ТАРТУСКИЙ ГОС. УНИВЕРСИТЕТ 350

# ЗАДАЧНИК ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

## Часть I. Начала

П. Кард

1982

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра теоретической физики

# ЗАДАЧНИК ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

## Часть I. Начала

П. Кард

ТАРТУ 1982

Утверждено на заседании совета физико-химического факультета ТГУ 21 апреля 1982 года.



ЗАДАЧНИК ПО ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.
Часть I. Начала.
Составитель Пауль К а р д.
На русском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор И. Пийр.
Подписано к печати 5.07.1982.
Формат 60x84/16.
Бумага ротаторная.
Машинопись. Ротапринт.
Условно-печатных листов 6,98.
Учетно-издательских листов 5,3.
Печатных листов 7,5.
Тираж 400.
Заказ № 705.
Цена 15 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пяльсона, 14.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник, предлагаемый вниманию студентов III курса физического отделения университета, ставит себе целью дать им материал для самостоятельных упражнений. Часть задач каждого параграфа, в том числе все те, в которых вводятся основные понятия данного отрезка теории, сопровождаются полными решениями. Остальные, более простые задачи снабжены только ответами. В соответствии с новыми методическими установками, развитыми автором с 1975 года в серии статей (см. "Известия АН Эстонской ССР, Физика, Математика"), на первое место, сразу вслед за исходными положениями теории, ставится релятивистская динамика, тогда как кинематика отодвигается на второе место. Четырехмерный формализм не используется. Задачи по релятивистской механике и электродинамике на основе четырехмерного формализма составят вторую часть настоящего задачника.

П.Кард

## § I. МАССА, ИМПУЛЬС И ЭНЕРГИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Основными законами классической механики являются <u>принцип относительности</u> и <u>закон сохранения импульса</u>. Принцип относительности утверждает равноправие всех инерциальных систем, т.е. таких систем, в которых любое свободное тело движется с постоянной скоростью. <u>Импульс</u> тела определяется как векторная величина, равная произведению скорости этого тела на некоторый положительный коэффициент, называемый его массой. Время предполагается абсолютным, т.е. одинаковым во всех инерциальных системах.

I.I. Вывести формулу преобразования скорости из одной инерциальной системы в другую.

<u>Решение.</u> Если $\vec{r}$ есть радиус-вектор какой-либо движущейся точки в данной инерциальной системе, а $\vec{r}'$ – радиус-вектор той же точки в другой инерциальной системе, движущейся относительно первой со скоростью $\vec{v}$, то, приняв начала координат обеих систем в начальный момент совпадающими, имеем

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \qquad (I.I)$$

(преобразование Галилея). Взяв в обеих частях производную по времени, находим

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}\,, \qquad (I.2)$$

где $\vec{u}$ – скорость точки в первой, $\vec{u}'$ – во второй инерциальной системе.

I.2. Обосновать линейность преобразования импульса из одной инерциальной системы в другую.

<u>Решение</u>. Сохранение импульса означает, что суммарный импульс замкнутой (т.е. не взаимодействующей с окружением) совокупности тел постоянен во времени. Этот закон должен быть верен, в силу принципа относительности, в любой инерциальной системе. Но это возможно только тогда, если сум-

ма импульсов нескольких тел преобразуется так же, как импульс отдельного тела. Например, если несколько тел в результате соударения сливаются в одно, то сумма импульсов первичных тел, в силу сохранения импульса, будет равна импульсу вторичного. Если бы при переходе в другую инерциальную систему сумма импульсов первичных тел преобразовывалась иначе, чем импульс одного вторичного тела, то равенство в другой системе не имело бы места, т.е. закон сохранения нарушился бы. Но если сумма нескольких импульсов преобразуется так же, как один импульс, то преобразование должно быть линейным.

I.3. Вывести формулу преобразования импульса и доказать, что масса тела не зависит от скорости.

Решение. Перепишем формулу (I.2) для компонентов вектора $\vec{u}'$ в виде

$$u'_k = \alpha_{kl} u_l - \alpha_{kl} v_l \ , \tag{I.3}$$

учитывая возможный поворот координатных осей штрихованной системы относительно осей нештрихованной ( $\alpha_{kl}$ есть матрица поворота). В формуле (I.3) $l$ - индекс суммирования (т.наз. немой индекс), пробегающий значения I, 2, 3. Для компонентов импульса $\vec{p}$ какого-либо тела можем написать общую линейную формулу преобразования

$$p'_k = \beta_{kl} p_l + \gamma_k \ , \tag{I.4}$$

где $\beta_{kl}$ и $\gamma_k$ - коэффициенты, не зависящие от компонентов импульса, и, следовательно, не зависящие от компонентов скорости тела. Они зависят только от скорости $\vec{v}$ и от матрицы поворота $\alpha_{kl}$, т.е. от величин, характеризующих переход из нештрихованной системы в штрихованную. Кроме того, $\gamma_k$ может зависеть от массы тела. Обозначим массу тела в нештрихованной системе через $m$ и в штрихованной через $m'$. Тогда

$$p_l = m u_l \ ,$$
$$p'_k = m' u'_k \ . \tag{I.5}$$

Подставляя эти выражения в формулу (I.4), находим

$$m' u'_k = m \beta_{kl} u_l + \gamma_k \ . \tag{I.6}$$

Далее подставим сюда вместо $u'_k$ выражение из формулы (I.3). Тогда получим

$$m'\alpha_{kl}u_l - m'\alpha_{kl}v_l = m\beta_{kl}u_l + \gamma_k ,$$

откуда

$$(m'\alpha_{kl} - m\beta_{kl})\,u_l = m'\alpha_{kl}v_l + \gamma_k . \tag{I.7}$$

Так как правая часть этого равенства не зависит от $\vec{u}$ ,то обе части должны равняться нулю:

$$m'\alpha_{kl} = m\beta_{kl} \tag{I.8}$$

и

$$\gamma_k = -m'\alpha_{kl}v_l . \tag{I.9}$$

Из формулы (I.8) следует, что

$$m' = qm , \tag{I.10}$$

$$\beta_{kl} = q\alpha_{kl} , \tag{I.11}$$

где $q$ – число, могущее зависеть только от модуля скорости $\vec{v}$ , но, в силу изотропности пространства, не от ее направления. Подставляя выражения $\gamma_k$ и $\beta_{kl}$ из формул (I.9) и (I.11) в формулу (I.4), находим

$$p'_k = q\alpha_{kl}(p_l - mv_l) \tag{I.12}$$

или, в векторной форме,

$$\vec{p}\,' = q(\vec{p} - m\vec{v}) . \tag{I.13}$$

Чтобы определить значение $q$ , применим последнюю формулу к обратному преобразованию. Так как нештрихованная система движется относительно штрихованной со скоростью $-\vec{v}$ , то $q$ будет в обратном преобразовании то же, и мы получим

$$\vec{p} = q(\vec{p}\,' + m'\vec{v}) . \tag{I.14}$$

Подставляя в правую часть $\vec{p}'$ из формулы (I.13) и $m'$ из формулы (I.10), находим $\vec{p}=q^2\vec{p}$ , откуда $q^2=1$ и $q=1$ (значение $q=-1$ следует отбросить, так как при тождественном преобразовании (с $\vec{v}=0$ ) заведомо $\vec{p}'=\vec{p}$ и $q=1$ ). Итак, формула (I.13) получает окончательный вид

$$\vec{p}'=\vec{p}-m\vec{v}\,. \tag{I.15}$$

Это – искомая формула преобразования импульса. Наконец, формула (I.10) дает

$$m'=m\ . \tag{I.16}$$

Это равенство означает независимость массы тела от скорости, что и требовалось доказать.

I.4. Доказать, что масса является сохраняющейся величиной.

Решение. Напишем формулу, выражающую сохранение импульса:

$$\vec{p}=\sum_k \vec{p}_k = \text{const.}, \tag{I.17}$$

где $\vec{p}_k$ – импульс $k$-го тела в замкнутой совокупности тел. Перейдем в другую инерциальную систему, движущуюся относительно данной со скоростью $\vec{v}$ . В силу принципа относительности в другой системе импульс тоже сохраняется:

$$\vec{p}'=\sum_k \vec{p}_k' =\sum_k (\vec{p}_k - m_k\vec{v}) = \text{const.} \tag{I.18}$$

Здесь использована формула (I.15). Но так как первый член правой части – сохраняющаяся величина, то второй член тоже представляет сохраняющуюся величину, откуда

$$\sum_k m_k = \text{const.} \tag{I.19}$$

Это равенство и выражает сохранение массы.

I.5. Сумма импульсов нескольких тел преобразуется так же, как импульс отдельного тела (см. решение задачи I.2). Показать, что в формуле преобразования импульса (I.15), примененной к совокупности тел,

$m$ означает сумму масс всех тел совокупности.

Решение. Напишем формулу (I.I5) для $k$ -го тела совокупности

$$\vec{p}_k\,' = \vec{p}_k - m_k\vec{v} \,. \qquad (I.20)$$

Суммируя по $k$ и обозначая

$$\vec{p} = \sum_k \vec{p}_k \;,$$

$$m = \sum m_k \;, \qquad (I.2I)$$

находим

$$\vec{p}\,' = \vec{p} - m\vec{v} \;, \qquad (I.22)$$

что и требовалось показать.

I.6. Доказать, что если величина

$$T = \sum_k T_k = \sum_k \vec{p}_k^{\,2}/2m_k = \sum_k m_k\vec{u}_k^{\,2}/2 \;, \qquad (I.23)$$

относящаяся к замкнутой совокупности тел, в какой-либо инерциальной системе сохраняется, то она сохраняется и в любой другой инерциальной системе.

Решение. Согласно формуле (I.20)

$$T' = \sum_k (\vec{p}_k - m_k\vec{v})^2/2m_k \;.$$

Раскрывая скобки и учитывая формулы (I.2I) и (I.23),находим

$$T' = T - \vec{p}\vec{v} + m\vec{v}^{\,2}/2 \;. \qquad (I.24)$$

Так как $\vec{p}$ и $m$ всегда сохраняются, а $T$ сохраняется по условию, то сохраняется и $T'$ . Это и требовалось доказать. Очевидно, формула преобразования (I.24) верна и для отдельного тела.

Примечание I. Величина $T$ называется кинетической энергией совокупности. Согласно формуле (I.23), кинетическая энергия совокупности тел равна сумме кинетических энергий отдельных тел. Здесь имеется в виду кинетическая энергия поступательного движения. Вдобавок тела могут иметь кинетическую энергию вращательного движения. Однако если вращающееся тело рассматривать как совокупность бесконечного множества бесконечно малых точечных частиц, то вращение сведется к поступательному движению этих частиц. Поэтому нет нужды учитывать энергию вращения особо.

Примечание 2. Процессы, могущие происходить в замкнутой совокупности тел, подразделяются на два типа - упругие (те, в которых кинетическая энергия сохраняется) и неупругие (те, в которых кинетическая энергия не сохраняется). Согласно формуле (I.24), упругость или неупругость - инвариантные, т.е. не зависящие от выбора инерциальной системы характеристики процесса.

I.7. Для данной совокупности тел перейти в ту инерциальную систему, где ее полный импульс равен нулю.

Решение. Согласно формуле (I.22), положив $\vec{p}'=0$, находим, что скорость искомой инерциальной системы относительно данной равна

$$\vec{v}=\vec{p}/m\ . \tag{I.25}$$

Примечание 3. Инерциальная система, в которой полный импульс данной совокупности равен нулю, называется системой ее центра масс. Система центра масс отдельного тела - та, в которой оно неподвижно. Но в совокупности нескольких тел отдельные тела имеют, вообще говоря, отличные от нуля импульсы, и только сумма всех импульсов равна в системе центра масс нулю.

I.8. Показать, что если замкнутая совокупность состоит из точечных частиц, то точка

$$\vec{r}=\frac{\sum\limits_k m_k\vec{r}_k}{\sum\limits_k m_k}\ , \tag{I.26}$$

где $\vec{r}_k$ - радиусы-векторы частиц, а $m_k$ - их массы, движется со скоростью системы центра масс.

Решение. Вычисляя скорость точки $\vec{r}$, с учетом сохранения массы находим

$$d\vec{r}/dt=\frac{\sum\limits_k m_k d\vec{r}_k/dt+\sum\limits_k \vec{r}_k dm_k/dt}{\sum\limits_k m_k}\ .$$

Второй член равен нулю, так как масса каждой частицы не зависит от скорости и является, следовательно, постоянной. Мыслим, правда, обмен массой между двумя или несколькими частицами. Тогда $dm_k$ отличны от нуля для всех участвующих в обмене частиц. Но в момент обмена все они должны находиться в одной и той же точке, откуда вытекает, что сумма произведений $\vec{r}_k dm_k$, взятая по всем этим частицам, равна нулю. В первом же члене $d\vec{r}_k/dt = \vec{u}_k$. Следовательно,

$$d\vec{r}/dt = \frac{\sum_k m_k \vec{u}_k}{\sum_k m_k} = \vec{p}/m ,$$

что и равно, согласно формуле (I.25), скорости центра масс.

<u>Примечание 4.</u> Точка $\vec{r}$, определяемая формулой (I.26), называется <u>центром масс</u> данной совокупности. Как вытекает из решения последней задачи, центр масс в системе центра масс покоится. Поскольку всякое тело можно рассматривать как совокупность бесконечного множества точечных частиц, понятие центра масс применимо не только к совокупности точечных частиц, но и к любой совокупности протяженных тел.

I.9. Показать, что кинетическая энергия совокупности тел равна в любой инерциальной системе сумме кинетической энергии совокупности в системе ее центра масс и кинетической энергии тела, имеющего массу, равную полной массе совокупности, и движущегося со скоростью центра масс.

<u>Решение.</u> Требуется показать, что

$$T = T_0 + m\vec{v}^2/2 , \tag{I.27}$$

где $T_0$ - кинетическая энергия в системе центра масс, а $\vec{v}$ - скорость центра масс. Это равенство получается непосредственно из формулы (I.24), если принять в ней $T = T_0$, т. е. $\vec{p} = 0$. Скорость $\vec{v}$ получит тогда смысл скорости произвольной инерциальной (в формуле (I.24) штрихованной) системы относительно системы центра масс. Она равна и противоположна скорости $\vec{v}$ в формуле (I.27), так что квадрат $\vec{v}^2$ один и тот же в обеих формулах. Итак, заменив в (I.24) $T' \to T$, получим (I.27).

I.10. Показать, что величина $2mT-\vec{p}^2$, где $m$, $\vec{p}$, $T$ - масса, импульс и кинетическая энергия отдельного тела или совокупности тел, инвариантна.

Решение. Подставляя в выражение $2mT'-\vec{p}'^2$ выражения (I.22) и (I.24) для $\vec{p}'$ и $T'$, после легких преобразований находим

$$2mT'-\vec{p}'^2=2mT-\vec{p}^2, \qquad (I.28)$$

что и требовалось показать.

I.11. В совокупности тел происходит соударение, т. е. тела, будучи вначале свободными, вступают во взаимодействие друг с другом, из которого вновь выходят свободными. При этом тела могут дробиться на части или сливаться, так что конечная совокупность не обязательно тождественна начальной. Законы сохранения, однако, выполняются. Соударение может быть упругим или неупругим. Заданы полный импульс $\vec{p}$, полная масса $m$ и полная начальная кинетическая энергия $T$. Полную конечную кинетическую энергию обозначим через $\alpha T$. Обычно $\alpha<1$, т.е. сохраняется только часть кинетической энергии. Если $\alpha=1$, то кинетическая энергия сохраняется полностью, т.е. соударение упруго. Возможны также неупругие соударения с $\alpha>1$ (т.наз. соударения второго рода). Найти наименьшее возможное значение $\alpha$.

Решение. В формуле (I.27) член $m\vec{v}^2/2$, равный, согласно формуле (I.25), $\vec{p}^2/2m$, имеет одно и то же значение и до, и после соударения. Следовательно, кинетическая энергия после соударения будет наименьшей, если она равна в системе центра масс нулю ( $T_0=0$ ). Тогда в данной инерциальной системе наименьшее значение ее равно $\vec{p}^2/2m$, откуда

$$\alpha_{min}=\vec{p}^2/2mT. \qquad (I.29)$$

Примечание 5. Соударение с минимальным возможным значением $\alpha$ называется полностью неупругим.

I.12. Показать, что после полностью неупругого соударения все тела в системе центра масс неподвижны.

Решение. Это вытекает из формулы (I.23). Применив ее к системе центра масс и учтя, что кинетическая энергия после полностью неупругого соударения равна в системе центра масс нулю (см. предыдущую задачу), находим, что скорости всех тел равны нулю.

I.13. Два тела с массами $m_1$ и $m_2$ движутся вдоль одной и той же прямой со скоростями $v_1$ и $v_2$ (слева направо скорость положительна, справа налево отрицательна). После упругого соударения тела, сохраняя каждое свою массу, движутся вдоль той же прямой. Найти их скорости $u_1$ и $u_2$ после соударения.

Ответ. Законы сохранения импульса и кинетической энергии дают:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \,,$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \,. \tag{I.30}$$

Примечание 6. Есть еще тривиальное решение $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$. Оно тоже удовлетворяет законам сохранения, но означает, что соударения не было. Впрочем, его можно толковать и как результат такого соударения, при котором тела обмениваются массой: конечная масса первого тела равна начальной массе второго, и наоборот. Если, например, $m_1 > m_2$, то первое тело отдает второму массу $m_1 - m_2$. Скоростями тела тоже меняются: $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$. Тела, так сказать, перевоплощаются друг в друга. Такое решение нетривиально, хотя массы и скорости тел после соударения те же, что были вначале. В случае $m_1 = m_2$ оба решения совпадают.

I.14. Та же задача, только соударение неупругое, характеризуемое заданным множителем $\alpha$ (см. задачу (I.11)).

Ответ:

$$u_1 = \frac{p - m_2 u}{m},$$

$$u_2 = \frac{p + m_1 u}{m}, \tag{I.31}$$

где

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \tag{I.32}$$

полный импульс обоих тел,

$$m = m_1 + m_2 \tag{I.33}$$

их полная масса и

$$u = \pm \left(m_1^{-1} m_2^{-1} (2\alpha m T - p^2)\right)^{1/2}. \tag{I.34}$$

При $\alpha = p^2/2mT$ имеем $u = 0$ и $u_1 = u_2$, что согласуется с решением задачи I.12.

Примечание 7. Данная задача имеет в общем случае два решения, соответствующие двум знакам в выражении для $u$ (формула (I.34)). Оба решения совпадают только в случае полностью неупругого соударения, когда $u = 0$. Так как $u = u_2 - u_1$, то одно из решений выражает процесс, идущий с обменом массой. В самом деле, если $v_1 > v_2$, то $u_1$ может быть больше $u_2$ только при условии перехода части массы от одного тела к другому (иначе тела должны были бы пройти одно сквозь другое). Наоборот, если $v_1 < v_2$ то обмен массой должен иметь место при $u_1 < u_2$. Без обмена массой процесс идет в первом случае только при $u > 0$, а во втором - при $u < 0$.

I.15. Найти результат неупругого соударения двух тел, приняв в предыдущей задаче $m_2 = 4m_1$, $v_2 = -v_1/3$ и $\alpha = 2/5$.

**Ответ.** $u_1 = -11v_1/15$ , $u_2 = v_1/10$

или

$$u_1 = 3v_1/5 , \quad u_2 = -7v_1/30 .$$

Заметим, что при $v_1 > 0$ второе решение подразумевает обмен массой, именно, второе тело должно в процессе соударения отдать $3/4$ своей массы первому телу.

I.16. На неподвижное тело массы $M$ налетает со скоростью $v$ тело массы $m$. В результате от первого тела откалывается кусок массы $m_1$ , улетающий в том же направлении. Остальная часть тела вместе с налетевшим телом остается неподвижной. Найти скорость $v_1$ отколовшегося куска. Является ли этот процесс упругими или нет? Если нет, найти долю сохранившейся кинетической энергии.

**Ответ:** Процесс упруг, если $m_1 = m$ и неупруг, если $m_1 \neq m$ ; $v_1 = mv/m_1$ ; $\alpha = m/m_1$ .

## § 2. МАССА И ИМПУЛЬС СВЕТА

Эмпирический факт давления света заставляет приписать свету импульс. Поэтому световые потоки можно включить, наряду с телами, в любую механическую систему. Световые потоки могут взаимодействовать с телами (в частности, поглощаться или излучаться ими), причем закон сохранения импульса выполняется в любой замкнутой совокупности тел и световых потоков только при условии включения импульсов всех световых потоков в общий суммарный импульс. Под световым потоком здесь и далее понимается электромагнитная волна любой частоты, идущая в определенном направлении. Скорость света будет обозначаться через $\vec{c}$ .

Для любой совокупности тел и световых потоков можно доказать все то же, что было доказано в решениях задач I.2 - I.5, притом теми же методами. В частности, каждому световому потоку следует приписать массу, равную его импульсу, деленному на скорость, причем масса каждого светового потока одинакова во всех инерциальных системах, а закон сохранения массы справедлив в любой замкнутой совокупности тел и световых потоков только при условии включения в общий баланс массы наряду с массами тел также масс световых потоков.

Что касается энергии света, то она здесь рассматриваться не будет, так как это понятие является преимущественно релятивистским, а в классической механике его введение, хотя и возможно, но нецелесообразно.

2.I. Солнечный свет производит давление на полностью поглощающую поверхность тела (при нормальном падении), равное $4,6.10^{-6}$ Н/м$^2$. На сколько возрастает масса поглощающего тела в единицу времени?

<u>Решение</u>. Давление равно передаваемому в единицу времени импульсу. Разделив секундный импульс $4,6.10^{-6}$ кг.м/с$^2$ на скорость света, получим массу, равную $1,5.10^{-14}$ кг/с.м$^2$. Итак, масса тела возрастает на $1,5.10^{-8}$ мг в секунду на каждый квадратный метр облучаемой поверхности.

2.2. Какую скорость получит тело массы 0,01 г, вначале покоившееся, поглотив солнечный свет, падавший по нормали на 1 см$^2$ его поверхности в течение 1 минуты?

<u>Ответ</u>. 2,8 мм/с.

2.3. Два одинаковых тела массы $m$ каждое покоятся вначале на расстоянии $\ell$ друг от друга. Затем первое испускает в направлении второго короткую световую вспышку массы $\mu$. Достигнув второго тела, свет поглощается им полностью. Найти скорости обоих тел $u_1$ и $u_2$ и расстояние $\ell_1$ между ними по прошествии времени $t$ от момента испускания.

<u>Ответ</u>.

$$u_1 = \frac{\mu c}{m-\mu},$$

$$u_2 = \frac{\mu c}{m+\mu},$$

$$\ell_1 = \frac{\ell m}{m+\mu} + \frac{2m\mu ct}{m^2-\mu^2}.$$

2.4. На движущееся тело массы $m$ падают и полностью поглощаются в нем два световых потока: сзади с массой $\mu_1$ и спереди с массой $\mu_2$. После этого тела движется с прежней скоростью. Чему равна эта скорость?

<u>Ответ.</u> $\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\cdot c$ .

2.5. На покоящееся тело массы $m$ падает световой поток массы $\mu$ и отражается частично в обратном направлении, в результате чего тело получает скорость $u$. Найти коэффициент отражения $R$ и конечную массу $m_1$ тела.

<u>Ответ.</u> $R=\frac{mu-\mu(c-u)}{\mu(c+u)}$,

$$m_1=\frac{(m+2\mu)c}{c+u} .$$

2.6. На движущееся со скоростью $u$ тело массы $m$ падают и полностью поглощаются в нем два световых потока с равными и противоположными импульсами $\pm p$, перпендикулярными скорости тела. Найти скорость $u_1$, которую будет иметь тело после этого.

<u>Ответ.</u> $u_1=\frac{mu}{m+2p/c}$ .

2.7. Инертность света, как и инертность тела, выражается прежде всего в том, что импульс светового потока остается без внешних воздействий постоянным. Мерой возможного внешнего воздействия является <u>сила</u>, равная, по определению, изменению импульса в единицу времени:

$$\vec{F}=d\vec{p}/dt . \qquad (2.1)$$

Так как $\vec{p}=m\vec{u}$ и масса $m$ не зависит от скорости, то

$$\vec{F}=md\vec{u}/dt=m\vec{a} , \qquad (2.2)$$

где $\vec{a}$ - ускорение. В случае света, обозначая массу света через $\mu$, имеем

$$\vec{F}=\mu\vec{a}. \tag{2.3}$$

Показать, что если сила ускоряет полое тело массы $m$, наполненное черным излучением массы $\mu$, то

$$\vec{F}=(m+\mu)\vec{a}. \tag{2.4}$$

<u>Решение</u>. За время $dt$ скорость полого тела возрастает на $\vec{a}dt$. Если в начале промежутка времени $dt$ стенка полости испустила частицу света (излучения) с импульсом $d\vec{p}=\vec{c}d\mu$, то, по прошествии времени $dt$ эта частица света будет иметь скорость относительно оболочки $\vec{c}-\vec{a}dt$ и импульс $d\vec{p}'=(\vec{c}-\vec{a}dt)d\mu$. Итак, оболочка, излучая, получает вначале импульс $-\vec{c}d\mu$, а потом, поглощая, импульс $(\vec{c}-\vec{a}dt)d\mu$, в сумме $-\vec{a}dtd\mu$. Это означает дополнительную силу $-\vec{a}d\mu$, действующую на оболочку изнутри. Суммируя по всем частицам излучения, находим силу равной $-\vec{a}\mu$. Следовательно, $\vec{F}-\vec{a}\mu = \vec{a}m$, откуда и вытекает (2.4).

