TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA PRAKTIKUM

1985

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Algebra ja geomeetria kateeder

ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA PRAKTIKUM

II

Sirge ja tasand

L. Tuulmets

Teine parandatud trükk

TARTU 1985

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nôukogus
20. juunul 1984.a.

IV. peatükk

SIRGE TASANDIL

§ 1. Sirge tasandil

Kui tasandil on antud afiinne reeper, siis iga sirge tasandil on selle reeperi suhtes määratud lineaarvõrrandiga

$$Ax + By + C = 0, \qquad (4.1)$$

kus $A^2 + B^2 \neq 0$ (s.t. A ja B ei ole korraga nullid). Viimase eelduse teeme alati, kui sirge on määratud võrrandiga (4.1), edaspidi seda rõhutamata. Nimelt sirge koosneb parajasti nendest punktidest $X(x,y)$, mille koordinaadid x ja y antud reeperi suhtes rahuldavad võrrandit (4.1). Ümberpöördult, iga lineaarvõrrand (4.1) määrab tasandil sirge. Võrrandit (4.1) nimetatakse sirge üldvõrrandiks.[1]

---

[1] Sirge määramiseks üldvõrrandiga ei ole vaja teada kõiki kolme kordajat A, B, C. Piisab, kui on teada kaks suhet A : B : C.

Sirgeid tähistatakse tavaliselt väikeste ladina tähtedega a, b, c, ...

Iga sirge tasandil jagab tasandi kaheks pooltasandiks. Ühes pooltasandis asetsevate kõikide punktide korral

$$Ax + By + C > 0 \tag{4.2}$$

ja teises pooltasandis asetsevate kõikide punktide korral

$$Ax + By + C < 0.$$

Kui $A > 0$, siis pooltasandit, mille korral kehtib seos (4.2), nimetatakse <u>positiivseks pooltasandiks</u> antud sirge suhtes antud reeperis. Teist pooltasandit nimetatakse negatiivseks pooltasandiks.

<u>Sirge sihivektoriks</u> nimetatakse suvalist nullist erinevat sirgega paralleelset vektorit. Praktiliste arvutuste juures valitakse tavaliselt sirge sihivektoriks antud sirgega kollineaarsete vektorite hulgast kõige lihtsamate koordinaatidega vektor. Sirge sihivektori sihti nimetatakse <u>sirge sihiks</u>. Kui sirge on määratud üldvõrrandiga (4.1), siis sirge üheks sihivektoriks on, nagu kohe allpool selgub, $\bar{a} = (-B, A)$.

<u>Sirge kanooniline võrrand</u>. Sirge on täielikult määratud, kui on teada tema üks punkt ja siht. Olgu $X_0(x_0, y_0)$ sirge üks suvaliselt fikseeritud punkt ja $\bar{a} = (l, m)$ sirge sihivektor. Punkt $X(x,y)$ asetseb sirgel siis ja ainult siis (parajasti siis), kui $\bar{a}$ ja $\overline{X_0X}$ on kollineaarsed ($\bar{a} \parallel \overline{X_0X}$). Seega, kui <u>sirge on määratud punktiga X_0 ja sihivektoriga $\bar{a}$</u>, saame sirge võrrandi kirjutada järgmisel kujul:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{4.4}$$

ehk

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0. \tag{4.4'}$$

Sirge võrrandi kuju (4.4) nimetatakse sirge kanooniliseks võrrandiks.

Sirge võrrand kahe punkti järgi. Sirge kanoonilise võrrandi erijuhuna saame sirge võrrandi, kui sirge on määratud oma kahe erineva punktiga $X_1(x_1,y_1)$ ja $X_2(x_2,y_2)$. Sel korral võib sirge sihivektoriks võtta vektori $\overrightarrow{X_1X_2}$ (või sellega kollineaarse vektori). Punktiks X_0 valime ühe antud punktidest (näiteks punkti X_1). Saame

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{4.5}$$

ehk

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.5'}$$

ehk

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.5''}$$

Sirge võrrandit (4.5) nimetatakse sirge võrrandiks kahe punkti järgi.

Sirge parameetrilised võrrandid. Tähistades võrrandis (4.4) ühise suhte tähega t:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t,$$

saame <u>sirge parameetrilised võrrandid</u>

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0; \end{cases} \qquad (4.6)$$

muutujat t nimetatakse siin <u>parameetriks</u>. Sirge parameetrilised võrrandid võime kirjutada ümber nn. vektoriaalsel kujul. Tähistades sirge suvalise punkti kohavektori $\vec{x}$, saame võrrandi (4.6) esitada kujul

$$\vec{x} = (lt + x_0, mt + y_0) \qquad (4.6')$$

ehk

$$\vec{x} = \vec{a}t + \vec{x}_0. \qquad (4.6'')$$

Saadud võrrandit nimetatakse <u>sirge parameetriliseks vektorvõrrandiks</u>.

<u>Sirge tõus</u>. Kui sirge ei ole paralleelne y-teljega (ega ühti y-teljega) ja sirge sihivektoriks on $\vec{a} = (l,m)$, siis suurust

$$k = \frac{m}{l} \qquad (4.7)$$

nimetatakse sirge <u>tõusuks</u>[1]. Tõus k määrab sirge sihi. Kui afiinse reeperi reeperinurk on ω ja sirge sihivektor $\vec{a}$

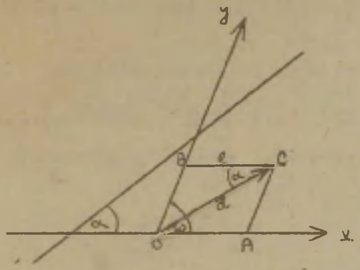
---

[1] Kui sirge on määratud kahe punktiga $X_1(x_1,y_1)$ ja $X_2(x_2,y_2)$, siis tõus määratakse seosest

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4.7'')$$

Kui sirge on määratud üldvõrrandiga (4.1) ja $B \neq 0$, siis sirge tõusuks on

$$k = -\frac{A}{B}. \qquad (4.7''')$$



Joon. 4.1.

moodustab x-teljega nurga α, siis sirge tõus avaldub valemiga[1]

$$k = \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega - \alpha)}. \qquad (4.7')$$

Sirge taandatud võrrand. Kasutades tõusu k, võime võrrandile (4.5) (eeldusel, et sirge ei ole paralleelne y-teljega) anda kuju

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (4.8)$$

ehk, tähistades siin $b = y_1 - kx_1$

$$y = kx + b. \qquad (4.8')$$

Sirge võrrandit (4.8') nimetatakse sirge taandatud võrrandiks. Vabaliiget b nimetatakse sirge algordinaadiks (ordinaatlõiguks), sest sirge lõikab ordinaattelge punktis (0,b).

Sirge võrrand telglõikudes. Kui sirge ei läbi reeperi alguspunkti ja lõikab reeperitelgi punktides A(a,0) ja B(0,b), siis võrrandist (4.5) saame sirge võrrandi telglõikudes

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (4.9)$$

---

[1] Kolmnurgast OBC leiame siinusteoreemi põhjal, et

$\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin(\omega - \alpha)}$, millest järeldubki seos (4.7').

Suurusi a ja b nimetatakse vastavalt abstsiss- ja ordinaatlõiguks.

Kõik saadud võrrandid on rakendatavad mistahes afiinse reeperi korral, järelikult siis ka iga ristreeperi korral. Esitame edasi mõned tulemused, mis kehtivad ainult ristreeperi puhul.

Ristreeperi korral sirge a tõus on võrdne x-telje ja sirge a vahelise nurga α tangensiga (nagu järeldub valemist (4.7'), kui $\omega = \frac{\pi}{2}$).

$$k = \tan \alpha . \tag{4.10}$$

Sirge normaalvektor. Ristreeperi korral saame sirge üldvõrrandis (4.1) esinevate kordajate paarile (A,B) anda veel ühe geomeetrilise tõlgenduse. Nullist erinevat vektorit, mis on risti sirge sihivektoriga, nimetatakse sirge normaalvektoriks. Kui sirge on määratud üldvõrrandiga (4.1), siis sirge normaalvektoriks on vektor $\vec{n} = (A,B)$ (või temaga kollineaarne vektor).

Olgu sirge määratud punktiga $X_0(x_0,y_0)$ ja normaalvektoriga $\vec{n}$. xy-tasandi punkt $X(x,y)$ asetseb sirgel parajasti siis, kui vektorid $\vec{n}$ ja $\overrightarrow{X_0X}$ on risti ($\vec{n} \perp \overrightarrow{X_0X}$), s.t. kui nende vektorite skalaarkorrutis on võrdne nulliga

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{X_0X} = 0, \tag{4.11}$$

ehk koordinaatides

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{4.12}$$

Avades sulud ja tähistades $C = -(Ax_0 + By_0)$, saamegi sirge võrrandi (4.1).

Tuletame meelde juba eespool tehtud kokkulepet: kui ülesande tingimustes ei ole nimetatud reeperit, siis tuleb kasutada ristreeperit.

Punkti asend sirge suhtes. Sirge joonestamine.

4.1. Missugune on tarvilik ja piisav tingimus, et punkt $P = (x_1,y_1)$ asetseks sirgel $Ax + By + C = 0$?

4.2. Punktid $P_1(-2,y)$ ja $P_2(x,2)$ asetsevad sirgel $3x + 5y + 11 = 0$. Leida tundmatute koordinaatide väärtused.

4.3. Määrata punktide $M_1(3,1)$, $M_2(2,3)$, $M_3(6,3)$, $M_4(-3,-3)$, $M_5(3,-1)$, $M_6(-2,1)$, $M_7(5,0)$ asendid sirge a: $2x - 3y - 3 = 0$ suhtes.

4.4. Milline joon on võrrandiga $s = s_0 + vt$ määratud ühtlase liikumise graafikuks?

4.5. Joonestada sirged, mis on antud järgmiste võrranditega: $y = 3x + 1$; $y = x - 2$; $y = -5x + 3$; $y = -2x - 1$; $y = 2x$; $y = 5$.

4.6. Uurida, kuidas asetsevad sirged $3x - y = 0$, $3x - y + 1 = 0$, $2x + 5 = 0$, $4y - 9 = 0$, $7x = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$ reeperitelgede suhtes ja joonestada need.

Sirge taandatud võrrand.

4.7. Määrata järgmiste sirgete tõusud ja ordinaatlõigud. 1) $2x - y + 3 = 0$, 2) $5x + 2y - 8 = 0$, 3) $3x + 8y + 16 = 0$.

4.8. Koostada sirge võrrand ja joonestada selle graafik, kui on teada sirge tõus k ja ordinaatlõik on b:

1) $k = \frac{2}{3}$, $b = 3$; 2) $k = 3$, $b = 0$; 3) $k = 0$, $b = -2$; 4) $k = -\frac{3}{4}$, $b = 3$; 5) $k = -2$, $b = -5$; 6) $k = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$.

4.9. Sirge moodustab x-teljega nurga 150° ning sirge ordinaatlõik on $-\frac{1}{3}$. Leida selle sirge võrrand ning lõikepunkt abstsissteljega.

4.10. On antud sirge $5x + 3y - 3 = 0$. Leida antud sirgega 1) paralleelse, 2) ristuva sirge tõus.

4.11. Leida sirged, mis läbivad koordinaatide alguspunkti ning moodustavad x-teljega nurga: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 120°; 5) 135°; 6) 180°.

4.12. Sirge läbib punkti $(-5,3)$ ning moodustab x-teljega nurga 135°. Koostada sirge võrrand.

4.13. Valguskiir levib mööda sirget $2x - 3y - 12 = 0$. Jõudnud abstsissteljeni, ta peegeldub. Leida kiire peegeldumispunkt ning peegeldunud kiire võrrand.

4.14. Millise nurga all tuleks punktist $A(5,2)$ suunata kiir x-teljeni, et peegeldunud kiir läbiks punkti $B(-1,4)$?

Sirge võrrand telglõikudes.

4.15. Punkti $X_1(x_1, y_1)$, $x_1 y_1 > 0$ läbiv sirge $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ lõikab reeperinurgast välja kolmnurga pindalaga S. Määrata arvude S, x_1 ja y_1 vaheline seos, kui $ab > 0$.

4.16. Milline peab olema lõikude a ja b suhe, et sirge $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ moodustaks x-teljega nurga: 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$;

3) $\frac{\pi}{3}$.

4.17. On antud sirged: 1) $2x + 3y - 6 = 0$; 2) $4x - 3y + 24 = 0$; 3) $2x + 3y - 9 = 0$; 4) $3x - 5y - 2 = 0$; 5) $5x + 2y - 1 = 0$. Leida nende võrrandid telglõikudes.

4.18. Punkti A läbiva sirge telglõigud on võrdsed. Koostada sirge võrrand, kui 1) A(3,-7); 2) A(2,3); 3) A(5,2).

4.19. Sirge läbib punkti A ja lõikab reeperitelgedest kolmnurga pindalaga S ruutühikut. Koostada sirge võrrand, kui

1) A(1,1), S = 2;

2) A(5,-5), S = 50;

3) A(8,6), S = 12;

4) A(12,6), S = 150.

4.20. Asetada läbi punkti M(3,2) sirge,nii et selle sirge reeperitelgede vaheline lõik poolituks punktis M.

4.21. Punkti B(0,4) ümber pöörlev sirge lõikab abstsisstelge liikuvas punktis M. Leida sirge BM võrrand, kui

1) kolmnurga OBM pindala on 6 ruutühikut;

2) lõik BM = 7;

3) nurk BMO = 30°;

4) BM on risti sirgega $3x - 5y + 8 = 0$.

4.22. Ühtlase liikumise graafik lõikab abstsisstelge punktis $A(-\frac{1}{2},0)$ ja ordinaattelge punktis B(0,8). Leida kiirus, kusjuures mastaap valida nii, et pikkusühikule x-teljel vastab 1 tund ja ühele ühikule y-teljel 1 km.

Sirge läbi kahe antud punkti.

4.23. Tõestada, et kahte punkti $X_1(x_1,y_1)$ ja $X_2(x_2, y_2)$ läbiva sirge võrrandi saab esitada kujul

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4.24. Leida kolmnurga külgede võrrandid, kui kolmnurga tipud on:

1) $A(4,2)$, $B(-5,4)$, $C(-2,-3)$;

2) $K(2,0)$, $L(0,0)$, $M(-1,-2)$;

3) $P(a,b)$, $Q(a,a+b)$, $R(b,a+b)$.

4.25. Kolmnurga tipud on $A(3,2)$, $B(5,-2)$, $C(1,0)$. Leida kolmnurga külgede ja mediaanide võrrandid.

4.26. Leida sirgete AB, KL ja PQ tõusud, kui $A(2,-5)$, $B(3,2)$; $K(-3,1)$, $L(7,8)$; $P(5,-3)$, $Q(-1,6)$.

4.27. Tõestada, et kolme punkti $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ ja $M_3(x_3,y_3)$ kollineaarsuse tingimuse võib esitada kujul

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Märkus: Punkte nimetatakse kollineaarseteks, kui nad asetsevad ühel sirgel.

4.28. Kontrollida, kas kolm antud punkti A, B, C asuvad ühel sirgel, kui

1) $A(1,3)$, $B(5,7)$ ja $C(10,12)$;

2) $A(-3,-8)$, $B(1,-2)$ ja $C(10,12)$.

4.29. Sirgel, mis läbib punkte $M(-12,-13)$ ja $N(-2,-5)$, leida punkt, mille abstsiss on 3.

4.30. Sirge läbib punkte $M(2,-3)$ ja $N(-6,5)$. Leida sellel sirgel punkt, mille ordinaat on -5.

4.31. Reeperi alguspunktist lähtuval ja punkti $M(4,3)$ läbival sirgel leida punkt P, mille kaugus koordinaatide alguspunktist on 9.

4.32. Punkte $A(4,2)$ ja $B(0,-1)$ läbival sirgel leida punkt, mille kaugus punktist $C(-4,-4)$ on 5.

4.33. Punkte $A(4,8)$ ja $B(-1,-4)$ läbival sirgel leida punkt, mille kaugus punktist B on 4.

4.34. Kontrollida, kas punktid $A(-2,-2)$, $B(-3,1)$, $C(7,7)$ ja $D(3,1)$ on trapetsi tippudeks ning koostada trapetsi kesklõigu ja diagonaalide võrrandid.

Sirge on määratud punkti ja sihivektoriga.

4.35. Leida sirge, mis läbib punkti $A(3,-1)$ ja on paralleelne: 1) abstsissteljega; 2) koordinaatnurga poolitajaga; 3) sirgega $y = 3x + 7$.

4.36. Olgu antud sirge $2x + 3y + 4 = 0$. Leida sirge, mis läbib punkti $M(2,1)$ ja on 1) paralleelne antud sirgega; 2) risti antud sirgega.

4.37. Koostada ruudu külgede võrrandid, võttes külje pikkuseks a, kusjuures ruudu diagonaalid on reeperitelgedeks.

4.38. Leida sirge, mis läbib reeperi alguspunkti ja

1) on paralleelne sirgega $y = 4x - 3$;

2) on risti sirgega $y = \frac{1}{2} x + 1$;

3) moodustab sirgega $y = 2x + 5$ nurga 45°;

4) moodustab sirgega $y = x-1$ nurga 60°.

4.39. Olgu antud punktid: $A(-3,1)$ ja $B(3,-7)$. Leida ordinaatteljel punkt M nii, et sirged AM ja BM oleksid teineteisega risti.

4.40. Leida koordinaatide alguspunkti läbiva ning abstsisstelge 150°-se nurga all lõikava sirge parameetrilised võrrandid.

Paralleelsed sirged.

4.41. Tõestada,et punkti $M_1(x_1,y_1)$ läbiva ja sirgega $Ax + By + C = 0$ paralleelse sirge võrrandi võib esitada kujul $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$.

4.42. Otsida võimalikult lihtsam viis koordinaatide alguspunkti läbiva ja antud sirgega $Ax + By + C = 0$ paralleelse sirge võrrandi koostamiseks.

4.43. Leida sirge, mis läbib punkti A ja on paralleelne sirgega a, kui

1) $A(0,0)$, a: $4x + y - 5 = 0$;

2) $A(2,-1)$, a: $4x - 7y + 12 = 0$;

3) $A(2,-3)$, a: $2x + 3 = 0$;

4) $A(2,-3)$, a: $3y - 1 = 0$.

4.44. Sirge läbib punkte $A(1,2)$ ja $B(-1,-5)$. Leida sirge, mis on paralleelne sirgega AB ja läbib punkti C(2, -3).

4.45. Määrata, millise a väärtuse korral sirge $(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$

1) on paralleelne abstsissteljega;

2) on paralleelne ordinaatteljega;

3) läbib koordinaatide alguspunkti.

Koostada iga juhu korral sirge võrrand.

4.46. Leida, millistel m ja n väärtustel sirge $(m + 2n - 3)x + (2m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$ on paralleelne abstsissteljega ning lõikub ordinaatteljega punktis (0, -3). Koostada sirge võrrand.

4.47. Leida, milliste m ja n väärtuste korral sirge $(2m - n + 5)x + (m + 3n - 2)y + 2m + 7n + 19 = 0$ on paralleelne ordinaatteljega ja lõikub abstsissteljega punktis (5,0). Koostada sirge võrrand.

4.48. Koostada võrrandid sirgetele, mis läbivad kolmnurga tippe

1) A(-1,2), B(3,-1), C(0,4);

2) K(5,-4), L(-1,3), M(-3,-2)

ja on paralleelsed vastaskülgedega.

4.49. On antud kolmnurga külgede keskpunktid: $M_1(2, 1)$, $M_2(5,3)$ ja $M_3(3,-4)$. Koostada kolmnurga külgede võrrandid. Teha joonis.

4.50. On antud kolmnurk, mille tipud on A(0,1), B(-2,5), C(4,9). Selle kolmnurga sisse on joonestatud romb, mille tipp A ühtib kolmnurga tipuga A ning tipust A lähtuvad küljed asuvad kolmnurga külgedel AC ja AB, kusjuures tipu A vastastipp asub küljel BC. Leida rombi külgede võrrandid.

4.51. On antud ristküliku kahe külje võrrandid $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ ja üks tipp $A(2,-3)$. Leida ristküliku ülejäänud külgede võrrandid.

Ristsirged.

4.52. Tõestada, et sirgete $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ristseisu tingimuse võib esitada kujul $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

4.53. Leida reeperi alguspunktist sirgele $6x + 5y - 19 = 0$ tõmmatud ristsirge võrrand.

4.54. Leida sirge, mis läbib punkti A ning on risti sirgega a, kui

1) $A(7,4)$, a: $3x - 2y + 4 = 0$;

2) $A(-5,2)$, a: $4x - y + 3 = 0$;

3) $A(-2,3)$, a: $x = -2$;

4) $A(-2,3)$, a: $y = -5$.

4.55. Sirge $3x + 5y - 15 = 0$ lõikepunktidest reeperitelgedega on tõmmatud ristsirged antud sirgele. Leida nende ristsirgete võrrandid.

4.56. Leida kolmnurga kõrguste võrrandid, kui kolmnurga külgede võrrandid on $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$ ja $2x - y + 3 = 0$.

4.57. Kolmnurga tipud on $M_1(2,1)$, $M_2(-1,-1)$ ja

$M_3(3,2)$. Leida kolmnurga kõrguste võrrandid.

4.58. Kolmnurga tipud on A(1,-1), B(-2,1) ja C(3,5). Punktist B on joonestatud mediaan. Leida punktist A sellele mediaanile tõmmatud ristsirge võrrand.

4.59. Kolmnurga tipud on A(2,-2), B(3,-5) ja C(5, 7). Leida punktist C tipu A juures oleva sisenurga poolitajale tõmmatud ristsirge võrrand.

Otsitav sirge moodustab antud sirgega etteantud nurga.

4.60. Sirge läbib punkti A(3,1) ning moodustab x-teljega 45°-se nurga. Leida sellel sirgel punkt, mille ordinaat $y = 4$.

4.61. Leida sirge, mis läbib punkti (3,1) ja moodustab sirgega $2x + 3y - 1 = 0$ nurga 45°.

4.62. Leida sirge, mis läbib punkti P(2,-1) ja moodustab x-teljega kaks korda suurema nurga kui sirge $x - 3y + 4 = 0$.

4.63. Leida sirge, mis lõikab y-telge punktis $y = -2$ ja moodustab x-teljega kaks korda suurema nurga kui sirge $y = 3x + 3$.

4.64. Leida sirge, mis lõikab y-telge punktis $y = 5$ ja moodustab x-teljega nurga, mille siinus on $\frac{20}{29}$.

4.65. Asetada läbi reeperi alguspunkti sirged, mis moodustavad sirgega $5x - 6y + 2 = 0$ nurgad, mille tangens on $\pm \frac{7}{6}$.

4.66. Punktist A(6,9) langeb nurga all $\frac{\pi}{4}$ kiir sirgele $y = 0,4x + 0,8$. Leida sellelt sirgelt peegeldunud kiire võrrand.

4.67. Langev valguskiir läbib punkti M(-2,3), moodustab x-teljega nurga α ja peegeldub x-teljelt. Koostada langeva ja peegeldunud kiire võrrandid, kui $\tan\alpha = 3$.

4.68. Punktist A(2,3) lähtuv valguskiir peegeldub sirgelt $x + y + 1 = 0$. Peegeldunud kiir läbib punkti B(1, 1). Koostada langeva ja peegeldunud kiire võrrandid.

4.69. Valguskiir levib mööda sirget $x - 2y + 5 = 0$ ning peegeldub sirgelt $3x - 2y + 7 = 0$. Koostada peegeldunud kiire võrrand.

4.70. Võrdhaarse kolmnurga haarad on $y = 3$ ja $x - y + 4 = 0$. Koostada kolmnurga aluse võrrand, teades, et alus läbib koordinaatide alguspunkti.

4.71. Koostada täisnurkse võrdhaarse kolmnurga kaatetite võrrandid, kui hüpotenuusi võrrand on $y = 3x + 5$ ja täisnurga tipp asub punktis A(4,-1).

4.72. Koostada võrrand sirgele, mis läbib punkte A(-3,2) ja B(5,-2) ühendava lõigu keskpunkti ning moodustab lõiguga AB kaks korda suurema nurga kui x-teljega.

4.73. On antud punktid A(3,3) ja B(0,2). Leida sirgel $x + y - 4 = 0$ punkt, millest lõik AB on nähtav nurga all 45°.

4.74. 10 ja 4 ühiku pikkused rombi diagonaalid on võetud reeperi telgedeks. Leida selle rombi külgede võrrandid.

Sirge võrrandi koostamine afiinse reeperi korral.

4.75. Leida punktide $M_1(0,0)$, $M_2(2,1)$, $M_3(-3,1)$, $M_4(3,-1)$, $M_5(4,2)$, $M_6(-1,1)$, $M_7(1,-1)$, $M_8(-6,4)$ asendid sirge $2x + 3y = 0$ suhtes (afiinne reeper).

4.76. On antud punktid $A(-3,1)$ ja $B(5,4)$ ning sirge $x - 2y = 0$. Näidata, et antud sirge lõikab lõigu AB pikendit üle punkti B (afiinne reeper).

4.77. Näidata, et sirge $5x - y - 5 = 0$ lõikab reeperitelgede vahele jäävat sirge $3x - 2y - 6 = 0$ lõiku (afiinne reeper).

4.78. Afiinses reepéris on sirged määratud järgmiste võrranditega. Joonestada sirged.

1) $y = 3x + 4$; 2) $y = \frac{1}{2}x + 2$; 3) $y = \frac{3}{4}x - 5$;
4) $y = -\frac{2}{3}x + 4$; 5) $y = 4x$; 6) $y = -\frac{1}{2}x$;
7) $2x + 3y - 9 = 0$; 8) $5x + 3y + 15 = 0$; 9) $3x + \sqrt{3}\,y + 1 = 0$;
10) $x + 2 = 0$; 11) $3x - 2 = 0$; 12) $y - 4 = 0$;
13) $2y + 3 = 0$; 14) $x + y = 0$; 15) $x - y = 0$.

4.79. Sirged on afiinses reeperis määratud järgmiste võrranditega:

1) $2x - y + 4 = 0$; 4) $-3x + 4y - 6 = 0$;
2) $2x + 3y - 6 = 0$; 5) $3x + \sqrt{3}y + 3 = 0$.
3) $x + 2y + 1 = 0$;

Leida nende sirgete tõusud ning telglõigud.

4.80. On antud sirge punkt A ja tõus k:

1) $A(2,4)$, $k = \frac{2}{3}$; 3) $A(-5,-2)$, $k = 3$;

2) $A(-2,3)$, $k = -\frac{3}{4}$; 4) $A(4,-3)$, $k = -2$.

Leida sirge võrrand afiinses reeperis.

4.81. Leida afiinses reeperis sirge, mis läbib punkti $(2,3)$ ja mille tõus on 5.

4.82. Sirge tõus on 3 ning ta ordinaatlõik on 4. Koostada sirge võrrand afiinses reeperis.

4.83. Sirge läbib punkti $A(-6,-4)$ ja tõus on $k = -\frac{3}{7}$. Leida selle sirge parameetrilised võrrandid afiinses reeperis.

4.84. Leida sirgete

1) $3x + 6y + 5 = 0$, 4) $x = 2$,

2) $x - 2y - 4 = 0$, 5) $y = -3$,

3) $y = -3x + 5$, 6) $2x + 3y = 0$

parameetrilised võrrandid afiinses reeperis.

4.85. Leida sirgete

1) $x = t$, $y = 1 - 3t$;

2) $x = 2 + 5t$, $y = 4 - 7t$

üldvõrrandid afiinses reeperis.

4.86. Sirge telglõigud on 3 (abstsisslõik) ja -5 (ordinaatlõik). Koostada sirge parameetrilised võrrandid afiinses reeperis.

4.87. Leida parameetri t väärtused, mille korral sirge $x = 5t + 2$, $y = t - 1$ punktid asetsevad sirgete $x + 4y - 1 = 0$, $x + y = 0$ vahelisel lõigul (afiinne reeper).

4.88. Koostada kahte antud punkti läbivate sirgete võrrandid, kui punktide koordinaadid afiinses reeperis on 1) $(0,0)$, $(-1,-8)$; 2) $(1,3)$, $(2,4)$; 3) $(2,3)$, $(-4,-6)$;

4) (1,3),(1,-7); 5) (2,-3), (4,-3).

4.89. Sirge läbib punkti (-5,3) ning tema abstsisslõik on 3. Koostada sirge võrrand afiinses reeperis.

4.90. Asetada läbi punkti (2,-1) sirge, mille koordinaattelgede vaheline lõik jaotuks antud punktis pooleks (afiinne reeper).

4.91. Kolmnurga ABC tipud afiinses reeperis on A(-2,3), B(4,1), C(6,-5). Leida tippu A läbiva mediaani võrrand.

4.92. Sirge läbib punkti A ja on paralleelne vektoriga $\vec{a}$. Leida sirge parameetrilised võrrandid afiinses reeperis, kui 1) A(3,-5) ja $\vec{a} = (-2,1)$; 2) A(2,5) ja $\vec{a} = (5,4)$.

4.93. Leida sirge võrrand afiinses reeperis, kui sirge läbib punkti

1) A(3,-2) ja on paralleelne reeperitelgedega:

2) B(7,4) ja on paralleelne sirgega $3x - 2y + 4 = 0$;

3) C(-8,1) ja on paralleelne sirgega $x + y + 7 = 0$.

4.94. On antud rööpküliku tipp C(4,-1) ja küljed $x - 3y = 0$ ning $2x + 5y + 6 = 0$. Leida kahe ülejäänud külje võrrandid afiinses reeperis.

4.95. Kolmnurga tipud afiinses reeperis on A(-1,2), B(3,-1) ja C(0,4). Asetada läbi iga tipu vastasküljega paralleelne sirge.

4.96. Leida afiinses reeperis sirge, mis on paralleelne kahe antud sirgega $x + y - 1 = 0$ ja $x + y - 13 = 0$ ning asub nendest võrdsel kaugusel.

4.97. Teades afiinses reeperis rööpküliku kahte külge $x - y - 1 = 0$, $x - 2y = 0$ ja diagonaalide lõikepunkti $M(3,-1)$, leida kahe ülejäänud külje võrrandid.

4.98. Rööpküliku ABCD küljed AB, BC, CD ja DA läbivad vastavalt punkte $P(3,0)$, $Q(6,6)$, $R(5,9)$, $S(-5,4)$ ning ta diagonaalid lõikuvad punktis $M(1,6)$. Leida rööpküliku külgede võrrandid afiinses reeperis.

4.99. On antud rööpküliku ABCD küljed AB: $3x + 4y - 12 = 0$ ja AD: $5x - 12y - 6 = 0$ ning külje BC keskpunkt $E(-2, \frac{13}{6})$. Leida rööpküliku teiste külgede võrrandid afiinses reeperis.

Sirge võrrandi koostamine kaldreeperi korral.

4.100. Koostada reeperi alguspunkti läbivate ja reeperi telgedega ristuvate sirgete võrrandid kaldreeperis, mille reeperinurk $\omega = 150^\circ$.

4.101. Koostada läbi antud punkti antud sirgele tõmmatud ristsirge võrrand kaldreeperis, kui

1) $O(0,0)$, $2x - 6y + 13 = 0$, $\omega = \frac{\pi}{3}$;
2) $M(-1,4)$, $5x - 3y + 11 = 0$, $\omega = \frac{2\pi}{3}$;
3) $N(5,0)$, $y = 3x - 4$, $\omega = 120^\circ$.

4.102. Leida kaldreeperi reeperinurk ω, kui kaks antud sirget on risti:

1) $4x + 3\sqrt{2}y - 5 = 0$, $\sqrt{2}x - y + 11 = 0$;
2) $y = 2x + 3$, $y = -\frac{4}{5}x + 1$.

4.103. Arvutada nurgad, mis sirge $y = -2x + 5$ moodustab kaldreeperi telgedega (reeperinurk $\omega = \frac{\pi}{3}$).

4.104. Kirjutada võrrand sirgele, mis läbib punkti (-1,-3) ja moodustab x-teljega nurga 1) 30°, 2) 60°, 3) 90°, tingimusel, et $\omega = 120^\circ$.

4.105. Määrata kaldreeperi reeperinurk ω, kui sirged $y = -2x + 1$ ja $y = x + 1$ moodustavad nurga 120°.

4.106. Läbi punkti (2,-5) kulgev sirge moodustab sirgega $4x - 3y + 1 = 0$ nurga $\frac{\pi}{6}$. Leida selle sirge võrrand, kui $\omega = \frac{\pi}{3}$.

4.107. Leida sirge, mis läbib punkti M(6,-2) ja koos kaldreeperi ($\omega = 60^\circ$) telgedega moodustab võrdkülgse kolmnurga.

4.108. Kaldreeperis ($\omega = \frac{2\pi}{3}$) on antud võrdkülgse kolmnurga tipp A(3,2) ja vastaskülje võrrand $6x - 2y - 7 = 0$. Leida kolmnurga kahe ülejäänud külje võrrandid.

4.109. Kaldreeperis ($\omega = \frac{2\pi}{3}$) on antud sirge $3x + 5y - 15 = 0$. Leida sirge selle lõigu pikkus, mis jääb reeperitelgede vahele.

4.110. Leida sirge $4x + 3y - 24 = 0$ ja reeperitelgede poolt moodustatud kolmnurga pindala, kui $\omega = \frac{5\pi}{6}$.

4.111. Sirge liigub selliselt, et kaldreeperi reeperitelgedega lõikumisel tekkivate lõikude summa on konstantne: $a + b = 9$. Leida selle liikuva sirge ja reeperitelgede poolt moodustatud kolmnurkade ümber joonestatud ringjoonte keskpunktide hulk, $\omega = \frac{\pi}{3}$.

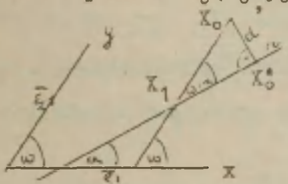
4.112. Kaldreeperis $\omega = \frac{\pi}{3}$ on antud kolmnurk tippudega A(-1,2), B(1,1), C(2,$-\frac{5}{2}$). Leida külje AB ja tipust C tõmmatud mediaani vaheline nurk.

4.113. Leida rombi diagonaalide võrrandid, kui kaks lähiskülge on võetud reeperitelgedeks selliselt, et kogu romb asetseb III veerandis. Rombi külg on a.

§ 2. Punkti kaugus sirgest
Sirge normaalvõrrand

1. Punkti kaugus sirgest.

Leiame punkti $X_0(x_0, y_0)$ kauguse d sirgest a: $y = kx + b$. Selleks projekteerime punkti X vaadeldavale sirgele a paralleelselt y-teljega. Olgu projektsioon $X_0'(x_0, y_1)$ (joon4.2.)



Joon. 4.2.

Täisnurksest kolmnugast $X_0'X_1X_0$ punkti X_0 igasuguse asendi korral saame, et $d = |X_0X_0'| = |(y_0 - y_1)\sin(\omega - \alpha)|$, kus ω on reeperinurk. Et X_1 on vaadeldava sirge punkt, siis $y_1 = kx_0 + b$. Asendades sirge tõusu avaldises (4.7') $\sin\alpha = \sin[\omega - (\omega - \alpha)] = \sin\omega\cos(\omega - \alpha) - \cos\omega\sin(\omega - \alpha)$ ning lahendades saadud võrrandi $\sin(\omega - \alpha)$ suhtes, leiame, et

$$\sin(\omega - \alpha) = \frac{\sin\omega}{\sqrt{1 + k^2 + 2k\cos\omega}}.$$

Nii saame valemi, mis võimaldab arvutada punkti kaugust antud sirgest üldise afiinse reeperi korral

$$d = \frac{|(y_0 - kx_0 - b)\sin\omega|}{\sqrt{1 + k^2 + 2k\cos\omega}}. \qquad (4.13)$$

Kui sirge on määratud üldvõrrandiga $Ax + By + C = 0$, siis eeldusel, et $B \neq 0$, saame $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ ja valemi (4.13) kujul[1]

$$d = \frac{\left|\left(Ax_0 + By_0 + C\right)\sin\omega\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}. \qquad (4.14)$$

Ristreeperi puhul, mil $\omega = \frac{\pi}{2}$, valemid (4.13 - 14) lihtsustuvad: $X(x_0, y_0)$

$$d = \frac{|y_0 - kx_0 - b|}{\sqrt{1 + k^2}}, \qquad (4.13')$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.14')$$

2. <u>Sirge normaalvõrrand.</u>

Sirge normaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$x\cos\alpha + y\cos(\omega - \alpha) - p = 0, \qquad (4.15)$$

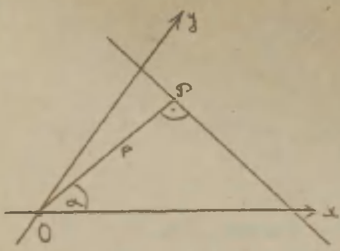
kus $p = |\overrightarrow{OP}|$ on reeperi alguspunkti kaugus antud sirgest ning α on nurk x-telje positiivse suuna ja sirgele lan-

---

1 Kui $B = 0$, siis sirge võrrandiks on $x = -\frac{C}{A}$ ja otsitav kaugus on

$$d = \left|x_0 + \frac{C}{A}\right|\sin\omega.$$

Viimane tulemus järeldub ka vahetult seosest (4.14).



Joon. 4.3.

getatud ristlõigu OP vahel ning ω on reeperinurk (joon. 4.3.).

Ristreeperi puhul, mil $\omega = \frac{\pi}{2}$ on sirge normaalvõrrandiks

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0. \qquad (4.15')$$

Sirge normaalvõrrandi saame sirge üldvõrrandist (4.1), kui jagada viimase pooli normaalvektori pikkusega, teisiti öeldes, kui korrutada neid nn. <u>normeeriva teguriga</u>

$$\mu = \pm \frac{\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}, \qquad (4.16)$$

milleks ristkoordinaatide puhul, mil $\omega = \frac{\pi}{2}$, on

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Siin valitakse teguri μ märk vastupidine võrrandi (4.1) vabaliikme märgiga (kui $A > 0$). Ilmselt esitab võrrand (4.15) sama sirget mis võrrand (4.1), kuid normaalvektoriks on nüüd ühikvektor

$$\bar{n}_0 = \pm \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$$

ja kordajad arvutatakse valemitest

$$\cos\alpha = \pm \frac{A \sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}},$$

$$\cos(\omega - \alpha) = \pm \frac{B \sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}, \qquad (4.17)$$

$$p = \pm \frac{C \sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}$$

ehk ristreeperi korral, mil $\omega = \frac{\pi}{2}$,

$$\cos\alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\sin\alpha = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad (4.17')$$

$$p = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Kasutades sirge normaalvõrrandit, saab kauguse valemid (4.13 - 14) kirjutada lihtsamalt

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \cos(\omega - \alpha) - p \right| \qquad (4.18)$$

ehk

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \right|, \text{ kui } \omega = \frac{\pi}{2}. \qquad (4.18')$$

Punkti kaugus sirgest tasandil võrdub absoluutväärtusega sirge normaalvõrrandi vasakust poolest, millesse on asetatud vaadeldava punkti koordinaadid.

4.114. Leida punkti (x',y') läbiva ja sirgega $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ ristuva sirge võrrand.

4.115. Teha kindlaks, millised järgmistest sirgetest on antud normaalvõrranditega:

1) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$;
2) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y - 1 = 0$;
3) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = 0$;
4) $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$;
5) $-x + 2 = 0$;
6) $x - 2 = 0$;
7) $y + 2 = 0$;
8) $-y - 2 = 0$;
9) $x + \frac{1}{2}y - 3 = 0$;
10) $-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 3 = 0$.

4.116. Teisenda antud sirgete üldvõrrandid normaalkujule

1) $4x - 3y - 10 = 0$;
2) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0$;
3) $12x - 5y + 13 = 0$;
4) $x + 2 = 0$;
5) $2x - y - \sqrt{5} = 0$;
6) $y - x\sqrt{3} = 4$;
7) $x \cos 10^\circ + y \sin 10^\circ + 4 = 0$.

4.117. Leida sirge $9x - 12y + 10 = 0$ kaugus reeperi alguspunktist.

4.118. Leida sirge, mille tõus $k = -\frac{1}{2}$ ning mis asetseb reeperi alguspunktist $\sqrt{5}$ ühiku kaugusel.

4.119. Leida punkti A kaugus sirgest BC, kui

1) A(0,0), B(1,5), C(2,4);

2) A(2,0), B(1,1), C(5,4).

4.120. Leida antud punkti kaugus antud sirgest järgmistel juhtudel:

1) $P_1(4,-2)$, $8x - 15y - 11 = 0$;

2) $P_2(2,7)$, $12x + 5y - 7 = 0$;

3) $P_3(-3,5)$, $9x - 12y + 2 = 0$;

4) $P_4(-3,2)$, $4x - 7y + 26 = 0$;

5) $P_5(8,5)$, $3x - 4y - 15 = 0$.

4.121. Leida punktide $A(3,1)$, $B(2,-4)$, $C(5,-1)$, $D(0,-3)$, $E(0,0)$ kaugused sirgest $3x + 4y = 0$.

4.122. Leida punktist $P(4,-1)$ sirgele $12x - 5y - 27 = 0$ tõmmatud ristlõigu pikkus.

4.123. Kolmnurga tipud on $A(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{28})$, $B(4,3)$ ja $C(2,-1)$. Leida kolmnurga kõrguste pikkused.

