TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI
TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

580

MATEMAATILISE FÜÜSIKA ÜLESANNETE LAHENDUSMEETODID

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Matemaatika-ja mehhaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 580 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

MATEMAATILISE FÜÜSIKA ÜLESANNETE LAHENDUSMEETODID

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Matemaatika-ja mehhaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

Korrektorid: A.Raid
S.Raitar
E.Jaigma

ТАРТУ 1981

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 580, 3 - 8.

ДИСКРЕТНЫЕ МЕРЫ НЕКОМПАКТНОСТИ

Г. Вайникко
Тартуский государственный университет

В теории приближенных методов немаловажную роль играет понятие дискретной меры некомпактности (см. [1-6]). В настоящей заметке традиционное определение дискретной меры некомпактности дополняется двумя новыми определениями и показывается, что в случае сепарабельных пространств все три определения равносильны.

§ 1. Понятия, связанные с дискретной сходимостью

Пусть E и E_n $(n \in N)$ – вещественные $(K = R)$ или комплексные $(K = C)$ банаховы пространства, а $P = (p_n)_{n \in N}$ – система операторов $p_n : E \to E_n$, удовлетворяющих условиям

$$\|p_n u\|_{E_n} \to \|u\|_E \quad (n \in N) \quad \forall u \in E,$$

$$\|p_n(au + a'u') - (ap_n u + a'p_n u')\| \to 0 \quad (n \in N)$$
$$\forall u, u' \in E,\ a, a' \in K.$$

Здесь N – множество натуральных чисел; его бесконечные подмножества будем обозначать $N', N'', \ldots$. Запись $a_n \to a$ $(n \in N')$ означает, что последовательность $(a_n)_{n \in N'}$ при $n \to \infty$ сходится к a (причем n пробегает подмножество N').

Напомним основные определения, связанные с дискретной сходимостью последовательностей элементов и функционалов.

Определение 1. Последовательность $(u_n)_{n \in N'}$ элементов $u_n \in E_n$ $\mathcal{P}$-сходится (или, дискретно сходится) к $u \in E$, если $\|u_n - p_n u\| \to 0$ $(n \in N')$; обозначаем $u_n \to u$ $(n \in N')$.

Определение 2. Последовательность $(u_n)_{n \in N}$ элементов $u_n \in E_n$ $\mathcal{P}$-компактна (или, дискретно компактна), если любая ее подпоследовательность $(u_n)_{n\in N'\subseteq N}$ содержит $\mathcal{P}$-сходящуюся подпоследовательность $(u_n)_{n\in N''\subseteq N'}$.

Определение 3. Последовательность $(f_n)_{n\in N'}$ функционалов $f_n\in E_n^*$ слабо $\mathcal{P}$-сходится (или дискретно слабо сходится) к $f\in E^*$, если для любой $\mathcal{P}$-сходящейся последовательности $(u_n)_{n\in N'}$ имеет место импликация

$$u_n\to u\ \ (n\in N')\Rightarrow\langle f_n,u_n\rangle\to\langle f,u\rangle\ \ \ (n\in N'),$$

где $\langle f,u\rangle$ означает значение функционала f на элементе u; обозначаем $f_n \dashrightarrow f\ \ (n\in N')$.

Подробнее об этих понятиях см., например, в [1, 3].

§ 2. Дискретные меры некомпактности

Для любой ограниченной[1] последовательности $(u_n)_{n\in N'}$, $u_n\in E_n$, определим следующие величины (меры некомпактности):

$$\mu((u_n))=\inf\{\varepsilon:\ \forall N'\subseteq N\ \exists(N''\subset N',\ u''\in E)\ \ \|u_n-p_nu''\|\le\varepsilon\ \ (n\in N'')\},$$

$$\mu_0((u_n))=\sup_{(f_n)}\{\overline{\lim_{n\in N}}\,|\langle f_n,u_n\rangle|:\ f_n\in E_n^*,\ \|f_n\|\le 1,\ f_n\dashrightarrow 0\,(n\in N)\},$$

$$\mu_1((u_n))=\inf_{(u_n')}\{\overline{\lim_{n\in N}}\,\|u_n-u_n'\|:\ (u_n')_{n\in N}\ \ \mathcal{P}\text{-компактна}\}.$$

Величина $\mu((u_n))$ представляет собой традиционное определение дискретной меры некомпактности (см. [1-5]). Она обладает следующими свойствами:

$$0\le\mu((u_n))\le\overline{\lim}\,\|u_n\|;$$

$$\mu((u_n))=0\ \Leftrightarrow\ (u_n)\ \ \mathcal{P}\text{-компактна};$$

$$\mu((au_n))=|a|\,\mu((u_n)),\quad a\in K;$$

$$\mu((u_n+v_n))\le\mu((u_n))+\mu((v_n)).$$

Такими же свойствами обладает μ_1. Для μ_0 не всегда из $\mu_0((u_n))=0$ следует $\mathcal{P}$-компактность последовательности (u_n); остальными из перечисленных свойств она обладает.

---

[1] Т.е. $\|u_n\|\le const\ (n\in N)$

<u>Теорема I</u>. Для любой ограниченной последовательности (u_n), $u_n \in E_n$, справедливы неравенства

$$\mu_0((u_n)) \leq \mu((u_n)) \leq \mu_1((u_n)).$$

<u>Доказательство</u>. Докажем неравенство $\mu_0((u_n)) \leq \mu((u_n))$. Оно тривиально, если $\mu_0((u_n))=0$; будем считать, что $\mu_0((u_n))=b_0>0$. Пусть $\delta>0$ сколь угодно мало. Исходя из определения $\mu_0((u_n))$, выберем последовательность (f_n), $\|f_n\| \leq 1$, $f_n \dashrightarrow 0$, так что

$$\overline{\lim_{n\in N}} |\langle f_n, u_n\rangle| \geq b_0 - \delta,$$

а затем $N' \subseteq N$, на котором этот верхний предел достигается:

$$\lim_{n\in N'} |\langle f_n, u_n\rangle| \geq b_0 - \delta.$$

По N' выберем $N'' \subseteq N'$, так что в соответствии с определением $\mu((u_n))$ выполняются неравенства

$$\|u_n - p_n u''\| \leq \varepsilon \quad (n\in N''), \qquad \varepsilon \leq \mu((u_n)) + \delta.$$

Поскольку $\langle f_n, p_n u''\rangle \to 0$, то

$$b_0 - \delta \leq \lim_{n\in N''} |\langle f_n, u_n\rangle| = \lim_{n\in N''} |\langle f_n, u_n - p_n u''\rangle| \leq$$
$$\leq \overline{\lim_{n\in N''}} \|u_n - p_n u''\| \leq \varepsilon \leq \mu((u_n)) + \delta,$$

и ввиду произвольности $\delta>0$

$$\mu_0((u_n)) = b_0 \leq \mu((u_n)),$$

что и требовалось доказать.

Докажем неравенство $\mu((u_n)) \leq \mu_1((u_n))$. Исходя из определения $\mu_1((u_n))$, рассмотрим такую $\mathcal{P}$-компактную последовательность (u_n'), что

$$\overline{\lim_{n\in N}} \|u_n - u_n'\| \leq b_1 + \delta,$$

где $b_1 = \mu_1((u_n))$, а $\delta>0$ сколь угодно мало. Для любого $N' \subseteq N$ выделим $N'' \subseteq N'$ так, что подпоследовательность $(u_n')_{n\in N''}$ $\mathcal{P}$-сходится к некоторому пределу $u' \in E$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\in N''}} \|u_n - p_n u'\| \leq b_1 + \delta,$$

и отбросив, если это нужно, конечное число элементов u_n, бу-

2

дем иметь

$$\|u_n - p_n u'\| \le b_1 + 2\delta \quad (n \in N''' \subseteq N'').$$

Это означает, что $\mu((u_n)) \le b_1 + 2\delta = \mu_1((u_n)) + 2\delta$. Ввиду произвольности $\delta > 0$ получаем доказываемое неравенство.

Теорема I доказана.

§ 3. Равносильность трех определений меры некомпактности

Теорема 2. Если пространство E сепарабельно, то

$$\mu_0((u_n)) = \mu((u_n)) = \mu_1((u_n))$$

для любой ограниченной последовательности $(u_n)_{n\in N}$, $u_n \in E_n$.

Доказательство. В силу теоремы I достаточно показать, что $\mu_1((u_n)) \le \mu_0((u_n))$. Обозначим $b_0 = \mu_0((u_n))$, $b_1 = \mu_1((u_n))$ и будем считать, что $b_1 > 0$, ибо в противном случае доказываемое неравенство тривиально. Пусть $\delta > 0$ сколь угодно мало. Заметим, прежде всего, что для любого конечномерного подпространства $E' \subset E$ множество[2]

$$N' = \{ n \in N : dist\,(u_n, p_n E') \ge b_1 - \delta \}$$

бесконечно, и $\mu_1((u_n)_{n\in N'}) = b_1$. Действительно, если бы N' было конечно, то, как легко видеть, $\mu_1((u_n)_{n\in N}) \le \le b_1 - \delta$, а это противоречило бы определению b_1. Если дополнение к N' конечно, то равенство $\mu_1((u_n)_{n\in N'}) = b_1$ очевидно, а в случае бесконечного дополнения $N'' = N \setminus N'$ указанное равенство вытекает из следующих соотношений:

$$\mu_1((u_n)_{n\in N}) = max\{\mu_1((u_n)_{n\in N'}),\ \mu_1((u_n)_{n\in N''})\},$$

$$\mu_1((u_n)_{n\in N''}) \le b_1 - \delta .$$

Зададим последовательность конечномерных подпространств

$$E^{(1)} \subset E^{(2)} \subset \ldots \subset E^{(k)} \subset E^{(k+1)} \subset \ldots \subset E,$$

обладающих тем свойством, что

$$dist\,(u, E^{(k)}) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty \quad \forall u \in E.$$

Из последовательности (u_n) выделим подпоследовательность $(u_{1,n})$ элементов, для которых $dist\,(u_{1,n}, p_n E^{(1)}) \ge b_1 - \delta\ (n \in N)$.

---

[2] Не нарушая общности (см. [3]), будем считать, что операторы p_n линейные (но, вообще говоря, неограниченные).

Для нее имеем $\mu_1((u_{1,n}))=b_1$, и из нее, в свою очередь, выделим подпоследовательность $(u_{2,n})$ элементов, для которых $dist(u_{2,n}, p_n E^{(2)})\geq b_1-\delta$ $(n\in N)$. Для нее снова имеем $\mu_1((u_{2,n}))=b_1$, и из нее извлечем подпоследовательность $(u_{3,n})$ тех элементов, для которых $dist(u_{3,n}, p_n E^{(3)})\geq b_1-\delta (n\in N)$ и т.д. Затем составим диагональную последовательность $(u_{n,n})_{n\in N}$. Она является подпоследовательностью исходной последовательности (u_n) и обладает тем свойством, что

$$dist(u_{n,n}, p_n E^{(n)})\geq b_1-\delta \quad (n\in N).$$

Пользуясь теоремой о почти-перпендикуляре, выберем функционалы $f_n\in E_n^*$, такие что

$$\|f_n\|=1, \langle f_n, p_n E^{(n)}\rangle=0, |\langle f_n, u_{n,n}\rangle|\geq b_1-2\delta \quad (n\in N).$$

Первые два из этих соотношений гарантируют сходимость $f_n \dashrightarrow 0$, а из третьего вытекает, что

$$\mu_0((u_{n,n}))\geq b_1-2\delta.$$

Поскольку $\mu_0((u_n))\geq\mu_0((u_{n,n}))$ (при переходе к подпоследовательности величина μ_0 может только уменьшиться), то этим доказано, что

$$\mu_0((u_n))\geq \mu_1((u_n))-2\delta;$$

ввиду произвольности $\delta>0$ получаем доказываемое неравенство.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что теорема 2 теряет силу в случае несепарабельного пространства E. Пусть, например, $E=E_n=m$, $p_n=I$ (единичные операторы), $u_n=(0,0,\dots,0,1,0,0,\dots)$, где единица стоит на n-ом месте. Тогда $\mu((u_n))=1$. С другой стороны, $\mu_0((u_n))=0$, ибо слабая $\mathcal{P}$-сходимость $f_n \dashrightarrow 0$ в данном случае влечет за собой сходимость $\|f_n\|\to 0$.

В приведенном примере нарушается равенство $\mu_0((u_n))=$ $=\mu((u_n))$. Нам неизвестно, может ли равенство $\mu((u_n))=$ $=\mu_1((u_n))$ тоже быть нарушенным.

Литература

I. В а й н и к к о Г., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.

2. В а й н и к к о Г.М., Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений. Итоги науки и тех. Мат. анализ, 16, 1979, 5-53.

3. V a i n i k k o, G., Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. Leipzig, 1976.

4. V a i n i k k o, G., Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem). Nonlinear Analysis, 1978, 2, № 6, 647-687.

5. W o l f, R., Diskret kondensierende Operatorfolgen. Math. Nachr., 1977, 80, 209-223.

6. W o l f, R., Approximation of fixed points of condensing mappings. Applicable Analysis, 1979, 9, 125-136.

DISCRETE MEASURES OF NON-COMPACTNESS

G. Vainikko

Summary

The paper is concerned with the discrete convergence theory. We introduce three definitions of the discrete measure of non-compactness and show that in case of separable spaces these definitions are equivalent.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 580, 9 - 23.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ ТИПА (А)

О. Карма
Тартуский государственный университет

В статье установлена устойчивость суммарной алгебраической кратности собственных значений и доказаны некоторые асимптотические оценки скорости сходимости приближённых собственных значений к точным в случае регулярной аппроксимации фредгольмовых оператор-функций, голоморфных типа (А) (см. [8]).

§ 1. Введение

Рассмотрим проблему собственных значений $A(z)u=0$ и её аппроксимации $B_i(z)x_i=0$, $i\in J$, где $A(\cdot)$ и $B_i(\cdot)$ - фредгольмовы оператор-функции, голоморфные типа (A) на некоторой области $G\subseteq\mathbb{C}$, и $(B_i(\cdot))_{i\in J}$ аппроксимирует $A(\cdot)$ регулярно на G. Используя аналогичные результаты [6, 3, 16, 1, 2, 7, 18] для голоморфных (ограниченно-голоморфных) на G оператор-функций, мы докажем сходимость спектров оператор-функций $B_i(\cdot)$ к спектру оператор-функции $A(\cdot)$ (теорема 3.1), устойчивость суммарной алгебраической кратности собственных значений в любом компакте $G_0\subset G$ (теорема 3.2) и установим некоторые асимптотические оценки скорости сходимости приближенных собственных значений к точным (теорема 3.3). С маленькими различиями в предпосылках сходимость спектров доказана, например, в [12] (см. замечание 3.1).

§ 2. Обозначения и предположения

2.1. Индексация. Во всей статье основное множество индексов J - некоторое фиксированное непустое направленное множество: на J задано рефлексивное, транзитивное и антисимметричное бинарное отношение порядка $\succcurlyeq$, причем для любых $i_1, i_2 \in J$ существует $i_3 \in J$ такой, что $i_3 \succcurlyeq i_1$, $i_3 \succcurlyeq i_2$. Конфинальные подмножества J, наделенные индуцированным отношением порядка, и только они, будут отмечены $J', J'', \ldots$ и называться (под)последовательностями индексов. (Напомним, что $J' \subseteq J$ конфинальна с J, если для любой $i \in J$ существует $i' \in J'$ такой, что $i' \succcurlyeq i$).

Для последовательности чисел $(a_i)_{i \in J'}$ запись $a_i \to a$ $(i \in J')$ означает, что $(a_i)_{i \in J'}$ сходится к a:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists i(\varepsilon) \in J' : i \succcurlyeq i(\varepsilon),\ i \in J' \Rightarrow |a_i - a| \le \varepsilon .$$

Через c обозначены константы ($c < \infty$), вообще говоря, в разных местах разные.

2.2. <u>Пространства и связь между ними</u>. Везде в этой статье $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i$ – комплексные банаховы пространства (операторы $A(z)$ действуют из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}$, а аппроксимирующие операторы $B_i(z)$ из $\mathcal{X}_i$ в $\mathcal{Y}_i$). Элементы пространства $\mathcal{U}$ будут обозначены через $u, u', u_1, \ldots$, элементы пространства $\mathcal{X}_i$ через $x_i, x_i', \ldots$ и т.д. Если это не может вызывать недоразумения, то нормы во всех пространствах будут, как правило, обозначены одинаково через $\|\cdot\|$.

Мы будем предполагать, что фиксированы некоторые семейства (связывающих) отображений $p_i : \mathcal{U} \to \mathcal{X}_i$ и $q_i : \mathcal{V} \to \mathcal{Y}_i$, $i \in J$, удовлетворяющие следующим требованиям (см. [15]):

I° p_i, $i \in J$ определены на всем $\mathcal{U}$ и q_i, $i \in J$ – на всем $\mathcal{V}$,

2° $\|p_i u\|_{\mathcal{X}_i} \to \|u\|_{\mathcal{U}} \quad (i \in J) \quad \forall u \in \mathcal{U}$,

$\|q_i v\|_{\mathcal{Y}_i} \to \|v\|_{\mathcal{V}} \quad (i \in J) \quad \forall v \in \mathcal{V}$,

3° $\|p_i(au + a'u') - ap_i u - a'p_i u'\|_{\mathcal{X}_i} \to 0 \quad (i \in J)$,

$\|q_i(av + a'v') - aq_i v - a'q_i v'\|_{\mathcal{Y}_i} \to 0 \quad (i \in J)$

$$\forall a, a' \in C, \ \forall u, u' \in \mathcal{U}, \ \forall v, v' \in \mathcal{V} .$$

Будем говорить, что последовательность $(x_i)_{i \in J'}$ с $x_i \in \mathcal{X}_i$ сходится к $u \in \mathcal{U}$ и писать $x_i \to u$ $(i \in J')$, если $\|x_i - p_i u\| \to 0$ $(i \in J')$. Последовательность $(x_i)_{i \in J'}$ будем называть компактной и писать $(x_i)_{i \in J'}$ комп., если любая ее подпоследовательность $(x_i)_{i \in J''}$, $J'' \subseteq J'$ содержит некоторую подпоследовательность $(x_i)_{i \in J'''}$, $J''' \subseteq J''$ которая сходится к некоторому $u \in \mathcal{U}$. Аналогично введем понятия сходимости и компактности для последовательностей $(y_i)_{i \in J'}$ с $y_i \in \mathcal{Y}_i$.

Отметим, что определенная таким образом сходимость имеет много общих свойств с обычной сходимостью - предел единствен, предельный процесс линеен,

$$x_i \to u \ (i \in J') \Rightarrow \|x_i\| \to \|u\| \ (i \in J'),$$

$$x_i \to 0 \ (i \in J') \Leftrightarrow \|x_i\| \to 0 \ (i \in J') \quad \text{и т.д.}$$

<u>Замечание 2.I.</u> Фактически операторы p_i и q_i не появляются в утверждениях теорем 3.I и 3.2. Поэтому для этих утверждений достаточно вместо I^0) требовать, чтобы p_i и q_i были бы заданы на некоторых всюду плотных подмножествах $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ и $V' \subset V$, соответственно, (см. [I5]). Для оценок скорости сходимости (теорема 3.3) важно (см. выражение (3.3) для ε_i в п. 3.3), чтобы $\mathcal{U}' \supset \mathcal{J}(A, z_0)$, $V' \supset A(z)\mathcal{J}(A, z_0)$ $\forall z \in \partial G_0$, где $\mathcal{J}(A, z_0)$ - корневое подпространство для $A(\cdot)$ в z_0 (определенное в п. 3.3).

2.3. <u>Оператор-функции и аппроксимация</u>. Через $\mathcal{B}(\mathcal{U}, V)$ мы будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, определенных на всем $\mathcal{U}$ и со значениями в V. Пространство линейных замкнутых операторов с плотной в $\mathcal{U}$ областью определения и со значениями в V обозначим $\mathcal{C}(\mathcal{U}, V)$; для $A \in \mathcal{C}(\mathcal{U}, V)$ через $\mathcal{D}(A)$ обозначим его область определения.

Заданная на некоторой области $G \subseteq \mathbb{C}$ оператор-функция $A(\cdot): G \to \mathcal{C}(\mathcal{U}, V)$ называется (см. [8]) голоморфной типа (A), если

I) $\mathcal{D}(A(z))$ не зависит от z: $\mathcal{D}(A(z)) = \mathcal{D}$ $\forall z \in G$,

2) функция $\langle A(\cdot)u, \ell \rangle = \ell(A(\cdot)u): G \to \mathbb{C}$ голоморфна на G для каждого $u \in \mathcal{D}$, $\ell \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$.

