ТАРТУСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ-ИНФОРМАТИКИ
ИНСТИТУТ ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ

Ольга Лиивапуу

Связности на расслоениях, суперсвязности и их приложения в теории поля

Магистерская работа

Руководитель: В. Абрамов,
канд. физ-мат. наук

ТАРТУ 2007

Содержание

Введение **3**

Глава I. Дифференциальная геометрия расслоений **6**

§ 1. Понятие расслоения 6
§ 2. Главные расслоения 8
§ 3. Ассоциированное расслоение 9
§ 4. Расслоение реперов 11
§ 5. Тензорная алгебра и тензорные расслоения 14
§ 6. Дифференциальные формы 19
§ 7. Производная Ли 21
§ 8. Комплекс де Рама и группы когомологий гладкого многообразия 23
§ 9. Вертикальный вектор 24
§ 10. Эквивариантное расслоение 26
§ 11. Эквивариантные отображения 27
§ 12. Дифференциальные формы со значениями в расслоении 29

Глава II. Теория связностей **32**

§ 1. Понятие связности и формы связности 32
§ 2. Ковариантное дифференцирование 35
§ 3. Параллельный перенос 40
§ 4. Аффинные связности 41
§ 5. Римановы многообразия и связность Леви-Чивита 43

Глава III. Теория суперсвязностей **47**

§ 1. Суперпространства и супералгебры 47
§ 2. Суперсвязность и оператор суперсимметрии 52

Литература **61**

Resümee **63**

Summary **65**

Введение

Одними из основных понятий современной дифференциальной геометрии являются понятия расслоения и связности. Теория расслоений и связностей на них возникла и стала активно развиваться в первой половине прошлого века. Понятие расслоения является естественным и органичным обобщением такой структуры на дифференцируемом многообразии, как совокупность всех касательных пространств этого многообразия. Так как структура касательного пространства к многообразию в некоторой точке зависит от этой точки, мы приходим естественным образом к понятию слоя расслоения, который в случае касательных пространств является конечномерным векторным пространством. Обобщение этой конструкции приводит нас к понятию векторного расслоения. Не столь очевидным обобщением этой конструкции является понятие главного расслоения, когда, несколько упрощая ситуацию, можно считать, что слоем является группа Ли. Однако, именно главные расслоения оказались адекватным геометрическим формализмом для описания калибровочных теорий полей. Примером калибровочного поля может служить электромагнитное поле, хотя в этом случае калибровочная структура не играет особой роли в теории, так как калибровочная группа абелева. Первая неабелева калибровочная теория с калибровочной группой $SU(2)$ была построена в 50-х годах прошлого века в работе Ч. Янга и Р. Миллса [16]. Позже выяснилось, что эта теория описывает сильные взаимодействия между частицами в ядрах атомов. Вдальнейшем были построены и другие калибровочные теории поля. Теория калибровочных полей оказалась настолько успешной, что позволила построить объединённую теорию электромагнитных и слабых взаимодействий.

Понятие связности возникает из задачи параллельного переноса касательного вектора к многообразию вдоль некоторой кривой. В терминах современной теории главных расслоений связность может быть определена либо с помощью горизонтального распределения в касательных пространствах расслоений, либо с помощью формы связности. На векторном расслоении связность определяется с помощью ковариантного дифференцирования. В 80-х годах прошлого века Д. Куиллен [14] предложил такое обобщение понятия связности на векторном расслоении, которое использует структуры супералгебр и суперпространств. Это обобщение было названо суперсвязностью. Следует отметить, что в статье Д. Куиллена [14] супер-

связность была использована для построения обобщённого характеристического класса Тома векторного расслоения. Однако, это понятие оказалось плодотворным и в других областях математики и теории поля. Оказалось, что суперсвязность может быть использована в исследованиях геометрических структур топологических теорий поля. Первая топологическая теория поля была построена Э. Виттеном в статье [15]. Базовым пространством этой теории является 4-х мерное риманово многообразие. Лагранжиан этой теории обладает BRST-суперсимметрией и поэтому квантовая теория была построена Э. Виттеном на основе BRST-квантования. Кроме того, им было показано, что корреляционные функции квантовой теории не зависят от римановой метрики базового многообразия и совпадают с хорошо известными инвариантами Дональдсона [13] 4-х мерных многообразий. Позже М. Атья и Л. Джеффри в статье [11] показали, что лагранжиан топологической теории поля может быть получен из формы обобщённого класса Тома, если рассмотреть его в случае бесконечномерного главного расслоения неприводимых связностей. Следует отметить, что структурной группой этого расслоения является бесконечномерная группа Ли калибровочных преобразований. Из работы М. Атьи и Л. Джеффри следовало, что адекватным геометрическим формализмом топологической теории поля является формализм суперсвязностей. В данной диссертации, следуя геометрическому подходу Атьи–Джеффри, мы показываем, что в основе BRST-суперсимметрии лагранжиана топологической теории поля лежит тождество Бьянки для кривизны некоторой суперсвязности (глава III). Мы показываем, каким образом оператор BRST-суперсимметрии может быть выведен из тождества Бьянки.

Первые две главы данной работы являются реферативными и написаны в большей части на основе книг [2], [12]. В первой главе описаны главные типы расслоений, т.е. векторное расслоение и главное расслоение, причём доказывается, что каждый слой главного расслоения диффеоморфен группе Ли. Показано, каким образом строится ассоциированное расслоение к данному главному расслоению, если имеется конечномерное представление структурной группы. В качестве примеров рассмотрены расслоения реперов и касательное расслоение к данному многообразию. Приводятся некоторые операции над расслоениями, с помощью которых можно из одних расслоений построить другие. Кроме того, в первой главе приводится описание хорошо известных дифференциально-геометрических структур таких, как дифференциальные формы и их внешние диференцирования, производная Ли, комплекс де Рама и груп-

пы когомологий гладкого многообразия. Первая глава заканчивается такими понятиями, как вертикальный вектор, эквивариантные расслоения, эквивариантные отображения и дифференциальные формы со значениями в расслоении.

Во второй главе излагается теория связностей на расслоениях. Эта теория описывает те отображения между слоями расслоения, которые служат обобщением паралльного переноса векторов. В работе приводится два эквивалентных определения связности, одно из которых базируется на понятии распределения горизонтальных подпространств в касательном пространстве, а другое на понятии 1–формы связности. Более подробно описывается форма связности и её форма кривизны на главных расслоениях. Кроме того, определено понятие ковариантного дифференцирования на векторном расслоении и устанавлено соотношение между формой связности на главном расслоении и ковариантным дифференцированием на соответствующем ассоциированном расслоении. Затем описываются параллельный перенос слоёв расслоения вдоль некоторой кривой и связности на касательном расслоении — аффинные связности и их кручения. В последнем параграфе рассматриваются такие понятия, как риманова структура на гладком многообразии, связность Леви-Чивита и риманова кривизна.

В третьей главе прежде всего даются определения таких понятий, как суперпространство и супералгебра. Описываются некоторые примеры супералгебр, такие как алгебра Грассмана и алгебра Клиффорда. Приводится концепция суперсвязности, предложенная Куилленом. Второй параграф написан на основе статьи [10] и содержит основной результат данной диссертации: показывается, что лагранжиан топологической теории поля на 4-х мерном многообразии может быть выведен из тождества Бьянки для кривизны некоторой суперсвязности, тем самым мы полагаем, что BRST-суперсимметрия данного лагранжиана может быть получена из некоторой суперсвязности, если рассматривать её как оператор, действующий на пространстве дифференциальных форм.

Глава I

Дифференциальная геометрия расслоений

§ 1. Понятие расслоения.

Пусть $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow M$ гладкое отображение многообразия $\mathcal{E}$ на многообразие M.

Определение 1.1. Тройка $(\mathcal{E}, \pi, M)$ называется *расслоением* со стандартным слоем E над M, где E — гладкое многообразие, если

(a) существует покрытие многообразия M открытыми множествами, т.е. найдётся такое семейство открытых множеств $\{U_i\}_{i\in J}$, где J некоторое множество индексов, что $U_i \subset M$, $M = \bigcup_{i\in J} U_i$;

(b) для каждого $i \in J$ существует диффеоморфизм

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times E$$

такой,

что $\pi|_{\pi^{-1}(U_i)} = pr \circ \phi_i$, где $pr : U_i \times E \longrightarrow U_i$ проекция на первый сомножитель, т.е. $pr(x, y) = x$, где $x \in U_i$, $y \in E$.

Для расслоения $(\mathcal{E}, \pi, M)$ многообразие $\mathcal{E}$ называют *пространством расслоения, M — базой* этого расслоения, а π — *проекцией* пространства расслоения на базу. Пусть x некоторая точка многообразия M. Пара $\{U_i, \phi_i\}$, где $i \in J$, $x \in U_i$ называется *локальной тривиализацией* расслоения в окрестности точки x. Расслоение $(\mathcal{E}, \pi, M)$ называется *тривиальным расслоением* над M, если $\mathcal{E} = M \times E$, в этом случае $\forall x \in M$, $\forall y \in E$ имеем $\pi(x, y) = x$. В дальнейшем для обозначения расслоения наряду с тройкой $(\mathcal{E}, \pi, M)$ мы будем использовать символ, обозначающий пространство расслоения, т.е. $\mathcal{E}$.

Согласно определению 1.1,

$$\pi(\phi_i^{-1}(x, y)) = x, \quad \forall i \in J,\ \forall x \in U_i,\ \forall y \in E.$$

Прообраз $\pi^{-1}(x) \subset \mathcal{E}$ точки $x \in M$ называется *слоем* расслоения $\mathcal{E}$ над точкой x и из определения 1.1 следует, что каждый слой диффеоморфен стандартному слою E.

Для двух локальных тривиализаций $\{U_i, \phi_i\}$, $\{U_j, \phi_j\}$ в окрестности точки x диффеоморфизмы $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times E \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times E$ порождают отображения

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Diff}(E),$$

т.е. гладкие отображения $U_i \cap U_j$ в группу гладких преобразований слоя E. Семейство отображений $\{g_{ij}\}_{i,j\in J}$ называется *функциями перехода* расслоения $(\mathcal{E}, \pi, M)$, подчинёнными покрытию $\{U_i\}_{i\in J}$. Для функций перехода имеет место условие коцикла

$$g_{ij} \circ g_{jk} \circ g_{ki} = id_E, \quad \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset,$$

где $id_E : E \longrightarrow E$ тождественное преобразование стандартного слоя E.

Определение 1.2. Расслоение $(\mathcal{E}, \pi, M)$ называется *векторным расслоением,* если его стандартный слой E является векторным пространством и диффеоморфизмы ϕ_i можно выбрать так, что диффеоморфизмы $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times E \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times E$ будут обратимыми линейными преобразованиями векторного пространства E (т.е. изоморфизмами).

Сечением s векторного расслоения $(\mathcal{E}, \pi, M)$ называется отображение $s : M \longrightarrow \mathcal{E}$ такое, что $\pi \circ s(x) = x$, $\forall x \in M$. Это значит, что сечение отображает точку пространства базы в слой над этой точкой. Символом $\Gamma(M, \mathcal{E})$ будет обозначаться пространство всех гладких сечений расслоения $\mathcal{E}$.

Пусть задано гладкое отображение ϕ многообразия M в другое многообразие N и пусть $(\mathcal{E}, \pi, N)$ векторное расслоение над многообразием N. Опишем конструкцию, позволяющую перенести структуру расслоения $\mathcal{E}$ с многообразия N на многообразие M. Определим отображение $\pi' : M \times \mathcal{E} \longrightarrow M \times N$ формулой $\pi'(x, \nu) = (x, \pi(\nu))$, где $x \in M$, $\nu \in \mathcal{E}$. Не сложно убедится, что π' является гладким отображением и оно определяет структуру векторного расслоения на $M \times \mathcal{E}$ над $M \times N$. Определим подмногообразия $\phi^*\mathcal{E}$ многообразия $M \times \mathcal{E}$ следующей формулой:

$$\phi^*\mathcal{E} = \{(x, \nu) \in M \times \mathcal{E} : x \in M, \nu \in \mathcal{E}_{\phi(x)}\} \subset M \times \mathcal{E}.$$

Легко заметить, что $\phi^*\mathcal{E}$ является ограничением векторного расслоения $M \times \mathcal{E}$ на подмногообразие $\Gamma(\phi) = \{(x, \phi(x)) \in M \times N\}$, которое естественным образом отождествляется с M. Отсюда следует, что $\phi^*\mathcal{E}$ является векторным расслоением над M и это расслоение называется векторным расслоением над M, полученным переносом пространства расслоения $\mathcal{E}$ с N на M. При этом имеем отображение ϕ^*, которое каждому гладкому сечению векторного расслоения $\mathcal{E}$ сопоставляет сечение индуцированного расслоения $\phi^*\mathcal{E}$, т.е. $\phi^* : \Gamma(N, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(M, \phi^*\mathcal{E})$, где

$$\phi^* s(x) = (x, s(\phi(x))), \quad x \in M, s \in \Gamma(N, \mathcal{E}).$$

§ 2. Главные расслоения.

Среди расслоений особое значение имеют главные расслоения. Чтобы ввести определение главного расслоения рассмотрим необходимые для этого понятия.

Говорится, что группа Ли G *действует справа* на многообразии M, если выполняются следующие условия:

1) каждый элемент $g \in G$ индуцирует гладкое преобразование $R_g : M \longrightarrow M$, обозначаемое $R_g x = x \cdot g$, где $x \in M$;

2) $M \times G \ni (x, g) \mapsto x \cdot g \in M$ есть гладкое отображение;

3) $x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$ для всех $g, h \in G$ и $x \in M$.

Группа Ли G *действует слева* на многообразии M, если мы пишем $g \cdot x = L_g x$ и предполагаем $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ вместо условия 3. Группа Ли G действует *свободно,* если из того, что $R_g x = x$ для некоторого x следует, что $g = e$. Говорится, что действие группы Ли G на многообразии M *транзитивно,* если для любой пары точек x и y из M найдётся такой элемент g группы G, что $R_g x = y$. *Орбитой* группы Ли G, проходящей через точку $x \in M$, называется множество $O_x = \{y \in M : y = R_g x, g \in G\}$.

Определение 1.3. Главным расслоением со структурной группой G называется расслоение (P, π, M) со стандартным слоем G, где G группа Ли, на котором определено правое действие группы Ли G, т.е. $P \times G \longrightarrow P$, причём это действие

1) согласовано со структурой расслоения условием

$$\pi(pg) = \pi(p) \quad \text{для всех } p \in P \text{ и } g \in G$$

и базовое многообразие $M = P/G$;

2) свободно и транзитивно;

3) согласовано с локальной тривиализацией расслоения, т.е. для любой локальной тривиализации расслоения $\{\phi_i, U_i\}_{i \in J}$, где $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G$, имеет место:

$$\text{если } \phi_i(p) = (\pi(p), g), \text{ то } \phi_i(p \cdot g') = (\pi(p), g \cdot g'), \quad \forall p \in P, \forall g, g' \in G.$$

Пусть задана группа Ли G и многообразие M. Определим действие группы G на тривиальном расслоении $P = M \times G$ следующим образом: для каждого $h \in G$ отображение R_h переводит $(x, g) \in M \times G$ в $(x, gh) \in M \times G$. Тривиальное расслоение $P = M \times G$, относительно таким образом определённого правого действия группы G, становится главным расслоением, которое называется *тривиальным главным расслоением.*

Предложение 1.4. Каждый слой главного расслоения (P, π, M) диффеоморфен группе G.

Доказательство. Покажем, что для любой точки $x_0 \in M$, слой $\pi^{-1}(x_0) \subset P$ над этой точкой диффеоморфен группе G. Выберем $p_0 \in \in \pi^{-1}(x_0)$. Построим отображение $\mu : G \longrightarrow P$ следующим образом $\mu(g) = p_0 \cdot g$. Имеем для любого $g \in G : \pi(\mu(g)) = \pi(p_0 \cdot g) = = \pi(p_0) = x_0$, откуда следует, что для каждого элемента $g \in G$ $\mu(g) \in \pi^{-1}(x_0)$, т.е. $\mu : G \longrightarrow \pi^{-1}(x_0)$. Покажем, что это отображение гладкое. Действительно, отображение μ есть частный случай отображения $P \times G \longrightarrow P$, индуцированного действием группы G, при фиксированном p (в данном случае $p = p_0$) и произвольном g, и, так как отображение $P \times G \longrightarrow P$ гладкое, отображение μ тоже гладкое. Покажем, что μ сюръективное отображение, т. е. $\forall p \in \pi^{-1}(x_0)$ $\exists g \in G$ такое, что $\mu(g) = p$. В силу транзитивности действия для пары (p_0, p) найдётся $g \in G$ такой, что $p = p_0 \cdot g$. Следовательно, $\mu(g) = p_0 \cdot g = p$. Покажем, что μ взаимно-однозначное отображение. Предположим обратное, что $\mu(g) = p$, $\mu(g') = p'$, где $p = p'$, но $g \neq g'$. Тогда $\mu(g) = \mu(g') \Rightarrow p_0 \cdot g = p_0 \cdot g' \Rightarrow p_0 = p_0 \cdot (g'g^{-1})$. В силу свободности действия $g'g^{-1} = e$, откуда $g' = g$, что противоречит предположенному ранее $g \neq g'$. Значит, отображение μ взаимно-однозначно. Суммируя, получаем, что μ биекция. Покажем теперь, что и обратное отображение μ^{-1} будет гладким. Пусть $\{\phi_i, U_i\}_{i \in J}$ локальная тривиализация расслоения и $x_0 \in U_i$, $p_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, $p = p_0 \cdot g$. Тогда $\phi_i(p_0) = (x_0, g_0)$ и $\phi_i(p) = \phi_i(p_0 \cdot g) = (x_0, g_0 g)$. Имеем $\mu^{-1} = = L_{g_0^{-1}} \circ pr_2 \circ \phi_i$, где $L_{g_0^{-1}} : G \longrightarrow G$, $L_{g_0^{-1}}(g) = g_0^{-1} g$ и $pr_2 : U_i \times G \longrightarrow G$. Действительно, $\mu^{-1}(p) = g$ и $L_{g_0^{-1}} \circ pr_2 \circ \phi_i(p) = L_{g_0^{-1}} \circ pr_2(x_0, g_0 g) = = L_{g_0^{-1}}(g_0 g) = (g_0^{-1} g_0) g = g$. Так как μ^{-1} представлено в виде композиции гладких отображений, оно является гладким.$\square$

§ 3. Ассоциированные расслоения.

Рассмотрим главное расслоение (P, π, M) со структурной группой G. Пусть E — векторное пространство, на котором группа Ли G действует слева, иначе говоря, $G \times E \ni (g, x) \to g \cdot x \in E$. При фиксированном g получаем диффеоморфизм $x \to g \cdot x$ пространства E. Таким образом, левое действие группы Ли G на векторном пространстве E порождает гомоморфизм $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Diff}(E)$ группы Ли G в группу диффеоморфизмов пространства E. Этот гомоморфизм также называют представлением группы G диффеоморфизмами пространства E. Следовательно, левое действие группы Ли G на про-

странстве E индуцирует её представление диффеоморфизмами пространства E. В частном случае линейных преобрзований говорят, что дано представление группы G невырожденными линейными преобразованиями пространства E. В этом случае мы имеем гомоморфизм группы Ли G в группу Ли $GL(E)$, т.е. $\rho : G \longrightarrow GL(E)$, где $GL(E)$ – группа невырожденных линейных преобразований векторного пространства E. Исходя из левого действия группы Ли G на E, построим векторное расслоение над M, ассоциированное с (P, π, M) со стандартным слоем E. Для этого на прямом произведении многообразий $P \times E = \{(p, x) \mid p \in P, x \in E\}$ определим действие G справа формулой

$$(p, x) \in P \times E \xrightarrow{g} (p \cdot g, g^{-1} \cdot x) \in P \times E.$$

Факторпространство $(P \times E)/G$ относительно таким образом определённого действия группы G обозначим через F, т.е. $F = (P \times E)/G$. Следовательно, $(p, x) \sim (p', x')$, если найдётся элемент $g \in G$ такой, что

$$p \cdot g = p', \quad \rho(g^{-1})x = g^{-1} \cdot x = x', \quad \forall p, p' \in P, \ \forall x, x' \in E.$$

Проверим, действительно ли введённое нами отношение, удовлетворяет условиям отношения эквивалентности:

i) рефлексивность: $(p, x) \sim (p, x)$ для любых $p \in P$, $x \in E$, так как в случае единичного элемента $e \in G$ выполняется $p \cdot e = p$ и $e^{-1} \cdot x = x$;

ii) симметричность: покажем, что из того, что $(p, x) \sim (p', x')$, следует $(p', x') \sim (p, x)$, $\forall p, p' \in P$, $\forall x, x' \in E$. По заданным условиям $\exists g \in G : p \cdot g = p'$ и $g^{-1} \cdot x = x'$. Выразив отсюда p и x, получим $p = p' \cdot g^{-1}$ и $x = g \cdot x'$. Следовательно, $(p', x') \sim (p, x)$, поскольку $\exists g^{-1} \in G : p' \cdot g^{-1} = p$ и $g \cdot x' = x$;

iii) транзитивность: покажем, что если $(p, x) \sim (p', x')$ и $(p', x') \sim \sim (p'', x'')$, то $(p, x) \sim (p'', x'')$, $\forall p, p', p'' \in P$, $\forall x, x', x'' \in E$. По нашим условиям

$$\begin{aligned} &\exists g \in G \ : \ p \cdot g = p' \quad \text{и} \quad g^{-1} \cdot x = x', \\ &\exists h \in G \ : \ p' \cdot h = p'' \quad \text{и} \quad h^{-1} \cdot x' = x''. \end{aligned}$$

Покажем, что элемент $gh \in G$ переводит пару (p, x) в (p'', x''), т.е. $p \cdot (gh) = p''$, $(gh)^{-1} \cdot x = x''$. Отсюда будет следовать $(p, x) \sim (p'', x'')$. В силу аксиом правого действия группы, получим

$$p \cdot (gh) = (p \cdot g)h = p' \cdot h = p''.$$

Теперь покажем, что $(gh)^{-1} \cdot x = x''$. Используя аксиомы правого действия группы и то, что $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$, получим

$$(gh)^{-1} \cdot x = (h^{-1}g^{-1}) \cdot x = h^{-1}(g^{-1} \cdot x) = h^{-1} \cdot x' = x''.$$

Обозначим точку факторпространства $F = (P \times E)/G$, соответствующую паре (p, x), через $[p, x]$. Определим проекцию $\pi_F : F = (P \times \times E)/G \longrightarrow M$ факторпространства F на многообразие M формулой

$$\pi_F([p, x]) = \pi(p), \quad \forall p \in P, \forall x \in E.$$

Несложно показать, что данное определение является корректным. Действительно,

$$\pi_F([p \cdot g, g^{-1}x]) = \pi(p \cdot g) = \pi(p).$$

Таким образом мы получили векторное расслоение (F, π_F, M) над базой M со стандартным слоем E, ассоциированное с главным расслоением (P, π, M).