4.124. Kolmnurga küljed on $3x + 4y + 390 = 0$, $3x - 4y - 3 = 0$, $5x + 12y + 2 = 0$. Leida kolmnurga kõrguste pikkused.

4.125. Kolmnurga tipud on $A(1,2)$, $B(3,7)$, $C(5,-13)$. Leida tippu A läbiva mediaani kaugus tipust B.

4.126. On antud kolmnurga tipud $A(-10,-13)$, $B(-2,3)$ ja $C(2,1)$. Arvutada tipust B tippu C läbiva mediaanini langetatud ristlõigu pikkus.

4.127. Arvutada punkti kaugus d sirgest ja hälve järgnevatel juhtudel:

1) $A(2,-1)$ $4x + 3y + 10 = 0$;

2) $B(0,-3)$ $5x - 12y - 23 = 0$;

3) $P(-2,3)$ $3x - 4y - 2 = 0$;

4) $Q(1,-2)$ $x - 2y - 5 = 0$.

Märkus. Punkti M hälbeks δ sirge a suhtes nimetatakse punkti kaugust d sirgest, kui punkt asub positiivsel pooltasandil sirge suhtes ja $-d$, kui punkt asetseb negatiivsel pooltasandil vt. lk.127. Kui punkt kuulub sirgele, siis $d = \delta = 0$.

4.128. Punktide hälve sirge $8x - 15y - 25 = 0$ suhtes on -2. Leida punktide hulga võrrand.

4.129. Punkti M hälbed sirgete $5x - 12y - 13 = 0$ ja $3x - 4y - 19 = 0$ suhtes on vastavalt -3 ja -5. Leida punkti M koordinaadid.

Antud kaugusel asetsevad punktid.

4.130. Leida ordinaatteljel punkt, mis asetseb võrdsetel kaugustel koordinaatide alguspunktist ja sirgest $3x - 4y + 12 = 0$.

4.131. Leida abstsissteljel punkt M, mis asetseb sirgest $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ kaugusel a.

4.132. Leida sirgel a punkt, mis asetseb sirgest b kaugusel $\sqrt{5}$ ühikut

1) a: $x - 3y + 13 = 0$, b: $x + 2y + 3 = 0$;

2) a: $x - 2y = 0$, b: $2x + 4y + 1 = 0$.

4.133. Leida sirgel $x + y - 8 = 0$ punktid, mis asetseksid võrdsel kaugusel punktist (2,8) ja sirgest $x - 3y + 2 = 0$.

4.134. Leida sirgel a punkt, mis asetseb punktidest P_1 ja P_2 võrdsel kaugusel:

1) a: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, $P_1(1,4)$, $P_2(-1,-2)$;

2) a: $2x + 3y + 1 = 0$, $P_1(1,3)$, $P_2(-1,-5)$.

4.135. Leida punkt, mis asetseb punktidest (4,1) ja

(8,-3) ning sirgest $5x + 12y = 0$ võrdsetel kaugustel.

4.136. Leida ordinaatteljel punkt P nii, et kauguste vahe punktist P punktideni M(-3,2) ja N(2,5) oleks maksimaalne.

4.137. Leida sirgel $2x - y - 5 = 0$ punkt P nii, et kauguste summa punktideni A(-7,1),B(-5,5) oleks minimaalne.

4.138. Leida sirgel $3x - y - 1 = 0$ selline punkt P, mille kauguste vahe punktideni A(4,1) ja B(0,4) oleks maksimaalne.

4.139. Leida punkt, mis asub mõlemast antud sirgest

1) $4x - 3y + 20 = 0$, $3x + 4y - 60 = 0$;

2) $3x + 4y - 10 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$

kaugusel $d = 5$.

4.140. Leida reeperi telgedel punktid, mis on võrdsetel kaugustel sirgetest $5x - y + 6 = 0$, $5x + y - 3 = 0$.

4.141. Leida sirgel $x + 2y - 12 = 0$ punktid, mis asetsevad võrdsetel kaugustel sirgetest $x + y - 5 = 0$ ja $7x - y + 11 = 0$.

4.142. Leida punktid, mille kaugus sirgest $3x + 4y = 0$ on 2 ja sirgest $x + 3y - 1 = 0$ on $\sqrt{10}$.

4.143. Leida punkt P, mis on võrdsel kaugusel punktidest $P_1(2,3)$, $P_2(4,2)$ ja $P_3(-1,0)$.

Punkti asend sirge suhtes.

4.144. Teha kindlaks, kas punkt M(1,-3) ja reeperi alguspunkt asetsevad samal või teine teisel pool antud sirget:

1) $2x - y + 5 = 0$;

2) $x - 3y - 5 = 0$;

3) $3x + 2y - 1 = 0$;

4) $x - 3y + 2 = 0$;

5) $10x + 24y + 15 = 0$.

4.145. Nelinurga järjestikused tipud on:

1) $A(-3,5)$, $B(-1,-4)$, $C(7,-1)$, $D(2,9)$;

2) $A(-1,6)$, $B(1,-3)$, $C(4,10)$, $D(9,0)$.

Teha kindlaks, kas nelinurk on kumer.

4.146. Teha kindlaks, kas punkt A asetseb sirgete a ja b poolt moodustatud terav- või nürinurgas, kui

1) $A(0,0)$, a: $3x - 2y + 5 = 0$, b: $2x + y - 3 = 0$;

2) $A(2,-5)$, a: $3x - 5y - 4 = 0$, b: $x + 2y + 3 = 0$.

4.147. On antud lõikuvate sirgete paarid:

1) $2x - y - 5 = 0$, $3x + y + 10 = 0$;

2) $4x + 3y - 10 = 0$, $12x - 5y - 5 = 0$;

3) $x - 2y - 1 = 0$, $3x - y - 2 = 0$.

Teha kindlaks, kas punkt $M(1,-2)$ ja reeperi alguspunkt asetvad sirgete poolt moodustatud samas nurgas, kõrvunurkades või tippnurkades.

4.148. On antud lõikuvate sirgete paarid:

1) $x - 3y - 5 = 0$, $2x + 9y - 2 = 0$;

2) $2x + 7y - 5 = 0$, $x + 3y + 7 = 0$;

3) $12x + y - 1 = 0$, $13x + 2y - 5 = 0$.

Teha kindlaks, kuidas punktid $M(2,3)$ ja $N(5,-1)$ asetsevad tekkinud nurkade suhtes.

4.149. Kolmnurga küljed on $7x - 5y - 11 = 0$, $8x + 3y + 31 = 0$, $x + 8y - 19 = 0$. Kontrollida, kas reeperi alguspunkt asetseb kolmnurga sees või väljaspool seda.

4.150. Kolmnurga külgede võrrandid on $x + y - 4 = 0$, $3x - 7y + 8 = 0$, $4x - y - 31 = 0$. Teha kindlaks, kas punkt $M(-3,2)$ asetseb sees- või väljaspool kolmnurka.

4.151. Tõestada, et sirge $2x + y + 3 = 0$ lõikab punkte $A(-5,1)$ ja $B(3,7)$ ühendavat lõiku.

4.152. Tõestada, et sirge $2x - 3y + 6 = 0$ ei lõika punkte $M(-2,-3)$ ja $N(1,-2)$ ühendavat lõiku.

Paralleelsete sirgete vaheline kaugus.

4.153. Leida paralleelsete sirgete $Ax + By + C_1 = 0$ ja $Ax + By + C_2 = 0$ kaugus teineteisest.

4.154. Tõestada, et sirged $3x - 4y + 10 = 0$ ja $6x - 8y + 15 = 0$ on paralleelsed, ja leida nendevaheline kaugus.

Märkus. Otsitavat kaugust d on lihtne leida, kui teame mõlemate sirgete kaugust koordinaatide alguspunktist, nimelt: $d = |p \pm p_1|$; märk sõltub sellest, kas koordinaatide alguspunkt on sirgete vahel või asetsevad sirged ühel pool koordinaatide alguspunkti.

Teine võimalus. Paralleelsete sirgete vaheline kaugus on võrdne ühel paralleelsetest sirgetest asetseva suvalise punkti kaugusega teisest sirgest.

Kolmas võimalus. Olgu antud paralleelsed sirged a ja b. Tähistame nende sirgete ühise sihivektori tähega $\vec{a}$. Leiame kummalgi sirgel ühe punkti $A \in a$, $B \in b$. Paralleelsete sirgete vaheline kaugus d on siis vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b} = \vec{AB}$ ehitatud rööpküliku kõrgus. Rööpküliku pindala aga võib arvutada kahel viisil $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = d|\vec{a}|$.

4.155. Näidata, et sirged $3x - 7y + 2 = 0$, $3x - 7y + 3 = 0$ on paralleelsed, ning leida nendevaheline kaugus d.

4.156. Arvutada iga antud paralleelsete sirgete paari korral nende sirgete vaheline kaugus d.

1) $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$; 2) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;

3) $4x - 3y + 15 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$; 4) $24x - 10y + 39 = 0$, $12x - 5y - 26 = 0$.

4.157. Leida sirge, mis on paralleelne sirgega $5x - 12y + 46 = 0$ ning asub punktist (1,1) 3 ühiku kaugusel.

4.158. Leida sirged, mis on paralleelsed sirgega $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ ja asuvad punktist A(2,3) 5 ühiku kaugusel.

4.159. Leida sirge, mis on paralleelne y-teljega ning asub punktist (3,5) 7 ühiku kaugusel.

4.160. Leida sirgega $3x - 4y - 10 = 0$ paralleelsete ja sellest kaugusel $d = 3$ olevate sirgete võrrandid.

4.161. Leida sirgega $5x + 12y - 1 = 0$ paralleelsete ning 5 ühiku kaugusel asuvate sirgete võrrandid.

4.162. Näidata, et sirge $5x - 2y - 1 = 0$ on paralleelne sirgetega $5x - 2y + 7 = 0$, $5x - 2y - 9 = 0$ ja asub sirgetest võrdsel kaugusel.

4.163. Leida kahest antud paralleelsest sirgest võrdsel kaugusel asetseva paralleelse sirge võrrand:

1) $3x - 2y - 1 = 0$, $3x - 2y - 13 = 0$;
2) $5x + y + 3 = 0$, $5x + y - 17 = 0$;
3) $2x + 3y - 6 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$;
4) $5x + 7y + 15 = 0$, $5x + 7y + 3 = 0$;
5) $3x - 15y - 1 = 0$, $x - 5y - 2 = 0$.

4.164. On antud kolm paralleelset sirget: $10x + 15y - 3 = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$, $2x + 3y - 9 = 0$. Kontrollida, kas esimene asub teiste vahel. Arvutada suhe, milles jaotab esimene sirge teise ja kolmanda vahelise kauguse.

4.165. Üks paralleelne sirge läbib reeperi alguspunkti ja teine punkti $M(1,3)$. Leida nende sirgete võrrandid, kui on teada, et nende sirgete vaheline kaugus on $\sqrt{5}$.

4.166. Kahe paralleelse sirge vaheline kaugus on $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ning nad eraldavad x-teljel vastavalt lõigud -3 ja -7. Leida nende paralleelsete sirgete võrrandid.

Antud kaugustel asetsevad sirged.

4.167. Selgitada, mitu punktist Q kaugusel d asetsevat sirget on võimalik tõmmata läbi punkti P. Lahendada ülesanne üldjuhul ning koostada erijuhtudel sirgete võrrandid, kui

1) P(2,7), Q(1,2), d = 5;

2) P(2,5), Q(5,1), d = 3;

3) P(7,-2), Q(4,-6), d = 5;

4) P(4,-5), Q(-2,3), d = 12.

4.168. Leida antud kahest punktist A(2,1) ja B(-1,4) võrdsel kaugusel olevate punktide hulk.

4.169. Koostada punkti liikumise trajektoori võrrand, kui punkt igal liikumise momendil on võrdsel kaugusel punktidest 1) A(3,2) ja B(2,3); 2) A(5,-1) ja B(1,-5); 3) A(5,-2) ja B(-3,-2); 4) A(3,-1) ja B(3,5).

4.170. Leida liikuva punkti trajektoor, kui selle punkti kaugus reeperi alguspunktist on kogu aeg kaks korda suurem kui kaugus sirgest $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

4.171. Leida punkti P läbiva ning punktidest A ja B võrdsel kaugusel oleva sirge võrrand, kui

1) P(1,2), A(3,3), B(5,2);

2) P(-2,3), A(5,-1), B(3,7);

3) P(1,2), A(2,3), B(4,-5).

4.172. On antud punktid A(2,-3) ja B(5,-1). Leida sirge, mis asetseks punktist A 6 ja punktist B 4 ühiku kaugusel.

4.173. Leida sirge, mis asetseks punktist (1,1) kahe ühiku ning punktist (2,3) nelja ühiku kaugusel.

4.174. Leida sirge, mis läbib punkti A ning asetseb punktist B d ühiku kaugusel, kui

1) $A(0,0)$, $B(3,-2)$, $d = 1$;

2) $A(0,0)$, $B(2\sqrt{2},5\sqrt{2})$, $d = 3$;

3) $A(3,-1)$, $B(2,-3)$, $d = \frac{9}{\sqrt{17}}$.

4.175. Leida sirge, mis asub punktist $C(4,3)$ kaugusel 5 ühikut ja mille telglõigud on võrdsed.

4.176. Leida sirge, mis läbib reeperi alguspunkti ning mille korral punktide $(1,1)$ ja $(2,-3)$ kauguste summa sirgest on $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

4.177. Punkti $P(-2,1)$ läbiva sirge kaugus punktist $C(3,1)$ on 4 ühikut. Leida selle sirge tõus.

4.178. Leida sirge, mis asetseb reeperi alguspunktist 5 ühiku kaugusel ja lõikab sirget $8x + 5y - 39 = 0$ punktis, mille abstsiss $x = -2$.

4.179. Leida sirged, mis on risti sirgega $2x + 6y - 3 = 0$ ja asetsevad punktist $(5,4)$ kaugusel $\sqrt{10}$ ühikut.

4.180. Koostada punkti $M(5,1)$ suhtes sirgega $3x - 2y + 1 = 0$ sümmeetrilise sirge võrrand.

4.181. Leida sirged, mis asetseksid punktist $A(1,9)$ 5 ühiku kaugusel ning moodustaksid sirgega b: $x - 7y = 0$ nurga 45°. Leida nendest sirgetest moodustatud ruudu tipud.

4.182. Leida sirged, mis moodustaksid y-teljega nurgad, mille tangensid on ± 2 ja mis asetseksid koordinaatide alguspunktist $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ühiku kaugusel.

Nurgapoolitaja.

4.183. Näidata, et sirgete $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ja

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$ vaheliste nurkade nurgapoolitajate võrrandid on

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} .$$

4.184. Leida nurgapoolitajate võrrandid, kui nurga moodustavad sirged $3x + 4y - 9 = 0$ ja $12x + 9y - 8 = 0$.

4.185. Leida reeperi telgedest võrdsel kaugusel asetsevate punktide hulga võrrand.

4.186. Leida sirgete $2x - 9y + 18 = 0$ ja $6x + 7y - 21 = 0$ poolt moodustatud nurkade poolitajate võrrandid. Kontrollida, kas need nurgapoolitajad on teineteisega risti.

4.187. On antud sirged:

1) $3x - y + 5 = 0$, $3x + y - 4 = 0$;

2) $3x - 4y + 2 = 0$, $5x + 12y - 3 = 0$;

3) $x - y = 0$, $x + y = 0$;

4) $x + 2y = 0$, $3x + 4y = 0$.

Leida nende sirgete vaheliste nurkade poolitajate võrrandid.

4.188. Leida sirgete $3x + 4y - 5 = 0$, $5x - 12y + 3 = 0$ vahelise teravnurga poolitaja.

4.189. Leida sirgete $x - 3y = 0$, $3x - y + 5 = 0$ vahelise teravnurga poolitaja võrrand.

4.190. Leida sirgete $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y + 15 = 0$ poolt moodustatud nürinurga poolitaja võrrand.

4.191. Leida sirgete $3x - y - 4 = 0$ ja $2x + 6y +$

$+ 3 = 0$ vahelise nurga poolitaja, millel asub koordinaatide alguspunkt.

4.192. Leida sirgete $x + 2y - 11 = 0$ ja $3x - 6y - 5 = 0$ vahelise nurga poolitaja, millel asub punkt $M(1,-3)$.

4.193. Leida sirgete $x + y - 3 = 0$ ja $7x - y + 4 = 0$ vahelise nurga poolitaja, milles asub punkt $M(-1,5)$.

4.194. Leida sirgete $x - 7y + 5 = 0$, $5x + 5y - 3 = 0$ vahelise nurga poolitaja, kui reeperi alguspunkt asetseb antud nurga kõrvunurgas.

4.195. Leida sirgete $2x - 3y - 5 = 0$, $6x - 4y + 7 = 0$ vahelise nurga poolitaja, kui punkt $C(2,-1)$ asub antud nurga kõrvunurgas.

4.196. Kolmnurga küljed on $3x - 4y = 0$, $4x - 3y = 0$, $5x + 12y - 10 = 0$. Leida kolmnurga sisenurkade poolitajate võrrandid.

4.197. Arvutada kolmnurga välisnurkade poolitajate poolt moodustatud kolmnurga pindala, kui antud kolmnurga küljed on: $3x + 3y - 5 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $7x + y + 1 = 0$.

4.198. Leida reeperinurga poolitajatel punktid, mille kaugus punktist $M(-2,0)$ on 10.

4.199. Leida punktid, mis asetseksid võrdsel kaugusel reeperinurkade poolitajatest ja punktist $(1,\sqrt{2})$.

Ruut. Ristkülik. Kolmnurk.

4.200. Taastada ruudukujulise maatüki piirid, kui on säilinud kolm tulpa: üks maatüki keskpunktis ja kaks vastasküljedel. Tulpade koordinaadid on: keskpunktil M(1,6) ja külgede punktidel A(5,9) ning B(3,0). Koostada piirideks olevate sirgete võrrandid.

Märkus. Et taastada piirid, tuleb läbi punktide A ja B panna paralleelsed sirged, mis oleksid võrdsel kaugusel keskpunktist M. Ülejäänud kaks piiri on nendega risti ning asuvad samal kaugusel keskpunktist M.

4.201. Ruudu tipp on A(2,-5) ja üks külg asub sirgel $x - 2y - 7 = 0$. Arvutada selle ruudu pindala.

4.202. Ruudu kaks külge asetsevad sirgetel $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$. Arvutada ruudu pindala.

4.203. On antud ruudu kaks lähistippu A(2,0) ja B(-1,4). Leida ruudu külgede võrrandid.

4.204. Ruudu tipp on A(5,-1), üks külgedest asub sirgel $4x - 3y - 7 = 0$. Leida ruudu teiste külgede võrrandid.

4.205. On antud ruudu kahe külje võrrandid $4x - 3y + 3 = 0$, $4x - 3y - 17 = 0$ ja üks tipp A(2,-3). Leida selle ruudu kahe ülejäänud külje võrrandid.

4.206. Ruudu kahe külje võrrandid on $5x + 12y - 10 = 0$, $5x + 12y + 29 = 0$. Leida kahe ülejäänud külje võrrandid, kui punkt M(-3,5) asub selle ruudu küljel.

4.207. Ruudu sümmeetria keskpunkt asub punktis (-1,0). Ühe külje võrrand on $x + 3y - 5 = 0$. Leida ruudu kolme ülejäänud külje võrrandid.

4.208. Ruudu kaks paralleelset külge läbivad punkte

(2,1) ja (3,5) ning kaks ülejäänud külge läbivad punkte (0,1) ja (-3,-1). Leida ruudu külgede võrrandid.

4.209. Ristküliku kahe külje võrrandid on: $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ ja tipp A(-2,1). Arvutada selle ristküliku pindala.

4.210. Kolmnurga ABC külgede AB, BC ja CA võrrandid on vastavalt $x + 21y - 22 = 0$, $5x - 12y + 7 = 0$, $4x - 33y + 146 = 0$. Leida selle kolmnurga raskuskeskme kaugus küljest BC.

4.211. Sirged $7x + y - 2 = 0$, $5x + 5y - 4 = 0$ ja $2x - 2y + 5 = 0$ moodustavad kolmnurga. Leida kolmnurga sees punkt, mis asetseb külgedest $7x + y - 2 = 0$ ja $5x + 5y - 4 = 0$ võrdsel kaugusel ning ta kaugus kolmandast küljest on $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

4.212. On antud võrdhaarse kolmnurga haarad $7x - y + 4 = 0$, $x + y - 2 = 0$ ning punkt (3,5), mis asub alusel. Leida kolmnurga aluse võrrand.

4.213. Sirged läbivad punkti P(2,-1) ja moodustavad sirgetega $2x - y + 5 = 0$, $3x + 6y - 1 = 0$ võrdhaarsed kolmnurgad. Leida nende sirgete võrrandid.

* 4.214. On antud rombi kahe paralleelse külje võrrandid $x + y - 5\sqrt{2} = 0$ ja $x + y = 0$ ning punktid A(3,5) ja B(1,0), mis asuvad kahel ülejäänud küljel. Leida rombi kahe puuduva külje võrrandid.

Ringjoone puutuja.

4.215. Kontrollida, kas sirged $2x + \sqrt{5}y - 15 = 0$ ja $\sqrt{11}x - 5y + 30 = 0$ puutuvad üht ja sama ringjoont, mille keskpunkt asetseb koordinaatide alguspunktis, ning arvutada selle ringi raadius.

Märkus. Kõik puutujad on ringjoone keskpunktist raadiuse kaugusel. Kui antud sirged puutuvad selle ringjoonega, siis nad peavad olema võrdsetel kaugustel koordinaatide alguspunktist.

4.216. Tõmmata läbi punkti P(5,0) puutuja ringjoonele $x^2 + y^2 = 9$.

4.217. Leida punkti P(7,-3) läbivad puutujad ringjoonele $x^2 + y^2 = 29$.

4.218. Leida sirgeid $3x - 4y + 10 = 0$ ja $3x + 4y = 0$ puutuva ringjoone keskpunkt, kui ringjoone raadius $r = 8$.

4.219. Kolmnurga tipud on $A(\frac{9}{5},\frac{2}{5})$, B(0,4) ja C(-3,-2). Leida kolmnurga ABC sisse joonestatud ringjoone keskpunkt.

4.220. Leida reeperitelgede ja sirge $3x - 4y - 5 = 0$ poolt moodustatud kolmnurga siseringjoone keskpunkt.

Märkus. Kolmnurga siseringjoone keskpunkt asetseb kolmnurga sisenurkade poolitajate lõikepunktis.

4.221. Kolmnurga küljed on $x + y + 12 = 0$, $7x + y = 0$, $7x - y + 28 = 0$. Leida selle kolmnurga siseringjoone keskpunkt.

Punkti kaugus sirgest ja sirge normaalvõrrand kald- ja afiinse reeperi korral.

4.222. Teisendada sirgete võrrandid normaalkujule, kui kaldreeperi reeperinurk on ω.

1) $x + 5y - 4 = 0$, kui $\omega = \frac{\pi}{3}$;

2) $2x + 5\sqrt{3}y - 7 = 0$, kui $\omega = \frac{\pi}{6}$;

3) $5x + 2y + 13 = 0$, kui $\omega = \frac{2\pi}{3}$

4.223. Leida punkti $P(0,5)$ kaugus sirgest $y = \sqrt{3}x + 7$, kui $\omega = \frac{5\pi}{6}$.

4.224. On antud sirge $6x + 3\sqrt{2}y - 1 = 0$ kaldreeperis $\omega = \frac{\pi}{4}$. Leida reeperi alguspunktist sirgele tõmmatud ristlõigu pikkus ja nurgad, mis ristlõik moodustab telgedega.

4.225. Leida reeperinurk, kui punkti $P(-1,2)$ kaugus sirgest $x + 2y - 6 = 0$ on 1,5.

4.226. Rombi diagonaalid, mille pikkused on 30 ja 16 ühikut, on võetud reeperitelgedeks. Arvutada selle rombi paralleelsete külgede vaheline kaugus.

4.227. Leida sirge $10x + 56y - 39 = 0$ võrrandi normaalkuju afiinses reeperis, kui $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$.

4.228. Leida punkti $P(2,1)$ ja sirge $10x + 56y - 37 = 0$ vaheline kaugus, kui $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$.

§ 3. Kahe sirge vastastikune asend tasandil

Olgu üldises afiinses reeperis sirge a määratud üldvõrrandiga

$$a: \quad Ax + By + C = 0. \qquad (2.1)$$

Sirgeteks tasandil on ka reeperi teljed. Sirge asendit reeperitelgede suhtes näitab järgmine tabel.

	$C = 0$ Sirge läbib reeperi alguspunkti	$C \neq 0$ Sirge ei läbi reeperi alguspunkti
$A = 0$, $B \neq 0$	$y = 0$ Sirge ühtib x-teljega	$By + C = 0$ Sirge on paralleelne x-teljega ja lõikab y-telge punktis $(0, -\frac{C}{B})$
$A \neq 0$, $B = 0$	$x = 0$ Sirge ühtib y-teljega	$Ax + C = 0$ Sirge on paralleelne y-teljega ja lõikab x-telge punktis $(-\frac{C}{A}, 0)$
$A = B = 0$		Võrrand on vastuoluline

Olgu tasandil antud kaks sirget a ja b. Olgu sirge a sihivektor $\bar{a} = (l_1, m_1)$ ja sirge b sihivektor $\bar{b} = (l_2, m_2)$.

Sirged a ja b on paralleelsed[1], kui sirgete sihivektorid on kollineaarsed, s.t. kui

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad \text{ehk} \quad \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.20}$$

Paralleelsete sirgete erijuhuks on sirgete ühtimine. Selleks et kontrollida, kas kaks paralleelset sirget ühtivad, piisab kui kontrollida, kas neil sirgeil on üks ühine punkt.

Sirged a ja b lõikuvad, kui nende sihivektorid ei ole kollineaarsed, s.t. kui $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ ehk

$$\frac{l_1}{l_2} \neq \frac{m_1}{m_2} \quad \text{ehk} \quad \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4.21}$$

Olgu sirged a ja b antud üldvõrranditega

$$\begin{aligned} a: &\quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ b: &\quad A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Sel juhul võime sirge a sihivektoriks võtta vektori $(B_1, -A_1)$ (või temaga kollineaarse vektori) ja eelnevate tulemuste põhjal saame, et

a) sirged a ja b on paralleelsed, kui sirgete võrrandites vastavate tundmatute kordajad on võrdelised

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \tag{4.23}$$

ehk tundmatute kordajatest moodustatud determinant on võrdne nulliga

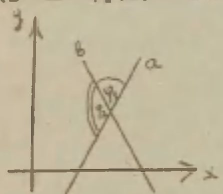
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.23'}$$

[1] Teine terminoloogia. Kollineaarsed ($a \parallel b$): 1) paralleelsed (kollineaarsed ja mitteühtivad) 2) ühtivad.

Kahe sirge vaheline nurk. Nurka kahe sirge vahel tasandil mõõdab nurk nende sirgete sihivektorite vahel. Olgu sirge a sihivektor $\vec{a} = (l_1, m_1)$ ja sirge b sihivektor $\vec{b} = (l_2, m_2)$, siis[1]

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}. \qquad (4.26)$$

Vastavalt sihivektorite suundadele määrab see valem ühe kahest kõrvunurgast φ_1 ja φ_2, mille moodustavad sirged (joon. 4.4.). Kahe sirge vahelise nurga üheseks määramiseks tuleb sirgete paar järjestada: näidata, milline loetakse esimeseks ja milline teiseks. Nurgaks sirgest a sirgeni b nimetatakse nurka, mille võrra tuleb pöörata esimest sirget a positiivses suunas[2] ühtimiseni teise sirgega b.



Joon.4.4.

Ortonormeeritud reeperis kahe sirge vahelise nurga arvutamise valemil (4.26) on kuju

$$\cos\varphi_{12} = \pm\frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\,\sqrt{l_2^2 + m_2^2}} \qquad (4.27)$$

ehk kui sirged a ja b on esitatud üldvõrrandiga (4.22), siis

---

[1] Valem kehtib afiinses reeperis.

[2] Vastu kellaosuti suunda.

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} . \qquad (4.28)$$

Viimasest valemist (4.28) järeldub pärast lihtsat teisendust, et

$$\sin \varphi_{1,2} = \sqrt{1 - \cos^2\varphi_{1,2}} = \frac{|A_1B_2 - A_2B_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} . \qquad (4.29)$$

$$\tan \varphi_{1,2} = \pm \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} . \qquad (4.30)$$

Nurk sirgest a sirgeni b arvutatakse valemist

$$\tan \angle(a,b) = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} . \qquad (4.31)$$

$Ax + Bx + C = 0$

$A_1 + B_2$

Kui sirged a ja b on <u>risti</u>, siis sirgetevahelised nurgad on täisnurgad, s.t. $\cos \varphi_{1,2} = \frac{\pi}{2}$, ning valemist (4.28) saame

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad \left(\omega = \frac{\pi}{2}\right) \qquad (4.32)$$

ehk

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \qquad \left(\omega = \frac{\pi}{2}\right) . \qquad (4.32')$$

Olgu sirged a ja b määratud taandatud võrranditega

$$\begin{aligned} a: &\quad y = k_1x + b_1, \\ b: &\quad y = k_2x + b_2, \end{aligned} \qquad (4.33)$$

siis kaldreeperi korral nurk φ sirgest a sirgeni b arvutatakse valemist

$$\tan\varphi = \frac{(k_2 - k_1)\sin\omega}{1 + (k_1 + k_2)\cos\omega + k_1k_2}, \qquad (4.34)$$

mis ristreeperi korral on

$$\tan\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (4.34')$$

Valemitest (4.34 - 34') järeldub, et paralleelsete sirgete tõusud on võrdsed: $k_1 = k_2$.

Sirgete ristseisu tingimusel kaldreeperi korral sirgete tõusude kaudu on kuju (vt. (4.34))

$$1 + (k_1 + k_2)\cos\omega + k_1k_2 = 0 \qquad (4.35)$$

ning ristreeperi korral (vt. (4.34'))

$$1 + k_1k_2 = 0 \quad \text{ehk} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}, \qquad (4.35')$$

s.t. ristuvate sirgete tõusud on teineteise vastandpöördarvud.

Kaks ristuvat või paralleelset sirget tasandil.

4.229. Tõestada kahe antud sirge paralleelsus:

1) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y + 7 = 0$;

2) $2x - 4y + 3 = 0$, $x - 2y = 0$;

3) $2x - 1 = 0$, $x + 3 = 0$;

4) $y + 3 = 0$, $5y - 7 = 0$.

4.230. Tõestada, et järgmised kaks antud sirget ühtivad:

1) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y - 8 = 0$;

2) $x - y\sqrt{2} = 0$, $x\sqrt{2} - 2y = 0$;

3) $x\sqrt{3} - 1 = 0$, $3x - \sqrt{3} = 0$.

4.231. Koostada x-teljest kaugusel b asetsevate punktide hulga võrrand.

4.232. Koostada y-teljest kaugusel a asetsevate punktide hulga võrrand.

4.233. Teha kindlaks, millised sirgepaarid on ristuvad sirged:

1) $x - 2y + 3 = 0$, $2x + y - 5 = 0$;

2) $2x + 3y - 6 = 0$, $2x - 3y + 4 = 0$;

3) $3x + 7y + 4 = 0$, $7x - 3y + 2 = 0$;

4) $5x + 6y - 8 = 0$, $6x + 5y + 2 = 0$;

5) $x - y = 0$, $x + y = 0$;

6) $x + 3 = 0$, $y - 2 = 0$.

4.234. Kas järgmiste sirgete hulgas on paralleelseid või ristuvaid sirgeid?

a: $3x - 2y + 7 = 0$; b: $6x - 4y - 9 = 0$;

c: $6x + 4y - 5 = 0$; d: $2x + 3y - 6 = 0$;

e: $x - y + 8 = 0$; f: $x + y - 12 = 0$;

g: $-x + y - 3 = 0$.

4.235. Milliste kordaja a väärtuste korral võrranditega $3ax - 8y + 13 = 0$ ja $(a + 1)x - 2ay - 21 = 0$ määratud sirged on paralleelsed?

4.236. Leida, milliste a ja b väärtuste korral kaks sirget $ax - 2y - 1 = 0$ ja $6x - 4y - b = 0$ 1) lõikuvad ühes punktis; 2) on paralleelsed; 3) ühtivad.

4.237. Leida, missuguste m ja n väärtuste korral kaks sirget $mx + 8y + n = 0$, $2x + my - 1 = 0$ 1) on paralleelsed; 2) ühtivad; 3) on risti.

4.238. Milliste kordaja a väärtuste puhul on sirged $(3a + 2)x + (1 - 4a)y + 8 = 0$ ja $(5a - 2)x + (a + 4)y - 7 = 0$ risti?

4.239. Kolmnurga tipud on A(2,3), B(0,-3) ja C(5,-2). Leida kolmnurga külgede keskristsirgete lõikepunkt.

Kahe sirge lõikepunkt.

4.240. Leida sirge AB lõikepunkt abstsissteljega, kui 1) A(4,1), B(-2,4); 2) A(7,-3), B(23,-6).

4.241. Leida sirge AB lõikepunkt ordinaatteljega, kui 1) A(5,2), B(-4,-7); 2) A(3,4), B(2,-1).

4.242. Leida punkte $P_1(-1,2)$ ja $P_2(2,3)$ läbiva sirge lõikepunktid reeperitelgedega.

4.243. Leida sirge 1) $3x - 4y - 12 = 0$; 2) $x + 2y - 6 = 0$ ja reeperitelgedega piiratud kolmnurga pindala.

4.244. Määrata, millise m väärtuse korral sirged $(m - 1)x + my - 5 = 0$ ja $mx + (2m - 1)y + 7 = 0$ lõikuvad abstsissteljel asetsevas punktis.

4.245. Määrata, milliste m väärtuste korral sirged $mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0$ ja $(2m + 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$ lõikuvad ordinaatteljel.

4.246. Leida sirgete lõikepunktid:

1) $8x - 3y - 1 = 0,$ 2) $3x + 7y - 15 = 0,$

$4x + y - 13 = 0;$ $9x + 21y - 32 = 0;$

3) $5x - 2y + 13 = 0,$ 4) $3x - 4y - 29 = 0,$

$x + 3y - 11 = 0;$ $2x + 5y + 19 = 0;$

5) $x + 5y - 35 = 0,$ 6) $3x + 5 = 0,$

$3x + 2y - 27 = 0;$ $y - 2 = 0.$

4.247. Kontrollida, kas sirged $y = 3x - 1$; $x - 7y = 7$ ja $x + y - 7 = 0$ on võrdhaarse kolmnurga külgedeks.

4.248. Leida kolmnurga tipud, kui kolmnurga külgede võrrandid[1] on:

1) $5x - 3y - 15 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$, $3x + y + 5 = 0$;

2) $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$;

3) $y = 0$, $5x + 2y - 10 = 0$, $5x + 3y - 15 = 0$;

4) $x - 2y - 2 = 0$, $3x - y - 6 = 0$, $x + y - 2 = 0$.

4.249. Kolmnurga küljed asuvad sirgetel $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$ ja $7x + y + 19 = 0$. Arvutada kolmnurga pindala S.

4.250. Kolmnurga pindala on $S = 1,5$ ruutühikut, tema kaks tippu asuvad punktides $A(2,-3)$ ja $B(3,-2)$. Määrata kolmanda tipu C koordinaadid, kui kolmnurga raskuskese asuval sirgel $3x - y - 8 = 0$.

4.251. Kolmnurga külgede võrrandid on $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$. Leida tema kõrguste

---

[1] Siin ja edaspidi nimetatakse kolmnurga küljeks sirget, millel asetsevad kolmnurga kaks tippu.

lõikepunkt.

4.252. Leida nelinurga tipud, kui nelinurga külgede võrrandid on $x + y + 8 = 0$, $x + y - 4 = 0$, $2x - 3y + 6 = 0$ ja $2x - 3y - 18 = 0$.

4.253. Leida nelinurga diagonaalide lõikepunkt, kui nelinurga külgede võrrandid on $2x - 5y + 20 = 0$, $3x + 2y - 27 = 0$, $2x - 5y - 18 = 0$ ja $3x + 2y + 11 = 0$.

4.254. On antud ristküliku kahe külje võrrandid $x - 2y = 0$ ja $x - 2y + 15 = 0$ ja ühe diagonaali võrrand $7x + y - 15 = 0$. Leida ristküliku tipud.

4.255. Arvutada rombi tippude koordinaadid, kui on teada kahe külje $2x - 5y - 1 = 0$, $2x - 5y - 34 = 0$ ning ühe diagonaali $x + 3y - 6 = 0$ võrrandid.

4.256. Rööpküliku kahe külje võrrandid on $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ ning ühe diagonaali võrrand on $3x + 2y + 3 = 0$. Leida selle rööpküliku tippude koordinaadid.

4.257. Leida sirge, mis läbib sirgete $3x - y - 3 = 0$ ja $4x + 3y - 4 = 0$ lõikepunkti ja on risti esimese sirgega.

4.258. Leida sirge, mis läbib sirgete $x - y - 3 = 0$ ja $2x + 3y - 11 = 0$ lõikepunkti ja on risti sirgega $5x - 4y - 17 = 0$.

4.259. Leida sirge, mis läbib sirgete $3x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ lõikepunkti ning on risti sirgega $2x + 7y = 0$.

4.260. Leida sirge, mis läbib sirgete $2x - 3y -$

$- 8 = 0$ ja $x - 2y - 5 = 0$ lõikepunkti ja on paralleelne sirgega $3x - 2y + 2 = 0$.

4.261. Punkte $A(1,-2)$ ja $B(0,-7)$ läbivale sirgele on tõmmatud ristsirge punktist $D(-3,4)$. Leida suhe, milleks ristlõigu aluspunkt jagab lõigu AB.

4.262. Leida antud punkti projektsioon antud sirgel, kui punkt ja sirge on järgmised:

1) $A(-5,6)$, a: $7x - 13y - 105 = 0$;

2) $B(-6,4)$, b: $4x - 5y + 3 = 0$;

3) $P(-8,12)$, sirge AB: $A(2,-3)$, $B(-5,1)$.

4.263. Leida sirge võrrand, kui punkt $P(2,3)$ on otsitavale sirgele reeperi alguspunktist tõmmatud ristsirge ja antud sirge lõikepunkt.

4.264. Leida punkt, mis on sümmeetriline antud punktiga antud sirge suhtes.

1) $P(-5,13)$, p: $2x - 3y - 3 = 0$;

2) $Q(-2,-9)$, q: $2x + 5y - 38 = 0$;

3) $R(-2,9)$, r: $2x - 3y + 18 = 0$;

4) $S(8,-9)$, $s = AB$, $A(3,-4)$, $B(-1,-2)$.

4.265. Leida abstsissteljel punkt P nii, et punkti P ja punktide $M(1,2)$ ja $N(3,4)$ vaheliste kauguste summa oleks minimaalne.

Kahe sirge vaheline nurk.

4.266. Tõestada, et sirgete $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ vahelist nurka φ võib arvutada valemi

$$\tan \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

järgi.

4.267. Arvutada nurk kahe sirge vahel.

1) $y = 3x$,
$y = -2x + 5$;

2) $y = 4x - 7$,
$y = -\frac{1}{4}x + 2$;

3) $y = 5x - 3$,
$y = 5x + 8$;

4) $y = \sqrt{3}x - 5$,
$y = -\sqrt{3}x + 1$;

5) $7x - y - 2 = 0$,
$x - y - \sqrt{2} = 0$;

6) $5x - y + 7 = 0$,
$3x + 2y = 0$;

7) $x - \sqrt{3}y - 5 = 0$,
$x + \sqrt{3}y + 2 = 0$

4.268. On antud sirgepaarid:

1) $2x + 3y = 0$, $x - y + 5 = 0$;

2) $x - 3y + 2 = 0$, $2x + y = 0$;

3) $2x + 5y - 3 = 0$, $5x + 2y - 6 = 0$;

4) $3x + 4y - 12 = 0$, $5x - 12y + 60 = 0$.

Leida nende paaride esimese ja teise sirge vahelise nurga tangens.

4.269. Leida sirgetevahelised nurgad, kui tõusud on $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = -\frac{1}{2}$.

4.270. Millise nurga moodustab x-teljega punkte M(0, 2) ja N(-2,4) läbiv sirge?

4.271. Sirgjooneliselt liikuv punkt liigub punktist A(-1,-3) punkti B(4,2). Kui pikk on läbitud tee ning millise nurga moodustab punkti trajektoor abstsiesteljega?

4.272. Leida sirge, mis läbib sirgete $2x - y - 3 = 0$ ja $x + y - 6 = 0$ lõikepunkti ja moodustab sirgega $3x - 5 = 0$ nurga $\alpha = 45°$.

4.273. Arvutada kolmnurga nurgad, kui selle küljed on $18x + 6y - 17 = 0$, $14x - 7y + 15 = 0$ ja $5x + 10y - 9 = 0$.

4.274. Leida kolmnurga nurgad, kui kolmnurga tipud on:

1) $P_1(3,3)$, $P_2(2,2)$, $P_3(3,0)$;
2) $P_1(-4,-2)$, $P_2(-1,2)$, $P_3(3{,}5\ ,\ 3{,}5)$;
3) $P_1(1{,}5\ ,\ 1{,}5)$, $P_2(-2,5)$, $P_3(1,1)$.