## § 3. ОСНОВНЫЕ ПОСТУЛАТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Первым основным постулатом теории относительности является <u>принцип относительности</u>, распространенный с механики тел на механику тел и света. О скорости света из астрономических наблюдений над двойными звездами известно, что она не зависит от движения источника. Но в таком случае классическое правило сложения скоростей (формула (I.2)) в применении к скорости света нарушает принцип относительности (единственная инерциальная система, в которой скорость света могла бы быть независимой от направления, была бы предпочтительной). Поэтому теория относительности принимает в качестве второго основного постулата <u>принцип постоянства скорости света</u>, утверждающий одинаковость скорости света во всех инерциальных системах и независимость ее от направления в любой инерциальной системе. Прямыми следствиями этого постулата (с учетом принципа относительности и законов сохранения массы и импульса) являются неинвариантность массы (в частности, зависимость массы тела от скорости) и относительность времени (см. §§ 5, 9, 14, 15). Более отдаленным, но самым фундаментальным следствием является закон эквивалентности массы и энергии (см. § 13).

3.1. Дорелятивистская гипотеза эфира понимает свет как волновое движение в универсальной среде - мировом эфире. Инерциальная система, в которой эфир неподвижен, является предпочтительной, и в ней скорость света $\vec{c}$ изотропна (не зависит от направления). В другой инерциальной системе, движущейся относительно эфира со скоростью $\vec{v}$, скорость света, согласно эфирной гипотезе, равна

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v} . \tag{3.1}$$

Найти зависимость $c'$ от угла $\vartheta$ между $\vec{c}'$ и $\vec{v}$.

Решение. Как видно из рис. 1,

$$c^2 = c'^2 + v^2 + 2c'v\cos\vartheta . \tag{3.2}$$

Решая это уравнение относительно $c'$, находим

$$c' = c\left[-\beta\cos\vartheta + \sqrt{1-\beta^2\sin^2\vartheta}\right] , \tag{3.3}$$

где

$$\beta = v/c . \tag{3.4}$$

3.2. Опыт Майкельсона рассматривается обычно как прямое экспериментальное подтверждение постоянства скорости света. В этом опыте наблюдается интерференционная картина, получающаяся как результат интерференции двух лучей, прошедших примерно одинаковые расстояния в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Монохроматический луч от источника $Q$ (см. рис. 2) падает на поставленную под углом в 45° полупрозрачную пластинку $P$ и разделяется на два когерентных луча. Прошедший пластинку луч проходит расстояние $\ell_1$ до зеркала $S_1$ и, отразившись, возвращается обратно. Отразившийся от пластинки луч идет до зеркала $S_2$, находящегося на расстоянии $\ell_2$, и, отразившись, возвращается обратно. Первый луч, отразившись по возвращении от пластинки, и второй, пройдя ее, соединяются и интерферируют. Интерференционная картина, состоящая из чередующихся светлых и темных полос, наблюдается в трубу $T$. Найти разность хода лучей, предполагая, что весь прибор движется относительно эфира в направлении первого луча со скоростью $v=\beta c$.

Решение. Скорость первого луча на пути к зеркалу равна по формуле (3.3) $c-v$, обратно $c+v$ (в первом случае $\vartheta = 0^0$, во втором $\vartheta = 180^0$). Скорость второго луча равна туда и обратно $c\sqrt{1-\beta^2}$ (так как $\vartheta = 90^0$). Следовательно, первый луч затрачивает время

$$t_1 = \frac{\ell_1}{c-v} + \frac{\ell_1}{c+v} = \frac{2\ell_1 c}{c^2-v^2} = \frac{2\ell_1}{c(1-\beta^2)} ,$$

а второй - время

$$t_2 = \frac{2\ell_2}{c\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Полагая $\beta \ll 1$, разложим эти выражения в ряд до квадратичных членов:

$$t_1 = (2\ell_1/c)(1+\beta^2) ,$$

$$t_2 = (2\ell_2/c)(1+\beta^2/2) . \qquad (3.5)$$

Отсюда разность фаз

$$\Delta f = \omega(t_2 - t_1) = (2\omega/c)[\ell_2 - \ell_1 + \beta^2(\ell_2/2 - \ell_1)] , \qquad (3.6)$$

где $\omega$ - частота света.

3.3. Если эфирная теория верна, то интерференционная картина, наблюдаемая в опыте Майкельсона, должна испытать смещение при повороте интерферометра на $90^0$, так как тогда оба плеча меняются местами. Найти ожидаемое изменение разности фаз при таком повороте.

Решение. При повороте интерферометра скорости света вдоль плеч изменяются. Вдоль первого плеча скорость будет $c\sqrt{1-\beta^2}$, а вдоль второго $c-v$ и $c+v$. Следовательно, изменившиеся времена прохождения путей лучами будут вместо (3.5)

$$t_1' = (2l_1/c)(1+\beta^2/2),$$
$$t_2' = (2l_2/c)(1+\beta^2). \tag{3.7}$$

Изменившаяся разность фаз будет

$$\Delta f' = \omega(t_2' - t_1') = (2\omega/c)[l_2 - l_1 + \beta^2(l_2 - l_1/2)]. \tag{3.8}$$

Отсюда и из формулы (3.6) следует

$$\Delta f' - \Delta f = (\omega/c)\beta^2(l_1 + l_2). \tag{3.9}$$

Этому изменению соответствует смещение интерференционной картины на величину, составляющую от периода картины долю

$$(\Delta f' - \Delta f)/2\pi = \beta^2\lambda^{-1}(l_1 + l_2), \tag{3.10}$$

где $\lambda = 2\pi c/\omega$ – длина волны. На самом деле никакого смещения не наблюдалось, откуда следует, что скорость света не зависит от направления. По эфирной теории это означало бы, что Земля покоится относительно эфира. Но это невозможно, так как Земля вращается вокруг Солнца. Поэтому-то эфирная теория противоречит результату опыта Майкельсона.

3.4. Гипотеза, согласно которой скорость света от любого источника в системе его покоя одинакова и изотропна, преобразуясь при переходе в другую систему по классической формуле (3.I), называется баллистической гипотезой. Она опровергается наблюдениями над двойными звездами. Пусть обе компоненты двойной звезды движутся, имея равные массы, по общей круговой орбите, находясь в каждый момент в концах одного и того же диаметра орбиты. Предположим также, что орбита обращена к Земле "ребром", т. е. что Земля находится в плоскости орбиты. Скорости света, испускаемого компонентами, по баллистической гипотезе относительно земного наблюдателя различны и, следовательно, свет, испущенный обеими компонентами одновременно, приходит к наблюдателю неодновременно. Пусть в некоторый момент одна звезда удаляется от наблюдателя со скоростью $v$, а другая в тот же момент приближается к нему с той же скоростью. Обозначив расстояние двойной звезды от Земли через $\ell$, найти время запаздывания прихода на Землю света первой звезды относительно второй.

Решение. Свет доходит от первой звезды до Земли за время $\ell(c-v)^{-1}$, а от второй - за время $\ell(c+v)^{-1}$. Искомое запаздывание равно разности

$$\ell(c-v)^{-1}-\ell(c+v)^{-1}=2\ell v(c^2-v^2)^{-1}\approx 2\ell v/c^2.$$

Если это запаздывание сравнимо с периодом обращения звезды, то наблюдатель увидел бы расположение компонент друг относительно друга иным, чем на самом деле, в нарушение законов Кеплера. Возможно было бы даже увидеть иногда одну и ту же звезду сразу в трех местах. Так как подобные аномалии никогда не наблюдались, баллистическая гипотеза была отвергнута.

## § 4. ИМПУЛЬС И МАССА В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Кроме двух основных постулатов теории относительности - принципа относительности и принципа постоянства скорости света - в основе релятивистской механики лежит закон сохранения импульса. Импульсом обладают как тела, так и световые потоки, и вообще все движущиеся объекты. Как и в классической механике, сохранение импульса требует, чтобы импульс преобразовывался из одной инерциальной системы в другую линейно (см. задачу I.2). Коэффициент, связывающий импульс со скоростью, называется по-прежнему массой.

4.I. Доказать сохранение массы.

Решение. Аналогичная задача для классической механики была I.4. Решение было основано на формуле преобразования импульса, в свою очередь вытекающей из требования линейности преобразования и формулы преобразования скорости (см. задачи I.I - I.3). В теории относительности остается в силе требование линейности преобразования импульса,но классическая формула преобразования скорости отменяется. Отменяется и преобразование Галилея (см. формулу (I.I)).Его заменяет преобразование Лоренца (см. § I7). Однако сохранение массы можно доказать и не прибегая к преобразованиям Лоренца. Следует только учесть, что время, будучи относительно, преобразуется совместно с пространственными координатами, и что эти преобразования линейны. Линейность обосновывается однородностью пространства и времени во всех инерциальных системах. Это означает, что частные производные преобразованных координат и времени по старым координатам и времени должны быть постоянными. В этом и состоит линейность преобразований.

Итак, пусть декартовы координаты $x_\ell$ и время $t$ преобразуются при переходе в другую (штрихованную) систему по формулам

$$x'_k = \alpha_{k\ell} x_\ell + \alpha_{k0} t\,,$$

$$t' = \alpha_{0\ell} x_\ell + \alpha_{00} t\,, \qquad (4.I)$$

где $\alpha_{k\ell}$ , $\alpha_{k0}$ , $\alpha_{0\ell}$ и $\alpha_{00}$ - коэффициенты,зависящие от относительной скорости обеих систем и от углов возможного поворота координатных осей, но не от самих координат и времени. Для компонентов импульса имеем тоже линейные формулы преобразования

$$m' u'_k = m \beta_{k\ell} u_\ell + \gamma_k\,, \qquad (4.2)$$

где $m$ и $u_\ell$ - масса и компоненты импульса в нештрихованной, а $m'$ и $u'_k$ - в штрихованной системе, а коэффициенты $\beta_{k\ell}$ и $\gamma_k$ зависят только от параметров преобразования ( $\gamma_k$ также, возможно, от массы).

Дифференцируя формулы (4.I), находим

$$
\begin{aligned}
dx'_k &= \alpha_{kl}\, dx_l + \alpha_{k0}\, dt\,, \\
dt' &= \alpha_{0l}\, dx_l + \alpha_{00}\, dt\,,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

откуда

$$
u'_k = \frac{\alpha_{kl} u_l + \alpha_{k0}}{\alpha_{0l} u_l + \alpha_{00}}\,. \tag{4.4}
$$

Подставляя это выражение в формулу (4.2), находим

$$
m'(\alpha_{kl} u_l + \alpha_{k0}) = (m\beta_{kl} u_l + \gamma_k)(\alpha_{0l} u_l + \alpha_{00})\,. \tag{4.5}
$$

Это соотношение должно выполняться тождественно. Следовательно, множитель $m'$ может отличаться от множителя $m(\alpha_{0l}u_l+\alpha_{00})$ только некоторым пока неизвестным множителем $q$ :

$$
m' = qm\,(\alpha_{0l} u_l + \alpha_{00})\,. \tag{4.6}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\beta_{kl} &= q\alpha_{kl}\,, \\
\gamma_k &= mq\alpha_{k0}\,.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Подставляя последние выражения в формулу (4.2), с заменой в ней $m'u'_k = p'_k$ и $mu_l = p_l$, и объединяя ее с формулой (4.6), находим

$$
\begin{aligned}
p'_k &= q\,(\alpha_{kl} p_l + \alpha_{k0} m)\,, \\
m' &= q\,(\alpha_{0l} p_l + \alpha_{00} m)\,.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Это – формулы преобразования массы и компонентов импульса. Они отличаются от формул преобразования времени и координат (см. (4.I)) только множителем $q$ . Докажем, что $q^2=1$ .Для этого учтем, что в обратном преобразовании из штрихованной системы в нештрихованную $q$ должно иметь то же значение. Это вытекает из изотропности пространства. Обратный переход отличается от прямого только направлением относительной скорости обеих инерциальных систем; так как оба направления равноправны (в чем и состоит изотропность пространства),то $q$ должно быть то же. Обратное преобразование координат и времени дает из $x'_k$ и $t'$ обратно $x_l$ и $t$ ; коэффициенты $\alpha_{kl}$ ,

$\alpha_{ko}$, $\alpha_{ol}$, и $\alpha_{oo}$ должны это гарантировать. Следовательно, обратное преобразование $p'_k$ и $m'$ должно дать $q^2 p_l$ и $q^2 m$. Но так как в нештрихованной системе компоненты импульса и масса суть $p_l$ и $m$, то должно быть $q^2=1$. Отсюда $q=1$ и формулы (4.8) принимают вид

$$p'_k=\alpha_{kl}p_l+\alpha_{ko}m,$$
$$m'=\alpha_{ol}p_l+\alpha_{oo}m. \qquad (4.9)$$

Эти формулы относятся как к отдельному объекту, так и к любой совокупности объектов (тел или световых потоков). Они и доказывают сохранение массы. В самом деле, если $p_l$ и $p'_k$ сохраняются, то в силу первой формулы (4.9), сохраняется и $m$, а в силу второй формулы сохраняется и $m'$. Итак, масса, как и импульс, сохраняется во всех инерциальных системах.

## § 5. ЗАВИСИМОСТЬ МАССЫ ТЕЛА ОТ СКОРОСТИ

Относительность массы, сопряженная, согласно формулам (4.I) и (4.9), с относительностью времени, означает, в частности, зависимость массы тела от скорости. Поскольку релятивистская относительность массы, в противоположность ее классической абсолютности, обусловлена постулатом постоянства скорости света, должно быть возможно не только продемонстрировать непосредственно, в связи с названным постулатом, невозможность абсолютности массы, но и найти формулу ее зависимости от скорости.

5.I. Показать, что независимость массы от скорости противоречит второму постулату теории относительности.

Решение. Рассмотрим поглощение света массы $\mu$ телом массы $m$. В системе начального покоя тела сохранение массы и импульса выражается формулами

$$m+\mu=m_1,$$
$$\mu c=m_1 u, \qquad (5.I)$$

где $m_1$ - конечная масса тела, а $u$ его скорость. В другой инерциальной системе, в которой тело покоится после поглощения света, его начальная и конечная массы, если масса не зависит от скорости, тоже равны $m$ и $m_1$. Обозначив массу света в другой системе через $\mu'$, выразим сохранение массы и импульса равенствами

$$m + \mu' = m_1 ,$$

$$\mu' c = m u , \qquad (5.2)$$

в которых скорость света, согласно второму постулату, принята равной $c$. Но эти равенства противоречат равенствам (5.I): согласно первым формулам (5.I) и (5.2) $\mu' = \mu$, а согласно вторым $\mu' \neq \mu$.

5.2. Положив зависимость массы тела от скорости в виде

$$m = m_0 \gamma(u) , \qquad (5.3)$$

где $m_0$ - <u>масса покоя</u>, найти вид множителя $\gamma(u)$.

<u>Решение</u>. Рассматривая, как и в предыдущей задаче, поглощение света телом, перепишем формулы сохранения (5.I) и (5.2), с учетом зависимости массы от скорости, в виде

$$m_0 + \mu = m_{10} \gamma(u) ,$$

$$\mu c = m_{10} u \gamma(u) \qquad (5.4)$$

и

$$m_0 \gamma(u) + \mu' = m_{10} ,$$

$$\mu' c = m_0 \gamma(u) u . \qquad (5.5)$$

Исключая $\mu$ из формул (5.4) и $\mu'$ из формул (5.5), находим

$$m_0 = m_{10} \gamma(u) (1 - u/c) ,$$

$$m_{10} = m_0 \gamma(u) (1 + u/c) ; \qquad (5.6)$$

перемножая эти равенства и сокращая на $m_0 m_{10}$, находим

$$\gamma^2(u) (1 - u^2/c^2) = 1 , \qquad (5.7)$$

откуда

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} . \qquad (5.8)$$

Таким образом, зависимость массы от скорости имеет вид

$$m(u)=\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \; . \tag{5.9}$$

На рис. 3 приведен график функции $\gamma(u)$ .

5.3. Вывести формулу (5.8), применив законы сохранения массы и импульса к распаду частицы на два фотона.

Решение. В системе покоя частицы фотоны имеют равные и противоположные импульсы и, следовательно, равные массы $\mu$ . Согласно закону сохранения массы

$$m_0=2\mu \; , \tag{5.10}$$

где $m_0$ - масса покоя частицы. В другой инерциальной системе, движущейся в направлении импульса первого фотона со скоростью $u$ , частица движется до распада с той же скоростью в направлении вылета второго фотона. Обозначив массы фотонов в этой системе через $\mu_1$ и $\mu_2$ , выразим их в виде

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu f(u) \, , \\ \mu_2 &= \mu f(-u) \, , \end{aligned} \tag{5.11}$$

где $f(u)$ - пока неизвестная функция скорости, преобразующая массу фотона при переходе в другую инерциальную систему. Очевидно,

$$f(u)f(-u)=1 \, . \tag{5.12}$$

Законы сохранения массы и импульса записываются в виде

$$\begin{aligned} m_0\gamma(u) &= \mu_1+\mu_2 \, , \\ m_0\gamma(u)u &= (\mu_2-\mu_1)c \, . \end{aligned} \tag{5.13}$$

Разделив второе равенство на $c$ и выразив разность квадратов обоих, имеем:

$$m_0^2\gamma^2(u)(1-u^2/c^2)=4\mu_1\mu_2 \; ; \tag{5.14}$$

но, согласно формулам (5.10) - (5.12), $4\mu_1\mu_2=4\mu^2=m_0^2$ ; следовательно, формула (5.14) принимает вид $m_0^2\gamma^2(u)(1-u^2/c^2)=m_0^2$, откуда и получается формула (5.8).

5.4. Вывести формулу преобразования массы света (фотона) при переходе в инерциальную систему, движущуюся в направлении импульса фотона со скоростью $v$.

Решение. Воспользуемся формулами (5.4) и (5.5), заменив в них $u$ на $v$. Исключая из (5.4) $m_{10}$ находим

$$\mu = \frac{m_0 v}{c - v}. \tag{5.15}$$

Из второй формулы (5.5) находим (с учетом формулы (5.8))

$$\mu' = \frac{m_0 v}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{5.16}$$

Исключив отсюда и из предыдущей формулы $m_0$, имеем

$$\mu' = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \cdot \mu. \tag{5.17}$$

Другой способ основан на формулах предыдущей задачи. Выражая из формул (5.13) $\mu_1 \equiv \mu'$, находим (с заменой и здесь $u$ на $v$)

$$m_0 \gamma(v)(1 - v/c) = 2\mu'.$$

Отсюда, подставив $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ и заменив $m_0$ согласно формуле (5.10) на $2\mu$, находим вновь формулу (5.17).

На рис. 4 приведен график функции $\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$.

5.5. Убедиться в том, что при поглощении света телом увеличивется не только его полная масса, но и масса покоя, и найти соответствующую формулу.

Решение. Рассмотрим процесс поглощения света в той инерциальной системе, в которой тело до поглощения покоится. Это – ситуация, рассмотренная в задаче 5.2. Любая из формул (5.6) с учетом формулы (5.8) дает

$$m_{10} = m_0 \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}, \tag{5.18}$$

где $u$ - конечная скорость тела. Отсюда ясно, что, в самом деле, $m_{10} > m_0$. Можно выразить также $m_{10}$ через $m_0$ и $\mu$, а не через $u$. Для этого, подставляя выражение (5.18) в первую формулу (5.4) и решая полученное уравнение относительно $u/c$, находим

$$u/c = \mu(m_0+\mu)^{-1}. \tag{5.19}$$

Подставляя это выражение в формулу (5.18), находим

$$m_{10} = m_0(1+2\mu/m_0)^{1/2}. \tag{5.20}$$

5.6. Выразить скорость тела через его массу.

Ответ. $$u = c(1-m_0^2/m^2)^{1/2}. \tag{5.21}$$

5.7. Найти зависимость между массой и импульсом тела.

Решение. Масса зависит от скорости согласно (5.9):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}};$$

импульс выражается, соответственно, как

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{5.22}$$

Исключая из обеих формул $\vec{u}$, находим

$$p^2 = (m^2-m_0^2)c^2. \tag{5.23}$$

Примечание 8. Формула (5.23) пригодна и для света. Положив в ней $m_0=0$, находим

$$\vec{p} = m\vec{c}. \tag{5.24}$$

Итак, масса покоя света равна нулю. Напротив, формулы (5.9) и (5.22) к свету неприменимы, так как правые части при $m_0=0$ и $u=c$ дают неопределенность 0/0.

5.8. Часть массы $m-m_0$, поскольку она обусловлена движением, называется кинетической массой $m_{кин}$. Найти приближенную формулу кинетической массы, верную при малых скоростях ($u \ll c$).

Решение. Разлагая корень в формуле (5.9) до квадратичного члена, находим

$$m \approx m_0 + m_0 u^2/2c^2 . \qquad (5.25)$$

Отсюда

$$m_{кин} \approx m_0 u^2/2c^2 . \qquad (5.26)$$

Примечание 9. Масса света целиком кинетическая, поскольку масса покоя равна нулю. Формула (5.26) дает только половину (при $u=c$ получаем в правой части $m_0/2$ ). Неприменимость ее к свету обусловлена невыполнением неравенства $u \ll c$.

5.9. Два одинаковых тела с массой покоя $m_0$ движутся навстречу друг другу с равными скоростями $u$ . В результате полностью неупругого соударения образуется покоящееся вторичное тело. Найти его массу покоя $M_0$ .

Ответ.
$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} . \qquad (5.27)$$

5.10. Чему равна в предыдущей задаче скорость одного из первичных тел в системе покоя другого?

Решение. Инерциальная система, в которой одно из первичных тел покоится, движется относительно начальной системы, в которой скорости тел равны и противоположны, со скоростью $u$ . С той же скоростью (но в обратном направлении) движется в новой системе вторичное тело (ибо в прежней системе оно неподвижно). Обозначив скорость другого первичного тела в новой системе через $u'$ , запишем сохранение массы и импульса:

$$m_0 + \frac{m_0}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{M_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} ,$$
$$\frac{m_0 u'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{M_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} . \qquad (5.28)$$

Подставляя в эти формулы выражение (5.27) для $M_0$ , находим два уравнения для $u'$ , решения которых совпадают:

$$u' = \frac{2u}{1+u^2/c^2} . \qquad (5.29)$$

## § 6. ОДНОМЕРНАЯ ФОРМУЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СКОРОСТИ

6.I. Тело движется в данной инерциальной системе со скоростью $u$. Какова его скорость $u'$ в другой инерциальной системе, движущейся относительно первой в том же направлении со скоростью $v$ ?

Решение. Пусть телом является частица, распадающаяся на два фотона, причем импульсы фотонов параллельны скорости частицы. Первым назовем фотон, вылетающий вперед, вторым – фотон, вылетающий назад. Сохранение массы и импульса выражается формулами

$$m = \mu_1 + \mu_2 ,$$
$$mu/c = \mu_1 - \mu_2 , \qquad (6.I)$$

где $m$ - масса (не масса покоя, а полная масса) частицы, а $\mu_1$ и $\mu_2$ - массы фотонов. В другой системе, движущейся в том же направлении со скоростью $v$, аналогично,

$$m' = \mu_1' + \mu_2' ,$$
$$m'u'/c = \mu_1' - \mu_2' . \qquad (6.2)$$

Разделив вторую формулу на первую в обеих парах формул, находим

$$u/c = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \qquad (6.3)$$

и

$$u'/c = \frac{\mu_1' - \mu_2'}{\mu_1' + \mu_2'} . \qquad (6.4)$$

Применив формулу преобразования массы фотона (5.I7), перепишем формулу (6.4) в виде

$$\frac{u'}{c} = \frac{\mu_1\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} - \mu_2\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}}{\mu_1\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} + \mu_2\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}} ,$$

откуда

$$\frac{u'}{c}=\frac{\mu_1-\mu_2-(v/c)(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1+\mu_2-(v/c)(\mu_1-\mu_2)}$$

или

$$\frac{u'}{c}=\frac{\dfrac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}-\dfrac{v}{c}}{1-\dfrac{v}{c}\,\dfrac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}}\,. \tag{6.5}$$

Подставляя сюда вместо $\dfrac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$ выражение из формулы (6.3), находим

$$u'=\frac{u-v}{1-uv/c^2}\,. \tag{6.6}$$

Это и есть одномерная формула преобразования скорости.

6.2. Найти формулу преобразования величины $\dfrac{1-u/c}{1+u/c}$ в одномерном случае.

Решение. Подставляя в выражение $\dfrac{1-u'/c}{1+u'/c}$ $u'=\dfrac{u-v}{1-uv/c^2}$, находим

$$\frac{1-u'/c}{1+u'/c}=\frac{1-u/c}{1+u/c}\cdot\frac{1+v/c}{1-v/c}\,. \tag{6.7}$$

Это и есть искомая формула. Она применима и к свету, поскольку при $u=c$ и $u'=c$ обе части обращаются в нуль. Формула (6.6) тоже применима и к свету, хотя вывод ее, приведенный в решении задачи (6.I), к свету неприменим.

6.3. Найти формулу преобразования величины $\sqrt{1-u^2/c^2}$ в одномерном случае.