На основе этой конструкции мы сможем в дальнейшем для каждого главного расслоения построить класс ассоциированных с ним расслоений. Поэтому многие вопросы касающиеся расслоений сводятся к изучению соответствующих главных расслоений.

§ 4. Расслоение реперов.

В данном параграфе мы рассмотрим пример главного расслоения, называемого расслоением реперов, и на основе предыдущего параграфа построим ассоциированное с ним касательное расслоение.

Пусть M — многообразие размерности n и $x \in M$. Введём следующие обозначения: T_xM — касательное пространство к M в точке x; $\{e\}_x = \{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ — базис касательного пространства в точке x. Через $R(M) = \bigcup_{x \in M}(x, \{e\}_x)$ обозначим множество всех реперов касательного пространства во всех точках M. Пусть π — проекция из $R(M)$ на M, которая отображает репер в точке x в x, т.е. $\pi((x, \{e\}_x)) = x$. Поскольку многообрзие M является топологическим пространством, проекция π индуцирует топологию на $R(M)$. Покажем, что $R(M)$ является гладким многообразием. Для этого введём на $R(M)$ дифференцируемую структуру. Пусть $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in J}$ — гладкий атлас на многообразии M, где $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$, и $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные координаты карты (U_i, ϕ_i). В касательном пространстве

T_xM, $x \in U_i$, имеем стандартный базис $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$. Пусть $(x, \{e\}_x)$ — точка пространства $R(M)$, где $x \in U_i$. Тогда каждый репер в точке $x \in M$ может быть представлен единственным образом в виде $e_i(x) = X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, где (X_i^j) невырожденная матрица и в формуле используется правило Эйнштейна суммирования по повторяющимся индексам. Построим на пространстве $R(M)$ набор локальных координатных карт следующим образом: в качестве локальных координат точки $(x, \{e\}_x)$, где $x \in U_i$ возьмём набор чисел $(x^1, \ldots x^n, X_i^j)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Несложно показать, что функции перехода таким образом построенных локальных карт, будут гладкими. Следовательно, этот набор локальных карт будет гладким атласом на пространстве $R(M)$, т.е. $R(M)$ — гладкое многообразие размерности $n + n^2$.

Определим правое действие группы $GL(n; \mathbb{R})$ на $R(M)$ формулой

$$(x, \{e\}_x) \cdot g = (x, \{e \cdot g\}_x), \tag{1}$$

где $(x, \{e\}_x)$ — репер пространства T_xM в точке x, $g = (g_j^i) \in GL(n; \mathbb{R})$, а $e \cdot g$ означает переход от одного базиса $\{e\}_x$ к новому базису пространства T_xM с помощью матрицы перехода g. Если $\{e\}_x = \{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$, то $i-$тый вектор базиса $\{e \cdot g\}_x = \{e'_1(x), \ldots, e'_n(x)\}$ касательного пространства T_xM будет иметь вид

$$e'_i(x) = g_i^j e_j(x). \tag{2}$$

В матричном виде формула (2) будет иметь вид $e' = e \cdot g$, где

$$e = (e_1(x) \ldots e_n(x)), \quad e' = (e'_1(x) \ldots e'_n(x)), \quad g = \begin{pmatrix} g_1^1 & \ldots & g_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_1^n & \ldots & g_n^n \end{pmatrix}.$$

Покажем, что (1) действительно является правым действием группы $GL(n; \mathbb{R})$ на многообразии $R(M)$.

(1) Каждый элемент $g \in G$ индуцирует преобразование в $R(M)$, имеющее вид $(x, \{e\}_x) \mapsto (x, \{e \cdot g\}_x)$, где $x \in M$, поскольку, согласно формуле (2) $(x, \{e \cdot g\}_x)$ также является репером касательного пространства в точке x.

(2) Покажем, что преобразование $(x, \{e\}_x) \mapsto (x, \{e \cdot g\}_x)$ будет гладким. Локальными координатами точек $(x, \{e\}_x)$ и $(x, \{e \cdot g\}_x)$ многообразия $R(M)$ будут соответственно (x^m, X_j^l), $(x^m, X'k_i)$, где

$$e_j(x) = X_j^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad e'_i(x) = X_i'^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Используя равенство (2), получим

$$X_i'^l \frac{\partial}{\partial x^l} = g_i^j X_j^l \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Следовательно, преобразования координат выглядят следующим образом:

$$X_i'^l = g_i^j X_j^l.$$

Поскольку данные преобразования линейные, то преобразование $(x, \{e\}_x) \mapsto (x, \{e \cdot g\}_x)$ будет гладким.

(3) Покажем теперь, что выполняется и третье условие определения правого действия группы. Запишем в матричном виде $e \cdot (gh) = (e \cdot g) \cdot h$, где $e = (e_1(x) \dots e_n(x))$ и g, h – невырожденные квадратные матрицы размерности n. Как видно, последнее условие выполняется в силу ассоциативности умножения матриц.

Теперь легко проверить, что $(R(M), \pi, M)$ — главное расслоение со структурной группой $GL(n; \mathbb{R})$. Действительно, действие группы $GL(n; \mathbb{R})$ на многообразии $R(M)$ определено таким образом, что для отображения $\pi : R(M) \longrightarrow M$ имеет место

$$\pi((x, \{e\}_x) \cdot g) = \pi((x, \{e \cdot g\}_x)) = x = \pi((x, \{e\}_x)),$$

для любого $g \in G$ и любой точки $(x, \{e\}_x) \in R(M)$, что показывает согласованность действия группы со структурой расслоения. К тому же многообразие M является факторпространством для $R(M)$ по отношению эквивалентности, индуцированному действием группы $GL(n; \mathbb{R})$. Структурная группа $GL(n; \mathbb{R})$ действует на $R(M)$ свободно, поскольку, если в некоторой точке $(x, \{e\}_x) \in R(M)$ имеет место $(x, \{e \cdot g\}_x) = (x, \{e\}_x)$, то $g \in GL(n; \mathbb{R})$ — единичаня матрица группы $GL(n; \mathbb{R})$. Транзитивность действия (1) вытекает из теории векторных пространств, в которой доказывается, что для двух произвольных базисов конечномерного векторного пространства всегда найдется невырожденная матрица, которая служит матрицей перехода от одного базиса к другому. Можно показать, что выполняется и условие 3 определения 1.3, т.е. для любой локальной тривиализации многообразия $R(M)$ выполняется условие согласованности с действием группы $GL(n; \mathbb{R})$. Таким образом показано, что $R(M)$ является главным расслоением над базой M со структурной группой $GL(n; \mathbb{R})$.

Главное расслоение $(R(M), \pi, M)$ называется *расслоением реперов* над баой M. Заметим, что репер $(x, \{e\}_x)$ может быть определён

как невырожденное линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в T_xM. Рассмотрим левое действие группы $GL(n;\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$ и построим расслоение, ассоциированное с расслоением реперов $(R(M),\pi,M)$, со стандартным слоем $\mathbb{R}^n$. Для этого на произведении многообразий $R(M)\times\mathbb{R}^n = \{((x,\{e\}_x),v)\}$, где $(x,\{e\}_x)$ репер касательного пространства в точке $x\in M$, $v=(v^1,\ldots,v^n)\in\mathbb{R}^n$ определим правое действие группы $GL(n;\mathbb{R})$ следующим образом: $((x,\{e\}_x),v)\cdot g=((x,\{e\}_x)\cdot g,g^{-1}v)$. Сопоставим точке $((x,\{e\}_x),v)$ прямого произведения $R(M)\times\mathbb{R}^n$ касательный вектор v к многообразию M в точке x, где $v=v^ie_i(x)\in T_xM$. Покажем, что этот вектор инвариантен относительно правого действия группы $GL(n;\mathbb{R})$ на $R(M)\times\mathbb{R}^n$, т.е. точке $((x,\{e\}_x)\cdot g,g^{-1}v)$, при описанном выше сопоставлении, отвечает тот же самый вектор v. Согласно формуле (2), имеем $e'_i(x)=g_i^je_j(x)$. Обозначим через h_j^i элементы обратной матрицы g^{-1}, т.е. $g_k^ih_j^k=\delta_j^i$, где δ_j^i символ Кронекера. Тогда $(g^{-1}v)^i=h_j^iv^j$. Касательный вектор, соответствующий точке $((x,\{e\}_x)\cdot g,g^{-1}v)$, построим согласно описанной выше процедуре

$$h_k^iv^kg_i^je_j(x)=g_i^jh_k^iv^ke_j(x)=v^ke_k(x)=v.$$

Таким образом, инвариантноть данного вектора относительно действия группы $GL(n;\mathbb{R})$ доказана. Получим расслоение $TM=(R(M)\times\times\mathbb{R}^n)/GL(n,\mathbb{R})$ с базой M. Следовательно, расслоение (TM,π,M) является векторным расслоением, ассоциированным с расслоением реперов $(R(M),\pi,M)$, со стандартным слоем $\mathbb{R}^n$, причём слой в TM над $x\in M$ может рассматриваться как T_xM. Гладкими сечениями данного расслоения будет множество гладких векторных полей на M.

§ 5. Тензорная алгебра и тензорные расслоения.

В данном параграфе описывается тензорное произведение векторных пространств, приводятся понятия тензора и тензорного поля. Кроме того, описывается структура тензорной алгебры, порождённой векторным пространством. Эти конструкции применяются для построения тензорных расслоений над гладким конечномерным многообразием. При написании параграфа использовались монографии [2], [4].

Фиксируем основное поле $\mathbb{K}$, которое будет действительным числовым полем $\mathbb{R}$ или комплексным числовым полем $\mathbb{C}$. Рассмотрим конечномерные векторные пространства $V_1,\ldots,V_r$ над полем $\mathbb{K}$. Ото-

бражение f прямого произведения $V_1 \times \ldots \times V_r$ в векторное пространство W называется *полилинейным*, если оно линейно по каждому переменному в отдельности, т.е.

$$f(v_1, \ldots, av_i + bu_i, v_{i+1}, \ldots, v_r) = af(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) + \\ + bf(v_1, \ldots, u_i, \ldots, v_r),$$

где a, $b \in \mathbb{K}$. Нашей задачей является построение тензорного произведения r векторных пространств $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$. Для этого необходимо найти такое векторное пространство, которое было бы универсально относительно полилинейных отображений произведения $V_1 \times \ldots \times \times V_r$. Построим векторное пространство U и такое полилинейное отображение

$$\psi : V_1 \times \ldots \times V_r \longrightarrow U,$$

что для любого полилинейного отображения $f : V_1 \times \ldots \times V_r \longrightarrow W$ существует единственное линейное отображение $g : U \longrightarrow W$ такое, что $f = g \circ \psi$. Заметим, что пространство U и отображение ψ определены с точностью до изоморфизма [4]. Рассмотрим векторное пространство $\mathrm{Lin}(V_1, \ldots, V_r)$, базисом которого будет множество $V_1 \times \ldots \times \times V_r$, т.е. свободное векторное пространство, порождённое конечными линейными комбинациями символов $(v_1, \ldots, v_r)$, где $v_j \in V_j$. Пусть R есть векторное подпространство в $\mathrm{Lin}(V_1, \ldots, V_r)$, порождённое элементами вида

$$a(v_1, \ldots, v_r) - (v_1, \ldots, av_i, \ldots, v_r),$$
$$(v_1, \ldots, v_i + u_i, \ldots, v_r) - (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) - (v_1, \ldots, u_i, \ldots, v_r).$$

Мы полагаем, что $U = \mathrm{Lin}(V_1, \ldots, V_r)/R$ и обозначаем данное пространство символом $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$, оно называется *тензорным произведением пространств* $V_1, \ldots, V_r$. Определим полилинейное отображение ψ из $V_1 \times \ldots \times V_r$ в $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$, ставя в соответствие вектору $(v_1, \ldots, v_r) \in V_1 \times \ldots \times V_r \subset \mathrm{Lin}(V_1, \ldots, V_r)$ его класс смежности по модулю R. Следовательно,

$$\psi(v_1, \ldots, v_r) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_r.$$

Пространство $U = V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$ вместе с полилинейным отображением ψ универсально относительно полилинейных отображений.

Теперь определим различные тензорные пространства над фиксированным векторным пространством V размерности r. Обозначим через V^* его дуальное векторное пространство. Для положительного целого k назовём $V^{\otimes k} = V \otimes \ldots \otimes V$ (k раз тензорное произведение)

пространством контравариантных тензоров степени k. Причём, при $k = 0$ положим $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$. Аналогично $V^{*\otimes l} = V^* \otimes \ldots \otimes V^*$ (l раз тензорное произведение) называется *пространством ковариантных тензоров степени* l. Элементы этих пространств будем соответственно называть контравариантными и ковариантными тензорами. Дадим для данных тензоров выражения относительно базиса $\{e_1, \ldots, e_r\}$ векторного пространства V, тогда дуальный базис для V^* обозначим через $\{e^{*1}, \ldots, e^{*r}\}$, где $e^{*i}(e_j) = \delta^i_j$. Базис $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}\}$, где индексы $i_1, \ldots i_k$ независимо пробегают значения от 1 до r, будет базисом пространства контравариантных тензоров $V^{\otimes k}$. Любой контравариантный тензор $t \in V^{\otimes k}$ может быть выражен однозначно в виде

$$t = t^{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k},$$

где $t^{i_1 \ldots i_k}$ называются компонентами тензора t относительно базиса $\{e_1, \ldots, e_r\}$. Таким же образом может быть выражен и любой ковариантный тензор степени l :

$$s = s_{j_1 \ldots j_l} e^{*j_1} \otimes \ldots \otimes e^{*j_l}.$$

При замене базиса в V компоненты тензоров преобразуются по определённому закону. Пусть $\{f_1, \ldots, f_r\}$ другой базис в V, связанный с базисом $\{e_1, \ldots, e_r\}$ линейным преобразованием $e_i = A^j_i f_j$, где (A^j_i) невырожденная линейная матрица порядка r. Соответствующая замена дуальных базисов в V^* задаётся как $e^{*i} = B^i_j f^{*j,}$ где $i = 1, \ldots, r$. Здесь $B = (B^i_j)$ есть обратная матрица регулярной квадратной матрицы $A = (A^i_j)$. Тогда компоненты контравариантного тензора степени k, т.е. $t^{i_1 \ldots i_k}$ и $\tilde{t}^{i_1 \ldots i_k}$ относительно базисов $\{e_i\}$ и $\{f_i\}$ соответственно связаны формулой

$$\tilde{t}^{i_1 \ldots i_k} = A^{i_1}_{j_1} \ldots A^{i_k}_{j_k} t^{j_1 \ldots j_k.}$$

Аналогичным образом компоненты ковариантного тензора s степени l при переходе от одного базиса дуального пространства V^* к другому связаны между собой формулой

$$\tilde{s}_{i_1 \ldots i_k} = B^{j_1}_{i_1} \ldots B^{j_l}_{i_l} s_{j_1 \ldots j_l.}$$

Мы определяем *тензорное пространство контравариантной степени* k *и ковариантной степени* l, (в дальнейшем тензорное пространство типа (k, l)), как тензорное произведение

$$V^{k,l} = V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes l} = V \otimes \ldots \otimes V \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*,$$

где k сомножителей V и l сомножителей V^*. Элемент из $V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes l}$ называется тензором типа (k,l) или тензором контравариантной степени k и ковариантной степени l. В терминах базиса $\{e_1,\dots,e_r\}$ в V и дуального базиса $\{e^{*1},\dots,e^{*r}\}$ для V^* каждый тензор t типа (k,l) может быть выражен однозначно формулой

$$t = t^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \otimes e^{*j_1} \otimes \dots \otimes e^{*j_l},$$

где $t^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}$ — компоненты тензора t, относительно базисов $\{e_1,\dots,e_r\}$ и $\{e^{*1},\dots,e^{*r}\}$. При изменении базиса $e_i = A^j_i f_j$ получим следующее преобразование компонент:

$$\tilde{t}^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l} = A^{i_1}_{n_1}\dots A^{i_k}_{n_k} B^{m_1}_{j_1}\dots B^{m_l}_{j_l} t^{n_1\dots n_k}_{m_1\dots m_l}.$$

Рассмотрим пространство

$$\mathbf{T}(V) = \mathbb{K} \oplus V \oplus V^* \oplus (V\otimes V) \oplus (V\otimes V^*) \oplus (V^*\otimes V) \oplus (V^*\otimes V^*) \oplus \dots,$$

причём каждый элемент $w \in \mathbf{T}(V)$ будет суммой конечного числа элементов, отличных от нуля. Определим произведение двух тензоров $t \in V^{k,l}$ и $s \in V^{p,q}$ следующим образом. Существует единственное билинейное отображение из $V^{k,l}\times V^{p,q}$ в $V^{k+p,l+q}$, сопоставляющее элементу $(v_1\otimes\dots\otimes v_k\otimes v_1^*\otimes\dots\otimes v_l^*, w_1\otimes\dots\otimes w_p\otimes w_1^*\otimes\dots\otimes w_q^*)$, принадлежащему $V^{k,l}\times V^{p,q}$ элемент $(v_1\otimes\dots\otimes v_k\otimes w_1\otimes\dots\otimes w_p\otimes v_1^*\otimes\dots\otimes v_l^*\otimes w_1^*\otimes\dots\otimes w_q^*) \in V^{k+p,l+q}$. Образ $(t,s)\in V^{k,l}\times V^{p,q}$ при действии этого отображения будет обозначатся $t\otimes s$. Можно показать, что таким образом определённое тензорное умножение ассоциативно. Кроме того, несложно убедиться, что единичным элементом этого умножения будет являться единица поля $\mathbb{K}$. Таким образом, $\mathbf{T}(V)$ является ассоциативной алгеброй с единицей относительно определённого выше умножения тензоров. Алгебру $\mathbf{T}(V)$ называют *тензорной алгеброй, порождённой векторным пространством V.*

Двумя важными классами тензоров являются симметрические и кососимметрические тензоры. Ковариантный тензор t типа $(0,k)$ называется *симметрическим тензором,* если для любой его компоненты $t_{i_1\dots i_k}$, относительно некоторого базиса, выполняется условие

$$t_{i_1\dots i_k} = t_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(k)}},$$

где σ произвольная перестановка чисел $1\dots k$. Несложно показать, что это определение не зависит от выбора базиса. Ковариантный тензор t типа $(0,k)$ называется *кососимметрическим тензором,* если

для любой его компоненты $t_{i_1\dots i_k}$, относительно некоторого базиса, выполняется условие

$$t_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(k)}} = (-1)^{s(\sigma)} t_{i_1\dots i_k},$$

где σ произвольная перестановка чисел $1\dots k$, и $s(\sigma) = 0$, если σ чётная перестановка, и $s(\sigma) = 0$, если σ нечётная перестановка. Несложно показать, что симметрические и кососимметрические тензоры образуют подпространство пространства $V^{0,k}$ всех ковариантных тензоров типа $(0,k)$. Эти подпространства обозначим соответственно S^kV^* и Λ^kV^*. Определим операцию *альтернирования* alt, которая сопоставляет любому ковариантному тензору типа $(0,k)$ кососимметрический тензор, т.е. $\mathrm{alt} : V^{0,k} \longrightarrow \Lambda^kV^*$. Если $t = \{t_{i_1\dots i_k}\}$ некоторый ковариантный тензор типа $(0,k)$, то его альтернацией называется кососимметрический тензор $\mathrm{alt}(t)$, где

$$\mathrm{alt}(t)_{i_1\dots i_k} = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma}(-1)^{s(\sigma)} t_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(k)}},$$

где суммируется по всем перестановкам из чисел $1\dots k$. Введённые понятия кососимметрического тензора и операции альтернирования позволяют выделить в тензорной алгебре $\mathbf{T}(V)$ подалгебру $\Lambda(V^*)$ кососимметрических ковариантных тензоров, которая называется *внешней алгеброй.* Векторное пространство этой алгебры имеет вид прямой суммы $\Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{n}\Lambda^kV^*$. Умножение в этой алгебре обозначается $\wedge$ и называется *внешним умножением ковариантных тензоров.* Это умножение для произвольных ковариантных тензоров t, s определяется формулой:

$$t \wedge s = \mathrm{alt}(t \otimes s).$$

Из этого определения следует, что $\wedge : \Lambda^kV^* \times \Lambda^lV^* \longrightarrow \Lambda^{k+l}V^*$.