4.275. Kolmnurga külgede võrrandid on $3x + 4y - 1 = 0$, $x - 7y - 17 = 0$, $7x + y + 31 = 0$. Tõestada, et kolmnurk on võrdhaarne. Ülesanne lahendada kolmnurga nurkade võrdlemise teel.

4.276. Nelinurga tipud on A(-9,0), B(-3,6), C(3,4) ja D(6,-3). Leida diagonaalide AC ja BD lõikepunkt ning nendevaheline nurk.

4.277. Kaks antud sirget moodustavad nurga. Teha kindlaks, kas antud punktid asetsevad samas nurgas, kõrvunurkades või tippnurkades, kui punktid ja sirged on:

1) (3,5), (-2,1), $3x - y + 8 = 0$, $2x + 5y - 6 = 0$;
2) (6,-2), (5,2), $x + y - 3 = 0$, $2x + 3y = 0$;
3) (2,-2), (3.6), $x - 2y + 1 = 0$, $2x + 6y - 9 = 0$.

4.278. Sirged $2x - y + 3 = 0$ ja $x - 4y = 0$ moodustavad nurga. Teha kindlaks, kas punkt (2,-1) asetseb teravnurgas või nürinurgas.

4.279. Kaldreeperis $\omega = \frac{\pi}{3}$ on antud sirged $y = -x + 5$ ja $y = -\frac{1}{2}x - 7$. Arvutada sirgetevaheline nurk.

4.280. Tõusu leidmata arvutada järgmiste sirgete vahelised nurgad kaldreeperis:

1) $2x + y - 5 = 0$ ja $6x - 2y + 7 = 0$, kui $\omega = \frac{\pi}{2}$;

2) $4x - 5y + 7 = 0$ ja $9x + 4y - 11 = 0$, kui $\omega = \frac{\pi}{3}$;

3) $x - 2y + 5 = 0$ ja $3x - 8 = 0$, kui $\omega = \frac{2\pi}{3}$;

4) $4x + 3y - 13 = 0$ ja $22x + (19\sqrt{3} - 7)y + 15 = 0$, kui $\omega = \frac{\pi}{6}$.

4.281. Näidata, et afiinses reeperis tingimus $Ax_1 + By_1 + C = Ax_2 + By_2 + C$ on tarvilik ja piisav selleks, et sirge $Ax + By + C = 0$ oleks kollineaarne (s.t. paralleelne või ühtiv) punkte $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ läbiva sirgega.

§ 4. Sirgete kimp ja ebakimp tasandil

Fikseeritud punkti M_0 läbivate sirgete hulka tasandil nimetatakse punktiga M_0 määratud *sirgete kimbuks* ja punkti M_0 - selle kimbu *keskpunktiks* (ehk tsentriks).

Olgu antud kimbu keskpunkti koordinaadid x_0 ja y_0. Kimbu võrrandiks on

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y}, \tag{4.36}$$

kus X ja Y on suvalised reaalmuutujad, mis ei ole korraga nullid (s.t. $X^2 + Y^2 \neq 0$).

Kui $X \neq 0$, saab võrrandi (4.36) kirjutada taandatud kujul

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{4.37}$$

Juhul $X = 0$ on kimbu sirge paralleelne ordinaatteljega, siis loetakse $k = \infty$. Muutuja k igale väärtusele (kaasa arvatud ∞) vastab sirge kimbus ja vastupidi. Järelikult sõltub kimbu sirgete hulk ühest parameetrist.

Üldjuhul võib kimbu keskpunkt olla määratud mitte oma koordinaatidega, vaid kimbu kahe sirge abil, s.o. võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{4.38}$$

Sel juhul saab kimbu võrrandi koostada keskpunkti koordinaate leidmata järgmiselt:

$$k_1 (A_1x + B_1y + C_1) + k_2 (A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{4.39}$$

kus $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$.

Kimbu võrrandi võib kirjutada

$$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{4.40}$$

kus $k = \frac{k_2}{k_1}$ on kimbu ainus oluline parameeter. Juhul $k_1 = 0$, loetakse $k = \infty$.

Antud sirgega paralleelsete sirgete hulka tasandil nimetatakse <u>sirge ebakimbuks</u>, nende sirgete ühist sihti <u>ebakimbu sihiks</u>. Sirgete ebakimpu võib vaadelda kui lõpmata kauge keskpunktiga sirgete kimpu. Iga siht tasandil on ühe ja ainult ühe ebakimbu sihiks.

Kolm sirget $A_ix + B_iy + C_i = 0$, $i = 1,2,3$ kuuluvad ühte kimpu või ebakimpu siis, kui sirgete võrrandite kordajatest moodustatud determinant on võrdne nulliga

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.41}$$

<u>Sirgete kimp ja ebakimp.</u>

<u>4.282.</u> Tõestada, et kui kolm sirget $A_ix + B_iy + C_i = 0$, $i = 1,2,3$ lõikuvad ühes punktis, s.t. moodustavad kimbu, siis kehtib valem (4.41).

<u>4.283.</u> Näidata, et kui kehtib valem (4.41), siis kolm erinevat sirget $A_ix + B_iy + C_i = 0$, $i = 1,2,3$ moodustavad sirgete kimbu või ebakimbu.

4.284. Kontrollida, kas kolmel antud sirgel on ühine punkt:

1) $3x - y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$, $x - y + 7 = 0$;

2) $x + 3y - 1 = 0$, $5x + y - 10 = 0$, $3x - 5y - 8 = 0$;

3) $3x - y + 6 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$, $2x - y + 5 = 0$;

4) $5x - 3y - 15 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$, $3x + y + 5 = 0$;

5) $2x + 3y - 1 = 0$, $4x - 5y + 5 = 0$, $3x - y + 2 = 0$;

6) $3x - y + 3 = 0$, $5x + 3y - 7 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$;

7) $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 17 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$.

4.285. Leida, millistel a väärtustel kolm sirget $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $ax + y - 13 = 0$ kuuluvad ühte kimpu.

4.286. Milliste a ja b väärtuste korral sirged $ax + by + 1 = 0$, $2x - 3y + 5 = 0$ ja $x - 1 = 0$ lõikuvad ühes punktis?

4.287. Kolmnurga külgede võrrandid on $x + 2y + 3 = 0$, $3x - 7y + 9 = 0$, $5x - 3y - 11 = 0$. Kontrollida, kas kolmnurga kõrgused kuuluvad ühte kimpu.

4.288. Leida sirgete kimbu $\alpha(2x + 3y - 1) + \beta(x - 2y - 4) = 0$ keskpunkt.

4.289. Sirgete kimbu võrrand on $\alpha(3x + y - 1) + \beta(2x - y - 9) = 0$. Näidata, et sirge $x + 3y + 13 = 0$ kuulub antud kimpu.

4.290. Sirgete kimbu võrrand on $\alpha(5x + 3y + 6) + \beta(3x - 4y - 37) = 0$. Näidata, et sirge $7x + 2y - 15 = 0$ ei kuulu antud kimpu.

4.291. Sirgete kimbu võrrand on $\alpha(3x + 2y - 9) +$

$+ \beta(2x + 5y + 5) = 0$. Leida, millise C väärtuse korral sirge $4x - 3y + 3 = 0$ kuulub antud kimpu.

4.292. Sirgete kimbu võrrand on $\alpha(5x + 3y - 7) + \beta(3x + 10y + 4) = 0$. Leida, milliste a väärtuste korral sirge $ax + 5y + 9 = 0$ ei kuulu antud kimpu.

4.293. Leida sirgete kimpu $\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0$ kuuluva sirge võrrand, kui ta

1) läbib punkti A(3,-1);

2) läbib reeperi alguspunkti;

3) on paralleelne x-teljega;

4) on paralleelne y-teljega;

5) on paralleelne sirgega $4x + 3y + 5 = 0$;

6) on risti sirgega $2x + 3y + 7 = 0$.

4.294. Leida sirgete $7x - y + 3 = 0$ ja $3x + 5y - 4 = 0$ lõikepunkti ning punkti A(2,-1) läbiva sirge võrrand.

4.295. Asetada läbi sirgete $2x + 5y - 8 = 0$ ja $x - 3y + 4 = 0$ lõikepunkti sirge, mis

1) läbib koordinaatide alguspunkti;

2) on paralleelne abstsissteljega;

3) on paralleelne ordinaatteljega;

4) läbib punkti (4,3).

4.296. Leida kimpu $\alpha(x + 2y - 7) + \beta(3x - y + 5) = 0$ kuuluvate ning kimbu baasisirgetega ristuvate sirgete võrrandid.

4.297. Leida sirge, mis läbib sirgete $3x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ lõikepunkti ja on risti sirgega $2x + 7y = 0$.

4.298. Sirgete kimbu võrrand on $\alpha(2x + y + 1) + \beta(x - 3y - 10) = 0$. Leida kimbu sirged, mille telglõigud on võrdsed.

4.299. Sirgete kimbu võrrand on $\alpha(21x + 8y - 18) + \beta(11x + 3y + 12) = 0$. Leida selle kimbu sirged, mis koos reeperitelgedega moodustavad kolmnurga, mille pindala on 9 ruutühikut.

4.300. Leida sirge, mis läbib sirgete $3x - 2y + 5 = 0$, $4x + 3y - 1 = 0$ lõikepunkti ning mille ordinaatlõik $b = -3$. Ülesanne lahendada antud sirgete lõikepunkti leidmata.

4.301. Leida sirge, mis läbib sirgete $2x + 7y - 8 = 0$, $3x + 2y + 5 = 0$ lõikepunkti ning moodustab sirgega $2x + 3y - 7 = 0$ nurga 45°. Ülesanne lahendada antud sirgete lõikepunkti leidmata.

4.302. Leida sirged, mis läbivad sirgete $x + y - 4 = 0$, $2x + 3y - 9 = 0$ lõikepunkti ning moodustavad teisega antud sirgetest nurga $\alpha = 45°$.

4.303. Leida sirged, mis läbivad sirgete $2x + y = 0$, $3x + 7y - 11 = 0$ lõikepunkti ning moodustab sirgega $x + 4y = 0$ nurgad, mille tangensid on ± 2.

4.304. Leida sirge, mis läbib sirgete $3x + y + 10 = 0$, $4x + 5y + 6 = 0$ lõikepunkti ning asetseb reeperi alguspunktist 4 ühiku kaugusel.

4.305. Leida sirge, mis läbib sirgete $3x + y - 5 = 0$, $x - 2y + 10 = 0$ lõikepunkti ning asub punktist $C(-1,-2)$ kaugusel $d = 5$. Ülesanne lahendada antud sirgete lõikepunkti koordinaate leidmata.

4.306. Sirgete kimbu võrrand on $\alpha(2x + y + 4) + \beta(x - 2y - 3) = 0$. Näidata, et sellesse kimpu kuulub ainult üks sirge, mis asetseb punktist P(2,-3) kaugusel $d = \sqrt{10}$. Leida selle sirge võrrand.

4.307. Sirgete kimbu võrrand on $\alpha(2x - y - 6) + \beta(x - y - 4) = 0$. Näidata, et selle kimbu sirgete hulgas ei ole sirget, mille kaugus punktist P(3,-1) oleks $d = 3$.

4.308. Leida sirge, mis läbib sirgete $11x + 3y - 7 = 0$, $12x + y - 19 = 0$ lõikepunkti ja asetseb punktidest A(3,-2) ning B(-1,6) võrdsetel kaugustel. Ülesanne lahendada antud sirgete lõikepunkti koordinaate leidmata.

4.309. Leida sirge, mis läbib sirgete $2x + y - 2 = 0$, $x - 5y - 23 = 0$ lõikepunkti ning jaotab punkte M(5,-6) ja N(-1,-4) ühendava lõigu pooleks. Ülesanne lahendada antud sirgete lõikepunkti koordinaate leidmata.

4.310. Sirgete kimbu võrrand on $\alpha(3x - 2y - 1) + \beta(4x - 5y + 8) = 0$. Leida selle kimbu sirge, mis läbib sirgete $2x + 3y + 5 = 0$, $x + 7y - 1 = 0$ vahele jääva sirge $x + 2y + 4 = 0$ lõigu keskpunkti.

4.311. Sirge kuulub kimpu tsentriga P(3,0) ja tema lõik, mis jääb sirgete $2x - y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$ vahele, poolitub punktis P. Koostada sirge võrrand.

4.312. Asetada läbi sirgete $2x - 5y - 1 = 0$ ja $x + 4y - 7 = 0$ lõikepunkti sirge, mis jaotab punkte A(4,-3) ja B(-1,2) ühendava lõigu suhtes $\lambda = 2 : 3$.

4.313. Sirgete kimbu võrrand on $\alpha(2x + y + 8) + \beta(x + y + 3) = 0$. Leida kimbu sirge, mille sirgete $x - y - 5 = 0$, $x - y - 2 = 0$ vahelise lõigu pikkus on $\sqrt{5}$.

4.314. Leida sirge, mis läbib punkti C ja ta lõik pikkusega d jääb sirgete a ja b vahele, kui

1) $C(0,0)$, $d = \sqrt{10}$, a: $2x - y + 5 = 0$, b: $2x - y + 10 = 0$;

2) $C(-5,4)$, $d = 5$, a: $x + 2y + 1 = 0$, b: $x + 2y - 1 = 0$.

4.315. Sirgete kimbu $\alpha(2x - 3y + 20) + \beta(3x + 5y - 27) = 0$ keskpunkt on ruudu tipuks. Ruudu diagonaal asetseb sirgel $x + 7y - 16 = 0$. Leida selle ruudu külgede ja teise diagonaali võrrandid.

4.316. Sirgete kimbu võrrand on $\alpha(3x - 4y - 3) + \beta(2x + 3y - 1) = 0$. Leida selle kimbu sirge, mis läbib homogeense kolmnurkse plaadi raskuskeset, mille tipud on $A(-1,2)$, $B(4,-4)$, $C(6,-1)$.

4.317. Sirgete kimbu võrrand on $\alpha(5x + 2y + 4) + \beta(x + 9y - 25) = 0$. Leida selle kimbu sirged, mis koos sirgetega $2x - 3y + 5 = 0$, $12x + 8y - 7 = 0$ moodustavad võrdhaarsed kolmnurgad.

4.318. Nurga ühe haara ning nurgapoolitaja võrrandid on vastavalt $3x - 2y + 6 = 0$ ja $x - 3y + 5 = 0$. Leida nurga teise haara võrrand.

4.319. On antud kaks sirget: $x + 3y = 0$ ja $x - y + 8 = 0$. Leida kolmas sirge nii, et teine antud sirgetest oleks esimese ja otsitava sirge vahelise nurga poolitaja.

4.320. Kolmnurga üheks tipuks on sirgete kimbu

$\alpha(2x + 3y + 5) + \beta(3x - y + 2) = 0$ keskpunkt, kõrguste võrrandid on $x - 4y + 1 = 0$, $2x + y + 1 = 0$. Leida selle kolmnurga külgede võrrandid.

4.321. Kolmnurga küljed on:

1) $2x - y + 3 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$;

2) $x + 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$.

Koostada kolmnurga kõrguste võrrandid tippude koordinaate leidmata.

4.322. Kolmnurga ABC ühe külje ja kahe kõrguse võrrandid on:

1) AB: $x + 3y - 1 = 0$, AM: $x + 5y - 3 = 0$, BN: $x + y - 1 = 0$;

2) AB: $4x + y - 12 = 0$, AH: $2x + 2y - 9 = 0$, BI: $5x - 4y - 15 = 0$.

Koostada kahe külje ja kolmanda kõrguse võrrandid tippude ja kõrguste lõikepunkti koordinaate leidmata.

4.323. Kolmnurga külgede võrrandid on $5x - 2y + 6 = 0$, $4x - y + 3 = 0$ ja $x + 3y - 7 = 0$. Kolmnurga tippude koordinaate arvutamata leida neid tippe läbivate ja vastasküljedega paralleelsete sirgete võrrandid.

4.324. On antud kolmnurga ABC tipp A(2,-1) ja samast tipust lähtuvad kõrgus $7x - 10y + 1 = 0$ ning nurgapoolitaja $3x - 2y + 5 = 0$. Leida kolmnurga küljed. Ülesanne lahendada tippude B ja C koordinaate leidmata.

4.325. Nelinurga ABCD küljed on:

1) AB: $x - y = 0$, BC: $x + 3y = 0$, CD: $x - y - 4 = 0$, DA: $3x + y - 12 = 0$;

2) AB: $5x + y + 13 = 0$, BC: $2x - 7y - 17 = 0$,

CD: $3x + 2y - 13 = 0$, DA: $3x - 4y + 17 = 0$.

Leida nelinurga diagonaalide võrrandid tippude koordinaate arvutamata.

4.326. On antud sirgete kimp keskpunktiga $P(-3,-1)$. Tõestada, et sirgete $x - 2y - 3 = 0$ ja $x - 2y + 5 = 0$ vahele jäävad kimbu sirgete lõigud poolituvad punktis P.

4.327. On antud sirgete kimp keskpunktiga $P(0,1)$. Tõestada, et ei leidu ühtegi kimbu sirget, mille lõik asetseks sirgete $x - 2y - 3 = 0$ ja $x - 2y + 17 = 0$ vahel ning poolituks punktis P.

4.328. Leida sirge, mis kuulub samaaegselt kahte kimpu: $(x + y - 1) + q(x - 1) = 0$ ja $(2x - 3y) + q'(y + 1) = 0$.

4.329. On antud kaks sirgete kimpu $\alpha_1(5x + 3y - 2) + \beta_1(3x - y - 4) = 0$, $\alpha_2(x - y + 1) + \beta_2(2x - y - 2) = 0$. Kimpude keskpunkte arvutamata leida sirge, mis kuulub mõlemasse kimpu.

Sirgete kimp ja ebakimp afiinse reeperi korral.

4.330. Afiinses reeperis on antud kolm sirget:

1) $2x + y - 3 = 0$, $3x - 2y + 5 = 0$, $5x - y + 2 = 0$;

2) $x - 2y + 3 = 0$, $2x - 4y + 7 = 0$, $3x - 6y + 4 = 0$;

3) $x + 4y - 5 = 0$, $x - 2y + 7 = 0$, $x + 3 = 0$;

4) $y - 5 = 0$, $y + 2 = 0$, $y = 0$;

5) $x - y + 3 = 0$, $2x - 2y + 7 = 0$, $4x - 4y + 1 = 0$;

6) $2x + 3y + 5 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $3x - 4y - 12 = 0$;

7) $3x + 2y + 6 = 0$, $9x + 6y - 5 = 0$, $5x - y + 3 = 0$.

Määrata sirgete vastastikune asend. Millistel juhtudel on tegemist sirgete kimbu või ebakimbuga?

4.331. Afiinses reeperis leida sirge, mis läbib reeperi alguspunkti ning sirgete $2x + y - 3 = 0$ ja $7x - 4y + 2 = 0$ lõikepunkti.

4.332. Afiinses reeperis leida sirge, mis läbib punkti $A(2,-1)$ ning sirgete $7x - y + 3 = 0$ ja $3x + 5y - 4 = 0$ lõikepunkti.

4.333. Leida sirge, mis läbib sirgete $3x - 5y + 2 = 0$, $5x - 2y + 4 = 0$ lõikepunkti ja on paralleelne sirgega $2x - y + 4 = 0$. Reeper on afiinne.

4.334. Afiinses reeperis leida sirged, mis läbivad sirgete $2x - 6y + 3 = 0$ ja $5x + y - 2 = 0$ lõikepunkti ning on paralleelsed reeperitelgedega.

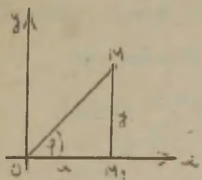
4.335. On antud kaks lõikuvate sirgete paari $2x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ ja $x + 2y = 0$, $3x - 7y + 4 = 0$. Leida lõikepunkte läbiva sirge võrrand afiinses reeperis.

4.336. On antud kaks paralleelset sirget a: $Ax + By + C = 0$ ja b: $Ax + By + D = 0$ $(C \neq D)$ afiinses reeperis. Leida sirge c: $Ax + By + \frac{C + \lambda D}{1 + \lambda} = 0$ asend nende sirgete suhtes.

§ 5. Sirge polaarvõrrand

Ristreeper ja polaarreeper.

Olgu tasandil antud ristreeper ja polaarreeper (vt. I osa lk. 46) nii, et poolus ja alguspunkt ühtivad ning polaartelg asub x-telje positiivsel osal (joon. 4.5). Kahe



Joon. 4.5.

reeperi tõttu on igal punktil M kahed koordinaadid (x,y) ja (ρ, φ). Reeperite vastastikuse asendi tõttu on kerge leida nende koordinaatide vahelisi seoseid:

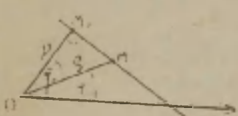
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \tag{4.42}$$

või ümberpöördult

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}, \qquad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{4.43}$$

Sirge polaarvõrrand.



Joon. 4.6.

Koostame sirge a võrrandi polaarreeperis, kui on teada sirge kaugus poolusest p ja polaartelje ja sirge normaali vaheline nurk φ_0 (Joon. 4.6.). Tasandi suvaline punkt

$M(\rho, \varphi)$ asetseb sirgel a parajasti siis, kui tema ristprojektsioon sirgele OM_0 ühtib punktiga M_0, s.t. kui

$$\rho \cos(\varphi_0 - \varphi) = p \tag{4.44}$$

ehk

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi_0 - \varphi)} . \tag{4.45}$$

Saadud võrrandit nimetatakse sirge <u>polaarvõrrandiks</u>.

Erijuhud. Kui sirge läbib poolust, siis $p = 0$ ning võrrandist (4.44) saame

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\pi}{2} \quad \text{või} \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{3\pi}{2}.$$

Kui sirge on paralleelne polaarteljega, siis $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ või $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Tähendab, polaarteljega paralleelse sirge võrrand on

$$\rho = \pm \frac{p}{\sin \varphi} . \tag{4.46}$$

Kui sirge on risti polaarteljega, siis $\varphi_0 = 0$ või π ning polaarteljega ristuva sirge võrrand on

$$\rho = \pm \frac{p}{\cos \varphi}. \tag{4.47}$$

Vaatame veel erijuhuna sirget, mis on risti polaarteljega ja läbib ühikpunkti E. ($p = 1$, $\varphi_0 = 0$). Selle sirge võrrand on

$$\rho = \sec \varphi .$$

Järelikult on vaadeldud sirge seekansfunktsiooni graafikuks polaarkoordinaatides.

<u>4.337.</u> Leida sirge polaarvõrrand lähtudes sirge võr-

randist ristkoordinaatides $y = kx + b$, võttes nullpunkti pooluseks ja x-telje polaarteljeks.

4.338. Leida võrrandiga $\rho = \frac{3}{\cos\varphi}$ määratud joonel punktid, mille polaarnurgad on: 1) $\frac{\pi}{3}$, 2) $-\frac{\pi}{3}$, 3) 0, 4) $\frac{\pi}{6}$. Millise joone määrab antud võrrand? Teha joonis.

4.339. Leida võrrandiga $\rho = \frac{1}{\sin\varphi}$ määratud joonel punktid, mille polaarraadiused on: 1) 1, 2) 2, 3) $\sqrt{2}$. Millise joone määrab antud võrrand? Teha joonis.

4.340. Sirge läbib poolust ja moodustab polaarteljega nurga 1) $\frac{\pi}{3}$, 2) $\frac{\pi}{5}$, 3) 45°, 4) 20°. Koostada sirge polaarvõrrand.

4.341. Koostada sirge polaarvõrrand, kui sirge kaugus poolusest on p ja normaali polaarnurk on α.

4.342. Leida punkti $X_0(\rho_0, \varphi_0)$ läbiva sirge polaarvõrrand, kui normaali polaarnurk on α.

4.343. Leida punkti $X_0(\rho_0, \varphi_0)$ läbiva ja polaarteljega nurga β moodustava sirge polaarvõrrand. Koostada sirge võrrand juhul, kui $M(3, \frac{\pi}{12})$, $\beta = \frac{\pi}{4}$.

4.344. Koostada sirge polaarvõrrand, kui

1) sirge polaarnurk on β ja sirge kaugus poolusest on p. Koostada sirge võrrand juhul, kui $\beta = \frac{\pi}{6}$, $p = 3$;
2) sirge normaali polaarnurk on α ja sirge polaarlõik on a. Leida selle sirge võrrand, kui $a = 2$, $\alpha = -\frac{2}{3}\pi$;
3) sirge polaarnurk on β ja polaarlõik on a. Koostada selle sirge võrrand, kui $\beta = \frac{\pi}{6}$, $a = 6$.

4.345. Sirge polaarlõik on 10 ja polaarnurk $\beta = 120°$. Koostada sirge võrrand.

4.346. Leida punkte $X_1(\rho_1, \varphi_1)$ ja $X_2(\rho_2, \varphi_2)$ läbiva sirge polaarvõrrand. Koostada sirge võrrand juhul, kui $X_1(5, \frac{\pi}{12})$, $X_2(8, \frac{5\pi}{12})$.

4.347. Koostada sirge polaarvõrrand, kui sirge on risti polaarteljega ja läbib punkti 1) $A(5, \frac{\pi}{4})$, 2) $B(8, 110°)$.

4.348. Polaarteljega ristuva sirge polaarlõik on 3. Koostada sirge polaarvõrrand.

4.349. Sirge on paralleelne polaarteljega ja läbib punkti 1) $P(1, 30°)$, 2) $B(2, \frac{\pi}{6})$. Koostada sirge polaarvõrrand.

4.350. Leida sirge, mis läbib punkti $M_0(\rho_0, \varphi_0)$ ja on paralleelne sirgega $\rho = \frac{p}{\cos(\alpha - \varphi)}$.

4.351. Leida sirge, mis läbib punkti $P_0(\rho_0, \varphi_0)$ ja on risti sirgega $\rho = \frac{p}{\cos(\alpha - \varphi)}$.

4.352. Leida polaarteljest 5 ühiku kaugusel oleva punktihulga polaarvõrrand.

4.353. Leida punkti $X_0(\rho_0, \varphi_0)$ kaugus sirgest $\rho = \frac{p}{\cos(\alpha - \varphi)}$.

4.354. On antud sirgete võrrandid: 1) $x - 2 = 0$; 2) $x + 2 = 0$; 3) $y - 3 = 0$; 4) $y + 3 = 0$; 5) $x\sqrt{3} + y - 6 = 0$; 6) $x - y + 2 = 0$; 7) $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$;
8) $x\cos\beta - y\sin\beta - q = 0$, $q > 0$; β on teravnurk;
9) $x\cos\beta + y\sin\beta + q = 0$, $q > 0$; β on teravnurk.
Leida kõikide antud sirgete normaali polaarnurk α ja lõik p ning saadud α ja p väärtuste järgi teha joonis (kahel viimasel juhul võtta $\beta = 30°$ ja $q = 2$).

4.355. Leida punktis A rakendatud ning keskpunkti O suhtes momenti M omavaid jõude kujutavate vektorite otspunktide hulk. Keskpunkti O kaugus jõudude rakenduspunktist OA = a.

Märkus. Jõu momendiks keskpunkti O suhtes nimetatakse jõu suuruse korrutist jõusuunalise sirge kaugusega keskpunktist. Lahendada ülesanne eelnevalt polaarkoordinaatides.

§ 6. S e g a ü l e s a n d e i d

4.356. On antud esimese astme võrrand $\frac{3x+2}{6} - \frac{2y-5}{3} = 4$. Leida vastava sirge 1) üldvõrrand, 2) normaalvõrrand, 3) taandatud võrrand, 4) võrrand telglõikudes, 5) kanooniline võrrand.

4.357. Leida punkte $A(x_1,y_1)$ ja $B(x_2,y_2)$ läbiva sirge suhtes punktiga $C(x_3,y_3)$ sümmeetrilise punkti D koordinaadid.

4.358. Leida punkte A(1,0) ja B(-1,-2) läbiva sirge suhtes punktiga $M_1(1,2)$ sümmeetrilise punkti M_2 koordinaadid.

4.359. Sümmeetriateljeks on sirge, mis läbib reeperi alguspunkti ja moodustab x-teljega nurga 60°. Leida punktiga $A(4,2\sqrt{3})$ sümmeetriline punkt B.

4.360. Liikuva sirge telglõikude suhe on konstantne.

Leida selle sirge reeperitelgede vahel asetsevat lõiku suhtes λ jagava punkti trajektoor.

4.361. On antud kaks lõikuvat mitteristuvat sirget $A_kx + B_ky + C_k = 0$, $k = 1,2$ ning sirge $x = x_o + lu$, $y = y_o + mu$. Milline on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et kahe esimese sirge vahele jääv viimase sirge lõik asetseks teravnurgas?

4.362. Reeperi alguspunkti läbib kolm sirget $A_kx + B_ky = 0$ $(k = 1,2,3)$. Milline on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et kolmas sirge asetseks kahe esimese sirge vahelises teravnurgas?

4.363. AB ja CD on kaks lõikuvat sirget. Punktist P, mis ei ole kummagi sirge punktiks, on tõmmatud fikseeritud sirge PMN (M ja N on selle sirge lõikepunktid vastavalt sirgetega AB ja CD). Peale selle on punktist P vabalt tõmmatud sirged, mis lõikavad sirgeid AB ja CD vastavalt punktides S ja T. Punkt K olgu sirgete SN ja MT lõikepunkt. Koostada punktide K hulga võrrand.

4.364. Reeperi alguspunktist väljuv punkt peab samaaegselt liikuma x-telje suhtes ühtlase kiirusega v_1 ja ordinaattelje suhtes ühtlase kiirusega v_2. Leida selle punkti trajektoori võrrand.

4.365. Kuidas muutub eelmise ülesande tulemus, kui punkti M liikumine mõlema telje suhtes on ühtlaselt kiirenev, kusjuures kiirendused on vastavalt g_1 ja g_2? (Algkiirus on mõlemal liikumisel null.)

4.366. On antud sirge $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ning reeperi alguspunkti ümber pöörlev kiir; nende lõikepunkti tähistame tähega P. Kiirel võetakse reeperi alguspunktist alates lõik OM nii, et lõikude OM ja OP suhe oleks konstantne, s.o. $\frac{OM}{OP} = \lambda$. Koostada punktide M hulga võrrand.

4.367. Koostada võrdhaarse kolmnurga aluse võrrand, kui haarad on $2x + 3y - 12 = 0$ ja $3x + 2y - 12 = 0$ ning alus läbib punkti (5,-1).

4.368. Sirge telglõigud on vastavalt 4 ja 7. Leida reeperi alguspunktist antud sirgele tõmmatud ristsirge lõikepunkt antud sirgega.

4.369. Sirge AB telglõigud on vastavalt 8 ja 4 ning sirge punktid A ja B asuvad reeperitelgedel. Leida suhe, milles reeperi alguspunkti projektsioon sirgel AB jagab lõigu AB.

4.370. On antud kaks punkti A(-3,1) ja B(2,-3). Sirgel AB leida punkt M nii, et ta asuks punktiga B samal pool sirgel punkti A suhtes ja et lõik AM oleks kaks korda pikem kui lõik BM.

4.371. On antud punkt A(2,4). Leida punkt B tingimustel, et sirge AB ja ordinaattelje lõikepunkt C jagab lõigu AB suhtes 2 : 3 ja sirge AB ja abstsisstelje lõikepunkt D jagab lõigu AB suhtes $-\frac{3}{4}$.

4.372. On antud 2 punkti A(9,-1) ja B(-2,6). Millises suhtes jagab sirge AB ja teise ning neljanda reeperinurga poolitaja lõikepunkt C lõigu AB.

4.373. On antud kaks punkti M(-1,3) ja N(5,-3). Leida lõiguga MN ristuva ja seda suhtes $\lambda = 2$ jagava sirge võrrand.

4.374. Leida punktide hulk, mille kauguste ruutude vahe punktidest A(-a,0) ja B(a,0) on c.

4.375. Punktist P(6,-8) on tõmmatud kõik võimalikud kiired lõikumiseni abstsissteljega. Leida nende lõikude keskpunktide hulk.

4.376. Punktist C(10,-3) on tõmmatud kõik võimalikud kiired lõikumiseni ordinaatteljega. Leida nende lõikude keskpunktide hulk.

Kolmnurk.

4.377. Koostada täisnurkse kolmnurga kaatetite võrrandid, kui kolmnurga pindala on 20 ruutühikut, hüpotenuus asub abstsissteljel ning täisnurga tipp on punktis C(-1,4).

4.378. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga teravnurga tipp asetseb punktis A(5,7) ja tipu A vastaskaateti võrrand on $6x + 4y - 9 = 0$. Koostada kolmnurga kahe ülejäänud külje võrrandid.

4.379. On antud kolmnurga tipud A(4,6), B(-4,0) ja C(-1,-4). Leida kolmnurga 1) kolme külje; 2) tippu C läbiva mediaani; 3) nurga B poolitaja; 4) tipust A küljele BC tõmmatud kõrguse võrrandid.

4.380. Võrdhaarse kolmnurga võrdsete nurkade tipud on A(-7,2) ja B(3,0) ning tema pindala on 26. Koostada kolmnurga külgede võrrandid.

4.381. On antud võrdhaarse kolmnurga tipp (3,5), alus $x - 2y + 12 = 0$ ja pindala $S = 15$. Leida haarade võrrandid.

4.382. Võrdhaarse kolmnurga haaradele tõmmatud kõrguste võrrandid on $7x + y = 0$, $x - y = 0$ ning kolmnurga pindala $S = 80$. Leida kolmnurga tipud.

4.383. Leida võrdhaarse kolmnurga sisse joonestatud ringjoone keskpunkt ning raskuskese, kui kolmnurga küljed on $7x-y-9=0$, $5x + 5y - 35 = 0$ ja punkt M(3,-8) asetseb alusel.

4.384. On antud võrdhaarse kolmnurga alus $x + y - 1 = 0$, haar $x - 2y - 2 = 0$ ja teisel haaral asuv punkt (-2,0). Leida kolmnurga kolmanda külje võrrand.

4.385. Võrdhaarse kolmnurga alus on $x - 2y + 3 = 0$, ühe haara võrrand on $4x - y + 5 = 0$ ning punkt P(1,2 , 5,6) asetseb teisel haaral. Leida:

a) haara kaugus vastastipust,

b) raskuskeskme koordinaadid,

c) kolmnurga pindala.

4.386. On antud võrdhaarse kolmnurga aluse juures asuvad tipud (-2,1) ja (4,5) ning tipu A juures oleva nurga koosinus: $\cos A = \frac{15}{17}$. Leida tipu A koordinaadid.

4.387. On antud neli punkti $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(-2,1)$ ja $M_4(1,1)$. Leida punkt M, mis oleks võrdhaarsete kolmnurkade MM_1M_2 ja MM_3M_4 tipuks, kusjuures nende haarad on MM_1, MM_2 ja MM_3, MM_4.

4.388. Kolmnurga külgede võrrandid on $2x + 3y - 13 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$, $x + y - 5 = 0$. Leida selle kolmnurga pindala.

4.389. Sirge läbib reeperi alguspunkti ning moodustab sirgetega $x - y + 12 = 0$ ja $2x + y + 9 = 0$ kolmnurga, mille pindala on 1,5 ruutühikut. Leida selle sirge võrrand.

4.390. Kolmnurga küljed on $2x - 5y - 2 = 0$, $x + y - 8 = 0$, $5x - 2y - 5 = 0$. Leida kolmnurga sees punkt, mille ühendamisel tippudega tekiks kolm pindvõrdset kolmnurka.

4.391. Kolmnurga pindala on 5 ruutühikut ja külgedeks on reeperiteljed ning sirgega $2x + 5y = 0$ paralleelne sirge. Leida selle sirge võrrand.

4.392. Asetada läbi punkti M(4,-3) sirge nii, et selle sirgega ja reeperitelgedega piiratud kolmnurga pindala oleks 3 ruutühikut.

4.393. On antud punktid A(3,5) ja B(-1,-2). Leida sirgel $7x - 6y + 1 = 0$ punkt C nii, et kolmnurga ABC pindala oleks 1 ruutühik.

4.394. On antud neli punkti A(3,0), B(-1,-2), C(-3,1) ja D(7,2). Leida sirgel $5x - 2y - 95 = 0$ punkt M nii, et kolmnurgad MAB ja MCD oleksid võrdsed.

4.395. On antud kolmnurga tipp (-2,3), selle tipu vastaskülje tõus $k = \frac{1}{2}$ ja kolmnurga pindala S = 5. Leida kaks ülejäänud tippu, mis asetsevad sirgetel $x + 4y - 9 = 0$ ja $x + 4y - 21 = 0$.

4.396. On antud kolmnurga kaks tippu (0,7) ja (-2,3), pindala S = 3 ning sirge $x - 7 = 0$, millel asetseb kolmas tipp. Leida kolmnurga külgede võrrandid.

4.397. On antud sirged $5x - 2y - 5 = 0$, $2x + 5y -$

$- 2 = 0$. Leida sirge, mis läbib punkti $P(15,6)$ ja lõikab antud sirgeid, moodustades kolmnurga pindalaga 29 ruutühikut.

4.398. Leida sirged, mis on paralleelsed sirgega $x - 3y = 0$ ja lõikavad sirgeid $3x - 2y - 1 = 0$, $4x - 5y + 1 = 0$, moodustades kolmnurga pindalaga 3,5 ruutühikut.

4.399. Sirge a ja reeperitelgede poolt moodustatud kolmnurga pindala on 4,5 ruutühikut. Koostada sirge a võrrand, kui reeperitelgede vahele jääv sirge lõik on kaks korda pikem sirge kaugusest reeperi alguspunktist.

4.400. Kolmnurga küljed on $A_k x + B_k y + C_k = 0$ $(k = 1,2,3)$. Leida kolmnurga kõrguste võrrandid.

4.401. Leida kolmnurga kõrguste võrrandid, kui kolmnurga tipud on $P_1(2,-2)$, $P_2(1,-1)$ ja $P_3(-4,-4)$.

4.402. Kolmnurga tipud on $A(4,6)$, $B(-4,0)$, $C(-1,-4)$. Leida tipust A küljele BC tõmmatud kõrguse võrrand.

4.403. Leida kolmnurga kõrguste pikkused, kui kolmnurga tipud on $P_1(-4,-5)$, $P_2(-2,6)$ ja $P_3(5,1)$.

4.404. Kolmnurga kahe külje võrrandid on $x + 3y - 1 = 0$, $3x + 5y - 6 = 0$ ning kõrguste lõikepunkt asub reeperi alguspunktis. Leida kolmnurga kolmanda külje võrrand.

4.405. On antud kolmnurga tipud A ja B ning kõrguste lõikepunkt H. Leida kolmnurga kolmas tipp, kui

1) $A(-6,2)$, $B(2,-2)$, $H(1,2)$;

2) $A(-10,2)$, $B(6,4)$, $H(5,2)$.

4.406. On antud kolmnurga ABC tipud A ja B ning kõrguste lõikepunkt H. Koostada kolmnurga külgede võrrandid, kui

1) $A(2,1)$, $B(4,9)$, $H(3,4)$;

2) $A(3,-1)$, $B(5,7)$, $H(4,-1)$.

4.407. Teades kolmnurga ABC ühe külje ja kahe kõrguse võrrandeid, koostada ülejäänud külgede ja kolmanda kõrguse võrrandid, kui

1) AB: $4x + y - 12 = 0$, AM: $2x + 2y - 9 = 0$,
BN: $5x - 4y - 15 = 0$;

2) AB: $5x - 3y + 2 = 0$, AM: $4x - 3y + 1 = 0$,
BM: $7x + 2y - 22 = 0$.

BN: 4.408. Koostada kolmnurga ABC külgede võrrandid, kui antud on kolmnurga tipp A ja kahe kõrguse võrrandid

1) $A(3,-4)$, $7x - 2y - 1 = 0$, $2x - 7y - 6 = 0$;

2) $A(-4,-5)$, $5x + 3y - 4 = 0$, $3x + 8y + 13 = 0$.

4.409. Kolmnurga tipud on $A(3,-2)$, $B(1,5)$ ja $C(-4,3)$. Arvutada uue kolmnurga pindala, mille tippudeks on antud kolmnurga tippude projektsioonid vastaskülgedel.

4.410. Koostada kolmnurga külgede võrrandid, kui kolmnurga tipp on $B(2,-7)$, kõrgus $3x + y + 11 = 0$ ja mediaan $x + 2y + 7 = 0$, kusjuures kõrgus ja mediaan on tõmmatud erinevatest tippudest.

4.411. Leida kolmnurga külgede võrrandid, kui on teada tipp $C(4,-1)$ ja samast tipust tõmmatud kõrgus $2x - 3y + 12 = 0$ ning mediaan $2x + 3y = 0$.

4.412. Kontrollida, kas kolmnurga kõrguste ja mediaanide lõikepunkt ning ümberjoonestatud ringjoone keskpunkt asuvad ühel sirgel. Näitena vaadelda kolmnurka tippudega A(5,8), B(-2,9), C(-4,5).