Мы будем предполагать, что G - некоторая фиксированная область в $\mathbb{C}$ (т.е. G - открытое односвязное подмножество $\mathbb{C}$) и на ней заданы оператор-функции $A(\cdot): G \to \mathcal{C}(\mathcal{U}, V)$ и $B_i(\cdot): G \to \mathcal{C}(X_i, Y_i)$ $i \in J$, причём выполнены следующие требования:

4^0 $A(\cdot)$ и $B_i(\cdot)$, $i \in J$ - голоморфны типа (A) на G; обозначим $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A(z))$, $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}(B_i(z))$,

5^0 $A(z)$ и $B_i(z)$, $i \in J$ - фредгольмовы с индексом 0 для каждого $z \in G$,

6^0 резольвентное множество $\rho(A) = \{z \in G : \exists A^{-1}(z) \in \mathcal{B}(V, \mathcal{U})\}$ не пусто,

7^0 существует точка $z^0 \in G$ такая, что имеют место следующие утверждения 7а) и 7б):

7а) на любом компакте $G_0 \subset G$ выполняется неравенство

$$\|x_i\| + \|B_i(z)x_i\| \le M(\|x_i\| + \|B_i(z^0)x_i\|) \quad \forall x_i \in \mathcal{D}_i,\ z \in G_0,\ i \in J, \qquad (2.1)$$

где константа $M < \infty$ может зависеть только от G_0,

7б) если для последовательности $(x_i)_{i \in J}$ при некотором $z \in G$ имеет место сходимость

$$\|x_i\| + \|B_i(z)x_i\| \to 0 \quad (i \in J), \qquad (2.2)$$

то такая же сходимость имеет место при z^0,

8^0 последовательность $(B_i(\cdot))_{i \in J}$ согласована с $A(\cdot)$ на G (см. [15, 12]), т.е. для каждого $u \in \mathcal{D}$ существует такая последовательность $(x_i^u)_{i \in J}$, что

$$x_i^u \in \mathcal{D}_i,\quad x_i^u \to u,\quad B_i(z)x_i^u \to A(z)u \quad (i \in J) \quad \forall z \in G,$$

9^0 пара $(A(z), B_i(z)_{i \in J})$ является a-регулярной (см. [10, 11, 4]) при каждом $z \in G$ (ср. [12]):

$$\|x_i\| \le 1,\quad x_i \in \mathcal{D}_i,\quad B_i(z)x_i \to v \quad (i \in J') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists J'' \subset J',\ u \in \mathcal{D}:\ x_i \to u\ (i \in J''),\ A(z)u = v.$$

Требования 7^0–9^0 означают, что $(B_i(\cdot))_{i \in J}$ аппроксимирует $A(\cdot)$ регулярно на G (относительно $(p_i)_{i \in J}$ и $(q_i)_{i \in J}$).

Замечание 2.2. Требования регулярной аппроксимации, фредгольмовости и голоморфности типа (A) не являются совершенно независимыми (см., например, [11, 12, 1, 16, 17, 2]).

Замечание 2.3. Рассмотрим частный случай, когда $A(z) \in \mathcal{B}(U, V)$ и $B_i(z) \in \mathcal{B}(X_i, Y_i)$, $i \in J$ при всех $z \in G$. Тогда из 4^0 следует, что $A(\cdot)$ и $B_i(\cdot)$, $i \in J$ голоморфные (ограниченно-голоморфные) оператор-функции на G. Не трудно убедиться, что требованию регулярной аппроксимации можно в этом случае дать, например, следующий эквивалентный вид, используемый в [6, 3, 16, 7]:

7^{00} $\|B_i(z)\|$ равномерно ограничены на любом компакте $G_0 \subset G$:

$$\sup\{\|B_i(z)\| : z \in G_0,\ i \in J\} \le c,$$

где константа c может зависеть только от G_0,

8^{00} для всех $z \in G$ последовательность $(B_i(z))_{i \in J}$ сходится к $A(z)$: $x_i \to u\ (i \in J) \Rightarrow B_i(z)x_i \to A(z)u\ (i \in J)$,

9^{00} для всех $z \in G$ последовательность $(B_i(z))_{i \in J}$ регулярна: $\|x_i\| \le 1$, $i \in J$, $(B_i(z)x_i)_{i\in J}$ комп. $\Rightarrow (x_i)_{i\in J}$ комп.

Замечание 2.4. Из требования 7^0 следует (см. [8]), что на любом компакте $G_0 \subset G$ при каждом $i \in J$ и при любых $z_1, z_2 \in G$ выполняется неравенство

$$(\|x_i\| + \|B_i(z_1)x_i\|)/(\|x_i\| + \|B_i(z_2)x_i\|) \le M_1 \quad \forall x_i \in \mathcal{D}_i, \tag{2.3}$$

с константной M_1, зависящей только от G_0. Значит, (2.I) выполнено при любом $z' \in G$ на месте 2^0. Часть 7а) требования 7^0 состоит в том, чтобы при каждом G_0 существовала константа, общая для всех $i \in J$ (т.е. чтобы оценка (2.I) была бы равномерная по i).

Замечание 2.5. Часть 7а) требования 7^0 равносильна следующему требованию:

существует точка $z^0 \in G$ такая, что выполнены следующие утверждения: 7а(I) и 7а(2)

7а(I) $x_i \in \mathcal{D}_i$, $z_i \in G$, $z_i \to z_0 \in G$ $(i \in J) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|(B_i(z_i) - B_i(z_0))x_i\| \le c\,(\|x_i\| + \|B_i(z^0)x_i\|),$$

где константа c может зависеть от $(z_i)_{i\in J}$, но не от $(x_i)_{i\in J}$.

7а(2) $x_i \in \mathcal{D}_i$, $\|x_i\| + \|B_i(z^0)x_i\| \to 0$ $(i \in J) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|x_i\| + \|B_i(z)x_i\| \to 0 \quad (i \in J) \quad \forall z \in G.$$

(Из 7а(I) следует, что при каждом $z \in G$ имеет место оценка (2.I), а из 7а(2) вытекает, что на любом компакте $G_0 \subset G$ константа M может быть выбрана общей для всех $z \in G_0$.)

При этом, как не трудно убедиться рассуждением от противного, достаточно требовать выполнения 7а(I) только для тех $(x_i)_{i\in J}$ при которых $\|x_i\| + \|B_i(z^0)x_i\| \to 0$ $(i \in J)$.

Замечание 2.6. Из требований 7^0 и 8^0 следует, что, если для последовательности $(x_i)_{i\in J}$ с $x_i \in \mathcal{D}_i$, $x_i \to u$ $(i \in J)$ при некотором $z' \in G$ имеет сходимость $B_i(z')x_i \to A(z')u$ $(i \in J)$, то $B_i(z)x_i \to A(z)u$ $(i \in J)$ при всех $z \in G$.

(Действительно, по 8^0 имеем $\|x_i - x_i^u\| \to 0$, $\|B_i(z')(x_i - x_i^u)\| \to 0$ $(i \in J)$. Значит, по 7^0, также $\|B_i(z^0)(x_i - x_i^u)\| \to 0$, $\|B_i(z)(x_i - x_i^u)\| \to 0$ $(i \in J)$, откуда следует, что $B_i(z)x_i \to A(z)u$ $(i \in J)$ так как $B_i(z)x_i^u \to A(z)u$ $(i \in J)$.)

§ 3. Результаты

3.1. Сходимость спектров. Напомним (см., например, [5, 9, 12, 16]), что спектр $\sigma(A)=G\setminus\rho(A)$ голоморфной типа (A) и фредгольмовой на G оператор-функции $A(\cdot)$ с $\rho(A)\neq\phi$ не имеет точек сгущения в G и состоит из собственных значений (т.е. для каждого $z_0\in\sigma(A)$ существует $u_0\neq 0$ такой, что $A(z_0)u_0=0$).

Для ограниченных подмножеств $G_1, G_2\subset G$ обозначим

$$\Delta(G_1,G_2)=\max\left\{\sup_{z_1\in G_1}\inf_{z_2\in G_2}|z_1-z_2|,\ \sup_{z_2\in G_2}\inf_{z_1\in G_1}|z_1-z_2|\right\}.$$

Теорема 3.1 (ср. [12]). Пусть выполнены все требования 1^0–9^0 параграфа 2. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) $z_0\in\sigma(A)\Rightarrow\exists\,(z_i)_{i\in J},\ i_1\in J:\ z_i\to z_0\ (i\in J),\ z_i\in\sigma(B_i)\ (i\geq i_1)$,

2) $z_i\in\sigma(B_i),\ z_i\to z_0\ (i\in J')\Rightarrow z_0\in\sigma(A)$,

3) для любого компакта $G_0\subset G,\ G_0\not\subset\rho(A)$ с границей $\partial G_0\subset\rho(A)$ существует индекс $i_1(G_0)\in J$ такой, что $G_0\not\subset\rho(B_i)$, $\partial G_0\subset\rho(B_i)$ для всех $i\geq i_1(G_0)$ и

$$\Delta(\sigma(A)\cap G_0,\ \sigma(B_i)\cap G_0)\to 0\quad(i\in J,\ i\geq i_1(G_0)).\qquad(3.1)$$

Замечание 3.1. Доказательства утверждений о сходимости спектров нетрудно получаются и без перехода на случай ограниченно-голоморфных оператор-функций, и непосредственное исследование позволяет установить более точные результаты, чем теорема 3.1 (см., например, [12]).

3.2. Устойчивость суммарной алгебраической кратности собственных значений. Напомним сперва понятие (полной) алгебраической кратности собственного значения $z_0\in\sigma(A)$.

Корневыми цепочками длины $n+1$ (для $A(\cdot)$ в точке z_0) называются цепочки элементов $(u^0, u^1,\dots,u^n)$ с $u^0\neq 0$, удовлетворяющие соотношениям

$$A(z_0)u^0=0,$$
$$A'(z_0)u^0+A(z_0)u^1=0,$$
$$\dots$$
$$\frac{1}{n!}A^{(n)}(z_0)u^0+\frac{1}{(n-1)!}A^{(n-1)}(z_0)u^1+\dots+A(z_0)u^n=0.$$

Кратность $\nu(u^0)$ собственного элемента u^0 есть число, равное максимальной длине корневых цепочек, начинающихся с u°. Отметим, что для голоморфной типа (A) фредгольмовой оператор-функции $\max\{\nu(u^\circ): A(z_0)u^\circ=0,\ u^\circ\neq 0\}=\varkappa(A,z_0)$, где $\varkappa(A,z_0)<\infty$ – порядок полюса z_0 для $A^{-1}(\cdot)$ (см., например, рассуждения в [9]).

Базис $(u_1^0,\dots,u_m^0)$ ядра $N(A,z_0)=\{u: A(z_0)u=0\}$ называется каноническим базисом ядра, если каждый u_k^0, $k=\overline{1,m}$ имеет максимальную возможную кратность среди элементов из $N(A,z_0)$, линейно-независимых с $(u_1^0,\dots,u_{k-1}^0)$. Не трудно убедиться, что при этом вектор $(\nu(u_1^\circ),\dots,\nu(u_m^\circ))$ не зависит от выбора канонического базиса. (Полная) алгебраическая кратность собственного значения $z_0\in\delta(A)$ определена как сумма

$$\nu(z_0,A)=\nu(u_1^\circ)+\dots+\nu(u_m^\circ),$$

где $(u_1^\circ,\dots,u_m^\circ)$ – некоторый канонический базис ядра $N(A,z_0)$.

Для любого компакта $G_0\subset G$ с границей $\partial G_0\subset \varsigma(A)$ обозначим

$$\nu(G_0,A)=\begin{cases}0, \text{ если } & G_0\cap\delta(A)=\phi,\\ \sum\limits_{z\in\delta(A)\cap G_0}\nu(z,A), & \text{если } G_0\cap\delta(A)\neq\phi.\end{cases}$$

Теорема 3.2. Пусть выполнены все требования I$^\circ$–9° параграфа 2 и $q_i\in\mathcal{B}(V,Y_i)$, $i\in\mathcal{I}$. Тогда для любого компакта $G_0\subset G$ с границей $\partial G_0\subset\varsigma(A)$ существует индекс $i_2(G_0)$ такой, что

$$i\succcurlyeq i_2(G_0)\Rightarrow \partial G_0\subset\varsigma(B_i),\quad \nu(G_0,B_i)=\nu(G_0,A). \tag{3.2}$$

Замечание 3.2. В действительности для справедливости (3.2) вместо требования $q_i\in\mathcal{B}(V,Y_i)$ достаточно требовать существование такого семейства операторов $q_i':V\to Y_i$, что

I) $\|q_iv-q_i'v\|\to 0\ \ (i\in\mathcal{I})\ \ \forall v\in V$,

2) q_i', $i\in\mathcal{I}$ –линейны и ограничены на некотором подпространстве

$$V_0\supseteq A(z)\mathcal{J}(A,z_0)\quad \forall z\in G_0,\ z_0\in\delta(A)\cap G_0,$$

где $\mathcal{J}(A,z_0)$ – корневое подпространство для $A(\cdot)$ в точке z_0 (определение $\mathcal{J}(A,z_0)$ дано в п. 3.3). При этом q_i' могут быть заданы только на некотором всюду плотном в V множестве (см. [15]). Отметим, что, хотя $\dim\mathcal{J}(A,z_0)<\infty$, минимальный V_0 в общем может оказаться бесконечномерным, как видно из примера в замечании 3.4.

3.3. Оценки скорости сходимости собственных значений. Напомним сперва понятие корневого подпространства. Элементы корневых цепочек (см. п. 3.2) называются корневыми элементами, и линейная оболочка всех корневых элементов для $A(\cdot)$ в z_0 называется корневым подпространством $\mathcal{J}(A,z_0)$ для $A(\cdot)$ в z_0.

При этом для голоморфной типа (A) фредгольмовой оператор-функции $\dim \mathcal{J}(A,z_0)<\infty$ (см. [9, 13]).

Для любого компакта $G_0\subset G$ с границей $\partial G_0\subset \rho(A)$ и такого, что $G_0\cap \sigma(A)=\{z_0\}$ обозначим

$$\varepsilon_i=\sup\{\|[B_i(z)p_i-q_iA(z)]u\|:z\in\partial G_0,\ u\in\mathcal{J}(A,z_0),\|u\|=1\}. \tag{3.3}$$

Теорема 3.3. Пусть выполнены все требования I^0–9^0 параграфа 2. Пусть G_0 – некоторый компакт в G с границей $\partial G_0\subset \subset \rho(A)$ и такой, что $G_0\cap\sigma(A)=\{z_0\}$.

Пусть $p_i,\ i\in\mathcal{I}$ линейны на $\mathcal{J}(A,z_0)$, $p_i\mathcal{J}(A,z_0)\subset\mathcal{D}_i$ и существует такой $z'\in G$, что $B_i(z')p_iu\to A(z')u\ (i\in\mathcal{I})$ $\forall u\in\mathcal{J}(A,z_0)$.

Пусть, наконец, $q_i\in\mathcal{B}(V,Y_i)$, $i\in\mathcal{I}$.

Тогда существует индекс i_3 такой, что

$$i\geq i_3\Rightarrow\partial G_0\subset\rho(B_i),\ G_0\cap\sigma(B_i)\neq\phi,\ \nu(G_0,B_i)=\nu(z_0,A), \tag{3.4}$$

и что имеют место следующие оценки (3.5), (3.7) и (3.8):

$$|z_0-\bar z_i|\leq c\varepsilon_i, \tag{3.5}$$

где $\bar z_i$ – взвешенное соответственно алгебраическим кратностьям арифметическое среднее собственных значений $B_i(\cdot)$ в G:

$$\bar z_i=\sum_{z_i\in\sigma(B_i)\cap G_0} z_i\,\nu(z_i,B_i)/\nu(G_0,B_i); \tag{3.6}$$

$$\max\{|z_0-z_i|:z_i\in\sigma(B_i)\cap G_0\}\leq c\varepsilon_i^{1/\varkappa(A,z_0)}, \tag{3.7}$$

где $\varkappa(A,z_0)$ – порядок полюса z_0 для $A^{-1}(\cdot)$;

$$\max\{|z_0-z_i|:z_i\in\sigma(B_i)\cap G_0\}\leq c\varepsilon_i^{1/l_i}, \tag{3.8}$$

где l_i – число попарно различных собственных значений $B_i(\cdot)$ в G.

При этом $\varepsilon_i\to 0\ (i\in\mathcal{I})$.

Замечание 3.3. Если в G_0 больше одного собственного значения $A(\cdot)$, то из оценки (3.4) вытекает аналогичная оценка для взвешенного среднего $\bar z_0$ собственных значений $A(\cdot)$ в G_0 (в (3.3) приходится взять $\sup$ по $u\in U_0$, где

$$\mathcal{U}_0 = \{ u \in \mathcal{J}(A, z_0) : z_0 \in \delta(A) \cap G_0 \},$$

а в теореме 3.3 предполагать, что для каждого $z_0 \in \delta(A) \cap G_0$ операторы $p_i, i \in J$ линейны на $\mathcal{J}(A, z_0)$, $p_i \mathcal{J}(A, z_0) \subset \mathcal{D}_i$ и $B_i(z') p_i u \to A(z') u$ $(i \in J)$ $\forall u \in \mathcal{U}_0$).

Замечание 3.4. Для справедливости оценок теоремы 3.3 вместо требования $q_i \in \mathcal{B}_i(V, Y_i)$ в действительности достаточно требовать, чтобы q_i были бы линейны и ограничены на некотором подпространстве $V_0 \supseteq A(z) \mathcal{J}(A, z_0)$ $\forall z \in G_0$. Отметим, однако, что минимальный V_0 в общем может оказаться бесконечномерной, как видно из следующего примера:

$$\mathcal{U} = V = \ell_2, \quad A(z)(a_1, a_2, \dots) = \left(a_1 z, a_2 + \frac{a_1}{2!} z^2, a_3 + \frac{a_1}{3!} z^3, \dots\right).$$

(Здесь $\delta(A) = \{0\}$, $N(A, 0) = \mathcal{J}(A, 0) = \{(a_1, 0, 0, \dots) : a_1 \in \mathbb{C}\}$).

Замечание 3.5. Оценки теоремы 3.3 останутся в силе и в случае, если в них ε_i заменить следующей величиной:

$$\varepsilon_i'' = \sup \{ \| [B_i(z) p_i - q_i A(z)] u^k(z) \| : z \in \partial G_0, \ k = \overline{1, m} \}, \tag{3.9}$$

где $u^k(\cdot), k = \overline{1, m}$ – некоторая каноническая система корневых многочленов для $A(\cdot)$ в z_0:

$$u^k(z) = u_k^0 + (z - z_0) u_k^1 + \dots + (z - z_0)^{n_k} u_k^{n_k}, \quad n_k = \nu(u_0^k) - 1,$$

где $(u_1^0, \dots, u_m^0)$ – некоторый канонический базис в $N(A, z_0)$. и $(u_k^0, u_k^1, \dots, u_k^{n_k})$ – корневые цепочки максимальной длины.

§ 4. Доказательство теорем

4.I. Идея доказательства. Вводя на $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_i, i \in J$ нормы графика мы переходим к схеме регулярной аппроксимации голоморфных (ограниченно-голоморфных) фредгольмовых оператор-функций (с теми же спектрами и корневыми цепочками). А для таких оператор-функций теоремы 3.I–3.3 имеют место (см. [6, 7]), см. также замечание 2.3); теоремы 3.I, 3.2 и оценка (3.7) доказаны также в [I, 2, 3, I6].

4.2. Переход к голоморфным оператор-функциям. Введем на $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_i, i \in J$ следующие нормы графика:

$$|||u||| = \|u\|_{\mathcal{U}} + \|A(z^0) u\|_V, \quad u \in \mathcal{D}, \tag{4.I}$$

$$|||x_i||| = \|x_i\|_{X_i} + \|B_i(z^0) x_i\|_{Y_i}, \quad x_i \in \mathcal{D}_i, \ i \in J, \tag{4.2}$$

с z°, оговоренной в требовании 7^0.

Наделенные этими нормами множества $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_i$, $i\in\mathcal{J}$ будут банаховыми пространствами; обозначим их через $\mathcal{U}^\circ$ и $\mathcal{X}_i^\circ$, соответственно. Операторы $A(z)$ и $B_i(z)$, $i\in\mathcal{J}$, рассматриваемые как операторы из $\mathcal{U}^\circ$ в V и из X_i° в $\mathcal{Y}_i$, соответственно, обозначим через $A^\circ(z)$ и $B_i^\circ(z)$.

