leida ümmarguse ekstsentriku (joon. 92) raskuskese C, kui ketta raadius $R = 10$ cm, ümmarguse augu raadius $r = 3$ cm ja augu tsenter O_1 on ketta tsentrist O kaugusel $OO_1 = 5$ cm.

Suuname x-telje läbi tsentrite O ja O_1; x-telg on ekstsentriku sümmeetriateljeks. Sellel teljel asubki raskuskese. Seepärast on tarvis leida ainult üks koordinaat x_C. Ekstsentriku pindala võrdub ketta pindala F_1 ja augu pindala F_2 vahega, s. t.

$$F = F_1 - F_2.$$

Kujutleme ketast ilma auguta. Tema raskuskese oleks asunud siis tema tsentris O. Väikese ringi raskuskese asub punktis O_1. Tähistame ketta ja väikese ringi raskuskeskmete koordinaadid x_1 ja x_2.

Vaatleme ketast kui keha, mis koosneb kahest osast: ekstsentrikust ja väikesest ringist. Sel juhul me saame rakendada tema juures võrrandit (34):

$$F_1x_1 = Fx_C + F_2x_2.$$

Siit saame

$$Fx_C = F_1x_1 - F_2x_2$$

ja

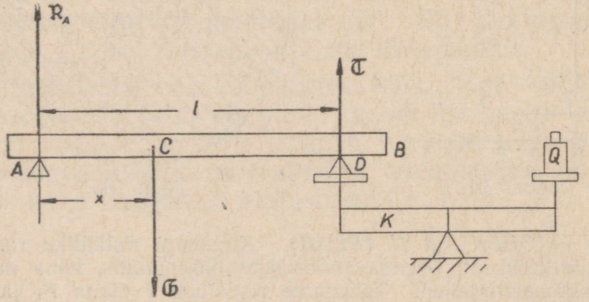
$$x_C = \frac{F_1x_1 - F_2x_2}{F} = \frac{F_1x_1 - F_2x_2}{F_1 - F_2}.$$

Kuna antud juhul: $F_1 = \pi R^2$; $F_2 = \pi r^2$; $x_1 = 0$ ja $x_2 = OO_1 = 5$ cm, siis

$$x_C = \frac{0 - \pi r^2 \cdot 5}{\pi(R^2 - r^2)} = -\frac{5r^2}{R^2 - r^2} = -\frac{5 \cdot 9}{100 - 9} = -\frac{45}{91} \approx -0{,}5 \text{ cm}.$$

Kandes x-teljele punktist O vasakule (sest $x_C < 0$) $OC = 0{,}5$ cm, saame ekstsentriku raskuskeskme C asukoha.

Ülesanne 20. Tala AB raskuskeskme leidmiseks (joon. 93) asetatakse ta horisontaalselt toele A ja kaalu K kausile. Kaugus toest A kuni punktini D,



Joon. 93.

kus tala toetub kaalukausile, on l. Teist kaalukaussi koormatakse nii, et tala oleks horisontaalses asendis tasakaalus.

Teades kaalule asetatud raskust Q, tuleb leida tala raskuskeskme C kaugus x toest A.

Talale mõjuvad jõud: 1) $\mathfrak{G}$ — tala kaal, mis on rakendatud raskuskeskmesse C; 2) $\mathfrak{T}$ — kaalukausi reaktsioon punktis D, mis võrdub Q-ga, s. t. $T = Q$; 3) $\mathfrak{R}_A$ — toe A reaktsioon.

Rakendades momentide võrrandit punkti A suhtes, saame

$$Gx - Ql = 0,$$

kust edasi

$$x = \frac{Q \cdot l}{G}.$$

Olgu näiteks $G = 9$ kg, $Q = 3$ kg ja $l = 30$ cm, siis

$$x = \frac{3 \cdot 30}{9} = 10 \text{ cm}.$$

II OSA.

KINEMAATIKA.

X peatükk.

Punkti sirgjooneline liikumine.

35. Põhimõisted.

Kinemaatika on õpetus kehade liikumisest. Meie hakkame vaatlema ainult kõva keha liikumist, s. t. sellise keha liikumist, mille mistahes punktide vaheline kaugus on jääv suurus kogu liikumise jooksul.

Keha erinevad punktid võivad liikuda erinevalt. Seepärast on loomulik alustada punkti liikumise tundmaõppimisega, s. t. punkti kinemaatikaga.

Liikumine toimub ajas, kusjuures erinevatel momentidel on punktil erinev asukoht ruumis. Ühe sellise momendi kindlaksmääramiseks loetakse aega ühest vabalt valitud momendist. Seda momenti nimetatakse algmomendiks. Aega mõõdame sekunditega. Algmomendist kuni antud momendini möödunud aega tähistame tähega t.

Vaadeldes kahte teineteisele järgnevat momenti t ja t_1, nimetame ajavahemikuks vahet

$$\Delta t = t_1 - t.$$

Punkti liikumisel see vahe on alati positiivne.

Liikumisel joonestab punkt joone, mida nimetatakse punkti t r a j e k t o o r i k s.

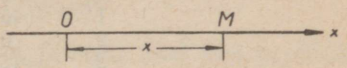
Alguses vaatleme juhtu, kus trajektooriks on sirge. Sellist liikumist nimetatakse sirgjooneliseks liikumiseks.

36. Liikumise võrrandid.

Võtame sirgjoone, mida mööda liigub punkt, x-teljeks (joon. 94). Valime sellel teljel koordinaatide alguse O.

Kuna liikuv punkt M jääb alati teljele x, siis tema asend on

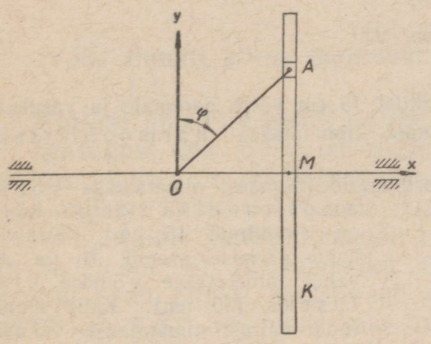
määratud ühe arvuga — koordinaadiga x. Arv x on positiivne, kui punkt asub koordinaatide algusest sealpool, kuhu on suunatud telg (joonisel 94 punktist O paremal); arv x on negatiivne, kui punkt M asub koordinaatide algusest teisel pool (joonisel 94 — vasakul). Punkti liikumisel tema koordinaat x muutub. Igale ajamomendile t vastab kindel x väärtus, s. t. kahe suuruse x ja t vahel on olemas sõltuvus $x = f(t)$, mis iseloomustab antud liikumist. Seda sõltuvust nimetatakse liikumise võrrandiks.



Joon. 94.

Teades liikumise võrrandit, võime punkti M asukoha kindlaks määrata mistahes ajamomendi kohta.

Ülesanne 21. Kulissi K vänt OA (joon. 95) pöörleb ühtlaselt liikumatu telje O ümber, pöördudes igas sekundis 90° võrra. Pikkus $AO = 15$ cm. Algmomendil vänt langeb ühte y-teljega. Koostada kulissi liikumise võrrand.



Joon. 95.

Lahendus. Vända OA pöörlemisel kuliss K liigub paralleelselt x-teljega kord paremale, kord vasakule. On küllaldane, kui koostame selle kulissi ühe punkti liikumise võrrandi. Selliseks punktiks võtame punkti M, milles kuliss lõikab x-telge ja mis on ringjoonel liikuva punkti A projektsiooniks x-teljele. Punkti M koordinaat x võrdub algmomendil nulliga, sest ülesande tingimuse kohaselt asub punkt M y-teljel. Mingil teisel momendil t, kui vänt moodustab vertikaaljoonega nurga φ, on punkti M koordinaat

$$x = OM = OA \cdot \sin \varphi.$$

φ on nurk, mille võrra vänt on t sekundi vältel pöördunud ümber telje O. Tingimuse kohaselt pöördub ta ühes sekundis 90° ehk radiaanides nurga $\frac{\pi}{2}$ võrra. Järelikult pöördub ta t sekundi vältel nurga $\varphi = \frac{\pi}{2} t$ võrra. Asetades selle φ väärtuse x-i jaoks leitud avaldisse, saame:

$$x = 15 \sin \frac{\pi}{2} t. \tag{39}$$

Niisugune on punkti M liikumise võrrand, mis määrab kulissi liikumise. Uurime seda liikumist. Leiame punkti M asukoha liikumise algmomendil ($t = 0$). Selleks asetame valemisse (39) t asemele nulli; saame

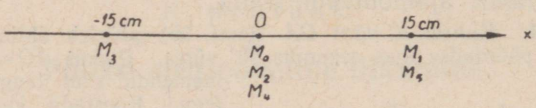
$$x = 15 \sin 0° = 0.$$

Järelikult asub punkt koordinaatide alguses, nagu määrasime kindlaks eespool. Edasi asetame valemisse järkjärgult $t = 1, 2, 3, 4$ ja 5 ja leiame

punkti asendi 1, 2, 3, 4 ja 5 sekundi järel algmomendist. Tulemused on antud järgneva tabeli näol.

t	x	Punkti asend sirgel (joon. 96)
0	0	M_0
1	15	M_1
2	0	M_2
3	—15	M_3
4	0	M_4
5	15	M_5

Märgime nüüd sirgel, mida mööda toimub liikumine, punkti M asendi mitmesugustel ajamomentidel (joon. 96). Näeme, et liikuv punkt liigub võnku-

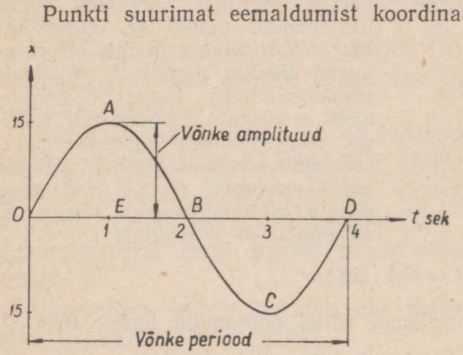


Joon. 96.

valt, eemaldudes koordinaatide algpunktist 15 cm võrra paremale ja vasakule.

Valemiga (39) määratud liikumist nimetatakse harmooniliseks võnkumiseks.

Punkti suurimat eemaldumist koordinaatide algusest nimetatakse võnke amplituudiks (antud näites on amplituud 15 cm). Kaugust kahe äärmise asendi M_1 ja M_3 vahel nimetatakse võnke ulatuseks (30 cm). Kahe amplituudi vältust nimetatakse võnke perioodiks (antud näites — 4 sek).



Joon. 97.

Harmoonilise võnkumise graafik on antud joonisel 97. Abstsissteljele on kantud aeg sekundites (t) ja ordinaat-teljele — võnkuva punkti M koordinaat x.

Harmoonilise võnkumise graafikut kujutav kõver $OABCD$ on sinusoid. Kaugus $OD = 4$ sek on võnke periood. Graafiku punkti A maksimaalne kaugus abstsisteljest ($AE = 15$ cm) võrdub võnke amplituudiga.

37. Ühtlane liikumine.

Punkti liikumist nimetatakse ühtlaseks liikumiseks, kui ta vabalt valitud võrdsetel ajavahemikel läbib võrdsed teed.

Valime koordinaatide alguse O seal, kus liikuv punkt on algmomendil ($t = 0$). Olgu ta ühel järgneval momendil t punktis M. Siis sirglõik OM võrdub punkti poolt t sekundi jooksul läbitud teega.

Punkti poolt ühe sekundi jooksul läbitud teed tähistame v-ga. Siis võime kirjutada võrduse

$$x = vt. \tag{40}$$

Võrrand (40) on ühtlase liikumise võrrand.

Suhet $\frac{x}{t}$, mis väljendab punkti poolt läbitud teed ühe ajaühiku jooksul (näiteks ühes sekundis), nimetatakse ühtlase liikumise kiiruseks ja teda tähistatakse tähega v:

$$v = \frac{x}{t}. \tag{41}$$

Kui teed mõõta meetrites ja aega sekundites, siis kiirust mõõdetakse m/sek. Teda tähistatakse tavaliselt $[v]$ = m/sek.

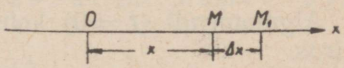
38. Punkti kiirus muutuval (mitteühtlasel) liikumisel.

Ühtlase liikumise puhul on tee suhe ajaga jääv suurus.

Igasugust teist liikumist, mille juures see suhe muutub, nimetatakse muutuvaks ehk mitteühtlaseks liikumiseks.

Vaatleme kahte teineteisele järgnevat momenti t ja $t_1 = t + \Delta t$.

Asugu liikuv punkt momendil t punktis M ja momendil t_1 punktis M_1 (joon. 98). Ajavahemiku Δt jooksul saab punkti koordinaat x juurdekasvu Δx. See juurdekasv on tee, mille läbib punkt ajavahemikus Δt.



Joon. 98.

Oletame nüüd, et liikumine toimub ühtlaselt. Siis punkti liikumise kiirus on eelneva põhjal $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Seda suurust nimetatakse keskmiseks kiiruseks ajavahemikus Δt ja teda tähistatakse v_k:

$$v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Valemist on kerge järeldada, et keskmise kiiruse väärtus oleneb sellest ajavahemikust, mille jaoks teda määratakse. Mida pikem on ajavahemik Δt, seda väiksema täpsusega iseloomustab keskmine kiirus liikumise tegelikku kiirust ja vastupidi, mida lühem on ajavahemik Δt, seda täpsemalt iseloomustab keskmine kiirus tegelikku liikumise kiirust. See võimaldab järgmise definitsiooni:

Punkti kiiruseks antud momendil nimetatakse seda piiri, millele läheneb keskmine kiirus v_k, kui ajavahemik Δt läheneb nullile.

$$v = \lim v_k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Kuna

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt},$$

siis võib toodud definitsiooni väljendada teisiti:

Punkti kiiruseks antud momendil nimetatakse punkti koordinaadi tuletist aja suhtes

$$v = \frac{dx}{dt}. \tag{42}$$

39. Ühtlaselt muutuv liikumine.

Vaatleme liikumist, mis on antud võrrandiga

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \tag{43}$$

kus v_0 ja a on jäävad suurused (kusjuures $v_0 > 0$), millede sisu selgitame allpool.

Uurime, kuidas muutub kiirus. Selleks leiame alguses kiiruse valemi (42) järgi, s. t. diferentseerime võrdust (43) aja suhtes:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at.$$

Niisiis määrab vaadeldava liikumise kiiruse valem

$$v = v_0 + at. \tag{44}$$

Algmomendi ($t = 0$) kohta saame $v = v_0$. Järelikult on v_0 algkiirus.

Nüüd teeme kindlaks, kui palju muutus kiirus t sek jooksul (algmomendist kuni vaadeldava momendini). Valemi (44) kohaselt

$$v - v_0 = at,$$

s. t. kiiruse muutumine $v - v_0$ on võrdeline ajaga t. Jagades kiiruse muutumise $v - v_0$ sekundite arvuga t, leiame, kui palju muutub kiirus ühe sekundi vältel:

$$\frac{v - v_0}{t} = a. \tag{45}$$

Kuna a on tingimuse kohaselt jääv suurus, siis on vaadeldava liikumise juures kiiruse muutumine ajaühikus ühesugune. Seepärast öeldakse, et kiirus muutub ühtlaselt ja liikumist ennast nimetatakse ühtlaselt muutuvaks liikumiseks.

Suurust a, mis valemi (45) põhjal näitab kiiruse muutumist ajaühikus, nimetatakse kiirenduseks.

Kiirenduse dimensiooni saame, nagu nähtub valemist (45), kiiruse dimensiooni jagamisel sekunditega, s. o. $[a] = \text{m/sek}^2$. Valemeid (43) ja (44) kasutatakse ülesannete lahendamisel siis, kui punkti liikumine on ühtlaselt muutuv. Nendesse valemitesse kuulub viis suurust: x — punkti poolt läbitud tee algmomendist ($t = 0$)

kuni vaadeldava momendini t; v_0 — algkiirus; t — aeg; a — kiirendus; v — kiirus vaadeldaval momendil t.

Kolm neist suurustest on antud ja kaks neist leitakse valemitest (43) ja (44).

Erijuhul, kui algkiirus on null, siis valemid (43) ja (44) võtavad järgmise kuju:

$$x = at^2 \quad \text{ja} \quad v = at.$$

Ühtlaselt muutuvat liikumist nimetatakse ühtlaselt kiirenevaks liikumiseks, kui kiirus suureneb: sel juhul [võrrand (45)] $a > 0$.

Kui aga kiirus väheneb, s. o. $a < 0$, siis nimetatakse sellist liikumist ühtlaselt aeglustuvaks liikumiseks.

40. Punkti kiirendus mistahes sirgjoonelisel liikumisel.

Ühtlaselt muutuvat liikumist võib iseloomustada kui jääva kiirendusega liikumist (a suurus ei muutu liikumise jooksul).

Nüüd määrame kindlaks kiirenduse mõiste mistahes sirgjoonelise liikumise jaoks.

Selleks vaatleme kahte teineteisele järgnevat ajavahemikku t ja $t_1 = t + \Delta t$. Olgu kiirus momendil t võrdne v-ga ja momendil t_1 võrdne v_1-ga. Suurust $\Delta v = v_1 - v$, mis näitab kiiruse muutumist, nimetatakse kiiruse juurdekasvuks ajavahemikus Δt.

Nimetame keskmiseks kiirenduseks a_k ajavahemikus Δt kiiruse juurdekasvu Δv suhet ajavahemikuga Δt, s. t.

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v}{\Delta t}.$$

Nagu keskmise kiiruse puhul, võib ka siin ütelda, et keskmine kiirendus iseloomustab seda täpsemalt kiiruse muutumist, mida lühem on ajavahemik Δt.

Punkti kiirenduseks antud momendil t nimetatakse piiri, millele läheneb keskmine kiirendus, kui ajavahemik Δt läheneb nullile.

$$a = \lim a_k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Kuna

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

siis

$$a = \frac{dv}{dt}, \tag{46}$$

s. t. punkti kiirendus antud momendil on võrdne kiiruse tuletisega aja suhtes.

XI peatükk.

Punkti kõverjooneline liikumine.

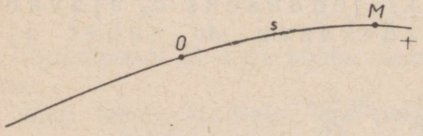
41. Punkti kõverjooneline liikumine.

Liikugu punkt kõverjooneliselt (joon. 99). Valime sellel kõverjoonel vabalt ühe punkti O, mille loeme algpunktiks. Liikuva punkti M asukohta kõveral hakkame määrama kaare pikkusega $OM = s$, mis on võetud pluss- või miinus-märgiga, vastavalt sellele, kus pool algpunkti asub punkt M. Punkti liikumisel vastab igale momendile t kindel s väärtus. Järelikult on s funktsioon t-st. Teades seda funktsiooni, me võime iga momendi t jaoks leida s väärtuse ja järelikult ka punkti asukoha. Olenevust

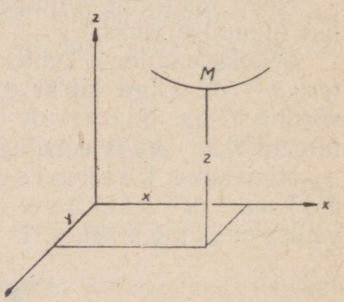
$$s = f(t) \tag{47}$$

nimetatakse seepärast liikumise võrrandiks.

Torkab silma analoogia sirgjoonelise liikumise võrrandiga.



Joon. 99.



Joon. 100.

Erinevus seisab ainult selles, et koordinaati x mõõdetakse sirglõigu pikkusega, koordinaati s — kaare pikkusega.

Kirjeldatud juhul aga peab kõverjooneliselt liikuva punkti trajektoor olema teada.

Vaatleme veel teist juhtu, kus ei ole tarvis tunda trajektoori. See nn. koordinaatide meetod seisab alljärgnevas.

Kuna punkti M asend ruumis on kindlaks määratav kolme koordinaadiga x, y, ja z (joon. 100), siis igale ajamomendile t vastavad kindlad x, y ja z väärtused, millest igaüks on aja funktsioon. Seepärast liikumise kindlaksmääramiseks on tarvis anda kolm võrrandit:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Võrrandite (48) abil on võimalik iga momendi t jaoks leida punkti koordinaadid, järelikult on võimalik kindlaks määrata tema asukoht antud momendil.

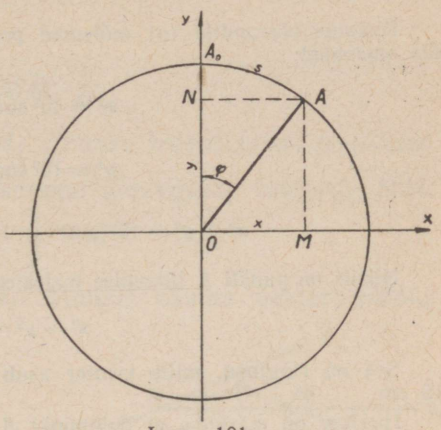
Ühendades punkti M mitmesugused asendid, saame liikumise trajektoori. Matemaatiliselt määravad trajektoori võrrandid, mis seovad koordinaate x, y ja z. Need võrrandid võib saada võrrandeist (48) t kõrvaldamise teel.

Selgitame käsiteldut näite abil.

Ülesanne 22. Koostada liikumise võrrandid 21. ülesande tingimuste järgi vända OA otsa A kohta (vt. joon. 95).

E s i m e n e v i i s. Kuna punkt A on alati samal kaugusel $OA = 15$ cm liikumatust punktist O, siis punkti A trajektoor on ringjoon raadiusega $OA = 15$ cm (joonis 101).

Valime kaare s algpunktiks A_0, s. t. punkti, kus asub algmomendil vända ots. Positiivseks suunaks loeme liikumise suunaga ühtelangevat suunda. Mingil momendil t määrab punkti A asukoha trajektooril koordinaat s, mis võrdub kaare A_0A pikkusega. Sama kaare pikkus võrdub raadiuse OA ja kesknurga φ korrutisega. Järelikult



Joon. 101.

$$s = OA \cdot \varphi = 15\varphi.$$

Nagu eelmise ülesande lahendamisel kindlaks tegime, on $\varphi = \frac{\pi}{2} t$. Järelikult kujuneb punkti A liikumise võrrand ringjoonelisel liikumisel järgmiseks:

$$s = 15 \cdot \frac{\pi}{2} t.$$

T e i n e v i i s. Punkti A koordinaadid on: $x = OM$ ja $y = ON$. Jooniselt 101 nähtub, et $OM = OA \sin\varphi$ ja $ON = OA \cos\varphi$. Järelikult on $x = 15 \sin\varphi$ ja $y = 15 \cos\varphi$.

Asendades φ tema väärtusega $\varphi = \frac{\pi}{2} t$, saame

$$\left.\begin{aligned} x &= 15 \sin \frac{\pi}{2} t; \\ y &= 15 \cos \frac{\pi}{2} t. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Sellised on punkti A liikumise võrrandid.

Me näeme, et esimene võrrand $x = 15 \sin \frac{\pi}{2} t$ langeb ühte võrrandiga (39), mis määrab punkti M liikumise, viimane on omakorda punkti A projektsiooniks x-teljele ja võngub harmooniliselt piki seda telge.

Teine võrrand $y = 15 \cos \frac{\pi}{2} t$ langeb ühte punkti N (punkti A projektsioon y-teljele) liikumise võrrandiga. Ei ole raske veenduda, et see punkt võngub harmooniliselt mööda y-telge, see liikumine on analoogiline punkti M liikumisega mööda x-telge. Mõlema võnkumise periood ja amplituud on sama.

Leiame nüüd punkti A trajektoori võrrandi lähtudes tema liikumise võrrandeist (a), milleks nendest võrrandest kõrvaldame t. Kasutame trigonomeetrilist valemit

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$$

Tõstame võrrandite (a) mõlemad pooled ruutu ja liidame need võrrandid siis omavahel:

$$x^2 = 15^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} t,$$

$$y^2 = 15^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} t,$$

$$x^2 + y^2 = 15^2 (\sin^2 \frac{\pi}{2} t + \cos^2 \frac{\pi}{2} t) = 15^2.$$

Niisiis on punkti A liikumise trajektoori võrrand

$$x^2 + y^2 = 15^2.$$

See on ringjoon, mille tsenter asub koordinaatide alguses ja raadius on 15 cm.

Huvitav on märkida, et kui punkt A liigub ühtlaselt ringjoonel, siis tema projektsioonid x- ja y-teljele võnguvad harmooniliselt ühesuguse amplituudiga.

42. Punkti kiirus kõverjoonelisel liikumisel.

Vaatleme punkti M trajektoori (joon. 102). Joonestame sellesse kõverasse murdjoone $MM_1M_2M_3$ ja kujutleme, et punkt ei liigu mitte mööda kõverat AC, vaid mööda sirglõike MM_1, M_1M_2 jne.

Punkti liikumise kiiruse uurimisel igal nendest sirgjoonelistest joonlõikudest võime rakendada neid kaalutlusi, mida väljendati sirgjoonelise liikumise kiiruse defineerimisel.

Tuleb siiski märkida, et liikumise suund muutub järsult ühelt sirglõigult teisele üle minnes. Peatume sirglõigu MM_1 juures ja oletame, et momendil t asub kõverjooneliselt liikuv punkt punktis M, momendil $t_1 = t + \Delta t$ asub ta punktis M_1.

Kui lugeda liikumist selles piirkonnas sirgjooneliseks, siis definitsiooni kohaselt on keskmine kiirus selles piirkonnas võrdne suhtega $\frac{MM_1}{\Delta t}$, kusjuures liikumise suund langeb ühte kõõlu MM_1 suunaga.

Järgmises piirkonnas M_1M_2 on keskmine kiirus $\frac{M_1M_2}{\Delta t}$ ja liikumise suund langeb ühte kõõlu M_1M_2 suunaga.

Püüame defineerida keskmist kiirust igas piirkonnas nii, et see

definitsioon peegeldaks nii keskmise kiiruse suurust kui ka liikumise suunda.

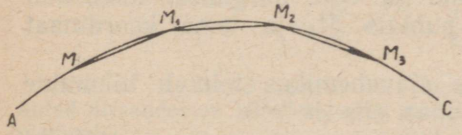
Selleks defineerime keskmist kiirust kui vektorit, mis on suunatud mööda kõõlu ja on suuruselt võrdne kõõlu pikkuse ja ajavahemiku suhtega. Et seda definitsiooni väljendada matemaatiliselt, tähistame vektori, mille algus on punktis M ja lõpp punktis M_1, MM_1-ga ja nimetame ta punkti liikumiseks ajavahemikus Δt (joon. 103).

Edasi vaatleme vektorit

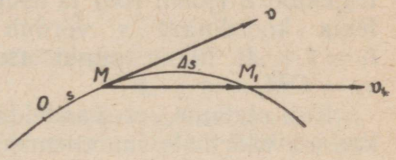
$$\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \overline{MM_1}\,\frac{1}{\Delta t}.$$

See vektor tekib vektorist $\overline{MM_1}$ viimase korrutamisel positiivse arvuga $\frac{1}{\Delta t}$. Korrutamise all mõistame ühesuguste vektorite $\overline{MM_1}$ liitmist $\frac{1}{\Delta t}$ korda.

Kahe ühesuguse vektori $\overline{MM_1}$ liitmisel saame vektori $2\overline{MM_1}$.



Joon. 102.



Joon. 103.

mis on suunatud samuti nagu $\overline{MM_1}$ ja millel on kaks korda suurem moodul kui vektoril $\overline{MM_1}$. Seepärast saame vektori $\overline{MM_1}$ korrutamisel $\frac{1}{\Delta t}$-ga vektori

$$\overline{MM_1} \cdot \frac{1}{\Delta t} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t},$$

mille moodul on $\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$, suund aga langeb ühte vektori $\overline{MM_1}$ suunaga.

Nüüd võime keskmise kiiruse väljendada matemaatiliselt järgmiselt:

$$v_k = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}.$$

Kõverjoonelise liikumise keskmiseks kiiruseks ajavahemikus Δt nimetatakse vektorit, mis võrdub punkti ümberpaigutuse suuruse ja ajavahemiku suhtega.

Vähendame nüüd ajavahemikku Δt, lähendades tema suurust nullile, seejuures murdjoon läheneb kõverale, mis on punkti trajektooriks. Järsk suuna muutus ühest murdjoone piirkonnast teise

üleminekul muutub sujuvaks suuna muutumiseks mööda kõverjoont. Vektor, mis kujutab keskmist kiirust, läheneb mingisugusele piirile.

Kiiruseks antud momendil nimetatakse vektorit $\mathfrak{v}$, millele kui piirile läheneb keskmine kiirus, kui ajavahemik Δt läheneb nullile, s. t.

$$\mathfrak{v} = \lim \mathfrak{v}_k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}.$$

Selle piiri arvutamisel on teatud erinevused, võrreldes skalaarse suuruse piiri arvutamisega.

Selle piiri arvutamisel on tarvis kindlaks määrata esiteks vektori $\mathfrak{v}$ suund ja teiseks — leida tema moodul (suurus).

Ajavahemiku Δt vähenemisel läheneb punkt M_1 kõverjoont mööda punktile M; kõõl MM_1 ja järelikult ka vektor $\mathfrak{v}_k$ pöörduvad punkti M ümber, püüdes piirjuhul ühte langeda trajektoori puutujaga punktis M. Seepärast vektor $\mathfrak{v}$ (kiirus antud momendil) on suunatud mööda puutujat. Nagu nähtub jooniselt 103, tuleb vektor $\mathfrak{v}$ kanda puutujale punkti M liikumise suunas.

Leiame kiiruse mooduli (suuruse). Olgu punkt O kaare s algus trajektooril (joon. 103) ja asugu liikuv punkt momendil t punktis M; tema koordinaat s võrdub kaarega OM. Järgmisel momendil $t_1 = t + \Delta t$ liikuv punkt asub punktis M_1 ja tema koordinaat $s_1 = OM_1 = s + \Delta s$.

Kui oletame, et vaadeldavas ajavahemikus toimub liikumine kaare s väärtuste suurenemise suunas, siis $\Delta s > 0$.

Definitsiooni kohaselt võrdub kiiruse suurus v kaare MM_1 ja ajavahemiku Δt suhte piiriga:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM_1}{\Delta t}.$$

Selle piiri arvutamiseks korrutame ja jagame murru $\frac{MM_1}{\Delta t}$ Δs-iga, siis

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM_1}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Matemaatikast on teada, et kõõlu pikkuse ja kaare pikkuse suhte piiriks on 1:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{MM_1}{\Delta s} = 1.$$

Pealeselle

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Siit saame

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{49}$$

Me oletasime, et punkt liigub kaare suurenevate väärtuste poole ja et järelikult $\Delta s > 0$.

Kui aga liikumine on vastassuunaline, siis $\Delta s < 0$. Sel juhul on vektori $\mathfrak{v}$ moodul võrdne tuletise $\left|\frac{ds}{dt}\right|$ absoluutväärtusega.

Selge on, et vektori $\mathfrak{v}$ moodul on mõlemal juhul võrdne $\left|\frac{ds}{dt}\right|$ absoluutväärtusega, s. t.

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right|.$$

Kiirus antud momendil on vektor, mille moodul võrdub kaare s tuletisega aja suhtes, suund aga langeb kokku trajektoori puutuja suunaga punkti liikumise poole.

Ülesanne 23. Leida vända OA otsa A kiirus (vt. ülesanne 21).

Ülesandes 22 leidsime punkti A trajektoori, mis oli ringjoon, samuti ka punkti A liikumise võrrandi:

$$s = 15 \cdot \frac{\pi}{2} t.$$

Kiiruse leidmiseks leiame tuletise

$$v = \frac{ds}{dt} = 15 \cdot \frac{\pi}{2} = 23{,}55 \text{ cm/sek.}$$

Vektori $\mathfrak{v}$ suund langeb ühte puutujaga liikumise suunas (joon. 104). Antud ülesandes on kiirusvektori $\mathfrak{v}$ moodul jääv suurus. Muutub ainult vektori $\mathfrak{v}$ suund.

Liikumist, mille kiiruse moodul ei muutu, nimetatakse ühtlaseks liikumiseks.

43. Punkti kiirendus kõverjoonelisel liikumisel.

Sirgjoonelisel liikumisel algebraline vahe

$$\Delta v = v_1 - v$$

iseloomustab kiiruse muutumist täielikult, kuna kiiruse suund langeb alati ühte sirgega, mida mööda liigub punkt.

Teisiti on olukord kõverjoonelise liikumise juures. Siin ei muutu mitte ainult kiiruse suurus (moodul), vaid ka suund. Seepärast kiiruste moodulite v_1 ja v vahe $v_1 - v$ ei saa täielikult iseloomustada kiiruse muutumist. Nii võrdub ülesandes 23 see vahe punkti mistahes kahe asendi kohta (A ja A_1 joonisel 104) nulliga, sest liikumine on ühtlane ja $v_1 = v$. Ei saa aga väita, et mingit kiiruse muutumist ei esine, sest tema suund muutub kogu aeg.

Tuleb kokku leppida, mida tuleb mõista kiiruse juurdekasvu, s. t. vektori $\mathfrak{v}$ juurdekasvu all.

Vaatleme punkti kahte asendit: M momendil t ja M_1 momendil

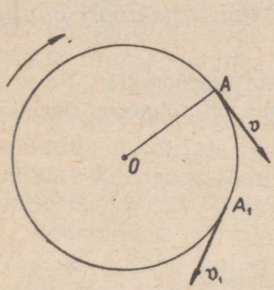
$t_1 = t + \Delta t$ (joon. 105, a). Kujutagu nende kahe momendi kiirusi vektorid $\mathfrak{v}$ ja $\mathfrak{v}_1$. Ehitame nende kahe vektori vahe.

Selleks, nagu teada (vt. p. 9), on tarvis mõlemad vektorid paralleelselt üle kanda punkti O (joon. 105, b) ja seejärel ühendada nende vektorite otsad. Vektorit

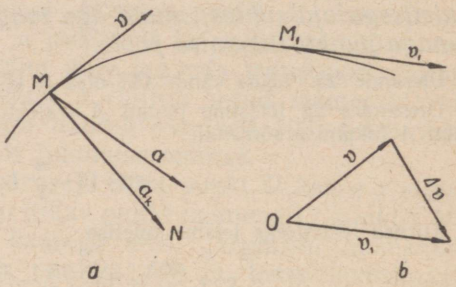
$$\Delta\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v},$$

mis võrdub vektorite $\mathfrak{v}_1$ ja $\mathfrak{v}$ vahega, nimetame kiiruse juurdekasvuks antud ajavahemikul Δt.

Määrame kindlaks kõverjoonelise liikumise kiirenduse analoogi-



Joon. 104



Joon. 105.

liselt sellega, nagu me tegime seda sirgjoonelise liikumise puhul. Algul defineerime keskmise kiirenduse kui kiiruse juurdekasvu $\Delta\mathfrak{v}$ suhte ajavahemikuga Δt:

$$a_k = \frac{\Delta\mathfrak{v}}{\Delta t}.$$

Seejuures võtame arvesse, et kiiruse juurdekasv $\Delta\mathfrak{v}$ on vektor ja selle tõttu ka keskmine kiirendus a_k on samuti vektor, mille suund langeb ühte vektori $\Delta\mathfrak{v}$ suunaga. Joonestame selle vektori alates punktist M (joon. 105, a):

$$a_k = \overline{MN}.$$

Nüüd vähendame ajavahemikku Δt. Siis muutub nii keskmist kiirendust kujutava vektori suurus kui ka suund. Nüüd määrame piiri ($\Delta t \to 0$). Vektor MN läheneb mingile piirile a, mis ongi punkti kiirenduseks antud momendil (joon. 105, a).

Punkti kiirenduseks antud momendil nimetatakse vektorit, millele läheneb piirjuhul kiiruse juurdekasvu $\Delta\mathfrak{v}$ ja ajavahemiku Δt suhe, kui viimane läheneb nullile, s. t.

$$a = \lim a_k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathfrak{v}}{\Delta t}.$$

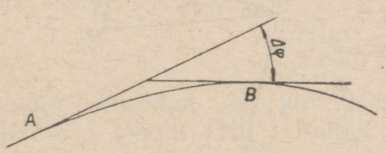
Konstruktsioonist enesest (joon. 105, b) nähtub, et vektor Δv on suunatud kõvera nõgususe poole. Keskmine kiirendus (s. t. vektor $\overline{MN}$) on vektoriga Δv paralleelne ja on suunatud samale poole. Siit järgneb, et kiirendus antud momendil a on samuti suunatud kõvera nõgususe poole.

44. Punkti kiirendus ühtlasel liikumisel.

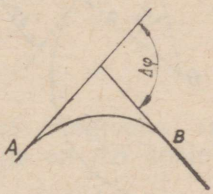
Eelmises punktis märkisime, et kõverjoonelise liikumise kiirendust iseloomustab nii kiiruse suuruse (mooduli) kui ka suuna muutumine. Kui kiiruse suund jääb samaks ja muutub ainult tema suurus, siis on meil tegemist sirgjoonelise liikumisega. Sel juhul (vt. p. 40) võrdub kiirendus kiiruse tuletisega aja suhtes

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Järelikult iseloomustab kiiruse tuletis kiiruse mooduli muutumist.



Joon. 106.



Joon. 107.

Kui vaadelda kiiruse suuna muutumist, siis on tarvis kindlaks teha, kuidas muutub punkti trajektoori puutuja suund, sest kiirus on suunatud piki puutujat.

Seepärast tutvume mõnede põhiteadmetega kõverjoonte geomeetriast. Käsitlemise lihtsuse mõttes oletame, et meil on tegemist tasapinnalise kõveraga.

Kahes naaberpunktis A ja B kõverale tõmmatud puutujate vaheline nurk olgu $\Delta\varphi$ (joon. 106).

Kui võtame kahel kõveral võrdse pikkusega kaare AB, siis puutujatevaheline nurk $\Delta\varphi$ on sellel kõveral suurem, mille kõverus on suurem (võrrelge joon. 106 ja 107).

Seepärast on loomulik kõveruse keskmiseks mõõduks võtta puutujatevahelise nurga $\Delta\varphi$ suhe kaare pikkusega $\Delta s = AB$.

Kõveruseks k antud punktis nimetatakse piiri, millele läheneb puutujatevahelise nurga ja vastava kaare pikkuse suhe, kui kaare pikkus läheneb nullile, s. t.

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Enamikul kõveratel, millega tuleb praktikas kokku puutuda, on selline piir olemas. Lihtsamaks kõveraks on ringjoon. Ringjoone juures nurk AOB (joon. 108) võrdub puutujatevahelise nurgaga $\Delta\varphi$, sest neil nurkadel on vastastikku risti asuvad haarad. Edasi

$$\Delta s = AB = R\Delta\varphi$$

(kaare pikkus võrdub raadiuse ja kesknurga korrutisega). Siit

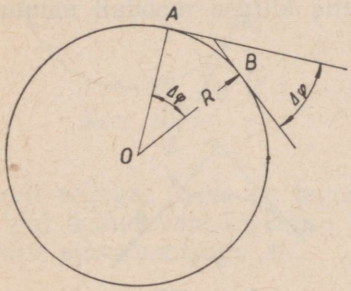
$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R}$$

ja

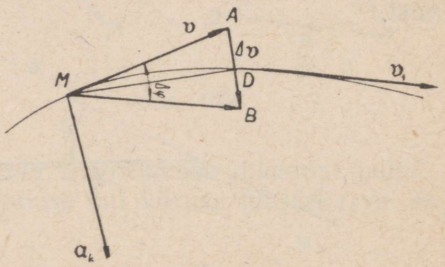
$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R}.$$

On selge, et ringjoone kõverus on kõikides punktides sama.

Antud kõvera iga punkti kohta võime leida sellise ringjoone, mille kõverus võrdub kõvera kõverusega antud punktis. Selle ring-



Joon. 108.



Joon. 109.

joone raadiust (teda tähistatakse ϱ) nimetatakse kõverusraadiuseks kõvera antud punktis. Niisiis

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\varrho}.$$

Ei ole raske veenduda, et sirgjoone kõverus k on null, sest nurk $\Delta\varphi$ on alati null.

Tuletame veel meelde, et normaaliks nimetatakse puutujale puutepunktis püstitatud ristjoont.

Pärast neid sissejuhatavaid märkusi leiame punkti kiirenduse ühtlasel kõverjoonelisel liikumisel.

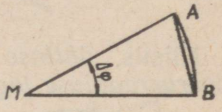
Olgu punkti kiirus momendil t kujutatav vektoriga $\mathfrak{v}$ ja momendil $t_1 = t + \Delta t$ — vektoriga $\mathfrak{v}_1$ (joon. 109).

Ehitame kiiruse juurdekasvu vektori $\Delta\mathfrak{v}$ ajavahemikul Δt. Definitsiooni kohaselt on kiirendus suhte $\frac{\Delta\mathfrak{v}}{\Delta t}$ piir, s. t.

$$\mathfrak{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathfrak{v}}{\Delta t}.$$

Tuleb meeles pidada, et see piir on vektor. Seepärast on tarvis leida tema suund ja moodul.

Kiirenduse suuna leidmiseks on tarvis kindlaks määrata, mis sugusele piirile läheneb vektori $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, s. t. keskmise kiirenduse suund. See vektor on suunatud samuti nagu Δv, s. t. paralleelselt AB-ga. Püstitame kolmnurgas MAB kõrguse tipust M ja vaatleme samaaegselt kahte sirget: kõrgust MD ja külge AB. Ajavahemiku vähenemisel need kaks sirget muudavad oma suunda, jäädes seejuures kogu aeg ristiasuvateks. Tähendab ka piirjuhul need kaks sirget jäävad teineteisega risti. Sirge MD aga pöördub Δt vähenemisel punkti M ümber, lähenedes puutujale kui piirile. Järelikult sirge AB piiriline suund on risti puutujaga, s. t. see on normaali suund.



Joon. 110.

Niisiis, *ühtlase liikumise kiirendus on suunatud mööda normaali.*

Siirdume kiirenduse mooduli määramisele. Selleks on tarvis arvutada vektori Δv mooduli ja Δt suhte piir. Vektori Δv moodul aga võrdub sirglõiguga AB, järelikult

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AB}{\Delta t}.$$

Tõmbame punktist M kui tsentrist ringjoone raadiusega $MA = MB = v$ (joon. 110). Selles ringis on AB kõõluks. Piiri $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{AB}{\Delta t}$ arvutamisel võime kõõlu AB asendada kaarega. Järelikult

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overset{\smile}{AB}}{\Delta t}.$$

Kuid

$$\overset{\smile}{AB} = MA\Delta\varphi = v\Delta\varphi,$$

kus $\Delta\varphi$ on kahe naaberpuutuja vaheline nurk.

Siit saame:

$$a = v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Piiri

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

arvutamiseks korrutame nii lugeja kui ka nimetaja kaare pikkusega Δs:

$$a = v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = v \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

$\Delta\varphi$ on kahe naaberpuutuja vaheline nurk ja

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k = \frac{1}{\varrho}.$$

Et

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v,$$

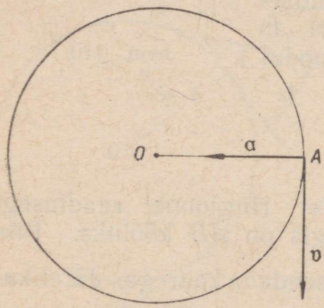
siis

$$a = v \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot v = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Lõplikult saame

$$a = \frac{v^2}{\varrho}. \tag{50}$$

Niisiis, *ühtlase liikumise kiirendus võrdub kiiruse ruudu ja kõverusraadiuse jagatisega ja on suunatud mööda normaali.*



Joon. 111.

Ülesanne 24. Leida vända OA otsa A kiirendus, kui $OA = 15$ cm (vt. ülesanne 21). Ülesandes 23 leidsime punkti A kiiruseks

$$v = 15 \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Vastavalt võrrandile (50) on

$$a = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{15^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{15} = 15 \cdot \frac{\pi^2}{4} \approx 37 \text{ m/sek}^2.$$

Kiirenduse suund on kujutatud joonisel 111.

45. Tangentsiaal- ja normaalkiirendus.

Viimases kahes paragrahvis käsiteldu võimaldab teha järgmisi järeldusi:

1. Punkti kiirendus iseloomustab kiiruse muutumist, s. t. ta iseloomustab nii selle vektori mooduli kui ka suuna muutumist.

2. Kui muutub ainult kiiruse suurus (liikumine on sirgjooneline), siis kiirendus on $\frac{dv}{dt}$ ja ta on suunatud piki liikumise trajektooriks olevat sirget.

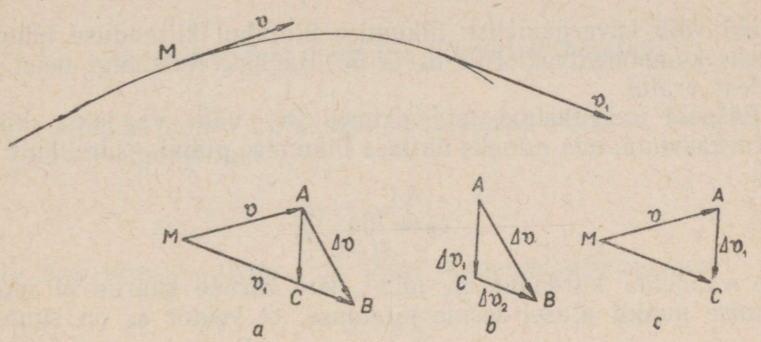
3. Kui muutub ainult liikumise suund (ühtlane liikumine), siis kiirendus on $\frac{v^2}{\varrho}$ ja ta on suunatud piki normaali.

Käsitleme nüüd kõige üldisemat juhtu, kus liikumine on kõverjooneline ja muutuv, s. t. kui muutuvad nii kiiruse suurus kui ka suund.

Trajektoori loeme endiselt tasapinnaliseks.

Joonestame jälle (joon. 112, a) vektorid $\mathfrak{v} = \overline{MA}$ — kiirus momendil t, $\mathfrak{v}_1 = MB$ — kiirus momendil $t_1 = t + \Delta t$, ja $\Delta\mathfrak{v} = \overline{AB}$ — kiiruse juurdekasv sel ajavahemikul.

Oletame, et kaare mõõtmise suund on valitud nii, et kaar s suureneb punkti liikumise suunas, siis $\frac{ds}{dt} > 0$ ja $v = \frac{ds}{dt}$. Edasi oletame, et liikumine on kiirenev, järelikult $v_1 > v$.



Joon. 112.

Punktist M kui tsentrist joonestame kaare raadiusega $MA = v$ lõikumiseni sirgega MB punktis C, nii et

$$MC = MA = v.$$

Lahutame vektori $\Delta v = \overline{AB}$ kaheks komponentvektoriks $\overline{AC} = \Delta\mathfrak{v}_1$ ja $\overline{CB} = \Delta\mathfrak{v}_2$ (joon. 112, a ja b).

Vektorit $\overline{AC} = \Delta\mathfrak{v}_1$ võib vaadelda kui kiiruse juurdekasvu, mis esineks ühtlase liikumise puhul, sest $\Delta\mathfrak{v}_1$ on kahe suuruselt võrdse vektori $\overline{MC}$ ja $\overline{MA}$ vahe (joon. 112, c).

Vektori $\Delta\mathfrak{v}_2$ moodul (suurus) on

$$CB = MB - MC = v_1 - v,$$

s. t. on võrdne kiiruste moodulite vahega (joon. 112, a).

Vektori $\Delta\mathfrak{v}$ lahutamise võib kirjutada vektorvõrdusena

$$\Delta\mathfrak{v} = \Delta\mathfrak{v}_1 + \Delta\mathfrak{v}_2.$$

Jagame selle võrduse liikmete kaupa Δt-ga ja läheme piirile $(\Delta t \to 0)$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathfrak{v}}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta\mathfrak{v}_1}{\Delta t} + \lim \frac{\Delta\mathfrak{v}_2}{\Delta t}.$$

Tähistame

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = a_n \quad \text{ja} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = a_t.$$

Kuna

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a,$$

siis saame

$$a = a_n + a_t.$$

Nii võib kõverjoonelise liikumise üldjuhul kiirenduse lahutada kaheks komponentvektoriks a_n ja a_t. Leiame kummagi neist vektoritest eraldi.

Eespool selgitasime, et vektorit Δv_1 võib vaadelda kiiruse juurdekasvuna, mis esineks ühtlase liikumise puhul. Järelikult vektorit

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

võib vaadelda kiirendusena juhul, kui kiiruse suurus ei muutu. Eelmise punkti alusel teeme järelduse, et vektor a_n on suunatud normaali mööda ja tema moodul on $a_n = \frac{v^2}{\varrho}$.

Vektori a_t moodul võrdub suhte $\frac{CB}{\Delta t}$ piiriga. Eespool märkisime, et suurus CB võrdub kiiruste algebralise vahega $v_1 - v$. Seepärast

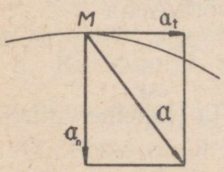
$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{CB}{\Delta t} = \lim \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Selle vektori suuna määramiseks on tarvis leida vektori Δv_2 piirsuund, sest

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t}.$$

Vektor $\Delta v_2 = \overline{CB}$ on suunatud piki sirget MB (joon. 112, a) samale poole, kuhu v_1, sest tingimuse kohaselt $v_1 > v$.

Piirjuhul ($\Delta t \to 0$) püüab vektor v_1 kokku langeda vektoriga v, s. t. kiirusega antud momendil. Järelikult on vektor a_t suunatud vektoriga v samale poole. Märgime ära, et aeglustatud liikumise puhul ($v_1 < v$) on vektor a_t suunatud otse vastu kiirusele v. Mõlemal juhul vektor a_t asub puutujal.



Joon. 113.

Kujutame nüüd joonisel 113 kiirenduse a lahutamist kaheks komponentvektoriks a_n ja a_t. Sealt nähtub, et a_t on kiirenduse komponent piki puutujat ja a_n — kiirenduse komponent piki normaali.

Vektorit a_t, s. o. kiirenduse komponenti piki puutujat, nimetatakse tangentsiaalkiirenduseks ja ta on

$$a_t = \frac{dv}{dt}. \tag{51}$$

Vektorit a_n, s. o. kiirenduse komponenti piki normaali, nimetatakse normaalkiirenduseks ja ta on

$$a_n = \frac{v^2}{\varrho}. \tag{52}$$

46. Kiirenduse leidmine liikumise üldjuhul.

Olgu teada punkti trajektoor ja liikumise võrrand $s = f(t)$. Algul leiame kiiruse

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right|.$$

Selle järel leiame valemi (51) järgi tangentsiaalkiirenduse

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

ja valemi (52) järgi normaalkiirenduse

$$a_n = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Kõverusraadius ϱ on tuntud, sest punkti trajektoor on teada. Kiirenduse saab arvutada joonise 113 kohaselt järgmise valemi abil:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \tag{53}$$

Määrame kiirenduse suuna: toimugu liikumine kaare s suurenevate väärtuste poole. Sel juhul

$$v = \frac{ds}{dt} > 0.$$

Tõmbame antud punktist puutuja ja normaali.

Kui tuletis $\frac{dv}{dt} > 0$, siis kiirus suureneb ja vastavalt käsitletule on vektor a_t suunatud kiirusega ühele poole. Kui aga tuletis $\frac{dv}{dt}$ on negatiivne, siis a_t on suunatud piki puutujat kiirusele vastupidiselt. Mis puutub vektorisse a_n, siis ta on suunatud mööda normaali alati nõgususe poole.

Kandes vektorite a_t ja a_n suurused suundadele vastavalt puutujale ja normaalile, ehitame nende abil ristküliku. Selle ristküliku diagonaal annab kiirenduse suuna.

Vaatleme mõningaid erijuhte.

1. Liikumine on sirgjooneline. Sel juhul kõverus $k = \frac{1}{\varrho}$ on null. Seepärast võrrandi (52) põhjal normaalkiirendus võrdub nulliga ja võrrandite (53) ja (51) põhjal

$$a = a_t = \frac{dv}{dt}.$$

Nii võib p-s 40 antud sirgjoonelise liikumise kiirenduse definitsiooni vaadelda kui järeldust üldisemast kõverjoonelise liikumise kiirenduse definitsioonist, mis on toodud p-s 43.

2. Liikumine on ühtlane. Sel juhul kiiruse moodul v on jääv ning seepärast

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0;$$

valemite (53) ja (52) põhjal

$$a = a_n = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Selle tulemuse saime ennem p-s 44.

3. Liikumine on sirgjooneline ja ühtlane. Sel juhul on samaaegselt $a_t = 0$ ja $a_n = 0$, tähendab võrrandi (53) põhjal $a = 0$.

Märgime ära, et ainukene kiirenduseta liikumise liik on ühtlane sirgjooneline liikumine.

4. Liikumine on ühtlaselt muutuv. Nii nimetatakse liikumist, mis toimub võrrandi

$$s = v_0 t + \frac{a_1 t^2}{2} \qquad (43')$$

järgi, mis on analoogiline sirgjoonelise ühtlaselt muutuva liikumise võrrandiga (43).

Kiiruse v leiame diferentseerides võrrandit (43′):

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + a_1 t. \qquad (44')$$

Tangentsiaalkiirenduse saame valemi (51) järgi:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v_0 + a_1 t)}{dt} = a_1.$$

Nii on a_1 võrrandis (43′) tangentsiaalkiirendus. Normaalkiirendus leitakse võrrandi (52) järgi.

Ülesanne 25. Jaamast lahkudes tõuseb rongi kiirus ühtlaselt ja jõuab 2,5 minuti pärast 54 km/tunnis. Tee on kõverusega, mille raadius on 720 m. Leida rongi täielik kiirendus 2 minutit pärast jaamast lahkumist.

Kuna rongi liikumine on ühtlaselt kiirenev ja algkiirus on null, siis võib kiiruse suurenemise ajaühikus arvutada valemiga $\frac{v}{t}$. Tingimuse kohaselt

momendil $t = 2{,}5$ min. $= 150$ sek on rongi kiirus 54 km/tunnis $= 15$ m/sek. Siit leiame

$$\frac{v}{t} = \frac{15}{150} = 0{,}1 \text{ m/sek}^2.$$

Seepärast võime kiiruse valemi kirjutada järgmiselt:

$$v = 0{,}1t.$$

Leiame tangentsiaalkiirenduse valemi (51) abil:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0{,}1 \text{ m/sek}^2.$$

Selleks, et leida normaalkiirendus, on tarvis teada rongi kiirust v' momendil $t' = 2$ min. $= 120$ sek, s. t.

$$v' = 0{,}1 \cdot 120 = 12 \text{ m/sek}.$$

Nüüd arvutame normaalkiirenduse valemi (52) järgi:

$$a_n = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{12^2}{720} = 0{,}2 \text{ m/sek}^2.$$

Valemi (53) järgi leiame täieliku kiirenduse:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}2^2} = 0{,}23 \text{ m/sek}^2.$$

Vektori $\mathfrak{a}$ suund on toodud joonisel 113.

XII peatükk.

Kõva keha lihtsamad liikumised.

47. Translatoorne liikumine.

Kui kõva keha liigub nii, et kehas tõmmatud mistahes sirge jääb paralleelseks oma esialgse suunaga, siis nimetatakse liikumist translatoorseks.

Selline on näiteks auto kere liikumine sirgjoonelisel teel.

Ei tule mõelda, et keha punktide trajektoorid translatoorse liikumise puhul peavad olema sirgjooned.

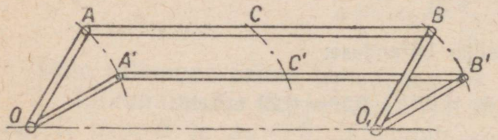
Vaatleme näiteks mehhanismi, mis on kujutatud joonisel 114 ja mis koosneb kahest võrdse pikkusega vändast OA ja O_1B ning siderauast AB, mille pikkus võrdub kaugusega OO_1 telgede O ja O_1 vahel.

Väntade OA ja O_1B pöörlemisel ümber oma telgede O ja O_1 säilitab sirge AB oma suuna, sest kujund $OABO_1$ jääb alati rööpkülikuks ($OA = O_1B$ ja $AB = OO_1$). Järelikult liigub sideraud translatoorselt. Sideraua punktide trajektoorid on ühesuguste raadiustega ringjooned; need raadiused on sama pikad kui vän-

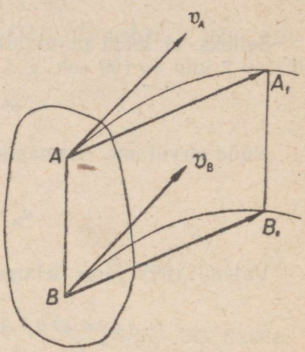
dad. Punkt A liigub ringjoonel, mille tsentriks on O, punkt B — ringjoonel, mille tsentriks on O_1, punkt C liigub sama raadiusega ringjoonel.

Vaatleme translatoorse liikumise omadusi. Valime kehal kaks punkti A ja B ning jälgime nende liikumist mingi ajavahemiku Δt vältel (joon. 115).

Selle ajavahemiku jooksul liikugu punkt A asendisse A_1 ja punkt B asendisse B_1. $AB \parallel A_1B_1$, sest liikumine on translatoorne. Peale selle $AB = A_1B_1$, sest meil on tegemist kõva kehaga. Siit järgneb, et kujund AA_1B_1B on rööpkülik ja järelikult kõõl AA_1 on



Joon. 114.



Joon. 115.

võrdne ja paralleelne kõõluga BB_1. Tähendab vektor $\overline{AA_1}$ võrdub vektoriga $\overline{BB_1}$. Järelikult ka

$$\frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t}.$$

See võrdus on õige igasuguse ajavahemiku Δt kohta, tähendab piirjuhul, kus Δt läheneb nullile, on

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t}.$$

Kuid $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overline{AA_1}}{\Delta t}$ võrdub punkti A kiirusega v_A. Samuti võrdub ka $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overline{BB_1}}{\Delta t}$ punkti B kiirusega v_B. Järelikult $v_A = v_B$, s. t. punktide A ja B kiirused on võrdsed, paralleelsed ja sama suunaga. Kuna punktid A ja B on valitud vabalt, siis siit saame translatoorse liikumise põhiomaduse.

Kõva keha translatoorsel liikumisel kõikide keha punktide kiirused igal antud momendil on võrdsed, paralleelsed ja sama suunaga.

Ei ole raske tõestada, et ka kõikide punktide kiirendused igal antud momendil on võrdsed, paralleelsed ja sama suunaga.

Oletame, et mingil momendil on punktide A ja B kiirused võrdsed, s. t. $v_A = v_B$, kiirendused aga ei ole võrdsed, s. t.

$$a_A \neq a_B.$$

Erinevad kiirendused tunnistavad, et kummagi punkti kiirused muutuvad erisuguselt. Järelikult on järgmisel lõpmata lähedasel momendil punktide A ja B kiirused juba erinevad. See aga on vastuolus äsja tõestatud teoreemiga. Seepärast ka kiirendused peavad olema võrdsed.

Kõikide punktide trajektoorid on ilmselt ühesugused. Nagu nähtub jooniselt 115, langeb punkti B trajektoor rööplükke puhul suunas BA kokku punkti A trajektooriga.

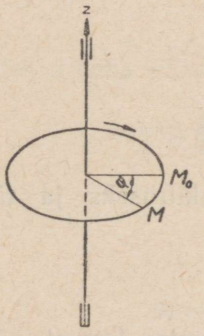
Nii seisneb translatoorse liikumise põhiolemus selles, et kõik keha punktid liiguvad samasuguselt.

Selleks, et seda liikumist tundma õppida, on küllaldane, kui uurida keha mingi ühe punkti liikumist. Näiteks, punkti C kiiruse (joon. 114) leidmiseks on küllaldane, kui leiame punkti A kiiruse.

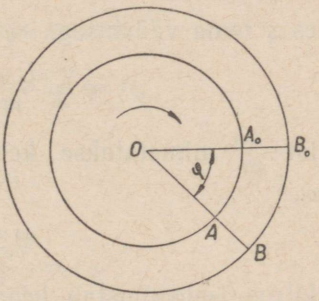
48. Kõva keha pöörlemine liikumatu telje ümber.

Kui keha pöörleb liikumatu telje z ümber, siis kõik keha punktid joonestavad ringjooni tasapindades, mis on risti selle teljega, kusjuures tsentrid asuvad sellel teljel. Joonisel 116 on kujutatud ühe punkti M trajektoor.

Vaatleme keha mingi kahe punkti A ja B liikumist, mis asu-



Joon. 116.



Joon. 117.

vad samal pöörlemistelje ristjoonel (joon. 117). Nende punktide trajektoorid kujutame nii, et joonise tasapind oleks risti pöörlemisteljega.

Algmomendil asugu punktid asendites A_0 ja B_0, teatud aja pärast jõuavad nad asendisse A ja B. Me näeme, et nende punktide teekonnad on erinevad (A_0A ja B_0B), kuid kesknurk φ, mille võrra pöördusid raadiused OA_0 ja OB_0, on sama.

Nurk φ määrab keha asendi antud momendil. Teda mõõdetakse radiaanides, s. t. nimetu arvuga.

Nurka φ võib mõõta ka pöörete arvuga. Määrame kindlaks vahekorra radiaanides avaldatud nurga φ ja pöörete arvu n vahel. Ühele pöördele vastab nurk 2π, järelikult

$$\varphi = 2\pi n. \tag{54}$$

Kuna iga momendi jaoks on nurgal φ kindel väärtus, siis φ ja t vahel valitseb olenevus

$$\varphi = f(t). \tag{55}$$

Võrrandit (55) nimetatakse pöörlemisliikumise võrrandiks. Tema abil on võimalik leida keha mistahes punkti liikumise võrrand.

Vaatleme näiteks punkti B (joon. 117). Olgu tema kaugus pöörlemisteljest $OB = r$. Loeme kaare s alguseks punkti B_0. Siis selle kaare pikkus momendil t on $s = B_0B$. Teiselt poolt aga $s = r\varphi$ (kaare pikkus võrdub raadiuse ja kesknurga korrutisega).

Asetades viimasesse võrdusesse φ väärtuse valemist (55), saame liikumise võrrandi punkti B kohta:

$$s = rf(t).$$

Arvutame nüüd punkti B kiiruse. Definitsiooni kohaselt [võrrand (49)]

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Asendades s tema väärtusega $r\varphi$, saame

$$v = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}. \tag{56}$$

Tuletist $\frac{d\varphi}{dt}$ nimetatakse keha nurkkiiruseks ja tähistatakse tähega ω.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{57}$$

Nurkkiirus iseloomustab keha pöörlemise kiirust. Teda mõõdetakse radiaanides jagatuina sekunditega, s. o. 1/sek. Nii omandab keha mingi punkti kiiruse valem (56) kooskõlas valemiga (57) järgmise kuju

$$v = r\omega. \tag{58}$$

Kui keha pöörlemine toimub ühtlaselt, siis on nurkkiirus jääv suurus.

Sageli väljendatakse nurkkiirust pööretes minutis.

Tehku keha n pööret minutis, s. t. $\frac{n}{60}$ pööret sekundis. Üks täispööre vastab nurgale 2π (radiaanides). Järelikult $\frac{n}{60}$ pööret sekundis vastab $\frac{2\pi n}{60}$ radiaanile sekundis. Nii on n pöördele minutis vastav nurkkiirus $\frac{\pi n}{30}$,

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ (1/sek)}.$$

See ongi valem, mille abil saame pöördeid minutis väljendada radiaanidega sekundis.

Kui keha pöörlemine on mitteühtlane, siis nurkkiirus aja jooksul muutub. Nurkkiiruse muutumise iseloomustamiseks kasutatakse nurkkiirenduse mõistet. Nurkkiirenduseks ε nimetatakse nurkkiiruse tuletist aja suhtes

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \tag{59}$$

Nurkkiirenduse mõõtühik on 1/sek^2 (radiaanide jagatis sekunditega ruudus).

Vaatleme nüüd, kuidas arvutada pöörleva keha mingi punkti kiirendust. Antud juhul on tuntud punkti trajektoor (ringjoon) ja kõverusraadius r (punkti kaugus pöörlemisteljest). Kasutame p-s 46 toodud kiirenduse arvutamise viisi.

Meil on valem

$$a_t = \frac{dv}{dt}.$$

Asendades v tema väärtusega $r\omega$, saame

$$a_t = \frac{d}{dt}(r\omega) = r\frac{dw}{dt} = r\varepsilon,$$

s. t.

$$a_t = r\varepsilon. \tag{60}$$

Edasi

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(rw)^2}{r} = r\omega^2,$$

s. t.

$$a_n = r\omega^2. \tag{61}$$

Lõpuks

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 = (r\varepsilon)^2 + (r\omega^2)^2 = r^2(\varepsilon^2 + \omega^4).$$

Järelikult

$$a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{62}$$

Teeme kokkuvõtte.

Selleks, et tunda pöörleva keha mingi punkti liikumist, on tarvis teada järgmisi andmeid: 1) pöörleva keha võrrand $\varphi = f(t)$ ja 2) antud punkti kaugus r pöörlemisteljest.

Võrrandist $\varphi = f(t)$ leiame valemite (57) ja (59) abil nurkkiiruse ja nurkkiirenduse, edasi valemite (58), (60), (61) ja (62) abil punkti kiiruse ja kiirenduse.

Peatume veel erijuhul — ühtlaselt muutuval pöörlemisel. Nii nimetatakse jääva nurkkiirendusega ε pöörlemist. See tähendab, et nurkkiirus muutub igas sekundis ε võrra. Kui tähistada nurkkiirust algmomendil ω_0-ga, siis t sekundi järel on nurkkiirus

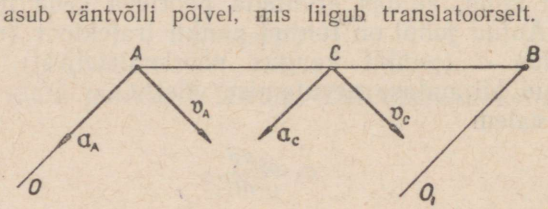
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{63}$$

Ühtlaselt muutuva pöörlemise võrrandi võime analoogia põhjal punkti ühtlaselt muutuva liikumisega [vt. võrrand (43′)] kirjutada järgmiselt:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{64}$$

Ülesanne 26. Aurumasina väntvõll pöörleb ühtlaselt, tehes 180 pööret minutis. $OA = O_1B = 0{,}5$ m (joon. 118). Leida väntvõlli põlve keskpunkti C kiirus ja kiirendus.

Punkt C asub väntvõlli põlvel, mis liigub translatoorselt. Järelikult on



Joon. 118.

translatoorse liikumise definitsioonist lähtudes kõikide punktide kiirused ja kiirendused ühesugused (vt. p. 47). Seepärast leiame punkti C kiiruse ja kiirenduse asemel punkti A kiiruse ja kiirenduse. See punkt asub mitte ainult väntvõlli põlvel AB, vaid ka vändal OA, mis pöörleb punkti O ümber jääva nurkkiirusega

$$\omega = \frac{\pi n}{3} = \frac{\pi \cdot 180}{30} = 6\pi \text{ 1/sek.}$$

Siit saame punkti A kiiruse [võrrand (58)]

$$v_A = r \cdot \omega = OA \cdot \omega = 0{,}5 \cdot 6\pi = 3\pi \text{ m/sek.}$$

Sama suur on ka punkti C kiirus, s. t. $v_C = v_A = 3\pi$ m/sek.

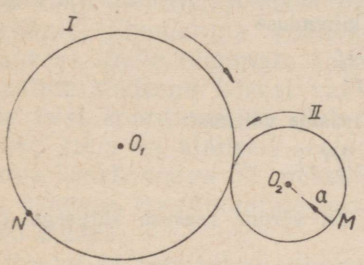
Punkti A kiiruse suund on selle punkti poolt joonestatava ringjoone puutuja suund. Puutuja aga on risti raadiusega. Seepärast on punkti A kiirus

suunatud risti OA-ga. Punkti C kiirus on suunatud samuti nagu punkti A kiirus ja on viimasega võrdne.

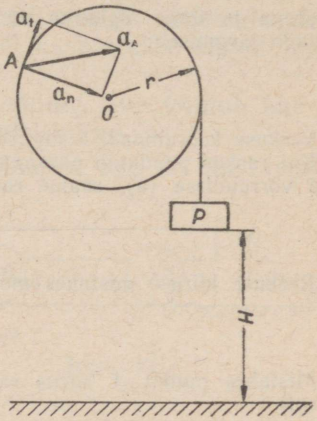
Punkti A kiirendus võrdub normaalkiirendusega, sest liikumine on ühtlane. Järelikult valemi (61) järgi

$$a_A = a_n = r\omega^2 = 0{,}5 \cdot (6\pi)^2 = 18\pi^2 \text{ m/sek}^2.$$

Punkti A kiirendus on suunatud tsentri O poole. Punkti C kiirendus on samuti $18\pi^2$ m/sek^2 ja on suunatud samuti nagu punkti A kiirendus, s. t. $\mathfrak{a}_C = \mathfrak{a}_A$ (vt. joon. 118).



Joon. 119.



Joon. 120.

Ülesanne 27. Rattad I ja II, mille raadiused on r_1 ja r_2 (joon. 119), pöörlevad liikumatute telgede O_1 ja O_2 ümber. Ratas I pöörleb jääva nurkkiirusega ω_1. Leida ratta II nurkkiirus ja ratta põial asuva punkti M kiirendus.

Libisemise puudumisel on mõlema ratta ringkiirused, s. t. punktide kiirused mõlema ratta ümbermõõdul võrdsed. Mingi punkti N kiirus ratta I põial on võrrandi (58) järgi

$$v_N = \omega_1 \cdot r_1.$$

Analoogiliselt on punkti M kiirus ratta II põial

$$v_M = \omega_2 \cdot r_2.$$

Kuna need kiirused on võrdsed, siis

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2,$$

kust saame

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Kuna ülesande tingimuste kohaselt on ω_1 jääv suurus, siis ka ω_2 on jääv

suurus. Tähendab ka ratta *II* pöörlemine on ühtlane. Seepärast võime punkti *M* kiirenduse leida võrrandi (61) alusel, s. t.

$$a = a_n = r_2\omega_2^2 = \omega_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2}.$$

Kiirendus on suunatud ratta *II* tsentri suunas.

Ülesanne 28. Rattale raadiusega $r = 50$ cm on keritud niit, mille rippuva otsa külge on kinnitatud raskus *P* (joon. 120). Algmomendil on raskus põrandast $H = 200$ cm kõrgusel. Seejärel raskus langeb jääva kiirendusega ja $T = 16$ sekundi pärast jõuab põrandani. Leida nurkkiirendus ja punkti *A* kiirus ratta põial sel momendil, kui koorem jõuab põrandani.

Tähistame raskuse *P* kiirenduse a_P-ga. Kuna raskus liigub ühtlaselt kiirendatuna ja tema algkiirus on null, siis raskuse liikumise võrrandi saame kirjutada järgmiselt:

$$x = a_P \cdot \frac{t^2}{2}. \qquad (a)$$

Raskuse koordinaadi x alguseks on võetud raskuse esialgne asend.

Kui raskus puudutab põrandat, siis $t = T$ ja $x = H$. Asetades t ja x väärtused võrrandisse (a), saame raskuse *P* kiirenduse

$$a_P = \frac{2H}{T^2}.$$

Raskuse kiiruse mistahes momendil t saame valemist

$$v_P = a_P t = \frac{2H}{T^2} \cdot t.$$

Mistahes punkti *A* kiirus ratta põial on võrdne raskuse kiirusega (niit ei veni)

$$v_A = v_P = \frac{2H}{T^2} \cdot t.$$

Teades ratta punkti *A* kiirust, leiame valemi (58) järgi ratta nurkkiiruse

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2H}{r \cdot T^2} \cdot t. \qquad (b)$$

Ratta nurkkiirenduse ε leiame valemi (59) järgi:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2H}{r \cdot T^2} = \frac{2 \cdot 200}{50 \cdot 16^2} = \frac{1}{32} \text{ 1/sek}^2.$$

Punkti *A* kiirenduse leiame võrrandi (62) järgi:

$$a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Momendil, kui koorem jõuab põrandani ($t = T$), on ratta nurkkiirus vastavalt (b)-le

$$\omega = \frac{2H}{rT^2} \cdot T = \frac{2H}{rT}.$$

Järelikult sel momendil on punkti *A* kiirendus

$$a = r\sqrt{\left(\frac{2H}{rT^2}\right)^2 + \left(\frac{2H}{rT}\right)^4} = \frac{2H}{T^2}\sqrt{1 + \frac{4H^2}{r^2}} = \frac{2 \cdot 200}{16^2}\sqrt{1 + \frac{4 \cdot 200^2}{50^2}} \approx$$

$$\approx 12{,}6 \text{ cm/sek}^2.$$

Kiirenduse suund on kujutatud joonisel 120.

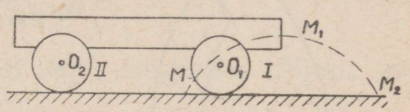
Suhteline liikumine.

49. Absoluutne liikumine, suhteline liikumine ja kaasaliikumine.

Mingi kõva keha või punkti liikumist vaadeldakse alati mingi teise keha või selle kehaga seotud koordinaatide süsteemi suhtes. Keha või koordinaatide süsteemi asemel kasutatakse sageli terminit — keskkond.

Iga liikumine on oma olemuselt suhteline, mis toimub ühe või teise keskkonna (koordinaatide süsteemi) suhtes.

Oletame, et mingi koordinaatide süsteem xyz on meil võetud tinglikult liikumatuna (näiteks maakera). Selle liikumatu koordinaatide süsteemi kõrval vaatleme teist koordinaatide süsteemi $\xi\eta\zeta$ (mis on alaliselt seotud liikuva keskkonnaga S), mis liigub esimese koordinaatide süsteemi suhtes.



Joon. 121.

Punkti M (või keha) liikumist liikumatu koordinaatide süsteemi suhtes nimetame absoluutseks liikumiseks. Sama punkti M (või keha) liikumist liikuva koordinaatide süsteemi suhtes (keskkonna S suhtes) nimetatakse suhteliseks ehk relatiivseks liikumiseks.

Liikuva koordinaatide süsteemi $\xi\eta\zeta$ liikumist, s. t. keskkonna liikumist liikumatu koordinaatide süsteemi xyz suhtes nimetatakse kaasaliikumiseks.

Vaatleme mõningaid näiteid.

1) Tõstuki liikumine mitmekorruselises aurulaevas, kui seda liikumist vaadelda aurulaeva enese suhtes (suhteline liikumine), on translatoorne liikumine ja tõstuki kõikide punktide trajektoorid on sirgjooned. Tõstuki samade punktide trajektoorid maakera suhtes (absoluutne liikumine) on teistsugused (üldiselt kõverad) ja tõstuki liikumine võib olla ka mitte translatoorne (laeva pööramise või kõikumise korral). Selles näites meie lugesime kaasaliikumiseks laeva liikumist.

2) Liikugu auto sirgel teel (joon. 121). Autoratta absoluutne liikumine (liikumine maapinna suhtes) on libisemiseta veeremine teel, ratta mingi punkti M trajektoor aga on kõver, mida nimetatakse tsükloidiks (joonisel 121 kõver MM_1M_2). Kui kaasaliikumiseks lugeda auto kere translatoorset liikumist, siis iga autoratta suhteliseks liikumiseks on tema pöörlemine liikumatu telje ümber

(O_1 — rattal *I* ja O_2 — rattal *II*). Ratta punkti *M* trajektoor suhtelises liikumises on ringjoon, mille tsenter on O_1.

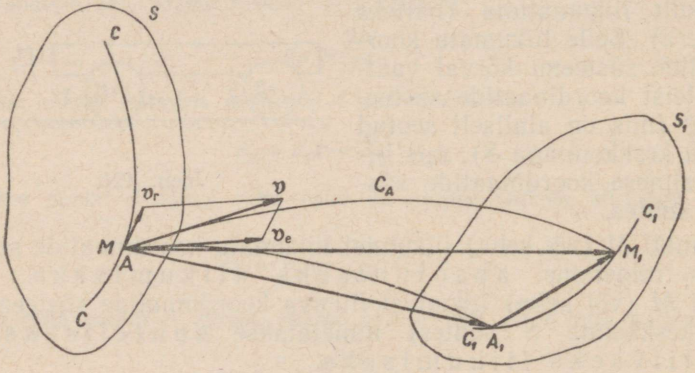
50. Kiiruste liitmise teoreem.

Punkti kiirust tema absoluutsel liikumisel nimetatakse absoluutseks kiiruseks, tähistame ta v-ga.

Punkti kiirust tema suhtelisel liikumisel nimetatakse suhteliseks ehk relatiivseks kiiruseks, tähistame ta v_r-iga.

Määrame kindlaks olenevuse absoluutse ja suhtelise kiiruse vahel.

Liikugu punkt *M* (joon. 122) liikuva keskkonna *S* suhtes trajektooril *CC* (suhteline liikumine). Momendil *t* asub keskkond



Joon. 122.

asendis *S*, momendil $t_1 = t + \Delta t$ — asendis S_1. Suhtelise trajektoori vastavad asendid on tähistatud *CC* ja C_1C_1-ga .

Liikuv punkt on momendil *t* asendis *M*. Vaatleme seda keskkonna *S* punkti *A*, kus asub momendil *t* meie punkt *M*. Keskkonnaga muutumatult seotud punkt *A* liigub koos keskkonnaga ajavahemiku Δt jooksul asendisse A_1. Punkti *A* trajektoor on AA_1. Samal ajavahemikul liigub punkt *M* oma suhtelisel trajektooril asendisse M_1. Niisiis liikumatu koordinaatide süsteemi suhtes, s. t. absoluutses liikumises asetub punkt *M* asendist *M* asendisse M_1. Tema absoluutset trajektoori tähistab C_A. Ühendame punktid *M*, A_1 ja M_1 vektoritega $\overline{MM_1}$, $\overline{MA_1} = \overline{AA_1}$ ja $\overline{A_1M_1}$. Vektor $\overline{MM_1}$ on punkti ümberpaigutumine tema absoluutses liikumises. Seepärast (vt. p. 42) on punkti *M* absoluutne kiirus

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}. \qquad (65)$$

Analoogiliselt on punkti M suhteline kiirus

$$v_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{A_1 M_1}}{\Delta t}. \tag{66}$$

Vektor $\overline{AA_1}$ on keskkonna S punkti A ümberpaigutumine. Seepärast $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{AA_1}}{\Delta t}$ on punkti A kiirus, s. t. keskkonna selle punkti kiirus, millega momendil t langeb ühte punkt M. Seda kiirust nimetatakse punkti M kaasaliikumise kiiruseks.

Seega: punkti M kaasaliikumise kiiruseks nimetatakse liikuva keskkonna selle punkti A kiirust, millega antud momendil punkt M kokku langeb.

Tähistades kaasaliikumise kiirust v_e, saame definitsiooni kohaselt

$$v_e = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{AA_1}}{\Delta t}. \tag{67}$$

Kolmnurgas MM_1A_1 on vektor $\overline{MM_1}$ sulgevaks küljeks, mispärast

$$\overline{MM_1} = \overline{AA_1} + \overline{A_1M_1}.$$

Jagame selle vektoriaalse summa Δt-ga:

$$\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} + \frac{\overline{A_1M_1}}{\Delta t};$$

üle minnes piiri ($\Delta t \to 0$) juurde, saame:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{A_1M_1}}{\Delta t}.$$

Viimane võrdus annab valemite (65), (66) ja (67) põhjal

$$v = v_e + v_r,$$

mis määrab kindlaks otsitava olenevuse absoluutse ja suhtelise kiiruse vahel.

Absoluutne kiirus võrdub kaasaliikumise ja suhtelise kiiruse vektoriaalse summaga.

Tõestatud teoreemi nimetatakse kiiruste liitmise teoreemiks. Meelde tuletades vektoriaalse summa definitsiooni (vt. p. 9), võime kiiruste liitmise teoreemi sõnastada teisiti:

Absoluutne kiirus on suuruselt ja suunalt võrdne rööpküliku diagonaaliga, kui rööpküliku külgedeks on kaasaliikumise kiirus ja suhteline kiirus (joon. 122).

Ülesanne 29. Toru OB pöörleb ühtlaselt ümber telje O, tehes 60 pööret minutis (joon. 123). Torus liigub veetilk M suhtelise kiirusega $v_r = 2$ m/sek. Leida veetilga absoluutne kiirus momendil, kui ta asub kaugusel $OM = 20$ cm pöörlemisteljest O.

Suhteline kiirus v_r on suunatud piki toru. Kaasaliikumise kiiruseks on toru selle punkti A kiirus, kus asub tilk M antud momendil, s. t. selle punkti A kiirus, mis asub kaugusel $OA = OM = 20$ cm pöörlemisteljest. See toru punkt A joonestab oma liikumisega ringjoone $A'AA''$, mille raadius on 20 cm, ja tema kiirus on suunatud piki selle ringjoone puutujat (pöörlemise suunas), s. t. piki raadiusele OM punktis M püstitatud ristjoont. Tema kiiruse suurus on ωr, tähendab

$$v_e = \omega r.$$

Kuna aga

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 2\pi \text{ 1/sek}$$

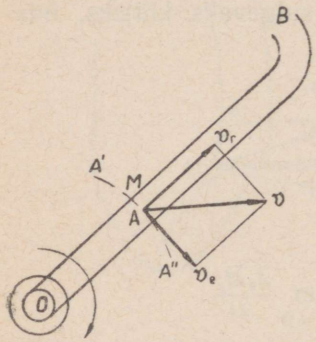
ja

$$r = 20 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ m},$$

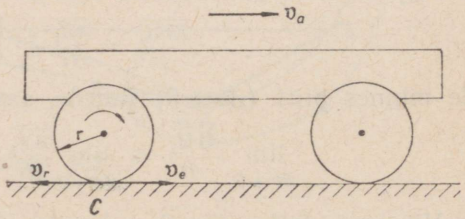
siis

$$v_e = 2\pi \cdot 0{,}2 = 0{,}4\pi \text{ m/sek}.$$

Ehitame kiirusi $\mathbf{v}_e$ ja $\mathbf{v}_r$ külgedeks võttes rööpküliku, antud juhul rist-



Joon. 123.



Joon. 124.

küliku, ja joonestame selle diagonaali, mis ongi võrdne otsitava kiirusega $\mathbf{v}$, mille moodul

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{(0{,}4\pi)^2 + 2^2} \approx 2{,}36 \text{ m/sek}.$$

Ülesanne 30. Auto kere liigub translatoorselt kiirusega v_a. Leida autoratta nurkkiirus ω tema suhtelisel liikumisel auto kere suhtes. Ratta raadius on r (joon. 124).

Ratta suhteline liikumine auto kere suhtes on pöörlemine liikumatu telje (autokere suhtes) ümber. Seepärast on rattapõia iga punkti suhteline kiirus

$$v_r = \omega r. \qquad \text{(a)}$$

Vaatleme ratta punkti C, mis puutub kokku maapinnaga. Tema suhteline kiirus $\mathbf{v}_r$ on suunatud nii, nagu on kujutatud joonisel 124 ja arvutatakse võrrandi (a) järgi. Tema kaasaliikumise kiirus võrdub autokere selle punkti kiirusega, mis asub punktis C. Kinemaatikas kõva keha liikumise vaatlemisel

ei ole olulised selle keha mõõted ja neid mõõteid võib mõttes vabalt suurendada. Antud juhul, rääkides auto kere punktist, mis asub punktis C, loeme, et selle kere mõõteid on vastavalt suurendatud.

Kuna auto kere liigub translatoorselt, siis tema kõikidel punktidel, nende hulgas ka punktil, mis katab punkti C, on ühesugused kiirused v_a. Seepärast

$$v_e = v_a. \qquad \text{(b)}$$

Kiiruse v_e suund on kujutatud joonisel 124 ja ta langeb ühte v_a suunaga.

Minnes üle ratta punkti C absoluutse kiiruse juurde, veendume, et ratta libisemise puudumisel piki teed on punkti C kiirus võrdne tee liikumise kiirusega, s. t. võrdne nulliga ($v = 0$).

Kiiruste liitmise teoreemi järgi

$$v = v_e + v_r$$

ja kuna $v = 0$, siis

$$v_e + v_r = 0.$$

Viimane võrdus tähendab, et vektorid v_e ja v_r on suunatud vastupidiselt ja nende moodulid on võrdsed, s. t. $v_e = v_r$, ja järelikult vastavalt võrdustele (a) ja (b)

$$v_a = \omega r,$$

kust

$$\omega = \frac{v_a}{r}.$$

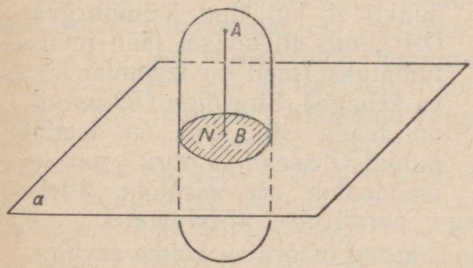
XIV peatükk.

Kõva keha tasaparalleelne liikumine.

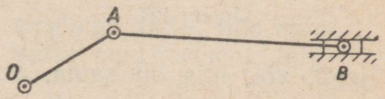
51. Tasaparalleelne liikumine.

Kõva keha liikumist nimetatakse tasaparalleelseks liikumiseks, kui on olemas selline liikumatu tasapind α, mida mööda liigub selle tasapinna poolt keha lõikamisel tekkinud kujund N (joon. 125).

Niisugune on paljude mehhanismide, näiteks väntmehhanismi lülide liikumine. Vänt OA (joon. 126) pöörleb võlli O ümber, liu-



Joon. 125.



Joon. 126.

gur B liigub translatoorselt. Kepsu AB liikumine on tasaparalleelne liikumine, ta ei ole translatoorne liikumine ega ka pöörlemine.

Niisugune on ka auto ratta liikumine sirgel teel. Sel juhul on liikumatuks tasapinnaks α ratta jälge läbiv vertikaalne tasapind.

Liikumatu telje ümber pöörlemine on tasaparalleelse liikumise erijuhus. Siin võib tasapinnaks α võtta teljega risti oleva mistahes tasapinna.

Väntade sideraua AB liikumine, mida vaatlesime p-s 47 (vt. joon. 114), on samuti tasaparalleelne.

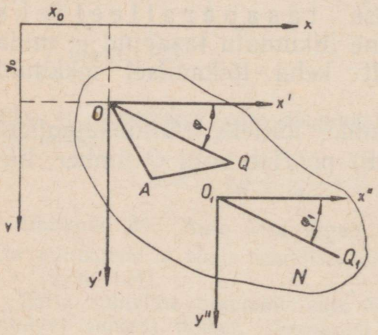
Liikumatut tasapinda α nimetame põhitasapinnaks.

Püstitame mingist keha punktist A (joon. 125) ristjoone tasapinnale α. See ristjoon lõikab kujundit N mingis punktis B. Punktide A ja B vaheline kaugus AB ei muutu, sest keha on kõva. Kuna aga punkt B jääb liikumisel tasapinnale α, siis joonlõik AB jääb kogu liikumise ajaks risti liikumatu tasapinnaga α, s. t. see joonlõik liigub, jäädes paralleelseks oma esialgse sihiga. P-s 47 käsitletud kaalutlustel translatoorsest liikumisest jõuame järeldusenі, et punktide A ja B trajektoorid, kiirused ja kiirendused on samad. Järelikult selleks, et määrata keha liikumist, on küllaldane, kui me määrame kujundi N liikumise põhitasapinnas.

52. Tasapinnalise kujundi liikumine.

Vaatleme tasapinnalise kujundi liikumist tema tasapinnas. Esmajoones püstitame küsimuse, missugused võrrandid on vajalikud selleks, et teada tasapinnalise kujundi liikumist.

Võtame põhitasapinnal α liikumatu koordinaatide süsteemi xy (joon. 127). Tasapinnalise kujundi asend tasapinnal on täielikult määratud mingi kahe punkti O ja Q asendiga või, mis on sama, sirglõiguga OQ, sest kui sirglõigu asend on teada, siis saab määrata mistahes punkti A kui tipu kolmnurgas OAQ, mis liikumisel jääb muutumatuks (meil on tegemist kõva kehaga). Sirglõigu OQ asend on teada siis, kui on teada punkti O asend ja nurk φ, mille moodustab see sirglõik x-teljega, või, mis on sama, x-teljega paralleelse x'-teljega.



Joon. 127.

Nii on siis tasapinnalise kujundi asend määratav kolme arvuga: punkti O koordinaatidega x_0 ja y_0 ning nurgaga φ. Liikumisel

vastavad igale ajamomendile t kindlad x_0, y_0 ja φ väärtused, mis on aja funktsioonid.

Tasapinnalise kujundi liikumise määravad täielikult järgmised kolm võrrandit, mida nimetatakse tasapinnalise kujundi liikumise võrranditeks:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= f(t); \\ y_0 &= f_1(t); \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

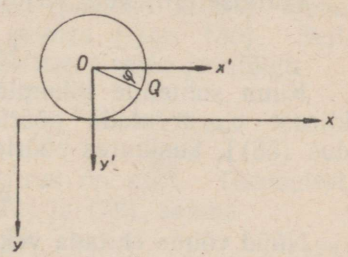
$$\varphi = f_2(t). \quad (69)$$

Vabalt valitud punkti O nimetatakse pooluseks.

53. Tasaparalleelse liikumise lahutamine translatoorseks liikumiseks ja pöörlemiseks.

Vaatleme vahepealset koordinaatide süsteemi $x'y'$, mille algus on pooluses O ja mille teljed x' ja y' on paralleelsed x- ja y-telgedega (joon. 127). Süsteem $x'y'$ (tuletame meelde, et temaga me seome mingit keskkonda S) liigub translatoorselt pooluse O kiirusega, sest x'- ja y'-teljed jäävad alati paralleelseteks liikumatute x- ja y-telgedega. Loeme keskkonna S liikumist kaasaliikumiseks, siis on tasapinnalise kujundi suhteliseks liikumiseks keskkonna S suhtes pöörlemine liikumatu telje ümber, mis läbib pooluse O risti kujundi tasapinnaga, sest poolus O jääb keskkonnas S liikumatuks. Selle pöörlemise võrrand on võrrand (69).

Nii võib kujundi N absoluutse liikumise lahutada kaheks liikumiseks: kaasaliikumiseks — süsteemi $x'y'$ translatoorne liikumine pooluse kiirusega, ja suhteliseks liikumiseks — pöörlemine pooluse ümber. Auto ratta juures, näiteks (joon. 128), võib pooluseks võtta ratta tsentri, sirglõiguks OQ — ratta mingi raadiuse. Süsteemi $x'y'$ kaasaliikumiseks ei ole siin midagi muud kui autokere translatoorne liikumine (vedrudel õõtsumist ei võta siin arvesse) ja suhteliseks liikumiseks on ratta pöörlemine oma telje ümber.



Joon. 128.

Kui punkti O asemel võtta pooluseks mõni teine punkt O_1 (vt. joon. 127), siis kaasaliikumine muutub, sest punkt O_1 liigub üldiselt teisiti kui punkt O, suhteline liikumine aga (pöörlemine uue pooluse ümber) toimub sama võrrandi järgi $\varphi = f_2(t)$, sest sirglõigu O_1Q_1, mis määrab tasapinnalise kujundi asendi, võib võtta paralleelsena sirglõiguga OQ ja siis $\varphi_1 = \varphi$.

Niisiis *suhteline liikumine telgede x' ja y' suhtes (pöörlemine ümber pooluse) ei olene pooluse valikust.*

Selle pöörlemise nurkkiirus $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ei olene samuti pooluse valikust. Seepärast nimetatakse teda tasapinnalise kujundi nurkkiiruseks või, mis on sama, tasaparalleelselt liikuva keha nurkkiiruseks.

Seega: *tasaparalleelselt liikuva keha nurkkiiruseks nimetatakse selle keha suhtelise liikumise nurkkiirust koordinaatide süsteemi suhtes, mis liigub translatoorselt pooluse kiirusega* (s. t. kehal vabalt valitud punkti kiirusega).

54. Tasapinnalise kujundi punktide kiirus.

Oletame, et tasapinnalise kujundi liikumine on antud. See tähendab, et: 1) on teada mingi punkti O liikumine, mis on võetud pooluseks, ja järelikult on teada ka pooluse kiirus v_O, ja 2) on teada pooluse ümber pöörlemise võrrand (69) ja järelikult on teada ka nurkkiirus ω.

Tõestame, et teades v_O ja ω, võime leida kujundi mistahes punkti A kiiruse.

Võttes kaasaliikumiseks süsteemi $x'y'$ liikumise, võime leida punkti A kiiruse v_A (s. t. absoluutse kiiruse) kiiruste liitmise teoreemi põhjal (p. 50):

$$v_A = v_e + v_r. \tag{70}$$

Kuna kaasaliikumine on translatoorne, siis keskkonna S kõikide punktide kiirused on ühesugused ja kaasaliikumise kiirus antud juhul võrdub pooluse kiirusega, s. t. $v_e = v_O$.

Punkti A suhtelist kiirust tähistame v_{AO} (indeks AO näitab, et jutt on punkti A suhtelisest kiirusest, kui pooluseks on valitud punkt O).