Решение. Подставляя в выражение $\sqrt{1-u'^2/c^2}$ $u'=\dfrac{u-v}{1-uv/c^2}$, находим

$$\sqrt{1-u'^2/c^2}=\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}\cdot\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-uv/c^2}\,. \tag{6.8}$$

Эта формула тоже применима не только к телам, но и к свету.

6.4. Вывести формулу (6.6) путем применения законов сохранения массы и импульса к полностью неупругому соударению двух тел.

Решение. Пусть на неподвижное тело массы покоя $M_0$ налетает со скоростью $u$ тело массы $m$ и сливается с ним в одно вторичное тело с массой покоя $M_{10}$ и скоростью $v$. В системе покоя вторичного тела первичное имеет скорость $-v$, налетающее же массу $m'$ и скорость $u'$. Законы сохранения массы и импульса записываются в первой системе в виде

$$M_0 + m = M_{10}\gamma(v) ,$$
$$mu = M_{10}\gamma(v)v , \tag{6.9}$$

а во второй системе в виде

$$M_0\gamma(v) + m' = M_{10} ,$$
$$-M_0\gamma(v)v + m'u' = 0 . \tag{6.10}$$

Исключая из формул (6.9) $m$, а из формул (6.10) $m'$, находим

$$M_0 = M_{10}\gamma(v)(1 - v/u) ,$$
$$M_{10} = M_0\gamma(v)(1 + v/u') . \tag{6.11}$$

Перемножив эти равенства и сократив на $M_0 M_{10}$, находим

$$(1 - v/u)(1 + v/u') = \gamma^{-2}(v) . \tag{6.12}$$

Подставляя сюда $\gamma^{-2}(v) = 1 - v^2/c^2$ и решая уравнение относительно $u'$, получаем формулу (6.6).

Примечание 10. Данный вывод применим и к свету. Если вместо налетающего тела возьмем световой поток, полностью поглощающийся в теле, то $u = u' = c$ и формула (6.12) обращается в тождество. Именно этим способом и была найдена формула для $\gamma(v)$ в задаче 5.2.

6.5. Вывести формулу преобразования скорости (6.6), не зная вида формулы (5.8) для $\gamma(v)$.

Решение. В предыдущей задаче на основе законов сохранения массы и импульса при полностью неупругом соударении двух тел была получена формула (6.12). Вдобавок мы можем написать еще одну подобную же формулу. Дело в том, что одно из двух соударяющихся тел мы назвали "первичным", а другое "налетающим". Но с равным правом мы можем "первичным" считать то, что было "налетающим" и наоборот. Тогда роль скорости $u$ получит скорость $-u$ , роль скорости $v$ - скорость $-u'$ и роль скорости $u'$ - скорость $-v$ . Следовательно, формула (6.I2) останется при указанной замене скоростей в силе. Учитывая также, что $\gamma$ зависит только от абсолютной величины, но не от знака (направления) скорости, получим

$$(1-u'/u)(1+u'/v)=\gamma^{-2}(u') . \tag{6.I3}$$

Далее исключим $u$ из формул (6.I2) и (6.I3). После надлежащих преобразований находим

$$v^{-2}[1-\gamma^{-2}(v)] = u'^{-2}[1-\gamma^{-2}(u')] . \tag{6.I4}$$

Так как скорости $v$ и $u'$ независимы, то это равенство возможно только если обе части равны одной и той же постоянной. Если возьмем ее равной нулю, то $\gamma=1$ . Но это противоречит общему результату, полученному в задаче 5.I: масса не может быть независимой от скорости. Следовательно, постоянная должна быть отлична от нуля и иметь размерность обратного квадрата скорости. Это должна быть универсальная скорость. Обозначив ее через $C$ , положим

$$v^{-2}[1-\gamma^{-2}(v)] = C^{-2} , \tag{6.I5}$$

откуда

$$\gamma(v) = (1-v^2/C^2)^{-1/2} ,$$

что совпадает с формулой (5.8) с $C$ вместо $c$ . А формула (6.I2) дает вновь формулу преобразования скорости (6.6) (тоже с $C$ вместо $c$ ). Но так как при $u=C$ эта формула дает $u'=C$ , то $C$ следует отождествить со скоростью света и заменить $C \to c$ .

<u>Примечание II.</u> В этой задаче фактически дан совместный вывод двух формул: зависимости массы от скорости и одномерного преобразования скорости.

<u>Примечание I2.</u> Формально можно было бы в правой части формулы (6.I5) написать $-C^{-2}$. Но это привело бы к противо-

речию со вторым постулатом теории относительности. В самом деле, тогда мы имели бы

$$\gamma(v) = (1 + v^2/C^2)^{-1/2} \tag{6.16}$$

и

$$u' = \frac{u-v}{1+uv/C^2} . \tag{6.17}$$

Пусть $u=c$. Тогда, согласно второму постулату, должно быть $u'=c$. Следовательно,

$$c = \frac{c-v}{1+cv/C^2} ,$$

откуда $c^2v/C^2 = -v$, что невозможно. Это значит, что положительность правой части равенства (6.15) учитывает опытный факт существования света.

6.6. Вывести формулу (6.6) с помощью формулы преобразования массы фотона (см. (5.17)).

Решение. Имеем три инерциальные системы: систему покоя тела, систему, в которой тело движется со скоростью $u$, и систему, в которой тело движется со скоростью $u'$. Вторая движется относительно первой со скоростью $-u$, третья относительно второй со скоростью $v$, а третья относительно первой со скоростью $-u'$. Все три скорости коллинеарны. Преобразуем по формуле (5.17) массу какого-либо фотона, движущегося в том же направлении, из первой системы во вторую, а из второй в третью. Результат должен быть тот же, что и при прямом преобразовании из первой системы в третью. Следовательно, должно выполняться равенство

$$\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \cdot \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}} = \sqrt{\frac{1+u'/c}{1-u'/c}} . \tag{6.18}$$

Эта формула фактически тождественна формуле (6.7). Выражая из нее $u'$, мы находим вновь одномерную формулу преобразования скорости (6.6).

6.7. В некоторой инерциальной системе даны две коллинеарные скорости, $u_1$ и $u_2$. В другой инерциальной системе, движущейся в том же направлении со скоростью $v$, они равны $u_1'$ и $u_2'$. Показать, что если

$$v = 2(u_1^{-1} + u_2^{-1})^{-1},$$

то

$$2(u_1'^{-1} + u_2'^{-1})^{-1} = -v .$$

<u>Решение</u>. Требуемое соотношение доказывается подстановкой в левую часть выражений $u_1'$ и $u_2'$ по формуле (6.6) и заменой $v$ в обеих частях данным выражением $2(u_1^{-1}+u_2^{-1})^{-1}$. Тогда получим тождество.

## § 7. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СКОРОСТИ

7.1. Две одинаковые частицы движутся с равными скоростями, но в различных направлениях. Испытав соударение, они превращаются в два фотона, разлетающиеся в прямо противоположных направлениях. Эти направления делят угол между импульсами частиц пополам. С помощью законов сохранения массы и импульса и формулы преобразования массы фотона найти формулу преобразования продольной компоненты скорости, т.е. компоненты, параллельной относительной скорости двух инерциальных систем.

<u>Решение</u>. Задача решается аналогично задаче 6.1. На рис. 5 осью $x$ является биссектриса угла между импульсами частиц. Частицы имеют массу $m$ и скорость $u$. Импульсы фотонов по условию направлены вдоль оси $x$, чем гарантируется сохранение поперечной (т.е. перпендикулярной к оси $x$) компоненты импульса. Масса фотона, вылетающего вперед, равна $\mu_1$, масса фотона, вылетающего назад, равна $\mu_2$. В другой инерциальной системе (рис. 6), движущейся со скоростью $v$ в направлении оси $x$, массы частиц равны $m'$, их скорости $u'$, а массы фотонов $\mu_1'$ и $\mu_2'$.

Сохранение массы и $x$-компоненты импульса выражается формулами

$$2m = \mu_1 + \mu_2 ,$$

$$2mu_x = (\mu_1 - \mu_2)c \qquad (7.1)$$

в первой и

$$2m' = \mu_1' + \mu_2' ,$$
$$2m' u_x' = (\mu_1' - \mu_2')c \qquad (7.2)$$

во второй системе. Отсюда

$$\frac{u_x}{c} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \qquad (7.3)$$

и

$$\frac{u_x'}{c} = \frac{\mu_1' - \mu_2'}{\mu_1' + \mu_2'} . \qquad (7.4)$$

Выражая $\mu_1'$ и $\mu_2'$ по формуле (5.17) через $\mu_1$ и $\mu_2$ ,перепишем последнюю формулу в виде

$$\frac{u_x'}{c} = \frac{\mu_1\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} - \mu_2\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}}{\mu_1\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} + \mu_2\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}}$$

или

$$\frac{u_x'}{c} = \frac{\mu_1(1-v/c) - \mu_2(1+v/c)}{\mu_1(1-v/c) + \mu_2(1+v/c)}$$

или

$$\frac{u_x'}{c} = \frac{\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{v}{c}} . \qquad (7.5)$$

Учитывая формулу (7.3), находим окончательно

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} . \qquad (7.6)$$

Сравнивая этот результат с формулой (6.6), видим, что продольная компонента скорости преобразуется одинаково,независимо от того, существует ли отличная от нуля поперечная компонента или нет.

7.2. Найти формулу преобразования величины $\frac{1-u_x/c}{1+u_x/c}$ .

Ответ. Из формулы (7.6) непосредственно следует

$$\frac{1-u_x'/c}{1+u_x'/c} = \frac{1+v/c}{1-v/c}\cdot\frac{1-u_x/c}{1+u_x/c} . \qquad (7.7)$$

Эта формула является обобщением формулы (6.7).

7.3. Найти общую формулу преобразования массы тела (или частицы).

Решение. Из первых формул (7.I) и (7.2) следует

$$m' = m \cdot \frac{\mu_1' + \mu_2'}{\mu_1 + \mu_2} . \tag{7.8}$$

Подставляя вместо $\mu_1'$ и $\mu_2'$ выражения этих величин по формуле (5.I7), находим

$$m' = m \cdot \frac{\mu_1 + \mu_2 - (\mu_1 - \mu_2) v/c}{(\mu_1 + \mu_2)\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{7.9}$$

Разделив числитель и знаменатель на $\mu_1 + \mu_2$ и воспользовавшись формулой (7.3), получаем

$$m' = \frac{m(1 - u_x v/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{7.I0}$$

Это и есть общая формула преобразования массы тела или частицы.

7.4. Найти общую формулу преобразования величины $\sqrt{1-u^2/c^2}$.

Решение. В формуле (7.I0) $m$ есть масса частицы, движущейся со скоростью $u$ ; $m'$ есть масса той же частицы, движущейся со скоростью $u'$ . Через массу покоя $m_0$ обе величины выражаются согласно формуле (5.9) так:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} ,$$

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} . \tag{7.II}$$

Подставляя эти выражения в формулу (7.I0), находим

$$\sqrt{1 - u'^2/c^2} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2} . \tag{7.I2}$$

Эта формула является обобщением формулы (6.8).

7.5. Найти формулу преобразования поперечной компоненты скорости.

Решение. Обозначим поперечную компоненту через $u_y$ (в другой системе $u'_y$ ). Переписав формулу (7.12) в виде

$$\sqrt{1-\frac{u_x'^2}{c^2}-\frac{u_y'^2}{c^2}}=\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}-\frac{u_y^2}{c^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2},$$

подставив в левую часть ее вместо $u'_x$ выражение формулы (6.6) и выразив $u'_y$ , находим

$$u'_y=\frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2}. \tag{7.13}$$

Такого же вида формула верна, очевидно, и для $z$-компоненты скорости:

$$u'_z=\frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2}. \tag{7.14}$$

7.6. Убедиться в том, что формулы обратного преобразования компонент скорости из штрихованной системы в нештрихованную имеют такой же вид, как и формулы прямого преобразования, с заменой лишь $v$ на $-v$ .

Решение. Формулы прямого преобразования суть

$$\begin{aligned} u'_x&=\frac{u_x-v}{1-u_x v/c^2},\\ u'_y&=\frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2},\\ u'_z&=\frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2}. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Выразив из них $u_x$, $u_y$, $u_z$ , находим, в самом деле, формулы

$$\begin{aligned} u_x&=\frac{u'_x+v}{1+u'_x v/c^2},\\ u_y&=\frac{u'_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+u'_x v/c^2},\\ u_z&=\frac{u'_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+u'_x v/c^2}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

7.7. Какова должна быть скорость $v$ штрихованной системы относительно нештрихованной, чтобы поперечные компоненты скорости оставались в преобразовании неизменными?

Решение. Чтобы было $u'_y = u_y$ и $u'_z = u_z$, должно быть, согласно второй и третьей формулам (7.I5), $\sqrt{1-v^2/c^2} = 1 - u_x v/c^2$. Но тогда, согласно формуле (7.I2), $u'^2 = u^2$ и, следовательно, $u'^2_x = u^2_x$. Отсюда $u'_x = -u_x$. Первая формула(7.I5) дает $\frac{u_x - v}{1-u_x v/c^2} = -u_x$, откуда $v = \frac{2u_x}{1+u_x^2/c^2}$. Тот же результат получается (не считая тривиального решения $v = 0$, когда $u'_x = u_x$), конечно, и непосредственно из равенства $\sqrt{1-v^2/c^2} = 1 - u_x v/c^2$.

7.8. Пусть на неподвижное (первичное) тело массы покоя $M_0$ падают под углом два одинаковых тела с массой $m$ и скоростью $u$ (рис. 7). В результате полностью неупругого соударения налетающие тела объединяются с первичным телом в одно вторичное тело массы покоя $M_{10}$, которая получает некоторую скорость $v$, направленную, очевидно, по биссектрисе угла между импульсами налетающих тел. Примем это направление за ось $x$. В другой инерциальной системе (см. рис. 8), движущейся относительно первой со скоростью $v$, первичное тело имеет скорость $-v$, а вторичное покоится; массы и скорости налетающих тел обозначим через $m'$ и $u'$. С помощью законов сохранения массы и импульса вывести вновь формулу (7.6).

Решение. В первой инерциальной системе сохранение массы и $x$-компоненты импульса выражается формулами

$$M_0 + 2m = M_{10}\gamma(v),$$

$$2mu_x = M_{10}\gamma(v)\,v, \qquad (7.I7)$$

а во второй (штрихованной) – формулами

$$M_0\gamma(v) + 2m' = M_{10},$$

$$2m'u_x' = M_0\gamma(v)v. \qquad (7.18)$$

Здесь, согласно уже известной зависимости массы от скорости,

$$\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Исключая из формул (7.17) $m$, а из формул (7.18) $m'$, находим

$$M_0 = M_{10}\gamma(v)(1 - v/u_x),$$

$$M_{10} = M_0\gamma(v)(1 + v/u_x'). \qquad (7.19)$$

Перемножая эти равенства и сокращая результат на $M_0M_{10}$, находим

$$(1 - v/u_x)(1 + v/u_x') = 1 - v^2/c^2. \qquad (7.20)$$

Выражая отсюда $u_x'$, приходим к формуле (7.6).

7.9. С помощью формул предыдущей задачи вывести вновь формулу преобразования массы (7.10).

Решение. Разделив вторую формулу (7.18) на вторую формулу (7.17), находим

$$m'u_x'/mu_x = M_0/M_{10} \qquad (7.21)$$

или, согласно первой формуле (7.19),

$$m'u_x'/mu_x = \gamma(v)(1 - v/u_x). \qquad (7.22)$$

Подставляя сюда $u_x' = \dfrac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}$ и $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, приходим к формуле (7.10).

7.10. Среда, показатель преломления которой равен $n$, движется равномерно со скоростью $\vec{v}$. Чему равна скорость света в этой среде в направлении, образующем с $\vec{v}$ угол $\alpha$ ?

Решение. Примем направление $\vec{v}$ за ось $x$, плоскость, в которой идет свет, за плоскость $xy$. В инерциальной системе, в которой среда покоится, скорость света равна

$c/n$. Обозначим ее компоненты через $u'_x$ и $u'_y$, так что

$$u'^2_x + u'^2_y = c^2/n^2 . \tag{7.23}$$

С другой стороны, $u'_x$ и $u'_y$ выражаются через компоненты

$$u_x = u\cos\alpha ,$$
$$u_y = u\sin\alpha \tag{7.24}$$

скорости света в данной системе, в которой среда движется, по формулам (7.I5) в виде

$$u'_x = \frac{u\cos\alpha - v}{1 - uv\cos\alpha/c^2} ,$$
$$u'_y = \frac{u\sin\alpha\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-uv\cos\alpha/c^2} . \tag{7.25}$$

Здесь $u$ есть искомая скорость света. Подставляя эти выражения в формулу (7.23) и решая полученное уравнение относительно $u$, находим

$$u = c\cdot\frac{\beta\cos\alpha(1-n^{-2})+\sqrt{(1-\beta^2)[n^{-2}-\beta^2(\sin^2\alpha+n^{-2}\cos^2\alpha)]}}{1-\beta^2(\sin^2\alpha+n^{-2}\cos^2\alpha)} , \tag{7.26}$$

где $\beta = v/c$.

## § 8. АБЕРРАЦИЯ СВЕТА

8.I. Убедиться в том, что формулы (7.I5) применимы также к компонентам скорости света.

Решение. Вывод формулы (7.6) (т.е. первой формулы (7.I5)) в задаче 7.I не требует, чтобы она относилась к скорости частицы, имеющей отличную от нуля массу покоя. Вместо двух таких частиц, превращающихся при соударении в два фотона, мы могли бы рассматривать превращение двух одинаковых фотонов в два других фотона. Выкладки в этом случае ни в чем не отличались бы от приведенных в решении задачи 7.I, только $m$ и $m'$ означали бы массы первичных фотонов в двух инерциальных системах, а вместо $u$ и $u'$ нужно взять $c$ и вместо $u_x$ и $u'_x$ – $c_x$ и $c'_x$. Следовательно, конечная формула (7.6) остается в силе и для скорости света. Равным образом в задаче 7.8 можно было бы вместо налетающих тел с конечной массой покоя рассматривать два одинаковых световых потока, поглощаемых одновременно телом. Для поперечных компонент тоже остается в силе вывод, данный в задаче 7.5, так как формула (7.12), на которой этот вывод основан, верна, очевидно, и для света (поскольку при $u=u'=c$ обе части обращаются в нуль). Следует, однако, отметить, что формулу (7.12) нельзя обосновывать для света способом, приведенным в решении задачи 7.4, так как формулы (7.11) к свету неприменимы. Но в этом нет и нужды.

Итак, для компонент скорости света имеем следующие формулы преобразования

$$\begin{aligned} c'_x &= \frac{c_x - v}{1 - c_x v/c^2}, \\ c'_y &= \frac{c_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - c_x v/c^2}, \\ c'_z &= \frac{c_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - c_x v/c^2}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Примечание 13. Подчеркнем, что при переходе из одной инерциальной системы в другую модуль (абс. величина) скорости света остается неизменным, хотя компоненты скорости меняются. Изменяется, следовательно, направление скорости. Это явление называется аберрацией света.

8.2. Показать, что при аберрации света изменяется только угол, образуемый скоростью света с относительной скоростью инерциальных систем, и вывести формулу преобразования этого угла.

Решение. Обозначив угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{v}$ (т.е., между скоростью света в первой системе и осью $x$) через $\vartheta$, а угол между векторами $\vec{c}'$ и $\vec{v}$ через $\vartheta'$, получим

$$\begin{aligned} c_x &= c\cos\vartheta, \\ c'_x &= c\cos\vartheta'. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Подставляя эти выражения в первую формулу (8.1), находим

$$\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta - v/c}{1 - (v/c)\cos\vartheta}. \tag{8.3}$$

Это и есть искомая формула. А так как $c'_y/c'_z = c_y/c_z$, то другой угол (азимут), определяющий направление, не изменяется. Таким образом, одна формула (8.3) заменяет все три формулы (8.I).

8.3. <u>Астрономической аберрацией</u> называется явление, состоящее в кажущемся изменении положения неподвижных звезд в течение года. Причиной этого является обусловленная годовым движением Земли аберрация света. Принимая земную орбиту за окружность, найти радиус аберрационного кружка, описываемого находящейся в полюсе эклиптики звездой.

<u>Решение</u>. Если звезда находится в полюсе эклиптики, то свет от нее идет в направлении, перпендикулярном орбитальной скорости Земли (см. рис. 9). Приняв в формуле (8.3) $\vartheta = 90^0$ и $v = 30$ км/с, находим $\cos\vartheta' = -v/c = -10^{-4}$. Отсюда следует, что луч от звезды отклоняется от перпендикуляра на угол $10^{-4} = 20{,}5''$. Поэтому звезда оказывается смещенной относительно своего истинного (наблюдаемого с Солнца) положения на угол $20{,}5''$ в направлении движения Земли. Так как это направление в течение года непрерывно изменяется, то изменяется и направление смещения. В результате звезда описывает на небесном своде кружок с радиусом $20{,}5''$.

8.4. Убедиться в том, что нерелятивистская теория, в которой скорость света подчиняется классической формуле преобразования скорости (3.I), дает для астрономической аберрации результат, практически неотличимый от релятивистского.

<u>Решение</u>. Так как по формуле (3.I), если принять направление $\vec{v}$ за ось $x$,

$$c'_x = c_x - v\ ,\qquad c'_y = c_y\ ,\qquad c'_z = c_z \tag{8.4}$$

и

$$c' = \sqrt{c^2 - 2c_x v + v^2}\ , \tag{8.5}$$

то

$$\cos\vartheta' = c'_x / c' = \frac{c_x - v}{\sqrt{c^2 - 2c_x v + v^2}}\ ,$$

откуда

$$\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta - v/c}{\sqrt{1 - 2(v/c)\cos\vartheta + (v/c)^2}}\ . \tag{8.6}$$

Так как в случае астрономической аберрации $v/c \ll 1$, то, приближенно,

$$\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta - v/c}{1 - (v/c)\cos\vartheta}\ , \tag{8.7}$$

что совпадает с релятивистской формулой (8.3).

8.5. Луч света падает под углом $\vartheta$ на плоское зеркало, движущееся со скоростью $v$ в направлении нормали, удаляясь от луча. Найти угол отражения $\vartheta_1$.

Решение. На рис. 10 ось $x$ взята в направлении движения зеркала, ось $y$ в плоскости падения луча. Преобразуя угол $\vartheta$ по формуле (8.3) в систему покоя зеркала, находим

$$\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta - v/c}{1 - (v/c)\cos\vartheta}\ .$$

Но в системе покоя зеркала угол отражения $\vartheta'_1$ равен углу падения:

$$\cos\vartheta'_1 = \frac{\cos\vartheta - v/c}{1 - (v/c)\cos\vartheta}\ .$$

С осью $x$ отраженный луч образует угол $180^0 - \vartheta'_1$ и его косинус равен $-\cos\vartheta'_1$. Преобразуя его обратно по той же формуле (8.3) в первоначальную систему, в которой зеркало движется, находим

$$\cos(180° - \vartheta_1) = \frac{-\cos\vartheta'_1 + v/c}{1 - (v/c)\cos\vartheta'_1}\ .$$

Подставляя сюда предыдущее выражение для $\cos\vartheta'_1$, получаем

$$\cos\vartheta_1 = \frac{(1 + v^2/c^2)\cos\vartheta - 2v/c}{1 - 2(v/c)\cos\vartheta + v^2/c^2}\ . \tag{8.8}$$

## § 9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАССЫ И ИМПУЛЬСА

9.1. Найти формулу преобразования массы любого объекта, движущегося с определенной скоростью (тела или светового потока).

Решение. Для тела или частицы мы имеем уже формулу (7.10), в которой, раскрыв скобки, заменим $mu_x = p_x$, где $p_x$ – $x$-компонента импульса. Та же формула верна и для света, как показано в решении задачи 8.1. Таким образом, искомая формула есть

$$m' = \frac{m - vp_x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} , \tag{9.1}$$

где $v$, как и раньше, есть скорость движения штрихованной инерциальной системы относительно нештрихованной, а ее направление взято за ось $x$.

9.2. Вывести формулы преобразования компонент импульса любого объекта, движущегося с определенной скоростью.

Решение. Искомые формулы получаются непосредственно умножением формулы (9.1) на формулы (7.15) (или в случае света, на формулы (8.1)). При этом следует переписать числитель выражения (9.1) в прежнем виде, как он был в формуле (7.10), так что множитель $1-u_x v/c^2$ (или $1-c_x v/c^2$) повсюду сократится. В результате находим

$$p'_x = \frac{p_x - mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} ,$$
$$p'_y = p_y ,$$
$$p'_z = p_z . \tag{9.2}$$

9.3. Из формулы (5.23), поскольку масса покоя инвариантна, следует, что

$$m_0^2 c^2 = m'^2 c^2 - \vec{p}'^2 = m^2c^2 - \vec{p}^2 . \tag{9.3}$$

Убедиться в этом непосредственно, подставляя в левую часть выражения $m'$, $p'_x$, $p'_y$, $p'_z$ из формул (9.I) и (9.2).

9.4. Показать, что величина $m_1 m_2 c^2 - \vec{p}_1\vec{p}_2$, где $m_1$, $m_2$ – массы, а $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ – импульсы двух объектов, инвариантна.

9.5. Показать, что инвариант $m_1 m_2 c^2 - \vec{p}_1\vec{p}_2$ неотрицателен.