При этом $A^\circ(z)\in\mathcal{B}(\mathcal{U}^\circ, V)$ и $B_i^\circ(z)\in\mathcal{B}(\mathcal{X}_i^\circ,\mathcal{Y}_i)$ (так как $\|u\|\le|||u|||$, то из замкнутости $A(z)$ следует замкнутость $A^\circ(z)$, а $A^\circ(z)$ определен на всем $\mathcal{U}^\circ$; аналогично можно рассуждать для $B_i^\circ(z)$), а оператор-функции $A^\circ(\cdot): G\to\mathcal{B}(\mathcal{U}^\circ,V)$ и $B_i^\circ(\cdot): G\to\mathcal{B}(\mathcal{X}_i^\circ,\mathcal{Y}_i)$ голоморфны (ограниченно-голоморфны) (см.[8]). Кроме того, ввиду части 7а) требования 7^0, на каждом компакте $G_0\subset G$ выполняется неравенство

$$\sup\{\|B_i^\circ(z)\| : z\in G_0,\ i\in\mathcal{J}\}\le M, \tag{4.3}$$

так как

$$\|B_i^\circ(z)\| = \sup\{\|B_i^\circ(z)x_i\|/(\|x_i\|+\|B_i^\circ(z)x_i\|) : x_i\in\mathcal{D}_i, x_i\ne 0\} \underset{7a)}{\le}$$

$$\underset{7a)}{\le} \sup\{M\cdot\|B_i(z)x_i\|/(\|x_i\|+\|B_i(z)x_i\|) : x_i\in\mathcal{D}_i, x_i\ne 0\}.$$

Поэтому и для $(B_i^\circ(\cdot))_{i\in\mathcal{J}}$ выполнено требование 7^0 (с любым $z^\circ\in G$).

Отметим также, что $A^\circ(z)$ и $B_i^\circ(z)$, $i\in\mathcal{J}$, $z\in G$ – фредгольмовы с индексом 0 (так как таковыми предполагались $A(z)$ и $B_i(z)$), причем собственные значения и цепочки корневых элементов $A^\circ(\cdot)$ и $B_i^\circ(\cdot)$, $i\in\mathcal{J}$ совпадают с теми же величинами для $A(\cdot)$ и $B_i(\cdot)$, $i\in\mathcal{J}$, соответственно (здесь соответствующие элементы из $\mathcal{D}$ и $\mathcal{U}^\circ$ отождествлены). Поэтому для каждого $z_0\in\sigma(A)=\sigma(A^\circ)$ имеем

$\nu(z_0,A)=\nu(z_0,A^\circ)$, $\varkappa(A,z_0)=\varkappa(A^\circ,z_0)$, $\mathcal{J}(A,z_0)=\mathcal{J}(A^\circ,z^\circ)$ а для каждой $z_i\in\sigma(B_i)=\sigma(B_i^\circ)$ аналогично $\nu(z_i,B_i)=\nu(z_i,B_i^\circ)$ и т.д.

4.3. <u>Связывание новых пространств и новых оператор-функций</u>. Выберем для каждого $u\in\mathcal{D}$ некоторую последовательность $(x_i^u)_{i\in\mathcal{J}}$ из условия согласованности 8^0 и введем операторы $\rho_i^\circ: \mathcal{U}^\circ\to\mathcal{X}_i^\circ$ соотношениями

$$\rho_i^\circ u = x_i^u, \quad u\in\mathcal{U}^\circ,\ i\in\mathcal{J}. \tag{4.4}$$

При этом в условиях теоремы 3.3 для всех $u\in\mathcal{J}(A,z_0)$ полагаем $x_i^u=\rho_i u$, $i\in\mathcal{J}$ (по замечанию 2.6 для $u\in\mathcal{J}(A,z_0)$

имеем $B_i(z)p_i u \to A(z)u \quad (i\in J)\ \forall z\in G$. Введенное соотношением (4.4) семейство $(p_i^0)_{i\in J}$ удовлетворяет требованиям, наложенным в п. 2.2 на связывающие отображения:

1^0 $p_i^0,\ i\in J$ определены на всем U^0,

2^0 $|||p_i^0 u||| = \|x_i^u\| + \|B_i(z^0)x_i^u\| \xrightarrow[(i\in J)]{}$

$\xrightarrow[(i\in J)]{} \|u\| + \|A(z^0)u\| = |||u||| \quad \forall u\in U^0$,

3^0 $|||p_i^0(au+a'u') - ap_i^0 u - a'p_i^0 u'||| =$

$= \|x_i^+ - ax_i^u - a'x_i'\| + \|B_i(z^0)(x_i^+ - ax_i^u - a'x_i')\| \xrightarrow[(i\in J)]{}$

$\xrightarrow[(i\in J)]{} \|au+a'u' - au - a'u'\| + \|A(z^0)au + A(z^0)a'u' -$

$- aA(z^0)u - a'A(z^0)u'\| = 0 \quad \forall a,a'\in\mathbb{C},\ u,u'\in U^0$

(здесь $(x_i^+)_{i\in J}$ и $(x_i')_{i\in J}$ - последовательности, фиксированные при определении $p_i^0(au+a'u')$ и $p_i^0 u'$, соответственно).

Ясно, что для $(B_i^0(\cdot))_{i\in J}$ и $A^0(\cdot)$ условие согласованности 8^0 (с p_i^0 и $q_i,\ i\in J$) выполнено: $p_i^0 u\to u$, $B_i^0(z)p_i^0 u \to$ $\to A^0(z)u\ (i\in J)\ \forall u\in U^0, z\in G$. Более того, если $(x_i)_{i\in J}$ - некоторая последовательность, удовлетворяющая условию 8^0 для $A(\cdot)$ и $B_i(\cdot)$ (с p_i и $q_i,\ i\in J$):

$$\|x_i - p_i u\|\to 0,\quad \|B_i(z)x_i - q_i A(z)u\|\to 0 \quad (i\in J)\ \forall z\in G,$$

то эта же последовательность удовлетворяет условию 8^0 для $A^0(\cdot)$ и $B_i^0(\cdot)$ (с p_i^0 и $q_i,\ i\in J$):

$$|||x_i - p_i^0 u||| = \|x_i - x_i^u\| + \|B_i(z^0)(x_i - x_i^u)\| \xrightarrow[(i\in J)]{}$$

$$\xrightarrow[(i\in J)]{} \|u-u\| + \|A(z^0)u - A(z^0)u\| = 0,$$

$$\|B_i^0(z)x_i - q_i A^0(z)u\| = \|B_i(z)x_i - q_i A(z)u\| \to 0 \quad (i\in J)\ \forall z\in G$$

Наконец, пара $(A^0(z),(B_i^0(z))_{i\in J})$ регулярна для всех $z\in G$:

$|||x_i|||\le 1,\ x_i\in X_i^0,\ B_i^0(z)x_i\to v\ (i\in J')\Rightarrow$

$\Rightarrow \|x_i\|\le 1,\ x_i\in D_i,\ B_i(z)x_i\to v\ (i\in J')\underset{(9^0)}{\Rightarrow}$

$\underset{(9^0)}{\Rightarrow} \exists J''\subset J',\ u\in D:\ \|x_i - p_i u\|\to 0\ (i\in J''),\ A(z)u = v \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x_i - x_i^u\|\to 0,\ \|B_i(z)(x_i - x_i^u)\|\to 0\ (i\in J''),\ A(z)u = v \underset{(7^0)}{\Rightarrow}$

$\underset{(7^0)}{\Rightarrow} \|x_i - x_i^u\|\to 0,\ \|B_i(z^0)(x_i - x_i^u)\|\to 0\ (i\in J''),\ A(z)u = v \Rightarrow$

$\Rightarrow |||x_i - p_i^0 u|||\to 0\ (i\in J''),\ A(z)u = v.$

4.4. Доказательство теорем 3.I–3.3. Для построенных в п.4.2 оператор-функций $A^0(\cdot): G \to \mathcal{B}(U^0, V)$ и $B_i^0(\cdot): G \to \mathcal{B}(X_i^0, Y_i)$, $i \in J$ и последовательностей связывающих операторов $p_i^0: U^0 \to X_i^0$, $q_i: V \to Y_i$, $i \in J$ выполнены, таким образом, все требования I^0–9^0. Значит, для них теоремы 3.I–3.3 имеют место (см. [6, 7], а также [I, 2, 3, I6]). Так как $\delta(A) = \delta(A^0)$, $\delta(B_i) = \delta(B_i^0)$ и $\nu(G_0, A) = \nu(G_0, A^0)$, $\nu(G_0, B_i) = \nu(G_0, B_i^0)$, то тем самым теоремы 3.I и 3.2 доказаны. Для доказательства оценок теоремы 3.3 заметим, что $|||u||| \geq \|u\|$ и $p_i^0 u = p_i u$ на $\mathcal{J}(A, z_0)$.

Наконец, так как $\mathcal{J}(A, z_0)$ конечномерно, то существует константа K такая, что выполняются неравенства

$$\|u\| \leq |||u||| = \|u\| + \|A(z^0)u\| \leq K\|u\| \quad \forall u \in \mathcal{J}(A, z_0).$$

Поэтому $\varepsilon_i^0 \leq \varepsilon_i \leq K\varepsilon_i^0$, $i \in J$, где ε_i^0 определено соотношением

$$\varepsilon_i^0 = \sup\{\|[B_i^0(z)p_i - q_i A^0(z)]u\| : z \in \partial G_0,\ u \in \mathcal{J}(A^0, z_0),\ |||u||| = 1\}.$$

Значит, $(\varepsilon_i^0)_{i \in J}$ и $(\varepsilon_i)_{i \in J}$ сходятся к нулю одновременно (и с одинаковой скоростью).

§ 5. Дополнение: о переходе свойств аппроксимации

5.I. Переход условия a-регулярности. В пп. 4.I–4.3 были введены вспомогательные пространства U^0, X_i^0, линейные ограниченные операторы $A^0(z)$ и $B_i^0(z)$ и связывающие операторы p_i^0, $i \in J$. При этом для получения подходящих $B_i^0(\cdot)$ использовалось часть 7а) требования 7^0, а для определения p_i^0 – требование 8^0. Далее было показано, что если пара $(A(\cdot), (B_i(\cdot))_{i \in J})$ a-регулярна при каждом $z \in G$ (по отношению к p_i и q_i, $i \in J$) то и пара $(A^0(\cdot), (B_i^0(\cdot))_{i \in J})$ а-регулярна при каждом $z \in G$ (по отношению к p_i^0 и q_i, $i \in J$). Чтобы получить обратное утверждение, достаточно требовать выполнение, например, следующего добавочного условия (7в):

7в) $\forall z \in G\ \exists M'(z)$:

$$(\|x_i\| + \|B_i(z^0)x_i\|) \leq M'(\|x_i\| + \|B_i(z)x_i\|) \quad x_i \in \mathcal{D}_i,\ i \in J,$$

где z^0 определено в 7^0.

Как нетрудно проверить, условие 7в) эквивалентно части 7б) условия 7^0. Значит, при выполнении условий 7^0 и 8^0 пара $(A(\cdot), (B_i(\cdot))_{i \in J})$ a-регулярна при каждом $z \in G$ тогда и только тогда, когда таковой является пара $(A^0(\cdot), (B_i^0(\cdot))_{i \in J})$.

5.2. Переход условия устойчивости. Будем говорить, что $(B_i(\cdot))_{i\in J}$ устойчива на $\rho(A)$, если для любого компакта $G_0 \subset \rho(A)$ существуют индекс $i(G_0)$ и константа $c(G_0)$ такие, что $G_0 \subset \rho(B_i)$ при $i \geq i(G_0)$ и $\sup\{\|B_i^{-1}(z)\| : z \in G_0, i \geq i(G_0)\} \leq$
$\leq c(G_0)$.

Так как $\|x_i\| \leq |||x_i|||$, то ясно, что если $(B_i^0(\cdot))_{i\in J}$ устойчива на $\rho(A)$, то и $(B_i(\cdot))_{i\in J}$ устойчива на $\rho(A)$. Чтобы получить обратное утверждение, достаточно требовать выполнения, например, следующего добавочного условия 7г):

7г): на любом компакте $G_0 \subset \rho(A)$ выполняется неравенство

$$(\|x_i\| + \|B_i(z^0)x_i\|) \leq M'(\|x_i\| + \|B_i(z)x_i\|) \quad \forall x_i \in \mathcal{D}_i, \ z \in G_0, \ i \in J,$$

где константа M' может зависеть только от G_0, а z^0 определено в 7^0.

Требования 7^0 и 7г) естественно объединить и заменить следующим требованием 7':

7': на любом компакте $G_0 \subset G$ при любых $z_1, z_2 \in G_0$ выполняется неравенство

$$(\|x_i\| + \|B_i(z_1)x_i\|)/(\|x_i\| + \|B_i(z_2)x_i\|) \leq M_1, \ \forall x_i \in \mathcal{D}_i, \ i \in J,$$

где константа M_1 может зависеть только от G_0.

Итак, при выполнении условий 7' и 8^0 последовательность $(B_i(\cdot))_{i\in J}$ устойчива на $\rho(A)$ тогда и только тогда, когда таковой является $(B_i^0(\cdot))_{i\in J}$.

5.3. Связь между a-регулярностью и устойчивостью. Для ограниченно-голоморфных оператор-функций известно (см. [6, I, 2, I6]), что из требований 5^0, 6^0 и регулярной аппроксимации $A^0(\cdot)$ последовательностью $(B_i^0(\cdot))_{i\in J}$ на G следует устойчивость $(B_i^0(\cdot))_{i\in J}$ на $\rho(A)$. Значит, такое же утверждение имеет место и для оператор-функции $A(\cdot)$, $B_i(\cdot)$, $i \in J$, голоморфных типа (A). Но даже для ограниченно-голоморфных оператор-функций из I^0–8^0 и устойчивости $(B_i^0(\cdot))_{i\in J}$ на $\rho(A)$ следует a-регулярность только при всех $z \in \rho(A)$, а не при всех $z \in G$.

Литература

1. Вайникко Г., Анализ дискретизационных методов. Спецкурс. Тартуск. ун-т. Тарту, 1976.
2. Вайникко Г.М., Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений. Итоги науки и техн. Мат. анализ, 1979, 16, 5-53.
3. Вайникко Г.М., Карма О.О., О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1974, 14, № 6, 1393-1408.
4. Вайникко Г.М., Пискарев С.И., О регулярно согласованных операторах. Изв. вузов. Мат., 1977, № 10, 25-36.
5. Гохберг И.Ц., О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра. Докл. АН СССР, 1951, 78, №4, 629-632.
6. Карма О.О., Об аппроксимации оператор-функций и сходимости приближенных собственных значений. Канд. диссертация, Тарту, 1971.
7. Карма О.О., Асимптотические оценки скорости сходимости собственных значений при регулярной аппроксимации. Республиканский симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. Таллин, 1978, 37-38.
8. Като Т., Теория возмущения линейных операторов. Москва, 1972.
9. Трофимов В.П., О корневых подпространствах операторов, аналитически зависящих от параметра. Мат. исследования, 1968, 3, вып. 3, 117-125.
10. Browder, F., Approximation-Solvability of Nonlinear Functional Equations in Normed Linear Spaces. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1967, 26, № 1, 33-43.
11. Grigorieff, R.D., Über die Fredholm-Alternative bei linearen approximationsregulären Operatoren. Appl. Anal., 1972, 2, № 3, 217-227.
12. Grigorieff, R.D., Jeggle, H., Approximation von Eigenwertproblemen bei nichtlinearer Parameterabhängigkeit. Manuscr. math., 1973, 10, 245-271.

13. J e g g l e, H., W e n d l a n d, W., On the Discrete Approximation of Eigenvalue Problems with Holomorphic Parameter Dependence. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1977, A 78, № 1-2, 1-29.

14. S t u m m e l, F., Discrete convergence of mappings. Proc. Conference on Numerical Analysis. Dublin, August 1972. New York - London, 1973, 285-310.

15. S t u m m e l, F., Discrete Konvergenz linearer Operatoren I. Math. Ann., 1970, 190, 45-92.

16. V a i n i k k o, G., Funktionalanalysis der Diskretisierungsverfahren. Leipzig, 1976.

17. V a i n i k k o, G., Über Konvergenzbegriffe für lineare Operatoren in der Numerischen Mathematik. Math. Nachr., 1977, 78, 165-183.

18. W o l f, R., Zur Stabilität der algebraischer Vielfachheit von Eigenwerten von holomorphen Fredholm-Operatorfunktionen. Appl. Anal., 1979, 9, 165-177.

ON THE APPROXIMATION OF EIGENVALUE PROBLEMS FOR OPERATOR FUNCTIONS HOLOMORPHIC OF TYPE (A)

O. Karma

Summary

The approximation of the eigenvalue problem $A(z)u = 0$ for the Fredholm operator function holomorphic of type (A) [8] is studied. On the assumption of a regular approximation we prove the theorems about the approximation of the spectra (theorem 3.1), about the stability of the summary algebraic multiplicity of eigenvalues (theorem 3.2) and about the convergence rate of the approximate eigenvalues to the exact ones (theorem 3.3). For that purpose we reduce our problem to the case of holomorhic (bounded-holomorphic [8]) Fredholm operator functions and use the results known earlier for this case(see [6, 3, 16, 1, 2, 7]).

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 580, 24 - 30.

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА СЕТОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

Э. Тамме
Тартуский государственный университет

Задача Неймана для уравнения порядка $2m$ рассматривается в вариационной постановке и аппроксимируется на параллелепипедной сетке разностной задачей. Доказывается регулярная сходимость соответствующих разностных операторов к дифференциальному оператору. Из этого вытекает сходимость рассматриваемого метода сеток.

§ I. Задача Неймана

Пусть требуется решить задачу Неймана для уравнения

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{D}^{\alpha} (a_{\alpha\beta} \mathcal{D}^{\beta} u) = g$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшициевой границей (см., например, [3]). Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ - мульти-индексы и $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Эту задачу естественно рассматривать в вариационной постановке (см., например, [4]): найти $u \in H^m(\Omega)$ удовлетворяющую условию

$$a(u,v) := \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (a_{\alpha\beta} \mathcal{D}^{\beta} u, \mathcal{D}^{\alpha} v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H^m(\Omega), \tag{I}$$

где f - линейный непрерывный функционал на $H^m(\Omega)$ и

$$(u,v) = \int_{\Omega} u(x) v(x)\, dx .$$

Скалярное произведение и норму в действительном пространстве Соболева $H^m(\Omega)$ обозначим через

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha|\le m} (\mathcal{D}^{\alpha} u, \mathcal{D}^{\alpha} v); \quad \|u\|_m = \sqrt{(u,u)_m} .$$

Предположим, что $a_{\alpha\beta}$ - измеримые ограниченные действительные функции, удовлетворяющие при $|\alpha|=|\beta|=m$ условиям симметрии $a_{\alpha\beta}(x)=a_{\beta\alpha}(x)$ и сильной эллиптичности

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta \geq \varkappa \sum_{|\alpha|=m} t_\alpha^2 , \quad \varkappa>0 \quad \forall x\in\Omega , \tag{2}$$

где t_α - любые действительные числа.

Определим соотношением

$$a(u,v)=\langle Au,v\rangle \qquad \forall v\in H^m(\Omega) \tag{3}$$

линейный непрерывный оператор A из $H^m(\Omega)$ в сопряженное пространство $(H^m(\Omega))'$. Тогда задачу Неймана (I) можно задать и в виде $Au=f$.

Задача Неймана часто разрешима неоднозначно. Пусть $a_{\alpha\beta}(x)=0$, если $|\alpha|\leq k$ или $|\beta|\leq k$, где $k<m$. Тогда, очевидно, $a(u,v)=0$, если $u\in Q_k$ или $v\in Q_k$, где

$$Q_k=\{u:\ u=\sum_{|\alpha|\leq k} b_\alpha x^\alpha\}$$

- множество многочленов степени не выше k. Следовательно, $Au=A(u+v)$ и $\langle Au,v\rangle=0$ для любого $v\in Q_k$.

Чтобы достичь однозначной разрешимости задачи Неймана, введем подпространства

$$H^m_k(\Omega)=\{u\in H^m(\Omega):\ (u,v)=0 \quad \forall v\in Q_k\},$$

$$H^{-m}_k(\Omega)=\{u\in (H^m(\Omega))':\ \langle u,v\rangle=0 \quad \forall v\in Q_k\},$$

причем считаем, что $H^m_{-1}(\Omega)=H^m(\Omega)$ и $H^{-m}_{-1}(\Omega)=(H^m(\Omega))'$. Несложно проверить, что в данном случае A является линейным непрерывным оператором также из $H^m_k(\Omega)$ в $H^{-m}_k(\Omega)$.

§ 2. Метод сеток

Покроем пространство R^n равномерной сеткой

$$R^n_h=\{x_i=(i_1h_1,\dots,i_nh_n):\ h_\nu>0;\ i_\nu=0,\pm1,\dots\}$$

и выделим множество внутренних узлов

$$\Omega_h=\{x_i\in R^n_h:\ \Pi_i\in\Omega\},$$

где $\Pi_i=\{x=(x_1,\dots,x_n):\ (i_\nu-\tfrac{1}{2})h_\nu<x_\nu<(i_\nu+\tfrac{1}{2})h_\nu\}$.
Введем еще обозначение

$$\Omega_{hk}=\{x_i\in\Omega_h:\ J^\alpha x_i\in\Omega_h \quad \forall\alpha\geq0,\ |\alpha|\leq k\},$$

где $J^\alpha=J_1^{\alpha_1}\dots J_n^{\alpha_n}$, $J_\nu x_i=x_i+e_\nu h_\nu$, $e_\nu=(\delta_{\nu1},\dots,\delta_{\nu n})$ и $\delta_{\nu\mu}$ - символ Кронекера.