Võrduse (70) võib kirjutada järgmiselt:

$$v_A = v_O + v_{AO}. \tag{71}$$

Kuna suhteline liikumine on pöörlemine, siis võime suhtelise kiiruse v_{AO} arvutada pöörleva keha punkti kiirusena [vt. võrdus (58)], kusjuures pöörlemisraadius $r = OA$, s. t.

$$v_{AO} = \omega \cdot OA. \tag{72}$$

Nüüd võime ehitada vektoriaalse võrduse (71). Olgu pooluse O kiirus v_O suunatud, nagu see on kujutatud joonisel 129. Punkti A suhteline trajektoor on ringjoon raadiusega OA ja tsentriga O (joonisel 129 näidatud kriipsjoonega). Kiirus v_{AO} on suunatud ringjoone puutujat mööda, s. o. risti raadiusega OA pöörlemise suunas. Kanname punktist A ristjoonele pöörlemise suunas vektori v_{AO}, viimase lõpust kanname joonisele vektori v_O ja seejärel joonestame sulgeva külje, mis annabki meile punkti A otsitava kiiruse v_A.

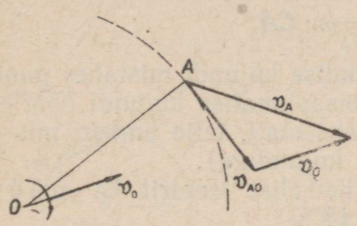
Kuna pooluseks võib võtta keha mistahes punkti O ja kuna nurkkiirus ei olene pooluse valikust, siis võrrand (71) koos võrrandiga (72) määravad kiirustevahelise olenevuse keha mistahes kahe punkti A ja O kiiruste vahel.

Vaatleme kahte võimalikku juhtu.

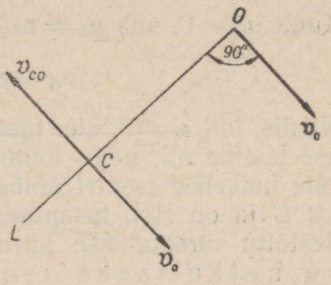
1. Olgu vaadeldaval momendil $\omega = 0$, siis võrrandist (72) järgneb, et $v_{AO} = 0$ ja võrrand (71) annab

$$\mathfrak{v}_A = \mathfrak{v}_O. \tag{73}$$

Kuna punktideks A ja O võib võtta mistahes kaks punkti, siis sel momendil, kui nurkkiirus ω on null, on tasapinnalise kujundi kõikide punktide kiirused omavahel võrdsed. Kriipsutame alla, et



Joon. 129.



Joon. 130.

võrrandi (73) järgi on kõik kiirused võrdsed oma suuruselt, paralleelsed ja ühele poole suunatud.

2. Olgu antud momendil $\omega \neq 0$. Tõestame, et sel juhul on olemas selline tasapinnalise kujundi punkt C, mille kiirus antud momendil on null.

Selleks pöörame mõttes vektorit $\mathfrak{v}_O$ (pooluse kiirus) ümber punkti O täisnurga võrra pöörlemise suunas (joon. 130). Selle pöördega saame sirge OL. Kanname sellele sirgele joonlõigu

$$OC = \frac{v_O}{\omega}.$$

Punkt C on otsitav punkt, mille kiirus on null. Tõepoolest, rakendades punkti C kohta võrrandid (71) ja (72), saame

$$\mathfrak{v}_C = \mathfrak{v}_O + \mathfrak{v}_{CO} \tag{74}$$

ja

$$v_{CO} = \omega \cdot OC = \omega \cdot \frac{v_O}{\omega} = v_O. \tag{75}$$

Vektor $\mathfrak{v}_{CO}$ (punkti C suhteline kiirus) on suunatud risti OC-ga pöörlemise suunas, s. t. vastupidi kiirusele $\mathfrak{v}_O$. Kuna moodulid v_O ja v_{CO} on võrrandi (75) põhjal võrdsed ja vektorid $\mathfrak{v}_O$ ja $\mathfrak{v}_{CO}$ on

paralleelsed ning vastupidi suunatud, siis nende summa on null ja võrrandist (74) järgneb, et $v_C = 0$, mida oligi tarvis tõestada.

Niisiis, kui nurkkiirus ei võrdu nulliga, siis on olemas niisugune tasapinnalise kujundi punkt C, mille kiirus antud momendil on null.

Punkti, mille kiirus antud momendil on null, nimetatakse kiiruste hetkeliseks tsentriks vaadeldaval momendil.

Võttes pooluseks punkti C (kiiruste hetkelise tsentri), võib mistahes punkti A kohta rakendada võrrandid (71) ja (72), milles punkti O asemel tuleb võtta punkt C. Siis saame

$$v_A = v_C + v_{AC},$$
$$v_{AC} = \omega \cdot CA.$$

Kuna $v_C = 0$, siis $v_A = v_{AC}$ ja järelikult

$$v_A = v_{AC} = \omega \cdot CA. \tag{76}$$

Niisiis, kui $\omega \neq 0$, siis tasapinnalise kujundi mistahes punkti A kiiruse leiame nii, nagu toimuks tasapinnalise kujundi pöörlemine kiiruste hetkelise tsentri ümber (täpsemalt, telje ümber, mis läbib punkti C ja on risti tasapinnalise kujundiga).

Seetõttu nimetatakse kiiruste hetkelist tsentrit ka pöörlemise hetkeliseks tsentriks.

Teeme kokkuvõtte. Igal momendil võib olla $\omega = 0$, ja siis kõikide punktide kiirused on ühesugused, või $\omega \neq 0$ — siis on olemas kiiruste hetkeline tsenter ja mistahes punkti kiiruse võime leida selliselt, nagu toimuks pöörlemine selle tsentri ümber.

Kiiruste hetkelisel tsentril on kolm iseärasust, mis kergendavad tema leidmist:

1. Kiiruste hetkelise tsentri kiirus on null. See järgneb kiiruste hetkelise tsentri definitsioonist.

2. Kiiruste hetkeline tsenter C asub punktide kiiruste ristjoonte lõikepunktis. See järgneb eespool toodud kiiruste hetkelise tsentri olemasolu tõestusest. Tuletame meelde, et see punkt asub pooluse kiiruse v_O ristjoonel OL (joon. 130). Pooluseks võime valida mistahes punkti. Järelikult on punkt C tasapinnalise kujundi kõikide punktide kiiruste ristjoonte lõikepunktiks.

Kuna mistahes punkti kiirus on suunatud piki selle punkti trajektoori puutujat, siis on kiiruse ristjoon ristjooneks puutujale, s. t. normaal. Seepärast võib ütelda, et kiiruste hetkeline tsenter asub tasapinnalise kujundi punktide trajektooride normaalide lõikepunktis.

3. Tasapinnalise kujundi punktide kiirused on võrdelised nende punktide kaugusega kiiruste hetkelisest tsentrist.

Tõepoolest, rakendades võrrandit (76) kahele punktile A ja B, leiame, et

$$v_A = \omega \cdot CA$$

ja

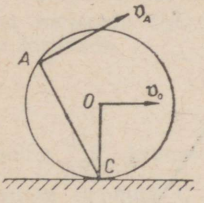
$$v_B = \omega \cdot CB,$$

kust saame, et

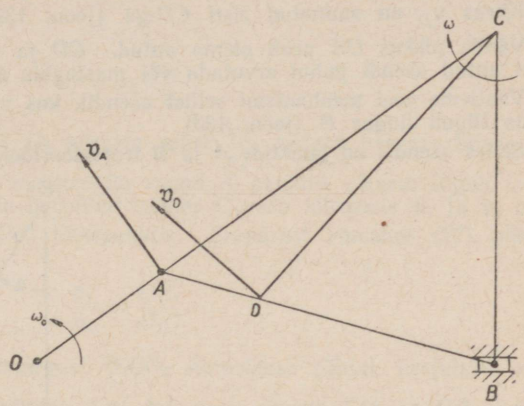
$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{CA}{CB}. \tag{77}$$

Ülesanne 31. Auto ratas raadiusega r veereb libisemiseta sirgel teel, kusjuures tema tsentri O kiirus (auto kiirus) on v_O. Leida ratta nurkkiirus ja tema mingi punkti A kiirus (joon. 131).

Kuna veeremine toimub libisemiseta, siis ratta ja tee kokkupuute punkti C



Joon. 131.



Joon. 132.

kiirus on null (vt. ülesanne 30). Järelikult punkt C ongi kiiruste hetkeline tsenter. Rakendades valemit (76) punkti O kohta, saame

$$\omega = \frac{v_O}{CO} = \frac{v_O}{r}.$$

Punkti A kiirus on sama valemi põhjal

$$v_A = \omega \cdot CA = v_O \cdot \frac{CA}{r}.$$

Kiirus v_A on suunatud piki CA risti joont (joon. 131).

Ülesanne 32. Vänt OA pöörleb ümber punkti O nurkkiirusega ω_O. Leida kepsu AB nurkkiirus ω ja kepsu mingi punkti D kiirus (joon. 132).

Meie tunneme kepsu kahe punkti A ja B trajektoore. Punkt A liigub mööda ringjoont. Ringjoonele on normaaliks raadius OA. Punkti B trajektoor on sirge OB. Püstitades sirgele OB ristjoone BC, leiame sirgete OA ja BC lõikumisel kepsu kiiruste hetkelise tsentri C.

Punkt A on ühine kepsule AB ja vändale OA. Vända punkti A kiiruse saame arvutada võrrandist

$$v_A = \omega_O \cdot OA.$$

Kepsu AB punkti A kiiruse arvutame, rakendades võrrandit

$$v_A = \omega \cdot CA.$$

Võrrutades kaks saadud avaldist v_A kohta, saame

$$\omega_O \cdot OA = \omega \cdot CA,$$

kust leiame kepsu nurkkiiruse

$$\omega = \omega_O \cdot \frac{OA}{CA}.$$

Punkti D kiiruse leiame võrdusest (76):

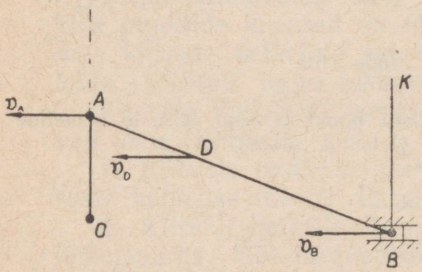
$$v_D = \omega \cdot CD = \omega_O \cdot \frac{OA \cdot CD}{CA}.$$

Kiirus v_D on suunatud risti CD-ga (joon. 132).

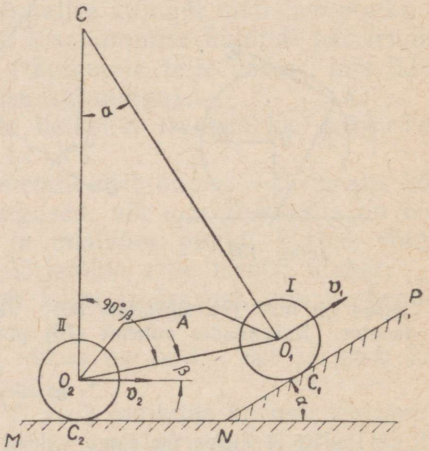
Vända pikkus OA peab olema antud. CD ja CA suurused võib mehhanismi antud asendi puhul arvutada või mastaabis ära mõõta.

Vaatleme veel mehhanismi sellist asendit, kus vänt on risti sirgega, mida mööda liigub liugur B (joon. 133).

Selles asendis on punktide A ja B trajektooridele püstitatud normaalid OA



Joon. 133.



Joon. 134.

ja BK paralleelsed. Kui kiiruste hetkeline tsenter oleks olemas, siis ta peaks asuma samaaegselt kahel paralleelsel sirgel, mis on võimatu. Siit järeldame, et vaadeldaval momendil kiiruste hetkelist tsentrit ei ole olemas. Seepärast esineb siin esimene eespool toodud võimalikest juhtudest ja nimelt: antud momendil on $\omega = 0$ ja kepsu kõikide punktide kiirused on omavahel võrdsed, s. t.

$$v_D = v_B = v_A.$$

Ülesanne 33. Mootorratas siirdub horisontaalselt teelt MN kaldteele NP, mis moodustab horisondiga nurga α (joon. 134). Mootorratta esiratas I on kaldteel, tagaratas aga horisontaalsel teeosal. Tagaratta nurkkiirus on ω_2. Leida esiratta nurkkiirus momendil, kui O_2O_1, mis ühendab rataste tsentreid, moodustab horisondiga nurga β.

Tagaratta kiiruste hetkeline tsenter on punktis C_2, kus ratas puutub kokku teega (libisemine puudub). Seepärast on tagaratta tsentri O_2 kiirus v_2 võrrandi (76) järgi

$$v_2 = \omega_2 \cdot r, \tag{a}$$

kus r on ratta raadius.

Analoogiliselt on esiratta tsentri kiirus

$$v_1 = \omega_1 \cdot r. \tag{b}$$

Võrdustest (a) ja (b) leiame

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

kust saame

$$\omega_1 = \omega_2 \cdot \frac{v_1}{v_2}. \tag{c}$$

Et leida punktide O_1 ja O_2 kiiruste suhet $\frac{v_1}{v_2}$, selleks paneme tähele, et need punktid on ühtlasi ka mootorratta raami A punktid. Raam liigub tasaparalleelselt. Raami kiiruste hetkeline tsenter C asub kiirustele v_1 ja v_2 püstitatud ristjoonte O_1C ja O_2C lõikepunktis. Seepärast võrrandi (77) põhjal võime kirjutada

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{O_1C}{O_2C}. \tag{d}$$

Suhte $\frac{O_1C}{O_2C}$ leiame kolmnurgast O_1CO_2 siinuslause põhjal, kusjuures selle kolmnurga tippnurk C on võrdne α-ga kui nurk sirgete CO_1 ja CO_2 vahel, mis on risti sirgetega NP ja MN: tippnurk O_2 võrdub $90° - \beta$ ja tippnurk O_1 võrdub $180° - \alpha - (90° - \beta) = 90° - (\alpha - \beta)$.

Siinuslause põhjal

$$\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{\sin(90° - \beta)}{\sin[90° - (\alpha - \beta)]} = \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Asetades saadud suhte valemitesse (c) ja (d), saame:

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Siit nähtub, et rataste I ja II nurkkiirused ei ole võrdsed, välja arvatud üks mootorratta asend, kus $\beta = \alpha - \beta$, s. t. $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Selles asendis kolmnurk O_1O_2C muutub võrdhaarseks ja $O_1C = O_2C$.

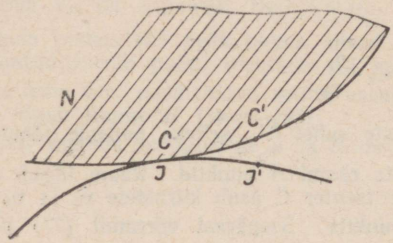
55. Tsentroidid.

Vaatleme sellist ajavahemikku, mille jooksul tasapinnalise kujundi nurkkiirus ei ole null. See tähendab, et igal momendil on olemas kiiruste hetkeline tsenter. Olgu mingil momendil kiiruste hetkeliseks tsentriks tasapinnalise kujundi N punkt C (joon. 135). Peale kujundi N punkti C vaatleme veel põhitasa-

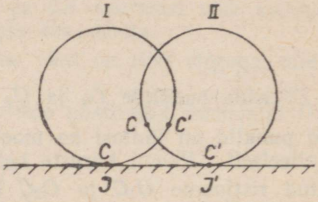
pinna α (s. t. liikumatu tasapinna) seda punkti J, millega antud momendil langeb ühte punkt C. Mingil teisel momendil on kiiruste hetkeliseks tsentriks juba mõni teine tasapinnalise kujundi punkt C', millele vastab põhitasapinnal punkt J'.

Nii näiteks teel libisemiseta veereval rattal on asendis I (joon. 136) kiiruste hetkeline tsenter punktis C. Vastav punkt J põhitasapinnal (liikumatul) on tee punkt, millega puutub kokku ratta punkt C. Asendis II on kiiruste hetkeliseks tsentriks juba mingi teine ratta punkt C' ja temale vastavaks tee punktiks on J', kus ratas puutub teega kokku asendis II.

Liikuva kujundi nende punktide C geomeetrilist kohta, milli-



Joon. 135.



Joon. 136.

sed on eri momentidel kiiruste hetkelisteks tsentriteks, nimetatakse liikuvaks tsentroidiks.

Põhitasapinna (liikumatu) nende punktide J geomeetrilist kohta, millistega langevad eri momentidel kokku kiiruste hetkelised tsentrid, nimetatakse liikumatuks tsentroidiks.

Sirgel teel veereva ratta liikuvaks tsentroidiks on ratta ringjoon CC' ja liikumatuks tsentroidiks ratta jälg teel, s. t. sirge JJ' (joon. 136).

Võib tõestada järgmise teoreemi:

Tasapinnalise kujundi liikumisel põhitasapinnal veereb liikuv tsentroid libisemiseta liikumatul tsentroidil.

Nii veereb eeltoodud näites liikuv tsentroid — ratta piire CC' liikumatul tsentroidil — sirgel JJ'.

Toodud teoreemi tõestusel me ei peatu. Selle teoreemi praktiline tähtsus seisab selles, et igasugust tasapinnalist liikumist võib teostada tasapinnalise kujundiga seotud tsentroidi veeremisega liikumatul tsentroidil. Paljudel juhtudel on vajaliku liikumise teostamine veeremisega vägagi otstarbekohane.

Ülesanne 34. Kaks paralleelset latti MN ja PQ (joon. 137) liiguvad samas suunas kiirustega $v_1 = 2$ m/sek ja $v_2 = 1$ m/sek. Lattide vahele on surutud ketas D läbimõõduga 50 cm, mis veereb lattidel ilma libisemiseta. Leida ketta liikumatu ja liikuv tsentroid.

Kuna ketas veereb lattidel libisemiseta, siis ketta ja ülemise latt kokkupuutepunkti A kiirus võrdub latt kiirusega, s. t. punkti A kiirus $v_A = 2$ m/sek ja on suunatud mööda latti. Analoogiliselt ketta punkti B kiirus $v_B = 1$ m/sek.

Kui nendele kiirustele püstitada punktides A ja B ristjooned, siis nad moodustavad ühe sirge AB. Kiiruste hetkeline tsenter asub sellel sirgel. Kiiruste hetkelise tsentri täpse asukoha määramiseks kanname mastaabis punktide A ja B kiirused joonisele ja nende kiiruste lõpud ühendame sirgega, mida pikendame kuni lõikumiseni sirgega AB punktis C. Kolmnurkade sarnasuse põhjal võime kirjutada:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AC}{BC}.$$

Võrreldes seda võrdust valemiga (77), järeldame, et punkt C ongi kiiruste hetkeline tsenter.

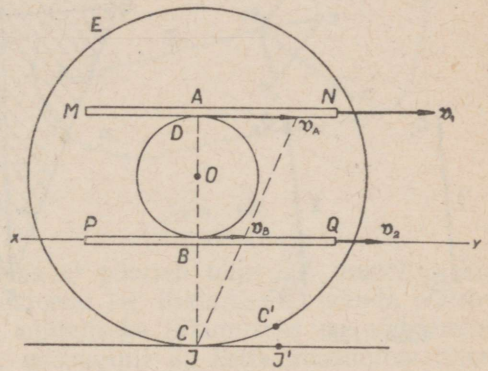
Kuna $\frac{v_A}{v_B} = \frac{2}{1} = 2$, siis $AC = 2BC$ ja $BC = AB = 50$ cm.

Kaugus kiiruste hetkelisest tsentrist kuni ketta keskpunktini O on

$$OC = OB + BC = 75 \text{ cm}.$$

See kaugus jääb püsivaks ketta liikumisel. Seepärast on liikuvaks tsentroidiks ringjoon CC' raadiusega 75 cm ja tsentriga punktis O.

Liikumatu tsentroidi leidmiseks vaatleme põhitasapinna niisugust punkti J, millega mingil momendil langeb ühte kiiruste hetkeline tsenter C. Selle punkti kaugus liikumatu sirgeni on $JB = CB = 50$ cm, s. t. ta on jääv ketta liikumise jooksul. Seepärast on liikumatuks tsentroidiks latiga paralleelne sirge JJ'.



Joon. 137.

Ketta liikumisel veereb liikuv tsentroid (kettaga jäigalt ühendatud ring CC') libisemiseta liikumatul tsentroidil (sirgel JJ'). Sidudes kettaga ratta raadiusega OJ, võime latid kõrvaldada ja ketta vajalikku liikumist teostada selle ratta veeremisega sirgel JJ'.

56. Tasapinnalise kujundi ümberpaigutamise teoreem.

Olgu tarvis tasapinnalist kujundit N põhitasapinnal ümber paigutada asendist I asendisse II. Tõestame, et seda ümberpaigutust saab teostada ühe abil kahest lihtsamast liikumisest: kas translatoorse või pöörleva liikumise abil. Tõestame järgmise teoreemi:

Tasapinnalist kujundit saab samas tasapinnas ühest asendist teise ümber paigutada kas translatoorselt või pöörates teda mingi punkti ümber.

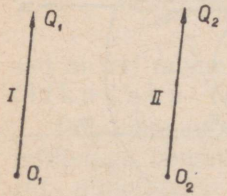
Tasapinnalise kujundi asendi saab määrata mingi sirglõigu OQ abil sellel kujundil (vt. p. 52). Seepärast on küllaldane tõestada teoreem selle sirglõigu OQ ümberpaigutamise kohta.

Võtku sirglõik OQ asendis I tasapinnal asendi O_1Q_1 ja asendis II — O_2Q_2.

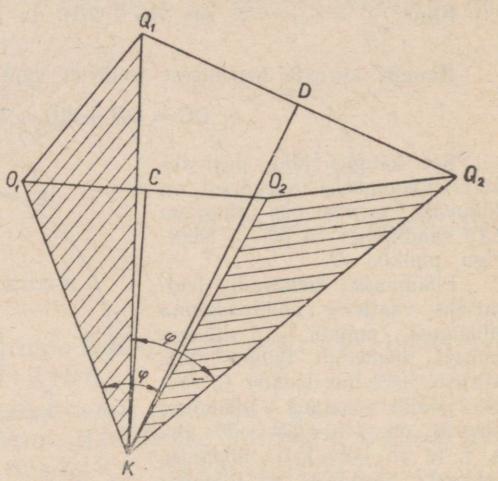
Vaatleme kahte juhtu:

1. Vektorid $\overline{O_1Q_1}$ ja $\overline{O_2Q_2}$ on võrdsed (joon. 138), s. t. nad on ühele poole suunatud. Sel juhul on selge, et sirglõiku OQ saab ümber paigutada translatoorselt.

2. Vektorid $\overline{O_1Q_1}$ ja $\overline{O_2Q_2}$ ei ole võrdsed (joon. 139), s. t. nende suunad on erinevad. Ühendame sirgetega punktid O_1 ja O_2, samuti punktid Q_1 ja Q_2. Sirglõikude O_1O_2 ja Q_1Q_2 keskkohtadest püstitame neile ristjooned CK ja DK. Nende ristjoonte lõikepunkt



Joon. 138.



Joon. 139.

K ongi pöördetsenter. Tõepoolest, $O_1Q_1 = O_2Q_2$, sest see on sama sirglõik erinevates asendites. Peale selle järgneb joonise konstruktsioonist, et

$$KO_1 = KO_2 \text{ ja } KQ_1 = KQ_2.$$

Järelikult on kolmnurgad KO_1Q_1 ja KO_2Q_2 omavahel võrdsed ja

$$\angle O_1KQ_1 = \angle O_2KQ_2.$$

Seepärast on ka nurgad O_1KO_2 ja Q_1KQ_2 võrdsed, s. t.

$$\angle O_1KO_2 = \angle Q_1KQ_2 = \varphi.$$

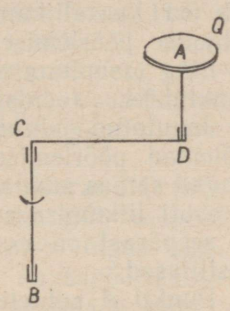
Pöörates sirglõiku O_1Q_1 ümber punkti K nurga φ võrra, meie asetame punkti O_1 ühte punktiga O_2 ja samaaegselt punkti Q_1 punktiga Q_2, s. t. pöördega ümber punkti K me paigutame sirglõigu OQ ja koos temaga ka tasapinnalise kujundi asendist I asendisse II.

57. Paralleelsete telgede ümber pöörlemiste liitmine.

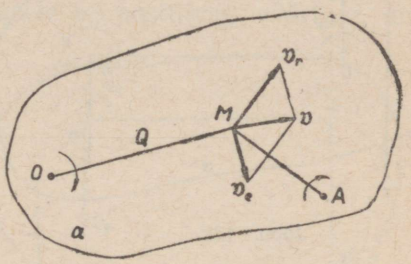
XIII peatükis vaatlesime punkti suhtelist liikumist. Käesolevas punktis vaatleme kõva keha suhtelise liikumise ühte erijuhtu.

Oletame, et liikuv koordinaatide süsteem $\xi\eta\zeta$ pöörleb liikumatu süsteemi xyz suhtes. Olgu mingi keha Q suhteline liikumine süsteemi $\xi\eta\zeta$ suhtes samuti pöörlemine telje ümber, mis on paralleelne süsteemi $\xi\eta\zeta$ enese pöörlemisteljega. Olgu meie ülesandeks leida, missugune on keha Q absoluutne liikumine, s. t. tema liikumine süsteemi xyz suhtes.

Selgitame seda ülesannet näite abil. Pöörelgu vänt BCD ümber telje BC (joon. 140). Vändale on kinnitatud telg DA, mis on



Joon. 140.



Joon. 141.

paralleelne teljega BC. Ketas Q pöörleb telje DA ümber. Siin on kaasaliikumiseks (s. t. süsteemi $\xi\eta\zeta$ liikumiseks) vända pöörlemine ümber telje BC, ketta suhteliseks liikumiseks on pöörlemine telje DA ümber. Küsitakse, missugune on ketta absoluutne liikumine.

Esitatud ülesannet nimetatakse paralleelsete telgede ümber pöörlemiste liitmiseks.

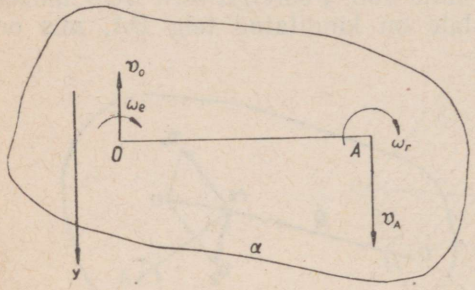
Selle ülesande lahendamiseks võtame kaasapöörlemise ja suhtelise pöörlemise telgedega risti asuva tasapinna α ja vaatleme sellel tasapinnal mingit keha Q punkti M (joon. 141). Lõigaku kaasapöörlemise telg joonise tasapinda punktis O; suhtelise pöörlemise telg aga lõikub sama tasapinnaga punktis A. Punkti M suhteline trajektoor on ringjoon raadiusega AM ja tsentriga punktis A. Seepärast suhteline kiirus v_r, olles selle ringjoone puutuja, asub tasapinnal α. Samadel kaalutlustel järeldame, et punkti M kaasaliikumise kiirus v_e asub samal tasapinnal. Kiiruste liitmise teoreemist (vt. p. 50) järgneb, et punkti M absoluutne kiirus v asub samuti tasapinnal α. Niisiis on punkti M absoluutne liikumine tasapinnaline liikumine. Sama võime öelda ka keha Q kõikide teiste punktide kohta, mis asuvad tasapinnas α. Siit järeldame (vt. p. 51), et keha absoluutne liikumine on tasapinnaline liikumine.

Leiame selle tasapinnalise liikumise nurkkiiruse ω, s. t. keha Q absoluutse liikumise nurkkiiruse või lühemalt öeldes keha Q absoluutse nurkkiiruse ω.

Keha Q suhtelise pöörlemise nurkkiiruse tähistame ω_r-iga, mida nimetame keha Q suhteliseks nurkkiiruseks. Edasi tähistame ω_e-ga kaasaliikumise nurkkiiruse, s. t. kaasapöörlemise nurkkiiruse.

Ülesanne seisab selles, et antud ω_r ja ω_e järgi leida ω.

Loeme nurkkiiruse positiivseks, kui pöörlemine toimub ühes suunas (kella osuti liikumise suunas), ja negatiivseks, kui pöörlemine toimub vastassuunas (kella osuti liikumise vastu).



Joon. 142.

Leiame keha Q nende punktide A ja O kiirused, mis on kaasaliikumise ja suhtelise pöörlemise telgede ning tasapinna α lõikepunktideks. Joonisel 142 on kujutatud juhtum, kus mõlemad pöörlemised toimuvad samas suunas (kella osuti liikumise suunas) ja seepärast on ω_r ja ω_e positiivsed.

Punkti A suhteline kiirus on null, sest see punkt asub suhtelise pöörlemise teljel. Seepärast punkti A absoluutne kiirus võrdub kiiruste liitmise teoreemi järgi (vt. p. 50) kaasaliikumise kiirusega. Kuna kaasaliikumine on pöörlemine telje O ümber nurkkiirusega ω_e, siis punkti A otsitav kiirus on

$$v_A = \omega_e \cdot OA \tag{78}$$

ja ta on suunatud risti sirglõiguga OA, nagu on kujutatud joonisel 142 (v_A suuna määrab kaasapöörlemise suund).

Siirdudes punkti O juurde, märgime, et tema kaasaliikumise kiirus on null, sest see punkt asub kaasapöörlemisteljel. Seepärast kiiruste liitmise teoreemi järgi punkti O absoluutne kiirus v_O võrdub tema suhtelise kiirusega. Suhteliseks liikumiseks aga on pöörlemine telje A ümber nurkkiirusega ω_r. Järelikult punkti O otsitav kiirus on

$$v_O = \omega_r \cdot OA \tag{79}$$

ja on suunatud risti sirglõiguga OA, nagu on kujutatud joonisel 142.

Niisiis on mõlemad kiirused v_A ja v_O suunatud risti sirgega OA, s. t. nad on paralleelsed.

Joonestame y-telje risti sirgega OA (joon. 142). Siis kiiruste v_A ja v_O suunad kas langevad y-telje suunaga kokku või on sellega vastassuunalised. Esimesel juhul loeme vastavat kiirust posi-

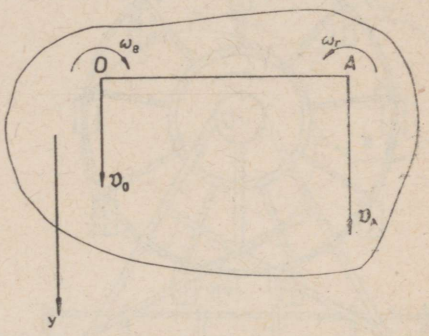
tiivseks, teisel juhul aga negatiivseks. Joonisel 142 kujutatud juhul on kiirus v_A positiivne ja v_O — negatiivne. Sel juhul saame märkide reeglit arvestades võrrandite (78) ja (79) asemel järgmised:

$$v_A = \omega_e \cdot OA, \tag{80}$$

$$v_O = -\omega_r \cdot OA. \tag{81}$$

Viimased võrrandid on maksvad ka sel juhul, kui mõni pöörlemine toimub kella osuti liikumisele vastu, kui ainult kinni pidada märkide reeglist nii nurkkiiruste ω_e ja ω_r suhtes kui ka punktide A ja O kiiruste $\mathfrak{v}_A$ ja $\mathfrak{v}_O$ suhtes.

Toimugu näiteks suhteline pöörlemine kella osuti liikumisele vastassuunas (joon. 143). Siis on nurkkiirus ω_r negatiivne ja võrrandi (81) kohaselt saame kiirusele $\mathfrak{v}_O$ positiivse väärtuse, mis vastab tema suunale. Viimane langeb vaadeldaval juhul kokku y-telje suunaga.



Joon. 143.

Nii on võrrandid (80) ja (81) märkide reeglist kinnipidamisel õiged suhtelise ja kaasapöörlemise mistahes suundade puhul.

Siirdume keha Q absoluutse liikumise vaatlemisele. Eespool määrasime kindlaks, et see on tasapinnaline liikumine. Valime pooluseks punkti O. Võrrandi (71) järgi

$$\mathfrak{v}_A = \mathfrak{v}_O + \mathfrak{v}_{AO}.$$

Kasutades v_{AO} puhul eespool kindlaks määratud märkide reeglit ja võttes arvesse, et kõik kolm vektorit $\mathfrak{v}_A$, $\mathfrak{v}_O$ ja $\mathfrak{v}_{AO}$ on paralleelsed, võime vektoriaalse võrduse (71) asemel kirjutada skalaarse

$$v_A = v_O + v_{AO}, \tag{82}$$

mis tähendab, et vektori $\mathfrak{v}_A$ projektsioon y-teljele võrdub vektorite $\mathfrak{v}_O$ ja $\mathfrak{v}_{AO}$ projektsioonide summaga.

Vastavalt võrrandile (72) $v_{AO} = \omega \cdot OA$, kus ω on tasapinnalise liikumise nurkkiirus, s. t. otsitav absoluutne nurkkiirus. Seepärast saame valemitest (80), (81) ja (82):

$$\omega_e \cdot OA = -\omega_r \cdot OA + \omega \cdot OA.$$

Pärast taandamist OA-ga saame:

$$\omega = \omega_e + \omega_r. \tag{83}$$

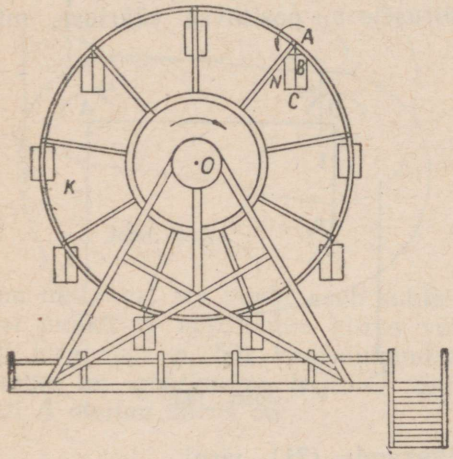
Võrrand (83), milles suurustel ω, ω_e ja ω_r on märgid kooskõlas eespool toodud reegliga, väljendab järgmist teoreemi:

Absoluutne nurkkiirus võrdub kaasaliikumise nurkkiiruse ja suhtelise nurkkiiruse summaga.

Peatume ühel huvitaval erijuhul, kus kaasapöörlemine ja suhteline pöörlemine toimuvad eri suundades ühesuguste nurkkiirustega. Sel juhul $\omega_r = -\omega_e$ ja järelikult

$$\omega = \omega_e + \omega_r = 0,$$

s. t. absoluutne nurkkiirus on null. P-s 54 määrasime kindlaks, et $\omega = 0$ puhul keha kõikide punktide kiirused on võrdsed. Niisiis vastassuunaliste ja sama nurkkiirusega pöörlemiste liitmisel on kõikide punktide kiirus absoluutsel liikumisel võrdne.



Joon. 144.

Sellise liikumise näiteks võib olla kabiini N liikumine tuntud atraktsioon-numbris, mille skeem on antud joonisel 144.

Ratas K pöörleb horisontaalse telje O ümber. Ratta külge on kinnitatud kabiin N, mis saab pöörelda horisontaalse telje A ümber. Võttes ratta liikumist kaasaliikumiseks, leiame, et kabiini suhteliseks liikumiseks on pöörlemine vastassuunas. Ei ole raske veenduda selles, et kabiini N absoluutne liikumine on translatoorne, sest mistahes kahte kabiini punkti ühendav sirge (näiteks vertikaalne sirge BC) liigub paralleelselt oma algasendiga.

Kuna kabiini absoluutne liikumine on translatoorne, siis tema kõikide punktide kiirus on sama, tähendab nurkkiirus on null. Siit järeldame, et kabiini suhteline nurkkiirus võrdub kaasaliikumise nurkkiirusega, s. t. ratta nurkkiirusega.

Ülesanne 35. Vänt OA pöörleb nurkkiirusega ω_3 ümber liikumatu telje O, mis läbib liikumatu ratta I tsentri. Selle ratta raadiuseks on r_1. Vända teljele A on asetatud ratas II raadiusega r_2, mis liigub libisemiseta rattal I. Leida ratta II absoluutne nurkkiirus ω_2 ja tema suhteline nurkkiirus $\omega_{2,3}$ vända suhtes (joon. 145).

Võttes vända liikumise kaasaliikumiseks, võime kindlaks teha, et kaasaliikumiseks on pöörlemine telje O ümber nurkkiirusega ω_3, ratta II suhteliseks liikumiseks on pöörlemine telje A ümber nurkkiirusega $\omega_{2,3}$. Mõlemad liikumi-

sed toimuvad samas suunas (kella osuti liikumise suunas) paralleelsete telgede O ja A ümber. Võrrand (83) kujuneb antud juhul järgmiseks:

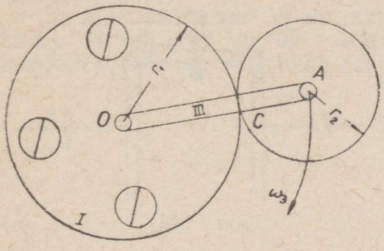
$$\omega_2 = \omega_3 + \omega_{2,3}. \qquad \text{(a)}$$

Selleks, et leida ω_2, määrame kindlaks ratta II liikumise iseloomu. See on libisemiseta veeremine rattal I. Ratta II liikumine on tasapinnaline. Kiiruste hetkeline tsenter asub rataste kokkupuutepunktis C, sest selle punkti kiirus libisemise puudumisel on null. Rakendades ratta II punkti A kohta võrrandit (76), saame:

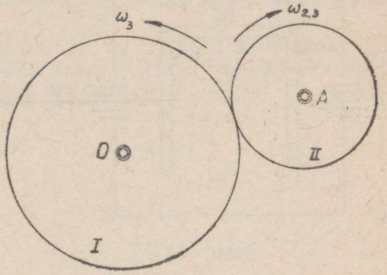
$$v_A = \omega_2 \cdot CA = \omega_2 r_2.$$

Teiselt poolt võime punkti A kiiruse arvutada nurkkiirusega ω_3 telje O ümber pöörleva vända III punkti kiirusena:

$$v_A = \omega_3 \cdot OA = \omega_3(r_1 + r_2).$$



Joon. 145.



Joon. 146.

Nende valemite põhjal võime kirjutada, et

$$\omega_2 r_2 = \omega_3(r_1 + r_2),$$

millest

$$\omega_2 = \omega_3 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

Suhtelise nurkkiiruse $\omega_{2,3}$ leiame võrrandist (a):

$$\omega_{2,3} = \omega_2 - \omega_3 = \omega_3 \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Seda ülesannet saab lahendada ka teisel viisil.

Anname kogu mehhanismile lisaliikumise punkti O ümber nurkkiirusega $-\omega_3$. Märk miinus näitab, et lisapöörlemine toimub vastu kella osuti liikumise suunda. Pärast selle lisaliikumise rakendamist vänt OA jääb seisma, sest tema nurkkiirus muutub nulliks:

$$\omega_3 + (-\omega_3) = 0.$$

Ratas I hakkab pöörlema telje O ümber kella osuti liikumisele vastassuunas nurkkiirusega ω_3 ja ratas II hakkab pöörlema telje A ümber kella osuti liikumise suunas nurkkiirusega, mis on $\omega_2 - \omega_3$, s. o. nurkkiirusega $\omega_{2,3}$ (joon. 146).

Nii saame pärast lisaliikumise rakendamist kahe ühendatud ratta I ja II pöörlemise liikumatute telgede O ja A ümber, nagu ülesandes 27. Libisemise puudumisel on mõlema ratta ringkiirused, s. o. punktide kiirused nende rataste piiretel, võrdsed. Saame võrduse

$$\omega_3 r_1 = \omega_{2,3} r_2,$$

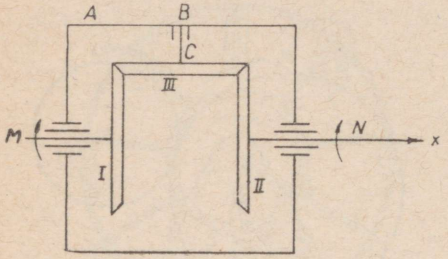
$$\omega_{2,3} = \omega_3 \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Edasi leiame võrrandist (a) ω_2:

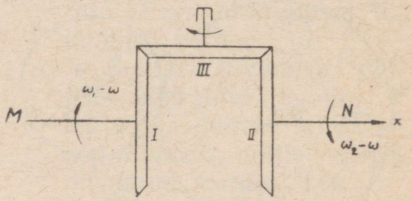
$$\omega_2 = \omega_3 + \omega_{2,3} = \omega_3 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

Ülesanne 36. Uurida auto diferentsiaali kinemaatikat. Diferentsiaali skeem on toodud joonisel 147. Diferentsiaali karp A saab pöörelda x-telje ümber, mis langeb ühte pooltelgedega M ja N. Karbis kinnitatud teljele BC on asetatud temal vabalt pöörlev koonushammasratas *III* (satelliitratas), mis on hambumises koonushammasratastega *I* ja *II*.

Auto liikumine toimub sel teel, et kardaanvõlli pöörlemine antakse edasi



Joon. 147.



Joon. 148.

diferentsiaali karbile, sealt satelliitide kaudu hammasratastele *I* ja *II* (satelliite on mitu, harilikult neli). Auto vedavad rattad pöörlevad koos hammasratastega *I* ja *II*, milledega nad on jäigalt ühendatud pooltelgede *M* ja *N* abil. Vaatleme kõikide diferentsiaali detailide liikumist auto kere suhtes. Selles liikumises diferentsiaali karp A pöörleb x-telje ümber teatud nurkkiirusega ω (joonisel 147 kella osuti liikumise suunas, kui vaadata suunas $N \rightarrow M$). Hammasrattad *I* ja *II* pöörlevad samuti x-telje ümber karbiga samas suunas nurkkiirustega ω_1 ja ω_2.

Leiame seose suuruste ω_1, ω_2 ja ω vahel. Selleks anname kogu mehhanismile lisaliikumise x-telje ümber nurkkiirusega $-\omega$, s. t. suunaga vastu kella osuti liikumise suunda. Siis diferentsiaali karp jääb seisma, sest tema nurkkiirus muutub lisaliikumise rakendamisel nulliks,

$$\omega + (-\omega) = 0.$$

Satelliidi telg BC, mis on karbi külge kinnitatud, muutub liikumatuks ja satelliit hakkab pöörlema selle liikumatu telje ümber. Hammasrattad *I* ja *II* ja koos nendega ka auto rattad hakkavad x-telje ümber pöörlema nurkkiirustega $(\omega_1 - \omega)$ ja $(\omega_2 - \omega)$. Nii saame lisaliikumise rakendamise tulemusena lihtsa ülesande, kus kolm hammasratast *I*, *II* ja *III* pöörlevad liikumatute telgede ümber (joon. 148). Seejuures kõigi kolme hammasratta ringkiirused on võrdsed, ja et hammasrataste *I* ja *II* raadiused on võrdsed, siis nende nurkkiirused on samuti võrdsed. Nende rataste pöörlemise suunad on vastupidised. Nii näiteks, kui $\omega_1 > \omega$ (nagu on eeldatud joonisel 148), pöörleb hammasratas *I* kella osuti liikumise suunas, hammasratas *II* aga vastassuunas. Meie poolt kasutamisele võetud märkide reegli järgi on suurustel $(\omega_1 - \omega)$ ja $(\omega_2 - \omega)$ vastupidised märgid ja kuna nende absoluutväärtused on võrdsed, kuivõrd hammasrataste *I* ja *II* nurkkiirused pärast lisaliikumise rakendamist muutuvad võrdseteks, siis suuruste $(\omega_1 - \omega)$ ja $(\omega_2 - \omega)$ summa võrdub nulliga, s. t.

$$(\omega_1 - \omega) + (\omega_2 - \omega) = 0.$$

Siit saame, et

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\omega. \qquad (a)$$

Niisugune on otsitav vahekord diferentsiaali karbi ja hammasrataste *I* ning *II* nurkkiiruste vahel.

Karbi nurkkiirus ω oleneb mootori pöörete arvust, käigukasti ja peaülekande ülekandearvudest. Hammasrataste *I* ja *II* ning nendega ühendatud autorataste nurkkiirused ω_1 ja ω_2 olenevad neist tingimustest, milles need rattad asuvad.

Vaatleme mõningaid erijuhte.

1. Auto liikumisel sirgjoonelisel teeosal, kui rattad on ühesugustes tingimustes, nende nurkkiirused on võrdsed, s. t. $\omega_1 = \omega_2$. Sel juhul võrrandi (a) kohaselt $\omega_1 - \omega_2 = \omega$, s. t. kummagi ratta nurkkiirus on võrdne karbi nurkkiirusega. Sel juhul satelliit *III* ilmselt ei pöörle oma telje ümber.

2. Auto kohalt võtmisel üks vedav ratas mõnikord ei hakka pöörlema ja teine libiseb kohal, s. t. $\omega_1 = 0$ ja $\omega_2 \neq 0$. Vastavalt võrrandile (a) on sel juhul $\omega_2 = 2\omega$, s. t. libiseva ratta nurkkiirus on karbi nurkkiirusest kaks korda suurem.

3. Auto pööramisel ei ole nurkkiirused ω_1 ja ω_2 võrdsed. Võrrand (a) näitab, et niipalju, kui ühe ratta (auto pööramise tsentri suhtes sisemise) nurkkiirus väheneb, samapalju ka teise ratta nurkkiirus suureneb.

III OSA.

DÜNAAMIKA.

XV peatükk.

Dünaamika aksioomid.

58. Inertsi aksioom.

Dünaamikaks nimetatakse seda teoreetilise mehaanika osa, milles õpitakse tundma kehade liikumist seoses sellele liikumisele mõjuvate füüsikaliste teguritega. Nagu kinemaatikaski, alustame ka siin punkti liikumise vaatlemisega. Dünaamikas vaadeldav punkt aga erineb põhiliselt sellest punktist, mille liikumist käsitleti kinemaatikas. Seal oli ta geomeetriline punkt, dünaamikas aga peab vaatlema materiaalset punkti, s. t. sellist punkti, millel on teatud mass, sest üks massi omadusi, ja nimelt tema inerts, mõjutab oluliselt liikumist. Teeme seepärast kindlaks, mida me edaspidi mõistame materiaalse punkti all.

Materiaalseks punktiks (masspunktiks) nimetatakse keha, mille mõõteid võib mitte arvestada. Sellise keha asendit võime määrata geomeetrilise punktiga. Nii vaadeldakse astronoomias tähti taevalaotuses punktidena, kuigi on teada, kuivõrd suured on tähtede mõõted, võrreldes maapealsete kehade mõõdetega.

Laeva asukohta merel määratakse harilikult koha pikkuse ja laiuse kraadidega, kuigi need tegelikult määravad geomeetrilise punkti asukohta maakeral. Seda punkti samastatakse laevaga, võttes arvesse laeva väga väikesi mõõteid, võrreldes maakeraga. Mõnedes ülesannetes, võttes keha materiaalse punktina, saame lahendi teatud veaga ja seda lahendit tuleb võtta ligikaudsena. Nii näiteks, lahendades ülesannet mürsu liikumise kohta õhus, vaadeldakse mürsku esimeses lähenduses materiaalse punktina, jättes arvesse võtmata mürsu pöörlemist ja teisi temaga seoses olevaid tegureid. Selliste ülesannete täpsemal lahendamisel vaadeldakse keha masspunktide kogumikuna.

Kindlaks määranud masspunkti mõiste, formuleerime juba tuntud inertsi aksioomi (vt. p. 2) järgmiselt.

Esimene aksioom (inertsi aksioom). *Isoleeritud masspunkt seisab paigal või liigub sirgjooneliselt ja ühtlaselt.*

Isoleeritud masspunkti all mõistame punkti, mis ei asu teiste masspunktide mõju all. Kinemaatikas tegime kindlaks (vt. p. 46), et sirgjooneline ja ühtlane liikumine on ainus liikumine, mille juures punkti kiirendus on null. Seepärast võib inertsi aksioomi väljendada veel järgmiselt:

Isoleeritud masspunkti kiirendus võrdub nulliga.

Inertsi aksioomist järgneb, et kui masspunkti kiirendus ei ole null, siis talle mõjuvad teised masspunktid.

Ühe masspunkti mõju teisele masspunktile, mille toimel viimane saab kiirenduse, nimetatakse j õ u k s. Jõul on rakenduspunkt, suurus ja suund. Jõu rakenduspunkt on see masspunkt, mis on selle jõu mõju all. Jõu suuruse ja suuna mõisted määrab dünaamikas kindlaks teine aksioom.

59. Masspunkti dünaamika põhivõrrand.

Teine aksioom. *Jõu poolt masspunktile antaval kiirendusel on jõu suund ja ta on jõuga võrdeline.*

Lähtudes sellest aksioomist, võime võrrelda kahte jõudu P_1 ja P_2 nende kiirenduste a_1 ja a_2 abil, mille nad annavad ühele ja samale masspunktile. Nende jõudude suhe võrdub kiirenduste suhtega:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_1}{a_2} \text{ või } \frac{P_1}{a_1} = \frac{P_2}{a_2}.$$

Viimane võrdus näitab, et jõu P suhe sellesse kiirendusse a, mille ta annab antud masspunktile, on selle punkti jaoks jääv suurus. Tähistades selle jääva suuruse tähega m, võime kirjutada, et

$$\frac{P}{m} = a$$

või

$$P = ma. \tag{84}$$

Et anda erinevatele masspunktidele ühte ja sama kiirendust, tuleb rakendada neile erinevad jõud. Mida suurem on selleks rakendatav jõud P, seda suurem on suurus m võrduses (84) ja nagu öeldakse, seda suurema inertsiga on masspunkt. Niisiis on suurus m võrduses (84) masspunkti inertsi mõõduks. Suurust m,

mis iseloomustab masspunkti inertsi, nimetatakse selle punkti m a s s i k s.

Arvukate katsetega on kindlaks tehtud, et tühjuses langevad kõik kehad ühesuguse kiirendusega. Tähistame seda kiirendust tähega g. Kuna tühjuses langemisel mõjub langevale kehale ainult üks jõud ja nimelt raskusjõud G, siis, vaadeldes seda keha kui masspunkti ja rakendades tema puhul võrdust (84), saame:

$$G = mg. \tag{85}$$

Kahe keha kohta, mille kaalud on G_1 ja G_2 ning massid — m_1 ja m_2, saame:

$$G_1 = m_1 g \quad \text{ja} \quad G_2 = m_2 g,$$

kust

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{m_1}{m_2},$$

s. t. kehade kaalud on võrdelised nende massidega. See võimaldab kehade masse võrrelda nende kaalumisega.

Tuleb märkida, et maakera erinevates kohtades v a b a l a n g e m i s e k i i r e n d u s g (s. t. keha langemisel tühjuses) on erinev. Moskvas võrdub see 9,8156 m/sek^2. Moskvast põhja poole see suureneb, lõuna poole väheneb. Kuna keha mass on jääv suurus, siis võrrandist (85) järgneb, et sama keha kaal erinevates maakera punktides on erinev. Seda nähtust saame kontrollida vedrukaaludega.

Tulles tagasi võrduse (84) juurde, märgime, et see väljendab olenevust jõu P ja kiirenduse a suuruse vahel. Ta ei ütle midagi vektorite $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{a}$ suuna kohta. Teise aksioomi kohaselt nende vektorite suunad langevad ühte. Seepärast võime teise aksioomi matemaatiliselt väljendada vektoriaalse võrrandina:

$$m\mathfrak{a} = \mathfrak{P}, \tag{86}$$

mis väljendab, et 1) jõu ja kiirenduse suunad on samad ja 2) nende vektorite moodulid on võrdelised.

Võrrandi (86) võime sõnastada järgmiselt:

Jõud on vektor, mis võrdub punkti massi ja kiirenduse korrutisega.

Võrrandit (86) nimetatakse masspunkti dünaamika põhivõrrandiks.

60. Vastastikuse mõju aksioom. Rööpküliku aksioom.

Kolmas aksioom. *Kahe masspunkti vastastikune mõju on võrdne ja suunatud vastupidiselt.*

Seda aksioomi tuntakse hästi staatikas, kus teda sageli kasutatakse.

Neljas aksioom. *Kahe jõu samaaegsel mõjumisel masspunktile võrdub selle kiirendus suuruselt ja suunalt nende kiirenduste alusel ehitatud rööpküliku diagonaaliga, milliseid omaks see punkt, kui need jõud mõjuksid eraldi.*

Teisiti öeldes on masspunkti kiirendus a kahe jõu $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ samaaegsel mõjumisel võrdne nende kiirenduste a_1 ja a_2 vektoriaalse summaga, mida annaksid need jõud masspunktile eraldi mõjudes, s. t.

$$a = a_1 + a_2.$$

Korrutades seda võrdust masspunkti massiga m, saame:

$$ma = ma_1 + ma_2.$$

Vastavalt dünaamika põhivõrrandile (86)

$$ma_1 = \mathfrak{P}_1; \quad ma_2 = \mathfrak{P}_2.$$

Seepärast

$$ma = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2.$$

Tähistades summa $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$, s. o. nende jõudude resultandi $\mathfrak{P}$-ga, saame

$$ma = \mathfrak{P}.$$

Järelikult on masspunkti kiirendus kahe jõu samaaegsel mõjumisel niisugune, nagu mõjuks talle üks jõud, mis on võrdne antud jõudude resultandiga.

Kui masspunktile mõjub samaaegselt n jõudu $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$, siis, kasutades järkjärgult rööpküliku aksioomi, saame:

$$ma = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n.$$

Tähistades $\mathfrak{P}$-ga jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ resultanti,

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n,$$

saame võrrandi

$$ma = \mathfrak{P}.$$

Viimane võrrand ei erine väliselt millegi poolest võrrandist (86). Seepärast mõistame edaspidi $\mathfrak{P}$ all jõudu, mis mõjub punktile, kui ta on ainuke ja juhul, kui mõjuvaid jõude on mitu, siis nende resultanti.

Võrdus (84)

$$ma = P,$$

mis määrab olenevuse massi, kiirenduse ja jõu suuruste vahel, määrab ühtlasi ka nende suuruste mõõtühikute vahekorra.

Kõikide suuruste mõõtühikuid mehaanikas võib väljendada kolme põhiühiku kaudu, mida tervikuna nimetatakse ühikute süsteemiks. Kasutatavad ühikute süsteemid jagunevad tavaliselt kahte klassi.

I. Ühikute absoluutsed süsteemid. Selles süsteemis on põhiühikuiks: pikkusühik l, massiühik m ja ajaühik t.

II. Ühikute tehnilised süsteemid. Põhiühikuiks on siin: pikkusühik l, jõuühik P ja ajaühik t.

Üheks ühikute absoluutseks süsteemiks on CGS-süsteem (sentimeeter, gramm, sekund). CGS-süsteemis on põhiühikuteks: pikkusühik — sentimeeter (cm), massiühik — gramm (g), ajaühik — sekund (sek).

Gramm on ühe kuupsentimeetri destilleeritud vee mass temperatuuril 4° C.

Jõuühiku nimeks on CGS-süsteemis düün. See on niisugune jõud, mis annab masspunktile massiga 1 g kiirenduse 1 cm/sek^2.

Jõuühiku mõõtühik määratakse CGS-süsteemis kindlaks võrduse (84) abil

$$[P] = [m]\,[a] = \frac{[m]\,[l]}{[t^2]} = \text{gcm/sek}^2,$$

kust

$$1 \text{ düün} = 1 \text{ gcm/sek}^2.$$

Üheks ühikute tehniliseks süsteemiks on MKS-süsteem (meeter, kilogramm, sekund). MKS-süsteemi põhiühikuiks on: pikkusühik — meeter (m), jõuühik — kilogramm (kg), ajaühik — sekund (sek).

Kilogramm on ühe kuupdetsimeetri (liitri) destilleeritud vee kaal temperatuuril 4° C. Kuna keha kaal oleneb sellest kohast maakeral, kus toimub kaalumine, siis jõuühiku kindlaksmääramisel MKS-süsteemis tuleb juurde lisada, missuguse koha kohta maakeral ta on maksev.

Massiühikul MKS-süsteemis ei ole erilist nime. See on niisugune mass, mis saab 1 kg jõu mõjul kiirenduse, mis võrdub 1 m/sek^2. Massi mõõtühik määratakse MKS-süsteemis samuti võrduse (84) abil:

$$[m] = \frac{[P]}{[a]} = \frac{[P]\,[t^2]}{[l]} = \text{kg sek}^2/\text{m}.$$

Ülesannete lahendamisel peavad kõikide suuruste mõõtühikud olema samast ühikute süsteemist. Seejuures tuleb keha antud massi m järgi leida tema kaal G või vastupidi, keha antud kaalu järgi leida tema mass võrduse $G = mg$ abil.

Olgu näiteks lahendada ülesanne CGS-süsteemis ja olgu keha mass 1 g. Selle keha kaal on (võttes vaba langemise kiirenduseks 981 cm/sek²)

$$G = mg = 1 \cdot 981 = 981 \text{ g cm/sek}^2 = 981 \text{ düüni}.$$

Leiame MKS-süsteemis keha massi, mille kaal on 1 kg. Vaba langemise kiirenduseks võtame $g = 9{,}81$ m/sek².

$$m = \frac{G}{g} = \frac{1}{9{,}81} = 0{,}102 \text{ kg sek}^2/\text{m}.$$

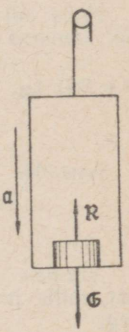
62. Ülesandeid.

Dünaamika ülesanded lahendatakse dünaamika põhivõrrandi (86) abil. Kõik need ülesanded võib jagada kahte tüüpi: ühtedes ülesannetes on masspunkti liikumine tuntud ja on tarvis leida punktile mõjuvad jõud; teisel juhul on antud jõud ja on tarvis leida masspunkti liikumine.

Ülesanne 37. Koormatud tõstuk langeb vertikaalses šahtis kiirendusega 2 m/sek². Leida koorma surve tõstuki põrandale, kui koorma kaal G on 20 kg (joon. 149).

Koormale mõjub kaks jõudu: $\mathfrak{G}$ — koorma kaal, mis mõjub vertikaalselt alla, ja $\mathfrak{R}$ — tõstuki reaktsioon, mis on suunatud üles.

Tasakaalu-olukorras need kaks jõudu on tasakaalustatud. Tõstuki kiirendatud liikumisel ei ole jõudude $\mathfrak{G}$ ja $\mathfrak{R}$ resultant enam null, vaid võrdub dünaamika põhivõrrandi põhjal massi ja kiirenduse korrutisega. Jõudude $\mathfrak{G}$ ja $\mathfrak{R}$ resultant on suunatud samuti nagu kiirendus, s. o. alla. Võrrandi (84) põhjal võime kirjutada



Joon. 149.

$$ma = G - R,$$

kust

$$R = G - ma.$$

Koorma mass

$$m = \frac{G}{g} = \frac{20}{9{,}81} \approx 2{,}04 \text{ kg sek}^2/\text{m}.$$

Seepärast

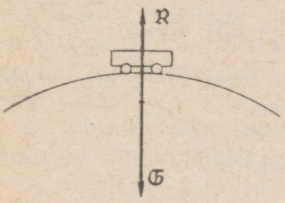
$$R = 20 - 2{,}04 \cdot 2 = 15{,}92 \text{ kg}.$$

Koorma surve tõstuki põrandale on võrdne leitud reaktsiooniga ja suunatud sellele vastupidi, s. o. alla.

Nagu nähtub, on koorma surve tõstuki põrandale koorma kaalust väiksem.

Ülesanne 38. Auto, mis kaalub 800 kg, liigub kumeral sillal. Leida auto surve sillale momendil, kui auto ületab silla keskkohta. Silla kumeruse kõverusraadius ϱ on silla keskkohal 50 m ja auto kiirus sel momendil — 54 km/tunnis.

Autole (joon. 150), mida vaatleme kui masspunkti, mõjub kaks jõudu: kaal $\mathfrak{G}$ ja silla reaktsioon $\mathfrak{R}$, mis on suunatud silla pinna normaali pidi, kui hõõrdumist mitte arvestada. Auto üleminekul silla keskkohast on need jõud mõlemad suunatud vertikaalselt ja vastupidi. Nende resultant $\mathfrak{P}$ on suunatud samuti vertikaalselt. Dünaamika põhivõrrandi $m\mathfrak{a} = \mathfrak{P}$ kohaselt on auto kiirendus a suunatud samuti vertikaalselt. Ta on suunatud alla, sest kiirendus on suunatud alati punkti trajektoori nõgususe poole. Seepärast



Joon. 150.

$$ma = P = G - R.$$

Kiirenduse suund langeb ühte trajektoori normaali suunaga. Järelikult on auto kiirendus antud juhul võrdne normaalkiirendusega, s. t.

$$a = a_n = \frac{v^2}{\varrho}.$$

$$\frac{mv^2}{\varrho} = G - R,$$

kust saame

$$R = G - \frac{mv^2}{\varrho}. \qquad (a)$$

Enne kui asetada võrrandisse (a) tuntud suuruste väärtused, viime nad kõik samasse ühikute süsteemi MKS:

$$G = 800 \text{ kg}; \quad m = \frac{G}{g} = \frac{800}{9{,}81} \approx 81{,}6 \text{ kg sek}^2/\text{m}; \quad v = 54 \text{ km/tunnis} = 15 \text{ m/sek};$$

$$\varrho = 50 \text{ m}.$$

Asetades need väärtused võrrandisse (a), saame

$$R = 800 - \frac{81.6 \cdot 15^2}{50} = 432{,}8 \text{ kg}.$$

Võrduse (a) abil on võimalik leida maksimaalset lubatud liikumise kiirust, mille juures auto ei rebi end sillalt lahti. Et $R \geqslant 0$, siis, võrduse (a) järgi

$$G - \frac{mv^2}{\varrho} \geqslant 0$$

ehk

$$\frac{mv^2}{\varrho} \leqslant G.$$

Et $G = mg$, siis peab olema

$$\frac{mv^2}{\varrho} \leqslant mg,$$

kust saame

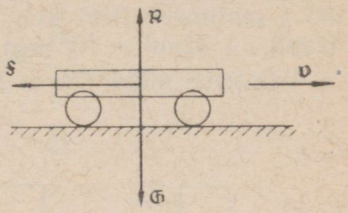
$$v = \sqrt{g\varrho}.$$

Kuna $\rho = 50$ m, siis saame

$$v \leqslant \sqrt{9{,}81 \cdot 50} = 22{,}16 \text{ m/sek} = 80 \text{ km/tunnis}.$$

Ülesanne 39. Missuguse aja jooksul ja missugusel kaugusel saab peatada autot, mis liigub horisontaalsel teel kiirusega 36 km/t., kui liikumise takistus pidurdamisel on 0,3 auto kaalust?

Vaadeldes autot masspunktina, märgime ära autole mõjuvad jõud (joon. 151): auto kaal $\mathfrak{G}$, tee normaalreaktsioon $\mathfrak{R}$ ja liikumise takistus (pidurdamine) $\mathfrak{F}$, mis on suunatud kiirusele $\mathfrak{v}$ vastupidi. Nende jõudude resultandiks on $\mathfrak{F}$, sest $\mathfrak{G}$ ja $\mathfrak{R}$ tasakaalustavad teineteist.



Joon. 151.

Et

$$F = 0{,}3G = 0{,}3mg,$$

siis F on jääv suurus, järelikult ka kiirendus a on jääv ja võrdub dünaamika põhivõrrandi kohaselt

$$a = \frac{F}{m} = 0{,}3g.$$

Kuna kiirendus on jääv ja suunatud kiirusele vastupidiselt, siis on liikumine ühtlaselt aeglustuv. Võime kasutada valemeid (43) ja (44), milledes arvestame, et $a = -0{,}3g$. Siis saame

$$x = v_0 t - 0{,}3g \cdot \frac{t^2}{2}. \qquad \text{(a)}$$

$$v = v_0 - 0{,}3gt. \qquad \text{(b)}$$

Ülesande kohaselt

$$v_0 = 36 \text{ km/tunnis} = 10 \text{ m/sek}.$$

Auto seismajäämisel $v = 0$. Siis võrduse (b) järgi saame

$$0 = 10 - 0{,}3 \cdot 9{,}81 \cdot t,$$

kust

$$t = \frac{10}{0{,}3 \cdot 9{,}81} \approx 3{,}4 \text{ sek}.$$

Asetades selle t väärtuse võrdusesse (a), saame pidurdustee:

$$x = 10 \cdot 3{,}4 - 0{,}3 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{3{,}4^2}{2} \approx 17 \text{ m}.$$

XVI peatükk.

Hoo teoreem.

63. Jõu töö.

Kui püsiva jõu $\mathfrak{P}$ suund langeb ühte tema rakenduspunkti kiiruse $\mathfrak{v}$ suunaga, siis jõu $\mathfrak{P}$ tööks teekonnal s nimetatakse jõu P ja teekonna pikkuse s korrutist (joon. 152). Tähistades tööd tähega A, saame

$$A = Ps.$$

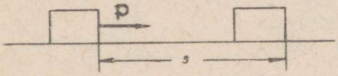
Töö mõõtühiku saame võrdusest

$$[A] = [P][s].$$

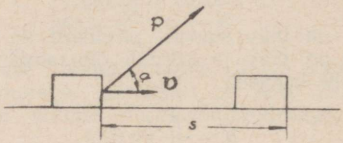
Tehnilises MKS-süsteemis on töö mõõtühikuks $[A] = \text{kgm}$. Tööühikut nimetatakse selles süsteemis kilogramm-meetriks.

Absoluutses CGS-süsteemis on töö mõõtühikuks $[A] = \text{gcm}^2/\text{sek}^2$. Tööühiku nimetuseks selles süsteemis on erg — 1 düünilise jõu töö 1 sentimeetrilisel teel. Elektrotehnikas kasutatakse tööühikuna džauli. 1 džaul $= 10^7$ ergi.

Vaatleme nüüd jäävat jõudu $\mathfrak{P}$, mis moodustab teatud nurga α



Joon. 152.



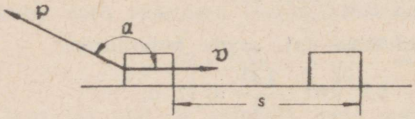
Joon. 153.

jõu rakenduspunkti kiiruse $\mathfrak{v}$ suunaga, kusjuures see punkt liigub sirgjooneliselt (joon. 153).

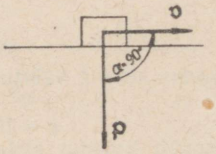
Sel juhul nimetatakse jõu $\mathfrak{P}$ tööks teekonnal s jõu P, teekonna s ja jõu $\mathfrak{P}$ ning kiiruse $\mathfrak{v}$ vahelise nurga α koosinuse korrutist:

$$A = Ps \cos \alpha. \tag{87}$$

Kui α on teravnurk (joon. 153), siis $\cos \alpha > 0$ ja töö on positiivne. Kui α on nürinurk (joon. 154), siis $\cos \alpha < 0$ ja töö on negatiivne. Lõpuks, kui α on täisnurk, (joon. 155), siis $\cos \alpha = 0$ ja töö on null.



Joon. 154.



Joon. 155.

Nii näiteks on vabal langemisel raskusjõu töö positiivne, keha ülestõstmisel on raskusjõu töö negatiivne, keha liikumisel horisontaaltasapinnas on raskusjõu töö null.

Määrame jõu töö üldjuhul. Vaatleme muutuvat jõudu $\mathfrak{P}$, mille rakenduspunkt liigub piki kõverat punktist A kuni punktini B (joon. 156).

Jagame kogu teekonna AB suureks arvuks väikesteks osadeks $\Delta s_1 = AM$, $\Delta s_2 = MN$ jne. Kaarte Δs_1, Δs_2, ... väikese pikkuse

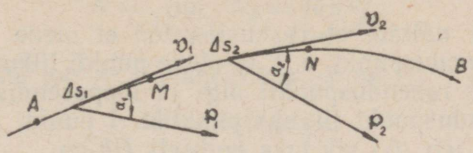
tõttu loeme neid sirglõikudeks ja jõu $\mathfrak{P}$ suuruse neil osadel jääväks. Jõu $\mathfrak{P}_1$ töö teekonnal Δs_1 on valemi (87) alusel

$$A_1 = P_1 \cdot \Delta s_1 \cdot \cos \alpha_1,$$

teekonnal Δs_2

$$A_2 = P_2 \cdot \Delta s_2 \cdot \cos \alpha_2$$

jne.



Joon. 156.

Jõu $\mathfrak{P}$ tööks kogu teekonnal AB nimetatakse piiri, millele läheneb tööde A_1, A_2, ... summa, kui iga kaar Δs läheneb nullile.

$$A = \lim_{\Delta s_1 \to 0,\ \Delta s_2 \to 0} (P_1 \Delta s_1 \cos \alpha_1 + P_2 \Delta s_2 \cos \alpha_2 + \ldots).$$

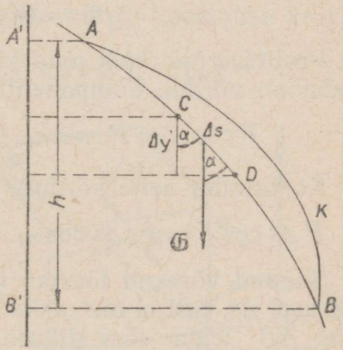
Seda kirjutatakse lühidalt nii:

$$A = \lim_{\Delta s \to 0} \sum P \Delta s \cdot \cos \alpha. \tag{88}$$

Arvutame raskusjõu $\mathfrak{G}$ töö tema rakenduspunkti liikumisel piki mingit kõverat AB (joon. 157), mida loeme lihtsuse mõttes tasapinnaliseks. Alguses arvutame jõu G töö mingis vabalt võetud väikeses tee piirkonnas Δs. See töö võrdub $G\Delta s \cdot \cos \alpha$. Loeme kaare Δs sirglõiguks CD. Siis

$$\Delta s \cdot \cos \alpha = CD \cdot \cos \alpha = \Delta y,$$

kus Δy on punktide C ja D tasapindade vahe ehk jõu $\mathfrak{G}$ rakenduspunkti vertikaalne ümberpaigutumine tema liikumisel piirkonnas CD.



Joon. 157.

Jõu $\mathfrak{G}$ töö kogu teekonna AB pikkusel on võrrandi (88) järgi

$$A = \lim_{\Delta s \to 0} \sum G \Delta s \cos \alpha = \sum G \Delta y = G \sum \Delta y;$$

kuid

$$\sum \Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots = A'B' = h,$$

kus h on jõu $\mathfrak{G}$ rakenduspunkti vertikaalne ümberpaigutumine tema liikumisel punktist A punkti B.

Seepärast saame lõplikult

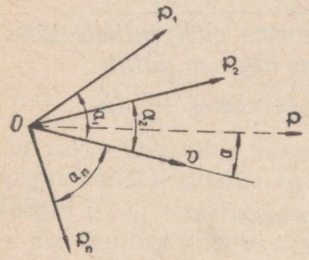
$$A = Gh. \tag{89}$$

Niisiis võrdub raskusjõu töö selle jõu ja tema rakenduspunkti vertikaalse ümberpaigutumistee korrutisega. Vastupidisel liikumisel punktist B punkti A, s. t. tõusul, on raskusjõu töö

$$A = -Gh. \tag{89'}$$

Võrdus (89) näitab, et raskusjõu töö ei olene sellest, kuidas liigub tema rakenduspunkt, s. t. ei olene punkti liikumise trajektoorist, vaid ainult rakenduspunkti alg- ja lõppasendist. Kui näiteks raskusjõu rakenduspunkt liiguks punktist A punkti B piki kõverat AKB, siis selle jõu töö võrduks endiselt Gh-ga.

Jõude, mille töö oleneb ainult rakenduspunktide alg- ja lõppasenditest, nimetatakse konservatiivseteks jõududeks. Peale raskusjõu on sellisteks jõududeks vedru elastsusjõud, kosmiline gravitatsioon jt.



Joon. 158.

Tõestame järgmise teoreemi:

Resultandi töö võrdub komponentide töö summaga.

Olgu punkti O rakendatud n jõudu $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$. Nende resultant olgu $\mathfrak{P}$ (joon. 158).

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n.$$

Projitseerime kõik jõud kiiruse v suunale. Kuna resultandi projektsioon võrdub komponentide projektsioonide summaga, siis

$$P \cos \alpha = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \ldots + P_n \cos \alpha_n.$$

Korrutades selle võrduse tee pikkusega Δs, saame:

$$P\,\Delta s \cos \alpha = P_1\,\Delta s \cos \alpha_1 + P_2\,\Delta s \cos \alpha_2 + \ldots + P_n\,\Delta s \cos \alpha_n.$$

Saadud võrrand tõestab toodud teoreemi töö kohta väikesel tee pikkusel Δs. Siit ei ole raske laiendada teoreemi mistahes tee pikkusele AB tema järjestikuse rakendamise teel igale tee osale $\Delta s_1, \Delta s_2 \ldots$, milleks kogu tee võib jagada.

64. Jõu võimsus.

Tehnikas on tähtis mitte ainult töö, vaid ka selle töö suhe ajavahemikuga, mille jooksul see töö on teostatud. Seoses sellega kasutatakse võimsuse mõistet. Olgu jõu $\mathfrak{P}$ poolt ajavahemikus $\Delta t = t_2 - t_1$ tehtud töö A.

Jõu $\mathfrak{P}$ keskmiseks võimsuseks N_k ajavahemikus $t_2 - t_1$ nimetatakse jõu töö suhet selle ajavahemikuga,

$$N_k = \frac{A}{t_2 - t_1}.$$

Jõu võimsuseks antud momendil nimetatakse piiri, millele läheneb keskmine võimsus, kui ajavahemik $\Delta t = t_2 - t_1$ läheneb nullile,

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} N_k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A}{\Delta t}.$$

Elementaarne töö A ajavahemikus Δt on

$$A = P\,\Delta s \cos \alpha,$$

kus Δs on ajavahemikus Δt käidud tee.

Järelikult

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} P \frac{\Delta s}{\Delta t} \cos \alpha.$$

Kuna

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v,$$

siis

$$N = Pv \cos \alpha. \qquad (90)$$

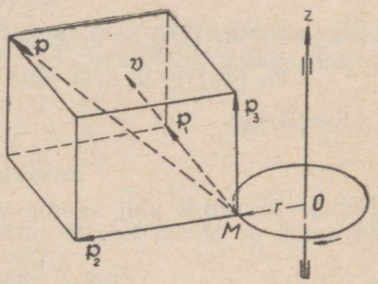
Nii võrdub võimsus antud momendil jõu, tema rakenduspunkti kiiruse ja jõu ning kiiruse suuna vahelise nurga koosinuse korrutisega.

Võimsuse mõõtühiku määrab võrdus $[N] = [P][v]$.

Tehnilises MKS-süsteemis on võimsuse mõõtühikuks kgm/sek. Tehnikas kasutatakse sageli võimsuse ühikut, mille nimeks on hobujõud. Üks hobujõud (HJ) on 75 kgm/sek.

Absoluutses CGS-süsteemis on võimsuse ühikuks gcm^2/sek^3.

Elektrotehnikas kasutatakse võimsusühikut, mida nimetatakse vatiks.



Joon. 159.

1 vatt = 1 džaul/sek = 10^7 erg/sek $\approx$ 0,102 kgm/sek.

1 kilovatt = 1000 vatti (W).

1 kilovatt $\approx$ 102 kgm/sek $\approx$ 1,36 HJ.

1 HJ $\approx$ 0,736 kilovatti.

Näitame, kuidas arvutatakse pöörlevale kehale rakendatud jõu võimsust. Lahutame jõu $\mathfrak{P}$ kolmeks komponendiks (joon. 159):

$\mathfrak{P}_1$ — jõu $\mathfrak{P}$ rakenduspunkti M kiiruse suunas, $\mathfrak{P}_2$ — piki raadiust OM ja $\mathfrak{P}_3$ — paralleelselt pöörlemisteljega. z-telg on suunatud nii, et vaadates telje lõpust, toimub pöörlemine kella osuti liikumise suunas. Jõudu $\mathfrak{P}$ võib vaadelda kui jõudude $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{P}_3$ resultanti.

Samuti nagu resultandi töö võrdub komponentide tööde summaga, ka resultandi võimsus võrdub komponentide võimsuste summaga, s. t.

$$N = N_1 + N_2 + N_3.$$

Kuna jõud $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{P}_3$ on risti kiirusega v, siis nende jõudude ja kiiruse vaheliste nurkade koosinused on nullid. Järelikult võrrandi (90) järgi $N_2 = 0$ ja $N_3 = 0$. Jõud $\mathfrak{P}_1$ moodustab kiirusega nurga, mis on null, selle koosinus on 1 ja seepärast

$$N_1 = P_1 v.$$

Niisiis

$$N = P_1 v.$$

Et aga

$$v = \omega r,$$

siis

$$N = P_1 r \omega. \tag{91}$$

Arvutame nüüd jõu $\mathfrak{P}$ momendi z-telje suhtes. Kuna resultandi moment võrdub komponentide momentide summaga (vt. p. 28), siis saame:

$$m_z(\mathfrak{P}) = m_z(\mathfrak{P}_1) + m_z(\mathfrak{P}_2) + m_z(\mathfrak{P}_3).$$

Kuid

$$m_z(\mathfrak{P}_1) = P_1 r;$$

$m_z(\mathfrak{P}_2) = 0$, sest jõud $\mathfrak{P}_2$ lõikub z-teljega;

$m_z(\mathfrak{P}_3) = 0$, sest jõud P_3 on z-teljega paralleelne.

Seepärast

$$m_z(\mathfrak{P}) = P_1 r;$$

viimase võrrandi abil saame valemi (91) teisel kujul:

$$N = m_z(\mathfrak{P})\omega. \tag{92}$$

Niisiis on pöörlevale kehale rakendatud jõu võimsus võrdne pöörlemistelje suhtes võetud jõu momendi ja nurkkiiruse korrutisega.

Joonisel 159 on toodud juhtum, kus komponent $\mathfrak{P}_1$ on suunatud kiirusega ühele poole. Seepärast jõu $\mathfrak{P}_1$ võimsus ja tema moment z-telje suhtes on positiivsed. Kui jõud $\mathfrak{P}_1$ on suunatud vastupidi kiirusele, siis tema võimsus on negatiivne, sest jõu $\mathfrak{P}_1$ ja kiiruse

vaheline nurk on 180° (cos 180° = — 1); sel juhul aga ka jõu $\mathfrak{P}$ moment z-telje suhtes on negatiivne. Seepärast on valem (92) kasutatav ka sel juhul.

Kasutades valemit (92) võimsuse arvutamiseks, võime saada pöörlevale kehale rakendatud jõu töö väljenduse. Alguses arvutame elementaarse töö keha pöördumisel väikese nurga $\Delta\varphi$ võrra. Selleks korrutame võrrandi (92) mõlemaid pooli väikese ajavahemikuga Δt:

$$N\,\Delta t = m_z(\mathfrak{P})\,\omega\,\Delta t.$$

Et $N\,\Delta t = A'$ on otsitav elementaarne töö ja $\omega\Delta t = \Delta\varphi$, siis

$$A' = m_z\,(\mathfrak{P})\,\Delta\varphi.$$

Siit saame võrduse (88) alusel

$$A = \lim \sum m_z'(\mathfrak{P})\,\Delta\varphi.$$

Kui jõu moment pöörlemistelje suhtes liikumise jooksul ei muutu, siis viimases summas võime jääva suuruse $m_z\,(\mathfrak{P})$ viia sulgude ette:

$$\sum m_z\,(\mathfrak{P})\,\Delta\varphi = m_z(\mathfrak{P})\,\Delta\varphi_1 + m_z(\mathfrak{P})\,\Delta\varphi_2 + \ldots = \\ = m_z(\mathfrak{P})\,[\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \ldots].$$

Summa

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \ldots = \varphi,$$

kus φ on keha pöördenurk.

Seepärast

$$A = m_z\,(\mathfrak{P})\,\varphi. \tag{93}$$

Niisiis jääva momendi $m_z(\mathfrak{P})$ puhul on pöörlevale kehale rakendatud jõu töö võrdne jõu momendiga pöörlemistelje suhtes, korrutatud keha pöördenurgaga.

65. Hoo teoreem.

Masspunkti hooks nimetatakse selle punkti massi ja tema kiiruse ruudu poolt korrutist, s. t. suurust $\frac{1}{2}\,mv^2$.

Hoo mõõtühiku saame võrdusest

$$\left[\frac{mv^2}{2}\right] = [m]\,[v^2] = [m]\,\frac{[l^2]}{[t^2]}.$$

Et

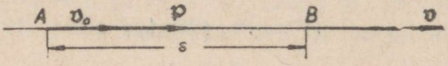
$$[m] = \frac{[P]}{[a]} = \frac{[P]\,[t]}{[l]},$$

siis saame

$$\left[\frac{mv^2}{2}\right] = [P][l].$$

Kuid $[P][l]$ on töö mõõtühik. Seepärast jõuame järeldusele, et hool ja tööl on sama mõõtühik. Ühikute tehnilises MKS-süsteemis mõõdetakse hoogu kilogramm-meetrites (kgm).

Hoo ja töö vahel on seos, mida väljendab hoo teoreem. Alguses tõestame selle teoreemi erandjuhu jaoks, kus masspunkt liigub sirgjooneliselt jääva suurusega jõu $\mathfrak{P}$ toimel, mis on suunatud piki sama sirget (joon. 160).



Joon. 160.

Dünaamika põhivõrrandi järgi

$$ma = P. \tag{94}$$

Jääva suurusega jõu $\mathfrak{P}$ puhul on punkti kiirendus samuti jääv, järelikult liigub punkt ühtlaselt kiirendatuna. Seepärast saame kasutada võrrandeid (43) ja (44):

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \tag{95}$$

$$v = v_0 + at, \tag{96}$$

kus v_0 on punkti algkiirus momendil $t = 0$, kui ta asub punktis A; v on sama punkti kiirus momendil t, kui ta asub punktis B ja s on tee AB.

Võrrandist (96) saame

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

ja asetades selle võrrandisse (95), saame

$$s = t\left(v_0 + \frac{at}{2}\right) = \frac{v - v_0}{a}\left(v_0 + \frac{v - v_0}{2}\right) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a},$$

kust

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}.$$

Saadud kiirenduse avaldise asetamisel võrrandisse (94) saame

$$\frac{1}{s}\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}\right) = P$$

või

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Ps. \tag{97}$$

Et aga

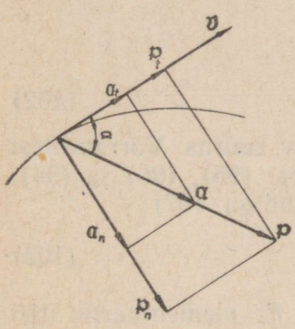
$$Ps = A,$$

siis

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \tag{98}$$

Viimane võrrand väljendabki hoo teoreemi antud erandjuhu jaoks. Selles võrrandis on $\frac{mv^2}{2}$ masspunkti hoog punktis B, $\frac{mv_0^2}{2}$ on tema alghoog. Vahe $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ on hoo juurdekasv teel A ja B vahel. Seepärast võib võrrandiga (98) väljendatud hoo teoreemi sõnastada järgmiselt:

Masspunkti hoo juurdekasv teatud tee pikkusel võrdub sellele punktile mõjuva jõu tööga sama tee pikkusel.



Joon. 161.

Vaatleme masspunkti kõverjoonelist liikumist.

Lahutame jõu $\mathfrak{P}$ (joon. 161) kaheks komponendiks: $\mathfrak{P}_t$ — suunatud puutujat mööda ja $\mathfrak{P}_n$ — suunatud normaali mööda. See jõu lahutamine vastab punkti kiirenduse a lahutamisele tangentsiaalseks kiirenduseks a_t ja normaalkiirenduseks a_n, sest kiirendus on suunatud samuti nagu jõud ja on sellega võrdeline. Dünaamika põhivõrrandist

$$m\mathfrak{a} = \mathfrak{P}$$

järgneb, et

$$ma_t = P_t, \quad ma_n = P_n.$$

Võrrandite (51) ja (52) alusel

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Seepärast

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = P_t, \tag{99}$$

$$m \cdot \frac{v^2}{\varrho} = P_n. \tag{100}$$

Jõu $\mathfrak{P}$ elementaarne töö teel Δs on võrrandi (87) järgi

$$A = P \cos \alpha \cdot \Delta s.$$

Jooniselt 161 nähtub, et

$$P \cos \alpha = P_t.$$

Seepärast

$$A = P_t \Delta s. \tag{101}$$

Pärast neid arutlusi tõestame hoo teoreemi punkti ühtlaselt muutuva kõverjoonelise liikumise kohta. Punkti tee s ja kiiruse v võrrandid olid toodud p-s 46 [v.(43′) ja (44′)]:

$$s = v_0 t + \frac{a_1 t^2}{2},$$

$$v = v_0 + a_1 t.$$

Nagu p-s 46 on näidatud, ei ole suurus a_1 nendes võrrandites punkti täielik kiirendus. See suurus on võrdne tangentsiaalse kiirendusega:

$$a_1 = a_t = \frac{dv}{dt}.$$

Võrdus (99) annab

$$ma_1 = P_t \tag{102}$$

ja kuna a_1 on jääv suurus, siis ka P_t on jääv suurus. Võrranditest (43′), (44′) ja (102), nagu varem võrranditest (95), (96) ja (94), saame võrrandi, mis on analoogiline võrrandiga (97):

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = P_t s. \tag{103}$$

Avaldis $P_t s$ on jõu töö teel s. Jõu P_t elementaarne töö on tegelikult võrrandi (101) järgi $P_t \Delta s$.

Kasutades võrrandit (88), saame:

$$A = \lim \sum P_t \Delta s.$$

Et P_t on jääv suurus, siis

$$\sum P_t \Delta s = P_t(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots),$$

kus Δs_1, Δs_2, ... on tee väikesed osad, millede summa võrdub kogu tee pikkusega s. Niisiis

$$A = \lim \sum P_t \Delta s = P_t s.$$

Järelikult saab võrrand (103) kuju

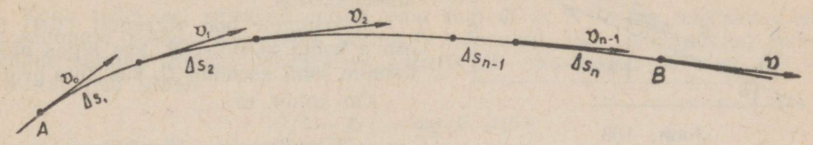
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A,$$

mis tõestab eespool väljendatud hoo teoreemi ühtlaselt muutuva kõverjoonelise liikumise kohta.

Vaatleme kõverjoonelise liikumise üldjuhtu. Jagame tee s A-st

B-sse suureks arvuks n väikesteks osadeks Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n (joon. 162). Tähistame: punkti kiirus asendis A — v_0, esimese teeosa lõpus — v_1, teise teeosa lõpus — v_2, eelviimase teeosa lõpus — v_{n-1} ja viimase teeosa lõpus (asendis B) — v.

Oletame, et igal teeosal on ühtlaselt muutuv liikumine, s. t. tangentsiaaljõud P_t on jääv. Rakendades hoo teoreemi igale nimetatud teeosale ja tähistades jõu tööd teeosadel Δs_1, Δs_2, ..., Δs_{n-1}, Δs_n tähtedega A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, saame n võrrandit:



Joon. 162.

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_1;$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_2;$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{mv_{n-1}^2}{2} - \frac{mv_{n-2}^2}{2} = A_{n-1};$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_{n-1}^2}{2} = A_n.$$

Liites need võrrandid, saame:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Kui kõik tee osad Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n lähenevad oma pikkuselt nullile, siis summa $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ piir on p. 63 põhjal võrdne jõu $\mathfrak{P}$ tööga A teel AB ja

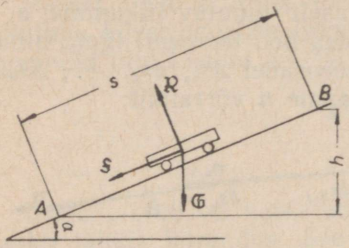
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \qquad (104)$$

Nii on hoo teoreem tõestatud masspunkti mistahes liikumise puhul.

Senini oletasime, et masspunktile mõjub ainult üks jõud $\mathfrak{P}$. Kui sellele punktile mõjub aga mitu jõudu, siis tuleb p. 60 lõpus öeldu põhjal dünaamika põhivõrrandis jõu $\mathfrak{P}$ all mõista nende jõudude resultanti. Järelikult võrrandis (104) on A resultandi tööks, mis, nagu me p. 63 lõpul tõestasime, on võrdne komponentide tööde summaga. Seepärast võime hoo teoreemi väljendada järgmiselt:

Masspunkti hoo juurdekasv antud tee ulatuses võrdub sellele punktile mõjuvate jõudude tööde summaga samal teel.

Ülesanne 40. Missugusel tee pikkusel saab peatada autot, mis liigub kiirusega 36 km/tunnis vastu mäge, kui pidurdamistakistuseks lugeda 0,3 auto raskusest ja tee tõus on 8°? Kõiki teisi takistusi ei tule võtta arvesse (joon. 163).



Joon. 163.

Autole, mida vaatleme masspunktina, mõjuvad järgmised jõud: $\mathfrak{G}$ — auto kaal, $\mathfrak{R}$ — tee normaalreaktsioon ja $\mathfrak{F}$ — pidurdamistakistus.

Rakendame hoo võrrandit (104) teeosa s kohta asendist A, kus algas pidurdamine, kuni asendini B, kus auto peatub.

On antud, et

$$v_0 = 36 \text{ km/tunnis} = 10 \text{ m/sek} \quad \text{ja} \quad v = 0.$$

Raskusjõu töö on võrrandi (89′) alusel:

$$-Gh = mgs \sin \alpha.$$

Pidurdamisjõu töö:

$$-F \cdot s = -0{,}3G \cdot s = -0{,}3mgs.$$

Reaktsiooni $\mathfrak{R}$ töö on null, sest see jõud on risti kiirusega. Kõikide jõudude tööde summa on

$$A = -mgs(\sin \alpha + 0{,}3).$$

Võrrandi (104) järgi

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = -mgs(\sin \alpha + 0{,}3),$$

kust saame

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + 0{,}3)} = \frac{10^2}{2 \cdot 9{,}81(0{,}14 + 0{,}3)} \approx 11{,}6 \text{ m}.$$

Ülesanne 41. Missuguselt kõrguselt h tuleb lasta liikuma mittetöötava mootoriga auto, mille algkiirus on null, selleks, et ta läbiks end teelt lahti rebimata teekonna *ABCDBE*, kui sõlm *BCDB* on ringjooneline rõngas raadiusega r (joon. 164). Hõõrdumist ei tule arvestada.

Ohtlikum asend teelt lahtirebimise mõttes on sõlme ülemine asend D. Punktis D mõjuvad autole, mida vaatleme masspunktina, järgmised jõud: $\mathfrak{G}$ — auto kaal, $\mathfrak{R}$ — tee reaktsioon, mis on suunatud radiaalselt rõnga tsentrisse, s. t. samas suunas nagu $\mathfrak{G}$. Rakendades võrrandit (100), leiame:

$$\frac{mv^2}{r} = G + R,$$

kust

$$R = \frac{mv^2}{r} - G.$$

Et $R \geqslant 0$, siis peab olema

$$\frac{mv^2}{r} \geqslant G.$$

Et $G = mg$, siis viimane võrratus võtab kuju

$$\frac{mv^2}{r} \geqslant mg,$$

kust saame, et

$$v^2 \geqslant rg. \qquad \text{(a)}$$

Selline on tingimus, mille juures auto ei rebi end tee küljest lahti. Selles võrratuses v on auto kiirus punktis D. Selle kiiruse leidmiseks kasutame hoo teoreemi teekonna kohta A-st kuni D-ni.

Kogu sellel teel mõjuvad autole tema kaal $\mathfrak{G}$ ja $\mathfrak{R}$ — tee reaktsioon, mis on suunatud mööda trajektoori normaali. Joonisel 164 on kujutatud nende jõudude suunad mingis vahepealses punktis M. Raskusjõu töö teel AD on võrrandi (89) alusel

$$G(h - 2r) = mg(h - 2r).$$

Jõu $\mathfrak{R}$ töö on null, sest jõud $\mathfrak{R}$ on risti kiirusega. Et ülesande kohaselt algkiirus v_0 on null, siis hoo võrrandi järgi

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h - 2r),$$

kust saame

$$v^2 = 2g(h - 2r).$$

Saadud v^2 väärtuse asetamisel võrratusse (a) saame:

$$2g(h - 2r) \geqslant rg$$

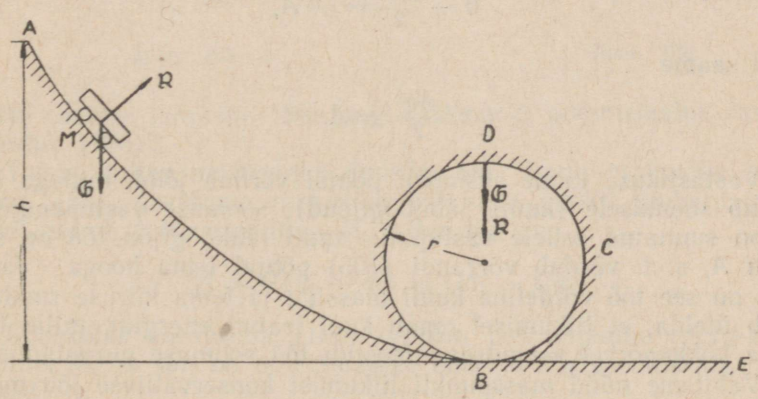
ehk

$$2h - 4r \geqslant r,$$

millest

$$h \geqslant 2{,}5r.$$

Võib näida imelikuna, et auto ei kuku punktis D alla, kuigi nii auto kaal $\mathfrak{G}$ kui ka tee reaktsioon $\mathfrak{R}$ on suunatud vertikaalselt alla. Autol on punktis D



Joon. 164.

kiirus $\mathfrak{v}$, mis on suunatud horisontaalselt. Jõud $\mathfrak{G}$ ja $\mathfrak{R}$ muudavad kiiruse suunda, see muutmine aga toimub pidevalt. Oletus, et auto jõudude $\mathfrak{G}$ ja $\mathfrak{R}$ mõjul peab alla kukkuma, tekib kujutlusest, mis peaks paika siis, kui auto

seisaks punktis D. Liikumise uurimisel tuleb rakendada ka liikumise seadusi. Nende seaduste kohaselt selleks, et auto võiks liikuda sõlme ringjoont mööda kiirusega v, tuleb talle anda kiirendus $\frac{v^2}{r}$, mis on suunatud mööda ringi raadiust, s. t. punktis D otse alla. Niisiis ei saaks auto vertikaalselt alla suunatud jõudude olemasoluta liikuda ringjoonel. Peale selle peavad need jõud olema kindla suurusega, kusjuures nad peavad olema seda suuremad, mida suurem on auto kiirus, nagu see nähtub võrrandist

$$\frac{mv^2}{r} = G + R.$$

Sellest võrrandist järeldub samuti, et avaldis $\frac{mv^2}{r}$ peab olema suurem kui auto kaal G selleks, et auto saaks liikuda ringjoonel. Mida suurem on auto kiirus, seda suurem on ka tee reaktsioon R, mille olemasolu on tagatiseks, et auto puudutab teed. Need kaalutlused ongi ülesande lahenduse leidmise aluseks.