4.413. Koostada kolmnurga külgede võrrandid, kui on teada kolmnurga tipp B(2,-1) ja erinevatest tippudest tõmmatud kõrgus $3x - 4y + 27 = 0$ ning nurgapoolitaja $x + 2y - 5 = 0$.

4.414. Kolmnurga tipud on A(2,-3) ja B(5,1), külg BC: $x + 2y - 7 = 0$ ning mediaan AM: $5x - y - 13 = 0$. Leida tipust C küljele AB tõmmatud kõrguse võrrand ning pikkus.

4.415. Kolmnurga tipud on A(3,1), B(5,4), C(1,3). Leida kõrgusel BH punkt P, mis jaotab kõrguse suhtes $\lambda = -3$, ja arvutada nelinurga ABCP pindala.

4.416. Leida kolmnurga mediaanide võrrandid, kui kolmnurga tipud on

1) A(5,9), B(15,-3), C(-5,3);

2) A(-6,-3), B(4,-7), C(-1,5).

4.417. Kolmnurga mediaanid on $4x + y - 6 = 0$, $2x + y - 2 = 0$, $x - 2 = 0$ ning pindala $S = 3$. Leida kolmnurga tipud.

4.418. Kolmnurga kaks tippu on $P_1(2,2)$ ja $P_2(3,0)$ ning mediaanide lõikepunkt M(3,1). Leida kolmnurga kolmas tipp P_3.

4.419. Koostada kolmnurga külgede võrrandid, kui antud on tipp A ja kahe mediaani võrrandid:

1) A(-4,2), $3x - 2y + 2 = 0$, $3x + 5y - 12 = 0$;

2) $A(1,3)$, $x - 2y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$.

4.420. Leida kolmnurga külgede võrrandid, kui on teada kaks tippu $A(3,5)$ ja $B(6,1)$ ning mediaanide lõikepunkt $M(4,0)$.

4.421. Kolmnurga kahe külje võrrandid on $x + y - 1 = 0$ ja $y + 1 = 0$ ning mediaanide lõikepunkt $M(-1,0)$. Leida kolmnurga kolmanda külje võrrand.

4.422. Kolmnurga $A(-3,-1)$, $B(1,-5)$, $C(9,3)$ küljed AB ja AC on jaotatud suhtes $\lambda = 3$ alates ühisest tipust A. Kontrollida, et mediaan AM ja sirged, mis ühendavad vastavaid jaotuspunkte vastastippudega, lõikuvad ühes punktis.

4.423. Kolmnurga tipud on $A(-4,2)$, $B(-2,-2)$, $C(6,8)$. Mediaani AM lõikepunktidest kolmnurga külgedega on tõmmatud sirged AP ja MP, mis on vastavalt paralleelsed teiste mediaanidega. Kontrollida, et kolmnurga AMP küljed on pikkuselt võrdsed kolmnurga ABC mediaanidega. Leida kolmnurkade ABC ja AMP pindalade suhe.

4.424. Kolmnurga üks külg lõikab x-telge punktis $x = 5$ ja y-telge punktis $y = 3$; teised küljed läbivad punkti $P(2,-4)$ ning neid punkte, milles esimene külg lõikab x- ja y-telge. Leida kolmnurga külgede ja mediaanide võrrandid.

4.425. Koostada kolmnurga ABC külgede võrrandid, kui on antud kolmnurga tipp A ja kahe nurgapoolitaja võrrandid

1) $A(2,-4)$, $x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$;

2) $A(4,-1)$, $x - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

4.426. Kolmnurga ABC tipud on $A(4,4)$, $B(-6,-1)$, $C(-2,-4)$. Leida tipu C juures oleva sisenurga poolitaja võrrand.

4.427. On antud kolmnurga tipud A(1,-2), B(5,4) ja C(-2,0). Leida tipu A juures oleva sise- ja välisnurga poolitaja.

4.428. On antud kolmnurga kahe sisenurga poolitajad $x + 4 = 0$, $4x + 7y + 5 = 0$ ning nende nurkade tippe ühendav kolmnurga külg $3x + 4y = 0$. Koostada kolmnurga teiste külgede võrrandid.

* 4.429. On antud kolmnurga küljed $3x + y - 3 = 0$, $3x + 4y = 0$ ning ühe sisenurga poolitaja $x - y + 5 = 0$. Koostada kolmnurga kolmanda külje võrrand.

4.430. Leida kolmnurga ABC nurga A sisenurga poolitaja, kui kolmnurga külgede võrrandid on AB: $2x + y - 7 = 0$, BC: $3x - 4y - 5 = 0$, CA: $5x - 3y - 1 = 0$.

4.431. Kolmnurga tipp on C(4,3) ja samast tipust on tõmmatud nurgapoolitaja $x + 2y - 5 = 0$ ja mediaan $4x + 13y - 10 = 0$. Koostada kolmnurga külgede võrrandid.

4.432. Kolmnurga tipp on A(3,-1), erinevatest tippudest on tõmmatud nurgapoolitaja $x - 4y + 10 = 0$ ja mediaan $6x + 10y - 59 = 0$. Koostada kolmnurga külgede võrrandid.

4.433. On antud kolmnurga tipud A(-6,-3), B(-4,3), C(9,2). Leida nurga A sisenurga poolitajal punkt M nii, et nelinurk ABMC oleks trapets.

4.434. On antud kolmnurga tipud A(1,2) ja B(3,4) ning nende tippude juures olevate sisenurkade koosinused $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Leida kolmnurga külgede võrrandid ning kolmanda tipu koordinaadid.

4.435. On antud kolmnurga tipp C(-3,2) ja tippude A ja B juures olevate sisenurkade koosinused $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos B = \frac{3}{5}$ ning külje AB võrrand $2x - y - 2 = 0$. Leida kolmnurga külgede võrrandid.

4.436. Kolmnurga küljed on $x + 2y = 0$, $3x - y = 0$, $x + y - 1 = 0$. Leida selle kolmnurga sisenurkade tangensid.

4.437. Kolmnurga sisse on joonestatud ristkülik, nii et kaks tippu asetsevad kolmnurga alusel ning kaks ülejäänud tippu kolmnurga haaradel. Leida selliste ristkülikute diagonaalide lõikepunktide hulk.

4.438. On antud kolmnurkade ABC ja A'B'C' tipud A(3, 0), B(0,3), C(-2,-1) ning $A'(6\frac{1}{2},2\frac{1}{2})$, B'(5,4), C'(4,2). Näidata, et vastavad küljed on paralleelsed ning vastavaid tippe ühendavad sirged lõikuvad ühes punktis.

4.439. Kahe sarnase ja sarnaselt asetseva kolmnurga sarnasuskeskpunkt on M(-4,-1) ning väiksema kolmnurga tipud on A(-3,-2), B(2,0), C(-1,1). Leida teise kolmnurga külgede võrrandid, kui sarnasustegur on 3.

Märkus. Sarnaste ja sarnaselt asetsevate kolmnurkade vastavad küljed on paralleelsed ning vastavaid tippe ühendavad sirged lõikuvad sarnasuskeskpunktis.

4.440. Punkti kauguste summa kolmnurga kahest küljest on võrdne kolmanda külje kaugusega. Leida nende punktide hulk, kui need punktid asetsevad antud kolmnurga sees.

Ruut, ristkülik, romb, rööpkülik, trapets.

4.441. Koostada ruudu külgede võrrandid, kui on antud üks tipp A(2,-4) ja diagonaalide lõikepunkt M(5,2).

4.442. On antud ruudu tipp A(-4,5) ja diagonaal $7x - y + 8 = 0$. Koostada ruudu külgede ja teise diagonaali võrrandid.

4.443. On antud ruudu kaks vastastippu A(-1,3) ja C(6,2). Koostada külgede võrrandid.

4.444. Punkt E(1,-1) on ruudu keskpunkt. Ruudu üks külg on $x - 2y + 12 = 0$. Koostada ruudu teiste külgede võrrandid.

4.445. Ristküliku kahe külje võrrandid on $5x + 2y - 7 = 0$ ja $5x + 2y - 36 = 0$ ning diagonaali võrrand on $3x + 7y - 10 = 0$. Koostada ristküliku ülejäänud külgede ning teise diagonaali võrrandid.

4.446. Leida rombi külgede võrrandid, kui rombi kaks vastastippu on A(-3,1) ja B(5,7) ning pindala S = 25 ruutühikut.

4.447. On teada rombi tipp A(0,-1), diagonaalide lõikepunkt M(4,4) ning punkt (2,0) küljel AB. Leida rombi pindala.

4.448. Rööpküliku ABCD kaks lähistippu on A(-3,-1) ja B(2,2) ning diagonaalide lõikepunkt on Q(3,0). Koostada rööpküliku külgede võrrandid.

4.449. On antud rööpküliku kaks lähiskülge: $x - y - 1 = 0$, $x - 2y = 0$ ning diagonaalide lõikepunkt M(3,-1).

Koostada rööpküliku teiste külgede võrrandid.

4.450. On antud kaks paari paralleelseid sirgeid:

$Ax + By + C = 0$, $Ax + By + D = 0$ $(C \neq D)$;

$A'x + B'y + C' = 0$, $A'x + B'y + D' = 0$ $(C' \neq D')$.

Leida nende sirgete poolt moodustatud rööpküliku pindala.

4.451. Rööpküliku kahe külje võrrandid on $x + y - 1 = 0$ ja $3x - y + 4 = 0$ ning diagonaalide lõikepunkt on $M(3, 3)$. Leida ülejäänud külgede võrrandid.

4.452. Rombi diagonaalid on valitud reeperitelgedeks ja pikkuselt võrdsed 8 ja 6 ühikuga. Koostada rombi külgede võrrandid.

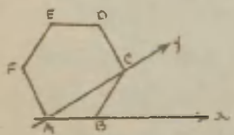
4.453. Nelinurga tipud on $A(3,-3)$, $B(4,3)$, $C(-5,2)$ ja $D(-3,-5)$. Leida nelinurga külgede ja diagonaalide võrrandid.

4.454. Sirged $3x + 4y - 30 = 0$ ja $3x - 4y + 12 = 0$ puutuvad ringjoont, mille raadius on $R = 5$. Leida nende puutujate ja puutepunktidesse tõmmatud raadiuste poolt moodustatud nelinurga pindala.

4.455. On antud kumera nelinurga tipud: $A(-3,1)$, $B(3, 9)$, $C(7,6)$ ja $D(-2,-6)$. Leida ta diagonaalide lõikepunkt.

4.456. Kolmnurga tipud on $A(0,5)$, $B(2,2)$, $C(4,6)$. Mediaanil AM leida punkt D nii, et nelinurga $ABCD$ pindala oleks 14 ruutühikut.

4.457. Leida korrapärase kuusnurga $ABCDEF$ (joon.4.7.) kõigi külgede võrrandid, kui reeperi telgedeks on külg AB ja diagonaal AC ning kuusnurga külje pikkus on a.



Joon. 4.7.

4.458. Võrdhaarse trapetsi alused on vastavalt 10 ja 6, haarad moodustavad alusega nurga 60°. Koostada trapetsi külgede võrrandid, kui reeperi telgedeks on pikem alus ja trapetsi sümmeetriatelg.

4.459. Trapetsi aluste võrrandid on $2x + y - 5 = 0$ ja $4x + 2y - 7 = 0$. Leida trapetsi kõrguse pikkus.

Kaugused. Nurgad.

4.460. Leida sirgel $x - 3y + 1 = 0$ punkt, mis oleks võrdsetel kaugustel punktidest (-3,1) ja (5,4).

4.461. Leida sirgel $7x + 3y - 14 = 0$ punktid, mille kauguste summa punktidest (2,3) ja (-1,4) oleks 8.

4.462. On antud punktid A(-3,8) ja B(2,2). Leida punkt M abstsissteljel nii, et murdjoon AMB oleks lühim.

4.463. Leida sirge, mis läbib punkti (2,-1) nii, et paralleelsete sirgete $x - y + 5 = 0$ ja $x - y - 2 = 0$ vahele jääb selle sirge 5 ühiku pikkune lõik.

4.464. Leida punkti P(3,5) läbiva ning punktidest A(-7,3) ja B(11,-15) võrdsel kaugusel asuva sirge võrrand.

4.465. On antud punktid $M_1(5,6)$, $M_2(2,1)$, $M_3(7,3)$ ja $M_4(3,11)$. Leida punktid, millest lõigud M_1M_2 ja M_3M_4 on nähtavad täisnurga all.

4.466. Leida sirgel $x + y - 3 = 0$ punkt M nii, et sellest punktist väljuvad ja punkte A(-2,-1) ning B(1,3) läbivad kiired MA ning MB moodustaksid antud sirgega võrdsed nurgad.

4.467. Sirgetevahelise nurga poolitaja on $2x - 2y + 1 = 0$. Leida need sirged, kui nad läbivad vastavalt punkte (0,4) ja (5,0).

4.468. Leida sirged, mis läbivad punkti (1,1) ning moodustavad nurga, mille tangens on $\frac{2}{11}$, ja eraldavad sirgel $x - y + 1 = 0$ lõigu pikkusega $2\sqrt{2}$.

4.469. On antud punktid $M_1(5,3)$, $M_2(1,2)$, $M_3(3,0)$ ja $M_4(2,4)$. Näidata, et sirged M_1M_2 ja M_3M_4 on risti ning lõikuvad punktis, mis asetseb nii punktide M_1 ja M_2 kui ka punktide M_3 ja M_4 vahel.

4.470. Leida punkti P(2,1) peegelduspunkt sirgelt $x + 2y - 1 = 0$.

4.471. Valguskiir levib mööda sirget $y = \frac{2}{3}x - 4$; jõudes abstsissteljeni, peegeldub sellelt. Leida kiire peegeldumispunkt ja peegeldunud kiire võrrand.

4.472. Nurga haarasid, mille võrrandid on $2x - 3y + 1 = 0$ ja $x + 4y - 5 = 0$, on lõigatud rea paralleelsete sirgetega: $y = 2x + b$. Leida nurga haarade vahel asetsevate paralleelsete sirgete lõikude a) keskpunktide ja b) suhtes $\lambda = 3$ jagavate punktide hulgad.

Raskuskese.

4.473. Punktidesse $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ja $C(x_3,y_3)$ on asetatud massid m, n ja p. Määrata süsteemi raskuskese.

4.474. Punktides $A(7,1\frac{1}{2})$, B(6,7), C(2,4) asetsevad vastavalt raskused 60, 100, 40 g. Määrata süsteemi raskuskese.

4.475. Tõestada: kui materiaalne süsteem koosneb n punktist $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, ... , $A_n(x_n,y_n)$, milles asetsevad massid m_1, m_2, ... ; m_n, siis süsteemi raskuskeskme koordinaadid on

$$x = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$y = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + \ldots + y_nm_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

4.476. Punktides $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ja $C(x_3,y_3)$ asetsevad ühtlased massid. Leida süsteemi raskuskese.

4.477. Ühtlane traat on painutatud täisnurgaks külgedega a ja b. Leida raskuskese.

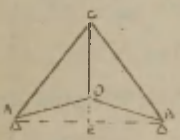
4.478. Leida täisnurgaks painutatud ühtlase varda raskuskese, kui täisnurga haarad on 2 ja 5.

4.479. Määrata ühtlasest traadist valmistatud kolmnurga raskuskese tippude $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ koordinaatide ja külgede pikkuste BC = a, AC = b, AB = c kaudu.

4.480. Ühtlasest traadist valmistatud kolmnurga tipud on A(4,2), B(7,-2) ja C(1,6). Määrata raskuskese.

4.481. Leida ühtlasest traadist valmistatud kolmnurga raskuskese, kui kolmnurga küljed on 3, 4 ja 5.

4.482. Määrata ühtlasest traadist sümmeetrilise raami ABCD (joon. 4.8.) raskuskese, kui AB = 6 m, CD = 3 m ja DE = = 1 m.



Joon. 4.8.

4.483. Avaldada ühtlase kolmnurkse plaadi raskuskeskme koordinaadid tippude koordinaatide kaudu.

4.484. Ühtlase kolmnurkse plaadi tipud on $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. Ühendades plaadi külgede keskpunktid, saame uue ühtlase plaadi. Tõestada, et mõlema plaadi raskuskeskmed ühtivad.

4.485. Kolmnurkse ühtlase plaadi raskuskese asetseb reeperi alguspunktis, üks tipp asetseb abstsissteljel a ühiku kaugusel reeperi alguspunktist ja teine tipp on ordinaatteljel b ühiku kaugusel reeperi alguspunktist. Määrata kolmanda tipu koordinaadid.

4.486. Kolmnurksete ühtlaste plaatide kaks ühist tippu on A(1,0) ja B(5,0) ning kolmandad tipud asetsevad reeperinurga poolitajal. Koostada plaatide raskuskeskmete hulga võrrand.

4.487. Koostada kolmnurkse ühtlase plaadi ABC raskuskeset reeperi alguspunktiga ühendava sirge võrrand, kui tippude koordinaadid on A(2,-1), B(4,5), C(-3,2).

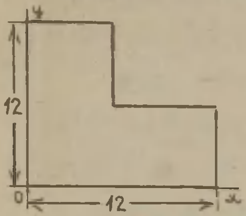
4.488. Leida tippudega A(3,1), B(4,5), C(2,0) kolmnurkse ühtlase plaadi raskuskeset ja punkte O(0,0) ning N(6,4) ühendavat lõiku suhtes λ jagava sirge võrrand. Selgitada, miks vastus ei sõltu λ arvulisest väärtusest.

4.489. Määrata ühtlase nelinurkse plaadi raskuskese, kui plaadi tipud on A(4,4), B(5,7), C(10,10) ja D(12,4).

4.490. On antud ühtlase nelinurkse plaadi järjestikused tipud A(2,1), B(5,3), C(-1,7) ja D(-7,5). Määrata raskuskese.

4.491. On antud ühtlase viisnurkse plaadi järjestikused tipud A(2,3), B(0,6), C(-1,5), D(0,1) ja E(1,1). Määrata raskuskese.

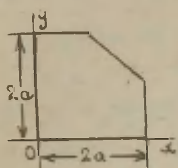
4.492. Ühtlase ruudukujulise plaadi nurgast on välja lõigatud ruut. Lõikesirged on paralleelsed plaadi servadega ja läbivad ruudu tsentrit (vt. joon. 4.9.). Määrata saadud plaadi raskuskese, kui lähteruudu külg on 12 cm.



Joon. 4.9.

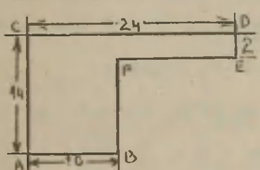
4.493. Ristkülikukujulise ühtlase plaadi küljed on a ja b. Plaadi nurgast on välja lõigatud ristkülik. Lõikesirged läbivad ristküliku keskpunkti ja on paralleelsed küljedega (vt. joon. 4.9.). Määrata kuusnurkse plaadi raskuskese.

4.494. Ühtlasel plaadil oli ruudu kuju küljega 2a. Plaadi nurgast lõigati välja kolmnurk, kusjuures lõikesirgeks oli ruudu lähisküljede keskpunkte ühendav sirge. (vt. joon. 4.10.). Määrata tekkinud plaadi raskuskese.



Joon. 4.10.

4.495. Määrata joonisel 4.11. näidatud ühtlase plaadi raskuskese. (Mõõtmed on antud joonisel 4.11.)



Joon. 4.11.

Afiinne reeper.

4.496. Teha kindlaks, kas toodud paarides on sirged paralleelsed, ühtivad või lõikuvad. Viimasel juhul leida ka lõikepunkt. (Reeper afiinne.)

1) $x + y - 3 = 0$, $2x + 3y - 8 = 0$;

2) $x - 2y + 4 = 0$, $-2x + 4y - 8 = 0$;

3) $x + y + 5 = 0$; $2x + 3y + 10 = 0$;

4) $x + 2 = 0$, $2x + 3 = 0$;

5) $x - y\sqrt{3} = 0$, $x\sqrt{3} - 3y = 0$;

6) $x = 3 + t$, $y = 2 - t$; $x = 3t$, $y = -2t$;

7) $x = 5 + 4t$, $y = -2 - 2t$; $x = 1 - 2t$, $y = 7 + t$;

8) $x = 4 - 8t$, $y = 2 + 6t$; $x = -4 + 4t$, $y = 8 - 3t$;

9) $3x + 4y + 5 = 0$, $x = -3 + 4t$, $y = 1 - 3t$;

10) $2x - 5y - 7 = 0$, $x = 2 + t$, $y = -9 - t$;

11) $6x - 3y + 5 = 0$, $x = 5 + t$, $y = -3 + 2t$;

12) $3x + 9y + 5 = 0$, $x = 2 + 3t$, $y = -t$;

13) $4x + 5y - 6 = 0$, $x = -6 + 5t$, $y = 6 - 4t$.

4.497. Tuletada üldine valem punkti kauguse arvutamiseks sirgest afiinse reeperi korral. Vaadelda erijuhte, kui sirge on määratud a) kanoonilise võrrandiga, b) üldvõrrandiga.

4.498. Leida afiinses reeperis tarvilik ja piisav tingimus, et punkt (x_0, y_0) asetseks paralleelsete sirgete $Ax + By + C = 0$ ja $Ax + By + D = 0$ $(C \neq D)$ vahel.

4.499. Afiinses reeperis on antud kolm sirget $Ax + By + C = 0$, $Ax + By + D = 0$, $Ax + By + E = 0$. Näidata, et teine sirge asetseb esimese ja kolmanda vahel siis ja ainult siis, kui $C < D < E$ või $C > D > E$.

4.500. Asetada läbi punkti $M(2,5)$ sirge, mis oleks võrdsetel kaugustel punktidest $P(-1,2)$ ja $Q(5,4)$. Ülesanne lahendada afiinses reeperis.

4.501. Kolmnurga külgede keskpunktid on $M_1(2,3)$, $M_2(-1,2)$ ja $M_3(4,5)$. Koostada külgede võrrandid afiinses reeperis.

4.502. On antud kolm punkti $(1,2)$, $(3,0)$, $(-4,-5)$. Leida nendest punktidest võrdsel kaugusel olevate sirgete võrrandid afiinses reeperis.

4.503. Afiinses reeperis on antud punktid: 1) $M_1(2,3)$, $M_2(0,-1)$; 2) $M_1(1,1)$, $M_2(3,5)$; 3) $M_1(4,3)$, $M_2(-2,2)$; 4) $M_1(0,2)$, $M_2(5,0)$; 5) $M_1(-6,4)$, $M_2(-2,4)$. Määrata lõigu M_1M_2 asend sirge l: $2x - y + 5 = 0$ suhtes, teha joonis ning kontrollida tulemust joonisel.

4.504. Kaks paralleelset sirget $2x - 5y + 6 = 0$ ja $2x - 5y - 7 = 0$ jagavad tasandi kolmeks piirkonnaks. Teha kindlaks, millisesse piirkonda kuuluvad järgmised punktid: $A(2,1)$, $B(3,2)$, $C(1,1)$, $D(2,8)$, $E(7,1)$, $F(-4,6)$. Reeper afiinne.

4.505. Kolmnurga küljed on: AB: $2x - y + 2 = 0$, BC: $x + y - 4 = 0$, CA: $2x + y = 0$. Teha kindlaks punktide $K(3,1)$, $L(7,-6)$, $M(-1,1)$ ja $N(3,2)$ asend kolmnurga suhtes afiinses reeperis.

4.506. Kolmnurga tipud afiinse reeperi suhtes on $A(3,1)$, $B(-2,4)$, $C(1,0)$. Teha kindlaks sirge $x - 7y + 5 = 0$ asend selle kolmnurga suhtes.

4.507. Kolmnurga küljed on $3x - y + 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$, $x - 2y = 0$. Teha kindlaks sirge $2x - y + 3 = 0$ asend kolmnurga suhtes afiinses reeperis.

4.508. On antud kaks sirget $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$. Leida nende sirgete poolt ordinaatteljega paralleelsetel sirgetel eraldatud lõikude keskpunktide hulk afiinses reeperis.

4.509. Punkt liigub nii, et ta kauguste suhe kahest lõikuvast sirgest on konstantne. Leida selle punkti trajektoori võrrand.

4.510. Nelinurga sisse on joonestatud rööpkülikud, mille küljed on paralleelsed nelinurga diagonaalidega. Leida rööpkülikute diagonaalide lõikepunktide hulk. Ülesanne lahendada afiinses reeperis.

4.511. Kolmnurga külgede võrrandid on $A_kx + B_ky + C_k = 0$, $k = 1,2,3$. Leida kolmnurga mediaanide võrrandid afiinses reeperis.

4.512. Kolmnurga mediaanide lõikepunkt asetseb punktis A ja kaks külge on a ja b. Leida kolmnurga tipud ja kolmanda külje võrrand afiinses reeperis, kui

1) $A(0,0)$, a: $x + y - 4 = 0$, b: $2x + y - 1 = 0$;

2) $A(0,2)$, a: $5x - 4y + 15 = 0$, b: $4x - y - 9 = 0$.

4.513. Antud on kolmnurga kahe külje ja ühe mediaani võrrandid afiinses reeperis

1) $2x - y = 0$, $5x - y = 0$, $3x - y = 0$;

2) $3x - 2y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $2x - y - 1 = 0$.

Leida kolmnurga tipud ja koostada kolmanda külje võrrand. Esimesel juhul on teada täiendavalt, et kolmandal küljel asetseb punkt B(3,9).

4.514. On antud kolmnurga mediaanid $4x + 5y = 0$, $x - 3y = 0$ ning tipp (2,-5). Leida kolmnurga küljed ja tipud afiinses reeperis.

4.515. On antud kolmnurga kaks mediaani $x + y - 5 = 0$, $2x + y - 11 = 0$ ning üks külg $x - 2y + 7 = 0$. Leida kolmnurga kahe ülejäänud külje võrrandid ning tipud, kui reeper on afiinne.

4.516. Sirge l lõikab kolmnurga ABC külgi BC, CA, AB vastavalt punktides P, Q ja R. Need küljed pöörlevad punktide P, Q ja R ümber, kusjuures A ja B libisevad mööda sirgeid p ja q. Koostada kolmanda tipu liikumise jälje võrrand. Reeper on afiinne

4.517. Kolmnurga ABC küljel BC on võetud punkt O, mis ei ühti punktiga B ega punktiga C. Läbi punkti O on tõmmatud sirged. Lõigaku üks neist sirgetest külgi AB ja AC punktides P ja Q. Leida kolmnurkade OBP ja OQC ümber joonestatud ringjoonte lõikepunktide hulk. Reeper on afiinne.

4.518. Olgu tasandil antud n punkti $M_1, M_2, \dots, M_n$. Lõigaku sirge l sirgeid $M_1M_2, M_2M_3, \dots, M_{n-1}M_n$ vastavalt punktides $P_1, P_2, \dots, P_n$. Pöörame sirgeid $M_1M_2, M_2M_3, \dots, M_{n-1}M_n$ vastavalt punktide $P_1, P_2, \dots, P_n$ ümber, nii et punktid $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ moodustavad sirged. Millise joone moodustab punkt M_n? Reeper on afiinne.

V peatükk

TASAND

§ 1. Tasandi võrrand

1. Tasandi üldvõrrand.

Iga tasand üldises afiinses reeperis (erijuhul ristreeperis) määratakse lineaarse võrrandiga

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{5.1}$$

koordinaatide x, y, z suhtes, kus kordajad A, B, C ei ole korraga nullid (s.t. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$). Ümberpöördult, iga lineaarne võrrand (5.1) määrab samal eeldusel tasandi. Võrrandit (5.1) nimetatakse tasandi <u>üldvõrrandiks</u>.

Tasandeid tähistatakse tavaliselt kas väikeste kreeka tähtedega α, β, γ, ... või tasandit määravate andmetega loogelistes sulgudes. Näiteks $\{ABC\}$, $\{A, \vec{a}, \vec{b}\}$, $\{A, \vec{n}\}$, ... jne.

Kui tasandi võrrandis (5.1) vabaliige on null, siis tasand läbib reeperi alguspunkti. Kui võrrandis (5.1) puudub üks koordinaatidest (s.t. üks kordajatest A või B või C on võrdne nulliga), siis on tasand paralleelne puuduva koordinaadi teljega. (Näiteks võrrandiga $Ax + By + D = 0$ antud tasand on paralleelne z-teljega .) Kui võrrandis (5.1) puudub üks koordinaatidest ja vabaliige on võrdne nulliga, läbib tasand vastavat reeperitelge. (Näiteks võrrandi $Ax + By = 0$ puhul läbib tasand z-telge.) Kui võrrandis puuduvad kaks koordinaati (s.t. kaks kordajatest A, B, C on võrdsed nulliga), on tasand paralleelne puuduvatele koordinaatidele vastava reeperitasandiga. (Näiteks võrrandi $Ax + D = 0$ puhul on tasand paralleelne yz-tasandiga.) Kui võrrandis (5.1) puuduvad kaks koordinaati ja vabaliige on võrdne nulliga, siis tasand langeb ühte puuduvatele koordinaatidele vastava reeperitasandiga. (Näiteks $Ax = 0$ puhul tasand ühtib yz-tasandiga.)

2. Tasandi võrrand telglõikudes.

Kui tasandi võrrandis (5.1) kordajad A,B,C,D on kõik nullist erinevad, siis võib tasandi teisendada kujule

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{5.2}$$

kus $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$ määravad lõigud, mida tasand lõikab välja reeperi telgedest (reeperi alguspunktist arvates). Suurusi a, b, c nimetatakse telglõikudeks ja võrrandit (5.2) tasandi võrrandiks telglõikudes.

3. Tasandi võrrandi erikujud.

Olgu tasand määratud punktiga $X_0(x_0, y_0, z_0)$ ja kahe mittekollineaarse vektoriga $\bar{a} = (l_1, m_1, n_1)$ ja $\bar{b} = (l_2, m_2, n_2)$, mis on komplanaarsed tasandiga. Punkt $X(x,y,z)$ asub antud tasandil parajasti siis (s.t. siis ja ainult siis), kui

$$(\vec{x} - \vec{x}_o)\vec{a}\vec{b} = o, \qquad (5.3)$$

kus $\vec{x}_o$ on tasandi fikseeritud punkti kohavektor ja $\vec{x}$ tasandi suvalise punkti X kohavektor, ehk koordinaatides

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = o. \qquad (5.3')$$

Kui tasand on määratud kahe erineva punktiga $X_1(x_1, y_1, z_1)$ ja $X_2(x_2, y_2, z_2)$ ning sellise tasandiga komplanaarse vektoriga $\vec{a} = (l, m, n)$, et $\vec{a} \nparallel \overrightarrow{X_1X_2}$, siis tasandi võrrandil on kuju

$$(\vec{x} - \vec{x}_1)(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\vec{a} = 0, \qquad (5.4)$$

kus vektorid $\vec{x}$, $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ on vastavalt punktide X, X_1, X_2 kohavektorid. Koordinaatides võime sama võrrandi kirjutada kujul

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.4')$$

Kui tasand läbib kolme mitte ühel sirgel asetsevat punkti $X_1(x_1, y_1, z_1)$, $X_2(x_2, y_2, z_2)$, $X_3(x_3, y_3, z_3)$ vastavalt kohavektoritega $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, on tasandi võrrandil kuju

$$(\vec{x} - \vec{x}_3)(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)(\vec{x}_2 - \vec{x}_3) = 0 \qquad (5.5)$$

ehk koordinaatides

$$\begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.5')$$

ehk veel erineval teisendatud kujul

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (5.5")$$

4. Tasandi parameetriline võrrand.

Parameetrilisel kujul võib tasandi võrrandi esitada järgmiselt:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + u\vec{a} + v\vec{b} \qquad (5.6)$$

ehk koordinaatides

$$\begin{aligned} x &= x_c + ul_1 + vl_2, \\ y &= y_0 + um_1 + vm_2, \qquad (5.6') \\ z &= z_0 + un_1 + vn_2, \end{aligned}$$

kus u ja v on tasandi punkti $X(x,y,z)$ afiinsed koordinaadid reeperis alguspunktiga $X_0(x_0,y_0,z_0)$ ja baasivektoritega $\vec{a}(l_1,m_1,n_1)$ ja $\vec{b}(l_2,m_2;n_2)$.

Kõik esitatud valemid (5.1-6) kehtivad afiinses reeperis ning järelikult ka ristreeperis.

5. Tasandi normaalvektor.

Iga nullist erinevat vektorit, mis on risti tasandiga, nimetatakse tasandi normaalvektoriks. Ristreeperis tasand, mis läbib punkti $X_0(x_0,y_0,z_0)$ ja mille normaalvektor on $\vec{n}$ = = (A,B,C), määratakse võrrandiga[1]

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \qquad (5.7)$$

[1] Ka afiinse reeperi korral saab tasandi määrata võrrandi-

ehk koordinaatides

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (5.7')$$

Avedes võrrandis sulud ja tähistades $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, saame tasandi üldvõrrandi (5.1). Ühtlasi selgub siit ristreeperi korral tundmatute kordajate A, B, C geomeetriline tähendus - need on tasandi normaalvektori $\vec{n}$ koordinaadid.

Tasandi üldvõrrand. Mittetäielik üldvõrrand. Parameetrilised võrrandid.

5.1. Tõestada, et iga esimese astme võrrand $Ax + By + Cz + D = 0$ määrab tasandi.

5.2. Kas tasand $4x - y + 3z + 1 = 0$ läbib järgmisi punkte: A(-1,6,3), B(3,-2,-5), C(0,4,1), D(2,0,5), E(2,7,0), F(0,1,0)?

5.3. Leida kuubi serva pikkus, kui kuubi kolm tahku asuvad reeperitasanditel, üks tipp on nullpunktis ja selle vastastipp asub tasandil $3x + y - 2z - 9\sqrt{42} = 0$

5.4. Leida tasandi üldvõrrand, kui ta parameetrilised võrrandid on:

1) $x = 2 + 3u - 4v$, $y = 4 - v$, $z = 2 + 3u$;

2) $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 5 + 6u - 4v$.

5.5. Näidata antud tasandite

1) $3x - 5z + 1 = 0$; 2) $9y - 2 = 0$;

---

ga (5.7). Üleminek võrrandilt (5.7) võrrandile (5.7') on aga võimalik ainult ristreeperi korral.

3) $x + y - 5 = 0$; 4) $2x + 3y - 7z = 0$; 5) $8y - 3z = 0$ asendite iseärasused reeperitelgede suhtes.

5.6. Leida tasandi võrrand, kui ta läbib

1) x-telge ja punkti $A(4,-1,2)$;

2) y-telge ja punkti $B(1,4,-3)$;

3) z-telge ja punkti $C(3,-4,7)$.

5.7. Koostada tasandi võrrand, kui tasand

1) läbib punkte $M_1(7,2,-3)$ ja $M_2(5,6,-4)$ ning on paralleelne x-teljega;

2) läbib punkte $P_1(2,-1,1)$ ja $P_2(3,1,2)$ ning on paralleelne y-teljega;

3) läbib punkte $Q_1(3,-2,5)$ ja $Q_2(2,3,1)$ ning on paralleelne z-teljega.

5.8. Leida tasand, mis läbib reeperitelge ning on paralleelne vektoriga $\vec{a} = (2,1,-4)$.

5.9. Leida tasand, mis läbib reeperitelge ja punkti $A(3,-5,1)$.

5.10. Koostada tasandi võrrand, kui tasand läbib punkti $P(3,2-7)$ ja on paralleelne 1) xy-tasandiga, 2) xz-tasandiga, 3) yz-tasandiga.

5.11. Koostada tasandi võrrand, kui ta läbib

1) punkti $M_1(2,-3,3)$ ning on paralleelne xy-tasandiga;

2) punkti $M_2(1,-2,4)$ ning on paralleelne xz-tasandiga;

3) punkti $M_3(-5,2,-1)$ ning on paralleelne yz-tasandiga.

5.12. Joonestada tasandid, mis afiinses reeperis on määratud järgmiste võrranditega:

1) $x - 2y + 4z - 12 = 0$; 2) $3x - 5z + 4 = 0$;

3) $2x - 2y + 3z = 0$; 4) $x + 2y - 7 = 0$;

5) $3x + 5y = 0$; 6) $2y - 3z = 0$;

7) $x + z - 3 = 0$; 8) $6x - 1 = 0$;

9) $y + 4 = 0$.

5.13. Leida tasand, mis läbib y-telge ning punkti $A(2, -5, 1)$. (Reeper afiinne.)

5.14. Leida tasandid, mis läbivad punkti $(2,6,-3)$ ning on paralleelsed reeperitasanditega. (Reeper afiinne.)

5.15. Leida tasand, mis läbib punkti $(3,-5,1)$ ning on paralleelne tasandiga $x - 2y + 4z = 0$. (Reeper afiinne.)

5.16. Leida tasand, mis läbib punkte $A(3,5,2)$ ja $B(6, 2,4)$ ja on paralleelne vektoriga $\vec{a} = (1,2,1)$. (Reeper afiinne.)

5.17. Milline on tarvilik ja piisav tingimus, et punkt $M_0(x_0,y_0,z_0)$ asetseks paralleelsete tasandite $Ax + By + Cz + D = 0$, $Ax + By + Cz + E = 0$ vahel? (Reeper afiinne.)

5.18. Milline on tarvilik ja piisav tingimus, et tasand $Ax + By + Cz + D = 0$ asetseks kahe temaga paralleelse tasandi $Ax + By + Cz + E = 0$, $Ax + By + Cz + F = 0$ vahel? (Reeper afiinne.)

5.19. Leida tasand, mis läbib punkti $(-3,1,0)$ ja sirget $x + 2y - z + 4 = 0$, $3x - y + 2z - 1 = 0$. (Reeper afiinne.)

Tasandi võrrand telglõikudes.

5.20. Leida tingimused, millal tasand $Ax + By + Cz +$

$+ D = 0$ lõikab 1) x-telje positiivset pooltelge; 2) x- ja y-telgede positiivseid pooltelgi; 3) kõigi telgede positiivseid pooltelgi.

5.21. Tasandi võrrand on $x + 2y - 3z - 6 = 0$. Leida võrrand telglõikudes.

5.22. Leida lõigud, mis tasand

1) $2x - 3y - z + 12 = 0$; 4) $x - 4z + 6 = 0$;

2) $5x + y - 3z - 15 = 0$; 5) $5x - 2y + z = 0$;

3) $x - y + z - 1 = 0$; 6) $x - 7 = 0$;

7) $3x - 4y - 24z + 12 = 0$

lõikab välja reeperitelgedelt.

5.23. Leida tasandid, mis läbivad punkti $A(4,3,2)$ ning mille telglõigud on võrdsed ja erinevad nullist.

5.24. Leida tasandi võrrand, kui tasand läbib punkti $P(5,-7,4)$ ja moodustab võrdsed telglõigud.

5.25. Leida tasand, mis läbib kahte antud punkti ning telglõigud a, b, c vastavalt x-, y- ja z-teljel rahuldavad tingimusi

1) $L(-1,4,-1)$, $M(-13,2,-10)$, $a = c \neq 0$;

2) $A(3,5,1)$, $B(7,7,8)$, $a = b \neq 0$;

3) $P(1,2,-1)$, $Q(-3,2,1)$, $b = 3$.

5.26. Leida tasandi võrrand, kui tasand läbib punkti $P(1,2,1)$ ja moodustab x- ja y-teljega telglõigud 2 ja -3.

5.27. Leida tasand, mis on paralleelne vektoriga $\vec{l} = (2,1,-1)$, telglõigud x- ja y-teljel on vastavalt $a = 3$, $b = -2$.

5.28. Leida tasand, mis on risti tasandiga $2x - 2y +$

$+ 4z - 5 = 0$ ning telglõigud x- ja y-teljel on vastavalt $a = -2$, $b = \frac{2}{3}$.

5.29. Kolmnurga tippudeks on O(0,0,0) ja tasandi $5x-6y+3z+120=0$ lõikepunktid x- ja y-teljega. Leida pindala.

5.30. Leida tasandi normaali sihikoosinused , kui tasandi telglõigud on $a = 11$, $b = 55$ ja $c = 10$.

5.31. Leida reeperitasanditega ja antud tasandiga 1) $2x - 3y + 6z - 12 = 0$; 2) $2x + 3y + 6z - 18 = 0$ piiratud püramiidi ruumala.

5.32. Tasand $3x + y - 2z - 18 = 0$ ja reeperitasandid moodustavad tetraeedri. Kuup asetseb tetraeedris nii, et tema kolm tahku asetsevad reeperitasanditel ja reeperi alguspunkti vastas olev tipp asub antud tasandil. Leida kuubi serv.

5.33. Reeperitasandite ja tasandi $2x - 3y + 4z + 18 = 0$ poolt moodustatud tetraeedris asetseb kuup, mille üks tipp asetseb reeperi alguspunktis. Sellest tipust lähtuvad kolm külge on reeperitelgedel. Reeperi alguspunkti vastas olev kuubi tipp asetseb antud tasandil. Leida kuubi serva pikkus.

5.34. Teises oktandis asuva tetraeedri kolm tahku asuvad reeperitasanditel. Leida neljanda tahu võrrand, kui tahu servade pikkused on: $AB = 6$, $BC = \sqrt{29}$, $CA = 5$.

5.35. Leida tasandi $x - y + 7z - 4 = 0$ telglõigud. (Reeper afiinne.)

5.36. Leida tasand, mille telglõigud afiinse reeperi korral on 3, 5 ja -7.

Tasand läbi kolme punkti.