Важной операцией на тензорах является *свёртка,* отображающая пространство тензоров типа (k,l) в пространство тензоров типа $(k-1, l-1)$, если $k, l \geq 1$. Для пространства тензоров типа (k,l) определим его свёртку C по индексам i и j, $(1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq l)$, следующим образом. Пусть $v_1, \dots, v_k \in V$ и $v_1^*, \dots v_l^* \in V^*$. Свёртка C есть линейное отображение, переводящее $v_1 \otimes \dots \otimes v_k \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_l^*$ в $\langle v_i, v_j^*\rangle v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_k \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_{j-1}^* \otimes v_{j+1}^* \otimes \dots \otimes v_l^*$, где $\langle v_i, v_j^*\rangle$ — значение ковектора v_j^* на векторе v_i.

Пусть M — гладкое $n-$мерное многообразие и T_xM касательное пространство к этому многообразию в точке x. Через $\mathbf{T}(x)$ обозначим тензорную алгебру, порождённую касательным пространством T_xM. Подпространствами которой будут тензорные пространства типа (k,l) над T_xM. *Тензорное поле типа* (k,l) на подмножестве

$N \subset M$ есть сопоставление $x \mapsto T_x$, где $T_x \in T_x M^{k,l}$. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что T_x гладко зависит от точки x многообразия M, т.е. мы будем иметь дело с гладкими тензорными полями многообразия M. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ система локальных координат в координатной окрестности $U \in M$ и $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ — базис касательного пространства $T_x M$, где $x \in U$, и $dx^1, \ldots, dx^n$ — дуальный базис в кокасательном пространстве $T_x^* M$. Тензорное поле T типа (k, l), определённое на U, будет выражаться локально относительно соответствующих базисов следующим образом:

$$T_x = \sum t^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_n},$$

где $t^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_l}$ – гладкие функции на U, называемые компонентами тензора T по отношению к локальной системе координат $x^1, \ldots, x^n$.

Аналогично с рассмотренным в предыдущем пункте построением кастельного расслоения построим тензорное расслоение, ассоциированное с расслоением реперов. Пусть $T^{k,l}$ – тензорное пространство типа (k, l) над векторным пространством $\mathbb{R}^n$. Группа $GL(n, \mathbb{R})$ может рассматриваться как группа линейных преобразований пространства $T^{k,l}$. Мы получаем тензорное расслоение

$$T^{\otimes k} M \otimes T^{* \otimes l} M = TM \otimes \ldots \otimes TM \otimes T^* M \otimes \ldots \otimes T^* M$$

типа (k, l) над M со стандартным слоем $T^{k,l}$, ассоциированное с расслоением реперов $(R(M), \pi, M)$, причём гладкими сечениями данного расслоения будут тензорные поля типа (k, l).

§ 6. Дифференциальные формы.

В данном параграфе будет рассмотрен частный случай тензорного расслоения, который играет важную роль в современной дифференциальной геометрии. Пусть M — $n-$мерное гладкое многообразие, $T_x M$ — касательное и $T_x^* M$ — кокасательное пространство к M в точке x. Согласно предыдущему параграфу, в каждой точке $x \in M$ мы имеем внешнюю алгебру

$$\Lambda T_x^* M = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r T_x^* M.$$

Так как эта алгебра определена в каждой точке x многообразия M, мы получаем векторное расслоение $\Lambda T^* M$ над многообразием M со

слоем $\Lambda T_x^* M$. Пространство гладких сечений $\Gamma(M, \Lambda T^* M)$ называется *пространством гладких дифференциальных форм* и обозначается $\mathcal{A}(M)$. Элементы пространства

$$\mathcal{A}^r(M) = \Gamma(M, \Lambda^r T^* M), \quad \mathcal{A}(M) = \bigoplus_{r=0}^{n} \mathcal{A}^r(M)$$

называются *гладкими диффференциальными формами порядка* r или $r-$формами. Отметим, что при $r = 0$ сечение соответствующего расслоения отождествляется с гладкой функцией на многообразии M. Если $\omega \in \mathcal{A}^r(M)$, то порядок r формы ω обозначим через $|\omega|$. Дифференциальную форму, для которой определён порядок, назовём *однородной.*

Внешнее умножение кососимметрических ковекторов, описанное в предыдущем параграфе, позволяет для форм определить *внешнее умножение* $\wedge : \mathcal{A}^r(M) \times \mathcal{A}^s(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{r+s}(M)$. Имеют место следующие свойства внешнего умножения:

1) ассоциативность;

2) линейность внешнего умножения по каждому из сомножителей;

3) $\omega \wedge \theta = (-1)^{rs} \theta \wedge \omega$, для любых $\omega \in \mathcal{A}^r(M)$, $\theta \in \mathcal{A}^s(M)$.

Пространство гладких дифференциальных форм $\mathcal{A}(M)$ является ассоциативной алгеброй с единицей, относительно внешнего умножения форм. Эту алгебру мы в дальнейшем будем называть алгеброй дифференциальных форм на многообразии M.

Внешним дифференцированием $d : \mathcal{A}(M) \longrightarrow \mathcal{A}(M)$ дифференциальных форм называется линейный оператор, удовлетворяющий следующим требованиям

1) $d : \mathcal{A}^i(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{i+1}(M)$ — линейное отображение такое, что $d^2 = 0$;

2) если f — гладкая функция на многообразии M, то $df \in \mathcal{A}^1(M)$ является 1-формой такой, что $(df)(X) = X(f)$, для произвольного векторного поля X на M.

3) $d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^r \omega(d\theta)$, $\forall \omega \in \mathcal{A}^r(M)$, $\forall \theta \in \mathcal{A}^s(M)$.

Если $\omega \in \mathcal{A}^r(M)$ и $X_0, \ldots, X_r \in \Gamma(M, TM)$ – векторные поля на M, то имеет место рекуррентная формула

$$(d\omega)(X_0, \ldots, X_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i X_i(\omega(X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_r)) +$$
$$+ \sum_{0 \le i \le j \le r} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_r).$$

Если $r = 1$ и $\omega = df$, тогда вышеприведённая рекурентная формула позволяет показать, в данном частном случае, что $d^2 f = 0$. Действительно, для двух векторных полей X, Y на многообразии M имеем

$$d^2 f(X,Y) = XY(f) - YX(f) - df([X,Y]) = [X,Y](f) - [X,Y](f) = 0.$$

Пусть задано гладкое отображение φ многообразия M в многообразие N. Дифференциал φ в точке $x \in M$ есть линейное отображение $\varphi_* : T_x(M) \longrightarrow T_{\varphi(x)}(N)$. Дифференциал φ_* отображает слой $T_x M$ касательного расслоения TM в точке x многообразия M в слой $T_{\varphi(x)}N$ касательного расслоения TN в точке $\varphi(x)$. Транспонированное к φ_* отображение (pull-back) есть линейное отображение $\varphi^* : \mathcal{A}(N) \longrightarrow \mathcal{A}(M)$, ([2]). Для любой $r-$формы α на N мы определяем $r-$форму $\varphi^*(\alpha)$ на M как

$$\varphi^*(\alpha)(X_1, \ldots, X_r) := \alpha(\varphi_*(X_1), \ldots, \varphi_*(X_r)),$$

где $X_1, \ldots, X_r \in T_x(M)$ — векторные поля на многообразии M. Заметим, что внешнее дифференцирование d перестановочно с φ^*, т.е. $d(\varphi^*(\alpha)) = \varphi^*(d\alpha)$.

§ 7. Производная Ли.

Тензорные поля и дифференциальные формы можно дифференцировать вдоль векторного поля. Рассмотрим гладкое векторное поле X на многообразии M. Локальной однопараметрической группой преобразований, определённой на $I_\varepsilon \times U$, где I_ε есть открытый интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и U – открытое множество в M, называется отображение из $I_\varepsilon \times U$ в M, удовлетворяющее следущим условиям:

1) для каждого $t \in I_\varepsilon$ $\varphi_t : m \longrightarrow \varphi_t(m)$ есть диффеоморфизм U на U, причём $\varphi_0 = id_U$ и $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$;

2) если $t, s, t+s \in I_\varepsilon$ и если m, $\varphi_s(m) \in U$, то $\varphi_{t+s}(m) = \varphi_t(\varphi_s(m))$.

Каждая локальная однопараметрическая группа преобразований φ_t индуцирует векторное поле X, определённое на U. Орбитой точки m, порождаемой локальной однопараметрической группой преобразований, называется кривая $x(t) = \varphi_t(m)$. Эта кривая проходит через точку m, так как $x(0) = \varphi_0(m) = m$. Локальная однопараметрическая группа преобразований порождает соответствующую кривую в каждой точке m открытого множества U. Совокупность касательных векторов $X_m = \frac{dx(t)}{dt}|_{t=0}$ во всех точках открытого множества U и

образует векторное поле X, индуцируемое локальной однопараметрической группой преобразований. Пользуясь теоремами существования и единственности теории диффренциальных уравнений, можно показать, что верно и обратное, т.е. векторное поле X порождает локальную однопараметрическую группу преобразований, причём, кривые $x(t)$, о которых говорилось выше, являются интегральными линиями этого векторного поля.

Пусть дано другое векторное поле Y на M. Мы определим производную поля Y вдоль поля X в точке $m \in M$. Для этого рассмотрим интегральную кривую поля X, проходящую через точку m, до точки $\varphi_t(m)$ и возьмём вектор поля Y в этой точке. Затем мы перенесём вектор $Y_{\varphi_t(m)}$ назад в касательное пространство T_mM при помощи дифференциала $d\varphi_{-t}$ диффеоморфизма φ_{-t}. Теперь найдём разность векторов касательного пространства $T_mM : d\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(m)}) - Y_m$ и разделив её на t, перейдём к пределу $t \to 0$. Это значит, что рассматривая гладкую функцию $t \mapsto d\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(m)})$, принимающую значения в T_mM, мы берём её производную в точке $t = 0$. Получаем вектор из касательного пространства T_mM, называемый *производной Ли поля Y вдоль поля X в точке m*, обозначим его

$$(\mathcal{L}_X Y)_m := lim_{t\to 0}\frac{d\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(m)}) - Y_m}{t} = \frac{d}{dt}(d\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(m)}))\Big|_{t=0}.$$

Аналогичным образом определяется производная Ли дифференциальной формы ω вдоль векторного поля X. Только в данном случае мы берём значение формы ω в точке $\varphi_t(m)$, а затем переносим его в точку m при помощи транспонированного к отображению φ_* отображения φ_t^*. Далее рассмотрим разность $\varphi_t^*(\omega_{\varphi_t(m)}) - \omega_m$ и разделив её на t, перейдём к пределу при $t \to 0$, т.е.

$$(\mathcal{L}_X \omega)_m = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*(\omega_{\varphi_t(m)}) - \omega_m}{t} = \frac{d}{dt}(\varphi_t^*(\omega_{\varphi_t(m)}))\Big|_{t=0}.$$

Отметим, что понятие производной Ли по векторному полю можно рассматривать и для произвольного тензорного поля. Пусть T – тензорное поле типа (k, l), рассмотрим $(\mathcal{L}_X T)_m$ – производную Ли тензорного поля T вдоль векторного поля X. Если $T|_{\varphi_t(m)} = v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \otimes \otimes v_1^* \otimes \ldots \otimes v_l^*$, то определим $(\mathcal{L}_X T)_m$ как производную при $t = 0$ функции пространства $T_m(M)$, значение которой в t равно

$$d\varphi_{-t}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) \otimes \varphi_t^*(v_1^* \otimes \ldots \otimes v_l^*).$$

Поскольку в пятом параграфе мы рассматривали тензорные поля как гладкие сечения тензорного расслоения, то производную Ли тензорного типа можно представить формулой $\mathcal{L}_X T = \frac{d}{dt}(\varphi_t \cdot T)|_{t=0}$, где $T \in \Gamma(M, T^{\otimes k}M \otimes T^{*\otimes l})$.

Производная Ли $\mathcal{L}_X$ по векторному полю X обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{L}_X f = Xf$ для каждой функции $f \in C^\infty(M)$;

2) $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ для произвольного гладкого векторного поля Y на многообразии M.

Для произвольного векторного поля X внутреннее умножение относительно X определим формулой

$$\iota_X \omega(X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}) = \omega(X, X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}),$$

где $\omega \in \mathcal{A}(M)$, а $X, X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}$ гладкие векторные поля на M. Если $\omega = f$ гладкая функция на M, мы полагаем $\iota_X f = 0$. Таким образом, $\iota_X : \mathcal{A}^r(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{r-1}(M)$. В часности, если ω 1-форма, имеем $\iota_X \omega = \omega(X)$.

На дифференциальных формах производная Ли обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{L}_X d = d\mathcal{L}_X$ — для каждого векторного поля X $\mathcal{L}_X$ будет дифференцированием степени 0 алгебры $\mathcal{A}(M)$, коммутирующим с внешним дифференцированием d;

2) $\mathcal{L}_X(\iota_Y \omega) = \iota_{[X,Y]}\omega + \iota_Y(\mathcal{L}_X \omega)$, где X, Y есть гладкие векторные поля на M и $\omega \in \mathcal{A}^r(M)$.

Отметим, что внешнее дифференцирование d, производная Ли $\mathcal{L}_X$ по векторному полю X и внутреннее умножение ι_X связаны между собой следующей формулой:

$$\mathcal{L}_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d. \tag{3}$$

§ 8. Комплекс де Рама и группы когомологий гладкого многообразия.

Последовательность

$$C^\bullet : C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{m-1}} C^m \xrightarrow{d_m} C^{m+1} \longrightarrow \ldots$$

абелевых групп (или, в частности, векторных пространств) и их гомоморфизмов называется *коцепным комплексом,* если

$$d_m \circ d_{m-1} = 0, \quad \forall m \geq 1, \tag{4}$$

т.е. если композиция двух любых соседних гомоморфизмов равна нулю. Ядро $\operatorname{Ker} d_m = \{x \in C^m | d_m x = 0\} \subset C^m$ гомоморфизма d_m

обозначается символом Z^m, а его элементы называются *коциклами степени* m. Образ $\operatorname{Im} d_{m-1} = \{y \in C^m | \, \exists x \in C^{m-1} : d_{m-1}x = y\} \subset \subset C^m$ гомоморфизма d_{m-1} обозначается символом B^m, а его элементы называются *кограницами степени* m, причём, при $m = 0$ будем считать, что $B^0 = 0$. Из условия (4), следует, что $B^m \subset Z^m$, следовательно, может быть определена факторгруппа

$$H^m = Z^m / B^m.$$

Эта факторгруппа называется *$m-$й группой когомологий комплекса* $C^\bullet$, а её элементы — *классами когомологий.* Коциклы, принадлежащие одному классу когомологий, т.е. такие, что их разность является кограницей, называются *когомологичными .*

Пространства дифференциальных форм $\mathcal{A}^r(M)$ и внешнее дифференцирование $d : \mathcal{A}^r(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{r+1}(M)$, в силу свойства $d^2 = 0$, составляют коцепной комплекс

$$\mathcal{A}^\bullet(M) : \mathcal{A}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^r(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{r+1}(M) \longrightarrow \ldots$$

Этот комплекс называется *комплексом де Рама* дифференциальных форм гладкого многообразия M. Его группы когомологий обозначаются $H^m(M)$ и называются *группами когомологий де Рама* многообразия M. Кограницы комплекса де Рама, т.е. формы вида $d\omega$ называются точными формами, заметим, что точные формы образуют нулевой класс в $H^m(M)$. Коциклы комплекса де Рама, т.е. формы ω, для которых $dw = 0$, называют замкнутыми формами. Класс когомологий замкнутой формы ω мы будем обозначать символом $[\omega]$, это класс эквивалентности $\{\omega' \in Z^m(M) | \omega' = \omega + d\psi, \psi \in \mathcal{A}^{m-1}(M)\}$. Две формы, отличающиеся на точную форму, будем называть когомологичными.

§ 9. Вертикальнй вектор.

Вертикальным вектором на расслоении $(\mathcal{E}, \pi, M)$ называется вектор X, касательный слоям пространства расслоения $\mathcal{E}$, это значит, что $X(\pi^* f) = 0$ для любого $f \in C^\infty(M)$, где $\pi^* f = f \circ \pi$.

Пусть (P, π, M) — главное расслоение со структурной группой G. Для каждого $p \in P$ пусть T_pP — касательное пространство к P в p и V_p — подпространство в T_pP, состоящее из векторов, касательных к слою через p, $V_p = \operatorname{Ker}\pi_* : T_pP \longrightarrow T_xM$. Векторное поле X_P на P называется вертикальным, если $X_P(p) \in V_p$, $\forall p \in P$. Понятие вертикального векторного поля играет ключевую роль в теории

связностей. Пространство вертикальных касательных векторов в точке $p \in P$ при помощи дифференциала отображения $G \longrightarrow P$, порождаемого правым действием группы G на P, может быть отождествлено с алгеброй Ли группы G, которую обозначим через $\mathfrak{g}$. Напомним некоторые сведения из теории алгебр Ли. Если G группа Ли и $\mathfrak{g}$ её алгебра Ли, то $\mathfrak{g}$ можно отождествить либо с касательным пространством T_eG, в единице e к группе G, либо с алгеброй Ли левоинвариантных векторных полей на G. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ отождествляется с T_eG, то имеется отображение $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$, называемое экспоненциальным. С помощью этого отображения каждый элемент $X \in \mathfrak{g}$ порождает однопараметрическую подгруппу $X_t = \exp(tX)$ группы G, которая в общем случае определена локально в некоторой окрестности единицы e. Действие группы G на P порождает гомоморфизм σ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в алгебру Ли $\mathfrak{X}(P)$ векторных полей на P. Этот гомоморфизм $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$ определяется с помощью понятия фундаментального векторного поля. Пусть $X \in \mathfrak{g}$, определим векторное поле X_P в точке p на главном расслоении P формулой

$$X_P(p) = \frac{d}{dt}(p \exp(tX))|_{t=0}.$$

Это векторное поле называется фундаментальным векторным полем, порожденным элементом X. Отображение $X \to X_P(p)$ из $\mathfrak{g}$ в T_pP есть изоморфизм $\mathfrak{g}$ на касательное пространство в точке p к слою через p. Отображение $\sigma : X \longrightarrow X_P$ из $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{X}(P)$ является гомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в алгебру Ли $\mathfrak{X}(P)$ векторных полей на P. Несложно показать, что фундаментальное векторное поле является вертикальным векторным полем. Действительно,

$$\pi_* X_P(p) = \frac{d}{dt}\pi(p \exp(tX))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\pi(p)|_{t=0} = 0,$$

т.е. X_P есть вертикальное векторное поле. Следовательно, вертикальное векторное поле X_P можно выразить:

$$(X_P f)(p) = \frac{d}{dt} f(p \exp(tX))|_{t=0},$$

где $f \in C^\infty(P)$, $\forall p \in P$. Вертикальное векторное поле X_P мы часто будем обозначать просто через X.

§ 10. Эквивариантное расслоение.

Пусть группа Ли G действует слева на пространстве расслоения $\mathcal{E}$ и также слева на базе M, эти действия обозначим $L : G \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ и $L' : G \times M \longrightarrow M$

Определение 1.5. Расслоение называется *G-эквивариантным,* если гладкое левое действие группы G как на пространстве расслоения $\mathcal{E}$, так и на базе M согласовано таким образом, что действие коммутирует с проекцией:

$$L'_g \circ \pi = \pi \circ L_g,$$

здесь $L_g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ и $L'_g : M \longrightarrow M$. Отсюда следует, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\quad L_g \quad} & \mathcal{E} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ M & \xrightarrow{\quad L'_g \quad} & M \end{array}$$

Если $(\mathcal{E}, \pi, M)$ является векторным расслоением, в дополнении к перечисленным выше условиям, требуется, что бы послойно левое действие группы G было линейным.