66. Mehaanilise energia jäävuse seadus.

Liikumisel omab iga masspunkt teatud energiat, mida nimetatakse kineetiliseks energiaks. Kineetilise energia mõõduks võib olla hoog.

Selgitame seda näitega. Soomust läbistav kuul läbistab auto soomuse. Tema kiirust löögi momendil tähistame v-ga. Kuuli kiirus peatumise momendil on null. Seega siis kuuli hoog väheneb $\frac{mv^2}{2}$-st nullini. See vähenemine toimub takistusjõu töö tõttu, mida avaldab kuulile soomus. Tähistades seda negatiivset tööd $-A$-ga, võime hoo teoreemi alusel kirjutada, et

$$0 - \frac{mv^2}{2} = -A,$$

kust saame

$$\frac{mv^2}{2} = A. \qquad (105)$$

Vastastikuse toime aksioomi põhjal võrdub jõud, millega kuul mõjub soomusele (kuuli läbilöögijõud), soomuse vastupanujõuga ja on suunatud sellele vastupidi; kuuli läbilöögijõu töö on selle tõttu A, s. t. võrdub võrrandi (105) põhjal tema hooga. Järelikult on see töö võrdeline kuuli massiga ja tema kiiruse ruuduga. Võib ütelda, et liikumisel omab kuul teatud energiat, mille tõttu tema kokkupõrkel soomusega teostub töö soomuse purustamiseks.

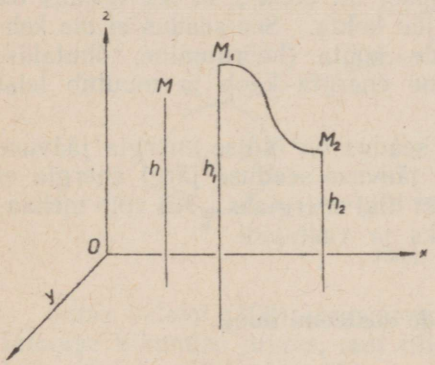
Vaatleme nüüd masspunkti liikumist konservatiivse jõu mõjul, s. t. sellise jõu mõjul, mille töö oleneb ainult masspunkti alg- ja lõppasendist (vt. p. 63).

Käsitleme selleks raskusjõudu. Saadud tulemusi on võimalik laiendada igasuguse konservatiivse jõu kohta. Liikugu masspunkt

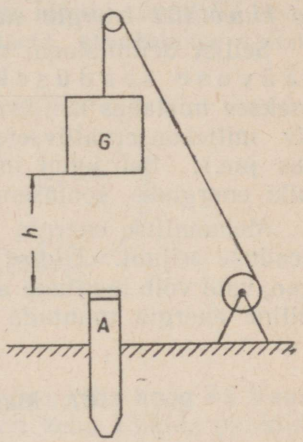
kaaluga G ainult raskusjõu mõjul. Vabalt valitud horisontaalset tasapinda xy (joon. 165) nimetame põhitasapinnaks. Selle tasapinna võib võtta näiteks maapinnal. z-telje juhime vertikaalselt üles. Raskusjõu töö punkti liikumisel mingist asendist M, mille koordinaat $z = h$, põhitasapinnale on võrrandi (89) alusel Gh. Seda tööd nimetatakse masspunkti potentsiaalseks energiaks asendis M ja ta väljendub võrdusega

$$E_p = Gh. \tag{106}$$

Selgitame seda näitega (joon. 166). Raskus G (rammvasar), langedes kõrguselt h lööb maasse vaia A, teostades seejuures teatud tööd. See töö on seda suurem, mida suurem on langeva raskuse kaal G ja langemise kõrgus h. Nii omab raskus kaaluga G kõrgusel h teatud energiatagavara, mida saab kasutada,



Joon. 165.



Joon. 166.

lastes raskust langeda. See ongi raskuse G potentsiaalne energia [võrdus (106)].

Tagasi tulles masspunkti juurde, mis liigub raskusjõu mõjul (joon. 165), arvutame raskusjõu töö selle punkti ümberpaigutumisel asendist M_1 asendisse M_2. See töö on

$$A = G(h_1 - h_2) = Gh_1 - Gh_2.$$

Kooskõlas võrdusega (106) on Gh_1 potentsiaalne energia E_{p1} asendis M_1 ja Gh_2 on potentsiaalne energia E_{p2} asendis M_2. Seepärast

$$A = E_{p1} - E_{p2}.$$

Niisiis on raskusjõu töö võrdne potentsiaalse energia vähenemisega.

Rakendades hoo teoreemi vaadeldava masspunkti kohta teekonnal M_1M_2, saame

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{p1} - E_{p2}$$

või

$$\frac{mv_1^2}{2} + E_{p1} = \frac{mv_2^2}{2} + E_{p2}. \qquad (107)$$

Võrduse (107) vasakpoolne osa on kineetilise ja potentsiaalse energia summa punktis M_1. Parempoolne osa võrdub kineetilise ja potentsiaalse energia summaga punktis M_2. Kuna punktid M_1 ja M_2 on võetud vabalt, siis jõuame järeldusele:

Masspunkti liikumisel ainult raskusjõu mõjul on potentsiaalse ja kineetilise energia summa jääv suurus.

Sellist definitsiooni nimetatakse mehaanilise energia jäävuse seaduseks. Eespool oli öeldud, et see seadus on maksev mistahes konservatiivse jõu kohta. See seadus ei ole kehtiv mittekonservatiivsete jõudude kohta (hõõrdumine, õhutakistus jne.). Sel juhul mehaaniline energia kaob ja muutub teist liiki energiaks, soojusenergiaks.

Mehaanilise energia jäävuse seadus on üldise energia jäävuse seaduse erijuht. Üldise energia jäävuse seaduse järgi energia ei kao, vaid võib muutuda ainult teist liiki energiaks. Nii võib mehaaniline energia muutuda soojuseks ja vastupidi.

67. Masspunktide süsteemi hoog.

Igasugust masspunktide kogumikku nimetatakse masspunktide süsteemiks. Kõva keha on selline masspunktide süsteem, kus mistahes kahe punkti vaheline kaugus ei muutu.

Masspunktide süsteemi hooks T nimetatakse kõikide süsteemi moodustavate masspunktide hoogude summat:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \ldots \qquad (108)$$

Seda summat kirjutatakse sümboolselt järgmiselt:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2.$$

Vaatleme, kuidas arvutatakse süsteemi hoogu lihtsamatel juhtudel.

1. Süsteem liigub nii, et kõikide punktide kiiruste moodulid on

omavahel võrdsed, s. t. $v_1 = v_2 = \ldots = v_n$. Asetades võrdusesse (108) kõikide v_k asemele nende ühise väärtuse v ja viies sulgude ette $\frac{1}{2}v^2$, saame

$$T = \frac{1}{2}v^2(m_1 + m_2 + \ldots).$$

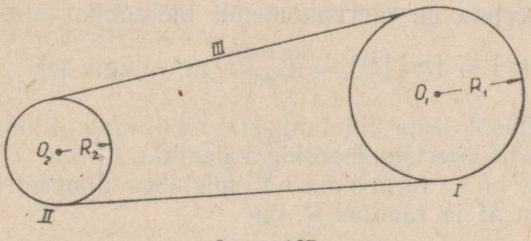
Summa $m_1 + m_2 + \ldots$ on kõikide punktide masside summa. Teda nimetatakse süsteemi massiks ja tähistatakse tähega M.

$$M = m_1 + m_2 + \ldots$$

Meie juhul saame seega

$$T = \frac{1}{2}Mv^2. \qquad (109)$$

Rihmarattaid *I* ja *II* (joon. 167) haarava lõputu rihma *III* hoog, kui rihm liigub kiirusega v ilma libisemiseta, arvutatakse valemi (109) järgi.



Joon. 167.

Sama valemi (109) järgi arvutatakse kõva keha hoog ka translatoorse liikumise juures, sest liikumisel on keha kõikide punktide kiirused omavahel võrdsed.

2. Kõva keha pöörleb liikumatu telje ümber.

Tähistades keha nurkkiirust ω-ga ja keha punktide kaugust pöörlemisteljest $r_1, r_2, \ldots$, võime punktide kiirusi $v_1, v_2, \ldots$ väljendada valemi (58) põhjal järgmiselt:

$$v_1 = \omega r_1;$$
$$v_2 = \omega r_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Asetades need $v_1, v_2, \ldots$ väärtused valemisse (108) ja viies $\frac{1}{2}\omega^2$ sulgude ette, saame:

$$T = \frac{1}{2}\omega^2(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots).$$

Korrutist mr^2 (masspunkti mass, korrutatud selle punkti kauguse ruuduga pöörlemisteljest) nimetatakse masspunkti i n e r t s -

momendiks telje suhtes. Kõikide keha punktide inertsmomentide summat nimetatakse **keha inertsmomendiks telje suhtes**. Tähistades keha inertsmomenti pöörlemistelje suhtes tähega J, saame

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots = \sum m_k r_k^2 \qquad (110)$$

ja

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2. \qquad (111)$$

Niisiis, *kõva keha hoog pöörleval liikumisel on võrdne pöörlemistelje suhtes võetud keha inertsmomendi ja nurkkiiruse ruudu poole korrutisega.*

Inertsmomendi mõõtühiku nimetuse saame kindlaks määrata valemiga

$$[J] = [m]\,[l^2].$$

CGS-süsteemis on $[J] = \text{gcm}^2$.

MKS-süsteemis on inertsmomendi mõõtühiku nimetuseks

$$[J] = [m]\,[l^2] = \frac{\text{kg sek}^2}{\text{m}} \cdot \text{m}^2 = \text{kgm sek}^2.$$

Toome allpool ilma tuletamiseta mõningate lihtsamate homogeensete kehade inertsmomentide valemid.

1. **Kera inertsmoment** mistahes diameetri suhtes, kui tema mass on M ja raadius R, on

$$J = \frac{2}{5} MR^2.$$

2. **Silindri inertsmoment** tema telje suhtes, kui tema mass on M ja raadius R, on

$$J = \frac{1}{2} MR^2.$$

3. **Varda inertsmoment** teda ühest otsast perpendikulaarselt läbiva telje suhtes, kui varras on väga väikese läbimõõduga (varda pikkus on l ja mass M), on

$$J = \frac{1}{3} Ml^2.$$

Mitteühtlaste või keeruka kujuga kehade inertsmomendid leitakse katselisel teel.

Ülesanne 42. Arvutada kahest rihmaga ühendatud rihmarattast (raadiused R_1 ja R_2) koosneva süsteemi hoog (joon. 167). Rihmarataste inertsmomendid nende pöörlemistelgede O_1 ja O_2 suhtes on vastavalt J_1 ja J_2. Rihmaratta I nurkkiirus on ω_1. Rihma kaal on G.

Selle süsteemi hoog T võrdub rihmaratta I hoo T_1, rihmaratta II hoo T_2 ja rihma hoo T_3 summaga, s. o.

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Rihmarataste hoo arvutame valemi (111) põhjal:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2,$$

kus ω_2 on rihmaratta *II* nurkkiirus, mis on seotud rihmaratta *I* nurkkiirusega ω_1 võrduse

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

kaudu; siit

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{R_1}{R_2}.$$

Rihma hoog arvutatakse valemi (109) põhjal, sest tema kõikide punktide kiirused on omavahel võrdsed:

$$T_3 = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} v^2,$$

kusjuures libisemise puudumisel

$$v = \omega_1 R_1.$$

Seega

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \frac{R_1^2}{R_2^2} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} \omega_1^2 R_1^2$$

ehk

$$T = \frac{1}{2} \omega_1^2 \left(J_1 + J_2 \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{G}{g} R_1^2 \right).$$

68. Hoo teoreem masspunktide süsteemile.

Rakendame hoo teoreemi süsteemi igale masspunktile. Punktile järjekorranumbriga k vastava hoo võrrandi võime kirjutada järgmiselt:

$$\frac{1}{2} m_k v_k^2 - \frac{1}{2} m_k v_{k0}^2 = A_k, \qquad (112)$$

kus v_{k0} on punkti kiirus esimeses asendis;
v_k — sama punkti kiirus teises asendis;
A_k — sellesse punkti rakendatud kõikide jõudude töö summa masspunkti liikumisel esimesest asendist teise.

Liites võrrandid (112), mis on kirjutatud süsteemi kõikide punktide jaoks, saame:

$$\frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 - \frac{1}{2} \sum m_k v_{k0}^2 = \sum A_k. \qquad (113)$$

Siin

$\frac{1}{2}\sum m_k v_{k0}^2 = T_0$ on süsteemi hoog esimeses asendis;

$\frac{1}{2}\sum m_k v_k^2 = T$ — süsteemi hoog teises asendis;

$\sum A_k = A$ — süsteemi punktidesse rakendatud kõikide jõudude tööde summa.

Seepärast võime võrrandi (113) kirjutada järgmiselt:

$$T - T_0 = A. \qquad (114)$$

Viimane võrrand väljendab hoo teoreemi masspunktide süsteemi kohta. Arvesse võttes, et vahe $T - T_0$ on süsteemi hoo juurdekasv süsteemi ühest asendist teise ümberpaigutumisel, võime hoo teoreemi sõnastada järgmiselt:

Masspunktide hoo juurdekasv tema paigutumisel ühest asendist teise võrdub süsteemi punktidesse rakendatud kõikide jõudude tööde summaga.

Süsteemi punktidesse rakendatud jõudude tööde arvutamisel on tarvis silmas pidada järgmist:

1. Mingisse punkti rakendatud jõudude hulgas on ka süsteemi teiste punktide poolt sellesse punkti mõjuvad jõud. Neid jõude ei tunta ja nende tööd ei ole meil alati võimalik välja arvutada. Neid jõude nimetatakse s i s e j õ u d u d e k s.

Vastastikuse mõju aksioomi järgi on need jõud paarikaupa võrdsed ja vastupidi suunatud. Kui kaugused süsteemi üksikute punktide vahel ei muutu (kõva keha), siis sisejõudude tööde summa on võrdne nulliga.

2. Toereaktsioonide tööde summa hõõrdumise puudumisel on samuti null. Me nägime seda juhtudel, kui punkt liikus siledal pinnal. Sel juhul on reaktsioon risti kiirusega ja tema töö on null (vt. näiteks ülesannet 41).

Ülesanne 43. Hooratta paneb liikuma tasakaalu olekust pöördemoment $M = 50$ kgm. Mitme pöörde järel omandab ratas nurkkiiruse 120 pööret/min., kui tema inertsmoment on 1000 kgcmsek² ja hõõrdumist ei arvesta? Pöördemomendi all mõistame kõikide pöörlevale kehale rakendatud jõudude momentide summat pöörlemistelje suhtes.

Rakendame hooratta suhtes hoo teoreemi. Algmomendil on hooratas paigal ja tema hoog on null, s. t. $T_0 = 0$. Momendil, kui tema nurkkiirus on 120 pööret/min., on hooratta hoog vastavalt valemile (111)

$$T = \frac{1}{2} J\omega^2.$$

Hoorattale rakendatud jõudude töö arvutame valemi (93) alusel

$$A = M\varphi,$$

kus φ on radiaanides väljendatud nurk, mille võrra hooratas pöördub vaadeldava aja jooksul.

Hoo võrrand (114) annab

$$\frac{1}{2} J\omega^2 = M\varphi \qquad \text{(a)}$$

Lahendame ülesande MKS-süsteemis:

$$J = 1000 \text{ kgcmsek}^2 = 10 \text{ kgmsek}^2;$$

$$\omega = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 4\pi \frac{1}{\text{sek}};$$

$$M = 50 \text{ kgm}; \quad \varphi = 2\pi n,$$

kus n on otsitav pöörete arv.

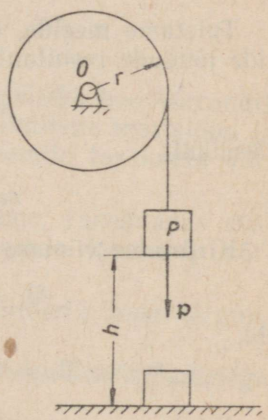
Asetame kõik need andmed võrrandisse (a):

$$10 \cdot \frac{16\pi^2}{2} = 50 \cdot 2\pi n,$$

kust saame

$$n = \frac{10 \cdot 16 \cdot \pi^2}{2 \cdot 50 \cdot 2\pi} \approx 2{,}5 \text{ pööret.}$$

Ülesanne 44. Plokile, mille raadius on r ja kaal Q ja mis pöörleb telje O ümber (joon. 168), on keritud tross, mille otsa on kinnitatud viht kaaluga P kg. Alguses on süsteem tasakaalu olekus. Leida ploki nurkkiirus momendil, kui viht on langenud kõrguse h ulatuses. Plokki tuleb vaadelda kui homogeenset silindrit. Hõõrdumist ei tule arvestada.



Joon. 168.

Rakendame hoo teoreemi süsteemile, mis koosneb plokist ja vihist. Algmomendil on süsteemi hoog null, s. t. $T_0 = 0$.

Momendil, kui viht on langenud kõrguse h võrra, on süsteemi hoog

$$T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2, \qquad \text{(a)}$$

kus $\frac{1}{2} mv^2$ on vihi hoog ja $\frac{1}{2} J\omega^2$ ploki hoog.

Kuna vihi kiirus võrdub ploki ringkiirusega, siis $v = \omega r$.

Ploki inertsmoment on, lugedes plokki homogeenseks silindriks:

$$J = \frac{1}{2} Mr^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} r^2.$$

Vihi mass $m = \frac{P}{g}$.

Asetades need väärtused võrrandisse (a), saame

$$T = \omega^2 \frac{r^2}{4g} (2P + Q).$$

Tööde summa võrdub vihi kaalu tööga, s. t.

$$A = Ph.$$

Hoo teoreemi põhjal saame

$$\omega^2 \frac{r^2}{4g}(2P + Q) = Ph,$$

kust edasi

$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{gh\frac{P}{2P+Q}}.$$

XVII peatükk.

D'Alembert'i lause.

69. D'Alembert'i lause tuletamine.

D'Alembert'i lause annab võtte, mille abil iga dünaamika ülesanne taandub vastavaks staatika ülesandeks.

D'Alembert'i lause tuletamiseks lähtume masspunkti dünaamika põhivõrrandist

$$m\mathfrak{a} = \mathfrak{P}.$$

Tuletame meelde, et $\mathfrak{P}$ on vaadeldavasse punkti mõjuvate kõikide jõudude resultant, s. t.

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n.$$

Järelikult

$$m\mathfrak{a} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n. \tag{115}$$

Kirjutame viimase võrrandi järgmiselt:

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n - m\mathfrak{a} = 0$$

ehk

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n + (-m\mathfrak{a}) = 0. \tag{116}$$

Nimetame inertsjõuks vektorit, mille moodul võrdub punkti massi ja kiirenduse korrutisega ja mis on suunatud vastupidi kiirendusele.

Kui tähistada inertsjõudu tähega $\mathfrak{J}$, siis võime toodud definitsiooni väljendada valemiga $\mathfrak{J} = -m\mathfrak{a}$. Vektori $m\mathfrak{a}$ ees olev miinus tähendab seda, et vektorid $\mathfrak{J}$ ja $\mathfrak{a}$ on suunatud vastupidi (joon. 169). Inertsjõu moodul (suurus) on $J = ma$.

Siis võib võrrandi (116) kirjutada järgmiselt:

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n + \mathfrak{J} = 0. \tag{117}$$

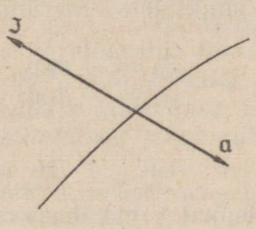
Viimast võrrandit võib vaadelda kui tasakaalu võrrandit [vt. võrrand (6)] jõudude süsteemi $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{J}$ kohta. See võr-

rand väljendab ka d'Alembert'i lauset, mille võime sõnastada järgmiselt:

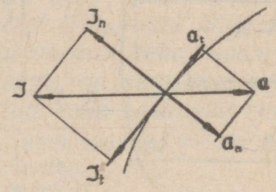
Koos inertsjõuga masspunktile mõjuvad jõud moodustavad tasakaalustatud jõudude süsteemi.

Tuleb alla kriipsutada, et inertsjõud ei ole faktiliselt masspunkti rakendatud reaalne jõud. Masspunktile reaalselt mõjuvad jõud on $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$. Inertsjõud on fiktiivne jõud, mille ülesandeks on anda dünaamika võrrandile (115) tasakaalu võrrandi (117) kuju ja sellega taandada dünaamika ülesanne staatika ülesandeks.

Niisiis võib dünaamika ülesande lahendamisel: 1) kas käsitleda masspunktisse reaalselt mõjuvaid jõude ja kirjutada dünaamika



Joon. 169.



Joon. 170.

põhivõrrand ja temast tuletuvad võrrandid (näiteks hoo võrrandi) või 2) lisada reaalselt mõjuvatele jõududele fiktiivne inertsjõud ja kirjutada jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{J}$ süsteemile tasakaalu võrrandid.

Minnes üle masspunktide süsteemile, võime, rakendades süsteemi kõikidesse punktidesse inertsjõud, kasutada tasakaalu võrrandeid.

Masspunktide süsteemi kohta kõlaks d'Alembert'i lause järgmiselt:

Masspunktidele faktiliselt mõjuvad jõud koos inertsjõududega rahuldavad kõiki tasakaalu tingimusi.

Lahutame inertsjõu kaheks komponendiks: trajektoori puutujat mööda mõjuvaks jõuks $\mathfrak{J}_t$ ja normaali mööda mõjuvaks jõuks $\mathfrak{J}_n$. See lahutamine on kujutatud joonisel 170.

Samaaegselt lahutame punkti kiirenduse tangentsiaalseks ja normaalseks komponendiks. Kuna

$$J = ma,$$

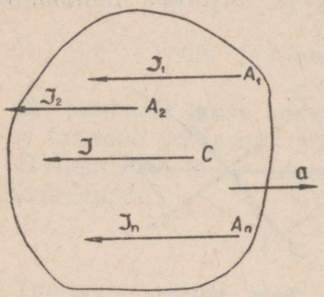
siis

$$\left.\begin{aligned} J_t &= ma_t = m\frac{dv}{dt}; \\ J_n &= ma_n = m\frac{v^2}{\varrho}. \end{aligned}\right\} \qquad (118)$$

Vektorit $\mathfrak{J}_t$ (inertsjõu tangentsiaalkomponent) nimetatakse tangentsiaalseks inertsjõuks. Vektorit $\mathfrak{J}_n$ (inertsjõu normaalkomponent) nimetatakse normaalseks või tsentrifugaalseks inertsjõuks.

70. Inertsjõud kõva keha translatoorsel liikumisel.

Translatoorsel liikumisel on kõikide punktide kiirendused võrdsed, paralleelsed ja ühele poole suunatud (vt. p. 47).



Joon. 171.

Tähistame keha punktide kiirendused tähega a ja rakendame keha kõikidele punktidele inertsjõud (joon. 171).

$$\mathfrak{J}_1 = -m_1 a;$$
$$\mathfrak{J}_2 = -m_2 a;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{J}_n = -m_n a.$$

Inertsjõud moodustavad ühele poole suunatud paralleelsete jõudude süsteemi, mille resultantjõu moodul on

$$J = J_1 + J_2 + \ldots + J_n = m_1 a + m_2 a + \ldots + m_n a = \\ = a(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) = Ma,$$

kus $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ on keha mass. Niisiis

$$J = Ma.$$

Selle resultandi rakenduspunktiks võime võtta paralleelsete jõudude $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_n$ tsentri. Selle tsentri koordinaadid leiame valemi (29) abil.

$$x_C = \frac{J_1 x_1 + J_2 x_2 + \ldots + J_n x_n}{J} = \frac{a(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n)}{Ma} = \\ = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{M}.$$

Pärast lugeja ja nimetaja korrutamist raskusjõu kiirendusega g ja arvesse võttes seda, et

$$m_1 g = G_1;$$
$$m_2 g = G_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$m_n g = G_n;$$
$$Mg = G$$

(kus G_1 on punkti A_1 kaal jne.), saame:

$$x_C = \frac{G_1x_1 + G_2x_2 + \ldots + G_nx_n}{G}.$$

Analoogiliselt saame

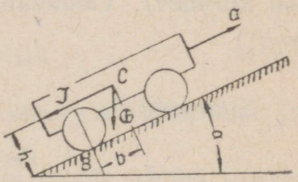
$$y_C = \frac{G_1y_1 + G_2y_2 + \ldots + G_ny_n}{G};$$

$$z_C = \frac{G_1z_1 + G_2z_2 + \ldots + G_nz_n}{G}.$$

Saadud valemid on samad, mis valemid (30), mis määravad keha raskuskeskme koordinaate. Niisiis langeb paralleelsete inertsjõudude $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_n$ tsenter ühte keha raskuskeskmega C.

Jõuame järelduseni: *translatoorsel liikumisel kõva keha inertsjõududel on resultant, mille suurus võrdub keha massi ja translatoorse liikumise kiirenduse korrutisega, on suunatud sellele kiirendusele vastupidiselt ja on rakendatud keha raskuskeskmesse.*

Ülesanne 45. Auto, mille kaal on G, liigub kaldteed mööda üles, kusjuures tee kaldenurk horisondi suhtes on α. Missugusele tingimusele peab vastama auto kiirendus a, et auto ei kummuks (joon. 172)?



Joon. 172.

Ülesande lahendamisel ei võta me lihtsustuse mõttes arvesse auto detailide liikumist tema kere suhtes (õõtsumine vedrudel, rataste veeremine jne.). Neil tingimustel võib auto liikumist vaadelda translatoorsena. Eespool väljendatud lause alusel on auto punktide inertsjõududel resultant $\mathfrak{J}$, mille moodul $J = Ma$. See resultant on suunatud vastupidi kiirendusele ja on rakendatud auto raskuskeskmesse C (joon. 172).

Rakendades inertsjõudu, võime liikuva auto kohta kasutamisele võtta kõiki staatikas kasutatud tasakaalu tingimusi. Nende hulgas võime rakendada ka p-s 29 käsiteldud kummumise vältimise tingimust. Niisiis ei erine käesoleva ülesande lahendamine formaalselt millegagi 16. ülesande lahendamisest, kus kummutavaks jõuks oli jõud $\mathfrak{P}_1$, millega järelvanker tõmbab autot alla. Käesolevas ülesandes on kummutavaks jõuks inertsjõud $\mathfrak{J}$. Analoogiliselt 16. ülesandega kirjutame stabiilsuse tingimuse

$$Gb\cos\alpha - Gh\sin\alpha \geqslant Jh.$$

Arvesse võttes, et

$$G = Mg \quad \text{ja} \quad J = Ma,$$

saame pärast taandamist M-iga

$$g(b\cos\alpha - h\sin\alpha) \geqslant ah,$$

kust saame:

$$a \leqslant \frac{g}{h}(b\cos\alpha - h\sin\alpha).$$

Vaatleme nüüd kõva keha translatoorset liikumist ainult ühe jõu $\mathfrak{P}$ toimel. Seda jõudu peab tasakaalustama jõud $\mathfrak{J}$, mis on raken-

datud keha raskuskeskmesse. Siit järgneb, et jõud $\mathfrak{P}$ peab olema samuti rakendatud raskuskeskmesse ja suunatud jõule $\mathfrak{J}$ vastupidi. Jõudude $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{J}$ tasakaalu tingimuse järgi

$$J - P = 0$$

ehk

$$Ma - P = 0,$$

kust saame, et

$$Ma = P. \tag{119}$$

See võrrand ei erine millegagi masspunkti dünaamika põhivõrrandist.

71. Inertsjõud kõva keha pöörlemisel.

Pöörelgu kõva keha liikumatu telje ümber. Lahutame keha mingi punkti A_k inertsjõu tangentsiaaljõuks $\mathfrak{J}_{kt}$ ja tsentrifugaaljõuks $\mathfrak{J}_{kn}$ (joon. 173, kus pöörlemise suunaks on võetud kella osuti liikumise suund, kui vaadata z-telje otsa poolt, ja kus pöörlemine on kiirenev). Vastavalt võrrandile (118) võime kirjutada:

$$J_{kt} = m_k a_{kt} \quad \text{ja} \quad J_{kn} = m_k a_{kn}.$$

Suurused a_{kt} ja a_{kn} leiame valemite (60) ja (61) abil:

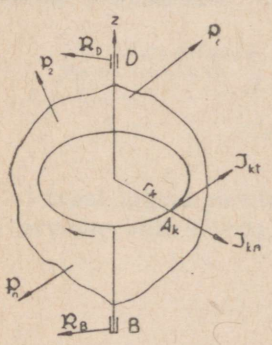
$$a_{kt} = r_k \varepsilon \quad \text{ja} \quad a_{kn} = r_k \omega^2.$$

Niisiis

$$J_{kt} = m_k r_k \varepsilon; \tag{120}$$

$$J_{kn} = m_k r_k \omega^2. \tag{121}$$

Olgu kehale rakendatud jõud $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$. Peale selle mõjuvad kehale veel laagrite B ja D reaktsioonid ($\mathfrak{R}_B$ ja $\mathfrak{R}_D$). D'Alembert'i lause põhjal jõud $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{R}_B, \mathfrak{R}_D$ ja kõikide punktide inertsjõud $\mathfrak{J}_k$ rahuldavad kõiki tasakaalu tingimusi. Jõudude ruumiline süsteem rahuldab tasakaalu puhul (p. 28) kuut tasakaalu võrrandit.



Joon. 173.

Kirjutame ühe neist võrranditest ja nimelt momentide võrrandi z-telje suhtes, s. t. pöörlemistelje suhtes. Tähistame jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ momentide summa m_z-iga. Reaktsioonide $\mathfrak{R}_B$ ja $\mathfrak{R}_D$ momendid on hõõrdumise puudumisel võrdsed nulliga, sest sel juhul lõikavad reaktsioonid pöörlemistelge. Jääb järele arvutada inertsjõudude momentide summa. Kuna tsentrifugaalinertsjõud lõikavad pöörlemistelge, siis nende jõudude momendid

pöörlemistelje suhtes võrduvad nulliga. Tangentsiaalinertsjõu $\mathfrak{J}_{kt}$ moment z-telje suhtes on (joon. 173)

$$-r_k J_{kt} = -m_k r_k^2 \varepsilon.$$

(Miinusmärk võetakse seepärast, et inertsjõud $\mathfrak{J}_{kt}$ mõjub z-telje suhtes kella osuti liikumisele vastassuunas.) Seepärast on kõikide inertsjõudude momentide summa z-telje suhtes

$$-\sum m_k r_k^2 \varepsilon = -\varepsilon \sum m_k r_k^2.$$

Summa $\Sigma m_k r_k^2$ on keha inertsmoment z-telje suhtes.

Tähistades teda tähega J_z, saame inertsjõudude momentide summa lõplikuks kujuks

$$-J_z \varepsilon.$$

Jõudude $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{R}_B, \mathfrak{R}_D, \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_n$ tasakaalu võrrandi järgi

$$m_z - J_z \varepsilon = 0$$

ehk

$$J_z \varepsilon = m_z. \tag{122}$$

Saadud võrrand annab seose pöörleva keha nurkkiirenduse ja kehale mõjuvate jõudude vahel.

Selle võrrandi põhjal keha pöörlemistelje suhtes võetud inertsmomendi korrutis nurkkiirendusega on võrdne kõikide kehale mõjuvate jõudude momentide summaga sama telje suhtes.

Me oletasime, et hõõrdumine puudub. Hõõrdumise olemasolul on tarvis hõõrdejõudude moment lülida suurusesse m_z.

Vaatleme kahte erijuhtu.

1. $m_z = 0$, s. t. kõikide kehale mõjuvate jõudude momentide summa pöörlemistelje suhtes on null. Võrrand (122) annab selleks puhuks $\varepsilon = 0$, s. t. nurkkiirendus võrdub nulliga; järelikult keha pöörleb ühtlaselt või seisab paigal.

2. m_z on jääv suurus. Võrrandist (122) järeldub, et sel juhul nurkkiirendus ε on samuti jääv suurus ja järelikult on keha pöörlemine ühtlaselt muutuv.

Võrrandi (122) saamiseks kasutasime ühte kuuest tasakaalu võrrandist. Ülejäänud viit tasakaalu võrrandit kasutatakse laagrite reaktsioonide leidmiseks.

Ülesanne 46. Laagrites esinevate hõõrdejõudude momendi leidmiseks on võllile asetatud hooratas. Hooratta ja võlli inertsmoment on 150 kgmsek². Hooratta nurkkiirus on 240 pööret/min. Hooratas jäi seisma $T = 50$ sek pärast. Leida hõõrdejõudude moment, lugedes teda jäävaks suuruseks.

Võrrandi (122) alusel on hõõrdejõudude moment

$$m_z = J_z \varepsilon.$$

Kuna ülesande sisu kohaselt on m_z jääv suurus, siis on pöörlemine ühtlaselt aeglustuv. Seepärast

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t.$$

$T = 50$ sek pärast hooratas jääb seisma, s. t. tema nurkkiirus muutub nulliks. Seepärast võime kirjutada, et

$$0 = \omega_0 - \varepsilon T,$$

kust saame

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{T};$$

järelikult on otsitav hõõrdejõudude moment

$$m_z = \frac{J_z \omega_0}{T}.$$

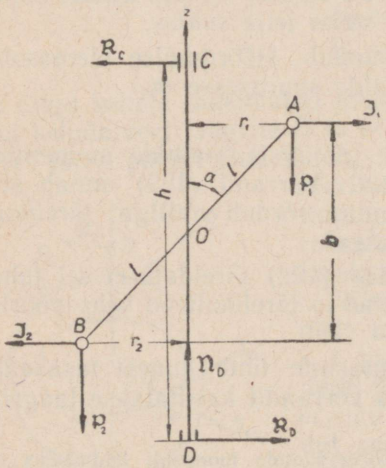
Asendades

$$J = 150 \text{ kgmsek}^2, \quad \omega_0 = \frac{\pi n}{30} = 8\pi = 8 \cdot 3{,}14 \frac{1}{\text{sek}}, \quad T = 50 \text{ sek},$$

saame

$$m_z = \frac{150 \cdot 8 \cdot 3{,}14}{50} = 75{,}36 \text{ kgm}.$$

Ülesanne 47. Varda AB, mille pikkus $2l = 1$ m, otstele on rakendatud kaks võrdse raskusega koormat $P_1 = P_2 = 2$ kg (joon. 174). Varras pöörleb ühtlaselt nurkkiirusega $\omega = 900$ pööret/min. vertikaalse telje CD ümber, mis läbib varda keskpunkti O. Laagrite C ja D kaugus $CD = h = 120$ cm. Varda AB ja z-telje vaheline nurk $\alpha = 15°$. Mitte arvestades varda kaalu ja koormate mõõteid on tarvis leida laagrite C ja D reaktsioonid.



Joon. 174.

Algul oletame, et varras ei pöörle. Siis koormate raskusjõud $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ on tasakaalustatud laagri D reaktsiooniga $\mathfrak{N}_D$, mis ilmselt võrdub koormate kaalude summaga, s. t. $N_D = 4$ kg.

Nüüd vaatleme jõude, mis mõjuvad vardale tema pöörlemisel nurkkiirusega ω. Peale jõudude $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{N}_D$ hakkavad vardale mõjuma veel külgsuunalised, pöörlemisteljega risti asuvad laagrite C ja D reaktsioonid $\mathfrak{X}_C$ ja $\mathfrak{X}_D$, millede täpsed suunad määrame kindlaks edaspidi.

Rakendame koormatele inertsjõud $\mathfrak{J}_1$ ja $\mathfrak{J}_2$. Kuna pöörlemine on ühtlane, siis nimetatud inertsjõud on tsentrifugaalinertsjõud. Nad on suunatud piki koormate pöörlemisraadiusi r_1 ja r_2 (kui mitte arvestada koormate mõõteid, lugedes neid punktideks), nagu see on kujutatud joonisel 174.

D'Alembert'i lause põhjal on jõud $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{N}_D$, $\mathfrak{R}_C$, $\mathfrak{R}_D$, $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ tasakaalus. Eespool tegime kindlaks, et jõud $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ja $\mathfrak{N}_D$ on vastastikku tasakaalustatud. Seepärast on ka ülejäänud jõud $\mathfrak{R}_C$, $\mathfrak{R}_D$, $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ omavahel tasakaalus.

Võrrandi (121) põhjal võime kirjutada:

$$J_1 = m_1 r_1 \omega^2;$$

$$J_2 = m_2 r_2 \omega^2;$$

kuna

$$m_1 = m_2 = \frac{P}{g} \quad \text{ja} \quad r_1 = r_2 = r,$$

siis

$$J_1 = J_2 = J = \frac{P}{g} r\omega^2.$$

Järelikult moodustavad inertsjõud $\mathfrak{J}_1$ ja $\mathfrak{J}_2$ jõupaari $(\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2)$. Seepärast neid tasakaalustavad reaktsioonid $\mathfrak{R}_C$ ja $\mathfrak{R}_D$ moodustavad samuti jõupaari, mis tasakaalustab jõupaari $(\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2)$. Siit leiame reaktsioonide $\mathfrak{R}_C$ ja $\mathfrak{R}_D$ täpse suuna. Nad peavad olema suunatud nii, et jõupaari $(\mathfrak{R}_C \mathfrak{R}_D)$ pööramissuund oleks jõupaari $(\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2)$ pööramissuunale vastupidine.

Vastavalt kahe jõupaari $(\mathfrak{R}_C \mathfrak{R}_D)$ ja $(\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2)$ tasakaalu tingimusele võime kirjutada, et

$$Jb = R_C h,$$

millest

$$R_C = R_D = J \cdot \frac{b}{h}.$$

Edasi võime kirjutada:

$$J = \frac{P}{g} r\omega^2 = \frac{P}{g} l\omega^2 \sin\alpha; \quad b = 2l\cos\alpha.$$

Niisiis

$$R_C = R_D = \frac{Pl^2\omega^2}{gh} 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Kuna

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

siis

$$R_C = R_D = \frac{Pl^2\omega^2 \sin 2\alpha}{gh}.$$

Ülesande tingimuste kohaselt

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 30\pi \frac{1}{\text{sek}}; \quad l = 50 \text{ cm}; \quad \sin 2\alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Peale selle $g = 981$ cm/sek^2.
Seepärast

$$R_C = R_D = \frac{2 \cdot 50^2 \cdot 30^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{2}}{981 \cdot 120} \approx 188{,}5 \text{ kg}.$$

Me näeme, et võrdlemisi väikese koormate kaalu juures (4 kg) laagrite külgreaktsioonide suurused on pöörlemisel silmapaistvad (188,5 kg). Reaktsioonide $\mathfrak{R}_C$ ja $\mathfrak{R}_D$ suunad kogu aeg muutuvad, sest pöörlemisel pöörduvad inertsjõud koos koormatega, inertsjõudude suuna aga määravad, nagu ülesande lahendamisel selgus, reaktsioonide suunad.

XVIII peatükk.

Mitteelastsete kehade põrge.

72. Liikumise hulk ja jõu impulss.

Masspunkti liikumise hulgaks nimetatakse vektorit, mis võrdub punkti massi ja tema kiiruse korrutisega ja on suunatud kiirusega samale poole (joon. 175).

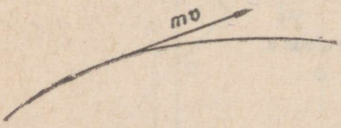
Liikumise hulga mõõtühiku nimetuse saame järgmisest võrdusest:

$$[mv] = [m][v] = \frac{[m][l]}{[t]}.$$

Tehnilises MKS-süsteemis on liikumise hulga ühiku nimetuseks:

$$[mv] = \frac{[m][l]}{[t]} = \frac{\text{kgsek}^2}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sek}} = \text{kgsek}.$$

Edaspidi piirdume punkti sirgjoonelise liikumise vaatlemisega ühe jõu $\mathfrak{P}$ mõjul. Nii jõud kui ka liikumise hulk on suunatud sel juhul mööda sama sirget, mida mööda liigub punkt.



Joon. 175.

Suunates x-telje sama sirget mööda, loeme nii P kui ka mv positiivseks või negatiivseks vastavalt sellele, kas vastava vektori, s. t. $\mathfrak{P}$ või $m\mathfrak{v}$ suund langeb ühte x-telje suunaga või on sellele vastupidine.

Peatume esmalt ühtlaselt muutuval liikumisel. Tähistades v_1-ga punkti kiirust teatud momendil t_1 ja v_2-ga — tema kiirust mingil teisel momendil t_2, saame valemi (44) põhjal

$$v_2 - v_1 = a\Delta t,$$

kus $\Delta t = t_2 - t_1$ on ajavahemik, mille jooksul punkti kiirus muutus v_1-st kuni v_2-ni; a on punkti kiirendus, kusjuures ka a suurus

võetakse vastava märgiga sama reegli kohaselt, mille määrasime kindlaks P ja mv jaoks.

Korrutades viimast võrdust punkti massiga m, saame:

$$mv_2 - mv_1 = ma\Delta t.$$

Dünaamika põhivõrrandi kohaselt

$$ma = P.$$

Seepärast

$$mv_2 - mv_1 = P\Delta t.$$

Jõu P korrutist tema mõjumise ajavahemikuga Δt nimetatakse jõu impulsiks.

Tähistades jõu impulssi tähega S,

$$S = P\Delta t,$$

saame:

$$mv_2 - mv_1 = S. \qquad (123)$$

Vahe $mv_2 - mv_1$ on liikumise hulga juurdekasv ajavahemikus Δt. Võrrand (123) väljendab liikumise hulga teoreemi, mida sõnastatakse järgmiselt:

Masspunkti liikumise hulga juurdekasv võrdub jõu impulsiga.

Liikumise hulga teoreemi on kerge laiendada sirgjoonelise liikumise mistahes juhule. Selleks jaotame vaadeldava ajavahemiku suureks arvuks n väikesteks ajavahemikeks Δt_1, Δt_2, ..., Δt_n. Tähistame jõu P impulsid väikeste ajavahemike Δt_1, Δt_2, ..., Δt_n kohta tähtedega S_1, S_2, ..., S_n. Edasi tähistame punkti kiiruse esimese ajavahemiku alguses v_1, esimese ajavahemiku lõpul — v', teise ajavahemiku lõpul v'' jne., kuna viimase ajavahemiku lõpul ta oleks v_2. Rakendame tõestatud liikumise hulga teoreemi iga väikese ajavahemiku kohta, kusjuures nende väiksuse tõttu jõud P ei muutu. Saame võrdused:

$$\begin{aligned} mv' - mv_1 &= S_1; \\ mv'' - mv' &= S_2; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ mv_2 - mv^{(n-1)} &= S_n. \end{aligned}$$

Liidame need võrdused ja määrame piiri, arvestades, et kõik Δt lähenevad nullile. Siis saame

$$mv_2 - mv_1 = \lim_{\Delta t \to 0} (S_1 + S_2 + \ldots + S_n).$$

Piiri

$$\lim_{\Delta t \to 0} (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = S$$

nimetatakse jõu P impulsiks ajavahemikus $t_2 - t_1$.

Niisiis saame võrrandi

$$mv_2 - mv_1 = S,$$

s. t. võrrandi (123), mis väljendab eespool sõnastatud liikumise hulga teoreemi.

Tõestatud liikumise hulga teoreemi saab rakendada ka kõvale kehale, mis liigub translatoorselt. Tõepoolest, p-s 70 tuletasime kõva keha translatoorse liikumise jaoks võrrandi (119)

$$Ma = P,$$

mis ei erine millegi poolest punkti dünaamika põhivõrrandist, millest lähtudes tõestasime liikumise hulga teoreemi. Seepärast, kui valemis (123), mis väljendab seda teoreemi, mõista m all kogu keha massi, siis saab seda võrrandit kasutada ka translatoorselt liikuva kõva keha puhul. Suurust mv nimetame siis keha liikumise hulgaks.

73. Põrge. Hetkelised jõud.

Põrkenähtus toimub kahe liikuva keha kokkupuutumisel. Sellel nähtusel on alljärgnevad iseloomuliku jooned.

1. Põrke vältus on üsna lühike. Kui näiteks 4 meetri kõrguselt ilma algkiiruseta lasta kukkuda alla vastu terasplaati teraskuulike, mis kaalub 100 g, siis, nagu näitab katse, on põrke kestus 0,0002 sekundit.

2. Põrkeks vajatava lühikese ajavahemiku jooksul põrkavate kehade punktide kiirused muutuvad märgatavas ulatuses. Eespool toodud näites teraskuulikese põrkest vastu terasplaati on põrke alguses kuulikese kiirus 9 m/sek ja ta on suunatud vertikaalselt alla. Põrke lõpul on kuuli kiirus 5 m/sek ja ta on suunatud alt üles. Nii muutub teraskuulikese kiirus 0,0002 sekundi jooksul 14 m/sek võrra.

3. Põrke jooksul tekkivad jõud võivad olla väga suured, mis ületavad märgatavalt teisi põrkavatele kehadele mõjuvaid jõude. Sama teraskuulikese juures on keskmine vastastikune jõud kuulikese ja plaadi vahel 700 kg, kuna aga kuulikese kaal on ainult 100 g.

Põrkel tekkivaid jõude nimetatakse hetkelisteks jõududeks.

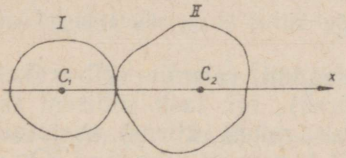
Käsiteldust on selge, et hetkelisi jõude iseloomustab see, et mõjudes väga väikeses ajavahemikus, on nad väga suured. Need jõud muutuvad põrke jooksul. Algul hetkeline jõud suureneb nullist (moment, kus kaks keha astuvad kokkupuutesse) maksimaalse väärtuseni ja seejärel väheneb jälle nullini (põrke lõpp). Seepärast mõõdetakse hetkelist jõudu tema impulsiga põrke jooksul. Hetke-

lise jõu impulssi saame mõõta liikumise hulga muutumise järgi liikumise hulga teoreemi alusel.

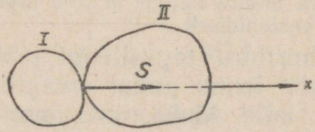
Edaspidi piirdume kahe keha põrke vaatlemisega, mis liikusid enne põrget sirgjooneliselt ja translatoorselt ning seejuures nii, et nende kiirused olid suunatud sirget mööda, mis ühendab nende raskuskeskmeid. Seejuures jätame arvestamata kõik mittehetkelised jõud, mis põrke ajal kehale mõjuvad, mis on ka lubatav, sest võrreldes hetkeliste jõududega, on need jõud väga väikesed.

74. Newtoni teoreem.

Tähistame põrkavate kehade massid m_1 ja m_2 ja joonestame x-telje, mis ühendab nende kehade raskuskeskmeid C_1 ja C_2, andes sellele teljele positiivse suuna kehalt *I* keha *II* poole (joon. 176). Kehade kiirusi enne põrget tähistame v_1 ja v_2, andes neile märgid vastavalt p-s 72 toodud reeglile. Kui kehad liiguvad teineteisele



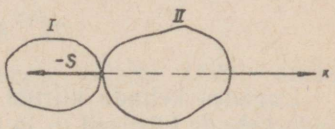
Joon. 176.



Joon. 177.

vastu, siis $v_1 > 0$, $v_2 < 0$. Kehade kiirused pärast põrget tähistame u_1 ja u_2, pidades kinni samast märkide reeglist.

Keha *I* poolt kehale *II* mõjuva jõu impulsi tähistame S-iga. Pidades kinni märkide reeglist, veendume, et $S > 0$, sest hetkeline jõud ja järelikult ka tema impulss on suunatud kehalt *I* keha *II* poole (joon. 177), s. t. x-telje positiivses suunas. Vastastikuse toime aksioomi põhjal järeldame, et kehalt *II* kehale *I* mõjuva jõu impulss on $-S$ (joon. 178).



Joon. 178.

Rakendame liikumise hulga teoreemi alguses kehale *II* ja siis kehale *I*. Saame kaks järgmist võrrandit:

$$m_2u_2 - m_2v_2 = S; \tag{124}$$

$$m_1u_1 - m_1v_1 = -S. \tag{125}$$

Liites need kaks võrrandit, saame:

$$m_2u_2 + m_1u_1 - m_2v_2 - m_1v_1 = 0;$$

siit

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2. \tag{126}$$

Viimane võrrand väljendab Newtoni teoreemi:

Põrkavate kehade liikumise hulkade summa ei muutu põrke jooksul.

Ülesanne 48. Mürsk, mille kaal on P_1, lendab kahurist välja kiirusega v_1. Leida kahuritoru tagasilöögi algkiirus, kui tema kaal on P_2.

Tagasilööginähtus toimub analoogiliselt põrkele. Püssirohugaaside surve mürsule ja torule on võrdne, ta on suunatud ainult vastupidiselt. Need jõud mõjuvad ainult väga lühikese ajavahemiku jooksul ja on üpris suured. Kasutades Newtoni teoreemi, leiame, et enne lasku on liikumise hulkade summa null, pärast lasku aga on ta $m_1v_1 + m_2v_2$. Seepärast võrrandi (126) järgi

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0$$

ehk

$$\frac{P_1}{g}v_1 + \frac{P_2}{g}v_2 = 0,$$

kust saame, et

$$v_2 = -\frac{P_1}{P_2}v_1.$$

Märk miinus näitab, et toru tagasilöögi kiirus v_2 on suunatud mürsu kiirusele v_1 vastupidiselt.

Kahuritoru tagasilöögi jaoks saadud valemit võib rakendada ka raketi lennu puhul (reaktiivmürsk). Iga lask sellisest raketist annab talle tõuke, mis suurendab raketi kiirust vastassuunas. Raketitehnika on viimastel aastatel tugevasti arenenud. On ehitatud reaktiivmootoritega lennukid, reaktiivmiinipildujad, reaktiivmürsud jne.

Raketitehnika teoreetilised alused töötati välja kuulsa vene teadlase ja leiduri K. Tsiolkovski poolt, 1903. a. ta andis raketi liikumise teooria ja tõestas terve rea teoreeme, mis iseloomustavad reaktiivset liikumist.

75. Mitteelastne põrge.

Lugedes kehade kiirusi v_1 ja v_2 enne põrget tuntuiks, püüame leida kehade kiirused u_1 ja u_2 pärast põrget. Newtoni teoreem annab ühe võrrandi, millest aga on vähe kahe tundmatu leidmiseks. Asi seisab selles, et kehade kiirused pärast põrget olenevad oluliselt põrkavate kehade elastsetest omadustest. Näiteks kui visata põrandale kummipall, siis ta hüppab tagasi kõrgemale kui teraskuul ja järelikult on kummipalli kiirus pärast põrget suurem kui teraskuulil.

Käesolevas punktis vaatleme mitteelastsete kehade põrget, mille juures põrkavate kehade kiirused on pärast põrget võrdsed, s. t.

$$u_1 = u_2 = u. \tag{127}$$

Selline põrge esineb kuumutatud metalli sepistamisel, vaiade maasse tagumisel või naela seina löömisel. Muidugi mõista ei esine kunagi täiesti mitteelastset põrget ja seetõttu tuleb võrrandit (127)

vaadelda kui ligikaudset, paljudel juhtudel aga ta on praktiliselt vastuvõetav.

Võrranditest (127) ja (126) leiame kiiruse u pärast põrget

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u + m_2u, \tag{128}$$

kust saame:

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \tag{129}$$

Ei ole raske veenduda, et mitteelastse põrke juures põrkavate kehade hoog väheneb. Tõepoolest, tähistades mõlemast kehast koosneva süsteemi hoo enne põrget T_0 ja pärast põrget T, saame:

$$T_0 = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2);$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1u^2 + m_2u^2).$$

Hoo kaotus T' on

$$T' = T_0 - T = \frac{1}{2}[m_1(v_1^2 - u^2) + m_2(v_2^2 - u^2)] =$$

$$= \frac{1}{2}[m_1v_1 - m_1u)(v_1 + u) + (m_2v_2 - m_2u)(v_2 + u)].$$

Vastavalt võrrandile (128) kirjutame, et

$$m_2v_2 - m_2u = m_1u - m_1v_1 = -(m_1v_1 - m_1u),$$

järelikult

$$T' = \frac{1}{2}(m_1v_1 - m_1u)[v_1 + u - (v_2 + u)] =$$

$$= \frac{m_1}{2}(v_1 - u)(v_1 - v_2).$$

Pärast u asendamist tema väärtusega valemi (129) alusel saame:

$$T' = \frac{m_1}{2}\left[v_1 - \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}\right](v_1 - v_2) =$$

$$= \frac{m_1(v_1 - v_2)}{2(m_1 + m_2)}(m_1v_1 + m_2v_1 - m_1v_1 - m_2v_2) = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2.$$

Seega

$$T' = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \tag{130}$$

Võrdus (130) näitab, et $T' > 0$, kuna aga $T' = T_0 - T$, siis $T_0 > T$ ja järelikult toimub hoo vähenemine. See vähenemine kulub põrkavate kehade deformeerimiseks, mis ei taastu mitteelastsete kehade põrkamisel.

Vaatleme erijuhtu, kus üks keha (keha *II*) enne põrkamist seisab (sepistamisel näiteks alasi). Sel juhul $v_2 = 0$. Süsteemi hoog on enne põrget

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2.$$

Hoo vähenemine põrke jooksul on võrrandi (130) põhjal

$$T' = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2.$$

Leiame hoo vähenemise T' suhte alghooga T_0, s. t.

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (131)$$

Sepistamisel muutub hoo vähenemine kasulikuks tööks, sest ta läheb sepistatava metalli deformeerimiseks. Seepärast tuleb püüda, et suhe $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ oleks võimalikult suur; tähendab alasi mass m_2 peab olema võimalikult suur ja vasara mass m_1 võimalikult väike.

Vaiade maasse tagumisel tuleb vastupidi püüda, et hoo vähenemine oleks võimalikult väike; tähendab rammvasara mass m_1 peab olema märgatavalt suurem vaia massist m_2.

Ülesanne 49. Rammvasar, mis kaalub 100 kg, kukub 4,9 m kõrguselt vaiale, mille kaal on 10 kg. Missuguse kiirusega hakkab vai liikuma?

Algul leiame, missuguse kiirusega langeb rammvasar vaiale. See on rammvasara kiirus enne põrget. Selleks kasutame hoo teoreemi. Kuna rammvasara algkiirus on null ja raskusjõu töö on

$$Gh = mg \cdot 4{,}9,$$

siis hoo teoreemi järgi saame

$$\frac{mv^2}{2} = mg \cdot 4{,}9,$$

kust

$$v = \sqrt{2g \cdot 4{,}9} = 9{,}8 \text{ m/sek}.$$

Niisiis on rammvasara kiirus enne põrget 9,8 m/sek. Vaia kiirus enne põrget on null. Kiiruse u (ühesuguse rammvasarale ja vaiale) saame valemist

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{G_1 v_1 + G_2 v_2}{G_1 + G_2} = \frac{100 \cdot 9{,}8 + 0}{100 + 10} = \frac{980}{110} = 8{,}9 \text{ m/sek}.$$

Ülesanne 50. Vasar raskusega 10 t langeb alasile, mille raskus koos sepistatava rauatükiga on 200 t, kiirusega 5 m/sek. Leida kasulik töö, s. t. sepistamiseks kulutatav töö, samuti ka vundamendi rappumisel kulunud töö.

Kogu kulutatud töö on võrdne vasara hooga T_0 enne põrget

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{10\,000}{9{,}81} \cdot 5^2 \approx 12\,742 \text{ kgm}.$$

Leiame vasara kasuteguri η. Ta võrdub kasuliku töö ja kogu kulutatud töö suhtega.

Kasulik töö on võrdne selle hooga T', mis põrkel kadus, sest see töö läks sepistamiseks.

Suhte $\frac{T'}{T_0}$ arvutame valemist (131):

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} = \frac{200}{10 + 200} \approx 0{,}95.$$

Nüüd arvutame kasuliku töö A_1 ja kaduma läinud töö A_2:

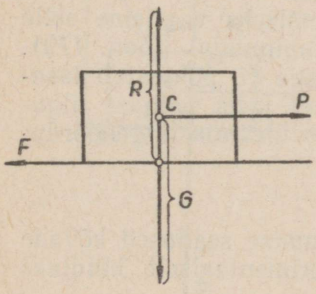
$$A_1 = 0{,}95 \cdot 12\,742 \approx 12\,105 \text{ kgm};$$
$$A_2 = 0{,}05 \cdot 12\,742 \approx 637 \text{ kgm}.$$

XIX peatükk.

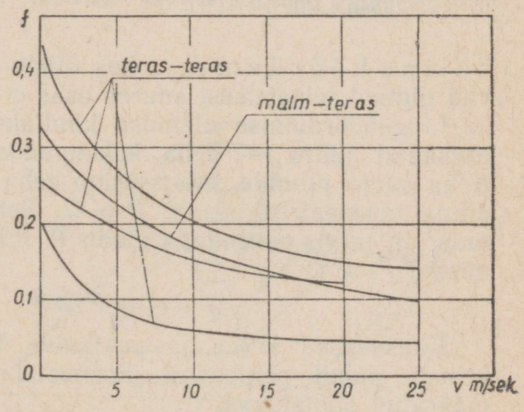
Hõõrdumine mehhanismides.[1]

76. Põhiteadmeid hõõrdumisest.

Kõik mehhanismid koostatakse üksikutest üksteisega ühendatud osadest (lülidest), mis on suhtelises liikumises. Nagu teada, võime üldjuhul kõva keha iga liikumist asendada tema pöörlemisega hetkelise tsentri ümber koos sama keha translatoorse liikumisega. Viimane liikumine põhjustab kokkupuutuvate kehade libisemist nende kokkupuutepinnal, pöörlemine aga põhjustab üldjuhul



Joon. 179.



Joon. 180.

libisemist ja veeremist. Puhas veeremine on võimalik sel juhul, kui hetkeline tsenter asub kehade kokkupuutetsoonis. Vastavalt sellele nimetatakse liikumisel tekkivaid kahjulikke takistusi liuge- ehk libisemishõõrdumiseks ja veerehõõrdumiseks;

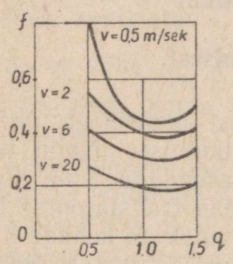
[1] See peatükk kuulub algupärandis käesoleval juhul tervikuna mittetõlgitud ossa „Mehhanismide teooria" peatükina VI.

(Tõlkija.)

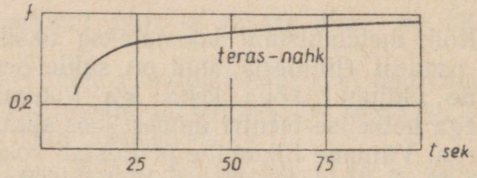
nad on alati suunatud vastupidiselt liikumisele.

Teoreetiliste ja eksperimentaalsete uurimustega tehti kindlaks, et hõõrdumine on mehaaniliste ja füüsikalis-keemiliste nähtuste keeruline kompleks, mis pole täielikult läbi uuritud veel praegusenigi. Siin käsitleme neid teadmisi hõõrdumisest, mis on vajalikud mehaanika põhiülesannete lahendamiseks.

Liugehõõrdumist võime jagada järgmistesse liikidesse: 1) kuivhõõrdumine, kus hõõrduvad pinnad puutuvad otseselt teineteisega kokku; 2) vedelikuline hõõrdumine, kus hõõrduvate pindade vahel asub eraldav õlikiht, mis täielikult takistab hõõrduvaid pindu otseselt kokku puutumast; 3) poolkuiv hõõrdumine, kus vahepealse õlikihi olemasolule vaatamata on ülekaalus pindade otsene kokkupuude; 4) poolvedelikuline hõõrdumine, kus õlikihi olemasolu tõttu on hõõrduvad pinnad teineteisest suures osas eraldatud.



Joon. 181.



Joon. 182.

Liugehõõrdumise olemuse kindlaks tegemiseks vaatleme selle lihtsamat juhtu — keha kokkupuudet tasapinnaga (joon. 179). Keha surve pinnale, mis võrdub keha kaaluga G, põhjustab tasapinna normaalreaktsiooni $R = G$. Selleks, et keha paigast liigutada, on tarvis rakendada jõudu P, mis peab ületama liugehõõrdumisjõu F, s. t.

$$P \geqslant F.$$

Kaasaegsed kuiva ja poolkuiva hõõrdumise seadused kõvade kehade puhul põhinevad järgmistel eksperimentaalselt kindlaks määratud põhialustel.

1. Hõõrdejõud liugehõõrdumisel on võrdeline normaalsurvega:

$$F = fG,$$

kus võrdelisuse tegurit f nimetatakse hõõrdeteguriks.

2. Hõõrdetegur oleneb materjalist ja hõõrduvate pindade seisukorrast.

3. Libisemise suhtelise kiiruse v suurenemisega hõõrdetegur väheneb (joon. 180), järelikult on hõõrdetegur liikumise alguses (või paigal olles) suurem kui hõõrdetegur liikumisel.

4. Surve suurenemisel hõõrduvate pindade vahel hõõrdetegur algul väheneb, pärast suureneb (materjalidele fiiber — teras, joon. 181).

5. Hõõrduvate pindade eelneva kontakti aja t suurenemisel suureneb ka hõõrdetegur (joon. 182).

77. Hõõrdumine tasapinnal.

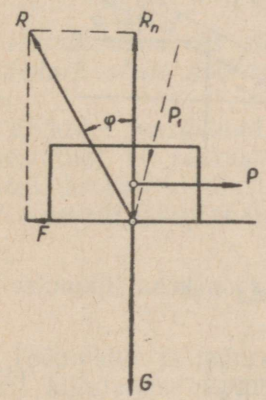
Vaatleme keha, mille kaal on G, liikumist jõu P mõjul (joon. 183). Hõõrdejõu $F = fG$ olemasolu kallutab tasapinna normaalreaktsiooni R_n suunda nurga φ võrra. Kokkuvõttes saadakse täielik reaktsioon R jõudude R_n ja F resultandina, s. t.

$$R = \frac{R_n}{\cos\varphi} = \frac{F}{\sin\varphi},$$

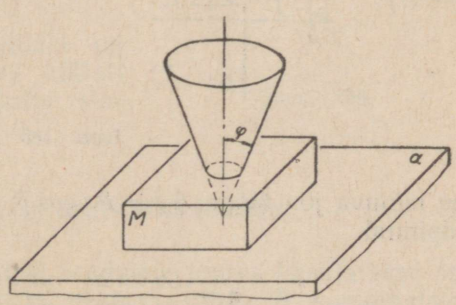
kust saame

$$\frac{F}{R_n} = \frac{fG}{G} = \operatorname{tg}\varphi = f. \qquad (132)$$

Nurka normaali ja täieliku reaktsiooni vahel nimetatakse h õ õ r d e n u r g a k s. Kui keha ja tasapinna vaheline hõõrdetegur on ühesugune keha kõikide liikumissuundade kohta tasapinnal α (joon. 184), siis tasapinna täielike reaktsioonide geomeetriline



Joon. 183.



Joon. 184.

koht on koonus; seda koonust nimetatakse h õ õ r d e k o o n u s e k s.

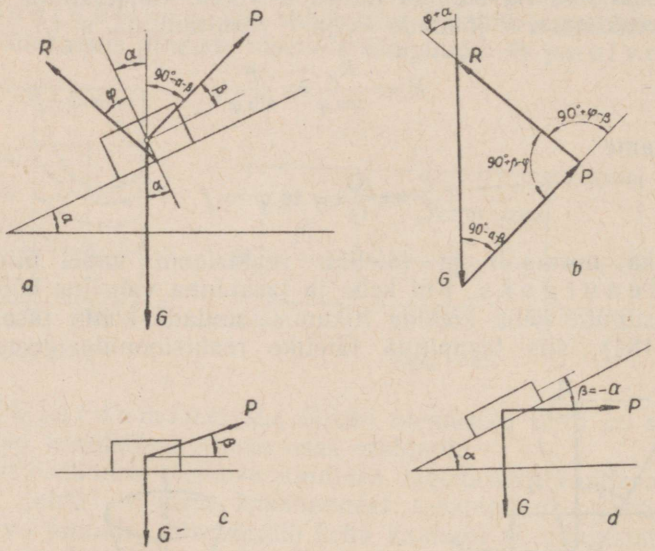
Kui liikumapanevat jõudu P rakendada kehale nurgast φ väiksema nurga all, s. t. hõõrdekoonuse sees, siis, olenemata selle jõu suurusest, keha ei liigu paigast (joon. 184). Üldise juhuna vaatleme keha liikumist kaldpinnal, arvestades hõõrdumist (joon. 185, a, b, c, d). Tasapinna kaldenurk on α ja liikumapanev jõud mõjub

nurga β all tasapinna suhtes. Liikumine on ühtlane, kiirusega v. Kõik jõud koonduvad kolmeks jõuks: liikumapanev jõud P, keha kaal G ja täielik reaktsioon R, kusjuures keha on tasakaalus. Jõudude kolmnurgast (joon. 185, b) saame siinuslause põhjal

$$\frac{P}{G} = \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(90^0+\beta-\varphi)} = \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)},$$

$$P = G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)}. \qquad (133)$$

Antud juhul on kasuteguriks kasuliku takistuse töö $A_k = Gs\sin\alpha$



Joon. 185.

suhe mõjuva jõu tööga $A_m = Ps\cos\beta$, kus s on keha liikumise tee kaldpinnal.

$$\eta = \frac{Gs\sin\alpha}{Ps\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos(\beta-\varphi)}{\cos\beta\sin(\alpha+\varphi)}. \qquad (134)$$

Üldjuhust võime tuletada rea erijuhte.

Nii näiteks, kui $\alpha = 0$, siis keha liigub horisontaalsel tasapinnal ja liikumapanev jõud on (joon. 185, c)

$$P = G\frac{\sin\varphi}{\cos(\beta-\varphi)}. \qquad (135)$$

Jõud P on väikseim murru nimetaja maksimaalse väärtuse puhul, s. t. kui $\cos(\beta-\varphi) = 1$ ehk $\beta = \varphi$.

Kasulikuimaks liikumapaneva jõu rakendamise suuna ja horisontaaltasapinna vaheliseks nurgaks on nurk, mille suurus võrdub hõõrdenurgaga. Kui $\beta = 0$, siis jõud $P = G \operatorname{tg} \varphi = fG$.

Horisontaalse tasapinna puhul ($\alpha = 0$) on kasutegur vastavalt valemile (134) null.

Praktiliselt on huvitav juht, kus keha paigutatakse kaldpinda mööda üles ja selle juures on liikumapaneva jõu suund horisontaalne (joon. 185, d), s. t. kui $\beta = -\alpha$.

Sel juhul saame, arvestades valemit (133):

$$P = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(-\alpha - \varphi)} = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \tag{136}$$

Kasutegur on valemi (134) järgi

$$\eta = \frac{\sin \alpha \cos(\alpha + \varphi)}{\cos \alpha \sin(\alpha + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \tag{137}$$

Kaldpinda nimetatakse i s e p i d u r d a v a k s, kui keha oma raskuse mõjul ei libise teda mööda alla (joon. 186). Selleks peab olema täidetud tingimus

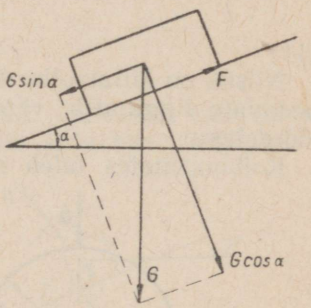
$$G \sin \alpha < F; \quad F = fG \cos \alpha,$$

kust saame

$$\operatorname{tg} \alpha < f; \quad \alpha < \varphi.$$

Isepidurdamiseks on vajalik, et kaldenurk oleks hõõrdenurgast väiksem.

Kõikidel vaadeldud juhtudel on arvestatud, et raskuskeskme küllalt madal asetus kindlustab keha stabiilse asendi tasapinnal.



Joon. 186.

78. Liuguri ja kruvi hõõrdumine.

Tööpinkide ja mõnede teiste seadmete juures kasutatakse sagedasti kiilutaolise liuguri A ja vastava soone B kombinatsiooni (joon. 187).

Liuguri ühtlaseks liikumiseks, kui liuguri kaal on G, peab rakendama horisontaalse jõu

$$P = 2F = 2fN. \tag{138}$$

Hõõrdejõud $F = fN$ tekib liuguri mõlemal küljel.

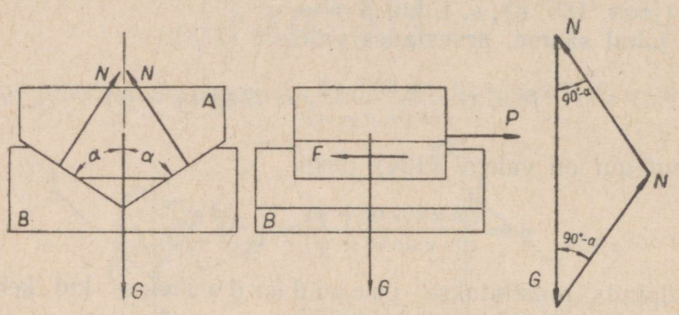
Teiselt poolt on normaalreaktsioon

$$N = \frac{G}{2 \sin \alpha}. \tag{139}$$

Võrrandite (138) ja (139) ühine lahendamine annab:

$$P = f\frac{G}{\sin\alpha}. \qquad (140)$$

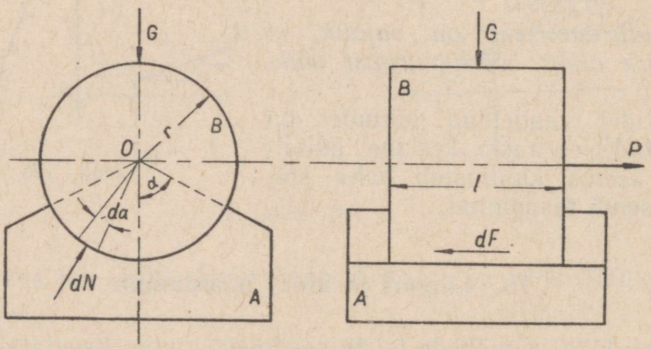
Suurus $\frac{f}{\sin\alpha} = f'$ kannab taandatud hõõrdeteguri nimetust, kusjuures $f' > f$.



Joon. 187.

Niisiis on kiilutaolise liuguri hõõrdetegur f' sama surve ja teiste vastavate tingimuste võrdsuse juures suurem kui lameda liuguri hõõrdetegur.

Kolbmasinates tuleb sagedasti arvutada hõõrdejõudu silindri-



Joon. 188.

lise soone ja ümmarguse liuguri koostöö puhul (joon. 188). Oletame, et surve jaguneb ühtlaselt kogu soone pinnale. Kui silindri pikkus on l, raadius r ja surve pinnaühikule q, siis elementaarpindala on $l \cdot r \cdot d\alpha$ ja elementaarne normaaljõud

$$dN = lrd\alpha q.$$

Hõõrdejõud dF elementaarpinnal on

$$dF = fdN = fqlr\,d\alpha.$$

Täieliku hõõrdejõu, mis võrdub liikumapaneva jõuga $F = P$, leiame valemist

$$F = 2\int_0^{\alpha} fqlr\, d\alpha = P = 2fqlr\alpha. \qquad (141)$$

Kordaja 2 näitab, et on tegemist kahe liuguri poolega. Liuguri kaal, mis langeb elementaarpinnakese kohta, on

$$dG = qlr\, d\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Täielik kaal

$$G = 2\int_0^{\alpha} qlr \cos\alpha\, d\alpha = 2qlr \sin\alpha,$$

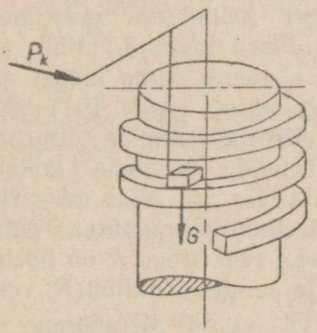
millest

$$q = \frac{G}{2lr\sin\alpha}. \qquad (142)$$

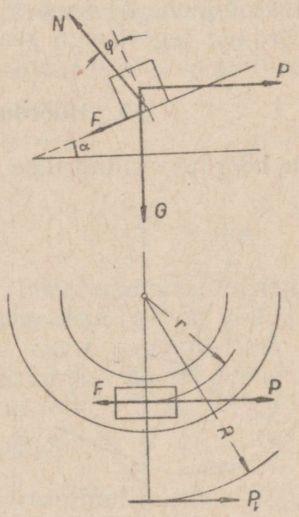
Võrrandite (141) ja (142) ühine lahendamine annab liikumapaneva jõu valemi

$$P = fG\frac{\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (143)$$

Kinemaatiline paar kruvi — mutter on laialdaselt kasutamisel masinates. Käepärasuse mõttes vaatleme seda paari eeldusel, et



Joon. 189.



Joon. 190.

kruvi on liikumatu ja mutri asendame koormaga, mis liigub mööda keerme keskjoont (joon. 189 ja 190) ja annab edasi kogu teljesuunalise koormuse G.

Kruvijoone laotuspinnana saame eespool käsiteldud kaldpinna, kusjuures liikumapanev jõud on rakendatud paralleelselt kaldpinna aluspinnaga. Kaldpinna tõusunurgaks on kruvijoone tõusunurk α. Jõudsime erijuhuni keha liikumisel kaldpinnal, kus liikumapanev jõud P on horisontaalne, mis võimaldab kasutada valemit (136):

$$P = G \operatorname{tg} (\alpha + \varphi).$$

Mutri liikumist kruvil garanteerib mutrile rakendatud pöördemoment

$$M = P_k R.$$

Liikumise tekitamiseks peab see moment ilmselt olema arvuliselt võrdne liikumist takistava momendiga vastavalt valemile (136) (vt. ka joon. 185, d):

$$M = P_k R = Pr = rG \operatorname{tg} (\alpha + \varphi);$$

siit saame, et

$$P_k = \frac{r}{R} G \operatorname{tg} (\alpha + \varphi). \qquad (144)$$

Mutri allalaskumisel jõu G mõjul muudab hõõrdejõud oma suunda ja sel juhul kirjutatakse valem (144) järgmiselt:

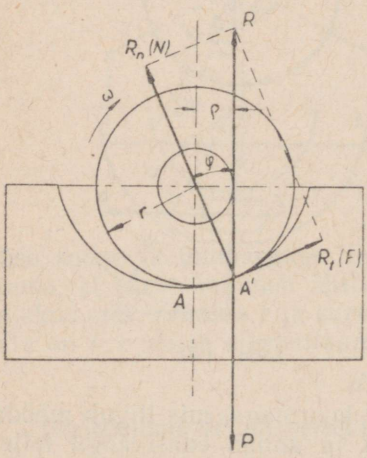
$$P_k = \frac{r}{R} G \operatorname{tg} (\alpha - \varphi). \qquad (145)$$

Jõud P_k on siin takistavaks jõuks.

Kui kruvijoone tõusunurk on võrdne hõõrdenurgaga, siis selline pöörduva tegevusega seadis muutub isepidurdavaks.

79. Hõõrdumine liugelaagris.

Kahe hõõrduva silindrilise pinna kombinatsioon süsteemi võll — laager näol on masinaehituses laialdaselt levinud. Võll on pöörlev element, kuna laagri pind on paigalseisev (joon. 191). Pindadevahelise hõõrdumise tõttu paigutub hõõrduvate pindade kokkupuutepunkt A, kui võll pöörleb kella osuti liikumise suunas, punkti A'. Täielik reaktsioon R on normaaljõu R_n ja tangentsiaaljõu R_t resultant:



Joon. 191.

$$R = \sqrt{R_n^2 + R_t^2}.$$

Tangentsiaalne reaktsioon on hõõrdejõud

$$R_t = F = fR_n.$$

Kuna nurk R ja R_n vahel on hõõrdenurk, siis

$$R_t = R_n \operatorname{tg} \varphi \quad \text{ja} \quad R = R_n \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{R_n}{\cos \varphi}.$$

Võlli ümberpaigutuse suurust ϱ võib leida, lähtudes hõõrdejõu momendist võlli tsentri suhtes:

$$M = Fr = R\varrho; \quad R_n fr = \frac{R_n \varrho}{\cos \varphi}; \quad R_n \operatorname{tg} \varphi r = \frac{R_n \varrho}{\cos \varphi}.$$

Ja lõpptulemusena

$$\varrho = r \sin \varphi. \tag{146}$$

Täielik reaktsioon on ringjoone puutuja, mille raadius on ϱ. Selle ringjoone omadused on alljärgnevad. Kui välisjõudude resultant G asub väljaspool ringjoont, siis võll saab kiirendatud liikumise, mis on analoogiline koorma liikumisele tema raskuse tõttu mööda kaldpinda alla, kusjuures kaldpinna kaldenurk on hõõrdenurgast suurem. Kui G on ringi puutujaks, siis võll pöörleb ühtlaselt, mis vastab koorma liikumisele kaldpinnal juhul, kui selle kaldenurk on võrdne hõõrdenurgaga. Kui jõud G läbib ringi, siis ei ole võlli pöörlemine võimalik (analoogiliselt sellega, kui koorem asub kaldpinnal, mille kaldenurk on hõõrdenurgast väiksem). Ringi raadiusega ϱ nimetatakse analoogia põhjal hõõrdenurgaga ja -koonusega hõõrderingiks.

Kuna hõõrdenurgad on väga väikesed, siis praktiliselt võib lugeda, et

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = f$$

ja vastavalt võrrandile (146)

$$\varrho = rf. \tag{147}$$

Selleks, et anda täpset valemit hõõrdemomendi arvutamiseks liugelaagris, on tarvis teada surve tegelikku jaotust võlli ja laagri hõõrduvatel pindadel. Kuna sellist surve jaotumist on praktiliselt raske kindlaks määrata, siis kasutatakse hõõrdemomendi arvutamiseks liugelaagris lihtsustatud valemit:

$$M_h = Grf_1, \tag{148}$$

kus G on laagrile mõjuv radiaalne resultantkoormus;
r — võlli raadius;
f_1 — pöörleva paari hõõrdetegur (määratakse harilikult eksperimentaalselt mitmesuguste töörežiimide jaoks).

Kuna laager töötab määrituna, siis f_1 suuruse valiku juhised antakse määritud kehade hõõrdumise käsitlemisel.

Kui hõõrdemoment on teada, siis hõõrdumise töö laagris sekundi kohta on

$$W_h = M_h \omega, \tag{149}$$

kus ω on võlli pöörlemise nurkkiirus.

Juhul, kui ω on muutuv, siis täieliku hõõrdumise töö saab leida sekundis tehtavate tööde diagrammist, mis on ehitatud sõltuvuses ajast, kõvera W_h all asuva pindala arvutuse teel ja selle pindala üleviimisel kgm/sek.

Nii võlli kui ka laagri pöörlemisel tuleb hõõrdumise töö arvutamisel ω asemel valemisse (149) asetada ühe elemendi suhteline nurkkiirus teise elemendi suhtes.

80. Õlitatud kehade hõõrdumine ja hõõrdetegur vedelikulisel hõõrdumisel.

Vedelikulise hõõrdumise teooria loojaks on vene teadlane N. Petrov, kes esimesena töötas välja hõõrdumise hüdrodünaamilise teooria ja avaldas selle 1883. a. pealkirja all „Uus hõõrdumise teooria" ning tõestas selle teooria elulisust katsetega vedelike ja masinate hõõrdumise alal (1886. a.). Hüdrodünaamilise hõõrdumise teooria edasiarendajateks olid Žukovski, Tšaplõgin (1904. a.), Mertsalov ja Gutjar.

Kuiv- ja poolkuiv hõõrdumine teineteise suhtes liikuvate pindade vahel ei ole soovitav mitte ainult märgatavate võimsuskadude tõttu, vaid ka hõõrduvate pindade kulumise pärast, mis kuivhõõrdumise tingimustes võib tõusta üle lubatavate piiride. Kulumise vähendamiseks tuleb pindade vahele luua lõtk, mis hävitaks pindade otsese kokkupuutumise. Vajaliku lõtku loomine ja koos sellega ka hõõrdumise vähendamine toimub hõõrduvate pindade vahele määriva vahekihi loomise teel. Vedelikulist hõõrdumist kindlustavateks tingimusteks on: 1) küllaldase lõtku olemasolu hõõrduvate pindade vahel, 2) määriv vedelik peab olema küllalt viskoosne ja märgav ja 3) hõõrduvate pindade suhtelise liikumise kiirus peab olema mitte alla teatud kindlat suurust.

Kuivhõõrdumise protsessis kulutatakse hõõrdumise töö kokkupuutepindade lihvimiseks (deformatsiooniks). Vedelikulisel hõõrdumisel kulutatakse hõõrdumise töö vedelikukihtide sisehõõrdumise ületamiseks. Vedeliku sisehõõrdumine on tingitud tema osakeste kohesioonist. Hõõrdumine keha ja vedeliku vahel ei oma olulist tähtsust.

Vedeliku sisehõõrdumise iseloomustajaks on tema viskoossus, omadus, mis takistab vedeliku osakeste üksteisest eraldumist.

Kuivhõõrdumise jaoks kasutatud võrrandid ei ole õlitatud kehade

juures rakendatavad. Printsipiaalse põhialuse annab siin Newtoni valem, mis väljendab hõõrdejõu suurust F õlikihtide kohta:

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta y}. \tag{150}$$

See jõud on võrdeline vedeliku viskoossusega η, õlikihi kokkupuutepindalaga S ja kihi liikumise kiiruse muutumisega Δv kihi kõrguse Δy juures.

Vedeliku viskoossuse hindamiseks kasutatakse kahte parameetrit: absoluutne ja suhteline viskoossus. Absoluutse viskoossuse teguriks ehk sisehõõrdumise teguriks η nimetatakse jõudu, mis on vajalik vedeliku kihi, mille pindala on 1 m², ümberpaigutamiseks samasuguse kihi suhtes, mis asub 1 meetri kaugusel esimesest, kiirusega 1 m/sek

$$[\eta] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{m}^2 \cdot \text{m/sek}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{sek}}{\text{m}^2}.$$

Viskoossuse praktiliseks näitajaks on suhteline viskoossus E, mis näitab, mitu korda aeglasemalt voolab 200 cm³ antud vedelikku temperatuuril 50° antud avast läbi, võrreldes sama ruumalaga veega temperatuuril 20°. Selle läbivooluava sisemine läbimõõt on 2,8 mm ja pikkus 20 mm. Vee läbivoolu aeg on 50—52 sek.

Suhe absoluutse ja suhtelise viskoossuse vahel väljendub järgmise empiirilise valemiga:

$$\eta = \gamma \left(0{,}00074\, E - \frac{0{,}00064}{E}\right), \tag{151}$$

kus γ on vedeliku erikaal kg/dm³. Mineraalsete määrdeõlide jaoks $E = 3$—8 ja $\gamma \approx 0{,}9$.

Antud vedeliku viskoossus ei olene mitte ainult tema üldistest omadustest, vaid ka rõhust ja temperatuurist. Temperatuuri tõusuga viskoossus väheneb, mis võib põhjustada õli võlli ja laagri vahelisest lõtkust väljasurumist. Nii näiteks masinaõli puhul 30° C juures $\eta = 0{,}0193$, 60° C juures aga $\eta = 0{,}0032$. Üldiselt on viskoossuse võrrand antud juhul järgmine:

$$\eta = \frac{a}{(0{,}1\, t)^n}, \tag{152}$$

kus t on temperatuur ° C;

a ja n — vastava õli tegurid.

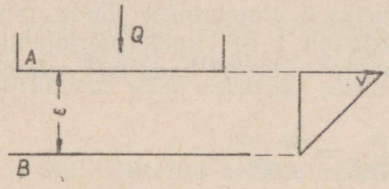
Raskete masinaõlide puhul

$$\eta = \frac{0.336}{(0{,}1\, t)^{2{,}6}}. \tag{153}$$

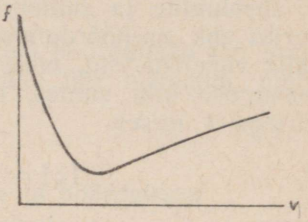
Määriva vedelikukihi temperatuur omakorda oleneb vedeliku kvaliteedist, suhtelisest kiirusest, surve suurusest, kehade soojusjuhtivusest, millede vahel asub kiht, ja ümbritseva keskkonna (õhu) temperatuurist. Surve suurenemisel vedeliku viskoossus suureneb, see suurenemine aga muutub märgatavaks survel üle 100 kg/cm².

Kuna praktiliselt normaalsed surved ei küüni nimetatud arvuni, siis loetakse viskoossus normaalselt olenematuks survest.

Viskoosse hõõrdumise režiimi saamine pindade vahel oleneb peale teiste tegurite veel pindade märgamisest, mis on võimalik juhul, kui kohesioon pinna ja vedeliku vahel on suurem kui vedeliku osakeste vahel. Seejuures tekib keha pinnal kirme, mis liigub koos pinnaga ja mis loobki viskoosse hõõrdumise, s. o. hõõrdumise ainult vedeliku osakeste vahel. Vedelikukihil, mis asub



Joon. 192.



Joon. 193.

pinna otseses läheduses, on pinnaga sama kiirus. Järgmistel vedelikukihtidel on järjest väiksemad kiirused, nad jäävad esimesest kihist maha ja rebivad end sellest lahti.

Viskoosse hõõrdumise normaalseks tööks on tarvis pidevat õli vahetust, sageli aga on teda tarvis juurde juhtida surve all.

Viskoosse hõõrdumise teguri ja temale mõjuvate põhifaktorite olenevuse leidmiseks võib kasutada Newtoni valemit (150). See võrrand on kasutatav lihtsamal juhul, näiteks keha A (joon. 192) liikumisel liikumatu keha B suhtes kiirusega v. Oletame, et pilu ε on täidetud õliga ja tähistame normaalsurve tähega Q. Siis võime valemi (150) kirjutada järgmiselt:

$$F = \eta S \frac{v}{\varepsilon}. \tag{154}$$

Tähistades keskmise erisurve (surve pinnaühikule) tähega q, võime keha kandva pindala S väljendada järgmiselt:

$$S = \frac{Q}{q}. \tag{155}$$

Asetades S väärtuse võrrandisse (154), saame

$$F = Q \frac{\eta v}{q\varepsilon} \tag{156}$$

või teisiti

$$F = Q\mu, \tag{157}$$

kus $\mu = \frac{\eta v}{q\varepsilon}$ on vedelikulise hõõrdumise tegur.

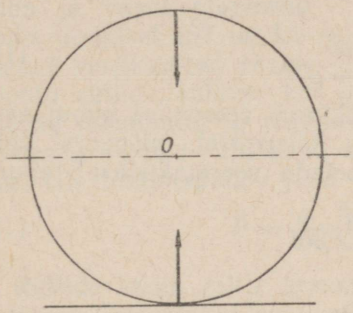
Nagu eespool nimetatud, määriva vedeliku viimine hõõrduvate pindade vahele muudab tugevasti hõõrdumise iseloomu. Nii illust-

reerib kiiruse mõju hõõrdetegurile graafik joonisel 193: alguses hõõrdeteguri väärtus langeb järsult, seejärel kiiruse suurenedes suureneb ka hõõrdetegur sujuvalt (seisuolukorra hõõrdetegur on liikumise hõõrdetegurist suurem).

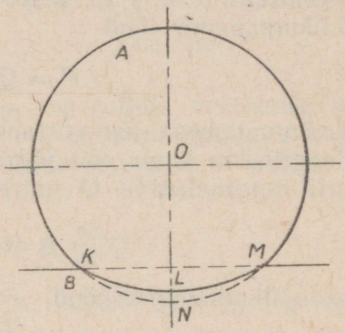
82. Veerehõõrdumine.

Veerehõõrdumiste põhialuste leidmiseks vaatleme pöördkeha veeremist tasapinnal (joon. 194). Teoreetilisel juhul, keha deformatsiooni puudumisel, asub normaalreaktsioon koormuse mõjusirgel ja nad tasakaalustavad teineteist: paigalt liigutatud keha liigub ühtlase kiirusega. Tegelikult aga deformeeruvad nii keha kui ka tasapind.

Hõõrdumise olemuse sügavamaks selgitamiseks veeremisel vaat-



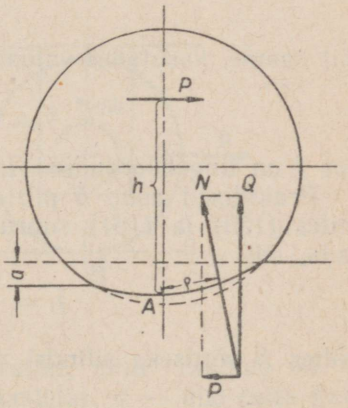
Joon. 194.



Joon. 195.

leme silindri veeremist tasapinnal nende mõlemapoolsel deformeerumisel (joon. 195). Silinder muutub lopergusemaks ja tasapind surutakse sisse (sirge *KM* venitatakse välja kaareni *KLM*). Silindri piirkonnad surutakse kokku (kaar *KNM* väheneb suuruseni *KLM*), tasapinna piirkonnad aga venitatakse välja. Liikumatu silindri puhul tugipindade elastsusjõud on tasakaalus, silindri veeremisel aga deformeeruvad järgnevad uued piirkonnad, eelmised aga pöörduvad tagasi esialgsesse asendisse.

Veeremise tulemusena tekib hõõrduvate kehade deformatsioon ja nende pinna piirkondade vastastikune libisemine, mis moodustabki veeremistakistuse (veerehõõrdumise). Ei ole raske mõista, et



Joon. 196.

selle takistuse jõud oleneb koormusest ja kokkupuutuvate kehade kõvadusest.

Hõõrdumise suuruse (takistuse) saab leida silindri veeremise üldjuhu jaoks tasapinnal, kui liikumapanev jõud on rakendatud teatud kõrgusele h (joon. 196), alljärgneval viisil. Üldjuhul saab tasapind jääva deformatsiooni a. Täielik tasapinna reaktsioon (resultant) N on rakendatud risti kokkupuutepinna esimese piirkonnaga ja on suuruselt koormuse Q ja liikumapaneva jõu P geomeetriline summa. Deformatsiooni olemasolu kallutab reaktsiooni radiaalsest suunast kõrvale. Jõudude momendid punkti A suhtes annavad:

$$Ph = N\varrho,$$

kus ϱ on reaktsiooni õlg.

Resultant $N = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Liikumapanev jõud

$$P = Q\sqrt{\frac{\varrho^2}{h^2 - \varrho^2}}. \tag{158}$$

Liikumapaneva jõu võrrandi struktuuri veeremise puhul saime analoogilisena sama jõu võrrandiga libisemisel, mispärast võime tegurit normaalsurve Q juures nimetada veeretakistuse teguriks

$$f_1 = \sqrt{\frac{\varrho^2}{h^2 - \varrho^2}}; \tag{159}$$

siis on liikumapanev jõud

$$P = f_1 Q. \tag{160}$$

Teatud huvi pakub liikumapaneva jõu rakenduspunkti minimaalse kõrguse leidmine, mille juures veeremine jääb veel püsima. Ei ole raske mõista, et edasine h vähendamine põhjustab libisemist, kuna veeremise ja libisemise piiril hõõrdejõud on ühesuurused, s. t.

$$f_1 Q = fQ;$$

siit saame, kasutades valemit (159):

$$h_{\min} = \sqrt{\frac{\varrho^2}{f^2} + \varrho^2}, \tag{161}$$

kus f on liugehõõrdumise tegur.

Praktiliselt asub h piirides raadiusest diameetrini. Kui valemites (159) ja (161) suurust ϱ^2 tema väiksuse tõttu mitte arvestada, siis

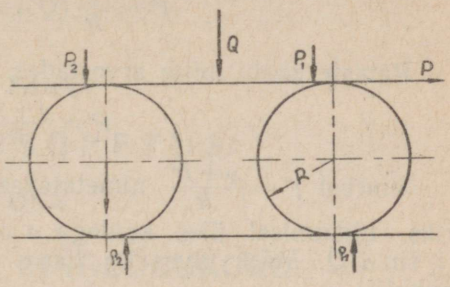
$$f_1 = \frac{\varrho}{h} \text{ ja } h_{\min} = \frac{\varrho}{f};$$

võttes h võrdseks silindri raadiusega R, saame:

$$f_1 = \frac{\varrho}{R}. \tag{162}$$

Reaktsiooni õlga ϱ nimetatakse veeremise parameetriks või veerehõõrdumise teguriks. Tema suurused on antud käsiraamatutes. Erandi moodustab autorataste veeremine, mille kohta on õige takistustegur f_1, mida määratakse valemi (159) järgi.