5.37. Leida tasandi võrrand, kui ta läbib punkte $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ ja $C(\vec{c})$. Kirjutada tasandi võrrand koordinaatides, kui $\vec{a} = (x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b} = (x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c} = (x_3,y_3,z_3)$.

5.38. Näidata, et punkte $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ ja $C(x_3,y_3,z_3)$ läbiva tasandi võrrandi võib esitada kujul (5.5').

5.39. Koostada tasandi võrrand, kui tasand läbib kolme antud punkti:

1) A(0,0,0), B(1,4,0), C(3,-2,1); 2) K(3,-2,1), L(1,4,0), M(0,2,0); 3) P(3,-1,2), Q(4,-1,-1), R(2,0,2); 4) S(1,2,1), T(-2,1,2), U(-2,-1,3).

5.40. Kontrollida,kas läbi nelja punkti: 1) (3,1,0), (0,7,2), (-1,0,-5) ja (4,1,5); 2) (1,-1,1), (0,2,4), (1,3,3) ja (4,0,-3) saab panna tasandi.

5.41. Tetraeedri tippude koordinaadid on: A(0,0,2), B(3,0,5), C(1,1,0) ja D(4,1,2). Leida tetraeedri tahkude võrrandid. Arvutada tetraeedri ruumala.

5.42. Leida tetraeedri tahkude võrrandid, kui tetraeedri tipud on $P_1(1,1,1)$, $P_2(-1,1,1)$, $P_3(1,-1,1)$ ja $P_4(1,1,-1)$.

5.43. Koostada reeperi alguspunkti ja punkte A(2,1,1) ning B(-3,0,4) läbiva tasandi võrrand. (Reeper afiinne.)

5.44. Leida tasand, mis läbib kolme antud punkti

1) A(2,3,1), B(3,1,4), C(2,1,5);

2) P(2,0,-1), Q(-2,4,1), R(0,2,-1).

(Reeper afiinne.)

Punktiga ja rihivektoripaariga määratud tasand.

5.45. Leida punktiga $A(\vec{x}_0)$ ja rihivektoripaariga $\vec{a}_1$ ja $\vec{a}_2$ määratud tasandi võrrand. Kirjutada selle tasandi võrrand reeperis, kus $\vec{x}_0 = (x_0,y_0,z_0)$, $\vec{a}_1 = (l_1,m_1,n_1)$, $\vec{a}_2 = (l_2,m_2,n_2)$.

Märkus. Tasandi rihivektoripaariks nimetatakse tasandiga komplanaarsete omavahel mittekollineaarsete vektorite paari.

5.46. Näidata, et punkti $X_0(x_0,y_0,z_0)$ läbiva ning vektoritega $\vec{a}_1 = (l_1,m_1,n_1)$ ja $\vec{a}_2 = (l_2,m_2,n_2)$ paralleelse tasandi võrrandi võib esitada kujul (5.3') ($\vec{a}_1 \not\parallel \vec{a}_2$).

5.47. Koostada tasandi võrrand, kui tasand läbib reeperi alguspunkti ja on paralleelne vektoritega $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ja $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – vastastikku ristuvad ühikvektorid).

5.48. Koostada tasandi võrrand, kui tasand läbib punkti $A(2,4,-3)$ ja on paralleelne vektoritega $\vec{k}$ ja $\vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

5.49. Leida tasand, mis läbib punkti $M(3,4,-5)$ ning on paralleelne vektoritega $\vec{a}_1 = (3,1,-1)$ ja $\vec{a}_2 = (1,-2,1)$.

5.50. Tõestada, et punkte $X_1(x_1,y_1,z_1)$ ja $X_2(x_2,y_2,z_2)$ läbiva ja vektoriga $\vec{a} = (l,m,n)$ paralleelse tasandi võrrandi võib kirjutada kujul (5.4').

5.51. Koostada tasandi võrrand, kui tasand läbib kahte antud punkti ja on paralleelne antud vektoriga

1) $A(2,-1,3)$, $B(3,1,2)$, $\vec{a} = (3,-1,4)$;

2) $M(\frac{3}{2},3,-\frac{2}{3})$, $N(4,5,1)$, $\vec{b} = (6,0,-1)$.

5.52. Tetraeedri tipud on A(5,1,3), B(1,6,2), C(5,0,4), D(4,0,6). Leida tasand, mis läbib külge AB ning on paralleelne küljega CD.

5.53. Koostada afiinse reeperi korral punkti A läbiva ja vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ paralleelse tasandi parameetrilised võrrandid, kui

1) $A(2,3,-5)$, $\vec{a} = (-5,6,4)$, $\vec{b} = (4,-2,0)$;

2) $A(3,7,2)$, $\vec{a} = (4,1,2)$, $\vec{b} = (5,3,1)$.

Punkti ja normaaliga määratud tasand.

5.54. Leida tasandi α võrrand, kui ta läbib punkti $A(\vec{a})$ ning ta normaalvektor on $\vec{n}$.

5.55. Tõestada, et võrrand $\vec{x} \cdot \vec{n} + D = 0$ määrab tasandi, mis on risti vektoriga $\vec{n}$. Kirjutada selle tasandi võrrand koordinaatides juhul, kui $\vec{n} = \{A;B;C\}$.

5.56. Koostada tasandi võrrand, kui tasand läbib punkti A(2,-7,3) ja on risti 1) vektoriga $\vec{i}$; 2) vektoriga $\vec{j} + \vec{k}$; 3) vektoriga $\vec{a} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$.

5.57. Tasand on risti vektoriga $\vec{n} = (-2,1,3)$ ja tasandi aplikaatlõik $c = -5$. Koostada tasandi võrrand.

5.58. Leida tasand, mis läbib

1) reeperi alguspunkti ja ta normaalvektor on $\vec{n} = (5,0,-3)$;

2) punkti M(2,1,-1) ja ta normaalvektor on $\vec{n} = (1,-2,3)$.

5.59. On antud kaks punkti $X_1(\vec{x}_1)$ ja $X_2(\vec{x}_2)$. Leida punkti X_1 läbiva ja vektoriga $\overrightarrow{X_1X_2}$ ristuva tasandi võrrand. Kirjutada selle tasandi võrrand koordinaatides, kui $\vec{x}_1 =$

$= (x_1, y_1, z_1), \vec{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

5.60. On antud kaks punkti A(3,-1,2) ja B(4,-2,-1). Leida tasand, mis läbib punkti A ning on risti vektoriga $\overrightarrow{AB}$.

5.61. On antud kaks punkti A(1,3,-2) ja B(7,-4,4). Panna läbi punkti B tasand, mis on risti lõiguga AB.

5.62. On antud kaks punkti A(3,-2,1), B(6,0,5). Leida tasand, mis läbib punkti B ning on risti sirgega AB.

5.63. Punktide A ja B kohavektorid on vastavalt $\vec{a} = (5,2,-3)$ ja $\vec{b} = (3,-4,1)$. Leida tasand, mis on risti lõiguga AB ja läbib antud lõigu keskpunkti.

5.64. Leida punktide hulk, mille iga punkti kohavektori projektsioon x-teljele on võrdne viie ühikuga. Uurida, kuidas asetsevad antud hulga punktid ruumis.

5.65. Teades reeperi alguspunktist tasandile langetatud ristsirge alguspunkti $A(\vec{a})$ tasandil, koostada tasandi võrrand.

5.66. Koostada tasandi võrrand, kui reeperi alguspunkti projektsioon otsitavale tasandile on punkt 1) A(2, -1,-1); B(3,-6,2); C(2,6,-4).

5.67. On antud tasandid

1) $2x - y - 2z + 5 = 0$;

2) $x + 5y - z = 0$;

3) $3x - 2y - 7 = 0$;

4) $5y - 3z = 0$;

5) $x + 2 = 0$;

6) $y - 3 = 0$.

Leida iga tasandi mingi normaalvektori koordinaadid. Kirjutada kõikidel juhtudel suvalise normaalvektori koordinaatide üldvalem.

§ 2 Tasandipaar

Tasandipaar. Kahe tasandi vaheline nurk.

Kahel tasandil

$$\begin{aligned} \alpha &: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \alpha_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

on kolm vastastikust asendit ruumis:

1) tasandid lõikuvad;
2) tasandid on paralleelsed;
3) tasandid ühtivad.[1]

Kahe tasandi vaheliseks nurgaks φ nimetatakse tasandite normaalide vahelist nurka. Ristreeperi korral on tasandite α ja α_1 normaalvektoriteks vastavalt $\vec{n} = (A,B,C)$ ja $\vec{n}_1 = (A_1,B_1,C_1)$ ning tasandite normaalide (normaalvektorite) vaheline nurk avaldub kujul

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}\,\vec{n}_1}{|\vec{n}|\,|\vec{n}_1|} = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}. \tag{5.9}$$

---

[1]Tasandite ühtimist võib vaadelda tasandite paralleelsuse erijuhuna. Paralleelseid ja ühtivaid tasandeid nimetatakse ka sama sihiga tasanditeks.

Järelikult on kaks tasandit risti parajasti siis, kui nende normaalid on risti, s.t. $\vec{n}\,\vec{n}_1 = 0$ ehk koordinaatides

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \tag{5.10}$$

Tasandid on paralleelsed parajasti siis, kui tasandite normaalvektorid on kollineaarsed $\vec{n} \parallel \vec{n}_1$ ehk koordinaatides

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}. \tag{5.11}$$

Kui tasandid ühtivad, siis tasandite võrrandid võivad erineda ainult kordaja poolest, s.t.

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}. \tag{5.12}$$

Siin (5.11) ja (5.12) on rakendatavad ka afiinse reeperi korral.

Paralleelsed või ristuvad tasandid.

5.68. Tõestada, et tasandid $Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $D_1 \neq D_2$ on paralleelsed.

5.69. Leida tasandi võrrand, kui tasand läbib punkti $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja on paralleelne tasandiga $Ax + By + Cz + D = 0$.

5.70. Leida tasand, mis läbib reeperi alguspunkti ning on paralleelne tasandiga $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

5.71. Leida tasand, mis läbib punkti A ja on paralleelne tasandiga α :

1) $A(3,-2,-7)$, α : $2x - 3z + 5 = 0$;

2) $A(4,-7,1)$, α : $3x - 7y + 5z - 12 = 0$;

3) $A(2,1,-5)$, $\alpha: 3x - 8y + z = 13$.

5.72. Rööptahuka kolme tahu võrrandid on $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$, $z + 5 = 0$ ning üks ta tippe on $(6,-5,1)$. Leida rööptahuka ülejäänud kolme tahu võrrandid.

5.73. Tõestada, et punkte $X_1(x_1,y_1,z_1)$ ja $X_2(x_2, y_2, z_2)$ läbiva ja tasandiga $Ax + By + Cz + D = 0$ risti oleva tasandi võrrand on esitatav järgmiselt:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

5.74. Leida tasand, mis läbib kahte antud punkti ja on risti tasandiga α:

1) $O(0,0,0)$, $Q(1,2,3)$, $\alpha: x - y + 2z - 4 = 0$;

2) $A(5,-4,3)$, $B(-2,1,8)$, α: a) xy-tasand, b) yz-tasand, c) xz-tasand;

3) $K(1,-1,-2)$, $L(3,1,1)$, $\alpha: x - 2y - 3z - 5 = 0$;

4) $M(8,-3,1)$, $N(4,7,2)$, $\alpha: 3x + 5y - 7z - 21 = 0$.

5.75. Tõestada, et punkti $X_0(x_0,y_0,z_0)$ läbiva ja tasanditega $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ning $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ristuva tasandi võrrand on esitatav järgmiselt:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

5.76. Koostada punkti $X_0(\vec{x}_0)$ läbiva ja tasanditega $\vec{x}\,\vec{n}_1 + D_1 = 0$, $\vec{x}\,\vec{n}_2 + D_2 = 0$ ristuva tasandi võrrand.

5.77. Leida tasand, mis läbib antud punkti ja on risti kahe antud tasandiga

1) $O(0,0,0)$, $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$;

2) $M(2,-1,1)$, $2x - z + 1 = 0$, $y = 0$;

3) $M(0,-3,0)$, $x + 2y + 3z = 5$, $3x - 5y + 4z = 12$.

5.78. Teha kindlaks, millised järgmistest tasandipaaridest

1) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, $3x - 6y + 1 = 0$;

2) $3x - 4y + 6z + 9 = 0$, $6x - 8y - 10z + 15 = 0$;

3) $3x - 2y - 3z + 5 = 0$, $9x - 6y - 9z - 5 = 0$;

4) $x + y + z - 1 = 0$, $2x + 2y - 2z + 3 = 0$;

5) $2x - y - z - 3 = 0$, $10x - 5y - 5z - 15 = 0$

lõikuvad, on paralleelsed või ühtivad.

5.79. Teha kindlaks, millistel juhtudel võrrandipaaridega määratud tasandid on paralleelsed:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;

3) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

5.80. Millistel l ja m väärtustel antud tasandid on paralleelsed:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$;

2) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$;

3) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - lz = 0$.

5.81. Teha kindlaks, millistel juhtudel võrrandipaaridega määratud tasandid on risti:

1) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$;

2) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;

3) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$.

5.82. Määrata kordaja l nii, et antud tasandid oleksid risti:

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $\quad x + 3y + 2z + 5 = 0$;

2) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $\quad 2x + ly - 3z + 1 = 0$;

3) $7x - 2y - z = 0$, $\quad lx + y - 3z - 1 = 0$.

5.83. Koostada tasandi võrrand, kui tasand läbib reeperi alguspunkti, on paralleelne vektoriga $\vec{a}$ ja risti tasandiga $\vec{x}\cdot\vec{b} = \vec{c}$.

Kahe tasandi vaheline nurk.

5.84. Leida tasandi $Ax + By + Cz + D = 0$ ja reeperitasandite vahelised nurgad.

5.85. Leida tasandi $z = px + qy + l$ ja xy-tasandi vaheline nurk.

5.86. Leida yz-tasandi ja tasandi $x - y + \sqrt{2}\,z - 5 = 0$ vaheline nurk.

5.87. Missugused nurgad moodustab tasand $x + 2y - z + 1 = 0$ reeperitasanditega.

5.88. Arvutada järgmiste tasandite vahelised nurgad:

1) $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ ja $x - 4y - z + 9 = 0$;

2) $3x - y + 2z + 15 = 0$ ja $5x + 9y - 3z - 1 = 0$;

3) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ ja $9x + 3y - 6z - 4 = 0$;

4) $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ ja $x + 2y + 2z - 7 = 0$.

5.89. Leida kahe tasandi

1) $2x - y + 3z = 0$, $\quad x + 4y - 6z = 0$;

2) $x + 3y - 4z + 5 = 0$, $\quad 2x + 2y + 2z - 7 = 0$

vahelise nurga koosinus.

5.90. Leida tasandite $x + 2y - z + 1 = 0$ ja $x - 2y - z - 1 = 0$ normaalide vaheline nurk.

5.91. Panna läbi x-telje tasand, mis moodustab tasandiga $4x + 3z - 7 = 0$ nurga $\frac{\pi}{3}$.

5.92. Panna läbi reeperi alguspunkti tasand, mis on risti tasandiga $5x - 2y + 5z - 10 = 0$ ning moodustab tasandiga $x - 4y - 8z + 12 = 0$ nurga 45°.

5.93. Leida tasandi võrrand, kui tasand läbib punkte $A(2,0,0)$ ja $B(0,2,0)$ ja moodustab tasandiga $x + y + z + 1 = 0$ nurga $\alpha = 45^{\circ}$.

5.94. Leida tasand, mis läbib z-telge ning moodustab tasandiga $2x + y - \sqrt{5}\cdot z - 7 = 0$ nurga $\frac{\pi}{3}$.

5.95. Punkti $M(-5,16,12)$ läbib kaks tasandit, kusjuures üks neist läbib ka x-telge, teine aga y-telge. Leida nende tasandite vaheline nurk.

5.96. Leida lõikuvate tasandite paari

1) $x - y\cdot\sqrt{2} + z - 1 = 0,\quad x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0;$

2) $3y - z = 0,\quad 2y + z = 0;$

3) $6x + 3y - 2z = 0,\quad x + 2y + 6z - 12 = 0;$

4) $x + 2y + 2z - 3 = 0,\quad 16x + 12y - 15z - 1 = 0$

vaheline kahetahuline nurk.

§ 3. Tasandi normaalvõrrand. Punkti kaugus tasandist

Käsitleme probleemi ristreeperis. Tasandi <u>normaalvõrrandiks</u> nimetatakse võrrandit kujul

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \qquad (5.13)$$

kus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ tasandi normaali sihikoosinused, s.t. kehtib seos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (5.14)$$

ja p on koordinaatide alguspunkti kaugus tasandist. Tasandi normaali positiivseks suunaks loetakse suunda koordinaatide alguspunkti poolt tasandi poole. Kui tasand läbib koordinaatide alguspunkti, on normaali suund vaba.

Et teisendada tasandi üldvõrrandit (5.1) normaalkujule, tuleb võrrandit korrutada nn. normeeriva teguriga

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (5.15)$$

kus normeeriva teguri märk valitakse vastupidine üldvõrrandi (5.1) vabaliikme märgiga (eeldusel $A > 0$).[1] Reeperi alguspunkti kaugus tasandist ja tasandi normaali sihikoosinused avalduvad tasandi üldvõrrandi kordajate kaudu järgmiselt:

$$p = \pm \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

---

[1] Kui $A = 0$, siis eeldatakse, et $B > 0$.

$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (5.16)$$

Kui tasand on määratud normaalvõrrandiga (5.13), siis punkti $M_0(x_0, y_0, z_0)$ kaugus d tasandist määratakse valemiga

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|. \qquad (5.17)$$

Kui tasand on määratud üldvõrrandiga (5.1), määratakse punkti kaugus tasandist valemiga

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (5.18)$$

Järelikult, punkti kauguse tasandist saame, kui asetame antud punkti koordinaadid tasandi normaalvõrrandi vasakusse poolde ja võtame tulemusest absoluutväärtuse.

Tasandi normaalvõrrand.

5.97. On antud ühikvektor $\vec{n}_0$ ja arv $p > 0$. Tõestada, et võrrand $\vec{x}\cdot\vec{n}_0 - p = 0$ määrab vektoriga $\vec{n}_0$ ristuva tasandi, kus p on tasandi kaugus reeperi alguspunktist. Leida selle tasandi võrrand koordinaatides, kui vektor $\vec{n}_0$ moodustab reeperitelgedega nurgad α, β ja γ.

5.98. Esitada tasandi normaalvõrrand $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ vektorite abil ja selgitada kasutatud vektorite geomeetrilist sisu.

5.99. Konstrueerida tasandid $\vec{x}\cdot\vec{n} = 4$; $\vec{x}\cdot\vec{n} = 0$; $\vec{x}\cdot\vec{n} + 3 = 0$.

5.100. Teha kindlaks, millised tasandite võrrandeist omavad normaalkuju:

1) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0$; 2) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z - 3 = 0$;

3) $\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z + 5 = 0$; 4) $-\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z - 5 = 0$;

5) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z - 3 = 0$; 6) $-\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z + 1 = 0$;

7) $\frac{5}{13}y - \frac{12}{13}z - 1 = 0$; 8) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3 = 0$;

9) $x - 1 = 0$; 10) $y + 2 = 0$;

11) $-y - 2 = 0$; 12) $z - 5 = 0$.

5.101. On antud tasandid

1) $\vec{x}\cdot\vec{n} - 3 = 0$, $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$;

2) $\vec{x}\cdot\vec{n} - 8 = 0$, $\vec{n} = \frac{4}{7}\vec{i} - \frac{1}{7}\vec{j} + \frac{5}{7}\vec{k}$;

3) $\vec{x}\cdot\vec{n} = 0$, $\vec{n} = 0{,}8\vec{i} - 0{,}6\vec{k}$;

4) $\vec{x}\cdot\vec{n} - 25 = 0$, $\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$.

Millised antud tasanditest on esitatud normaalvõrrandiga?

5.102. Teisendada järgmiste tasandite võrrandid normaalkujule

1) $2x - 2y + z - 18 = 0$; 2) $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$;

3) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$; 4) $-4x - 4y + 2z + 1 = 0$;

5) $5y - 12z + 26 = 0$; 6) $3x - 4y - 1 = 0$;

7) $y + 2 = 0$; 8) $-x + 5 = 0$;

9) $-z + 3 = 0$; 10) $2z - 1 = 0$.

5.103. On antud tasand $\vec{x}\cdot\vec{a} = b$. Leida reeperi alguspunkti ristprojektsioon antud tasandile. Lahendada sama ülesanne, kui tasand on määratud normaalvõrrandiga.

5.104. Teades tasandi normaali sihivektorit $\vec{n}_0 = (\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, -\frac{3}{13})$ (suunaga reeperi alguspunktist tasandi poole) ja alguspunkti kaugust tasandist $p = 4$, koostada tasandi normaalvõrrand.

Punkti kaugus tasandist.

5.105. Avaldada punkti $X_1(\vec{x}_1)$ kaugus d tasandist $\vec{r}\cdot\vec{n} - p = 0$. Leida kaugus d koordinaatides, kui $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

5.106. Näidata, et punkti $A(\vec{a})$ kaugus tasandist $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ on $d = \frac{|\vec{n}(\vec{a} - \vec{b})|}{|\vec{n}|}$.

5.107. Leida tasandite kaugused reeperi alguspunktist:

1) $6x - 7y - 6z = 33$;

2) $2x + 3y - 6z - 7 = 0$;

3) $15x - 10y + 6z - 190 = 0$.

5.108. Leida punkti A kaugus tasandist α, kui

1) $A(1,2,1)$, α : $x + 2y + 2z - 10 = 0$;

2) $A(3,1,-1)$, α : $22x + 4y - 20z - 45 = 0$;

3) $A(4,3,-2)$, α : $3x - y + 5z + 1 = 0$;

4) $A(2,0,-\frac{1}{2})$, α : $4x - 4y + 2z + 17 = 0$;

5) $A(7,-1,2)$, α : $x + 2y - 2z + 5 = 0$;

5.109. On antud tasandid

1) $x + y\sqrt{2} + z - 10 = 0$; 2) $x - y - z\sqrt{2} + 16 = 0$;

3) $x + z - 6 = 0$; 4) $y - z + 2 = 0$;

5) $x\sqrt{3} + y + 10 = 0$; 6) $z - 2 = 0$; 7) $2x + 1 = 0$;

8) $2y + 1 = 0$; 9) $x - 2y + 2z - 6 = 0$;

10) $2x + 3y - 6z + 4 = 0$.

Leida iga tasandi normaali ja reeperitelgede vahelised nurgad α, β ja γ ning kaugus reeperi alguspunktist.

5.110. Tuletada valem punkti $A(x_0,y_0,z_0)$ kauguse arvutamiseks kolme punktiga $B(x_1,y_1,z_1)$, $C(x_2,y_2,z_2)$ ja $D(x_3,y_3,z_3)$ määratud tasandist.

5.111. Tasand läbib punkte $A(1,-1,1)$, $B(-2,1,3)$ ja $C(4,-5,-2)$. Leida punkti $P(-1,1,-2)$ kaugus d sellest tasandist.

5.112. Tetraeedri tipud on 1) $A(3,5,3)$, $B(-2,11,-5)$, $C(1,-1,4)$, $D(0,6,4)$; 2) $A(0,0,2)$, $B(3,0,5)$, $C(1,1,0)$, $D(4,1,2)$. Arvutada tipust D tahule ABC tõmmatud kõrguse pikkus.

5.113. Leida tetraeedri ruumala, kui tetraeedri tipud on $A(1,1,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(1,-1,1)$ ja $C(-1,1,1)$.

5.114. Leida tasandi võrrand, kui tasand läbib punkte $M(2,0,0)$ ja $N(0,2,0)$ ning asub nullpunktist ühe ühiku kaugusel.

5.115. Tasandi telglõikude suhe on $a : b : c = 1 : 2 : 3$ ja tasand asetseb 1) reeperi alguspunktist kuue ühiku 2) punktist $A(3,5,7)$ nelja ühiku kaugusel.

5.116. Kolmnurk on tekkinud xy-tasandi lõikamisel tasanditega $3x + 2y + 4z - 7 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$, $5x + y - \sqrt{3}\, z + 6 = 0$. Leida selles kolmnurgas punkt, mis asub antud tasanditest võrdsetel kaugustel.

Paralleelsete tasandite vaheline kaugus.

5.117. Leida tasandite $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ ja $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ vaheline kaugus d.

5.118. Leida tasandite $11x - 2y - 10z + 15 = 0$ ja $11x - 2y - 10z - 45 = 0$ vaheline kaugus.

5.119. Leida paralleelsete tasandite vaheline kaugus, kui tasandite võrrandid on:

1) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$;

2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z + 21 = 0$;

3) $2x - y + 2z + 9 = 0$, $4x - 2y + 4z - 21 = 0$;

4) $16x + 12y - 15z + 50 = 0$, $16x + 12y - 15z + 25 = 0$;

5) $30x - 32y + 24z - 75 = 0$, $15x - 16y + 12z - 25 = 0$;

6) $6x - 18y - 9z - 28 = 0$, $4x - 12y - 6z - 7 = 0$.

5.120. Leida tasandiga $Ax + By + Cz + D = 0$ paralleelse ja sellest kaugusel d oleva tasandi võrrand.

5.121. Leida tasand, mis on paralleelne antud tasandiga α ja asetseb viimasest d ühiku kaugusel

1) α : $3x - 6y - 2z + 14 = 0$, $d = 3$;

2) α : $2x - 2y - z - 3 = 0$, $d = 5$;

3) α : $20x - 4y - 5z + 7 = 0$, $d = 6$.

5.122. Koostada tasandi võrrand, kui tasand asetseb võrdsel kaugusel tasanditest $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ ja $Ax + By + Cz + D_2 = 0$.

5.123. Koostada tasandi võrrand, kui tasand asetseb kahe paralleelse tasandi

$$x - 2y + z - 1 = 0 \quad \text{ja}$$

$$2x - 4y + 2z + 1 = 0$$

vahel ja jaotab nendevahelise kauguse suhtes 1 : 3.

5.124. Kuubi kaks tahku asetsevad tasanditel $2x - 2y + z - 1 = 0$, $2x - 2y + z + 5 = 0$. Leida selle kuubi ruumala.

5.125. Leida tasand, mis on risti vektoriga $\vec{m} = (l, m, n)$ ning asub punktist $M_0(x_0, y_0, z_0)$ kaugusel d ühikut.

5.126. Leida tasandiga $x + 2y - 2z + 7 = 0$ paralleelse ja punktist $M(4,3,-2)$ seitsme ühiku kaugusel asetseva tasandi võrrand.

5.127. Leida tasand, mis on paralleelne tasandiga $2x + y - 4z + 5 = 0$ ja asetseb punktist (1,2,0) kaugusel $\sqrt{21}$ ühikut.

Teatud kaugustel asetsevad tasandid ja punktid.

5.128. Leida tasand, mis läbib punkti A(5,2,0) ning ta kaugus punktist B(6,1,-1) on 1 ja punktist C(0,5,4) on 3.

5.129. Leida tasand, mis läbib y-telge ning on võrdsel kaugusel punktidest (2,7,3) ja (-1,1,0).

5.130. On antud paralleelsete tasandite paarid

1) $4x - y - 2z - 3 = 0$, $4x - y - 2z - 5 = 0$;

2) $3x + 2y - z + 3 = 0$, $3x + 2y - z - 1 = 0$;

3) $5x - 3y + z + 3 = 0$, $10x - 6y + 2z + 7 = 0$.

Leida nendest tasanditest võrdsel kaugusel olevate punktide hulga võrrand.

5.131. Leida y-teljel punkt, mis asub tasandist $x + 2y - 2z - 2 = 0$ kaugusel $d = 4$.

5.132. Leida z-teljel punkt. mis on võrdsel kaugusel punktist (2,3,4) ja tasandist $2x + 3y + z - 17 = 0$.

5.133. Leida x-teljel punkt, mis asub tasanditest $12x - 16y + 15z + 1 = 0$ ja $2x + 2y - z - 1 = 0$ võrdsel kaugusel.

5.134. Leida y-teljel punkt, mis on võrdsel kaugusel tasanditest $x + y - z + 1 = 0$ ja $x - y + z - 5 = 0$.

5.135. Leida z-teljel punkt, mis on võrdsel kaugusel tasanditest $x + 4y - 3z - 2 = 0$ ja $5x + z + 8 = 0$.

5.136. Tasandi kaugused kolmest punktist A(6,1,-1), B(0,5,4) ja C(5,2,0) on vastavalt $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 0$. Leida selle tasandi võrrand.

5.137. Tetraeedrit piiravad reeperitasandid ja tasand $2x + 3y - 6z - 4 = 0$. Leida selle tetraeedri sees oleva sfääri keskpunkt.

5.138. Tetraeedri tahkudeks on reeperitasandid ja tasand $11x - 10y - 2z - 57 = 0$. Leida selle tetraeedri sisse joonestatud sfääri keskpunkt ja raadius.

5.139. On antud tetraeedri neli tippu: A(3,5,-1), B(7,5,3), C(9,-1,5), D(5,3,-3). Leida tetraeedri kõikidest tippudest võrdsel kaugusel asuvate tasandite võrrandid.

Punktid ühel või teisel pool antud tasandit.

5.140. On antud tasandid:

1) $5x - 3y + z - 18 = 0$; 2) $2x + 7y + 3z + 1 = 0$;

3) $x + 5y + 12z - 1 = 0$; 4) $2x - y + z + 11 = 0$;

5) $2x + 3y - 6z + 2 = 0$; 6) $3x - 2y + 2z - 7 = 0$.

Teha kindlaks, kas punkt $Q(2,-1,1)$ ja reeperi alguspunkt asuvad samal pool või teine teisel pool antud tasandit.

5.141. Leida punktide $A(-3,3,5)$, $B(0,-7,-4)$, $C(6,5,1)$, $D(-3,-5,2)$, $E(4,-7,10)$, $F(2,6,1)$ asendid tasandi $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ suhtes.

5.142. Tõestada, et tasand $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ lõikab punkte $A(3,-2,1)$ ja $B(-2,5,2)$ ühendavat lõiku.

5.143. Tõestada, et tasand $5x - 2y + z - 1 = 0$ ei lõika punkte $A(1,4,-3)$ ja $B(2,5,0)$ ühendavat lõiku.

5.144. Leida punkt, mis on sümmeetriline reeperi alguspunktiga tasandi $6x + 2y - 9z + 121 = 0$ suhtes.

5.145. Võrrand $2x - 6y + 3z - 42 = 0$ määrab peegli asendi. Millise punktiga ühtib punkti $A(3,-7,5)$ peegelkujutis?

5.146. Milline on tarvilik ja piisav tingimus, et punkt $X_0(x_0,y_0,z_0)$ asuks kahe, kuid mitte ristuva tasandi $A_kx + B_ky + C_kz + D_k = 0$, $k = 1,2$ vahelises teravnurgas?

5.147. Kas reeperi alguspunkt ja punkt $M(2,-1,3)$ asuvad järgmiste tasandite poolt moodustatud kahetahuliste nurkade suhtes samas, kõrvunurkades või tippnurkades:

1) $2x - y + 3z - 5 = 0$, $3x + 2y - z + 3 = 0$; 2) $2x + 3y - 5z - 15 = 0$, $5x - y - 3z - 7 = 0$;

3) $x + 5y - z + 1 = 0,$

$2x + 17y + z + 2 = 0.$

5.148. Kas punktid $M(2,-1,1)$ ja $N(1,2,-3)$ asuvad järgmiste tasandite poolt moodustatud kahetahuliste nurkade suhtes samas, kõrvunurkades või tippnurkades:

1) $3x - y + 2z - 3 = 0,$ $x - 2y - z + 4 = 0;$ 2) $2x - y + 5z - 1 = 0,$ $3x - 2y + 6z - 1 = 0.$

5.149. Teha kindlaks, kas reeperi alguspunkt asub tasandite $x - 2y + 3z - 5 = 0$, $2x - y - z + 3 = 0$ poolt moodustatud kahetahulises teravnurgas või nürinurgas.

5.150. Teha kindlaks, kas punkt $M(3,2,-1)$ asub tasandite $5x - y + z + 3 = 0$, $4x - 3y + 2z + 5 = 0$ poolt moodustatud kahetahulises teravnurgas või nürinurgas.

5.151. Leida tasandid, mis poolitavad lõikuvate tasandite $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1,2$ vahelised kahetahulised nurgad. Näidata, et otsitavad tasandid on risti.

5.152. Leida tasandid, mis poolitavad antud tasandite $\vec{x}\cdot\vec{n}_1 = p_1$ ja $\vec{x}\cdot\vec{n}_2 = p_2$ vahelised kahetahulised nurgad.

5.153. Leida tasandid, mis poolitavad tasandite $7x + y - 6 = 0$ ja $3x + 5y - 4z + 1 = 0$ vahelised nurgad.

5.154. On antud lõikuvate tasandite paarid

1) $x - 3y + 2z - 5 = 0,$ $3x - 2y - z + 3 = 0;$ 2) $5x - 5y - 2z - 3 = 0,$ $x + 7y - 2z + 1 = 0;$

3) $2x - y + 5z + 3 = 0,$ $2x - 10y + 4z - 2 = 0.$

Leida tasandite paaride poolt moodustatud kahetahulisi nurki poolitavate tasandite võrrandid.

5.155. Leida tasand, mis poolitab tasandite $2x - 14y + 6z - 1 = 0$, $3x + 5y - 5z + 3 = 0$ poolt moodustatud kahetahulise nurga, milles asub reeperi alguspunkt.

5.156. Tasandite $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, $x - z - 5 = 0$ vahelises nurgas asub reeperi alguspunkt. Leida selle nurgapoolitaja tasandi võrrand.

5.157. Kahe tasandi $3x + y - 2z + 4 = 0$, $x - 7y + 2z = 0$ vahelises nurgas asub punkt $E(1,1,1)$. Leida nende tasandite vahelise nurga koosinus.

5.158. Leida tasand, mis poolitab tasandite $2x - y + 2z - 3 = 0$, $3x + 2y - 6z - 1 = 0$ vahelise kahetahulise nurga, milles asetseb punkt $M(1,2,-3)$.

5.159. Leida yz-tasandi ja tasandi $3x - 4y + 6z - 2 = 0$ vahelist kahetahulist teravnurka poolitav tasand.

5.160. Leida tasand, mis poolitab tasandite $2x - 3y - 4z - 3 = 0$, $4x - 3y - 2z - 3 = 0$ poolt moodustatud kahetahulise teravnurga.

5.161. Leida tasand, mis poolitab tasandite $3x - 4y - z + 5 = 0$, $4x - 3y + z + 5 = 0$ poolt moodustatud kahetahulise nürinurga.

5.162. Kolm tasandit $A_kx + B_ky + C_kz + D_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, moodustavad prisma. Milline on tarvilik ja piisav tingimus, et punkt $M_0(x_0,y_0,z_0)$ asuks selle prisma sees?

5.163. On antud tetraeedri tahkude võrrandid ja punkt M oma koordinaatidega. Kuidas määrata, kas punkt M asub tetraeedri sees või mitte?

5.164. On antud viis punkti: $A(3,5,1)$, $B(2,7,4)$, $C(1, 0,-2), D(5,10,10), E(0,0,-5). Millised kaks punkti antud viiest tuleks ühendada lõiguga, et see lõik lõikaks ülejäänud kolmest punktist moodustatud kolmnurka?

§ 4. Tasandite vastastikused asendid. Tasandite kimp ja sidum

<u>Tasandikimp. Tasandite ebakimp.</u> Tasandikimbuks nimetatakse kõigi üht sirget - kimbu telge - läbivate tasandite hulka ruumis. Võrrand

$$\lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)=0, \quad (5.19)$$

kus λ ja μ on muutuvad parameetrid, mis ei ole korraga nullid (s.t. $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$), määrab tasandikimbu, mille teljeks on võrranditega

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

määratud tasandite lõikesirge (eeldusel, et tasandid lõikuvad, s.t. (5.11) ei kehti). Võrrandit (5.19) nimetatakse tasandikimbu üldvõrrandiks. Tasandeid $Ax + By + Cz + D = 0$ ja $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ nimetatakse võrrandiga (5.19) antud tasandikimbu <u>baasitasanditeks.</u> Tasandikimbu määravad iga kaks kimpu kuuluvat erinevat tasandit. Võrrandile (5.19) võib eeldusel $\lambda \neq 0$ anda kuju

$$Ax + By + Cz + D + k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)= 0,$$

kus $k = \frac{\mu}{\lambda}$. Sel puhul jääb kimbus saamata väärtusele

$\lambda = 0$ vastav tasand võrrandiga $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$. Kõik ülejäänud tasandid saadakse k väärtuse fikseerimisel. Seega tasand kimbus sõltub ühest parameetrist.

Kui võrrandi (5.19) puhul baasitasandid on paralleelsed (s.t. kehtib (5.11), kuid (5.12) ei kehti), siis määrab võrrand kõigi baasitasanditega paralleelsete tasandite hulga, mida nimetatakse tasandite ebakimbuks.

Kolme tasandi vastastikune asend.

5.165. Leida tarvilik ja piisav tingimus, et tasandid $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1,2,3$

1) lõikuksid ühes punktis;
2) läbiksid ühte sirget;
3) oleksid paralleelsed;
4) moodustaksid prisma, s.t. kahe tasandi lõikesirge oleks paralleelne kolmanda tasandiga;
5) kaks tasandit oleksid paralleelsed, kolmas aga lõikaks neid.

5.166. Tõestada, et kolm tasandit, mis on määratud võrranditega $Ax + By + Cz + D = 0$, $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + D_2 = 0$, kui $D_2 \neq \lambda D \neq \mu D_1$ ei oma ühiseid punkte.

5.167. Leida tasandikolmiku

1) $2x - 4y + 5z - 21 = 0$, $x - 3z + 18 = 0$, $6x + y + z - 30 =$ $= 0$;
2) $x + 2y - 3z = 0$, $3x + 6y - 9z + 10 = 0$, $2x + 4y - 6z -$

$- 1 = 0;$

3) $3x - y + 2z + 1 = 0$, $7x + 2y + z = 0$, $15x + 8y - z - 2 = 0$;

4) $5x - 2y + 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$, $8x - 2y + z + 7 = 0$;

5) $6x + 2y + 12z - 3 = 0$, $5y - 7z - 10 = 0$, $3x + y + 6z + 12 = 0$

vastastikune asend.

5.168. Teha kindlaks, kas kolmel tasandil $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ on ühine punkt ning arvutada selle punkti koordinaadid.

5.169. Leida tasandite lõikepunkt

1) $x + 3y + 5z = -8$, $2x - 4y + 7z = -27$, $5x + y - 3z = 16$;

2) $3x + 4y - 3z + 37 = 0$, $6x - 7y + 2z - 95 = 0$, $5x + 2y - 8z + 53 = 0$.

5.170. Leida kolme tasandi:

1) $5x + 8y - z - 7 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$,
$2x - 3y + 2z - 9 = 0$;

2) $x - 4y - 2z + 3 = 0$, $3x + y + z - 5 = 0$,
$-3x + 12y + 6z - 7 = 0$;

3) $2x - y + 5z - 4 = 0$, $5x + 2y - 13z + 23 = 0$,
$3x - z + 5 = 0$

lõikepunkt.

5.171. Teha kindlaks, millistel a ja b väärtustel tasandid $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$, $x + ay - 6z + 10 = 0$ 1) omavad ühist punkti; 2) läbivad üht sirget; 3) moodustavad prisma.

5.172. On antud kolm tasandit: $A_k x + B_k y + C_k z + D_k =$

$= 0$, $k = 1,2,3$. Leida nende tasandite lõikepunkti kaugus tasandist $A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0$.

5.173. Leida tasand, mis läbib kolme tasandi $x - y = 0$, $x + y - 2z + 1 = 0$, $2x + z - 4 = 0$ lõikepunkti ning

1) läbib y-telge;

2) on paralleelne xz-tasandiga;

3) läbib reeperi alguspunkti ja punkti (2,1,7).

5.174. On antud kolm tasandit: $2x + 3y - 4z + 5 = 0$, $2x - z + 3 = 0$, $x + y - z = 0$. Panna tasand läbi kahe tasandi lõikejoone nii, et selle tasandi lõikejoon kolmanda tasandiga oleks risti esimese ja teise tasandi lõikejoonega.

Tasandite kimp.

5.175. Teha kindlaks, kas tasand $4x - 8y + 17z - 8 = 0$ kuulub tasandite $\alpha(5x - y + 4z - 1) + \beta(2x + 2y - 3z + 2) = 0$ kimpu.

5.176. Teha kindlaks, kas tasand $5x - 9y - 2z + 12 = 0$ kuulub tasandite $\alpha(2x - 3y + z - 5) + \beta(x - 2y - z - 7) = 0$ kimpu.

5.177. Teha kindlaks, milline reeperitasanditest kuulub tasandite kimpu $4x - y + 2z - 6 + k(6x + 5y + 3z - 9) = 0$.

5.178. Teha kindlaks, millistel l ja m väärtustel tasand $5x + ly + 4z + m = 0$ kuulub tasandite $\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0$ kimpu.