<u>Решение</u>. Подставляя $\vec{p}_1 = m_1\vec{u}_1$ и $\vec{p}_2 = m_2\vec{u}_2$ и обозначая угол между импульсами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ через $\alpha$, находим

$$m_1 m_2 c^2 - \vec{p}_1\vec{p}_2 = m_1 m_2 c^2\left(1 - \frac{u_1 u_2}{c^2}\cos\alpha\right) \geqslant 0. \tag{9.4}$$

9.6. Показать, что формулы преобразования массы и импульса (9.I) и (9.2) применимы не только к отдельному объекту, но и к произвольной совокупности объектов, импульс которой равен векторной сумме импульсов отдельных объектов, а масса – сумме масс отдельных объектов.

<u>Решение</u>. Доказательство вытекает непосредственно из <u>линейности</u> формул (9.I) и (9.2). Переписав их с индексом $k$, нумерующим объекты

$$\begin{aligned} p'_{kx} &= \frac{p_{kx} - m_k v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ p'_{ky} &= p_{ky}, \\ p'_{kz} &= p_{kz}, \\ m'_k &= \frac{m_k - v p_{kx}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \tag{9.5}$$

и суммируя по $k$, находим для величин

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \sum_k \vec{p}_k, \\ m &= \sum_k m_k \end{aligned} \tag{9.6}$$

формулы преобразования того же вида

$$p'_x = \frac{p_x - mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$
$$p'_y = p_y ,$$
$$p'_z = p_z ,$$
$$m' = \frac{m - vp_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \qquad (9.7)$$

9.7. Убедиться непосредственно в том, что обратное преобразование из штрихованной системы в нештрихованную отличается от прямого преобразования только знаком скорости $v$ , т.е.

$$p_x = \frac{p'_x + m'v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$
$$p_y = p'_y ,$$
$$p_z = p'_z , \qquad (9.8)$$
$$m = \frac{m' + vp'_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

9.8. Два фотона с массами $\mu_1$ и $\mu_2$ ( $\mu_1 > \mu_2$ ) движутся в данной инерциальной системе в противоположных направлениях. Другая система движется параллельно импульсам фотонов. Какова должна быть ее скорость $v$ , чтобы массы фотонов были в ней равны? И чему они там равны?

Ответ. $v = c \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$ ; каждый фотон имеет массу $(\mu_1\mu_2)^{\frac{1}{2}}$.

9.9. Две частицы с массами покоя $m_{10}$ и $m_{20}$ движутся вдоль одной прямой друг другу навстречу. Массы их равны $m_1$ и $m_2$ . Найти массу $m$ второй частицы в той инерциальной системе, в которой первая неподвижна.

Ответ. $m = \frac{m_1 m_2 + \sqrt{(m_1^2 - m_{10}^2)(m_2^2 - m_{20}^2)}}{m_{10}}$ .

## § 10. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЦЕНТР МАСС

Принцип близкодействия является следствием невозможности мгновенной передачи действия на расстояние. Подобная передача означала бы бесконечную скорость передающего действие сигнала, между тем как максимальной возможной скоростью сигнала является скорость света (подробнее об этом см. в § 14). Поэтому мгновенное взаимодействие любого рода между двумя точечными объектами возможно только тогда, если они находятся в одной и той же точке. В этом и состоит принцип близкодействия.

10.1. Центром масс совокупности точечных объектов называется, как и в классической механике (см. формулу (1.26)), точка

$$\vec{r} = \frac{\sum_k m_k \vec{r}_k}{\sum_k m_k} . \tag{10.1}$$

Допуская возможность взаимодействия этих объектов друг с другом, но считая всю совокупность замкнутой (т.е. не взаимодействующей с окружением), найти скорость движения центра масс.

Решение. Скорость точки равна производной ее радиуса-вектора по времени. Обозначая ее через $\vec{u}$, находим

$$\vec{u} = \frac{\sum_k \vec{r}_k\, dm_k/dt}{\sum_k m_k} + \frac{\sum_k m_k\, d\vec{r}_k/dt}{\sum_k m_k} - \frac{\left(\sum_k dm_k/dt\right)\left(\sum_k m_k \vec{r}_k\right)}{\left(\sum_k m_k\right)^2} . \tag{10.2}$$

Последний член равен нулю в силу сохранения массы. Первый член тоже равен нулю по той же причине, если учесть вдобавок принцип близкодействия. В самом деле, изменение массы $dm_k/dt$ какого-либо объекта возможно только при его взаимодействии с другим объектом, масса которого изменяется на столько же в обратном направлении. Радиус-вектор в этот момент у обоих объектов один и тот же. Следовательно, два члена в сумме будут $\vec{r}_k\, dm_k/dt$ и $-\vec{r}_k\, dm_k/dt$. Они взаимно уничтожаются. То же верно и в случае одновременного взаимодействия более чем двух объектов. Все они должны находиться в одной и той же точке, а полное изменение их массы должно равняться нулю. Таким образом, в первом члене правой части формулы (10.2) все члены в сумме взаимно уничтожаются. В среднем члене $d\vec{r}_k/dt = \vec{u}_k$ есть скорость $k$-го объекта, а $\sum_k m_k d\vec{r}_k/dt$ есть полный импульс $\vec{p}$ совокупности. Итак, скорость центра масс равна

$$\vec{u} = \vec{p}/m , \tag{10.3}$$

где $m = \sum_k m_k$ – полная масса совокупности. Формула эта совпадает по виду с классической формулой (1.25).

Примечание 14. Центр масс, определяемый формулой (10.1), не является инвариантной точкой. В разных инерциальных системах он расположен различно относительно объектов совокупности.

10.2. Показать, что скорость центра масс вообще говоря меньше скорости света, будучи равна ей только в том случае, если все объекты движутся со скоростью света в одном и том же направлении.

Решение. Из формулы (10.3), переходя от векторов к их модулям, получаем неравенство

$$u \leqslant \frac{\sum_k m_k u_k}{\sum_k m_k} , \tag{10.4}$$

где знак равенства имеет место только в случае, если все скорости $\vec{u}_k$ однонаправленны. Выражение в правой части формулы (10.4) можно понимать как среднюю скорость объектов. Но так как $u_k \leqslant c$, то $\sum_k m_k u_k \leqslant c \sum_k m_k$, причем равенство имеет место только если все $u_k$ равны $c$. Отсюда и вытекает, что $u < c$, кроме случая, когда скорости всех объектов равны $c$ и имеют одно и то же направление. Лишь в этом особом случае $u = c$.

Иначе можно прийти к тому же выводу, взяв выражение

$$c^2\Big(\sum_k m_k\Big)^2 - \Big(\sum_k \vec{p}_k\Big)^2 ,$$

в силу формул (5.23) и (9.4) всегда неотрицательное, вообще говоря положительное и равное нулю только в случае, если скорости всех объектов равны $c$ и направлены одинаково. Но неравенство

$$c^2\left(\sum_k m_k\right)^2-\left(\sum_k \vec{p}_k\right)^2 \geqslant 0$$

равносильно неравенству $c^2-u^2 \geqslant 0$ (см.формулу (I0.3)), что и требовалось показать.

Примечание I5. Инерциальная система, в которой центр масс совокупности неподвижен, называется системой центра масс. Согласно задаче I0.2 система центра масс существует всегда, кроме тривиального случая, когда все объекты движутся со скоростью света в одном и том же направлении. Скорость системы центра масс относительно произвольной инерциальной системы совпадает со скоростью центра масс и равна, согласно формулам (I0.3),

$$\vec{v}=\vec{p}/m\ , \tag{I0.5}$$

где $\vec{p}$ и $m$ - полные импульс и масса совокупности. Полный импульс совокупности равен в системе центра масс, очевидно, нулю.

I0.3. Показать, что скорость центра масс (см. формулу (I0.3)) преобразуется при переходе из одной инерциальной системы в другую так же, как и скорость отдельного объекта (см.формулы (7.6), (7.I3) и (7.I4) или, для света, (8.I)).

Решение. Для компонентов скорости центра масс имеем в двух инерциальных системах выражения

$$u_x=p_x/m\ ,\quad u_y=p_y/m\ ,\quad u_z=p_z/m \tag{I0.6}$$

и

$$u'_x=p'_x/m'\ ,\quad u'_y=p'_y/m'\ ,\quad u'_z=p'_z/m'\ , \tag{I0.7}$$

причем штрихованная система движется относительно нештрихованной со скоростью $v$ в направлении оси $x$. Подставляя в правые части формул (10.7) выражения $p'_x$, $p'_y$, $p'_z$, $m'$, из формул (9.7), находим

$$
\begin{aligned}
u'_x &= \frac{p_x - mv}{m - vp_x/c^2}, \\
u'_y &= \frac{p_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{m - vp_x/c^2}, \qquad (10.8)\\
u'_z &= \frac{p_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{m - vp_x/c^2}.
\end{aligned}
$$

Разделив здесь числители и знаменатели на $m$, с учетом формул (10.6) находим

$$
\begin{aligned}
u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \\
u'_y &= \frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2}, \qquad (10.9)\\
u'_z &= \frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2}.
\end{aligned}
$$

Это и есть формулы преобразования компонентов скорости. Таким образом, скорость движения центра масс подчиняется действительно, обычным формулам преобразования скорости.

10.4. Показать, что величина $m^2c^2 - \vec{p}^{\,2}$, где $m$ и $\vec{p}$ – полные масса и импульс совокупности, инвариантна.

Решение. Для отдельного объекта инвариантность величины $m^2c^2 - \vec{p}^{\,2}$ получена в решении задачи 9.3 как следствие формул преобразования (9.1) и (9.2) массы и импульса. Но масса и импульс совокупности преобразуется по формулам того же вида (см. задачу 9.6). Следовательно, и для совокупности имеет место инвариантность:

$$m^2c^2 - \vec{p}^{\,2} = \text{inv}. \qquad (10.10)$$

Примечание 16. Величина

$$m_0 = (m^2 - \vec{p}^{\,2}/c^2)^{1/2}, \qquad (10.11)$$

где $m$ и $\vec{p}$ – масса и импульс совокупности, в силу формулы (10.10) инвариантная, называется <u>массой покоя совокупности</u>. Это понятие является обобщением понятия массы покоя отдельного объекта.

10.5. Показать, что масса покоя совокупности равна нулю, если центр масс движется со скоростью света, и равна массе совокупности в системе ее центра масс, если центр масс движется со скоростью, меньшей скорости света.

<u>Решение</u>. В первом случае, положив в формуле (10.3) $\vec{u}=\vec{c}$, находим $\vec{p}=m\vec{c}$; подстановка в формулу (10.11) дает $m_0 = 0$. Во втором случае в системе центра масс $\vec{p} = 0$ и формула (10.11) дает $m_0 = m$, что и требовалось показать.

10.6. Показать, что если масса покоя $m_0$ совокупности отлична от нуля, то она связана с ее массой формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \tag{10.12}$$

где $u$ – скорость центра масс.

<u>Решение</u>. Формула (10.12) получается путем исключения $\vec{p}$ из формул (10.3) и (10.11).

<u>Примечание 17</u>. Формула (10.12) тождественна по виду с формулой (5.9), выведенной для отдельного тела, и является ее обобщением.

10.7. Показать, что масса покоя совокупности не меньше суммы масс покоя составляющих совокупность объектов.

<u>Решение</u>. Требуется показать, что

$$m_0 \geqslant \sum_k m_{k0} . \tag{10.13}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $m_0 = 0$. В этом случае центр масс движется со скоростью света и все объекты движутся тоже со скоростью света в одном и том же направлении (см. задачи 10.2 и 10.5). Следовательно, все $m_{k0} = 0$ и формула(10.13) выполняется в виде равенства 0 = 0.

Пусть теперь $m_0 \neq 0$. Тогда существует система центра масс, в которой и рассмотрим соотношение между массами покоя отдельных объектов и массой покоя их совокупности. В силу инвариантности масс покоя результат будет верен независимо от такого конкретного выбора инерциальной системы. В системе центра масс

$$m_0 = m = \sum_k m_k \qquad \text{и} \qquad m_{k0} = (m_k^2 - \vec{p}_k^{\,2}/c^2)^{1/2}.$$

Следовательно, формула (10.13) принимает вид

$$\sum_k m_k \geqslant \sum_k (m_k^2 - \vec{p}_k^{\,2}/c^2)^{1/2}. \tag{10.14}$$

Так как это неравенство верно для каждого отдельного члена суммы, т.е. $m_k \geqslant (m_k^2 - \vec{p}_k^{\,2}/c^2)^{1/2}$, то оно верно и для всей суммы, что и требовалось показать. Равенство в формуле (10.13) получается только тогда, если все объекты совокупности в системе центра масс неподвижны или если все они движутся в любой инерциальной системе со скоростью света в одном и том же направлении. В остальных случаях масса покоя совокупности больше суммы масс покоя составляющих его объектов.

Примечание 18. Неравенство (10.13) выражает неаддитивность массы покоя. Напротив, масса и импульс – аддитивные величины.

## § 11. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СОУДАРЕНИЯ

Упругими соударениями называются в теории относительности соударения, в которых масса покоя сохраняется, а неупругими называются соударения, в которых масса покоя не сохраняется. При этом масса покоя учитывается отдельно для каждого объекта. Это определение упругости и неупругости кажется несогласным с нерелятивистским (см. примечание 2). На самом деле оба определения тождественны, как станет ясно в §13.

II.I. Два тела, движущиеся вдоль одной и той же прямой линии, испытывают упругое соударение, в котором каждое из них сохраняет свою массу покоя. После соударения тела движутся вдоль той же прямой. Заданы их начальные массы $M$ и $m$ и импульсы $P$ и $p$. Требуется найти их конечные массы $M_1$ и $m_1$ и импульсы $P_1$ и $p_1$.

<u>Решение</u>. Согласно законам сохранения массы и импульса

$$P+p=P_1+p_1 \tag{II.I}$$

и

$$M+m=M_1+m_1\ . \tag{II.2}$$

Сохранение массы покоя каждого из тел выражается формулами

$$M^2-P^2/c^2=M_1^2-P_1^2/c^2 \tag{II.3}$$

и

$$m^2-p^2/c^2=m_1^2-p_1^2/c^2\ . \tag{II.4}$$

Таким образом, мы имеем систему четырех уравнений (II.I) – (II.4) с четырьмя неизвестными $M_1$, $m_1$, $P_1$ и $p_1$. Введем взамен их неизвестные $x$ и $y$:

$$\begin{aligned} P_1&=P-x\,,\\ p_1&=p+x\,,\\ M_1&=M-y\,,\\ m_1&=m+y\,. \end{aligned} \tag{II.5}$$

Тогда уравнения (II.I) и (II.2) удовлетворяются, а остальные два уравнения получают вид

$$y^2-x^2/c^2-2My+2Px/c^2=0\,, \tag{II.6}$$

$$y^2-x^2/c^2+2my-2px/c^2=0\,. \tag{II.7}$$

Эта система имеет, кроме тривиального решения $x=y=0$, единственное решение

$$x = \frac{2(mP-Mp)(M+m)c^2}{(M+m)^2c^2-(P+p)^2}, \quad y = \frac{2(mP-Mp)(P+p)}{(M+m)^2c^2-(P+p)^2}; \tag{II.8}$$

подставляя эти выражения в формулы (II.5), находим

$$P_1 = P - \frac{2(mP-Mp)(M+m)c^2}{(M+m)^2c^2-(P+p)^2}, \tag{II.9}$$

$$p_1 = p + \frac{2(mP-Mp)(M+m)c^2}{(M+m)^2c^2-(P+p)^2} \tag{II.10}$$

$$M_1 = M - \frac{2(mP-Mp)(P+p)}{(M+m)^2c^2-(P+p)^2} \tag{II.11}$$

и

$$m_1 = m + \frac{2(mP-Mp)(P+p)}{(M+m)^2c^2-(P+p)^2}. \tag{II.12}$$

В частном случае, когда $P+p=0$, т. е. тела имеют равные и противоположные импульсы, решение сильно упрощается:

$$P_1 = -P, \quad p_1 = -p, \quad M_1 = M, \quad m_1 = m. \tag{II.13}$$

Это значит, что после соударения оба импульса обращаются в противоположные, а массы остаются неизменными. Это решение получается и непосредственно из уравнений (II.I) - (II.4): вычитая сначала (II.4) из (II.3), находим $M^2-m^2=M_1^2-m_1^2$; разделив затем это уравнение на (II.2), находим $M-m=M_1-m_1$; отсюда и из того же уравнения (II.2) следует $M_1=M$ и $m_1=m$; следовательно, согласно (II.3) и (II.4) $P_1^2=P^2$ и $p_1^2=p^2$, откуда, исключая тривиальный результат, имеем $P_1=-P$ и $p_1=-p$.

II.2. Решить предыдущую задачу путем перехода в систему центра масс.

Решение. Согласно формуле (I0.5) центр масс движется со скоростью

$$v = \frac{P+p}{M+m}. \tag{II.14}$$

Преобразуя по формулам (9.I) и (9.2) начальные массы и импульсы в систему центра масс, находим

$$P' = \frac{(mP - Mp)c}{\sqrt{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}}, \tag{II.15}$$

$$p' = -\frac{(mP - Mp)c}{\sqrt{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}}, \tag{II.16}$$

$$M' = \frac{M(M+m)c^2 - P(P+p)}{c\sqrt{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}} \tag{II.17}$$

и

$$m' = \frac{m(M+m)c^2 - p(P+p)}{c\sqrt{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}}. \tag{II.18}$$

Так как начальные импульсы в системе центра масс равны и противоположны, то применимо решение (II.13), т.е.

$$P_1' = -\frac{(mP - Mp)c}{\sqrt{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}}, \tag{II.19}$$

$$p_1' = \frac{(mP - Mp)c}{\sqrt{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}}, \tag{II.20}$$

$$M_1' = \frac{M(M+m)c^2 - P(P+p)}{c\sqrt{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}} \tag{II.21}$$

и

$$m_1' = \frac{m(M+m)c^2 - p(P+p)}{c\sqrt{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}}. \tag{II.22}$$

Наконец, преобразуем конечные массы и импульсы обратно в исходную инерциальную систему, положив в формулах (9.I) и (9.2) $v = -\frac{P+p}{M+m}$. В результате получим уже известные формулы (II.9) - (II.12).

II.3. Электрон и позитрон движутся вдоль одной и той же прямой линии навстречу друг другу со скоростями $u_1$ и $u_2$. Массы покоя $m_0$ их одинаковы. При соударении происходит аннигиляция, т. е. превращение этих частиц в два фотона. Найти массы фотонов $\mu_1$ и $\mu_2$, предполагая, что они вылетают вдоль той же прямой.

Решение. Сохранение массы и импульса выражается формулами

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-u_1^2/c^2}}+\frac{m_0}{\sqrt{1-u_2^2/c^2}}=\mu_1+\mu_2 \tag{II.23}$$

и

$$\frac{m_0 u_1/c}{\sqrt{1-u_1^2/c^2}}-\frac{m_0 u_2/c}{\sqrt{1-u_2^2/c^2}}=\mu_1-\mu_2 . \tag{II.24}$$

Решая эти уравнения относительно $\mu_1$ и $\mu_2$, находим

$$\mu_1=\frac{m_0}{2}\left(\sqrt{\frac{1+u_1/c}{1-u_1/c}}+\sqrt{\frac{1-u_2/c}{1+u_2/c}}\right), \qquad \mu_2=\frac{m_0}{2}\left(\sqrt{\frac{1-u_1/c}{1+u_1/c}}+\sqrt{\frac{1+u_2/c}{1-u_2/c}}\right) . \tag{II.25}$$

II.4. На неподвижный протон с массой покоя $M_0$ налетает другой протон с массой $M$. Если $M$ достаточно велико, то возможно рождение протон-антипротонной пары (причем первоначальные протоны остаются). Масса покоя антипротона равна массе покоя протона. Чему равна наименьшая необходимая для рождения пары масса налетающего протона?

Решение. Четыре частицы - три протона и один антипротон - должны после рождения пары иметь одну и ту же скорость, если масса налетающего протона должна быть возможно мала. В самом деле, если хотя бы одна из частиц имела большую скорость, чем остальные, то на это пошла бы дополнительная масса. Так как массы покоя всех четырех частиц равны, то при равных скоростях их импульсы тоже равны. Начальный импульс равен импульсу налетающего протона. При массе $M$ он выражается как $c\sqrt{M^2-M_0^2}$ (см. формулу (5.23)). В силу сохранения импульса каждая из четырех частиц имеет импульс, равный четверти начального, т.е. $(c/4)\sqrt{M^2-M_0^2}$. Отсюда по той же формуле (5.23) находим массу каждой частицы. Она равна $\sqrt{M_0^2+\frac{1}{16}(M^2-M_0^2)}$ . Следовательно, в силу сохранения массы,

$$M+M_0=4\sqrt{M_0^2+\frac{1}{16}(M^2-M_0^2)}\ . \tag{II.26}$$

Решая это уравнение относительно $M$ , находим

$$M=7M_0\ . \tag{II.27}$$

Такова наименьшая масса налетающего протона, необходимая для рождения протон-антипротонной пары. Соответствующая скорость, вычисляемая из формулы $\sqrt{1-u^2/c^2}=1/7$ , равна $(4\sqrt{3}/7)c\approx 0{,}99c$ .

Иначе можно решить задачу путем перехода в систему центра масс. Скорость системы центра масс равна по формуле (IO.5)

$$v=\frac{c\sqrt{M^2-M_0^2}}{M+M_0}=c\sqrt{\frac{M-M_0}{M+M_0}}\ . \tag{II.28}$$

Преобразуя массы обоих первичных протонов по формуле (9.I) в систему центра масс, находим, что они, как и должно быть, равны, а именно

$$M'=\sqrt{\frac{M_0(M+M_0)}{2}}\ . \tag{II.29}$$

Если $M$ возможно мало, то четыре частицы должны после рождения пары остаться в системе центра масс неподвижными. Их полная масса равна $4M_0$ , которую следует приравнять начальной массе $2M'$. Получается уравнение

$$4M_0=\sqrt{2M_0(M+M_0)}\ , \tag{II.30}$$

откуда вновь следует $M=7M_0$.

II.5. Убедиться в том, что решения задач 2.3 - 2.5, полученные в рамках нерелятивистской механики, верны также с релятивистской точки зрения.

Ответ. Это вытекает из того, что в этих задачах нет нужды учитывать зависимость массы тела от скорости.

II.6. На движущееся тело падают с двух сторон перпендикулярно к направлению его движения два световых потока с равными и противоположными импульсами и равными массами $\mu$. Кроме того, сзади на тело падает световой поток с массой $\mu_1$. После поглощения всех трех потоков тело сохраняет свою скорость. Найти ее.

<u>Ответ</u>. $\frac{c\mu_1}{\mu_1+2\mu}$. Этот ответ тоже является одинаково релятивистским и нерелятивистским.

II.7. Тело с массой покоя $m_0$ движется со скоростью $u$. Перпендикулярно к направлению движения на него падают с двух противоположных сторон два световых потока с равными и противоположными импульсами и равными массами $\mu$. Какова будет масса покоя $m_1$ тела и его скорость $u_1$ после поглощения им обоих потоков?

<u>Ответ</u>. $m_1 = \sqrt{m_0^2 + 4\mu^2 + 4m_0\mu(1-u^2/c^2)^{-1/2}}$;

$$u_1 = u\left[1 + (2\mu/m_0)(1-u^2/c^2)^{1/2}\right]^{-1}.$$

Обратим внимание на то, что выражение $u_1$ совпадает с нерелятивистским ответом (см.задачу 2.6), если заменить здесь $m_0(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ на $m$ (начальную массу тела) и $\mu$ на $p/c$. Но формула для $m_1$ является чисто релятивистской.

II.8. Каково наименьшее значение $\mu$ массы фотона, могущего при соударении с неподвижным электроном превратиться в электронно-позитронную пару? Первый электрон остается. Масса покоя и электрона, и позитрона равна $m_0$.

<u>Ответ</u>. $\mu = 4m_0$.

II.9. Каково наименьшее значение $\mu$ массы фотона, могущего при соударении с неподвижным протоном превратиться в электронно-позитронную пару? Протон остается. Масса покоя протона равна $M_0$, электрона и позитрона $m_0$.

<u>Ответ</u>. $\mu = 2m_0(1 + m_0/M_0)$.

II.10. Каково наименьшее значение $m$ массы пиона, могущего при соударении с неподвижным протоном превратиться в протонно-антипротонную пару? Первый протон остается. Масса покоя пиона равна $m_0$, протона и антипротона $M_0$.

Ответ. $m = \dfrac{8M_0^2 - m_0^2}{2M_0}$.

II.11. Покоящееся тело массы покоя $m_0$ поглотило сразу четыре световых потока: в двух противоположных направлениях с равными массами $\mu$, а в двух других противоположных направлениях с массами $\mu_1$ и $\mu_2$, причем $\mu_1 > \mu_2$. С какой скоростью $u$ движется тело после этого?

Ответ. $u = \dfrac{(\mu_1 - \mu_2)c}{m_0 + 2\mu + \mu_1 + \mu_2}$.

II.12. Тело массы покоя $M_0$, двигаясь со скоростью $u$, испускает в направлении своего движения частицу со скоростью $v$ относительно себя, в результате чего останавливается. Чему равна масса покоя $m_0$ испущенной частицы? Чему равна масса покоя $M_{10}$ тела после испускания частицы?

Ответ. $m_0 = \dfrac{M_0 u \sqrt{1 - v^2/c^2}}{u + v}$; $M_{10} = \dfrac{M_0 v \sqrt{1 - u^2/c^2}}{u + v}$.