Raskete koormate ümberpaigutamisel väikestele kaugustele kasutatakse rulle (joon. 197) ja platvormile asetatud raskuse liikumine toimub horisontaalse jõu P mõjul või horisondiga teatud nurga all oleva jõu komponendi poolt. Vaadeldava juhu iseärasuseks on rullide kahekordse takistuse olemasolu; vastu maapinda ja vastu platvormi pinda. Joonisel 197 on kujutatud vertikaalsed reaktsioonid rullide suhtes; kui ϱ_1 ja ϱ_2 on rullide veeremise parameetrid maapinnal ja platvormil, Q — ümberpaigutatava koorma raskus, q — ühe rulli kaal, n — rullide arv ja R — rullide raadius, siis liikumapanev jõud on



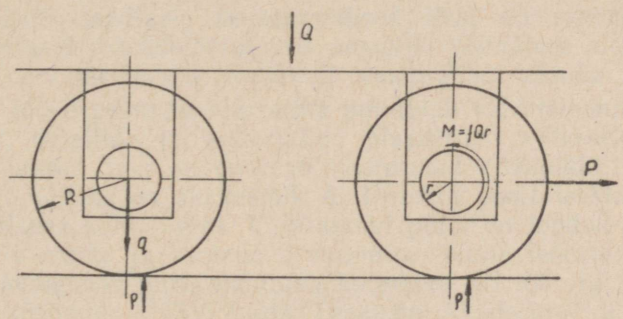
Joon. 197.

$$P = \frac{\varrho_1}{2R}(Q + nq) + \frac{\varrho_2}{2R} Q. \qquad (163)$$

Rullide kaalu mitte arvestades ja lugedes $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, saame järgmise lihtsustatud avaldise:

$$P = \frac{\varrho}{R} Q.$$

Koorma ümberpaigutamine rataste abil (joon. 198) on seotud hõõrdumisega liugelaagrites ja rataste veerehõõrdumisega. Tähis-



Joon. 198.

tame: ϱ — veeremise parameeter rattal, mille raadius on R, Q — koorma ja vankri kaal (ilma ratasteta), q — ühe ratta kaal, n — rataste arv, r — rataste telje raadius ja f — hõõrdetegur

liugelaagrites. Siis saab skeemi alusel koostada liikumise võrrandi jõudude momentide võrrutamise teel:

$$PR = \varrho(Q + nq) + fQr,$$

kust saame

$$P = \frac{\varrho}{R}(Q + nq) + \frac{fQr}{R}. \qquad (164)$$

Rataste kaalu mitte arvestades, saame:

$$P = \frac{\varrho + fr}{R} Q. \qquad (165)$$

Suurust $f' = \frac{\varrho + fr}{R}$ nimetatakse vankri taandatud hõõrdeteguriks. Liikumisel üles kaldega α on takistusjõud $P = (f' \cos \alpha \pm \pm \sin \alpha) Q$. Märk pluss on tõusu puhul ja märk miinus languse puhul.

Levinuimad kombinatsioonid esinevad järgmiste veeremise parameetrite puhul: autokummid kõval teel 0,8—1,5; puitrullid puidul 0,05—0,15; metallrullid metallroobastel 0,008—0,012; metallrullid puidul 0,06; kuulid, rullid ja nõelad laagrites 0,001—0,002 cm.

II JAGU.

TUGEVUSÕPETUS.

I OSA.

HOMOGEENNE PINGEOLUKORD.

Sissejuhatus.

Tugevusõpetus on teadus ehitiste ja masinate osade tugevusest. See teadusharu tekkis XVI sajandil ja arenes paralleelselt teoreetilise mehaanikaga, määrates koos sellega kindlaks masinate ehitamiseks vajalikud põhilised seadused.[1]

Määratu panuse andsid tugevusõpetuse arendamiseks XVIII sajandil Vene Teaduste Akadeemia liikmed Euler ja Bernoulli.

XIX sajandil avaldasid vene teadlased M. Ostrogradski, D. Žuravski, F. Jassinski jt. rea klassikalisi töid paindeteooria ja elastsusteooria alal, aidates kaasa tugevusõpetuse kui teaduse lõplikule kujunemisele.

Pidev ja üpris intensiivne tehnika areng viimasel aastakümnel asetas tugevusõpetusele lahendamiseks rea uusi probleeme.

Nõukogude teadlaste sellesuunalised tööd on silmapaistvad. Nad lahendasid rea küsimusi, mis annavad võimaluse arvutamisel kasutada uusi meetodeid vastavalt eesrindliku tehnika nõuetele.

Nende tööde peamine temaatika puudutab vibratsioonitugevust, stabiilsust, detailide ja materjalide plastilisust väikesekaaluliste masinate juures, mis on suuresti koormatud (lennukid, jõumasinad). Nii näiteks on akadeemik A. Dinniku poolt teostatud rida töid stabiilsuse kohta; prof. V. Vlassovi poolt on loodud õhukeseseinaliste varraste ja kestade arvutamise üldine teooria; akadeemik N. Davidenkov uuris muutuva koormuse all töötava materjali tugevuse küsimusi; NSV Liidu Teaduste Akadeemia korrespondeeriva liikme A. Iljušini poolt on loodud plastilisuse teooria nõukogude koolkond jne.

---

[1] Tekkiva teaduse edasine arendamine toimus terve rea väljapaistvate õpetlaste poolt, keda mainitakse kursuse edasises käigus.

Meie maal organiseeritud teadusliku uurimise instituudid oma võimsa laboratoorse baasiga teostavad uurimisi tugevusõpetuse alal, lahendades edukalt neile praktika poolt pidevalt esitatud probleeme:

1. Põhimõisted.

Mehaanikas vaadeldi keha kui püsiva omavahelise kaugusega masspunktide süsteemi. Looduses niisuguseid kehi ei leidu. Väliskoormuste mõjul kehale muutuvad tegelikult tema osadevahelised kaugused. Keha muudab selle juures oma mõõteid ja esialgset geomeetrilist kuju — ta deformeerub. Keha osakeste vahel esinevad jõud avaldavad vastupanu kehale rakendatud välisjõududele. Selle vastupanu suurus oleneb keha deformeerumise astmest ja materjali füüsikalis-mehaanilistest omadustest. Keha deformeerumine kestab seni, kuni tekib tasakaal lõplike väliskoormuste ja vastupanu avaldavate sisejõudude vahel. Keha tekkinud olukorda nimetatakse p i n g e o l u k o r r a k s.

Tugevusõpetuses vaatleme järgmisi põhiküsimusi: a) mitmesuguse päritoluga koormustest tingitud pingeolukorra määramine kõvade kehade puhul; b) laboratoorsete katsete, mida on teostatud materjaliga mitmesugustes koormamistingimustes, tulemuste analüüs ja üldistamine; c) keha geomeetrilise kuju muudatuste kindlakstegemine pärast deformatsiooni; d) keha mõõdete kindlaksmääramine, mille juures ta võib purunemata ohutult ja kestvalt vastu pidada antud koormusele, omades seejuures minimaalset kaalu.

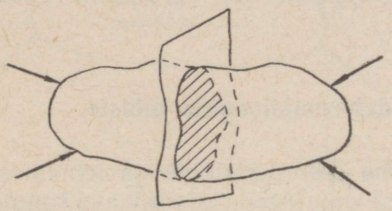
Keha mõõdete määramist, mille juures ta suudab ohutult vastu pidada koormusele, nimetame keha tugevuse arvutamiseks. Sellise arvutuse juures esitatakse kehale t u g e v u s e, j ä i k u s e ja v a s t u p i d a v u s e nõuded. Keha, mis suudab ohutult välja kannatada koormust, muutes oma geomeetrilisi mõõteid lubatud piirides, nimetatakse tugevaks. Keha on vajalikult jäik, kui ta deformeerudes muudab oma mõõteid etteantud piirides. Keha on vastupidav, kui ta deformeerudes hoiab alal oma üldise esialgse geomeetrilise kuju ja purunematult suudab vastu pidada antud koormusele.

Arvutuste juures esineb peamiselt kolm järgmist liiki ülesandeid: 1) antud koormuse juures leida mõõted, mille juures keha rahuldaks ühte kolmest eespool toodud tingimusest; 2) keha antud mõõdete juures määrata lubatav koormus; 3) antud koormuste ja keha mõõdete juures anda otsus keha tugevuse, jäikuse ja vastupidavuse kohta.

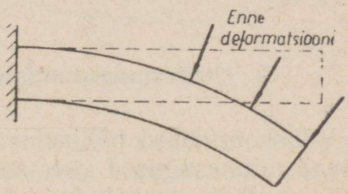
2. Põhilised hüpoteesid ja oletused.

Reaalse keha keerukas kuju ja mitmekesised füüsikalis-mehaanilised omadused on suureks takistuseks pingeolukorra teoreetilisel tundmaõppimisel. Seepärast tuleb igal eri juhul vastavalt nõutavale täpsusele ehitada arvutuse teooria real oletustel ja hüpoteesidel, mis idealiseerivad reaalset keha. Järgnevalt on toodud üldised oletused, mis harilikult on kasutamisel tugevusõpetuse kursuse teooria ülesehitamisel.

Tasapinnaliste lõigete hüpotees. Kui kujutleda kehas enne deformeerumist tasapinnalist lõiget, siis pärast deformeerumist see



Joon. 199.



Joon. 200.

lõige üldjuhul ei jää tasapinnaliseks (joon. 199). Tugevusõpetuse kursuses aga tuleb oletada, et kehas enne deformatsiooni kujuteldud tasapinnalised lõiked jäävad tasapinnalisteks ka pärast deformatsiooni.

Oletus deformatsioonide väiksusest. Kehad muudavad deformeerudes väiksemal või suuremal määral oma mõõteid ja geomeetrilist kuju. Jäigad kehad muudavad seda vähe, elastsed kehad — tunduvalt (joon. 200). Tugevusõpetuse ülesannete lahendamise lihtsustamiseks tuleb oletada, et deformeerumisel keha oma üldmõõdete suhtes muudab oma geomeetrilist kuju väga vähe.

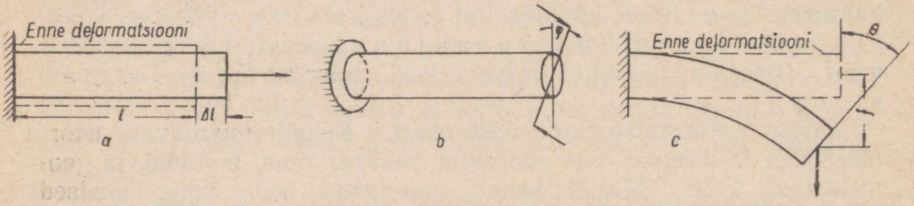
Materjali homogeensuse ja pidevuse hüpotees. Kõik keha moodustavad materjalid on oma füüsikalis-mehaanilistelt omadustelt ebaühtlased. Selliste kehade pingeolukorra kindlaksmääramisel tuleb kokku põrgata rea raskustega ja seepärast oletame alati, et keha füüsikalis-mehaanilised omadused on kõikides keha punktides ühesugused ja materjal täidab keha ruumala ühtlaselt. See oletus on täiesti vastuvõetav selliste materjalide juures, nagu teras, vask, malm jt. ning vähemal määral rakendatav puidu, betooni, tellise ja teiste ehitusmaterjalide juures.

Materjali isotroopsuse ja ortotroopsuse hüpotees. Materjalidel, mida me loeme homogeenseteks, võivad erinevates suundades olla erinevad füüsikalis-mehaanilised omadused. Selliste materjalide hulka tuleb lugeda oksteta ja viltuse kiuga puitu, külmalt keera-

tud traati jne. Selliseid materjale nimetatakse anisotroopseteks materjalideks. Kui materjalil on ühesugused füüsikalis-mehaanilised omadused ainult teatud ühes suunas, vastavalt kiudude asetusele paralleelselt mingi ristkoordinaatide süsteemiga, siis selliseid materjale nimetatakse ortotroopseteks materjalideks. Ortotroopsete materjalide hulka kuuluvad oksteta sirgekiuline puit, valtsteras, traat. Materjale, mille füüsikalis-mehaanilised omadused on kõikides suundades ühesugused, nimetatakse isotroopseteks materjalideks. Valatud terast, valatud vaske, hästi valmistatud betooni, klaasi jms. võib lugeda isotroopseteks materjalideks. Pingeolukorra uurimisel on tarvis oletada, et keha on valmistatud isotroopsest, ortotroopsest või harvemini anisotroopsest materjalist.

3. Ümberpaigutumiste ja deformatsioonide mõiste.

Väliskoormused põhjustavad keha deformatsioone ja temas toimuvad mitmesugused geomeetrilised muutused, mis seisavad punktide, joonte ja tasapindade ümberpaigutumises. Piki joont toimuvaid ümberpaigutumisi nimetatakse lineaarseteks ümberpaigutumisteks. Ümberpaigutumisi, mis on seotud joonte, samuti ka



Joon. 201.

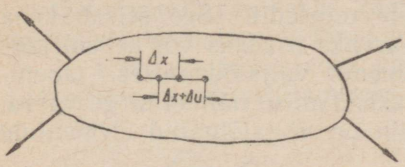
tasapindade pööramistega, nimetame nurk-ümberpaigutumisteks. Joonisel 201 on kujutatud mõned varvad, mis on deformeeritud otslõikele erinevalt rakendatud koormuste poolt. Saab kindlaks määrata, et lineaarne ümberpaigutumine Δl esineb tõmbe puhul (joon. 201, a), nurk-ümberpaigutumine φ aga väänamisel (joon. 201, b). Paindel on otslõikel kaks ümberpaigutumist: lineaarne f ja nurk-ümberpaigutumine Θ. (joon. 201, c).

Kui kehas fikseerida enne deformatsiooni kaks punkti (joon. 202), mis asuvad teineteisest kaugusel Δx, siis pärast deformatsiooni on nende omavaheline kaugus muutunud (suurenenud). Nimetame Δu absoluutseks pikenemiseks ja suhet $\varepsilon = \frac{\Delta u}{\Delta x}$ — suhteliseks pikenemiseks. Pikkuse Δx lühenemise puhul nimetame Δu absoluutseks lühenemiseks ja ε — suhteliseks lühenemiseks. Olenemata sellest, kas

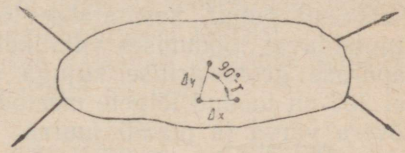
pikkus Δx suureneb või väheneb, nimetatakse suurust ε lineaarseks deformatsiooniks.

Kui kehas fikseerida enne deformatsiooni kaks joonlõiku Δx ja Δy, mis on asetatud teineteise suhtes 90°-lise nurga alla, siis peale deformatsiooni on see nurk muutunud (joon. 203). Tähistame nurga muutumise γ-ga ja nimetame seda suhteliseks nihkeks ehk nurkdeformatsiooniks.

Kui kehas enne deformatsiooni eraldada elementaarne ruumala



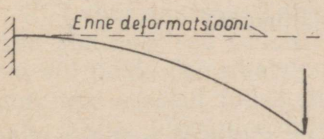
Joon. 202.



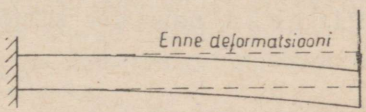
Joon. 203.

Δv, siis pärast deformatsiooni on see ruumala muutunud. Ruumala muutumise tähistame ΔO ja nimetame seda ruumala absoluutseks muutumiseks, suhet $\varepsilon_0 = \frac{\Delta O}{\Delta v}$ nimetame aga ruumala suhteliseks muutumiseks ehk ruumalaliseks deformatsiooniks.

Ümberpaigutumised (lineaarsed ja nurk-ümberpaigutumised) ja deformatsioonid (lineaarsed, nurk- ja ruumalalised) jaotatakse nende suhtelise võrdlemise juures suurteks ja väikesteks. Suuri ümberpaigutumisi esineb kehades, mis koormatuina muudavad tunduvalt oma geomeetrilist kuju üldmõõdete suhtes. Sellise



Joon. 204.



Joon. 205.

nähtuse näitena võib tuua elastset varrast (joon. 204), mis on koormatud otsal jõuga. Suured deformatsioonid esinevad peamiselt metalli külmalt tõmbamisel ja tulise metalli sepistamisel. Väikesed deformatsioonid esinevad kehade juures, mis koormamisel vähe deformeeruvad. Selle näitena võib tuua jäiga varva (joon. 205), mille juures ei saa märgata pärast deformatsiooni telje tugevat kõverdumist.

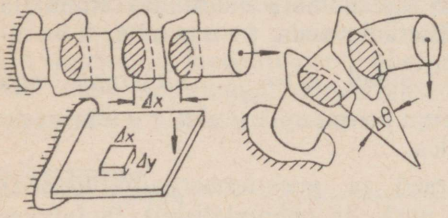
Kehi, mis pärast koormuse kõrvaldamist võtavad oma esialgse geomeetrilise kuju tagasi, nimetatakse täiesti elastseteks kehadeks, kehi aga, mis täielikult ei omanda oma esialgset kuju, nimetatakse osaliselt elastseteks. Sellest seisu-

kohast lähtudes jaotame ümberpaigutumised ja deformatsioonid elastseteks, mis kaovad pärast koormuse kõrvaldamist, ja mitteelastseteks ehk jääkdeformatsiooonideks, mis jäävad kehasse püsima ka pärast koormuse kõrvaldamist.

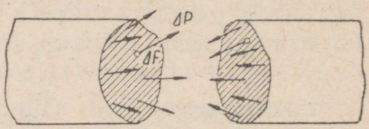
4. Lõigete meetod. Pinged, jõud ja momendid lõikes.

Sisemiste jõutegurite avastamiseks, mis tekivad kehas deformatsiooni puhul, kasutatakse lõigete meetodit. See seisab keha kujuteldavas lõikamises vajalikuks arvuks osadeks või kehast korrapärase geomeetrilise kujuga elemendi väljalõikamises. Joonisel 206 on toodud lõigete meetodi rakendamise näiteid sirge varva, kõvera varva ja plaadi juures. Siin on väljalõigatud elementide suuruseks Δx, $\Delta\Theta$, $\Delta x \cdot \Delta y$.

Kui keha pärast lõigete meetodi rakendamist kujutada koosnevaña kahest osast (joon. 207), siis keha ühe osa mõjul keha tei-



Joon. 206.



Joon. 207.

sele osale tekivad kahe saadud lõike igas punktis sisejõud. Pinnaelemendi ΔF kohta on see jõud ΔP.

Pingeks nimetame sisejõu intensiivsust

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta F},$$

s. t. jõudu, mis langeb ühele pinnaühikule. Edaspidi mõõdame jõudu kilogrammides ja pindala ruutsentimeetrites või ruutmillimeetrites; selle tulemusena saame pinge mõõtühikuks kg/cm² või kg/mm².

Kui lahutada elementaarjõud ΔP kaheks komponendiks ΔN ja ΔT, millest üks on suunatud pinnaelemendiga ΔF risti ja teine — tangentsiaalselt, siis neid kahte liiki pingeid

$$\sigma = \frac{\Delta N}{\Delta F} \text{ ja } \tau = \frac{\Delta T}{\Delta F}$$

nimetame vastavalt normaalpingeks ja tangentsiaalpingeks.

Pinged, lugedes neid lõikes ühtlaselt jaotatuks, annavad staatika seisukohalt resultantjõu ja momendi.

Lõikes mõjuvaid sisejõude jaotatakse normaaljõududeks

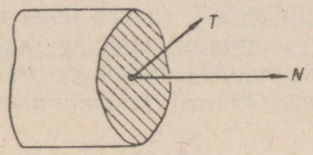
N ja tangentsiaaljõududeks T. Esimene jõud loetakse rakendatuks lõikega risti ja teine — tangentsiaalselt (joon. 208).

Momenti M_p (joon. 209), mille mõjumistasapind on lõikega risti, nimetatakse paindemomendiks. Momenti M_v, mis mõjub lõike tasapinnas, nimetatakse väändemomendiks.

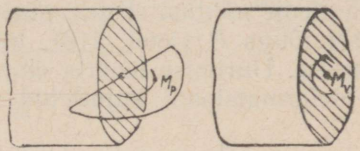
5. Deformeeritavas kehas toimuvate nähtuste teoreetilise tundmaõppimise kord.

Deformeeritavas kehas toimuvate nähtuste teoreetilisel tundmaõppimisel tuleb täpselt kinni pidada järgmisest korrast.

1. Uuritava keha jaoks valitakse vastavalt arvutuse täpsusele uurimisteooria ülesehitamiseks vajalikud oletused.



Joon. 208.



Joon. 209.

2. Keha mõõdete muudatusi, mis on seotud ümberpaigutumiste ja deformatsioonidega, vaadeldakse geomeetrilisest seisukohast. Selles protsessis koostatakse analüütilised seosed (a), mis matemaatilisel kujul väljendavad sidet deformatsioonide ja ümberpaigutumiste või mingite teiste geomeetriliste tegurite vahel.

3. Pingete leidmiseks lõigatakse keha mõtteliselt vajalikuks arvuks osadeks, s. t. rakendatakse lõigete meetodit.

4. Laboratoorsete katsete tulemuste üldistamise alusel koostatakse analüütilised seosed (b), mis seovad lõigetes mõjuvaid pingeid või jõude deformatsioonidega või ümberpaigutumistega. Nimetame neid seoseid füüsikalisteks seosteks.

5. Keha lõikamise tulemusena saadud üksikute osade kohta koostatakse staatika meetodite alusel analüütilised seosed (c), mis seovad väliskoormusi lõigetes mõjuvate pingete või jõududega. Need seosed on staatilise tasakaalu võrrandid.

6. Toimub seoste (a), (b) ja (c) formaalne matemaatiline ümbertöötamine, mille tulemusena määratakse teoreetiliselt kindlaks uuritava keha pingeolukord ja keha geomeetrilise kuju muutumine deformatsioonil.

Meetodit, mille juures me vaatleme keha järkjärgult geomeetrilisest, füüsikalisest ja staatilisest seisukohast, nimetame lühidalt abc-meetodiks.

Peale kirjeldatud meetodi kasutatakse tugevusõpetuses veel energeetilist meetodit, mis rajaneb energiateoreemide kasutami-

sele. See meetod annab samu tulemusi nagu abc-meetod, käesolevas raamatus aga kasutatakse teda väga harva.

Kokkuvõttes peab ütlema, et kõik kolm ülesannete liiki, millest oli juttu p-s 1, on lahendatavad arvutusvalemite abil, mis saadakse seoste (a), (b) ja (c) matemaatilise ümbertöötamise tulemusena.

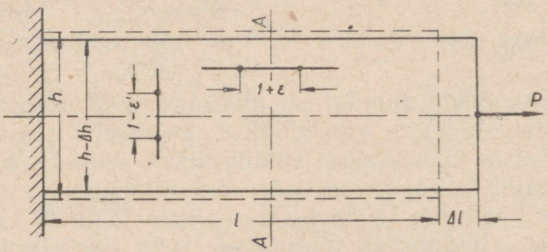
Esitatav põhiline kord kehas deformatsiooni puhul toimuvate nähtuste uurimisel on kasutamisel ka käesolevas raamatus.

I peatükk.

Ühesuunaline tõmme ja surve.

6. Varva tõmme.

Vaatleme nähtusi sirges, püsiva ristlõikega F varvas tema tõmbamisel jõuga P (joon. 210), mis on rakendatud otslõike raskuskeskmesse. Uurimise teooria ehitame järgmistele oletustele: varvas enne deformatsiooni kujutletud ristlõiked jäävad tasapinnalisteks



Joon. 210.

ka pärast deformatsiooni; ümberpaigutumised ja deformatsioonid on väikesed; varva materjal on homogeenne ja isotroopne.

Vaatleme varba geomeetriliselt seisukohalt. Varva tõmbamisel võib märgata tema pikenemist ja ristlõike mõõdete vähenemist. Absoluutse pikenemise tähistame Δl-iga ja absoluutse ristimõõdete lühenemise Δh-ga. Jagades saadud suurused vastavalt l ja h-ga, saame kaks lineaarset deformatsiooni:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon' = \frac{\Delta h}{h}. \tag{a}$$

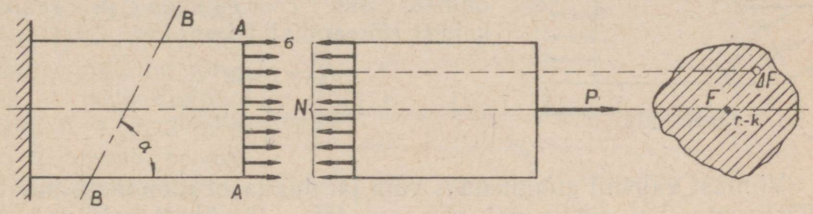
Esimest nimetatakse suhteliseks pikenemiseks ja teist suhteliseks ahenemiseks. Kõikide varva pikikiudude deformatsioon on ühesugune ($\varepsilon = \text{const}$), sest varval ei ole ristlõigete pöördumisi ja need jäävad meie poolt aktsepteeritud hüpoteesi põhjal tasapinnalisteks ka pärast deformatsiooni.

Pingete leidmiseks ristlõikes AA lõikame varva mõtteliselt

kaheks osaks (joon. 211). Varva ühe osa toimel teisele tekivad igas lõike punktis normaalpinged σ, mille suurus oleneb antud punkti läbiva kiu pikenemisest ja materjali füüsikalis-mehaanilistest omadustest. Katseliselt on kindlaks tehtud, et elastsete deformatsioonide puhul on pinge σ võrdeline deformatsiooniga ε, s. t.

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{b}$$

kus E on katseline tegur, mille suurus oleneb materjali füüsikalis-mehaanilistest omadustest (edaspidi nimetame seda tegurit elastsusmooduliks — vt. p. 8).



Joon. 211.

Plastiliste deformatsioonide puhul, kui varb peale koormuse eemaldamist ei omanda enam oma esialgseid mõõteid, on suuruste σ ja ε vaheline lineaarne seos rikutud.

Suhteline ahenemine, nagu katseliselt kindlaks on tehtud, on võrdeline suhtelise pikenemisega ε, s. t.

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon, \tag{b}$$

kus μ on katseliselt määratud tegur (sellest tegurist pikemalt p-s 9).

Nüüd koostame kõikide parempoolsele varva osale rakendatud jõudude tasakaalu võrrandi. See võrrand väljendab seost välisjõu P ja lõikes F jaotatud sisejõudude vahel. Kui pinnaelemendile ΔF mõjub normaalpinge σ, siis elementaarjõudude summa $\Delta N = \sigma\Delta F$ annab normaaljõu, mis võrdub välisjõuga P. Järelikult

$$\Sigma\sigma\Delta F = N = P. \tag{c}$$

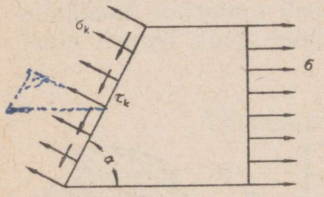
Homogeense ja isotroopse materjali puhul, kui $\varepsilon = \text{const}$, jagunevad normaalpinged kogu ristlõikes AA ühtlaselt ($\sigma = \text{const}$). Seepärast võime viimase võrrandi kirjutada järgmiselt:

$$\sigma\sum\Delta F = P,$$

kust saame otsitava tõmbepinge

$$\sigma = \frac{P}{F}. \tag{1}$$

Nüüd vaatleme kaldlõiget BB, mis asub nurga α all varva teljele (joon. 211). Selles lõikes on õieti kaks liiki pingeid (joon. 212): normaalpinged σ_k ja tangentsiaalpinged τ_k. Neid pingeid võib $\sigma = \text{const}$ tõttu lugeda ühtlaselt jaotatuks kogu kaldlõike pinnal F_k. σ_k ja τ_k leidmiseks koostame staatilise tasakaalu võrrandid varva osa kohta, mis asub lõigete AA ja BB vahel. Projitseerides kõik jõud alguses vektorite σ_k ja seejärel vektorite τ_k suunale, saame:



Joon. 212.

$$\sigma_k F_k - \sigma F \sin\alpha = 0;$$
$$\tau_k F_k - \sigma F \cos\alpha = 0.$$

Kuna pind F on pinna F_k projektsiooniks, siis $F = F_k \sin\alpha$ ja saadud kahest võrrandist leiame, et

$$\sigma_k = \sigma \sin^2\alpha; \qquad (2)$$

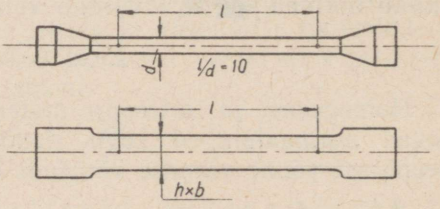
$$\tau_k = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \qquad (3)$$

Viimast valemit analüüsides võib järeldada, et τ_k on maksimaalse väärtusega, kui $\sin 2\alpha = 1$ ehk $\alpha = 45°$. Järelikult mõjuvad 45° all asetatud lõikesse m a k s i m a a l s e d t a n g e n t s i a a l p i n g e d

$$\tau_{k\,max} = \frac{\sigma}{2}. \qquad (4)$$

7. Proovikehadega teostatud katsete põhitulemusi staatilise tõmbe puhul.

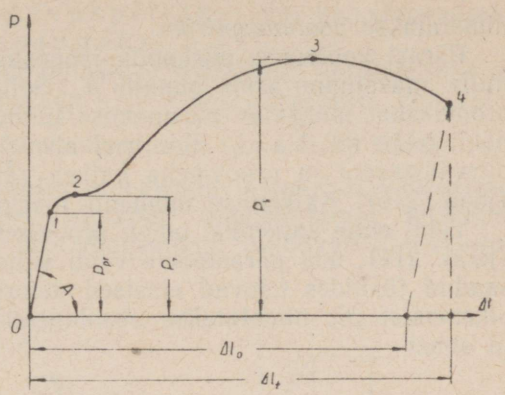
Mitmesuguste materjalide uurimiseks tõmbele reageerimise suhtes kasutatakse laboratoorses praktikas erilisi proovikehi. Nendele proovikehadele antakse harilikult prismaatilise varva kuju, mille kummaski otsas on pea, mis hõlbustab nende haaramist proovimist teostava masina poolt. Joonisel 213 on antud kaks tüüpilist normaalproovikeha, mida kasutatakse tõmbeproovide läbiviimisel.



Joon. 213.

Proovikehade tõmbamine toimub laboratooriumides erilistel tõmbemasinatel. Selle tõmbeprotsessi jooksul koormatakse proovikeha aeglaselt tema telje suunalise tõmbejõuga P, mille suurus muutub nullist kuni selle väärtuseni, mille juures materjal puruneb. Kogu deformatsiooniprotsessi vältusel jälgitakse jõu P suuruse muu-

tumist olenevalt absoluutsest pikenemisest Δl. Selleks otstarbeks on masinas pöörlev trummel temale kinnitatud paberiga, millele joonestub automaatselt pliiatsi või sulega kõver — t õ m b e d i a g r a m m. Harilikult on neis seadistes — indikaatorites — pliiatsi liikumine seotud jõu P suurusega ja trumli pöörlemine — pikenemise Δl suurusega.



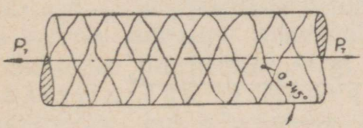
Joon. 214.

Tutvume üksikasjaliselt tõmbediagrammiga, mis on saadud pehmest terasest proovikeha tõmbamisel (joon. 214). Sellel diagrammil on järgmised iseloomulikud punktid: *0*, *1*, *2*, *3* ja *4*. Punkt *0* vastab proovikeha tõmbamise algmomendile. Sirgjoonelises piirkonnas *0* — *1* on pikenemine ja tõmbejõud võrdelised. Punkt *1*, kus sirge lõpeb, vastab proportsionaalsuse (võrdelisuse) piirile. Pinget sel momendil nimetatakse p r o p o r t s i o n a a l s u s e p i i r i k s

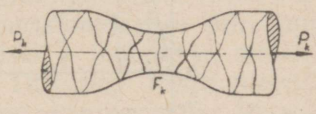
$$\sigma_{pr} = \frac{P_{pr}}{F}, \qquad (5)$$

kus P_{pr} on punkti *1* ordinaat ja F proovikeha esialgne ristlõike pind.

Punkt *2* asub sirgel, mis on paralleelne pikenemisteljega. See piirkond iseloomustab materjali niisugust seisukorda, kus proovikeha pikenemine toimub koormuse suurendamiseta. Niisugust näh-



Joon. 215.



Joon. 216.

tust nimetatakse m a t e r j a l i v o o l a v u s e k s. Selle voolavuse jooksul võib proovikeha välispinnal, eriti siis, kui ta on poleeritud, tähele panna kaldjoonte tekkimist (joon. 215), mida nimetatakse n i h k e j o o n t e k s. Need jooned tekivad materjalis plastiliste deformatsioonide tulemusena, mida põhjustavad olemasolevad tan-

gentsiaalpinged τ_k [võrrand (3)]. Kui jõud P_T, mille juures tekib voolavus, jagada F-iga, siis saadud pinget

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F} \tag{6}$$

nimetatakse *voolavuspiiriks.*

Pärast voolavuse piirkonda joonestub diagramm kõverjoonena, mille maksimum asub punktis *3.* Selle maksimumi juures tekib proovikehal märgatav purunemise tunnus lokaliseeritud ahenemise näol, tekib nn. k a e l. See kael aheneb edasisel tõmbamisel oma piirväärtuseni ja proovikeha katkeb väikseima ristlõike F_k kohalt (joon. 216). Katkemise momenti märgistab diagrammil punkt *4.*

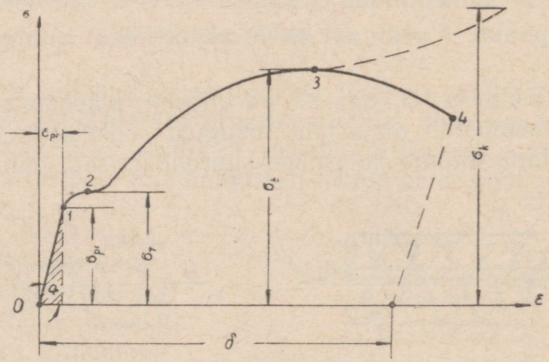
Veidi enne katkemist omab proovikeha suurimat pikenemist Δl_t (joon. 214), mis pärastpoole veidi väheneb, sest pärast katkemist saadud tükkides kaovad elastsed deformatsioonid. Saadud jääkpikenemist Δl_a nimetatakse absoluutseks pikenemiseks katkemisel ja suhet

$$\delta = \frac{\Delta l_a}{l} \tag{7}$$

— s u h t e l i s e k s p i k e n e m i s e k s k a t k e m i s e l. Ristlõike ahenemise astme hindamiseks kasutatakse suhet

$$\psi = \frac{F - F_k}{F}, \tag{8}$$

mida nimetatakse r i s t l õ i k e p i n n a s u h t e l i s e k s a h e n e m i s e k s k a t k e m i s e l.



Joon. 217.

Kui P_b on maksimaalne purustav koormus, mida saab rakendada proovikehale, ja P_k — katkemise momendil rakendatud koormus, siis pingeid

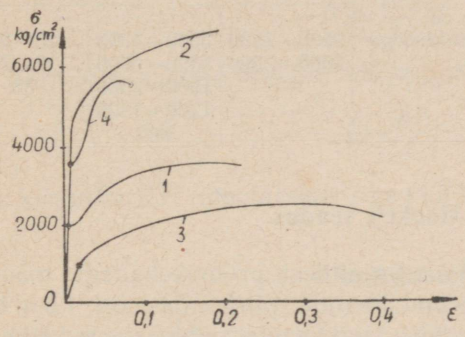
$$\sigma_b = \frac{P_b}{F} \tag{9}$$

ja

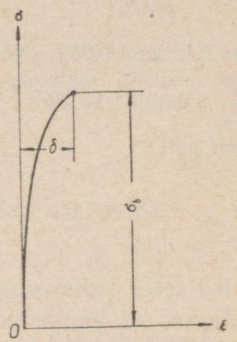
$$\sigma_k = \frac{P_k}{F_k} \qquad (10)$$

nimetatakse vastavalt tugevuspiiriks ehk katketugevuseks ja tegelikuks katkepingeks.

Mitmesuguste materjalide omaduste suhteliseks võrdlemiseks on tõmbediagrammi tarvis kujutada σ ja ε koordinaatides. Kui võtta $\sigma = \frac{P}{F}$ ja $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, siis uus tõmbediagramm (joon. 217) tuletab oma kujult meelde vana. Arvestades proovikeha läbimõõdu vähenemist kaela piirkonnas ja deformatsioonide intensiivsemat tekkimist samas piirkonnas, muutub uuel diagrammil tunduvalt kõverjoone-



Joon. 218.



Joon. 219.

line piirkond ja võtab kuju, mis on joonisel 217 kujutatud kriipsjoonega, kusjuures selle joone suurim ordinaat on võrdne σ_k-ga.

Tõmbediagrammil tuleb eristada kahte tähtsat piirkonda. Esimene piirkond (joonisel viirutatud) kujutab elastseid deformatsioone ja teine piirkond (joonisel viirutamata) — plastilisi deformatsioone. Tingimusi võtame elastsete deformatsioonide piirkonna jaoks $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{pr}$ ja plastiliste deformatsioonide piirkonna jaoks $\varepsilon \geqslant \varepsilon_{pr}$, kus ε_{pr} on suhteline pikenemine proportsionaalsuse piiri juures.

Suhtelise pikenemise järgi katkemisel δ jaotatakse materjalid plastilisteks ja haprateks. Tingimusi loeme materjalid plastilisteks, kui $\delta > 5\%$ ja haprateks, kui $\delta < 5\%$. Plastiliste materjalide hulka kuuluvad pehme teras, vask jms., haprate hulka — malm, karastatud teras, kivi, betoon jms.

Mitmesuguste materjalide füüsikalis-mehaaniliste omaduste iseloomustamiseks toome mõned tõmbediagrammid (joon. 218). Neist on *1* pehmele terasele, *2* — nikkelterasele, *3* — pronksile, *4* — kõvale süsinikterasele. Diagrammidest nähtub, et kõval süsinikterasel on kõrge tugevuspiir σ_b, väike pikenemine ja nõrgalt väljendatud voolavuspiir σ_T; pronksil on madal tugevuspiir ja puudub voola-

vuspiir; nikkelterasel on suur pikenemine, küllalt kõrge tugevuspiir ja puudub täielikult voolavuspiir.

Iseloomulikumaks hapraks materjaliks on malm. Sellest materjalist proovikeha tõmbediagramm on toodud joonisel 219. Tal on kõvera kuju. Malmil on väga madal proportsionaalsuse piir ja elastsete deformatsioonide piirkond avaldub väga nõrgalt. Tema tugevuspiir on palju madalamal kui pehmel terasel. Malmist proovikehade purunemine toimub ilma märgatavate plastiliste deformatsioonideta ($\delta \approx 0$; $\psi \approx 0$). Võrdluseks on tabelis 1 antud sagedamini kasutatavate materjalide kohta σ_T, σ_b ja δ arvulised väärtused.

Materjal	σ_T kg/cm²	σ_b kg/cm²	δ %
Teras 0,15 kuni 0,25% süsiniku sisaldusega	2000—2600	3600—4300	20—28
Teras 3—3,5% nikli sisaldusega . . .	2600—3300	5300—6600	22—27
Vask, külmalt valtsitud	—	1900—2600	38
Malm	—	1200—1800	—
Männi puit	—	800	—

8. Hooke'i seadus.

Katsetel mitmesugustest materjalidest proovikehadega määrati kindlaks, et elastsete deformatsioonide piirkonnas on tõmbejõud P võrdelised absoluutsete pikenemistega Δl, samuti on ka pinged σ võrdelised suhteliste pikenemistega ε.

Tõepoolest, kui vaadelda pehme terase tõmbediagrammi (vt. joon. 214 ja 217), siis saab piirkondades $0 - 1$ konstateerida sirgjoont. Kui nende sirgete kaldenurkade tg tähistame: $j = \operatorname{tg} A$ ja $E = \operatorname{tg} \alpha$, siis leiame joonistelt, et

$$j = \frac{P}{\Delta l} \text{ ja } E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

või teisiti:

$$P = j\Delta l; \tag{11}$$

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{12}$$

Saadud avaldised väljendavad Hooke'i seadust analüütilisel kujul.

Edaspidi nimetame j jäikusteguriks ja E — I järgu elastsusmooduliks. Esimese suuruse mõõtühikuks on kg/cm või kg/mm ja teise mõõtühikuks — kg/cm² või kg/mm², s. t.

pinge mõõtühik. Järgnevalt on toodud E väärtused mitmesuguste materjalide kohta.

Materjal	E kg/cm²
Ehitusteras 0,15—0,25% süsiniku sisaldusega	2 000 000
Teras nikli sisaldusega	1 900 000
Vask, külmalt valtsitud	1 100 000
Männi puit piki kiudu	100 000
Kautšuk	80

Tegurite j ja E vahelise olenevuse leidmiseks asetame võrrandisse (12) varem tuntud σ ja ε väärtused $\sigma = \frac{P}{F}$ ja $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$. Siis saame

$$P = \frac{EF}{l} \Delta l.$$

Võrreldes saadud valemit valemiga (11), leiame, et

$$j = \frac{EF}{l}, \tag{13}$$

kus korrutist EF nimetatakse ristlõike jäikuseks.

9. Ahenemistegur.

Mitmesugustest materjalidest proovikehadega tehtud katsetest selgus, et elastsete deformatsioonide piirkonnas ristlõike ahenemine ε' on võrdeline pikenemisega ε. Analüütiliselt kirjutatakse see omadus nii:

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon, \tag{14}$$

kus μ on ristlõike ahenemistegur (Poisson'i tegur).

Ristlõike ahenemistegurid mitmesuguste materjalide juures on järgmiste väärtustega:

Kork	0
Teras	0,25—0,30
Vask	0,31—0,34
Plii	0,43
Kautšuk	0,47
Kummi	0,5

Metallidele, mis töötavad plastiliste deformatsioonide piirkonnas, võib võtta $\mu \approx 0{,}5$.

10. Tõmbedeformatsioonile kulutatav energia.

Väliskoormused, mida rakendatakse deformeeritavale kehale, teevad tööd vastavate ümberpaigutumiste läbiviimiseks. Kui ümberpaigutumised on elastsed, siis see töö muutub tervikuna deformat-

sioonide potentsiaalseks energiaks, mille saab tagasi koormuse eemaldamisel. Kui keha on osaliselt elastne, siis osa välisjõudude tööst kulutatakse tagastamatult plastiliste deformatsioonide tekitamiseks. Koostame avaldise tõmbedeformatsiooniks kuluva energia kohta.

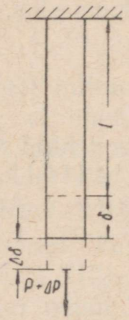
Olgu jõu P mõju all oleva varva, pikkusega l (joon. 220), pikenemine δ. P suurendamisel ΔP võrra tekib pikenemise juurdekasv $\Delta\delta$. Siis kulutatakse täiendaval pikenemisel tööd

$$\Delta A = P\Delta\delta.$$

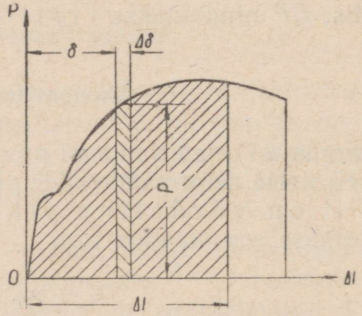
Summeerides elementaarsed energiad varva lõpliku pikenemise Δl piirides, saame pikenemiseks kulutatud koguenergia:

$$A = \sum P\Delta\delta. \tag{15}$$

Saadud summa, nagu pole raske märgata, on graafiliselt väljendatav tõmbediagrammi viirutatud pindalaga (joon. 221).



Joon. 220.



Joon. 221.

Elastsete deformatsioonide piirkonnas saab potentsiaalset energiat arvutada kolmnurga pindalana (joon. 222)

$$A_p = \frac{P\Delta l}{2}. \tag{16}$$

Kasutades valemit (11), koostame veel kaks avaldist:

$$A_p = \frac{1}{2} j\Delta l^2; \tag{16'}$$

$$A_p = \frac{P^2}{2j}. \tag{16''}$$

Valemis (16') on energia kujutatud absoluutse pikenemise funktsioonina; valemis (16'') tõmbava jõu funktsioonina.

Nüüd määrame e r i e n e r g i a koguenergia jagamise teel

varva deformeeritava ruumalaga. Arvestades valemeid (15) ja (1) ning oletades, et $\varepsilon = \frac{\delta}{l}$, saame

$$a = \frac{A}{Fl} = \sum \left(\frac{P}{F}\right) \Delta \left(\frac{\delta}{l}\right) = \sum \sigma \Delta \varepsilon. \qquad (17)$$

Saadud summa, nagu eelmiselgi juhul, kujutab graafiliselt joonisel 223 antud tõmbediagrammi viirutatud pinda.

Elastsete deformatsioonide piirkonnas arvutatakse potentsiaalne erienergia kolmnurga pinnana

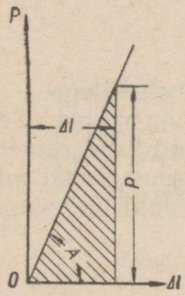
$$a_p = \frac{\sigma\varepsilon}{2}. \qquad (18)$$

Vastavalt valemile (12) koostame veel kaks avaldist:

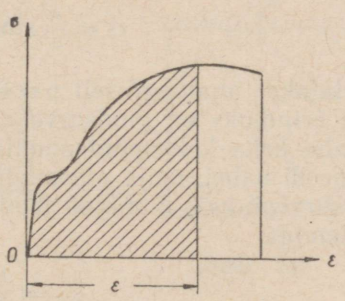
$$a_p = \frac{1}{2} E\varepsilon^2; \qquad (18')$$

$$a_p = \frac{\sigma^2}{2E}. \qquad (18'')$$

Valemis (18′) on energia antud suhtelise pikenemise funktsioonina, valemis (18″) — pinge funktsioonina.



Joon. 222.



Joon. 223.

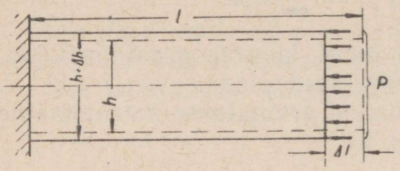
Erienergiat saab kasutada mitmesuguste materjalide kvaliteedi suhteliseks hindamiseks löökkoormustele vastupidavuse seisukohalt. Tõepoolest, kui näiteks võtta kaks eri materjalist proovikeha ja purustada nad löökkoormusega, siis see materjal, millel on suurem tõmbediagrammi pindala, järelikult ka suurem a väärtus, vajab suuremat energiakulu löökkoormuse poolt.

11. Varva surve.

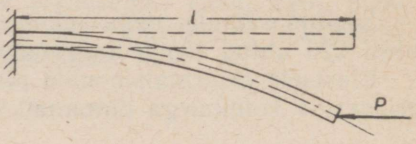
Puhtal kujul võib esitada survenähtust, koormates lühikest prismaatilist varba ühtlaselt jaotatud suruvate koormustega (joon. 224), mis on rakendatud otslõikesse. Pikka varba telgjõuga P koormates

võime saada peale surve veel tema telje paindumise — nõtke (joon. 225). Pikkade varbade nõtket vaatleme eraldi.

Survel varva pikkus väheneb ja ristlõike mõõted suurenevad. Pikkuse l absoluutse lühenemise tähistame Δl ja ristimõõdete pike-



Joon. 224.



Joon. 225.

nemise — Δh. Saadud suuruste jagamisel vastavalt l ja h-ga saame suhtelise lühenemise $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ja suhtelise pikenemise $\varepsilon' = \frac{\Delta h}{h}$.

Pinged ristlõikes ja kaldlõikes arvutatakse järgmiste valemite abil:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{P}{F}; \\ \sigma_k &= \sigma \sin^2 \alpha; \\ \tau_k &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha; \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

neid tuletatakse analoogiliselt p-s 6 antud valemitega.

Surve erijuhuks on pindsurve ehk m u l j u m i n e. See nähtus esineb kahe keha kokkupuutepunktides. Pindsurve esineb näiteks pleki ja needi vahel, maja alusmüüri kokkupuutepinnal maaga jne. Kui pindsurvepinnale F mõjub jõud P, siis pindsurvepinge määratakse valemiga

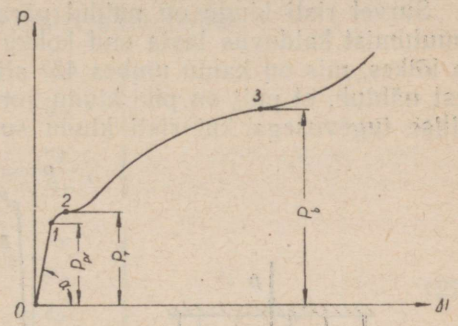
$$\sigma_{ps} = \frac{P}{F}. \qquad (20)$$

12. Proovikehadega teostatud katsete põhitulemusi staatilise surve puhul.

Mitmesuguste materjalide käitumise uurimiseks survel kasutatakse laboratoorses praktikas proovikehi, millele on antud kuubikeste või silindrite kuju, mille kõrgus on läbimõõduga võrreldes väike. Selliste proovikehade proovimist toimetatakse eripressidel. Nende katsete vältel, samuti nagu tõmbel, fikseeritakse suruvate jõudude väärtused olenevalt proovikeha kõrguse absoluutsest lühenemisest.

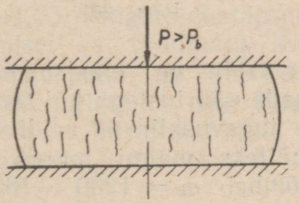
Joonisel 226 on antud survediagramm, mis on saadud pehmest terasest proovikeha proovimisel. See diagramm on väliselt tõmbe-

diagrammi sarnane ja tal on analoogilised iseloomustavad punktid *0*, *1*, *2* ja *3*. Punktis *3* survekõver ei lange, nagu see oli tõmbel, vaid tõuseb, sest proovikeha hakkab võtma vaadi kuju ja edasisel kõrguse vähenemisel pressitakse kokku. Proovikeha on pärast sellist operatsiooni laiaks muljutud kujuga ja kannatab välja võrdlemisi suuri koormusi väikese kõrguse vähenemise juures. Joonisel 227 on toodud sellise pehmest terasest valmistatud proovikeha kuju pärast seda, kui ta allutati suurtele survedeformatsioonidele ($P > P_b$).

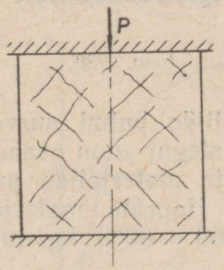


Joon. 226.

Haprad materjalid, nagu malm, betoon, kivi jt. purunevad väikeste survedeformatsioonide juures ja neid ei saa kokku pressida. Nende survediagramm on väga nõrgalt väljendatud sirgjoonelise osaga kõver. Malmist proovikeha purunemise iseloom (joon. 228)

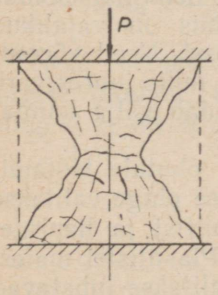


Joon. 227.



Joon. 228.

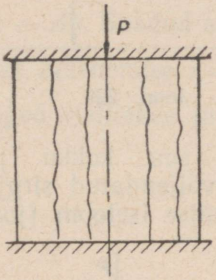
näitab, et purunemine toimub tangentsiaalpingete $\tau_{k\,max}$ toimel, mis mõjuvad lõigetes, mis asuvad koormamistelje suhtes kaldu umbes 45° all. Betoonist proovikeha, mis on paigutatud kahe määrimata tugiplaadi vahele, puruneb analoogiliselt malmiga kaldpinda pidi (joon. 229). Määritud tugiplaatide puhul see proovikeha lõhestub vertikaalselt (joon. 230). Viimast nähtust saab seletada rakendatud survejõu suunaga ristiolevate mitteelastsete pikenemiste ε' olemasoluga. Sel juhul määrimine vähendab hõõrdejõude, mis tekivad tugiplaatide pinnal, ja selle tõttu nad avaldavad vähe mõju deformatsioonide ε' arengule.



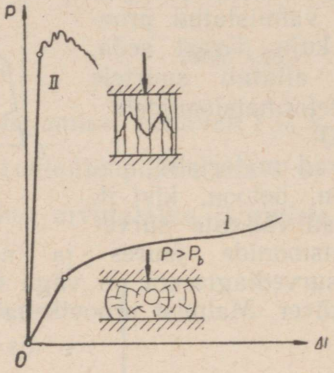
Joon. 229.

Puidul kuubikuna kui ortotroopsel materjalil on erinevad omadused olenevalt rakendatud survejõu suunast. Joonisel 231 on toodud kahe juhu survediagrammid. Esimesel juhul (*I*) suruti puitu risti kiudu, teisel juhul (*II*) — piki kiudu.

Survel risti kiudu on puidul pärast proovikeha tünnikujuliseks muutumist kalduvus lasta end kokku pressida, piki kiudu puruneb ta lõikes, mis on kaldu umbes 45° all. Joonisel 231 toodud kõveratest nähtub, et puit on piki kiudu surumisel palju suurema mehaanilise tugevusega kui risti kiudu surumisel.



Joon. 230.



Joon. 231.

Metallide puhul survel voolavuspiir σ_T', elastsusmoodul E ja ahenemistegur μ on peaaegu samade väärtustega kui tõmbe juures. Plastiliste materjalide puhul on tugevuspiir σ_b' veidi suurem kui tõmbel. Haprate materjalide, näiteks malmi juures on survel $\sigma_T' = 5000 - 8000$ kg/cm² ja tõmbel $\sigma_T = 1200 - 1800$ kg/cm².

13. Varva staatilise tugevuse arvutamine tõmbel ja survel.

Pingeolukorra tundmine tõmbel ja survel, samuti ka mitmesuguste materjalide käitumise tundmine nende deformatsioonide puhul võimaldab kirjutada tugevusvõrrandid, mis on vajalikud p-s 1 mainitud kolme liiki ülesannete lahendamisel. Need võrrandid on vajalikud ristlõike pindala F määramiseks, mille juures varb on minimaalseima kaaluga ja purunematult suudab välja kannatada antud koormust.

Varvas tekkivat pinget, mis vastab materjali ohutule töötamisele, nimetatakse lubatavaks pingeks. See pinge valitakse plastiliste materjalide jaoks olenevalt voolavuspiirist ja hapratel materjalidel — olenevalt tugevuspiiri suurusest. Plastilistel materjalidel, mille diagrammil ei ole voolavusastet, valitakse lubatavad pinged tingvoolavuspiiri $\sigma_{0,2}$ järgi; see piir on punkti *I'* ordinaa-

diks (joon. 232), mis saadakse sirge $0'1'$ joonestamisel nurga α all ja millel on abstsiss $\varepsilon = 0{,}002$ (0,2%).

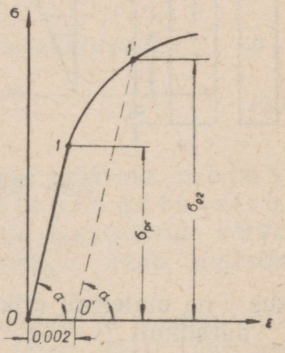
Tähistades tõmbel ja survel lubatavaid pingeid tähtedega R_t ja R_s, kirjutame nende suuruse kindlaksmääramiseks võrrandid, vastavalt plastiliste ja haprate materjalide puhul:

$$\left.\begin{aligned} R_t &= \frac{\sigma_T}{n_T}, \\ R_s &= \frac{\sigma_T'}{n_T}, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

$$\left.\begin{aligned} R_t &= \frac{\sigma_b}{n_b}, \\ R_s &= \frac{\sigma_b'}{n_b}, \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

kus n_T ja n_b on varutegurid ehk ohutustegurid voolavuspiiri ja tugevuspiiri (katketugevuse) suhtes.

Harilikult on varutegur $n_T = 1{,}5 - 3$. Keha pingeolukorra täpsel kindlaksmääramisel ja kõrge kvaliteediga materjali puhul võib võtta $n_T = 1{,}25—1{,}33$. Pingete ebatäpsel kindlaksmääramisel ja tundmatu kvaliteediga materjali puhul $n_T = 3 - 4$. Mis puutub varutegurisse n_b, siis kõigub ta harilikult laiades piirides. Malmi juures võetakse näiteks $n_b = 4 - 8$, puidu puhul $n_b = 8 - 12$.



Joon 232.

Tundes lubatavaid pingeid, kirjutame tugevusvõrrandid vastavalt tõmbele ja survele järgmisel kujul:

$$\sigma_t = \frac{P}{F} \leqslant R_t; \qquad (23)$$

$$\sigma_s = \frac{P}{F} \leqslant R_s. \qquad (24)$$

Need võrrandid võimaldavad leida: antud koormuste puhul ristlõigete pindala, tuntud koormuste ja ristlõigete pindalade puhul pingeid σ, nende pingete abil aga varutegureid

$$\left.\begin{aligned} n_T &= \frac{\sigma_T}{\sigma}, \\ n_b &= \frac{\sigma_b}{\sigma}, \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

mille suuruse järgi saab kujutluse varva tugevusest.

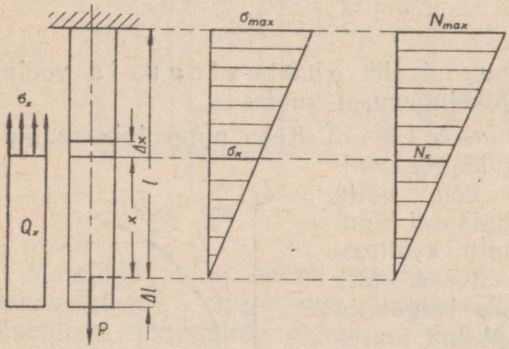
14. Varva tõmme, arvestades omakaalu.

Mõjude liitmise printsiip.

Vaatleme prismaatilise, ühte otsa pidi vertikaalselt üles riputatud varva tõmmet (joon. 233) omakaalu mõjul. Sellisel koormamisel deformeerub varb oma pikkuses ebaühtlaselt. Ülemise lõike punktides on suhteline pikenemine maksimaalne ε_{max}, alumise lõike punktides aga on pikenemine null. Kui pikkuse Δx ulatuses on suhteline pikenemine ε_x, siis varva absoluutse pikenemise Δl saame pikenemiste $\varepsilon_x \Delta x$ summeerimise teel pikkuse l ulatuses, s. t.

$$\Delta l = \sum \varepsilon_x \Delta x. \qquad (a)$$

Pinge leidmiseks lõikame varva kahte ossa lõikes, mis asub kaugusel x. Selles lõikes mõjuvad normaalpinged σ_x, mida saab Hooke'i seaduse põhjal [vt. võrrand (12)] siduda deformatsioonidega ε_x:



Joon. 233.

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \qquad (b)$$

Tasakaalu puhul peab kõikide sisejõudude summa, mis on jaotatud varva alumise osa lõikepinnas, olema selle osa kaaluga võrdne:

$$Q_x = Fx\gamma,$$

kus γ on materjali erikaal kg/cm^3.

Järelikult

$$\sigma_x F = Fx\gamma, \qquad (c)$$

kust saame, et

$$\sigma_x = x\gamma. \qquad (26)$$

Kandes σ_x väärtused joonisele risti varva teljega, on kerge ehitada pingete jaotuse epüüri pikkuse l piirides. Joonisel 233 see epüür kujuneb kolmnurgaks, sest suurus σ_x oleneb x-ist lineaarselt. Vastavalt joonisele suurim pinge

$$\sigma_{max} = l\gamma. \qquad (27)$$

Analoogiliselt pingete epüüriga saab ehitada jõu $N_x = F\sigma_x$ epüüri. See epüür on joonisel 233 samuti kolmnurk.

Kasutades avaldisi (a), (b) ja (27), leiame varva täieliku pikenemise

$$\Delta l = \sum \frac{\sigma_x \Delta x}{E} = \frac{1}{E} \sum \sigma_x \Delta x = \frac{\sigma_{max} l}{2E} = \frac{\gamma}{2E} l^2,$$

kus $\Sigma \sigma_x \Delta x = \frac{\sigma_{max} l}{2}$ on pingete σ_x epüüri pindala.

Kui tähistada varva omakaalu $Q = Fl\gamma$ ja jäikustegurit $j = \frac{EF}{l}$, siis pärast asendamist saame:

$$\Delta l = \frac{Q}{2j}. \tag{28}$$

Võrreldes saadud avaldisi võrrandiga (11), märkame, et varva kaalu poolt põhjustatud täielik pikenemine võrdub kaaluta varva pikenemisega jõu $\frac{Q}{2}$ toimel, mis on rakendatud varva otslõikesse.

Nüüd arvutame maksimaalse pinge ja täieliku pikenemise juhul, kui varva otsa on rakendatud jõud P (joon. 233). Maksimaalne pinge on kahe pinge summa:

$$\sigma_{max} = l\gamma + \frac{P}{F}. \tag{29}$$

Täielik pikenemine koosneb samuti kahest suurusest:

$$\Delta l = \frac{Q}{2j} + \frac{P}{j} = \frac{0{,}5Q + P}{j}. \tag{30}$$

Vaadeldud nähtuse põhjal saame kindlaks määrata mõjude liitmise ehk mõjude olenematuse printsiibi. Sõnastame ta nii: *mitme jõufaktori koosmõju kogutulemus võrdub nende jõufaktorite mõjude tulemuste summaga, mida saaksime nende eraldi mõjumisel.*

Rakendame mõjude liitmise printsiipi pingete ja täieliku pikenemise arvutamisele astmelise varva puhul (joon. 234). Tähistame esimese osa kaalu Q_1-ga, teise osa kaalu Q_2-ga, varva otsa rakendatud jõudu P-ga. Eespool tuletatud valemite põhjal leiame pinged neljas joonisel näidatud lõikes:

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_1}, \quad \sigma_{2,1} = \frac{P + Q_1}{F_1},$$
$$\sigma_{2,3} = \frac{P + Q_1}{F_2}, \quad \sigma_3 = \frac{P + Q_1 + Q_2}{F_2}, \tag{31}$$

kus F_1 ja F_2 on vastavate osade lõigete pindala.

Kandes saadud pingete väärtused varva teljega risti asuvas suunas joonisele, saame pingete epüüri (joon. 234).

Varva täielik pikenemine koosneb kahest pikenemisest, mis vastavad pikkustele l_1 ja l_2:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{P + 0{,}5Q_1}{j_1} + \frac{P + Q_1 + 0{,}5Q_2}{j_2}, \qquad (32)$$

kus $j_1 = \frac{EF_1}{l_1}$ ja $j_2 = \frac{EF_2}{l_2}$ on jäikustegurid.

Lühikese varva puhul, kus võib omakaalu mitte arvestada, saab täielikku pikenemist arvutada valemiga

$$\Delta l = \left(\frac{1}{j_1} + \frac{1}{j_2}\right) P.$$

Kasutades avaldist

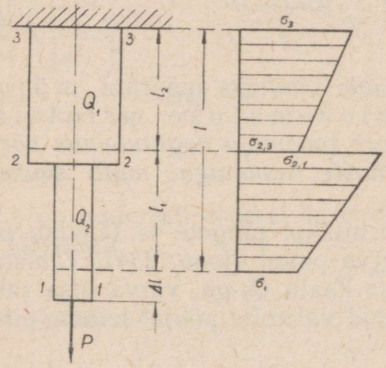
$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j_1} + \frac{1}{j_2}, \qquad (33)$$

võime viimase võrrandi kirjutada kujul

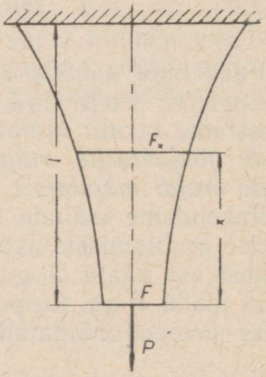
$$\Delta l = \frac{P}{j}. \qquad (34)$$

See valem tuletab meelde võrrandit (11), seetõttu nimetame suurust j jäikusteguriks.

Võtame muutuva ristlõikega varva ja riputame selle vertikaal-



Joon. 234.



Joon. 235.

selt üles (joon. 235). Niisuguse varva igas lõikes olenevad omakaalust ja varva otsale rakendatud jõust P tingitud pinged varva kujust. Varvale võib anda teatud kindla kuju, mille juures pinged osutuvad ühesuurusteks kõikides lõigetes. Sellist varba, mille kuju vastab väljendatud tingimusele, nimetatakse tingimusi üht-

lase vastupidavusega varvaks. Sellise varva kohta on teoreetiliselt kindlaks määratud järgmine lõigete pindalade vaheline suhe:

$$\frac{F_x}{F} = e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}, \qquad (35)$$

kus $e \approx 2{,}718$ on naturaallogaritmide alus;

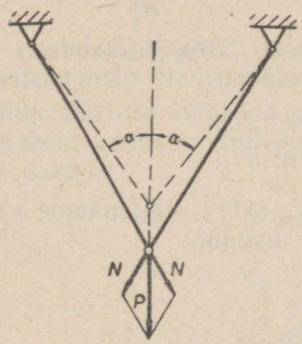
$\sigma = \frac{P}{F}$ — pinge varva alumises lõikes;

x — lõigete F ja F_x vaheline kaugus.

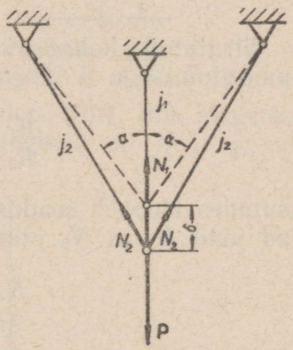
15. Lihtsamad staatiliselt määramatud süsteemid.

Süsteemi, mis on moodustatud varrastest, nimetatakse staatiliselt määratuks, kui neis varrastes mõjuvad jõud on määratavad staatika meetodite abil. Süsteem on staatiliselt määramatu, kui varrastes mõjuvate jõudude leidmiseks ei jätku staatika võrrandeist.

Näitena tutvume süsteemiga, mis koosneb kahest šarniiriga ühendatud vardast ja on koormatud jõuga P (joon. 236). Kui ole-



Joon. 236.



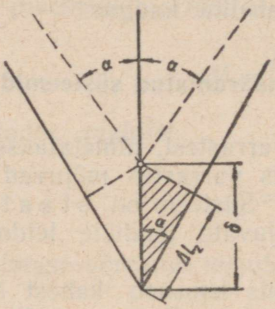
Joon. 237.

tada, et deformeerumise käigus varrastevaheline nurk α muutub vähe, siis on kerge leida varrastes mõjuvad jõud N, lahutades jõu P kahes suunas komponentideks jõuröövpküliku abil. Sel juhul saab ülesannet täies ulatuses lahendada staatika meetodiga.

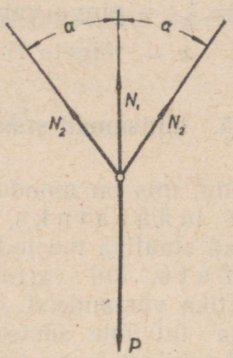
Vaatleme nüüd süsteemi, mis koosneb kolmest vardast, mis asetsevad joonise tasapinnas (joon. 237). Koormame seda süsteemi šarniiris, kus lõikuvad kolme varda teljed, jõuga P. Rakendatud jõu mõjul vardad venivad. Varrastes tekkivad tõmbejõud on tasakaalus väliskoormusega P. Kolme tundmatu jõu leidmiseks annab staatika ainult kaks võrrandit. Järelikult on süsteem staatiliselt määramatu.

Määrame kindlaks jõud selle süsteemi varrastes, lugedes süsteemi vertikaaltelje suhtes sümmeetriliseks. Oletame, et deformeerumise protsessis muutub nurk α vähe ja jõudude ning pikenemiste vahel on lineaarne olenevus (Hooke'i seadus).

Süsteemi deformeerumisel šarniir, kus on rakendatud jõud P, paigutub ümber ainult vertikaalselt pikkuse δ võrra. Seejuures võib keskmise ja äärmiste varraste absoluutseid pikenemisi (vaa-



Joon. 238.



Joon. 239.

deldes viirutatud kolmnurka joonisel 238) ligikaudselt siduda ümberpaigutumisega δ järgmiste geomeetriliste olenevustega:

$$\left.\begin{aligned} \Delta l_1 &= \delta, \\ \Delta l_2 &= \delta \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Kasutades Hooke'i seadust [vt. v. (11)], väljendame varrastes mõjuvad jõud N_1 ja N_2 pikenemiste kaudu:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= j_1 \Delta l_1, \\ N_2 &= j_2 \Delta l_2, \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

kus $j_1 = \frac{EF_1}{l_1}$ ja $j_2 = \frac{EF_2}{l_2}$ on vastavad varraste jäikustegurid.

Projitseerides kõik jõud, mis on rakendatud šarniiris (joon. 239), vertikaalile, koostame staatika võrrandi

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P. \qquad (c)$$

Asetades saadud võrrandisse avaldised (b) ja arvestades seejuures olenevusi (a), saame

$$\delta = \frac{P}{j}, \qquad (36)$$

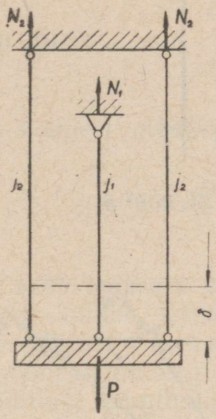
kus suurust

$$j = j_1 + 2j_2 \cos^2 \alpha \qquad (37)$$

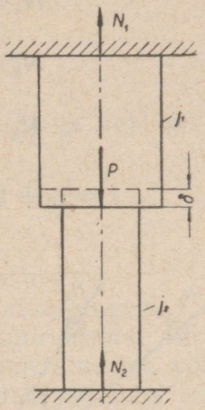
nimetame süsteemi jäikusteguriks. Määrame varrastes mõjuvad jõud valemi (b) abil, kasutades avaldisi (a) ja (36):

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{j_1}{j} P, \\ N_2 &= \frac{j_2 \cos\alpha}{j} P. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Rakendame saadud valemeid real juhtudel.



Joon. 240.



Joon. 241.

1. Sümmeetrilise süsteemi puhul (joon. 240), mis koosneb kolmest elastsest vardast, millede jäikustegurid on j_1 ja j_2, võttes, et $\alpha = 0$, saame:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{P}{j}, \\ N_1 &= \frac{j_1}{j} P, \\ N_2 &= \frac{j_2}{j} P, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

kus

$$j = j_1 + 2j_2.$$

2. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud (joon. 241) astmelise varva puhul, oletades, et $\alpha = 180°$, saame:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{P}{j}, \\ N_1 &= \frac{j_1}{j} P, \\ N_2 &= -\frac{j_2}{j} P, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

[1] Jõud N_2 on survejõud varva alumises osas ja on seepärast miinusmärgiga.

kus

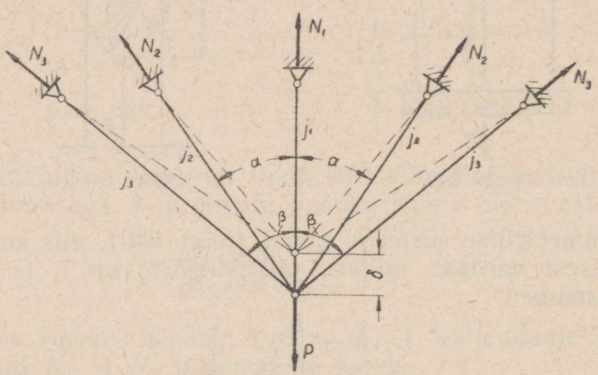
$$j = j_1 + j_2.$$

3. Kui koorem P mõjub süsteemile, mis koosneb viiest elastsest vardast (joon. 242), siis kirjutame valemid (36), (37) ja (38) järgmiselt:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{P}{j}, \\ N_1 &= \frac{j_1}{j} P, \\ N_2 &= \frac{j_2 \cos\alpha}{j} P, \\ N_3 &= \frac{j_3 \cos\beta}{j} P, \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

kus

$$j = j_1 + 2j_2 \cos^2\alpha + 2j_3 \cos^2\beta.$$



Joon. 242.

16. Algpinged ja temperatuurpinged.

Staatiliselt määramatutes süsteemides on võimalik algpingete tekkimine, mis on tingitud süsteemi detailide kokkumonteerimisest. Need pinged esinevad välisjõudude puudumisel ja olenevad geomeetrilistest mõõdetest, kokkumonteerimise ebatäpsuste suurustest ja materjali mehaanilistest omadustest.

Oletame, et kolme varda (vt. joon. 237) kokkumonteerimisel selgus, et keskmise varda pikkus l_1 on $l_1 - a$, kus a on valmistamise ebatäpsust iseloomustav suurus. Selleks, et süsteemi kokku monteerida, on tarvis keskmist varrast pikendada Δl_1 võrra ja šarniir, milles ühinevad kaks külgmist varrast, paigutada üles suuruse

$$\delta = a - \Delta l_1 \qquad (a)$$

võrra.

Keskmise varda pikendamiseks tuleb rakendada jõudu P_1 ja šarniiri ümberpaigutamiseks — jõudu P_2. Kasutades valemeid (11) ja (36), saame väljendada jõud ümberpaigutumiste kaudu:

$$P_1 = j_1 \Delta l_1 \quad \text{ja} \quad P_2 = j\delta, \tag{b}$$

kus j on kahest vardast koosneva süsteemi jäikustegur; vastavalt valemile (37)

$$j = 2j_2 \cos^2 \alpha.$$

Staatika alusel

$$P_1 = P_2. \tag{c}$$

Saadud kolmest olenevusest (a), (b) ja (c) on kerge saada

$$P_1 = \frac{a}{\frac{1}{j_1} + \frac{1}{j}}, \tag{42}$$

mille järel saab määrata pinged varrastes.

Vaatleme, kuidas leitakse temperatuurpingeid. Temperatuuri muutumine põhjustab keha mõõdete suurenemist või vähenemist. Kui α on joonpaisumistegur ja Δt temperatuuride vahe, siis temperatuuri ühtlase muutumise tõttu isotroopse keha kõikides suundades tekkiv deformatsioon on

$$\varepsilon_t = \alpha \Delta t. \tag{43}$$

Pinged tekivad kehas ainult siis, kui on takistusi deformatsioonide ε_t tekkimisele. Näiteks kui prismaatiline varras asetada kahe jäiga seina vahele, siis temperatuuri tõusul Δt võrra tekivad vardas survepinged

$$\sigma_s = E\varepsilon_t = E\alpha\Delta t. \tag{44}$$

Temperatuurpinged tekivad joonisel 237 kujutatud süsteemis siis, kui näiteks keskmise varda temperatuuri tõsta Δt võrra. Temperatuuri tõus põhjustab keskmise varda pikenemise $\alpha \Delta t l_1$ võrra. Tekkinud pikenemise mõju on analoogiline valmistamise ebatäpsust iseloomustava suuruse a mõjuga (vt. käesoleva p-i algus). Järelikult võib survejõudu P_1, mis takistab varda vaba paisumist, määrata valemiga (42), s. t.

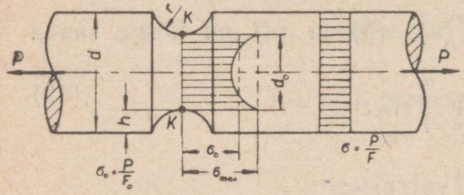
$$P_1 = \frac{\alpha \Delta t l_1}{\frac{1}{j_1} + \frac{1}{j}}, \tag{45}$$

pärast mida on kerge leida survepinged keskmises vardas ja tõmbepinged külgmistes varrastes, sest jõud P_1 põhjustab nende varraste tõmmet.

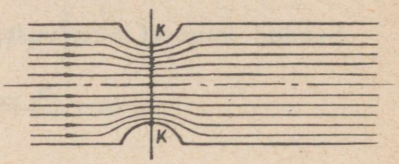
17. Pingete kontsentratsioon.

Sisselõigetega varva nõrgestatud lõikes F_0 (joon. 243) ilmneb tõmbel ja survel normaalpingete ebaühtlane jaotumine. See nähtus on iseloomustav punktidele K, mis asuvad sisselõigete välispinnal.

Hüdrodünaamilise analoogia põhjal saab seletada pingete ebaühtlase jaotumise pilti varva kontuuri sujuvuse katkemise kohtades. Selleks kujutleme varba kitsenemist omava toruna (joon. 244). Täidame selle ideaalse vedelikuga, mis liigub toru telje suunas. Selle vedeliku liikumise lineaarseid kiirusi võime lugeda tõmbe-



Joon. 243.



Joon. 244.

pingeid peegeldavateks suurusteks. Kitsendatud lõikes tuleb maksimaalseid kiirusi oodata punktides K ja minimaalseid — teljel asuvates punktides.

Lähtudes sellest analoogiast, võime pingete jaotumist lõikes F_0 kujutada ligikaudselt joonisel 243 antud epüüriga. Epüürist nähtub, et punktides K saavutavad pinged maksimaalse väärtuse σ_{max}, keskkohal aga on nad minimaalse väärtusega. Pingete kohaliku suurenemise nähtust punktides K nimetatakse kohalike pingete kontsentratsiooniks.

Pingete kontsentratsiooni astme hindamiseks kasutatakse kontsentratsioonitegurit α_k, mis on pingete σ_{max} suhe keskmise pingega lõikes:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}, \tag{46}$$

kus

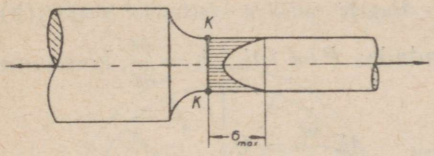
$$\sigma_0 = \frac{P}{F_0}.$$

See tegur leitakse sagedamini eksperimentaalselt, sest teoreetilised meetodid on kasutatavad ainult vähestel erijuhtudel. Suurus α_k oleneb sisselõike kujust ja suureneb sügavuse h suurenemisega ning raadiuse r vähenemisega.

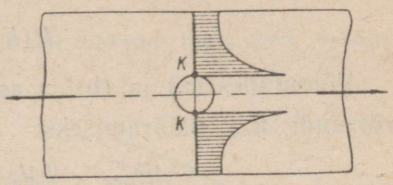
Suhe $\frac{d_0}{d}$ mõjutab samuti suurust α_k. Pingete kontsentratsioon

tekib võlli diameetrite üleminekutel (joon. 245), aukude lähedal (joon. 246) jne. Augu puhul, mille diameeter on varva laiusega võrreldes väike, on teoreetiliselt kindlaks määratud, et $\alpha_k = 3$.

Kui pinged σ_{max} on suured, avaldavad nad mõningat mõju staatilisele tugevusele, tunduvalt mõjutavad nad materjali tugevust dünaamilisel koormamisel. Masina detailide konstrueerimisel tuleb vältida sügavaid sisselõikeid, järske ristlõigete üleminekuid jne.,



Joon. 245.

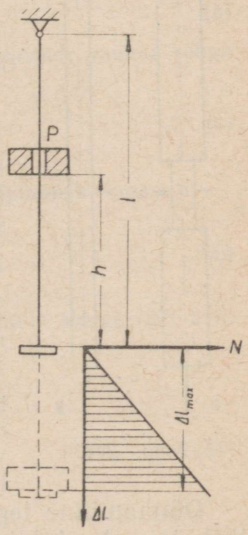


Joon. 246.

sest nende läheduses kontsentreeruvad pinged, mis võivad põhjustada materjali enneaegset purunemist.

18. Pinged varvas löökkoormuse puhul.

Leiame vertikaalselt üles riputatud varva pikenemise ja temas tekkivad pinged löökkoormuse P mõjul, mis langeb kõrguselt h (joonis 247). Antud ülesande lahendamisel oletame, et löögi alguses omandab varva ots hetkeliselt langeva koorma kiiruse $v = \sqrt{2gh}$ (kus $g = 9{,}81$ m/sek² on raskusjõu kiirendus), kogu deformeerumisprotsessi vältel on varva pikenemised võrdelised tõmbejõududega $\Delta l = \frac{N}{j}$ (kus j on varva jäikustegur), varva massi me ei võta arvesse, sest vaatleme juhtu, kus see mass on langeva koorma massiga $m = \frac{P}{g}$ võrreldes väike, ja ei arvesta võimalikke energia kadusid löögil.



Joon. 247.

Kui koorem lööb vastu alust, toimub varva dünaamiline pikenemine suuruse Δl_{max} võrra. See pikenemine on suurem staatilisest pikenemisest $\Delta l_s = \frac{P}{j}$.

Arvutusvõrrandi koostamiseks kasutame energia jäävuse seadust, mille esimesena formuleeris geniaalne vene teadlane M. Lo-

monossov. Sel juhul arvestame, kui võimalikke energiakadusid mitte tähele panna, et pikenemisdeformatsiooni potentsiaalne energia [vt. v. (16′)]

$$a_p = \frac{1}{2} j \Delta l^2_{max} \qquad (a)$$

saadakse koorma P poolt tehtava töö arvel viimase langemisel kõrguselt $h + \Delta l_{max}$, s. t.

$$P(h + \Delta l_{max}). \qquad (b)$$

Võrrutades (a) ja (b) ja asendades $P = j\Delta l_s$, $h = \frac{v^2}{2g}$, koostame võrrandi Δl_{max} määramiseks:

$$\Delta l^2_{max} - 2\Delta l_s \Delta l_{max} - \Delta l_s \frac{v^2}{g} = 0,$$

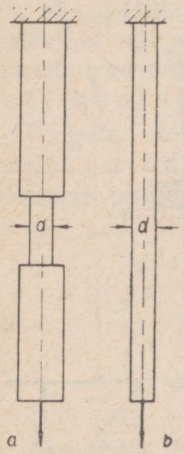
kust

$$\Delta l_{max} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta l_s}}\right)\Delta l_s = (1 + \Delta)\Delta l_s, \qquad (47)$$

mille juures suurust

$$\Delta = \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta l_s}} \qquad (48)$$

nimetame dünaamiliseks lisandiks ja $(1 + \Delta)$ — dünaamiliseks teguriks.



Joon. 248.

Arvestades pingete ja pikenemiste vahelist võrdelisust, leiame maksimaalse pinge valemist

$$\sigma_{max} = (1 + \Delta)\sigma_s, \qquad (49)$$

kus $\sigma_s = \frac{P}{F}$ on staatiline pinge.

Analüüsides võrrandeid (48) ja (49), võib järeldada, et lühikesed varvad kannatavad löökkoormusi halvemini välja kui samasuguse ristlõikega pikad varvad, sest dünaamiline tegur suureneb Δl_s vähenemisega ehk varva jäikuse koefitsiendi $j = \frac{P}{\Delta l_s}$ suurenemisega. Joonisel 248, a kujutatud varvas tekivad suuremad dünaamilised pinged kui joonisel 248, b kujutatud varvas, kui mõlematele mõjuda ühesuguselt kõrguselt langeva raskusega P. See on arusaadav, sest esimesel varval on staatiline pikenemine väiksem kui teisel; esimesel varval esineb kohalik peenendus, mille diameeter on d.

Dünaamiline tegur võrdub kahega $(1 + \Delta = 2)$, kui koorma P löök toimub algkiiruseta $(v = 0)$.

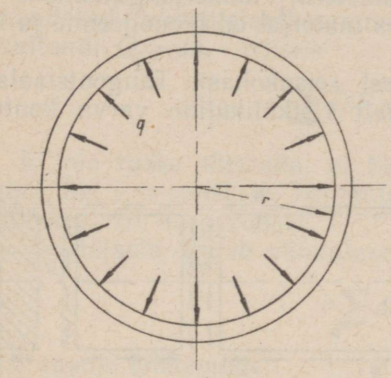
Sel juhul ületavad dünaamilised pinged staatilisi kahekordselt.

19. Ringrõnga tõmme.

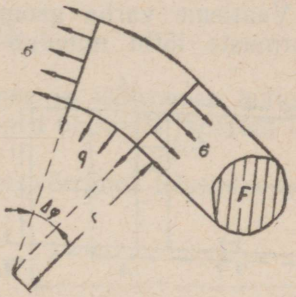
Võtame õhukese ringrõnga, mille sisemine raadius on r ja ristlõike pindala F (joon. 249). Kui sellist rõngast mõjutada radiaalsete jõududega q, mis on ühtlaselt jaotatud sisemisel ringjoonel, siis pikenevad kõik rõnga kiud ühtlaselt. Tähistades raadiuse absoluutset pikenemist Δr, koostame kiudude suhtelise pikenemise leidmiseks valemi:

$$\varepsilon = \frac{2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}. \qquad (a)$$

Pingete leidmiseks lõikame rõngast välja ühe elemendi (joon. 250). Saadud



Joon. 249.



Joon. 250.

lõigetes mõjuvad normaalpinged väljendame Hooke'i seaduse põhjal deformatsiooni kaudu:

$$\sigma = E\varepsilon. \qquad (b)$$

Võttes kõikide elemendile rakendatud jõudude projektsioonide summa rõnga raadiusele, koostame tasakaalu võrrandi:

$$2\sigma F \sin\frac{\Delta\varphi}{2} - qr\Delta\varphi = 0. \qquad (c)$$

Võttes $\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2}$, saame võrrandist (c) tõmbepinged rõngas:

$$\sigma = \frac{qr}{F}. \qquad (50)$$

Rõnga raadiuse pikenemise leiame võrrandist (a) valemite (b) ja (50) abil:

$$\Delta r = \varepsilon r = \frac{r\sigma}{E} = \frac{qr^2}{EF}.$$

Tähistades jäikustegurit

$$j = \frac{EF}{r}, \qquad (51)$$

saame:

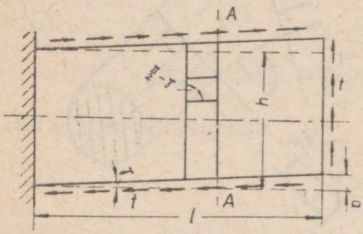
$$\Delta r = \frac{qr}{j}. \qquad (52)$$

Nihe.

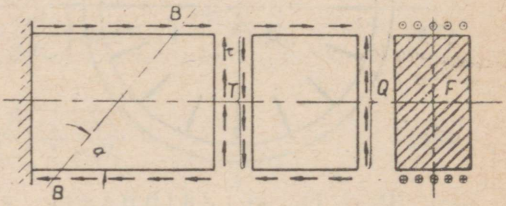
20. Pingeolukord nihkel.

Määrame täisnurkse ristlõikega prismaatilisel varval kindlaks kontuuripidi mõjuvate ühtlaselt jaotatud tangentsiaalsete koormuste t poolt tekitatud pingeolukorra (joon. 251). Uurimise teooria saamiseks teeme järgmised oletused: varva ristlõiked jäävad ka pärast deformatsiooni tasapinnalisteks, ümberpaigutumised ja deformatsioonid on väikesed, varva materjal on homogeenne ja isotroopne.

Vaatleme varba geomeetrilisest seisukohast. Tangentsiaalsete koormuste tõttu muudab esialgselt ristkülikuline varva kontuur



Joon. 251.



Joon. 252.

oma kuju ja muutub rööpkülikuks. Seejuures parempoolne otslõige nihkub kinnioleva otsa suhtes ja täisnurgad moonduvad. Otslõike lineaarset ümberpaigutumist a nimetame absoluutseks nihkeks ja nurkdeformatsiooni γ — suhteliseks nihkeks. Kujundi järgi saab kindlaks määrata järgmise olenevuse suhtelise ja absoluutse nihke vahel:

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{l} . \qquad \text{(a)}$$

Kuna aluseks võetud tasapinnaliste lõigete hüpoteesi järgi kõik lõiked jäävad tasapinnalisteks ka pärast deformatsiooni, siis kõikide ristkülikute kohta, mis asuvad varva kõrguse h ulatuses, võib lugeda $\gamma = \text{const}$.

Pingete leidmiseks ristlõikes AA lõikame varva kujuteldavalt kaheks osaks (joon. 252). Ühe varva osa mõjul teisele tekivad lõike AA igas punktis tangentsiaalpinged τ, mille suurus oleneb nurkdeformatsioonist ja materjali füüsikalis-mehaanilistest omadustest. Analoogiliselt tõmbega loeme elastses piirkonnas pinged τ võrdelisteks deformatsioonidega γ, s. t.

$$\tau = G\gamma, \qquad \text{(b)}$$

kus G on katseliselt määratud tegur, mida edaspidi nimetame nihkemooduliks ehk II järgu elastsusmooduliks.

Plastiliste deformatsioonide puhul, kui varb pärast koormuse kõrvaldamist ei omanda oma esialgset geomeetrilist kuju, on τ ja γ vaheline lineaarne side rikutud.

Koostame tasakaalu võrrandi kõikide jõudude kohta, mis on rakendatud parempoolsele äralõigatud varva osale. See võrrand väljendab seost välisjõudude ja lõikes F jaotatud sisejõudude summa vahel. Kui pinnaelemendile ΔF mõjub tangentsiaalpinge τ, siis elementaarsete jõudude $\Delta T = \tau \Delta F$ summa annab tangentsiaaljõu T, mis arvuliselt võrdub varva parempoolsesse otslõikesse rakendatud tangentsiaalkoormuste t resultandiga. Tähistame selle resultandi $Q = th$. Niisiis

$$\sum \tau \Delta F = T = Q. \qquad \text{(c)}$$

Ei ole raske tõestada, et homogeense ja isotroopse materjali puhul, kui $\gamma = \text{const}$, on tangentsiaalpinged ühtlaselt jaotatud kogu ristlõikes AA ($\tau = \text{const}$).

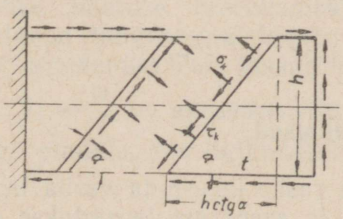
See asjaolu annab võimaluse viimase võrrandi teisendamiseks:

$$\tau \sum \Delta F = Q,$$

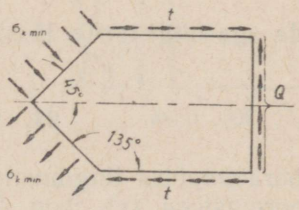
kust saame nihkepinge

$$\tau = \frac{Q}{F}. \qquad (53)$$

Nihke puhul mõjuvad varvas nurga α all tehtud lõikes BB (joon. 252) normaalpinge σ_k ja tangentsiaalpinge τ_k (joon. 253).



Joon. 253.



Joon. 254.

Need pinged võime lugeda $\tau = \text{const}$ tõttu ühtlaselt jaotatuks kaldlõike F_k kogu pinnal. σ_k ja τ_k leidmiseks koostame tasakaalu võrrandi varva selle osa kohta, mis asub lõigete AA ja BB vahel. Projitseerides kõik jõud alguses vektorite σ_k suunale ja seejärel vektorite τ_k suunale, saame:

$$\sigma_k F_k + \tau F \cos \alpha + (th \operatorname{ctg} \alpha) \sin \alpha = 0;$$
$$\tau_k F_k - \tau F \sin \alpha + (th \operatorname{ctg} \alpha) \cos \alpha = 0.$$

Asendades $F = F_k \sin \alpha$ ja $th = Q = \tau F$, saame pärast taandamist:

$$\sigma_k = -\tau \sin 2\alpha; \tag{54}$$

$$\tau_k = -\tau \cos 2\alpha. \tag{55}$$

Valem (54) näitab, et $\sin 2\alpha = \pm 1$ puhul omandab pinge σ_k oma maksimaalse ja minimaalse väärtuse

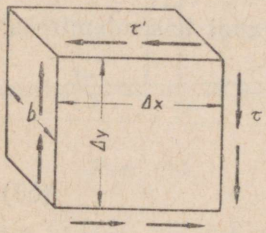
$$\sigma_{k\,min} = -\tau \quad \text{ja} \quad \sigma_{k\,max} = \tau \tag{56}$$

lõigetes, mis on asetatud nurkade all $\alpha = 45°$ ja $\alpha = 45° + 90° = 135°$ (joon. 254).

Mis puutub valemisse (55), siis temast järeldub, et saadud kahes vastastikku risti asuvas lõikes on tangentsiaalpinged võrdsed nulliga:

$$\tau_k = 0. \tag{57}$$

Edasi tõestame, et kahes teineteisega risti asuvas lõikes mõjuvad ühesugused tangentsiaalpinged. Selleks eraldame varvast elementaarse rööptahuka (joon. 255), mille mõõted on Δx, Δy ja b. Selle rööptahuka kõigil neljal tahul mõjuvad tangentsiaalpinged τ ja τ'. Kirjutame selle kohta kõikide rakendatud jõudude momentide tasakaalu võrrandi



Joon. 255.

$$\tau \Delta y \Delta x b = \tau' \Delta x \Delta y b.$$

Siit leiame pärast taandamist, et

$$\tau = \tau'. \tag{58}$$

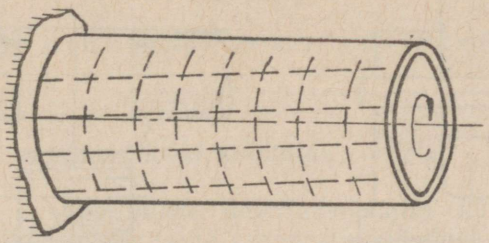
Seda aga oligi tarvis tõestada.