Определим $L'' : G \times \Gamma(M, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(M, \mathcal{E})$ левое действие группы G на пространстве сечений формулой

$$L''_g(s) := L_g \circ s \circ L'_{g^{-1}}, \quad \forall s \in \Gamma(M, \mathcal{E}). \tag{5}$$

Покажем, что действие, заданное формулой (5) отображает точку пространства базы в слой над этой точкой. Для этого покажем, что $\pi \circ L''_g(s)(x) = x$. Для удобства запишем $L'_g(x) = g \cdot x$, $\forall x \in M$, и $L_g(y) = g \odot y$, $\forall y \in E_x$, здесь специально использованы разные знаки для обозначения действия, чтобы обратить внимание на то, что в первом случае группа действует на базе M, а во втором на слоях. Для любого $x \in M$ получим

$$\begin{aligned} \pi \circ L''_g(s)(x) &= \pi \circ (L_g \circ s \circ L'_{g^{-1}})(x) = \pi \circ L_g \circ s(g^{-1} \cdot x) = \\ &= L'_g \circ \pi \circ s(g^{-1} \cdot x) = L'_g(g^{-1} \cdot x) = gg^{-1} \cdot x = e \cdot x = x, \end{aligned}$$

где e – единица группы G. Следовательно, $L''_g(s)$ является сечением расслоения $\mathcal{E}$ и $L''_g : \Gamma(M, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(M, \mathcal{E})$. Проверим также, что определённое формулой (5) действие будет левым действием группы G

на пространстве сечений, т.е.

$$L''_{gh}(s) = L''_g \circ (L''_h(s)), \quad \forall g, h \in G. \tag{6}$$

Левая часть данного уравнения примет вид:

$$L''_{gh}(s) = L_{gh} \circ s \circ L'_{h^{-1}g^{-1}},$$

в свою очередь, используя аксиомы левого действия группы G как на пространстве расслоения $\mathcal{E}$, так и на базе M, для правой части уравнения (6) получим

$$L''_g \circ (L''_h(s)) = L_g \circ (L_h \circ s \circ L'_{h^{-1}}) \circ L'_{g^{-1}} = L_{gh} \circ s \circ L'_{h^{-1}g^{-1}}.$$

Мы убедились, что действие, заданное формулой (5) действительно является левым действием группы G на $\Gamma(M, \mathcal{E})$.

§ 11. Эквивариантные отображения.

Пусть (P, π, M) — главное расслоение со структурной группой G и $\rho : G \longrightarrow GL(E)$, где $GL(E)$ группа невырожденных линейных преобразований векторного пространства E, ρ — это гомоморфизм группы Ли G в группу Ли $GL(E)$ или представление группы G невырожденными линейными преобразованиями пространства E. В § 3 мы рассматривали ассоциированное расслоение (F, π_F, M), где $F = (P \times E)/G$ и $\pi_F : F \longrightarrow M$. Существует представление сечения расслоения (F, π_F, M) как функции на соответствующем главном расслоении.

Определение 1.6. Отображение $s : P \longrightarrow E$, удовлетворяющее условию

$$s(p \cdot g) = \rho(g^{-1})s(p), \quad \forall p \in P, \forall g \in G$$

называется *эквивариантным отображением.* Пространство гладких эквивариантных отображений из P в E обозначим через $C^\infty(P, E)^G$.

Предложение 1.7. Существует изоморфизм между пространством сечений $\Gamma(M, F)$, ассоциированного расслоения F и пространством эквивариантных отображений $C^\infty(P, E)^G$.

Доказательство. Покажем, что любое эквивариантное отображение индуцирует сечение ассоциированного векторного расслоения F. Пусть $s : P \longrightarrow E$ — эквивариантное отображение и пусть p — точка слоя P над x, т.е. $\pi(p) = x$. Определим сечение ассоциированного векторного расслоения F формулой

$$s_M(x) = [p, s(p)],$$

где $x \in M$ и скобки $[,]$ означают класс эквивалентности пары $(p, s(p)) \in \in P \times E$. Прежде всего убедимся, что s_M определено корректно, т.е. данное выше определение не зависит от выбора точки слоя P. Дей ствительно, если мы выберем $p \cdot g$, где $g \in G$, то элемент $[p, s(p)] \in P \times F$ не изменится, так как

$$[p \cdot g, s(p \cdot g)] = [p \cdot g, \rho(g^{-1})s(p)] = [p, s(p)].$$

Покажем теперь, что любое сечение расслоения (F, π_F, M) будет в виде s_M для некоторого эквивариантного отображения $s \in C^\infty(P, E)^G$. Для этого определим $s(p)$ равным такому единственному $\nu \in E$, что пара (p, ν) будет представлением $s_M(x)$. $\square$

Выведем инфинитезимальную версию условия эквивариантности отображения, данного в определении 1.6. Пусть $s : P \longrightarrow E$ эквивариантное отображение и пусть $g(t) = \exp(tX)$, $|t| < \delta$ однопараметрическая подгруппа группы G, порождаемая элементом алгебры Ли этой группы X, т.е. $X \in \mathfrak{g}$. Имеем $g(0) = e$, где e единица группы G. Кроме того, имеем

$$\frac{d}{dt}(g(t))|_{t=0} = X.$$

Пусть $p \in P$ произвольная точка пространства расслоения P. Однопараметрическая подгруппа $g(t)$ порождает параметрическую кривую на главном расслоении (P, π, M) следующим образом: $p(t) = = p \cdot g(t)$, $|t| < \delta$; эта кривая проходит через точку p, т. к. при $t = 0$ имеем $p(0) = p \cdot g(0) = p \cdot e = p$. В силу эквивариантности s в каждой точке этой кривой имеет место

$$s(p(t)) = \rho(g^{-1}(t)) \cdot s(p), \quad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

или

$$s(p(t)) - \rho(g^{-1}(t)) \cdot s(p) = 0.$$

Дифференцируем обе части этого соотношения по t при $t = 0$. Имеем

$$\frac{d}{dt}s(p(t))|_{t=0} - \frac{d}{dt}\rho(g^{-1}(t))|_{t=0} \cdot s(p) = 0 \tag{7}$$

Первое слагаемое, в силу определения вертикального векторного поля, имеет вид

$$\frac{d}{dt}s(p(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}s(p \cdot \exp(tX))|_{t=0} = (X_P \cdot s)(p),$$

где X_P есть вертикальное векторное поле на P, порождаемое $X \in \mathfrak{g}$. Рассмотрим теперь второе слагаемое соотношения (7). Имеем гомоморфизм $\rho : G \longrightarrow GL(E)$ группы Ли G в группу Ли $GL(E)$. Дифференциал $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(E)$ — это гомоморфизм соответствующих алгебр Ли и он определяется так: пусть $g(t)$ однопараметрическая подгруппа в G, порождаемая элементом $X \in \mathfrak{g}$, т.е. $g(0) = e$, $\frac{d}{dt}(g(t))|_{t=0} = X$, $g(t+s) = g(t) \cdot g(s)$, тогда

$$\rho'(X) = \frac{d}{dt}\rho(g(t))|_{t=0}.$$

Имеет место при любом $t \in (-\delta, \delta)$

$$g^{-1}(t) \cdot g(t) = e.$$

Отсюда, в силу гомоморфизма ρ, получаем

$$\rho(g^{-1}(t)) \cdot \rho(g(t)) = e',$$

где e' единица в группе $GL(E)$. Дифференцируем по t при $t = 0$, получим

$$\frac{d}{dt}\rho(g^{-1}(t))|_{t=0} \cdot e' + e' \cdot \frac{d}{dt}\rho(g(t))|_{t=0} = 0,$$

т.е.

$$\frac{d}{dt}\rho(g^{-1}(t))|_{t=0} = -\rho'(X).$$

Подставляя в (7), получим, что отображение s удовлетворяет формуле

$$(X_P \cdot s)(p) + \rho'(X) \cdot s(p) = 0. \tag{8}$$

Тем самым мы получили инфинитезимальную версию эквивариантности.

§ 12. Дифференциальные формы со значениями в расслоении.

Рассмотрим векторное расслоение $(\mathcal{E}, \pi, M)$ со стандартным слоем E, причём, $\dim E = r$. Из условия локальной тривиализации следует, что для любой точки $m \in M$ найдётся окрестность U и сечения $e_1(x), \ldots, e_r(x)$, $(e_j(x) \in \Gamma(M, \mathcal{E}))$, которые линейно независимы в каждой точке $x \in U$. Совокупность этих сечений назовём репером (локальным) расслоения $\mathcal{E}$ в окрестности точки m и этот репер обозначим $f = \{e_1(x), \ldots, e_r(x)\}$. Заметим, что репер f зависит от области

определения U, а сечения $e_j(x) \in \Gamma(M, \mathcal{E})$ – от точки $x \in M$. Предположим, что $g : U \longrightarrow GL(r, \mathbb{R})$ — дифференцируемое отображение, действия которого на множестве всех реперов на открытом множестве U, определим следующим образом

$$f \mapsto fg,$$

где $\{fg(x)\} = (\sum_{i=1}^{r} g_{i1}(x)e_i(x), \ldots, \sum_{i=1}^{r} g_{ir}(x)e_i(x))$ — новый репер в точке U. В матричном виде можно записать $fg(x) = f(x)g(x)$, где $f(x)$ матрица-строка, элементами которой являются сечения $e_j(x)$.

Представим сечение векторного расслоения локально. Рассмотрим $s \in \Gamma(U, \mathcal{E})$, где U открытое подмножество в многообразии M, и $f = (e_1(x), \ldots, e_r(x))$ репер над U. Тогда

$$s|_U = s^i(x)e_i(x) = f \cdot s(f), \quad s(f) = \begin{pmatrix} s^1(x) \\ \ldots \\ s^r(x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, r, \qquad (9)$$

где $s^i(x)$ однозначно определённые гладкие функции на U, зависящие от точки x.

Пространство дифференциальных форм порядка k на M со значением в $\mathcal{E}$ определим формулой

$$\mathcal{A}^k(M, \mathcal{E}) = \Gamma(M, \Lambda^k T^*M \otimes \mathcal{E}).$$

С помощью метода теории пучков [6] может быть определён изоморфизм пространств

$$\mathcal{A}^k(M) \otimes_{\Gamma(M)} \Gamma(M, \mathcal{E}) \cong \mathcal{A}^k(M, \mathcal{E}), \qquad (10)$$

где через $\Gamma(M) := \mathcal{A}^0(M) = C^\infty(M)$ мы обозначили пространство гладких функций на многообразии M. Образ элемента $\omega \otimes s$ при данном изоморфизме мы обозначим через $\omega \cdot s \in \mathcal{A}^k(M, \mathcal{E})$, где $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, $s \in \Gamma(M, \mathcal{E})$.

Опишем теперь локальное представление дифференциальной формы со значениями в расслоении. В окрестности $U \ni x$ с локальной координатной системой $x^1, \ldots x^n$ мы берём локальный базис $\{dx^1, \ldots \ldots, dx^n\}$ кокасательного пространства T^*M и $\{dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}\}$ как базис в $\Lambda^k T^*M$. Тогда локально дифференциальную k-форму можно представить следующим бразом:

$$\omega|_U = \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x) dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}.$$

Используя, кроме того, локальное представление сечения векторного расслоения, получим

$$(\omega \otimes s)|_U = \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x) \cdot s^i(x)(dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}) \otimes e_i(x) \mapsto$$
$$\mapsto \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x) \cdot s^i(x)(dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}) \cdot e_i(x).$$

Переходя к общему случаю, запишем локальную формулу для дифференциальной k-формы со значениями в векторном расслоении $\mathcal{E}$:

$$\theta|_U = \theta^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x)(dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}) \cdot e_i(x),$$

где $\theta \in \mathcal{A}^k(M, \mathcal{E})$, $x \in U$. Исходя из этого, получим, что значение дифференциальной формы $\theta \in \mathcal{A}^k(M, \mathcal{E})$ на k векторных полях $X_1, \ldots, X_k$ будет сечением векторного расслоения, которое локально имеет вид

$$\theta(X_1, \ldots, X_k)|_U = \theta^i_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x) X_1^{\alpha_1} \ldots X_k^{\alpha_k} \cdot e_i(x).$$

В случае, если $(\mathcal{E}, \pi, M)$ является тривиальным расслоением, т. е. $\pi : M \times E \longrightarrow M$ — естественная проекция, то вместо $\mathcal{A}^k(M, \mathcal{E})$ будем писать $\mathcal{A}^k(M, E)$ и соответствующие формы будем называть векторзначными формами.

Пусть (P, π, M) — главное расслоение со структурной группой G и $((P \times E)/G, \pi, M)$ — ассоциированное расслоение.

Определение 1. 8. $k-$форму σ на главном расслоении P со значениями в E называют *эквивариантной* (или *базовой*), если выполняются следующие условия:

1) $\sigma(X_1, \ldots, X_k) = 0$, если хотя бы одно из векторных полей $X_1, \ldots$ $\ldots, X_k$ на P будет вертикальным (формы, для которых выполняется только это условие называют горизонтальными);

2) $R_g^*(\sigma) = \rho(g^{-1})\sigma$, $\forall g \in G$.

Обозначим пространство базовых форм через $\mathcal{A}(P, E)_{\text{bas}}$.

Пространство $k-$форм со значениями в $(P \times E)/G)$ можно отождествить с пространством базовых k-форм на P, принимающих значения в E, т.е.

$$\mathcal{A}^k(P, E)_{\text{bas}} \cong \mathcal{A}^k(M, (P \times E)/G).$$

Пространство дифференциальных форм на P со значениями в E, для которых имеет место только второе условие определения 1.8, обозначим через $\mathcal{A}(P, E)^G$. Элементы $\mathcal{A}(P, E)^G$ удовлетворяют инфинитезимальной форме инвариантности:

$$\mathcal{L}_X \sigma + \rho'(X)\sigma = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall \sigma \in \mathcal{A}(P, E)^G. \tag{11}$$

Глава II

Теория связностей

§ 1. Понятие связности и формы связности.

В данной главе изложим теорию связностей на расслоениях. На произвольном расслоении нет естественным образом выделенной связности, задавая связность, мы вводим дополнительную структуру. Если некоторый слой $E_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in M$, расслоения $(\mathcal{E}, \pi, M)$ параллельно перенести на всевозможные близкие слои, тогда точки этого слоя описывают кривые, пересекающие слои горизонтально. Естественно потребовать, чтобы касательные векторы к этим кривым, проходящие через точку $p \in E_x$, образовывали некоторое подрасслоение в $T\mathcal{E}$, дополнительное к вертикальному касательному расслоению $V\mathcal{E}$. В данном параграфе рассмотрим два эквивалентных способа определения связности на расслоении, либо с помощью горизонтального распределения в касательных пространствах, либо используя язык дифференциальных форм.

Рассмотрим расслоение $(\mathcal{E}, \pi, M)$ и касательное расслоение $T\mathcal{E}$ над базой $\mathcal{E}$. Выделим произвольную точку $p \in \mathcal{E}$, имеем $\pi(p) = x$, причём слоем над x будет касательное пространство T_xM. Дифференциал проекции $\pi_* : T_p\mathcal{E} \longrightarrow T_xM$ отображает касательное пространство к $\mathcal{E}$ в точке $p \in \mathcal{E}$ в касательное пространство в точке $x = \pi(p) \in M$. Выделим в $T\mathcal{E}$ подрасслоение $V\mathcal{E}$ над базой $\mathcal{E}$, пространство расслоения которого состоит из векторов, касательных к слою через p. Таким образом, факторпространство $T\mathcal{E}/V\mathcal{E}$ изоморфно пространству $\pi^*TM = \bigcup_{p\in\mathcal{E}} T_{\pi(p)}M$. Получим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow V\mathcal{E} \longrightarrow T\mathcal{E} \longrightarrow \pi^*TM \longrightarrow 0.$$

Распределение такой последовательности назовём связностью.

Определение 2.1. 1-формой связности называется 1-форма $\omega \in \in \mathcal{A}^1(\mathcal{E}, V\mathcal{E})$ такая, что $\omega(X) = X$ для любого вертикального векторного поля на $\mathcal{E}$.

Ядро 1-формы ω, т.е. множество таких векторов, что $\omega(X) = 0$, называют *горизонтальным расслоением* и обозначают $H\mathcal{E}$. Заметим, что $H\mathcal{E} \cong \pi^*TM$, тем самым, для заданной 1-формы связности на расслоении, мы можем построить саму связность.

Пусть X — векторное поле на многообразии M. Когда на расслоении задана связность, проекция $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow M$ индуцирует отображение $\pi_* : H\mathcal{E} \longrightarrow TM$. Обозначим через $X_\mathcal{E}$ сечение горизонтального расслоения такое, что $\pi_* X_\mathcal{E} = X$. Назовём $X_\mathcal{E}$ *горизонтальным лифтом* векторного поля X по отношению к связности, определённой через 1-форму связности ω.

Важным объектом при изучении формы связности на расслоении $(\mathcal{E}, \pi, M)$ является форма кривизны связности Ω, представляющая собой сечение расслоения $\Lambda^2 \pi^* T^* M \otimes V\mathcal{E}$. Пусть X и Y — векторные поля на M а $X_\mathcal{E}$, $Y_\mathcal{E}$ соответствующие горизонтальные лифты, тогда $\Omega(X, Y)$ — это вертикальное векторное поле на $\mathcal{E}$, определяемое формулой

$$\Omega(X, Y) = [X, Y]_\mathcal{E} - [X_\mathcal{E}, Y_\mathcal{E}]. \tag{12}$$

Покажем, что таким образом опредлённая форма кривизны связности действительно является вертикальным векторным полем, иными словами $\pi_*(\Omega(X, Y)) = 0$:

$$\begin{aligned} \pi_*(\Omega(X, Y)) = \pi_*([X, Y]_\mathcal{E} - [X_\mathcal{E}, Y_\mathcal{E}]) = [X, Y] - \pi_*[X_\mathcal{E}, Y_\mathcal{E}] = \\ = [X, Y] - [\pi_* X_\mathcal{E}, \pi_* Y_\mathcal{E}] = [X, Y] - [X, Y] = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь более подробно связности на главных расслоениях. Пусть (P, π, M) — главное расслоение со структурной группой G. Для каждой точки $p \in P$, пусть $T_p P$ — касательное пространство к P в точке p, V_p — подпространство вертикальных векторов. На главных расслоениях мы будем рассматривать только такую связность, которая будет инвариантной относительно действия группы G.

Определение 2.2. Связность на главном расслоении (P, π, M) — это сопоставление подпространства H_p из $T_p P$ каждой точке $p \in P$ такое, что

1) $T_p P = V_p \oplus H_p$;

2) $H_{pg} = (R_g)_* H_p$ для каждого $p \in P$ и $g \in G$, где R_g — преобразование в P, индуцированное элементом $g \in G$, $R_g p = g \cdot p$, а $(R_g)_* : TP \longrightarrow TP$ – его дифференциал;

3) H зависит дифференцируемо от p.

Мы называем H_p *горизонтальным подпространством* в $T_p P$; вектор $X \in T_p P$ называется горизонтальным, если он лежит в H_p. Заметим, что условие (2) означает, что совокупность подпространств горизонтальных распределений инвариантна относительно действия группы G.

Напомним, что в § 9 мы отождествляли VP с тривиальным расслоением $P \times \mathfrak{g}$. Для заданной связности на главном расслоении (P, π, M), определим *1-форму связности* $\omega \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g})^G$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G : $\iota_{X_P}\omega = \omega(X_P) = X$, где $X \in \mathfrak{g}$ и X_P — вертикальное векторное поле на P. Из определения 1.8 следует, что $R_g^*(\omega) = \mathrm{ad}(g^{-1})\omega$, для каждого $g \in G$, ad означает присоединённое представление группы G в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Для формы связности $\omega \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g})^G$ имеет место формула

$$\mathcal{L}_X\omega + [X, \omega] = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \tag{13}$$

Для 1-формы связности ω мы можем определить её *форму кривизны* $\Omega \in \mathcal{A}^2(P, \mathfrak{g})_{\mathrm{bas}}$:

$$\Omega(X, Y)_P = h[hX, hY] - [hX, hY], \tag{14}$$

здесь h означает проекцию на горизонтальное подпространство в TP и X, Y – два векторных поля на P. Из формулы (14) следует, что форма кривизны связности показывает меру отклонения коммутатора двух горизонтальных векторных полей от горизонтального подпространства H_P или же измеряет вертикальную составляющую коммутатора.

На пространстве дифференциальных форм со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определим скобки Ли следующим образом:

$$[\omega \otimes X, \theta \otimes Y] = (\omega \wedge \theta) \otimes [X, Y], \quad \text{где } \omega, \theta \in \mathcal{A}(P), \ X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{15}$$

Тогда для 1-формы ω, принимающей значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ имеет место $[\omega, \omega](X, Y) = 2[\omega(X), \omega(Y)]$, где X, Y касательные вектора к P.

Предложение 2.3. Пусть ω — форма связности на главном расслоении P и Ω — её форма кривизны . Тогда имеет место так называемое структурное уравнение связности

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]. \tag{16}$$

Доказательство. Проверим, будет ли таким образом определённая форма кривизны связности базовой. Поскольку 1-форма связности $\omega \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g})^G$, то остаётся проверить будет ли дифференциальная форма $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ горизонтальной. Используя формулу (3), получим

$$\iota_X(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) = \mathcal{L}_X\omega - d \circ \iota_X\omega + [X, \omega] = 0,$$

поскольку для формы связности ω имеет место уравнение (11) и $d(\iota_X\omega) = dX = 0$.

Поскольку каждый вектор на P есть сумма вертикального и горизонтального векторов, то остаётся проверить равенство (16) в случае если X и Y горизонтальны.

$$\Omega(X,Y) = d\omega(X,Y) + \frac{1}{2}[\omega(X),\omega(Y)].$$

Поскольку в этом случае $\omega(X) = \omega(Y) = 0$, то получим

$$\begin{aligned}\Omega(X,Y) &= d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) = -\omega([X,Y]) = \\ &= h[X,Y] - [X,Y],\end{aligned}$$

где h – проекция на H_P, и равенство сводится к определению Ω. $\square$

§ 2. Ковариантное дифференцирование.

Пусть $(\mathcal{E},\pi,M)$ — векторное расслоение.