II.13. Частица массы покоя $m_0$, двигаясь со скоростью $u$, испускает в противоположную движению сторону фотон с массой $\mu$. Найти скорость $u_1$ частицы после этого и ее массу покоя $m_{10}$. Найти также верхний предел для $\mu$.

Ответ. $u_1 = \dfrac{m_0 u + \mu c\sqrt{1 - u^2/c^2}}{m_0 - \mu\sqrt{1 - u^2/c^2}}$;

$$m_{10} = \left(m_0^2 - 2m_0\mu\sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}\right)^{1/2};$$

$$\mu < \frac{m_0}{2}\sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}.$$

II.I4. Частица массы покоя $m_0$, двигаясь со скоростью $u$, испускает в направлении своего движения фотон, в результате чего получает скорость $u_1$ в обратном направлении. Чему равна масса $\mu$ фотона и масса покоя $m_{10}$ частицы после испускания фотона?

Ответ. $\mu = \frac{m_0(u+u_1)}{(c+u_1)\sqrt{1-u^2/c^2}}$; $m_{10} = m_0\sqrt{\frac{(1-u/c)(1-u_1/c)}{(1+u/c)(1+u_1/c)}}$.

II.I5. Покоящийся атом массы покоя $m_0$ испустил в двух противоположных направлениях фотоны с массами $\mu_1$ и $\mu_2$ $(\mu_1>\mu_2)$. Найти массу покоя $m_{10}$ атома после испускания фотонов и его скорость $u$.

Ответ. $m_{10}=\sqrt{(m_0-2\mu_1)(m_0-2\mu_2)}$; $u=\frac{(\mu_1-\mu_2)c}{m_0-\mu_1-\mu_2}$.

II.I6. Покоящаяся частица массы покоя $m_0$ распалась на три фотона, импульсы которых образуют между собой углы $90^0$, $120^0$ и $150^0$. Найти массы $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ фотонов.

Ответ. $\mu_1 = m_0(1-\frac{\sqrt{3}}{3})$; $\mu_2 = \frac{m_0}{2}(\sqrt{3}-1)$; $\mu_3 = \mu_1/2$.

II.I7. Покоящийся атом с массой покоя $m_0$ испустил фотон, после чего его масса покоя стала равной $m_{10}$. Найти массу $\mu$ фотона и скорость $u$ атома после испускания.

Ответ. $\mu = \frac{m_0^2-m_{10}^2}{2m_0}$; $u=\frac{c(m_0^2-m_{10}^2)}{m_0^2+m_{10}^2}$.

II.I8. Две одинаковых частицы движутся с одинаковыми скоростями $u$ под углом. Испытав соударение, они превращаются в два фотона, разлетающиеся в той же плоскости. Найти соотношение, связывающее углы $\varphi_1$ и $\varphi_2$, образуемые импульсами фотонов с биссектрисой угла между импульсами частиц. Оба угла считать острыми.

Решение. Примем биссектрису угла между импульсами частиц за ось $x$, а плоскость импульсов за плоскость $xy$ (см. рис. II). Массы частиц обозначим через $m$, массы фотонов через $\mu_1$, $\mu_2$. Сохранение массы и компонентов импульса записывается в виде

$$2m = \mu_1 + \mu_2 ,$$
$$2mu_x = (\mu_1 \cos\varphi_1 - \mu_2 \cos\varphi_2) c , \qquad (II.31)$$
$$\mu_1 \sin\varphi_1 - \mu_2 \sin\varphi_2 = 0 .$$

Исключая из этих уравнений $\mu_1$ и $\mu_2$, причем $m$ также исключается, находим искомое соотношение

$$(1 - u_x/c) \tan(\varphi_2/2) = (1 + u_x/c) \tan(\varphi_1/2). \qquad (II.32)$$

II.19. Частица с массой покоя $M_0$ распадается в покое на две частицы с массами покоя $m_{10}$ и $m_{20}$. Найти массы $m_1$ и $m_2$ вторичных частиц и модуль их импульса $p$.

Ответ. $m_1 = \dfrac{M_0^2 + m_{10}^2 - m_{20}^2}{2M_0}$; $m_2 = \dfrac{M_0^2 - m_{10}^2 + m_{20}^2}{2M_0}$;

$$p = (c/2M_0)\sqrt{(M_0 + m_{10} + m_{20})(M_0 - m_{10} - m_{20})(M_0 + m_{10} - m_{20})(M_0 - m_{10} + m_{20})} .$$

II.20. Частица распадается в покое на три одинаковых частицы с равными по модулю импульсами. Масса покоя первичной частицы равна $M_0$, вторичных – $m_0$. Найти модуль импульса $p$ каждой из вторичных частиц.

Ответ. $p = (c/3)\sqrt{M_0^2 - 9m_0^2}$ .

II.21. Частица с массой покоя $M_0$ распадается на две частицы с массами покоя $m_{10}$ и $m_{20}$ ( $m_{10} > m_{20}$ ). Импульсы вторичных частиц по модулю равны и взаимно перпендикулярны. Найти массу $M$ первичной частицы и ее скорость $u$ .

Ответ.

$$M=\sqrt{M_0^2-m_{10}^2-m_{20}^2+\sqrt{M_0^4-2(m_{10}^2+m_{20}^2)M_0^2+2(m_{10}^4+m_{20}^4)}}\ ;$$

$$u=\frac{c\sqrt{M_0^4-(m_{10}^2+m_{20}^2)M_0^2+(m_{10}^2-m_{20}^2)^2-M_0^2\sqrt{M_0^4-2(m_{10}^2+m_{20}^2)M_0^2+2(m_{10}^4+m_{20}^4)}}}{m_{10}^2-m_{20}^2}.$$

II.22. Та же задача, но вторичные частицы имеют равные массы покоя $m_0$ .

Ответ. $M=\sqrt{2M_0^2-4m_0^2}$ ; $u=\dfrac{c\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{\sqrt{2M_0^2-4m_0^2}}$ .

II.23. $\pi^0$-мезон распадается на лету на два фотона. Найти наибольшее и наименьшее значение угла $\theta$ , образуемого импульсами фотонов. Чему равен этот угол, если импульсы фотонов равны по модулю? Найти также зависимость отношения модулей импульсов фотонов от $\theta$ и установить наибольшее и наименьшее значения этого отношения. Скорость $\pi^0$-мезона равна $u$ .

Ответ. $\theta_{max}=180^\circ$ ; $\theta_{min}=2\arccos(u/c)$ ;

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{\sin(\theta/2)\pm\sqrt{\sin\frac{\theta+\theta_{min}}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\theta_{min}}{2}}}{\sin(\theta/2)\mp\sqrt{\sin\frac{\theta+\theta_{min}}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\theta_{min}}{2}}},$$

где $p_1$ и $p_2$ - модули импульсов фотонов. Если $p_1=p_2$ , то $\theta=\theta_{min}$ ; $(p_1/p_2)_{max}=\dfrac{1+u/c}{1-u/c}$ ; $(p_1/p_2)_{min}=\dfrac{1-u/c}{1+u/c}$ .

II.24. Частица с массой покоя $M_0$ распадается на лету на две одинаковых частицы с массой покоя $m_0$ и с массами $m_1$ и $m_2$ . Найти угол $\theta$ между импульсами вторичных частиц и скорость $u$ первичной частицы.

Ответ. $\cos\theta=\dfrac{2(m_1m_2+m_0^2)-M_0^2}{2\sqrt{(m_1^2-m_0^2)(m_2^2-m_0^2)}}$ ;

$$u=\frac{c\sqrt{(m_1+m_2)^2-M_0^2}}{m_1+m_2}.$$

II.25. Частица движется со скоростью $u$ и распадается на две одинаковые частицы с массой покоя $m_0$ и массами $m_1$ и $m_2$ ( $m_1 > m_2$ ). Найти массу покоя $M_0$ первичной частицы и углы $\theta_1$ и $\theta_2$, образуемые импульсами вторичных частиц с импульсом первичной, а также угол $\theta$ между импульсами вторичных частиц.

<u>Ответ</u>. $M_0 = (m_1 + m_2)\sqrt{1 - u^2/c^2}$ ;

$$\cos\theta_1 = \frac{(1+u^2/c^2)m_1 - (1-u^2/c^2)m_2}{2(u/c)\sqrt{m_1^2 - m_0^2}}; \quad \cos\theta_2 = \frac{(1+u^2/c^2)m_2 - (1-u^2/c^2)m_1}{2(u/c)\sqrt{m_2^2 - m_0^2}};$$

$$\cos\theta = \frac{2(m_1 m_2 + m_0^2) - (m_1 + m_2)^2(1-u^2/c^2)}{2\sqrt{(m_1^2 - m_0^2)(m_2^2 - m_0^2)}}.$$

II.26. В результате соударения фотона массы $m$ с неподвижным электроном с массой покоя $M_0$ фотон отклоняется на угол $\gamma$, а электрон получает некоторую скорость (эффект Комптона). Найти массы $M$ электрона и $m_1$ фотона после соударения и угол $\varphi$, образуемый скоростью электрона с начальной скоростью фотона.

<u>Ответ</u>. $m_1 = \dfrac{m}{1 + (2m/M_0)\sin^2(\gamma/2)}$ ;

$$M = M_0\left(1 + \frac{2(m^2/M_0^2)\sin^2(\gamma/2)}{1 + (2m/M_0)\sin^2(\gamma/2)}\right); \quad \tan\varphi = \frac{\operatorname{ctg}(\gamma/2)}{1 + m/M_0}.$$

## § 12. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

<u>Сила</u>, действующая на тело (или вообще на любой объект, обладающий массой и импульсом), определяется как производная его импульса по времени:

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt\,. \tag{12.1}$$

Таким образом, сила есть мера несохранения импульса отдельного объекта. Уравнение (12.1) является основным уравнением динамики. Это – формула второго закона Ньютона.

Так как импульс и масса взаимосвязаны, то с изменением импульса изменяется, вообще говоря, и масса. Поэтому возникает вопрос о мере изменения массы.

12.1. Показать, что при неизменной массе покоя

$$dm/dt = \vec{F}\vec{u}/c^2, \qquad (12.2)$$

где $\vec{u}$ – скорость объекта.

Решение. Импульс и масса связаны формулой

$$\vec{p}^{\,2} = (m^2 - m_0^2)c^2 \qquad (12.3)$$

(см. 5.23)). Дифференцируя ее по времени, находим

$$\vec{p}\, d\vec{p}/dt = c^2 m\, dm/dt,$$

откуда

$$dm/dt = c^{-2}(\vec{p}/m)\, d\vec{p}/dt.$$

Но так как $\vec{p}/m = \vec{u}$, то, заменяя также $d\vec{p}/dt$ на $\vec{F}$, находим

$$dm/dt = c^{-2}\vec{F}\vec{u},$$

что и требовалось доказать.

Примечание 19. Величина $\vec{F}\vec{u}$ называется мощностью силы, или, иначе, работой, совершаемой силой в единицу времени.

12.2. Выразить мощность через изменение скорости тела.

Решение. Подставляя в формулу (12.1) $m\vec{u}$ вместо $\vec{p}$, находим

$$\vec{F} = m\, d\vec{u}/dt + \vec{u}\, dm/dt. \qquad (12.4)$$

Умножая это равенство скалярно на $\vec{u}$, находим

$$\vec{F}\vec{u} = m\vec{u}\, d\vec{u}/dt + u^2 dm/dt. \qquad (12.5)$$

Заменяя здесь в последнем члене, согласно формуле (I2.2), $dm/dt$ на $\vec{F}\vec{u}/c^2$ и выражая $\vec{F}\vec{u}$, находим

$$\vec{F}\vec{u}=\frac{m\vec{u}\,d\vec{u}/dt}{1-u^2/c^2}\,. \tag{I2.6}$$

Это и есть выражение мощности через изменение скорости.

Примечание 20. Из формул (I2.2) и (I2.4) вытекает

$$dm/dt=\frac{m\vec{u}\,d\vec{u}/dt}{c^2-u^2}\,. \tag{I2.7}$$

Эта формула может быть получена и непосредственно из формулы зависимости массы от скорости.

I2.3. Найти формулу, связывающую силу с ускорением.

Решение. Ускорение $\vec{a}$ равно производной скорости по времени:

$$\vec{a}=d\vec{u}/dt\,. \tag{I2.8}$$

Подставляя в формулу (I2.4) $\vec{a}$ вместо $d\vec{u}/dt$ и $\vec{F}\vec{u}/c^2$ вместо $dm/dt$, находим

$$\vec{F}=m\vec{a}+c^{-2}\vec{F}\vec{u}\cdot\vec{u}\,. \tag{I2.9}$$

Отсюда

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}-c^{-2}\vec{F}\vec{u}\cdot\vec{u}}{m} \tag{I2.10}$$

или, несколько иначе,

$$\vec{a}=\frac{(\vec{F}-c^{-2}\vec{F}\vec{u}\cdot\vec{u})\sqrt{1-u^2/c^2}}{m_0}\,. \tag{I2.11}$$

I2.4. Выразить силу через ускорение.

Решение. Умножив формулу (I2.9) скалярно на $\vec{u}$, находим

$$\vec{F}\vec{u}=m\vec{a}\vec{u}+c^{-2}\vec{F}\vec{u}\cdot u^2.$$

Отсюда выражаем $\vec{F}\vec{u}$:

$$\vec{F}\vec{u}=\frac{m\vec{a}\vec{u}}{1-u^2/c^2}\,. \tag{I2.12}$$

Подставляя это выражение в ту же формулу (I2.9), находим

$$\vec{F} = m\left(\vec{a} + \frac{\dot{\vec{u}}\cdot\vec{u}/c^2}{1-u^2/c^2}\right). \qquad (12.13)$$

Иначе эту формулу можно написать в виде

$$\vec{F} = \frac{m_0(\vec{a} + c^{-2}(\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{a})))}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}. \qquad (12.14)$$

I2.5. Найти формулы, связывающие силу с ускорением, в двух частных случаях: а) в случае продольной силы, когда $\vec{F}$ параллельно $\vec{u}$, и б) в случае поперечной силы, когда $\vec{F}$ перпендикулярно $\vec{u}$.

Решение. Из формулы (I2.II) находим

$$\vec{a}_{\parallel} = (\vec{F}_{\parallel}/m_0)(1-u^2/c^2)^{3/2} \qquad (12.15)$$

и

$$\vec{a}_{\perp} = (\vec{F}_{\perp}/m_0)(1-u^2/c^2)^{1/2}. \qquad (12.16)$$

Примечание 2I. На основании формул (I2.I5) и (I2.I6) величину $\frac{m_0}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}$ называют иногда продольной массой, а величину $\frac{m_0}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}$ поперечной массой. Однако эти названия устарели. Истинная масса, как сохраняющаяся величина, только одна.

I2.6. В общем случае сила образует со скоростью тела некоторый угол $\varphi$. Найти угол $\psi$ между силой и ускорением.

Решение. Умножая формулу (I2.II) скалярно на $\vec{F}$ и выражая скалярные произведения векторов через их модули и косинусы углов между ними, находим

$$Fa\cos\psi = \frac{F^2(1-\frac{u^2}{c^2}\cos^2\varphi)\sqrt{1-u^2/c^2}}{m_0},$$

откуда

$$\cos\psi = (F/am_0)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\cos^2\varphi\right)\sqrt{1-u^2/c^2} \;. \tag{12.17}$$

Первый множитель $F/am_0$ зависит здесь еще от $\varphi$. В самом деле, возводя ту же формулу (12.11) в квадрат, находим

$$a^2 = \frac{F^2(1-u^2/c^2)\left(1-\frac{2u^2\cos^2\varphi}{c^2}+\frac{u^4\cos^2\varphi}{c^4}\right)}{m_0^2} \tag{12.18}$$

Выражая отсюда $F/am_0$ и подставляя в формулу (12.17), находим окончательно

$$\cos\psi = \frac{1-(u^2/c^2)\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\frac{2u^2\cos^2\varphi}{c^2}+\frac{u^4\cos^2\varphi}{c^4}}} \;. \tag{12.19}$$

12.7. Убедиться в том, что сила и ускорение параллельны (т.е. $\psi = 0^0$) только в случаях продольной и поперечной силы (т.е. если $\varphi = 0^0$, $\varphi = 180^0$ или $\varphi = 90^0$).

Решение. Приравняв в формуле (12.19) $\cos\psi = 1$, находим $\cos\varphi = \pm 1$ или $\cos\varphi = 0$, что и требовалось показать.

12.8. Найти формулу мощности силы в случае, если масса покоя не остается постоянной.

Решение. Дифференцирование формулы (12.3) дает

$$\vec{p}\,d\vec{p}/dt = c^2 m\,dm/dt - c^2 m_0\,dm_0/dt \;. \tag{12.20}$$

Отсюда, заменяя $\vec{p} = m\vec{u}$ и $d\vec{p}/dt = \vec{F}$, находим

$$\vec{F}\vec{u} = c^2 dm/dt - (m_0/m)c^2 dm_0/dt \,. \tag{12.21}$$

Заменяя еще $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$, находим окончательно

$$\vec{F}\vec{u} = c^2 dm/dt - c^2\sqrt{1-u^2/c^2}\,dm_0/dt \,. \tag{12.22}$$

12.9. Так как масса, масса покоя и скорость взаимосвязаны, то из трех производных $dm/dt$, $dm_0/dt$ и $d\vec{u}/dt$ независимы только две. Поэтому формулу мощности (I2.22) можно выразить еще в двух видах – через производные $dm/dt$ и $d\vec{u}/dt$ и через производные $dm_0/dt$ и $d\vec{u}/dt$. Найти обе эти формулы.

Решение. Формула массы $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ дает

$$(1-u^2/c^2)dm/dt - (1-u^2/c^2)^{1/2}dm_0/dt - c^{-2}m\vec{u}d\vec{u}/dt = 0. \qquad (I2.23)$$

Исключая с помощью этой формулы из выражения (I2.22) $dm_0/dt$ или $dm/dt$, находим

$$\vec{F}\vec{u} = m\vec{u}d\vec{u}/dt + u^2 dm/dt \qquad (I2.24)$$

и

$$\vec{F}\vec{u} = \frac{m_0\vec{u}d\vec{u}/dt}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} + \frac{u^2 dm_0/dt}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \qquad (I2.25)$$

Отметим, что формула (I2.24) совпадает с (I2.5), что и понятно, так как последняя не зависит от того, постоянна ли масса покоя или нет.

I2.IO. В начальный момент на покоящееся тело начала действовать постоянная сила. Масса покоя тела остается неизменной. Найти скорость тела, его массу и пройденный им путь в зависимости от времени.

Решение. Движение, очевидно, прямолинейно. Из основного уравнения динамики (I2.I) следует, что импульс изменяется пропорционально времени:

$$p = Ft. \qquad (I2.26)$$

Отсюда по формуле (5.23) находим массу:

$$m = m_0\sqrt{1 + F^2t^2/m_0^2c^2} \qquad (I2.27)$$

и скорость $u = p/m$:

$$u = \frac{Ft/m_0}{\sqrt{1 + F^2t^2/m_0^2c^2}}. \qquad (I2.28)$$

Интегрируя скорость по времени, находим пройденный путь:

$$x = (m_0 c^2/F)\left(\sqrt{1+F^2t^2/m_0^2c^2}-1\right) . \qquad (12.29)$$

На рис. 12 показан график пути. Он является гиперболой, отчего прямолинейное движение под действием постоянной силы называется <u>гиперболическим</u>.

12.11. Показать, что световой сигнал, пущенный вдогонку за гиперболически движущимся телом из той же точки, откуда движение началось, спустя время $m_0c/F$ после начала движения, никогда тело не догонит.

<u>Решение</u>. Пройденный сигналом путь к моменту $t$ равен $c(t-m_0c/F)$. Утверждение вытекает из неравенства

$$x-c(t-m_0c/F) = ct\left(\sqrt{1+m_0^2c^2/F^2t^2}-1\right) > 0 .$$

12.12. В начальный момент на покоящееся тело начала действовать в постоянном направлении сила, возрастающая пропорционально массе тела. Масса покоя остается неизменной. Найти скорость тела, его массу и пройденный им путь в зависимости от времени.

<u>Решение</u>. Движение, очевидно, прямолинейно. Обозначив силу как

$$F = mg , \qquad (12.30)$$

где $g$ постоянно, находим уравнение движения в виде

$$dp/dt = m_0 g\sqrt{1+p^2/m_0^2c^2} . \qquad (12.31)$$

Интегрируя, находим

$$p = m_0 c\, sh(gt/c) . \qquad (12.32)$$

Отсюда

$$m = m_0 ch(gt/c) . \qquad (12.33)$$

Далее, скорость $u=p/m$ выражается как

$$u = c \cdot th(gt/c) . \qquad (12.34)$$

Пройденный путь обозначим через $z$ . Интегрируя, находим

$$z = (c^2/g) \ln ch (gt/c) . \qquad (12.35)$$

12.13. Сила постоянного направления действует на фотон, будучи пропорциональна его массе и образуя с его импульсом в начальный момент угол $\varphi$ .Найти уравнение траектории фотона и его массу в зависимости от времени.

Решение. Примем направление силы за ось $z$ , а плоскость, в которой фотон движется, за плоскость $xz$ Основное уравнение (12.1), разложенное по компонентам, будет

$$dp_z/dt = mg , \qquad dp_x/dt=0 , \qquad (12.36)$$

где $g$ - постоянная, а $m$ - масса фотона.Так как $m = p/c = c^{-1}\sqrt{p_x^2+p_z^2}$, то перепишем уравнения в виде

$$dp_z/dt = (g/c)\sqrt{p_x^2+p_z^2} ,$$

$$dp_x/dt = 0 . \qquad (12.37)$$

Интегрируя второе уравнение, имеем

$$p_x = p_1 \sin\varphi , \qquad (12.38)$$

где $p_1$ - начальное значение модуля импульса. Подставляя это выражение в первое уравнение (12.37) и интегрируя, находим

$$p_z = p_1[sh(gt/c) + \cos\varphi \, ch(gt/c)] . \qquad (12.39)$$

Из формул (12.38) и (12.39) находим

$$p = p_1 [ch(gt/c) + \cos\varphi \, sh(gt/c)] . \qquad (12.40)$$

Отсюда масса фотона равна

$$m = m_1 [ch(gt/c) + \cos\varphi \, sh(gt/c)] , \qquad (12.41)$$

где $m_1 = p_1/c$ – начальная масса. Компоненты скорости фотона, согласно формулам (12.38), (12.39) и (12.41), равны

$$c_x = \frac{c\sin\varphi}{ch(gt/c) + \cos\varphi\, sh(gt/c)},$$
$$c_z = \frac{c[sh(gt/c) + \cos\varphi\, ch(gt/c)]}{ch(gt/c) + \cos\varphi\, sh(gt/c)}. \tag{12.42}$$

Интегрируя, находим зависимость координат от времени:

$$x = (2c^2/g)\, arctan\, \frac{\sin\varphi\, th(gt/2c)}{1 + \cos\varphi\, th(gt/2c)},$$

$$z = (c^2/g)\ln[ch(gt/c) + \cos\varphi\, sh(gt/c)], \tag{12.43}$$

причем обе координаты в начальный момент приняты равными нулю. Исключая $t$, получаем уравнение траектории фотона в виде

$$z = -(c^2/g)\ln[\cos(gx/c^2) - ctg\varphi \sin(gx/c^2)]. \tag{12.44}$$

В частном случае $\varphi = 0$ эта формула непосредственно неприменима, но из формул (12.43) вытекает $x = 0$, $z = ct$, т.е. фотон движется прямолинейно. Зависимость массы от времени и от длины пути выражается в этом случае формулой

$$m = m_1 exp(gt/c) = m_1 exp(gz/c^2). \tag{12.45}$$

Этот результат совпадает по форме с вытекающей из формул (12.33) и (12.35) формулы зависимости массы тела от пройденного пути, если подставить туда вместо массы покоя тела начальную массу фотона.

12.14. Как и в задаче 12.12, тело движется под действием силы, пропорциональной массе, но имеет в начальный момент импульс, равный по модулю $p_1$ и направленный под прямым углом к силе. Найти скорость и массу тела в зависимости от времени и уравнение его траектории.

Решение. Эта задача сходна с предыдущей, но вместо фотона имеем тело с ненулевой массой покоя $m_0$, а угол $\varphi$ принят равным $90^0$. Ход решения остается тем же. Ось $z$ возьмем в направлении силы, ось $x$ в направлении начального импульса тела. Уравнения движения тела будут

$$dp_z/dt = m_0 g\sqrt{1+\frac{p_z^2+p_x^2}{m_0^2c^2}}\,,$$
$$dp_x/dt = 0. \tag{I2.46}$$

Интегрируя второе уравнение, находим

$$p_x = p_1\,. \tag{I2.47}$$

Подставляя в первое уравнение и обозначая начальную массу тела через

$$m_1 = m_0\sqrt{1+p_1^2/m_0^2c^2}\,, \tag{I2.48}$$

находим

$$dp_z/dt = m_1 g\sqrt{1+p_z^2/m_1^2c^2}\,. \tag{I2.49}$$

Интегрируя, находим

$$p_z = m_1 c\,sh(gt/c)\,. \tag{I2.50}$$

Из формул (I2.47) и (I2.50) находим массу:

$$m = m_1 ch(gt/c)\,. \tag{I2.51}$$

Следовательно, компоненты скорости суть

$$u_x = p_x/m = u_1 ch^{-1}(gt/c)\,,$$
$$u_z = p_z/m = c\cdot th(gt/c)\,, \tag{I2.52}$$

где $u_1 = p_1/m_1$ – начальная скорость. Интегрируя, находим

$$x = (2cu_1/g)\,arctan\big(th(gt/2c)\big) \tag{I2.53}$$

и

$$z = (c^2/g)\ln ch(gt/c)\,, \tag{I2.54}$$

причем $x(0) = 0$ и $z(0) = 0$. Исключая $t$, находим уравнение траектории

$$z = -(c^2/g)\ln\cos(gx/cu_1)\,. \tag{I2.55}$$



ю

Примечание 22. В задачах 12.12 - 12.14 рассмотрены три случая движения в поле, которое можно толковать как однородное гравитационное поле, поскольку отличительной особенностью гравитационной силы является то, что она пропорциональна массе.