Обозначим через $H^m(\Omega_h)$ множество действительных сеточных функций u_h, определенных на сетке Ω_h, и преобразуем это множество в гильбертово пространство, определяя в нем скалярное произведение

$$(u_h, v_h)_m = \sum_{|\alpha|\le m} (\partial^\alpha u_h, \partial^\alpha v_h), \quad (\partial^\alpha u_h, \partial^\alpha v_h) = \sum_{\Omega_{h|\alpha|}} \partial^\alpha u_h \, \partial^\alpha v_h \, h_1 \dots h_n$$

и соответствующую норму $\|u_h\|_m = \sqrt{(u_h, u_h)_m}$, где $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ и $\partial_\nu u_h(x_i) = [u_h(J_\nu x_i) - u_h(x_i)]/h_\nu$.

Аппроксимируем задачу (I) разностной задачей: найти $u_h \in H^m(\Omega_h)$, удовлетворяющую условию

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (p_h a_{\alpha\beta} \partial^\beta u_h, \partial^\alpha v_h) = \langle f_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in H^m(\Omega_h), \tag{4}$$

где f_h – линейный функционал на $H^m(\Omega_h)$,

$$(p_h u)(x_i) = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \int_{\Pi_i} u(x)\,dx, \tag{5}$$

$$(p_h a_{\alpha\beta} \partial^\beta u_h, \partial^\alpha v_h) = \sum_{\Omega_{hk}} p_h a_{\alpha\beta} \partial^\beta u_h \, \partial^\alpha v_h \, h_1 \dots h_n$$

и $k = \max(|\alpha|, |\beta|)$.

Определив соотношением

$$a_h(u_h, v_h) = \langle A_h u_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in H^m(\Omega_h) \tag{6}$$

линейный оператор A_h из $H^m(\Omega_h)$ в $(H^m(\Omega_h))'$, можем разностную схему (4) записать в виде $A_h u_h = f_h$.

Пусть $a_{\alpha\beta}(x) = 0$, если $|\alpha| \le k$ или $|\beta| \le k$, где $k < m$. Тогда $a_h(p_h u, p_h v) = 0$, если $u \in Q_k$ или $v \in Q_k$, следовательно, оператор A_h преобразует подпространство

$$H_k^m(\Omega_h) = \{u_h \in H^m(\Omega_h) : (u_h, p_h v) = 0 \quad \forall v \in Q_k\}$$

в подпространство

$$H_k^{-m}(\Omega_h) = \{u_h \in (H^m(\Omega))' : \langle u_h, p_h v \rangle = 0 \quad \forall v \in Q_k\}.$$

Считаем, что $H_{-1}^m(\Omega_h) = H^m(\Omega_h)$ и $H_{-1}^{-m}(\Omega_h) = (H^m(\Omega))'$.

§ 3. Сходимость метода сеток

При доказательстве сходимости метода (4) воспользуемся результатами из работ Г.М. Вайникко [I, 2]. Для этого введем понятия дискретной сходимости и докажем, что A_h сходится к A регулярно, если $h = (h_1, \dots, h_n) \to 0$ как некоторая последовательность.

Можно проверить, что оператор p_h, определенный формулой (5), является линейным непрерывным оператором из $H^m(\Omega)$ в $H^m(\Omega_h)$, причем

$$\|p_h u\|_m \to \|u\|_m \quad \text{при} \quad h\to 0 \quad \forall u\in H^m(\Omega),$$
$$\|p_h u\|_{-m} \to \|u\|_{-m} \quad \text{при} \quad h\to 0 \quad \forall u\in H^0(\Omega), \tag{7}$$

где

$$\|u\|_{-m} = \sup_{\|v\|_m\le 1}\langle u,v\rangle, \quad \|u_h\|_{-m} = \sup_{\|v_h\|_m\le 1}\langle u_h,v_h\rangle .$$

Отсюда следует, что p_h можно расширить на $(H^m(\Omega))'$ как линейный неограниченный оператор, удовлетворяющий условию (7).

При помощи оператора p_h введем понятия сильной и слабой $\pm m$ -сходимости (при $h\to 0$):

$$u_h \xrightarrow{\pm m} u \Leftrightarrow \|u_h - p_h u\|_{\pm m}\to 0 ,$$
$$u_h \overset{\pm m}{\dashrightarrow} u \Leftrightarrow \{v_h \xrightarrow{\mp m} v \Rightarrow \langle u_h,v_h\rangle \to \langle u,v\rangle\}$$

и соответствующие им понятия сильной и слабой $\pm m$ -компактности (см. [I]).

Аналогично [I] доказываются следующие результаты.

Лемма. При $m\ge 0$ справедливы утверждения:

$$u_h \xrightarrow{-m} u \Leftrightarrow \{v_h \overset{m}{\dashrightarrow} v \Rightarrow \langle u_h,v_h\rangle \to \langle u,v\rangle\}, \tag{8}$$
$$u_h \overset{m}{\dashrightarrow} u \Leftrightarrow \{v_h \xrightarrow{m} v \Rightarrow (u_h,v_h)_m \to (u,v)_m\},$$
$$u_h \xrightarrow{m} u \Leftrightarrow \partial^\alpha u_h \xrightarrow{0} \mathcal{D}^\alpha u \quad \forall\alpha,\ |\alpha|\le m, \tag{9}$$
$$u_h \overset{m}{\dashrightarrow} u \Leftrightarrow \partial^\alpha u_h \dashrightarrow \mathcal{D}^\alpha u \quad \forall\alpha,\ |\alpha|\le m, \tag{IO}$$
$$\partial^\alpha u_h \xrightarrow{0} \mathcal{D}^\alpha u,\ a\in L_\infty(\Omega) \Rightarrow p_h a\partial^\alpha u_h \xrightarrow{0} a\mathcal{D}^\alpha u, \tag{II}$$

$\|u_h\|_{m+1}\le \text{const} \Rightarrow (u_h)$ m -компактна ,

$$u_h \overset{m+1}{\dashrightarrow} u \Rightarrow u_h \xrightarrow{m} u, \tag{I2}$$

где

$$\partial^\alpha u_h \xrightarrow{0} \mathcal{D}^\alpha u \Leftrightarrow \|\partial^\alpha u_h - p_h\mathcal{D}^\alpha u\|\to 0,\ \|\partial^\alpha u_h\| = \sqrt{(\partial^\alpha u_h,\partial^\alpha u_h)},$$
$$\partial^\alpha u_h \overset{0}{\dashrightarrow} \mathcal{D}^\alpha u \Leftrightarrow \{\partial^\alpha v_h \xrightarrow{0} \mathcal{D}^\alpha v \Rightarrow (\partial^\alpha u_h,\partial^\alpha v_h)\to(\mathcal{D}^\alpha u,\mathcal{D}^\alpha v)\}.$$

Пусть выполнены предположения, сделанные в § I и операторы A и A_h определены соотношениями (3) и (6). Тогда справедлива следующая

Теорема I. Последовательность операторов (A_h) сходится к A регулярно.

<u>Доказательство</u>. Сходимость

$$A_h \to A \Leftrightarrow \{u_h \xrightarrow{m} u \Rightarrow A_h u_h \xrightarrow{-m} Au\}$$

можно в силу (8) определить и эквивалентным соотношением

$$A_h \to A \Leftrightarrow \{u_h \xrightarrow{m} u \Rightarrow [v_h \xrightarrow{-m} v \Rightarrow a_h(u_h, v_h) \to a(u,v)]\}.$$

Но правая импликация верна в силу утверждений (9)-(II) леммы. Регулярность сходимости можно доказать следующим образом. Определим соотношениями

$$\langle \hat{A}u, v\rangle = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\beta u, \mathcal{D}^\alpha v) + \varkappa \sum_{|\alpha|<m} (\mathcal{D}^\alpha u, \mathcal{D}^\alpha v) \quad \forall v \in H^m(\Omega),$$

$$\langle \hat{A}_h u_h, v_h\rangle = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (p_h a_{\alpha\beta} \partial^\beta u_h, \partial^\alpha v_h) + \varkappa \sum_{|\alpha|<m} (\partial^\alpha u_h, \partial^\alpha v_h) \quad \forall v_h \in H^m(\Omega_h)$$

операторы $\hat{A}$ и $\hat{A}_h$. Оказывается, что $\hat{A}_h \to \hat{A}$ устойчиво и $A_h - \hat{A}_h \to A - \hat{A}$ компактно, откуда следует, что $A_h \to A$ регулярно (см. [2]). Действительно, сходимости $\hat{A}_h \to \hat{A}$ и $A_h - \hat{A}_h \to A - \hat{A}$ доказывается так же, как и сходимость $A_h \to A$. Из условий (2) простым образом получается оценка $\langle \hat{A}_h u_h, u_h\rangle \geq \varkappa (u_h, u_h)_m \quad \forall u_h \in H^m(\Omega_h)$, откуда следует существование обратного оператора $\hat{A}_h^{-1}$ и оценка $\|\hat{A}_h^{-1}\| \leq \frac{1}{\varkappa}$, а отсюда устойчивость сходимости $\hat{A}_h \to \hat{A}$. Из (8) и (12) легко получается, что

$$u_h \xrightarrow{-m} u \Rightarrow (A_h - \hat{A}_h) u_h \to (A - \hat{A}) u,$$

а отсюда следует компактность сходимости $A_h - \hat{A}_h \to A - \hat{A}$ (см. [I]). Теорема доказана.

Из теоремы I следует сходимость соответствующего метода сеток при решении неоднородной краевой задачи и проблемы собственых значений (см. [2, 5]). Например, верна

<u>Теорема 2.</u> Пусть в задаче (I) $a_{\alpha\beta}(x) = 0$ если $|\alpha| \leq k$ или $|\beta| \leq k$ $(-1 \leq k < m)$ и пусть эта задача при $f = 0$ имеет в $H^m_k(\Omega)$ лишь тривиальное решение $u = 0$. Тогда задача (I) имеет при $f \in H^{-m}_k(\Omega)$ единственное решение $u \in H^m_k(\Omega)$ и найдется такая $h_0 > 0$, что задача (4) имеет при $|h| = (h_1^2 + \ldots + h_n^2)^{1/2} < h_0$ и $f_h \in H^{-m}_k(\Omega_h)$ единственное решение $u_h \in H^m_k(\Omega_h)$. Если $f_h \xrightarrow{-m} f$, то $u_h \xrightarrow{m} u$.

<u>Доказательство</u>. Для определения дискретных сходимостей

в подпространствах введем соотношением

$$q_h u = p_h u - \sum_{|\alpha|\le k} b_{\alpha h} p_h x^\alpha$$

оператор $q_h \in L(H_k^m(\Omega), H_k^m(\Omega_h))$, где $b_{\alpha h}$ найдены из системы

$$\sum_{|\alpha|\le k} b_{\alpha h}(p_h x^\alpha, p_h x^\beta) = (p_h u, p_h x^\beta), \quad |\beta| \le k. \tag{13}$$

Так как $(p_h x^\alpha, p_h x^\beta) \to (x^\alpha, x^\beta)$ и $(p_h u, p_h x^\beta) \to (u, x^\beta) = 0$ при $h \to 0$, $|\beta| \le k$ и $u \in H_k^m(\Omega)$, то система (13) при достаточно малых h имеет решение $b_{\alpha h}$ и $b_{\alpha h} \to 0$ при $h \to 0$ и $|\alpha| \le k$. Следовательно, дискретные сходимости $u_h \xrightarrow{\pm m} u$ можно ввести и при помощи оператора q_h и из теоремы 1 вытекает регулярная сходимость операторов $A_h \in L(H_k^m(\Omega_h), H_k^{-m}(\Omega_h))$ к оператору $A \in L(H_k^m(\Omega), H_k^{-m}(\Omega))$. Из регулярной сходимости в силу теоремы 4.2 работы [2] следуют утверждения теоремы.

Литература

1. В а й н и к к о Г., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
2. В а й н и к к о Г.М., Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений. Итоги науки и техн. Мат. анализ, 16, 1979, 5-53.
3. Н и к о л ь с к и й С.М., Приближение функции многих переменных и теоремы вложения. Москва, 1969.
4. О б э н Ж.П., Приближенное решение эллиптических краевых задач. Москва, 1977.
5. Т а м м е Э., О регулярной сходимости разностных аппроксимаций задачи Дирихле. Изв. АН Эст. ССР. Физ., мат., 1977, 26, № 1, 3-8.

ÜBER DIE KONVERGENZ DES DIFFERENZENVERFAHRENS FÜR DIE LÖSUNG DES NEUMANNSCHEN PROBLEMS

E. Tamme

Zusammenfassung

Es wird das Neumannsche Problem der elliptischen Gleichung 2m-ter Ordnung auf dem beliebigen Gebiet in der Variationsform betrachtet und die reguläre Konvergenz der Differenzenapproximationen dieses Problems bewiesen. Aus der regulären Konvergenz erfolgt die Konvergenz der entsprechenden Differenzenverfahren für die Lösung des inhomogenen Problems und der Eigenwertaufgabe.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 580, 31 - 37.

НЕРАВЕНСТВО КОЭРЦИТИВНОСТИ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

М. Фишер
Тартуский государственный университет

При изучении численных методов и в различных других приложениях очень полезными являются неравенства коэрцитивности как в непрерывном, так и в дискретном случае. Для линейного эллиптического оператора второго порядка под неравенством коэрцитивности понимают неравенства вида

$$\|Au\|_0 \geq \gamma \|u\|_2 - c\|u\|_1 ,$$

где $\|u\|_k$ означает норму в $H^k = W^{k,2}$. Для задачи Дирихле ($u|_\Gamma = 0$) такое неравенство хорошо известно. Разностные варианты такого оператора установлены в [1, 2]. Для нелинейных задач, насколько нам известно, неравенства коэрцитивности не выведены даже в непрерывном случае. В данной работе устанавливается неравенство коэрцитивности для двух- и трехмерного эллиптического дифференциального оператора второго порядка со слабыми нелинейностями в коэффициентах. Используются рассуждения, которые допускают перенос на дискретный случай.

В единичном кубе

$$\Omega = \{x_i : 0 < x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n\},\quad n = 2, 3$$

с границей Γ рассмотрим дифференциальный оператор

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),\quad u = u(x) \in H^2(\Omega),\ a_{ij}(x,u) = a_{ji}(x,u) \qquad (1)$$

причем $u|_\Gamma = 0$. Через $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ обозначено частный случай ($p = 2$) пространства Соболева $W^{k,p}(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |\mathcal{D}^\alpha u|^p dx\right)^{1/p},\quad 1 \leq p < \infty,\ k > 0.$$

Норму в пространстве $H^k(\Omega)$ обозначим далее $\|\cdot\|_k$.

Примем, что оператор эллиптический, т.е. существует такое число $\tau_a > 0$, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u)\, y_i y_j \geq \tau_a \sum_{i=1}^{n} y_i^2 ,$$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \ \forall u \in [-a,a], \ \forall a > 0, \quad (2)$$

где y_i любые действительные числа.

Теорема. Пусть $a_{ij}(x,u) = a_{ji}(x,u)$ дифференцируемы и

$$|a_{ij}(x,u)|, \ \left|\frac{\partial a_{ij}(x,u)}{\partial x_k}\right|, \ \left|\frac{\partial a_{ij}(x,u)}{\partial u}\right|, \ \left|\frac{\partial^2 a_{ij}(x,u)}{\partial x_k \partial u}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial^2 a_{ij}(x,u)}{\partial u^2}\right| \leq d_a, \ k=1,\dots,n, \ \forall x \in \Omega, \ u \in [-a,a], \quad (3)$$

d_a – положительная постоянная, зависящая от a. Пусть выполнено условие эллиптичности (2). Тогда для любых $u, v \in H^2(\Omega)$, $\|u\|_2 \leq a$, $\|v\|_2 \leq a$, $u|_\Gamma = v|_\Gamma = 0$ имеет место неравенство коэрцитивности в форме

$$\|Au - Av\| \geq \gamma_a \|u-v\|_2 - c_1 \|u-v\|_1 , \quad (4)$$

где γ_a, c_1 положительные постоянные, не зависящие от u и v.

Доказательство. Рассмотрим норму

$$\|Au - Av\|_0 = \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,v)\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big)\Big\|_0 =$$

$$= \|f + g\|_0 \geq \|f\|_0 - \|g\|_0 ,$$

где

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,u)\frac{\partial (u-v)}{\partial x_j}\Big),$$

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\big(a_{ij}(x,u) - a_{ij}(x,v)\big)\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big].$$

Найдя производные, запишем

$$\|f\|_0 \geq \|f_1\|_0 - \|f_2\|_0 - \|f_3\|_0 ,$$

где

$$f_1 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u)\frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$f_2 = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}(x,u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (u-v)}{\partial x_j} ,$$

$$f_3 = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}(x,u)}{\partial x_i} \frac{\partial (u-v)}{\partial x_j} .$$

Теперь $\|f_1\|_0$ можно оценивать как в линейном случае; мы приведем новое простое доказательство. Для этого рассмотрим норму

$$\Big\| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_i \partial x_j} \Big\|_0^2 = \int_\Omega \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} a_{ij} a_{k\ell} \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_k \partial x_\ell} dx .$$

Допустим временно, что u и v имеют непрерывные производные до третьего порядка. Интегрированием по частям перебросим один раз производную $\frac{\partial}{\partial x_j}$ и другой раз $\frac{\partial}{\partial x_k}$:

$$\Big\| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_i \partial x_j} \Big\|_0^2 = J_1 + J_2 + J_\Gamma ,$$

где

$$J_1 = \int_\Omega \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} a_{ij} a_{k\ell} \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_j \partial x_\ell} dx ,$$

$$J_2 = \int_\Omega \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \frac{\partial (u-v)}{\partial x_i} \Big[\frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_j \partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ij} a_{k\ell}) - \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_k \partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} a_{k\ell}) \Big] dx ,$$

$$J_\Gamma = \int_\Gamma \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} a_{ij} a_{k\ell} \frac{\partial (u-v)}{\partial x_i} \Big[\frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_j \partial x_\ell} \cos \widehat{\nu x_k} - \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_k \partial x_\ell} \cos \widehat{\nu x_j} \Big] d\Gamma ,$$

где $\widehat{\nu x_j}$ – угол между внешней нормалью ν к границе Γ и положительным направлением оси x_j. Благодаря тому, что границей Γ является у нас поверхность единичного куба, то на границе

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \cos \widehat{\nu x_i} ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_\ell} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial \nu} \cos \widehat{\nu x_\ell} , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_\ell} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial \nu} \cos \widehat{\nu x_\ell}$$

и

$$J_\Gamma = \int_\Gamma \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \Big(\frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_k \partial \nu} \cos \widehat{\nu x_i} \cos \widehat{\nu x_j} \cos \widehat{\nu x_\ell} - \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_j \partial \nu} \cos \widehat{\nu x_i} \cos \widehat{\nu x_k} \cos \widehat{\nu x_\ell} \Big) d\Gamma = 0$$

(члены сокращаются).

Учитывая предположение (3), нетрудно оценить интеграл J_2:

$$|J_2| < c_a \|u-v\|_1 \|u-v\|_2 .$$

При помощи ε-неравенства

$$|ab| \le \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0 \text{ - достаточно малое число})$$

вытекает из последнего

$$|J_2| < \varepsilon \|u-v\|_2^2 + c_a \|u-v\|_1^2 .$$

Для оценки интеграла J_1 введем обозначения

$$\frac{\partial^2(u-v)}{\partial x_i \partial x_j} = z_{ij} , \quad Z = (z_{ij}), \quad A = (a_{ij}), \quad i,j = 1,\dots,n .$$

На основе симметричности матриц A и Z оценим сумму в интеграле J_1:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij} a_{kl} \frac{\partial^2(u-v)}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2(u-v)}{\partial x_j \partial x_l} = \sum_{i,l=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{kl} z_{ik}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_{jl}\Big) =$$

$$= \sum_{i,l=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{lk} z_{ki}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_{jl}\Big) = \sum_{i,l=1}^{n} (AZ)_{li} (AZ)_{il} = \sum_{l=1}^{n} (AZAZ)_{ll} =$$

$$= Sp(AZAZ) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (AZAZ) = \sum_{i=1}^{n} [\lambda_i (AZ)]^2 \ge \lambda_{max}^2 (AZ),$$

где $Sp(AZAZ)$ означает след матрицы $AZAZ$, а $\lambda_i(AZ)$ и $\lambda_{max}(AZ)$ означают соответственно собственные значения и максимальное по модулю собственное значение матрицы AZ. Из симметричности A, Z и положительной определенности матрицы A (условия эллиптичности (2)) вытекает вещественность собственных значений $\lambda_i(AZ)$, причем

$$\lambda_{max}(AZ) = \max_{x \in R^n} \frac{|(Zx,x)|}{(A^{-1}x,x)} \ge \frac{1}{\|A^{-1}\|} \max_{x \in R^n} \frac{|(Zx,x)|}{\|x\|^2} = \frac{\|Z\|}{\|A^{-1}\|} \ge \tau_a \|Z\| .$$

Так как

$$\bar{c}_1 \sum_{i,j=1}^{n} z_{ij}^2 \le \|Z\|^2 \le \bar{c}_2 \sum_{i,j=1}^{n} z_{ij}^2 ,$$

где $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ положительные постоянные, то

$$J_1 \ge \beta_a \sum_{i,j=1}^{n} \Big\| \frac{\partial^2(u-v)}{\partial x_i \partial x_j} \Big\|_0^2 = \beta_a \left(\|u-v\|_2^2 - \|u-v\|_1^2 \right),$$

где β_a положительная постоянная.