Определение 2.4. Ковариантным дифференцированием на расслоении $\mathcal{E}$ называется линейный дифференциальный оператор

$$\nabla : \Gamma(M,\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(M, T^*M \otimes \mathcal{E}),$$

удовлетворяющий правилу Лейбница:

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s, \quad \forall f \in C^\infty(M), \forall s \in \Gamma(M,\mathcal{E}). \tag{17}$$

Таким образом, если s – сечение исходного векторного расслоения $\mathcal{E}$, то ∇s – сечение расслоения $T^*M \otimes \mathcal{E}$, т.е. 1-форма на M со значениями в расслоении $\mathcal{E}$.

Пусть X — векторное поле на M. Определим *ковариантную производную вдоль векторного поля* X следующим образом: $\nabla_X(s) = \langle\nabla(s), X\rangle$, т.е. $\nabla_X(s)$ получается спариванием векторного поля X и 1-формы $\nabla(s)$ или же ковариантная производная вдоль X определяется значением 1-формы $\nabla(s)$ на X. ∇_X зависит от векторного поля X линейно, т.е. $\nabla_{fX} = f\nabla_X$, $\forall f \in C^\infty(M)$. К тому же, если сечение s задано локально (т.е. $s(x) \in E_x$, $x \in M$), то $\nabla_X(fs) = f\nabla_X(s) + (Xf)\cdot s$. Здесь Xf означает результат действия X, как дифференциального оператора первого порядка на гладкую функцию f, $\langle df, X\rangle = Xf$.

Опишем локальную структуру ковариантного дифференцирования. Пусть расслоение $\mathcal{E} = M \times E$ тривиально. Это эквивалентно

тому, что на открытом подмножестве U многообразия M задан набор сечений $e_1, \ldots, e_r \in \Gamma(U, \mathcal{E})$, зависящих от точки $x \in U$ и образующих при каждом x базис $f = (e_1, \ldots, e_r)$ соответствующего слоя. Пусть также на M фиксирована система координат $(x^1, \ldots, x^n)$, тогда локально по формуле (9) сечение расслоения имеет вид $s|_U = s^i(x)e_i$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда

$$\nabla(s) = \nabla(s^i(x)e_i) = ds^i(x) \cdot e_i + s^i(x)\nabla(e_i) = ds^i(x) \cdot e_i + \omega_j^i(x)s^j(x) \cdot e_i = \\ = (ds^i(x) + \omega_j^i(x)s^j(x)) \cdot e_i,$$

где $\nabla e_j = (\omega_j^i)(x) \cdot e_i$, $(i = 1, \ldots, r)$, и $\omega_j^i(x) = \Gamma_{jk}^i(x)dx^k$, $(k = 1, \ldots, n,)$ — 1-формы на M. Функции $\Gamma_{jk}^i(x)$ называются *символами Кристоффеля*, они зависят от двух наборов данных — от координат $x^1, \ldots, x^n$ и от сечений $e_1, \ldots, e_r$. При замене координат формы ω_j^i не изменяются, поэтому символы $\Gamma_{jk}^i(x)$ преобразуются как коэффициенты матричнозначной дифференциальной формы. При замене набора базисных сечений происходит следущее: пусть $g = (g_j^l)$ — матрица перехода от базиса f к базису f', т.е. $e'_j = g_j^l(x) \cdot e_l$, $l = 1, \ldots, r$. Тогда

$$\nabla(e'_j) = (\omega')_j^i(x) \cdot e'_i = (\omega')_j^i(x)g_i^k(x) \cdot e_k, \quad i, k = 1, \ldots, r.$$

С другой стороны

$$\nabla(e'_j) = \nabla(g_j^l(x) \cdot e_l) = dg_j^l(x) \cdot e_l + g_j^l(x)\omega_l^k(x) \cdot e_k, \quad l, k = 1, \ldots, r.$$

Откуда

$$\omega' = dg \cdot g^{-1} + g \cdot \omega \cdot g^{-1},$$

где $\omega = (\omega_l^i(x))$ рассматривается как матрица 1-форм (или 1-форма со значениями в матрицах).

Таким образом, ковариантное дифференцирование на $M \times E$ определяется формулой

$$\nabla(s) = ds + \omega \cdot s, \tag{18}$$

где $\omega \in \mathcal{A}^1(M, End\mathcal{E}) = \mathcal{A}(M) \otimes End(E)$. 1-форму ω называют *формой связности ковариантного дифференцирования* ∇ в заданной тривиализации расслоения $\mathcal{E}$.

Множество $\Gamma(M, \mathcal{E})$ сечений векторного расслоения $\mathcal{E}$ с базой M является модулем над кольцом $C^\infty(M)$ гладких функций на базе M. Если g — набор линейных отображений слоёв одного расслоения $\mathcal{E}_1$ в соответствующие слои другого расслоения $\mathcal{E}_2$, то формула $s \mapsto gs$ задаёт гомоморфизм модулей $\Gamma(M, \mathcal{E}_1) \longrightarrow \Gamma(M, \mathcal{E}_2)$. Заметим, что множество ковариантных дифференцирований векторного расслоения

$\mathcal{E}$ является аффинным пространством, натянутым на векторное пространство 1-форм на базе расслоения со значениями в $\mathrm{End}(\mathcal{E})$, т.е. на пространство сечений $\Gamma(M, T^*M \otimes \mathrm{End}(\mathcal{E}))$. Действительно, пусть ∇_0 и ∇_1 — ковариантные дифференцирования на векторном расслоении $\mathcal{E}$ с базой M, в этом случае отображение $\nabla_1 - \nabla_0 : \Gamma(M, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(M, T^*M \otimes \mathcal{E})$ будет гомоморфизмом модулей, так как

$$\nabla_1(fs) - \nabla_0(fs) = df \otimes s + f\nabla_1(s) - df \otimes s - f\nabla_0(s) = f(\nabla_1(s) - \nabla_0(s)),$$

где $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(M, \mathcal{E})$. Существует единственное сечение $\omega \in \in \Gamma(M, T^*M \otimes \mathrm{End}(\mathcal{E}))$, такое что

$$\nabla_1(s) - \nabla_0(s) = \omega \cdot s.$$

Следовательно, ∇_1 и ∇_0 различаются на 1-форму ω.

Ковариантное дифференцирование $\nabla : \Gamma(M, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(M, T^*M \otimes \mathcal{E})$ можно продолжить до отображения

$$\nabla : \Gamma(M, \Lambda^k T^*M \otimes \mathcal{E}) \to \Gamma(M, \Lambda^{k+1} T^*M \otimes \mathcal{E})$$

при всех $k = 0, 1, \ldots$ по правилу Лейбница. Именно, пусть для некоторого k отображение ∇ уже задано и пусть $\theta \in \Gamma(M, T^*M \otimes \mathcal{E})$ 1-форма со значениями в $\mathcal{E}$ и α – k-форма с вещественными значениями. Тогда $\alpha \wedge \theta \in \Gamma(M, \Lambda^{k+1} T^*M \otimes \mathcal{E})$ и, по определению $\nabla(\alpha \wedge \theta) = = d\alpha \wedge \theta + (-1)^k \alpha \wedge \nabla\theta$. На все остальные элементы пространства $\Gamma(M, \Lambda^{k+1} T^*M \otimes \mathcal{E})$ отображение ∇ продолжим по линейности. Из всего выше сказанного следует, что ковариантное дифференцирование продолжается до отображения

$$\nabla : \mathcal{A}^\bullet(M, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}^{\bullet+1}(M, \mathcal{E}),$$

удовлетворяющего правилу градуированного Лейбница :

$$\nabla(\alpha \wedge \theta) = d\alpha \wedge \theta + (-1)^k \alpha \wedge \nabla\theta, \tag{19}$$

где $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$, $\theta \in \mathcal{A}(M, \mathcal{E})$.

Из определения связности следует, что для k-формы α со значениями в $\mathcal{E}$ и векторных полей $X_0, \ldots, X_k$ имеет место

$$(\nabla\alpha)(X_0, \ldots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \nabla_{X_i}(\alpha(X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_k)) +$$

$$+ \sum_{0 \le i \le j \le k} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_k). \tag{20}$$

Определим теперь форму кривизны ковариантного дифференцирования ∇. Пусть X, Y – векторные поля на базе M расслоения $\mathcal{E}$. Квадратные скобки в дальнейшем означают коммутатор векторных полей. *Формой кривизны* ковариантного дифференцирования ∇ называется 2-форма на M со значениями в $\mathrm{End}(\mathcal{E})$, определяемая формулой

$$F(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}. \tag{21}$$

Действительно, не сложно показать, что отображение

$$F(X,Y) : \Gamma(M,\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(M,\mathcal{E})$$

является гомоморфизмом модулей. Отображение $(X,Y) \mapsto F(X,Y)$ является гомоморфизмом модулей $\Gamma(M,\Lambda^2 TM) \longrightarrow \Gamma(M,\mathrm{End}(\mathcal{E}))$. Покажем, что $[F(X,Y),f] = 0$, где $f \in C^\infty(M)$. Пусть $s \in \Gamma(M,\mathcal{E})$, тогда

$$\begin{aligned}
[F(X,Y),f](s) &= F(X,Y)(fs) - fF(X,Y)(s) = \\
&= ([\nabla_X,\nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})(fs) - f([\nabla_X,\nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})(s) = \\
&= \nabla_X(\nabla_Y(fs)) - \nabla_Y(\nabla_X(fs)) - \nabla_{[X,Y]}(fs) - \\
&- f(\nabla_X(\nabla_Y(s))) + f(\nabla_Y(\nabla_X(s))) + f\nabla_{[X,Y]}(s) = \\
&= f\nabla_X(\nabla_Y(s)) + (Xf)\cdot(\nabla_Y(s)) + \nabla_X((Yf)\cdot s) - \\
&- f\nabla_Y(\nabla_X(s)) - (Yf)\cdot(\nabla_X(s)) - \nabla_Y((Xf)\cdot s) - \\
&- f\nabla_{[X,Y]}(s) - ([X,Y]f)\cdot s - f\nabla_X(\nabla_Y(s)) + \\
&+ f(\nabla_Y(\nabla_X(s))) + f\nabla_{[X,Y]}(s) = 0.
\end{aligned}$$

Пусть расслоение $\mathcal{E}$ тривиально и $e_1,\ldots,e_r$ — базисные сечения, а на базе M введены координаты $x^1,\ldots,x^n$. Пусть $\nabla(e_i) = \omega_i^k(x)e_k$, $k = 1,\ldots,r$, где $\omega = (\omega_i^k)$ — матрица из 1-форм. Форма кривизны в данных координатах задаётся равенством

$$F = d\omega + \omega\wedge\omega. \tag{22}$$

Действительно, поскольку известно, что F 2-форма, достаточно вычислить значение $F(X_i,X_j)$, где $X_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ — базисные поля. Получим

$$F(X_i,X_j)(e_k) = [\nabla_{X_i},\nabla_{X_j}] = \nabla_{X_i}(\omega_k^l(X_j)e_l) - \nabla_{X_j}(\omega_k^l(X_i)e_l) =$$

$$= \nabla_{X_i}(\Gamma_{kj}^l(x)e_l) - \nabla_{X_j}(\Gamma_{ki}^l(x)e_l) = (\frac{\partial\Gamma_{kj}^l}{x_i} - \frac{\partial\Gamma_{ki}^l}{x_j}) + (\Gamma_{kj}^l\Gamma_{li}^s - \Gamma_{ki}^l\Gamma_{lj}^s) =$$

$$= (d\omega + \omega\wedge\omega)(X_i,X_j)(e_k).$$

Операторы $\nabla^2 = \nabla\circ\nabla$ и F совпадают как операторы

$$\mathcal{A}^\bullet(M,\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}^{\bullet+2}(M,\mathcal{E}).$$

Это утверждение достаточно проверить локально. Пусть расслоение $\mathcal{E}$ тривиально, ковариантное дифференцирование задаётся равенством $\nabla(s) = ds + \omega \cdot s$, где ω — матрица связности, $s(x)$ — вектор координат сечения. Тогда $\nabla(\nabla(s)) = \nabla(ds+\omega\cdot s) = d\omega\cdot s - \omega\wedge ds + \omega\wedge ds + \omega\wedge\omega\cdot s = F\cdot s$.

На тривиальном расслоении $\mathcal{E}$ с ковариантным дифференцированием $\nabla = d + \omega$ имеет место *тождество Бьянки*

$$dF = [F, \omega]. \tag{23}$$

Используя равенство (22) для левой части данного тождества имеем

$$dF = d^2\omega + d\omega\wedge\omega - \omega\wedge d\omega = d\omega\wedge\omega - \omega\wedge d\omega.$$

Правая часть принимает вид

$$\begin{aligned} [F,\omega] &= [d\omega + \omega\wedge\omega, \omega] = \\ &= d\omega\wedge\omega + \omega\wedge\omega\wedge\omega - \omega\wedge d\omega - \omega\wedge\omega\wedge\omega = \\ &= d\omega\wedge\omega - \omega\wedge d\omega. \end{aligned}$$

Пусть (P, π, M) — главное расслоение со структурной группой G и E векторное пространство, на котором группа G действует слева и $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ представление группы G как группы диффеоморфизмов пространства E. Пусть ω — 1-форма связности на P. Рассмотрим ассоциированное расслоение $(P\times E)/G$. В этом случае мы можем построить ковариантное дифференцирование ∇ на ассоциированном расслоении с помощью 1-формы ω на соответствующем главном расслоении следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(P,E)^G & \xrightarrow{d+\rho'(\omega)} & \mathcal{A}^1(P,E)_{bas} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(M,\mathcal{E}) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{A}^1(P,\mathcal{E}) \end{array}$$

Пусть $s : P \longrightarrow E$ — эквивариантное отображение, т.е. $\forall p \in P$, $\forall g \in G$ выполняется $s(p\cdot g) = \rho(g^{-1})s(p)$. Покажем, что $ds + \rho'(\omega)s$ будет эквивариантной 1-формой со значениями в E. Пусть $X \in \mathfrak{g}$, тогда учитывая, что $\iota_X(\omega) = X$, получим

$$\iota_X(ds + \rho'(\omega)s) = X\cdot s + \rho'(X)s.$$

Поскольку $s \in C^\infty(P,E)^G$, то согласно формуле (8) $\iota_X(ds+\rho'(\omega)s)=0$, причём из (11) следует, что данная 1-форма будет также и инвариантной, следовательно, $ds+\rho(\omega)s \in \mathcal{A}^1(P,E)_{bas}$. Из предложения 1.7 следует, что $C^\infty(P,E)^G \simeq \Gamma(M,(P\times E)/G)$. Согласно диаграмме, исходя из 1-формы связности на главном расслоении P, определяется ковариантное дифференцирование на соответстующем ассоциированном расслоении.

§ 3. Параллельный перенос.

Пусть $\varphi : N \longrightarrow M$ — гладкое отображение многообразий и $(\mathcal{E},\pi,M)$ — векторное расслоение. Обозначим через $\nabla^{\mathcal{E}}$ ковариантное дифференцирование на векторном расслоении $\mathcal{E}$. Пусть $\varphi^* : \Gamma(M,\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(N,\varphi^*\mathcal{E})$. Определим для $f \in C^\infty(N)$ и $s \in \Gamma(M,\mathcal{E})$ ковариантное дифференцирование на расслоении $\varphi^*\mathcal{E}$ с базой N :

$$\nabla^{\varphi^*\mathcal{E}}(f\varphi^*s) = df\otimes\varphi^*s + f\varphi^*(\nabla^{\mathcal{E}}s).$$

Пусть $\gamma(t):\mathbb{R}\longrightarrow M$ — гладкая кривая на многообразии M, с касательным вектором $\dot\gamma(t) = d\gamma(\frac{d}{dt})_t \in T_{\gamma(t)}M$. Если кривая $s:\mathbb{R}\longrightarrow\gamma^*\mathcal{E}$ будет гладкой, то $\nabla^{\mathcal{E}}_{\dot\gamma(t)}s(t)$ определяет ковариантное дифференцирование $\nabla^{\gamma^*\mathcal{E}}(s)(t)$. Пусть расслоение $\mathcal{E}=M\times E$ тривиально, тогда исходя из равенства (18) $\nabla^{\mathcal{E}} = d+\omega$. В этом случае $s(t)=(\gamma(t),f(t))$, где $f:\mathbb{R}\to E$ и ковариантное дифференцирование примет вид

$$\nabla^{\mathcal{E}}_{\dot\gamma(t)}s(t) = (\gamma(t), \frac{df(t)}{dt} + \omega(\dot\gamma(t))f(t)).$$

Параллельный перенос вдоль кривой $\gamma(t)$ это гомоморфизм сечений

$$\tau_\gamma(t) \in Hom(\mathcal{E}_{\gamma(0)},\mathcal{E}_{\gamma(t)})$$

Параллельный перенос определяется решениями системы дифференциальных уравнений

$$\nabla^{\mathcal{E}}_{\dot\gamma(t)}\tau_\gamma(t) = 0, \tag{24}$$

с начальным условием $\tau_\gamma(0)=id$, где id тождественное преобразование.

§ 4. Аффинные связности.

В данном параграфе рассмотрим связности на касательном расслоении TM, их также называют *аффинными связностями.* Аффинная связность ∇ сопоставляет каждому векторному полю X на M ковариантную производную ∇_X вдоль поля X.

Определение 2.5. Фундаментальной 1-формой на многообразии M называется 1-форма θ со значениями в касательном расслоении TM такая, что $\theta(X) = X\ \forall X \in TM$. *Кручением* аффинной связности ∇ называется дифференциальная форма $T = \nabla\theta \in \mathcal{A}^2(M, TM)$. Если кручение $T = 0$, то говорится, что ∇ — афинная связность без кручения.

Для двух векторных полей X, Y на многообразии M, исходя из формулы (20), мы можем описать кручение $T(X, Y) \in \Gamma(M, TM)$ явной формулой:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \tag{25}$$

Связность на TM порождает ковариантное дифференцирование на любом векторном расслоении, ассоциированном с расслоением реперов $R(M)$, в частности, на внешнем расслоении ΛT^*M. Для аффинной связности имеет место следующая формула:

$$\nabla_X(\alpha \wedge \beta) = \nabla_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \nabla_X\beta$$

для любых однородных дифференциальных форм α и β и любого векторного поля X. Если α — k-форма и $X, Y_1, \ldots, Y_k$ — векторные поля на M, то

$$X \cdot \alpha(Y_1, \ldots, Y_k) = (\nabla_X\alpha)(Y_1, \ldots, Y_k) + \sum_{i=1}^{k} \alpha(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_k).$$

Предложение 2.8. Для аффинной связности без кручения ∇ на расслоении TM внешний дифференциал $\mathbb{D}$ равен композиции

$$\Gamma(M, \Lambda T^*M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(M, T^*M \otimes \Lambda T^*M) \xrightarrow{\varepsilon} \Gamma(M, \Lambda^{\bullet+1} T^*M),$$

где $\varepsilon : T^*M \otimes \Lambda^\bullet T^*M \longrightarrow \Lambda^{\bullet+1} T^*M$.

Доказательство. Поскольку, аффинная связность ∇ удовлетворяет правилу Лейбница, то и опреатор $\mathbb{D} = \varepsilon \circ \nabla$ будет удовлетворять правилу Лейбница, т.е.

$$\mathbb{D}(\alpha\beta) = \mathbb{D}\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge \mathbb{D}\beta.$$

Необходимо показать, что оператор $\mathbb{D}$ на 1-формах будет совпадать с внешним дифференцированием d. Последующее доказательство будет опираться на формулу

$$\mathbb{D}^2 f = \mathbb{D}(df) = -\langle T, df\rangle \in \mathcal{A}^2(M), \quad \forall f \in C^\infty(M),$$

где $T \in \mathcal{A}^2(M, TM)$ — кручение аффинной связности ∇. Если $T = 0$, то оператор $\mathbb{D}$ будет действовать на 1-формах как и внешнее дифференцирование d. В координатной окрестности $U \subset M$ с локальной координатной системой $(x^1, \ldots, x^n)$ мы берём $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, как базис для каждого кастельного пространства $T_x M$, $x \in U$, и dx^i как дуальный базис в $T_x^* M$. Обозначим ковариантную производную вдоль X_i через ∇_i. Запишем аффинную связность ∇ в виде $\nabla = dx^i \nabla_i$. Тогда

$$\mathbb{D} = \varepsilon(dx^i)\nabla_i.$$

Следовательно, $\mathbb{D}(df)$ равен

$$\varepsilon(dx^i)\nabla_i(\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j) = \varepsilon(dx^i)\frac{\partial f}{\partial x^j}\nabla_i dx^j = \varepsilon(dx^i dx^k)\frac{\partial f}{\partial x^j}\langle \nabla_i(dx^j), X_k.\rangle$$

Исходя из правиала Лейбница, имеем

$$0 = \nabla_i\langle dx^j, X_k\rangle = \langle \nabla_i dx^j, X_k\rangle + \langle dx^j, \nabla_i X_k\rangle.$$

Запишем $\theta = X_k dx^k$ и проверим, что θ действительно является фундаментальной 1-формой. Пусть $Y = y^k X_k$, тогда

$$\theta(Y) = X_m dx^m(y^k X_k) = y^k X_m dx^m X_k = y^k X_k = Y.$$

Кручение аффинной связности ∇ примет вид

$$T(X_i, X_k) = \nabla\cdot\theta(X_i, X_k) = \nabla_i\theta(X_k) - \nabla_k\theta(X_i) - \theta([X_i, X_k]) = \nabla_i X_k - \nabla_k X_i.$$

Теперь

$$\mathbb{D}(df) = -\varepsilon(dx^i dx^k)\frac{\partial f}{\partial x^j}\langle dx^j, \nabla_i X_k\rangle = -\varepsilon(dx^i dx^k)\langle df, T(X_i, X_k)\rangle.$$

□

§ 5. Римановы многообразия и связность Леви-Чевита.