12.15. На заряженную частицу с зарядом $e$ действует в электромагнитном поле сила

$$\vec{F} = (e/\varepsilon_0)\left(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{u} \times \vec{H})\right), \tag{12.56}$$

где $\vec{u}$ - скорость частицы, $\varepsilon_0$ - электрическая постоянная, а $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - напряженности электрического и магнитного полей, измеренные в кулонах на квадратный метр. Найти движение частицы в однородном электрическом поле, если она имеет начальный импульс $p_1$ в перпендикулярном полю направлении.

Решение. Примем направление поля за ось $z$, начальную скорость за ось $x$. Тогда уравнения движения будут

$$dp_z/dt = eE/\varepsilon_0,$$
$$dp_x/dt = 0. \tag{12.57}$$

Интегрируя, находим

$$p_z = eEt/\varepsilon_0,$$
$$p_x = p_1. \tag{12.58}$$

Отсюда находим по формуле (5.23) массу

$$m = \sqrt{m_1^2 + e^2E^2t^2/\varepsilon_0^2c^2}, \tag{12.59}$$

где $m_1$ - начальная масса. Далее компоненты скорости $u_z = p_z/m$ и $u_x = p_x/m$ выражаются в виде

$$u_z = \frac{eEt/\varepsilon_0}{\sqrt{m_1^2 + e^2E^2t^2/\varepsilon_0^2c^2}},$$
$$u_x = \frac{p_1}{\sqrt{m_1^2 + e^2E^2t^2/\varepsilon_0^2c^2}}. \tag{12.60}$$

Интегрируя вновь, находим координаты в зависимости от времени (считая их в начальный момент равными нулю)

$$z = \frac{\varepsilon_0 m_1 c^2}{eE}\left(\sqrt{1+\frac{e^2E^2t^2}{\varepsilon_0^2 m_1^2 c^2}} - 1\right),$$
$$x = \frac{\varepsilon_0 p_1 c}{eE}\ln\left(\frac{eEt}{\varepsilon_0 m_1 c} + \sqrt{1+\frac{e^2E^2t^2}{\varepsilon_0^2 m_1^2 c^2}}\right). \qquad (12.61)$$

Отсюда, исключая $t$, находим уравнение траектории

$$z = (2\varepsilon_0 m_1 c^2/eE)\,\mathrm{sh}^2(eEx/2\varepsilon_0 p_1 c). \qquad (12.62)$$

12.16. Найти движение заряженной частицы в однородном магнитном поле, если начальный импульс $p_1$ образует с магнитным полем угол $\alpha$.

Решение. Примем направление магнитного поля за ось $z$, а ось $x$ выберем так, чтобы $y$-компонента начального импульса была равна нулю. Тогда компоненты начального импульса будут

$$p_{1x} = p_1\sin\alpha,$$
$$p_{1y} = 0,$$
$$p_{1z} = p_1\cos\alpha, \qquad (12.63)$$

а уравнения движения, согласно общей формуле (12.56), будут

$$dp_x/dt = eu_yH/\varepsilon_0 c,$$
$$dp_y/dt = -eu_xH/\varepsilon_0 c,$$
$$dp_z/dt = 0. \qquad (12.64)$$

Заменяя в первых двух уравнениях $u_y = dy/dt$ и $u_x = dx/dt$ и интегрируя все три уравнения, находим

$$p_x = (eH/\varepsilon_0 c)(y - y_1) + p_1\sin\alpha,$$
$$p_y = -(eH/\varepsilon_0 c)(x - x_1), \qquad (12.65)$$
$$p_z = p_1\cos\alpha,$$

где $x_1, y_1$ – начальные координаты. Масса остается в течение движения неизменной, так как работа магнитной силы $\vec{F}\vec{u} = \frac{e}{\varepsilon_0}(\vec{u}\times\vec{H})\vec{u}$ тождественно равна нулю. Поэтому и импульс и скорость по модулю постоянны. Первые два уравнения (I2.65) можно переписать тогда в виде

$$dx/dt = (eH/\varepsilon_0 mc)(y-y_1) + u\sin\alpha,$$
$$dy/dt = -(eH/\varepsilon_0 mc)(x-x_1), \qquad (12.66)$$

где $m$ – масса и $u = p_1/m$ – модуль скорости. Исключая из этой системы $y$ или $x$, находим

$$d^2x/dt^2 + \omega^2(x-x_1) = 0,$$
$$d^2y/dt^2 + \omega^2(y-y_1) = -u\omega\sin\alpha, \qquad (12.67)$$

где

$$\omega = eH/\varepsilon_0 mc. \qquad (12.68)$$

Эти уравнения являются уравнениями гармонических колебаний. Вместе они определяют круговое движение с постоянной скоростью. Интегрируя, с учетом начальных условий имеем

$$x - x_1 = R\sin\omega t,$$
$$y - y_1 = R(\cos\omega t - 1), \qquad (12.69)$$

где

$$R = u\sin\alpha/\omega = \varepsilon_0 mcu\sin\alpha/eH. \qquad (12.70)$$

Положим $x_1 = 0$, $y_1 = R$. Тогда центр окружности лежит в начале координат:

$$x = R\sin\omega t,$$
$$y = R\cos\omega t, \qquad (12.71)$$

а $R$ и $\omega$ получают смысл радиуса окружности и угловой скорости. Эта окружность является проекцией траектории на плоскость $xy$. Для движения вдоль оси $z$ имеем третье уравнение (I2.65), из которого следует

$$z = u\cos\alpha\cdot t. \qquad (12.72)$$

Таким образом, траектория является винтовой линией, шаг которой есть

$$h = 2\pi u \cos\alpha/\omega = 2\pi \varepsilon_0 mcu \cos\alpha/eH . \tag{12.73}$$

Отношение шага к радиусу получается отсюда и из формулы (12.70) в виде

$$h/R = 2\pi \,\mathrm{ctg}\,\alpha . \tag{12.74}$$

## § 13. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭНЕРГИЯ. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МАССЫ И ЭНЕРГИИ

13.1. Найти работу $A$, совершаемую силой, когда она действует на тело от состояния покоя до произвольного состояния движения. Массу покоя тела считать неизменной.

Решение. Искомая работа выражается интегралом

$$A = \int_0^t \vec{F}\vec{u}\,dt , \tag{13.1}$$

где нижний предел 0 означает, что момент, когда тело покоилось, принят за начало отсчета времени. Далее, так как, согласно формуле (12.2), $\vec{F}\vec{u} = c^2 dm/dt$, то

$$A = c^2 \int dm ,$$

т. е.

$$A = c^2(m - m_0) = m_{кин} c^2 . \tag{13.2}$$

13.2. Обобщить формулу (13.2) на случай, когда тело в начальный момент не покоится.

Ответ.

$$A = c^2(m_2 - m_1) , \tag{13.3}$$

где $m_1$ и $m_2$ - значения массы в начале и в конце.

Примечание 23. Формула (13.3), в отличие от формулы (13.2), является и в том смысле более общей, что она применима не только к имеющим ненулевую массу покоя телам, но и к объектам, имеющим нулевую массу покоя (например, к свету). Такие объекты, как известно, покоиться не могут; следовательно, формула (13.2) к ним неприменима. Но на них тоже могут действовать силы (см., например, задачу 12.13), изменяющие, согласно формулам (12.1) и (12.2), их импульс и массу.

13.3. Величина

$$(m-m_0)c^2 = m_{кин}c^2 \tag{13.4}$$

называется кинетической энергией $T$ тела или частицы. Найти зависимость кинетической энергии от скорости.

Решение. Согласно формуле (5.9)

$$T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-1\right). \tag{13.5}$$

13.4. Найти приближенную формулу кинетической энергии, верную при $u \ll c$.

Решение. Разлагая выражение (13.5) в ряд по степеням до первого неисчезающего члена находим

$$T \approx mu^2/2, \tag{13.6}$$

что совпадает с нерелятивистским выражением кинетической энергии. Тот же результат вытекает и прямо из формулы (5.26).

Примечание 24. Понятие кинетической энергии применимо и к объектам с нулевой массой покоя, только формула (13.6) в этом случае неприменима (о зависимости от скорости вообще не может быть речи, поскольку скорость равна всегда $c$). Но формула (13.4) дает при $m_0 = 0$

$$T = mc^2. \tag{13.7}$$

13.5. Закон сохранения массы означает, в силу несохранения массы покоя, несохранение кинетической массы и , следовательно, несохранение кинетической энергии. Обобщить понятие энергии так, чтобы энергия была сохраняющейся величиной, а кинетическая энергия представляла собой род энергии.

Решение. Сделать энергию сохраняющейся величиной возможно только определив ее как величину, универсально эквивалентную массе:

$$E = mc^2 . \tag{13.8}$$

Это означает введение, наряду с кинетической энергией, энергии покоя

$$E_0 = m_0 c^2 , \tag{13.9}$$

причем полная энергия $E$ равна сумме энергии покоя и кинетической энергии:

$$E = E_0 + T . \tag{13.10}$$

У объектов с нулевой массой покоя $E_0 = 0$ и $E = T$. Ни $E_0$, ни $T$ в отдельности не сохраняются, как не сохраняются в отдельности ни $m_0$ , ни $m_{кин}$ ; но сумма обеих величин, т.е. энергия $E$ (или эквивалентная ей масса $m$ ) сохраняется.

Примечание 25. Теперь ясно, что данное в § II определение упругости и неупругости процесса тождественно с употребительным в нерелятивистской механике. В самом деле, сохранение или несохранение массы покоя равносильно сохранению или несохранению кинетической массы, т.е., в силу эквивалентности массы и энергии, сохранению или несохранению кинетической энергии.

13.6. Атом находится в возбужденном состоянии и энергия возбуждения равна $\Delta E$ (т.е. масса покоя атома больше его массы покоя в основном состоянии на $\Delta E/c^2$ ). С какой скоростью $u$ должен возбужденный атом двигаться для того, чтобы испустить, переходя в основное состояние, в направлении движения фотон с энергией $\Delta E$ ? Какова будет скорость атома $u'$ после излучения? Масса покоя атома в основном состоянии равна $m_0$ .

Решение. Эту задачу, как и все другие подобные задачи, можно было бы сформулировать и решить без всякого упоминания об энергии. Для этого было бы достаточно заменить везде энергию эквивалентной ей массой. Задача решалась бы тогда на основе законов сохранения массы и импульса по образцу задач § II. Однако здесь мы перешли к языку энергетического описания, подчиняясь традиции, господствующей в атомной физике. Вместо масс мы должны теперь ввести эквивалентные энергии. Согласно законам сохранения энергии и импульса

$$\frac{m_0c^2+\Delta E}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\Delta E+\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \tag{I3.II}$$

и

$$\frac{(m_0c^2+\Delta E)u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=c\Delta E+\frac{m_0c^2u'}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} . \tag{I3.I2}$$

Решая эту систему относительно $u$ и $u'$ , находим

$$\begin{aligned}\frac{u}{c}&=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1+3\alpha/4}{1+3\alpha/2+5\alpha^2/8} ,\\ \frac{u'}{c}&=-\frac{\alpha}{2}\;\frac{1+\alpha/4}{1+\alpha/2+\alpha^2/8} ,\end{aligned} \tag{I3.I3}$$

где

$$\alpha=\Delta E/m_0c^2 . \tag{I3.I4}$$

Так как фактически всегда $\alpha\ll 1$ , то, приближенно,

$$\begin{aligned}\frac{u}{c}&\approx\frac{\alpha}{2} ,\\ \frac{u'}{c}&\approx-\frac{\alpha}{2} .\end{aligned} \tag{I3.I5}$$

13.7. Если две или несколько частиц связаны в составную частицу, то масса покоя последней меньше суммы масс покоя составных частей. Разность называется <u>дефектом масс</u>, а эквивалентная дефекту масс энергия называется <u>энергией связи</u>. Так, массу покоя атома водорода в основном состоянии можно выразить в виде $M_0+m_0-I/c^2$, где $M_0$ и $m_0$ - массы покоя протона и электрона, а $I$ - энергия связи. Чему равна наименьшая энергия $\varepsilon$ фотона, могущего, поглотившись в покоящемся атоме, разорвать связь между протоном и электроном, т.е. вызвать ионизацию атома? Какова скорость $u$, с которой движутся в этом случае протон и электрон после ионизации?

<u>Решение.</u> Согласно законам сохранения энергии (массы) и импульса

$$M_0c^2+m_0c^2-I+\varepsilon=\frac{(M_0+m_0)c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{13.16}$$

и

$$\frac{\varepsilon}{c}=\frac{(M_0+m_0)u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{13.17}$$

Решая эту систему относительно $\varepsilon$ и $u$, находим

$$\varepsilon=\frac{I(1-\alpha/2)}{1-\alpha}, \tag{13.18}$$

$$\frac{u}{c}=\frac{\alpha(1-\alpha/2)}{1-\alpha+\alpha^2/2},$$

где

$$\alpha=\frac{I}{(M_0+m_0)c^2}. \tag{13.19}$$

Здесь $\alpha\ll 1$. С точностью первого порядка относительно $\alpha$

$$\varepsilon\approx I(1+\alpha/2),$$

$$u/c\approx\alpha. \tag{13.20}$$

13.8. Ядерная энергия представляет собой освобождающуюся в ядерных превращениях энергию связи ядер. Найти энергию, освобождающуюся при превращении I г дейтерия в гелий, зная, что ядро гелия состоит из двух ядер дейтерия; масса покоя ядра дейтерия равна в атомных единицах массы 2,0136, а масса покоя ядра гелия в тех же единицах 4,0026. Найти также количество образовавшегося гелия.

<u>Ответ.</u> Гелия образуется 993,9 мг; энергии освобождается $5{,}5.10^{11}$ Дж.

13.9. Найти массу света, излучаемого Солнцем в год, зная, что на I $м^2$ поверхности, перпендикулярной на Земле к солнечным лучам, падает в секунду 1400 Дж энергии излучения.

<u>Ответ.</u> $1{,}4.10^{14}$ Мг.

## § 14. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ВРЕМЕНИ. СОБСТВЕННОЕ ВРЕМЯ

Элементарное <u>событие</u> характеризуется кинематически точкой, <u>где</u> оно произошло, и моментом, <u>когда</u> оно произошло. Координаты точки и момент времени являются координатами события. Если у двух событий все координаты равны, то события совпадают, т.е. являются одним и тем же событием. Если же события различны, то они должны быть разобщены или в пространстве, или во времени, или в том и другом. Каждая пара событий характеризуется, следовательно, пространственным <u>расстоянием</u> и <u>промежутком времени</u> между ними. Обе эти величины относительны. Если расстояние равно нулю, то события называются <u>одноместными</u>; если промежуток времени равен нулю, то события называются <u>одновременными</u>. Одноместность и одновременность тоже относительные характеристики.

14.I. Показать, что не всякие два события можно сделать путем выбора подходящей инерциальной системы одноместными, и вывести критерий, указывающий, в каком случае это возможно.

Решение. Пусть два события происходят в некоторой инерциальной системе в моменты $t_1$ и $t_2$ в точках $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (причем $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$, т.е. события не одноместны). Вообразим сигнал, идущий прямолинейно и равномерно от первого события ко второму, т.е. отправляющийся из точки $\vec{r}_1$ в момент $t_1$ и прибывающий в точку $\vec{r}_2$ в момент $t_2$. Такой сигнал возможен в виде реального объекта только при условии

$$\frac{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}{t_2-t_1} \leqslant c\ , \qquad (14.1)$$

где в левой части стоит скорость сигнала. Притом в случае равенства возможен только световой сигнал. Если же имеем неравенство, то сигналом может служить любое тело, движущееся со скоростью, меньшей скорости света. С этим телом можно связать инерциальную систему, в которой очевидно, события будут одноместны. Таким образом, события можно сделать одноместными только при условии

$$\frac{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}{t_2-t_1} < c\ . \qquad (14.2)$$

Иначе этот критерий можно записать в виде

$$(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2 < 0\ . \qquad (14.3)$$

14.2. Световой сигнал испускается неподвижным телом А в направлении неподвижного тела В и достигает его за время $t$. Чему равен промежуток времени $t'$ между отправлением и прибытием сигнала в другой инерциальной системе, движущейся относительно первой в направлении сигнала со скоростью $v$ ?

Решение. В другой инерциальной системе оба тела движутся со скоростью $v$ в направлении, обратном сигналу. Пусть телом В является зеркало, отражающее сигнал обратно к телу А. На рис. 13 $A_1$ есть положение тела А в момент отправления сигнала, $A_2$ – положение его в момент прибытия отраженного сигнала, В – положение зеркала в момент отражения. В первой инерциальной системе, где тела А и В покоятся, прямой и отраженный сигналы идут одинаковое время $t$. В другой инерциальной системе времена их неодинаковы. Мы можем выразить искомое время прямого сигнала $t'$ в виде

$$t' = t\varphi(v), \tag{14.4}$$

где $\varphi(v)$ – пока неизвестная функция скорости. Ясно только, что эта функция должна удовлетворять равенству

$$\varphi(-v)\,\varphi(v) = 1, \tag{14.5}$$

так как умножение на $\varphi(-v)$ означает переход обратно в первую систему (ср. с функцией $f(u)$ в § 5 и формулу (14.5) с формулой (5.12)). Так как вторая инерциальная система движется в направлении, обратном направлению отраженного сигнала, то последний идет время $t\varphi(-v)$. Полное время обоих сигналов (от $A_1$ к В и от В к $A_2$) равно, следовательно, $t\varphi(v) + t\varphi(-v)$. За это время тело А прошло со скоростью $v$ расстояние $A_1A_2$; следовательно, $A_1A_2 = vt[\varphi(v)+\varphi(-v)]$. С другой стороны, $A_1A_2$ равно разности расстояний $BA_2$ и $A_1B$, первое из которых световой сигнал прошел за время $t\varphi(-v)$, а второе – за время $t\varphi(v)$. Скорость сигнала в обоих направлениях равна $c$. Следовательно,

$$A_1A_2 = BA_2 - A_1B = ct\,[\varphi(-v) - \varphi(v)] .$$

Приравнивая оба выражения для $A_1A_2$, находим (по сокращении на $t$)

$$v[\varphi(v) + \varphi(-v)] = c[\varphi(-v) - \varphi(v)] . \tag{14.6}$$

Отсюда

$$(1+v/c)\,\varphi(v) = (1-v/c)\,\varphi(-v) . \tag{14.7}$$

Умножая на $\varphi(v)$ в силу равенства (14.5) имеем

$$\varphi^2(v) = \frac{1-v/c}{1+v/c} ,$$

откуда

$$\varphi(v) = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \; . \qquad (14.8)$$

Итак,

$$t' = t\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \; . \qquad (14.9)$$

Эта формула преобразует промежуток времени между двумя событиями, состоящими в отправлении светового сигнала и в его прибытии, если скорость $v$ другой системы направлена в ту же сторону.

14.3. Промежуток времени между двумя событиями в инерциальной системе, в которой они одноместны (если, конечно, такая система для данной пары событий существует), называется промежутком <u>собственного времени</u> между этими событиями. Вывести формулу, связывающую промежуток собственного времени с промежутком времени в любой другой инерциальной системе.

<u>Решение</u>. Пусть даны в какой-либо инерциальной системе два одноместных события. Обозначим промежуток времени между ними в этой системе (т.е. промежуток собственного времени) через $\tau_2 - \tau_1$. Поставим на расстоянии $(c/2)(\tau_2 - \tau_1)$ от точки, где происходят события, зеркало. Тогда световой сигнал, испущенный в момент первого события к зеркалу, отразившись, возвращается обратно в момент второго события. Если время сигнала к зеркалу обозначим через $t$, то время обратного сигнала равно тоже $t$, так что

$$\tau_2 - \tau_1 = 2t \, . \qquad (14.10)$$

Перейдем в другую инерциальную систему, движущуюся со скоростью $v$ по направлению к зеркалу. В ней время прямого сигнала равно

$$t' = t\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \qquad (14.11)$$

(см. формулу (I4.9)), а время обратного -

$$t'' = t\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \;. \qquad (I4.I2)$$

Следовательно, промежуток времени между отправлением и прибытием сигнала равен в другой системе

$$t_2 - t_1 = t' + t'' = \frac{2t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \;. \qquad (I4.I3)$$

Отсюда, в силу формулы (I4.I0),

$$\tau_2 - \tau_1 = (t_2 - t_1)\sqrt{1-v^2/c^2} \;. \qquad (I4.I4)$$

Это и есть формула, выражающая промежуток собственного времени между двумя событиями через промежуток времени между теми же событиями в другой инерциальной системе, в которой события разноместны, причем $v$ есть относительная скорость этих двух инерциальных систем.

I4.4. Два фотона движутся один за другим вдоль одной и той же прямой на расстоянии $l$ друг от друга. Найти расстояние $l'$ между ними в другой инерциальной системе, движущейся в том же направлении со скоростью $v$.

Решение. Пусть фотоны проходят в своем движении мимо неподвижного точечного тела. Промежуток времени между прохождениями равен

$$\tau = l/c \;. \qquad (I4.I5)$$

Это - промежуток собственного времени. В другой инерциальной системе, движущейся в том же направлении, что и фотоны, тело движется фотонам навстречу со скоростью $v$; следовательно, промежуток времени между прохождениями равен

$$t = \frac{l'}{c+v} \;. \qquad (I4.I6)$$

С другой стороны, согласно формуле (I4.I4),

$$\tau = t\sqrt{1-v^2/c^2} \;;$$

следовательно,
$$\frac{l}{c}=\frac{l'\sqrt{1-v^2/c^2}}{c+v}.$$
Отсюда
$$l'=l\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}. \qquad (14.17)$$

14.5. Собственное время между двумя неодноместными событиями измеряется часами, движущимися равномерно и прямолинейно от одного события к другому, ибо в системе покоя этих часов события одноместны. Выразить собственное время $\tau_2-\tau_1$ через промежуток времени $t_2-t_1$ и расстояние $\vec{r}_2-\vec{r}_1$ между событиями в любой инерциальной системе.

Решение. Скорость часов, движущихся инерциально от одного события к другому, равна
$$\vec{v}=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t_2-t_1}. \qquad (14.18)$$
Подставляя это выражение в формулу (14.14), находим
$$\tau_2-\tau_1=\sqrt{(t_2-t_1)^2-c^{-2}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2}. \qquad (14.19)$$

14.6. Источник света, движущийся со скоростью $v$, испускает фотоны в направлении своего движения через равные промежутки времени $\Delta t$. Найти расстояние между двумя последовательными фотонами в системе покоя источника.

Решение. В данной инерциальной системе, в которой источник движется со скоростью $v$, расстояние между последовательными фотонами равно, очевидно, $(c-v)\Delta t$, так как за время $\Delta t$ предыдущий фотон удаляется от источника на расстояние $c\Delta t$, тогда как сам источник продвигается на расстояние $v\Delta t$. Преобразуя это расстояние по формуле (14.17) в систему покоя источника, находим $c\Delta t\sqrt{1-v^2/c^2}$. Тот же результат получим иначе, преобразовав сначала время $\Delta t$ в систему покоя источника, т.е. найдя собственное время между двумя последовательными испусканиями фотонов. По формуле (14.14) оно равно $\Delta t\sqrt{1-v^2/c^2}$. Отсюда расстояние между фотонами равно $c\Delta t\sqrt{1-v^2/c^2}$ .

14.7. Источник света движется инерциально со скоростью $v$ по направлению к неподвижному зеркалу, плоскость которого перпендикулярна к скорости. В момент, когда источник находится на расстоянии $\ell$ от зеркала, он испускает в направлении движения к зеркалу световой сигнал. Через какое время отраженный сигнал вернется к источнику?

Решение. Время прямого сигнала в пути равно $\ell/c$. За это время расстояние источника до зеркала уменьшится на $\ell v/c$ и станет равным $\ell(1-v/c)$. Отраженный сигнал идет навстречу источнику; расстояние между зеркалом и источником уменьшается на $c+v$ в единицу времени; следовательно, сигнал проходит обратный путь до встречи с источником за время $\frac{\ell(1-v/c)}{c+v}$. Полное время равно $\ell/c+\frac{\ell(1-v/c)}{c+v}=\frac{2\ell}{c+v}$.

14.8. Источник света неподвижен, а зеркало движется к нему инерциально со скоростью $v$, причем плоскость зеркала перпендикулярна к скорости. В момент, когда зеркало находится на расстоянии $\ell$ от источника, последний посылает к зеркалу световой сигнал. Через какое время отраженный сигнал вернется к источнику?

Решение. Прямой сигнал идет время $\frac{\ell}{c+v}$ и проходит путь до встречи с зеркалом, равный $\frac{\ell c}{c+v}$, тогда как зеркало проходит путь $\frac{\ell v}{c+v}$. Обратный сигнал проходит расстояние $\frac{\ell c}{c+v}$ за время $\frac{\ell}{c+v}$. Следовательно, искомое время равно $\frac{2\ell}{c+v}$ .