5.179. Millistel parameetrite A ja D väärtustel tasandid $2x + y - z + 3 = 0$, $x - 3y + 5 = 0$ ja $Ax + y - 2z + D = 0$ kuuluvad ühte ja samasse kimpu?

5.180. Kontrollida, kas tasandid $3x - 4y + 5 = 0$, $x - 2z + 1 = 0$ ja $2y - 3z - 1 = 0$ kuuluvad samasse tasandite kimpu.

5.181. Leida tasand, mis läbib reeperi alguspunkti ning tasandite 1) $2x + 5y - 6z + 4 = 0$ ja $3y + 2z + 6 = 0$; 2) $4x - y + 3z - 1 = 0$ ja $x + 5y - z + 2 = 0$ lõikesirget.

5.182. Asetada läbi tasandite $\vec{x}\cdot\vec{a} = k$ ja $\vec{x}\cdot\vec{b} = l$ lõikesirge tasand, mis on risti tasandiga $\vec{x}\cdot\vec{c} = m$.

5.183. Panna läbi tasandite $4x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 5y - z + 2 = 0$ lõikesirge tasand, mis

1) läbib reeperi alguspunkti;

2) läbib punkti $(1,1,1)$;

3) on paralleelne y-teljega;

4) on risti tasandiga $2x - y + 5z - 3 = 0$.

5.184. Leida tasand, mis läbib tasandite $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$ lõikesirget ning

1) punkti $A(4,-2,-3)$;

2) on paralleelne x-teljega;

3) on paralleelne y-teljega;

4) on paralleelne z-teljega.

5.185. Panna läbi tasandite $6x - y + z = 0$, $5x + 3z - 10 = 0$ lõikesirge tasand, mis on paralleelne x-teljega.

5.186. Leida tasand, mis läbib tasandite $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ lõikesirget ning on paralleelne vektoriga $\vec{l} = (2,-1,-2)$.

5.187. Leida tasand, mis läbib tasandite $5x - 2y - z - 3 = 0$, $x + 3y - 2z + 5 = 0$ lõikesirget ning on paralleelne vektoriga $\vec{l} = (7,9,17)$.

5.188. Leida tasand, mis läbib tasandite $2x + y - z + 1 = 0$, $x + y + 2z + 1 = 0$ lõikesirget ning on paralleelne punkte $A(2,5,-3)$ ja $B(3,-2,2)$ ühendava lõiguga.

5.189. Leida tasand, mis läbib tasandite $2x - z = 0$, $x + y - z + 5 = 0$ lõikesirget ning on risti tasandiga $7x - y + 4z - 3 = 0$.

5.190. Leida tasand, mis läbib tasandite $3x - 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ lõikesirget ning on risti tasandiga $x - 2y + z + 5 = 0$.

5.191. Leida tasand, mis läbib sirget

$$\begin{cases} 5x - y - 2z - 3 = 0, \\ 3x - 2y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

ning on risti tasandiga $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

5.192. Leida tasanditega $3x + y - 2z - 6 = 0$, $x - 2y + 5z - 1 = 0$ määratud kimbus tasandid, mis on risti antud tasanditega.

5.193. Leida tasanditega $2x + y - 3z + 2 = 0$, $5x + 5y - 4z + 3 = 0$ määratud kimbust kaks teineteisega ristuvat tasandit, kusjuures üks läbib punkti $(4,-3,1)$.

5.194. Leida tasand, mis on risti tasandiga $5x - y + 3z - 2 = 0$ ning lõikub sellega mööda xy-tasandil asuvat sirget.

5.195. Leida kimbust $x + 3y - 5 + k(x - y - 2z + 4) =$

$= 0$ tasand, mille telglõigud x- ja y-telgedel on võrdsed.

5.196. Leida tasand, mis läbib tasandite $x + 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$ lõikesirget ning mille telglõigud y- ja z-telgedel on võrdsed.

5.197. Panna läbi tasandite $x + 5y + z = 0$ ja $x - z + 4 = 0$ lõikesirge tasand, mis moodustaks tasandiga $x - 4y - 8z + 12 = 0$ nurga $\frac{\pi}{4}$.

5.198. Leida tasandite kimpu $\alpha(x - 3y + 7z + 36) + \beta(2x + y - z - 15) = 0$ kuuluv tasand, mis on reeperi alguspunktist kaugusel $p = 3$.

5.199. Leida tasandite kimpu $\alpha(3x - 4y + z + 6) + \beta(2x - 3y + z + 2) = 0$ kuuluv tasand, mis asub punktidest $A(3,-4,-6)$, $B(1,2,2)$ võrdsel kaugusel.

5.200. Leida tasandite kimpu $\alpha(10x - 8y - 15z + 56) + \beta(4x + y + 3z - 1) = 0$ kuuluv tasand, mis asetseb punktist $C(3,-2,-3)$ kaugusel $d = 7$.

5.201. Leida tasandite kimpu $\alpha(4x + 13y - 2z - 60) + \beta(4x + 3y + 3z - 30) = 0$ kuuluv tasand, mis eraldab reeperinurgast Oxy kolmnurga, mille pindala on 6 ruutühikut.

5.202. Leida punkti $A(1,3,5)$ projektsioon tasandite $2x + y + z - 1 = 0$ ja $3x + y + 2z - 3 = 0$ lõikesirgel.

Neli tasandit. Tasandite sidum.

5.203. Milline on tarvilik ja piisav tingimus, et neli tasandit $A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$, $k = 1,2,3,4$ kuuluksid ühte sidumisse? Millistel tingimustel on tegemist sidumiga ja millistel ebasidumiga?

5.204. Leida tasandite $x + y - z + 2 = 0$, $4x - 3y + z - 1 = 0$, $2x + y - 5 = 0$ sidumist tasand, mis

1) läbib abstsisstelge;

2) on paralleelne xz-tasandiga;

3) läbib reeperi alguspunkti ning antud punkti $P(1,3,2)$.

5.205. Kontrollida, kas neljal tasandil

1) $5x - z + 3 = 0$, $2x - y - 4z + 5 = 0$, $3y + 2z - 1 = 0$, $3x + 4y + 5z - 3 = 0$;

2) $5x + 2y - 6 = 0$, $x + y - 3z = 0$, $2x - 3y + z + 8 = 0$, $3x + 2z - 1 = 0$

on ühine punkt.

Segaülesandeid.

5.206. Koostada reeperitasandite vektorvõrrandid.

5.207. Selgitada võrrandite 1) $\vec{r}\cdot\vec{j} = -5$; 2) $\vec{r}\cdot\vec{k} = 6$ geomeetriline tähendus.

5.208. Tõestada, et ruumi punktid, mis rahuldavad võrratust $|Ax + By + Cz + D| < d^2$, asuvad paralleelsete tasandite $Ax + By + Cz + D \pm d = 0$ vahel.

5.209. Tõestada, et ruumi punktid, mis rahuldavad võrratust $|x| + |y| + |z| < a$, asuvad oktaeedris, mille keskpunkt on reeperi alguspunktis ja tipud asuvad reeperiteljedel.

5.210. Leida tasandi $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ ja xz-tasandi lõikesirgel punktid, mis asuvad tasandist $2x + y - z +$

$+ 3 = 0$ kaugusel $\sqrt{6}$ ühikut.

5.211. Koostada tasandi võrrand, kui tasand läbib punkti $P(1,1,1)$ ja on risti tasanditega $x + y + z - 1 = 0$, $2x - y - z + 1 = 0$.

5.212. Leida reeperitasandite ja tasandiga $Ax + By + Cz + D = 0$ piiratud tetraeedri ruumala, kui $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$.

5.213. Näidata, et tetraeedri tippude $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ ja $P_4(x_4, y_4, z_4)$ kaudu tetraeedri ruumala avaldub valemiga

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix} .$$

5.214. Tetraeedri tipud on $A(2,1,0)$, $B(1,3,5)$, $C(6,3,4)$, $D(0,-7,8)$. Leida külgserva AB ning külgserva CD keskpunkti läbiva tasandi võrrand.

5.215. Arvutada reeperitasandite ja tasandi $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ poolt moodustatud tetraeedri sisemiste kahetahuliste nurkade koosinused.

5.216. Tetraeedri tahud on: 1) $2x - 2y + z + 2 = 0$, 2) $x + y + z - 5 = 0$, 3) $8x + 4y + z - 16 = 0$, 4) $4x + 3y = 0$. Leida selle tetraeedri sisemise kahetahulise nurga koosinus, mille servaks on kahe esimese tasandi lõikejoon.

5.217. Tetraeedri tahkude võrrandid on: 1) $x + 2y - 3z - 6 = 0$, 2) $2y + 5z - 4 = 0$, 3) $3x + z + 1 = 0$, 4) $x + 2y = 0$. Leida tasand, mis läbib kahe esimese tahuga määratud serva ning on paralleelne tetraeedri vastasservaga.

5.218. Tetraeedri tahkude võrrandid on: 1) $x + 2y +$

$+ z + 2 = 0$, 2) $x + y - 1 = 0$, 3) $x - y - z = 0$, 4) $3x + z + 1 = 0$. Leida tasand, mis läbib kahe esimese tahuga määratud külgserva ning kahe ülejäänud tahuga määratud külgserva keskpunkti.

5.219. Kolm tasandit $A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$, $k = 1,2,3$ moodustavad prisma. Milline on tarvilik ja piisav tingimus, et selle prisma sisemised kahetahulised nurgad oleksid teravnurgad?

5.220. Kontrollida, kas kolm tasandit $11x + 10y + 2z = 0$, $3x + 4y = 0$, $x - y + z - 1 = 0$ moodustavad prisma, ja arvutada kahe esimese tasandi poolt moodustatud sisemise kahetahulise nurga koosinus.

5.221. Näidata, et kolm tasandit $x + 2y - z - 4 = 0$, $3x - 2y + 3z - 6 = 0$, $4y - 3z + 3 = 0$ moodustavad prisma. Leida tasand, mis läbib prisma kahe esimese tahu lõikejoont ning on paralleelne kolmanda tahuga.

5.222. Tõestada, et rööptahukas, mille tahud asuvad tasanditel $7x - 11y + 9z - 14 = 0$, $4x + 5y + 3z + 6 = 0$, $78x - 15y - 79z + 3 = 0$, on risttahukas.

5.223. Tasand on määratud võrrandiga $Ax + By + Cz + D = 0$. Koostada antud tasandiga sümmeetrilise tasandi võrrand xy-tasandi suhtes.

5.224. Tõestada, et tasandil $z = ax + by + c$ asuva kujundi F pindala ja tema projektsiooni $\bar{F}$ pindala xy-tasandil on seotud võrdusega

$$S(F) = \sqrt{1 + a^2 + b^2}\, S(\bar{F}) .$$

5.225. On antud kohavektorid $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{r}_2$, $\overrightarrow{OC} =$

$= \vec{r}_3$, kusjuures $\vec{r}_2$ ja $\vec{r}_3$ on mittekollineaarsed. Punktist A on tõmmatud ristsirge AM tasandile OBC. Leida punkti M kohavektor $\vec{OM} = \vec{x}$.

5.226. Selgitada antud tasandite asendite iseärasused:

1) $\vec{x}(A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}) = 0$;

2) $\vec{x}(A\vec{i} + B\vec{j}) = D$;

3) $\vec{x}(B\vec{j} + C\vec{k}) = 0$;

4) $\vec{x}(C\vec{k}) = D$;

5) $\vec{x}(A\vec{i}) = 0$.

5.227. Kirjutada antud tasandi $11x - 7y - 9z + 15 = 0$ vektorvõrrand.

5.228. Määrata antud tasandi

1) $\vec{x}(A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}) = D$;

2) $\vec{x} \cdot \vec{a} = D$

telglõigud.

5.229. Koostada tasandi vektorvõrrand, kui tasand läbib punkti $A(5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$ ja tasandi telglõigud on võrdsed ja positiivsed.

5.230. Koostada antud kolme punkti läbiva tasandi vektorvõrrand

1) $O(0,0,0)$, $A(5\vec{i} + \vec{k})$, $B(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k})$;

2) $A(\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k})$, $B(5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k})$, $C(2\vec{i} + 3\vec{k})$.

5.231. Koostada tasandi vektorvõrrand, kui tasand läbib punkti $A(5\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k})$ ja

1) on paralleelne xy-tasandiga;

2) on paralleelne tasandiga $\vec{x}(3\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k}) = 3$;

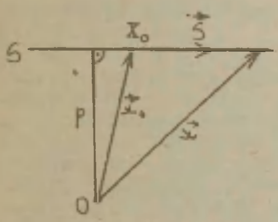
3) läbib x-telge.

VI peatükk

SIRGE JA TASAND RUUMIS

§ 1. Sirge ruumis

1. Sirge võrrandid. Sirge on ruumis täielikult määratud, kui on teada tema üks punkt $X_0(\vec{x}_0)$ ja sihivektor $\vec{s}$.[1]



Joon. 6.1.

Ruumi punkt $X(\vec{x})$ asub sirgel parajasti siis, kui (vt. joon. 6.1.) $\overrightarrow{X_0X} \parallel \vec{s}$, s. t. $\vec{x} - \vec{x}_0 \parallel \vec{s}$ ehk

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{s} \qquad (6.1)$$

Võrrand (6.1) on sirge vektorvõrrand.

Tähistame vaadeldud vektorite koordinaadid järgmiselt: $\vec{s} = (l,m,n)$, $\vec{x}_0 = (x_0,y_0,z_0)$, $\vec{x} = (x,y,z)$. Vektorite kollineaarsuse tingimusest saame võrrandid koordinaatides, nn. sirge kanoonilised võrrandid.[2]

---

[1] Praktiliste arvutuste jaoks valitakse sirge sihivektoriks sirgega kollineaarsete vektorite hulgast kõige lihtsamate koordinaatidega vektor. Sihivektori suund ja pikkus on ebaolulised.

[2] Tasandilisel juhul võrrandites (6.2-3) viimane seos on määramata ja saame juba varem tuntud kujud.

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \qquad (6.2)$$

Võrrandist (6.1) saame sirge <u>parameetrilised võrrandid</u>

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn, \end{cases} \qquad (6.3)$$

mis tekivad ka kanoonilistest võrranditest, kui neis ühine suhe tähistada tähega t. Kui esimesest võrrandist (6.3) avaldada t (seda saab teha, kui $l \neq 0$) ja asendada ülejäänutesse, saame sirge <u>taandatud võrrandid</u>

$$\begin{cases} y = ax + p, \\ z = bx + q, \end{cases} \qquad (6.4)$$

mis tekivad ka y ja z avaldamisel võrrandeist (6.2).

Sirge võib ruumis määrata ka kahe erineva punktiga $X_1(x_1,y_1,z_1)$ ja $X_2(x_2,y_2,z_2)$, $X_1 \neq X_2$. Sel korral on vektor $\overrightarrow{X_1 X_2}$ kollineaarne sirge sihivektoriga $\vec{s}$. Tekivad sirge <u>võrrandid kahe punkti kaudu:</u>

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (6.5)$$

Sirge võib esitada ka kahe tasandi lõikejoonena

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (6.6)$$

Võrrandeid (6.6) nimetatakse <u>sirge üldvõrrandeiks ruumis</u>. Üleminekuks võrranditelt (6.6) kanoonilistele võrranditele arutleme järgmiselt. Sirge s asetseb esimesel tasandil, järelikult sirge sihivektor $\vec{s}$ on risti esimese tasandi normaalvektoriga $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$. Sirge asetseb ka teisel tasandil, ja järelikult ta sihivektor $\vec{s}$ on risti teise tasandi normaalvektoriga $\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$. Järelikult $\vec{s} \parallel \vec{n_1} \times \vec{n_2}$. Seega on leitud sirge sihivektori koordinaadid ja kanoonilise võrrandi lõplikuks väljakirjutamiseks piisab ainult ühe sirge suvalise punkti (süsteemi ühe erilahendi) leidmisest. Sirge sihivektori leidmiseks piisab ka sirge kahe erineva punkti leidmisest.

Nurki α, β, γ, mis sirge sihivektor $\vec{s}$ moodustab reeperitelgedega, nimetatakse <u>sirge sihinurkadeks</u>. Kui $\vec{s}$ asemele võtta sihivektor $-\vec{s}$, siis α, β, γ asemele tulevad $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$. Suurusi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nimetatakse vektori $\vec{s}$ abil suunatud sirge <u>suunakoosinusteks</u>, kui nad aga on määratud kordaja ± 1 täpsusega, siis ka sirge <u>sihikoosinusteks</u>. Nad on sirge sihiühikvektori koordinaatideks:

$$\vec{s_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \tag{6.7}$$

ning on seetõttu võrdelised sirge suvalise sihivektori koordinaatidega:

$$\frac{\cos\alpha}{l} = \frac{\cos\beta}{m} = \frac{\cos\gamma}{n}. \tag{6.8}$$

Seega kehtivad seosed

$$\cos\alpha = \mu l, \ \cos\beta = \mu m, \ \cos\gamma = \mu n,$$

kus tegurit

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \tag{6.9}$$

nimetatakse <u>normeerivaks teguriks</u>. Normeeriv tegur on võrdne sirge sihivektori mooduli pöördväärtusega.

2. <u>Sirge normaalvõrrand</u>. Olgu sirge $\vec{s}$ ruumis määratud punktiga $M_0(\vec{x}_0)$ ja sihivektoriga $\vec{s}$ (vt. joon. 6.1). Sel korral omab sirge võrrand kuju $(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{s} = 0$ ehk

$$\vec{x} \times \vec{s} = \vec{p}, \tag{6.10}$$

kus $\vec{p} = \vec{x}_0 \times \vec{s}$. Siin vektor $\vec{p}$ on risti tasandiga, mis läbib antud sirget ja reeperi alguspunkti (poolust). Kui $\vec{p} = 0$, siis sirge läbib poolust. Vastupidi, iga võrrand (6.10), kus muutuva vektori $\vec{x}$ vektorkorrutis antud vektoriga $\vec{s} \neq 0$ on võrdne teise antud vektoriga $\vec{p}$ ja $\vec{s} \perp \vec{p}$, määrab sirge ruumis. Erijuhul, kui sirge sihivektor on ühikvektor $|\vec{s}_0| = 1$, saame võrrandi

$$\vec{x} \times \vec{s}_0 - \vec{p} = 0, \tag{6.11}$$

kus <u>vabaliikme moodul p on võrdne sirge kaugusega p reeperi alguspunktist</u>. Võrrandit (6.11) nimetatakse sirge <u>normaalvõrrandiks</u> ruumis. Selleks et teisendada võrrandit (6.10) normaalkujule, on piisav korrutada võrrandit normeeriva teguriga (6.9) ja viia vabaliige vasakule

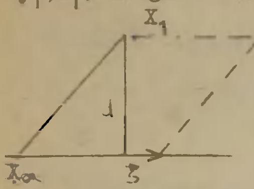
$$\vec{x} \times \frac{\vec{s}}{s} - \frac{\vec{p}}{s} = 0. \tag{6.10'}$$

Koordinaatides annab sirge normaalvõrrand ruumis järgmised võrrandid:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}, \tag{6.12}$$

kus x_0, y_0, z_0 on sellise vektori $\vec{x}_0$ koordinaadid, nii et $\vec{p} = \vec{x}_0 \times \vec{s}_0$. Seega sirge normaalvõrrandist ruumis tulenevad sirge kanoonilised võrrandid, kus nimetajaks on ühikvektori koordinaadid.

3. <u>Punkti kaugus sirgest</u>. Olgu sirge s määratud punktiga $X_0(x_0, y_0, z_0)$ ja sihivektoriga $\vec{s} = (l, m, n)$. Punkti $X_1(x_1, y_1, z_1)$ kauguse d antud sirgest s võib leida kui vektoritele $\vec{s}$ ja $\overrightarrow{X_0X_1}$ ehitatud rööpküliku kõrguse (vt. joon. 6.2.). Seega



Joon. 6.2.

$$d = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{X_0X_1}|}{|\vec{s}|} . \tag{6.13}$$

4. <u>Kahe sirge vaheline nurk</u>. Kahe sirge vaheliseks nurgaks nimetatakse sirgete sihivektorite vahelist nurka. Olgu sirged määratud kanooniliste võrranditega

$$s_i: \quad \frac{x - x_i}{l_i} = \frac{y - y_i}{m_i} = \frac{z - z_i}{n_i} \quad (i = 1, 2), \tag{6.14}$$

siis sirgetevaheline nurk φ avaldub valemiga:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} . \tag{6.15}$$

Kui $\vec{s}_i = (l_i, m_i, n_i)$, siis ristreeperi korral võib kahe sirge vahelise nurga arvutamise valemi (6.15) esitada kujul

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} . \tag{6.15'}$$

Kaks sirget s_1 ja s_2 on <u>paralleelsed</u>, kui $\vec{s}_1 \| \vec{s}_2$ ehk koordinaatides

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} . \tag{6.16}$$

Kaks sirget on <u>risti</u>, kui sihivektorid on risti: $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$, s. t.

$$\vec{s}_1 \vec{s}_2 = 0 . \qquad (6.17)$$

Viimane seos ristreeperi korral omab kuju[1]

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \qquad (6.17')$$

5. <u>Kahe sirge vastastikused asendid ruumis</u>. Kahel sirgel on ruumis järgmised vastastikused asendid:

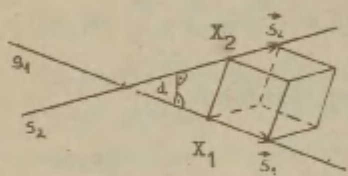
1) sirged asetsevad ühel tasandil;

   a) sirged lõikuvad;

   b) sirged on paralleelsed;

2) sirged ei asetse ühel tasandil - kiivsirged.

Olgu sirged s_1 ja s_2 määratud kanooniliste võrranditega (6.14). Kanoonilistest võrranditest on vahetult teada sirgete sihivektorid $\vec{s}_1$ ja $\vec{s}_2$ ning kummalgi sirgel üks punkt $X_1 \in s_1$ ja $X_2 \in s_2$ (vt. joon. 6.3.)



Joon. 6.3.

1) Kui sirged s_1 ja s_2 asetsevad ühel tasandil, siis vektorid $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\overrightarrow{X_1X_2}$ on komplanaarsed (s. t. segakorrutis on võrdne nulliga)

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{X_1X_2}) = 0 \qquad (6.18)$$

a) sirged lõikuvad, kui $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$;

b) sirged on paralleelsed, kui $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$;

2) Kiivsirgete korral vektorid $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ ja $\overrightarrow{M_1M_2}$ ei ole

---

[1]Seosed (6.15 - 17) kehtivad afiinse reeperi korral, seos (6.15') ja (6.17') aga ainult ristreeperi korral.

komplanaarsed, s. t.

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{X_1X_2}) \neq 0. \qquad (6.19)$$

Kahe kiivsirge s_1 ja s_2 vahelise kauguse d võib arvutada kui vektoritele $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ ja $\overrightarrow{M_1M_2}$ ehitatud rööptahuka kõrguse, kui rööptahuka põhjaks võtta vektoritele $\vec{s}_1$ ja $\vec{s}_2$ ehitatud rööpkülik (vt. joon. 6.3.). Seega

$$d = \frac{V}{S} = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{X_1X_2})|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}. \qquad (6.20)$$

Kahe kiivsirge ühise ristsirge sihivektor $\vec{r}$ on risti antud sirgete sihivektoritega $\vec{s}_1$ ja $\vec{s}_2$. Järelikult $\vec{r} \parallel \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$. Ühise ristsirge võrrandeid on lihtne leida kahe tasandi π_1 ja π_2 lõikejoonena (vt. joon. 6.3.), kusjuures π_1 on tasand, mis läbib sirget s_1 ja on kollineaarne vektoriga $\vec{r}$

$$\pi_1: \quad (\overrightarrow{X_1X}, \vec{s}_1, \vec{r}) = 0, \qquad (6.21)$$

ja π_2 on tasand, mis läbib sirget s_2 ja on kollineaarne vektoriga $\vec{r}$

$$\pi_2: \quad (\overrightarrow{X_2X}, \vec{s}_2, \vec{r}) = 0.$$

Seega kahe kiivsirge ühise ristsirge r võrrandiks on

$$r: \quad \begin{cases} (\overrightarrow{X_1X}, \vec{s}_1, \vec{r}) = 0, \\ (\overrightarrow{X_2X}, \vec{s}_2, \vec{r}) = 0. \end{cases}$$

Sirge läbi kahe punkti.

6.1. Koostada sirge võrrand, kui sirge läbib reeperi alguspunkti ja punkti $A(x_0, y_0, z_0)$.

6.2. Koostada sirge võrrand, kui sirge läbib kahte antud punkti $A(\vec{x}_1)$ ja $B(\vec{x}_2)$.

6.3. On antud kolmnurga tipud A(0,2,1), B(5,-1,4), C(3,0,-1). Koostada kolmnurga külgede võrrandid.

6.4. Koostada tetraeedri servade võrrandid, kui tetraeedri tipud on A(0,0,2), B(4,0,5), C(5,3,0), D(-1,4,-2).

6.5. Kontrollida, kas kolm antud punkti A(3,0,1), B(0,2,4), $C(1,1\frac{1}{3},3)$ asetsevad ühel sirgel.

6.6. Tõestada, et kolme punkti $A(\vec{x}_1)$, $B(\vec{x}_2)$, $C(\vec{x}_3)$ kollineaarsuse tingimuse võib esitada kujul

$$\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 + \vec{x}_2 \times \vec{x}_3 + \vec{x}_3 \times \vec{x}_1 = 0.$$

6.7. Sirge läbib punkte A(-6,6,-5) ja B(12,-6,1). Leida sirge jäljed.[1]

6.8. Sirge kaks jälge on $A(x_1,y_1,0)$ ja $B(x_2,0,z_2)$. Leida sirge kolmas jälg.

6.9. Sirge läbib punkte A(1,2,-1) ja B(-1,2,1). Leida sellel sirgel punkt P nõnda, et AP : BP = 2.

Sirge eriasendid reeperitelgede suhtes.

6.10. Milliseid tingimusi peavad rahuldama sirge võrrandite $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$

---

[1]Sirge jälgedeks nimetatakse sirge lõikepunkte reeperitasanditega.

kordajad, selleks et sirge

1) oleks paralleelne x-teljega;

2) lõikaks y-telge;

3) ühtiks z-teljega;

4) oleks paralleelne yz-tasandiga;

5) asetuks xz-tasandil;

6) läbiks koordinaatide alguspunkti.

6.11. Näidata järgmiste sirgete asendite iseärasused reeperitelgede suhtes.

1) $\begin{cases} Ax + By + Cz = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} Ax + D = 0, \\ B_1y + D_1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ B_1x + D_1 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} By + Cz + D = 0, \\ B_1y + C_1z + D_1 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} Ax + Cz = 0, \\ A_1x + C_1z = 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3y + 2z = 0, \\ 5x - 1 = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x + y - 3z - 7 = 0, \\ 2x + y - 3z - 7 = 0. \end{cases}$

6.12. Millise vabaliikme väärtuse D korral sirge

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0, \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$$

lõikab z-telge?

6.13. Milliste B ja D väärtuste korral sirge

$$\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0, \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$$

asetseb xy-tasandil?

6.14. Anda sirge vektorvõrrandi üldkuju, kui sirge lõikab 1) x-telge; 2) x- ja y-telge; 3) kõiki kolme telge.

Sirge sihivektor. Sirge kanooniline võrrand.

6.15. Koostada sirge võrrand, kui sirge läbib punkti A(1,-5,3) ja moodustab reeperitelgedega vastavalt nurgad 60°, 45° ja 120°.

6.16. Määrata järgmiste sirgete sihikoosinused:

1) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{12}$;

2) $\frac{x}{12} = \frac{y-7}{9} = \frac{z+3}{20}$;

3) $\begin{cases} 5x - 6y + 2z + 21 = 0, \\ x - z + 3 = 0. \end{cases}$

6.17. Koostada kahte antud punkti läbiva sirge kanooniline võrrand: 1) (1,-2,1), (3,1,-1); 2) (3,-1,0), (1,0,-3); 3) (0,-2,3), (3,-2,1); 4) (1,2,-4), (-1,2,-4).

6.18. Koostada sirge kanooniline võrrand, kui sirge läbib punkti M(2,0,-3) ja on paralleelne 1) vektoriga $\vec{a} = (2,-3,5)$; 2) sirgega $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$; 3) x-teljega; 4) y-teljega; 5) z-teljega.

6.19. Kolmnurga tipud on

1) A(3,-1,-1), B(1,2,-7), C(-5,14,-3);

2) A(5,2,-7), B(2,-1,-3), C(-7,11,6).

Koostada kolmnurga tipust B tõmmatud sisenurga poolitaja kanooniline võrrand.

6.20. Tõestada, et võrrand $(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{s} = 0$ määrab sirge, mis läbib punkti $X_0(\vec{x}_0)$ paralleelselt vektoriga $\vec{s}$.

6.21. Teisendada üldine vektorvõrrand

$\bar{x} \; (l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}) = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ kanoonilisse kujju (6.2).

6.22. Anda üleminek sirge kanoonilistelt võrranditelt (6.2) vektorvõrrandile (6.11).

6.23. Sirge kanoonilised võrrandid on

$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+5}{2}$. Koostada sirge vektorvõrrand.

6.24. Sirge on määratud vektorvõrrandiga

1) $\vec{x} \times (4\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}) = 0$;

2) $(\vec{x} - 3\vec{j} + 2\vec{k}) \; (2\vec{i} + 7\vec{k}) = 0$;

3) $\vec{x} \times (2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}) = 3\vec{i} + 2\vec{k}$.

Leida sirge kanoonilised võrrandid.

Sirge parameetrilised võrrandid.

6.25. Koostada sirge parameetrilised võrrandid, kui sirge läbib kahte antud punkti: 1) (3,-1,2), (2,1,1); 2) (1, 1,-2), (3,-1,0); 3) (0,0,1), (0,1,-2).

6.26. Koostada sirge parameetrilised võrrandid, kui sirge läbib punkti M(1,-1,-3) ja on paralleelne:

1) vektoriga $\vec{a} = (2,-3,4)$;

2) sirgega $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{0}$;

3) sirgega $x = 3t - 1$, $y = -2t + 3$, $z = 5t + 2$.

6.27. On antud kolmnurga tipud A(3,6,-7), B(-5,2,3), C(4,-7,-2). Koostada tippu C läbiva mediaani parameetrilised võrrandid.

6.28. On antud kolmnurga tipud A(1,-2,-4), B(3,1,-3) ja C(5,1,-7). Koostada tippu B läbiva kõrguse parameetrilised võrrandid.

Sirge kahe tasandi lõikejoonena.

6.29. Määrata sirge

1) $\begin{cases} 2x - 5y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z + 2 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0, \\ 3x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$ sihivektor.

6.30. Teisendada antud sirgete võrrandid kanoonilisse kujju: 1) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x - y - 2z - 3 = 0. \end{cases}$

6.31. Koostada järgmiste sirgete parameetrilised võrrandid.

1) $\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$

6.32. Leida sirge $\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ jäljed.

Teha joonis.

6.33. Koostada võrrandid sirgetele, mis tekivad tasandi $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ lõikumisel reeperitasanditega.

6.34. Koostada tasandi $3x - y - 7z + 9 = 0$ ja x-telge ning punkti $E(3,2,-5)$ läbiva tasandi lõikesirge võrrandid.

6.35. Leida seosed, mida peavad rahuldama sirge võrrandite $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ kordajad, et sirge lõikaks 1) abstsisstelge, 2) ordinaatelge, 3) aplikaattelge; ühtiks 4) abstsissteljega, 5) ordinaatteljega, 6) aplikaatteljega; oleks paralleelne 7) abstsissteljega, 8) ordinaatteljega, 9) aplikaatteljega.

6.36. Määrata, millise D väärtuse korral sirge
$$\begin{matrix} 2x + 3y - z + D = 0, \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{matrix}$$
lõikab 1) x-telge; 2) y-telge; 3) z-telge.

6.37. Tõestada, et sirge $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 6 = 0, \\ x + 5y - 7z + 10 = 0 \end{cases}$ lõikab y-telge.

6.38. Koostada sirge kanooniline võrrand, kui sirge läbib punkti $M(2,3,-5)$ ja on paralleelne sirgega
$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

6.39. Sirge on määratud kahe tasandi lõikejoonena

1) $\vec{x}(\vec{i} + 3\vec{j}) = 5,$ $\vec{x}(\vec{j} - 2\vec{k}) = 2;$ 2) $\vec{x}(5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) = 1,$ $\vec{x}(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 4.$

Koostada sirge vektorvõrrand.

6.40. On antud sirge vektorvõrrandiga $\vec{x} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} + \lambda(4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$. Leida sirge 1) üldine vektorvõrrand (6.11); 2) parameetrilised võrrandid; 3) kanoonilised võrrandid.

Punkti kaugus sirgest.

6.41. Veenduda, et punkti $X_1(\vec{x}_1)$ kauguse sirgest $(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{s} = 0$ võib arvutada järgmise valemi abil:

$$d = \frac{|(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

6.42. Avaldada punkti $X_1(\vec{x}_1)$ kaugus d sirgest $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$. Anda valem d jaoks ka koordinaatides, kui $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja $\vec{a} = (l, m, n)$.

6.43. Tuletada valem punkti $A(x_1, y_1, z_1)$ kauguse arvutamiseks sirgest $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$.

6.44. Arvutada punkti kaugus sirgest:

1) $P(7,9,7)$, $\quad p: \frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z}{2}$;

2) $Q(1,3,5)$, $\quad q: \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ 3x + y + 2z - 3 = 0; \end{cases}$

3) $R(1,2,5)$, $\quad r: x = t,\ y = -2t + 1,\ z = t + 3$;

4) $S(1,2,5)$, $\quad s: \begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ 4x - 2z + 3 = 0; \end{cases}$

5) $T(1,2,3)$, $\quad t: \begin{cases} x - y - z = 1, \\ 2x + z = 3. \end{cases}$

6.45. Leida pooluse (reeperi alguspunkti) kaugus sirgest: 1) $\vec{x} \times (\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{k}) = 4\vec{i} + 12\vec{j} + 3\vec{k}$;

2) $\vec{x} \times (2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$;

3) $\vec{x} \times (7\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}) = 0$.

6.46. Arvutada punkti kaugus sirgest:

1) $A(4,3,10)$, $\quad \vec{x} \times (2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}) = -2\vec{i} + \vec{j}$;

2) $B(5,-6,8)$, x-teljest;

3) $C(12,5,0)$, $\vec{x} \times (\vec{j} + 2\vec{k}) = 0$.

6.47. Leida sirgel $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}$ punkt, mis on lähim punktile $P(3,2,6)$.

6.48. Leida punktiga $P(4,3,10)$ sirge $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$ suhtes sümmeetriline punkt.

Kahe sirge vastastikune asend ruumis.

6.49. Määrata antud sirgete $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$ ja $\vec{x} \times \vec{a} = -\vec{b}$ vastastikune asend ja kirjeldada sirgete asendeid pooluse suhtes.

6.50. Tõestada, et kui sirged a ja b, mis on antud võrranditega a: $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1,2$,

b: $A_kx + B_ky + C_kz + D_k = 0$, $k = 3,4$,

lõikuvad, siis
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

6.51. Milliseid tingimusi peavad rahuldama eelmises ülesandes antud sirgete a ja b võrrandite kordajad selleks, et sirged oleksid 1) paralleelsed, 2) ristuvad?

6.52. Määrata kahe antud sirge vastastikune asend:

1) $\begin{cases} x = 5z - 2, \\ y = -z + 3, \end{cases}$ ja $\begin{cases} x = 4z + 7, \\ y = 2z - 24; \end{cases}$

2) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{0}$ ja $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{1}$;

3) $\begin{cases} 4x - y - 2z - 1 = 0, \\ x - 3y + 5z - 5 = 0, \end{cases}$ ja $\begin{cases} 2x + y + z - 3 = 0, \\ 7x - 2y - 8z + 6 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0, \\ 3x - z - 6 = 0, \end{cases}$ ja $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 3y - 2z - 13 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x - 3y + 2 = 0, \\ x - 3z - 14 = 0, \end{cases}$ ja $\begin{cases} x - 3z - 14 = 0, \\ y - 5z - 24 = 0. \end{cases}$

6.53. Kirjeldada sirgete asendite iseärasusi reeperitelgede suhtes:

1) $\vec{x} \times \alpha\vec{i} = \vec{b}$;
2) $\vec{x} \times \beta\vec{j} = \vec{b}$;
3) $\vec{x} \times \gamma\vec{k} = \vec{b}$;
4) $\vec{x} \times (\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}) = \vec{b}$;
5) $\vec{x} \times (\beta\vec{j} + \gamma\vec{k}) = \vec{b}$;
6) $\vec{x} \times (\alpha\vec{i} + \gamma\vec{k}) = \vec{b}$;
7) $\vec{x} \times \vec{a} = \alpha\vec{i}$;
8) $\vec{x} \times \vec{a} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$.

6.54. Kontrollida, kas antud sirged lõikuvad:

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$ ja $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$;

2) $\begin{cases} 4x + z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ ja $\begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0, \\ y + 2z - 8 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 3t - 2, \\ z = -4t + 6 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x = \tau + 5, \\ y = -4\tau - 1, \\ z = \tau - 4. \end{cases}$

6.55. Kontrollida, kas sirged lõikuvad, ja kui lõikuvad, siis leida lõikepunkt:

1) $\vec{x} \times (3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) = -8\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$,
$\vec{x} \times (2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}) = 2\vec{i} + \vec{j} + 9\vec{k}$;

2) $\vec{x} \times (2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) = 23\vec{i} + 6\vec{j} - 13\vec{k}$,
$\vec{x} \times (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = -\vec{i} - 6\vec{j} - 9\vec{k}$.

6.56. Missuguse D väärtuse puhul sirge

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$$ lõikab z-telge?

6.57. Millise l väärtuse korral antud sirged

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$ lõikuvad?

6.58. Tõestada, et antud sirged on paralleelsed:

1) $$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = t - 7 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3z - 9 = 0. \end{cases}$$

6.59. Tõestada, et antud sirged on risti:

1) $$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -6t + 1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

6.60. Kas antud sirged

$$\begin{cases} 5x - 7y + 2z - 1 = 0 \\ 7x + 3y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z - 1 = 0 \\ 4x + 2y + z + 7 = 0 \end{cases}$$

on risti, paralleelsed või lõikuvad?

6.61. Leida antud sirgete $\vec{x} \times (l_i\vec{i} + m_i\vec{j} + n_i\vec{k}) = \vec{a}_i$, $i = 1,2$ paralleelsuse ja ristumise tingimused.

6.62. Leida sirge, mis läbib punkti A ja on paralleelne 1) z-teljega;

2) sirgega $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9}$;

3) sirgega $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

6.63. Koostada punkti Q(2,1,-3) läbiva ja sirgega $\vec{x} \times (4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) = 7\vec{i} - 9\vec{j} - \vec{k}$ paralleelse sirge võrrand.

6.64. Kontrollida, kas antud sirged on paralleelsed, ja kui on, siis leida sirgetevaheline kaugus:

1) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$, $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$;

2) $\begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t, \\ z = -2t - 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2x + z + 2 = 0; \end{cases}$

3) $\vec{x} \times (2\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}) = 3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$,

$\vec{x} \times (5\vec{i} + 15\vec{j} - 10\vec{k}) = 5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

6.65. Leida punktist P(0,-1,1) sirgele $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x + 2z - 7 = 0 \end{cases}$ tõmmatud ristlõigu pikkus ja selle sirge võrrand, millel ristlõik asetseb.

6.66. Koostada punktist A(2,3,1) antud sirgele $\vec{x} \times (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = 2\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}$ langetatud ristsirge võrrand.

6.67. Leida reeperi alguspunkti projektsioon sirgel $\vec{x} \times (\vec{j} - 3\vec{k}) = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$.

6.68. Koostada punkti $A(\vec{x}_0)$ läbiva sirge võrrand, kui sirge on risti vektoritega $\vec{a}_1$ ja $\vec{a}_2$.

6.69. Leida sirge, mis läbib punkti M(-1,2,-3), on risti vektoriga $\vec{a} = (6,-2,-3)$ ja lõikab sirget $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

<u>6.70.</u> Vektor viib alguspunktist võrrandiga $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$ antud sirge punkti, olles risti sirgega. Leida see vektor. Vaadelda lisaks üldjuhule ka juhtu, kui $\vec{a} = 11\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 16\vec{j} + \vec{k}$.

<u>6.71.</u> Leida alguspunktist antud sirgele $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$ langetatud ristsirge võrrand. Lahendada ülesanne ka erijuhul, kui $\vec{a} = (2,1,-3)$, $\vec{b} = (5,2,4)$.

<u>6.72.</u> Tasandi $3x - y + 4z - 12 = 0$ lõikumisel reeperitasanditega tekib kolmnurk. Koostada z-teljel asetsevat tippu läbiva kõrguse võrrandid ja leida kõrguslõigu pikkus

<u>6.73.</u> Leida kolmnurga kõrguste võrrandid, kui kolmnurga tipud on $A(2,0,0)$, $B(4,1,-2)$ ja $C(-2,3,-5)$.

<u>6.74.</u> xz-tasandil leida sirge, mis läbib reeperi alguspunkti ja on risti sirgega $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

<u>6.75.</u> Koostada sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $A(1,2,5)$ ja on risti kahe antud sirgega : $\vec{x} \times (3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{x} \times (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$.