Следовательно

$$\|R_1\|_0 \ge \beta_a' \|u-v\|_2 - c_a \|u-v\|_1 ,$$

γ_a положительная постоянная.

Далее, так как, с одной стороны, из теоремы вложения Соболева вытекает, что

$$\|u\|_{W^{1,4}} \le c\|u\|_K, \qquad K \ge \frac{3}{2} \text{ при } n=2,\ K \ge \frac{7}{4} \text{ при } n=3 \tag{5}$$

и, с другой стороны, при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$

$$\|u\|_K \le \varepsilon\|u\|_2 + c(\varepsilon)\|u\|_1, \quad 1 < K < 2, \tag{6}$$

нетрудно оценить нормы $\|f_2\|_0$ и $\|f_3\|_0$:

$$\|f_2\|_0 \le c_a\|u\|_{W^{1,4}}\|u-v\|_{W^{1,4}} \le \varepsilon\|u\|_2\|u-v\|_2 + c_a\|u\|_2\|u-v\|_1,$$

$$\|f_3\| \le c_a\|u-v\|_1 .$$

Таким образом

$$\|f\|_0 \ge \gamma_a'\|u-v\|_2 - \varepsilon\|u\|_2\|u-v\|_2 - c_a(1+\|u\|_2)\|u-v\|_1 .$$

Займемся теперь оценкой величины g. Найдя производные, получим

$$\|g\|_0 \le \|g_1\|_0 + \|g_2\|_0 + \|g_3\|_0 ,$$

где

$$g_1 = \sum_{i,j=1}^{n}[a_{ij}(x,u) - a_{ij}(x,v)]\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$g_2 = \sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial a_{ij}(x,u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ij}(x,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]\frac{\partial v}{\partial x_j},$$

$$g_3 = \sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial a_{ij}(x,u)}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ij}(x,v)}{\partial x_i}\right]\frac{\partial v}{\partial x_j} .$$

Учитывая, что

$$a_{ij}(x,u) - a_{ij}(x,v) = \frac{\partial a_{ij}(x,\theta u+(1-\theta)v)}{\partial u}(u-v), \quad 0<\theta<1$$

и обозначив $b_{ij} = \dfrac{\partial a_{ij}(x,\theta u+(1-\theta)v)}{\partial u}$, получим

$$\|g_1\|_0 = \Big\|\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(u-v)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\Big\|_0 \le c_a\|u-v\|_C\|v\|_2 \le$$

$$\le \varepsilon\|u-v\|_2\|v\|_2 + c_a\|u-v\|_1\|v\|_2 .$$

Здесь мы использовали теорему Соболева

$$\|u\|_C \le c\|u\|_\ell,\ \ell > 1 \text{ при } n=2,\ \ell > \frac{3}{2} \text{ при } n=3 \tag{7}$$

и соотношение (6).

Вновь, учитывая, что

$$\frac{\partial a_{ij}(x,u)}{\partial u} - \frac{\partial a_{ij}(x,v)}{\partial v} = \frac{\partial^2 a_{ij}(x,\theta u+(1-\theta)v)}{\partial^2 u}(u-v), \quad 0<\theta<1$$

и обозначив $c_{ij} = \dfrac{\partial^2 a_{ij}(x, \theta u + (1-\theta)v)}{\partial^2 u}$ получим при помощи неравенств (5), (6), (7)

$$\|g_2\|_0 = \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}(x,v)}{\partial v} \frac{\partial (u-v)}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + c_{ij}(u-v) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \Big\|_0 \leq$$

$$\leq C_a \left(\|u-v\|_{W^{1,4}} \|v\|_{W^{1,4}} + \|u-v\|_C \|u\|_{W^{1,4}} \|v\|_{W^{1,4}} \right) \leq$$

$$\leq \varepsilon \|u-v\|_2 \left(\|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2 \right) + C_a \|u-v\|_1 \left(\|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2 \right),$$

$$\|g_3\|_0 = \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{ij}(x, \theta u + (1-\theta)v)}{\partial x_i \partial u} (u-v) \frac{\partial v}{\partial x_j} \Big\|_0 \leq$$

$$\leq C_a \|u-v\|_{W^{0,4}} \|v\|_{W^{1,4}} \leq C_a \|u-v\|_1 \|v\|_2 .$$

Следовательно

$$\|g\|_0 \geq \varepsilon \|u-v\|_2 \left(\|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2 \right) + C_a \|u-v\|_1 \left(\|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2 \right)$$

и

$$\|Au - Av\|_0 \geq \gamma_a' \|u-v\|_2 - \left(C_a \|u-v\|_1 + \varepsilon \|u-v\|_2 \right) \left(\|u\|_2 + \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2 \right).$$

Так как $\|u\|_2$ и $\|v\|_2$ ограничены, то неравенство (4) доказано для гладких u и v.

Если $u_n \to u$ по норме $H^2(\Omega)$, то согласно теореме вложения (7) $u_n \to u$ равномерно, а вместе с этим

$$a_{ij}(x, u_n(x)) \to a_{ij}(x, u(x)) \quad \text{равномерно в } \Omega .$$

Это влечет за собой сходимость $Au_n \to Au$ в L_2. Поэтому неравенство (4) для произвольных $u, v \in H^2(\Omega)$ вытекает из того же неравенства для гладких u_n, v_n совершив передельный переход $u_n \to u$, $v_n \to v$ в $H^2(\Omega)$.

Теорема доказана.

Литература

1. Дьяконов Е.Г., Разностные методы решения краевых задач. Вып. I, Москва, 1971.
2. Соболевский П.Е., Тиунчик М.Ф., О разностном методе приближенного решения эллиптических уравнений. Тр. мат. фак. Воронежск. ун-та, 1970, вып. 4, 117-127.

DIE UNGLEICHUNG DER KOERZITIVITÄT FÜR DEN SCHWACH NICHTLINEAREN ELLIPTISCHEN DIFFERENTIALOPERATOR ZWEITER ORDNUNG

M. Fischer

Zusammenfassung

In diesem Artikel stellt man die Ungleichung der Koerzitivität für den zwei- und dreidimensionalen elliptischen Differentialoperator mit den schwachen Nichtlinearitäten in den Koeffizienten fest. Es werden Überlegungen benutzt, die eine Übertragung für den diskreten Fall zulassen.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, I98I, 580, 38 - 5I.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

В. Ривкинд
Ленинградский государственный университет
Б. Шифрин
Тартуский государственный университет

Вариационно-разностные методы в настоящее время находят свое приложение к задачам гидродинамики. Для уравнений Навье—Стокса метод конечных элементов рассматривался, например, в работах [3, 7, 8] - в основном при условии прилипания на границе.

В данной работе исследуется применение этого метода к двум близким задачам со свободной границей [1] и к задаче о течении двухслойной жидкости. При этом рассмотрен случай решения в криволинейных координатах - с введением соответствующих элементов.

Ниже мы используем стандартные обозначения:

$$\|u\|_{0,\Omega} := \|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad |u|_{m,\Omega} := \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D_x^{(\alpha)} u\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2}, \quad \|u\|_{m,\Omega} := \Big(\sum_{\ell=0}^{m} |u|_{\ell,\Omega}^2\Big)^{1/2}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1; \alpha_2)$ - мультииндекс, $D_x^{(\alpha)} u$ - соответствующая частная производная порядка $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2$ по x. Эти нормы и полунормы аналогичным образом вводятся для вектор-функций $v = (v_1; v_2)$.

Мы также полагаем

$$v_{i,k} := \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (i,k = 1,2), \quad \nabla u \cdot \nabla v := \sum_{i,k=1}^{2} u_{i,k} \cdot v_{i,k} .$$

---

1) Эти задачи могут быть опорными при изучении случая, когда граница неизвестна.

§ I. Основная задача и ее аппроксимация

I.I. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ищутся функции $u = (u_1; u_2)$ и p такие, что

$$\nu \Delta u - \operatorname{grad} p = f, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{в } \Omega;$$

$$u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \tau T n|_{\partial\Omega} = 0. \tag{I}$$

Здесь n, τ - орты нормали и касательной к $\partial\Omega$; T - тензор напряжений с компонентами $t_{ik} = -p\delta_{ik} + \nu(u_{i,k} + u_{k,i})$.

Пусть $H = H(\Omega)$- замыкание множества $H(\Omega) := \{v \in (C^1(\Omega))^2 : v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}$ по норме $\|v\|_H := |v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i,k=1}^{2} \|v_{i,k}\|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2}$. Это - гильбертово пространство со скалярным произведением

$$[u, v]_H := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Рассмотрим билинейную форму $E(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{2} (u_{i,k} + u_{k,i})(v_{i,k} + v_{k,i}) dx$

Форма $E(u,v)$ ограничена и положительно определена в H, т.е. $\exists \gamma, \gamma' > 0$:

$$\gamma \|u\|^2_H \le E(u,u) \le \gamma' \|u\|^2_H. \tag{2}$$

Замечание I. Точнее, (2) имеет место, если область Ω отлична от круга с центром в начале координат; в противном случае требуется небольшая модификация пространства $H(\Omega)$ (см. [5]).

Обозначим через $J = J(\Omega)$ подпространство соленоидальных вектор-функций из H: $J = \{v \in H : \operatorname{div} v = 0\}$. Формула Грина с гладкими соленоидальными u, η (см. [I], стр. 73) позволяет придать задаче (I) следующую (слабую) форму. Требуется найти такую функцию $u = (u_1, u_2)$ что[2]

$$u \in J(\Omega), \quad -(\nu/2) E(u, \eta) = (f, \eta) \quad \forall \eta \in J(\Omega). \tag{3}$$

Возможна и другая форма задачи. Ищется пара $(u; p)$ такая, что

$$(u; p) \in J(\Omega) \times L_2(\Omega), \ -(\nu/2)E(u, \eta) + (p, \operatorname{div} \eta) = (f, \eta) \quad \forall \eta \in H(\Omega). \tag{4}$$

Здесь уже не требуется $\operatorname{div} \eta = 0$. Ясно, что (4) $\Longrightarrow$ (3). Верно и обратное (см. [5, 2]), так что обе формы эквивалентны.

Ниже считаем $f \in L_2(\Omega)_2$ что обеспечит существование и не-

---

[2] Через $(\cdot,\cdot)$ ниже обозначаем скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ или его векторный аналог.

обходимую гладкость решения[3] (см. [5]).

1.2. Пусть $\delta = G_h$ – некоторое разбиение области Ω на элементы: $\delta_h = \{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^N$, $\Omega = \bigcup_{\mathcal{K}\in\delta} \mathcal{K}$. Положим $\Phi_h = \Phi_h^{(m)} = \{q \in L_2(\Omega)\,;\ q|_{\mathcal{K}} \in P_m(\mathcal{K})\ \forall \mathcal{K} \in \delta_h\}$, где $P_m(\mathcal{K})$ – множество полиномов степени $\le m$ в $\mathcal{K}$.

Пусть H_h – некоторый конечномерный аналог пространства $H(\Omega)$, связанный с разбиением δ_h. Введем подпространство приближенно соленоидальных функций: $J_h := \{u \in H_h : (q, \operatorname{div} u) = 0\ \ \forall q \in \Phi_h\}$. Итак, для $u \in J_h$ имеем $\operatorname{div} u \approx 0$ в следующем смысле:

$$\int_{\mathcal{K}} q_m \operatorname{div} u\, dx = 0 \qquad \forall q_m \in P_m(\mathcal{K}). \tag{5}$$

Дискретный аналог задачи (3) при условии $H_h \subset H(\Omega)$ имеет следующий вид. Ищется функция u_h^* такая, что

$$u_h^* \in J_h\,, \quad -(\nu/2)\, E(u_h^*, \eta) = (f, \eta) \qquad \forall \eta \in J_h\,. \tag{6}$$

Решение u_h^* существует и единственно в силу (2). Оценка точности u_h^* осложняется тем, что $J_h \not\subset J(\Omega)$.

<u>Теорема 1</u>. Пусть $(u^*; p) \in J(\Omega) \times L_2(\Omega)$ – решение задачи (4); $u_h^* \in J_h$ – приближенное решение. Тогда[4]

$$\|u^* - u_h^*\|_H \le C\,\Big(\inf_{v\in J_h} \|u^* - v\|_H + \inf_{q\in \Phi_h} \|p - q\|_{0,\Omega}\Big) \tag{7}$$

Доказательству предпошлем следующее замечание

<u>Замечание 2</u>. Пусть V – подпространство гильбертова пространства X с нормой $|\cdot| := \|\cdot\|_X$ и скалярным произведением $[\cdot,\cdot]$. Обозначим $V^\circ := \{v \in V : |v| = 1\}$. Имеем для $\forall z \in V$: $z = (z - P_V z) + P_V z$, где $P_V z \in V$ – ортогональная проекция z на V. Ясно, что $|P_V z| = \sup_{\eta\in V^\circ} [P_V z, \eta] = \sup_{\eta \in V^\circ} [z, P_V \eta] = \sup_{\eta\in V^\circ} [z, \eta]$.

Поэтому верна следующая вспомагательная оценка:

$$|z| \le |z - P_V z| + |P_V z| = \inf_{w\in V} |z - w| + \sup_{\eta \in V^\circ} [z, \eta]. \tag{7'}$$

---

[3] При этом u определено однозначно; p – с точностью до постоянного слагаемого.

[4] Ниже через C обозначаем различные положительные постоянные, не зависящие от $\mathcal{K} \in \delta_h$ и от h.

Доказательство теоремы I. Из свойств формы $E(u,v)$ следует, что $|u|:=E(u,u)^{1/2}$ – новая норма в H. Полагая $z=u^*-u_h^*$, нетрудно получить из (7'), что

$$|u^*-u_h^*|\le \inf_{v\in J_h}|u^*-v|+\sup_{\eta\in J_h^\circ}[u^*-u_h^*,\eta]. \qquad (7'')$$

Воспользовавшись для решений u^*, u_h^* основными тождествами (4), (6) получим:

$$[u^*-u_h^*,\eta]=E(u^*-u_h^*,\eta)=\frac{2}{\nu}(p,\operatorname{div}\eta).$$

В свою очередь, условие $\eta\in J_h$ означает, что $\forall q\in\Phi_h$

$$|(p,\operatorname{div}\eta)|=|(p-q,\operatorname{div}\eta)|\le\|p-q\|_{0,\Omega}\cdot\|\operatorname{div}\eta\|_{0,\Omega}.$$

Отметим далее, что при $\eta\in V^\circ(|\eta|=1)$ имеем (учитывая (2)):

$$\|\operatorname{div}\eta\|_{0,\Omega}\le\sqrt{2}\,\|\eta\|_H\le\sqrt{2}\,(\gamma')^{1/2}|\eta|=\sqrt{2\gamma'}$$

Таким образом, $\displaystyle\sup_{\eta\in J_h^\circ}[u^*-u_h^*,\eta]\le\frac{2\sqrt{2\gamma'}}{\nu}\inf_{q\in\Phi_h}\|p-q\|$.

Теперь (7″) мы можем переписать в виде

$$|u^*-u_h^*|\le C\left(\inf_{v\in J_h}|u^*-v|+\inf_{q\in\Phi_h}\|p-q\|_{0,\Omega}\right)$$

$$\left(C=\max\left\{1,\frac{2}{\nu}\sqrt{2\gamma'}\right\}\right).$$

Этой оценкой теорема доказана, поскольку, согласно (2), нормы $|\cdot|$ и $\|\cdot\|_H$ эквивалентны.

Замечание 3. Можно обобщить конструкцию J_h, отказавшись от требования (5) для $K\in\delta'\subset\delta$. Тогда, обозначая $\mathcal{D}=\bigcup_{K\in\delta'}K$, получим при $p\in C(\Omega)$:

$$\|u^*-u_h^*\|_H\le C\left(\inf_{v\in J_h}\|u^*-v\|_H+\inf_{q\in\Phi_h}\|p-q\|_{0,\Omega}+(\operatorname{mes}\mathcal{D})^{1/2}\cdot\|p\|_{C(\Omega)}\right).$$

2. Обобщенный интерполянт и элементы специального типа

2.I. Пусть элемент $K\in\delta_h$ – треугольник или четырехугольник или состоит из таких подэлементов; S – некоторое конечномерное пространство функций в Ω, причем $S|_K\subset C(K)$ $S|_K\supset P_{r-1}(K)$. Число r здесь назовем, следуя [6], степенью пространства S. Узлы $a_j\ (j=1,2,\dots,n)\ n=n(K)$ элемента $\mathcal{K}$ по предположению таковы, что вполне определяют базисные функции $\varphi_i \in S|_{\mathcal{K}}$ условиями $\varphi_i(a_j)=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$.

Разбиение δ_h считаем q -регулярным в следующем смысле: существует постоянная[5] $c>0$, не зависящая от $\mathcal{K}\in\delta_h$, $h:=\max\limits_{\mathcal{K}\in\delta_h} diam\,\mathcal{K}, i$ такая, что $\max\limits_{x\in\mathcal{K}, |\alpha|\le \ell} |D_x^\alpha \varphi_i(x)|\le c h^{-\ell}$ при $\ell\le q$. Фактически это налагает определенные ограничения на углы элементов (см. [6] стр. 165); конкретные элементы, описываемые ниже, заведомо регулярны с $q\ge 1$.

Специфика метода конечных элементов для уравнений Навье—Стокса состоит в том, что надо аппроксимировать условие $div\, u=0$. Обычная (лагранжева) интерполяция по узлам a_j не приводит к цели; нужна интерполяция иного типа (см., например, [8]).

Будем называть оператор $\pi_h: W_2^r(\Omega)\to S$ обобщенным интерполирующим, если $\forall \mathcal{K}\in\delta_h$ выполнены условия:

$$v\in S \Rightarrow \pi_h v = v, \tag{8}$$

$$|(\pi_h v)(a_j)|\le c \max_{x\in\mathcal{K}'} |v(x)| \quad (j=1,2,\ldots,n(\mathcal{K}));$$

здесь $\mathcal{K}'$ - произвольная сторона $\mathcal{K}$; $\{a_j\}_{j=1}^{n(\mathcal{K}')}$ - принадлежащие ей узлы; $c\ne c(j)$

<u>Лемма I</u>. Пусть S - пространство степени r, порожденное q -регулярным разбиением δ_h; $v\in W_2^r(\Omega)$. Тогда для обобщенной интерполяции (8) справедлива оценка

$$|v-\pi_h v|_{\ell,\mathcal{K}}\le c h^{r-\ell}|v|_{r,\mathcal{K}} \qquad (\ell\le q). \tag{9}$$

Доказательство аналогично приведенному в [6] для случая лагранжевой интерполяции.

2.2. Будем говорить, что $\mathcal{K}$ (точнее, пара $(\mathcal{K}, S)$) есть элемент специального типа, если:

(i) Сторона $d\subset\partial\mathcal{K}$ содержит три узла: два крайних и средний.

(ii) Значение $v(x)$ для $x\in d$ вполне определяется по значениям значениям v в этих узлах и точке x (не зависит от узлов вне d).

---

5 Ниже через c обозначаем различные положительные постоянные, не зависящие от $\mathcal{K}\in\delta_h$ и от h.

Отметим, что если все $\mathcal{K}\in\delta_h$ – специального типа, то $S\subset C(\Omega)$. Такого рода элементы удобны для аппроксимации соленоидальных функций. Конструкции их весьма разнообразны (возможны составные элементы). Простейший пример: δ – триангуляция Ω : функции из S квадратичны в каждом треугольнике $(S|_{\mathcal{K}}=P_2(\mathcal{K}))$.

3. Приближенное решение в криволинейных координатах

3.I. Краевую задачу для уравнений Навье—Стокса часто решают в криволинейных координатах. Ниже исследуется применение для этой цели метода конечных элементов (декартовы координаты трактуются как частный случай).