Примечание 26. Ответы двух последних задач совпадают, что может показаться противоречащим формуле собственного времени (14.14). В самом деле, в задаче 14.8 события отправления и возврата сигнала одноместны, а в задаче 14.7 – неодноместны. Между тем различие состоит, по-видимому, только в различии инерциальных систем. Переход от задачи 14.7 к задаче I4.8 равносилен, как кажется, переходу из системы покоя зеркала в систему покоя источника. Однако, следует учесть, что расстояние от источника до зеркала не одно и то же в обеих задачах. Чтобы оно было одно и то же, в задаче I4.8 $\ell$ следует заменить на $\ell\sqrt{1-v^2/c^2}$ (см.задачу I6.9). Следовательно, ответ имел бы тогда вид $\frac{2\ell\sqrt{1-v^2/c^2}}{c+v}$, что согласуется с формулой собственного времени.

I4.9. Мюон, время жизни которого в покое равно $2{,}2.10^{-6}$ с, движется со скоростью $0{,}96c$. Найти расстояние, которое он успеет пройти до распада.

Ответ. 2260 м.

I4.I0. Часы движутся прямолинейно и равномерно со скоростью $0{,}8c$ на расстояние $3.10^8$ км. Найти время этого движения, измеренное этими часами самими.

Ответ. 750 с.

I4.II. Двое часов движутся навстречу друг другу прямолинейно со скоростями $0{,}8c$ и $0{,}6c$. В момент, когда расстояние между ними равно $6{,}3.10^8$км, их показания установлены равными. Найти разность их показаний при встрече.

Ответ. 5 минут.

I4.I2. $\pi$-мезон, время жизни которого в покое равно $2{,}6.10^{-8}$ с, пролетел 55 метров, после чего распался. Найти его скорость.

Ответ. $0{,}99c$.

I4.I3. Мюон пролетел со скоростью $0{,}6c$ 500 метров и распался. Найти время его жизни в покое.

Ответ. $2{,}22.10^{-6}$ с.

14.14. В начальный момент из одной и той же точки начали равномерное движение в одном и том же направлении зеркало и часы. Скорость зеркала равна $u$, часов $v$, причем $u>v$. Плоскость зеркала перпендикулярна к направлению движения. В момент, когда часы показывают $t$, от них послан к зеркалу световой сигнал. Какое показание будет на часах в момент возврата отраженного сигнала?

<u>Ответ</u>. $\dfrac{t(1+u/c)(1-v/c)}{(1-u/c)(1+v/c)}$.

14.15. Неподвижный источник света испускает через равные промежутки времени в определенном направлении фотоны – $N$ фотонов в секунду. Наблюдатель движется навстречу фотонам со скоростью $v$. Сколько фотонов $N'$ в секунду встретит (по своим часам) этот наблюдатель?

<u>Ответ</u>. $N'=N\sqrt{\dfrac{1+v/c}{1-v/c}}$.

14.16. Двое часов неподвижны друг относительно друга и в системе покоя синхронизованы. В другой инерциальной системе они движутся одни за другими вдоль одной прямой линии со скоростью $v$, сохраняя неизменным расстояние $\ell$ между собой. В том же направлении мимо них пролетает фотон. Показания часов в моменты пролета мимо них фотона равны $t_1$ и $t_2$. Чему равна разность $t_2-t_1$?

<u>Ответ</u>. $t_2-t_1=\dfrac{\ell}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

14.17. Из двух точек, расстояние между которыми равно $\ell$, одновременно вылетают навстречу друг другу часы и фотон. Скорость часов равна $v$. Сколько времени пройдет на этих часах до встречи с фотоном?

<u>Ответ</u>. $(\ell/c)\sqrt{\dfrac{1-v/c}{1+v/c}}$.

14.18. Два фотона движутся вдоль одной и той же прямой один за другим на расстоянии $l$ друг от друга. Навстречу им движутся со скоростью $v$ двое часов, синхронных в системе собственного покоя. Расстояние между часами тоже равно $l$. Передние часы, встречаясь с задним фотоном, показывают $t_1$, задние часы, встречаясь с передним фотоном, показывают $t_2$. Найти разность $t_2-t_1$.

<u>Ответ</u>. $t_2-t_1=\dfrac{vl/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

## § 15. НЕРАВНОМЕРНОЕ СОБСТВЕННОЕ ВРЕМЯ. ПАРАДОКС ЧАСОВ

15.1. В некоторой инерциальной системе часы движутся неравномерно, со скоростью $u(t)$, от одного события к другому. Времена событий в той же инерциальной системе суть $t_1$ и $t_2$ ($t_1<t_2$). Найти промежуток времени между этими событиями, отсчитанный по этим часам.

<u>Решение</u>. В течение бесконечно малого промежутка времени $dt$ движение часов можно считать равномерным. Согласно формуле (14.14) они покажут время

$$d\tau=dt\sqrt{1-u^2/c^2}\,. \tag{15.1}$$

Интегрируя от $t_1$ до $t_2$, найдем искомое время между событиями, отсчитанное на движущихся часах:

$$\tau_2-\tau_1=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-u^2(t)/c^2}\,dt\,. \tag{15.2}$$

<u>Примечание 27</u>. Промежуток времени между событиями, отсчитанный на движущихся неравномерно от одного события к другому часах, называется <u>неравномерным собственным временем</u>. Формула (15.2) есть общая формула неравномерного собственного времени.

15.2. Показать, что промежуток неравномерного собственного времени всегда короче, чем промежуток равномерного собственного времени между теми же событиями.

Решение. Так как собственное время - как равномерное, так и неравномерное - есть инвариант, то сравнивать эти времена можно в любой инерциальной системе. Выберем систему, в которой события одноместны. Время в этой системе будет тогда равномерным собственным временем, так что формула (15.2) примет вид

$$(\tau_2-\tau_1)_{нр}=\int_{\tau_{1p}}^{\tau_{2p}}\sqrt{1-u^2(\tau_p)/c^2}\,d\tau_p\ , \qquad (15.3)$$

где индексы р и нр означают "равномерное" и "неравномерное". Так как подынтегральная функция меньше единицы (по крайней мере в какой-либо части промежутка интегрирования), то интеграл меньше разности пределов:

$$(\tau_2-\tau_1)_{нр}<(\tau_2-\tau_1)_p\ , \qquad (15.4)$$

что и требовалось показать.

15.3. Найти формулу неравномерного собственного времени в случае, если часы движутся с постоянной по модулю (но переменной по направлению) скоростью.

Ответ. $(\tau_2-\tau_1)_{нр}=(t_2-t_1)\sqrt{1-u^2/c^2}\ .$

$$(15.5)$$

Примечание 28. Формула (15.5) по виду одинакова с формулой (14.14) равномерного собственного времени, откуда может появиться мысль, что в этом случае неравномерное собственное время равно равномерному. Однако это не так, ибо, двигаясь с переменным направлением, часы должны пройти за одно и то же время $t_2-t_1$ более длинный (криволинейный) путь, чем в случае прямолинейного движения. Поэтому в формуле (15.5) $u$ должно быть больше, чем $v$ в формуле (14.14), чем обеспечивается выполнение неравенства (15.4).

I5.4. Найти собственное время гиперболически движущегося тела (см. задачу I2.I0).

Решение. По формуле (I5.2), подставляя в нее выражение из формулы (I2.28), находим

$$\tau = (m_0 c/F)\ln\left(Ft/m_0 c + \sqrt{1 + F^2t^2/m_0^2c^2}\right). \tag{I5.6}$$

I5.5. Найти собственное время тела, движущегося в однородном гравитационном поле (см.задачи I2.I2 и I2.I4).

Решение. По формуле (I5.2), подставляя в нее данные из формул (I2.34) и (I2.52), находим: а) в случае прямолинейного движения без начальной скорости

$$\tau = (2c/g)\,\mathrm{arctan}\left(\mathrm{th}(gt/2c)\right); \tag{I5.7}$$

б) в случае криволинейного движения с начальной скоростью $u$,

$$\tau = (2c/g)\sqrt{1 - u_1^2/c^2}\,\mathrm{arctan}\left(\mathrm{th}(gt/2c)\right). \tag{I5.8}$$

I5.6. Найти собственное время тела, движущегося в однородном электрическом поле (см.задачу I2.I5).

Решение. Из формул компонент скорости (I2.60) по формуле (I5.2) находим

$$\tau = (\varepsilon_0 m_0 c/eE)\ln\left(\frac{eEt}{\varepsilon_0 m_1 c} + \sqrt{1 + \frac{e^2E^2t^2}{\varepsilon_0^2 m_1^2 c^2}}\right). \tag{I5.9}$$

I5.7. Часы $A$ в некоторой инерциальной системе неподвижны, а часы $B$ начинают в начальный момент прямолинейное и равномерное движение от $A$ со скоростью $u$, причем в начале этого движения $B$ показывают, как и $A$, нуль времени. В момент,когда $B$ показывают время $t_B/2$, они мгновенно останавливаются и в тот же момент начинают обратное движение с той же скоростью. Прибыв к $A$ обратно, они показывают время $t_B$. Какое время $t_A$ покажут в этот момент часы $A$ ?

Решение. Начало и конец движения у $A$ являются в системе покоя $A$ одноместными событиями. Поэтому $A$ покажут равномерное собственное время. Часы $B$ совершили неравномерное движение (поворот на обратный путь предполагает наличие ускорения) и поэтому показывают неравномерное собственное время, несмотря на то, что по модулю скорость их движения была постоянна. Следовательно, по формуле (I5.5),

$$t_A = \frac{t_B}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad . \tag{I5.I0}$$

Примечание 29. Приведенная в последней задаче ситуация называется парадоксом часов. Кажущийся парадокс возникает в связи с вопросом: каков отсчет на часах $A$ в момент поворота часов $B$ ? Согласно формуле (I5.I0) он должен быть равен $\frac{t_B/2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$. С другой стороны, рассматривая этот отсчет как событие, одноместное в системе покоя часов $A$ с началом движения, и учитывая, что в системе покоя часов $B$, где эти события разноместны, промежуток времени равен $t_B/2$, заключаем, что по часам $A$ он должен быть $(t_B/2)\sqrt{1-u^2/c^2}$, что противоречит предыдущему выражению.

I5.8. Разрешить парадокс часов.

Решение. Ошибка, приводящая к парадоксу, состоит в пренебрежении относительностью времени, что влечет за собой отождествление различных событий. Имеются три события: I) отсчет $t_B/2$ на часах $B$ ; 2) отсчет $(t_B/2)\sqrt{1-u^2/c^2}$ на часах $A$ ; 3) отсчет $\frac{t_B/2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ на часах $A$. - В системе покоя часов $A$ первое и третье события одновременны, а в системе покоя часов $B$ одновременны первое и второе события. Пренебрежение относительностью одновременности приводит к отождествлению второго и третьего событий. Но они не тождественны и поэтому нет ничего удивительного, если часы показывают разные времена.

## § 16. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ДЛИН

16.1. Два параллельных стержня движутся друг относительно друга в продольном направлении со скоростью $v$. Второй стержень движется относительно первого слева направо, первый относительно второго – справа налево. Левые концы стержней совпадают раньше, чем правые концы, причем оба эти события соединены световым сигналом. Найти отношение длин обоих стержней в системе покоя первого и в системе покоя второго стержня.

Решение. Обозначим длины стержней в системе покоя первого стержня через $l_1$ и $l_2$, а в системе покоя второго – через $l_1'$ и $l_2'$. Согласно условию задачи

$$l_1/c = (l_1 - l_2)/v \tag{16.1}$$

(см. рис. 14) и

$$l_2'/c = (l_1' - l_2')/v \tag{16.2}$$

(см. рис. 15). Из этих формул следует

$$l_1/l_2 = (1 - v/c)^{-1} \tag{16.3}$$

и

$$l_1'/l_2' = 1 + v/c \ . \tag{16.4}$$

16.2. Из формул (16.3) и (16.4) видно, что длина стержня относительна. В силу однородности пространства можно положить

$$l(v) = l(0)\,g(v) , \tag{16.5}$$

т.е. принять длину движущегося со скоростью $v$ стержня равной длине покоящегося стержня $l(0)$, умноженной на некоторую функцию скорости $g(v)$.

На основе формул (I6.3) и (I6.4) найти вид этой функции.

Решение. Согласно формуле (I6.5)

$$l_1' = l_1 g(v),$$

$$l_2 = l_2' g(v). \qquad (I6.6)$$

Перемножая эти равенства, находим

$$l_1' l_2 = l_1 l_2' g^2(v), \qquad (I6.7)$$

откуда

$$\frac{l_1'/l_2'}{l_1/l_2} = g^2(v). \qquad (I6.8)$$

Подставляя вместо $l_1'/l_2'$ и $l_1/l_2$ выражения из формул (I6.3) и (I6.4), находим

$$g(v) = \sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (I6.9)$$

Итак, длина стержня зависит от его скорости по формуле

$$l(v) = l(0)\sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (I6.10)$$

I6.3. Вывести формулу (I6.10) другим способом, измеряя время движения часов вдоль неподвижного стержня от одного конца до другого и сравнивая это время с отсчитанным по самим этим часам.

Решение. На рис. I6 $AB$ – неподвижный стержень, $K_1$ и $K_2$ – двое неподвижных часов, $K_3$ – движущиеся с произвольной скоростью $v$ часы. Они показаны в двух положениях – у левого и у правого концов стержня. Показываемое синхронными часами $K_1$ и $K_2$ время движения часов $K_3$ равно

$$t_2 - t_1 = l(0)/v. \qquad (I6.11)$$

Но сами часы $K_3$ по формуле собственного времени (I4.I4) показывают время

$$\tau_2 - \tau_1 = (l(0)/v)\sqrt{1 - v^2/c^2}. \qquad (I6.12)$$

Это есть время между событиями пролета концов стержня мимо покоящихся часов $K_3$. Стержень движется со скоростью $v$ и имеет поэтому длину

$$\ell(v) = (\tau_2 - \tau_1) v = \ell(0)\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

что и требовалось показать.

16.4. Световой сигнал испускается из точки $A$ и прибывает через некоторое время в точку $B$, отстоящую от $A$ на расстояние $\ell$. Чему равно расстояние $\ell'$ между точкой отправления и точкой прибытия сигнала в другой инерциальной системе, движущейся в направлении от $A$ к $B$ со скоростью $v$ ?

Решение. Обозначим время сигнала в пути в первой системе через $t$, а во второй через $t'$. Тогда $\ell = ct$ и $\ell' = ct'$, откуда

$$\ell' = \ell t'/t. \tag{16.13}$$

Но, согласно решению задачи 14.2,

$$t' = t\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

(см. формулу (14.9)); следовательно,

$$\ell' = \ell\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \tag{16.14}$$

16.5. Два события происходят в данной инерциальной системе одновременно в двух точках, разделенных расстоянием $\ell$. Каково расстояние $\ell'$ между событиями в другой инерциальной системе, движущейся со скоростью $v$ вдоль прямой, соединяющей места событий?

Решение. Поставим посередине отрезка $\ell$ источник света, испускающий одновременно световые сигналы в оба конца отрезка, так что они прибывают туда в момент данных событий. Каждый из сигналов проходит расстояние $\ell/2$. В другой инерциальной системе проходимые сигналами расстояния равны, согласно формуле (16.14), $(\ell/2)\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$ и $(\ell/2)\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$.

Расстояние $l'$ равно сумме этих двух расстояний. Таким образом находим

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1-v^2/c^2}} . \qquad (16.15)$$

<u>Примечание 30</u>. Формулы (16.10) и (16.15) сходны, но имеют совершенно различный смысл. В формуле (16.10) $l(0)$ и $l(v)$ суть расстояния между двумя <u>объектами</u> (концами стержня) в двух инерциальных системах, тогда как в формуле (16.15) $l$ и $l'$ суть расстояния между двумя <u>событиями</u> в двух инерциальных системах. В формуле (16.14) $l$ и $l'$ – тоже расстояния между двумя событиями.

16.6. Два события одновременны в данной инерциальной системе и происходят на расстоянии $l$ друг от друга. Другая инерциальная система движется со скоростью $v$ вдоль прямой, соединяющей места событий (в направлении от первого события ко второму). Чему равен в ней промежуток времени $t_1 - t_2$ между событиями?

<u>Решение.</u> Как и в решении предыдущей задачи, поставим посередине отрезка $l$ источник света, испускающий одновременно световые сигналы в оба конца отрезка, так что они приходят туда в момент данных событий. Каждый из сигналов идет время $l/2c$. В другой инерциальной системе, согласно формуле (14.9) сигналы идут разные времена – вперед, т.е. ко второму событию, время $(l/2c)\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$, а назад, т.е. к первому событию, время $(l/2c)\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$. Следовательно, заднее событие происходит позже переднего на время

$$t_1 - t_2 = (l/2c)\left(\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} - \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\right),$$

т.е.

$$t_1 - t_2 = \frac{lv/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} . \qquad (16.16)$$

16.7. Разъяснить парадокс часов до конца (см.задачу 15.8).

Решение. В задаче 15.8 мы имели два события, одновременные в системе покоя часов $B$. Часы $A$ движутся в этой системе со скоростью $u$ в направлении от первого события ко второму. Согласно формуле (16.16) промежуток времени, протекающий на часах $A$ от второго события до первого, равен (в формулу следует подставить $v \to u$ и $l = ut_B/2$) $\dfrac{u^2 t_B/2c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$. С другой стороны, в системе покоя часов $A$ первое событие одновременно с третьим; следовательно, этот промежуток времени должен быть равен промежутку времени от второго события до третьего, т.е. разности

$$\frac{t_B/2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - (t_B/2)\sqrt{1-u^2/c^2} .$$

Легко убедиться, что это равенство действительно имеет место.

16.8. Два фотона движутся один за другим вдоль одной и той же прямой линии на расстоянии $l$ друг от друга. Чему равно расстояние $l'$ между ними в другой инерциальной системе, движущейся со скоростью $v$ в том же направлении, что и фотоны?

Решение. Эта задача тождественна задаче 14.4. Здесь дадим другое ее решение. – Пусть фотоны пролетают в первой системе одновременно мимо двух точек, лежащих друг от друга на расстоянии $l$. В другой инерциальной системе расстояние между этими событиями равно, по формуле (16.15), $l(1-v^2/c^2)^{-1/2}$. Но сами события там неодновременны. Согласно формуле (16.16), задний фотон прибывает в свою точку позже на $(lv/c^2)(1-v^2/c^2)^{-1/2}$; следовательно, в тот момент, когда передний фотон долетел до своей точки, задний находится от него на расстоянии

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{lv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} ,$$

откуда

$$\ell' = \ell\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\ . \tag{16.17}$$

Эта формула совпадает с формулой (14.17) – решением задачи 14.4.

Примечание 31. В формуле (16.17) $\ell$ и $\ell'$ суть опять расстояния в двух инерциальных системах между двумя объектами, именно фотонами. Различие по сравнению с формулой(16.10) обусловлено тем, что там объекты – концы стержня – имеют систему покоя, тогда как фотоны таковой не имеют.

16.9. Тело $A$ движется со скоростью $v$ по направлению к неподвижному телу $B$. В момент, когда расстояние $A$ от $B$ равно $\ell$, в $A$ произошло событие. Чему равно расстояние $\ell'$ между $A$ и $B$ в системе покоя тела $A$ в момент того же события?

Решение. Пусть (см. рис. 17) с телом $B$ связан одним концом жестко стержень длины $\ell$, направленный в сторону приближающегося тела $A$. Событие в $A$ происходит в момент, когда это тело достигает другого конца стержня. В системе покоя тела $A$ стержень движется вместе с телом $B$ со скоростью $v$ и имеет, согласно формуле (16.10), длину $\ell\sqrt{1-v^2/c^2}$. Когда конец его достигает неподвижного тела $A$, там происходит событие, расстояние которого от $B$ равно $\ell\sqrt{1-v^2/c^2}$. Итак, $\ell' = \ell\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Примечание 32. В этой задаче преобразуется расстояние между объектом (телом $B$) и событием. Найденная формула совпадает, однако, по виду с формулой преобразования расстояния между двумя неподвижными друг относительно друга объектами (например, концами стержня).

Примечание 33. Результат задачи 16.9 устраняет кажущееся противоречие, встретившееся в задачах 14.7 и 14.8 (см. примечание 26). В этих задачах мы имели как раз такую же ситуацию, как в задаче 16.9. Телом $A$ является источник света и событием в нем – испускание светового сигнала. Телом $B$ является зеркало.

16.10. К неподвижному телу приближается фотон. В момент, когда фотон находится на расстоянии $\ell$ от тела, в последнем происходит какое-либо событие. Чему равно расстояние $\ell'$ фотона от тела в момент того же события в другой инерциальной системе, движущейся со скоростью $v$ в направлении движения фотона?

Ответ. $\ell' = \ell\sqrt{\dfrac{1+v/c}{1-v/c}}$ .

16.11. Стержень длины покоя $\ell_0$ движется в продольном направлении со скоростью $u$ . В том же направлении мимо него пролетает фотон. Найти время пролета фотона от одного конца стержня до другого.

Ответ. $(\ell_0/c)\sqrt{\dfrac{1+u/c}{1-u/c}}$ .

## § 17. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА

17.1. Найти формулы преобразования Лоренца.

Решение. Преобразованиями Лоренца называются (см. § 4) преобразования координат и времени из одной инерциальной системы в другую. Согласно формулам (4.1) и (4.9) эти преобразования по виду тождественны преобразованиям компонент импульса и массы. Последние найдены в § 9 (формулы (9.7)). Такой же вид имеют и преобразования Лоренца (при условии, что скорость $v$ штрихованной системы относительно нештрихованной направлена по оси $x$ ):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{17.1}$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

17.2. Убедиться непосредственно в том, что обратные преобразования из штрихованной системы в нештрихованную имеют такой же вид, с заменой лишь $v$ на $-v$, т.е.

$$x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad (17.2)$$
$$y=y',$$
$$z=z',$$
$$t=\frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

17.3. Показать, что разности координат и времен двух событий преобразуются по тем же формулам Лоренца, что и координаты и время отдельного события, т.е.

$$x_2'-x_1' = \frac{x_2-x_1-v(t_2-t_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$
$$y_2'-y_1' = y_2-y_1, \qquad (17.3)$$
$$z_2'-z_1' = z_2-z_1,$$
$$t_2'-t_1' = \frac{t_2-t_1-(v/c^2)(x_2-x_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Ответ. Это вытекает непосредственно из линейности преобразований.

17.4. Убедиться непосредственно по формулам (17.3) в инвариантности интервала $s$ между двумя событиями, т.е. величины, квадрат которой определяется формулой

$$s^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2 \qquad (17.4)$$

или, равносильно,

$$s^2 = (\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2. \qquad (17.5)$$

Примечание 34. Интервал называется пространственноподобным, если $s^2>0$, временноподобным, если $s^2<0$, и изотропным, если $s^2=0$.

17.5. В решении задачи 14.1 показано, что два события можно сделать одноместными только в том случае, если $s^2<0$ (см.формулу (14.1)), т.е. если интервал временноподобен. Показать, что то же вытекает из инвариантности интервала.

Решение. Согласно формуле (17.4) в системе, в которой события одноместны, $s^2=-c^2(t_2-t_1)^2<0$. Из инвариантности интервала вытекает, что $s^2<0$ и в любой инерциальной системе. Если же $s^2>0$, то ни в какой системе не может быть $s^2<0$, т.е. события ни в какой системе не могут быть одноместными.

17.6. Показать, что два события могут быть одновременными только в случае, если интервал пространственноподобен.

Решение. Если $s^2<0$, то события не могут одновременными ни в какой системе, так как, если $t_2=t_1$, то $s^2=(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2>0$.

17.7. Показать, что если интервал между двумя событиями пространственноподобен, то существует инерциальная система, в которой эти события одновременны.

Решение. Примем за ось $x$ прямую, соединяющую точки, где происходят события (одноместными они быть, согласно задаче 17.5, не могут). Тогда $y_2=y_1$ и $z_2=z_1$ и формула квадрата интервала принимает вид

$$s^2=(x_2-x_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2. \qquad (17.6)$$

Перейдем в другую, штрихованную, систему и положим, если возможно, в ней $t_2'=t_1'$. Для этого, согласно четвертой формуле (17.3), должно быть

$$t_2-t_1-(v/c^2)(x_2-x_1)=0,$$

откуда

$$\frac{v}{c}=\frac{c(t_2-t_1)}{x_2-x_1}. \qquad (17.7)$$

Но так как, по условию $s^2 > 0$, $(x_2-x_1)^2 > c^2(t_2-t_1)^2$, то $\left|\frac{v}{c}\right| < 1$. Следовательно, переход в штрихованную систему, где события одновременны, возможен.

17.8. Вывести с помощью преобразований Лоренца формулу собственного времени.

Решение. Пусть в инерциальной системе, где два события одноместны, их временные координаты суть $\tau_1$, $\tau_2$, так что промежуток собственного времени равен $\tau_2-\tau_1$. Пространственные координаты этих событий равны, т.е. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_2 = z_1$. В другой (штрихованной) системе события неодноместны и четвертая формула (17.3) дает

$$t_2'-t_1' = \frac{\tau_2-\tau_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} . \tag{17.8}$$

Эта формула (если опустить штрих у $t_1'$ и $t_2'$) совпадает с формулой (14.14).