Метрикой на векторном расслоении $(\mathcal{E}, \pi, M)$ называется гладкое семей-ство невырожденных внутренних произведений на слоях данного расслоения. Говорится, что ковариантное дифференцирование $\nabla : \Gamma(M, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(M, T^*M \otimes \mathcal{E})$ совместимо с метрикой, если

$$g(s_1, s_2) = (\nabla(s_1), s_2) + (s_1, \nabla(s_2)),$$

где $s_i \in \Gamma(M, \mathcal{E})$.

Пусть ∇ — ковариантное дифференцирование, совместимое с метрикой на расслоении $\mathcal{E}$. Кривизна $F_x(X, Y)$ принимает значения в алгебре Ли $\mathfrak{so}(\mathcal{E}_x)$ косоприсоединённых эндоморфизмов слоя $\mathcal{E}_x$. В случае если в слое $\mathcal{E}_x$ выбран базис, то эндоморфизмы реализуются матрицами и на языке матриц это означает, что кривизна принимает значения в алгебре Ли кососимметричных матриц.

Пусть M — $n-$мерное многообразие. Многообарзие M допускает риманову метрику, каждая риманова метрика g определяет скалярное произведение в каждом касательном пространстве T_xM. *Римановой структурой* на M называется метрика на касательном расслоении TM. С помощью римановой структуры мы можем построить расслоение ортонормальных реперов

$$O(M) = \{(x, (e_1, \ldots, e_n))\},$$

где e_i — ортонормальный базис касательного пространства T_xM в точке $x \in M$.

Пусть M_1, M_2 — римановы многообразия с римановыми метриками g_1, g_2 соответственно. Отображение $f : M_1 \longrightarrow M_2$ называется *изометрическим* в точке $x \in M_1$, если $g_1(X, Y) = g_2(f_*X, f_*Y)$ для всех $X, Y \in T_xM_1$, где $f_* : T_xM_1 \longrightarrow T_{f(x)}M_2$ дифференциал отображения f. Если к тому же f взаимо однозначно отображает M_1 на M_2, то f называется *изометрией* M_1 на M_2, т.е. изометрия — это изоморфизм, сохраняющий значения всех скалярных произведений. Ортонормальный репер $p \in O(M)$ над точкой $x \in M$ может быть рассмотрен как изометрия $u = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x^i e_i \in T_xM$. Пусть π — проектсия $O(M)$ на многообразие M. Расслоение $O(M)$ — это главное расслоение со структурной группой $O(n)$, и касательное расслоение к M будет векторным расслоением, ассоциированным с $O(M)$, т.е.

$$TM \simeq (O(M) \times \mathbb{R}^n)/O(n).$$

На касательном расслоении TM с базой M, где M — риманово многообразие, существует единственное ковариантное дифференци-

рование без кручения, совместимое с римановой метрикой, оно называется *связностью Леви-Чивита.*

Связности Леви-Чивита $\nabla_X Y$ определяется равенством

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X \cdot g(Y,Z) + Y \cdot g(X,Z) - Z \cdot g(X,Y) + \\ +g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g(X,[Z,X]).$$

Обозначим через $so(TM)$ расслоение $(O(M) \times \mathfrak{so}(n))/O(n)$. Пусть $Ad : O(n) \to Mat(\mathfrak{so}(n))$ — присоединённое представление группы $O(n)$ на алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$, тогда $Ad(A)(a) = A^{-1}aA$, где $A \in O(n)$, $a \in \mathfrak{so}(n)$. Слоями $so(TM)$ будут кососимметричные матрицы.

Кривизна связности Леви-Чивита — это 2-форма на M со значениями в $so(TM)$, она называется *римановой кривизной* и обозначается $R \in \mathcal{A}^2(M, so(TM))$. Для любых векторных полей X, Y, Z на M имеет место равенство

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{26}$$

Для двух векторных полей на M, записывая $R(X,Y)$, мы имеем в виду, что R — 2-форма и мы рассматриваем её значение на векторных полях, в результате получаем косоимметричную матрицу $(R(X,Y))^i_j = R^i_{jkl} X^k Y^l$. Записывая (RX,Y), мы рассматриваем R как кососимметричную матрицу и (RX,Y) будет 2-формой.

Предложение 2.7. Пусть X, Y, Z — векторные поля на M. Имеют место следующие структурные уравнения:

1. $R(X,Y) = -R(Y,X)$;
2. $(R(W,X)Y,Z) + (Y, R(W,X)Z) = 0$;
3. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$;
4. $(R(W,X)Y,Z) = (R(Y,Z)W,X)$.

Доказательство. Первое равенство следует из того, что R является 2-формой, второе уравнение следует из того, что $R_x(W,X) \in \in so(T_xM)$. Докажем (3) уравнение, оно имеет место для кривизны любой связности без кручения на TM. Из определения римановой кривизны связности ∇ следует

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y = \nabla_X [Y,Z],$$
$$\nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_Y [Z,X],$$
$$\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X = \nabla_Z [X,Y]$$

Сложив эти три уравнения, получим

$$\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_X \nabla_Z Y = \\ = \nabla_X [Y,Z] + \nabla_Y [Z,X] + \nabla_Z [X,Y],$$

откуда непосредственно следует уравнение (3).

Докажем, что имеет место тождество (4). Из третьего тождества следует, что

$$(R(W,X)Y,Z)+(R(X,Y)W,Z)+(R(Y,W)X,Z)=0.$$

Заменим в полученном уравнении Z на W, X, Y соответственно и сложим получившиеся в результате четыре соотношения. Используя уравнение (1) и следствие из второго уравнения: $(R(W,X)Y,Z)=$ $=-(Z,R(W,X)Y)=-(R(W,X)Y,Z)$, получаем

$$(R(Z,W)X,Y)+(R(Z,X)Y,W)+(R(Z,Y)W,X)=0 \tag{27}$$

Из (3) следует, что

$$(R(Y,W)Z,X)=-(R(W,Z)Y,X)-(R(Z,Y)W,X).$$

Применив к этому равенству (1), получим соотношение

$$(R(Z,Y)W,X)=(R(Z,W)Y,X)-(R(Y,W)Z,X),$$

подставим его в (27), получим $(R(Z,X)Y,W)=(R(Y,W)Z,X)$. $\square$

В окрестности U с локальной координатной системой $(x^1,\dots,x^n)$ мы берём $X_i=\partial/\partial x_i$, $i=1,\dots,n$, как базис для касательного пространства T_xM, $x\in U$, и $X^i=dx^i$, как дуальный базис в T_x^*M. Компоненты R^i_{jkl} для римановой кривизны относительно данных базисов задаются так:

$$R^i_{ijk}=\langle R(X_k,X_l)X_j,X^i\rangle,$$

здесь скобки $\langle,\rangle$ означают значение $R(X_k,X_l)X_j$ в дуальном базисе, индексы k, l указывают на структуру 2-формы, а индексы i, j — на то, что R принимает значения в $End(TM)$. Для связности, согласованной с метрикой g, введём тензор

$$R_{ijkl}=(R(X_k,X_l)X_j,X_i),$$

т.е. $R_{ijkl}=g_{ip}R^p_{jkl}$. Тензор R_{ijkl} кососимметричен по индексам i, j. Согласно тождеству (4) предложения 2.7, для тензора римановой кривизны имееця симметрия вида $R_{ijkl}=R_{klij}$. Пусть e_i, $i=1,\dots,n$ — ортонормальный базис в касательном пространстве T_xM, $x\in M$, и e^i — дуальный базис. Относительно ортонормального базиса 2-форма (Re_i,e_j) определяется как

$$(Re_i,e_j)=\sum_{k<l}R_{ijkl}e^k\wedge e^l.$$

Тензором Риччи называется выражение

$$Ric_{ij} = \sum_k R_{ikjk},$$

след тензора Риччи $r_M = \sum_{lm} R_{lmlm}$ называется *скалярной кривизной* на многообразии M.

Глава III

Теория суперсвязностей

§ 1. Суперпространства и супералгебры.

Прежде всего введём определения понятий, необходимых нам вдальнейшем. Отметим, что в данной главе под алгеброй мы понимаем ассоциативную с единицей алгебру над $\mathbb{R}$ иил $\mathbb{C}$.

Под *суперпространством* будем понимать $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство $E = E^+ \oplus E^-$, где E^+, E^- подпространства векторного пространства E. Мы обозначили для краткости два элемента из $\mathbb{Z}_2$ через $+$ и $-$, хотя в действительности должны были бы обозначать через $0 \bmod 2$ и $1 \bmod 2$. В зависимости от применения в физике, элементы из $E^\pm$ будут называться чётными/нечётными, положительными/отрицательными, бозонами/фермионами. В том случае, если для элемента v пространства E определена *градуировка* $|v|$, т.е. $|v| = 0$, если $v \in E^+$ и $|v| = 1$, если $v \in E^-$, то он будет называться *однородным.* Следует отметить, что говоря о градуировке однородного элемента, мы имеем в виду соответствующие классы вычетов по модулю 2. Заметим, что $\mathbb{Z}_2$-градуированная структура может быть очевидным образом перенесена на тензорные произведения $\mathbb{Z}_2$-градуированных пространств, т.е. для суперпространств $E = E^+ \oplus E^-$ и $F = F^+ \oplus F^-$ их тензорное произведение есть $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство $E \otimes F$, где

$$(E \otimes F)^+ = E^+ \otimes F^+ \oplus E^- \otimes F^-$$
$$(E \otimes F)^- = E^+ \otimes F^- \oplus E^- \otimes F^+$$

Любое неградуированное векторное пространство F можно рассматривать, как $\mathbb{Z}_2$-градуированное, полагая $F^+ = F$ и $F^- = 0$.

Суперпространство $A = A^+ \oplus A^-$ называется *супералгеброй* (или $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй), если A алгебра и умножение в A согласовано с $\mathbb{Z}_2$-градуированной структурой, т.е.

$$A^\pm A^\pm \subset A^+, \quad A^\pm A^\mp \subset A^-. \tag{28}$$

Заметим, что условие согласованности умножения с $\mathbb{Z}_2$-градуированной структурой эквивалентно тому, что для любых однородных элементов a, $b \in A$ имеет место $|ab| = |a| + |b|$. Для двух произвольных однородных элементов a, b супералгебры A определим градуированный коммутатор $[a, b] \in A$ формулой

$$[a, b] = a \cdot b - (-1)^{|a||b|} b \cdot a, \tag{29}$$

где $|a|$, $|b|$ градуировки элементов a и b, причём согласно $\mathbb{Z}_2$-градуированной структуре алгебры A имеет место $|ab| = |a| + |b|$, причём $|a| = 0$, если $a \in A^+$, и $|a| = 1$, если $a \in A^-$. Супералгебру A назовём *коммутативной,* если для двух произвольных элементов a, $b \in A$ имеет место $[a, b] = 0$. Отметим, что если хотя бы один из элементов $[a, b]$ чётный, градуированный коммутатор (29) становится обычным коммутатором.

Приведём некоторые примеры супералгебр:

1) Алгебра эндоморфизмов $\mathrm{End}(E)$ суперпространства E будет супералгеброй относительно композиции эндоморфизмов с $\mathbb{Z}_2$-градуированной структурой:

$$\mathrm{End}^+(E) = \mathrm{End}(E^+, E^+) \oplus \mathrm{End}(E^-, E^-),$$
$$\mathrm{End}^-(E) = \mathrm{Hom}(E^+, E^-) \oplus \mathrm{Hom}(E^-, E^+).$$

Из выше приведённых формул следует, что эндоморфизм (линейный оператор) $L : E \longrightarrow E$ суперпространства E называется чётным, если он не меняет градуировку любого однородного элемента из E и нечётным в обратном случае .

2) Одним из важнейших примеров коммутативных супералгебр является алгебра Грассмана. Опишем подробнее структуру данной алгебры.

Определение 3.1. Алгеброй Грассмана называется ассоциативная алгебра с единицей, порождаемая системой образующих $\{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$, на которые наложены коммутационные соотношения: $\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i$, $\forall i, j \in (1, \ldots, p)$.

Из этого определения следует, что в частности, $(\xi_i)^2 = 0$, $i = = 1, \ldots, p$. Алгебру Грассмана с p образующими обозначим $\mathfrak{G}_p$. Основным определяющим свойством грассмановой алгебры является антикоммутативность её образующих $\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i$. Произвольный элемент алгебры Грассмана $\mathfrak{G}_p$ может быть записан в виде

$$\theta = \sum_{k\geq 0}^{p} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq p} \alpha^{i_1\ldots i_k}\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}, \tag{30}$$

где коэфициенты $\alpha^{i_1\ldots i_k}$ являются либо вещественными, либо комплексными числами, в зависимости от поля, над которым рассматривается данная алгебра Грассмана. Мономы $1, \xi_1, \ldots, \xi_p, \xi_1\xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_{p-1}\xi_p, \ldots, \xi_1\ldots\xi_p$ образуют базис векторного пространства $\mathfrak{G}_p$, откуда следует, что $\dim \mathfrak{G}_p = 2^p$.

Может быть доказано [9], что алгебра $\mathfrak{G}_p$ является коммутативной супералгеброй. Действительно, в алгебре Грассмана существует естественная структура суперпространства, а именно, любой элемент $\theta \in \mathfrak{G}_p$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\theta = \theta^+ + \theta^-,$$

где $\theta^+ = \sum_{i_1 \ldots i_{2r}} \alpha^{i_1 \ldots i_{2r}} \xi_1 \ldots \xi_{2r}$, и $r \in [0, [\frac{p}{2}]]$, (здесь $[\frac{p}{2}]$ означает целую часть $\frac{p}{2}$), т.е. это линейная комбинация мономов $\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_r}$ с чётным r; θ^- линейная комбинация мономов, но с нечётным r. Элементы θ^+ называются чётными элементами алгебры Грассмана, а θ^- — нечётными. Обозначим через $\mathfrak{G}_p^+$ — множество всех чётных элементов, через $\mathfrak{G}_p^-$ — множество всех нечётных элементов. Множества $\mathfrak{G}_p^+$, $\mathfrak{G}_p^-$ являются подпространствами $\mathfrak{G}_p$ и алгебра Грассмана $\mathfrak{G}_p$ представляет собой их прямую сумму. Таким образом, алгебра Грассмана $\mathfrak{G}_p$ является суперпространством. Нетрудно заметить, что произведение чётных элементов алгебры Грассмана вновь является чётным элементом, произведение нечётных элеметов — чётным элементом, произведение чётного и нечётного элементов — нечётным элементом. Следовательно умножение в алгебре Грассмана согласовано с градуированной структурой и алгебра Грассмана является супералгеброй. Несложно показать, что имеет место

$$\theta \cdot \vartheta = (-1)^{|\theta||\vartheta|} \vartheta \cdot \theta, \tag{31}$$

где θ, ϑ однородные элементы алгебры Грассмана и $|\theta|$, $|\vartheta|$ — их градуировки, причём, $|\theta \cdot \vartheta| = |\theta| + |\vartheta|$. Из формулы (31) следует коммутативность грассмановой алгебры.

3) Ещё одним примером супералгебры является алгебра Клиффорда. Рассмотрим конечномерное векторное пространство V с метрикой g, причём $\dim V = p$. Построим такую ассоциативную алгебру C_p с единицей 1, что для любого вектора $x \in V$ будет выполнено соотношение

$$x^2 = g(x, x) \cdot 1 = |x|^2 \cdot 1, \tag{32}$$

т.е. скалярный квадрат каждого вектора из V будет реализован как его квадрат в смысле умножения в алгебре C_p. Алгебру C_p называют *алгеброй Клиффорда.* Выберем в V ортогональный базис $\{e_1, \ldots, e_p\}$, имеем $g(e_i, e_j) = 0$, если $i \neq j$ и $|e_i|^2 = g(e_i, e_i) = a_i$, где $a_i = \pm 1$. Пусть базис $\{e_1, \ldots, e_p\}$ упорядочен таким образом, что $a_1 = \ldots = a_k = 1$ и $a_{k+1} = \ldots = a_p = -1$, где $1 \leq k \leq p$. Тогда любой вектор $x \in V$ может быть разложен по базису как $x = \sum_{i=1}^{p} x^i e_i$ и формула (32) примет

вид

$$\sum_{i,j=1}^{p} x^i x^j e_i \cdot e_j = \sum_{i=1}^{p} (x^i)^2 a_i \cdot 1.$$

Следовательно, если C_p алгебра, в которой имеют место соотношения (32), то образующие алгебры Клиффорда $\{1, e_1, \ldots, e_p\}$ должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{cases} 1 \cdot e_i = e_i \cdot 1 = e_i \\ e_i e_j = -e_j e_i, \quad \text{если } i \neq j \\ e_i^2 = a_i \end{cases} \tag{33}$$

Алгеброй Клиффорда называется ассоциативная алгебра с единицей 1, образующие $\{e_1, \ldots, e_p\}$ которой удовлетворяют соотношениям (33).

Опишем структуру алгебры Клиффорда C_p для векторного пространства V с метрикой g. Для каждого подмножества $J \subset \{1, \ldots, p\}$ введём символ e_J, причём положим, что $e_\emptyset = 1$, где $\emptyset$ – пустое подмножество. Пусть C_p — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ с базисом $\{e_J\}$. Заметим, что размерность пространства C_p равна 2^p. Определим теперь умножение на C_p таким образом, что бы это векторное пространство стало ассоциативной алгеброй с единицей. Благодаря линейности умножения, достаточно его определить на элементах базиса C_p. Для двух подмножеств $J, I \subset \{1, \ldots, p\}$ обозначим симметрическую разность $(J \cup I) \setminus (J \cap I) = J + I$. Пусть $j \in \{1, \ldots, p\}$, обозначим через $p(J, j)$ число таких элементов i множества J, для которых $i > j$. Обозначим

$$p(J, I) = \sum_{j \in I} p(J, j), \quad \zeta(J, I) = (-1)^{p(J,I)} \prod_{i \in I \cap J} a_i,$$

где, напомним, $a_i = g(e_i, e_i)$. Теперь определим умножение в алгебре C_p формулой

$$e_J e_I = \zeta(J, I) e_{J+I}. \tag{34}$$

Определённое таким образом умножение будет ассоциативным [3] и, как частный случай (34), имеют место соотношения (33). Из формулы (33) следует, что если J некое множество индексов $(i_1, \ldots, i_k)$, то $e_J = e_{i_1} \ldots e_{i_k}$. Таким образом, C_p есть алгебра Клиффорда.

Алгебра Клиффорда является некоммутативной супералгеброй [9]. Произвольный элемент $x \in C_p$ имеет вид

$$x = x^0 + \sum_{i=1}^{p} x^i e_i + \sum_{i<j} x^{ij} e_i e_j + \ldots + x^{1\ldots p} e_1 \ldots e_p.$$

Очевидно, что $\mathbb{Z}_2$-градуированная структура алгебры Клиффорда C_p определяется так же, как и для алгебры Грассмана $\mathfrak{G}_p$. Градуировку элемента $x \in C_p$ обозначим через $|x|$; для двух произвольных однородных элементов $x, y \in C_p$ имеет место $|xy| = |x| + |y|$. В отличие от алгебры Грассмана, алгебра Клиффорда не является коммутативной.

Рассмотрим конкретный пример алгебры Клиффорда. Пусть V — комплексная плоскость $\mathbb{C}^2$ с евклидовой метрикой $g(v, w) = v^2 + w^2$. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C}^2$. Тогда алгебра Клиффорда C_2 будет состоять из элементов вида

$$x = x^0 1 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^{12} e_1 e_2,$$

где $x^0, x^1, x^2, x^{12} \in \mathbb{C}$ и образующие этой алгебры e_1, e_2 подчиняются следующим соотношениям

$$1e_i = e_i 1 = e_i, \quad e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Покажем, что алгебра Клиффорда C_2 может быть представлена комплексными 2×2-матрицами, т.е. существует линейное отображение $\rho : C_2 \longrightarrow Mat_2(\mathbb{C})$ такое, что

$$\rho(xy) = \rho(x)\rho(y).$$

Пусть

$$\rho(1) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(e_1) = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\rho(e_2) = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(e_1 e_2) = i\sigma_3 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы σ_1, σ_2 σ_3 называются матрицами Паули, они удовлетворяют соотношениям $\sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 2\delta_{ik} I$ и вместе с единичной матрицей образуют базис в алгебре комплексных 2×2-матриц $Mat_2(\mathbb{C})$. Следовательно, алгебру Клиффорда C_2 можно отождествить с алгеброй $Mat_2(\mathbb{C})$, поскольку матрицы Паули удовлетворяют тем же соотношениям в алгебре матриц $Mat_2(\mathbb{C})$, что и образующие алгебры Клиффорда в C_2.

Образующие алгебры Клиффорда C_p, как правило, обозначаются символами $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$. В следующем параграфе мы тоже будем придерживатся этих обозначений.