21. Nihkekatsed.

Laboratoorsetes tingimustes on raske koormata varba tangentsiaalkoormustega (vt. joon. 251), ja seepärast teostatakse nihkekatsed ümmarguse toru väänamisega (joon. 256). Sellise toru väänamisel tema lõiked pöörduvad ja koos sellega kalduvad ka toru moodustajad tema telje suhtes. Joonise järgi saab kindlaks teha, et kahe ristlõike ja kahe moodustaja vahel olev toruelement omandab nihkedeformatsiooni. Selle deformatsiooni juures moonduvad nurgad. Selle moondumise mõõduks on suhteline nihe γ.

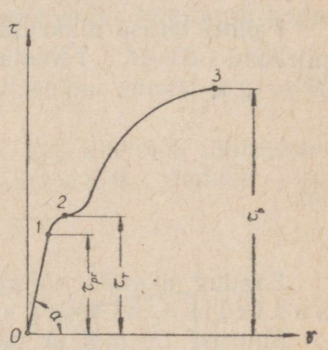
γ ja nihkedeformatsiooni põhjustavate tangentsiaalpingete τ vahelise olenevuse saab kindlaks määrata katseliselt, kui on teada väändemoment ja toru väändumise nurk. Rida küsimusi, mis on seotud varbade väänamisega, käsitletakse sügavamalt X peatükis.

Joonisel 257 on antud nihkediagramm, mis on saadud pehme terase proovimisel. See diagramm sarnaneb väliselt tõmbediagrammiga. Tal on iseloomustavad punktid *1*, *2* ja *3*, millede ordinaadid määravad kindlaks vastavalt proportsionaalsuse piiri τ_{pr}, voolavuspiiri τ_T ja tugevuspiiri τ_b.



Joon. 256.

Tugevuspiiri ligikaudseks määramiseks nihkel viiakse läbi laboratooriumides sageli ümmarguse ristlõikega lühikeste varbade lõikeproove. Selleks kasutatakse erilist seadet (joon. 258), kus jõu P mõjul lõigatakse proovikeha kahes lõikes. Joonisel 259 on toodud pehmest terasest proovikeha tükid peale purustamist. Purunemise iseloomu järgi saab kindlaks määrata, et enne lõike teostamist esinesid proovikehal muljumis- ja osalt ka paindedeformatsioonid. Need deformatsioonid teevad puhtnihke nähtuse keerukamaks ja põhjustavad tangentsiaalpingete ebaühtlast jagunemist lõike tasapinnas.



Joon. 257.

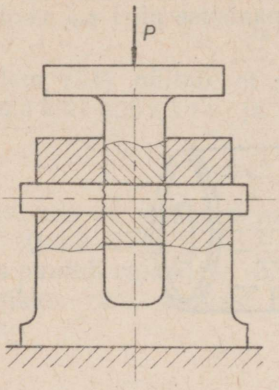
Kui $T_b = \frac{P}{2}$ on purustav jõud ja F — lõike pindala, siis ligikaudselt

$$\tau_b = \frac{T_b}{F}. \qquad (59)$$

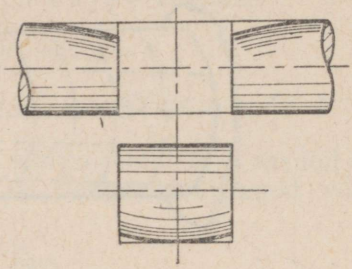
Plastilistel materjalidel kõiguvad katsete andmetel τ_{pr}, τ_T ja τ_b väärtuste suhted tõmbel saadud σ_{pr}, σ_T ja σ_b väärtustega 0,5—0,8 piirides. Malmil kõigub suhe $\frac{\tau_b}{\sigma_b}$ 0,8—1,0 piirides.

Ümmarguse malmist toru väänamisel (vt. joon. 256) toimub purunemine lõikeis, mis asuvad 135° nurkade all. Neis lõigetes, nagu teada, esinevad maksimaalsed tõmbepinged $\sigma_{k\,max} = \tau$ [vt.

v. (56)]. Seletub see sellega, et malm töötab tõmbele halvemini kui survele.



Joon 258.



Joon. 259.

22. Hooke'i seadus nihkel.

Pehme terase nihkediagrammil (vt. joon. 257) on sirgjooneline piirkond *0 — 1*. Tähistades selle joone kaldenurga tangensi $G = \operatorname{tg} \alpha$, leiame jooniselt, et

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

või

$$\tau = G\gamma. \tag{60}$$

Saadud avaldis näitab, et nihkepinge on võrdeline suhtelise nihkega (Hooke'i seadus nihkel).

Suurust G, mis on viimases võrrandis, nimetatakse nihkemooduliks ehk II järgu elastsusmooduliks. Tema mõõtühikuks on, nagu I järgu elastsusmoodulilgi, kg/cm². Kui on teada E ja μ (Poisson'i tegur), siis G võime arvutada teoreetilise valemi järgi:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \tag{61}$$

mille tuletamine antakse p-s 24. Kui $\mu = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, siis on nihkemoodul valemi (61) järgi $G = (0{,}375 \text{ kuni } 0{,}4)E$.

Kui valemisse (60) asetada $\tau = \frac{Q}{F}$ ja $\gamma = \frac{a}{l}$, siis saame

$$Q = \frac{GF}{l} a.$$

Nimetades suurust

$$j = \frac{GF^*}{l} \tag{62}$$

jäikusteguriks, võime kirjutada Hooke'i seaduse valemi järgmiselt:

$$Q = ja, \tag{63}$$

kust järgneb, et nihkejõud on võrdeline absoluutse nihkega.

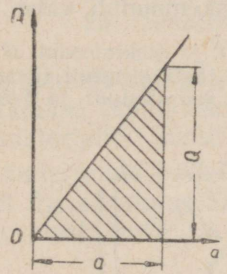
23. Nihkel kulutatav energia.

Koostame avaldise nihke deformatsiooniks kulutatud energia kohta. Olgu ühtlaselt jaotatud tangentsiaaljõudude mõju all oleva varva otslõike ümberpaigutumine a (vt. joon. 251). See ümberpaigutumine põhjustab jõu $Q = th$ nihet vertikaaljoonel. Q suurendamisel kaduvalt väikese suuruse ΔQ võrra tekib ümberpaigutumise juurdekasv Δa. Täiendava ümberpaigutumise teostamiseks kulub tööd — energiat $Q\Delta a$, mida tähistame ΔA-ga.

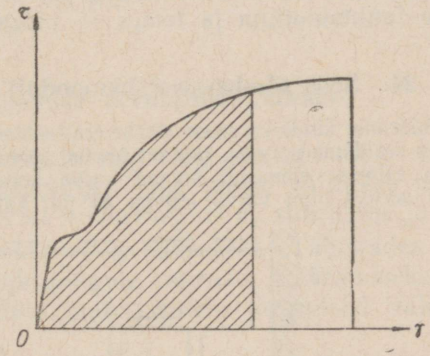
Summeerides elementaarsed energiad otslõike lõpliku ümberpaigutumise piirides, leiame nihkedeformatsiooniks kulutatud koguenergia:

$$A = \sum Q\Delta a. \tag{64}$$

Elastsete deformatsioonide piirkonnas, kus nihkejõu juurdekasv olenevalt absoluutsest nihkest toimub lineaarse seaduse järgi



Joon. 260.



Joon. 261.

(joon. 260), arvutatakse nihke potentsiaalne energia kolmnurga pindalana, s. t.

$$A_p = \frac{Qa}{2}. \tag{65}$$

Meelde tuletades valemit (63), koostame veel kaks avaldist A_p kohta:

$$A_p = \frac{ja^2}{2}; \tag{65'}$$

$$A_p = \frac{Q^2}{2j}. \tag{65''}$$

Valemis (65') on energia kujutatud absoluutse nihke funktsioonina, viimases valemis aga nihkejõu funktsioonina.

Nüüd määrame kindlaks erienergia, mida saab arvutada koguenergia jagamisel varva deformeeritava ruumalaga Fl. Arvestades valemeid (64), (53) ja et $\gamma = \frac{a}{l}$, saame:

$$a = \frac{A}{Fl} = \sum \frac{Q}{F} \Delta \left(\frac{a}{l} \right) = \sum \tau \Delta \gamma. \tag{66}$$

Saadud summa, nagu pole raske märgata, kujutub nihkediagrammi viirutatud pinnana joonisel 261.

Elastsete deformatsioonide piirkonnas arvutatakse potentsiaalne erienergia kolmnurga pindalana:

$$a_p = \frac{\tau\gamma}{2}. \tag{67}$$

Meelde tuletades valemit (60), koostame veel kaks avaldist

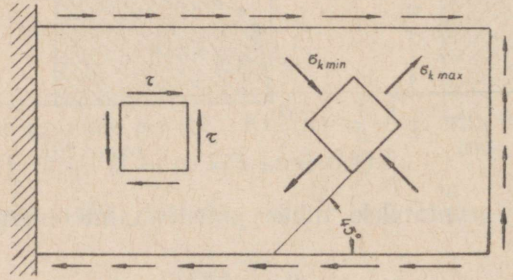
$$a_p = \frac{G\gamma^2}{2}; \tag{67'}$$

$$a_p = \frac{\tau^2}{2G}. \tag{67''}$$

Esimeses saadud avaldises on erienergia avaldatud suhtelise nihke funktsioonina ja teises — pinge funktsioonina.

24. Seos tõmbe-elastsusmooduli ja nihkemooduli vahel.

Määrame kindlaks seose tõmbe-elastsusmooduli E ja nihkemooduli G vahel. Selleks eraldame varvast, mis on toodud joonisel 251, kaks elementi (joon. 262). Asugu esimese elemendi servad varva kontuuriga paralleelselt ja teise elemendi servad olgu varva teljega 45° all kaldu.



Joon. 262.

Kuna esimese elemendi servadele mõjuvad ainult tangentsiaalpinged τ, siis nihkedeformatsiooni potentsiaalse erienergia saame väljendada avaldisega (67″), s. t.

$$a_p = \frac{\tau^2}{2G}.$$

Väljendame selle energia olenevalt pingetest $\sigma = \sigma_{k\,max} = \tau$ ja $\sigma = \sigma_{k\,min} = -\tau$ [vt. v. (56)], mis on rakendatud teise elemendi servadele. Tõmbepinge mõju suunas on suhteline pikenemine valemite (12) ja (14) põhjal summa

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \mu\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E}(1+\mu),$$

kus μ on ahenemistegur. Sama avaldise abil saame määrata ka lühenemist survepingete mõjumise suunas.

Mõlema pinge samaaegsel suurenemisel on potentsiaalne erienergia vastavalt valemile (18) ja viimasele võrrandile.

$$a_p = 2 \cdot \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{E}(1+\mu).$$

Võrrutades saadud kahte a_p võrrandit, saame

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{\sigma^2}{E}(1+\mu),$$

kust juhul, kui $\sigma = \tau$, saame otsitava seose tõmbe-elastsusmooduli E ja nihkemooduli G vahel:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{68}$$

25. Staatilise tugevuse arvutamine nihkel.

Tangentsiaalpinget, mis vastab materjali ohutule tööle nihkel, nimetatakse lubatavaks nihkepingeks. See pinge valitakse plastiliste materjalide puhul olenevalt voolavuspiiri τ_T suurusest ja haprate materjalide puhul tugevuspiiri τ_b suurusest. Tähistades seda pinget R_n, kirjutame lubatavate pingete suuruste määramiseks vastavalt plastilistele ja hapratele materjalidele järgmised valemid:

$$\left.\begin{aligned} R_n &= \frac{\tau_T}{n_T}, \\ R_n &= \frac{\tau_b}{n_b}, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

kus n_T ja n_b on varutegurid (vt. p. 13).

Arvutustel võib orienteeruvalt võtta plastiliste materjalide puhul $\tau_T \approx (0{,}55—0{,}7)\sigma_T$ ja haprate materjalide puhul $\tau_b = (0{,}8—1)\sigma_b$. Siis nende kahe materjali liigi kohta saame:

$$R_n = (0{,}55—0{,}7)\frac{\sigma_T}{n_T} = (0{,}55—0{,}7)R_t, \tag{70}$$

$$R_n = (0{,}8—1)\frac{\sigma_b}{n_b} = (0{,}8—1)R_t, \tag{71}$$

kus R_t on lubatav pinge lihtsa tõmbe puhul.

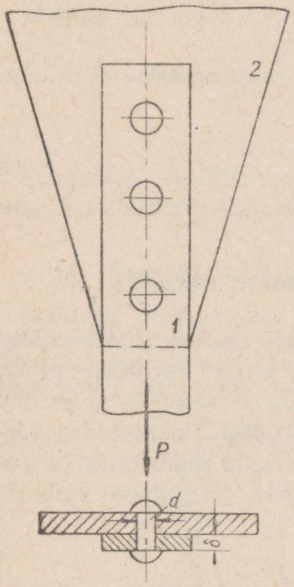
Teades lubatavaid pingeid, kirjutame tugevusvõrrandi nihke puhul:

$$\tau = \frac{Q}{F} \leqslant R_n. \tag{72}$$

26. Arvutusnäiteid nihkele.

Toome arvutusnäiteid nihkele neetliidete ja keevisliidete puhul.

1. Arvutame nihkele needid, mis liidavad lati *1* detailiga *2* (joon. 263). Sellist tüüpi liidete juures esinevad neetide lõigetes jõu *P* mõjul nihkedeformatsioonid (lõikedeformatsioonid). Tangentsiaalpinged, mis põhjustavad lõiget, arvutatakse valemiga



Joon. 263.

$$\tau = \frac{P}{n\frac{\pi d^2}{4}},$$

kus n on neetide arv ja d — nende läbimõõt.

Selleks, et needid töötaksid nihkele ohutult, peab olema täidetud tingimus

$$\tau \leqslant R_n.$$

Arvutamisel määratakse needi läbimõõt tavaliselt valemist

$$d = \sqrt{5\delta} - a \approx 2\delta,$$

kus δ on needitavate plekkide paksus cm ja $a = 0{,}2$ cm ühelõikeliste neetide puhul ja $a = 0{,}7$ cm kahelõikeliste neetide puhul.

Võttes läbimõõdu d jaoks selle normi, ei ole raske määrata tugevusvõrrandist neetide arvu. Seejuures selles võrrandis võetakse $R_n = (0{,}6—0{,}7)R_t$, kusjuures hästi valmistatud neetliidete puhul $R_t = 1400$ kg/cm^2.

Neetliidete arvutamisel teostatakse alati kontrolli pindsurvele, mis esineb pleki ja needi vahel poolsilindrilisel pinnal. Pindsurvepinget saab leida ligikaudselt valemist

$$\sigma_{ps} = \frac{P}{nd\delta}.$$

See pinge ei tohi ületada suurust $R_{ps} = 2R_t$.

Ülesanne 1. Olgu antud $P = 7000$ kg ja $\delta = 1$ cm. Neetide läbimõõdu leiame valemist

$$d = \sqrt{5 \cdot 1} - 0{,}2 \approx 2 \text{ cm}.^1$$

Neetide arvu määrame valemist

$$\tau = \frac{7000}{n\frac{\pi \cdot 2^2}{4}} \leqslant R_n.$$

Võttes $R_n = 0{,}6R_t = 0{,}6 \cdot 1400 = 840$ kg/cm², leiame, et $n = 2{,}65 \approx 3$.

Kontrollime pindsurvepinget neetide ja pleki vahel:

$$\sigma_{ps} = \frac{7000}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1167 \text{ kg/cm}^2.$$

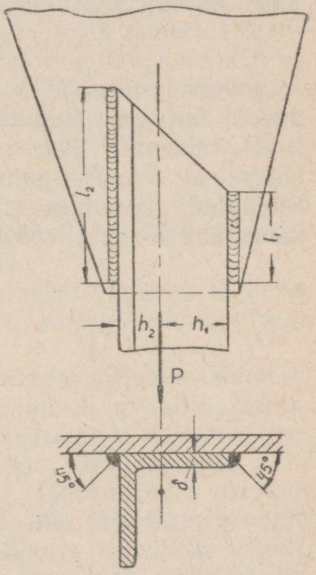
2. Arvutame nihkele keevisõmbluse, mis ühendab nurkterast plaadiga (joon. 264). Niisugust tüüpi liidete puhul on nurkterase ristlõike raskuskeskmesse rakendatud jõu P poolt tekitatud suurimad nihkedeformatsioonid õmbluse 45° all kallutatud lõikes. Need deformatsioonid tekivad tangentsiaalpingete

$$\tau = \frac{P}{(l_1 + l_2)\delta \cos 45^0} \approx \frac{P}{0{,}7(l_1 + l_2)\delta}$$

mõjul.

Õmbluse tugevus on kindlustatud, kui $\tau \leqslant R_n$, kus R_n on lubatav nihkepinge. See pinge võetakse tavalise elekterkeevituse puhul $R_n = 0{,}8R_t$, kusjuures õmbluse lubatav tõmbepinge $R_t = 900$ kg/cm².

Arvutus on läbi viidud eeldusel, et jõud P jaotub õmblustele võrdeliselt nende pikkusega. See eeldus on reaalne ainult siis, kui $\frac{l_1}{l_2} = \frac{h_2}{h_1}$, kus h_1 ja h_2 on kaugused, mis määravad nurkterase telje asendi.



Joon. 264.

Ülesanne 2. Nurkterase mõõted on $h_1 = 3{,}6$ cm, $h_2 = 1{,}4$ cm ja $\delta = 0{,}5$ cm. Antud koormuse $P = 6000$ kg juures leida keevisõmbluse üldine pikkus. Selle leiame võrrandist

$$\tau = \frac{6000}{0{,}7(l_1 + l_2)0{,}5} \leqslant R_n.$$

Võttes $R_n = 0{,}8 \cdot R_t = 0{,}8 \cdot 900 = 720$ kg/cm², leiame, et $l_1 + l_2 \approx 24$ cm.

---

[1] Arvutusel saadud needi läbimõõdud tuleb kohandada kehtivates normides (ГОСТ) esinevate neediläbimõõtudega. Arvutustes tuleb aga needi läbimõõduks võtta needi jaoks valmistatud augu läbimõõt, kuna eeldatakse, et peale neetimist needivarb täidab augu täielikult. Antud juhul vastab normitud läbimõõduga needile $d = 19$ mm auk 20 mm. (Tõlke vastut. toim. märkus.)

Suhte puhul $\frac{l_1}{l_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1{,}4}{3{,}6} \approx 0{,}4$ saame:

$$l_2 = \frac{24}{1{,}4} \approx 17 \text{ cm} \quad \text{ja} \quad l_1 = 24 - 17 = 7 \text{ cm}.$$

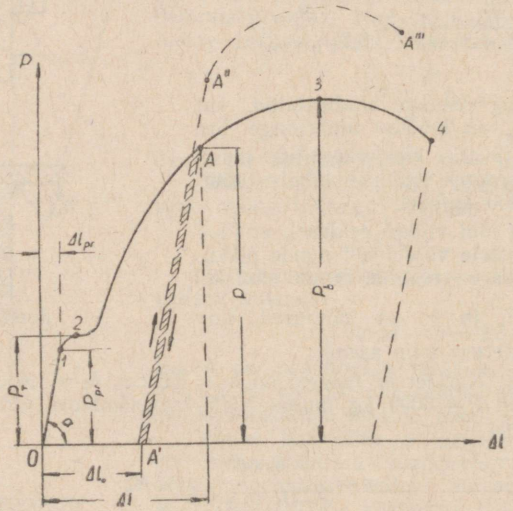
III peatükk.

Metalli staatilisele tugevusele mõjuvad tegurid.

Metallide väsimus.

27. Metalli käitumine korduvate staatiliste koormamiste puhul. Kalestus.

Pehmest terasest proovikeha pideval tõmbamisel kuni purunemiseni kujuneb jõudude ja pikenemiste vaheline olenevus graafiliselt joonena *01234*, nagu on näidatud joonisel 265. Kui mingi koormuse $P > P_T$ puhul tõmbamine katkestada ja proovikehalt eemaldada koormus, siis, nagu katse näitab, kulgeb koormusest vabastamise joon mööda sirget AA', mis on asetunud umbes



Joon. 265.

nurga α all. Kuna proovikeha pikenemine Δl oli koormuse P puhul proportsionaalsuse piirile vastavast pikenemisest Δl_{pr} suurem, siis koormuse täielikul kõrvaldamisel jääb osa deformatsioone materjalisse alles, mille tõttu proovikehasse jääb jääkpikenemine Δl_o, mis

on väiksem kui Δl. Kui tõmbamine lõpetada enne jõudmist punkti I ja seejärel koormus kõrvaldada, siis jääkpikenemist ei teki.

Proovikeha teistkordsel koormamisel läheb koormamisjoon umbes kuni punktini A mööda sirget, mis asub veidi vasakul koormusest vabastamise joonest. Sel juhul leiame tõmbediagrammil väljavenitatud kinnise kujundi, mille moodustavad kaldsirged (joonisel 265 on viirutatud). Saadud kujundit nimetatakse hüstereesisilmuseks. Tema pind vastab oletatavasti sellele energiale, mis kulus deformeerimisel materjali struktuuris pöördumatute protsesside läbiviimiseks. Järgneval jõu P suurendamisel koormamiskõver kulgeb joont $A4$ mööda, mis kuulub pideva tõmbe diagrammile.

Olukord on teine, kui koormast vabastamise ja uuesti koormamise vahel lasta materjali mõni päev puhata või hoida teda mõni minut keeva vee vannis. Sel juhul pärast teistkordset koormamist läheb koormamiskõver $A'A''A'''$ kõverast $A4$ kõrgemalt. Proovikeha on omandanud tunduvalt kõrgema proportsionaalsuse piiri σ_{pr} ja teatud ulatuses suurema tugevuspiiri σ_b. Selline kunstlik materjali mehaaniliste karakteristikate tõstmine toimub, nagu nähtub diagrammist, plastiliste omaduste osalise kao arvel. See plastilisuse kadu väljendub pikenemise vähenemises katkemisel, ta oleneb proovikeha esialgse plastilise deformeerimise astmest. Kirjeldatud materjali mehaaniliste karakteristikate kunstliku kõrgendamise protsessi nimetatakse k a l e s t a m i s e k s.

Kalestuse, kui ta ei ole soovitav, saab lõõmutamisega kaotada. Metall omandab pärast lõõmutamist koos kalestuse kadumisega veidi paremad plastilised omadused.

Praktiliselt tuleb kalestusega kokku puutuda paljudes tehnoloogilistes protsessides, näiteks aukude stantsimisel, metallide külmtöötlemisel, valtsimisel jne. Väga sageli kasutatakse kalestust esemete jäikuse tõstmiseks. Näiteks venitatakse tõstemasinate ketid enne tarvitusele võtmist üle voolavuspiiri, hüdrauliliste presside silindrid pannakse enne soveldamist surve alla, mis tekitab nende seintes jääkdeformatsioone (see on vajalik selleks, et vältida silindri seinte ja kolvi vahelist vedeliku läbijooksu, kui rõhk silindris ületab juhuslikult normi), jne.

28. Termilise töötlemise mõju metalli staatilisele tugevusele.

Lõõmutamine, normaliseerimine, karastamine, noolutamine on metalli termilise töötlemise põhilised viisid. Nad avaldavad suurt mõju teraste mehaaniliste omaduste muutumisele

L õ õ m u t a m i s e l kuumutatakse metalli teatud temperatuurini, mis oleneb selle keemilistest omadustest, ja peetakse sellel temperatuuril teatud aja jooksul, mille järel aeglaselt jahutatakse. Lõõmutamisel omandab teras peeneteralise struktuuri ja paranevad tema plastilised omadused. Lõõmutamisel on võimalik parendada ka valmistamisel ülekuumutatud terase omadusi.

Terase normaliseerimisel kuumutatakse teda üle ülemise kriitilise punkti ja seejärel jahutatakse õhus. See termilise töötlemise viis parendab tunduvalt metalli mehaanilisi omadusi. Järgnevalt on toodud katsete tulemused 0,37% süsinikku sisaldavast terasest proovikehadega.

Töötlemisviis	σ_{pr} kg/cm²	σ_T kg/cm²	σ_b kg/cm²	δ%	ψ%
Valtsimine	1900	2150	5200	32	48,6
Lõõmutamine kuni 850° C	2550	2650	4900	32	49,0
Normaliseerimine . . .	2650	2900	5550	29	46,8

Toodud andmetest nähtub, et lõõmutamine ja normaliseerimine parendavad märgatavalt metalli mehaanilisi omadusi. Viimasel juhul muuseas terase plastilised omadused veidi halvenevad mehaaniliste karakteristikate kõrgenemise arvel.

Terase omaduste edasine parendamine toimub karastamisel ja noolutamisel. Karastamisel kuumutatakse teras teatud temperatuurini, hoitakse teda sellel temperatuuril teatud aeg ja siis jahutatakse kiiresti vees või õlis. Noolutamisel soojendatakse terast alla karastustemperatuuri ja jahutatakse samas keskkonnas. Pärast neid kahte teineteisele järgnevat operatsiooni omandab metall kõrged mehaanilised omadused ja küllalt kõrge noolutustemperatuuri puhul ka rahuldava plastilisuse. Järgnevalt on toodud 0,37% süsinikku sisaldavate terasest proovikehadega toimetatud katsete tulemused, kusjuures need olid karastatud vees 850° juures ja noolutatud temperatuuridel 100°, 450° ja 550° C.

Noolutustemperatuur	σ_{pr} kg/cm²	σ_T kg/cm²	σ_b kg/cm²	δ%	ψ%
100°	4750	5600	8100	16,6	41
450°	4550	5200	8000	18,0	49
550°	4550	4800	7350	22,0	56

Arvuliste andmete võrdlemine näitab, kuivõrd paranevad terase mehaanilised omadused pärast karastamist ja noolutamist, võrreldes esimese kahe termilise töötlemisviisiga (lõõmutamine ja normaliseerimine).

29. Kõrgendatud temperatuuri mõju metalli tugevusele.

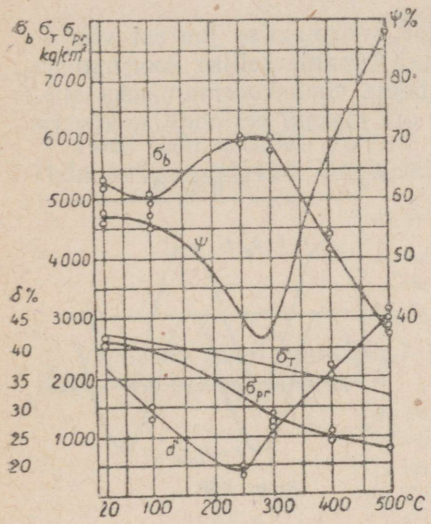
Paljud konstruktsioonielemendid töötavad kõrgetel temperatuuridel, näiteks sisepõlemismootori silindrite seinad, koldeseadmed jne. Need temperatuurid avaldavad suurt mõju metalli tugevusele.

Joonisel 266 on toodud graafikud keskmise süsinikusisaldusega terase kohta. Toodud kõverad iseloomustavad proportsionaalsuse, voolavus- ja tugevuspiiri muutumist, samuti ka ristlõike ahenemise ja pikenemise muutumist katkemisel, olenevalt temperatuurist. Nagu graafikust nähtub, vähenevad proportsionaalsuse piir σ_{pr} ja voolavuspiir σ_T temperatuuri tõusuga, tugevuspiir σ_b alguses vähe-

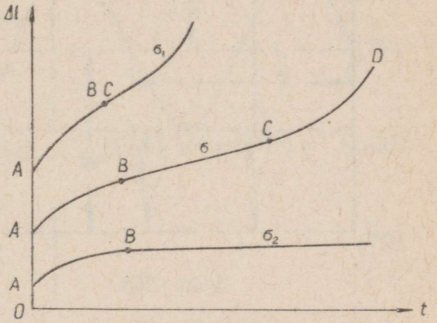
neb, seejärel suureneb temperatuuri tõusmisel kuni 250°, edasisel temperatuuri tõusul aga langeb kiiresti. Pikenemine katkemisel δ ja ristlõike ahenemine ψ vähenevad kuni umbes 250°-ni, seejärel aga tõusevad tugevasti. Kõrged temperatuurid teevad terase plastiliseks, vähendades seejuures tunduvalt mehaanilist tugevust.

30. Metallide roomavus.

Kõrgete temperatuuride juures teostatud metallide tõmbeproovide tulemused olenevad suurel määral katsete vältusest. On kind-



Joon. 266



Joon. 267.

laks tehtud, et koormused, mis tekitavad proovikehades allpool tugevuspiiri asuvaid pingeid, purustavad metalli, kui nad mõjuvad pikema aja vältel. Metallist proovikehades toimub kõrgetel temperatuuridel pidev pikenemiste juurdekasv, kusjuures rakendatud koormus jääb samaks. Sellist nähtust nimetatakse metallide r o o m a v u s e k s.

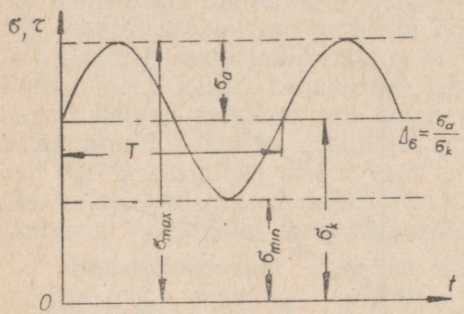
Proovikeha pikenemiste kasv oleneb mitmesuguste koormuste puhul püsival temperatuuril ajast t ja teda saab kujutada roomavuskõverana (joon. 267). Kõver, mis vastab proovikehas tekkivale pingele $\sigma = \frac{P}{F}$, koosneb vertikaalsest lõigust OA, mis vastab kohe pärast koormuse P rakendamist tekkivale pikenemisele, kõverast AB, kus valitseb kujunematu roomavusrežiim, sirgest BC, kus pikenemiste juurdekasv on püsiv ja lõpuks kõverast CD, mis näitab deformatsioonide intensiivset arenemist, mille tulemusena

proovikeha katkeb. Koormuse suurendamisel, kui pinge proovikehas $\sigma_1 > \sigma$, võtab roomavuskõver veidi teise kuju; olenevalt σ_1 suurusest võivad punktid B ja C kokku langeda ja kõver lõpeb varem kui eelmisel juhul.

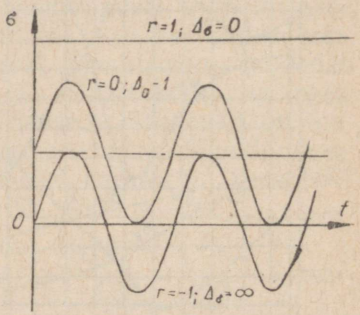
Järkjärgult koormust vähendades ($\sigma_2 < \sigma$) võib saada joone roomavuskõveral, mis on paralleelne ajateljega. Viimasel juhul ei purune materjal roomavuse tõttu pikema aja jooksul. Pinge σ_2 piirväärtust, mis vastab sellele juhule, nimetatakse r o o m a v u s p i i r i k s.

31. Võnkekoormuste iseloomustus.

Siirdume nüüd materjali staatilise koormamise juurest võnkekoormusega koormamise vaatlemisele. Anname sellise koormamise iseloomustuse. Koormamist nimetatakse võnkekoormamiseks siis, kui pinged (σ või τ) kehas muutuvad aja jooksul perioodilise kõvera



Joon. 268.



Joon. 269.

järgi, mille võrrandi saame kirjutada näiteks sinusoidi võrrandina (joon. 268). Neid koormamisi iseloomustab: p e r i o o d T sekundeis või s a g e d u s $\frac{1}{T}$ (perioodide arv sekundis), k e s k m i n e ehk j ä ä v tsükli p i n g e σ_k ja a m p l i t u u d ehk t s ü k l i m u u t u v p i n g e σ_a.

Tähistades tsükli maksimaalset ja minimaalset pinget vastavalt σ_{max} ja σ_{min} ja tsükli amplituudi tegurit $r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$, saame vastavalt toodud graafikule:

$$\sigma_k = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min}) = \frac{1}{2}(1 + r)\sigma_{max} \tag{73}$$

ja

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \frac{1}{2}(1 - r)\sigma_{max}. \tag{74}$$

Koostame tsükli maksimaalse pinge kohta järgmise avaldise:

$$\sigma_{max} = \sigma_k + \sigma_a = (1 + \Delta_\sigma)\sigma_k, \tag{75}$$

kus

$$\Delta_\sigma = \frac{\sigma_a}{\sigma_k} \tag{76}$$

nimetame dünaamiliseks lisandiks ja $1 + \Delta_\sigma$ — dünaamiliseks teguriks.

Näitena vaatleme koormamise kolme erijuhtu, mida joonisel 269 iseloomustatakse kolme graafikuga. Esimesel juhul, kui pinged kehas on jäävad, saame:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_k &= \sigma_{max}; \\ \sigma_a &= 0; \\ r &= 1; \\ \Delta_\sigma &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Teine juht käsitleb pingete muutumise pulseerivat tsüklit. Teda iseloomustavad järgmised andmed:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_k &= \frac{1}{2}\sigma_{max}; \\ \sigma_a &= \sigma_k; \\ r &= 0; \\ \Delta_\sigma &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Viimasel juhul muutuvad pinged sümmeetrilise tsükli järgi. Sel juhul saame:

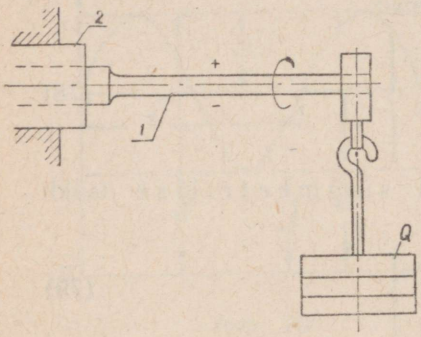
$$\left.\begin{aligned} \sigma_k &= 0; \\ \sigma_a &= \sigma_{max}; \\ r &= -1; \\ \Delta_\sigma &= \infty. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

32. Metallide väsimus.

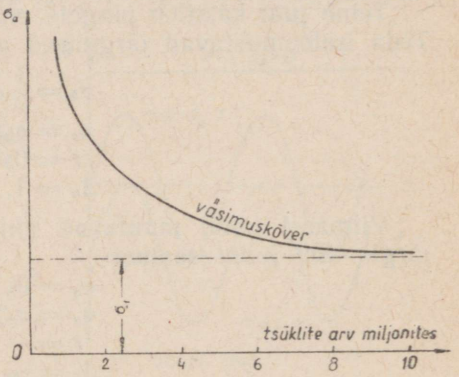
Metallide käitumist koormamisel sümmeetrilise tsükli järgi hakati uurima kõige enne. Seda tüüpi koormamise teostamiseks kasutati pöörlevat proovikeha *1* (joon. 270), mille üks ots on kinnitatud pöörlevasse padrunisse *2* ja mille teisele otsale on rakendatud koorem *Q*, mis on suunatud alati alla. Niisuguses masinas on võimalik saada proovikeha märkimuutvat painet, sest ühe proovikeha pöörde jooksul kõiki pikikiude tõmmatakse ja surutakse vaheldumisi. Tõepoolest, kui jälgida mõne kiu liikumist, siis selgub, et kiu liikumisel ülemisest asendist alumisesse muutub ka deformatsiooni märk (tõmme vaheldub survega). Seejuures paindeteooria järgi (vt. peatükk VII) on suurima pinge all kiud, mis asuvad äärmistes asendites. Absoluutväärtuselt on need pinged võrdsed, erinevad on ainult märgid. Niisiis võib masinas koormata metalli sümmeetrilise tsükli järgi ($r = -1$), mille iseloomustus on antud eelmises p-s.

Katsetega on määratud kindlaks, et selliselt koormatud proovikeha puruneb pärast masina teatud pöörete arvu, mis langeb ühte pinge arvu muutumise tsüklite arvuga. Mitme ühest ja samast metallist proovikeha proovimine näitas, et koormuse Q suurenemisega väheneb purunemiseks vajalik tsüklite arv. Kui ordinaatteljele kanda pinged proovikehas, mis vastavad jõududele Q ja abstsisstelje — tsüklite arv miljonites, siis saab tulemusi kujutada kõverana (joon. 271). See kõver kujutab proovikeha purustava pinge muutumise seadust olenevuses tsüklite arvust. Kuna kõvera parempoolne osa läheneb asümptootiliselt abstsisstelje, siis järeldame, et on olemas piirpinge σ_{-1}, mille puhul proovikeha on suuteline purunematult välja kannatama lõpmatu arvu pingete muutumise tsükleid. Seda pinget nimetatakse väsimuspiiriks.

Väsimuspiir on sümmeetrilise tsükli puhul harilikult voolavuspiirist väiksem. Poleeritud süsinikterasest proovikehade puhul pin-



Joon. 270.

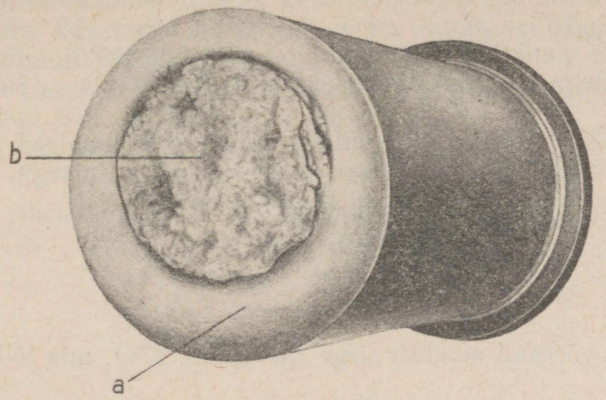


Joon. 271.

gete kontsentratsiooni puudumisel võib ligikaudselt võtta $\sigma_{-1} \approx \approx (0{,}4—0{,}55)\sigma_{pr}$. Kui proovikeha koormamist toimetada telgjõuga, mis muutub sümmeetrilise tsükli järgi, siis väsimuspiir saadakse märkimuutva painde juures saadavast väsimuspiirist väiksemana. Nende piiride suhteks võib ligikaudselt võtta 0,7.

Nähtust, mille juures keha puruneb pärast tema pingeolukorra paljukordset muutmist, nimetatakse m a t e r j a l i v ä s i m u s e k s. Seejuures toimub materjali purunemine, nagu näitavad katsed ja praktika andmed, v ä s i m u s p r a g u d e progressiivse arenemise tulemusena. Need praod tekivad tavaliselt suurimate pingete piirkondades ja pingete kontsentratsiooni tsoonides. Märkimuutva painde juures purunenud proovikehade murdepinnal on kaks iseloomustavat tsooni (joon. 272). Esimese, sileda tsooni *a* põhjustajaks on väsimuspragu, mille suurenemine toimus progressiivselt kuni purunemise momendini, teine, teraline tsoon *b* tekkis aga

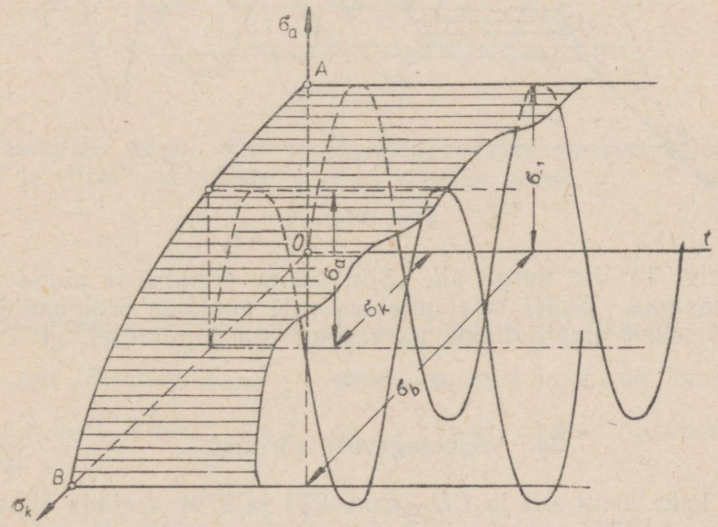
järsku koormuse toimel. Vastupidi staatilistele murretele tekivad väsimuse murded märgatavate plastiliste deformatsioonideta.



Joon. 272.

33. Asümmeetrilise tsükli pingete amplituudi piirid, olenevalt väsimus- ja voolavuspiirist.

Pingete muutumise asümmeetrilise tsükli kohta korraldatud katsete juures (vt. joon. 268) määrati kindlaks, et pingete piir-amplituud σ_a, mille juures ei toimu purunemist väsimuse tõttu, väheneb keskmise pinge σ_k suurenemisega. Nende pingete vaheline seos oleneb materjali kvaliteedist ja määratakse katseliselt. Joonisel 273 on antud kõver AB, mis kujutab pingete σ_a muutumist



Joon. 273.

olenevalt σ_k-st. Nagu jooniselt nähtub, ei toimu suuruse σ_a muutumine σ_{-1}-st nullini lineaarselt. Kui mingisuguse tsükli sinusoidide tipud ühendada sirgega, siis viimane moodustab pingete muutumisel silindrilise pinna, mille jäljeks on kõver *AB*. Sellel pinnal asuvate punktide ordinaadid on piiratud tsükli amplituudide piirväärtustega. σ_a maksimaalseks piiriks on σ_{-1} ja σ_k puhul tugevuspiir σ_b.

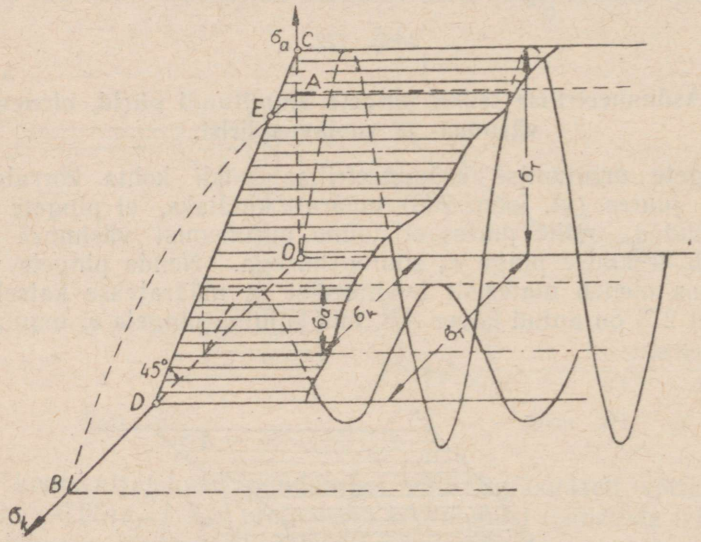
Piiramplituudid σ_a, mille juures tsükli maksimaalsed pinged ei ületa voolavuspiiri, vähenevad samuti σ_k suurenemisega. σ_a ja σ_k vahelise seose leiame sel juhul tingimusest, et

$$\sigma_{max} = \sigma_k + \sigma_a = \sigma_T,$$

kust

$$\sigma_a = \sigma_T - \sigma_k.$$

Saadud võrrand määrab sirge *CD* (joon. 274), mis lõikab koor-



Joon. 274.

dinaattelgi 45°-lise nurga all. Siin saame silindrilise pinna asemel tasapinna. Sellel tasapinnal asuvate punktide ordinaadid on piiratud tsükli amplituudide piirväärtustega tingimusel, et

$$\sigma_{max} = \sigma_T.$$

34. Võnketugevuse võrrand.

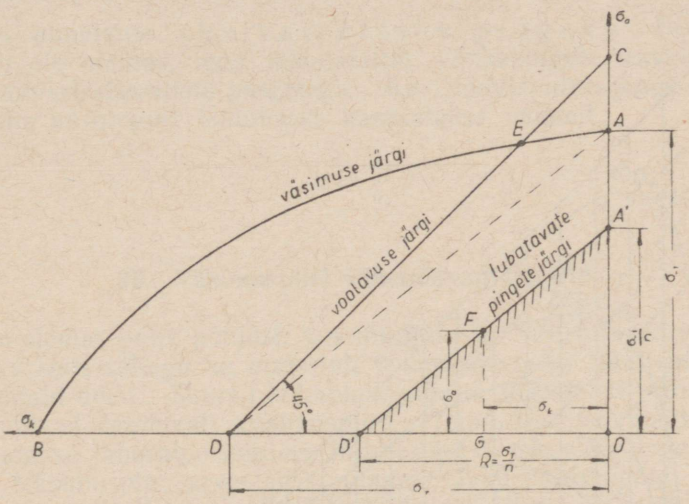
Kui kaks joont *AB* ja *CD* (joon. 273 ja 274) asetada teineteisele, siis nad lõikuvad mingis punktis *E* (joon. 275). Kuna materjal ei tohi puruneda väsimuse tõttu ühelt poolt ja tsükli maksi-

maalsed pinged ei tohi ületada voolavuspiiri teiselt poolt, siis tsükli amplituude piiravaks jooneks tuleb võtta murdjoon *AED*. Ligikaudselt asendame saadud murdjoone sirgega *AD*. See sirge, nagu näeme edaspidi, annab võimaluse tuletada võnketugevuse võrrandi vägagi lihtsal kujul.

Lubatavate pingete leidmiseks asetame sirge *AD* asendisse *A'D'* nii, et lõigud *OA'* ja *OD'* võrduksid vastavalt

$$\frac{\sigma_{-1}}{n} \text{ ja } \frac{\sigma_T}{n} = R,$$

kus n on varutegur ja R — lubatav pinge staatilistel koormamistel.



Joon. 275.

Kasutades sirget *A'D'* ja vaadeldes kahte sarnast kolmnurka *FGD'* ja *A'OD'*, koostame σ_a ja σ_k vahelise seose:

$$\frac{\sigma_a}{\frac{\sigma_{-1}}{n}} = \frac{R - \sigma_k}{\frac{\sigma_T}{n}}.$$

Asendades $\sigma_a = \Delta_\sigma \sigma_k$ (kus Δ_σ on dünaamiline lisand) ja kasutades uut tähistust $\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_T}$ (seda suurust hakkame nimetama materjali kvaliteedi teguriks), saame viimasest võrrandist:

$$\sigma_k = \frac{R}{1 + \frac{\Delta_\sigma}{\alpha_\sigma}}.$$

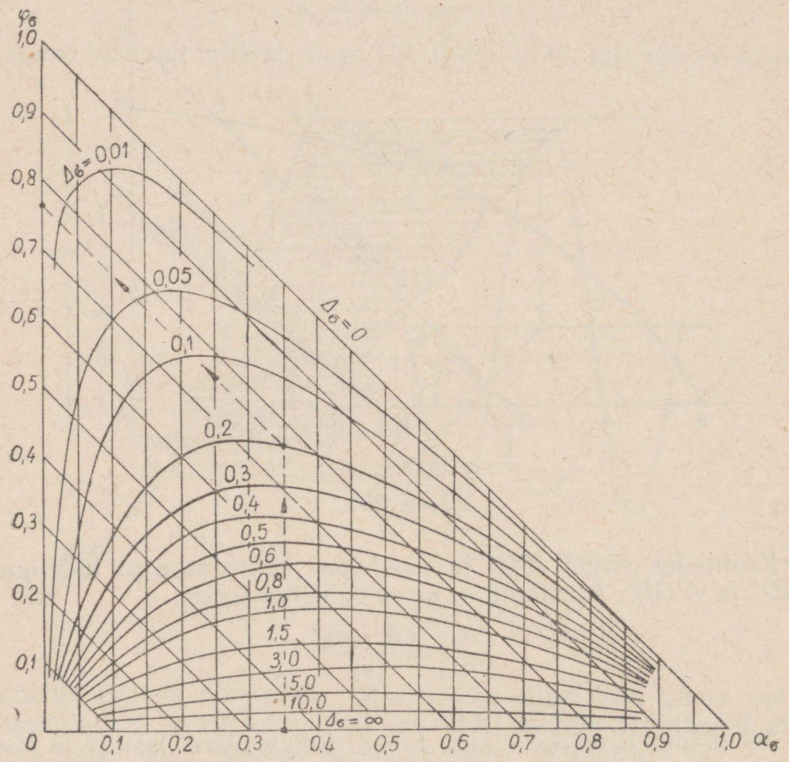
Asetades saadud avaldise valemisse (75), saame

$$\sigma_{max} = \frac{1 + \Delta_\sigma}{1 + \frac{\Delta_\sigma}{\alpha_\sigma}} R = \varphi_\sigma R, \tag{80}$$

kus suurust

$$\varphi_\sigma = \frac{1 + \Delta_\sigma}{1 + \frac{\Delta_\sigma}{\alpha_\sigma}} \tag{81}$$

nimetame lubatavate pingete vähendamisteguriks võnkekoormustel[1]. Võrrandist (80) järeldub, et



Joon. 276.

võnkekoormuse puhul vähendatakse staatilisel koormusel kasutatavaid lubatavaid pingeid R teguriga φ_σ korrutamise teel, kusjuures see tegur on ühest väiksem. See tegur, nagu nähtub vii-

[1] Lubatavate pingete vähendamistegur φ_σ on autori (A. Popov) poolt tugevusõpetusesse sisse toodud esmakordselt.

masest võrrandist, oleneb dünaamilisest lisandist $A_\sigma = \frac{\sigma_a}{\sigma_k}$ ja materjali kvaliteedi tegurist $\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_T}$. Joonisel 276 on toodud võrrandi (81) põhjal ehitatud diagramm, mille abil on võimalik kiiresti leida φ_σ.

Võrrandi (80) kirjutame järgmisel lõplikul, arvutusteks sobival kujul:

$$\sigma_e = \frac{\sigma_{max}}{\varphi_\sigma} = R, \tag{82}$$

kus σ_e nimetame ekvivalentseks pingeks. Seda pinget ei ole olemas, teda kasutatakse võnkepingete ekvivalentsel asendamisel staatiliste pingetega. Kui ekvivalentne pinge on tuntud, siis varuteguri leidmiseks kasutatakse valemit

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_e}. \tag{83}$$

35. Väsimuspiiri vähendavad tegurid.

On olemas palju põhjusi, mis märgatavalt vähendavad väsimuspiiri ja koos sellega ka materjali võnketugevust. Vaatleme ainult mõningaid neist. Suured kohalikud pinged, millest oli juttu p-s 17, vähendavad tunduvalt väsimuspiiri. Tema suuruse määramiseks kasutatakse laboratooriumides mitmesuguste sisselõigetega proovikehi. Väsimuspiir, arvestades pingete kontsentratsiooni, väljendatakse tavaliselt olenevalt väsimuspiirist σ_{-1}, mis on saadud poleeritud pinnaga proovikehade proovimisel, ja efektiivsest kontsentratsioonitegurist $\alpha_{k_{-1}}$, s. t.

$$\sigma^k_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{\alpha_{k_{-1}}}. \tag{84}$$

Kui ei ole võimalik σ^k_{-1} suurust määrata katseliselt, siis soovitatakse konstruktsioonsüsinikteraste puhul suurust $\alpha_{k_{-1}}$ väljendada kontsentratsioonitegurit α_k kaudu [vt. v. (46)] järgmiselt:

$$\alpha_{k_{-1}} \approx \frac{1 + \alpha_k}{2}. \tag{85}$$

Välispinna seisukord mõjutab samuti märgatavalt väsimuspiiri. Mõnede proovikehade jaoks on α_k väärtused järgmised: jämeda viilimise puhul 1,22—1,25, tavalisel viisil treitud — 1,14, smirgelpaberiga lihvitud — 1,02—1,06.

Ka proovikeha pinna korrosiooni põhjustav keskkond avaldab suurt mõju väsimuspiirile. See väheneb märgatavalt, sest korrosiooni olemasolu proovikeha pinnal põhjustab seal peente pragude võrgu. Need praod rikuvad metalli välispinda ja on suure pingete kontsentratsiooni allikateks.

36. Võnketugevuse arvutuse näiteid.

Ülesanne 3. Määrame varva ristlõike pindala, kui talle on rakendatud võnkuv tõmbekoormus $P = P_k \pm P_a$, kus $P_k = 5000$ kg on staatiline koormus ja $P_a = 2000$ kg on koormuse amplituud. Olgu varva materjali kohta teada, et $\alpha_\sigma = 0{,}70$ ja $R = 1500$ kg/cm².

Kasutades joonisel 276 toodud diagrammi, leiame, kui $\Delta_\sigma = \dfrac{P_a}{P_k} = 0{,}4$ ja $\alpha_\sigma = 0{,}70$, et

$$\varphi_\sigma = 0{,}90 .$$

Nii on arvutuseks vajalik lubatav pinge $\varphi_\sigma R = 1350$ kg/cm². Järelikult on otsitav ristlõike pindala

$$F = \frac{P_{max}}{\varphi_\sigma R} = \frac{5000 + 2000}{1350} = 5{,}2 \text{ cm}^2$$

(P_{max} on maksimaalne tõmbekoormus).

Ülesanne 4. Leiame koormuse amplituudi P_a, mida võib ohutult rakendada varvale, millele mõjub staatiline koormus $P_k = 8000$ kg, kui on antud, et $F = 10$ cm², $R = 1200$ kg/cm², $\sigma_T = 3000$ kg/cm², $\sigma_{-1} = 2500$ kg/cm² ja $\alpha_{k_{-1}} = 1{,}25$.

Arvutusvõrrandi kirjutame sel juhul järgmisel kujul:

$$\sigma_e = \frac{\sigma_{max}}{\varphi_\sigma} = R$$

ehk

$$(1 + \Delta_\sigma)\sigma_k = \frac{1 + \Delta_\sigma}{1 + \dfrac{\Delta_\sigma}{\alpha_\sigma}} \cdot R ,$$

kust saame:

$$\Delta_\sigma = \left(\frac{R}{\sigma_k} - 1\right)\alpha_\sigma .$$

Et aga

$$R = 1200 \text{ kg/cm}^2, \ \sigma_k = \frac{P_k}{F} = 800 \text{ kg/cm}^2 \text{ ja}$$

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\alpha_{k_{-1}}\sigma_T} = \frac{2500}{1{,}25 \cdot 3000} \approx 0{,}67 ,$$

siis leiame, et

$$\Delta_\sigma = \left(\frac{1200}{800} - 1\right) 0{,}67 = 0{,}335.$$

Järelikult otsitav

$$P_a = \Delta_\sigma P_k = 0{,}335 \cdot 8000 = 2680 \text{ kg}.$$

Ülesanne 5. Määrame varva varuteguri, kui varba tõmmatakse koormusega $P_k = 10\,000$ kg ja $P_a = 2000$ kg ja kui $F = 12$ cm², $\sigma_T = 2000$ kg/cm² ja $\sigma_{-1} = 1500$ kg/cm².

Leiame:

$$\Delta_\sigma = \frac{P_a}{P_k} = 0{,}2, \quad \alpha_\sigma = \frac{1500}{2000} = 0{,}75,$$

diagrammist saame $\varphi_\sigma = 0{,}95$ ja

$$\sigma_e = \frac{P_{max}}{\varphi F} = \frac{12\,000}{0{,}95 \cdot 12} = 1053 \text{ kg/cm}^2.$$

Kasutades valemit (83), saame

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_e} = \frac{2000}{1053} = 1{,}9.$$

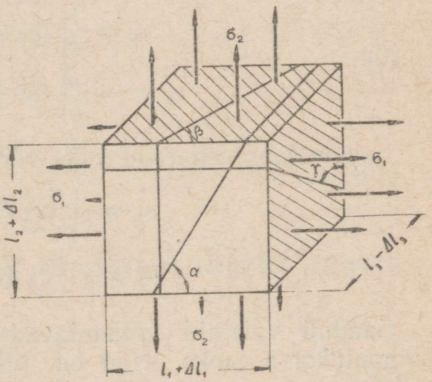
IV peatükk.

Kahesuunaline pingeolukord.

37. Kahesuunaline tõmme ja surve.

I peatükis vaatlesime varva tõmmet ainult ühes suunas. Nüüd asume juhu käsitlemisele, kus tõmbepinged σ_1 ja σ_2 mõjuvad kahes, teineteisega risti asuvas suunas, kusjuures need pinged on ühtlaselt jaotatud elemendi külgtahkudel (joon. 277).

Kui enne deformatsiooni olid elemendi servad pikkusega l_1, l_2 ja l_3, siis pärast deformatsiooni on nad pikkusega $l_1 + \Delta l_1$, $l_2 + \Delta l_2$ ja $l_3 - \Delta l_3$, kus Δl_1 ja Δl_2 on absoluutsed pikenemised ja Δl_3 — absoluutne lühenemine. Jagades saadud servade ümberpaigutumised vastavate esialgsete pikkustega, saame lineaarsete deformat-



Joon. 277.

sioonide jaoks, mis tekivad kolmes üksteisega risti asuvas suunas, järgmised avaldised:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\Delta l_1}{l_1}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\Delta l_2}{l_2}, \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\Delta l_3}{l_3}. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Need deformatsioonid tekivad pingete σ_1 ja σ_2 mõjul. Kasutades valemeid (12) ja (14), samuti aga ka mõjude liitmise printsiipi (vt. p. 14), avaldame deformatsioonid pingete kaudu järgmiselt:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E}, \\ \varepsilon_3 &= -\mu\frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E}, \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

kus $\frac{\sigma_1}{E}$ ja $\frac{\sigma_2}{E}$ on suhtelised pikenemised pingete σ_1 ja σ_2 mõjumise suundades, $\mu\frac{\sigma_1}{E}$ ja $\mu\frac{\sigma_2}{E}$ — suhtelised lühenemised risti vastavate pingete mõjumise suundadega.

Staatika seisukohalt annavad pinged σ_1, korrutatuna tahu pindalaga $F_1 = l_2 l_3$, normaaljõu N_1 ja pinged σ_2, korrutatuna tahu pindalaga $F_2 = l_1 l_3$ — normaaljõu N_2. Seega

$$N_1 = \sigma_1 F_1, \quad N_2 = \sigma_2 F_2. \qquad (c)$$

Kirjutame võrrandid (b) välja järgmisel kujul:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1), \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2). \end{aligned}\right\} \qquad (86)$$

Lahendades esimesed kaks võrrandit σ_1 ja σ_2 suhtes, leiame, et

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1). \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

Saadud valemid väljendavad Hooke'i seadust kahesuunalise pingeolukorra jaoks. Nad on tuletatud tõmbepingete jaoks. Kui mõni pinge on survepinge või mõni deformatsioon — survedeformatsioon, siis tuleb neid saadud võrrandites võtta märgiga miinus.

Survepinge puhul, kus $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma$, leiame, et

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{1-\mu}{E}\sigma.$$

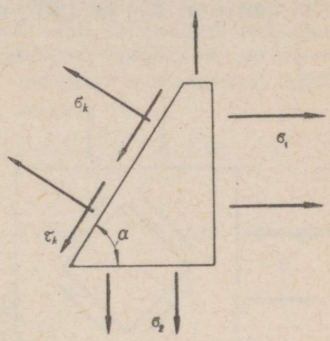
Normaalpingete σ_k ja tangentsiaalpingete τ_k määramiseks kaldlõikes, mis asub rööptahukas nurga α all (joon. 278), rakendame mõjude liitmise printsiipi. Tuletades meelde, et ühesuunalise tõmbe puhul need pinged on [vt. v. (2) ja (3)]

$$\sigma_k = \sigma \sin^2 \alpha \quad \text{ja} \quad \tau_k = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha,$$

leiame kahesuunalise tõmbe puhuks:

$$\sigma_k = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

$$\tau_k = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$



Joon. 278.

ehk

$$\left.\begin{aligned} \sigma_k &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \\ \tau_k &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Tangentsiaalpinged, nagu nähtub viimasest valemist, on maksimaalväärtusega

$$\tau_{k\,max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{89}$$

siis, kui $\sin 2\alpha = 1$, s. t. lõigetes, mis on nurga all $\alpha = 45°$.

Nurkade β ja γ all asuvates kaldlõigetes (joon. 277) määratakse normaal- ja tangentsiaalpinged järgmiste valemite abil:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_k' &= \sigma_1 \sin^2 \beta, \\ \tau_k' &= \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\beta; \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_k'' &= \sigma_2 \sin^2 \gamma, \\ \tau_k'' &= \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Seejuures on nurkade $\beta = \gamma = 45°$ all asuvates lõigetes tangentsiaalpinged

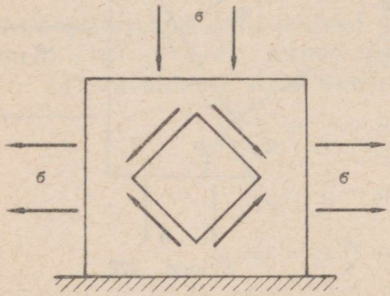
$$\left.\begin{aligned} \tau_{k\,max}' &= \frac{\sigma_1}{2}, \\ \tau_{k\,max}'' &= \frac{\sigma_2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Erijuhul, kui $\sigma_1 = \sigma$ ja $\sigma_2 = -\sigma$ (joon. 279), leiame valemite (88) järgi:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_k &= \sigma \sin^2 \alpha - \sigma \cos^2 \alpha = -\sigma \cos 2\alpha, \\ \tau_k &= \sigma \sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

Kui $\alpha = 45°$ ja $135°$, siis saame

$$\sigma_k = 0 \quad \text{ja} \quad \tau_{k\,max} = \sigma.$$



Joon. 279.

Viimastest avaldistest järgneb, et kui vaadeldavast rööptahukast eraldada uus tahukas, mille tahud on kallutatud 45° all eelmise tahkudele (joon. 279), siis asub viimane puhtnihke tingimustes. Järelikult võib puhtnihet saavutada sel teel, et tõmmatakse ühes suunas ja surutakse sellele risti asuvas suunas ühesuguse pingega.

38. Mahuline deformatsioon ja Hooke'i seadus.

Deformatsioonide tõttu muutub keha maht. Allutades rööptahuka tõmbepingetele σ_1 ja σ_2 (joon. 277), saame mahu suurenemise

$$\Delta V = (l_1 + \Delta l_1)(l_2 + \Delta l_2)(l_3 - \Delta l_3) - l_1 l_2 l_3,$$

mida nimetatakse mahu absoluutseks muutumiseks. Leiame mahu suhtelise muutumise ehk mahulise deformatsiooni, jagades ΔV esialgse rööptahuka mahuga $V = l_1 l_2 l_3$. Tuletame meelde tähistused:

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \varepsilon_1; \quad \frac{\Delta l_2}{l_2} = \varepsilon_2; \quad -\frac{\Delta l_3}{l_3} = \varepsilon_3.$$

Saame

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta V}{V} = \left(1 + \frac{\Delta l_1}{l_1}\right)\left(1 + \frac{\Delta l_2}{l_2}\right)\left(1 - \frac{\Delta l_3}{l_3}\right) - 1 =$$

$$= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

Viimases avaldises korrutisi mitte arvestades saame, et

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \qquad (94)$$

Mahulise deformatsiooni ja pingete vahelise olenevuse leidmiseks asendame viimases võrrandis vastavad väärtused avaldistega (86). Siis

$$\varepsilon_0 = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2). \qquad (95)$$

Saadud valem väljendab Hooke'i seadust mahuliste deformatsioonide kohta (*mahuline deformatsioon on võrdeline normaalpingete summaga*).

Valemist (95) järeldub, et deformatsioonid ei muuda mahtu ($\varepsilon_0 = 0$) puhtnihke juhul ($\sigma_1 = -\sigma_2$) ja materjalide puhul, mille ahenemistegur $\mu = 0{,}5$; viimaste hulka kuulub näiteks kummi.

39. Deformatsiooni energia.

Rööptahuka tahkudele rakendatud jõud N_1 ja N_2 (joon. 277) teevad tööd vastavate ümberpaigutumiste Δl_1 ja Δl_2 teostumisel. See töö muutub tervikuna deformatsiooni potentsiaalseks energiaks A_p, kui ümberpaigutumised on elastsed. Arvestades seda, et jõudude suurenemine olenevalt pikenemistest allub lineaarsuse seadusele ja kasutades valemit (16), leiame:

$$A_p = \frac{N_1 \Delta l_1}{2} + \frac{N_2 \Delta l_2}{2}.$$

Jagades saadud avaldised deformeeritava mahuga $V = l_1 l_2 l_3$, koostame deformatsiooni potentsiaalse erienergia valemi:

$$a_p = \frac{A_p}{l_1 l_2 l_3} = \frac{N_1}{2 l_2 l_3} \varepsilon_1 + \frac{N_2}{2 l_1 l_2} \varepsilon_2.$$

Arvestades valemit (c), saame:

$$a_p = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2}.$$

Asendades ε_1 ja ε_2 avaldistega (86), saame lõplikult

$$a_p = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2). \tag{96}$$

40. Põhilised tugevusteooriad kahesuunalise pingeolukorra kohta.

Katseliselt on kindlaks tehtud, et rööptahuka deformeerumisel kahes teineteisega risti asuvas suunas (vt. joon. 277) oleneb voolavuse ilmumise moment plastilisel materjalil pingete σ_1 ja σ_2 suurusest. On olemas teooriad, mida nimetatakse tugevusteooriateks, mis määravad kindlaks seosed niisuguste pingete vahel. Haprate materjalide puhul kasutatakse neid teooriaid keha purunemise alguse kindlaksmääramiseks. Vaatleme kolme põhiteooriat, mida kasutatakse masinaehituses.

1. Maksimaalsete pingete teooria. See on üheks vanemaks teooriaks. Ta esitati Galilei poolt. Selle teooria põhjal oletatakse, et materjali voolavus algab tingimusel, kui üks normaalpinge σ_1 või σ_2 jõuab voolavuspiirini σ_T ühesuunalisel tõmbel või survel, s. t.

$$|\sigma_1| = \sigma_T \quad \text{või} \quad |\sigma_2| = \sigma_T. \tag{97}$$

Maksimaalsete pingete teooria, nagu selgus katsetel plastiliste materjalidega, ei anna alati õigeid tulemusi kahesuunalises pingeolukorras. Näiteks kui rööptahukat, mis on koormatud tõmbepingetega, koormata veel survepingetega vastastikku risti olevates

suundades, siis voolavuse tekkimise moment jõuab kätte varem. Sel juhul vaadeldav teooria viib valedele tulemustele, sest ta ei arvesta mõlema pinge vastastikust mõju.

Haprate metallidega, nagu malm, tehtud katsed annavad teatud juhiseid maksimaalsete pingete teooria kasutamiseks nende metallide kahesuunalise pingeolukorra puhuks. Niisiis oletame, et purunemine tõmbe tõttu tekib siis, kui üks normaalpingetest σ_1 või σ_2 jõuab tugevuspiirini ühesuunalises pingestatud seisukorras, s. t.

$$|\sigma_1| = \sigma_b \quad \text{või} \quad |\sigma_2| = \sigma_b. \tag{98}$$

II. Maksimaalsete deformatsioonide teooria. Selle teooria põhjal oletatakse, et materjali voolavus tekib siis, kui üks lineaarsetest deformatsioonidest ε_1 või ε_2 jõuab suuruseni $\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E}$, s. t.

$$|\varepsilon_1| = \varepsilon_T \quad \text{või} \quad |\varepsilon_2| = \varepsilon_T. \tag{99}$$

Väljendades deformatsioonid pingete kaudu, saame valemite (86) abil:

$$\sigma_1 - \mu\sigma_2 = \sigma_T; \quad \sigma_2 - \mu\sigma_1 = \sigma_T.$$

Saadud võrrandid väljendavad olenevust pingete σ_1 ja σ_2 vahel voolavuse tekkimise momendil. Tähistades võrrandite vasakuid pooli σ_{e1} ja σ_{e2}, kirjutame võrrandi ümber järgmiselt:

$$\sigma_{e1} = \sigma_1 - \mu\sigma_2 = \sigma_T; \quad \sigma_{e2} = \sigma_2 - \mu\sigma_1 = \sigma_T. \tag{100}$$

Edaspidi nimetame pingeid σ_{e1} ja σ_{e2} e k v i v a l e n t s e t e k s p i n g e t e k s. Tuletame meelde, et analoogiline termin leidis kasutamist võnkekoormuste juures.

Käsiteldud teooriat katsed ei kinnita ja seepärast teda arvutuste puhul ei soovitata.

III. Maksimaalsete tangentsiaalpingete teooria. See teooria on täiuslikum ja populaarne plastiliste materjalide kohta tehtavate arvutuste puhul. Selle teooria põhjal oletatakse, et materjali voolavus tekib siis, kui üks kolmest maksimaalsest tangentsiaalpingest, millest oli juttu p-s 37, saavutab voolavuspiiri τ_T puhtnihkel. Kasutades valemeid (89) ja (92), kirjutame need tingimused nii:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{k\,max} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \tau_T; \\ \tau'_{k\,max} &= \frac{1}{2}\sigma_1 = \tau_T; \\ \tau''_{k\,max} &= \frac{1}{2}\sigma_2 = \tau_T. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Saadud võrranditesse asetame

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{2}, \tag{102}$$

sest vastavalt valemile (4) on ühesuunalisel tõmbel pingete teljega 45° all olevas lõikes mõjuv maksimaalne tangentsiaalpinge võrdne poole normaalpingega.

Lõplikult saame

$$\left.\begin{aligned} \sigma_e &= \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_T, \\ \sigma_1 &= \sigma_T, \quad \sigma_2 = \sigma_T, \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

kus σ_e on samuti ekvivalentne pinge. On tarvis märkida, et saadud avaldistes on kaks viimast tingimust kooskõlas esimese tugevusteooria oletustega [vt. võrrand (97)].

41. Tugevusteooriate kasutamine staatilise tugevuse arvutamisel.

Eelmises punktis kahesuunalise pingeolukorra käsitlemisel lugesime sobivaks haprate materjalide puhul esimest tugevusteooriat ja plastiliste materjalide puhul — kolmandat.

Tugevuse arvutamisel esimese teooria järgi ei tohi tõmbepinged ületada lubatavaid tõmbepingeid $R_t = \frac{\sigma_b}{n_b}$ [vt. valem (22)], s. t.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &\leqslant R_t; \\ \sigma_2 &\leqslant R_t. \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Arvutamisel viimase teooria järgi ei tohi valemite (103) abil määratavad pinged ületada lubatavaid pingeid $R_t = \frac{\sigma_T}{n_T}$, s. t.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_e = \sigma_1 - \sigma_2 &\leqslant R_t; \\ \sigma_1 &\leqslant R_t; \\ \sigma_2 &\leqslant R_t. \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Tuntud pingete puhul, näiteks ekvivalentsete pingete puhul, määratakse varutegur voolavuspiiri suhtes valemist

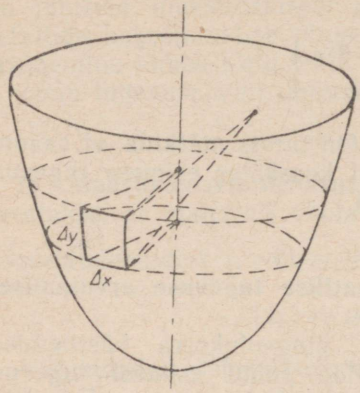
$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_e}. \tag{106}$$

42. Õhukeseseinaliste anumate arvutamine.

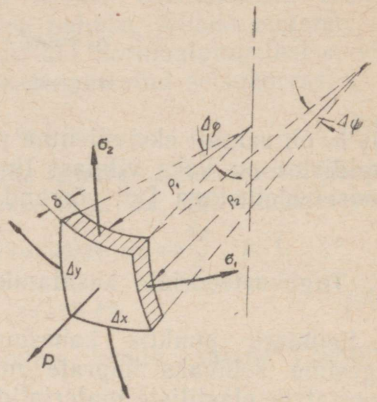
Koormame õhukeseseinalist pöördkeha kujuga anumat (joon. 280) siserõhuga p. Olgu see rõhk konstantne kõikide pinna punktide kohta või ka mittekonstantne, ta on aga alati sümmeetriline pöörlemistelje suhtes.

Deformeerumise protsessis tekivad anuma seintes kahes teineteisega risti asuvas suunas suhtelised pikenemised ε_1 ja ε_2. Need pikenemised põhjustavad

paralleelide ja meridiaanide pikkuste muutusi. Kui anuma seinast välja lõigata nelja lõike abil element (joon. 281), siis saadud lõigetes mõjuvad teineteisega risti olevates suundades tõmbepinged σ_1 ja σ_2. Vaadeldava õhukeseseinalise anuma seina paksuse δ kohta võime lugeda need pinged konstantseteks.



Joon. 280.



Joon. 281.

Pingete leidmiseks koostame staatilise tasakaalu võrrandid kõikide jõudude kohta, mis on rakendatud väljalõigatud elemendile. Projitseerides jõud elemendi pinna normaali suunale, saame:

$$2(\sigma_1 \delta \Delta y)\sin\frac{\Delta\varphi}{2} + 2(\sigma_2 \delta \Delta x)\sin\frac{\Delta\psi}{2} - p\Delta x\Delta y = 0.$$

Olgu

$$\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\Delta x}{2\rho_1}$$

ja

$$\sin\frac{\Delta\psi}{2} \approx \frac{\Delta\psi}{2} = \frac{\Delta y}{2\rho_2},$$

kus ρ_1 on meridiaaniga risti asuva lõike kõverusraadius,
ρ_2 — meridionaalse kõvera kõverusraadius.

Pärast ümbermoodustamist leiame:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{\delta}. \qquad (107)$$

Saadud võrrand seob seinas tekkivad pinged rõhuga p. Kasutame teda erijuhtude puhul.

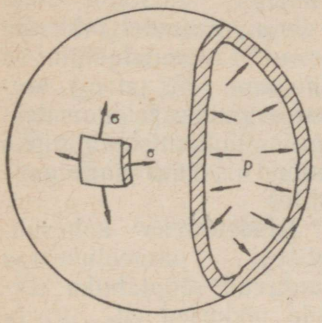
Ülesanne 6. Kahesuunaline tõmme tekib sfäärilise anuma seintes (joon. 282) siserõhu p mõjul. Sel juhul on $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ja $\rho_1 = \rho_2 = \frac{D}{2}$.

Kasutades võrrandit (107), saame

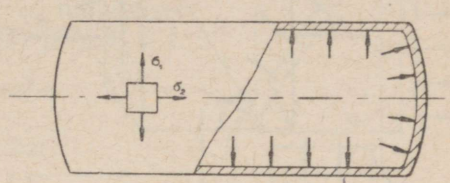
$$\frac{2\sigma}{D} + \frac{2\sigma}{D} = \frac{p}{\delta},$$

kust

$$\sigma = \frac{pD}{4\delta}. \tag{108}$$



Joon. 282.



Joon. 283.

Valemi (105) põhjal koostame võrrandi anuma seinapaksuse määramiseks:

$$\sigma = \frac{pD}{4\delta} = R_t,$$

kust

$$\delta = \frac{pD}{4R_t}. \tag{109}$$

Ülesanne 7. Kahesuunaline tõmme tekib ka katla seinas (joon. 283) siserõhu p mõjul. Pingete σ_1 ja σ_2 määramiseks kirjutame võrrandi (107), arvestades, et $\varrho_1 = \frac{D}{2}$ ja $\varrho_2 = \infty$:

$$\frac{2\sigma_1}{D} + \frac{\sigma_2}{\infty} = \frac{p}{\delta},$$

kust saame, et

$$\sigma_1 = \frac{pD}{2\delta}. \tag{110}$$

Kui $P = \frac{\pi D^2}{4}\, p$ on katla põhjale mõjuv jõud ja $F = \pi D\delta$ — katla ristlõike rõngaspind, siis saab leida pinge σ_2, mis mõjub piki katla moodustajat:

$$\sigma_2 = \frac{P}{F} = \frac{pD}{4\delta} = \frac{\sigma_1}{2}. \tag{111}$$

Seinapaksuse määramiseks kasutame võrrandit

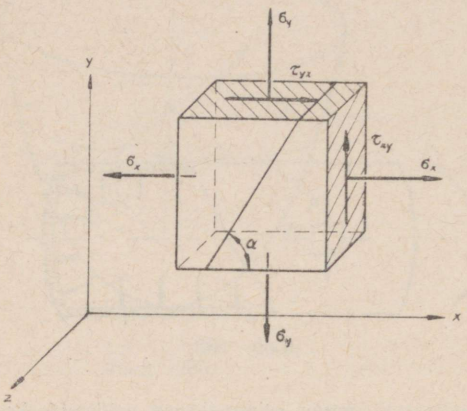
$$\sigma_1 = \frac{pD}{2\delta} = R_t,$$

kust

$$\delta = \frac{pD}{2R_t}. \tag{112}$$

43. Kahesuunalise pingeolukorra üldjuhtum.

P-s 37 vaatlesime kahesuunalise tõmbe juhtu. Nüüd teeme ülesande keerukamaks, rakendades rööptahuka külgtahkudele normaalpingetele täiendavalt veel tangentsiaalpinged (joon. 284). Külgtahkudel on normaalpinged suunatud paralleelselt x- ja y-teljega, tähistame neid σ_x ja σ_y, samadel tahkudel olevad tangentsiaalpinged tähistame τ_{xy} ja τ_{yx}, seejuures seome teise indeksiga tangentsiaalpingete suunad koordinaattelgede suhtes.



Joon. 284.

Vaadeldavas kahesuunalises pingeolukorras muutuvad rööptahuka servade pikkused Δl_x, Δl_y ja $-\Delta l_z$ võrra ja nurgad üksteisega risti asuvate servade vahel muutuvad γ_{xy} võrra. Jagades saadud lineaarsed ümberpaigutumised servade esialgsete pikkustega, kirjutame kolmele lineaarsele deformatsioonile, mis on suunatud paralleelselt koordinaattelgedega, järgmised võrrandid:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\Delta l_x}{l_x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\Delta l_y}{l_y}; \\ \varepsilon_z &= -\frac{\Delta l_z}{l_z}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Lineaarsed deformatsioonid tekivad kooskõlas p. 37-ga normaalpingete σ_x ja σ_y arvel ja nurkdeformatsioonid γ_{xy} — tangentsiaalpingete τ_{xy} arvel. Kasutades valemeid (86) ja (60) määrame kindlaks seose pingete ja deformatsioonide vahel järgmisel kujul:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x); \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y); \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

kust saame:

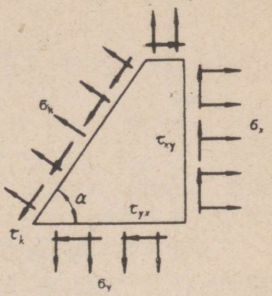
$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y);\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x);\\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

kus tangentsiaalpingete kohta p. 20 põhjal maksab võrdus $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Rööptahuka lõikes, mis asub nurga α all (joon. 285) tema külgtahule, mõjuvad normaal- ja tangentsiaalpinged σ_k ja τ_k. Ainult normaalpingete σ_x ja σ_y mõjumisel saab neid määrata valemi (88) põhjal, s. t.

$$\sigma_k = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha;$$

$$\tau_k = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha;$$



Joon. 285.

ainult tangentsiaalpingete τ_{xy} ja τ_{yx} mõjumisel — valemite (54) ja (55) järgi:

$$\sigma_k = -\tau_{xy}\sin 2\alpha;$$
$$\tau_k = -\tau_{xy}\cos 2\alpha.$$

Käsitledes kahesuunalise tõmbe ja nihke samaaegset mõju, leiame mõjude liitmise printsiibi põhjal:

$$\sigma_k = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha; \qquad (114)$$

$$\tau_k = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha. \qquad (115)$$

44. Peapinged ja nende suunad. Maksimaalne tangentsiaalpinge.

Normaalpinge kaldlõikes oleneb valemi (114) põhjal nurgast α. Leiame $\alpha = \alpha_m$ väärtuse tingimusel, kui σ_k suurusel on maksimaalne või minimaalne väärtus. Selleks tuleb vaadeldavat avaldist diferentseerida α järgi ja saadud tulemus võrrutada nulliga, s. t.

$$\left(\frac{d\sigma_k}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_m} = 2\sigma_x \sin\alpha_m\cos\alpha_m - 2\sigma_y\cos\alpha_m\sin\alpha_m - 2\tau_{xy}\cos 2\alpha_m = 0$$

või

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha_m - \tau_{xy}\cos 2\alpha_m = 0, \qquad (116)$$

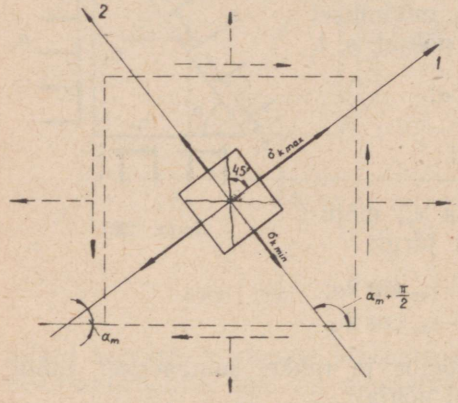
kust saame, et

$$\operatorname{tg} 2\alpha_m = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \qquad (117)$$

Siit saame nurga kaks väärtust, mis teineteisest erinevad 90° võrra, sest $\operatorname{tg} 2(\alpha_m + 90°) = \operatorname{tg} 2\alpha_m$.

Analüüsimise tulemusena määrame kindlaks rööptahukas kaks pinda, kus normaalpingetel on kas maksimaalne või minimaalne väärtus. Üks neist on ilmselt maksimaalne $\sigma_{k\,max}$ ja teine minimaalne $\sigma_{k\,min}$. Tangentsiaalpinged on saadud kahes pinnas võrdsed nulliga. Tõepoolest, kui võtta valem (115), siis $\alpha = \alpha_m$ puhul leiame:

$$\tau_k = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_m - \tau_{xy} \cos 2\alpha_m.$$



Joon. 286.

Vastavalt valemile (116) saame, et

$$\tau_k = 0. \qquad (118)$$

Joonisel 286 on antud teine rööptahukas, mis on eraldatud endisest ja mille tahud asetsevad x-telje suhtes nurkade α_m ja $\alpha_m + \frac{\pi}{2}$ all. Endise rööptahuka tahkude koormamise iseloom näitab, et teravnurga α_m all asuvad kiud on rohkem pingestatud kui nürinurga $\alpha + \frac{\pi}{2}$ all asuvad kiud. Tangentsiaalpingete τ_{xy} ja τ_{yx} vastupidiste suundade puhul ei ole raske tõestada, et pinged $\sigma_{k\,max}$ ja $\sigma_{k\,min}$ vahetavad oma kohti. See võib olla lihtsaimaks reegliks normaalpingete suuna leidmisel nende maksimaalse ja minimaalse väärtuse puhul.

Edaspidi nimetame pingeid $\sigma_{k\,max}$ ja $\sigma_{k\,min}$ p e a p i n g e t e k s ning kahte teineteisega risti asuvat telge *1* ja *2*, millega paralleelselt need pinged mõjuvad, p i n g e t e p e a t e l g e d e k s. Peapingete arvutamiseks moodustame võrrandi (114) järgmiselt ümber [1]:

---

[1] Ümbermoodustamisel kasutatakse järgmisi trigonomeetrilisi valemeid:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha);$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha);$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}};$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}.$$

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x}{2}(1 - \cos 2\alpha) + \frac{\sigma_y}{2}(1 + \cos 2\alpha) - \tau_{xy} \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} - \tau_{xy} \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}.$$

Asendades $\alpha = \alpha_m$ ja arvestades võrrandit (117), saame pärast ümbermoodustamist

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{k\,max} = \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \\ \sigma_{k\,min} = \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \end{aligned}\right\} \quad (119)$$

Liites need valemid, saame:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y. \quad (120)$$

Siit järgneb, et kahe teineteisega risti asuva pinna kohta normaalpingete summa nende pindade pööramise puhul ei muutu.

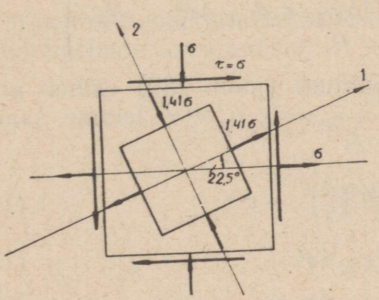
Vaatleme kahe näite varal tuletatud valemite kasutamist.

Ülesanne 8. Leiame pingete peatelgede asetuse ja peapingete suurused rööptahuka puhul (joon. 287), mis on koormatud külgtahkudel pingetega $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = -\sigma$ ja $\tau_{xy} = \sigma$.

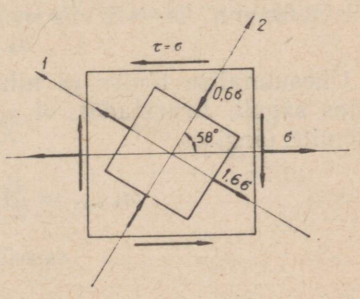
Valemite (117) ja (119) abil saame:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_m = 1;$$
$$\alpha_m = 22{,}5^0;$$
$$\sigma_1 = \sigma\sqrt{2} \approx 1{,}41\,\sigma;$$
$$\sigma_2 = -\sigma_1.$$

Joonisel on toodud rööptahukas, mis on orienteeritud pingete peatelgede järgi; on näidatud ka peapingete suunad.



Joon. 287.



Joon. 288.

Ülesanne 9. Rööptahuka puhul (joon. 288), mis on koormatud pingetega $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$ ja $\tau_{xy} = -\sigma$, leiame analoogiliselt esimese näitega:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_m = -2;$$
$$\alpha_m \approx 58^\circ;$$
$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \sigma^2} = 1{,}6\,\sigma;$$
$$\sigma_2 = -0{,}6\sigma.$$

Peatelgede asend ja peapingete suunad antud juhu jaoks on antud joonisel 288.

Kuna kahesuunaline tõmme ja nihe taandub kahesuunaliseks tõmbeks pingetega σ_1 ja σ_2, siis maksimaalne tangentsiaalpinge on valemi (89) kohaselt peapingete poolvahe, s. t.

$$\tau_{k\,max} = \frac{\sigma_{k\,max} - \sigma_{k\,min}}{2}. \tag{121}$$

Asetades sellesse valemisse avaldise (119), saame

$$\tau_{k\,max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{122}$$

Mis puutub leitud pingete $\tau_{k\,max}$ mõjumispindadesse, siis nad asetsevad 45° all pingete peatelgedele (vt. joon. 286).

45. Kahesuunalise pingeolukorra üldjuhu ja ühesuunalise tõmbe ja nihke tugevusvõrrand.

Kõike p-s 41 öeldut staatilise tugevuse arvutuse kohta kahesuunalisel tõmbel võib rakendada ka vaadeldaval juhul, kui valemitesse (104) ja (105) suuruste σ_1 ja σ_2 asemele paigutada $\sigma_{k\,max}$ ja $\sigma_{k\,min}$, mis on saadud valemist (119). Siis saame järgmised arvutusvõrrandid:

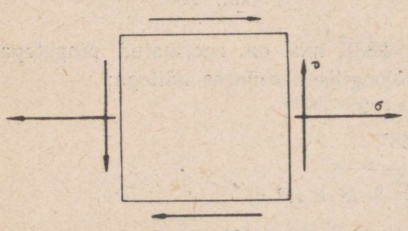
$$\sigma_{k\,max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leqslant R_t; \tag{123}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_e = \sigma_{k\,max} - \sigma_{k\,min} = 2\tau_{k\,max} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leqslant R_t; \\ \sigma_{k\,max} \leqslant R_t. \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Ühesuunalise tõmbe ja nihke juhtum (joon. 289) esineb arvutustes sageli. Arvestades, et $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau$, leiame saadud valemite järgi:

$$\sigma_{k\,max} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \tag{125}$$

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \tag{126}$$



Joon. 289.

Olgu pingetel σ ja τ võnkeline iseloom ja mõjugu nad samas faasis. Selliseid pingeid nimetatakse s i n f a a s s e t e k s p i n g e t e k s. Antud juhu puhul koostame võnketugevuse võrrandid, võttes aluseks kolmanda tugevusteooria.

Kui tähistada tsükli keskmisi pingeid σ_k ja τ_k, tsükli vaheldu-

vaid pingeid (amplituude) σ_a ja τ_a, siis tsükli maksimaalsete pingete kohta võime kirjutada järgmised võrrandid

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{max} &= \sigma_k + \sigma_a = (1 + \Delta_\sigma)\,\sigma_k,\\ \tau_{max} &= \tau_k + \tau_a = (1 + \Delta_\tau)\,\sigma_k,\end{aligned}\right\} \qquad (127)$$

kus $\Delta_\sigma = \frac{\sigma_a}{\sigma_k}$ ja $\Delta_\tau = \frac{\tau_a}{\tau_k}$ on dünaamilised lisandid [vt. v. (76)].

Normaal- ja tangentsiaalpingete eraldi mõjumisel kirjutame valemi (82) põhjal ekvivalentsed pinged järgmiselt:

$$\sigma'_e = \frac{\sigma_{max}}{\varphi_\sigma}; \qquad (128)$$

$$\tau'_e = \frac{\tau_{max}}{\varphi_\tau}. \qquad (129)$$

Lubatavate pingete vähendamistegurid on võnkekoormuse juures valemi (81) alusel järgmised:

$$\varphi_\sigma = \frac{1 + \Delta_\sigma}{1 + \frac{\Delta_\sigma}{\alpha_\sigma}} \text{ ja } \varphi_\tau = \frac{1 + \Delta_\tau}{1 + \frac{\Delta_\tau}{\alpha_\tau}}, \qquad (130)$$

kus $\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_T}$ ja $\alpha_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_T}$ on materjali kvaliteedi tegurid. Sinfaassete pingete puhul saame, kasutades valemit (126), ligikaudselt:

$$\sigma_e \approx \sqrt{(\sigma'_e)^2 + 4(\tau'_e)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{max}}{\varphi_\sigma}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau_{max}}{\varphi_\tau}\right)^2}\,^*. \qquad (131)$$

Koostatud võrrandit kasutame keerukatele jõu mõjudele allutatud varbade arvutamisel.

II OSA.

PAINE.

V peatükk.

Varva tasapinnaliste lõigete geomeetrilised karakteristikad.

Selleks, et siirduda ebaühtlase pingeolukorra tundmaõppimisele, eriti varbade painde käsitlemisele, on tarvis tundma õppida rida tasapinnaliste kujundite (lõigete) tähtsaid geomeetrilisi karakte-

* Valem σ_e kohta on autori (A. Popov) poolt sisse toodud Soderbergi valemi asemele, mis on hulga keerukam ja kasutamiseks tülikas.

ristikaid. Nendeks karakteristikateks on pindala, staatilised momendid ja inertsmomendid.

46. Tasapinnalise kujundi staatiline moment.

Raskuskeskme määramine.

Tasapinnalise kujundi staatiliseks momendiks mingite valitud telgede x_1 ja y_1 suhtes (joon. 290) nimetatakse summasid

$$\left.\begin{aligned} S_{x_1} &= \sum \Delta F y_1, \\ S_{y_1} &= \sum \Delta F x_1, \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

kus iga pinnaelement ΔF on korrutatud tema kaugusega vastavast teljest ja need korrutised on liidetud kogu pinna F ulatuses.

Kui pinna F raskuskeskme koordinaadid tähistada a_0 ja b_0, siis Varignoni teoreemi põhjal saame:

$$\left.\begin{aligned} S_{x_1} &= F b_0, \\ S_{y_1} &= F a_0, \end{aligned}\right\} \tag{133}$$

kust määrame

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{S_{y_1}}{F}, \\ b_0 &= \frac{S_{x_1}}{F}. \end{aligned}\right\} \tag{134}$$

Tsentraaltelgede x ja y, s. t. kujundi raskuskeset O läbivate telgede suhtes saame:

$$\left.\begin{aligned} S_x &= 0; \\ S_y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

47. Tasapinnalise kujundi inertsmoment.

Kujundi ekvatoriaalseks ehk teljeliseks inertsmomendiks nimetatakse summasid

$$\left.\begin{aligned} J_{x_1} &= \sum \Delta F y_1^2, \\ J_{y_1} &= \sum \Delta F x_1^2, \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

kus iga pinnaelement ΔF korrutatakse tema kauguse ruuduga vastavast teljest ja korrutiste summa on võetud kogu pinna kohta.

Analoogiliselt valemiga (133) võime ekvatoriaalseid inertsmomente väljendada järgmiste valemitega:

$$\left.\begin{aligned} J_{x_1} &= Fr_{x_1}^2, \\ J_{y_1} &= Fr_{y_1}^2, \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

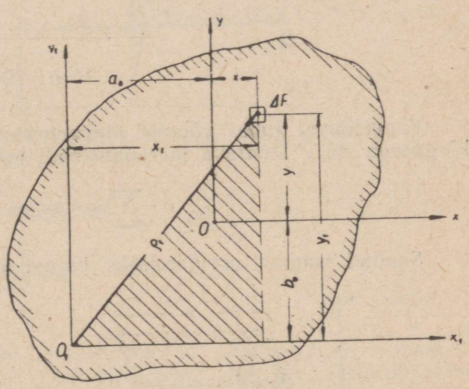
kus $r_{x_1} \neq b_0$ ja $r_{y_1} \neq a_0$ nimetatakse kujundi i n e r t s r a a d i u s t e k s telgede x_1 ja y_1 suhtes. Need raadiused on vastavalt eelmistele valemitele:

$$\left.\begin{aligned} r_{x_1} &= \sqrt{\frac{J_{x_1}}{F}}; \\ r_{y_1} &= \sqrt{\frac{J_{y_1}}{F}}. \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Kui inertsmoment võetakse telje suhtes, mis on risti kujundi tasapinnaga, siis nimetatakse teda p o l a a r i n e r t s m o m e n d i k s punkti suhtes, kus see telg lõikab vaadeldavat kujundit kandvat tasapinda. Polaarinertsmoment punkti O_1 suhtes (joon. 290) on

$$J_{p_1} = \sum \Delta F \varrho_1^2, \tag{139}$$

kus ϱ_1 on pinnaelemendi kaugus punktist O_1.



Joon. 290.

Vastavalt joonisele 290 võime kirjutada: $\varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2$.

Pärast võrrandi mõlemate poolte korrutamist ΔF-iga ja liitmist saame:

$$\sum \Delta F \varrho_1^2 = \sum \Delta F (x_1^2 + y_1^2).$$

Arvestades valemeid (136) ja (139), saame

$$J_{p_1} = J_{y_1} + J_{x_1}, \tag{140}$$

s. t., et polaarinertsmoment punkti O_1 suhtes võrdub inertsmomentide summaga ortogonaaltelgede x_1 ja y_1 suhtes.