<u>6.76.</u> Koostada sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P(1,2,3)$ ja lõikab z-telge ning on risti sirgega $x = y = z$.

<u>6.77.</u> Koostada sirge võrrand, kui sirge läbib punkti A, on risti sirgega a ja lõikab sirget b.

1) $A(1,1,1)$, a: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$, b: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$;

2) $A(0,-1,1)$, a: $\begin{cases} y - 1 = 0, \\ x + 2z - 7 = 0, \end{cases}$ b: $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases}$

6.78. Leida antud punkti läbiv antud sirget ortogonaalselt lõikav sirge.

1) $A(2,3,1)$, $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$;

2) $O(0,0,0)$, $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$;

3) $P(1,1,1)$, $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$

6.79. Tõestada, et iga sirge, mis lõikab antud sirgeid

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0,$$
$$a'_i x + b'_i y + c'_i z + d'_i = 0, \quad i = 1,2,$$

võib määrata võrrandisüsteemiga

$$\lambda_i(a_i x + b_i y + c_i z + d_i) + \lambda'_i(a'_i x + b'_i y + c'_i z + d'_i) = 0, \quad i = 1,2.$$

6.80. Antud sirgeid $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$ ja $\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$ lõikavate sirgete hulgast valida välja sirge, mis on paralleelne sirgega $\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}$.

6.81. Leida sirge, mis on paralleelne sirgega $\begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$ ja lõikab kahte antud sirget $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 4t, \end{cases}$ ning $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -1, \\ z = 4 - t. \end{cases}$

6.82. Leida sirge, mis läbib reeperi alguspunkti ja lõikab kahte antud sirget $\begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t, \\ z = 3 + t, \end{cases}$ ning $\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 3 - t, \\ z = 4 + 3t. \end{cases}$

6.83. Koostada sirge võrrandid, kui sirge läbib antud punkti ja lõikab kahte antud sirget:

1) $A(-4,-5,3)$, $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$;

2) $B(1,1,1)$, $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$;

3) $C(4,0,-1)$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$, $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$;

4) $D(-3,5,-9)$, $\begin{cases} y = 3x + 5, \\ z = 2x - 3, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4x - 7, \\ z = 5x + 10; \end{cases}$

5) $E(2,3,1)$, $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y + z + 4 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ y + z - 2 = 0; \end{cases}$

6) $F(0,-1,8)$, $\begin{cases} x + 5z - 47 = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{10} = \frac{z-9}{-1}$.

6.84. Koostada sirge võrrandid, kui sirge läbib punkti $M_0(\vec{x}_0)$ ja lõikab kahte antud sirget:

1) $\vec{x}_0 = (0,0,0)$, $\vec{x} \times \vec{a}_i = \vec{b}_i$, $i = 1,2$;

2) $\vec{x}_0 = (4,0,-1)$, $\vec{x} \times (2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) = -29\vec{i} + 7\vec{j} + 10\vec{k}$,
$\vec{x} \times (5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k}$.

6.85. Koostada kahe antud sirge ühise ristsirge võrrandid:

1) $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$, $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$;

2) $\begin{cases} x = 0, \\ y = z, \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0, \\ x + y + 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 3z - 1, \\ y = 2z - 3, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 5, \\ z = 7x + 2; \end{cases}$

4) $\vec{x} \times (2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) = -29\vec{i} + 7\vec{j} + 10\vec{k}$,
$\vec{x} \times (5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k}$.

6.86. Koostada kahe antud sirge

$$\begin{cases} x = 3t - 7, \\ y = 2t + 4, \\ z = 3t + 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t - 8, \\ z = -t - 12 \end{cases}$$

ühise ristsirge parameetrilised võrrandid.

<u>6.87.</u> Avaldada kiivsirgete $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{a}_1 t$ ja $\bar{x} = \bar{x}_2 + \bar{a}_2 t$ vaheline kaugus d. Avaldada kaugus d ka koordinaatide kaudu, kui $\bar{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ja $\bar{a}_i = (l_i, m_i, n_i)$.

<u>6.88.</u> Tõestada, et kahe sirge $(\bar{x} - \bar{x}_i) \times \bar{s}_i = 0$, $i = 1,2$ vahelise kauguse võib arvutada järgmise valemi abil:

$$d = \frac{|(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\bar{s}_1\bar{s}_2|}{|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|}, \quad \bar{s}_1 \times \bar{s}_2 \neq 0.$$

Tuletada valem ka koordinaatides, kui sirged on määratud kanooniliste võrranditega (6.14).

<u>6.89.</u> Leida kahe antud sirge vaheline kaugus:

1) $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + 2t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 3t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = -2t + 7, \\ z = 3t + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4t + 5, \\ y = 8, \\ z = -6t + 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x + y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0, \\ 2x - y + 3z - 6 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x - 3y + z - 4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z - 9 = 0, \\ 2x - y - z = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = y = z - 1 = 0, \\ y - 3z + 3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + z = 3; \end{cases}$

6) $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 1}{1} = \dfrac{z}{0}, \qquad \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 1}{0} = \dfrac{z + 1}{1};$

7) $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$, $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$;

8) $\vec{x}\times(2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k})=-29\vec{i}+7\vec{j}+10\vec{k}$,

$\vec{x}\times(5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})=3\vec{i}-5\vec{j}-10\vec{k}$;

9) $\vec{x}\times(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=21\vec{i}+16\vec{j}+11\vec{k}$,

$\vec{x}\times(-7\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})=\vec{i}-16\vec{j}+13\vec{k}$.

6.90. Leida ühikkuubi diagonaali ja temaga mittelõikuva tahu diagonaali vaheline kaugus.

6.91. Leida risttahuka diagonaali kaugus temaga kiivatest servadest, kui risttahuka mõõtmed on 1, 2 ja 3.

Kahe sirge vaheline nurk.

6.92. Määrata kanooniliste võrranditega

$\frac{x-x_i}{l_i}=\frac{y-y_i}{m_i}=\frac{z-z_i}{n_i}$, $i = 1,2$ määratud sirgete vaheline nurk.

6.93. Leida nurgad, mis sirge moodustab reeperitelgedega :

1) $\begin{cases} x-2y+z-1=0, \\ x+2y+z+1=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x+y+2z+1=0. \end{cases}$

6.94. Leida antud sirgete $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$ vaheline teravnurk.

6.95. Leida antud sirgete

$\begin{cases} x=3t-2, \\ y=0, \\ z=-t+3 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=0, \\ z=t-3, \end{cases}$ vaheline nürinurk.

6.96. Leida sirgetevahelise nurga koosinus:

$$\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$$

6.97. Arvutada antud sirgete vaheline nurk:

1) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}, \qquad \frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6};$

2) $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 2y - 7z + 8 = 0, \\ x + 2y - 2z + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y + 3z - 21 = 0, \\ 2x + 2y - 3z + 15 = 0. \end{cases}$

6.98. Arvutada tetraeedri vastasküIgede vaheline nurk, kui tetraeedri tipud on A(3,-1,0), B(0,-7,3), C(-2,1,-1), D(3,2,6).

6.99. Leida sirge $\begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x + y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$ sihikoosinused.

6.100. Sirge sihinurgad $\alpha = \beta = 60°$. Leida γ.

6.101. Leida sirge sihikoosinused, kui $\alpha = \beta = \gamma$.

6.102. Leida sirge sihikoosinused, kui sirge läbib kahte antud punkti: 1) O(0,0,0), P(2,2,-1); 2) A(-2,2,5), B(2,-1,5).

6.103. Kolmnurga ABC tipud on A(1,3,-2), B(4,1,5), C(6, 3,1). Koostada mediaani AM võrrandid ja arvutada mediaani ja külje BC vaheline nurk.

6.104. Arvutada sirgetevaheline nurk:

1) $\bar{x} \times (\bar{i} + 5\bar{j} - \bar{k}) = 0, \quad \bar{x} \times (2\bar{i} - 3\bar{j} - 4\bar{k}) = 6\bar{i} + 3\bar{k};$

2) $\bar{x} \times \bar{a} = \bar{b}, \quad \bar{x} \times \bar{b} = \bar{a}.$

6.105. Näidata, et kahe sirge

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{ja} \quad \frac{x - x_1}{l_2} = \frac{y - y_1}{m_2} = \frac{z - z_1}{n_2}$$

nurgapoolitajate võrrandid on

$$\frac{x - x_1}{l_1 + l_2} = \frac{y - y_1}{m_1 + m_2} = \frac{z - z_1}{n_1 + n_2} \quad \text{ja} \quad \frac{x - x_1}{l_1 - l_2} = \frac{y - y_1}{m_1 - m_2} = \frac{z - z_1}{n_1 - n_2}.$$

6.106. Näidata, et sirged

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2t, \\ z = t \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = 11 + 8t, \\ y = 6 + 4t, \\ z = 2 + t, \end{cases} \quad \text{lõikuvad.}$$

Leida nendevahelise nürinurga poolitaja.

Segaülesandeid.

6.107. Konstrueerida sirged:

1) $\vec{x} \times \vec{k} = \vec{i} - 4\vec{j}$; 2) $\vec{x} \times (\vec{j} + \vec{k}) = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

6.108. Tõestada, et võrrand $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$ määrab sirge, mis on paralleelne vektoriga $\vec{a}$. Kas antud vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ võivad olla suvalised või peavad nad rahuldama teatud tingimusi?

6.109. Leida punkti $M_1(\vec{x}_1)$ projektsioon $M_2(\vec{x}_2)$ sirgel $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$. Avaldada projektsiooni koordinaadid $\vec{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, kui $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja $\vec{a} = (l, m, n)$.

6.110. Kolmnurga tipud on $A(\vec{x}_1)$, $B(\vec{x}_2)$, $C(\vec{x}_3)$. Tõestada, et kolmnurga pindala võib arvutada valemi

$$S = \frac{1}{2}\left| \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 + \vec{x}_2 \times \vec{x}_3 + \vec{x}_3 \times \vec{x}_1 \right| \quad \text{abil.}$$

6.111. Teades sirge ühte punkti A(1,4,-2) ja sihivektorit $\vec{s}(2,-3,6)$, koostada sirge võrrandi kõik tuntud kujud.

6.112. Tõestada, et kolmnurga tippudest võrdsetel kaugustel asetsevate punktide hulk on sirge. Koostada selle sirge võrrandid, kui on antud kolmnurga tipud.

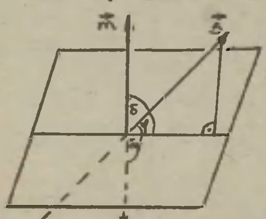
§2. Sirge ja tasand ruumis

Sirge ja tasandi vastastikuseid asendeid ruumis on kaks:

1) Sirge ja tasand lõikuvad
   a) sirge ei ole risti tasandiga;
   b) sirge on risti tasandiga.
2) Sirge ja tasand on paralleelsed
   a) sirge ei asu tasandil;
   b) sirge asub tasandil.

Nurgaks sirge ja tasandi vahel nimetatakse väiksemat nurka sirge ja tema ristprojektsiooni vahel.

Olgu vaadeldud sirge s sihivektor $\vec{s} = (l,m,n)$ ja antud tasandi α normaalvektor $\vec{n} = (A,B,C)$. Vastavalt vektorite $\vec{s}$ ja $\vec{n}$ suundadele kas $\sin\varphi = \cos\delta$ või $\sin\varphi = \sin(\delta' - \frac{\pi}{2}) = \cos|\delta'|$. Seega sirge ja tasandi vaheline nurk arvutatakse alati valemist


Joon. 6.4.

$$\sin \varphi = \cos (\widehat{\vec{s}\,\vec{n}}) = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|} \tag{6.22}$$

ehk ristreeperi korral

$$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{6.22'}$$

Sirge on risti tasandiga, kui sirge sihivektor $\vec{s}$ on kollineaarne tasandi normaalvektoriga $\vec{n}$, s.t. $\vec{s} \parallel \vec{n}$ ehk koordinaatides

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \tag{6.23}$$

Sirge on paralleelne tasandiga, kui sirge sihivektor on risti tasandi normaalvektoriga $\vec{s} \perp \vec{n}$, s.t.

$$\vec{s}\cdot\vec{n} = 0 \tag{6.24}$$

ehk ristreeperi korral

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{6.24'}$$

Sirge s asetseb tasandil α parajasti siis, kui sirge on paralleelne tasandiga, s.t. $\vec{s} \perp \vec{n}$ ja sirge s mingi punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ asetseb tasandil α, s.t. punkt M_0 rahuldab tasandi võrrandit

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{6.25}$$

Sirge s ja tasandi α vastastikuseid asendeid määravad tingimused võib esitada tabelina.

Sirge ja tasand lõikuvad		Sirge ja tasand on paralleelsed	
$\vec{s}\cdot\vec{n} \neq 0$		$\vec{s}\cdot\vec{n} = 0$	
Sirge ei ole risti tasandiga	Sirge on risti tasandiga	Sirge ei asu tasandil	Sirge asub tasandil
$\vec{s} \nparallel \vec{n}$ ehk $\vec{s} \times \vec{n} \neq 0$	$\vec{s} \parallel \vec{n}$ ehk $\vec{s} \times \vec{n} = 0$	$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$	$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

Olgu sirge s määratud kahe tasandi lõikejoonena ja tasand α üldvõrrandiga:

$$s:\quad A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0,\ i = 1,2 \qquad (6.26)$$

$$\alpha:\quad A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

Üldise afiinse reeperi korral on sirge s sihivektoriks

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

Ristreeperi korral on tasandi α normaalvektoriks $n = (A,B,C)$

$$A_kx + B_ky + C_kz + D_k = 0,\ k = 1,2,3. \qquad (6.27)$$

Olgu võrrandisüsteemi maatriksi A ja võrrandisüsteemi laiendatud maatriksi B

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix}$$

astakud vastavalt r ja r'.

1. Sirge ja tasand lõikuvad (lineaarsel mittehomogeensel võrrandisüsteemil (6.27) on parajasti üks lahend), kui

$$r = r' = 3. \tag{6.28}$$

2. Sirge ja tasand on paralleelsed (võrrandisüsteemil (6.27) puudub lahend), kui

$$r = 2 \text{ ja } r' = 3. \tag{6.29}$$

3. Sirge asub tasandil (võrrandisüsteemil (6.27) on lõpmata palju lahendeid), kui

$$r = r' = 2. \tag{6.30}$$

Sirge ja tasandi lõikepunkt.

6.113. Leida antud sirge ja antud tasandi lõikepunkt:

1) $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$, $\vec{x} \cdot \vec{n} = c$;
2) $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{e}_1 u + \vec{e}_1 v$;
3) $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$, $\vec{x} \cdot \vec{n} = c$, $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \perp \vec{a}$;
4) $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$, tasand läbib kolme antud punkti $M_k(\vec{x}_k)$, $k = 1,2,3$.

6.114. Leida antud sirge jäljed reeperitasanditel:

1) $\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 6 + 2t, \\ y = -2 + 4t, \\ z = -5t. \end{cases}$

6.115. On antud sirge jäljed A $(0,y_1,z_1)$ ja $B(x_2,0,z_2)$. Leida sirge jälg kolmandal reeperitasandil.

6.116. Leida antud sirge s ja tasandi α lõikepunkt:

1) s: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$, α: $2x + 3y + 3z - 8 = 0$;

2) s: $\begin{cases} y = -2x + 9, \\ z = 9x - 43, \end{cases}$ α: $3x - 4y + 7z - 33 = 0$;

3) s: $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$, α: $3x - y + 2z - 5 = 0$;

4) s: $x = 2t$, $y = -t + 1$, $z = t + 3$,

α: $x + y + z - 10 = 0$.

Sirge ja tasandi vastastikune asend.

6.117. Tõestada, et sirge $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$

asub tasandil $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

6.118. Missugustel kordajate B ja D väärtustel sirge

$\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0, \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$ asub xy-tasandil?

6.119. Tasandil $2x + y - 2z = 0$ leida sirge, mis asetseb reeperi alguspunktist kolme ühiku kaugusel ja on paralleelne vektoriga $\vec{s} = (3,-2,2)$.

6.120. On antud kaks sirget $\vec{x} = \vec{a}_i t + \vec{b}$, $i = 1,2$. Millistel tingimustel sirged asetsevad ühel ja samal tasandil?

6.121. Leida tarvilik ja piisav tingimus, et kaks sirget

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

asetseksid ühel ja samal tasandil.

<u>6.122.</u> Kas antud sirged asetsevad ühel ja samal tasandil?

1) $\begin{cases} x = 7z - 17, \\ y = 3z - 1, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = 4z - 11, \\ y = -10z + 25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x + y + 3z = 0, \\ 2x + 3y + 2z - 9 = 0, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 3x - 2y + z + 5 = 0, \\ x - 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0, \\ x - 3y + z - 1 = 0, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + y - z - 3 = 0; \end{cases}$

4) $\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z + 1}{1}$, $\qquad \frac{x + 2}{5} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 1}{4}$.

<u>6.123.</u> On antud sirge $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$ ja tasand $\vec{x} \cdot \vec{n} = D$. Milline on tarvilik ja piisav tingimus, et sirge ja tasand: 1) lõikuksid, 2) oleksid kollineaarsed, 3) oleksid paralleelsed või et 4) asetseks tasandil?

<u>6.124.</u> Milline on tarvilik ja piisav tingimus, et tasand $\vec{x} \cdot \vec{n} = c$ ja sirge $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$ $(\vec{a} \neq 0,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0)$: 1) lõikuksid, 2) oleksid kollineaarsed, 3) oleksid paralleelsed, või et 4) sirge asetseks tasandil?

<u>6.125.</u> Määrata sirge ja tasandi vastastikune asend. Kui sirge ja tasand lõikuvad, leida lõikepunkt:

1) $\frac{x - 12}{4} = \frac{y - 9}{3} = \frac{z - 1}{1}$, $\qquad 3x + 5y - z - 2 = 0;$

2) $\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z}{3}$, $\qquad 3x - 3y + 2z - 5 = 0;$

3) $\frac{x - 13}{8} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 4}{3}$, $\qquad x + 2y - 4z + 1 = 0;$

4) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$, $3x - y + 2z - 5 = 0$;

5) $\begin{cases} 3x + 5y - 7z + 16 = 0, \\ 2x - y + z - 6 = 0, \end{cases}$ $5x - z - 4 = 0$;

6) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0, \\ x + y + z + 5 = 0, \end{cases}$ $y + 4z + 17 = 0$;

7) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 8 = 0, \\ 5x + 3y + z - 16 = 0, \end{cases}$ $2x - y - 4z - 24 = 0$.

6.126. Koostada sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $A(x_0, y_0, z_0)$ ja on paralleelne kahe antud tasandiga $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1,2$.

6.127. Tõestada, et sirge $x = 3t - 2$, $y = -4t + 1$, $z = 4t - 5$ on paralleelne tasandiga $4x - 3y - 6z = 0$.

6.128. Millisel m väärtusel sirge s on paralleelne tasandiga α:

1) s: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$, α: $x - 3y + 6z + 7 = 0$;

2) s: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-8}=\frac{z-2}{m}$, α: $3x - 4y + 7z - 33 = 0$.

6.129. Koostada tasandil $y + 2z = 0$ asuva ja sirgeid

$$\begin{cases} x = -t + 1, \\ y = t, \\ z = 4t \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = -t + 2, \\ y = 2t + 4, \\ z = 1 \end{cases}$$

lõikava sirge võrrand.

6.130. Määrata sirge $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ ja tasandi $Ax + By + Cz + D = 0$ 1) paralleelsuse, 2) ristseisu tingimused.

Sirge ja tasandi vaheline nurk. Ristsirge.

6.131. Koostada sirge vektorvõrrand, parameetrilised ja kanoonilised võrrandid, kui sirge läbib punkti $X_0(\vec{x}_0)$ ja on risti tasandiga $\vec{x}\cdot\vec{n} = c$, kui $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = (A, B, C)$.

6.132. Leida antud sirge ja antud tasandi vaheline nurk:

1) $\begin{cases} x = 6t + 5, \\ y = -3t + 1, \\ z = t + 2, \end{cases}$ $\quad 7x + 2y - 3z + 5 = 0;$

2) $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ z = 5 - 3x, \end{cases}$ $\quad x - 3y - 2z + 5 = 0;$

3) $\begin{cases} 3x - 2y = 24, \\ 3x - z = -4, \end{cases}$ $\quad 6x + 15y - 10z - 31 = 0.$

6.133. Määrata tasandi $\vec{x}(5\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) + 8 = 0$ normaali sihikoosinused.

6.134. Koostada antud punktist A antud tasandile tõmmatud ristsirge võrrand.

1) $A(x_0, y_0, z_0)$, α : $Ax + By + Cz + D = 0;$

2) $A(1,2,3)$, α : $4x - 5y - 8z + 21 = 0;$

3) $A(1,2,3)$, α : $3x + 11y = 0;$

4) $A(1,2,3)$, α : $z = 0;$

5) $A(3,-2,4)$, α : $5x + 3y - 7z + 1 = 0;$

6) $A(2,-3,-5)$, α : $6x - 3y - 5z + 2 = 0.$

6.135. Kolmnurga tipud on $A(4,1,-2)$, $B(2,0,0)$, $C(-2,3,-5)$. Koostada tippu B läbiva kõrguse võrrand.

6.136. Koostada punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ läbivate ja sirgega $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ ristuvate sirgete hulga võrrandid.

6.137. Koostada tasandi võrrand, kui tasand läbib antud punkti ja on risti antud sirgega:

1) $M_0(\vec{x}_0)$, $\quad \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$;

2) $O(0,0,0)$, $\quad x = y = z$;

3) $A(3,-2,-1)$, $\quad \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$.

6.138. Leida punkti $P(1,1,1)$ kaugus sirgest $\frac{x-11}{2} = \frac{y-18}{5} = \frac{z-4}{-2}$.

6.139. Leida punkti $(1,3,5)$ kaugus sirgest, mida mööda lõikuvad tasandid $2x + y + z - 1 = 0$ ja $3x + y + 2z - 3 = 0$.

6.140. Leida tasand, mis läbib punkti $X_0(\vec{x}_0)$ ja on risti kahe tasandi $\vec{x}\cdot\vec{n}_i = c_i$, $i = 1,2$ lõikesirgega.

6.141. Punktist $A(-3,2,5)$ on tõmmatud ristsirged tasanditele $4x + y - 3z + 13 = 0$ ja $x - 2y + z - 11 = 0$. Leida nende sirgetega määratud tasand.

Punktide ja sirgetega määratud tasandid.

6.142. Koostada poolust ja sirget $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$ läbiva tasandi võrrand.

6.143. Koostada tasandi võrrand, kui tasand läbib punkti $X_0(\vec{x}_0)$ ja on paralleelne sirgetega $\vec{x} \times \vec{a}_i = \vec{b}_i$, $i = 1,2$. Lahendada sama ülesanne koordinaatides, kui $X_0(x_0,y_0,z_0)$ ja sirgete sihivektorid on $\vec{a}_i = (l_i,m_i,n_i)$, $i = 1,2$.

6.144. Koostada antud punkti läbiva ja antud sirgetega paralleelse tasandi vôrrand, kui

1) $A(-1,-2,3)$, $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-5}{6}$, $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-8}$;

2) $B(-3,-8,0)$, $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-4}{0}$, $\begin{cases} 2x - 2y + 2z - 7 = 0, \\ x + 9y - 11z = 0; \end{cases}$

3) $C(5,1,4)$, $\vec{x} \times (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) = \vec{i} + 5\vec{j} + 17\vec{k}$,

$\vec{x} \times (\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}) = 3\vec{i} + 11\vec{j} + \vec{k}$.

6.145. Koostada tasandi vôrrand, kui tasand läbib antud punkti ja antud sirget:

1) $M_0(\vec{x}_0)$, $(\vec{x} - \vec{x}_1) \times \vec{a} = 0$;

2) $M_0(\vec{x}_0)$, $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$;

3) $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$;

4) $O(0,0,0)$, $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = t; \end{cases}$

5) $A(-2,3,0)$, $\begin{cases} x = 1, \\ y = t + 2, \\ z = -t + 2; \end{cases}$

6) $B(-3,1,0)$, $\begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0, \\ 3x - y + 2z - 1 = 0; \end{cases}$

7) $C(2,-3,1)$, $\frac{x-1}{5} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}$.

6.146. Koostada kaht antud paralleelset sirget läbiva tasandi vôrrand:

1) $\frac{x-x_i}{l} = \frac{y-y_i}{m} = \frac{z-z_i}{n}$, $i = 1,2$;

2) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$, $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{3}$;

3) $(\vec{x} + 2\vec{i} - \vec{k}) \times (7\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}) = 0,$

$(\vec{x} - \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}) \times (7\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}) = 0.$

6.147. Koostada tasandi vôrrand, kui tasand läbib sirget a ja on paralleelne sirgega b:

1) a: $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t,$ b : $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{b}t;$

2) a: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \end{cases}$ b: $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n};$

3) a: $\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n},$ b: $\frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{m_1} = \frac{z - c_1}{n_1};$

4) a: $(\vec{x} - 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}) \times (2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = 0,$

b: $(\vec{x} + 5\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) \times (4\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}) = 0.$

6.148. Koostada tasandi vôrrand, kui tasand läbib sirget a ja on paralleelne sirgega b:

1) a: $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2},$ b: $\frac{x - 1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1};$

2) a: $\begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = 6t - 1, \\ z = 4t, \end{cases}$ b: $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 3t, \\ z = -t; \end{cases}$

3) a: $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y + z - 2 = 0, \end{cases}$ b: $x = y = z;$

4) a: y-telg, b: $\begin{cases} x + 4y - 2z + 7 = 0, \\ 3x + 7y - 2z = 0. \end{cases}$

6.149. Leida tasand, mis läbib antud sirget ja on paralleelne antud tasandiga:

1) $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t,$ $\vec{x} = \vec{x}_1 + u\vec{a} + v\vec{b};$

2) $\frac{x + 5}{3} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z}{4},$ $x + y - z + 15 = 0.$

Projektsioonid.

6.150. Leida antud sirge

1) $\begin{cases} 5x + 8y - 3z + 9 = 0, \\ 2x - 4y + z - 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\frac{x - 3}{-5} = \frac{y - 4}{6} = \frac{z - 6}{8}$

projektsioon xy-tasandil.

6.151. Leida sirge $\begin{cases} 2x + y - 3z + 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

projektsioon xz-tasandil .

6.152. Määrata sirge $\begin{cases} 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \\ 6x - y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$ projektsioonid reeperitasanditel.

6.153. Leida sirge $(\vec{x} - 4\vec{j} + \vec{k}) \times (4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) = 0$ projektsioon tasandil $x(\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) + 8 = 0$.

6.154. Määrata antud sirge projektsioon antud tasandil :

1) $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 4}{-3} = \frac{z + 2}{5}$, $2x - 5y + z - 2 = 0$;

2) $\begin{cases} x = 5t + 3, \\ y = t - 1, \\ z = t + 4, \end{cases}$ $2x - 2y + 3z - 5 = 0$;

3) $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + z + 1 = 0, \end{cases}$ $x + y + z = 0$;

4) $\begin{cases} 3x - 2y - z + 4 = 0, \\ x - 4y - 3z - 2 = 0, \end{cases}$ $5x + 2y + 2z - 7 = 0$;

5) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5 = 0, \\ x - 6y + 3z - 7 = 0, \end{cases}$ $2x + 2y + z - 15 = 0$.

6.155. On antud sirge $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 12 = 0, \\ x + 4y - 2z - 10 = 0. \end{cases}$

Leida tasandid, mis projekteerivad selle sirge koordinaattasanditele.

6.156. Leida tasand, mis läbib antud sirget ja on risti antud tasandiga:

1) $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$, $\quad \vec{x}\cdot\vec{n} = c$;

2) $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$, $\quad \vec{x}\cdot\vec{n} = c$, $\quad \vec{a} \neq 0$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$;

3) $\vec{x}\,\vec{n}_i = c_i$ $(i = 1,2)$, $\vec{x}\cdot\vec{n} = c$.

6.157. Koostada tasandi võrrand, kui tasand läbib antud sirget ja on risti antud tasandiga:

1) $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 2}{-3} = \dfrac{z - 2}{2}$, $\quad 3x + 2y - z - 5 = 0$;

2) $\dfrac{x - 10}{2} = \dfrac{y + 11}{-7} = \dfrac{z}{1}$, $\quad 10x - 18y - 5z - 1 = 0$;

3) $\begin{cases} 4x - 2y + z - 8 = 0, \\ 3x + y + 2z - 15 = 0, \end{cases}$ $\quad 3x + 4y + z + 5 = 0.$

6.158. Kolmnurga tipud on A(4,1,-2), B(2,0,0), C(-2,3,-5). Koostada külge AB läbiva ja kolmnurga tasandiga ristuva tasandi võrrand.

6.159. Koostada punkti $X_1(\vec{x}_1)$ läbiva ja sirgega $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$ ristuva tasandi võrrand. Koostada tasandi võrrand ka koordinaatides, kui $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a} = (l, m, n)$.

6.160. Leida punkti P(2,-1,3) projektsioon sirgel $x = 3t$, $y = 5t - 7$, $z = 2t + 2$.

6.161. Leida sirgel $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y + 7}{2} = \dfrac{z - 3}{-1}$ punkt, mis oleks lähim punktile M(3,2,6).

6.162. Leida punkti Q projektsioon tasandil α :

1) $Q(1,2,-3)$, α : $6x - y + 3z - 41 = 0$;

2) $Q(5,2,-1)$, α : $2x - y + 3z + 23 = 0$.

6.163. Leida punkti $O(3,-4,-2)$ projektsioon tasandil, mis läbib paralleelseid sirgeid $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$;

$$\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}.$$

6.164. Leida poolusega sümmeetriline punkt tasandi $\vec{x}(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) - 5 = 0$ suhtes.

6.165. Leida punktiga $P(2,7,1)$ sümmeetriline punkt tasandi $x - 4y + z + 7 = 0$ suhtes.

6.166. Leida punkt Q, mis on sümmeetriline punktiga $P(3,-4,-6)$ punkte $A(-6,1,-5)$, $B(7,-2,-1)$ ja $O(10,-7,1)$ läbiva tasandi suhtes.

6.167. Antud tasand läbib sirgeid

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0, \\ x - 2y - 4z + 3 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y + 3z + 7 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

Leida punkt Q, mis on sümmeetriline punktiga $P(-3,2,5)$ antud tasandi suhtes.

Kindlaid tingimusi rahuldavad punktid ja sirged.

6.168. Leida sirgel $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$ punkt, mis asetseb tasandist $\vec{x}\cdot\vec{n} = c$ kaugusel d.

6.169. Leida xy-tasandil punkt P, mille kauguste summa punktidest $A(-1,2,5)$ ja $B(11,-16,10)$ oleks minimaalne.

6.170. Leida tasandil $2x - 3y + 3z - 17 = 0$ selline punkt P, mille kauguste summa punktidest A(3,-4,7) ja B(-5,-14,17) oleks minimaalne.

6.171. Leida tasandil $2x + 3y - 4z - 15 = 0$ punkt P, mille kauguste vahe punktidest M(5,2,-7) ja N(7,-25,10) oleks suurim.

6.172. Leida xz-tasandil punkt P, mille kauguste vahe punktidest P(3,2,-5) ja Q(8,-4,-13) on maksimaalne.

6.173. Leida sirge parameetrilised võrrandid, kui sirge on paralleelne tasanditega $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ ja lõikab sirgeid $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$; $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$.

6.174. Leida sirge, mis on risti xz-tasandiga ja lõikab kaht sirget $x = t,\ y = -4 + t,\ z = 3 - t$; $x = 1 - 2t,\ y = -3 + t,\ z = 4 - 5t$.

6.175. Koostada punkti A läbiva tasandiga α paralleelse ja sirget a lõikava sirge võrrandid, kui

1) A(3,-2,-4), α : $3x - 2y - 3z - 7 = 0$,

a : $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$;

2) A(1,0,7), α : $3x - y + 2z - 15 = 0$,

a : $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$;

3) A(-1,0,4), α : $3x + 4y + z - 10 = 0$,

a : $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$;

4) $A(3,-1,-4)$, $\alpha: \quad y + 2z = 0,$

$a: \quad y$-telg.

<u>Segaülesandeid.</u>

<u>6.176.</u> Määrata järgnevate sirgepaaride vastastikune asend ruumis. Kui sirged on paralleelsed või lõikuvad, koostada sirgeid läbiva tasandi võrrand. Lõikuvate sirgete korral määrata ka lõikepunkt:

1) $\begin{cases} x = 9t, \\ y = 5t, \\ z = t - 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -9t + 27, \\ y = -5t + 15, \\ z = -t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t, \\ y = -4t + 8, \\ z = -3t - 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ x - 4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + z - 8 = 0, \\ 2x + 3z - 2 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y - z + 13 = 0, \\ y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$

<u>6.177.</u> Millistel tingimustel lõikab kanoonilise võrrandiga (6.2) määratud sirge 1) x-telge; 2) y-telge; 3) z-telge? Millistel tingimustel asub sirge 4) xy-tasandil; 5) xz-tasendil; 6) yz-tasandil?

<u>6.178.</u> Leida sirge, mis asub tasandil $\vec{x}\cdot\vec{n} = D$ ja moodustab sirgega $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$ lõikumisel täisnurga.

<u>6.179.</u> Kolmnurga tipud on $X_k(\vec{x}_k)$, $k = 1,2,3$. Missugune on tarvilik ja piisav tingimus, et sirge $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{a}t$ lõikaks

kolmnurka.

6.180. Leida tarvilik ja piisav tingimus, et sirge $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ lõikaks kolmnurka, mille tipud on $M_k(x_k, y_k, z_k)$ $k = 1,2,3$.

6.181. Leida tarvilik ja piisav tingimus , et sirge $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ lõik, mis asub kahe lõikuva tasandi $A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$ $k = 1,2$ vahel, oleks nende tasandite poolt moodustatud teravnurgas.

6.182. Tõestada, et võrrand $\vec{x}(\vec{n}_1 + \lambda \vec{n}_2) = c_1 + \lambda c_2$, kus λ on muutuv parameeter, määrab tasandite kimbu, mille teljeks on sirge $\vec{x}\cdot\vec{n}_i = c_i$, $i = 1,2$.

6.183. Määrata tasandite kimbu $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ tasand, mis on risti tasandiga $Ax + By + Cz + D = 0$.

6.184. Leida tarvilik ja piisav tingimus kolme tasandi $\vec{x}\cdot\vec{n}_k = c_k$, $k = 1,2,3$ kuulumiseks ühte ja samasse lõikuvate tasandite kimpu.

6.185. Olgu $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1,2,3$ kolme tasandi võrrandid, mis ei ole paralleelsed ühe sirgega. Tõestada, et iga tasandite lõikepunkti läbiva tasandi võrrandi võib esitada kujul $\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0$.

6.186. Kontrollida, kas leidub tasand, mis läbib sirget $\frac{x-7}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{6}$ ja on paralleelne tasandiga $2x + y - 7z + 1 = 0$.

6.187. Kontrollida, et tasand, mis on risti kuubi diagonaaliga ja läbib selle keskpunkti, lõikab kuupi nii, et lõikejoon on korrapärane kuusnurk.

6.188. Läbi sirge $2x = y = 2z$ panna tasand α nii, et antud sirge oleks tasandite α ja $y = 0$ ning α ja $x + y = 0$ lõikesirgete poolt moodustatud nurga poolitaja.

6.189. Koostada kahest antud punktist $A(1,5,-2)$ ja $B(2,-3,1)$ võrdsetel kaugustel asuvate punktide hulga võrrand.

6.190. Tõestada, et kolmest paarikaupa mitteparalleelsest tasandist võrdsetel kaugustel olevate punktide hulk on sirge.

6.191. Koostada punkte $A(1,7,8)$ ja $B(2,-6,-6)$ läbiva ja z-teljega paralleelse tasandi võrrand. Reeper on afiinne.

6.192. Määrata tasandi $2x + y - 7z + 4 = 0$ ja reeperitasandite lõikesirgete sihivektorid. Reeper on afiinne.

6.193. Tasandil, mis läbib kolme punkti $A(2,1,3)$, $B(2,4,0)$, $C(-3,0,4)$, on valitud afiinne reeper, mille alguspunkt on punktis A ning ühikvektoriteks on $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_2$. Leida 1) punkti M ruumilised koordinaadid, kui tasandilised koordinaadid on $u = 5$, $v = 3$; 2) antud tasandi ja z-telje lõikepunkti tasandilised koordinaadid u ja v.

6.194. Milline on tarvilik ja piisav tingimus, et neli tasandit $A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$, $k = 1,2,3,4$ moodustaksid tetraeedri? Reeper on afiinne.

VII peatükk

TEISENDUSED

1. Teisendused sirgel

Reeperiteisendused (ehk koordinaaditeisendused) ei muuda geomeetrilisi objekte, vaid ainult nende analüütilist esitust. Vastavalt reeperi valiku suvalisusele saab geomeetrilisi kujundeid esitada analüütiliselt lõpmata paljudel erinevatel viisidel. Siit tuleneb praktiline vajadus valida reeper nii, et uuritavat objekti kirjeldav võrrand või võrrandisüsteem oleks võimalikult lihtne. Reeperi paremaks valikuks on tarvis tunda seaduspärasusi, millele alluvad reeperiteisendused.

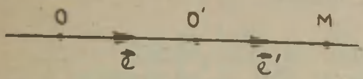
Afiinne reeper $R = \{O,\vec{e}\}$ sirgel koosneb ühest punktist O - reeperi alguspunktist (poolusest), ja ühest vektorist $\vec{e}$ - baasivektorist.

Reeperi $R = \{O,\vec{e}\}$ ühikpunktiks nimetatakse punkti E, mille kohavektoriks on vektor $\overline{OE} = \vec{e}$.

Sirge suvalise punkti X afiinse koordinaadi x antud reeperi R korral määrab vektorvõrdus $\vec{OX} = x\vec{e}$; sel puhul kasutatakse sümbolit M(x). Reeper korraldab üksühese vastavuse sirge punktide hulga ja kõigi reaalarvude hulga vahel.

Olgu sirgel antud veel teine reeper $R' = \{O',\vec{e}'\}$ (vt. joonis 7.1.). Siis igal punktil X on teatud koordinaadid mõlema reeperi suhtes. Olgu punkti X koordinaat reeperi R' suhtes x', s.t.

$\overrightarrow{O'X} = x'\vec{e}$.



Joonis 7.1.

Nimetame kokkuleppeliselt esimest reeperit $R=\{O,\vec{e}\}$ ja sellega seotud koordinaati x "vanaks" ja teist reeperit $R' = \{O',\vec{e}'\}$ ning koordinaati x' "uueks".

Ülesanne. Määrata seosed ühe ja sama punkti koordinaatide vahel erinevates reeperites.

Olgu vanas reeperis R antud uue reeperi alguspunkt O' ja baasivektor $\vec{e}'$: $\overrightarrow{OO'} = b'\vec{e}$, $\vec{e}' = a'\vec{e}$, $a' \neq 0$. Teiselt poolt (vt. joonis 7.1.)

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X} = b'\vec{e} + x'\vec{e}' = (a'x' + b')\vec{e}.$$

Järelikult saame avaldada punkti X vana koordinaadi uue kaudu

$$x = a'x' + b'. \tag{7.1}$$

Viimasest võrdusest saame avaldada punkti X uue koordinaadi vana kaudu

$$x' = ax + b, \tag{7.2}$$

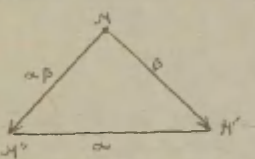
kus $a = \frac{1}{a'}$, $b = -\frac{b'}{a'}$.

Afiinne teisendus sirgel. Kui suurusi x ja x' seostes (7.1) vaadelda kahe (üldiselt erineva) punkti X ja X' koordinaatidena ühes ja samas reeperis, siis seos (7.1) määrab sirge kõikide punktide teisenduse, milles punktile $X(x)$ vastab (7.2) järgi punkt $X'(ax+b)$. Sellist teisendust nimetatakse afiinseks teisenduseks. Afiinsel teisendusel sirgel säilib kolme punkti lihtsuhe. Teisendusi tähistatakse sageli

α, β, γ, ..., φ, ψ, ..., A, B, C, ...

Teisenduste rühm. Olgu meil antud lõplik või lõpmatu teisenduste hulk $\mathfrak{M} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$. Kui teisendus β seab punktile $X(\vec{x})$ vastavusse punkti $X'(\vec{x}')$ ja teisendus α seab punktile $X'(\vec{x}')$ vastavusse punkti $X''(\vec{x}'')$, siis teisenduste α ja β korrutiseks $\alpha\beta$ nimetatakse teisendust, mis seab punktile $M(\vec{x})$ vastavusse punkti $X''(\vec{x}'')$, s.t. (vt. joon. 7.2)

$$\alpha \ : \ X(\vec{x}) \longrightarrow X'(\vec{x}'),$$
$$\beta \ : \ X'(\vec{x}') \longrightarrow X''(\vec{x}''),$$
$$\alpha\beta \ : \ X(\vec{x}) \longrightarrow Y''(\vec{x}'').$$



Joonis 7.2.