Пусть $F: x_i=F_i(\xi)$ (где $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $i=1,2$)-дважды непрерывно дифференцируемое отображение области ω_F на $\Omega_F\supset\Omega$. Оно порождает в Ω_F систему криволинейных координат, которую мы предполагаем ортогональной: $\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2}+\frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\xi_2}=0$. Мы также предполагаем, что $\bar\Omega\subset F(\omega')$ причем F обратимо в ω' $(\omega'\subset\omega_F)$. Таким образом, Ω и $\omega=F^{-1}(\Omega)$ диффеоморфны, $\partial\Omega=F(\partial\omega)$, область ω ограничена (как и Ω). Из этого следует, что $\exists\,\varkappa,\varkappa'>0$

$$\varkappa\le H_m\le\varkappa',\qquad \varkappa^2\le|I|\le\varkappa'^2; \tag{I0}$$

здесь H_m – коэффициенты Ламе $(m=1,2)$; I – якобиан отображения $(|I|=H_1\cdot H_2)$.

Для вектор-функции $w=(w_1,w_2)$ символом $w_{F,i}$ обозначим ее i-ую компоненту в криволинейной системе координат, а символом w_F – набор этих компонент: $w_F=(w_{F,1};w_{F,2})$. Выражая стандартным образом w_F через w и наоборот и пользуясь выражением градиента в криволинейных координатах, нетрудно на основе (I0) получить следующие существенные для нас оценки:

$$|w|_{1,\Omega}\le c_1\|w_F\|_{1,\Omega},\qquad |w_F|_{2,\Omega}\le c_2\|w\|_{2,\Omega}. \tag{II}$$

3.2. Элементы на криволинейной сетке. Координатные линии $\xi_1=c$, $\xi_2=c'$ ортогональны. Рассмотрим разбиение δ_h области ω некоторой сеткой координатных линий: $\omega=\bigcup_{P\in\delta}P$. Тогда $\Omega=\bigcup_{P\in\delta}F(P)$: прямоугольникам P будут соответствовать криволинейные прямоугольники $\mathcal{K}=F(P)\subset\Omega$. Относительно сторон $h_P^{(1)}, h_P^{(2)}$ прямоугольника мы полагаем, что $\exists\, h, \mu, \mu' > 0$: $h_P^{(1)}, h_P^{(2)} \le h$, $\mu \le h_P^{(1)}/h_P^{(2)} \le \mu'$ $\forall P \in \sigma_h$. Опишем элементы специального типа. Узлы a_1, a_2, a_3, a_4 будут вершинами прямоугольника P, узел a_5 – его центром. Добавим еще четыре узла a_{ij}, являющихся серединами сторон $[a_i, a_j]$ (так что $a_{1,2} \in [a_1, a_2]$, $a_{2,3} \in [a_2, a_3]$ и т.д.). Тем самым прямоугольник P подразделен на четыре равных малых прямоугольника. Возможны элементы двух типов:

1. Элементы первого типа составные; $S|_P$ есть множество непрерывных в P функций, билинейных в каждом малом прямоугольнике.
2. Элементы второго типа: $S|_P$ натянуто на базис ленных во всем P функций $\xi_1^{\nu_1} \cdot \xi_2^{\nu_2}$, где $\nu_i = 0, 1, 2$

   (допустима модификация: удаляется узел a_5 и одночлен $\xi_1^2 \cdot \xi_2^2$).

Имея в виду аппроксимировать соленоидальные функции на криволинейной сетке, мы определим оператор π_h следующим образом. Для $v \in W_2^2(\omega)$, $\forall P \in \sigma_h$ мы полагаем, что:

$$\pi_h v|_P \in S|_P, \quad (\pi_h v)(a_q) = v(a_q) \quad (q = 1, 2, \dots, 5), \tag{I2}$$

$$\int\limits_{[a_i, a_j]} (\pi_h v) H_m \, d\xi_m = \int\limits_{[a_i, a_j]} v H_m \, d\xi_m ;$$

здесь m – номер оси, параллельной стороне $[a_i, a_j]$ (в системе $O\xi_1\xi_2$). Используя явные выражения для сужений на эти стороны базисных функций из $S|_P$ можно получить следующий результат

Лемма 2. Условиями (I2) функция $\pi_h v \in S$ вполне определена, причем оператор $\pi_h : W_2^2(\omega) \to S$ является обобщенным интерполирующим.

Следствие. Для $v \in W_2^2(\omega)$ имеет место оценка:

$$| v - \pi_h v |_{\ell, \omega} \le c\, h^{2-\ell} \, |v|_{2, \omega} \qquad (\ell = 0, 1). \tag{I3}$$

Перейдем теперь к вектор-функциям. Для $v_F = (v_{F,1}; v_{F,2})$ мы определим $\pi_h(v_F)$ а затем и $\pi_h(v)$ так что:

$$\pi_h(v_F) = (\pi_h(v_{F,1}); \pi_h(v_{F,2})), \quad (\pi_h v)_F = \pi_h(v_F) \tag{I4}$$

Из оценки (I3) вытекает, что $|\pi_h v_F - v_F|_{\ell, \omega} \le c h^{2-\ell} |v_F|_{2,\omega}$ $(\ell = 0, 1)$.
Тогда для декартовых координат на основе (II) окончательно

получим:

$$|\pi_h v - v|_{1,\Omega} \le ch \| v \|_{2,\Omega} \qquad (v \in (W_2^2(\Omega))^2). \quad (15)$$

3.3. **Аппроксимация основных пространств и оценка точности приближенного решения.** Введем дискретные аналоги пространств H, J:

$$H_h = \{ v : v_F \in S \times S , \quad v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0 \},$$

$$J_h = \{ v \in H_h : \int_{x \in F(P)} \operatorname{div} v \, dx = 0 \quad \forall P \in \delta_h \}.$$

Как и раньше, мы предполагаем, что $\Omega = F(\omega), \partial\Omega = F(\partial\omega)$, причем ω допускает разбиение на элементы специального типа. Обозначим $J^{(2)} := J(\Omega) \cap [W_2^2(\Omega)]^2$. Пусть π_h - оператор, определенный согласно (14).

<u>Лемма 3</u>. Оператор π_h отображает $J^{(2)}$ на в J_h.

<u>Доказательство</u>. Обозначим через P_i' часть ∂P, параллельную оси $O\xi_i$, и выпишем две вспомогательные формулы. В силу ортогональности координатных линий $\xi_1(x) = c, \xi_2(x) = c'$ мы имеем:

$$w \cdot n|_{\partial F(P_i')} = w_{F,j}|_{P_i'} \qquad (i,j = 1,2; \; i \ne j). \quad (15')$$

Отсюда также следует, что

$$\int_{F(P)} \operatorname{div} w \, dx = \int_{\partial F(P)} w \cdot n \, ds = \int_{P_1'} w_{F,2} H_1 d\xi_1 + \int_{P_2'} w_{F,1} H_2 d\xi_2 . \quad (15'')$$

Перейдем к проверке того, что $u \in J \Rightarrow \pi_h u \in J_h$.

1^0 Условие $u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ влечет $(\pi_h u) n|_{\partial\Omega} = 0$. Действительно, пусть $[a_i, a_j] \subset \partial\omega$; для определенности $\overrightarrow{a_i a_j} \parallel O\xi_1$. Тогда (см. (15'), (14)) имеем:

$$(\pi_h u) \cdot n|_{F([a_i,a_j])} = (\pi_h u)_{F,2}|_{[a_i,a_j]} = \pi_h (u_{F,2})|_{[a_i,a_j]}$$

Но $(u_{F,2})|_{[a_i,a_j]} = u \cdot n|_{F([a_i,a_j]) \subset \partial\Omega} = 0$.

Учтем, что π_h - обобщенный интерполянт: $|(\pi_h(u_{F,2}))(a_\ell)| \le$ $\le c \max_{\xi \in [a_i,a_j]} |u_{F,2}(\xi)| = 0$, где a_ℓ - любой узел на $[a_i, a_j]$. Отсюда вообще $\pi_h(u_{F,2}) \equiv 0$ на $[a_i, a_j]$.

2^0 Применяя формулу (15") сначала к $w = \pi v$ а затем к $w = v$, имеем:

$$\int_{F(P)} \operatorname{div} \pi_h v\, dx = \int_{P_1'} (\pi_h v)_{F,2} H_1\, d\xi_1 + \int_{P_2'} (\pi_h v)_{F,1} H_2\, d\xi_2 =$$

$$= \int_{P_1'} v_{F,2} H_1 d\xi_1 + \int_{P_2'} v_{F,1} H_2\, d\xi_2 = \int_{F(P)} \operatorname{div} v\, dx$$

(мы воспользовались определением оператора π_h).Таким образом, условие $\operatorname{div} v = 0$ влечет $\int_{F(P)} \operatorname{div} \pi_h v\, dx = 0$ $(\forall P \in \delta')$, что и означает приближенную соленоидальность функции $\pi_h v$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть $u \in \mathcal{J}^{(2)}$, Тогда

$$\inf_{v \in J_h} |u - v|_{1,\Omega} \le c h \|u\|_{2,\Omega} . \tag{I6}$$

Перейдем к оценке точности приближенного решения. По теореме I::

$$|u^* - u_h^*|_{1,\Omega} \le c \left(\inf_{v \in J_h} |u^* - v|_{1,\Omega} + \inf_{q \in \Phi_h} \|p - q\|_{0,\Omega} \right). \tag{I7}$$

Первое слагаемое в правой части (I7) уже оценено. В нашем случае $\Phi_h^{(m)} = \Phi_h^{(0)}$ $(m=0)$, так что для второго слагаемого используем стандартную оценку аппроксимации кусочно-постоянными функциями (искривленность элементов не существенна в силу свойств отображения F). В результате (I7) уточняется следующим образом.

Теорема 2. Пусть $u^* \in \mathcal{J}^{(2)}$, $p \in W_2^1(\Omega)$ — решение исходной задачи, u_h^* — приближенное решение в криволинейных координатах с использованием элементов описанного типа. Тогда

$$| u^* - u_h^* |_{1,\Omega} \le c h (\|u^*\|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega}) . \tag{I8}$$

Замечание 4. В частном случае декартовых координат результаты § 3 применимы к любым элементам специального типа (например, треугольным). Определение оператора π_h упрощается ($H_m \equiv 1$ и (I2)). В оценках (I5) и (I8) можно в этом случае заменить $\|u^*\|_{2,\Omega}$ на $|u^*|_{2,\Omega}$.

§ 4. Конечные элементы в одной задаче с разрывными коэффициентами

4.I. В [4] рассмотрена следующая задача для течения двухслойной жидкости. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, разделенной известной гладкой линией Γ, не пересекающейся с $\partial\Omega$, ищется функция u :

$$\nu\Delta u-\mathrm{grad}\,p=f\,,\quad \mathrm{div}\,u=0 \quad \text{в } \Omega\,;$$
$$u|_{\partial\Omega}=0\,,\quad u\cdot n|_{\Gamma}=0 \quad [\tau T n]|_{\Gamma}=0\,. \tag{19}$$

Таким образом, предполагается, что величина $\tau T n$ (касательная составляющая напряжения) не совершает скачка при переходе через Γ. Мы рассматриваем жидкость с переменной вязкостью. Именно, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, причём коэффициент кинематической вязкости $\nu=\nu(x)$ есть постоянная в Ω_i, но вообще говоря, разрывен: $[\nu]|_{\Gamma}\neq 0$.

Эта задача близка к рассматривавшейся выше. Основное пространство $H(\Omega)$ модифицируется: оно получается как замыкание по той же[6] норме $\|\cdot\|_H$ множества $H^{\bullet}(\Omega)=\{u\in(C^1(\bar\Omega_i))^2: u|_{\partial\Omega}=0,\ u\cdot n|_{\Gamma}=0\ (i=1,2)\}$. Положим $E_\nu(u,v)=$

$=\sum\int_{\Omega_i}\nu(x)\sum_{i,k=1}^{2}(u_{i,k}+u_{k,i})(v_{i,k}+v_{k,i})\,dx$. (При $\nu\equiv 1$ очевидно, $E_\nu(u,v)=E(u,v)$). Форма $E_\nu(u,v)$ положительно определена в $H(\Omega)$. Обобщенное решение задачи вводится тождеством, вполне аналогичным (3) (или эквивалентным тождеством с p): $u^*\in J$, $-0.5\,E_\nu(u^*,\eta)=(f,\eta)\quad \forall\eta\in J$

4.2. Ограничимся простейшим случаем, когда Γ – отрезок. Решение задачи может базироваться на произвольных элементах специального типа. Считая разбиение σ_h области Ω таким, что каждый элемент целиком содержится в Ω_1 или в Ω_2 мы положим

$$H_h=\{v\in S\times S:\ v|_{\partial\Omega}=0\,,\ v\cdot n|_{\Gamma}=0\}\,,$$
$$J_h=\{v\in H_h:\ \int_K \mathrm{div}\,v\,dx=0 \quad \forall K\in\sigma_h\}$$

Аналоги теорем 1,2 устанавливаются здесь без существенных изменений (для элементов, примыкающих к $\partial\Omega$ применяется техника работы [8]).

<u>Теорема 3</u>. Пусть $u^*\in J^{(2)}(\Omega_i)$, $p\in W_2^1(\Omega_i)$ $(i=1,2)$ – решение задачи (19) (обобщенное), $u_h^*\in J_h$ – приближенное решение с использованием элементов специального типа. Тогда

$$|u^*-u_h^*|_{1,\Omega}\leq ch\,(|u|_{2,\Omega}+|p|_{1,\Omega}) \tag{20}$$

---

[6] Точнее, мы полагаем $|u|_{m,\Omega}=(|u|^2_{m,\Omega_1}+|u|^2_{m,\Omega_2})^{1/2}$; $\|u\|_H=|u|_{1,\Omega}$.

§ 5. Несовместные элементы в задаче со свободной границей

5.1. Аппроксимация основных пространств. Пусть δ_h – достаточно регулярная триангуляция области Ω. Введем пространство S кусочно-линейных функций $(S|_{\mathcal{K}} = P_1(\mathcal{K}))$, непрерывных в условных точках $b_{j,\mathcal{K}}$ $(\forall \mathcal{K}\in\delta_h;\ j=1,2,3)$ – серединах сторон треугольников (см., например [7]).

Функции из S вообще говоря, разрывны: если $\mathcal{K}'$ – общая сторона двух треугольников $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ и $v^{(i)} = v|_{\mathcal{K}_i}$, то $v^{(1)}|_{\mathcal{K}'} \neq v^{(2)}|_{\mathcal{K}'}$. Разрывность несколько компенсируется (см. [8]) следующим несложно проверяемым свойством:

$$\int_{\mathcal{K}'} [v]\,ds = \int_{\mathcal{K}'} (v^{(1)} - v^{(2)})\,ds = 0 \qquad (\forall v \in S). \tag{21}$$

Введем оператор $\pi_h : W_2^1(\Omega) \to S$ условием:

$$\int_{\mathcal{K}'} \pi_h v\,ds = \int_{\mathcal{K}'} v\,ds \qquad \forall \mathcal{K}' \in \bigcup_{\mathcal{K}\in\delta_h} \partial\mathcal{K}. \tag{22}$$

Лемма 4. Условием (22) функция $\pi_h v \in S$ вполне определена, причем оператор π_h является обобщенным интерполирующим.

Введем дискретные аналоги пространств $H(\Omega)$, $J(\Omega)$ из § 1:

$$H_h = \{ v \in S\times S : (v\cdot n)(b_{j,\mathcal{K}}) = 0 \quad \forall b_{j,\mathcal{K}} \in \partial\Omega \},$$
$$J_h = \{ v \in H_h : \operatorname{div}(v|_{\mathcal{K}}) = 0 \quad \forall \mathcal{K} \in \delta_h \} \tag{23}$$

(легко проверить, что $u \in J_h \Leftrightarrow u \in H_h$, $\operatorname{div} u \approx 0$ в смысле (5)). Отметим, что $H_h \not\subset H(\Omega)$. Аппроксимируя $H(\Omega)$ посредством H_h, мы имеем в виду, что оба эти пространства лежат в некотором гильбертовом пространстве $H^{(h)}(\Omega)$. Именно, замкнем по норме $\|u\|_h := (\sum_{\mathcal{K}\in\delta_h} |u|^2_{1,\mathcal{K}})^{1/2}$ множество $H^{\cdot(h)}(\Omega) := \{ v \in (C^1(\Omega))^2 : (v\cdot n)(b_{j,\mathcal{K}}) = 0 \ \ \forall b_{j,\mathcal{K}} \in \partial\Omega \}$. Скалярное произведение в полученном пространстве $H^{(h)}(\Omega)$ вводится так: $[u,v]_h := \sum_{\mathcal{K}\in\delta_h} \int_{\mathcal{K}} \nabla u\cdot\nabla v\,dx$ (ясно, что $u, v \in H(\Omega) \Rightarrow [u,v]_h = [u,v]_{H}$).

Определим оператор π_h для вектор-функций формулой: $\pi_h v = (\pi_h v_1; \pi_h v_2)$.

Лемма 5. Оператор π_h отображает $J^{(2)}$ в J_h. Этот факт связан со спецификой интерполяции π_h и проверяется аналогично лемме 3. Из лемм 4 и 5 вытекает следующая оценка:

$$\inf_{v\in J_h}\|u-v\|_h \le ch|u|_{2,\Omega} \qquad (u\in J^{(2)}). \tag{24}$$

Замечание 5. При дискретизации посредством несовместных элементов свойства формы $E(u,v)$ могут портиться. Мы рассмотрим ниже задачу (с физической точки зрения – вариант задачи (I)), в которой этой трудности не возникает.

5.2. Постановка задачи и ее дискретизация. В многоугольнике $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ ищутся функции $u=(u_1;u_2)$ и p такие, что

$$\begin{aligned} &\nu\Delta u-\operatorname{grad}p=f, \quad \operatorname{div}u=0 \quad \text{в } \Omega;\\ &u\cdot n|_{\partial\Omega}=0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\cdot\tau\Big|_{\partial\Omega}=0. \end{aligned} \tag{25}$$

Поскольку $\partial\Omega$ – ломанная, последнее условие можно записать также и в виде $\left.\frac{\partial(u\cdot\tau)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0.$

Имеет место интегральное тождество ($\partial\mathcal{D}$ – кусочно-гладкая, u,η – гладкие):

$$\int_{\mathcal{D}}(\nu\Delta u-\operatorname{grad}p)\eta\,dx=-\nu\int_{\mathcal{D}}\nabla u\nabla\eta\,dx+$$

$$+\nu\int_{\partial\mathcal{D}}\frac{\partial u}{\partial n}\eta\,ds+\int_{\mathcal{D}}p\operatorname{div}\eta\,dx+\int_{\partial\mathcal{D}}p(\eta\cdot n)\,ds. \tag{26}$$

Отсюда, с привлечением тех же пространств $H(\Omega), J(\Omega)$, что и в § I, приходим к следующей слабой форме задачи. Ищутся u,p такие, что:

$$(u^*;p)\in J(\Omega)\times L_2(\Omega), \quad -\nu[u^*,\eta]_H+(p,\operatorname{div}\eta)=(f,\eta) \quad \forall\eta\in H(\Omega). \tag{27}$$

Обобщенное решение u^* можно ввести и условием

$$u^*\in J(\Omega), \quad -\nu[u^*,\eta]_H=(f,\eta) \quad \forall\eta\in J(\Omega). \tag{28}$$

Приближенное решение u_h^* определяем как такую функцию, что

$$u_h^*\in J_h(\Omega) \quad -\nu[u_h^*,\eta]_h=(f,\eta) \qquad \forall\eta\in J_h, \tag{29}$$

где J_h определено согласно (23).

Теорема 4. Пусть $(u^*;p)\in J^{(2)}\times W_2^1(\Omega)$ – решение задачи (27), u_h^* – приближенное решение на основе несовместных элементов. Тогда

$$\|u^*-u_h^*\|\le ch(|u^*|_{2,\Omega}+|p|_{1,\Omega}). \tag{30}$$

При доказательстве теоремы возникают некоторые интегралы по $\partial\mathcal{K}$ (см. формулу Грина (26), $\mathcal{D}=\mathcal{K}, \forall\mathcal{K}\in\delta$). Однако их общий вклад оказывается достаточно малым: разрывность η компенсируется свойством (21) ($\eta\in J_h\in H_h$).

5.3. Аппроксимация давления. Для $\eta\in H_h$ определим $\psi=(\operatorname{div}_h\eta)\in\Phi_h$ положив $\psi|_{\mathcal{K}}=\operatorname{div}(\eta|_{\mathcal{K}})\ \forall\mathcal{K}\in\delta_h$ (ψ - кусочно-постоянна).

При дискретизации задачи будем, на этот раз, исходить из формы (27). Тогда u_h^*, p_h будут определяться из условий:[7]

$$(u_h^*;p_h)\in J_h\times\Phi_h, \quad \int_\Omega p_h\,dx=0;$$
$$-\nu[u_h^*,\eta]_h+(p_h,\operatorname{div}_h\eta)=(f,\eta). \tag{31}$$

Лемма 6. Задачи (31) и (29) равносильны и имеют единственное решение.