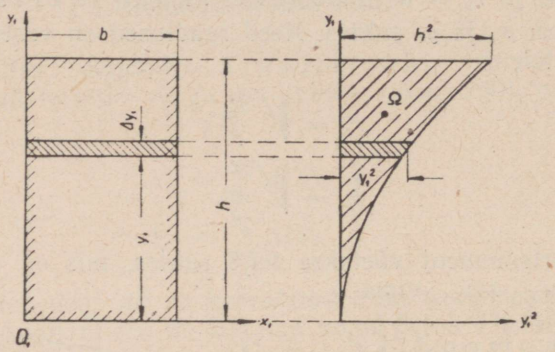
Summat

$$J_{x_1 y_1} = \sum \Delta F x_1 y_1, \tag{141}$$

kus iga pinnaelement ΔF korrutatakse koordinaatide korrutisega ja summeeritakse kujundi kogu pinna ulatuses, nimetatakse kujundi t s e n t r i f u g a a l i n e r t s m o m e n d i k s.

Vaatleme näidetes lihtsamate kujundite inertsmomentide leidmist.

Ülesanne 10. Leiame ristküliku ekvatoriaalse inertsmomendi telje x_1 suhtes, mis läbib ristküliku alust (joon. 291).

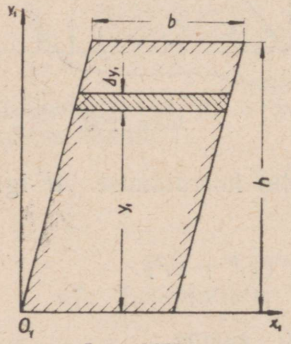


Joon. 291.

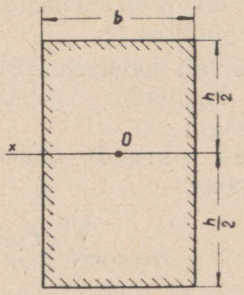
Vaadeldaval juhul võtame pinnaelemendi ΔF kitsa ribana laiusega b ja kõrgusega Δy_1. Otsitava inertsmomendi kohta koostame avaldise

$$J_{x_1} = \sum b y_1^2 \Delta y_1 = b \sum y_1^2 \Delta y_1 .$$

Saadud summa arvutamiseks kujundame suuruse y_1^2 muutumise seaduse



Joon. 292.



Joon. 293.

olenevalt y_1 muutumisest kõvera kujul — viimane on parabool. Jooniselt nähtub, et see summa on võrdne paraboli viirutatud pinnaga, s. t.

$$\Omega = \frac{1}{3} h^3 .$$

Järelikult

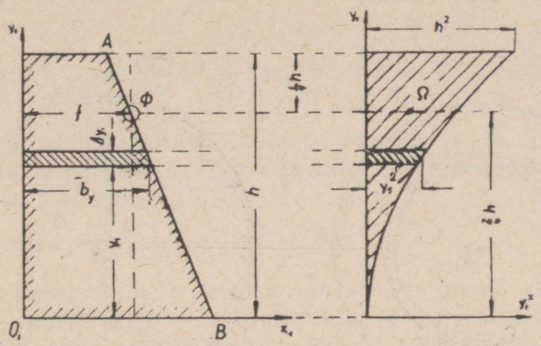
$$J_{x_1} = \frac{b h^3}{3} . \qquad (142)$$

Ülesanne 11. Kui muuta ristkülik rööpkülikuks (joon. 292), millel on sama kõrgus, siis ekvatoriaalne inertsmoment ei muutu, sest kaugused y_1 teljeni x_1 jäävad iga üksiku pinnaelemendi kohta samaks.

Ülesanne 12. Ristküliku (joon. 293) ekvatoriaalne inertsmoment raskuskeset läbiva telje (tsentraaltelje) suhtes on

$$J_x = 2 \cdot \frac{b\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} = \frac{bh^3}{12}. \qquad (143)$$

Ülesanne 13. Määrame trapetsi ekvatoriaalse inertsmomendi telje x_1 suhtes, mis läbib tema alust (joon. 294).



Joon. 294.

Antud kujundi puhul on see moment

$$J_{x_1} = \sum b_y y_1^2 \Delta y_1,$$

kus b_y on pinnaelemendi ΔF laius.

Seda summat võib vaadelda kui pinnaelementide $\Delta\Omega = y_1^2 \Delta y_1$ staatilist momenti telje y_1 suhtes, kusjuures pinnaelemendid $\Delta\Omega$ on asetatud piki joonisele risti asuvat sirget AB, s. t.

$$S'_{y_1} = \sum \Delta\Omega b_y.$$

Teiselt poolt leiame, kasutades Varignoni teoreemi, et

$$S'_{y_1} = \Omega f,$$

kus $\Omega = \frac{h^3}{3}$ on parabooli pindala ja f — punkti Φ abstsiss.

Punkti Φ nimetame fookuseks[1]. Tema ordinaat langeb ühte pinna Ω raskuskeskme ordinaadiga; viimane, nagu teada on $\frac{3}{4}h$. Punktis Φ asub ka pinna Ω raskuskese, kui lugeda kõik pinnaelemendid $\Delta\Omega$ asetatuks piki sirget AB. Järelikult

$$J_{x_1} = \frac{fh^3}{3}. \qquad (144)$$

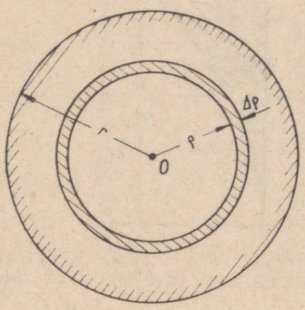
[1] Seda liiki fookus on autori (A. Popov) poolt tugevusõpetuse kursusesse esmakordselt sisse toodud.

Saadud valemist nähtub, et trapetsi inertsmoment ei muutu, kui joont AB pöörata punkti Φ suhtes.

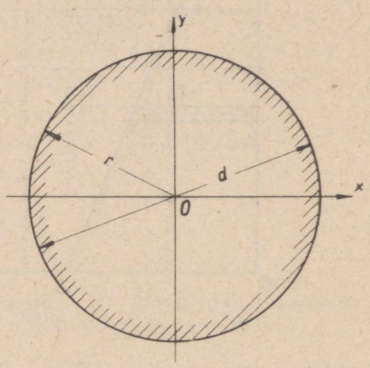
Ülesanne 14. Leiame ringi polaarinertsmomendi punkti O suhtes (joon. 295).

Selle momendi arvutamisel võtame pinnaelemendi ΔF kitsa rõngana. Kui l_ϱ on rõnga ümbermõõdu pikkus, $\Delta\varrho$ tema laius, siis $\Delta F = l_\varrho \Delta\varrho$. Järelikult

$$J_p = \sum \Delta F \varrho^2 = \sum l_\varrho \varrho^2 \Delta\varrho .$$



Joon. 295.



Joon. 296.

Kasutades eelmist näidet, leiame:

$$J_p = \Omega f ,$$

kus $\Omega = \frac{r^3}{3}$ — parabooli pindala; $f = \frac{3}{4} \cdot 2\pi r$ — kaare pikkus, kui $\varrho = \frac{3}{4} r$.

Seega saame:

$$J_p = \frac{r^3}{3} \cdot \frac{3}{2} \pi r = \frac{\pi r^4}{2} . \qquad (145)$$

Ülesanne 15. Määrame ringi ekvatoriaalse inertsmomendi telje x suhtes (joon. 296).

Kuna ringi puhul on ekvatoriaalsed momendid telgede x ja y suhtes võrdsed, siis vastavalt valemile (140) leiame, et

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_p .$$

Järelikult

$$J_x = \frac{\pi r^4}{4} . \qquad (146)$$

48. Telgede paralleellüke.

Leiame seose inertsmomentide vahel kahe paralleelse telje x_1 ja x suhtes, millest viimane on raskuskeset läbivaks teljeks (vt. joon. 290). Inertsmomendi telje x_1 suhtes kirjutame järgmiselt:

$$J_{x_1} = \sum \Delta F y_1^2 = \sum \Delta F (y + b_0)^2,$$

kus vastavalt joonisele $y_1 = y + b_0$. Lahendades seda avaldist, saame:

$$J_{x_1} = \sum \Delta F y^2 + b_0^2 \sum \Delta F + 2b_0 \sum \Delta F y = J_x + b_0^2 F + 2b_0 S_x.$$

Siin J_x on inertsmoment telje x suhtes ja S_x on staatiline moment sama telje suhtes. Et tsentraaltelje suhtes on seose (135) põhjal $S_x = 0$, siis saame lõplikult

$$J_{x_1} = J_x + F b_0^2. \tag{147}$$

Määrame seose kahe tsentrifugaalinertsmomendi vahel, mis on võetud kahe paralleelse koordinaattelgede süsteemi $x_1 y_1$ ja xy kohta, millest viimased läbivad kujundi raskuskeset. Kui valemisse (141) asetada $x_1 = x + a_0$ ja $y_1 = y + b_0$, siis leiame, et

$$J_{x_1 y_1} = \sum \Delta F x_1 y_1 = \sum \Delta F (x + a_0)(y + b_0) =$$

$$= \sum \Delta F xy + a_0 b_0 \sum \Delta F + a_0 \sum \Delta F y + b_0 \sum \Delta F x =$$

$$= J_{xy} + F a_0 b_0 + S_x a_0 + S_y b_0,$$

kus J_{xy} on tsentrifugaalinertsmoment telgede xy suhtes,
S_x ja S_y — staatilised momendid (tsentraaltelgede suhtes — võrduvad nulliga).

Lõplikult saame:

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + F a_0 b_0. \tag{148}$$

49. Telgede pööramine kujundi raskuskeskme suhtes.

Väljendame nurga α all asetatud telgede x_k ja y_k suhtes võetud inertsmomendid J_{x_k}, J_{y_k} ja J_{xy_k} (joon. 297) telgede x ja y suhtes võetud inertsmomentide J_x, J_y ja J_{xy} kaudu.

Kasutades viirutatud kolmnurki, leiame algul seose mistahes pinnaelemendi ΔF seniste ja uute koordinaatide vahel:

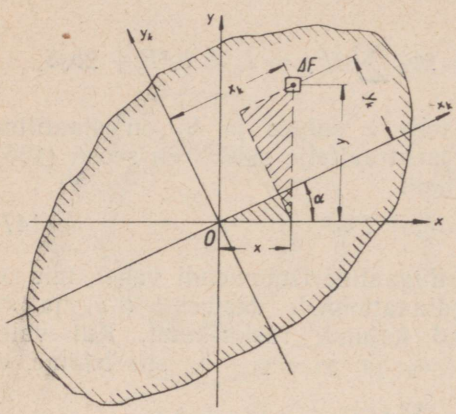
$$x_k = y \sin \alpha + x \cos \alpha;$$
$$y_k = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Kasutades valemeid (136) ja (141), kirjutame

$$J_{x_k} = \sum \Delta F y_k^2 = \sum \Delta F (y^2 \cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha);$$

$$J_{y_k} = \sum \Delta F x_k^2 = \sum \Delta F (y^2 \sin^2 \alpha + x^2 \cos^2 \alpha + 2xy \sin \alpha \cos \alpha);$$

$$J_{xy_k} = \sum \Delta F x_k y_k = \sum \Delta F [y^2 \sin \alpha \cos \alpha - x^2 \sin \alpha \cos \alpha + xy(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)].$$



Joon. 297.

Arvestades seda, et

$$J_x = \sum \Delta F y^2,$$

$$J_y = \sum \Delta F x^2,$$

$$J_{xy} = \sum \Delta F xy,$$

leiame lihtsate ümbermoodustamiste teel

$$J_{x_k} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \quad (149)$$

$$J_{y_k} = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha; \quad (150)$$

$$J_{xy_k} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \quad (151)$$

Liites kaks esimest võrrandit, saame:

$$J_{x_k} + J_{y_k} = J_x + J_y, \quad (152)$$

s. t. teljeliste inertsmomentide summa telgede pööramisel ei muutu.

50. Peateljed ja kujundi pea-inertsmomendid.

Inertsmoment pööratud telje x_k suhtes oleneb avaldise (149) põhjal nurgast α. Leiame $\alpha = \alpha_m$ väärtuse juhul, kui suurusel J_{x_k} on maksimaalne ja minimaalne väärtus. Selleks on tarvis vaadeldavat võrrandit diferentseerida α suhtes ja tulemus võrrutada nulliga, s. t.

$$\left(\frac{dJ_{x_k}}{d\alpha}\right)_{\alpha = \alpha_m} = -2J_x \sin \alpha_m \cos \alpha_m + 2J_y \cos \alpha_m \sin \alpha_m - 2J_{xy} \cos 2\alpha_m = 0;$$

siit

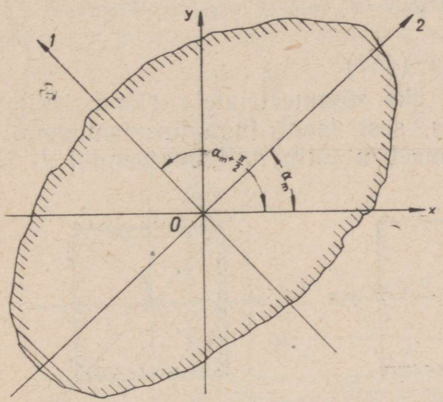
$$(J_x - J_y) \sin 2\alpha_m + 2J_{xy} \cos 2\alpha_m = 0, \qquad (153)$$

kust saame:

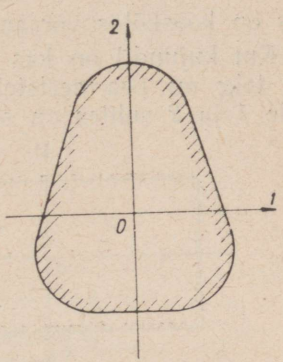
$$\operatorname{tg} 2\alpha_m = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \qquad (154)$$

Selle valemi järgi saame nurgale α_m 360° piirides kaks reaalset väärtust, mis erinevad teineteisest 90° võrra, sest

$$\operatorname{tg} 2\left(\alpha_m + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} 2\alpha_m.$$



Joon. 298.



Joon. 299.

Seega leidsime kujundis kaks telge, millede suhtes on inertsmomentidel maksimaalne ja minimaalne väärtus, s. t. $J_{y_k max}$ ja $J_{x_k min}$. Mis puutub tsentrifugaalinertsmomenti, siis saadud kahe teineteisega risti asuva telje suhtes on ta võrdne nulliga. Tõepoolest, kui valemisse (151) asetada $\alpha = \alpha_m$, siis saame

$$J_{xy_k} = J_{1,2} = \frac{J_{x_1} - J_y}{2} \sin 2\alpha_m + J_{xy} \cos 2\alpha_m.$$

Vastavalt võrrandile (153) on

$$J_{1,2} = 0. \qquad (155)$$

Tähistades saadud teljed *1* ja *2*, näitame joonisel 298 nende asendi. Neid telgi nimetame edaspidi **kujundi pea-inertstelgedeks** ja nende telgede suhtes võetud inertsmomente — **kujundi pea-inertsmomentideks.**

Pöördudes tagasi p-s 43 ja 44 saadud järelduste juurde, on kerge

tähele panna kõikides eespool tuletatud võrrandites matemaatilist analoogiat ja seepärast võime pea-inertsmomentide kohta kirjutada järgmised valemid:

$$\left.\begin{aligned} J_{x_k\,max} = J_1 &= \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}, \\ J_{x_k\,min} = J_2 &= \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}, \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

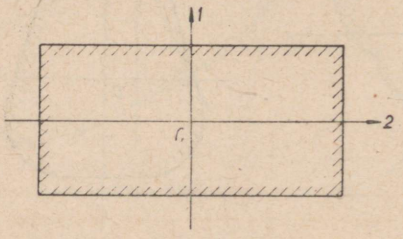
mis oma matemaatiliselt struktuurilt on sarnased valemitega (119).

Liites saadud valemid, saame

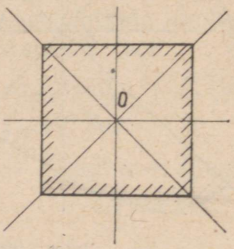
$$J_1 + J_2 = J_x + J_y, \tag{157}$$

mis on kooskõlas võrrandiga (152).

Kui kujundil on kas või üks sümmeetriatelg (joon. 299), siis see telg on pea-inertsteljeks, sest tsentrifugaalinertsmoment telgede *1* ja *2* suhtes on sümmeetria tõttu null, momendid J_1 ja J_2



Joon. 300.



Joon. 301.

on aga maksimaalse ja minimaalse väärtusega. Peatelgede asetus ristkülikus on näidatud joonisel 300. Ruudul on kõik raskuskeset läbivad teljed peatelgedeks (joon. 301), sest sellel kujundil on $J_1 = J_2$ ja järelikult leiame võrrandist (151), kui $J_{1,2} = 0$, et $J_{xy_k} = 0$.

Inertsraadiusi, mis on arvutatud peatelgede kohta, nimetatakse kujundi pea-inertsraadiusteks. Neid leitakse järgmiste valemite abil:

$$r_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}; \quad r_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}}. \tag{158}$$

51. Inertsmomentide arvutamine liitkujundite puhul.

Leiame inertsmomendid ja peatelgede asendi kujundi puhul, mis on koostatud kahest ristkülikust (joon. 302).

Kujundi raskuskeskme koordinaatide leidmiseks asetame teljed x ja y nii,

nagu on kujutatud joonisel. Jagades kujundi kaheks ristkülikuks ja kasutades valemeid (134), leiame:

$$a_0 = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{10 \cdot 6}{30} = 2 \text{ cm}; \quad b_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{20 \cdot 3}{30} = 2 \text{ cm};$$

kus $F = 20 + 10 = 30$ cm² on kujundi pindala.

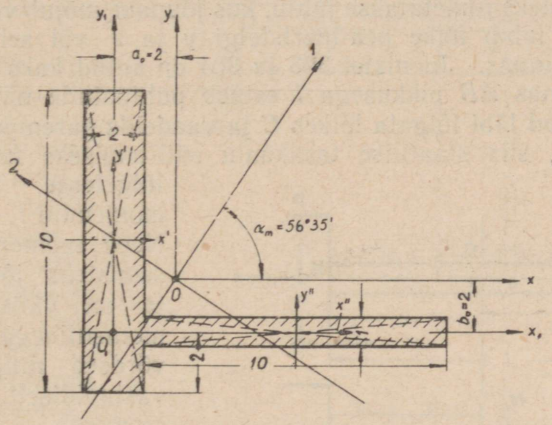
Kasutades valemeid (143), (147) ja (148), koostame ja arvutame välja avaldised inertsmomentidele peatelgede x ja y suhtes:

$$J_x = \frac{2 \cdot 10^3}{12} + 20(5-4)^2 + \frac{10 \cdot 1^3}{12} + 10 \cdot 2^2 = 227{,}5 \text{ cm}^4;$$

$$J_y = \frac{10 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot 2^2 + \frac{1 \cdot 10^3}{12} + 10(6-2)^2 = 330 \text{ cm}^4;$$

$$J_{xy} = 20(-2) \cdot 1 + 10(+4)(-2) = -120 \text{ cm}^4.$$

J_{xy} leidmiseks võtame arvesse, et ristkülikute tsentrifugaalinertsmomendid telgede x', y' ja x'', y'' suhtes võrduvad nulliga.



Joon. 302.

Peatelgede kaldenurga leiame võrrandist (154), s. t.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_m = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{-240}{330 - 227{,}5} = -2{,}34,$$

kust saame

$$\alpha_m = 56°35'.$$

Pea-inertsmomendid leiame võrrandist (156):

$$J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} =$$

$$= \frac{557{,}5}{2} + \sqrt{\left(\frac{102{,}5}{2}\right)^2 + 120^2} = 409{,}35 \text{ cm}^4;$$

$$J_2 = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = 278{,}75 - 130{,}6 = 148{,}15 \text{ cm}^4.$$

Pea-inertsraadiused leiame valemitest (158):

$$r_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}} = \sqrt{\frac{409{,}35}{30}} \approx 3{,}7 \text{ cm};$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}} = \sqrt{\frac{148{,}15}{30}} \approx 2{,}2 \text{ cm}.$$

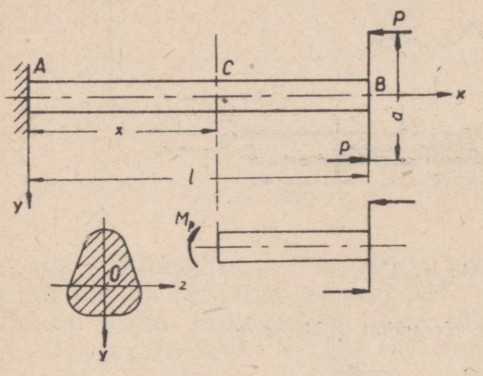
VI peatükk.

Puhtpaine.

52. Pingeolukord puhtpaindel.

Puhtpaindeks nimetatakse juhtu, kus jõupaar mõjub varvale tasapinnas, mis läbib lõike pea-inertstelgi y ja z või sellega paralleelses tasapinnas. Joonistel 303 ja 304 on antud kaks varba, millede piirkonnas AB pikkusega l esineb puhtpainde nähtus.

Kui varvad läbi lõigata lõikes C ja vaadelda parempoolseid äralõigatud osi, siis staatilise tasakaalu säilitamiseks tuleb saadud lõigetesse rakendada momendid $M_p = Pa$. Need momendid on sisemisteks jõufaktoriteks ja on välisjõudude P momentidega suuruselt võrdsed ning suunatud vastupidiselt. Selliseid momente nimetame paindemomentideks. Need momendid on konstantsed kõikide lõigete kohta, mis on piirkondade AB piirides.



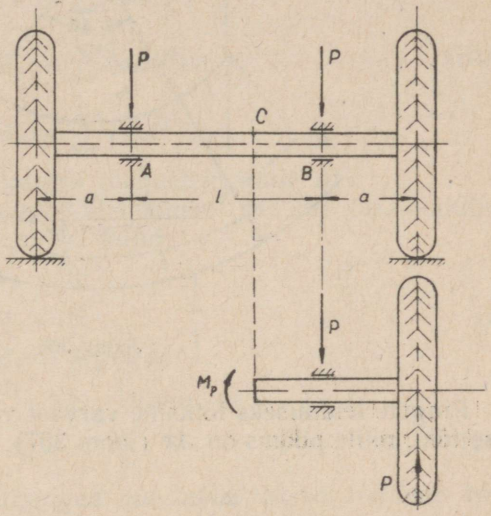
Joon. 303.

Uurime prismaatilise varva pingeolukorda puhtpainde puhul. Uurimise teooria aluseks võtame järgmised oletused: tasapinnalised lõiked, mis asuvad risti varva pikiteljega, jäävad ka pärast varva deformeerumist tasapinnalisteks ja painutatud teljega risti; pingete ja deformatsioonide vahel on lineaarne olenevus (Hooke'i seadus); varva materjal on homogeenne ja isotroopne; varva pikikiudude vahel puudub vastastikune jõu mõju. Need oletused varva selliste piirkondade kohta, mis on küllalt kaugel jõupaari rakenduspunktidest, võimaldavad küllalt täpselt leida puhtpainde puhul lihtsa ristlõikega isotroopsest materjalist varva pingeolukorda.

Vaatleme joonisel 303 kujutatud varva puhtpainet geomeetrili-

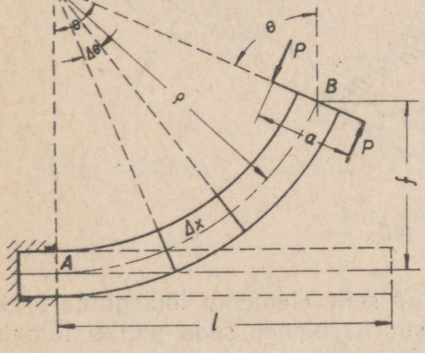
sest seisukohast. Sellise varva telg paindub pärast jõupaari $M = Pa$ rakendamist (joon. 305). Paindunud telge, kui deformatsioonid on elastsed, nimetatakse harilikult elastseks jooneks, raadiust ϱ — elastse joone kõverusraadiuseks ja $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$ — elastse joone kõveruseks. Otslõike B vertikaalset ümberpaigutumist f nimetame läbipaindeks, nurkümberpaigutumist Θ aga pöördenurgaks.

Varva pikikiudude deformatsioonide leidmiseks vaatleme kõiki geomeetrilisi muutusi, mis tekivad deformatsiooni tulemusena kahe naaberlõike vahel, mis asusid enne deformatsiooni teineteisest kaugusel Δx.



Joon. 304.

Joonisel 306 on suurendatuna kujutatud, võttes arvesse tasapinnaliste lõigete hüpoteesi, väikene varva osakene pärast deformeerumist. Jooniselt nähtub, et alumine osa kiududest on tõmmatud ja ülemine osa surutud. Sellist järeldust kinnitab esiteks kogemus ja teiselt poolt teooria, mis väidab, et varva kehas on olemas deformeerumata kiht. Seda kihti nimetatakse neutraalkihiks, ta eraldab tõmmatud kiudude piirkonda surutud kiudude piirkonnast. Neutraalkihi lõikumisjoont z (joon. 307) varva ristlõikega nimetatakse neutraalteljeks.



Joon. 305.

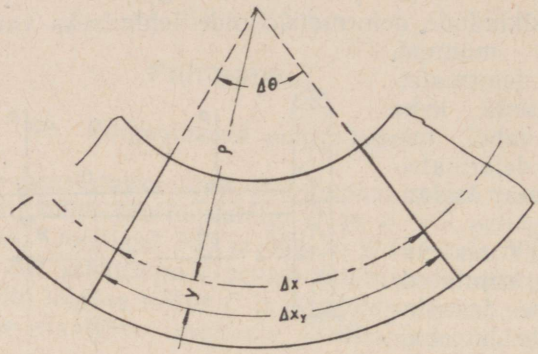
Koostame neutraalkihist kaugusel y asuva kiu lineaarse deformeerumise (suhteline pikenemine) kohta valemi. Kui kiu pikkus oli enne deformeerumist Δx ja pärast deformeerumist Δx_y, siis

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x_y - \Delta x}{\Delta x}.$$

Asendades $\Delta x = \varrho \Delta \Theta$ ja $\Delta x_y = (\varrho + y)\Delta \Theta$, kus $\Delta \Theta$ on naaberlõigete vaheline nurk, saame:

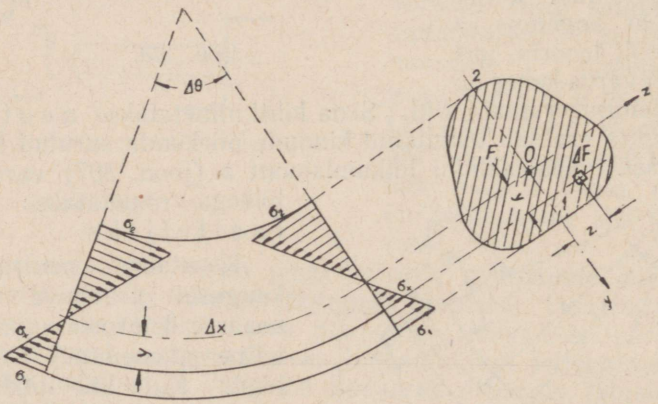
$$\varepsilon_x = \frac{y}{\varrho}. \qquad (a)$$

Siit järgneb, et kiu pikenemine on võrdeline tema kaugusega neutraalkihist.



Joon. 306.

Pingete leidmiseks lõikame varvast välja kahe naaberlõike vahelise tüki, mille pikkus on Δx (joon. 307). Varva järelejäänud osade



Joon. 307.

toimel väljalõigatud osadele tekivad selle elemendi lõikepinna igas punktis normaalpinged σ_x, mille suurus oleneb seda punkti läbiva kiu deformatsioonist ja materjali füüsikalis-mehaanilistest omadus-

test. Need pinged väljendame, kasutades Hooke'i seadust [vt. v. (12)], deformatsioonide kaudu järgmiselt:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \tag{b}$$

kus E on I järgu elastsusmoodul.

Koostame kõikide sisejõudude kohta, mis on ebaühtlaselt jaotatud ristlõike pinnale F, projektsioonide summa x-teljele ja momentide summa y- ja z-telje suhtes.

Saame:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \sum \sigma_x \Delta F, \\ M_y &= \sum (\sigma_x \Delta F) z, \\ M_z &= \sum (\sigma_x \Delta F) y, \end{aligned}\right\} \tag{159}$$

kus $\sigma_x \Delta F$ on sisejõud, mis langeb pinnaelemendile ΔF.

Kuna varvale mõjub ainult välismoment M, siis tasakaalutingimused saab kirjutada järgmisel kujul:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= 0; \\ M_y &= 0; \\ M_z &= M_p = M. \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Kasutades avaldisi (a) ja (b), leiame, et

$$\sigma_x = E \cdot \frac{y}{\varrho}. \tag{160}$$

Siit järgneb, et *normaalpinged muutuvad varva ristlõike kõrguse h ulatuses võrdeliselt kaugusega y neutraalkihist.*

Neutraaltelje asukoha kindlaksmääramiseks, samuti ka kõverusraadiuse määramiseks kasutame avaldist (c), võttes arvesse valemeid (159) ja (160). Pärast asendamist saame

$$\frac{E}{\varrho} \sum \Delta F y = 0;$$

$$\frac{E}{\varrho} \sum \Delta F z y = 0;$$

$$\frac{E}{\varrho} \sum \Delta F y^2 = M.$$

Kuna vastavalt valemitele (132), (136) ja (141) on

$$\sum \Delta F y = S_z,$$

$$\sum \Delta F z y = J_{zy};$$

$$\sum \Delta F y^2 = J_z,$$

siis saame

$$\left.\begin{aligned} S_z &= 0, \\ J_{zy} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ_z}, \tag{162}$$

kus S_z on lõike pindala staatiline moment neutraaltelje suhtes;
J_{zy} — tsentrifugaalinertsmoment telgede z ja y suhtes;
J_z — lõike inertsmoment neutraaltelje suhtes.

Avaldistest (161) järgneb, et z ja y on lõike pea-inertstelgedeks. Järelikult läbib neutraaltelg z lõike O raskuskeset.

Kasutades avaldist (162), kirjutame valemi (160) pinge kohta mistahes kius järgmisel kujul:

$$\sigma_x = \frac{E}{\varrho} y = \frac{M}{J_z} y. \tag{163}$$

Võttes $y = h_1$ ja $y = -h_2$, leiame maksimaalse ja minimaalse pinge varva äärmistes kiududes:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{\varrho} h_1 = \frac{Mh_1}{J_z} = \frac{M}{W_{z_1}}, \\ \sigma_2 &= -\frac{E}{\varrho} h_2 = -\frac{Mh_2}{J_z} = -\frac{M}{W_{z_2}}, \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

kus suurusi

$$\left.\begin{aligned} W_{z_1} &= \frac{J_z}{h_1}, \\ W_{z_2} &= \frac{J_z}{h_2} \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

on hakatud tingimusi nimetame lõike vastupidavusmomendiks paindel.

Lõigetele, kus $h_1 = h_2$, leiame et

$$W_{z_1} = W_{z_2} = W.$$

Kasutades valemeid (143) ja (146), saame ristküliku kohta (joon. 291)

$$W_z = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}, \tag{166}$$

ja ringi kohta (joon. 296)

$$W_z = \frac{\pi r^4}{4r} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1\, d^3. \tag{167}$$

53. Lõike pöördenurga ja varva läbipainde määramine.

Valemist (162) järgneb, et puhtpainde puhul varva kõverus $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$ on konstantne suurus. See tähendab, et varva elastne joon on ringjoone kaar, mille raadius on ϱ. Lõike pöördenurga saame joonise 305 ja valemi (162) kohaselt järgmiselt:

$$\Theta = \frac{l}{\varrho} = \frac{Ml}{EJ_z}$$

või lühendatult

$$\theta = \frac{M}{j}, \tag{168}$$

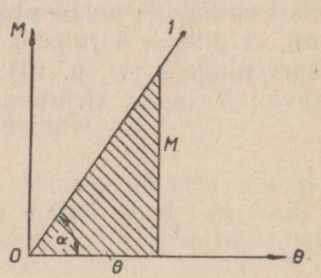
kus suurust

$$j = \frac{EJ_z}{l} \tag{169}$$

nimetame varva jäikusteguriks paindel ja EJ_z — lõike jäikuseks paindel.

Seost (168) võib joonisel 308 kujutada sirgena OI, mille kaldenurga tangens

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M}{\theta} = j.$$



Joon. 308.

Varva läbipainet saab täpselt määrata valemiga

$$f = \varrho(1 - \cos\Theta)$$

(vt. joon. 305) või ligikaudselt

$$f \approx \frac{\theta l}{2}. \tag{170}$$

Arvestades avaldisi (168) ja (169), anname viimasele valemile kuju:

$$f \approx \frac{Ml}{2j} = \frac{Ml^2}{2EJ_z}. \tag{171}$$

54. Paindedeformatsioonile kulutatav energia.

Varval on momendi M rakendamise tõttu tema otslõikesse (joon. 305) potentsiaalne energia A_p. See energia saadakse väljastpoolt momendi M poolt tehtava töö arvel ümberpaigutamisel θ.

Analoogiliselt valemiga (16), mille tuletasime tõmbe puhul, on võimalik potentsiaalset energiat arvutada, kasutades paindedia-

grammi (joon. 308), koormusjoone *O1* ja abstsisstelje vahel asetseva viirutatud kolmnurga pinnana.

Saame

$$A_p = \frac{M\Theta}{2}. \tag{172}$$

Meelde tuletades valemit $\Theta = \frac{M}{j}$, koostame veel kaks avaldist A_p väljendamiseks:

$$A_p = \frac{j\Theta^2}{2}; \tag{172'}$$

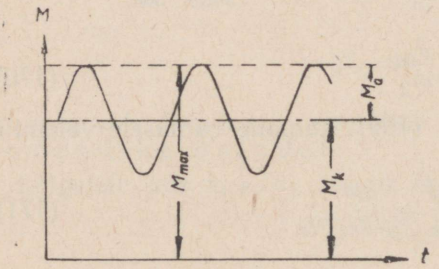
$$A_p = \frac{M^2}{2j}. \tag{172''}$$

Valemis (172') on energia esitatud pöördenurga funktsioonina ja viimases valemis — paindemomendi funktsioonina.

55. Varva tugevusarvutus puhtpaindel.

Puhtpainde puhul peavad varva ristlõike mõõted olema valitud nii, et pinged äärmistes kiududes ei ületaks lubatavaid tõmbe- ja survepingeid (vt. p. 13). Tähistades neid lubatavaid pingeid vastavalt R_t ja R_s, kirjutame arvutusvõrrandid:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M}{W_{z_1}} = R_t; \\ \sigma_2 &= \frac{M}{W_{z_2}} = R_s. \end{aligned}\right\} \tag{173}$$



Joon. 309.

Kui varba mõjutada võnkuva paindemomendiga, mis koosneb keskmisest momendist M_k ja muutuvast M_a (joon. 309), siis arvutus teostatakse ekvivalentsete pingete järgi, mis ise saadakse valemi (82) järgi. Tähistades äärmiste kiudude maksimaalsed tsükli pinged vastavalt $\sigma_{1\,max}$ ja $\sigma_{2\,max}$, koostame valemid ekvivalentsete pingete jaoks:

$$\sigma_{1e} = \frac{\sigma_{1\,max}}{\varphi_\sigma},$$

$$\sigma_{2e} = \frac{\sigma_{2\,max}}{\varphi_\sigma},$$

kus $\varphi_\sigma = \frac{1+\Delta_\sigma}{1+\frac{\Delta_\sigma}{\alpha_\sigma}}$ on lubatavate pingete vähendamistegur [vt. valem (81)] ja $\Delta_\sigma = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_k} = \frac{M_a}{M_k}$ — dünaamiline lisand.

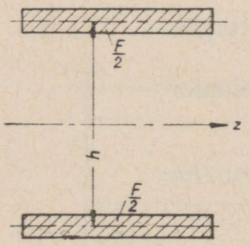
Väljendades tsükli maksimaalsed pinged tsükli maksimaalse paindemomendi M_{max} kaudu, kirjutame võnketugevuse võrrandi järgmisel kujul:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{1e} &= \frac{M_{max}}{\varphi_\sigma W_{z_1}} \leqslant R_t; \\ \sigma_{2e} &= \frac{M_{max}}{\varphi_\sigma W_{z_2}} \leqslant R_s. \end{aligned}\right\} \qquad (174)$$

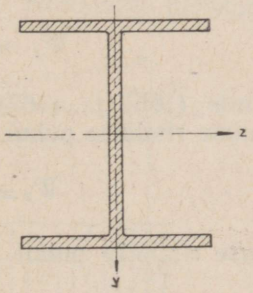
Saadud tugevusvõrrandid (173) ja (174) kõlbavad ainult nende varbade arvutamiseks, mis on Hooke'i seadusele alluvast materjalist. Mis puutub hapratest materjalidest valmistatud varbadesse (malm, betoon jne.), siis nende puhul saab võrrandeid (173) kasutada tingimusi, eeldades, et Hooke'i seadus on nende kohta maksev pingete teatud intervallis.

56. Varva ristlõigetest paindel.

Arvutusvalemitest (173) järgneb, et absoluutväärtuse poolest suurimad pinged antud paindemomendi puhul olenevad ainult vastupidavusmomendi suurusest. Ristlõike konstrueerimisel tuleb



Joon. 310.

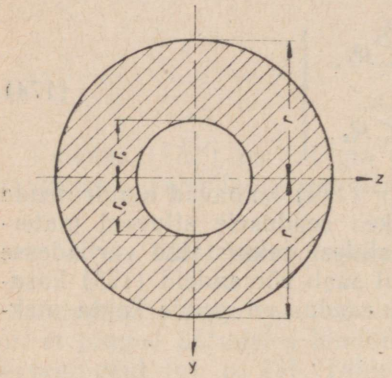


Joon. 311.

püüda selle poole, et vastupidavusmomendil oleks maksimaalne väärtus ristlõike minimaalse pindala juures. Kuna vastupidavusmoment on võrdeline inertsmomendiga, siis W_z suurendamise eesmärgil on kasulik asetada enamik ristlõike pinnast võimalikult kaugele neutraalteljest z. Täites seda nõuet, võib saada minimaalse kaaluga ja maksimaalse kandejõuga varva (tala).

Kui materjalil on ühesugune tõmbe- ja survetugevus, siis ühesuguste pingete σ_1 ja σ_2 saamiseks tuleb neutraaltelg z paigutada poolele kõrgusele h. Materjali erineval tõmbe- ja survetugevusel on otstarbekohane telg z asetada nii, et suhe $\frac{h_1}{h_2}$ võrduks lubatavate pingete suhtega, s. t.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{R_t}{R_s}. \tag{175}$$



Joon. 312.

Arvutame vastupidavusmomendi mitmele sama pindalaga F ja kõrgusega h ristlõikele. Kõige kasulikum on teoreetiline ristlõige, mis koosneb kahest joonisel 310 kujutatud ristkülikust. Selle ristlõike pind on kõige rohkem eemaldatud teljest z ja tema kohta võib ligikaudselt kirjutada:

$$\left.\begin{aligned} J_x &\approx 2 \cdot \frac{F}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{Fh^2}{4}; \\ W_z &= 0{,}5Fh. \end{aligned}\right\} \tag{176}$$

I-tala puhul need ristkülikud (tallad) ühendatakse alati vertikaalse seinaga (joon. 311). Selle ristlõike vastupidavusmoment on veidi väiksem kui eelmisel ristlõikel, sest vertikaalse seina moodustamiseks tuleb võtta osa ristkülikute pindalast. Valtsitud I-taladel on tavaliselt

$$W_z \approx (0{,}3—0{,}35)Fh. \tag{177}$$

Valemite (166) ja (167) järgi leiame:
ristkülikulise ristlõike puhul

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \approx 0{,}167Fh; \tag{178}$$

ümmarguse ristlõike puhul

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}125Fd. \tag{179}$$

Arvutame J_{z_0} ja W_{z_0} ümmarguse õõnsa ristlõike puhul (joon. 312). Sellise ristlõike puhul arvutatakse inertsmoment kogu ristlõike ja õõne ristlõike inertsmomentide vahena, s. t.

$$J_{z_0} = \frac{\pi r^4}{4} - \frac{\pi r_0^4}{4};$$

pärast ümbermoodustamist saame:

$$J_{z_0} = J_z\left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right) = \varphi_0 J_z, \tag{180}$$

kus J_z on kogu ristlõike inertsmoment [vt. v. (146)] ja

$$\varphi_0 = 1 - \frac{r_0^4}{r^4}. \tag{181}$$

Vastupidavusmomendi arvutamiseks koostame valemi:

$$W_{z_0} = \frac{J_{z_0}}{r} = \varphi_0 \frac{J_z}{r} = \varphi_0 W_z, \tag{182}$$

kus W_z on kogu ristlõike vastupidavusmoment.

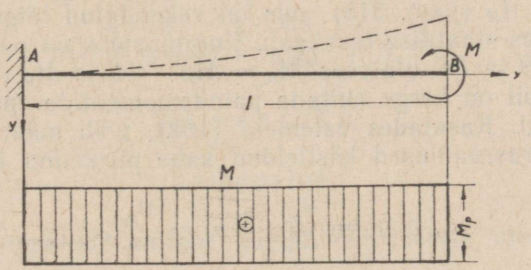
Määrame φ_0 suuruse õõnsa ristlõike puhul, kui $\frac{r_0}{r} = 0{,}4$. Kasutades valemit (181), leiame, et

$$\varphi = 1 - 0{,}4^4 = 1 - 0{,}0256 \approx 0{,}97.$$

Saadud arvud näitavad, et võllisse õõne puurimisel, mille raadius $r_0 = 0{,}4\ r$, saab tema kaalu 16% võrra vähendada, kusjuures vastupidavusmoment väheneb üsna vähe (2,56%).

57. Paindemomentide epüürid puhtpaindel.

Talade praktilisel arvutamisel tuleb sageli, eriti siis, kui neile mõjub mitu momenti, leida suurimalt pingestatud lõige, valida ristlõigete mõõteid, kui tala on muutuva ristlõikega, määrata üksikute punktide ümberpaigutumised jne. Nimetatud ülesannete lahen-



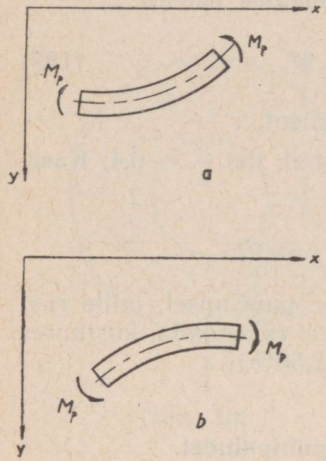
Joon. 313.

damiseks peab oskama koostada graafikuid, mis väljendavad paindemomentide muutumist piki tala. Neid graafikuid nimetatakse harilikult p a i n d e m o m e n t i d e e p ü ü r i d e k s. Järgnevalt on antud nende epüüride konstrueerimise viis kahe juhu jaoks.

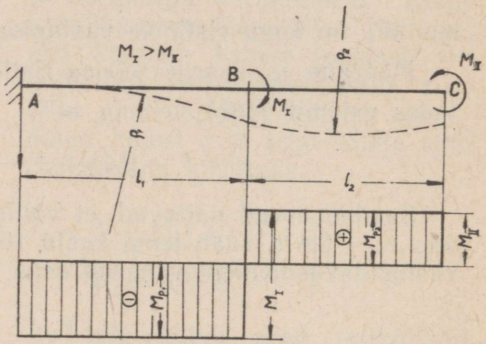
Tala AB juures, mis on kujutatud joonisel 313 pideva rasvase

joonena, paindemoment ei muutu kogu tala pikkuse l ulatuses. Kandes joonisele kiu kokkusurumise poolele vastavas mastaabis $M_p = M$ risti tala teljega, saame otsitava epüüri ristküliku näol, mis selguse mõttes on joonestatud tala alla.

Edasiseks peame meeles, millised märgid tulevad anda taladele konstrueeritud epüüridele. Paindemoment M_p on positiivne, kui elastse joone kumerus on suunatud alla (joon. 314, a) ja negatiivne, kui kumerus on suunatud üles (joon. 314, b). Mis puutub y-teljesse, siis selle suuname alati alla.



Joon. 314.



Joon. 315.

Kui tala ABC on koormatud kahe jõupaariga, mille momendid on M_I ja M_{II} (joon. 315), mis on rakendatud lõigetesse B ja C, siis, lähtudes staatilise tasakaalu tingimustest, on paindemomendid pikkuste AB ja BC ulatuses $M_{p_1} = M_{II} - M_I$ ja $M_{p_2} = M_{II}$. Saadud suuruste abil on kerge ehitada paindemomentide epüüri kahe ristküliku kujul. Kasutades valemeid (162), võib määrata ka elastse joone kõverusraadiused käsiteldud kahe piirkonna jaoks:

$$\varrho_1 = \frac{M_{p_1}}{EJ_1}; \qquad \varrho_2 = \frac{M_{p_2}}{EJ_2}.$$

Joonisel 315 on antud tala elastse joone konstrueerimise viis arvutatud suuruste ϱ_1 ja ϱ_2 abil.

58. Tala tugevusarvutuse näide.

Ülesanne 16. Mõjugu talale AB, mis on kujutatud joonisel 313, võnkuv paindemoment $M = M_k \pm M_a$, kus $M_k = 5 \cdot 10^5$ kgcm (konstantne moment) ja

$M_a = 2 \cdot 10^5$ kgcm (muutuv moment). Leida tala ristlõike mõõde b (joon. 316), kui on antud:

$$d = \frac{2}{3}b, \quad h = 1{,}5b, \quad \alpha_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_T} = 0{,}7, \quad R_t = 1500 \text{ kg/cm}^2.$$

Tala arvutuseks kasutame valemit (174), s. t.

$$\sigma_e = \frac{M_{max}}{\varphi_\sigma W_z} \leqslant R_t,$$

kus $M_{max} = M_k + M_a = (5 + 2) \cdot 10^5 = 7 \cdot 10^5$ kgcm on tsükli maksimaalne moment; φ_σ — lubatavate pingete vähendamistegur võnkekoormusel; see tegur leitakse $A_\sigma = \frac{M_a}{M_k} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ ja $\alpha_\sigma = 0{,}7$ puhul valemi (81) abil või diagrammilt joonisel 276; antud juhul on $\varphi_\sigma \approx 0{,}9$[1].

Ülalpool kirjutatud võrrandist leiame:

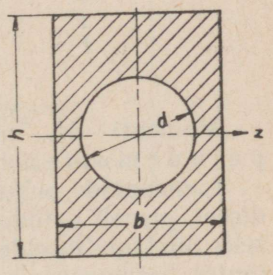
$$W_z = \frac{7 \cdot 10^5}{0{,}9 \cdot 15 \cdot 10^2} = 518 \text{ cm}^3.$$

Koostame avaldised inertsmomendi ja vastupidavusmomendi leidmiseks olenevalt ristlõike laiusest b. Kasutades valemeid (143) ja (146), leiame, et

$$J_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi}{64}d^4 = \frac{b}{12}(1{,}5b)^3 - \frac{\pi}{64}\left(\frac{2}{3}b\right)^4 =$$

$$= (0{,}281 - 0{,}010)b^4 = 0{,}271\,b^4;$$

$$W_z = \frac{J_z}{\frac{h}{2}} = \frac{2 \cdot 0{,}271}{1{,}5}b^3 = 0{,}361\,b^3;$$



Joon. 316.

siit

$$b = \sqrt[3]{\frac{W_z}{0{,}361}} = \sqrt[3]{\frac{518}{0{,}361}} \approx 11{,}8 \text{ cm}.$$

VII peatükk.

Lamepaine.

59. Lamepainde mõiste. Ligikaudse teooria oletused.

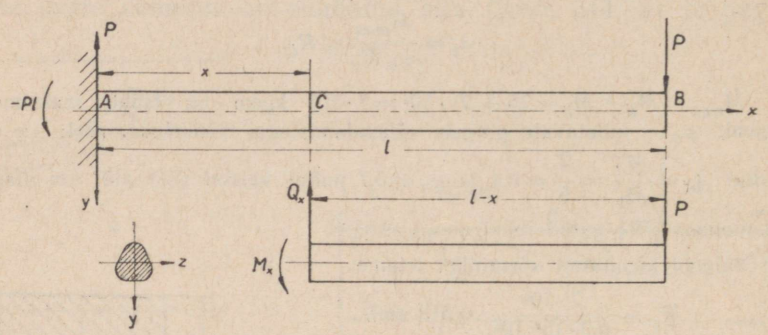
Selles peatükis vaatleme lamepainet, mis tekib talal momentide ja põikjõudude (nii nimetatakse jõude, mille suund on risti teljega) tõttu, mis mõjuvad ristlõike sümmeetriatelge läbivas tasapinnas või lõike paindetsentrit[2] läbivas ja ühe peateljega paralleelses tasapinnas, kui ristlõige on ebasümmeetriline.

---

[1] Staatilisel tala koormusel $\varphi_\sigma = 1$.

[2] Paindetsentri mõiste antakse käesoleva peatüki viimases p-s.

Lihtsamaks lamepainde näiteks on konsooltala AB (joon. 317), mis on koormatud põikjõuga P. Lõikame sellise tala kaheks osaks lõikes C, mis asub kaugusel x koordinaatide algusest A ja vaatleme parempoolset äralõigatud osa. Lähtudes tasakaalu tingimustest, võib kindlaks teha, et vaadeldava osa vasakpoolses lõikes mõjuvad moment $M_p = M_x = -P(l-x)$* ja jõud $Q_x = P$.



Joon. 317.

Momenti M_x nimetame analoogiliselt puhtpainde juhuga p a i n d e m o m e n d i k s, jõudu Q_x — l õ i k e j õ u k s.

Lamepainde puhul, nagu nähtub eespool kirjutatud kahest avaldisest, oleneb paindemoment x-ist ja lõikejõud ei ole null. Võrdluseks tuletame meelde, et puhtpainde puhul oli paindemoment konstantse väärtusega ja lõikejõud puudus.

Loetleme rea vajalikke oletusi, mis on lamepainde uurimiseks vajaliku teooria aluseks sirgete talade puhul: ümberpaigutumised (läbipainded ja lõigete pöördenurgad) on väikesed; pikikiudude vahel puudub vastastikune jõu mõju ristisuunas; paindemomendi tõttu tekkinud normaalpinged olgu lõike kõrguses jaotatud lineaarse seaduse järgi $\sigma_x = \frac{My}{J_z}$. Viimane oletus baseerub puhtpainde puhul tuletatud valemil (163).

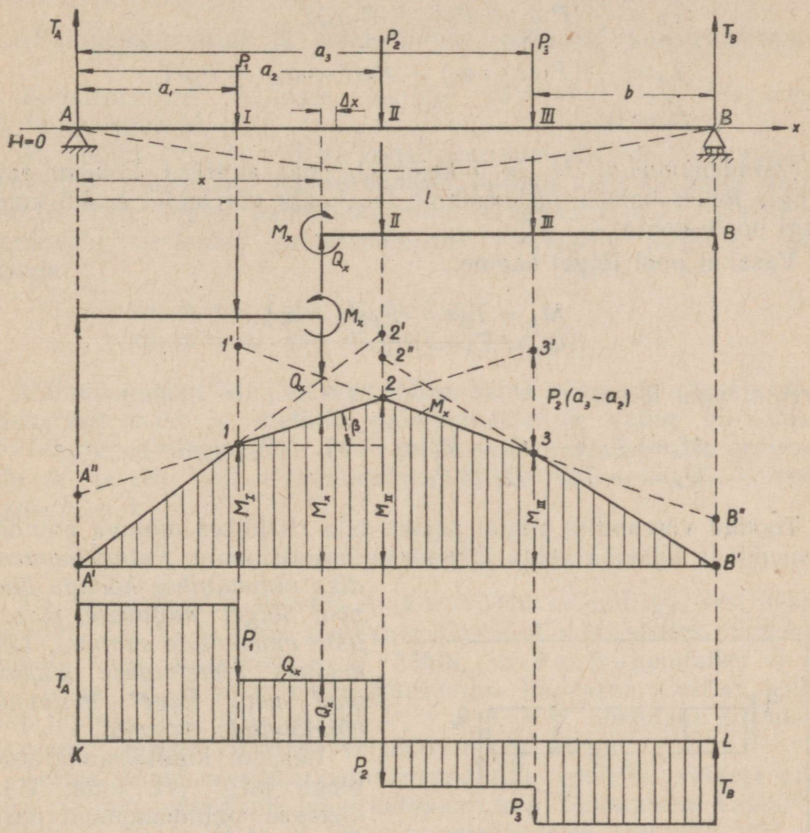
Koondatud koormuste rakenduspunktist küllalt kaugel asuvate tala lõigete kohta võimaldavad need oletused ligikaudselt leida ainult staatika meetoditega pingeolukorra, mis küllaldase täpsusega on kooskõlas lihtsa ristlõikega prismaatiliste talade jaoks katseliselt leitud andmetega.

60. Paindemomentide ja lõikejõudude leidmine. Žuravski teoreem.

Asetame tala, mis on joonisel 318 kujutatud rasvase joonega, kahele toele A ja B, millest esimene on liikumatu ja teine liikuv.

* Momendi märk on valitud vastavalt joonisel 314 näidatud reeglile.

Koormame ta kolme koondatud ristkoormusega P_1, P_2 ja P_3. Rakendatud koormuste mõjul paindub tala ja võtab joonisel kriipsjoonega näidatud asendi. Lõikes A toimub ainult nurkümberpaigutumine (pöördenurk), lõikes B aga nii nurk- kui ka lineaarne ümberpaigutumine. Koormuse all vähe deformeeruvate talade puhul viimast tavaliselt ei arvestata, sest ta peaaegu ei avalda mõju pingeolukorrale.



Joon. 318.

Tala tugede ehituse iseloomu järgi võib otsustada, et toes A tekib kaks reaktsiooni H ja T_A, toes B — üks reaktsioon T_B. Nende reaktsioonide kindlaksmääramiseks on tarvis koostada järgmised staatika võrrandid:

$$\sum M_A = P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 - T_Bl = 0;$$

$$\sum M_B = T_Al - P_1(l - a_1) - P_2(l - a_2) - P_3b = 0;$$

$$\sum X = H = 0.$$

Esimene võrrand on talale rakendatud kõikide jõudude staatiliste momentide summa punkti A suhtes, teine on samade jõudude momentide summa punkti B suhtes ja kolmas on kõikide jõudude projektsioonide summa x-teljele.

Saadud võrranditest leiame otsitavad toereaktsioonid:

$$T_B = \frac{1}{l}(P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3);$$

$$T_A = \frac{1}{l}[P_1(l - a_1) + P_2(l - a_2) + P_3b];$$

$$H = 0.$$

Paindemomendi M_x ja lõikejõu Q_x määramiseks lõikame tala mingis lõikes kaheks ja koostame tasakaalu võrrandid eraldi kummagi poole kohta.

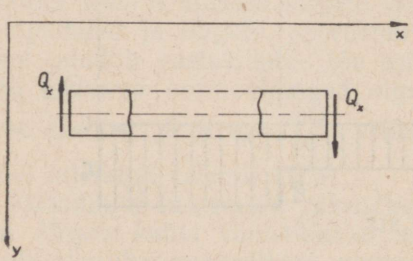
Vasakul pool lõiget saame:

$$M_x = T_Ax - P_1(x - a_1);$$
$$Q_x = T_A - P_1;$$

paremal pool lõiget:

$$M_x = T_B(l - x) - P_3(a_3 - x) - P_2(a_2 - x);$$
$$Q_x = -T_B + P_3 + P_2.$$

Toodud võrrandite põhjal saame tala ristlõikes mõjuva paindemomendi ja lõikejõu kohta järgmised definitsioonid: *Paindemomendiks nimetatakse kõikide ühel pool lõiget mõjuvate staatiliste momentide summat. Lõikejõuks nimetatakse kõikide ühel pool lõiget mõjuvate põikjõudude summat.*



Joon. 319.

Eespool kindlaksmääratud reegli järgi (vt. joon. 314) loetakse paindemoment positiivseks, kui elastse joone kumerus on suunatud allapoole ja negatiivseks, siis kui kumerus on suunatud ülespoole. Mis puutub lõikejõusse, siis loetakse ta positiivseks, kui vasakpoolsete jõudude summa on suunatud üles ja parempoolsete jõudude summa alla (joon. 319) ning negatiivseks siis, kui jõudude summa suund on vastupidine.

Võrreldes M_x ja Q_x kohta kirjutatud avaldisi, on kerge märgata järgmist analüütilist seost nende suuruste vahel:

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx}, \qquad (183)$$

s. t. lõikejõud on paindemomendi esimene tuletis x-i suhtes (Žuravski teoreem).

Selle teoreemi tõestas esimesena vene teadlane D. Žuravski, aga mitte Schwedler, nagu sageli sellest räägitakse tugevusõpetuse õpikutes.

61. Paindemomentide ja lõikejõudude epüüride konstrueerimine.

Konstrueerime eelmises punktis käsitletud tala AB kohta M_x ja Q_x epüürid.

M_x epüüri (vt. joon. 318) konstrueerimist algame horisontaalse sirge $A'B'$ (nulljoone) joonestamisest, millega risti kanname joonisele üksikute lõigete paindemomendid. Lõigetes I ja II on paindemomendid vastavalt paindemomendi võrrandile järgmise suurusega:

$$\text{kui } x = a_1, \text{ siis } M_I = T_A a_1;$$
$$\text{kui } x = a_2, \text{ siis } M_{II} = T_A a_2 - P_1(a_2 - a_1).$$

Paindemoment M_x jooksvas lõikes sama võrrandi alusel oleneb lineaarselt x-ist ja seetõttu paindemomentide epüür piirkonnas I—II kujuneb sirgjooneks 1—2, mida saab konstrueerida ordinaatide M_I ja M_{II} abil. Paindemoment lõikes III on jõu T_B korrutis õlaga b, s. t.

$$M_{III} = T_B b.$$

Paindemomendid lõigetes A ja B võrduvad nulliga, sest reaktsioonid T_A ja T_B ei anna vastavate lõigete A ja B suhtes momente. Samuti nagu piirkonna I—II kohta, on ka piirkondades A—I, II—III ja III—B momentide muutumine lineaarne. Otsitav epüür saab lõpliku kuju, kui punktid A', 1, 2, 3 ja B' ühendada sirgetega ja saadud kujund viirutada vertikaalsete joontega.

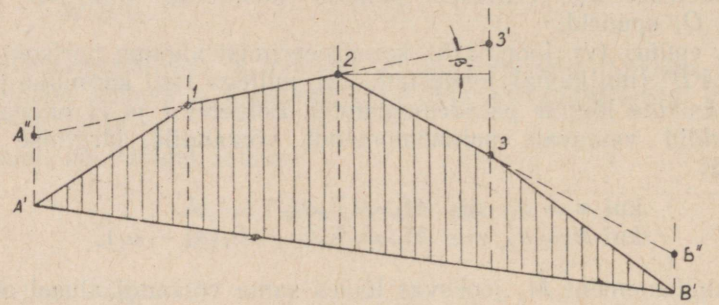
Teeme konstrueeritud paindemomentide epüürile väikese analüüsi. Selleks pikendame kõiki kaldjooni kuni lõikumiseni vastavate lõikeid A, I, II, III ja B läbivate vertikaalsete joontega. Ei ole raske tõestada, et vertikaaljoontel saadud lõigud võrduvad vastavate jõudude P_1, P_2 ja P_3 momentidega, s. t.

$$A'A'' = P_1 \cdot (IA); \quad 22' = P_1 \cdot (I\ II); \quad 11' = P_2 \cdot (I\ II);$$
$$33' = P_2 \cdot (II\ III); \quad 22'' = P_3 \cdot (II\ III); \quad B'B'' = P_3 \cdot (IIIB).$$

Tõepoolest, kui võtta näiteks joon 1—2 ja pikendada seda kuni punktini $3'$, siis võib otsustada, et tema murdumine 2—3 suunas on tingitud ainult jõu P_2 mõjust, mis põhjustab lõikes III paindemomendi muutuse suuruse $P_2 \cdot (II\ III) = P_2(a_3 - a_2)$ võrra.

Analüüsilt sünteesile siirdudes võime anda üsna lihtsa paindemomentide konstrueerimise graafilise meetodi, kusjuures ei ole tar-

vis leida toereaktsioone.[1] Selleks on küllalt, kui arvutame kolm vertikaalset joonlõiku, näiteks $A'A'' = P_1 a_1$, $33' = P_2(a_3 - a_2)$ ja $B'B'' = P_3 b$. Vaadeldaval juhul alustame epüüri konstrueerimisega sellest, et joonestame vabalt võetud nurga β' all horisontaaliga sirge *1—2* (joon. 320). Järgmised sirged *1—A'*, *2—3* ja *3B'*, nagu nähtub kujutisest, ehitatakse punktidest *A''*, *3'* ja *B''* vastavate joonlõikude *A'A''*, *33'* ja *B'B''* kandmise teel joonisele. Konstrueerimine lõpetatakse nulljoone tõmbamisega läbi äärmiste punktide *A'* ja *B'*, kus paindemomendid on võrdsed nulliga. See joon on



Joon. 320.

harilikult kaldu horisondi suhtes, kusjuures kaldenurk oleneb joone *1—2* esialgse asendi valikust. See asjaolu ei avalda mõju epüüri mastaabile.

Siirdume lõikejõu epüüri konstrueerimisele. Selleks arvutame lõikejõud lõigete kohta, mis asuvad *A—I*, *I—II*, *II—III* ja *III—B* piirides. Nad võrduvad vastavalt T_A, $T_A - P_1$, $T_A - P_1 - P_2$ ja $T_A - P_1 - P_2 - P_3 = -T_B$. Leitud väärtuste järgi on lihtne ehitada Q_x epüüri, võttes arvesse seda, et iga piirkonna ulatuses on lõikejõud konstantsed. Seda epüüri ehitatakse vasakult paremale järkjärgulise vertikaalsete joonlõikude joonisele kandmise teel, kusjuures need joonlõigud võrduvad vastavalt T_A, P_1, P_2, P_3 ja T_B.

Leiame joone *1—2* kaldenurga tangensi horisondi suhtes (vt. joon. 318):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{M_{II} - M_I}{a_2 - a_1} = \frac{T_A a_2 - P_1(a_2 - a_1) - T_A a_1}{a_2 - a_1} = T_A - P_1$$

ehk

$$\operatorname{tg}\beta = Q_x. \qquad (184)$$

Järelikult on lõikejõud võrdne paindemomentide epüüri joonele püstitatud puutuja kaldenurga tangensiga.

Vaatleme rea paindemomentide ja lõikejõudude epüüride konstrueerimise näiteid.

[1] See meetod on esmakordselt välja töötatud autori (A. Popov) poolt.

Näide 1. Kui tala AB (joon. 321), mis on ühte otsa pidi sisse müüritud, koormata koondatud koormusega P, siis ta paindub kriipsjoonega näidatud joone järgi. Kinnitatud lõikes A tekib reaktsioon-paindemoment M_A ja -jõud T_A. Staatika võrrandite abil leiame, et

$$M_A = -Pl$$

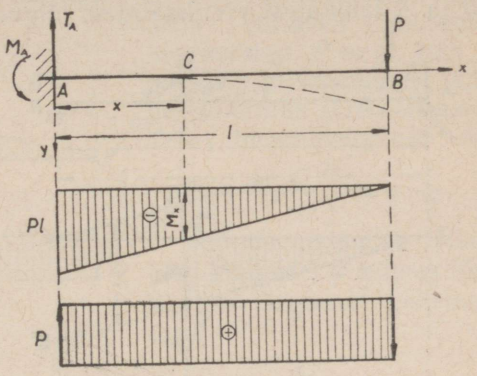
ja

$$T_A = P.$$

Jooksva lõike C kohta, mis asub kinnituskohast kaugusel x, on paindemoment ja lõikejõud:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -P(l-x); \\ Q_x &= P. \end{aligned}\right\} \quad (185)$$

Võttes x väärtusena 0 kuni l, on kerge ehitada M_x ja Q_x epüürid.

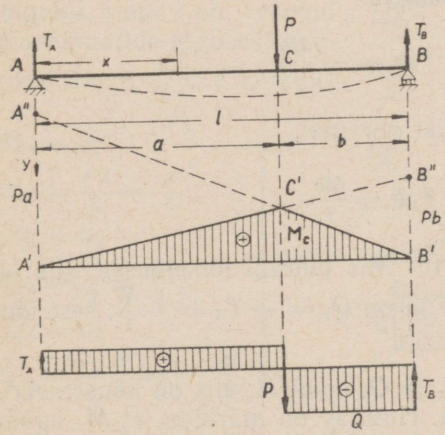


Joon. 321.

Näide 2. Vabalt kahel toel asuv tala AB paindub jõu P mõjul kriipsjooneni, mis on kujutatud joonisel 322. Tugedes tekivad toereaktsioonid T_A ja T_B, mille suurused on kangi seaduse põhjal:

$$T_A = \frac{Pb}{l};$$

$$T_B = \frac{Pa}{l}.$$



Joon. 322.

Lõike kohta, mis asub toest A kaugusel x, on M_x ja Q_x valemitel järgmine kuju:

$$M_x = T_A x = \frac{Pb}{l} x;$$

$$Q_x = T_A = \frac{Pb}{l}.$$

Saadud valemitest nähtub, et piirkonnas AC muutub M_x lineaarselt ja Q_x on konstantne. Kasutades väärtusi $x = 0$ ja $x = a$, saame:

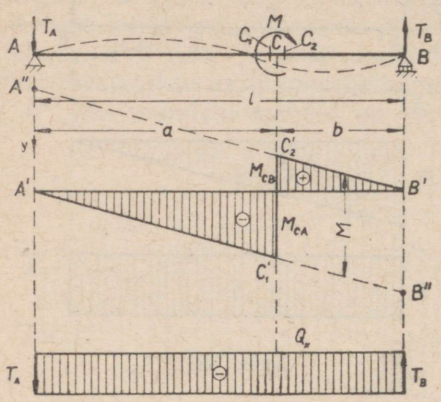
$$M_A = 0;$$

$$M_C = \frac{Pab}{l}.$$

Joonisel 322 on M_x epüür kujutatud kaldjoonena $A'C'$ ja Q_x epüür horisontaalse sirgena.

Analoogilise epüüri saame tala osa CB kohta. Sel juhul võrdub moment toes B nulliga, lõikejõud aga pikkusel CB võrdub T_B-ga.

Kui sirgeid $A'C'$ ja $C'B'$ pikendada, siis lõikavad nad tugesid B ja A läbivatest vertikaalidest lõigud $B'B''$ ja $A'A''$, mis on jõu P momentideks äärmistes lõigetes, s. t. $B'B'' = Pb$ ja $A'A'' = Pa$.



Joon. 323.

Paindemomendi väärtused on: lõikes A $M_A = 0$, lõikes C_1, mis asetseb momendist M vasakul, on ta

$$M_{CA} = -T_A a = -\frac{Ma}{l}$$

ja lõikes C_2, mis asub momendist paremal,

$$M_{CB} = T_B b = \frac{Mb}{l}$$

ning lõpuks lõikes B on $M_B = 0$. Mis puutub lõikejõusse, siis on ta kogu tala ulatuses konstantne ja on $Q_x = -T_A = -\frac{M}{l}$, sest jõupaar M ei muuda Q_x suurust.

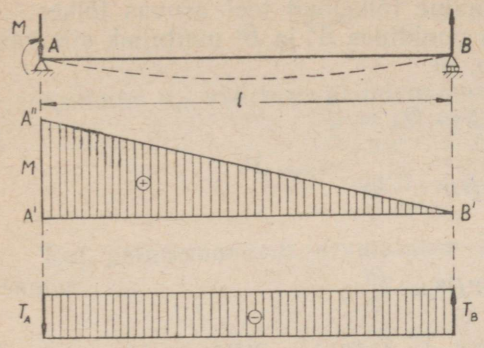
Joonisel 323 on kujutatud M_x ja Q_x epüürid, mis on konstrueeritud eespool leitud suuruste järgi. Huvitav on märkida, et M_x epüür teeb hüppe jõupaari M rakenduspunktis, Q_x epüür aga kogu tala ulatuses ei muutu.

Kui sirgeid $A'C_1'$ ja $B'C_2'$ pikendada, siis eraldavad nad vertikaalidel joonlõigud $B'B''$ ja $A'A''$, mis võrduvad M-iga.

Näide 3. Konstrueerime M_x ja Q_x epüürid kahel toel vabalt asetseva tala kohta, millele mõjub koondatud moment (jõupaarina) M punktis C (joon. 323).

Sellise koormamisviisi puhul võtab elastne joon joonisel kriipsjoonega näidatud kuju. Tugedes tekivad toereaktsioonid T_A ja T_B. Neid arvutatakse staatika võrrandite abil: $T_B l = T_A l = M$, kust $T_A = T_B = \frac{M}{l}$.

Juhul, kui $a = 0$, võtavad epüürid joonisel 324 toodud kuju.



Joon. 324.

Näide 4. Koormame kahel toel asetseva tala (joon. 325) ühtlaselt jaotatud koormusega $P = ql$, kus q on ühele pikkusühikule langev koormus (erikoormus). Tala toereaktsioonid on:

$$T_A = T_B = \frac{P}{2} = q \cdot \frac{l}{2}.$$

Paindemoment ja lõikejõud kaugusel x asuvas lõikes on järgmiste väärtustega:

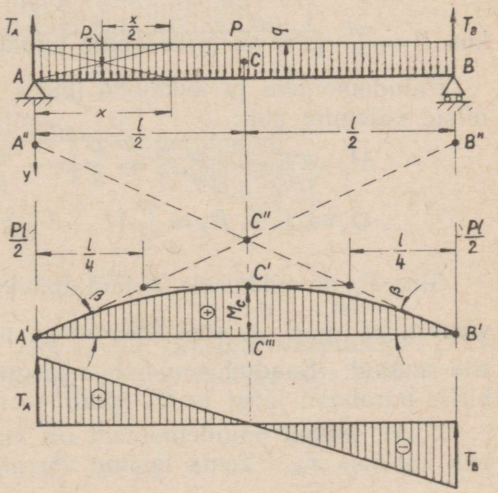
$$\left.\begin{aligned} M_x &= T_A x - P_x \frac{x}{2} = \frac{P}{2}\left(x - \frac{x^2}{l}\right) = \frac{ql}{2}\left(x - \frac{x^2}{l}\right), \\ Q_x &= T_A - P_x = \frac{P}{2}\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) = \frac{ql}{2}\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)^*, \end{aligned}\right\} \quad (186)$$

kus $P_x = \frac{Px}{l} = qx$ on pikkusele x langev jõud.

Saadud avaldisest järgneb, et vaadeldava koormusviisi puhul muutub paindemoment parabooli järgi, lõikejõud aga sirgetpidi.

Selleks, et konstrueerida epüüri, määrame kindlaks M_x ja Q_x suurused lõigetes, mis on võetud koordinaatide algusest kaugusel $x = 0$, $\frac{l}{2}$ ja l. Leiame:

$$\left.\begin{aligned} &M_A = 0; \\ &M_C = \frac{Pl}{8} = \frac{ql^2}{8}; \\ &M_B = 0; \\ &Q_A = \frac{P}{2} = \frac{ql}{2}; \\ &Q_C = 0; \\ &Q_B = -\frac{P}{2} = -\frac{ql}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (187)$$



Joon. 325.

Saadud suuruste abil on epüüre kerge konstru-

* Avaldise Q_x jaoks võib saada valemi (183) kohaselt M_x võrrandi diferentseerimisel.

eerida. Neist nähtub, et maksimaalne paindemoment asub tala keskmises lõikes ja maksimaalne lõikejõud toel asuvas lõikes.

Kui M_x epüürile tõmmata punktides A' ja B' puutujad, siis vastavalt valemile (184) saame, et

$$\operatorname{tg}\beta = Q_A = \frac{P}{2}$$

ehk

$$\frac{B'B''}{l} = \frac{P}{2},$$

kust

$$B'B'' = \frac{Pl}{2}.$$

Siit järeldame, et joonlõigud $A'A''$ ja $B'B''$ on koormuse P momendid otslõigete A ja B suhtes. Edasi saab geomeetrilistel kaalutlustel määrata kindlaks kahe joonlõigu $C'C''$ ja $C'C'''$ võrdsuse. M_x epüürile tõmmatud puutuja läbi punkti C' on paralleelne x-teljega.

Näide 5. Nüüd vaatleme juhtu, kui tala AB (joon. 326) kannab koormust, mis on jaotatud kolmnurgana.

Sellise tala toereaktsioonid on kangi seaduse põhjal:

$$T_A = \frac{P}{3} = \frac{ql}{6};$$

$$T_B = \frac{2}{3}P = \frac{ql}{3},$$

kus $P = \frac{ql}{2}$ ja q on erikoormus punktis B.

Paindemoment ja lõikejõud lõikes kaugusel x määratakse järgmiste valemite abil:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= T_A x - P_x \frac{x}{3} = \frac{P}{3}\left(x - \frac{x^3}{l^2}\right) = \frac{ql}{6}\left(x - \frac{x^3}{l^2}\right); \\ Q_x &= T_A - P_x = \frac{P}{3}\left(1 - 3\frac{x^2}{l^2}\right) = \frac{ql}{6}\left(1 - 3\frac{x^2}{l^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (188)$$

Siin P_x on pikkusele x jaotatud koormus; teda saab arvutada võrrandist $\frac{P_x}{P} = \frac{x^2}{l^2}$, sest kolmnurga pinnad suhtuvad nagu kaatetite ruudud. Saadud avaldistest järgneb, et M_x epüür muutub kuubilise parabooli järgi ja Q_x epüür — ruutparabooli järgi.

Lõike, milles paindemoment on maksimaalse väärtusega, määrab abstsiss x_m. Tema leiame võrrandist (184), s. t.

$$\operatorname{tg}\beta = Q_x = 0$$

või vastavalt avaldisele (188), saame

$$1 - 3\frac{x_m^2}{l^2} = 0,$$

kust

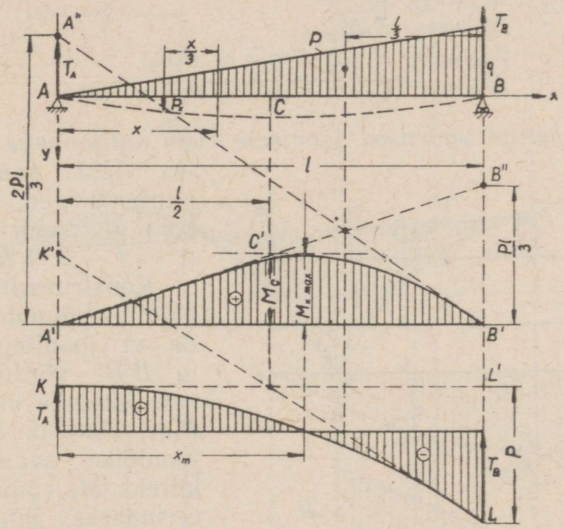
$$x_m = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}58\ l.$$

Asetame x_m väärtuse paindemomendi valemisse, leiame

$$M_{x\,max} = \frac{2Pl}{9\sqrt{3}} = \frac{Pl}{7{,}8} = \frac{ql^2}{15{,}6}.$$

Kui paindemomenti arvutatakse keskmise lõike C kohta, siis saame

$$M_C = \frac{Pl}{8}.$$



Joon. 326.

Mis puutub lõikejõusse, siis ta on suurima väärtusega (absoluutväärtusega) tugede kohal ja võrdub nulliga siis, kui $x = x_m$. Kui $x = 0$ või $x = l$, siis

$$Q_A = \frac{P}{3} = T_A;$$

$$Q_B = \frac{2}{3}P = T_B.$$

Joonisel 326 on antud M_x ja Q_x epüürid, mis on konstrueeritud võrrandite (188) alusel.

Kui M_x epüürile punktides A' ja B' joonestada puutujad, siis need lõikavad tugesid läbivatel vertikaalidel ära joonlõigud

$$B'B'' = \frac{Pl}{3} \text{ ja } A'A'' = \frac{2Pl}{3},$$

mis on võrdsed koormuse P momentidega tala otslõigete suhtes. Q_x epüürile punktides K ja L tõmmatud puutujad lõikavad samadelt vertikaalidelt ära joonlõigud

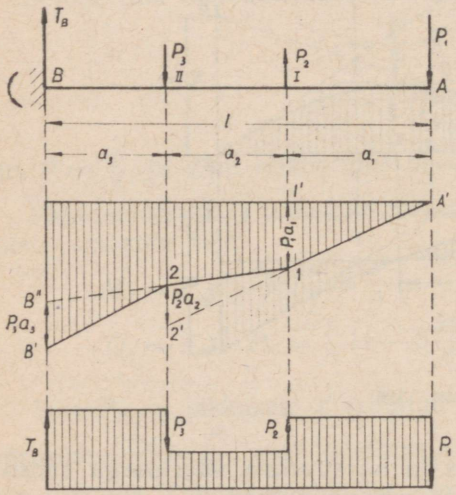
$$KK' = LL' = P.$$

Näide 6. Konstrueerime epüürid kolme koondatud koormusega koormatud konsooltalale (joon. 327).

M_x epüüri ehitame paindemomentide väärtuste alusel lõigetes A, I, II ja B. Arvutame need väärtused:

$$M_A = 0;$$
$$M_I = -P_1a_1;$$
$$M_{II} = -P_1(a_1 + a_2) + P_2a_2;$$
$$M_B = -P_1l + P_2(a_2 + a_3) - P_3a_3.$$

Kandes leitud suurused joonisele risti nulljoonega ja tõmmates läbi saadud nelja punkti sirged, saame otsitava M_x epüüri murdjoone $A' - 1 - 2 - B'$ kujul.



Joon. 327.

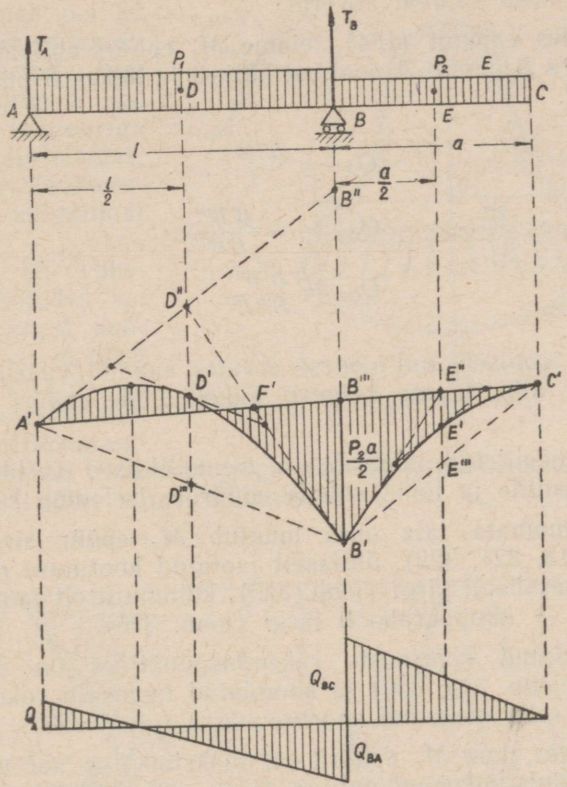
Konstrueeritud epüüri analüüs võimaldab järeldada, et joonlõigud $11'$, $22'$ ja $B'B''$ võrduvad vastavate jõudude momentidega P_1a_1, P_2a_2 ja P_3a_3. Neid joonlõike saab kasutada kiireks M_x epüüri konstrueerimiseks, ilma et oleks tarvis arvutada momente lõigetes A, I, II ja B.

Lõikejõudude epüür on toodud joonisel 327, tema konstrueerimiseks ei ole tarvis seletusi.

Näide 7. Koormame konsooliga BC tala AB (joon. 328) ühtlaselt jaotatud koormusega. Tähistame summaarse koormuse piirkonnas AB tähega P_1 ja piirkonnas BC — P_2. Konstrueerime sellele talale M_x epüüri graafiliselt.

Seejuures loeme koormusi P_1 ja P_2 koondatud koormusteks piirkondade AB ja BC vastavates raskuskeskmetes. Siis muutub lõigete A, D, B ja E vahel M_x epüür lineaarselt. Konstrueerimist

alustame sirge $A'B''$ joonestamisega vabalt valitud nurga all. Punktis D'', mille abstsiss on $\frac{l}{2}$, on epüüril murdekoht ja ta kulgeb mööda sirget $D''B'$. Joonlõik $B'B''$, mis määrab selle sirge suuna, võrdub jõu P_1 momendiga lõike B suhtes, s. t. on $\frac{P_1 l}{2}$. Konsooli mõju arvestamiseks rakendame toes B koondatud momendi $\frac{P_2 a}{2}$, mis asendab selle konsooli mõju. Toes rakenda-



Joon. 328.

tud momendi kanname joonlõiguna $B'B'''$ punktist B' üles, sest minnes vasakult paremale, tuleb teda kui paindemomenti lugeda positiivseks.

Tõmmates läbi punktide A' ja B''' sirge $A'C'$, saame epüüri nulljoone. Sellel joonel märgime ära punkti E'', kus paindemoment võrdub nulliga, kui koormust P_2 lugeda koondatud koormuseks. Ühendades punktid E'' ja B' sirgega, saame paindemomentide epüüri konsoolile. Saadud paindemomentide epüüri $A'D''B'E''$ võime lugeda konstrueerituks koondatud koormustele P_1 ja P_2.

Kuna aga ülesande sisu kohaselt on P_1 ja P_2 ühtlaselt jaotatud koormused, siis paindemomentide epüür kujuneb kahest paraboolist koosnevana. Kummagi parabooli ehitame kolmes punktis tõmmatud puutuja abil. Piirkonna AB jaoks punktidesse A' ja B' tõmmatud puutujate suunad on teada. Kolmas puutuja läbib, kooskõlas joonisega 325, punkti D', mis jagab kauguse punktide D'' ja D''' vahel pooleks ja on paralleelne sirgega $A'B'$. Analoogiliselt konstrueerime ka parabooli piirkonna BC kohta. Paindemomentide epüür võtab lõpliku kuju, kui läbi punktide A', D', B', E' ja C' joonestada kaks sujuvat kõverat.

Kasutades valemit (184), leiame M_x epüüri abil lõikejõud lõikes A, lõikes B punkti A poolsest küljest ja lõikes B punkti C poolsest küljest.

$$Q_A = \frac{B''B'''}{l};$$

$$Q_{BA} = -\frac{B'B'''}{l'B'''};$$

$$Q_{BC} = \frac{B'B'''}{B'''E''}.$$

Kandes joonisele nulljoonest arvates saadud väärtused vastavate lõigete alla, saame kergesti lõikejõudude epüüri kahe kaldsirge näol.

Eespool käsitletud näidete varal teeme üldised järeldused talade paindemomentide ja lõikejõudude epüüride iseloomu kohta.

1. Koormamata tala osas muutub M_x epüür sirgjooneliselt (vt. joon. 318, 321, 322), ühtlaselt jaotatud koormuse puhul muutub ta ruutparabooli järgi (joon. 325), kolmnurkselt jaotatud koormuse puhul — kuupparabooli järgi (joon. 326).

2. Koondatud koormuste rakenduspunktides on M_x epüüril murdekoht (joon. 318, 322) ja koondatud momendi rakenduspunktis — hüpe selle momendi suuruse võrra (joon. 323).

3. Lõigetes, kus M_x epüüril on maksimaalne või minimaalne väärtus, võrdub lõikejõud nulliga (joon. 325 ja 326).

4. Q_x epüür muutub suuruselt ja märgilt samuti nagu nurga β tangens [vt. v. (184)].

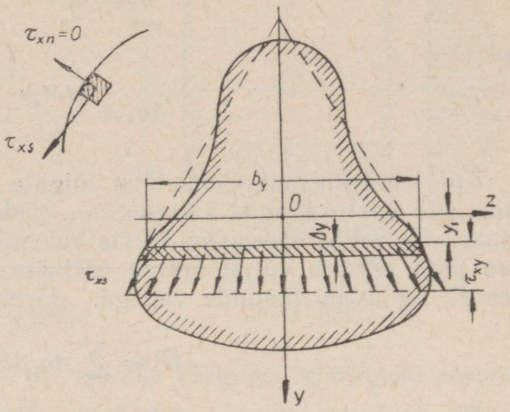
5. Koondatud koormuste rakenduspunktides teeb Q_x epüür hüppe rakendatud koondatud koormuse suuruse võrra (joon. 318 ja 322) ja koondatud momentide rakenduspunktides ei muutu (joon. 323).

6. Kui tala on koormatud paljude koormustega, siis mõjude liitmise printsiibi alusel võib M_x ja Q_x epüürid saada iga üksiku koormuse kohta konstrueeritud epüüride liitmise teel.

62. Tangentsiaalpinged lamepainde puhul.

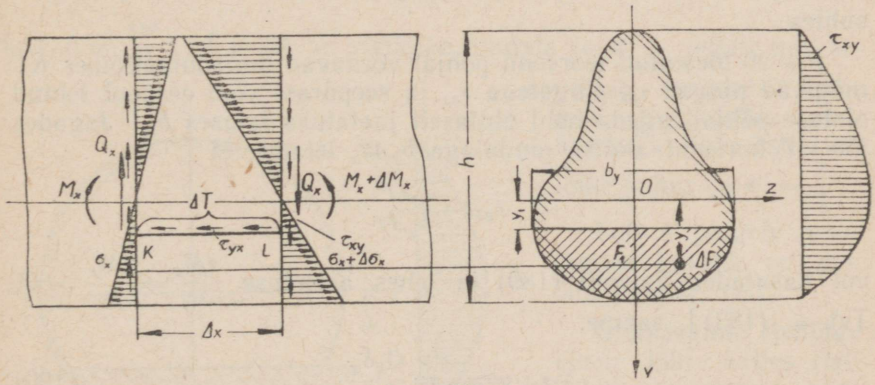
Määrame kindlaks tala AB lõikes lõikejõu Q_x mõjul tekkivate tangentsiaalpingete jaotumise ja suurused (vt. joon. 318).

Vaatleme lõikest kitsast riba kõrgusega Δy ja laiusega b_y (joon. 329). Oletame, et y-teljel asuvates punktides on tangentsiaalpinged suunatud mööda vertikaali, kontuuril asuvates punktides on nad aga suunatud puutujat mööda. Esimese oletuse tõepärasus on silmanähtav, teine aga põhineb p-s 20 käsitletud tangentsiaalpingete teoreemile, sest tangentsiaalpingeid τ_{xn}, mis mõjuvad kontuuriga risti, ei saa olla olemas, kuna tangentsiaalkoormused tala külgpinnal puuduvad.



Joon. 329.

Oletame, et vahepealsetes punktides on tangentsiaalpinged suunatud mööda joonisel 329 näidatud kiiri ja nende projektsioonid y-teljele loeme konstantseks suuruseks ja võrdseks τ_{xy}-iga kõikide pinnaelementide kohta, mis asuvad ristlõike laiuse ulatuses.



Joon. 330.

Võttes aluseks tehtud oletused, siirdume pingete τ_{xy} leidmisele. Selleks eraldame joonisel 318 kujutatud talast elemendi pikkusega Δx (joon. 330). Lamepainde puhul tekivad selle elemendi vasakpoolses lõikes paindemomendi M_x mõjul normaalpinged σ_x, mida loeme

lineaarselt jaotatuks vastavalt eespool tehtud oletusele (vt. p. 59). Lõikejõu Q_x mõjul aga tekivad tangentsiaalpinged, millede vertikaalkomponenti hakkame kindlaks määrama. Parempoolses lõikes tekib paindemomendile juurdekasv ΔM_x, lõikejõud aga jääb muutumatuks. Järelikult suurenevad selles lõikes normaalpinged $\Delta\sigma_x$ võrra, tangentsiaalpinged aga jäävad endisteks. Kasutades valemit (163), saame, et

$$\sigma_x = \frac{M_x y}{J_z}$$

ja

$$\Delta\sigma_x = \frac{\Delta M_x y}{J_z}.$$

Kui vaadeldavast elemendist lõigata horisontaallõike KL abil, mis asub neutraalkihist kaugusel y_1, tükk välja, siis tasakaalu säilitamiseks selles lõikes on tarvis rakendada tangentsiaaljõud ΔT. See jõud võrdub väljalõigatud tükikese paremas ja vasakus lõikes F_1 mõjuvate jõudude vahega. Järelikult

$$\Delta T = \sum \Delta\sigma_x \Delta F.$$

Pärast suuruse $\Delta\sigma_x$ asendamist saame:

$$\Delta T = \frac{\Delta M_x}{J_z} \sum \Delta F y = \frac{S_{z_1}}{J_z} \Delta M_x, \qquad (189)$$

kus S_{z_1} on viirutatud pinna F_1 staatiline moment neutraaltelje z suhtes.

P-s 20 tõestatud teoreemi põhjal võrduvad horisontaallõikes KL mõjuvad pinged τ_{yx} pingetega τ_{xy} ja seepärast võib eespool tehtud oletuse põhjal lugeda neid ühtlaselt jaotatuks laiuses b_y. Jagades jõu ΔT horisontaallõike pindalaga $b_y \Delta x$, leiame, et

$$\tau_{yx} = \frac{\Delta T}{b_y \Delta x}$$

või kasutades valemit (189) ja tehes asenduse $\frac{\Delta M_x}{\Delta x} = \frac{dM_x}{dx} = Q_x$ [vt. v. (183)], saame:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_x S_{z_1}}{J_z b_y}. \qquad (190)$$

Selle valemi järgi arvutatakse tangentsiaalpinged, mis tekivad lamepainde puhul tala vertikaalsetes ja horisontaalsetes lõigetes. Suurus τ_{xy} on võrdeline suhtega S_{z_1}/b_y, mis võrdub nulliga neutraalteljest kõige kaugemal asuvates pinnakestes. Järelikult saab

tangentsiaalpingete muutumise seadust kujutada kõrguse h piirides joonisel 330 toodud kõverana. Määrame lihtsate ristlõigete jaoks kindlaks selle kõvera kuju ja arvutame maksimaalse pinge $\tau_{xy\,max}$.

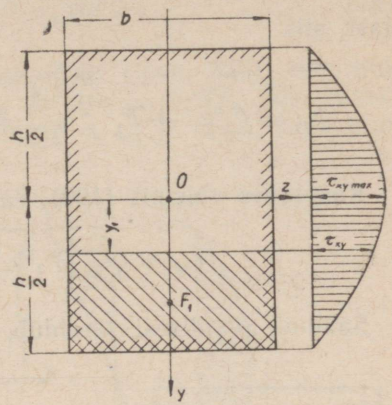
Ristkülikuline ristlõige (joon. 331). Selle ristlõike puhul saame kirjutada

$$F_1 = b\left(\frac{h}{2} - y_1\right);$$

$$S_{z_1} = F_1 \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y_1\right);$$

$$b_y = b;$$

$$J_z = \frac{bh^3}{12}.$$



Joon. 331.

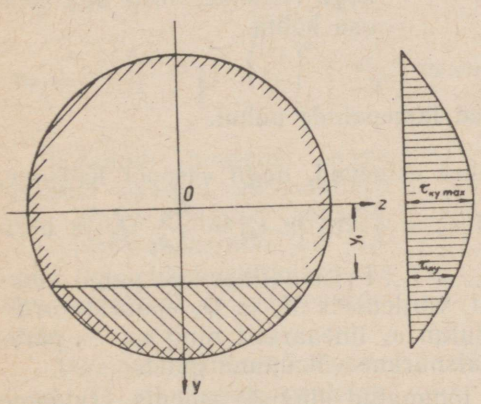
Pärast asendamist saame:

$$\tau_{xy} = \frac{Q}{2J_z}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right) \ldots \quad (191)$$

Sellest valemist nähtub, et ristlõike kõrguses muutuvad pinged parabooli järgi. Kui $y_1 = \frac{h}{2}$ või kui $y_1 = -\frac{h}{2}$, siis nad võrduvad nulliga, kui aga $y_1 = 0$, siis saavutavad nad maksimaalse väärtuse

$$\tau_{xy\,max} = \frac{Qh^2}{8J_z} = k'\frac{Q}{F}, \quad (192)$$

kus $J_z = \frac{bh^3}{12}$, $F = bh$ on ristlõike pindala ja k' — tegur, mis arvestab tangentsiaalpingete jagunemise ebaühtlust; täisnurkse ristlõike puhul on $k' = \frac{3}{2}$.



Joon. 332.

Leitud pingete muutumise graafik on toodud joonisel 331.

Ümmargune ristlõige (joon. 332). Selles ristlõikes jagunevad pinged τ_{xy} samuti parabooli järgi. Mis puutub tegurisse k', siis antud juhul

$$k' \approx \frac{4}{3}.$$

I-ristlõige (joon. 333). Leiame selle ristlõike puhul pingete jagunemise ainult vertikaalse osa piirides.