17.9. Вывести с помощью преобразований Лоренца формулу преобразования расстояния между двумя движущимися один вслед другого фотонов.

Решение. Формула, о которой идет речь, была получена в решении задач 14.4 и 16.8 (см. формулы (14.17) и (16.17)). Чтобы вывести ее из преобразований Лоренца, напишем уравнения движения фотонов в нештрихованной системе в виде

$$x_1 = ct_1 ,$$
$$x_2 = ct_2 + \ell , \tag{17.9}$$

так что при $t_1 = t_2$ $x_2 - x_1 = \ell$. Тогда из первой формулы (17.1) и четвертой формулы (17.2) получаем

$$x_1' = \frac{(c-v)t_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} ,$$

$$x_2' = \frac{(c-v)t_2+\ell}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{17.10}$$

и

$$t_1 = \frac{t_1' + (v/c^2)x_1'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} ,$$
$$t_2 = \frac{t_2' + (v/c^2)x_2'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} . \qquad (17.11)$$

Подставляя последние выражения $t_1$ и $t_2$ в предыдущие формулы, находим

$$x_1' = \frac{(c-v)[t_1' + (v/c^2)x_1']}{1-v^2/c^2} ,$$
$$x_2' = \frac{(c-v)[t_2' + (v/c^2)x_2']}{1-v^2/c^2} + \frac{\ell}{\sqrt{1-v^2/c^2}} . \qquad (17.12)$$

Выражая отсюда $x_1'$ и $x_2'$, приходим к уравнениям движения фотонов в штрихованной системе:

$$x_1' = ct_1' ,$$
$$x_2' = ct_2' + \ell\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} , \qquad (17.13)$$

откуда, при $t_1' = t_2'$ следует

$$x_2' - x_1' = \ell\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} , \qquad (17.14)$$

что и требовалось.

## § 18. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИЛЫ И МОЩНОСТИ

18.1. Вывести формулы преобразования силы и мощности.

Решение. Сила и ее мощность выражаются формулами (при неизменной массе покоя)

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt ,$$
$$\vec{F}\vec{u} = c^2 dm/dt \qquad (18.1)$$

(см.формулы (12.1) и (12.2)). В другой инерциальной системе, движущейся относительно первой со скоростью $v$ в направлении оси $x$, аналогично

$$\vec{F}' = d\vec{p}'/dt' ,$$
$$\vec{F}'\vec{u}' = c^2 dm'/dt' . \qquad (18.2)$$

Далее используем формулы преобразования импульса и массы (9.7) и формулу преобразования времени (четвертая формула (17.1)). Беря дифференциалы, находим

$$dp'_x = \frac{dp_x - v\,dm}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$
$$dp'_y = dp_y,$$
$$dp'_z = dp_z, \qquad (18.3)$$
$$dm' = \frac{dm - (v/c^2)dp_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

и

$$dt' = \frac{dt - (v/c^2)dx}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (18.4)$$

Деля равенства (18.3) на равенство (18.4), находим

$$F'_x = \frac{dp_x - v\,dm}{dt - (v/c^2)dx},$$
$$F'_y = \frac{dp_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{dt - (v/c^2)dx}, \qquad (18.5)$$
$$F'_z = \frac{dp_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{dt - (v/c^2)dx}$$
$$\vec{F}'\vec{u}' = \frac{c^2[dm - (v/c^2)dp_x]}{dt - (v/c^2)dx}.$$

Деля, наконец, числители и знаменатели правых частей этих формул на $dt$ и учитывая, что $dx/dt = u_x$, получаем искомые формулы преобразования

$$F'_x = \frac{F_x - v\vec{F}\vec{u}/c^2}{1 - vu_x/c^2},$$
$$F'_y = \frac{F_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}, \qquad (18.6)$$
$$F'_z = \frac{F_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2},$$
$$\vec{F}'\vec{u}' = \frac{\vec{F}\vec{u} - vF_x}{1 - vu_x/c^2}.$$

18.2. Убедиться непосредственной подстановкой компонентов $\vec{F}'$ и $\vec{u}'$ (из формул (7.6), (7.13), (7.14) и (18.6)), что произведение $\vec{F}'\vec{u}'$ действительно равно выражению в четвертой формуле (18.6).

18.3. Найти формулу преобразования модуля силы $F=\sqrt{\vec{F}^2}$.

Решение. Из первых трех формул (18.6), беря сумму квадратов, находим

$$\vec{F}'^2 = \frac{[F^2-c^{-2}(\vec{F}\vec{u})^2](1-v^2/c^2)+c^{-2}(\vec{F}\vec{u}-F_x v)^2}{(1-vu_x/c^2)^2}, \tag{18.7}$$

откуда

$$F' = \frac{\sqrt{[F^2-c^{-2}(\vec{F}\vec{u})^2](1-v^2/c^2)+c^{-2}(\vec{F}\vec{u}-F_x v)^2}}{1-vu_x/c^2}. \tag{18.8}$$

18.4. Показать, что величина $\dfrac{F^2-c^{-2}(\vec{F}\vec{u})^2}{1-u^2/c^2}$ является инвариантом.

Решение. Из четвертой формулы (18.6) и формулы (18.7) следует

$$F'^2-c^{-2}(\vec{F}'\vec{u}')^2 = \frac{[F^2-c^{-2}(\vec{F}\vec{u})^2](1-v^2/c^2)}{(1-u_x v/c^2)^2}. \tag{18.9}$$

Разделив это равенство на взятое в квадрат равенство (7.12), находим

$$\frac{F'^2-c^{-2}(\vec{F}'\vec{u}')^2}{1-u'^2/c^2} = \frac{F^2-c^{-2}(\vec{F}\vec{u})^2}{1-u^2/c^2}. \tag{18.10}$$

18.5. Убедиться в инвариантности величины $\dfrac{\vec{F}\vec{a}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}$, где $\vec{a}$ - ускорение.

Решение. Это вытекает непосредственно из формул (12.11) и (18.10). Умножая первую скалярно на $\vec{F}$ и учитывая вторую, находим, что, действительно

$$\frac{\vec{F}\vec{a}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} = \text{inv}. \tag{18.11}$$

18.6. С помощью формул (12.11), (12.14) и (18.6) найти формулы преобразования компонентов ускорения.

Решение. Перепишем формулу (12.11) для отдельных компонентов в двух инерциальных системах:

$$a_x = \frac{(F_x - c^{-2}\vec{F}\vec{u}\cdot u_x)\sqrt{1-u^2/c^2}}{m_0},$$

$$a_y = \frac{(F_y - c^{-2}\vec{F}\vec{u}\cdot u_y)\sqrt{1-u^2/c^2}}{m_0}, \tag{18.12}$$

$$a_z = \frac{(F_z - c^{-2}\vec{F}\vec{u}\cdot u_z)\sqrt{1-u^2/c^2}}{m_0}$$

и

$$a'_x = \frac{(F'_x - c^{-2}\vec{F}'\vec{u}'\cdot u'_x)\sqrt{1-u'^2/c^2}}{m_0},$$

$$a'_y = \frac{(F'_y - c^{-2}\vec{F}'\vec{u}'\cdot u'_y)\sqrt{1-u'^2/c^2}}{m_0}, \tag{18.13}$$

$$a'_z = \frac{(F'_z - c^{-2}\vec{F}'\vec{u}'\cdot u'_z)\sqrt{1-u'^2/c^2}}{m_0}.$$

Подставляя в правые части последних формул выражения $F'_x$, $F'_y$, $F'_z$, $\vec{F}'\vec{u}'$ из формул (18.6), а также выражения $u'_x$, $u'_y$, $u'_z$, и $\sqrt{1-u'^2/c^2}$ из формул (7.6) и (7.12) - (7.14), находим

$$a'_x = \frac{(1-v^2/c^2)^{3/2}(F_x - c^{-2}\vec{F}\vec{u}\cdot u_x)\sqrt{1-u^2/c^2}}{m_0(1-vu_x/c^2)^3},$$

$$a'_y = \frac{(1-v^2/c^2)[F_y(1-vu_x/c^2)-(\vec{F}\vec{u}-vF_x)u_y/c^2]\sqrt{1-u^2/c^2}}{m_0(1-vu_x/c^2)^3}, \tag{18.14}$$

$$a'_z = \frac{(1-v^2/c^2)[F_z(1-vu_x/c^2)-(\vec{F}\vec{u}-vF_x)u_z/c^2]\sqrt{1-u^2/c^2}}{m_0(1-vu_x/c^2)^3}.$$

В правые части этих формул подставим вместо $F_x$, $F_y$, $F_z$, $\vec{F}\vec{u}$, вытекающие из формулы (12.14) выражения

$$F_x = \frac{m_0[(1-u^2/c^2)a_x + c^{-2}\vec{u}\vec{a}\cdot u_x]}{(1-u^2/c^2)^{3/2}},$$

$$F_y = \frac{m_0[(1-u^2/c^2)a_y + c^{-2}\vec{u}\vec{a}\cdot u_y]}{(1-u^2/c^2)^{3/2}},$$

$$F_z = \frac{m_0[(1-u^2/c^2)a_z + c^{-2}\vec{u}\vec{a}\cdot u_z]}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}, \qquad (18.15)$$

$$\vec{F}\vec{u} = \frac{m_0\vec{u}\vec{a}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}.$$

Тогда получаем

$$a'_x = \frac{(1-v^2/c^2)^{3/2}a_x}{(1-u_x v/c^2)^3},$$

$$a'_y = \frac{(1-v^2/c^2)[a_y + (v/c^2)(u_y a_x - u_x a_y)]}{(1-u_x v/c^2)^3}, \qquad (18.16)$$

$$a'_z = \frac{(1-v^2/c^2)[a_z + (v/c^2)(u_z a_x - u_x a_z)]}{(1-u_x v/c^2)^3}.$$

18.7. **Вывести формулы (18.16) путем прямого вычисления производных компонентов скорости по времени.**

Решение. Беря дифференциалы в формулах (7.6), (7.13) и (7.14), находим

$$du'_x = \frac{(1-v^2/c^2)du_x}{(1-u_x v/c^2)^2},$$

$$du'_y = \frac{(1-v^2/c^2)^{1/2}[du_y + (v/c^2)(u_y du_x - u_x du_y)]}{(1-u_x v/c^2)^2}, \qquad (18.17)$$

$$du'_z = \frac{(1-v^2/c^2)^{1/2}[du_z + (v/c^2)(u_z du_x - u_x du_z)]}{(1-u_x v/c^2)^2}.$$

Деля эти равенства на $dt'$ из формулы (18.4), приходим к формулам (18.16).

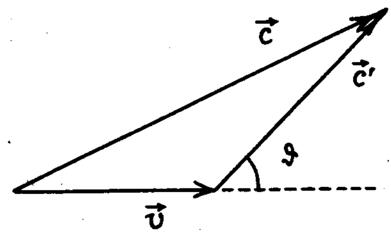


Рис. I.

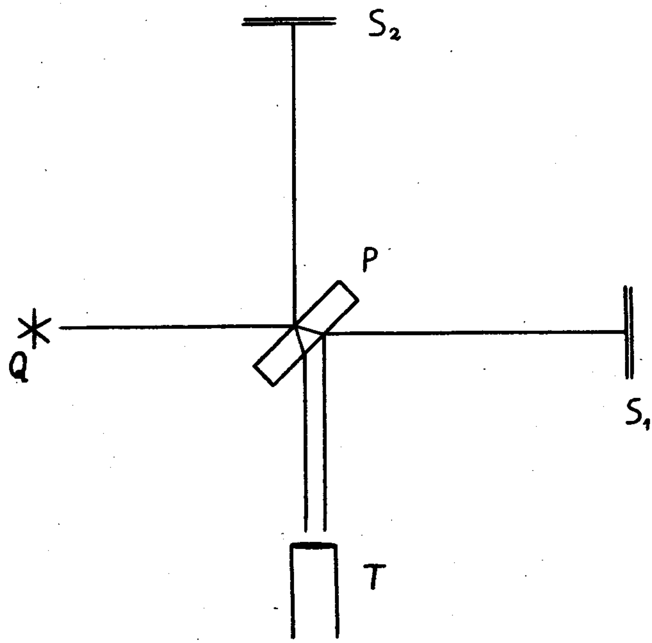


Рис. 2.

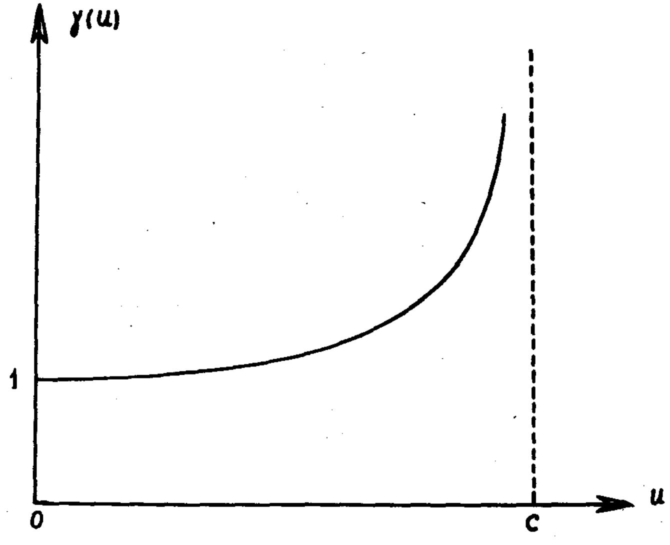


Рис. 3.

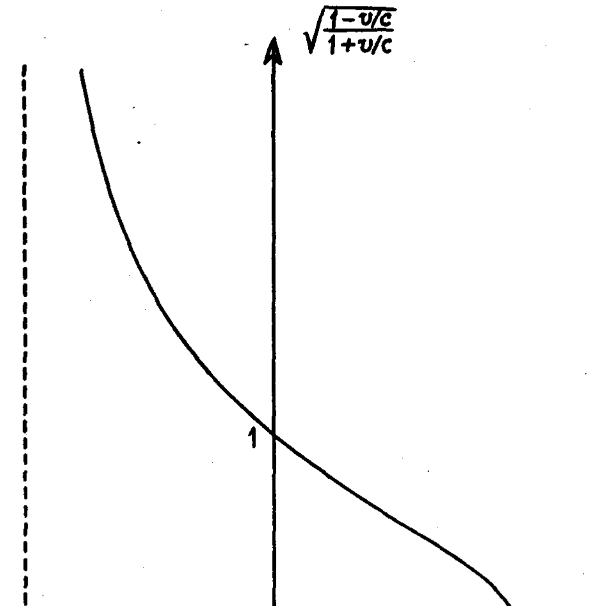


Рис. 4.

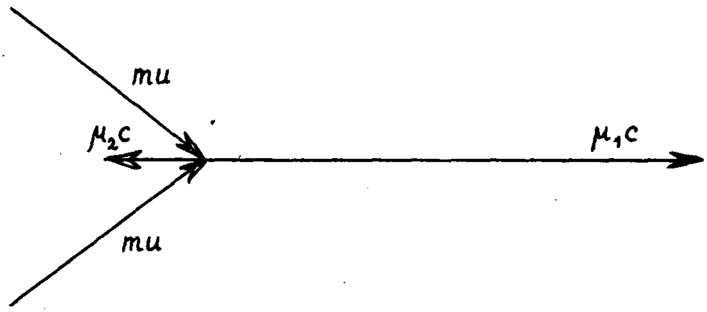


Рис. 5.

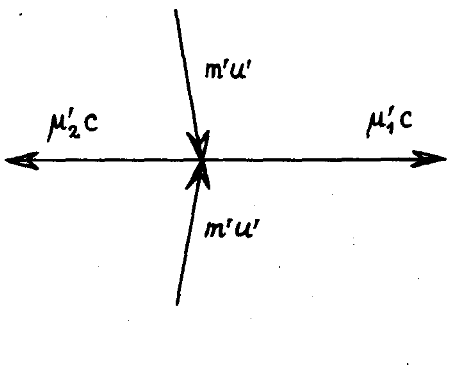


Рис. 6.

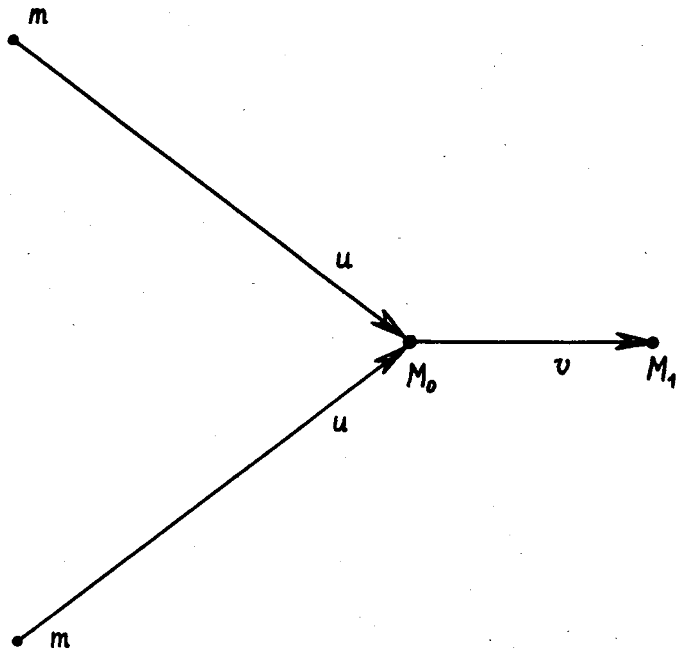


Рис. 7.

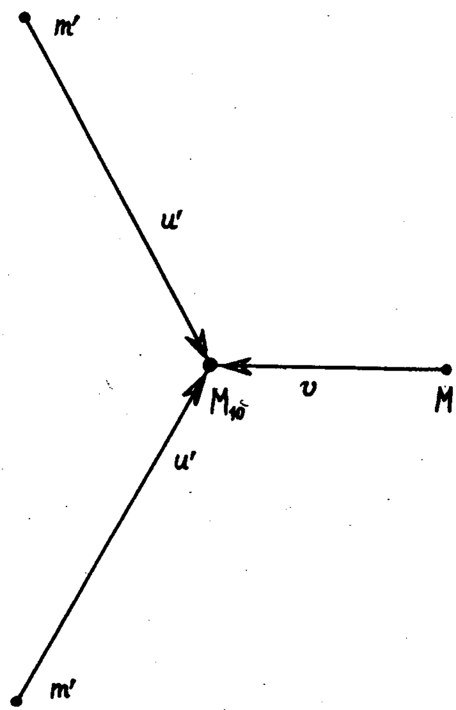


Рис. 8.

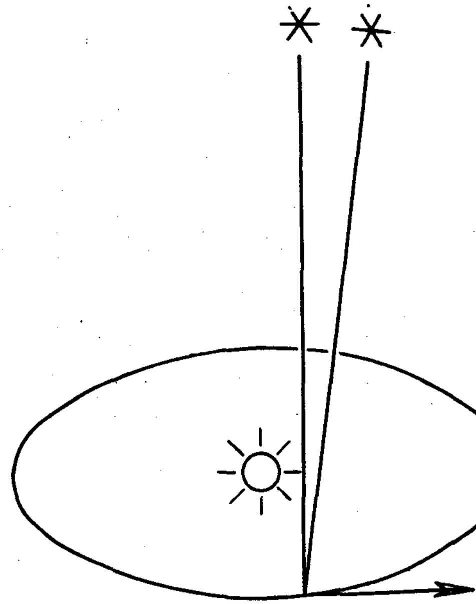

Рис. 9.

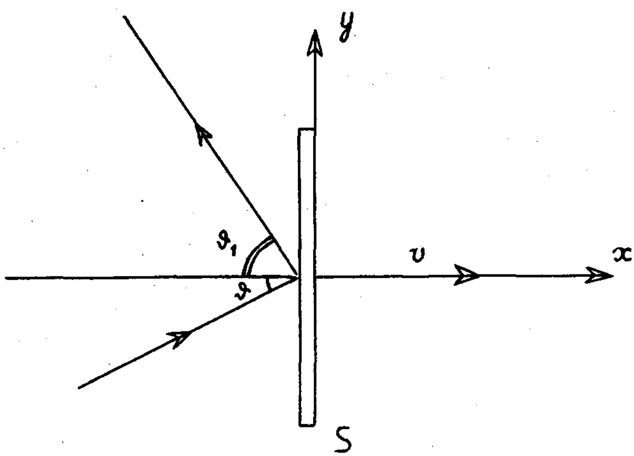


Рис. IO.

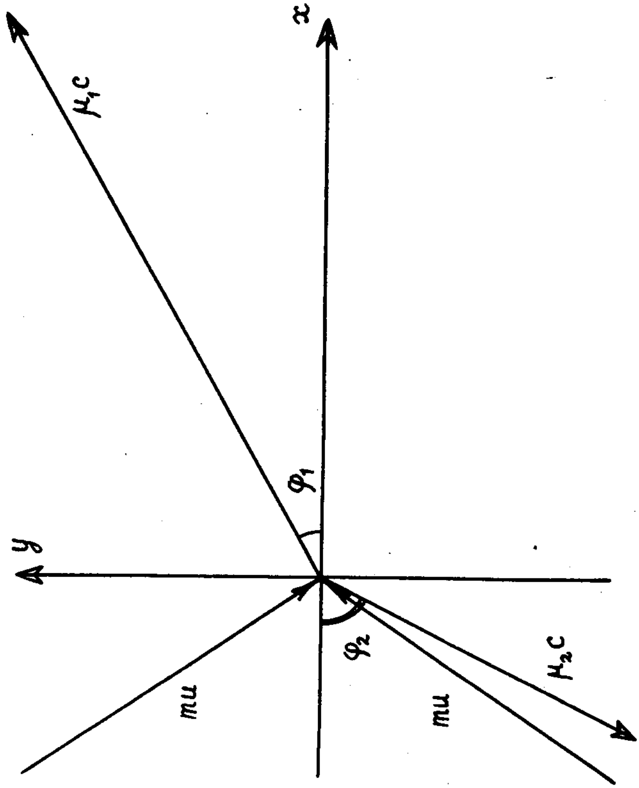


Рис. II.

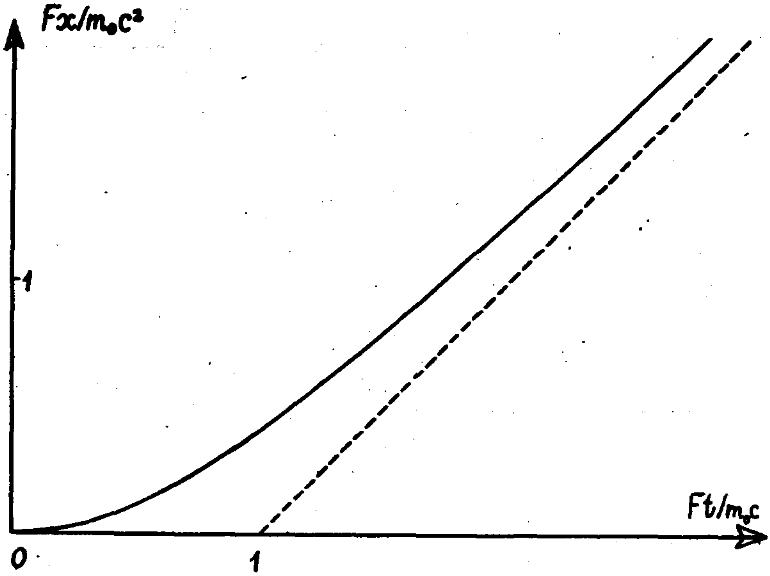


Рис. I2.

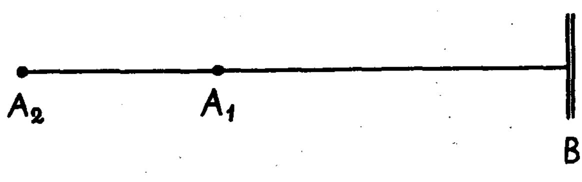


Рис. I3.

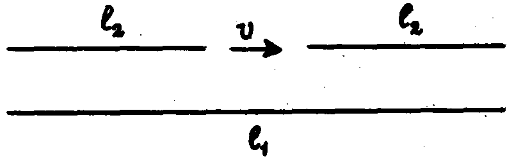


Рис. I4.

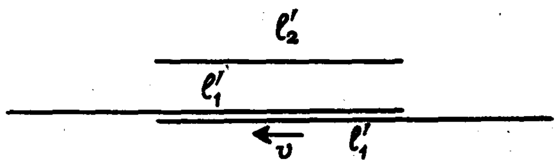


Рис. I5.

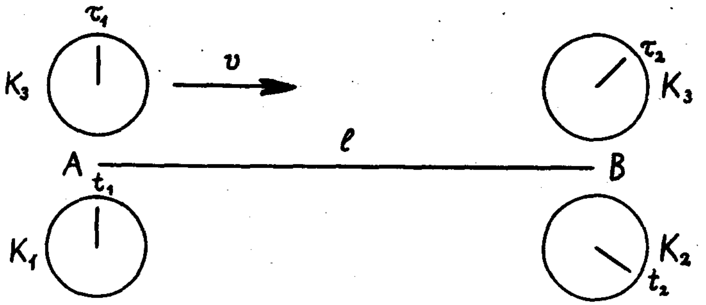


Рис. I6.

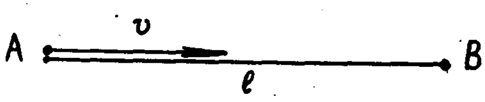


Рис. I7.

ОГЛАВЛЕНИЕ