Теорема 5. Пусть $(u^*;p)\in J^{(2)}\times W_2^1(\Omega), \int_\Omega p\,dx=0$ - решение задачи (27), $(u_h^*;p_h)$ - приближенное решение (см. (31) Тогда

$$\|p-p_h\|_{0,\Omega}\le ch\,(|u^*|_{2,\Omega}+|p|_{1,\Omega}). \tag{38}$$

Отметим, что подобные результаты, по видимому, имеют место и для других рассмотренных выше задач. Для задачи Стокса они получены в [8]; доказательства для задачи (25) проводятся аналогичным образом.

Литература

1. Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Москва, 1970.
2. Ладыженская О. А., Солонников В. А., О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье-Стокса. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1976, 59,
3. Горовая Е. Н., Ривкинд В. Я., Упрощенная схема метода конечных элементов для уравнений Навье-Стокса. - В сб.: Методы вычислений, Вып. II, Ленинград. ун-т, 1978, 142-159.
4. Ривкинд Б. Я., Фридман Н. Б., Об уравнениях Навье-Стокса с разрывными коэффициентами. Зап. науч. семинаров Ленигр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1973, 38, 137-148.

[7] Дополнительными условиями на p_h, p мы исключаем неоднозначность их нахождения.

5. С о л о н н и к о в В. А., Щ а д и л о в В. Е., Об одной ураевой задаче для стационарной системы уравнений Навье-Стокса. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1973, 125, 186-210.

6. С т р е н г Г., Ф и к с Дж., Теория метода конечных элементов. Москва, 1977.

7. Т е м а м Р., Т о м а с с е Ф., Решение уравнений Навье-Стокса методом конечных элементов. В сб.:Численное решение задач гидродинамики. Москва, 1977, 157-162.

8. C r o u z e i x, M., R a v i a r t, P.-A., Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations.IRev. franc. automat. inform., rech. opér., 1973, 7, № R-3, 33-75.

THE APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD TO SOME PROBLEMS FOR NAVIER—STOKES EQUATIONS

V.Rivkind, B.Shifrin

Summary

The numerical solution of stationary linear Navier--Stokes equations is considered provided the boundary conditions are different from the Stokes ones. Finite elements of special kind are introduced, including the use of orthogonal curvilinear coordinates, Error estimates for approximate solutions are presented.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 580, 52 - 57.

МЕТОД КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ КОЛЛОКАЦИИ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЬЮ

П.Р. Уба
Тартуский государственный университет

1. В настоящей статье рассматривается линейное интегральное уравнение

$$x(t)=\int_0^1 \varkappa(|t-s|)x(s)ds+f(t) \qquad (0\le t\le 1) \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемым при $0<\tau\le 1$ ядром $\varkappa(\tau)$, имеющим при $\tau=0$ слабую особенность:

$$|\varkappa(\tau)|\le c(|\ln\tau|^m/\tau^\beta+1), \quad (0<\tau<1) \tag{2}$$

$$|\varkappa'(\tau)|\le c_1(|\ln\tau|^m/\tau^{\beta+1}+1), \quad (0<\tau<1) \tag{3}$$

где $m\ge 0$, $0<\beta<1$, а c, c_1 – постоянные. Будем ещё предполагать, что существуют конечные пределы

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau^\beta}{|\ln\tau|^m}\varkappa(\tau), \quad \lim_{\tau\to+0}\frac{\tau^{\beta+1}}{|\ln\tau|^m}\varkappa'(\tau). \tag{4}$$

Пусть свободный член $f(t)$ уравнения (1) дважды непрерывно дифференцируем при $0\le t\le 1$ и пусть уравнение (1) имеет в классе $C=C[0,1]$ непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций единственное решение $x_0(t)$. Тогда на основании [3, 5] решение $x_0(t)$ дважды дифференцируемо в промежутке $(0,1)$ и справедлива оценка

$$|x_0''(t)|\le c(|\ln t|^m/t^{\beta+1}+|\ln(1-t)|^m/(1-t)^{\beta+1}), \quad (0<t<1), \tag{5}$$

где $c=c(m,\beta)$ некоторая положительная постоянная. При этом особенность ядра $\varkappa(\tau)$ в точке $\tau=0$ влечет за собой особенность производных $x_0(t)$ в точках $t=0$ и $t=1$. Поэтому из-за медленной сходимости приближённых методов численное решение таких уравнений весьма затруднительно. В работе [3] (см. также [4, 6]) доказывается, что при решении уравнения (I) методом сплайновой коллокации первой степени порядком оценки погрешности является

$$c h_n^{2(1-\beta)} (|\ln h_n|^{2m} + 1),$$

где h_n - максимальное расстояние между узлами коллокации, а c - положительная постоянная.

В данной работе доказывается, что при помощи специального выбора узлов для метода кусочно-линейной коллокации достигаемая оценка лучше названной в смысле порядка, а именно

$$c(1/n)^{\rho(1-\beta)} (\ln n)^m,$$

где c не зависит от n, а $\rho>0$ вещественное число, которым можно варьировать в пределах $\rho(1-\beta)\le 2$.

В дальнейшем условимся обозначать одной и той-же буквой c положительные постоянные, которые в разных неравенствах могут принимать различные значения.

2. Интегральное уравнение (I) рассмотрим как операторное уравнение

$$x = Tx + f \tag{6}$$

в банаховом пространстве $C[0,1]$ с обычной нормой. Интегральный оператор

$$(Tx)(t) = \int_0^1 \varkappa(|t-s|)x(s)ds \tag{7}$$

вполне непрерывен в C.

Пусть k и n $(n=2k)$ - натуральные числа. Разделим отрезок на n частей узлами

$$t_j = \begin{cases} 0{,}5\,(j/k)^\rho, & (j=0,1,\dots,k) \\ 1-0{,}5((2k-j)/k)^\rho, & (j=k,k+1,\dots,n), \end{cases} \tag{8}$$

находящимися симметрично относительно средней точки отрезка.

Рассмотрим уравнение

$$x_n = P_n T x_n + P_n f, \tag{9}$$

где x_n - ломанная линия с вершинами в точках $(t_j, x(t_j))$ (сплайн первого порядка), задаваемая формулой

$$x_n(s) = x(t_j)\frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}} + x(t_{j-1})\frac{t_j-s}{t_j-t_{j-1}} \qquad \begin{pmatrix} t_{j-1} \le s \le t_j \\ j=0,1,\dots,n \end{pmatrix}, \tag{10}$$

а P_n - оператор, ставящий любой функции $x(t)$ в соответствие кусочно-линейную функцию, такую что

$$(P_n x)(t_j) = x(t_j) \qquad (j=0,1,\dots,n).$$

Ясно, что $\|P_n x - x\|_C \to 0$ при $n\to\infty$ для любого $x \in C$.

Решение уравнения (9) равносильно решению системы линейных уравнений

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\left[\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{t_j-s}{t_j-t_{j-1}}\,\varkappa(|t_i-s|)ds\right]\xi_{j-1} + \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}\,\varkappa(|t_i-s|)ds\right]\xi_j\right) +$$
$$+ f(t_i) \qquad (i=0,1,\dots,n)$$

относительно неизвестных ξ_i. Здесь ξ_i - приближённые значения искомого решения $x_0(t)$ в узлах сетки t_i $(i=0,1,\dots,n)$. Эта система получается из (9), если придать переменной t последовательно значения $t_0, t_1, \dots, t_n$.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. Пусть ядро $\varkappa(\tau)$ интегрального уравнения (I) непрерывно дифференцируемо при $0<\tau\le 1$ и удовлетворяет условиям (2), (3) и (4), а свободный член $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируем при $0\le t\le 1$. Пусть уравнение (I) имеет единственное решение $x_0(t)$ и справедливо неравенство

$$\rho(1-\beta) \le 2. \tag{11}$$

Тогда при выборе узлов (8) справедлива оценка погрешности

$$\|x_0 - x_n\|_{C[0,1]} \le c\,(1/n)^{\rho(1-\beta)}(\ln n)^m, \tag{12}$$

где $c = c(m,\beta,\rho)$, а x_0 и x_n - решения уравнений (I) и (9) соответственно.

3. Доказательство теоремы основано на одном результате из теории проекционных методов для уравнений второго рода (см. [I], стр. 200), по которому при достаточно больших n уравнение (9) имеет единственное решение x_n и быстрота сходимости $x_n \to x_0$ характеризуется неравенством

$$\|x_n - x_0\|_{C[0,1]} \le c\,\|P_n x_0 - x_0\|_{C[0,1]}, \tag{13}$$

где x_0 решение уравнения (6).

Норму $\|P_n x_0 - x_0\|_{C[0,1]}$ оценим отдельно для отрезков $[t_0, t_1], [t_1, t_k], [t_k, t_{n-1}]$ и $[t_{n-1}, t_n]$.

Для доказательства неравенства (I2) на отрезке $[t_1, t_k]$ используем остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа (см. [2], стр. 495) (в неравенстве (α)) и теорему Лагранжа о среднем значении (в равенстве (δ) для функции $g(z) = z^\rho$):

$$\|x_0 - P_n x_0\|_{C[t_1,t_k]} = \max_{1\le i\le k-1} \max_{t_i\le t\le t_{i+1}} |x_0(t) - P_n x_0(t)| \overset{(\alpha)}{\le}$$

$$\le \max_{1\le i\le k-1} \max_{t_i\le t\le t_{i+1}} \frac{|x_0''(\xi_i)|}{2} \left|\frac{1}{2}\left(\frac{i+1}{k}\right)^\rho - \frac{1}{2}\left(\frac{i}{k}\right)^\rho\right|^2 \overset{(\delta)}{=}$$

$$= \max_{1\le i\le k-1} \frac{|x_0''(\xi_i)|}{8} \left(\frac{\rho}{k}(\eta_i)^{\rho-1}\right)^2 \le$$

$$\le \max_{1\le i\le k-1} \frac{|x_0''(\xi_i)|}{8} \left(\frac{\rho}{k}\left(\frac{i+1}{k}\right)^{\rho-1}\right)^2,$$

где $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ и $\eta_i \in [i/k, (i+1)/k]$.

Для оценки члена $|x_0''(\xi_i)|$ используем неравенства (5) и

$$\frac{|\ln(1-t)|^m}{(1-t)^{\beta+1}} \le \frac{|\ln t|^m}{t^{\beta+1}} \qquad (0\le t\le 0{,}5).$$

Усиливая неравенство, заменим аргумент ξ_i величиной $0{,}5\,(i/k)^\rho$. С учетом неравенства (II) после несложных вычислений приходим к оценке

$$\|x_0 - P_n x_0\|_{C[t_1,t_k]} \le c\,(1/n)^{\rho(1-\beta)}\,(\ln n)^m,$$

где $c = c(m, \beta, \rho)$.

Таким же образом доказывается неравенство на отрезке $[t_k, t_{n-1}]$.

В силу одного результата из [3], стр. 4I можем $x_0'(t)$ записать в виде

$$x_0' = T^{n_0} x_0' + g + Tg + \ldots + T^{n_0-1} g, \tag{I4}$$

где $g(t) = f'(t) + x_0(0)\varkappa(t) - x_0(1)\varkappa(1-t)$, T - оператор, определённый формулой (7) и n_0 - номер, при котором $T^{n_0} x_0' \in C_{[0,1]}$. Там же показывается, что

$$|(T^i g)(t)| \le c\,(t^{-\beta} + (1-t)^{-\beta}) \qquad (0<t<1, i\ge 1).$$

Учитывая (I4), можем решение уравнения (I) записать в виде

$$x_0(t)=\int_0^t u(\tau)\,d\tau+x_0(0)\int_0^t \varkappa(\tau)\,d\tau-x_0(1)\int_0^t \varkappa(1-\tau)\,d\tau+f(t)+\int_0^t v(\tau)\,d\tau+c,$$

где $u(\tau)\equiv T^{n_0}x_0'(t)$ непрерывна на $[0,1]$, $f(t)$ по предположению дважды непрерывно дифференцируема на $[0,1]$, функция $v(\tau)\equiv Tg(\tau)+\ldots+T^{n_0-1}g(\tau)$ непрерывно дифференцируема в промежутке $(0,1)$, а её особенность в точках $\tau=0$ и $\tau=1$ более слаба, чем члена $\varkappa(\tau)$ и $\varkappa(1-\tau)$. Поэтому при доказательстве неравенства (I2) на отрезках $[0;t_1]$ и $[t_{n-1},t_n]$ достаточно ограничиться членами $\varkappa(t)$ и $\varkappa(1-t)$. Проведем доказательство для $\varkappa(t)$ на $[0;t_1]$. Обозначим $y(t)=\int_0^t \varkappa(\tau)\,d\tau$. Так как $\|y(t)-P_n y(t)\|_{C[0,t_1]}\le 2\|y(t)\|_{C[0,t_1]}$, достаточно оценить норму $\|y(t)\|_{C[0,t_1]}$. При помощи формулы

$$\int_0^t \frac{|\ln\tau|^m}{\tau^\beta}\,d\tau=t^{1-\beta}\sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!\,(1-\beta)^{m+1-j}}\,|\ln t|^j,\qquad \begin{pmatrix}0<\beta<1\\ 0\le t\le 1\end{pmatrix} \tag{I5}$$

получаем утверждаемую оценку:

$$\|y(t)\|_{C[0,t_1]}=\max_{0\le t\le t_1}|y(t)|\le\max_{0\le t\le t_1}\left|\int_0^t \varkappa(\tau)\,d\tau\right|\overset{(2)}{\le}$$

$$\le\left|\int_0^t c\left(\frac{|\ln\tau|^m}{\tau^\beta}+1\right)d\tau\right|\overset{(15)}{=}\left|t_1^{1-\beta}\sum_{j=0}^m\frac{m!}{j!\,(1-\beta)^{m+1-j}}|\ln t_1|^j+t_1\right|\le$$

$$\le c\,(1/n)^{p(1-\beta)}(\ln n)^m,$$

где $c=c(m,\beta,p)$.

Тем самым доказательство теоремы завершено.

Автор выражает признательность Г.М. Вайникко за руководство.

Литература

I. К р а с н о с е л ь с к и й М.А., В а й н и к к о Г.М. и др., Приближённое решение операторных уравнений. Москва, I969.

2. Н а т а н с о н И.П., Конструктивная теория функций. Москва, I949.

3. П е д а с А.А., О приближённом решении интегральных уравнений со слабой особенностью. Канд. дисс., Тарту, I976.

4. П е д а с А., О решении интегральных уравнений с логарифмической особенностью сплайн-коллокационным методом первого порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 431, 130-146.
5. П е д а с А., О гладкости решения интегрального уравнения со слабо-сингулярным ядром. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 492, 56-68.
6. П е д а с А., Кусочно линейная аппроксимация решения интегрального уравнения с логарифмической особенностью в ядре. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 500, 33-42.

STÜCKWEISE LINEARE KOLLOKATIONSVERFAHREN AUF DEM UNGLEICHMÄßIGEN GITTER FÜR DIE LÖSUNG DER INTEGRALGLEICHUNGEN MIT DEN SINGULARITÄTEN

P. Uba

Zusammenfassung

Der Artikel behandelt das angenäherte Lösen der Integralgleichung (1) mittels der Kollokationsverfahren. Der Kern der Gleichung (1) ist mit schwacher Singularität und genügt den Bedingungen (2), (3), (4). Es wird gezeigt, daß bei der Wahl (8) der Gitterpunkte das Verfahren (10) mit der Geschwindigkeit (12) konvergiert.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 580, 58 - 68.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ НЕВЫПУКЛОГО КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

М. Ури
Тартуский государственный университет

Потребность решить задачу кусочно-линейного программирования возникает, например, при нахождении приближенного решения задачи нелинейного программирования, если нелинейные функции аппроксимируются кусочно-линейными функциями. Формулировку задачи с сепарабельными ограничениями дал Миллер [6]. Миллер приводил задачу в т. н. λ-вид и нашел локальный оптимум невыпуклой задачи симплекс-методом с дополнительными ограничениями на выбор ведущего элемента.

В ряде работ (напр. [5], [3]) исследуется невыпуклая задача математического программирования, где целевая функция является невыпуклой и ограничения определяют выпуклое множество. Соланд [7] обобщил метод Фолка-Соланда [5] для общей невыпуклой задачи, используя выпуклые оболочки. Упрощенную схему метода Соланда предложил Мартынов [2].

Невыпуклую задачу кусочно-линейного программирования исследовали, например, Жернак [1] и Шихов [4]. Жернак находит приближенное решение исключением псевдо-решений. Шихов решает задачу в δ-виде, причем для выполнения дополнительного условия на переменные в алгоритме составляется и корректируется список переменных, "запрещенных" для ввода в базис.

В данной работе рассматривается задача кусочно-линейного программирования с невыпуклой допустимой областью и для решения этой задачи в λ- и μ-виде представляются алгоритмы, базирующиеся на идее метода ветвей и границ.

§ I. Постановка задачи

Будем рассматривать следующую задачу математического программирования: найти точку $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ максимизирующую функцию

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{I}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \le b_i, \quad i=\overline{1,m}; \tag{2}$$

$$\alpha_j \le x_j \le \beta_j, \quad j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где $g_{ij}(x_j)$ – кусочно-линейные непрерывные функции. Область допустимых решений является, в общем случае, невыпуклой. Задачу (I)-(3) будем называть задачей A.

Функции $g_{ij}(x_j)$ можно представить несколькими способами. Например: пусть для каждой переменной x_j $(j=\overline{1,n})$ известна сеть

$$\alpha_j \equiv x_{j0} < x_{j1} < \ldots < x_{j\tau_j} \equiv \beta_j \tag{4}$$

такая, что на каждом отрезке $[x_{jk}, x_{j,k+1}]$ все функции $g_{ij}(x_j)$ $(i=\overline{1,m})$ линейны, т. е. $g_{ij}(x_j)=\lambda_{jk}g_{ij}(x_{jk})+\lambda_{j,k+1}g_{ij}(x_{j,k+1})$, где $\lambda_{jk}+\lambda_{j,k+1}=1$, $\lambda_{jk}\ge 0$, $\lambda_{j,k+1}\ge 0$. Обозначим

$$g_{ijk} = g_{ij}(x_{jk}). \tag{5}$$

Каждая переменная x_j $(j=\overline{1,n})$ выражается через x_{jk} формулой

$$x_j = \sum_{k=0}^{\tau_j} \lambda_{jk} x_{jk}, \tag{6}$$

где $\sum_{k=0}^{\tau_j} \lambda_{jk} = 1$, $\lambda_{jk} \ge 0$ и при каждом j или одна $\lambda_{jk}>0$ или две соседние, т.е. λ_{jk} и $\lambda_{j,k+1}$, положительны. Получаем задачу A в λ-виде: максимизировать

$$f(\lambda) \equiv \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\tau_j} c_j x_{jk} \lambda_{jk} \tag{7}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} g_{ijk} \lambda_{jk} \le b_i \ , \quad i=\overline{1,m} \ ; \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{jk} = 1 \ , \quad j=\overline{1,n} \ ; \tag{9}$$

$$\lambda_{jk} \ge 0 \ , \quad k=\overline{0,r_j} \ , \quad j=\overline{1,n} \tag{10}$$

и с дополнительным требованием, что

при каждом j или только одна $\lambda_{jk}>0$ или две соседние $\lambda_{jk}>0$. (II)

Обозначим λ-задачу (7)-(I0) через A_λ.

Задачу A можно свести также к задаче частично-целочисленного программирования. Если для x_j известна сеть (4) и на каждом отрезке $[x_{jk}, x_{j,k+1}]$ $(k=\overline{0,r_j})$ функции $g_{ij}(x_j)$ линейны, то используя обозначения (5),

$\lambda_{jk}=(x_j - x_{jk})/(x_{j,k+1} - x_{jk})$ и $\Delta g_{ijk} = g_{ij,k+1} - g_{ijk}$ получаем $g_{ij}(x_j) = g_{ijk} + \Delta g_{ijk} \lambda_{jk}$, $i=\overline{1,m}$. На целом отрезке $[\alpha_j, \beta_j]$ функция $g_{ij}(x_j)$ выражается

$$g_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j-1} g_{ijk} \mu_{jk} + \sum_{k=0}^{r_j-1} \Delta g_{ijk} \lambda_{jk} \ ,$$

где $\sum_{k=0}^{r_j-1} \mu_{jk} = 1$, $0 \le \lambda_{jk} \le \mu_{jk}$ $(k=\overline{0,r_j-1})$ и μ_{jk} - целые числа. Переменная x_j выражается через μ_{jk} и λ_{jk} следующим образом:

$$x_j = \sum_{k=0}^{r_j-1} (x_{jk} \mu_{jk} + \Delta x_{jk} \lambda_{jk}), \tag{12}$$

где $\Delta x_{jk} = x_{j,k+1} - x_{jk}$.