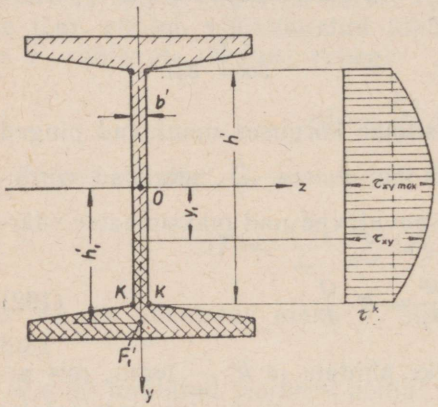
Kui F_1' on tala talla pindala, h_1' — talla raskuskeskme kaugus z-teljest, $F_1'' \approx b'\left(\frac{h'}{2} - y_1\right)$ on osa vertikaalse seina pindalast, siis

$$S_{z_1} = F_1' h_1' + F_1'' \frac{\frac{h'}{2} + y_1}{2} = F_1' h_1' + \frac{b'}{2}\left(\frac{h'^2}{4} - y_1^2\right).$$

Kasutades valemit (190), saame

$$\tau_{xy} = \frac{Q}{J_z b'}\left[F_1' h_1' + \frac{b'}{2}\left(\frac{h'^2}{4} - y_1^2\right)\right].$$

Saadud avaldisest järeldub, et kõrguse h' piirides jagunevad tangentsiaalpinged parabooli järgi. Need pinged on vertikaalse osa tallaks ülemineku kohal (lõige KK):



Joon. 333.

$$\tau_{xy}^{K} = \frac{Q}{J_z b'}(F_1' h_1'),$$

ja neutraalkihis on neil maksimaalne väärtus

$$\tau_{xy\,max} = \frac{Q}{J_z b'}\left(F_1' h_1' + \frac{b' h'^2}{8}\right).$$

Tuletame meelde, et saadud valemites J_z on võetud kogu ristlõike, mitte aga selle osa kohta.

63. Peapinged lamepainde puhul.

Sirge tala lamepainde puhul esinevad, nagu eespool leidsime, vertikaalsetes lõigetes pinged $\sigma_x = \frac{y}{J_z} M_z$ ja $\tau_{xy} = \frac{S_{z_1}}{J_z b_y} Q_x$ ja horisontaalsetes lõigetes pinged $\tau_{yx} = \tau_{xy}$. Prismaatilise tala puhul muutuvad σ_x ja τ_{xy}, olenevalt x-ist, võrdeliselt M_x ja Q_x epüüride ordinaatidega, olenevalt y-ist muutub σ_x lineaarselt ning τ_{xy} — parabooli järgi, kui ristlõige on täisnurkne või ümmargune.

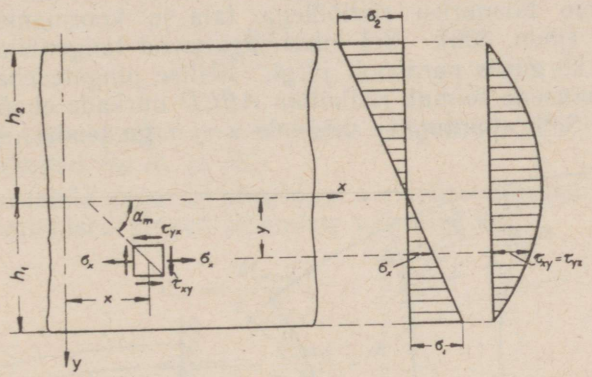
Mingis tala osas, näiteks tõmmatud kiudude tsoonis, eraldame ühe elemendi. Pingete jagunemine tema tahkudel vastab joonisele 334. Kaldlõike normaal- ja tangentsiaalpinged, kui lõige on

teostatud selle elemendi sees nurga α all, määratakse valemite (114) ja (115) abil, arvestades et $\sigma_y = 0$. Seega võime kirjutada:

$$\sigma_k = \sigma_x \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha; \tag{193}$$

$$\tau_k = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha. \tag{194}$$

Kui element viia pingete peatelgedele (joon. 335), mis moodustavad x-teljega nurgad $\alpha = \alpha_m$ ja $\alpha = \alpha_m + 90°$, siis viimase tahkudel mõjuvad ainult normaalpinged $\sigma_{k\,max}$ ja $\sigma_{k\,min}$, mida nimetatakse peapingeteks.



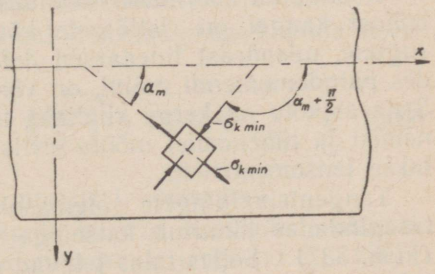
Joon. 334.

Koostame avaldise nurga α_m leidmiseks, samuti ka peapingete leidmiseks, kasutades valemeid (117) ja (119), kui $\sigma_y = 0$:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_m = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x}; \tag{195}$$

$$\sigma_{k\,max} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \quad \sigma_{k\,min} = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{196}$$

Saadud pingetel, nagu nähtub saadud võrranditest, on alati erinevad märgid, kusjuures maksimaalsed pinged on tõmbepingeteks ja minimaalsed — survepingeteks.



Joon. 335.

Pinnaelementidel, mis asuvad 45° all pingete peatelgedele, nagu teada, mõjuvad maksimaalsed tangentsiaal-

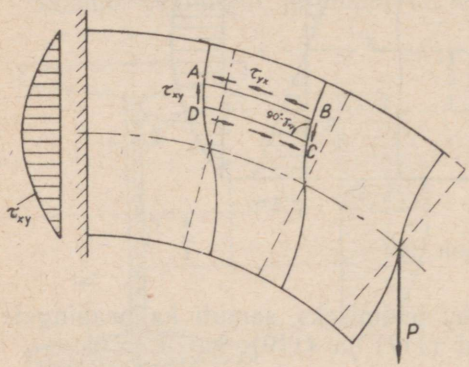
pinged. Nende kohta saab valemite (121) põhjal koostada järgmise võrrandi:

$$\tau_{k\,max} = \frac{\sigma_{k\,max} - \sigma_{k\,min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \qquad (197)$$

64. Taladega teostatud lamepainde-katsete andmeid.

Lamepainde puhul, nagu näitavad katsed, toimub ristlõigete tunduv kõverdumine. See toimub lõikejõu poolt tekitatud nihkedeformatsioonide ebaühtlasest jagunemisest ristlõike kõrguses. Selgitame öeldut.

Võtame täisnurkse ristlõikega tala ja koormame teda põikjõuga P (joon. 336). Sel juhul jagunevad tangentsiaalpinged τ_{xy} ristlõike kõrguses parabooli järgi. Sellise pingete ebaühtlase jaotuse tulemusena toimub ristküliku $ABCD$ nurkade ebaühtlane muutumine. Selle muutumise mõõduks on, nagu teada, nihkenurk γ_{xy}.



Joon. 336.

Joon. 337.

millel on maksimaalne väärtus neutraalkihis ja mis võrdub nulliga äärmistel kiududel. Siit järgneb, et lõiked peavad olema risti tala kontuuriga ja lõikama neutraalkihti nurga $90° - \gamma_{xy}$ all. Sellele tingimusele saavad vastata ainult mittetasapinnalised lõiked.

Koondatud koormuse rakenduspunktist, samuti ka tala kinnituskohast kaugel on ristlõigete kõverdumine kõikides lõigetes ühesugune, mispärast lineaarsed deformatsioonid, mis tekivad kiududes paindemomendi mõjul, on võrdelised kaugusega neutraalkihist. Seda asjaolu on kerge kindlaks teha katseliselt, kui kiudude pikenemisi ja lühenemisi mõõta eriliste mõõteriistadega, mida nimetatakse tensomeetriteks.

Tangentsiaalpingete olemasolu neutraalkihiga paralleelsetes tasapindades kinnitub katsetega laudadest koostatud tala juures (joon. 337). Selles talas tekivad põikjõu P mõjul üksikute laudade vahel tunduvad horisontaalsed ümberpaigutused, mida terves talas paralüseerivad tangentsiaalpinged.

65. Tala tugevusarvutus.

Tala lamepainde puhul mõjuvad kõige rohkem pingestatud lõigetes kõige sagedamini samaaegselt paindemoment M_x ja lõikejõud Q_x. Nimetatud jõufaktorite mõjul äärmistes kiududes tekkivad normaalpinged ja neutraalkihis tekkivad tangentsiaalpinged leitakse järgmiste valemite abil:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M}{W_{z_1}}; \\ \sigma_2 &= -\frac{M}{W_{z_2}}; \end{aligned}\right\} \tag{198}$$

$$\tau = \frac{Q S_{z_1}}{J_z b_y}. \tag{199}$$

Tugevuse seisukohalt ei tohi need pinged ületada vastavaid lubatavaid pingeid R_t, R_s ja R_n.

Juhul, kui talale mõjuvad pinged on võnkelise iseloomuga, arvutatakse ekvivalentsed pinged järgmiste valemite abil:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{1e} &= \frac{M_{max}}{\varphi_\sigma W_{z_1}}, \\ \sigma_{2e} &= -\frac{M_{max}}{\varphi_\sigma W_{z_2}}, \end{aligned}\right\} \tag{200}$$

$$\tau_e = \frac{Q_{max} S_{z_1}}{\varphi_\tau J_z b_y}, \tag{201}$$

kus M_{max} on vastav maksimaalne paindemoment;

Q_{max} — tsükli maksimaalne lõikejõud;

φ_σ ja φ_τ — lubatavate pingete vähendamistegurid [vt. v. (130)].

Lühikeste talade puhul, millel on näiteks I-profiil (vt. joon. 333), on tarvis kontrollida pingeid punktides K, kus vertikaalne profiili osa läheb üle tallaks. Nendes punktides on normaalpinged σ_{kk} sageli tangentsiaalpingetega τ_{kk} ühismõõtelised.

Esimese tugevusteooria seisukohalt normaalpinged, mida arvutatakse valemi

$$\sigma_{k\,max} = \frac{\sigma_{kk}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{kk}}{2}\right)^2 + \tau_{kk}^2} \leqslant R_t \tag{202}$$

järgi, peavad olema lubatavatest pingetest väiksemad.

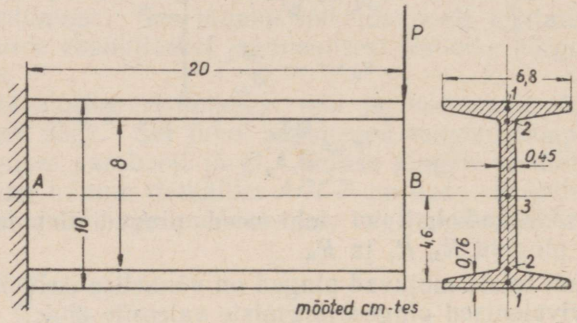
Maksimaalsete tangentsiaalpingete teooria seisukohalt otsustatakse tugevuse üle järgmise ekvivalentse pinge järgi [vt. v. (126)]:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{kk}^2 + 4\tau_{kk}^2}. \tag{203}$$

Võnkekoormuste puhul võib viimast valemit võrrandi (131) põhjal kirjutada järgneval kujul:

$$\sigma_e = \sqrt{\left[\frac{(\sigma_{kk})_{max}}{\varphi_\sigma}\right]^2 + 4\left[\frac{(\tau_{kk})_{max}}{\varphi_\tau}\right]^2}, \qquad (204)$$

kus $(\sigma_{kk})_{max}$ ja $(\tau_{kk})_{max}$ on tsükli maksimaalsed pinged.



Joon. 338.

Ülesanne 17. Teeme kontrollarvutuse konsooltala lõike A kohta (joon. 338), kui viimane on koormatud võnkuva jõuga $P = P_k \pm P_a$, kus $P_k = 2000$ kg ja $P_a = 600$ kg.

I-profiili Nr. 10 ristlõike kohta leiame: $J_z = 245$ cm⁴, $W_z = 49$ cm³, $h_1' = 4{,}6$ cm, $F_1' = 6{,}8 \cdot 0{,}76 = 5{,}16$ cm², $F_1' h_1' = 5{,}16 \cdot 4{,}6 = 23{,}75$ cm³, $\frac{b' h'^2}{8} = \frac{0{,}45 \cdot 8^2}{8} = 3{,}6$ cm³. Võttes tala materjalile $\alpha_\sigma \approx \alpha_\tau = 0{,}6$, leiame $A_\sigma = \frac{P_a}{P_k} = 0{,}3$ puhul diagrammilt $\varphi_\sigma = \varphi_\tau = 0{,}87$ (joon. 276).

Kasutades valemeid (200), (201) ja (204), määrame lõikes punktide *1*, *2* ja *3* kohta ekvivalentsed pinged.

$$\sigma_{e1} = \pm \frac{2600 \cdot 20}{0{,}87 \cdot 49} = \pm \frac{1060}{0{,}87} = \pm 1220 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_{e2} = \frac{1}{0{,}87}\sqrt{\left(1060 \cdot \frac{4}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{2600 \cdot 23{,}75}{245 \cdot 0{,}45}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{0{,}87}\sqrt{849^2 + 4 \cdot 560^2} = 1615 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\tau_{e3} = \frac{2600(23{,}75 + 3{,}6)}{0{,}87 \cdot 245 \cdot 0{,}45} = \frac{645}{0{,}87} = 742 \text{ kg/cm}^2.$$

Nii on siis kõige pingestatumaks punktiks punkt *2*.

66. Needitud tala arvutamine.

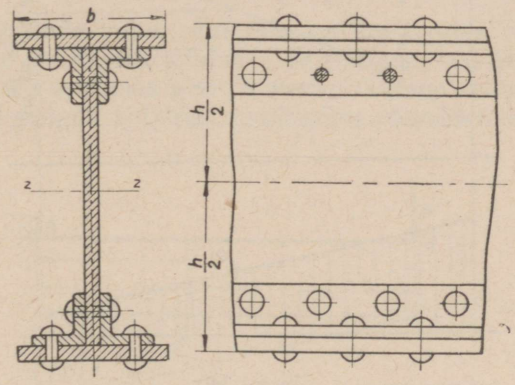
Suurte koormuste kandjateks määratud talad projekteeritakse liitristlõikega. Ta moodustatakse teraslehtedest ja mitmesugustest valtsitud profiilterastest.

Vaatleme tala, mis on kokku needitud vertikaalsest seinast, kahest tallast ja neljast nurkterasest (joon. 339).

Enampingestatud lõikes on normaalpinged äärmistes kiududes määratavad järgmise valemiga:

$$\sigma = \frac{Mh/2}{J_{z0}} = \frac{M}{W_{z0}},$$

kus J_{z0} ja W_{z0} on selle neto-ristlõike, s. t. neediaukudega nõrgestatud lõikepinna inerts- ja vastupidavusmomendid.



Joon. 339.

Selleks et leida tangentsiaaljõudu, mis lõikab läbi mingi neetide pikirea, anname valemile (189) sellise kuju:

$$\Delta T = \frac{S_{z_1}}{J_z} Q_x \Delta x,$$

kus $Q_x = \frac{\Delta M_x}{\Delta x}$ on lõikejõud (vt. joon. 330);

J_z — bruto-ristlõike, s. t. needi aukude poolt nõrgestamata ristlõike pindala inertsmoment;

S_{z_1} — mahalõigatud pinna staatiline moment neutraaltelje suhtes.

Tala lõpposa AB kohta (joon. 340) on see jõud

$$T = \sum \Delta T = \frac{S_{z_1}}{J_z} \sum Q_x dx.$$

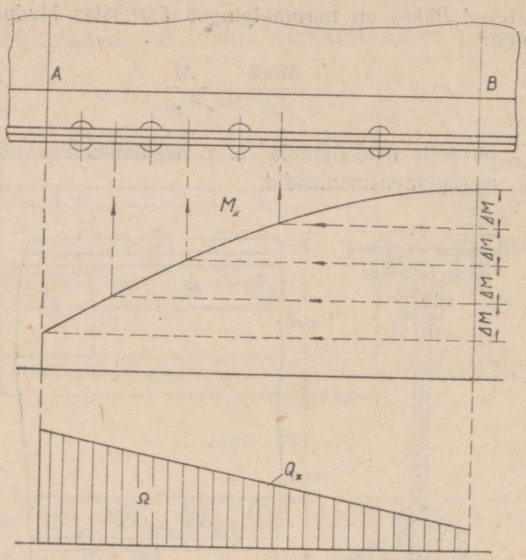
Saadud summa on lõikejõu epüüri pindala, s. t.

$$\sum Q_x dx = \Omega.$$

Lõplikult saame

$$T = \frac{S_{z_1}}{J_z} \Omega . \qquad (205)$$

Koostame avaldise S_{z_1} väljendamiseks olenevalt neetide pikirea asukohast.



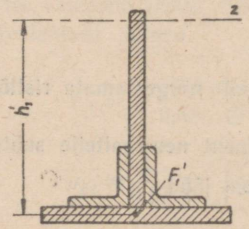
Joon. 340.

Vertikaalsete neetide kohta, mis ühendavad talda nurkterastega, võime kirjutada:

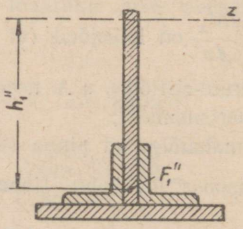
$$S'_{z_1} = F'_1 h'_1 ,$$

kus F'_1 on talla bruto-ristlõike pindala;

h'_1 — talla raskuskeskme kaugus z-teljest (joon. 341).



Joon. 341.



Joon. 342.

Horisontaalsete neetide kohta, mis ühendavad nurkteraseid vertikaalse seinaga, saame

$$S''_{z_1} = F''_1 h''_1 ,$$

kus F''_1 on talla ja kahe nurkterase bruto-ristlõike pindala;

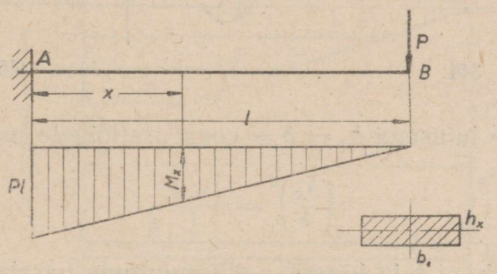
h_1'' — pinna F_1'' raskuskeskme kaugus z-teljest (joon. 342).

Pärast neetidele mõjuva jõu leidmist tuleb needid arvutada pindsurvele ja lõikele. Seejuures sagedamini valitakse ette needi läbimõõt ja leitakse neetide arv.

Neetide jaotamine pikkusele AB (joon. 340) toimub paindemomentide epüüri abil. Sel juhul on tarvis lähtuda tingimusest, et igale needile mõjub konstantne lõikejõud $AT = \text{const}$. Siis vastavalt võrrandile (189) peab olema $AM = \text{const}$. Siit järeldame, et selles tala osas, mille piirides asub neet, peab esinema konstantne paindemomendi juurdekasv. Joonisel 340 on antud nelja needi jaotus tala kahe lõike vahel.

67. Võrdvastupidav tala.

Tala lamepainde puhul, kui tala on konstantse ristlõikega, on normaalpinged äärmistes kiududes paindemomendi ebaühtlase jaotumise tõttu tala pikkuses alati erinevad. Loome sellise tala, millel maksimaalsed pinged kõikides ristlõigetes oleksid ühesugused.



Joon. 343.

Näitena vaatleme ristkülikukujulise lõikega konsooltala, mis on koormatud vabas otsas jõuga P (joon. 343). Sissemüüritud otsast kaugusel x olevas lõikes tähistame: W_{zx} — vastupidavusmoment ja M_x — paindemoment. Maksimaalse normaalpinge määrame selles lõikes valemiga

$$\sigma = \frac{M_x}{W_{zx}}.$$

Asetades siia $M_x = P(l - x)$ ja $W_{zx} = \frac{b_x h_x^2}{6}$, kus b_x ja h_x on jooksva ristlõike mõõted, saame:

$$\sigma = 6P \frac{l - x}{b_x h_x^2}.$$

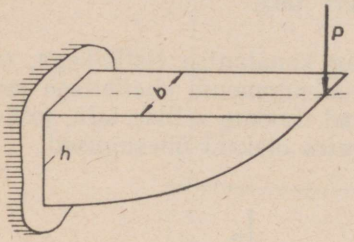
Ülesande tingimuse kohaselt peab kõikides lõigetes olema $\sigma = \text{const}$.

Siis saame viimasest võrrandist:

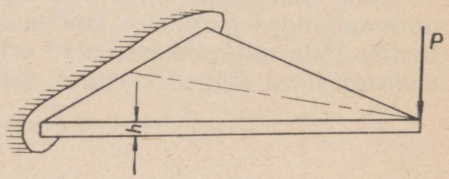
$$\frac{l-x}{b_x h_x^2} = \text{const.}$$

Kui talal on sissemüürimise kohal lõike mõõdeteks b ja h, siis eespool kirjutatud võrrandi abil saame kirjutada järgmise olenevuse:

$$\frac{l-x}{b_x h_x^2} = \frac{l}{bh^2} = \text{const.}$$



Joon. 344.



Joon. 345.

Konstantse laiusega $b_x = b = \text{const}$ ristlõigete puhul saame:

$$\left(\frac{h_x}{h}\right)^2 = \frac{l-x}{l}.$$

Siit järgneb, et tala kõrgus peab muutuma parabooli järgi. Joonisel 344 on toodud sellise tala kuju.

Konstantse kõrgusega $h_x = \text{const}$ lõigete puhul saame:

$$\frac{b_x}{b} = \frac{l-x}{l}.$$

Sel juhul on talal projektsioonis kolmnurga kuju (joon. 345).

68. Lehtvedru konstrueerimine ja arvutamine.

Joonisel 345 kujutatud kujuga võrdvastupidaval kandjal on suur kasutusala lokomotiivide, vagunite, autode jms. juures, sest temast moodustub lehtvedru.

Selleks, et sellisest kandjast saada lehtvedru, on teda tarvis lõigata vastavaks arvuks ribadeks, millest on kerge koostada vedru. Kogu tema „moodustamise protsess" on toodud joonisel 346 (*1—4* on vedru lehed). Ei ole raske tõestada, et saadud liitkandja töötab samuti nagu kolmnurkse kujuga tala, kui mitte arvestada

lehtedevahelist hõõrdumist. Vedru staatilise tugevuse võrrandi võime kirjutada järgmisel kujul:

$$\sigma = \frac{6Pl}{bh^2} \leqslant R_t, \tag{206}$$

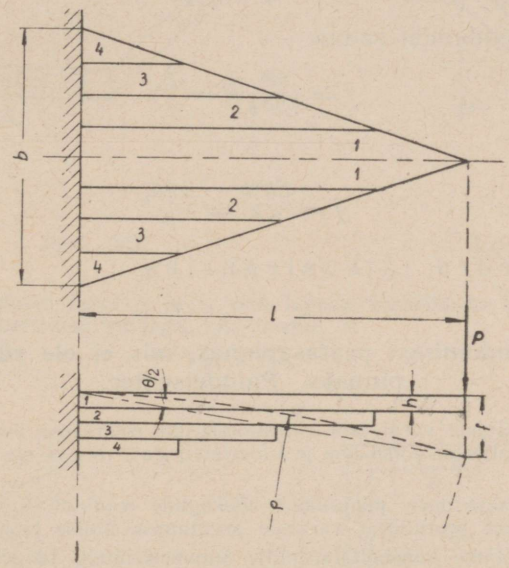
kus σ on vedrulehtede maksimaalne pinge;

R_t — lubatav tõmbepinge.

Kuna vedrud töötavad enamikul juhtudel võnkekoormusega, siis sel juhul [vt. v. (82)] viiakse arvutus läbi võrrandi

$$\sigma_e = \frac{\sigma_{max}}{\varphi_\sigma}$$

abil.



Joon. 346.

Väljendades tsükli maksimaalse pinge sama tsükli maksimaalse koormuse P_{max} kaudu, saame

$$\sigma_e = \frac{6P_{max}l}{\varphi_\sigma bh^2}. \tag{207}$$

Leiame vedru maksimaalse läbipainde f. Vastavalt valemile (160) saab lehtede maksimaalset pinget väljendada elastsusmooduli E, lehe paksuse h ja kõverusraadiuse ϱ abil. Seega

$$\sigma = E\frac{\frac{h}{2}}{\varrho}.$$

Vastavalt valemile (206) saame, et

$$E\frac{\frac{h}{2}}{\varrho}=\frac{6Pl}{bh^2},$$

kust

$$\varrho=\frac{Eh^3b}{12Pl}.$$

Leitud võrrandist järgneb, et vedru paindub koorma P all ringjoonekujuliselt, mille raadius on ϱ. Järelikult võime geomeetrilistel kaalutlustel kirjutada:

$$f\approx\frac{\Theta l}{2}=\frac{l^2}{2\varrho}.$$

Pärast asendamist saame

$$f=\frac{6l^3}{Eh^3b}P=\frac{P}{j}, \tag{208}$$

kus suurust

$$j=\frac{Eh^3b}{6l^3}=\frac{2EJ_z}{l^3} \tag{209}$$

nimetame vedru jäikusteguriks.

69. Tala paindumisest peatasapinnas, mis ei ole sümmeetriatasapinnaks. Paindetsenter.

Selgitame näidete varal tala lamepainde ühe iseärasuse peatasapinnas (see tasapind on paralleelne lõike ühe pea-inertsteljega), mis ei ole sümmeetriatasapinnaks.

Seda iseärasust uuris põhjalikult nõukogude teadlane V. Vlassov. Ta lõi õhukeseseinalistest profiilidest varraste arvutamise üldise teooria.

Näide 1. Võtame konsooltala, mille sümmeetriatelg langeb ühte z-teljega (joon. 347). Leiame selle tala puhul põikjõu P rakenduspunkti C, kus ei toimu väänamist.

Kui horisontaalse osa läbipaindumist tähistada f_1, ja talla läbipaindumist f_2, siis väände puudumisel peab maksma võrdus

$$f_1=f_2. \tag{a}$$

Analoogia põhjal valemiga (208) võime need läbipaindumised väljendada lõikejõudude kaudu, mis mõjuvad lõike üksikutes osades *1* ja *2*. Saame:

$$f_1=\frac{Q_1}{j_1},\quad f_2=\frac{Q_2}{j_2}, \tag{b}$$

kus j_1 ja j_2 on talade *1* ja *2* jäikustegurid, kui neid talasid vaadelda eraldi.

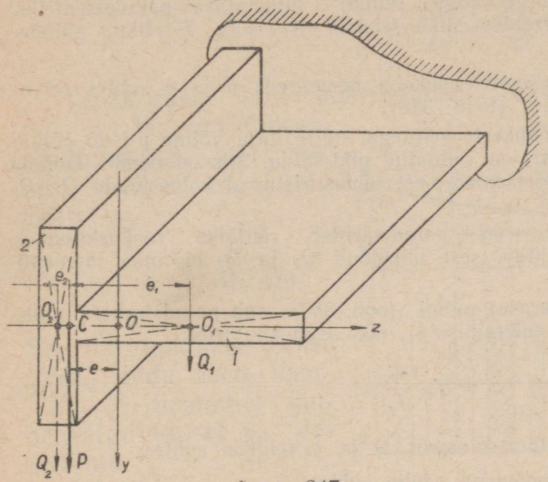
Tasakaalu seisukohalt peab olema:

$$\left.\begin{aligned}Q_1+Q_2&=P,\\ Q_1e_1&=Q_2e_2,\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

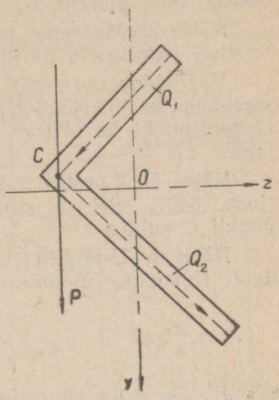
kus e_1 ja e_2 on horisontaalse ja vertikaalse osa raskuskeskmete kaugused punktist C.

Kasutades seoseid (a) ja (b), saame viimase võrrandi kirjutada järgmisel kujul:

$$j_1 e_1 = j_2 e_2.$$



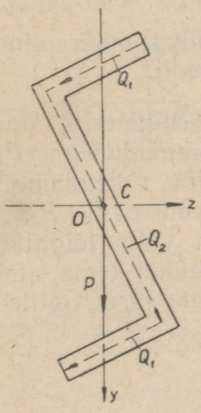
Joon. 347.



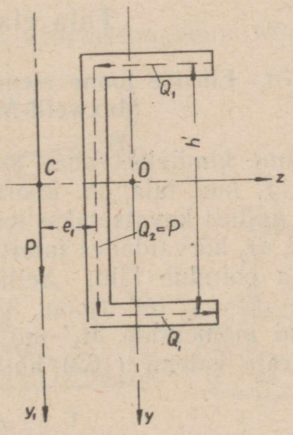
Joon. 348.

Kuna vaadeldaval juhul j_1 ja j_2 võib lugeda võrdelisteks horisontaalse ja vertikaalse osa inertsmomentidega, siis leiame, et

$$J_1 e_1 = J_2 e_2.$$



Joon. 349.



Joon. 350.

Viimasest olenevusest järeldame, et punkt C asub kahe paralleelse jõu raskuskeskmes, kusjuures need jõud on oma suuruselt võrdsed vastavalt J_1 ja J_2-ga ning on rakendatud punktidesse O_1 ja O_2. Ei ole raske kindlaks teha, et see jõudude raskuskese ei lange ühte lõike raskuskeskmega O.

Niisiis, tala ei väändu, kui põikjõud juhtida läbi punkti C. Jõud P, mis läbib raskuskeset O, koormab ristlõiget väändemomendiga

$$M_v = Pe,$$

kus e on punktide O ja C vaheline kaugus. Punkti C nimetatakse paindetsentriks. Juhul, kui J_1 on J_2-ga võrreldes väike, leiame, et $e_2 = 0$. Järelikult paindetsenter asub punktis O_2.

Näide 2. Määrame paindetsentri asukoha peatelgede y ja z suhtes orienteeritud isekülgsele nurkterasele (joon. 348).

Vaadeldav nurkteras on õhukeste seintega, mille tõttu võime p-i 20 põhjal järeldada, et lõikejõud Q_1 ja Q_2 on suunatud piki taldu. Siis on nende jõudude ristumispunkt ka otsitav paindetsenter, sest temas ristuvad kolm jõudu Q_1, Q_2 ja P.

Näide 3. Z-profiili juures on paindetsenter ristlõike raskuskeskmes (joon. 349). See on silmanähtav, sest lõikejõud Q_1 ja Q_2 ei anna momenti punkti C suhtes.

Näide 4. U-profiili (karpterase) puhul (joon. 350) asub paindetsenter punktis C (tulemuse anname ilma tuletamiseta), mis asub kaugusel

$$e_1 = h' \frac{J_{zy_1}}{J_z}, \tag{210}$$

kus J_{zy_1} on talla tsentrifugaalinertsmoment z- ja y_1-telgede suhtes;

J_z — kogu ristlõike inertsmoment z-telje suhtes.

VIII peatükk.

Tala elastne joon.

70. Elastse joone elementide kindlaksmääramine Maxwelli-Mohri meetodil.

Määrame kindlaks vabalt kahel toel asuva tala läbipainde y_C (joon. 351), kui tala on koormatud põikjõududega P_1, P_2, ... Punkti C, milles kavatsetakse leida läbipaine, rakendame lisajõu P' (joon. 352, a), kõrvaldades talalt enne koormused P_1, P_2, ... Jõu P' mõjul tala paindub läbi. Sellisest talast välja lõigatud element pikkusega $\Delta x = \varrho' \Delta\Theta'$ (joon. 352, b) paindub tema otslõigetesse rakendatud momentide M_x' mõjul ringjoone järgi, mille kõveruse saab määrata valemi (162) abil:

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{\Delta\Theta'}{\Delta x} = \frac{M_x'}{EJ},$$

kus $\Delta\Theta'$ on otslõigete vaheline nurk;

E — I järgu elastsusmoodul;

$J = J_z$ — ristlõike inertsmoment neutraaltelje suhtes.

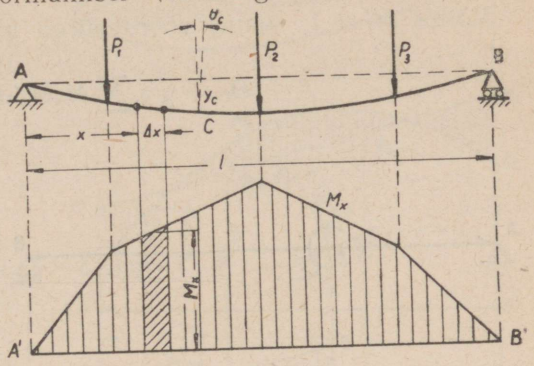
Kui nüüd tala uuesti koormata jõududega P_1, P_2, ..., koor-

must P' kõrvaldamata, siis läbipaine punktis C suureneb y_C võrra ja iga elemendi otslõigete vaheline nurk $\Delta\Theta'$ suureneb $\Delta\Theta$ võrra paindemomendi M_x' suurenemise tõttu väärtuseni $M_x' + M_x$. Elemendi kõveruse juurdekasv on

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta x} = \frac{M_x}{EJ}.$$

Teistkordsel tala koormamisel jõududega P_1, P_2, ... teeb moment M_x' nurkümberpaigutumisel $\Delta\Theta$ töö, mille suurus kogu tala kohta on

$$A = \sum M_x' \Delta\Theta.$$



Joon. 351.

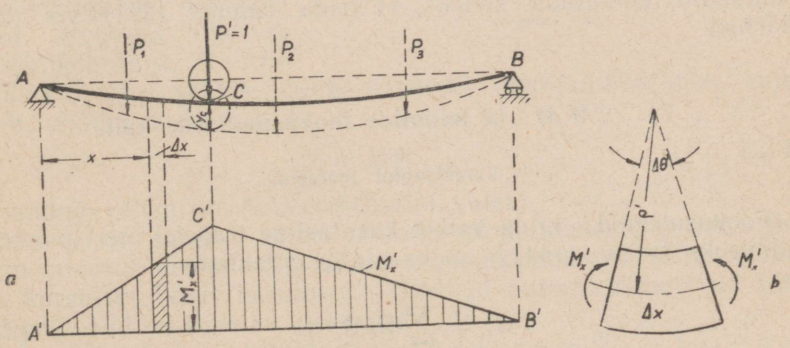
See töö saadakse välistööst, mida teeb koormus P' lineaarsel ümberpaigutumisel y_C. Järelikult

$$A = P'y_C$$

või kasutades kahte eelnevat avaldist, saame:

$$P'y_C = \frac{1}{EJ} \sum M_x M_x' \Delta x.$$

Arvestades, et P' on määramata väärtusega, võime võtta $P' = 1$.



Joon. 352.

Sel juhul saame läbipainde leidmiseks valemi

$$y_C = \frac{1}{EJ} \sum M_x M_x' \Delta x, \qquad (211)$$

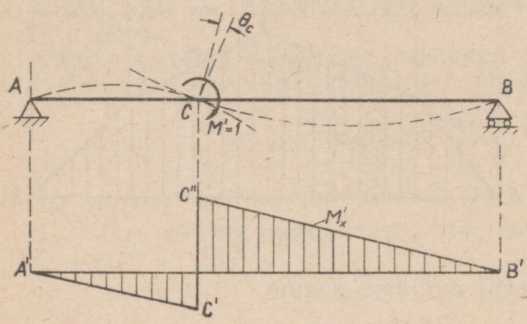
kus M_x ja M_x' on kahe paindemomentide epüüri ordinaadid (joon. 351 ja 352).

Kui lisakoormusena võtta moment M' (joon. 353) ja rakendada see punkti C pöördenurga Θ_C suunas, siis, korrates eelmisi arutlusi, on kerge kindlaks määrata järgmine seos:

$$M'\Theta = \frac{1}{EJ} \sum M_x M_x' \Delta x.$$

Võttes $M' = 1$, saame pöördenurga leidmiseks valemi

$$\Theta_C = \frac{1}{EJ} \sum M_x M_x' \Delta x, \tag{212}$$



Joon. 353.

kus M_x' on lisamomendist tingitud paindemomentide epüüri ordinaat.

Niisiis on tala läbipainde (või pöördenurga) leidmiseks punktis C mingisuguste põikjõudude P_1, P_2, ... mõjul tarvis otsitava ümberpaigutumise suunas rakendada lisajõud $P' = 1$ (või moment $M' = 1$) ja ehitada sellele jõule (või momendile) M_x epüür ja seejärel M_x' ja M_x epüüri ordinaadid korrutada selleks, et leida summa (211) või (212) väärtust.

71. $\Sigma M_x M_x' \Delta x$ leidmine fookuspunktide abil.

Vereštšagini teoreem.

Fookusmeetod [1], mida varem kasutasime trapetsi inertsmomendi leidmiseks [vt. v. (144)], on kasutatav avaldiste

$$S_x = \sum M_x M_x' \Delta x \tag{213}$$

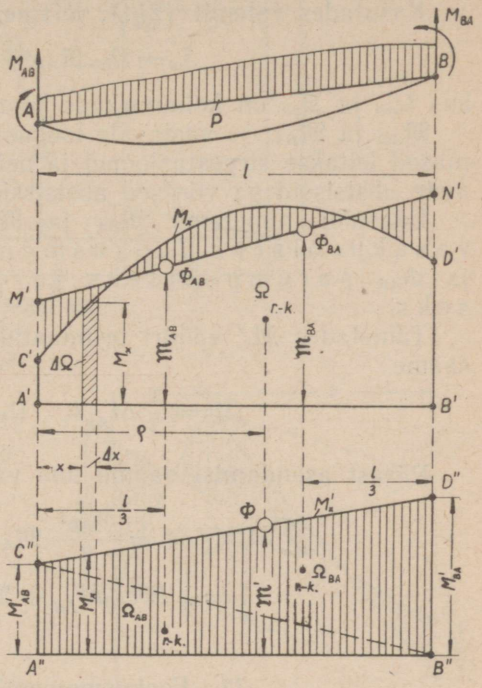
leidmiseks, mis on valemite (211) ja (212) koosseisus.

[1] Fookusmeetodi alused töötati autori (A. Popov) poolt välja 1942. a. See meetod on üksikasjaliselt avaldatud autori raamatus „Новый метод интегрирования с помощью ортогональных фокусов". Гостехиздат. 1947. a. Selles raamatus on toodud fookusmeetodi mitmekülgne kasutamine inseneriarvutustes.

Kujutagu vaadeldaval erijuhul tala osa AB (joon. 354) M_x epüüri kujund $A'C'D'B'$, M_x' epüüri aga trapets $A''C''D''B''$. Jaotame M_x epüüri kitsasteks ribadeks laiusega Δx. Nende ribade pindala on $\Delta\Omega = M_x \Delta x$. Saadud pinnaelemente kujutame vektoritena, mis on viidud vertikaalipidi alla ja kantud oma algustega vastavatesse punktidesse sirgel $C''D''$. Kui need vektorid teha joonise tasapinnaga risti asuvateks, jättes nende alguspunktid kohale, siis summat $\Sigma M_x M_x' \Delta x$, mis on esitatud kujus

$$\sum \Delta\Omega\, M_x' = S_x,$$

võib vaadelda mingile pikkusele $C''D''$ jaotatud fiktiivse koormuse staatilise momendina x-telje suhtes. Selle koormuse raskuskese asub sirgel $C''D''$ asuvas punktis. Selle punkti abstsiss on ϱ, mis langeb ühte kujundi $A'C'D'B'$ raskuskeskme abstsissiga ja tema ordinaadiks on $\mathfrak{M}'$.



Joon. 354.

Staatilise momendi S_x saab Varignoni teoreemi põhjal arvutada fiktiivse resultantkoormuse Ω momendina x-telje suhtes. Seda fiktiivset resultantkoormust kujutab M_x epüüri pindala, s. t.

$$S_x = \Omega\mathfrak{M}'. \qquad (214)$$

Saadud valem on A. Vereštšagini valem.

Siin ta on saadud autori fookusmeetodi alusel. Vereštšagini valem on vene keeles välja antud tugevusõpetuse ja ehitusmehaanika kursustes laialt kasutusel. Üksikud autorid nimetavad teda ebaõigelt Mülleri-Breslau valemiks.

Edaspidi nimetame punkti Φ fookuseks ja $\mathfrak{M}'$ — fookusmomendiks.

Võrrand (214) ei muutu, kui kujund $A'C'D'B'$ asendada trapetsiga $A'M'N'B'$, mille pindala ja raskuskeskme abstsiss on vastavalt võrdsed Ω ja ϱ. Sel juhul trapetsit moodustav sirge $M'N'$ võtab kõvera M_x suhtes täiesti kindla asendi. Seda sirget nimetatakse sirgestusjooneks.

Nüüd, kasutades sirgestusjoont $M'N'$, saame anda teise valemi summa (213) arvutamiseks. Selleks jaotame trapetsi $A''C''D''B''$ kaheks kolmnurgaks $A''C''B''$ ja $C''D''B''$. Algul korrutame esimese kolmnurga ordinaadid trapetsi $A'M'N'B'$ ordinaatidega, seejärel teise kolmnurga ordinaadid sama trapetsi ordinaatidega.

Kasutades valemit (214), leiame, et

$$S_x = \Omega_{ab}\mathfrak{M}_{AB} + \Omega_{ba}\mathfrak{M}_{BA},$$

kus Ω_{ab} ja Ω_{ba} on kolmnurkade pindalad;

$\mathfrak{M}_{AB}$ ja $\mathfrak{M}_{BA}$ — vastavate fookuste Φ_{AB} ja Φ_{BA} ordinaadid; viimased leitakse sirgestusjoonel ja neil on kolmnurkade raskuskeskmete abstsissidega võrdsed abstsissid.

Edaspidi nimetame $\mathfrak{M}_{BA}$ ja $\mathfrak{M}_{AB}$ parempoolseks ja vasakpoolseks fookusmomendiks ning punkte Φ_{BA} ja Φ_{AB} parempoolseks ja vasakpoolseks fookuseks.

Tähistades M_x' epüüri ordinaatide piirväärtused M'_{AB} ja M'_{BA}, saame

$$\Omega_{ab} = \frac{1}{2} M'_{AB} l, \quad \Omega_{ba} = \frac{1}{2} M'_{BA} l.$$

Pärast asendamist saame uue valemi epüüride korrutamiseks:

$$\sum M_x M_x' \Delta x = \frac{M'_{AB} l}{2} \mathfrak{M}_{AB} + \frac{M'_{BA} l}{2} \mathfrak{M}_{BA} =$$

$$= \frac{1}{2} (\mathfrak{M}_{AB} M'_{AB} + \mathfrak{M}_{BA} M'_{AB}) l. \qquad (215)$$

72. Fookusmomentide leidmine.

Väljendame vasakpoolse ja parempoolse fookusmomendi M_x epüüri ordinaatide piirväärtuste kaudu.

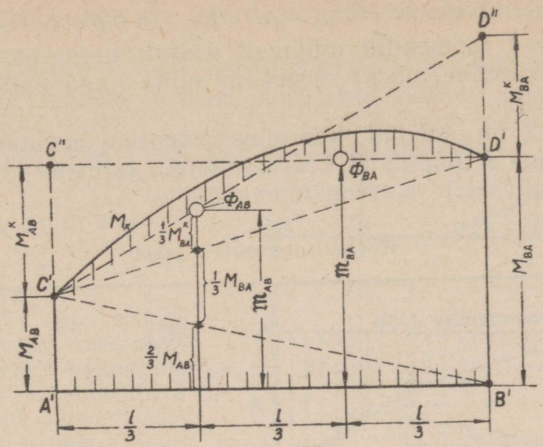
Selleks joonestame läbi punkti C' kiired $C'B'$, $C'D'$ ja $C'D''$, (joon. 355) ja väljendame $\mathfrak{M}_{AB}$ suuruse vertikaalsete joonlõikude $A'C' = M_{AB}$, $B'D' = M_{BA}$ ja $D'D'' = M^K_{BA}$ kaudu. Siin M_{BA} ja M_{AB} on M_x epüüri piirordinaadid ja joonlõik $D'D''$ oleneb ainult kõvera $C'D'$ kujust, mis omakorda oleneb tala pikkuse l ulatusel mõjuva koormuse iseloomust.

Sarnastest kolmnurkadest (joon. 355) on kerge leida vasakpoolse fookusmomendi väärtus:

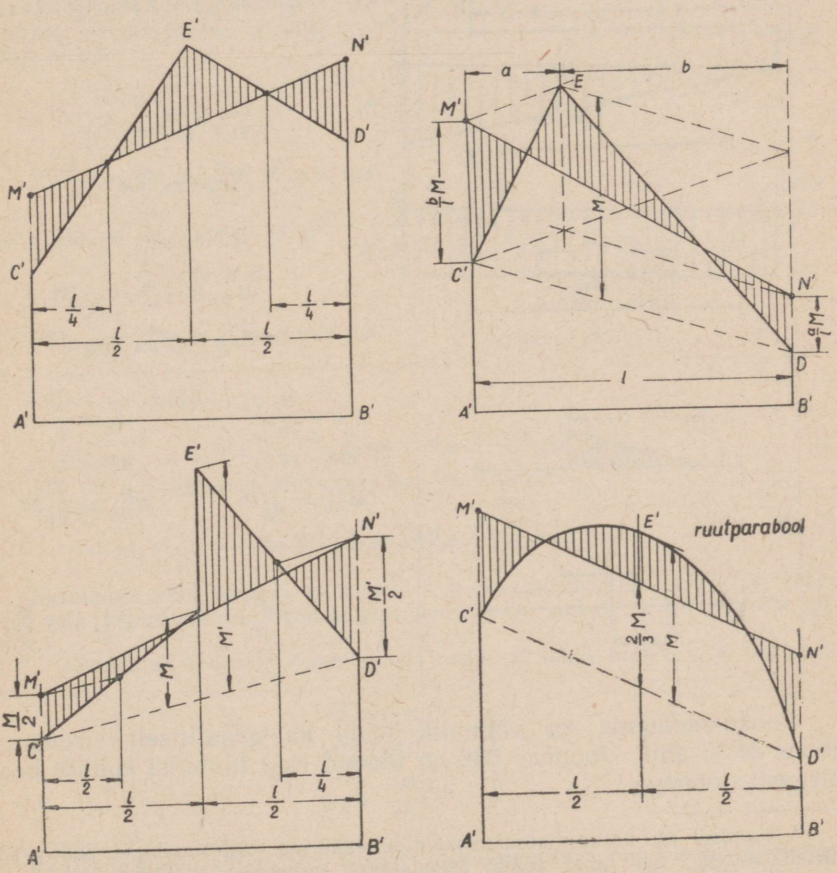
$$\mathfrak{M}_{BA} = \frac{1}{3} (2M_{BA} + M_{AB} + M^K_{AB}). \qquad (216')$$

Analoogiliselt saame valemi ka parempoolse fookusmomendi jaoks:

$$\mathfrak{M}_{AB} = \frac{1}{3} (2M_{AB} + M_{BA} + M^K_{BA}). \qquad (216)$$



Joon. 355.



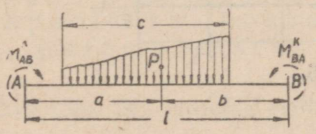
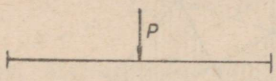
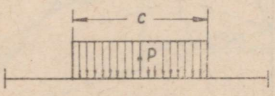
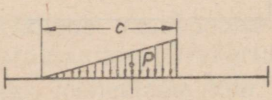
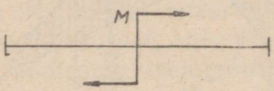
Joon. 356.

Edaspidi nimetame M^K_{AB} ja M^K_{BA} koormusmomentideks. Need momendid mõjuvad samuti nagu paindemomendid ja seepärast nende märgi reegel on sama nagu paindemomentide märgi reegel.

Tabelis 2 on toodud koormusmomentide arvutamise valemid tala piirkonna l tüüpilistel koormamistel; esimene koormamistüüp vastab positiivsetele koormusmomentidele.

Tabel 2.

Koormusmomentide tabel.

Järj. nr.	Koormamise tüüp	M^K_{AB}	M^K_{BA}
1		$Pa\left(1-\frac{a^2}{l^2}-\xi_1\frac{c^2}{l^2}\right)$	$Pb\left(1-\frac{b^2}{l^2}-\xi_2\frac{c^2}{l^2}\right)$
2		$\xi_1=\xi_2=0$, kui $a=b$, $M^K_{AB}=M^K_{BA}=\frac{3}{8}Pl$	
3		$\xi_1=\xi_2=\frac{1}{4}$, kui $c=l$, $M^K_{AB}=M^K_{BA}=\frac{1}{4}Pl$	
4		$\xi_1=\frac{1}{6}$, kui $c=l$, $M^K_{AB}=\frac{8}{30}Pl$	$\xi_2=\frac{1}{6}$, kui $c=l$, $M^K_{BA}=\frac{7}{30}Pl$
5		$M\left(1-3\frac{a^2}{l^2}\right)$	$-M\left(1-3\frac{b^2}{l^2}\right)$

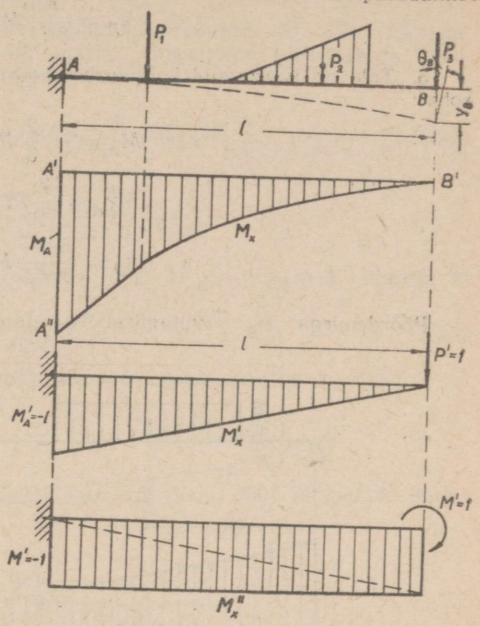
Fookusmomente on võimalik leida ka graafiliselt sirgestusjoone $M'N'$ abil. Joonisel 356 on toodud rida tüüpilisi epüüre koos sirgestusjoonega [1].

[1] Joonisel on antud paindemomentide epüüride sirgestamiseks puht-graafilised võtted. Sel juhul epüür asendatakse trapetsiga $A'M'N'B'$, millel on kujundiga $A'C'E'D'B$ sama pindala ja raskuskeskme abstsiss.

73. Läbipainete ja pöördenurkade leidmise näiteid.

Näide 1. Leiame tala AB (joon. 357) lõikes B läbipaindumise y_B ja pöördenurga θ_B, kui tala on ühest otsast sisse müüritud ja koormatud rea põikjõududega.

Kasutades p-s 70 käsitletud meetodit, rakendame otsitava läbipaindumise suunas lisajõu $P' = 1$, pöördenurga suunas aga momendi $M' = 1$. Ehitame nende lisakoormuste kohta kaks paindemomentide epüüri. Need epüürid on antud joonisel 357.



Joon. 357.

Valemi (211) alusel määratakse läbipaindumine kahe paindemomendi epüüri ordinaatide korrutamise teel. Esimene epüür M_x on ehitatud antud jõududele P_1, P_2 ja P_3, teine epüür M_x' aga lisajõule P'. Kasutades epüüride korrutamiseks valemit (215), leiame:

$$y_B = \frac{1}{EJ} \sum M_x M_x' \Delta x =$$

$$= \frac{1}{2EJ} \mathfrak{M}_{AB} M_A' l,$$

kus vastavalt võrrandile (216)

$$\mathfrak{M}_{AB} = \frac{1}{3} (2M_{AB} +$$

$$+ M_{BA} + M_{BA}^K).*$$

Võttes vaadeldaval juhul

$$M_A' = -l; \quad M_{AB} = M_A \text{ ja } M_{BA} = 0,$$

kus M_A on paindemoment kinnituskohas A, saame:

$$y_B = -\frac{l^2}{6EJ} (2M_A + M_{BA}^K). \tag{217}$$

Kasutades seda valemit ja tabelit 2 koormusmomentide kohta, on kerge leida tala läbipaindumist mitmesuguse koormamise puhul. Vaatleme rida erijuhte.

1. Koondatud koormus P mõjub tala otsale B, muus osas tala ei ole koormatud:

$$\left.\begin{aligned} M_A &= -Pl; \\ M_{BA}^K &= 0; \\ y_B &= \frac{l^3}{3EJ} P. \end{aligned}\right\} \tag{218}$$

---

* Graafikuga antud M_x epüüri fookusmomenti võib leida sirgestusjoone $M'N'$ (joon. 356) abil.

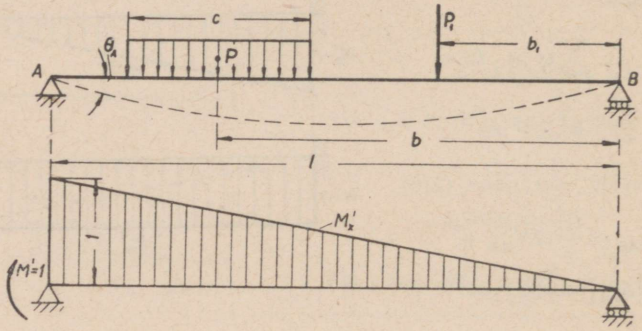
2. Kogu tala on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega P:

$$\left.\begin{aligned} M_A &= -\frac{Pl}{2}; \\ M_{BA}^K &= \frac{Pl}{4}; \\ y_B &= \frac{l^3}{8EJ}P. \end{aligned}\right\} \tag{219}$$

3. Tala on koormatud kolmnurkse koormusega P, mille tipp asub punkti B kohal:

$$\left.\begin{aligned} M_A &= -\frac{2}{3}Pl; \\ M_{BA}^K &= \frac{7}{30}Pl; \\ y_B &= \frac{11l^3}{60EJ}P. \end{aligned}\right\} \tag{220}$$

Pöördenurga Θ_B arvutamisel korrutatakse M_x epüür M_x'' epüüriga, mis



Joon. 358.

on kujutatud ristkülikuna. Sel juhul jaotame ristküliku kaheks kolmnurgaks. Kasutades valemeid (212) ja (215), leiame:

$$\Theta_B = \frac{1}{EJ}\sum M_x M_x'' \Delta x = \frac{1}{2EJ}(\mathfrak{M}_{AB}M'_{AB} + \mathfrak{M}_{BA}M'_{BA})l,$$

kus vastavalt võrranditele (216) ja (216')

$$\mathfrak{M}_{AB} = \frac{1}{3}(2M_{AB} + M_{BA} + M_{BA}^K)$$

ja

$$\mathfrak{M}_{BA} = \frac{1}{3}(2M_{BA} + M_{AB} + M_{AB}^K).$$

Võttes

$$M'_{AB} = M'_{BA} = M' = -1,$$
$$M_{AB} = M_A \quad \text{ja} \quad M_{BA} = 0,$$

saame:

$$\Theta_B = \frac{1}{6EJ}\,(3M_A + M_{AB}^K + M_{BA}^K). \tag{221}$$

Saadud valemi abil on kerge antud koormuse puhul pöördenurka arvutada.

Näide 2. Leiame kahel toel asuva tala AB lõike A pöördenurga, kui tala on põikjõududega koormatud (joon. 358).

Rakendame talale otsitava nurga suunas lisamomendi $M' = 1$. Ehitame vastavalt sellele paindemomentide M_x' epüüri. Kasutame pöördenurga arvutamiseks valemeid (212), (215) ja (216).

$$\Theta_A = \frac{1}{EJ}\sum M_x M_x' \Delta x = \frac{1}{2EJ}\,\mathfrak{M}_{AB} M'_{AB}\, l, \tag{222}$$

kus

$$\mathfrak{M}_{AB} = \frac{1}{3}\,(2M_{AB} + M_{BA} + M_{BA}^K).$$

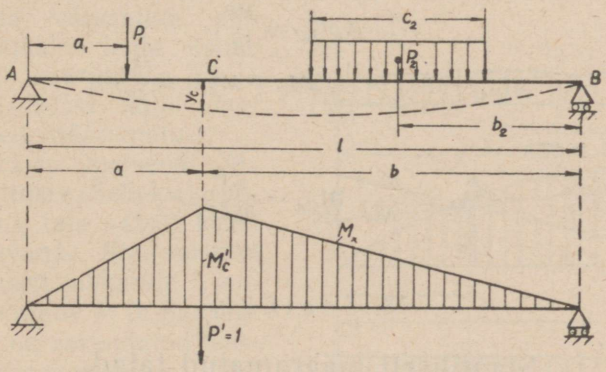
Võttes vaadeldaval juhul $M'_{AB} = M' = 1$ ja $M_{AB} = M_{BA} = 0$, leiame, et

$$\Theta_A = \frac{l}{6EJ}\,M_{BA}^K. \tag{222'}$$

Siin saame tala antud koormamise juhul vastavalt tabelile 2:

$$M_{BA}^K = Pb\left(1 - \frac{b^2}{l^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{c^2}{l^2}\right) + P_1 b_1\left(1 - \frac{b_1^2}{l^2}\right).$$

Näide 3. Määrame kahel toel asuva tala AB (joon. 359) läbipainde punktis C.



Joon. 359.

Läbipainde leidmiseks rakendame punkti C lisajõu $P' = 1$. Ehitame selle jõu tõttu tekkivate paindemomentide epüüri. Kasutades vastavate piirkondade AC ja CB puhul valemit (215) leiame:

$$y_C = \frac{1}{2EJ}\,\mathfrak{M}_{CA} M'_C a + \frac{1}{2EJ}\,\mathfrak{M}_{CB} M'_C b = \frac{M'_C}{2EJ}\,(\mathfrak{M}_{CA} a + \mathfrak{M}_{CB} b),$$

kus

$$\mathfrak{M}_{CA} = \frac{1}{3}\,(2M_{CA} + M_{AC} + M_{AC}^K) \quad \text{ja} \quad \mathfrak{M}_{CB} = \frac{1}{3}\,(2M_{CB} + M_{BC} + M_{BC}^K).$$

Vaadeldaval juhul võime võtta (vt. VII peatükk, näide 2):

$$M'_C = \frac{P'ab}{l} = \frac{ab}{l};$$
$$M_{AC} = M_{BC} = 0;$$

$M_{CA} = M_{CB} = M_C$ on antud koormustest põhjustatud paindemoment lõikes C.

$$M^K_{AC} = P_1 a_1 \left(1 - \frac{a_1^2}{a^2}\right);$$
$$M^K_{BC} = P_2 b_2 \left(1 - \frac{b_2^2}{b^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{c_2^2}{b^2}\right).$$

Erijuhul, kui talale mõjub ainult üks koondatud koormus P punktis C, siis leiame:

$$\left.\begin{aligned} M_C &= \frac{Pab}{l}; \\ M^K_{AC} &= M^K_{BC} = 0; \\ y_C &= \frac{(ab)^2}{3EJl} P. \end{aligned}\right\} \qquad (223)$$

Määrame läbipaindumise tala AB keskkohal (vt. joon. 325), mis on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega. Selleks leiame esmalt selle tala kohta:

$$M'_C = \frac{1}{4} l;$$
$$M_C = \frac{Pl}{8};$$
$$M^K_{AC} = M^K_{BC} = \frac{Pl}{16};$$
$$\mathfrak{m}_{CA} = \mathfrak{m}_{CB} = \frac{1}{3}(2M_C + M^K_{AC}) = \frac{5}{48} Pl.$$

Lõplikult saame:

$$y_C = \frac{M'_C l}{2EJ} \mathfrak{m}_{CA} = \frac{5l^3}{384EJ} P. \qquad (224)$$

IX peatükk.

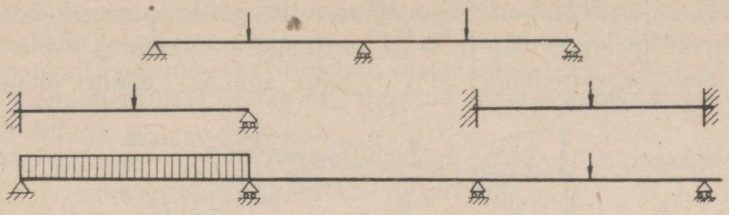
Staatiliselt määramatud talad.

74. Staatiliselt määramatute jätkuvate talade mõiste. Jäikkinnitusega talad.

Rohkem kui kahe toega talasid nimetatakse jätkuvateks taladeks. Tala ühe otsa jäikkinnitust loeme kaheks toeks. Niisiis on ühe toega ja teises otsas jäigalt kinnitatud talad, samuti ka mõlemast otsast jäigalt kinnitatud otstega talad jätkuvad talad. Joonisel 360 on antud mõned jätkuvad talad koos neile rakendatud koormustega.

Talasid kahel toel loetakse toereaktsioonide leidmise seisukohalt staatiliselt määratuteks. Kui tugede arv on suurem kui kaks, siis tala on staatiliselt määramatu. Kui on n tuge, siis liigsete tundmatute arv on $n-2$.

Vaatleme tala, mis ühte otsa pidi on sisse müüritud ja teise otsaga asub vabalt toel (joon. 361).



Joon. 360.

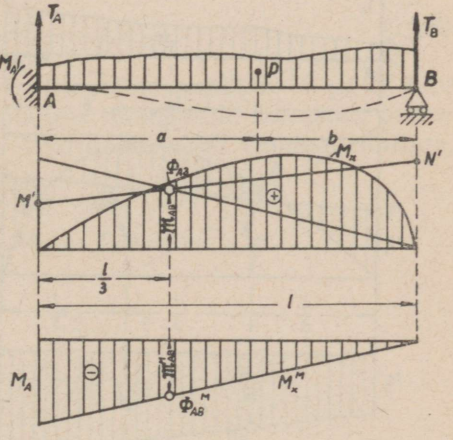
Sellise tala koormamisel põikjõududega kõverdub tala telg. Toes B tekib reaktsioon T_B ja jäikkinnituses A mõjub reaktsioon T_A ja moment M_A. Kahe toereaktsiooni ja ühe momendi leidmiseks annab staatika ainult kaks võrrandit:

$$\sum m_A = Pa - |M_A| - T_B l = 0; *$$

$$\sum m_B = Pb + |M_A| - T_A l = 0.$$

Nende võrrandite abil pole võimalik leida kolme tundmata suurust T_A, T_B ja M_A, mispärast tala ongi staatiliselt määramatu.

Määrame momendi M_A jäikkinnituses. Selleks kujutleme oma tala vabalt kahel toel asuvana. Koormusteks on ühtlaselt pikkusele l jaotatud koormus P ja moment M_A, mis on rakendatud toesse A välismomendina. Kui koormuse P tõttu lõikes A tekkivat pöördenurka tähistada Θ_A ja momendi M_A tõttu tekkivat pöördenurka Θ_A^M, siis lõike A jäikkinnituse korral peaks olema täidetud järgmine tingimus:



Joon. 361.

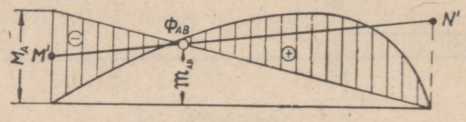
$$\Theta_A = \Theta_A^M. \qquad (a)$$

* | | tähistab absoluutväärtust.

Kujutagu koormuse P tõttu tekkivate paindemomentide epüüri kõver M_x ja momendi M_A tõttu tekkivate paindemomentide epüüri kolmnurk M_x^M. Siis vastavalt valemile (222) võime kirjutada:

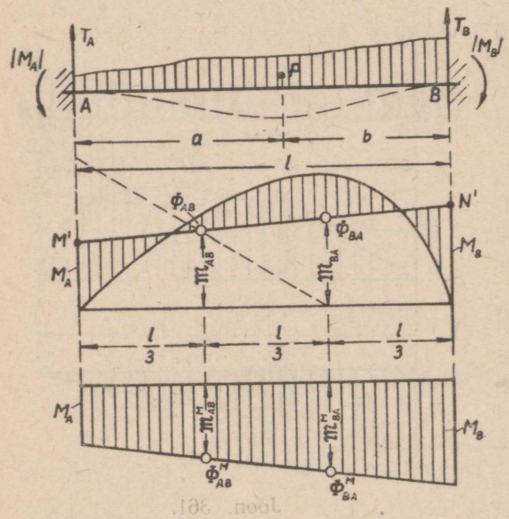
$$\Theta_A = \frac{l}{2EJ}\,\mathfrak{M}_{AB}; \qquad \Theta_A^M = \frac{l}{2EJ}\,\mathfrak{M}_{AB}^M, \tag{b}$$

kus $\mathfrak{M}_{AB}$ ja $\mathfrak{M}_{AB}^M$ on fookusmomendid, mille suuruse määravad vastavate fookuste Φ_{AB} ja Φ_{AB}^M ordinaadid, kusjuures esimene fookus asub sirgestusjoonel $M'N'$ *, teine aga M_x^M epüüri joonel.



Joon. 362.

Asetades viimased võrrandisse (a), leiame, et $\mathfrak{M}_{AB} = \mathfrak{M}_{AB}^M$. Järelikult paindemomentide summaarse epüüri ehitamisel liitmise teel on M_x^M epüüri joon tarvis tõmmata läbi punkti Φ_{AB}. Joonisel 362 on antud see epüür kahe viirutatud kujundina, mille ordinaadid on erinevate märkidega. Otsitav moment M_A on väljendatud joonisel näidatud vertikaalse joonlõiguna.



Joon. 363.

Toodud momendi määramise kord jäikkinnituses kõlbab juhul, kui M_x epüür on antud. Analüütiliselt võib M_A väljendada $\mathfrak{M}_{AB}$ kaudu järgmiselt:

$$|M_A| = \frac{3}{2}\,\mathfrak{M}_{AB}.$$

Kasutades valemit (216), kui $M_{AB} = M_{BA} = 0$, leiame, et

$$\mathfrak{M}_{AB} = \frac{1}{3}\,M_{BA}^K.$$

Pärast asendamist ja momendi märki arvestades saame

$$M_A = -\frac{M_{BA}^K}{2}. \tag{225}$$

* Seda sirget saab joonestada joonisel 356 näidatud viisil.

Nii võrdub moment jäikkinnituses A poolega koormusmomendist vastupidise märgiga.

Pärast momendi M_A määramist on võimalik staatika võrrandite abil leida toereaktsioonid T_A ja T_B.

Nüüd vaatleme mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala AB (joon. 363).

Sel puhul läbib toemomentide joon $M'N'$ kaks fookust, s. t. on sirgestusjooneks paindemomentide M_x epüüri suhtes tala kohta, mis asub vabalt kahel toel A ja B. See on selge, sest eelmise näite varal peavad koormusest P tingitud fookusmomendid vastavalt võrduma toemomentidest M_A ja M_B tingitud fookusmomentidega, s. t. $\mathfrak{M}_{AB} = \mathfrak{M}^M_{AB}$ ja $\mathfrak{M}_{BA} = \mathfrak{M}^M_{BA}$.

Ülesande analüütilisel lahendamisel tuleb need momendid väljendada koormusmomentide kaudu järgmiselt:

$$\mathfrak{M}_{AB} = \frac{1}{3} M^K_{BA}; \qquad \mathfrak{M}_{BA} = \frac{1}{3} M^K_{AB}. \tag{226}$$

Momendi M_A jäikkinnituses määrame kolmnurkadest, millised moodustab kaldkriipsjoon. Saame:

$$|M_A| = 2\mathfrak{M}_{AB} - \mathfrak{M}_{BA}.$$

Asendades siia eelmise avaldise ja arvestades märki, leiame:

$$M_A = \frac{1}{3}(M^K_{AB} - 2M^K_{BA}). \tag{227}$$

Analoogiliselt leiame ka momendi M_B jäikkinnituses B, s. t.

$$M_B = \frac{1}{3}(M^K_{BA} - 2M^K_{AB}). \tag{227'}$$

Toereaktsioonide määramiseks koostame punktide A ja B suhtes kõikide talale rakendatud jõudude momentide summad, arvestades selle juures toemomente. Võrrutades need summad nulliga, saame vastavalt:

$$Pa + M_A - M_B - T_B l = 0;$$
$$Pb - M_A + M_B - T_A l = 0.$$

Siit edasi

$$T_A = P\frac{b}{l} - \frac{M_A - M_B}{l};$$

$$T_B = P\frac{a}{l} - \frac{M_B - M_A}{l}.$$

75. Kolme toemomendi võrrand.

Kui tala asub paljudel tugedel, siis paindemomentide leidmiseks tugede kohal asuvates lõigetes kasutatakse kolme toemomendi võrrandit. Allpool toome selle võrrandi tuletuse.

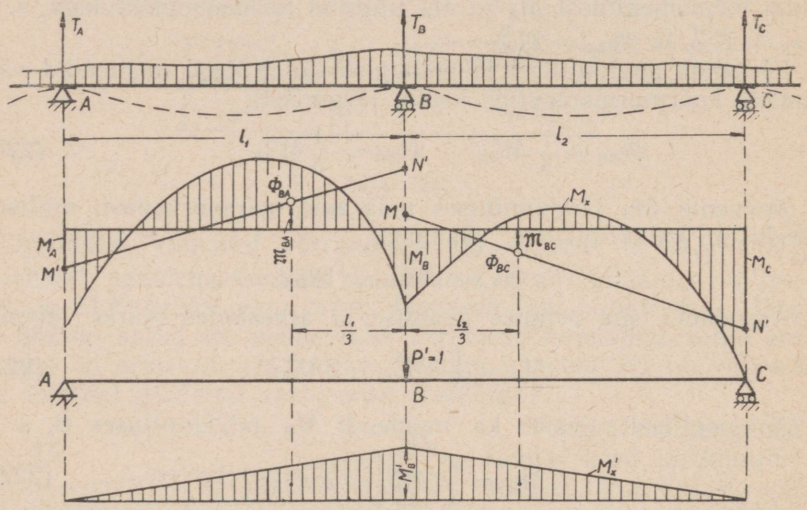
Vaatleme paljutoelise tala kahte naaberava AB ja BC (joon. 364).

Ristkoormuse mõjul paindub selline tala kõvera järgi, mis on näidatud kriipsjoonega. Pöörates tähelepanu toele B, võime märgata, et sellel kohal puudub talal vertikaalne läbipaine, s. t.

$$y_B = 0. \qquad (a)$$

Nüüd lõikame talast välja vaadeldavad avad, asendades naaberavade mõju momentidega M_A ja M_C. Kujutagu nende avade paindemomentide epüüri kõver M_x.

Kasutades Maxwelli-Mohri meetodit, koostame läbipainde y_B



Joon. 364.

kohta võrrandi, vaadeldes tala ABC asuvana vabalt kahel toel A ja C. Eemaldades kõik koormused, rakendame otsitava läbipainde suunas lisajõu $P' = 1$. Ehitame sellest jõust tingitud paindemomentide M'_x epüüri kolmnurga kujul.

Kasutades epüüride M_x ja M'_x korrutamiseks valemit (215), leiame, et

$$y_B = \frac{1}{2EJ_1}\mathfrak{M}_{BA}M'_B l_1 + \frac{1}{2EJ_2}\mathfrak{M}_{BC}M'_B l_2, \qquad (b)$$

kus $\mathfrak{M}_{AB}$ on fookusmoment piirkonnale AB;
$\mathfrak{M}_{BC}$ — fookusmoment piirkonnale BC;
EJ_1 ja EJ_2 — avade ristlõigete jäikused;
M'_B — M'_x epüüri suurim ordinaat.

Võrrutades avaldise (b) nulliga ja võttes tarvitusele tähistused $\alpha_1 = \frac{EJ}{EJ_1}$ ja $\alpha_2 = \frac{EJ}{EJ_2}$ (kus EJ on lõike vabalt valitud jäikus),

saame pärast taandamist järgmise võrrandi: [1]

$$\mathfrak{M}_{BA}\alpha_1 l_1 + \mathfrak{M}_{BC}\alpha_2 l_2 = 0.$$

Seda võrrandit on kerge ümber moodustada, kasutades valemeid (216) ja (216′), kui fookusmomendid väljendada järgmiselt:

$$\mathfrak{M}_{BA} = \frac{1}{3}(2M_B + M_A + M^K_{AB});$$

$$\mathfrak{M}_{BC} = \frac{1}{3}(2M_B + M_C + M^K_{CB}).$$

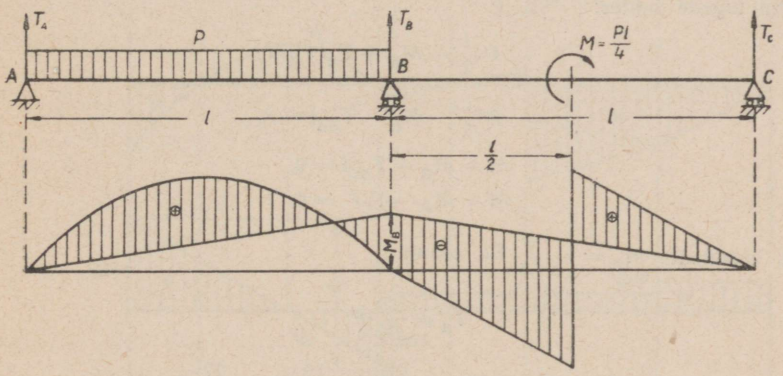
Pärast asendamist leiame:

$$(M_A + M^K_{AB})\alpha_1 l_1 + 2M_B(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) + (M_C + M^K_{CB})\alpha_2 l_2 = 0. \quad (228)$$

Saadud võrrand annab otsitava seose paindemomentide vahel lõigetes A, B ja C (toemomentide vahel).

Näitame näidetega, kuidas kasutada võrrandit (228).

Ülesanne 18. Määrame konstantse ristlõikega kolmel toel asuva tala toemomendi M_B, toereaktsioonid ja ehitame paindemomentide epüüri. Tala koormus on antud (joon. 365).



Joon. 365.

Antud juhul $M_A = 0$, $M_C = 0$ ja $\alpha_1 = \alpha_2$ puhul võrrand (228) võtab kuju:

$$M^K_{AB} l_1 + 2M_B(l_1 + l_2) + M^K_{CB} l_2 = 0,$$

kust saame

$$M_B = -\frac{M^K_{AB} l_1 + M^K_{CB} l_2}{2(l_1 + l_2)}.$$

Asendades viimasesse avaldisse

$$l_1 = l_2 = l, \quad M^K_{AB} = \frac{Pl}{4}$$

[1] See võrrand võib olla aluseks jätkuva tala graafilisel arvutusel.

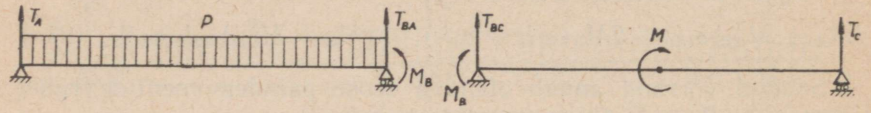
ja

$$M_{CB}^{K} = -\frac{Pl}{4}\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{Pl}{16}\,^{*},$$

saame:

$$M_B = -\frac{3}{64}Pl.$$

Joonisel 365 on antud käsitletud viisil ehitatud paindemomentide epüür. Selle juures joonestatakse alguses välja kahe staatiliselt määratud tala paindemomentide epüürid, kusjuures need talad on koormatud ainult välisjõududega ja seejärel ehitatakse ülemomendi M_B epüür.



Joon. 366.

Toereaktsioonide leidmiseks lõigatakse tala ABC kaheks osaks (joon. 366). Lõikekohta rakendatakse momendid M_B, mis vastavatele avadele on välismomentideks. Reaktsioonide leidmiseks koostatakse järgmised momentide võrrandid tugede suhtes:

$$-P\frac{l}{2} - M_B + T_A l = 0,$$

$$P\frac{l}{2} - M_B - T_{BA} l = 0,$$

$$M + M_B + T_{BC} l = 0,$$

$$M + M_B - T_C l = 0,$$

kust, asendades $M_B = -\frac{3}{64}Pl$, saame:

$$T_A = \frac{29}{64}P;$$

$$T_B = T_{BA} + T_{BC} = \left(\frac{35}{64} - \frac{13}{64}\right)P = \frac{22}{64}P;$$

$$T_C = \frac{13}{64}P.$$

Kontrolliks leiame kõikide jõudude projektsioonide summa y-teljele.

$$\sum Y = P - T_A - T_B - T_C,$$

$$\sum Y = P - \frac{29}{64}P - \frac{22}{64}P - \frac{13}{64}P = 0.$$

Ülesanne 19. Leiame konstantse ristlõikega mitmetoelise tala kohta (joon. 367) toemomendid, toereaktsioonid ja ehitame M_x ja Q_x epüürid. $Q = 5$ t, $P = 1$ t, $M = 2$ tm, $l = 2$ m, $a = 1$ m.

* Vt. tabel 2.

Võttes jäikkinnituse asemele ava pikkusega l_0, koostame kolme toemomendi võrrandi vastavate avade kohta:

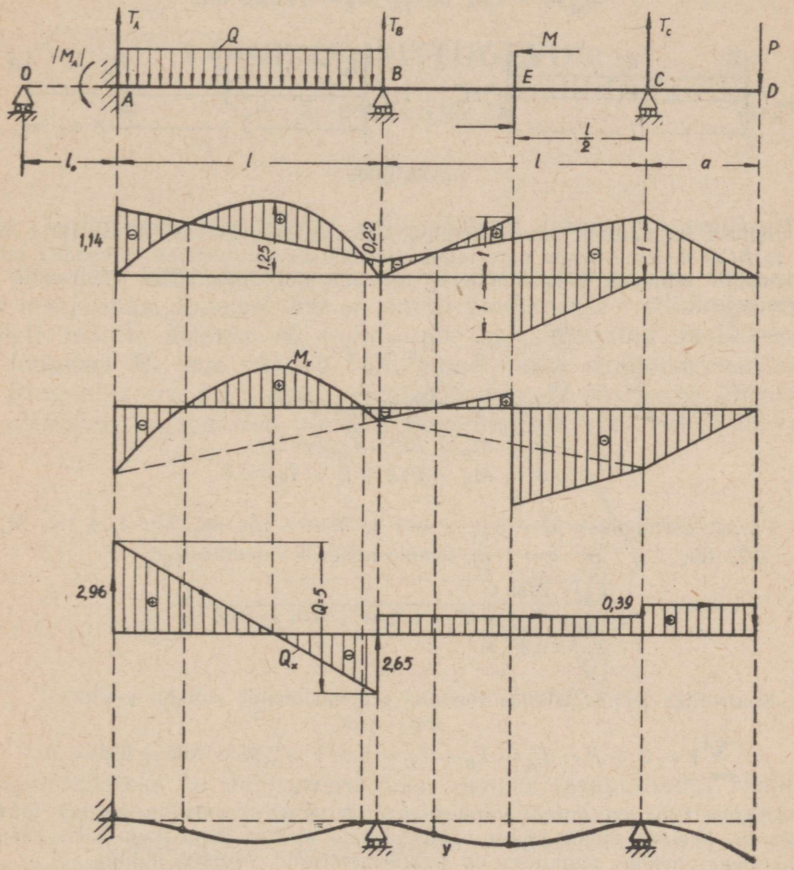
$$M_0 l_0 + 2M_A(l_0 + l) + (M_B + M_{BA}^K)l = 0;$$

$$(M_A + M_{AB}^K)l + 2M_B(l + l) + (M_C + M_{CB}^K)l = 0.$$

Võttes l_0 suuruse kuitahes väikese, näiteks $l_0 = 0$, saame pärast taandamist:

$$2M_A + M_B = -M_{BA}^K;$$

$$M_A + 4M_B + M_C = -M_{AB}^K - M_{CB}^K.$$



Joon. 367.

Koormusmomendid on tabeli 2 järgi järgmised:

$$M_{BA}^K = \frac{Ql}{4} = 2{,}5 \text{ tm};$$

$$M_{AB}^K = M_{BA}^K;$$

$$M_{CB}^K = M\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 0{,}5 \text{ tm}.$$

Paindemoment toes C on

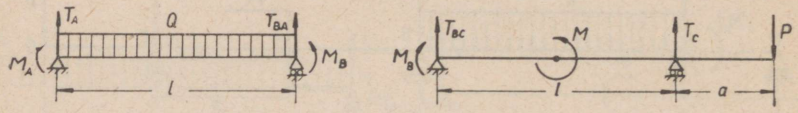
$$M_C = -Pa = -1 \text{ tm}.$$

Pärast asendamist saame:

$$2M_A + M_B = -2{,}5;$$
$$M_A + 4M_B = -2.$$

Lahendades võrrandid, saame:

$$M_A = -1{,}14 \text{ tm ja } M_B = -0{,}22 \text{ tm}.$$



Joon. 368.

Selleks, et määrata toereaktsioonid, lõikame vaadeldavast talast välja osad AB ja BCD. Leiame nende uute talade toereaktsioonid staatika võrrandite järgi, rakendades eelnevalt lõikekohtadesse toemomendid (joon. 368). Võrrandid on järgmised:

$$-\frac{Ql}{2} + M_A - M_B + T_A l = 0;$$
$$\frac{Ql}{2} + M_A - M_B - T_{BA} l = 0;$$
$$-M + M_B + Pa + T_{BC} l = 0;$$
$$-M + M_B + P(a + l) - T_C l = 0.$$

Pärast asendamist: $Q = 5$ t, $P = 1$ t, $M = 2$ tm, $M_A = -1{,}14$ tm, $M_B = -0{,}22$ tm, $l = 2$ m, $a = 1$ m, leiame nendest valemitest, et

$$T_A = 2{,}96 \text{ t};$$
$$T_B = T_{BA} + T_{BC} = 2{,}04 + 0{,}61 = 2{,}65 \text{ t};$$
$$T_C = 0{,}39 \text{ t}.$$

Kontrolliks leiame kõikide jõudude projektsioonide summa y-teljele:

$$\sum Y = Q + P - T_A - T_B - T_C = 5 + 1 - 2{,}96 - 2{,}65 - 0{,}39 = 0.$$

Joonisel 367 on antud paindemomentide epüürid, mis on saadud liitmise meetodil, lõikejõu epüür ja on näidatud tala elastse joone kuju koos käändepunktidega; nendes punktides on paindemomendid võrdsed nulliga.

III OSA.

VÄÄNE JA LIITTUGEVUS.

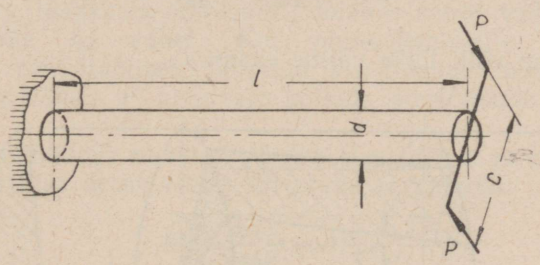
X peatükk.

Vääne.

76. Ümmarguse ristlõikega võlli väändel tekkiv pingeolukord.

Väändeks nimetatakse jõupaari mõjumist võlli teljega risti asuvas tasapinnas. Joonisel 369 on antud ümmarguse ristlõikega võll, millele mõjub jõupaar $M_v = Pc$, mis on rakendatud otslõikesse. Jõupaari M_v, mis väänab võlli, nimetatakse väändemomendiks.

Pingeolukorra määramiseks vajaliku teooria püstitame järgmistel oletustel: teljega risti olevad tasapinnalised võlli lõiked jäävad



Joon. 369.

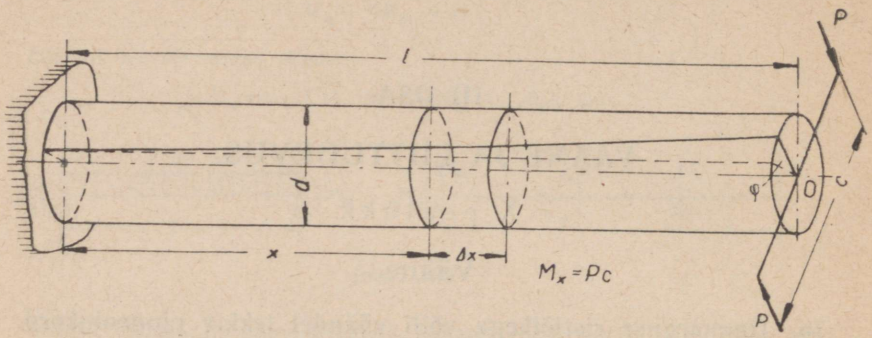
tasapinnalisteks ka deformeerumisel; nendes tasapindades raadiused ei kõverdu; ümberpaigutumised ja deformatsioonid on väikesed; materjal on homogeenne ja isotroopne; nihkedeformatsioonid alluvad Hooke'i seadusele.

Ühe otsaga jäigalt kinnitatud võlli (joon. 370) kõik lõiked pöörduvad väändemomendi M_v mõjul võlli telje ümber (nurkümberpaigutumine, pöördenurk). Võlli otslõike nurkümberpaigutumist tähistame φ-ga ja nimetame absoluutseks väändenurgaks. Suhet

$$\Theta = \frac{\varphi}{l} \qquad (229)$$

nimetame suhteliseks väändenurgaks.

Edasi määrame kindlaks need geomeetrilised muudatused, mis toimuvad võlli osakese, pikkusega Δx, deformeerumisel (joon. 371). Eespool omaks võetud oletustel pikkus Δx ei muutu, raadiused ei kõverdu ja võlli külgpinnale joonestatud ristkülik muutub rööpkülikuks.

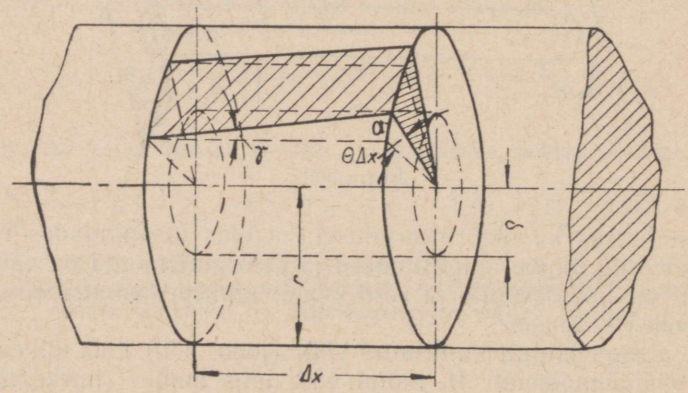


Joon. 370.

Joonisest järeldub, et suurus a on absoluutne nihe ja $\Theta\Delta x$ absoluutne väändenurk antud võlli osakesel. Suhtelise nihke (täisnurga moondumise) γ suuruse leiame järgmiselt:

$$\gamma \approx \operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{\Delta x} = \frac{r\Theta\Delta x}{\Delta x} = r\Theta, \qquad \text{(a)}$$

kus $r = \frac{d}{2}$ on võlli lõike väline raadius.



Joon. 371.

Silindrilisele pinnale, mille raadius on ϱ, mõttes joonestatud ristkülikus tekib suhteline nihe $\gamma_\varrho < \gamma$, kusjuures

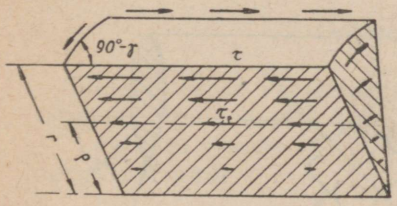
$$\gamma_\varrho = \varrho\Theta. \qquad \text{(a')}$$

Pingete leidmiseks eraldame võlli osast kiilu, mis on näidatud joonisel 372. Selle kiilu lõigetes mõjuvad tangentsiaalpinged, mille suund ja suurus olenevad suhtelisest nihkest, millest oli juttu eespool. Need pinged leiame, kasutades Hooke'i seadust [vt. v. (60)], järgmiste valemite abil:

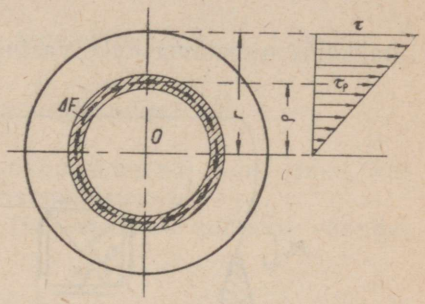
$$\tau = G\gamma; \tag{b}$$

$$\tau_\varrho = G\gamma_\varrho, \tag{b'}$$

kus τ ja τ_ϱ on tangentsiaalpinged; nende pingete vektorid on suunatud tangentsiaalselt raadiuste r ja ϱ poolt joonestatud kaartele.



Joon. 372.



Joon. 373.

Kasutades tasakaalu võrrandit, leiame seose väändemomendi M_v ja pinge τ_ϱ vahel. Kui pinnaelemendile $\Delta F = 2\pi\varrho\Delta\varrho$ (joon. 373) rõngataoliselt jaotatud sisejõudude moment võrdub $(\tau_\varrho \Delta F)\varrho$, siis lõikes F mõjuvate kõikide sisejõudude moment on $\Sigma\tau_\varrho \cdot \varrho\Delta F$.

Kuna välisjõudude moment võrdub sisejõudude momendiga, siis otsitava staatilise seose võime kirjutada järgmiselt:

$$M_v = \sum \tau_\varrho \varrho \Delta F. \tag{c}$$

Homogeense ja isotroopse materjali puhul võime seostest (a), (a'), (b) ja (b') saada järgmise suhte pingete vahel lõike mitmesugustes punktides:

$$\frac{\gamma}{\gamma_\varrho} = \frac{\tau}{\tau_\varrho} = \frac{r}{\varrho}. \tag{230}$$

Siit järgneb, et väände juures pinged jaotuvad lineaarselt (joon. 373).

Leides viimasest avaldisest $\tau_\varrho = \frac{\varrho}{r}\tau$, anname võrrandile sellise kuju:

$$M_v = \frac{\tau}{r} \sum \Delta F \varrho^2,$$

kust

$$\tau = \frac{M_v r}{J_p} = \frac{M_v}{W_p}, \tag{231}$$

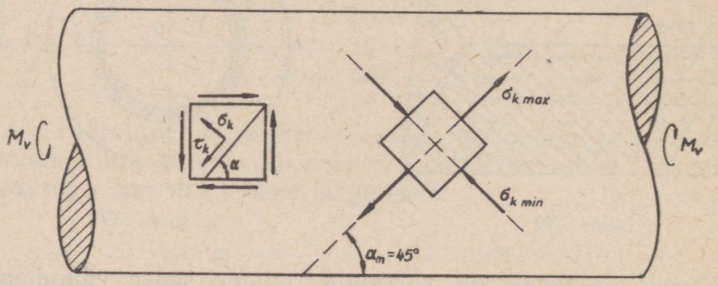
kus

$$J_p = \sum \Delta F \varrho^2, \tag{232}$$

nagu teada, on lõike polaarinertsmoment (vt. p. 47).

$$W_p = \frac{J_p}{r} \tag{233}$$

hakkame nimetama lõike vastupidavusmomendiks väändel.



Joon. 374.

Ümmarguse ristlõikega võlli puhul:

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1\ d^4; \tag{234}$$

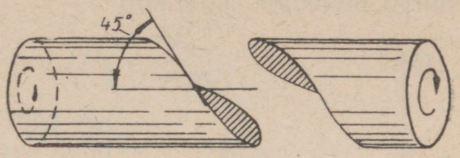
$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2\ d^3. \tag{235}$$

Määrame normaalpinged σ_k ja tangentsiaalpinged τ_k lõikes, mis asub väliskihis nurga α all võlli teljele (joon. 374). Leiame nad valemite (54) ja (55) abil, millised saime puhtnihke puhul. Niisiis

$$\sigma_k = -\tau \sin 2\alpha;$$
$$\tau_k = -\tau \cos 2\alpha.$$

Saadud valemitest järgneb, et on kaks teineteisega risti asuvat lõiget, millede kohta $\alpha = 45°$ ja 135°, kus normaalpingetel on maksimaalne ja minimaalne väärtus: $\sigma_{k\,min} = -\tau$, $\sigma_{k\,max} = \tau$; tangentsiaalpinged aga võrduvad nulliga. Tuletame meelde, et normaalpinged neis lõigetes on peapinged. Pingete peatelgede järgi orienteeritud rööptahukas on kujutatud joonisel 374, kus on märgitud ka peapingete asetus.

Võllide väändeproovid, kui võllid on valmistatud plastilistest materjalidest, näitavad, et purunemine toimub lõigete järgi, kus mõjuvad tangentsiaalpinged τ. Hapratest materjalidest võllide purunemine aga toimub lõigete järgi, mis asuvad 45° all, kus esinevad maksimaalsed normaalpinged $\sigma_{k\ max}$. Viimase asjaolu tõenduseks on antud joonisel 375 murde üldine kuju, mis saadi malmvõlli väändel. Sel juhul kooskõlas maksimaalsete pingete teooriaga (vt. p. 40.) tekkis purunemine tõmbepingete $\sigma_{k\ max}$ toimel.



Joon. 375.

77. Väändenurga määramine.

Leiame seose väändenurga ja väändemomendi vahel juhul, kui tangetsiaalpinged τ ei ületa proportsionaalsuse piiri τ_{pr}.

Lähtudes seosest (a) ja (b), (p. 76), koostame suhtelise väändenurga võrrandi

$$\Theta = \frac{\gamma}{r} = \frac{\tau}{Gr}.$$

Kasutades valemit (231), leiame, et

$$\Theta = \frac{M_v}{GJ_p}, \tag{236}$$

kus suurust GJ_p nimetame l õ i k e j ä i k u s e k s v ä ä n d e l. Teades Θ suurust, määrame valemi (229) järgi absoluutse väändenurga

$$\varphi = \Theta l = \frac{M_v l}{GJ_p} = \frac{M_v}{j}, \tag{237}$$

kus suurust

$$j = \frac{GJ_p}{l} = \frac{M_v}{\varphi} \tag{238}$$

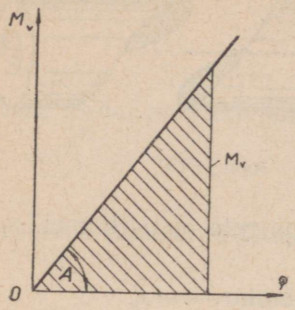
nimetame j ä i k u s t e g u r i k s v ä ä n d e l.

Valemist (237) nähtub, et väändenurgad on võrdelised väändemomentidega.