Супералгеброй Ли назовём $\mathbb{Z}_2$-грауированное векторное пространство $\mathfrak{L}_S$ с определённой на нём линейной операцией $[,] : \mathfrak{L}_S \longrightarrow \mathfrak{L}_S$, удовлетворяющей условиям:

1) $[a,b] = -(-1)^{|a||b|}[b,a]$,

2) $(-1)^{|a||c|}[a,[b,c]] + (-1)^{|c||b|}[c,[a,b]] + (-1)^{|b||a|}[b,[c,a]] = 0$, где a, b, $c \in \mathfrak{L}_S$ и $|a|$, $|b|$, $|c|$ — градуировки соответствующих элементов.

Пусть A — супералгебра и L — $\mathbb{Z}_2$-градуированная Абелева группа, т.е. задано разложение Абелевой группы L в прямую сумму $L = L^+ \oplus L^-$, причём сложение в этой группе удовлетворяет условию $|a+b| = |a| + |b|$. Абелеву группу L называют $\mathbb{Z}_2$-градуированным левым модулем над алгеброй A или левым супермодулем, если L будет левым модулем над A и $A^i L^j \subset L^{i+j}$, $\forall i,j \geq 0$. Правый супермодуль определяется аналогично.

§ 2. Суперсвязность и оператор суперсимметрии.

В этом параграфе мы рассмотрим концепцию суперсвязности, предложенную Д. Куилленом, представляющую собой обобщение понятия ковариантного дифференцирования.

Суперрасслоением над многообразием M называется расслоение $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$, где $\mathcal{E}^+$, $\mathcal{E}^-$ — векторные расслоения над M. Таким образом, слоями суперрасслоения $\mathcal{E}$ будут суперпространства. Если $\mathcal{E}$ — векторное расслоение, то мы можем рассматривать его как суперрасслоение, полагая $\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}^- = 0$.

Рассмотрим пространство дифференциальных форм $\mathcal{A}(M)$ на многообразии M. Это пространство является коммутативной супералгеброй с $\mathbb{Z}_2$-градуированной структурой

$$\mathcal{A}(M) = \mathcal{A}^+(M) \oplus \mathcal{A}^-(M),$$

где $\mathcal{A}^+(M)$ состоит из дифференциальных форм чётного порядка и $\mathcal{A}^-(M)$ — из дифференциальных форм нечётного порядка.

Пусть $\mathcal{E}$— суперрасслоение над гладким многообразием M. Пусть $\mathcal{A}(M,\mathcal{E})$ — пространство дифференциальных форм на M со значениями в $\mathcal{E}$. Напомним, что имеет место следующий изоморфизм пространств $\mathcal{A}^k(M,\mathcal{E}) \simeq \mathcal{A}^k(M) \otimes_{C^\infty M} \Gamma(M,\mathcal{E})$. Поэтому, если $\theta \in \mathcal{A}(M,\mathcal{E})$ — однородная дифференциальная форма, значениями которой на произвольных векторных полях будут гладкие сечения суперрасслоения $\mathcal{E}$, то форма θ имеет две различные градуировки: первая является градуировкой дифференциальной формы (т.е. чётной, нечётной) и вторая является градуировкой сечения суперрасслоения $\mathcal{E}$. Это даёт возможность определить новую градуировку для формы θ как сумму двух описанных выше градуировок. Например, 1-форма $\theta \in \mathcal{A}^1(M,\mathcal{E})$ такая, что $\theta(X) \in \Gamma(M,\mathcal{E}^-)$, $\forall X \in \Gamma(M,TM)$, будет чётной

формой, относительно новой градуировки. Таким образом, новая $\mathbb{Z}_2$-градуированная структура пространства $\mathcal{A}(M,\mathcal{E})$ определяет разложение:

$$\mathcal{A}(M,\mathcal{E}) = \mathcal{A}^+(M,\mathcal{E}) \oplus \mathcal{A}^-(M,\mathcal{E}),$$

где

$$\mathcal{A}^\pm(M,\mathcal{E}) = \sum_k \mathcal{A}^{2k}(M,\mathcal{E}^\pm) \oplus \sum_k \mathcal{A}^{2k+1}(M,\mathcal{E}^\mp).$$

Определение 3.3. Суперсвязностью на суперрасслоении $\mathcal{E}$ называется нечётный дифференциальный оператор первого порядка

$$D : \mathcal{A}^\pm(M,\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}^\mp(M,\mathcal{E}),$$

удовлетворяющий правилу $\mathbb{Z}_2$-градуированного Лейбница

$$D(\alpha \wedge \theta) = d\alpha \wedge \theta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge D\theta, \tag{35}$$

где $\alpha \in \mathcal{A}(M)$, $\theta \in \mathcal{A}(M,\mathcal{E})$.

Оператор D можно распространить на пространство $\mathcal{A}(M,\mathrm{End}(\mathcal{E}))$ дифференциальных форм со значениями в $\mathrm{End}(E)$ с помощью формулы

$$D(\theta) = D \circ \theta + (-1)^{|\theta|}\theta \circ D,$$

где $\theta \in \mathcal{A}(M,\mathrm{End}(\mathcal{E}))$. Для того, чтобы убедится, что $D(\theta) \in \mathcal{A}(M,\mathrm{End}(\mathcal{E}))$, достаточно показать, что $D(\theta)$ коммутирует с внешним умножением на обычную дифференциальную форму.

Определение 3.4. Кривизной суперсвязности D называется чётный оператор $F_D = D^2$, действующий на пространстве $\mathcal{A}(M,\mathcal{E})$ дифференциальных форм со значениями в суперрасслоении $\mathcal{E}$.

Предложение 3.5. Если D суперсвязность на суперрасслоении $\mathcal{E}$, то кривизна F_D суперсвязности является 2-формой со значениями в $\mathrm{End}(\mathcal{E})$, т.е. $F_D \in \mathcal{A}(M,\mathrm{End}(\mathcal{E}))$, и удовлетворяет тождеству Бьянки $D(F_D) = 0$.

Рассмотрим нечётный эндоморфизм L суперрасслоения $\mathcal{E}$, т.е. $L \in \Gamma(M, End^-(\mathcal{E}))$, где $End(\mathcal{E}) = End^+(\mathcal{E}) \oplus End^-(\mathcal{E})$ расслоение эндоморфизмов и в любой точке $x \in M$ имеет место $L_x : \mathcal{E}_x^\pm \longrightarrow \mathcal{E}_x^\mp$. Нечётный эндоморфизм L очевидным образом действует на сечениях суперрасслоения $\mathcal{E}$, т.е. $L : \Gamma(M,\mathcal{E}^\pm) \longrightarrow \Gamma(M,\mathcal{E}^\mp)$. Формула (10) позволяет распространить нечётный эндоморфизм L на всё пространство $\mathcal{A}(M,\mathcal{E}) = \Gamma(M,\mathcal{E}) \oplus \mathcal{A}^1(M,\mathcal{E}) \oplus \ldots$ дифференциальных форм со значениями в суперрасслоении $\mathcal{E}$, полагая

$$L(\theta \otimes s) = (-1)^{|\theta|}\, \theta \otimes L(s), \tag{36}$$

где $\theta \in \mathcal{A}(M), s \in \Gamma(M, \mathcal{E})$ и $|\theta|$ означает градуировку формы θ. Обозначим через $\mathfrak{D} : \mathcal{A}^r(M, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}^{r+1}(M, \mathcal{E})$ связность на суперрасслоении $\mathcal{E}$. Тогда линейный оператор $D = \mathfrak{D} + L$ будет суперсвязностью на суперрасслоении $\mathcal{E}$. Напомним, что локально связность выражалась как $\mathfrak{D} = d + \omega$, где ω — матрица из 1-форм на многообразии M. Тогда локально суперсвязность D и её кривизна F_D имееют вид

$$D = d + \omega + L, \quad F_D = D^2 = \Theta + d\,L + [\omega, L] + L^2, \tag{37}$$

где $\Theta = d\omega + \omega \wedge \omega$ форма кривизны связности $\mathfrak{D}$. Так как форма кривизны суперсвязности удовлетворяет тождеству Бьянки, то локально будет иметь место формула

$$d\,F_D = [F_D, \omega + L]. \tag{38}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} d\,F_D &= d(d\omega + \omega \wedge \omega + dL + [\omega, L] + L^2) = \\ &= d^2\omega + d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega + d^2 L + d(\omega \cdot L + L \cdot \omega) + dL^2 = \\ &= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega + d\omega \cdot L - \omega \cdot dL + dL \cdot \omega - L \cdot d\omega + dL^2. \end{aligned}$$

с другой стороны

$$\begin{aligned} [F_D, \omega + L] = {} & d\omega \wedge \omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega + dL \cdot \omega + \omega \cdot L \cdot \omega + L \cdot (\omega \wedge \omega) + L^2 \cdot \omega + \\ & d\omega \cdot L + (\omega \wedge \omega) \cdot L + dL \cdot L + \omega \cdot L^2 + L \cdot \omega \cdot L + L^3 - \\ & -\omega \wedge d\omega - \omega \wedge \omega \wedge \omega - \omega \cdot dL - (\omega \wedge \omega) \cdot L - \omega \cdot L \cdot \omega - \omega \cdot L^2 - \\ & -L \cdot d\omega - L \cdot (\omega \wedge \omega) - L \cdot dL - L \cdot \omega \cdot L - L^2 \cdot \omega - L^3 = \\ & = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega + d\omega \cdot L - \omega \cdot dL + dL \cdot \omega - L \cdot d\omega + dL^2 \end{aligned}$$

Пусть (P, π, M) — главное расслоение со структурной группой G и $\rho : G \longrightarrow GL^+(E)$ — представление G на суперпространстве E. Представление ρ согласовано с $\mathbb{Z}_2$-градуированной структурой суперпространства E, т.е. $\rho(g) : E^{\pm} \longrightarrow E^{\pm}, \forall g \in G$. Ассоциированное векторное расслоение $F = (P \times E)/G = P \times_G E$ является суперрасслоением. Пространство $\mathcal{A}(M, F)$ дифференциальных форм со значениями в F будет изоморфно пространству $\mathcal{A}_{bas}(P, E)$ эквивариантных форм на пространстве расслоения P со значениями в E, т.е.

$$\mathcal{A}(M, F) \cong \mathcal{A}_{bas}(P, E).$$

Пусть на главном расслоении P задана 1-форма связности ω и $\nabla_\omega(\sigma) = = d\sigma + \rho'(\omega) \wedge \sigma$ — ковариантное дифференцирование, индуцированная этой связностью на ассоциированном суперрасслоении F, где

$\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}^+(E)$ — инфинитезимальное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G и $\sigma \in \mathcal{A}_{bas}(P, E)$.

Опираясь на связность ω, построим суперсвязность на расслоении F с помощью нечётного эквивариантного эндоморфизма L тривиального суперрасслоения $P \times E$, т.е. $L \in \mathrm{End}^-(P \times E)$ или $L : P \longrightarrow \mathrm{End}^-(E)$, и

$$L_{pg} = \rho(g)^{-1} L_p \rho(g),$$

где $p \in P$, $g \in G$. Распространяя L на пространство эквивариантных форм со значениями в $P \times E$, имея в виду (36), построим суперсвязность D_ω, которую локально можно представить с помощью формы связности ω и эндоморфизма L можно следующим образом

$$D_\omega = \nabla_\omega + L = d + \rho'(\omega) + L.$$

Локально кривизна F_ω суперсвязности D_ω будет иметь вид

$$F_\omega = \rho'(\Theta_\omega) + dL + [\rho'(\omega), L] + L^2, \tag{39}$$

где Θ_ω — форма кривизны связности ω. И тождество Бьянки примет вид

$$dF_\omega = [F_\omega, \rho'(\omega) + L]. \tag{40}$$

Рассмотрим теперь главное расслоение (P, π, M) со структурной группой $G = \mathrm{Spin}(p)$, где p чётное число. Используя гомоморфизм $\mathrm{Spin}(p) \longrightarrow O(p)$ спинорной группы в группу ортогональных матриц $O(p)$, можно построить ассоциированное векторное расслоение $F = (P \times V)/G$, где $V = \mathbb{R}^p$. Тривиальное расслоение $P \times V$ может быть рассмотрено как главное расслоение над F.

Пусть C_p — алгебра Клиффорда над полем $\mathbb{C}$ с образующими $\gamma_1, ..., \gamma_p$ и S^2 — комплексная плоскость $\mathbb{C}^2$. В предыдущем параграфе было показано, что алгебру Клиффорда C_2 можно реализовать матрицами Паули, отождествляя

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Следовательно супералгебра C_2 изоморфна алгебре эндоморфизмов комплексной плоскости S^2, т.е $C_2 \cong S^2$. Определим на комплексной плоскости S^2 структуру суперпространства со следующей $\mathbb{Z}_2$-градуированной структурой (согласно примеру в предыдущем параграфе): первый базисный вектор будет считаться чётным, второй — нечётным. Эта суперструктура индуцирует суперструктуру на алгебре эндоморфизмов $\mathrm{End}(S^2)$, относительно которой эта алгебра

становится супералгеброй. Изоморфизм алгебр $C_2 \longrightarrow \mathrm{End}(S^2)$, определённый формулами (41), сохраняет соответствующие градуировку, т.е. переводит чётный элемент алгебры C_2 в чётный эндоморфизм комплексной плоскости S^2 и нечётный— в нечётный. Следовательно, S^2 будет супермодулем над алгеброй Клиффорда C_2. Суперструктура пространства S^2 определяется его автоморфизмом ε, матрицей которого будет

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

отметим, что $-i\gamma_1\gamma_2 = \varepsilon$. Согласно приведённой конструкции пространство $S^p = S^2 \otimes ... \otimes S^2$, представляющее собой тензорное произведение супермодулей S^2, будет супермодулем над алгеброй C_p. Имеем $C_p \cong \mathrm{End}(S^p)$, обозначим этот изоморфизм $\nu : C_p \longrightarrow \mathrm{End}(S^p)$. Пусть C_p^* — группа обратимых элементов алгебры Клиффорда C_p. Имеется гомоморфизм групп $r : \mathrm{Spin}_{\mathbb{C}}(p) \longrightarrow C_p^*$ такой, что инфинитезимальный гомоморфизм соответствующих алгебр Ли имеет вид $r'(a) = \frac{1}{4}\gamma^t a \gamma$, где a — элемент алгебры Ли группы $\mathrm{Spin}_{\mathbb{C}}(p)$ (кососимметрическая матрица), γ — матрица-столбец, состоящая из образующих алгебры C_p. Ограничение дифференциала гомоморфизма r на вещественное подпространство алгебры Ли группы $\mathrm{Spin}_{\mathbb{C}}(p)$ порождает гомоморфизм $r : \mathrm{Spin}(p) \longrightarrow C_p^*$, где $\mathrm{Spin}(p)$ вещественная спинорная группа. Данный гомоморфизм определяет согласованное с суперструктурой представление вещественной спинорной группы $\mathrm{Spin}(p)$ на суперпространстве S^p и мы можем рассматривать суперрасслоение $\mathcal{W} = ((P \times V) \times S^p)/G$ над векторным расслоением $F = (P \times V)/G$.

Пусть ω — 1-форма связности на главном расслоении P. Мы можем распротранить ω до 1-формы связности на расслоении $P \times V$, полагая $\omega_{(q)}(X, v) = \omega_p(X)$, где $q = (p, x) \in P \times V$, $X \in T_pP$, $v \in T_xV$. Пусть l — функция со значениями в C_p на тривиальном расслоении $Q := P \times V$, определённая как

$$l_q = ix^k\gamma_k,$$

где $q = (p, x) \in Q$, $p \in P$, $x \in V = \mathbb{R}^p$, $x^1, x^2, \ldots, x^p$ – координаты x и $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ – образующие алгебры Клиффорда C_p. Поскольку S^p является супермодулем над алгеброй Клиффорда C_p, т.е. любой элемент алгебры C_p определяет эндоморфизм суперпространства S^p, то мы можем распространить функцию l до нечётного эндоморфизма L тривиального расслоения $Q \times S^p$, полагая $L(q, t) = (q, l_q(t))$, где $q \in Q$, $t \in S^p$ и $l_q : S^p \longrightarrow S^p$. Заметим, что L является эквивариантным отображением.

Семейство операторов, определённых локально,

$$D_\omega = d + \omega + L = d + \frac{1}{4}\omega_{ij}\gamma_i\gamma_j + ix^i\gamma_i, \tag{42}$$

образует связность на расслоении $Q \times_G S^p$ над F. Вычислив кривизну этой связности, получим

$$F_\omega = D_\omega^2 = -x^2 + i\,\nabla_\omega x^i\gamma_i + \frac{1}{4}\Theta^\omega{}_{ij}\gamma_i\gamma_j, \tag{43}$$

где $\Theta^\omega{}_{ij}$ 2-форма кривизны связности ω, ∇_ω ковариантное дифференцирования, $x^2 =< x, x >= \sum_{i=1}^p (x^i)^2$ означает скалярное произведение в $V = \mathbb{R}^p$.

Пусть $\mathfrak{G}_p$ — алгебра Грассмана с образующими $\xi_1, \ldots, \xi_p$ и единичным элементом 1. Заменив в (43) образующие алгебры Клиффорда $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ на образующие алгебры Грассмана $\xi_1, \ldots, \xi_p$, т.е. $\gamma_k \longrightarrow \xi_k$, получим полином

$$\Phi_\omega = -x^2 + i\nabla_\omega x^k\xi_k + \frac{1}{4}\Theta^\omega{}_{ij}\xi_i\xi_j. \tag{44}$$

Данный полином играет важную роль в топологической теории поля, потому что из этого полинома, путём некоторых преобразований, можно получить выражение, являющееся моделью лагранжиана топологической теории поля в конечномерном случае.

Рассмотрим представлени $\mu : C_p \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{G}_p)$ элементов алгебры Клиффорда C_p линейными операторами, действующими на алгебре Грассмана $\mathfrak{G}_p$, определённое следующим образом

$$\gamma_{2j} = \hat{\xi}_j + \partial_j,\ \gamma_{2j+1} = i(\hat{\xi}_j - \partial_j), \qquad j = 1, 2, ...m,\ p = 2m, \tag{45}$$

где ∂_j — частные производные на алгебре Грассмана от образующих ξ_j и $\hat{\xi}_j$ оператор умножения на образующие ξ_j. Это представление позволит нам определить связь между кривизной F_ω и полиномом Φ_ω, не с помощью формальной замены образующих $\gamma_k \longrightarrow \xi_k$, но геометрически с помощью суперрасслоения $\mathcal{W} = Q \times_G \mathfrak{G}_p$. В изложении Куиллена [11] использовалась последовательность гомоморфизмов $\mathrm{Spin}(p) \xrightarrow{r} C_p \xrightarrow{\nu} \mathrm{End}(S^p)$, мы же будем исходить из последовательности $\mathrm{Spin}(p) \xrightarrow{r} C_p \xrightarrow{\mu} \mathrm{End}(\mathfrak{G}_p)$. Локальная связность D_ω и её кривизна F_ω заданы в терминах расслоения $Q \times_G S^p$. Для того чтобы выразить их в координатах расслоения $\mathcal{W} = Q \times_G \mathfrak{G}_p$ используем представление (45). Получим

$$D_\omega = d + \frac{1}{2}\omega_{kl}\hat{\xi}_k\partial_l + ix^k\,\partial_k + \frac{1}{4}\omega_{kl}\,\partial_k\,\partial_l + \frac{1}{4}\omega_{kl}\,\hat{\xi}_k\hat{\xi}_l + ix^k\,\hat{\xi}_k, \tag{46}$$

$$F_\omega = \frac{1}{2}\Theta^\omega_{kl}\hat{\xi}^k\partial_l + i\,\nabla_\omega x^k\partial_k + \frac{1}{4}\Theta^\omega_{kl}\partial_k\partial_l - x^2 + i\,\nabla_\omega x^k\,\hat{\xi}_k + \frac{1}{4}\Theta^\omega_{kl}\hat{\xi}_k\hat{\xi}_l. \tag{47}$$

Рассмотрим сечение $e : Q \longrightarrow Q \times \mathfrak{G}_p$ тривиального расслоения $Q \times$ $\times \mathfrak{G}_p$, опредлённое как $e(q) = (q, 1)$, где 1 — это единичный элемент алгебры Грассмана $\mathfrak{G}_p$. Так как данное сечение является $G-$эквивариантным, оно индуцирует сечение на расслоении $Q \times_G \mathfrak{G}_p$, обозначим полученное сечение также через e. Действуя на данном сечении кривизной F_ω, являющейся теперь 2-формой со значениями расслоении в $\mathrm{End}(Q \times_G \mathfrak{G}_p)$, вычислим 2-форму со значениями в расслоении $(Q \times_G \mathfrak{G}_p)$

$$F_\omega(e) = -x^2 + i\nabla_\omega x^k \xi_k + \frac{1}{4}\Theta^\omega_{kl}\xi_k\xi_l. \tag{48}$$

Сравнивая полученное выражение с (44), можем заключить, что они совпадают. Тем самым мы выразили геометрический смысл Φ_ω в рамках соответствующего расслоения.