Итак, задачу A можно записать в μ-виде, являющимся задачей частично-целочисленного программирования: максимизировать

$$\bar{R}(\mu,\lambda) \equiv \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j-1} (c_j x_{jk} \mu_{jk} + c_j \Delta x_{jk} \lambda_{jk}) \tag{13}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j-1} (g_{ijk} \mu_{jk} + \Delta g_{ijk} \lambda_{jk}) \le b_i \ , \quad i=\overline{1,m} \ ; \tag{14}$$

$$0 \le \lambda_{jk} \le \mu_{jk}, \quad k=\overline{0, r_j - 1}, \quad j=\overline{1,n}; \tag{15}$$

$$\sum_{k=0}^{r_j-1} \mu_{jk} = 1, \quad j=\overline{1,n}; \tag{16}$$

$$\mu_{jk} \text{ – целые.} \tag{17}$$

Обозначим μ-задачу (13)-(17) через A_μ.

§ 2. Алгоритм решения λ-задачи

Идея метода состоит в следующем: решим задачу A_λ и проверим, выполнено ли условие (11). Если да, то найден глобальный максимум задачи A. Но если условие (11) не выполняется, то существует j_0 такое, что в решении задачи либо а) среди $\lambda_{j_0 k}$ существует больше двух положительных либо б) два несоседних $\lambda_{j_0 k}$ положительные, $k \in \{0, 1, \dots r_{j_0}\}$. В этом случае проводим ветвление, прибавляя на каждой ветви к условиям задачи A_λ одно дополнительное требование $\lambda_{j_0 k} = 0$.

Следовательно, в случае, когда в решении подзадачи A_λ^t (t – номер задачи) существуют $\lambda_{j_0 k_1} > 0, \lambda_{j_0 k_2} > 0, \dots, \lambda_{j_0 k_p} > 0$ $(p > 2)$, выполняем ветвление из A_λ^t на p подзадачи $A_\lambda^{s+u} \equiv$ $\equiv A_\lambda^t \cup \{\lambda_{j_0 k_u} = 0\}$ $(u = \overline{1,p})$, где s – наибольший номер задачи, взятой под рассмотрение до сих пор). Обозначим через J^t множество индексов переменных λ_{jk}, зафиксированных в задаче A_λ^t, т.е. $J^t = \{(j,k) | \lambda_{jk} = 0\}$. Тогда $J^{s+u} = J^t \cup \{(j_0, k_u)\}$. В задаче A_λ^{s+u} требуется максимизировать

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=0 \\ (j,k) \notin J^{s+u}}}^{r_j} c_j x_{jk} \lambda_{jk}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=0 \\ (j,k) \notin J^{s+u}}}^{r_j} a_{ij} \lambda_{jk} \le b_i, \quad i = \overline{1,m};$$

$$\sum_{\substack{k=0 \\ (j,k) \notin J^{s+u}}}^{r_j} \lambda_{jk} = 1, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\lambda_{jk} \ge 0, \quad k = \overline{0, r_j}; \quad j = \overline{1,n}, \quad (j,k) \notin J^{s+u}.$$

Введением новых ограничений оптимальное значение целевой функции не возрастает. Отметим, что каждое ветвление уменьшает размеры задач из-за уменьшения числа нефиксированных переменных. Решение задачи, полученной ветвлением, удовлетворяющее требованию (II), является допустимым решением задачи A.

Чтобы уменьшить количество решаемых задач линейного программирования, проведем некоторые тесты на рассматриваемых подзадачах A_λ^t. Задача, удовлетворяющая условию хотя бы одного теста, исключается из дальнейшего исследования, т.е. соответствующая ветвь закрывается. Обозначим через f^* рекорд, т.е. значение целевой функции при наилучшем уже известном допустимом решении.

Т I (тест по допустимости). Фиксируем i и для каждого j определим $g_{ijk_j} = \min_k \{ g_{ijk} \mid (j,k) \notin J^t \}$. Так как при каждом допустимом решении $\sum_{k=0}^{z_j} g_{ijk} \lambda_{jk} \geq g_{ijk_j} \sum_{k=0}^{z_j} \lambda_{jk} = g_{ijk_j}$, то можно сформулировать тест Т I следующим образом:

существует ли $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ такое, что $\sum_{j=1}^{n} g_{ijk_j} > b_i$?

Т 2. Найдем точку, где целевая функция задачи A_λ^t достигает максимума лишь при условиях $\sum_{\substack{k=0 \\ (j,k)\notin J^t}}^{z_j} \lambda_{jk} = 1$, $j = \overline{1,n}$ и $\lambda_{jk} \geq 0$.

Эту точку получим, вычисляя $c_j x_{jk_j} = \max_k \{ c_j x_{jk} \mid (j,k) \notin J^t \}_{j=\overline{1,n}}$ и взяв $\lambda_{jk_j} = 1$, $\lambda_{jk} = 0$ при $k \neq k_j$.

Получим тест Т 2:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ijk_j} \leq b_i, \quad i = \overline{1,m} \quad ?$$

Если тест выполнен, то $f^* := \max \{ f^*, \sum_{j=1}^{n} c_j x_{jk_j} \}$.

Т 3 (тест по оптимальности до решения подзадачи A_λ^t). Обозначим через f_+^t верхнюю границу целевой функции подзадачи A_λ^t. Тест Т 3:

$$f_+^t \leq f^* \quad ?$$

В качестве значения f_+^t можно взять значение целевой функции при $\lambda_{jk_j} = 1$, полученном тестом Т 2.

Т 4 (тест по оптимальности после решения подзадачи A_λ^t). Пусть f^t – оптимальное значение целевой функции задачи A_λ^t.

Тест Т 4:

$$f^t \le f^* \ ?$$

Какую подзадачу выбирать для ветвления и по какому j сделать ветвление, это решаем с помощью правила выбора подзадачи (напр. выбираем задачу с наибольшей верхней границей) и правила выбора индекса ветвления (напр. выбираем индекс j_0, при котором наименьшее число $\lambda_{j_0 k}$ не удовлетворяет требованию (II)).

Изложим алгоритм. На каждой итерации известно I) рекорд f^* (вначале $f^* = -\infty$, что служит и признаком, что рекордное решение ещё не найдено), 2) список висящих вершин (список исследуемых нерешенных задач) R и 3) список перспективных вершин (список решенных, но ещё не подвергающихся ветвлению задач) P.

Шаг 0. Берем $f^* := -\infty$, $R := \phi$, $P := \phi$, $J^0 := \phi$. Оцениваем задачу $A^0_\lambda = A_\lambda$ с помощью тестов Т I и Т 2. Если выполняется Т I, то закончим вычисления; если выполняется Т 2, то $f^* := \sum_{j=1}^{n} c_j x_{jk_j}$, сохраняем (λ_{jk_j}) и закончим вычисления. Если тесты не выполняются, тогда решаем задачу A^0_λ. В случае противоречивости ограничений закончим вычисления; при существовании решения проверяем, удовлетворяет ли оно условию (II). Если да, то $f^* := f^0$, сохраняем (λ^0_{jk}) и закончим вычисления; в противном случае вводим A^0_λ с верхней границей f^0_+ в список P и идем к шагу 4.

Шаг I. Проверяем условие $R = \phi$? Если оно выполняется, переходим к шагу 4, если нет – выбираем и исключаем из списка R задачу с наибольшей верхней границей.

Шаг 2. Решаем выбранную задачу A^t_λ. Если ограничения противоречивы, то идем к шагу I, но при существовании решения проверяем на нем тест Т 4. Если тест выполняется, то идем к шагу I; в противном случае проверяем, удовлетворяет ли решение условию (II): если нет, то вводим задачу A^t_λ в список P и идем к шагу 4, если да, то $f^* := f^t$ и сохраняем рекордное решение (λ^t_{jk}).

Шаг 3. Проверяем тесты Т 3 и Т4 соответственно на задачах из списков R и P. Задачи, на которых тесты выполняются, исключаем из соответствующего списка, идем к шагу I.

Шаг 4. Проверяем $P=\varnothing$? Если список P пуст, то закончим вычисления. В случае $P\neq\varnothing$, выбираем и исключаем из списка P задачу с максимальным значением целевой функции (если их несколько, то одну из них). Выбираем для ветвления индекс j_0. Так как $\lambda_{j_0 k_u}>0\ (u=\overline{1,p})$ не удовлетворяют условию (II), то проводим ветвление на подзадачи A_λ^{s+u}, $J^{s+u}=J^t \cup \{(j_0,k_u)\}$ $(u=\overline{1,p})$.

Проверяем на этих задачах тесты Т I, Т 2 и Т 3. Задачи, на которых тесты не выполняются, вводим вместе с соответствующими верхними границами в список R, остальные исключаем из-под наблюдения. Если решение (λ_{jk}) задачи, на которой выполняется Т 2, является рекордным, то сохраняем это решение и рекорду присвоим оптимальное значение целевой функции этой задачи. Идем к шагу I.

Если алгоритм совершил работу и $f^*=-\infty$, то задача A неразрешима; если $f^*\neq-\infty$, то компоненты решения задачи A получаем из рекордного решения (λ_{jk}^*) формулой (6).

Конечность метода вытекает из конечности метода, используемого для решения подзадач, так как число подзадач конечное.

§ 3. Алгоритмы решения μ-задачи

Решать μ-задачу (I3)-(I7) методами целочисленного программирования очевидно неэффективно из-за больших размеров. Гиперплоскости $x_j=x_{jk}$ $(k=\overline{1,r_j-1},\ j=\overline{1,n})$ делят прямоугольный параллелепипед $R=\{x\mid \alpha_j\le x_j\le\beta_j,\ j=\overline{1,n}\}$ на части. Значит, можно решить A_μ отдельно в каждом частичном параллелепипеде. Глобальным оптимумом является решение подзадачи, дающее наибольшее значение целевой функции (I3).

Взяв $\mu_{1k_1}=\mu_{2k_2}=\ldots=\mu_{nk_n}=1$, $\mu_{jk}=0$, $k\neq k_j$, получим подзадачу $A_\mu(k_1,k_2,\ldots,k_n)$: максимизировать

$$\hat f(\lambda)\equiv\sum_{j=1}^n c_j\,\Delta x_{jk_j}\,\lambda_{jk_j}+\sum_{j=1}^n c_j\,x_{jk_j} \tag{I8}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n \Delta g_{ijk_j}\,\lambda_{jk_j}\le b_i-\sum_{j=1}^n g_{ijk_j}\ ,\quad i=\overline{1,m}; \tag{I9}$$

$$0\le\lambda_{jk_j}\le 1\ ,\quad j=\overline{1,n}. \tag{20}$$

Размеры этой задачи совпадают с размерами задачи A, но число подзадач равно $\prod_{j=1}^n r_j$. Подзадачу $A_\mu(k_1,k_2,\ldots,k_n)$

с номером t обозначим A_μ^t. Так как количество задач может быть очень большим, то часть из них надо исключать тестами.

Т 6. Фиксируем i и вычисляем

$$\gamma_{ijk_j} = \min\{g_{ijk_j}, g_{ijk_j} + \Delta g_{ijk_j}\} = \begin{cases} g_{ijk_j}, & \text{если } \Delta g_{ijk_j} \geq 0, \\ g_{ijk_j+1}, & \text{если } \Delta g_{ijk_j} < 0. \end{cases}$$

Значит, при допустимом решении $\sum_{j=1}^{n} (\Delta g_{ijk_j} \lambda_{jk_j} + g_{ijk_j}) \geq \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ijk_j}$.
Тест Т 6:

существует ли индекс $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ такой, что $\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ijk_j} > b_i$?

Т 7. Обозначим через $\hat{f}_+^t$ верхнюю границу целевой функции подзадачи A_μ^t. Значение $\hat{f}_+^t$ можно вычислить например формулой $\hat{f}_+^t = \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_{jk_j}$, где

$$\xi_{jk_j} = \begin{cases} x_{j,k_j+1}, & \text{если } c_j \geq 0, \\ x_{jk_j}, & \text{если } c_j < 0. \end{cases} \tag{21}$$

Получим тест Т 7:

$$\hat{f}_+^t \leq f^* \; ?$$

Т 8. После решения подзадачи A_μ^t проверяем:

$$\hat{f}^t \leq f^* \; ?$$

Если тест не выполняется, то $f^* := \hat{f}^t$.

Теоретически самый простой алгоритм проверяет тест Т 6 на подзадачах $A_\mu(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ в порядке убывания их верхних границ. Находя первую задачу, не удовлетворяющей тесту Т 6, решает ее. При отсутствии решения ищет новую задачу с помощью теста Т 6 и т.д., пока не доходит до задачи, имеющей решение. Это решение дает рекорд. Затем алгоритм находит следующую задачу, не удовлетворяющую тесту Т 6, на котором проверяет тест Т 7. Если Т 7 выполняется, то рекордное решение дает оптимум задачи А формулой (12) и алгоритм закончит работу; в противном случае алгоритм решает задачу, при существовании решения проверяет на ней тест Т 8, находит новую задачу тестом Т 6 и т.д. Практически этот алгоритм неприменим, ведь надо вычислить и упорядочить $\prod_{j=1}^{n} r_j$ верхних границ.

Задачу A_μ можно решать, например, методом генерирования подзадач.

Определение. Задачу A_μ называем генерированной на p-уровне, если в ней $p \le n$ значений переменных μ_{jk} приняты равными единице: $\mu_{jk} = 1$, $\sum_{k=0}^{q_j-1} \mu_{jk} = 1$, $j = j_1, j_2, \dots, j_p$. Подзадача $A_\mu(k_1, k_2, \dots, k_n)$ есть задача, генерированная на n-уровне. Из задачи $(p-1)$-уровня получаем задачи p-уровня $(p=\overline{1,n})$ следующим образом. Пусть к уровню $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ прикреплен индекс $j_p \in \{1, 2, \dots, n\}$ (и вместе с тем первоначальная переменная x_{j_p}). Индексы $j_1, j_2, \dots, j_n$ можно выбирать, например, в порядке уменьшения величин γ_j $(j=\overline{1,n})$, где $\gamma_j = c_j \beta_j$ при $c_j > 0$, $\gamma_j = c_j \alpha_j$ при $c_j < 0$ и $\gamma_j = 0$ при $c_j = 0$; в порядке возрастания чисел q_j или в некотором заданном порядке. Тогда при помощи фиксированной задачи $(p-1)$-уровня генерируется задача p-уровня добавлением нового ограничения $\mu_{j_p k_{j_p}} = 1$ $(\mu_{j_p k} = 0$ при $k \ne k_{j_p})$. Так как k_{j_p} может принимать значения $0, 1, \dots, q_{j_p} - 1$, то получается q_{j_p} задач p-уровня. Ниже они генерируются в порядке $k = q_j - 1, q_j - 2, \dots,$ если $c_j \ge 0$, или в порядке $k = 0, 1, 2, \dots,$ если $c_j < 0$. Если теперь некоторая задача p-уровня удовлетворяет формулируемому ниже тесту Т 9, то следующие задачи p-уровня генерировать уже не нужно (они также удовлетворяют тесту и их можно исключить).

Изложим алгоритм генерирования подзадач $A_\mu(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Во время решения известно 1) рекорд f^* и 2) номера генерированных задач s_t $(t=\overline{1,n})$, где s_t номер задачи, генерированной последней на t-уровне. Задача с номером s_0 эквивалентна μ-задаче без ограничений на μ_{jk}. В алгоритме предположим, что к t-уровню прикреплен индекс t.

Если в задаче с номером s_t зафиксированы лишь $\mu_{jk_j} = 1$, $j=\overline{1,t}$, $t < n$, то можем оценить значение целевых функций задач, получаемых из этой задачи. Обозначим $I^{s_t} = \{(j, k_j) \mid \mu_{jk_j} = 1,\ j=\overline{1,t}\}$. Получаем следующий тест.

Т 9. $\quad \varphi_+^{s_t} \equiv \sum_{(j,k) \in I^{s_t}} c_j \xi_{jk_j} + \Phi \le f^*$?, где

$$
\varphi=\begin{cases}\sum\limits_{\substack{j=t+1\\ c_j>0}}^{n} c_j\beta_j+\sum\limits_{\substack{j=t+1\\ c_j<0}}^{n} c_j\alpha_j\ , & \text{если } I^{s_{t+1}}=\emptyset,\\ \sum\limits_{\substack{j=t+2\\ c_j>0}}^{n} c_j\beta_j+\sum\limits_{\substack{j=t+2\\ c_j<0}}^{n} c_j\alpha_j+\begin{cases} c_{t+1}x_{t+1,k+1} & \text{при } c_{t+1}<0\\ c_{t+1}x_{t+1,k-1} & \text{при } c_{t+1}>0\end{cases}, & \text{если } (t+1,k)\in I^{s_{t+1}}\setminus I^{s_t}\end{cases}
$$

и $\}_{jk_j}$ вычисляем из (2I).

Шаг 0. Берем $t:=1,\ f^*:=-\infty$. Генерируем задачу с номером $s_1=1$ и присвоим $s_p:=0,\ p=\overline{2,n}$.

Шаг I (генерирование задач). Проверяем $s_{t+1}=r_{t+1}$? Если да, то идем к шагу 2, в противном случае оцениваем задачу с номером s_t при помощи теста Т 9. Если тест выполняется, то идем к шагу 2, в противном случае из задачи t-уровня s_t генерируем очередную задачу ($t+1$)-уровня и присвоим ей номер $s_{t+1}:=s_{t+1}+1$. Если $t=n-1$, то идем к шагу 3. В случае $t\neq n-1$ присвоим $t:=t+1$ и идем к началу шага I.

Шаг 2. Присвоим $s_{t+1}:=0$. Если а) $t\neq 0,1$, тогда присвоим $t:=t-1$ и идем к шагу I; б) $t=1$, то в случае $s_1=r_1$ закончим вычисления; в случае $s_1\neq r_1$ присвоим $t:=0$ и идем к шагу I; в) $t=0$, то закончим вычисления.

Шаг 3 (оценивание и решение подзадачи). Проверяем тесты Т 6 и Т 7 на подзадаче s_n. Если выполняется Т 6, то идем к шагу I; если Т 7, то идем к шагу 2. Если тесты не выполняются, то решаем задачу. При отсутствии решения из-за противоречивости ограничений, идем к шагу I: в противном случае проверяем на решение тест Т 8: тест выполняется - идем к шагу I, тест не выполняется - присвоим рекорду значение целевой функции решенной подзадачи s_n и сохраняем локальный оптимум (λ^*_{jk}), идем к шагу I.

Оптимальное решение задачи A получаем из рекордного решения формулой (I2).

Приведенный метод конечный, так как число возможных подзадач конечное и в разных ветвях значения фиксированных μ_{jk} в подзадачах не повторяются.

Литература

I. Жернак А. Н., Решение задачи нелинейного программирования в классе кусочно-линейных функций. В сб.: Автоматизир. системы упр., Ленингр. ун-т, 1977, 4, 55-57.

2. Мартынов А. В., О методе ветвей и границ в невыпуклом программировании с невыпуклой допустимой областью. Труды Кубан. ун-та, 1976, 222, 86-90.

3. Мартынов А. В., Венгерова Г. Т., О методе ветвей и границ в невыпуклом программировании. Изв. АН СССР. Техн. киберн., 1972, № I, I7-27.

4. Шихов В. В., Об одной программе для решения задач линейного и сепарабельного программирования. Эконом. и мат. методы, 1978, 6, № 6, 1227-1229.

5. Falk, J. E., Soland, R. M., An algorithm for separable nonconvex programming problems. Manag. Sci., 1969, 15, № 9, 550-569.

6. Miller, C. E., The simplex method for local separable programming. Recent Advances in Mathematical Programming. R. L. Graves and P. Wolfe(Eds), New-York, McGraw - Hill, 1963, 89-100.

7. Soland, R. M., An algorithm for separable non-convex programming problems II: nonconvex constraints. Manag. Sci., 1971, 17, № 11, 759-773.

ON SOLVING THE PIECEWISE-LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

M. Uri

Summary

In this paper the piecewise-linear programming problem (1)-(3) with a nonconvex feasible region is considered. The algorithms basing on the idea of branch-and-bound method for problems in λ-form (7)-(11) and μ-form (13)-(17) are presented.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS INHALT

Ученые записки
Тартуского государственного университета.
Выпуск 580.
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на немецком и английском языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202 400, г.Тарту, ул.Юликооли, I8.
Ответственный редактор Г.Вайникко.
Корректоры А.Райд, С.Райтар, Э.Яйгма.
Подписано к печати I8.08.I98I.
МВ 0377I.
Формат 30х45/4.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 2,7.
Печатных листов 4,5.
Тираж 400.
Заказ № 889.
Цена 40 коп.
Типография ТГУ,
ЭССР, 202 400, г.Тарту, ул.Пялсона, I4.
2 - 2