78. Väändedeformatsiooniks kulutatav energia.

Väändedeformatsioon toimub välisenergia kulutamise arvel. Leiame viimase juhuks, kui väändenurgad on võrdelised väändemomentidega. Mehaanikast on teada, et kui momendi M_v mõjul toi-

mub nurkümberpaigutumine φ, siis momendi töö väljendub korrutises $M_v \cdot \varphi$. Momendi sirgjoonelisel suurenemisel (joon. 376), nagu see toimub vaadeldaval juhul, vastab töö viirutatud kolmnurga pindalale. Järelikult



Joon. 376.

$$A = \frac{M_v \varphi}{2}. \tag{239}$$

või võttes arvesse valemit (237), koostame energia kohta teised valemid:

$$A = \frac{j\varphi^2}{2}; \tag{239'}$$

$$A = \frac{M_v^2}{2j} = \frac{M_v^2 l}{2GJ_p}. \tag{239''}$$

79. Võlli tugevusarvutus.

Võlli arvutatakse sagedamini suurimate tangentsiaalpingete τ järgi. Need pinged ei tohi ületada lubatavaid nihkepingeid, s. t.

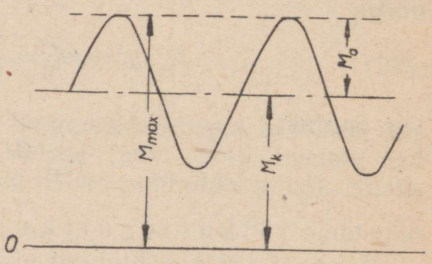
$$\tau = \frac{M_v}{W_p} \leqslant R_n. \tag{240}$$

Võnkekoormuse puhul, kui väändemoment koosneb staatilisest momendist M_k ja muutuvast momendist M_a (joon. 377), vähendatakse lubavaid pingeid teguriga φ_τ korrutamise teel. See tegur on vastavalt võrrandile (130)

$$\varphi_\tau = \frac{1 + \Delta_\tau}{1 + \frac{\Delta_\tau}{\alpha_\tau}},$$

kus

$$\Delta_\tau = \frac{M_a}{M_k} \quad \text{ja} \quad \alpha_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_T}.$$



Joon. 377.

Järelikult võib võnketugevuse valemi kirjutada järgmisel kujul:

$$\tau_e = \frac{M_{max}}{\varphi_\tau W_p} \leqslant R_n, \tag{241}$$

kus τ_e on ekvivalentne pinge;
$M_{max} = M_k + M_a$ — tsükli maksimaalne väändemoment.

Asetades viimasesse valemisse $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$, saame valemi võlli läbimõõdu leidmiseks:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_{max}}{\varphi_\tau \pi R_n}} \approx 1{,}72 \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{\varphi_\tau R_n}}. \qquad (242)$$

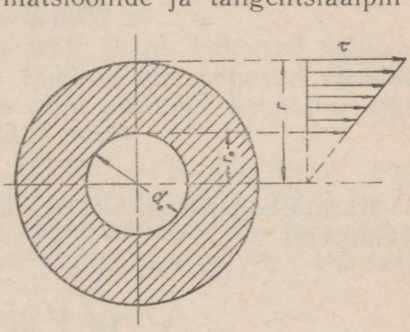
Kui võlli koormus on staatiline, siis saame

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_v}{\pi R_n}} \approx 1{,}72 \sqrt[3]{\frac{M_v}{R_n}}. \qquad (243)$$

Toodud arvutusvalemid on koostatud võllidele, mille materjal allub Hooke'i seadusele. Mis puutub teistesse materjalidesse (näiteks malm), siis neid valemeid võib kasutada arvutamisel tingimusi, oletades, et ka nende kohta teatud piirides on maksev Hooke'i seadus.

80. Õõnsa võlli arvutusvalemid.

Torukujulise õõnsa võlli puhul (joon. 378), millele mõjub väändemoment M_v, toimub nihkedeformatsioonide ja tangentsiaalpingete jaotumine lõikes samuti lineaarselt. Sel juhul võib suurima pinge τ ja suurima pöördenurga φ leidmiseks kasutada valemeid (231) ja (237), kui võtta J_p asemel suurus



Joon. 378.

$$J_{p_0} = \frac{\pi r^4}{2} - \frac{\pi r_0^4}{2} = J_p \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right) = J_p \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4}\right), \qquad (244)$$

kus $r_0 = \frac{d_0}{2}$ on õõne raadius.

Järelikult

$$\tau = \frac{M_v r}{J_{p_0}} = \frac{M_v}{W_{p_0}}; \qquad (245)$$

$$\varphi = \frac{M_v}{j}, \qquad (246)$$

kus $W_{p_0} = \frac{J_{p_0}}{r}$ on õõnsa ristlõike vastupidavusmoment väändel ja

$$j = \frac{G J_{p_0}}{l}. \qquad (247)$$

Kirjutame valemi (245) ümber sellisel kujul:

$$\tau = \frac{M_v}{\varphi_0 W_p}, \tag{248}$$

kus

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \quad \text{ja} \quad \varphi_0 = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4. \tag{249}$$

Erijuhul, kui $\frac{r_0}{r} = 0{,}4$, leiame $\varphi_0 = 1 - 0{,}0256 \approx 0{,}97$. Siit järgneb, et võlli kaalu märgatav vähenemine on võimalik vastupidavusmomendi tähtsusetu vähenemise arvel (2,56%).[1]

81. Pöörlevate võllide arvutamine.

Määrame väändemomendi võlli puhul, mis teeb n pööret minutis ja annab üle võimsuse N HJ[2]. Võlli poolt üleantava energia hulga sekundis $7500\,N$ võrrutame väändemomendi tööga, mida saame arvutada M korrutisena võlli pöördenurgaga ühe sekundi jooksul $\frac{2\pi n}{60}$ (nurk radiaanides). Järelikult

$$7500\,N = M_v \frac{2\pi n}{60},$$

millest

$$M_v = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ kgcm}. \tag{250}$$

Kasutades valemit (243), koostame valemi võlli läbimõõdu leidmiseks:

$$d \approx 1{,}72 \sqrt[3]{\frac{71\,620 \frac{N}{n}}{R_n}} \approx 71{,}43 \sqrt[3]{\frac{N}{nR_n}}. \tag{251}$$

Kui $R_n = 600$ kg/cm², siis saame

$$d \approx 8{,}47 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}. \tag{252}$$

Nüüd määrame kindlaks võlli läbimõõdu eeldusel, et väändenurk 1 meetri pikkusel ei ületa teatud Θ_1 väärtust kraadides. Kui

[1] Sama nähtus esineb ka võllis puhtpaindel (vt. p. 56).
[2] 1 hobujõud (HJ) on 75 kgm/sek = 7500 kgcm/sek.

väändenurk Θ võlli pikkuse 1 cm kohta on väljendatud radiaanides, siis $\Theta_1 = \frac{\Theta}{2\pi} \cdot 360 \cdot 100$. Arvestades valemit (236), leiame:

$$\Theta_1 = \frac{18\,000}{\pi} \cdot \frac{M_v}{GJ_p}.$$

Asetades siia $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$, saame võlli läbimõõdu leidmiseks võrrandi:

$$d \approx 15{,}55 \sqrt[4]{\frac{M_v}{G\Theta_1}}. \qquad (253)$$

Pikkade transmissioonivõllide puhul võetakse Θ_1 harilikult $\frac{1}{4}°$. Siis juhul, kui $G = 8 \cdot 10^5$ kg/cm² ja $M_v = 71\,620 \frac{N}{n}$ kgcm, võtab valem (253) järgmise kuju

$$d \approx 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}. \qquad (254)$$

82. Väändemomentide, väändepingete ja väändenurkade epüürid.

Mitme momendi mõjule alluva võlli puhul, kui need mõjuvad erinevates lõigetes, tuleb ehitada epüürid, mis annavad suuruste M_x, φ, τ ja Θ muutumise graafiku võlli pikkuses. Selgitame näite varal selliste epüüride ehitamist.

Võtame nelja rihmarattaga *I*, *II*, *III* ja *IV* võlli (joon. 379). Olgu rihmaratas *II* vedavaks ja rihmarattad *I*, *III* ja *IV* — veetavateks. Kui vedavale rihmarattale mõjub moment M_{II} ja veetavad rihmarattad võtavad vastu momendid M_I, M_{III} ja M_{IV}, siis tasakaalu tingimuste kohaselt

$$M_{II} = M_I + M_{III} + M_{IV}.$$

Rakendatud momentide toimel on võlli piirkonnad l_1, l_2 ja l_3 allutatud väändele. Vääne tekib igale võlli osale mõjuva väändemomendi tõttu:

$$M_{v1} = M_I;$$
$$M_{v2} = M_{III} + M_{IV};$$
$$M_{v3} = M_{IV}.$$

Väändemomentide epüür ehitatakse mastaabis. Selleks tuleb risti võlli teljega kanda suurused M_{v1}, M_{v2} ja M_{v3}. Seejuures kantakse moment M_{v1} ühele poole ja momendid M_{v2} ning M_{v3} teisele

poole, sest piirkonda l_1 väänatakse ühele poole ja piirkondi l_2 ja l_3 teisele poole.

Iga piirkonna absoluutsed väändenurgad leiame valemi (237) abil:

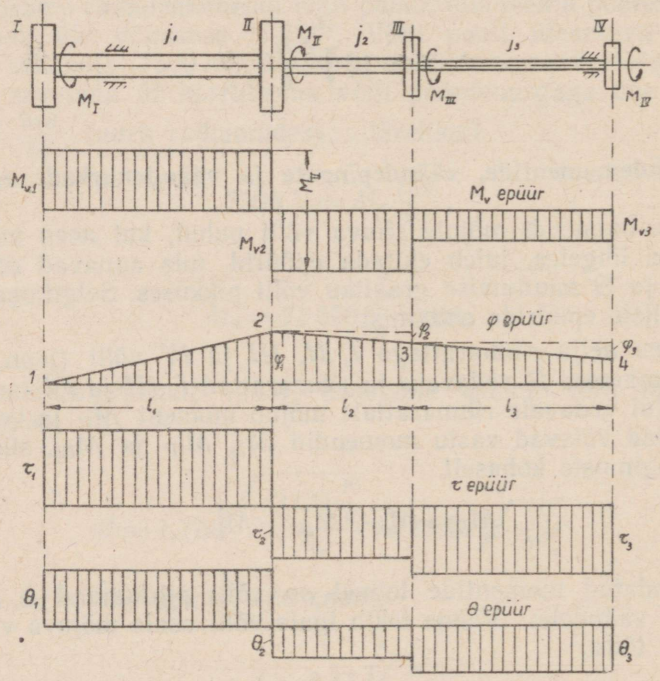
$$\varphi_1 = \frac{M_{v1}}{j_1};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{v2}}{j_2};$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{v3}}{j_3},$$

kus j_1, j_2 ja j_3 on võlli vastavate piirkondade jäikustegurid.

Lugedes liikumatuks lõiget *I*, kuhu on kinnitatud rihmaratas *I*,



Joon. 379.

kanname vastavate rihmarataste kohal risti võlli teljega suurused φ_1, $\varphi_1 - \varphi_2$ ja $\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$. Ühendades saadud punktid *1*, *2*, *3* ja *4* sirgetega, saame otsitava võlli lõigete pöördenurkade epüüri lõike *I* suhtes.

Võlli iga piirkonna kohta leiame maksimaalsed tangentsiaalpinged valemi (231) abil:

$$\tau_1 = \frac{M_{v1}}{W_{p1}};$$

$$\tau_2 = \frac{M_{v2}}{W_{p2}};$$

$$\tau_3 = \frac{M_{v3}}{W_{p3}},$$

kus W_{p1}, W_{p2}, W_{p3} on võlli ristlõigete vastupidavusmomendid väändel.

Pingete τ epüüri saab ehitada leitud kolme väärtuse järgi analoogiliselt väändemomentide epüüri ehitamisega (vt. joon. 379).

Kui võlli piirkondade kohta leida valemi (236) põhjal suhtelised väändenurgad

$$\Theta_1 = \frac{M_{v1}}{GJ_{p1}},$$

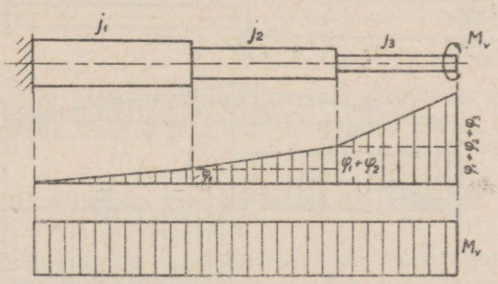
$$\Theta_2 = \frac{M_{v2}}{GJ_{p2}},$$

$$\Theta_3 = \frac{M_{v3}}{GJ_{p3}},$$

kus J_{p1}, J_{p2} ja J_{p3} on ristlõigete polaarinertsmomendid, ja kanda nad mastaabis risti võlli teljega, siis saab ehitada pöördenurkade Θ epüüri. See epüür on kujutatud joonisel 379.

83. Astmelise võlli väändenurga määramine.

Leiame momendi M_v poolt väänatava astmelise võlli väändenurga (joon. 380)



Joon. 380.

Otsitav nurk vastavalt toodud väändenurkade epüürile koosneb kolmest nurgast

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3. \qquad \text{(a)}$$

Kasutades valemit (237), väljendame need nurgad väändemomentide M_{v1}, M_{v2} ja M_{v3} kaudu, mis mõjuvad vastavatele võlli osadele:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{M_{v1}}{j_1}; \\ \varphi_2 &= \frac{M_{v2}}{j_2}; \\ \varphi_3 &= \frac{M_{v3}}{j_3}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

kus j_1, j_2, j_3 on võlli osade jäikustegurid.

Kuna väändemoment kõikidel võlli osadel on sama, siis

$$M_{v1} = M_{v2} = M_{v3} = M_v. \qquad \text{(c)}$$

Seostest (a), (b) ja (c) on kerge leida, et

$$\varphi = \frac{M_v}{j}, \qquad (255)$$

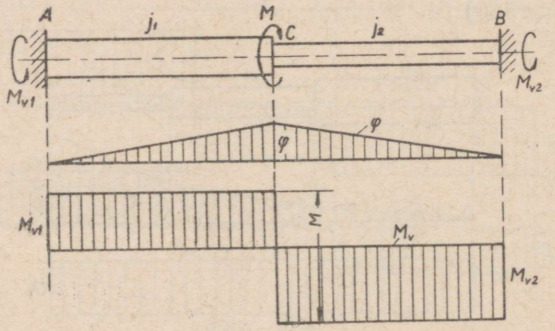
kus

$$j = \frac{1}{\frac{1}{j_1} + \frac{1}{j_2} + \frac{1}{j_3}} \qquad (256)$$

on resulteeriv võlli jäikustegur.

84. Juhtum kus väändemomendid ei ole staatiliselt määratavad.

Kui üksikutele võlli piirkondadele mõjuvad väändemomendid on staatika abil määratavad, nagu see esines kahes eelnevas p-s vaadeldud näidetes, siis nende momentide seisukohalt on niisugune võll staatiliselt määratud.



Joon. 381.

Vaatleme nüüd juhtu, kus väändemomentide leidmiseks ei piisa staatika võrrandite koostamisest.

Näitena võtame võlli AB (joon. 381), mis on mõlemast otsast

jäigalt kinnitatud seinasse ja on lõikes C koormatud antud momendiga M.

Sellisele võllile rakendatud moment M põhjustab võlli osade AC ja CB väänamist. Tekkivate väändedeformatsioonide tulemusena hakkavad lõigetes A ja B mõjuma reaktsioonväändemomendid M_{v1} ja M_{v2}. Summaarselt tasakaalustavad need momendid momendi M. M_{v1} ja M_{v2} suurused ei ole määratavad ühest staatika võrrandist. Tundmatute momentide leidmiseks koostame seosed (a), (b) ja (c).

Kui võlli osade AC ja CB absoluutseid väändenurki tähistada φ_1 ja φ_2 (vt. väändenurkade epüüri), siis geomeetriliselt saame, et

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{a}$$

Hooke'i seaduse põhjal tekivad need nurgad väändemomentide tõttu, s. t.

$$\left.\begin{aligned} M_{v1} &= j_1 \varphi_1, \\ M_{v2} &= j_2 \varphi_2, \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

kus j_1 ja j_2 on võlliosade AC ja CB jäikustegurid.

Tasakaaluks peab olema

$$M_{v1} + M_{v2} = M. \tag{c}$$

Seostest (a), (b) ja (c) saame:

$$\varphi = \frac{M}{j}, \tag{257}$$

kus

$$j = j_1 + j_2, \tag{258}$$

samuti aga

$$\left.\begin{aligned} M_{v1} &= \frac{j_1}{j} M; \\ M_{v2} &= \frac{j_2}{j} M. \end{aligned}\right\} \tag{259}$$

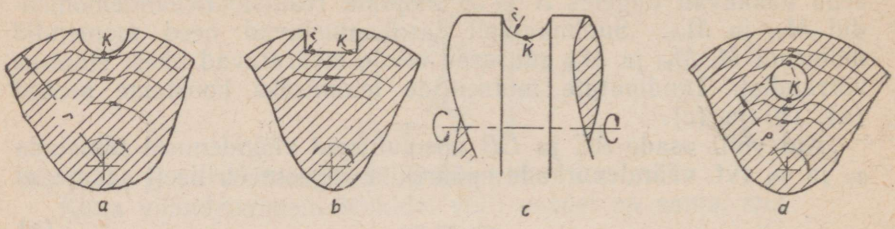
Kandes saadud momentide väärtused joonisele risti võlli teljega, saame ehitada väändemomentide epüüri (joon. 381).

85. Pingete kontsentratsioon väändel.

Väändel tekib pingete kontsentratsioon võlli nendes kohtades, kus asuvad mitmesugused sooned, nuudid, ringsissetreimised, ekstsentrilised augud jne. (joon. 382). Kõigil nimetatud juhtudel tekib pingete kontsentratsioon punktides K.

Pingete kontsentratsiooni kvalitatiivse külje näitlikuks selgitamiseks kasutame hüdrodünaamilist analoogiat, mida käsitlesime ka tõmbe puhul. Selle analoogia põhjal võime kujutleda, et kui võlli

kestasse (joon. 383) materjali asemel valada ideaalset vedelikku, mis pöörleb konstantse nurkkiirusega ω, siis viimase joonkiirused v kujutavad tangentsiaalpingeid nii suuruselt kui ka suunalt. Igasugused kontuuri kohalikud ebatasasused, samuti ka õõnsused võlli

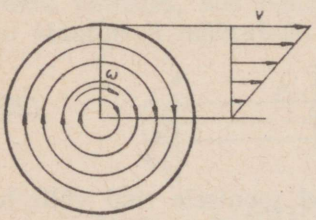


Joon. 382.

sees, põhjustavad vedeliku voolu kõrvalekaldumisi, mis omakorda kutsub esile kohalikke kiiruse muutumisi teatud punktides. Siit selgub, miks tangentsiaalpingete kontsentratsioon tekib punktides K (joon. 382).

Toome mõned andmed kontsentratsiooniteguri suuruse kohta. Poolümmarguse soone puhul (joon. 382, a) ja samuti ümmarguse augu puhul (joon. 382, d), kui neil on võlli raadiusega r võrreldes väikesed mõõted, on teguri suuruseks $\alpha_k = 2$. Esimesel juhul loeme kontsentratsioonitegurik suhet $\alpha_k = \frac{\tau^k}{\tau}$, kus τ^k on pinge punktis K, $\tau = \frac{M_v r}{J_p}$, teise juhu puhul — $\alpha_k = \frac{\tau^k}{\tau_\varrho}$, kus $\tau_\varrho = \frac{M_v \varrho}{J_p}$.

Nullraadiusega kõveruste puhul ($r' = 0$) (joon. 382, b) on α_k lõpmata suur. See asjaolu sunnib järeldama, et kiilunuutide puhul tuleb vältida materjalis teravaid nurki, sest nende läheduses võivad tekkida võlli töötamisel suured kohalikud pinged τ^k. Need pinged nõrgestavad võlli vastupidavust võnkekoormustel, sest väsimuspragu tekib alati pingete kontsentratsiooni tsoonis.



Joon. 383.

86. Ristkülikulise ristlõikega varva arvutusvalemid.

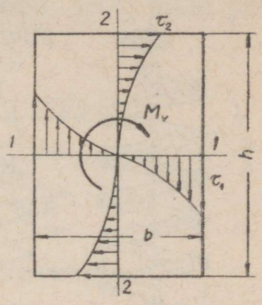
Mitteümmarguse ristlõikega varbade väänet ei saa uurida elementaarsel teel, sest selle juures ei ole tasapinnaliste lõigete hüpotees maksev. Katse näitab, et sellise ristlõikega võllide puhul muutuvad tasapinnalised lõiked tunduvalt kõveraks. Seepärast toome valmistulemused täpsete uurimuste kohta, mis esmakordselt leidsid teostamist Saint-Venant'i poolt.

Ristküiikukujulise ristlõikega varbade väänamisel (joon. 384) mõjuvad suurimad tangentsiaalpinged kontuuril punktides *1* ja *2*, nullpinged aga mõjuvad ristküliku keskpunktis ja täisnurkade tippudes.

Punktides *1* ja *2* mõjuvate pingete, samuti ka pöördenurga arvutamiseks saab koostada järgmised võrrandid:

$$\left.\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{M_v}{W_{tn}};\\ \tau_2 &= \gamma\tau_1;\end{aligned}\right\} \qquad (260)$$

$$\varphi = \frac{M_v}{j}; \qquad (261)$$



Joon. 384.

siin W_{tn} on taandatud vastupidavusmoment;

γ — suhtest $\frac{h}{b}$ olenev tegur.

Eespool nimetatud täpsete uurimuste tulemusena saadi W_{tn} ja j väärtuste väljendamiseks järgmised võrrandid:

$$\left.\begin{aligned}W_{tn} &= \alpha b^3;\\ j &= \frac{G\beta b^4}{l}.\end{aligned}\right\} \qquad (262)$$

Mis puutub teguritesse α, β ja γ, siis nad olenevad suhtest $\frac{h}{b}$ ja nende suurused on toodud tabelis 3.

Tabel 3.

Tegurid α, β ja γ suhte $\frac{h}{b}$ mitmesuguse suuruse puhul.

$h:b$	1	1,5	2	3	4	6	8	10
α	0,208	0,346	0,493	0,801	1,150	1,789	2,456	3,123
β	0,1404	0,2936	0,4572	0,7899	1,1232	1,789	2,456	3,123
γ	1,000	0,8588	0,7952	0,7533	0,7447	0,7426	0,7425	0,7425

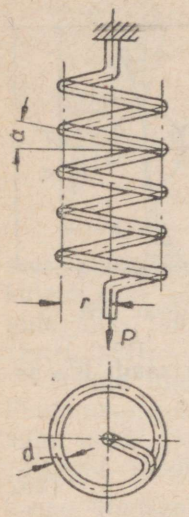
87. Spiraalvedrude arvutamine.

Tuletame ligikaudsed arvutusvalemid väikese kõverusega spiraalvedrude jaoks (joon. 385), kui neile mõjub jõud *P*.

Arvutusteooria püstitame järgmistel oletustel: deformatsioonidel me ei arvesta keerdude kaldenurga α muutumist; ei võta arvesse lõikejõu poolt tekitatud deformatsioone; oletame, et väändedefor-

matsioonid alluvad Hooke'i seadusele; eeldame, et materjal on homogeenne ja isotroopne.

Jõu P mõjul vedrule tekib vedru keerdudes väändedeformatsioon. Seda deformatsiooni põhjustab väädemoment $M_v = Pr$, kus r on keerdude keskmine raadius.



Joon. 385.

Vedru keerus väändel tekkivad maksimaalsed pinged määrame kindlaks valemi (231) järgi:

$$\tau = \frac{M_v}{W_p} = \frac{Pr}{W_p}.$$

Kuna ümmarguse ristlõike puhul $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$, kus d on varva läbimõõt, siis

$$\tau = \frac{16\,Pr}{\pi d^3}. \qquad (263)$$

Vedrud töötavad sagedamini võnkekoormusele $P = P_k \pm P_a$, kus P_k on staatiline koormus ja P_a — muutuv koormus. Sel juhul tuleb selliseid vedrusid arvutada ekvivalentse pinge järgi [vt. valem (129)]:

$$\tau_e = \frac{\tau_{max}}{\varphi_\tau} = \frac{16\,P_{max}r}{\varphi_\tau \pi d^3}, \qquad (264)$$

kus τ_{max} on tsükli $P_{max} = P_k + P_a$ maksimaalne pinge;

φ_τ — valemi (130) järgi määratav tegur.

Nüüd leiame vedru pikenemise f, kasutades energia jäävuse teoreemi. Vastavalt valemile (16) teostab vedrule rakendatud jõud P töö $\frac{Pf}{2}$. See töö kulutatakse väändedeformatsiooniks. Väändeenergia leiame valemi (239″) järgi, s. t. ta on

$$\frac{M_v^2 l}{2GJ_p},$$

kus $l = 2\pi rn$ on vedruks keeratud varva pikkus;

n — keerdude arv;

$J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ — varva ristlõike polaarinertsmoment.

Järelikult

$$\frac{Pf}{2} = \frac{M_v^2 l}{2GJ_p},$$

kust saame, et

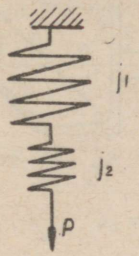
$$f = \frac{M_v^2 l}{PGJ_p} = \frac{Pr^2 l}{GJ_p} = \frac{P}{j}, \qquad (265)$$

kus suurust

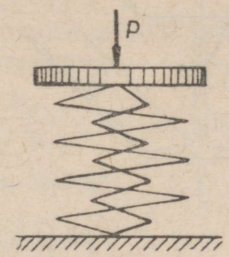
$$j = \frac{GJ_p}{r^2 l} = \frac{Gd^4}{64nr^3} \tag{266}$$

nimetatakse vedru jäikusteguriks.

Kui vedru on koostatud kahest vedrust (joon. 386), mille jäi-



Joon. 386.



Joon. 387.

kused j_1 ja j_2 on tuntud, siis komplekti üldine jäikus j leitakse võrrandist (33), s. t.

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j_1} + \frac{1}{j_2}. \tag{267}$$

Kahe paralleelselt töötava vedru (joon. 387) üldine jäikus on [1]

$$j = j_1 + j_2. \tag{268}$$

XI peatükk.

Jõudude ja momentide talale mõjumise mitmesugused juhud.

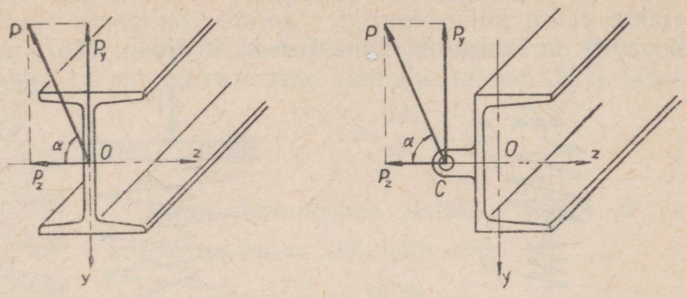
88. Vildakpaine.

Vildakpaindeks nimetame juhtu, kui momendid ja jõud mõjuvad talale tasapinnas, mis läbib lõike raskuskeset O või paindetsentrit C nurga α all lõike peatelgedele. Joonisel 388 on toodud kaks vildakpainde näidet.

Vildakpainet on kerge taandada varem vaadeldud harilikuks paindeks, kui jõud ja momendid lahutada komponentideks peatelgede y ja z suunas. Joonisel on antud põikjõudude P lahutamise juhud komponentideks P_y ja P_z.

[1] See valem saadakse kergesti avaldisest (37), kui võtta $\alpha = 0$ ja üks äärmistest varrastest ära jätta.

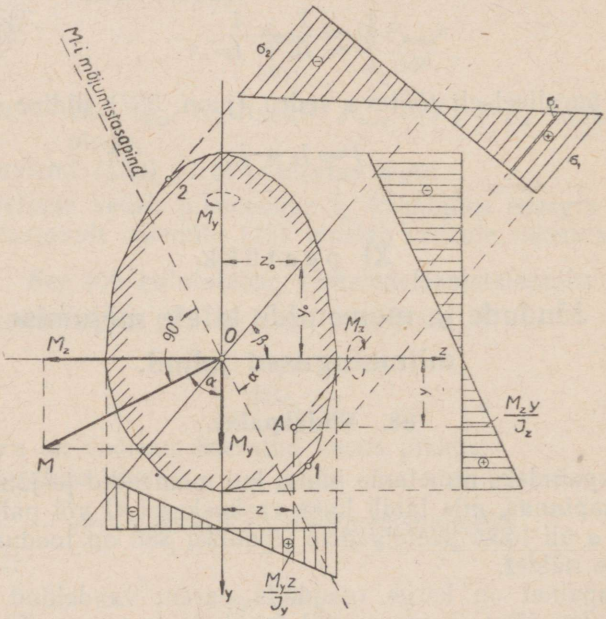
Kui varva mingis lõikes kujutada raskuskeset või paindetsentrit läbivas tasapinnas mõjuvate koormuste momenti vektoriga M (joon. 389) (see vektor on korgitõmbaja reegli kohaselt suunatud



Joon. 388.

risti nimetatud tasapinnaga), siis viimast saab peatelgede suunas lahutada kaheks komponendiks:

$$M_z = M \sin \alpha \quad \text{ja} \quad M_y = M \cos \alpha.$$



Joon. 389.

Esimene vektor kujutab paindemomenti M_z, mis mõjub telge y läbivas tasapinnas, ja teine — paindemomenti M_y, mis mõjub telge z läbivas tasapinnas.

Nende momentide tõttu tekivad varva lõikes normaalpinged, mis muutuvad lineaarselt. Punktis A, mis asub lõike väljavenitatud osas, on momendi M_z poolt tekitatav pinge võrdne $\frac{M_z y}{J_z}$ ja momendi M_y poolt tekitatav pinge $-\frac{M_y z}{J_y}$, kus J_z ja J_y on lõigete inertsmomendid z- ja y-telgede suhtes. Kasutades mõjude liitumise printsiipi, saame punkti A kohta summaarse pinge

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y}. \tag{269}$$

Väljendades M_z ja M_y M-i kaudu, leiame

$$\sigma_x = \left(\frac{y \sin \alpha}{J_z} + \frac{z \cos \alpha}{J_y}\right) M. \tag{270}$$

Nüüd määrame kindlaks lõike kohta punktide geomeetrilise koha, kus pinged võrduvad nulliga ($\sigma_x = 0$). Võrrutades nulliga viimase võrrandi parema poole, leiame, et nullpingetega punktid asuvad sirgel (nimetame ta neutraalteljeks), mille võrrand on järgmine:

$$\frac{y_0 \sin \alpha}{J_z} + \frac{z_0 \cos \alpha}{J_y} = 0,$$

kus z_0 ja y_0 on nimetatud sirgel asuvate punktide koordinaadid.

Saadud võrrandist järeldub, et neutraaltelg läbib ristlõike raskuskeset[1] ja on z-telje suhtes kallutatud nurga β all, mille tangensi leiame järgmisest võrrandist:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{z_0} = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg} \alpha. \tag{271}$$

Sellest võrrandist nähtub, et $\operatorname{tg} \beta \neq \operatorname{ctg} \alpha$ ja seepärast ei ole neutraaltelg üldiselt risti momendi M mõjumistasapinnaga.

Teades neutraaltelje asukohta, on kerge ehitada summaarse pinge σ_x muutumise epüüri kahe kolmnurga kujul ja määrata kindlaks lõikes kõige rohkem pingestatud punktid. Niisugusteks punktideks on neutraalteljest kõige rohkem eemal asuvad punktid *1* ja *2*, millede koordinaadid tähistame y_1, z_1 ja $-y_2$, $-z_2$. Pinged neis punktides leiame valemi (269) abil, s. t.

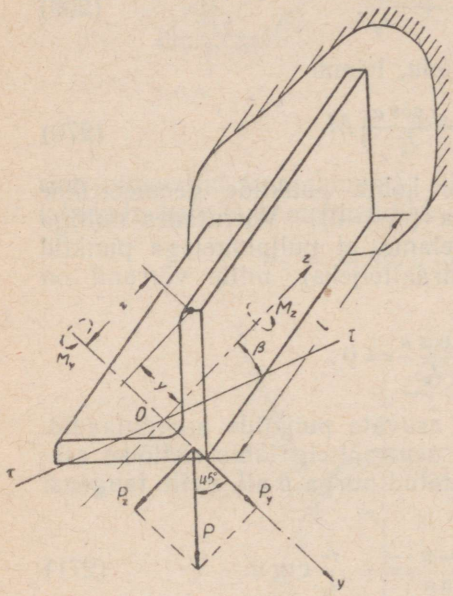
$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M_z y_1}{J_z} + \frac{M_y z_1}{J_y}; \\ \sigma_2 &= -\frac{M_z y_2}{J_z} - \frac{M_y z_2}{J_y}. \end{aligned}\right\} \tag{272}$$

[1] Seda on lihtne kontrollida, kuna $y_0 = 0$ puhul $z_0 = 0$.

Kuna vildakpaine põhjustab kahte harilikku painet kahes teineteisega risti asuvas tasapinnas, siis varva teljel asuva punkti lineaarne ümberpaigutumine f võrdub lineaarsete ümberpaigutumiste f_y ja f_z geomeetrilise summaga. Seejuures on f_y ja f_z selle punkti kohta arvutatud y- ja z-telje suunas, s. t.

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}.$$

Ülesanne 20. Leiame maksimaalse pinge konsooltala (joon. 390) ülemises kius, kui talale mõjub vertikaalne jõud $P = 100$ kg. Jõud P on rakendatud ristlõike paidetsentrisse.



Joon. 390.

Antud juhul esinev vildakpaine on taanduv kaheks harilikuks lamepaindeks kahes teineteisega risti asuvas tasapinnas jõudude $P_y = \frac{P}{\sqrt{2}}$ ja $P_z = P_y$ mõjul. Suurima pingega lõikes jäikkinnituse kohal mõjuvad sel juhul kaks paindemomenti:

$$M_y = \frac{Pl}{\sqrt{2}} \text{ ja } M_z = M_y.$$

Otsitava pinge leiame valemi (269) abil, s. t.

$$\sigma_{x\,max} = \frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y} = \frac{Pl}{\sqrt{2}}\left(\frac{y}{J_z} + \frac{z}{J_y}\right).$$

Asendades $l = 100$ cm, $y = 2$ cm, $z = 4$ cm, $J_z = 12{,}4$ cm^4 ja $J_y = 46{,}8$ cm^4, saame:

$$\sigma_{x\,max} = \frac{100 \cdot 100}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{12{,}4} + \frac{4}{46{,}8}\right) = 1140 + 604 = 1744 \text{ kg/cm}^2.$$

Neutraaltelje kaldenurga leiame valemi (271) abil, arvestades, et $\alpha = 45°$. Siis

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{J_z}{J_y}\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12{,}4}{46{,}8}\operatorname{ctg}45° = 0{,}265,$$

kust

$$\beta = 14°50'.$$

89. Vildakpaine koos tõmbega.

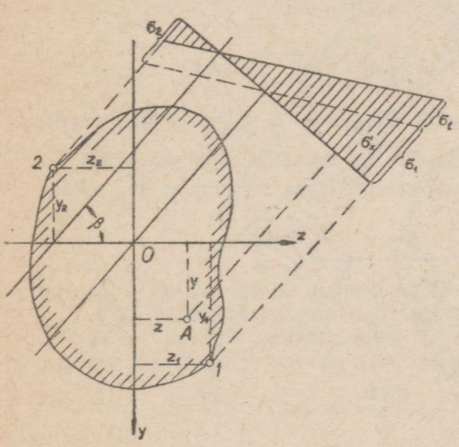
Vildakpainde ja ristlõike raskuskeskmesse rakendatud jõu N toimel tekkiva puhttõmbe koosmõjumisel suureneb normaalpinge punktis A (vt. joon. 389) $\sigma_t = \frac{N}{F}$ võrra. Sel juhul saab summaarset pinget leida järgmise valemi abil:

$$\sigma_t + \sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y}. \qquad (273)$$

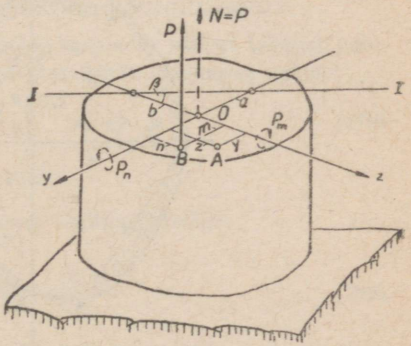
Punktides *1* ja *2*, mis on kõige pingestatumad ristlõike tõmmatavas ja surutavas tsoonis, on need pinged:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_I &= \sigma_t + \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M_z y_1}{J_z} + \frac{M_y z_1}{J_y}; \\ \sigma_{II} &= \sigma_t - \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{M_z y_2}{J_z} - \frac{M_y z_2}{J_y}. \end{aligned}\right\} \qquad (274)$$

Ühtlaselt kogu ristlõikes jaotatud pingete tõttu muutuvad pingete senise epüüri ordinaadid suuruse σ_t võrra. Normaalpingete epüür, mis saadakse käesoleval juhul, on toodud joonisel 391.



Joon. 391.



Joon. 392.

Sellest epüürist järgneb, et tõmbepinged σ_t põhjustavad neutraaltelje paralleellükke surutud kiudude suunas. Kui varrast suruda jõuga N, siis neutraaltelg paigutub ümber tõmmatud kiudude suunas.

90. Ekstsentriline tõmme ja surve.

Sirges varvas tekib väljaspoole ristlõike raskuskeset rakendatud jõu P mõjul (joon. 392) puhttõmme jõuga $N = P$ ja puhtpaine

jõupaaride Pm ja Pn mõjul, mis mõjuvad teineteisega risti asuvates ja ristlõike pea-inertstelgedega y ja z paralleelsetes tasapindades.

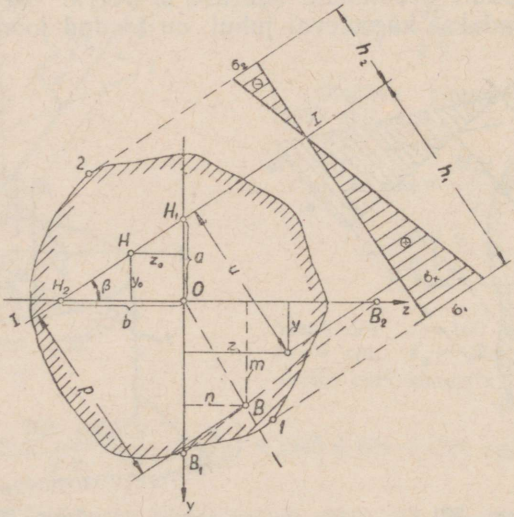
Tõmmatud tsooni punktis A normaaljõudude ja kahe paindemomendi mõjul tekkivaid normaalpingeid saab arvutada valemi (273) abil:

$$\sigma_x = \frac{P}{F} + \frac{Pmy}{J_z} + \frac{Pnz}{J_y},$$

millest pärast lihtsaid ümbermoodustamisi saame:

$$\sigma_x = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{my}{r_z^2} + \frac{nz}{r_y^2}\right), \qquad (275)$$

kus $r_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}$ ja $r_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$ on ristlõike pea-inertsraadiused [vt. v. (158)].



Joon. 393.

Ristlõike punktid, kus $\sigma_x = 0$, asuvad sirgel. Seda sirget nimetatakse n u l l j o o n e k s. Tema võrrandi võime kirjutada järgmisel kujul:

$$1 + \frac{my_0}{r_z^2} + \frac{nz_0}{r_y^2} = 0,$$

kus y_0 ja z_0 on nulljoonel $I - I$ asuvate punktide koordinaadid.

Määrame joonlõikude a ja b pikkused, millised lõikab see joon ära y- ja z-telgedest. Eespool toodud võrrandist leiame, et juhul, kui $z_0 = 0$, siis

$$y_0 = a = -\frac{r_z^2}{m} \tag{276}$$

ja kui $y_0 = 0$, siis

$$z_0 = b = -\frac{r_y^2}{n}. \tag{276'}$$

Nulljoone ja z-telje vahelise kaldenurga tangensi leiame järgmiselt:

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{a}{b} = -\left(\frac{r_z}{r_y}\right)^2 \frac{n}{m} = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{n}{m}. \tag{277}$$

Nulljoone abil on kerge leida kõige enam pingestatud punktid tõmmatud ja surutud ristlõike tsoonides. Need punktid asuvad ristlõike kontuuril ja on sellest joonest kõige kaugemal. Joonisel 393 on näidatud otsitavate punktide *1* ja *2* asukoht ja on toodud normaalpingete epüür ristlõike kõrguse piirides $h = h_1 + h_2$.

Pinged punktides *1* ja *2* leiame valemi (275) järgi:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P}{F}\left(1 + \frac{my_1}{r_z^2} + \frac{nz_1}{r_y^2}\right); \\ \sigma_2 &= \frac{P}{F}\left(1 - \frac{my_2}{r_z^2} - \frac{nz_2}{r_y^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{278}$$

kus y_1 ja z_1 ning $-y_2$ ja $-z_2$ on punktide koordinaadid.

Koostame teise võrrandi σ_x väljendamiseks, kasutades selleks tavalist puhtpainde juures pingete arvutamiseks kasutatavat valemit. Seejuures saame:

$$\sigma_x = \frac{M_0 u}{J_0}, \tag{279}$$

kus $M_0 = Pp$ on jõu P moment nulljoone suhtes;
u — punkti A kaugus nulljoonest;
J_0 — ristlõike ekvatoriaalne inertsmoment nulljoone suhtes.
Kui $u = h_1$ ja $u = -h_2$, siis saame:

$$\sigma_1 = \frac{M_0 h_1}{J_0}; \qquad \sigma_2 = -\frac{M_0 h_2}{J_0}. \tag{280}$$

Edasiste küsimuste lahendamiseks on tarvis läbi analüüsida, kuidas käitub nulljoon, kui jõudu P ristlõike tasapinnas mitmesuguseid sirgeid pidi ümber paigutada.

Nulljoon hakkab pöörduma punkti H_1 või H_2 suhtes, kui jõudu ümber paigutada z- või y-teljega paralleelset sirget pidi. Seda on kerge tõestada, sest kui $m = \text{const}$, siis valemist (276) järgneb, et ka $a = \text{const}$, samuti leiame, et kui $n = \text{const}$, siis valemist (276') järgneb, et $b = \text{const}$.

Nulljoon muutub y- või z-teljega risti asuvaks, kui jõud asub teljel y või z, sest kui $n = 0$ ja $m = 0$, siis võrrandist (277) saame, et $\beta = 0$ ja $\beta = 90°$.

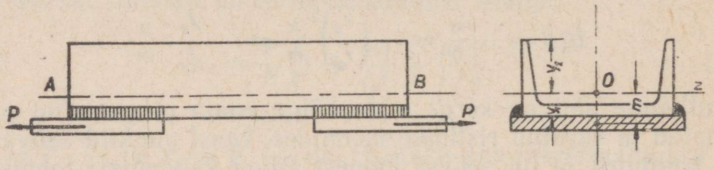
Nulljoone paralleellüke esineb siis, kui jõud liigub mööda ristlõike raskuskeset läbivat sirget. Sel juhul on $\frac{n}{m} = \text{const}$ ja seepärast ka $\operatorname{tg}\beta = \text{const}$.

Nulljoon hakkab punkti H ümber pöörlema, kui jõudu mööda kaldsirget B_1B_2

ümber paigutada. Viimast omadust on kerge tõestada, kui jõud P lahutada kangi seaduse järgi kaheks komponendiks, millest üks rakendatakse punkti B_1 ja teine punkti B_2. Esimese jõu mõjul nulljoon läbib punkti H ja on risti y-teljega, teise jõu mõjul aga läbib ta punkti H ja on risti z-teljega. Jõu liikumisel mööda joont B_1B_2 eespool nimetatud nulljoonte asend ei muutu ja seetõttu ka punkt H jääb oma kohale.

Ülesanne 21. [-tala (joonisel 394 tähistatud AB) on koormatud jõuga $P = 1000$ kg, mis on rakendatud ekstsentriliselt ristlõike suhtes. Leida pinged tala alumises ja ülemises kius.

Vaadeldaval juhul olgu: $F = 13{,}92$ cm², $J_z = 30{,}16$ cm⁴, $r_z^2 = \frac{J_z}{F} = 2{,}17$ cm², $m = 2$ cm, $n = 0$, $y_1 = h_1 = 1{,}6$ cm ja $y_2 = h_2 = 3{,}4$ cm.



Joon. 394.

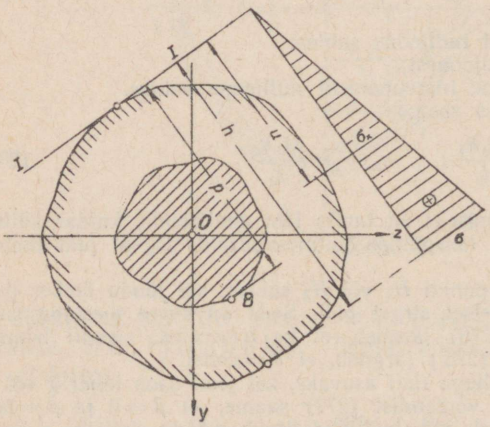
Kasutades valemeid (278), leiame:

$$\sigma_1 = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{my_1}{r_z^2}\right) = \frac{1000}{13{,}92}\left(1 + \frac{2 \cdot 1.6}{2{,}17}\right) = 71{,}9(1 + 1{,}47) \approx 178 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{F}\left(1 - \frac{my_2}{r_z^2}\right) = 71{,}9\left(1 - \frac{2 \cdot 3{,}4}{2{,}17}\right) = 71{,}9(1 - 3{,}13) \approx -153 \text{ kg/cm}^2.$$

91. Ristlõike tuum.

Määrame kindlaks jõu P rakenduspunktide geomeetrilise koha B tingimusel, et kõik nulljooned oleksid kontuurile puutujaks.



Joon. 395.

Olgu nulljoone mingi asendi kohta teada kaugus p (joon. 395), mis on punkti B ordinaadiks. Sel juhul leiame suurimal kaugusel h asuvas kius maksimaalse pinge valemi (280) abil:

$$\sigma = \frac{M_0 h}{J_0} = \frac{Pph}{J},$$

kus M_0 on jõu P moment nulljoone suhtes;

J_0 — ristlõike inertsmoment nulljoone suhtes.

Teiselt poolt võib kirjutada, et kõikide pingete summa, mis on jaotatud kolmnurgas ristlõike kõrguse h piirides, võrdub P-ga, s. t.

$$\sum \sigma_x \Delta F = P.$$

Väljendades σ_x $\sigma \frac{u}{h}$ kaudu, leiame, et

$$\frac{\sigma}{h} \sum \Delta F u = P,$$

kust

$$\sigma = \frac{Ph}{S_0},$$

kus $S_0 = \sum \Delta F u$ on ristlõike pinna staatiline moment nulljoone suhtes.

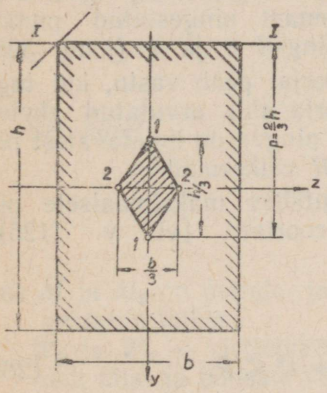
Võrrutades saadud resultaati eelmisega, saame

$$\frac{Ph}{S_0} = \frac{Pph}{J_0},$$

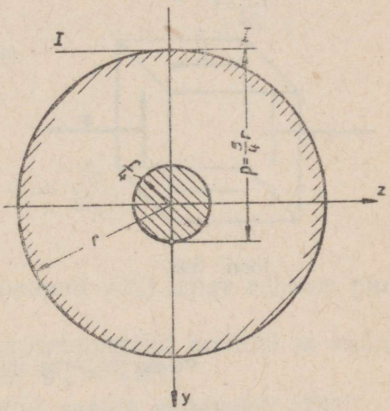
millest

$$p = \frac{J_0}{S_0}. \tag{281}$$

Selle valemi abil on võimalik kindlaks määrata antud nulljoonte asendite puhul punktide B geomeetrilist kohta. See punktide geomeetriline koht on sule-



Joon. 396.



Joon. 397.

tud kõver, mis moodustab kujundi, mida nimetatakse ristlõike t u u m a k s. On selge, et selle tuuma sisse rakendatud jõud P põhjustab ristlõikes sama märgiga pingeid. Pinged on eri märkidega, kui P rakenduspunkt asub väljaspool tuuma.

Määrame kindlaks tuuma kontuurid ristkülikulise ja ümmarguse ristlõike puhul. Esimese ristlõike puhul (joon. 396), kus $J_0 = \frac{bh^3}{3}$ ja $S_0 = bh\frac{h}{2} = \frac{bh^2}{2}$, leiame, et

$$p = \frac{2}{3}h$$

ja teise ristlõike puhul (joon. 397), kus $J_0 = \frac{\pi r^4}{4} + (\pi r^2) r^2 = \frac{5}{4}\pi r^4$ ja $S_0 = \pi r^3$,

saame

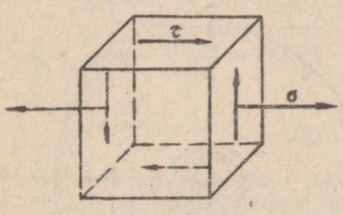
$$p = \frac{5}{4} r.$$

Esimesel juhul on tuuma kujuks romb diagonaalidega $\frac{b}{3}$ ja $\frac{h}{3}$. Seda on kerge tõestada, sest ristküliku puhul tuleb nulljoonel iga ristküliku nurga kohal ühelt küljelt teisele ülemínekul teha pööre ja seetõttu peab punktide *1* ja *2* vahel tuuma kontuur muutuma sirgjooneliselt. Teisel juhul on tuuma kontuur ringjoon raadiusega $\frac{1}{4} r$.

Ristlõike tuuma kasutatakse majade ja masinate alusmüüride arvutamisel. Näiteks, kui maapinnal lamav plaat on koormatud vertikaalselt, siis nende koormuste resultant ei tohi olla väljaspool plaadi kontuure, sest vastasel korral tekivad maapinna ja plaadi vahel soovimatud tõmbepinged.

92. Võllide paine ja vääne. Tõmme ja vääne.

Kui varb töötab korraga paindele (või tõmbele) ja väändele, siis tema ristlõigetes tekivad normaal- ja tangentsiaalpinged. Olgu kõige enam pingestatud punktis need pinged σ ja τ (joon. 398).



Joon. 398.

Materjal peab vastu, kui tugevusteooria abil arvutatud ekvivalentsed pinged on lubatavatest pingetest R väiksemad.

Kasutades maksimaalsete pingete teooriat[1] [vt. v. (125)], leiame:

$$\sigma_{k\,max} = = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \leqslant R. \qquad (282)$$

Kasutades maksimaalsete tangentsiaalpingete teooriat [vt. v. (126)], saame:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant R. \qquad (283)$$

Võnkekoormuste puhul viimane valem võtab kuju [vt. v. (131)]

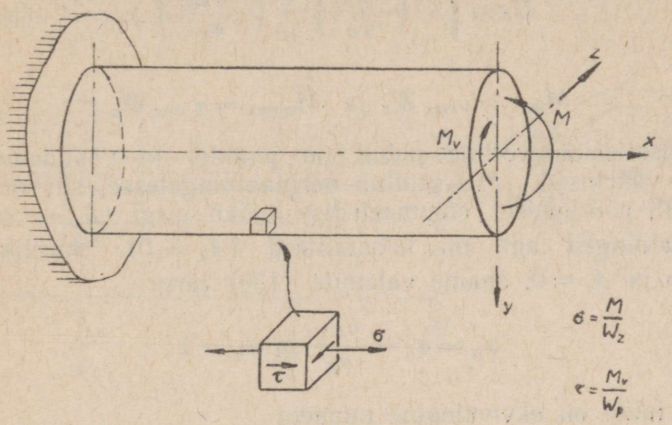
$$\sigma_e = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{max}}{\varphi_\sigma}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau_{max}}{\varphi_\tau}\right)^2} \leqslant R, \qquad (284)$$

kus σ_{max} ja τ_{max} on maksimaalsed tsükli pinged;

[1] Seda teooriat soovitatakse kasutada haprate materjalide, näiteks malmi, puhul.

φ_σ ja φ_τ — lubatavate pingete vähendamistegurid võnkekoormuste puhul.

Ümmarguse ristlõikega võllil on painde ja väände tõttu tekkinud maksimaalsed pinged alati välispinnal asuvates punktides (joon. 399).



Joon. 399.

Sel juhul

$$\sigma = \frac{M}{W_z} \quad \text{ja} \quad \tau = \frac{M_v}{W_p},$$

kus M ja M_v on painde- ja väändemoment võlli kõige rohkem pingestatud lõikes;

W_z ja W_p — ristlõike vastupidavusmomendid paindel ja väändel; täis- ja õõnsate võllide puhul $W_p = 2W_z$.

Ümmarguse ristlõikega võlli puhul saame valemeist (282) — (284) vastavate asenduste tulemusena kuju

$$\sigma_e = \frac{M_e}{W_z} \leqslant R. \tag{285}$$

Suurust M_e, mis on saadud arvutusvõrrandis, nimetatakse ekvivalentseks ehk arvutusmomendiks. Selle momendi väärtuseks on:

maksimaalsete pingete teooria järgi

$$M_e = \frac{1}{2}\,(M + \sqrt{M^2 + M_v^2}); \tag{286}$$

maksimaalsete tangentsiaalpingete teooria järgi

$$M_e = \sqrt{M^2 + M_v^2}. \qquad (287)$$

Võnkekoormuste puhul võtab viimane valem järgmise kuju:

$$M_e = \sqrt{\left(\frac{M_{max}}{\varphi_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{M_{v\,max}}{\varphi_\tau}\right)^2}, \qquad (288)$$

kus

$$M_{max} = \sigma_{max} W_z \text{ ja } M_{v\,max} = \tau_{max} W_p.$$

Transmissioonivõllide puhul on painde- ja väändemomendil jäävad väärtused. Mis puutub normaalpingetesse, siis muutuvad nad võlli pöörlemisel sümmeetrilise tsükli järgi ($\Delta_\sigma = \infty$), tangentsiaalpinged aga on konstantsed ($\Delta_\tau = 0$). Järelikult kui $\Delta_\sigma = \infty$ ja $\Delta_\tau = 0$, saame valemite (130) järgi

$$\varphi_\sigma = \alpha_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_T} \text{ ja } \varphi_\tau = 1.$$

Sel juhul on ekvivalentne moment

$$M_e = \sqrt{\left(\frac{M}{\alpha_\sigma}\right)^2 + M_v^2}. \qquad (289)$$

Ülesanne 22. Anname skeemi, mille järgi soovitatakse arvutada terasvõlli *AB* (joon. 400) läbimõõtu *d*, kui see on koormatud paindega rihmaratastele *I* ja *II* (või hammasratastele) rakendatud piirdejõududest P_1 ja P_2 ning väändega momendist $M_v = P_1 r_1 = P_2 r_2$.

Kui võll pöörleb pöörete arvuga *n* pööret minutis ja annab üle võimsust *N* HJ, siis leiame väändemomendi valemi (250) järgi, s. t.

$$M_v = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ kgcm}.$$

See moment mõjub võllile ainult *CD* piirides. Selle piirkonna jaoks on M_v epüür ristkülik.

Lahutades jõud P_1 ja P_2 vertikaalses ja horisontaalses suunas, tuleb võlli *AB* jaoks ehitada kaks epüüri momentidele M' ja M''. Esimene ehitatakse vertikaalsete põikjõudude P_1' ja P_2' abil, teine — horisontaalsete põikjõudude P_1'' ja P_2'' abil.

Vastavalt kõikidele ehitatud epüüridele[1] on pingestatuimaks lõige *C*. Selles lõikes võrdub summaarne paindemoment M_C momentide M_C' ja M_C'' geomeetrilise summaga. Selle momendi võib leida graafiliselt ristküliku diagonaalina (vt. joonis) või analüütiliselt järgmise valemi abil

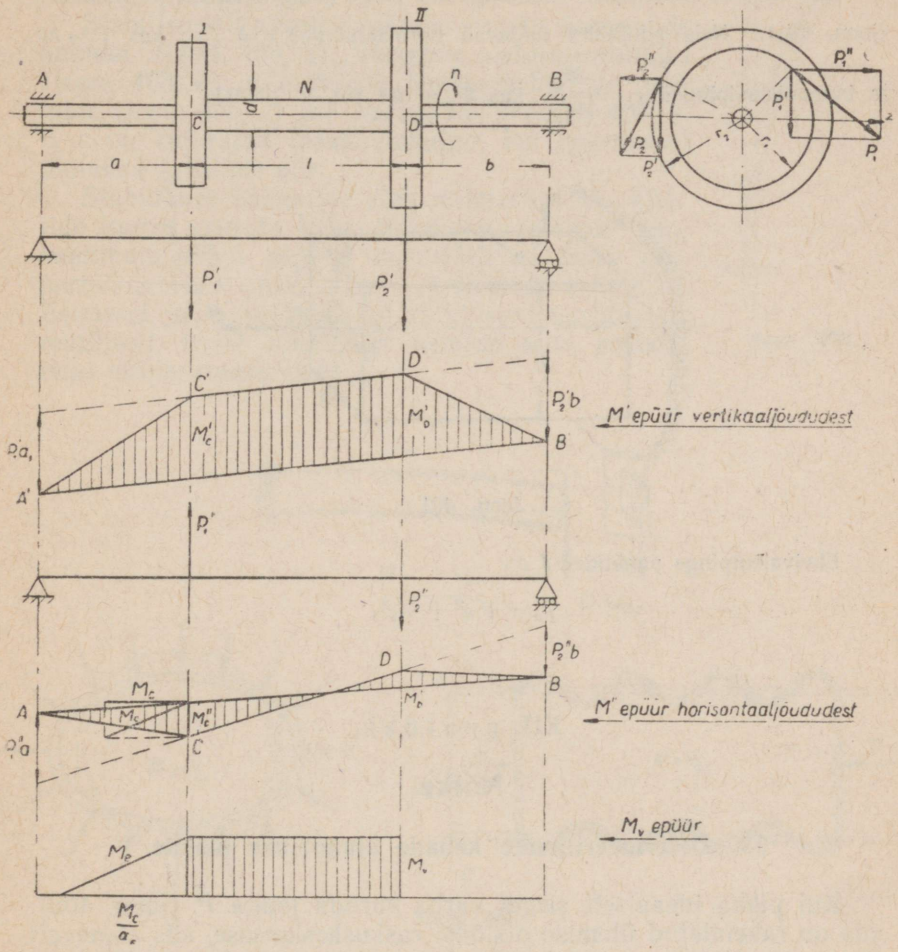
$$M_C = \sqrt{(M_C')^2 + (M_C'')^2}.$$

[1] Epüüride ehitamine on läbi viidud autori (A. Popov) poolt esitatud viisil, mis on toodud joonisel 320.

Arvestades väändemomendi mõju, leiame valemi (289) järgi lõike C kohta ekvivalentmomendi

$$M_e = \sqrt{\left(\frac{M_C}{\alpha_\sigma}\right)^2 + M_v^2} = \sqrt{\frac{(M_C')^2 + (M_C'')^2}{(\alpha_\sigma)^2} + M_v^2}.$$

Seda saab kergesti leida ka graafiliselt, sest M_e on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus, mille kaatetid võrduvad $\frac{M_C}{\alpha_\sigma}$ ja M_v (joon. 400).



Joon. 400.

Asetades võrrandisse (285) $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$, saame

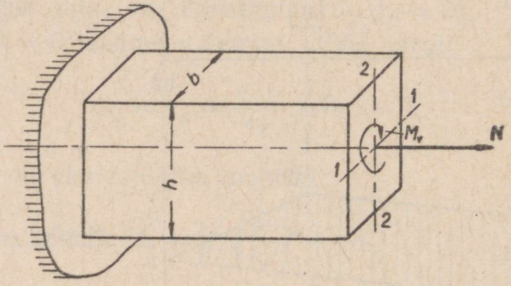
$$\frac{32\,M_e}{\pi d^3} \leq R,$$

kust otsitav võlli läbimõõt on

$$d=\sqrt[3]{\frac{32M_e}{\pi R}}.$$

Lõike raskuskeskmesse rakendatud tõmbejõu (või survejõu) N ja väändemomendi M_v samaaegsel mõjumisel arvutus toimub ekvivalentsete pingete järgi [vt. v. (282)—(284)].

Ülesanne 23. Täisnurkse ristlõikega tala kõige pingestatumaks on punktid 1 (joon. 401). Neis punktides mõjuvad normaalpinged $\sigma=\frac{N}{F}$, kus $F=hb$, ja tangentsiaalpinged $\tau_1=\frac{M_v}{W_p}$, kus $W_p=ab^3$ [vt. v. (262)].



Joon. 401.

Ekvivalentpinge punktides 1 on

$$\sigma_e=\sqrt{\sigma^2+4\tau_1^2}.$$

XII peatükk.

Nõtke.

93. Deformeeritavate kehade stabiilsuse mõiste.

Kui pikka ideaalselt sirget varba suruda jõuga P (joon. 402), mis on rakendatud ülemise otslõike raskuskeskmesse, siis olenevalt P suurusest jääb varva telg sirgeks või kõverdub. Katse näitab, et kui $P<P_{kr}$, siis telg jääb sirgeks, kui aga $P>P_{kr}$, siis ilmneb deformatsioon, mida nimetatakse n õ t k e k s.

Jõudu P_{kr}, mille juures toimub ühe tasakaalu kujust üleminek teise, nimetatakse k r i i t i l i s e k s j õ u k s. See jõud oleneb varva pikkusest, ristlõike kujust, otslõigete kinnitusviisist ja mater-

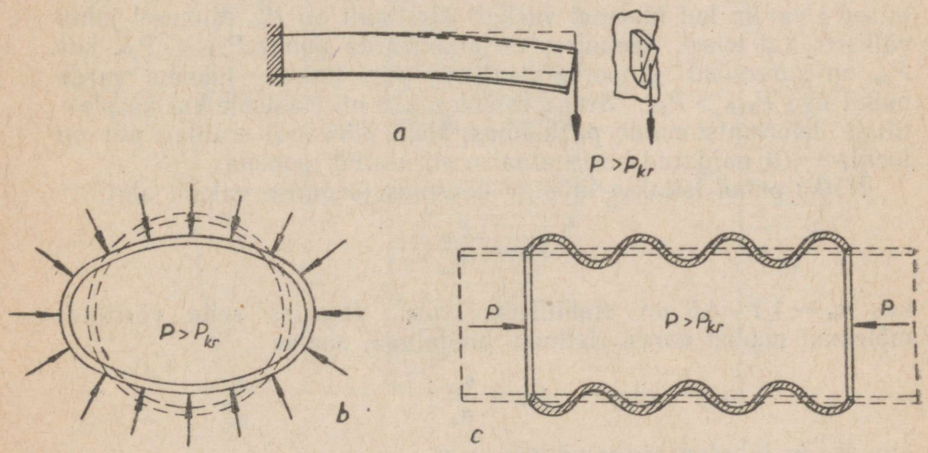
jali kvaliteedist. Varb kaotab oma stabiilsuse, kui jõud P ületab P_{kr} väärtuse.

Süsteemi (näiteks silla sõrestik), mis koosneb survejõududega koormatud varrastest, tuleb kontrollida stabiilsuse suhtes. Süsteemi stabiilsus jääb püsima, kui varrastele rakendatud jõud ei ületa kriitilisi jõude. Selle tingimuse mittetäitmine põhjustab üksikute varraste läbinõtkumist ja seoses sellega ka kogu süsteemi purunemist.

Joon. 402.

Stabiilsuse kadumise nähtus esineb konsoolide paindel (joon. 403, a), rõngaste deformeerumisel (joon. 403, b), silindriliste õhukeseseinaliste anumate (joon. 403, c) jne. surumisel. Joonisel 403, a, b, c on kujutatud tasakaalukujud, kui koormused ületavad kriitilise piiri.

Stabiilsuse kadumine võib mitmesuguste objektide juures esineda kahel juhul: kui esialgse tasakaalukuju puhul pinged materjalis ei ületa proportsionaalsuse piiri, ja kui nad ületavad selle piiri. Esimesel juhul saab objekti stabiilsust uurida teoreetiliselt, teisel juhul aga tehakse seda sagedamini eksperimentaalselt.

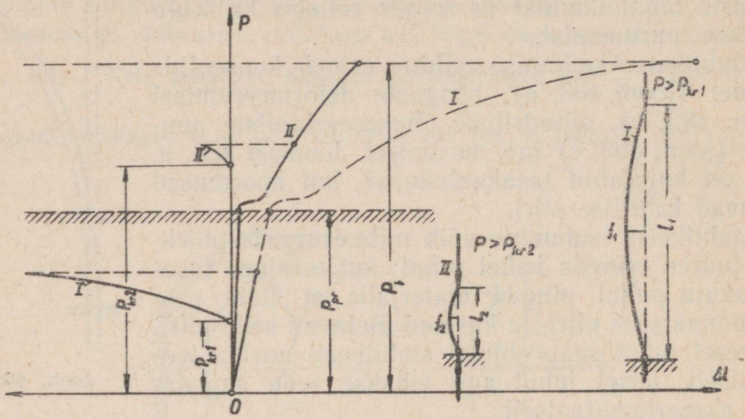


Joon. 403.

94. Nõtke arvutuse põhivalem.

Võtame kaks terasvarrast I ja II (joon. 404), mis on sama ristlõikega ja samast materjalist, kuid erineva pikkusega l_1 ja l_2. Koormame kumbagi järkjärgult suureneva piki telge suunatud jõuga P. Kui mõlemal juhul õnnestuks läbi viia ainult puhtsurvet, siis

olenevus koormuse P ja lühenemise Δl vahel nii pika kui ka lühikese varda puhul kujutuks kahe kõvera *I* ja *II* näol. Kriitiliste koormuste puhul muutub puhtsurve nähtus keerukamaks nõtke olemasolu tõttu, mille mõjul tekivad varraste külgläbipaindumised f_1 ja f_2. Olenevust koormuse P ja keskmiste lõigete külgläbipaindumise vahel võib kujutada joonisel vasakul asuvates graafikutes. Ei ole raske kindlaks määrata, et pikemal vardal tekivad ümberpaigutu-



Joon. 404.

mised f varem kui lühemal vardal. Järelikult on P_{kr} esimesel juhul väiksem kui teisel. Seejuures on pika varda puhul $P_{kr1} < P_{pr}$, kus P_{pr} on survejõud proportsionaalsuse piiri juures, lühema varda puhul aga $P_{kr2} > P_{pr}$. Seega esineb nõtke nii elastsete kui ka plastiliste deformatsioonide piirkonnas. Neid piirkondi eraldav piir on joonisel 404 näidatud horisontaalse viirutatud joonena.

Nõtke puhul leitakse lubatav koormus järgmise valemi abil:

$$P_n = \frac{P_{kr}}{n_n},$$

kus $n_n = 1{,}7—3{,}5$ on stabiilsuse varu. Jagades selle võrrandi mõlemad pooled varda ristlõike pindalaga, saame

$$R_n = \frac{\sigma_{kr}}{n_n},$$

kus R_n on lubatav pinge nõtkel;

$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F}$ — kriitiline pinge.

Kui varras töötab ainult puhttõmbele või puhtsurvele, siis lubatav pinge on leitav järgmise valemiga (vt. p. 13):

$$R = \frac{\sigma_T}{n_T} \quad \text{või} \quad R = \frac{\sigma_b}{n_b}.$$

Suhet

$$\varphi_n = \frac{R_n}{R} = \frac{\sigma_{kr}}{n_n R} \tag{291}$$

nimetame lubatavate pingete vähendamisteguriks nõtkel. Tehes asenduse $R_n = \frac{P_n}{F}$, saame, et

$$P_n = \varphi_n F R$$

või

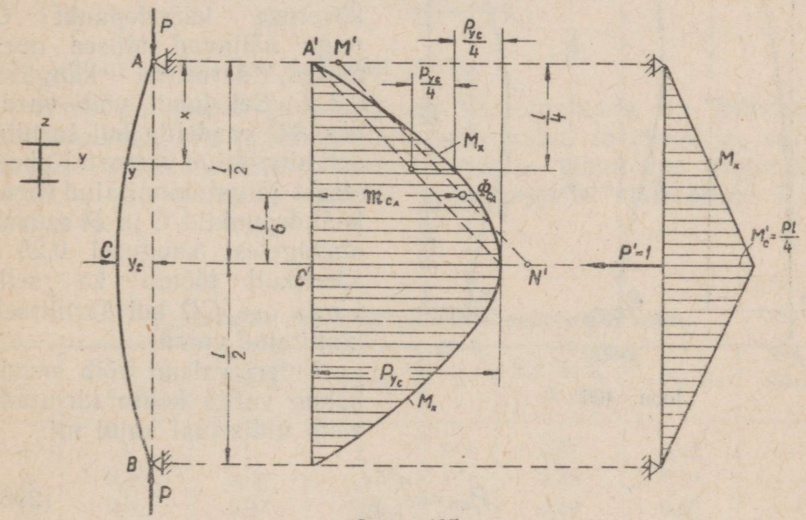
$$\sigma_e = \frac{P_n}{\varphi_n F} = R. \tag{292}$$

Suurust σ_e nimetame ekvivalentseks pingeks. Saadud valemit kasutame varraste nõtkele arvutamise võrrandina.

95. Euleri valemid.

Toome valemid P_{kr} ja σ_{kr} arvutamiseks juhuks, kui varda kriitilised pinged ei ületa proportsionaalsuse piiri $\sigma_{kr} \leqslant \sigma_{pr} = \frac{P_{pr}}{F}$.

Anname valemi P_{kr} arvutamiseks, mille tuletas geniaalne õpetlane L. Euler, Vene Teaduste Akadeemia liige.



Joon. 405.

Šarniirkinnitustega varraste puhul (joon. 405) on valemil järgmine kuju:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E J_z}{l^2}, \tag{293}$$

kus E on I järgu elastsusmoodul;

J — ristlõike minimaalne inertsmoment z-telje suhtes.

Kriitilise pinge leiame valemist

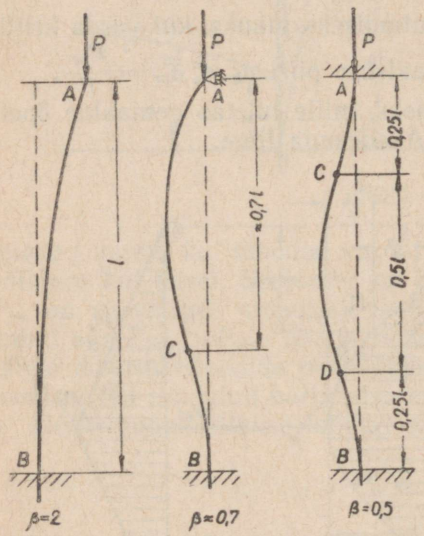
$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F} = \frac{\pi^2 E r_z^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{294}$$

kus $r_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}$ on inertsraadius, mis on arvutatud ristlõike minimaalse inertsmomendi järgi;

$$\lambda = \frac{l}{r_z} \tag{295}$$

nimetame varda saleduseks; ta oleneb varda otslõigete kinnitamise iseloomust.

Koostame Euleri valemid joonisel 406 toodud kolme varda kohta.



Joon. 406.

Esimese varda puhul valem (293) jääb maksma, kui l asemel võtta $2l$. Varda puhul, mille üks ots on jäigalt kinnitatud ja teine kinnitatud šarniirselt, on varda kõveruse käändepunkt C, nagu näitavad täpsed uurimused, šarniirist kaugusel 0,7 l. Sel juhul võib varda osa AC vaadelda kui šarniirselt kinnitatud varrast. Kahest otsast jäigalt kinnitatud varda käändepunktid C ja D asuvad otslõigetest kaugusel 0,25 l. Järelikult töötab ka selle varda osa CD kui šarniirselt kinnitatud varras.

Euleri valemi võib nende kolme varda kohta kirjutada veidi üldisemal kujul nii:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E J_z}{(\beta l)^2}, \tag{296}$$

kus β väärtused on 2, 0,7 ja 0,5 (joon. 406).

Varda saledus on

$$\lambda = \frac{\beta l}{r_z}. \tag{297}$$

Suurust β nimetame p i k k u s e t e g u r i k s; ta arvestab varda otste kinnitusviisi.

96. Empiirilised valemid.

Juhul, kui kriitilised pinged vardas ületavad proportsionaalsuse piiri ($\sigma_{kr} > \sigma_{pr}$), siis määratakse σ_{kr} harilikult katseliselt kindlaksmääratud valemite järgi. Need valemid on:

pehme terase puhul $\sigma_{kr} = 3210 - 11{,}6\lambda$; (298)

puidu puhul $\sigma_{kr} = 293 - 1{,}94\lambda$; (299)

Hooke'i seadusele mittealluvate materjalide, näiteks

malmi puhul $\sigma_{kr} = 7760 - 120\lambda + 0{,}53\lambda^2$. (300)

Toodud valemeid tuleb kasutada saleduste puhul, kui terasel $\lambda < 90$, puidul $\lambda < 110$, malmil $\lambda < 80$.

97. Tabelite kasutamine nõtke arvutamisel.

Nõtke arvutuse põhivalem on järgmise kujuga [vt. valem (292)]:

$$\sigma_e = \frac{P_n}{\varphi_n F} \leqslant R,$$

kus suurus φ_n leitakse valemist (291).

Kuna φ_n oleneb suurusest σ_{kr}, mis omakorda on saleduse λ funktsiooniks, siis praktiliste arvutuste puhul tavaliselt φ_n väljendatakse λ kaudu. Ehitiste projekteerimise tehnilistes tingimustes antakse φ_n leidmiseks tabelid mitmesuguste materjalide kohta (tabel 4).

Tabel 4.

φ_n väärtuste tabel mitmesuguste materjalide kohta.

λ	Ст. 1, 2, 3, 4	Ст. 5	Malm	λ	Ст. 1, 2, 3, 4	Ст. 5	Malm
0	1	1	1	110	0,51	0,42	—
10	0,99	0,99	0,97	120	0,45	0,37	—
20	0,97	0,97	0,91	130	0,40	0,32	—
30	0,94	0,94	0,81	140	0,35	0,28	—
40	0,89	0,89	0,69	150	0,32	0,26	—
50	0,85	0,85	0,57	160	0,29	0,24	—
60	0,80	0,80	0,44	170	0,26	0,22	—
70	0,74	0,73	0,34	180	0,24	0,20	—
80	0,68	0,65	0,26	190	0,21	0,19	—
90	0,63	0,57	0,20	200	0,19	0,17	—
100	0,57	0,50	0,16				

98. Nõtke arvutamise näited.

Anname tüüpilisi nõtke arvutamise näiteid.

Ülesanne 24. Leiame ⌶-ristlõike numbri teraspostile, pikkusega $l = 5$ m. Ta on mõlema otsaga sisse müüritud ($\beta = 0{,}5$) ja koormatud jõuga $P_n = 10\,000$ kg.

Võttes posti materjali kohta $R = 1500$ kg/cm², leiame valemist (292):

$$\varphi_n F = \frac{P}{R} = \frac{10\,000}{1500} = 66{,}6 \text{ cm}^2.$$

Kui post töötaks ainult puhtsurvele, siis vastavalt sortimendi tabelile võiks võtta ristlõike nr. 30 b ($F = 67{,}2$ cm² ja $r_z = 2{,}5$ cm). Sel juhul oleks posti saledus

$$\lambda = \frac{\beta l}{r_z} = \frac{0{,}5 \cdot 500}{2{,}5} = 100.$$

Kui $\lambda = 100$, siis tabelist 4 leiame, et $\varphi_n = 0{,}57$.
Järelikult

$$F = \frac{66{,}6}{0{,}57} \approx 117 \text{ cm}^2.$$

Leitud pindala järgi võtame nr. 45 a, mille $F = 102$ cm² ja $r_z = 2{,}89$. Siis saame vastavalt tabelile, kui $\lambda = \frac{250}{2{,}89} \approx 87$, et $\varphi_n = 0{,}65$.

Kontrollimisel leiame, et

$$F = \frac{66{,}6}{0{,}65} \approx 102 \text{ cm}^2.$$

Ülesanne 25. Leiame lubatava survejõu P_n vardale pikkusega $l = 2$ m, mis on ühe otsaga jäigalt kinnitatud ($\beta = 2$). Olgu varras valmistatud ümarterasest Ст. 5 läbimõõduga $d = 5$ cm.

Antud juhul on $F = \frac{\pi d^2}{4} = 19{,}64$ cm²; $J = \frac{\pi d^4}{64}$; $r = \sqrt{\frac{J}{F}} = \frac{d}{4} = 1{,}25$ cm;

$$\lambda = \frac{\beta l}{r} = \frac{2 \cdot 200}{1{,}25} = 320.$$

Võttes terase Ст. 5 puhul $E = 2\,175\,000$ kg/cm², $\sigma_T = 3500$ kg/cm², samuti võttes $n_T = 2$ ja $n_n = 3{,}5$, leiame valemite (294) ja (291) järgi:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2\,175\,000}{320^2} \approx 210 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\varphi_n = \frac{\sigma_{kr}}{\frac{\sigma_T}{n_n \frac{}{n_T}}} = \frac{210 \cdot 2}{3500 \cdot 3{,}5} = 0{,}034.$$

Võrrandist (292) leiame otsitava jõu P_n.

$$P_n = R \varphi_n F = 1750 \cdot 0{,}034 \cdot 19{,}64 = 1170 \text{ kg},$$

kus

$$R = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{3500}{2} = 1750 \text{ kg/cm}^2.$$

Ülesanne 26. Kontrollime varda stabiilsust, mille pikkus $l = 1$ m, mis on šarniirselt kinnitatud ($\beta = 1$) ja millele mõjub jõud $P = 1600$ kg. Varda ristlõikeks on võrdkülgne nurkteras nr. 4.

Kasutades sortimendi tabelit, saame $F = 3{,}08$ cm² ja $r = 0{,}78$ cm (minimaalne inertsraadius).

Tabelist 4 leiame, et kui $\lambda = \frac{l}{r} = \frac{100}{0{,}78} = 128$, siis $\varphi_n \approx 0{,}41$.

Kasutades valemit (292), leiame, et

$$\sigma_e = \frac{P}{\varphi_n F} = \frac{1600}{0{,}41 \cdot 3{,}08} = 1267 \text{ kg/cm}^2.$$

Kriitilise pinge vardas leiame valemi (294) järgi, arvestades, et $E = 2\,100\,000$ kg/cm²:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2\,100\,000}{128^2} = 1268 \text{ kg/cm}^2.$$

Survepinge on:

$$\sigma_s = \frac{P}{F} = \frac{1600}{3{,}08} = 519 \text{ kg/cm}^2.$$

Järelikult on stabiilsuse tagavara

$$n_n = \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_s} = \frac{1268}{519} \approx 2{,}4\,.$$

Sisukord.

I JAGU.

TEOREETILINE MEHAANIKA.

Lk.

Sissejuhatus 3

I OSA

STAATIKA.

I peatükk. **Põhimõisted. Staatika aksioomid.**

1. Kõva keha 4
2. Inertsi aksioom. Tasakaal 4
3. Jõud 5
4. Vastastikuse mõju aksioom 6
5. Kõva keha staatika aksioomid 6
6. Ekvivalentsed jõudude süsteemid 8
7. Rööpküliku aksioom 8
8. Toed ja reaktsioonid 11

II peatükk. **Vektoriaalarvutuse elemendid.**

9. Vektorite liitmine ja lahutamine 14
10. Vektori projektsioon teljele 17

III peatükk. **Ühte punkti rakendatud jõudude tasapinnaline süsteem.**

11. Geomeetriline meetod 20
12. Analüütiline meetod 24

IV peatükk. **Kaks paralleelset jõudu.**

13. Ühele poole suunatud kahe paralleelse jõu liitmine 26
14. Kahe mittevõrdse ja vastupidi suunatud paralleelse jõu liitmine 30
15. Jõupaar 31

V peatükk. **Tasapinnaliste jõupaaride teooria.**

16. Jõupaari moment 31
17. Ekvivalentsed jõupaarid 33
18. Jõupaaride liitmine. Jõupaaride tasakaal 34

VI peatükk. **Tasapinnalise jõudude süsteemi üldjuhtum.**

19. Jõu moment punkti suhtes 36
20. Tasapinnalise jõudude süsteemi taandamine jõuks ja jõupaariks 37
21. Tasapinnalise jõudude süsteemi tasakaal 40
22. Resultandi momendi teoreem. Ülesandeid 41

Lk.

VII peatükk. **Grafostaatika elemendid.**
23. Jõuhulknurk ja nöörhulknurk 45
24. Tasakaalu graafilised tingimused 48

VIII peatükk. **Ruumiline jõudude süsteem.**
25. Ühte punkti rakendatud jõudude süsteem 51
26. Jõu moment telje suhtes 56
27. Liikumatu telje ümber pöörelda võiva keha tasakaal 58
28. Ruumilise jõudude süsteemi tasakaalu võrrandid 60
29. Kummumiskindlus 65
30. Paralleelsete jõudude tsenter 66

IX peatükk. **Raskuskese.**
31. Keha raskuskese 68
32. Homogeense keha raskuskese 71
33. Sümmeetrilise keha raskuskese 72
34. Lihtsamate kujundite raskuskese 73

II OSA.

KINEMAATIKA.

X peatükk. **Punkti sirgjooneline liikumine.**
35. Põhimõisted 80
36. Liikumise võrrandid 80
37. Ühtlane liikumine 82
38. Punkti kiirus muutuval (mitteühtlasel) liikumisel 83
39. Ühtlaselt muutuv liikumine 84
40. Punkti kiirendus mistahes sirgjoonelisel liikumisel 85

XI peatükk. **Punkti kõverjooneline liikumine.**
41. Punkti kõverjooneline liikumine 86
42. Punkti kiirus kõverjoonelisel liikumisel 88
43. Punkti kiirendus kõverjoonelisel liikumisel 91
44. Punkti kiirendus ühtlasel liikumisel 93
45. Tangentsiaal- ja normaalkiirendus 96
46. Kiirenduse leidmine liikumise üldjuhul 99

XII peatükk. **Kõva keha lihtsamad liikumised.**
47. Translatoorne liikumine 101
48. Kõva keha pöörlemine liikumatu telje ümber 103

XIII peatükk. **Suhteline liikumine.**
49. Absoluutne liikumine, suhteline liikumine ja kaasaliikumine . . 109
50. Kiiruste liitmise teoreem 110

XIV peatükk. **Kõva keha tasaparalleelne liikumine.**
51. Tasaparalleelne liikumine 113
52. Tasapinnalise kujundi liikumine 114
53. Tasaparalleelse liikumise lahutamine translatoorseks liikumiseks ja pöörlemiseks 115
54. Tasapinnalise kujundi punktide kiirus 116
55. Tsentroidid 121
56. Tasapinnalise kujundi ümberpaigutamise teoreem 123
57. Paralleelsete telgede ümber pöörlemise liitmine 125

III OSA.

DÜNAAMIKA.

Lk.

XV peatükk. **Dünaamika aksioomid.**
58. Inertsi aksioom 132
59. Masspunkti dünaamika põhivõrrand 133
60. Vastastikuse mõju aksioom. Rööpküliku aksioom 135
61. Ühikute süsteem 136
62. Ülesandeid 137

XVI peatükk. **Hoo teoreem.**
63. Jõu töö 139
64. Jõu võimsus 142
65. Hoo teoreem 145
66. Mehaanilise energia jäävuse seadus 152
67. Masspunktide süsteemi hoog 154
68. Hoo teoreem masspunktide süsteemile 157

XVII peatükk. **D'Alembert'i lause.**
69. D'Alembert'i lause tuletamine 160
70. Inertsjõud kõva keha translatoorsel liikumisel 162
71. Inertsjõud kõva keha pöörlemisel 164

XVIII peatükk. **Mitteelastsete kehade põrge.**
72. Liikumise hulk ja jõu impulss 168
73. Põrge. Hetkelised jõud 170
74. Newtoni teoreem 171
75. Mitteelastne põrge 172

XIX peatükk. **Hõõrdumine mehhanismides.**
76. Põhiteadmeid hõõrdumisest 175
77. Hõõrdumine tasapinnal 177
78. Liuguri ja kruvi hõõrdumine 179
79. Hõõrdumine liugelaagris 182
80. Õlitatud kehade hõõrdumine ja hõõrdetegur vedelikulisel hõõrdumisel 184
81. Veerehõõrdumine 187

II JAGU.

TUGEVUSÕPETUS.

I OSA.

HOMOGEENNE PINGEOLUKORD.

Sissejuhatus 191
1. Põhimõisted 192
2. Põhilised hüpoteesid ja oletused 193
3. Ümberpaigutumiste ja deformatsioonide mõiste 194
4. Lõigete meetod. Pinged, jõud ja momendid lõikes 196
5. Deformeeritavas kehas toimuvate nähtuste teoreetilise tundmaõppimise kord 197

I peatükk. **Ühesuunaline tõmme ja surve.**
6. Varva tõmme 198
7. Proovikehadega teostatud katsete põhitulemusi staatilise tõmbe puhul 200

Lk.
8. Hooke'i seadus 204
9. Ahenemistegur 205
10. Tõmbedeformatsioonile kulutatav energia 205
11. Varva surve 207
12. Proovikehadega teostatud katsete põhitulemusi staatilise surve puhul 208
13. Varva staatilise tugevuse arvutamine tõmbel ja survel 210
14. Varva tõmme, arvestades omakaalu 212
15. Lihtsamad staatiliselt määramatud süsteemid 215
16. Algpinged ja temperatuurpinged 218
17. Pingete kontsentratsioon 220
18. Pinged varvas löökkoormuse puhul 221
19. Ringrõnga tõmme 223

II peatükk. **Nihe.**
20. Pingeolukord nihkel 224
21. Nihkekatsed 226
22. Hooke'i seadus nihkel 228
23. Nihkel kulutatav energia 229
24. Seos tõmbe-elastsusmooduli ja nihkemooduli vahel 230
25. Staatilise tugevuse arvutamine nihkel 231
26. Arvutusnäited nihkele 232

III peatükk. **Metalli staatilisele tugevusele mõjuvad tegurid. Metallide väsimus.**
27. Metalli käitumine korduvate staatiliste koormamiste puhul. Kalestus 234
28. Termilise töötlemise mõju metalli staatilisele tugevusele 235
29. Kõrgendatud temperatuuri mõju metalli tugevusele 236
30. Metallide roomavus 237
31. Võnkekoormuste iseloomustus 238
32. Metallide väsimus 239
33. Asümmeetrilise tsükli pingete amplituudi piirid, olenevalt väsimus- ja voolavuspiirist 241
34. Võnketugevuse võrrand 242
35. Väsimuspiiri vähendavad tegurid 245
36. Võnketugevuse arvutuse näiteid 246

IV peatükk. **Kahesuunaline pingeolukord.**
37. Kahesuunaline tõmme ja surve 247
38. Mahuline deformatsioon ja Hooke'i seadus 250
39. Deformatsiooni energia 251
40. Põhilised tugevusteooriad kahesuunalise pingeolukorra kohta . 251
41. Tugevusteooriate kasutamine staatilise tugevuse arvutamisel . . 253
42. Õhukeseseinaliste anumate arvutamine 253
43. Kahesuunalise pingeolukorra üldjuhtum 256
44. Peapinged ja nende suunad. Maksimaalne tangentsiaalpinge 257
45. Kahesuunalise pingeolukorra üldjuhu ja ühesuunalise tõmbe ja nihke tugevusvõrrand 260

II OSA.

PAINE.

V peatükk. **Varva tasapinnaliste lõigete geomeetrilised karakteristikad.**
46. Tasapinnalise kujundi staatiline moment 262
47. Tasapinnalise kujundi inertsmoment 262

Lk
48. Telgede paralleellüke 267
49. Telgede pööramine kujundi raskuskeskme suhtes 267
50. Peateljed ja kujundi pea-inertsmomendid 268
51. Inertsmomentide arvutamine liitkujundi puhul 270

VI peatükk. **Puhtpaine.**
52. Pingeolukord puhtpaindel 272
53. Lõike pöördenurga ja varva läbipainde määramine 277
54. Paindedeformatsioonile kulutatav energia 277
55. Varva tugevusarvutus puhtpaindel 278
56. Varva ristlõigetest paindel 279
57. Paindemomentide epüürid puhtpaindel 281
58. Tala tugevusarvutuse näide 282

VII peatükk. **Lamepaine.**
59. Lamepainde mõiste. Ligikaudse teooria oletused 283
60. Paindemomentide ja lõikejõudude leidmine. Žuravski teoreem . . 284
61. Paindemomentide ja lõikejõudude epüüride konstrueerimine . . 287
62. Tangentsiaalpinged lamepainde puhul 297
63. Peapinged lamepainde puhul 300
64. Taladega teostatud lamepainde-katsete andmeid 302
65. Tala tugevusarvutus 303
66. Needitud tala arvutamine 305
67. Võrdvastupidav tala 307
68. Lehtvedru konstrueerimine ja arvutamine 308
69. Tala paindumisest peatasapinnas, mis ei ole sümmeetriatasapinnaks. Paindetsenter 310

VIII peatükk. **Tala elastne joon.**
70. Elastse joone elementide kindlaksmääramine Maxwelli-Mohri meetodil 312
71. $\Sigma M_x M_x' \Delta x$ leidmine fookuspunktide abil 314
72. Fookusmomentide leidmine 316
73. Läbipainete ja pöördenurkade leidmise näiteid 319

IX peatükk. **Staatiliselt määramatud talad.**
74. Staatiliselt määramatute jätkuvate talade mõiste. Jäikkinnitusega talad 322
75. Kolme toemomendi võrrand 325

III OSA.

VÄÄNE JA LIITTUGEVUS.

X peatükk. **Vääne.**
76. Ümmarguse ristlõikega võlli väändel tekkiv pingeolukord . . . 331
77. Väändenurga määramine 335
78. Väändedeformatsiooniks kulutatav energia 335
79. Võlli tugevusarvutus 336
80. Õõnsa võlli arvutusvalemid 337
81. Pöörlevate võllide arvutamine 338
82. Väändemomentide, väändepingete ja väändenurkade epüürid . . 339
83. Astmelise võlli väändenurga määramine 341
84. Juhtum, kus väändemomendid ei ole staatiliselt määratavad . . 342
85. Pingete kontsentratsioon väändel 343
86. Ristkülikulise ristlõikega varva arvutusvalemid 344
87. Spiraalvedrude arvutamine 345

Lk.

XI peatükk. **Jõudude ja momentide talale mõjumise mitmesugused juhud.**

88. Vildakpaine 347
89. Vildakpaine koos tõmbega 351
90. Ekstsentriline tõmme ja surve 351
91. Ristlõike tuum 354
92. Võllide paine ja vääne. Tõmme ja vääne 356

XII peatükk. **Nõtke.**

93. Deformeeritavate kehade stabiilsuse mõiste 360
94. Nõtke arvutuse põhivalem 361
95. Euleri valemid 363
96. Empiirilised valemid 365
97. Tabelite kasutamine nõtke arvutamisel 365
98. Nõtke arvutamise näited 366

Vastutav toimetaja
H. Kuldma.
Tehniline toimetaja
E. Lellep.

Ladumisele antud 25. VIII 1950.
Trükkimisele antud 28. XI 1950.
Trükiarv 1500. Paber 60×92, 1/16.
Trükipoognaid 23,5. Arvutus-poognaid 21,46. MB-08691.
Trükikoda „Hans Heidemann", Tartu, Vallikraavi 4. Tellimise nr. 2463.

На эстонском языке.

И. Каценеленбоген и А. Попов.
Техническая механика.

Hind rbl. 10.70

Trükivigu

Lk.	Rida	On trükitud	Peab olema	Kelle süü läbi tekkinud
81	9. alt	$\varphi = \frac{\pi}{-} t$	$\varphi = \frac{\pi}{2} t$	Trükikoda
89	7. ülalt	MM_1-ga	$\overline{MM_1}$-ga	Toimetaja
92	6. alt	Vektor MN	Vektor $\overline{MN}$	Trükikoda
96	16. ülalt	37 m/sek^2.	37 cm/sek^2.	Toimetaja
106	6. alt	$= \frac{\pi n}{3}$	$= \frac{\pi n}{30} =$	Trükikoda
146	3. alt	$\frac{1}{s}\left(\frac{m^2 v}{2} -\right.$	$\frac{1}{s}\left(\frac{m v^2}{2} -\right.$	„
196	3. ülalt	jääkdeformatsiooonideks,	jääkdeformatsioonideks,	Korrektor
240	3. ülalt	pinge arvu muutumise	pinge muutumise	Toimetaja
316	16. alt	$+ \mathfrak{M}_{BA} M'_{AB}) l$	$+ \mathfrak{M}_{BA} M'_{BA}) l$	„
321	2. ülalt	$\Theta_B = \frac{1}{6EJ}$	$\Theta_B = -\frac{l}{6EJ}$	„
358	3. alt	$\sqrt{(M_C)^2 + (M_C)^2}$.	$\sqrt{(M'_C)^2 + (M''_C)^2}$.	Trükikoda

Lk. 27 joonisel 36 punkti M rakendatud jõud $\mathfrak{P}_1$ ja $\mathfrak{P}_2$ peavad olema tähistatud $\mathfrak{P}'_1$ ja $\mathfrak{P}'_2$.

Rbl. 10.70

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00448713 0