Тепер найдём оператор, обращающийся в нуль при действии на $F_\omega(e)$. Выразим его из тождества Бьянки для кривизны F_ω :

$$d\,F_\omega + [D_\omega - d, F_\omega] = 0. \tag{49}$$

Подставим в это тождество значения связности D_ω и её кривизны F_ω и сгруппируем справа все члены, содержащие частную производную на первом месте. Тогда тождество Бьянки примет вид

$$d\,F_\omega + (\omega_{kl}\hat{\xi}_k\partial_l + 2\,ix^k\,\partial_k)(-x^2 + i\,\nabla_\omega x^k\,\hat{\xi}_k + \frac{1}{4}\Theta^\omega_{kl}\hat{\xi}_k\hat{\xi}_l) + \mathcal{R} = 0, \tag{50}$$

где $\mathcal{R}$ есть сумма всех слагаемых, в которых частная производная стоит на первом месте справа. Мы выразили эти слагаемые отдельно, поскольку при действии оператора, стоящего в левой части тождества (50) на сечение e, $\mathcal{R}$ обращается в нуль. Получим

$$(d + \omega_{kl}\hat{\xi}_k\partial_l + 2\,ix^k\,\partial_k)(F_\omega(e)) = 0. \tag{51}$$

Следовательно, из тождества Бьянки мы выразили оператор, который обращается в нуль при действии на $F_\omega(e) = \Phi_\omega$. Обозначим полученный оператор через

$$\mathcal{Q}_\omega = d + \omega_{kl}\hat{\xi}_k\partial_l + 2\,ix^k\,\partial_k. \tag{52}$$

Заметим, что первые два слагаемых оператора $\mathcal{Q}_\omega$ могут быть заменены на ковариантную производную ∇_ω. Поскольку связность ω совместима с метрикой тривиального расслоения $P \times V$, имеем
$dx^2 =< \nabla_\omega x, x > + < x, \nabla_\omega x >$. Тогда

$$\mathcal{Q}_\omega = \nabla_\omega + 2\,ix^k\partial_k. \tag{53}$$

Покажем, что полученный оператор $\mathcal{Q}_\omega$ индуцирует BRST-суперсимметрии в конечномерной модели топологической квантовой теории поля. Пусть P — риманово многообразие размерности $l = 2m + r$, G — r-мерная компакная связная группа, $\mathfrak{g}$ её алгебра Ли, V — евклидово вещественное векторное пространство размерности $p = 2m$ со скалярным произведением $<,>$ и ρ ортогональное предствление группы G на пространстве V. Кроме того, будем предполагать, что группа G свободно действует на многообразии P с помощью изометрий. Это означает, что P является главным расслоением, базой которого служит $2m$-мерное многообразие M. Пусть $E = P \times_G W$ — ассоциированное векторное расслоение, где $W = \mathfrak{g} \oplus V$, и группа G действует на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с помощью присоединённого представления. Очевидно, $E = \mathrm{Ad}(P) \oplus \tilde{E}$, где $\mathrm{Ad}(P) = P \times_G \mathfrak{g}$ и $\tilde{E} = P \times_G V$.

Пусть $(x^1, x^2, ..., x^{2m}) = (x^\mu)$ — координаты на пространстве V, $(\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^d) = (\lambda^i)$ координаты на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, порождаемые базисом этой алгебры $\{t_1, t_2, ..., t_d\}$. Тогда любой элемент λ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно представить в виде линейной комбинации $\lambda = \lambda^i t_i$. Пусть $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_l) = (\chi_1, ..., \chi_{2m}, \zeta_1, ..., \zeta_r) = (\chi_\mu, \zeta_i)$ — образующие алгебры Грассмана $\mathfrak{G}_l$. Если ω 1-форма связности на главном расслоении P, то ковариантное дифференцирование ∇_ω на ассоциированном расслоении E, индуцированный этой связностью, может быть естественным образом разложен в сумму

$$\nabla_\omega = \nabla'_\omega + \nabla''_\omega, \tag{54}$$

где $\nabla'_\omega = d + \mathrm{ad}(\omega)$ ковариантное дифференцирование на ассоциированном расслоении $\mathrm{Ad}(P)$ (со слоем $\mathfrak{g}$) и $\nabla''_\omega = d + \rho'(\omega)$ ковариантное дифференцирование на ассоциированном расслоении $\tilde{E}$ (со слоем V). Матрица кривизны связности на расслоении E имеет блочную структуру

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ad}(\Theta^\omega) & 0 \\ 0 & \rho'(\Theta^\omega) \end{pmatrix}, \tag{55}$$

где Θ^ω 2-форма кривизны связности ω. Ранее полученняя 2-форма $F_\omega(e)$ в координатах ассоциированного расслоения E имеет вид

$$\begin{aligned} F_\omega(e) = \frac{1}{4}\mathrm{ad}(\Theta^\omega)_{ij}\zeta_i\zeta_j + \frac{1}{4}\rho'(\Theta^\omega)_{\mu\nu}\chi_\mu\chi_\nu + \\ +i\nabla'_\omega\lambda^i\zeta_i + i\nabla''_\omega x^\mu\chi_\mu - < x, x > -\mathrm{Tr}(\lambda, \lambda), \end{aligned} \tag{56}$$

где Tr форма Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Оператор $\mathcal{Q}_\omega$ в координатах того же ассоциированного расслоения E имеет вид

$$\mathcal{Q}_\omega = \nabla'_\omega + \nabla''_\omega + 2i\lambda^i\partial_i + 2ix^\mu\partial_\mu, \tag{57}$$

где ∂_i производные по образующим алгебры Грассмана ζ_i, и ∂_μ по образующим алгебры Грассмана χ_μ. Выше было показано, что тождество Бьянки в данном случае имеет вид

$$\mathcal{Q}_\omega(F_\omega(e)) = 0. \tag{58}$$

В рамках данной модели величина $F_\omega(e)$, которая с геометрической точки зрения является локальной формой кривизны суперсвязности, с физической точки зрения является лагранжианом топологической теории поля. Формула (58) показывает, что лагранжиан $F_\omega(e)$ симметричен относительно преобразований, порождаемых оператором $\mathcal{Q}_\omega$. Мы покажем, что данная конструкция является конечномерной моделью топологической теории поля, интерпретировав координаты этой конструкции как физические поля определённого типа. В этом случае оператор $\mathcal{Q}_\omega$ позволит получить BRST-суперсимметрии лагранжиана.

Мы будем считать, что мультиплет "бозонных полей" состоит из $\phi = F_\omega$ (кривизна), x^μ (координаты пространства V) и λ^i (координаты на алгебре Ли $\mathfrak{g}$). Мультиплет "фермионных полей" (ζ_i, χ_μ) (образующие алгебры Грассмана $\mathfrak{G}_l$), η^i (1-формы $\nabla'_\omega \lambda^i$), φ^μ (1-формы $\nabla''_\omega x^\mu$). Локальная форма кривизны суперсвязности (56) даёт лагранжиан теории, который в терминах полей имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\mathrm{ad}(\phi)_{ij}\zeta_i\zeta_j + \frac{1}{4}\rho'(\phi)_{\mu\nu}\chi_\mu\chi_\nu + i\eta^i\zeta_i + i\varphi^\mu\chi_\mu - < x, x > -\mathrm{Tr}(\lambda, \lambda). \tag{59}$$

Действуя оператором (57) на каждое поле, мы получим BRST-суперсимметрии лагранжиана этой конечномерной модели топологической теории поля

$$\begin{array}{lllll} \mathcal{Q}_\omega(\phi) = 0, & \mathcal{Q}_\omega(\chi) = 2ix, & \mathcal{Q}_\omega(\varphi) = \rho'(\phi)x, & \mathcal{Q}_\omega(\lambda) = \eta. \\ \mathcal{Q}_\omega(x) = \varphi, & \mathcal{Q}_\omega(\zeta) = 2i\lambda, & \mathcal{Q}_\omega(\eta) = \mathrm{ad}(\phi)\lambda, & \end{array} \tag{60}$$

Если в качестве главного расслоения P взять бесконечномерное расслоение неприводимых связностей некоторого конечномерного главного расслоения, то конечномерная модель топологической теории поля, изученная в этом параграфе, приведёт к топологической теории поля Виттена и можно показать [10], что BRST-суперсимметрии (60) приведут к BRST-суперсимметриям топологической теории Виттена.

Литература

[1] Б.А. Дубровин Б.А., С.П. Новиков С.П., А.Т. Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения.* Москва: Наука, 1986.

[2] Кобаяси Ш., Номидзу Н. *Основы дифференциальной геометрии.* Москва: Наука, 1981.

[3] Кострикин А.И., Манин Ю.И. *Линейная алгебра и геометрия.* Москва: Наука, 1986.

[4] Стернберг С. *Лекции по дифференциальной геометрии.* Москва: Мир, 1970.

[5] Уорнер Ф. *Основы теории гладких многообразий и группы Ли.* Москва: Мир, 1987.

[6] Уэллс Р. *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.* Москва: Мир, 1976.

[7] Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.* Москва: Мир, 1964.

[8] Abramov, V. *Superconnection approach to supersymmetries of the Lagrangian of Donaldson theory.* SFB 288 Preprint No. 84.

[9] Abramov, V., Kuusk, P. *Supersümmeetria füüsikas ja matemaatikas.* Tartu: Tartu Ülokooli Kirjastus, 1994.

[10] Abramov, V., Liivapuu, O. *Geometric approach to BRST-symmetry and $\mathbb{Z}_N-$generalization of superconnection.* Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Vol. **13,** 9–20, 2006.

[11] Atiyah, M. F., Jeffrey, L., *Topological Lagrangians and cohomology.* J. Geom. Phys. **7**, No.1, 119–136, 1990.

[12] Berline, N., Getzler, E., Vergne, M., *Heat Kernels and Dirac Operators,* Grundlehren Text Editions,Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2004.

[13] Donaldson, S. K. *An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds.* J.Diff.Geom. **18**, 269–316, 1983.

[14] Mathai, V., Quillen, D. *Superconnections, Thom classes and equivariant differential forms,* Topology **25**, 85–110, 1986.

[15] Witten, E. *Topological quantum field theory,* Comm. Math. Phys. **117**, No. 3, 353–386, 1988.

[16] Yang, C.N., Mills, R.L. *Conservation of of isotopic spin and isotopic gauge invariance,* Phys. Rev., **96**, 191–208, 1954.

Seostused kihtkondadel, superseostused ja nende rakendused väljateoorias

Olga Liivapuu

Resümee

Matemaatika valdkond, millega tegeletakse antud magistritöös, on kihtkondade ja seostuste teooria. Teooria seostustest kihtkondadel tekkis eelmise sajandi esimesel poolel ja selle uurimisega tegeletakse ka kaasaegses diferentsiaalgeomeetrias seoses nende rakendusega väljateoorias. Kihtkonna lihtsamaks näiteks on puutujavektorkond, mis on sileda lõplikumõõtmelise muutkonna puutujaruumide ühend. Puutujavektorkonna kihiks igas muutkonna punktis on puutujaruum vastavas punktis ja kihi mõõde on võrdne muutkonna dimensiooniga. Selle konstruktsiooni üldistuseks on vektorkonna mõiste. Siledal muutkonnal defineeritud vektorkonna kihiks on lõplikumõõtmeline vektorruum. Märgime aga, et suvalise vektorkonna puhul ei tarvitse selle kihi dimensioon kokku langeda baasiruumi dimensiooniga. Teine kihtkondade tüüp, mida käesolevas töös käsitletakse, on peakihtkond. Muutkonna suvalises punktis on peakihtkonna kihti võimalik samastada Lie rühmaga. Peakihtkondade tähtsus seisneb selles, et nende abil saab kirjeldada kalibratsioonivälja teooriaid diferentsiaalgeomeetria terminites. Kalibratsioonivälja lihtsamaks näiteks on elektromagnetväli, kuid sellisel juhul on kalibratsioonirühmaks Abeli rühm. Esimene kalibratsiooniteooria mitte-Abeli kalibratsioonirühmaga $SU(2)$ oli konstrueeritud 1954. aastal C. N. Yangi ja R. L. Millsi artiklis [16]. Osutus, et Yang–Millsi teooria kirjeldab tugevat vastastikmõju aatomi tuumas. Hiljem olid konstrueeritud ka teised kalibratsioonivälja teooriad, kusjuures antud suund teoreetilises füüsikas oli nii edukas ja viljakas, et sai võimalikuks ühendada ühtse mitte-Abeli kalibratsiooniteooria raamidesse elektromagnetismi ja nõrka vastastikmõju. Vastavat ühendatud teooriat hakati nimetama elektronõrga vastastikmõju teooriaks.

Üheks tähtsamaks kihtkonnaga seotud mõisteks on seostuse mõiste, mis esialgu tekkis seoses muutkonna puutujavektorite paralleelülekandmisega mööda siledat joont. Käesolevas töös on vaadeldud kahte ekvivalentset lähenemisviisi seostuse defineerimisel, kusjuures üks nendest tugineb horisontaalsete puutujaruumi alamruumide jaotuse mõistele ning teine seostuse 1-vormi mõistele. Seostust vektorkonnal määratakse kovariantse diferentseerimise abil. Magistritöö kaks esimest peatükki on referatiivse iseloomuga ja nad on kirjutatud peamiselt raamatute [2], [12] põhjal. Kahes esimeses peatükis on antud seostuste teooria kaasaegne käsitlus. Kolmandas peatükis kasutatakse eelnevalt kirjeldatud struktuure topoloogilise väljateooria geomeetrilise kirjelduse

konstrueerimiseks.

Magistritöö kolmas peatükk sisaldab supeseostuse formalismi käsitlust. Eelmise sajandi 80ndatel aastatel pakkusid [14] D. Quillen ja V. Mathai seostuse üldistuse, mida nemad nimetasid superseostuseks . Eeldades, et vektorkond omab $\mathbb{Z}_2-$gradueeritud struktuuri, ehk tegemist on supervektorkonnaga, saab diferentsiaalvormide väärtustega selles supervektorkonnas vektorruumi superstruktuuri esitada kahe gradueeringu summana, kus üks nendest on määratud diferentsiaalvormide algebra $\mathbb{Z}_2-$struktuuriga ja teine tuleb supervektorkonna superstruktuurist. Nüüd võib superseostust kirjeldada, kui gradueeritud diferentseerimist eespool määratud $\mathbb{Z}_2-$gradueeritud struktuuri suhtes. Töös näidatakse, et superseostuse kõverus rahuldab Bianchi samasust. Tuleb mainida, et D. Quillen ja V. Mathai andsid superseostuse mõiste definitsiooni selleks, et konstrueerida supervektorkonna üldistatud Thomi klassi. Hiljem selgus, et superseostuse formalismi võib edukalt kasutada ka teistes matemaatika ja väljateooria valdkondades. Esimese topoloogilise väljateooria neljamõõtmelisel Riemanni muutkonnal konstrueeris E. Witten [15]. Selle teooria lagranžiaani $\mathcal{L}$ tähtsaim omadus on BRST-supersümmeetria $\mathcal{Q}$, s.t. $\{\mathcal{Q}, \mathcal{L}\} = 0$. Kui väljateooria lagranžiaan on invariantne BRST-supersümmeetria suhtes, siis vastava teooria kvantväljateooria konstrueerimiseks kasutatakse BRST-kvantiseerimist, kusjuures BRST-supersümmeetria nilpotentsus $\mathcal{Q}^2 = 0$ mängib olulist osa BRST-kvantiseerimisel. Witten näitas, et topoloogilise kvantväljateooria genereeriv funktsionaal ei sõltu Riemanni meetrikast ja langeb kokku neljamõõtmelise muutkonna Donaldsoni invariantidega. M. F. Atiyah ja L. Jeffrey rakendasid artiklis [11] superseostuse formalismi topoloogilise kvantväljateooria geomeetrilise struktuuri uurimiseks. Autorid näitasid, et topoloogilise väljateooria lagranžiaani $\mathcal{L}$ on võimalik tuletada üldistatud Thomi klassi diferentsiaalvormist. Märgime, et üldistatud Thomi klassi difrerentsiaalvorm avaldub superseostuse kõveruse kaudu. M. F. Atiyah ja L. Jeffrey tööst järeldub, et topoloogilise väljateooria neljamõõtmelisel Riemanni muutkonnal vastavaks diferentsiaalgeomeetriliseks formalismiks on superseostuste formalism. Seega, topoloogilise kvantväljateooria neljamõõtmelisel muutkonnal lagranžiaani $\mathcal{L}$ analoogiks supervektorkonna geomeetrias on superseostuse kõverus ja lagranžiaani BRST-supersümmeetriat tuletatakse Bianchi samasusest, kui me vaatleme operaatorit $\mathcal{Q}$ operaatorina, mis toimib diferentsiaalvormide ruumis. Käesolevas magistritöös näidatakse, et topoloogilise kvantväljateooria lagranžiaani $\mathcal{L}$ BRST-supersümmetria aluseks on Bianchi samasus, mida rahuldab superseostuse kõverus, ja konstrueeritakse geomeetriline meetod, mis lubab, lähtudes Bianchi samasusest, saada lagranžiaani BRST-supersümmeetriat. Need originaalsed tulemused on esitatud antud magistritöö kolmanda peatüki teises paragrahvis ja on avaldatud artiklis [10].

Connections on fibre bundles, superconnections and their applications in field theory

Olga Liivapuu

Summary

It is well known that a concept of fibre bundle plays a significant part in modern differential geometry. For example given a smooth finite dimensional manifold we can consider the disjoint union of all tangent spaces of this manifold and this structure leads us to an idea of a vector bundle over a manifold. The set of all frames of all tangent spaces of a manifold leads us to an idea of a principal fibre bundle where the fiber at a point of a manifold can be identified with a Lie group. It turns out that the theory of principal fibre bundles is an adequate geometric formalism for gauge field theories where the structure group of a principal fibre bundle can be identified with the gauge group of a corresponding gauge field theory. It is well known that the electromagnetic field theory or Maxwell theory is a gauge theory, and in this case the gauge group is Abelian. The first non-Abelian gauge theory was constructed by Yang and Mills in the middle of the previous century, and it is used to describe the strong interactions between the particles in a nuclei of atom. Later there were constructed several gauge field theories which proved to be so successful that they have led to the unified gauge field theory of electroweak interactions.

Let us remind that the concept of a connection originates from the problem of parallel transport of a tangent vector along a smooth curve on a manifold. In terms of the modern differential geometry a connection on a principal fibre bundle can be defined with the help of a horizontal distribution in tangent spaces to a principal fibre bundle or equivalently by means of a connection 1-form. In the case of a vector bumdle a connection is defined by means of a covariant differential. In 80's of the previous century D. Quillen and V. Mathai proposed a generalization of a notion of connection which they called a superconnection [14]. Given a superbundle we have two $\mathbb{Z}_2$-graded structures on the algebra of differential forms with values in this superbundle where one is determined by the degree of a homogeneous differential form and the other originates from the superstructure of a superbundle. Taking the sum of these two gradings and considering a differential operator of grading one with respect to this new $\mathbb{Z}_2$-graded structure we come to a concept of superconnection. It should be mentioned that D. Quillen and V. Mathai introduced a concept of superconnection in order to construct a generalized Thom class of a superbundle. Later M. F. Atiyah and L. Jeffrey [11] applied the formalism of superconnection to study the geometric structure of a topological quantum field theory on

a 4-dimensional manifold [15]. They showed that the Lagrangian of topological field theory $\mathcal{L}$ can be obtained from the differential form of a generalized Thom class. Let us mention that the differential form of a generalized Thom class can be expressed in terms of curvature of a superconnection. It follows from the work of M. F. Atiyah and L. Jeffrey that the formalism of superconnections is an adequate geometric formalism for a topological field theory on a 4-dimensional manifold. One of the basic properties of the Lagrangian of topological field theory is its BRST-supersymmetry $\mathcal{Q}$, i.e. $\{\mathcal{Q}, \mathcal{L}\} = 0$. Taking into account that $\mathcal{Q}$ can be viewed as a differentiation and $\mathcal{L}$ is based on a curvature we may expect that the BRST-supersymmetry of Lagrangian originates from the Bianchi identity for curvature, and the main goal of the present thesis is to elaborate a procedure which will show how one can obtain the BRST-supersymmetry starting with the Bianchi identity. In the third chapter of this thesis we realize this programm and elaborate a geometric procedure which lead to the BRST-supersymmetry of Lagrangian of topological field theory. This part of thesis is written on the base of the paper [10].

Let us briefly describe the content of the present thesis. In the first chapter we remind the definitions of principal fibre bundle, vector bundle and associated bundle. It is shown that each fibre of a principal fibre bundle is diffeomorphic to Lie group. Given a principal fibre bundle and a representation of its structure group we remind how one can construct the associated vector bundle. We consider the bundle of frames over a smooth manifold as an example of a principal fibre bundle and the tangent bundle as an example of an associated vector bundle. In the first chapter we also briefly describe such notions of the modern differential geometry as differential forms with values in vector bundle and their exterior differential, Lie derivative, de Rham complex and its cohomologies, equivariant bundle. The second chapter is devoted to the theory of connections. We give two equivalent definitions of a connection on a principal fibre bundle where one of them is based on the notion of distribution of a horizontal subspaces of tangent spaces to a principal fibre bundle and the other is based on the notion of a connection 1-form. We show the relation between a connection 1-form on a principal fibre bundle and the covariant differential on the associated vector bundle. In the third chapter we remind the definitions and terminology of super-objects such as superspace and superalgebra. Then we describe the concept of a superconnection and making use of the Bianchi identity for the curvature of a superconnection we elaborate the procedure for deriving the BRST-supersymmetries of the Lagrangian of a topological field theory.