Teisenduse β korral vastupidist teisendust, mis viib punktid tagasi lähteasendisse, nimetatakse teisenduse β pöördteisenduseks ja tähistatakse β^{-1}

$$\beta^{-1}: \quad X'(\vec{x}') \longrightarrow X(\vec{x}).$$ [1]

Hulka $\mathfrak{M}$ nimetatakse teisenduste rühmaks, kui hulk $\mathfrak{M}$ sisaldab

1° koos iga oma teisendusega ka selle pöördteisenduse;

2° koos iga oma kahe teisendusega ka nende korrutise.

Teiste sõnadega teisenduste hulk , mis on kinnine korrutamise ja pöördoperatsiooni suhtes, on rühm. Kõigi afiinsete teisenduste hulk sirgel on rühm.

---

[1] G. Kangro "Kõrgem algebra", 1962, lk. 132 või Ü. Lumiste, K. Ariva, "Analüütiline geomeetria", 1973, lk. 277.

7.1. Leida uue reeperi alguspunkti ning uue ühikpunkti vanad koordinaadid, kui reeperi teisendusvalem on $x' = ax$ $(a \neq 0)$.

7.2. Koordinaatide teisendusvalem sirgel on $x' = ax + b$ $(a \neq 0)$. Leida uue reeperi alguspunkti ning ühikpunkti vanad koordinaadid ja vana reeperi alguspunkti ning ühikpunkti uued koordinaadid.

7.3. Milline reeperiteisendus on tehtud, kui vana alguspunkti uue koordinaadi ja uue alguspunkti vana koordinaadi summa on null.

7.4. Leida reeperi teisendusvalem sirgel, kui reeperi alguspunkt jääb muutmata ning uueks ühikpunktiks on võetud punkt $E'(a)$ $(a \neq 0)$.

7.5. Kas koordinaatide teisenduste hulk $x' = -x + a$ moodustab rühma, kus a võib olla mistahes reaalarv. Milline on teisenduse $x' = -x + a$ geomeetriline tähendus?

7.6. Kas teisenduste hulk moodustab rühma, kui teisendus on määratud seostega: 1) $x' = x + a$, 2) $x' = ax$? Milline on antud teisenduste geomeetriline sisu (a suvaline reaalarv, teisel juhul $a \neq 0$)?

7.7. Leida teisenduse $x' = ax + b$ pöördteisendus $(a \neq 0)$.

7.8. Leida reeperi teisendusvalemid, kui uueks reeperi alguspunktiks ja ühikpunktiks on võetud vastavalt punktid $O'(-2)$ ja $E'(4)$.

7.9. Koordinaatide teisendusvalem on $x' = -2x + 3$. Leida uue reeperi alguspunkti O' ning ühikpunkti E' vanad koordinaadid.

7.10. Reeperi alguspunkt on paigutatud ühikpunkti. Milline on vana alguspunkti uus koordinaat?

7.11. Leida uue ühikpunkti vana koordinaat, kui reeperi alguspunkt on paigutatud punkti O'(4).

7.12. Leida punktide A(6), B(2), C(0), D(-2), E(-7) ja M(x) koordinaadid, kui reeperi alguspunkt on paigutatud 1) punkti $O_1(3)$; 2) punkti $O_2(-5)$.

7.13. Leida punktide A(3), B(-2), C(7), O(0) ja E(1) uued koordinaadid, kui uueks reeperi alguspunktiks on O'(-2) ja ühikpunktiks E'(5).

7.14. Millisesse punkti peab paigutama reeperi alguspunkti, et punkti A(7) uueks koordinaadiks oleks punkt $x' = -1$?

7.15. Punkti A koordinaadid vanas ja uues reeperis, mis on saadud teineteisest nihke teel, on vastavalt 3 ja 7. Leida uue alguspunkti vana koordinaat ja vana alguspunkti uus koordinaat.

7.16. Teisendada reeper selliselt, et kõikide punktide korral, mille koordinaadid on $x < -7$, uued koordinaadid oleksid positiivsed ning punktide puhul, mille koordinaadid on $x > -7$ uued koordinaadid oleksid negatiivsed.

7.17. Teisendada reeper nii, et punkti A(5) koordinaat ei muutuks ning selle punktiga sümmeetriliste punktide koordinaadid vahetuksid.

7.18. Teisendada reeper selliselt, et punktide koordinaadid 3 ja 7 oleksid uues reeperis vastavalt 2 ja -6.

7.19. Kuidas on teisendatud reeper, kui esialgse koordinaadi x ning uue koordinaadi x' vahel kehtib järgmine seos:

1) $x = 5x'$;

2) $x = -3x'$;

3) $x = 2x' - 1$;

4) $x = -x' + 3$;

5) $x = -x'/2 + 5$;

6) $x = nx'$;

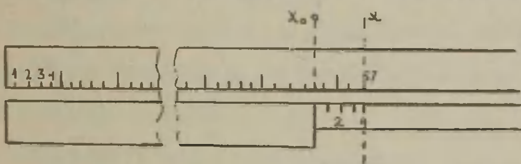
7) $x = x' + n$;

8) $x = nx' + n$?

7.20. Termomeetri kontrollimisel selgus, et vee keemisel näitab termomeeter +96° C ja jää sulamisel +1° C. Kuidas leida õige temperatuur Celsiuse skaala järgi, kui kasutame mõõtmisel saadud tulemusi?

7.21. Kepi mõõtmisel joonlaua jaotus 57 cm ühtib nooniuse 4 jaotusega. Leida kepi pikkus (vt. joonis 7.3.).

Märkus. Kui mõõdetava eseme pikkus ei ole väljendatav täisühikutes, siis kasutatakse abijoonlauda - nooniust. Nooniust asetatakse mõõdetava eseme jätkuks. Nooniuse pikkus on 9 põhijoonlaua ühikut, mis on jaotatud 10 võrdseks osaks.



Joonis 7.3.

7.22. On antud punktid A(9), B(5), C(-3), D(-8) ja M(x). Leida nende punktide koordinaadid, kui pikkusühik on 1) kolm korda pikem esialgsest; 2) kaks korda lühem esialgsest; 3) $e' : e = 5 : 2$.

7.23. Leida valem üleminekuks Réaumuri temperatuuri skaalalt Celsiuse skaalale.

Märkus. Réaumuri skaalal on 0° jää sulamistemperatuur ning 80° vee keemistemperatuur.

7.24. Ühes kilomeetris on 468,7 sülda. Leida valem, mille abil saame raudtee ääres asuvatele verstapostidele (1 verst on 500 sülda) kanda peale meetermõõdustiku vastavad andmed.

7.25. Leida afiinse teisenduse $x' = ax + b$ püsipunkt.

7.26. Afiinset teisendust, mille puhul kas või üks punkt jääb liikumatuks, nimetatakse tsentroafiinseks teisenduseks. Kas sirge kõikide tsentroafiinsete teisenduste hulk moodustab rühma?

7.27. Kas afiinsete teisenduste $x' = ax + b$ hulk moodustab rühma, kui

1) a väärtuseks võivad olla kõik positiivsed reaalarvud, b väärtuseks kõik reaalarvud ;

2) a väärtuseks võivad olla kõik negatiivsed reaalarvud, b väärtuseks kõik reaalarvud ;

3) a ja b väärtuseks võivad olla kõik ratsionaalarvud?

7.28. Kas tsentroafiinsete teisenduste $x' = 2^k x$ hulk moodustab rühma, kui

1) k väärtuseks on kõik täisarvud ,

2) k väärtuseks on kõik positiivsed täisarvud ,

3) k väärtuseks on kõik negatiivsed täisarvud?

7.29. Tõestada, et afiinsel teisendamisel $x' = ax + b$, $a \neq 0$ lõigu orientatsiooni (suuna) säilimise tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks on $a > 0$.

7.30. Leida afiinne teisendus, mille puhul A(2) ja B(4) teisenduvad punktideks A'(-2) ja B'(3).

7.31. Leida afiinne teisendus, mille puhul kaks erinevat punkti $A(x_1)$ ja $B(x_2)$ teisenduvad kaheks erinevaks punktiks $A'(x_1')$ ja $B'(x_2')$.

7.32. Leida sirge kõik afiinsed teisendused, mille puhul 1) säilib vektori pikkus ja suund;

2) säilib suvalise lõigu pikkus.

7.33. Milline on afiinse teisenduse $x' = ax + b$ kuju sirgel, kui uueks alguspunktiks ja ühikpunktiks on vastavalt $O^*(\alpha)$ ja $E^*(\beta)$, kui $\alpha \neq \beta$?

7.34. On antud teisendused A ja B, mida määravad seosed $x' = 2x + 3$, $x' = -x + 8$. Leida teisendused 1) AB, 2) BA, 3) $A^{-1}B$, 4) $B^{-1}A$, 5) A^2B.

2. Teisendused tasandil

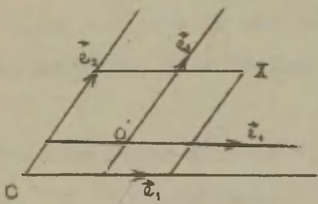
Reeperiteisendus tasandil tähendab uleminekut ühelt afiinselt reeperilt $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ teisele $R' = \{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$. Tasandi igal punktil M on teatud koordinaadid mõlema reeperi suhtes. Nimetame kokkuleppeliselt esimest reeperit R ja sellega määratud koordinaate "vanadeks", teisi "uuteks". Tuleb koostada valemid, mis võimaldavad arvutada tasandi iga punkti M uusi koordinaate punkti M vanade koordinaatide järgi.

Lahendame selle ülesande järk-järgult.

1. Reeperilüke. Erinegu reeperid $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja $R' = \{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ ainult alguspunkti poolest. Kõneldakse, et uus on saadud vanast lükke (ehk rööplükke) teel. Niisiis lüke kannab vana reeperi R alguspunkti uude punkti O', kusjuures reeperivektorid jäävad muutmata. Tasandi punkti X koordinaatideks antud reeperis on tema kohavektori koordinaadid. Seega:

$R: \quad X(x,y) \quad$ ehk $\quad \overline{OX} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$,

$R_1: \quad X(x',y') \quad$ ehk $\quad \overline{O'X} = x'\vec{e_1'} + y'\vec{e_2'}$,



Joonis 7.4.

aga (vt. joon. 7.4.)

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'X}.$$

Tähistame uue reeperi alguspunkti O' koordinaadid vanas reeperis (a,b), s.t. olgu

$$\overrightarrow{OO'} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}.$$

Sel korral

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b, \end{aligned}\right\} \qquad (7.3)$$

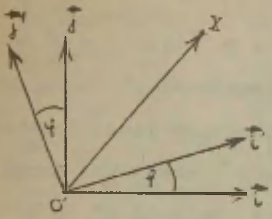
ehk

$$\left.\begin{aligned} x' &= x-a, \\ y' &= y-b. \end{aligned}\right\} \qquad (7.4)$$

Märgime, et reeperi lükke korral ei ole oluline, kas lähtereeper on afiinne või ristreeper.

Vaadeldes valemeid (7.3) punktide $X(x,y)$ ja $X'(x',y')$ vahelise seosena ühe ja sama reeperi korral, saame valemid lükke (ehk rööplükke) jaoks vektori $\overrightarrow{XX'} = \vec{a}$ võrra. Viimast vektorit $\vec{a}$ nimetatakse <u>lükkevektoriks</u>. Selleks et leida punkti X', kuhu vektoriga $\vec{a} = (a,b)$ määratud tasandi lüke kannab punkti X, tuleb vektor $\vec{a}$ rakendada punktis X. Vektori $\vec{a}$ lõpp-punkt osutubki siis punktile X vastavaks punktiks X'.

2. <u>Ristreeperi pööre.(Ortogonaalteisendus tasandil.)</u> Olgu tasandil antud kaks ristreeperit $R' = \{O', \vec{i}, \vec{j}\}$ ja $R'' = \{O', \vec{i'}, \vec{j'}\}$. Et siin reeperi alguspunkt jääb paigale, on siin tegemist ristbaasi teisendamisega ristbaasiks. Kui reeperi R'' võib saada reeperist R', pöörates viimast ümber alguspunkti



Joonis 7.5.

nurga φ võrra (vt. joon. 7.5.), s.t. kui $(\widehat{\vec{i},\vec{i}'}) = (\widehat{\vec{j},\vec{j}'}) = \varphi$, $(\widehat{\vec{j},\vec{i}'}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $(\widehat{\vec{i},\vec{j}'}) = \frac{\pi}{2} + \varphi$, siis kõneldakse, et reeperid R' ja R" on sama orientatsiooniga ning et teine on saadud esimesest <u>pöörde</u> teel. Baasivektorite teisendusvalemid on siis järgmised:

$$\begin{aligned} \vec{i}' &= \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi, \\ \vec{j}' &= -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (7.5)$$

Arvestades, et

$$R': \quad X(x',y') \text{ ehk } \vec{OX} = x'\vec{i} + y'\vec{j},$$

$$R'': \quad X(x'',y'') \text{ ehk } \vec{OX} = x''\vec{i}' + y''\vec{j}'$$

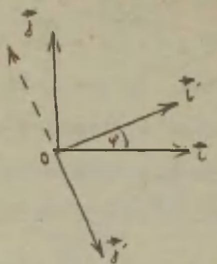
ja asendades $\vec{i}'$ ja $\vec{j}'$ nendega võrdsete avaldistega seostest (7.5), saame baasivektorite lineaarse sõltumatuse tõttu seosed

$$\begin{aligned} x' &= x''\cos\varphi - y''\sin\varphi, \\ y' &= x''\sin\varphi + y''\cos\varphi \end{aligned} \qquad (7.6)$$

ühe ja sama punkti koordinaatide vahel erinevates ristreeperites. Avaldades uued koordinaadid x" ja y" vanade kaudu (seosed on alati pööratavad, sest võib alati teostada pöörde nurga $-\varphi$ võrra), saame

$$\begin{aligned} x'' &= x'\cos\varphi + y'\sin\varphi, \\ y'' &= -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (7.7)$$

Ristreeperi R" võib saada ristreeperist R' ka sel teel, et esmalt sooritatakse pööre ümber reeperi alguspunkti nurga φ võrra ja seejärel muudetakse teise baasivektori suund vastupidiseks. Sel korral (vt. joon. 7.6.) $(\widehat{\vec{i},\vec{i}'}) = \varphi$, $(\widehat{\vec{j},\vec{i}'}) =$



Joonis 7.6.

$= (\widehat{\vec{i},\vec{j}'}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $(\widehat{\vec{j},\vec{j}'}) = \pi - \varphi$. Teise baasivektori suuna muutmist nimetatakse peegelduseks x-telje suhtes. Kõnesoleval juhul kõneldakse, et reeperid R' ja R" on <u>erineva orientatsiooniga</u>. Vaadeldud üleminek on pöörde ja peegelduse järjestrakendamise (korrutamise) tulemus. Baasivektorite teisendusvalemid on siin järgmised:

$$\begin{aligned} \vec{i}' &= \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi, \\ \vec{j}' &= \vec{i}\sin\varphi - \vec{j}\cos\varphi; \end{aligned} \tag{7.8}$$

seejuures koordinaatide teisendusvalemitel on kuju

$$\begin{aligned} x' &= x''\cos\varphi + y''\sin\varphi, \\ y' &= x''\sin\varphi - y''\cos\varphi \end{aligned} \tag{7.9}$$

ehk

$$\begin{aligned} x'' &= x'\cos\varphi + y'\sin\varphi, \\ y'' &= x'\sin\varphi - y'\cos\varphi. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Erijuhul, kui $\varphi = 0$, saame seostest (7.8) baasivektorite vahelised seosed peegelduse korral

$$\vec{i}' = \vec{i},\ \vec{j}' = -\vec{j}. \tag{7.11}$$

Kordame sama mõttekäiku, kasutades maatrikssümboolikat. Maatriksit, mille veerud koosnevad uute baasivektorite koordinaatidest vana baasi suhtes, nimetatakse <u>teisendusmaatriksiks</u>. Teisendusmaatriks on alati regulaarne. Kahe ristreeperi puhul teisendusmaatriks on sama orientatsiooniga reeperite korral maatriks

$$C_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

ja erinevate orientatsioonidega reeperite korral maatriks

$$C_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Et $|C_1| = 1$ ja $|C_2| = -1$, siis näeme, et reeperid on sama või erineva orientatsiooniga vastavalt sellele, kas teisendusmaatriksi determinant on positiivne või negatiivne. Üldiselt kahe ristreeperi korral teisendusmaatriksi C (s.t. $C = C_1$ või $C = C_2$) determinant $|C| = \pm 1$. Tähistades baasivektoritest moodustatud üherealised maatriksid vastavalt

$$\mathcal{E} = (\vec{i},\vec{j}) \text{ ja } \mathcal{E}' = (\vec{i}',\vec{j}'), \tag{7.12}$$

võime baasivektorite vahelised seosed (7.5) ja (7.8) esitada kujul

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}C. \tag{7.13}$$

Tähistades veel

$$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad X'' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}, \tag{7.14}$$

võime punkti M koordinaatide vahelised seosed (7.6-7) ja (7.9-10) reeperite R' ja R" korral esitada kujul

$$X' = CX'', \tag{7.15}$$

ja siit

$$X'' = C^{-1}X'. \tag{7.16}$$

3. Üldine ristreeperi teisendus. Vaatleme järgmist ülesannet. Olgu tasandi punktil M ristreeperis $R = \{O,\vec{i},\vec{j}\}$ koordinaadid x ja y. Tuleb leida punkti M koordinaadid x" ja y" ristreeperis $R'' = \{O',\vec{i}',\vec{j}'\}$.

Teostame nõutud reeperiteisenduse kahes etapis $R \longrightarrow R' = \{O,\vec{i}',\vec{j}'\} \longrightarrow R''$. Toome sisse järgmised ristreeperi teisendused

$$\mu : \quad R \longrightarrow R' \text{ ehk } \mu R = R' \quad \text{(pööre või pööre koos peegeldusega),}$$

$$\nu : \quad R' \longrightarrow R'' \text{ ehk } \nu R' = R'' \quad \text{(lüke).}$$

Seega ülemineku reeperilt R reeperile R" saame teisenduste μ ja ν järjest rakendamise teel, s.t. rakendades reeperile R teisenduste ν ja μ korrutist $\nu\mu$:

$$(\nu\mu)R = \nu(\mu R) = \nu R' = R''.$$

Arvestades öeldut ja seoseid (7.6), (7.9) ja (7.3), saame üldised ristreeperi teisendusvalemid sama orientatsiooniga reeperite korral kujul

$$\begin{aligned} x &= x''\cos\varphi - y''\sin\varphi + a, \\ y &= x''\sin\varphi + y''\cos\varphi + b, \end{aligned} \tag{7.17}$$

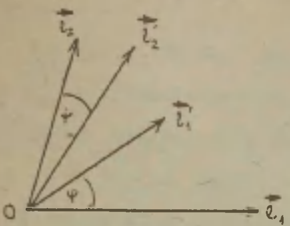
ja erineva orientatsiooniga reeperite korral kujul

$$\begin{aligned} x &= x''\cos\varphi + y''\sin\varphi + a, \\ y &= x''\sin\varphi - y''\cos\varphi + b. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Vaadeldes valemeid (7.17-18) kui <u>teisendusvalemeid</u>, s.t. seades nende abil antud ristreeperi korral tasandi suvalisele punktile M"(x",y") vastavusse punkti M(x,y), saame tasandi teatava isomeetrilise teisenduse – teisenduse, milles iga kahe punkti vaheline kaugus jääb muutumatuks.

Valemitega (7.6) määratud teisendust tasandil nimetatakse <u>liikumiseks</u>. Iga liikumine osutub lükke ja pöörde korrutiseks. Valemitega (7.9) määratud teisendus tasandil on liikumise ja peegelduse korrutis.

4. <u>Afiinse reeperi baasi teisendus tasandil</u>. Olgu antud tasandil kaks afiinset reeperit $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja $R' = \{O,$



Joonis 7.7.

$\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, millel on sama alguspunkt. Kôneldakse, et uus reeper R' on saadud vanast R baasi teisendamise teel. Uue reeperi R' baasivektorid $\vec{e}'_i$ $(i = 1,2)$ avalduvad vana reeperi R baasivektorite lineaarkombinatsioonidena:

$$\vec{e}'_i = c_{ij}\vec{e}_j \tag{7.19}$$

ehk üksikasjalikult

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 &= c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_1. \end{aligned} \tag{7.19'}$$

Maatriksit

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \tag{7.20}$$

mille veerud koosnevad uute baasivektorite koordinaatidest vana baasi suhtes, nimetatakse siin <u>teisendusmaatriksiks</u>.

Punkti koordinaatide teisendusvalemeil on kuju

$$X = CX', \tag{7.21}$$

kus $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ja $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$ ning R: $M(x_1, x_2)$, R': $M(x'_1, x'_2)$ ehk üksikasjalikumalt

$$x_i = \sum_{j=1}^{2} c_{ij}x'_i. \tag{7.21'}$$

Teisendusmaatriks C on regulaarne ja seosed (7.21) on alati pööratavad.

Afiinse reeperi erijuhuks on <u>kaldreeper</u>, mille korral reeperivektorid on ühikvektorid. Punkti koordinaatide teisendusvalemid (7.21') üleminekul ühelt kaldreeperilt R =

$= \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ teisele kaldreeperile $R' = \{O, \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$ reeperi alguspunkti muutmata omavad kuju

$$x' = \frac{x \sin(\omega - \alpha) + y \sin(\omega - \beta)}{\sin \omega},$$
$$y' = \frac{x \sin\alpha + y \sin\beta}{\sin \omega}, \qquad (7.22)$$

kus ω on reeperi R baasivektorite vaheline nurk ja α ja β on nurgad, mis uued reeperiteljed moodustavad vana abstsissteljega.

5. <u>Üldise afiinse reeperi teisendus tasandil.</u> Olgu tasandil antud kaks afiinset reeperit $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja $R' = \{O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$. Sel korral punkti M koordinaatide teisendusvalemeil on kuju

$$x_i = \sum_{j=1}^{2} c_{ij} x_j' + c_j, \ (i,j = 1,2), \qquad (7.23)$$

kus maatriks $C = (c_{ij})$ on reeperi teisendusmaatriks (määrab pöörde) ja c_1, c_2 on uue reeperi R' alguspunkti O' koordinaadid vanas reeperis R. Tähistades $C_o = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, võime afiinsete koordinaatide teisendusvalemid esitada ka maatrikssümboolikas

$$X = CX' + C_o. \qquad (7.24)$$

Märkus: Tuletame meelde käesolevas ülesannete kogus kasutatavat kokkulepet: kui ülesandes ei ole reeperi tüüp märgitud, siis eeldatakse, et reeper on ristreeper.

<u>Lüke. (Rööplüke.)</u>

<u>7.35.</u> Reeperi alguspunkt on lükkega kantud punkti

1) A(3,4), 2) B(-2,1), 3) C(-3,5). Leida koordinaatide teisendusvalemid.

7.36. Reeperi alguspunkt on lükkega kantud punkti O'(3,-4). Uues reeperis on antud punktid A(1,3), B(-3,0) ja C(-1,4). Leida nende punktide vanad koordinaadid.

7.37. On antud punktid A(2,1), B(-1,3), C(-2,5). Määrata nende punktide uued koordinaadid, kui reeperi alguspunkt on kantud lükkega punkti 1) A, 2) B, 3) C.

7.38. Leida punkti A(-2,3) koordinaadid uues reeperis, kui reeperi alguspunkt on lükkega viidud punkti 1) (4,5); 2) (4,-5); 3) (-4,5).

7.39. Leida punktide A(2,3), B(-5,4), C(0,2) uued koordinaadid afiinses reeperis, mis on saadud vanast, kasutades lüket, mis viib vana reeperi alguspunkti punkti O'(7, -1).

7.40. Punkti A koordinaadid mingis afiinses reeperis on $x = 7$, $y = -5$. Määrata selle punkti uued koordinaadid, kui reeperi alguspunkt on viidud lükkega punkti 1) $O_1(2,3)$; 2) $O_2(-4,7)$; 3) $O_3(3,-9)$; 4) $O_4(-1,-2)$; 5) $O_5(3,-5)$.

7.41. On antud punkt M(2,5) afiinses reeperis. Selle punkti koordinaadid pärast reeperi nihet on vastavalt -4 ja 7. Leida vana alguspunkti O ja vanade ühikpunktide $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$ ja E(1,1) uued koordinaadid ning uue alguspunkti O' ja uute ühikpunktide E_1', E_2', E' vanad koordinaadid.

7.42. Määrata uue reeperi alguspunkti O' koordinaadid vanas reeperis, kui koordinaatide teisendusvalemid on:
1) $x = x' + 3$, $y = y' + 5$; 2) $x = x' - 2$, $y = y' + 1$; 3) $x =$

$= x'$, $y = y' - 1$; 4) $x = x' - 5$, $y = y'$.

7.43. Määrata uue reeperi alguspunkti O' koordinaadid, kui punkt A(3,-4) asetseb uue reeperi abstsissteljel ja punkt B(2,3) uue reeperi ordinaatteljel, kusjuures uus reeper on saadud vanast lükke teel.

7.44. Leida koordinaatide teisendusvalemid, kui punkt P(2,-3) asetseb uue reeperi abstsissteljel, punkt Q(1,-7) uue reeperi ordinaatteljel, kusjuures uus reeper on saadud vanast lükke teel.

7.45. Ühe ja sama punkti koordinaadid kahes paralleelsete telgedega reeperis on: 1) (9,-5) ja (0,12); 2) (2,5) ja (-3,6). Määrata esimese reeperi alguspunkti koordinaadid teise suhtes ja ümberpöördult.

7.46. Kahes reeperis, milledest üks on saadud teisest lükke teel, on punkti A koordinaadid (8,-3) ja (-2,-7). Määrata reeperite alguspunkte ühendava lõigu keskpunkti koordinaadid mõlemas reeperis.

7.47. Joone punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit 1) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 22 = 0$; 2) $xy + 3x - 2y - 6 = 0$. Millist võrrandit rahuldavad joone punktide koordinaadid, kui reeperi alguspunkt kanda lükkega punkti 1) O'(-1,5); 2) O'(2,-3).

7.48. Joone punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit $x^2 + 2xy - y^2 + 4x + 8y - 5 = 0$. Millisesse punkti tuleb paigutada uue reeperi alguspunkt, et sama joone punktide uued koordinaadid rahuldaksid võrrandit, mis ei sisalda uute muutujate esimese astme liikmeid.

7.49. On antud funktsioon $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y$.

Leida selle funktsiooni avaldis uues reeperis,kui reeperi alguspunkt on viidud lükkega punkti O'(3,-4).

7.50. Millisesse alguspunkti tuleb paigutada uue reeperi alguspunkt, et funktsiooni

1) $f(x,y) = x^2 - 4y^2 - 6x + 8y + 3$;

2) $f(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y - 7$

avaldis pärast teisendamist ei sisalda uute muutujate esimese astme liikmeid.

7.51. On antud kaks punkti A ja B võrdsete koordinaatidega $x = 1$ ja $y = 2$ erinevates ristreeperites, kusjuures teine reeper on saadud esimesest lükke teel, mis kannab reeperi alguspunkti punkti O'(3,4). Leida punktide A ja B vaheline kaugus.

7.52. Leida punktide A(1,2) ja B(2,-1) vaheline kaugus, kusjuures punkti B koordinaadid on antud uues reeperis, mis on saadud endisest reeperist lükke teel, mis viib alguspunkti punkti O'(-1,3).

7.53. Tõestada, et punktid A ja B võib tasandi nihke abil kanda punktideks C ja D siis ja ainult siis, kui $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

7.54. Kolmnurk A'B'C' on saadud kolmnurgast ABC lükke teel. Tõestada, et kolmnurkade ABC ja A'B'C' vastavad mediaanid on paralleelsed (või kuuluvad samale sirgele).

7.55. Kolmnurk A'B'C' on saadud kolmnurgast ABC tasandi lükke teel. Kolmnurkade ABC ja A'B'C' sissejoonestatud ringjoonte keskpunktid on vastavalt Q ja Q' ja ümberjoonestatud ringjoonte keskpunktid O ja O'. Tõestada, et $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{QQ'}$.

7.56. Kolmnurga ABC külgede AB, BC ja CA keskpunktid on vastavalt F, D ja E. Kolmnurkade AEF, BDF, CDE ümberjoonestatud ringjoonte keskpunktid on O_1, O_2, O_3 ja sissejoonestatud ringjoonte keskpunktid on vastavalt Q_1, Q_2, Q_3. Tõestada, et kolmnurgad $O_1O_2O_3$ ja $Q_1Q_2Q_3$ on võrdsed.

7.57. Kolmnurga ABC küljed on AB = c, BC = a, AC = b; külgede AB, BC ja AC keskpunktid on vastavalt D, E ja F, kolmnurkade ADF, BDE, CEF ümberjoonestatud ringjoonte keskpunktid on O, P, Q. Leida kolmnurga OPQ külgede pikkused.

7.58. Ruut A'B'C'D' on saadud ruudust ABCD lükke teel. Ruutude ABCD ja A'B'C'D' lõige on ruut. Määrata lükkevektori siht.

Ristreeperi pööre.

7.59. Avaldada süsteemidest (7.5) ja (7.8) vanad baasivektorid uute baasivektorite kaudu.

7.60. Esitada valemitega 1) peegeldus x-telje suhtes, 2) peegeldus y-telje suhtes; leida teisendusmaatriksid ja seosed uute ja vanade baasivektorite vahel. Teha vastavad joonised.

7.61. Näidata, et valemitega (7.9) määratud teisenduse saab teostada kahe teisenduse järjestrakendamise teel: sooritades enne pöörde valemitega (7.6) ja seejärel peegelduse x-telje suhtes.

7.62. Ristreeperis on antud punkt $A(2\sqrt{2},-\sqrt{2}/2)$. Leida sama punkti koordinaadid uues reeperis, mis on saadud vanast pöördega 45° võrra.

7.63. Määrata punkti 1) $M(x,y)$, 2) $A(2^{1,5},-(2^{-0,5}))$ koordinaatide teisendusvalemid, kui uue reeperi telgedeks on vana ristreeperi telgede vaheliste nurkade poolitajad.

7.64. Leida koordinaatide teisendusvalemid, kui ristreeperit on pööratud järgmise nurga võrra: 1) 60°; 2) -45°; 3) 90°; 4) -90°; 5) 180°.

7.65. On antud punktid $M(3,1)$, $N(-1,5)$, $P(-3,-1)$. Leida nende punktide koordinaadid uues ristreeperis, kui reeperit on pööratud nurga 1) -45°; 2) 90°; 3) -90°; 4) 180° võrra.

7.66. Reeperit on pööratud nurga $\varphi = 60°$ võrra. Punktide koordinaadid uues reeperis on $A(2\sqrt{3},-4)$, $B(\sqrt{3},0)$, $C(0,2\sqrt{3})$. Leida nende punktide koordinaadid vanas reeperis.

7.67. Millised on punktide $A(2,-3)$, $B(-1,5)$ ja $X(x,y)$ uued koordinaadid, kui seda ristreeperit, milles need punktid on määratud, pöörata alguspunkti ümber: 1) täisnurga võrra vastu kellaosuti suunda; 2) täisnurga võrra kellaosuti suunas; 3) kahe täisnurga võrra?

7.68. Leida ristreeperi pöördenurk φ, kui koordinaatide teisendusvalemid on: 1) $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$; 2) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$, $y = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$.

7.69. Missuguse kuju omandab võrrand $x^2 + y^2 - xy = 9$, kui ristreeperit pöörata 90° võrra?

7.70. Joone punktide ristkoordinaadid rahuldavad võrrandit $y^2 - x^2 = a^2$. Milline on joone punktide koordinaatide vaheline sõltuvus, kui uue ristreeperi telgedeks võtta vana ristreeperi telgede vaheliste nurkade poolitajad.

7.71. On antud funktsioon $f(x,y) = x^2 - y^2 - 16$. Leida selle funktsiooni avaldis uues ristreeperis, kui reeperit on pööratud -45° võrra.

7.72. On antud funktsioon $f(x,y) = x^2 + y^2$. Leida selle funktsiooni avaldis uues ristreeperis, kui reeperit on pööratud nurga φ võrra.

7.73. Millise nurga võrra tuleb pöörata ristreeperit, et võrrand $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 3x - 4 = 0$ ei sisaldaks koordinaatide korrutist.

7.74. Millise nurga võrra tuleb pöörata ristreeperit, et funktsiooni
1) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 3$;
2) $f(x,y) = 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2$

avaldis pärast teisendamist ei sisaldaks uute tundmatute korrutist.

7.75. On antud punkt A(3,-4). Leida punkti A koordinaatide teisendusvalemid, kui uus ristreeper on saadud vanast pöörde teel mingi nurga võrra, kusjuures x'-teljeks on sirge OA. (Vektor $\overrightarrow{OA}$ määrab x'-telje positiivse suuna.)

Üldine ristreeperi teisendamine.

7.76. Avaldada süsteemidest (7,17) ja (7.18) uued koordinaadid vanade koordinaatide kaudu.

7.77. Reeperiteisendused ν ja μ on määratud vastavalt valemitega (7.3) ja (7.6). Määrata teisendusvalemid teisenduse $\mathcal{T} = \mu\nu$ korral.

7.78. Uue ristreeperi $R' = \{O', \vec{i}', \vec{j}'\}$ alguspunkti O' koordinaadid vanas ristreeperis $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ on (-3,-2), kusjuures $\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}) = -\frac{4}{5}$, $\sin(\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}) = -\frac{3}{5}$. Reeperid on erineva orientatsiooniga. Avaldada vanad koordinaadid x ja y uute koordinaatide x' ja y' kaudu.

7.79. On antud kaks ristreeperit. Uue reeperi alguspunkt asetseb punktis O'(-4,2) ning reeperivektorite $\vec{i}$ ja $\vec{i}'$ vaheline nurk on $2\pi/3$. Mõlemad reeperid on sama orientatsiooniga. Avaldada vanad koordinaadid uute koordinaatide kaudu.

7.80. Uus reeper on saadud alguspunkti ülekandmisel lükkega punkti O'(3,-4) ning telgede pööramisel nurga võrra, kusjuures $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$. Punkt A(6,-2) on antud vanas reeperis. Leida punkti A uued koordinaadid.

7.81. Reeperi alguspunkt on kantud lükkega punkti O'(-1,2), reeperitelgi on pööratud nurga $\alpha = \arctan\frac{5}{12}$ võrra. Punktide $M_1(3,2)$, $M_2(2,-3)$ ja $M_3(13,-13)$ koordinaadid on antud uues reeperis. Leida nende punktide koordinaadid vanas reeperis.

7.82. On antud kaks ristreeperit $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ ja $R' = \{O', \vec{i}', \vec{j}'\}$. Uue reeperi R' alguspunkt vanas reeperis R on O'(2,3). x'-telg lõikab x-telge punktis A(6,0) ja y'-telg lõikab y-telge punktis B. Eeldades, et $\vec{i}' \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'A}$ ja $\vec{j}' \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'B}$, leida suvalise punkti koordinaatide vahelised seosed antud reeperites.

7.83. On antud kolm punkti: A(5,5), B(2,1) ja C(12,-6). Leida nende punktide koordinaadid uues reeperis, kui reeperi alguspunkt on kantud punkti B, reeperit on seejärel pööratud

= arctan0,75 võrra.

7.84. Leida reeperi alguspunkti vanad koordinaadid ja telgede pöördenurk, kui teisendusvalemid on: 1) $x = -y' + 3$, $y = x - 2$; 2) $x = -x' - 1$, $y = -y' + 3$; 3) $0{,}5\sqrt{2}x' + 0{,}5\sqrt{2}y' + 5$, $y = -0{,}5\sqrt{2}x' + 0{,}5\sqrt{2}y' - 3$.

7.85. On antud kaks punkti: $A(9,-3)$ ja $B(-6,5)$. Reeperi alguspunkt on paigutatud lükkega punkti A ning seejärel on reeperit pööratud sellise nurga võrra, et ühikvektor $\vec{i}'$ on kollineaarne ja samasuunaline vektoriga $\overrightarrow{AB}$. Leida koordinaatide teisendusvalemid.

7.86. On antud täisnurkne kolmnurk OAB, mille kaatetid on $OA = 3$, $OB = 1$ ning kõrgus OC. Võttes esimese reeperi alguspunktiks punkti O, x- ja y-telje positiivseteks suundadeks vektorite $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OB}$ suunad , teise reeperi alguspunktiks punkti C, x'-telje positiivseks suunaks vektori $\overrightarrow{OC}$ suuna ning valides y'-telje suuna selliselt, et mõlemad reeperid oleksid samast klassist, leida koordinaatide teisendusvalemid.

7.87. On antud ruut ABCD, mille külg $a = 1$. Reeperitelgedeks on valitud kord küljed AB ja AD, kord diagonaalid AC ja BD. Leida koordinaatide teisendusvalemid üleminekul ühelt reeperilt teisele.

7.88. Reeperiteljed ühtivad algul täisnurkse kolmnurga ABC kaatetitega AC ja CB ($CA = 3$, $CB = 4$). Seejärel on reeperitelgedeks võetud hüpotenuus ja täisnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud ristsirge. Leida tippude koordinaadid uues reeperis ning vastavad teisendusvalemid. Teha joonis.

7.89. Leida võrrandi $x^2 - y^2 = 4(x - y + 2)$ kuju teisendatud reeperis, kui reeperi alguspunkt on viidud punkti $O'(2,2)$ ja telgi on pööratud 45° võrra.

7.90. Tasandit pööratakse ümber reeperi alguspunkti nurga α võrra. Milliseks sirgeks teiseneb sirge $x = p$?

7.91. Tasandit pööratakse ümber punkti $O(-1,3)$ 45° võrra. Millisteks sirgeteks teisenevad koordinaatteljed ?

7.92. Tasandit pööratakse ümber punkti $O(2,3)$ nurga α võrra, kusjuures $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$. Milliseks sirkeks teiseneb sirge $x + 2y - 3 = 0$?

7.93. Leida nurga tangens, mille võrra on vaja pöörata tasandit ümber tema mingi punkti, et sirge $2x + 5y - 3 = 0$ teiseneks ordinaatteljega paralleelseks sirgeks.

7.94. Tasand pöördub ümber punkti $A(-3,4)$ positiivses suunas täisnurga võrra. Millisteks sirgeteks kanduvad koordinaattelgede vaheliste nurkade poolitajad?

7.95. Võrdhaarse kolmnurga ühe külje võrrand on $2x - y = 0$ ja punkt $A(5,1)$ on mediaanide lõikepunkt. Koostada kolmnurga külgede võrrandid (pöörates selleks tasandit ümber punkti A nurkade 120° ja -120° võrra).

7.96. Leida võrdhaarse kolmnurga kaks tippu, teades, et nad astsevad reeperi telgedel ja et kolmnurga kolmas tipp asetseb punktis $E(1,1)$.

7.97. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga teravnurkade tipud A ja B asetsevad sirgetel $a\colon 8x - y + 20 = 0$ ja $b\colon 7x + 4y - 41 = 0$ ning kolmas tipp asetseb punktis $C\ (1,2)$. Leida tipud A ja B.

7.98. On antud kolm paralleelset sirget: $y = 0$, $y - 2 = 0$, $y - 3 = 0$. Määrata võrdkülgse kolmnurga külgede tõusud, kui kolmnurga tipud asetsevad vastavalt antud sirgetel.

7.99. Ristküliku ABCD kaks külge on koordinaattelgedel $AB = 5$ ja $AD = 2$. Seejärel paigutatakse ristkülik ümber nii, et tipp A, mis enne ühtis reeperi alguspunktiga, satub punkti $A_1(4,-1)$ ning külg AB, mis ühtis x-teljega, on pöördunud nurga $\alpha = 30°$ võrra. Määrata kolme ülejäänud tipu uued asendid. Teha joonis.

7.100. Korrapärase kuusnurga üks külg on $4x + 2y - 1 = 0$. Koostada ülejäänud külgede võrrandid, teades, et reeperi alguspunkt asetseb kuusnurga sümmeetriakeskpunktis.

7.101. Korrapärase n-nurga tipp asetseb punktis $M_0(x_0, y_0)$ ja ühe külje võrrand on $Ax + By + C = 0$. Koostada ülejäänud $n - 1$ külje võrrandid.

Afiinse reeperi teisendamine tasandil.

7.102. Kuidas muutuvad suvalise punkti $M(x,y)$ koordinaadid, kui afiinse reeperi abstsisstelg jääb endiseks ning muutub ainult ordinaattelje suund; abstsissteljeks võtta endine ordinaattelg ning ordinaatteljeks endine abstsisstelg?

7.103. Kaldreeperis ($\omega = 60°$) on antud punkt $M(-1,4)$. Määrata selle punkti koordinaadid uue reeperi suhtes, mille telgedeks on endiste telgede vaheliste nurkade poolitajad.

7.104. On antud täisnurkne võrdhaarne kolmnurk kaatetiga a, koordinaattelgedeks on võetud kaatetid CA ja CB. Seejärel jäetakse abstsisstelg muutmata, ordinaatteljeks võetakse hüpotenuusi AB sirge. Leida koordinaatide teisendusvalemid.

7.105. Leida koordinaatide teisendusvalemid üleminekul kaldreeperilt $R = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ (reeperinurgaga ω) ristreeperile $R' = \{O, \bar{e}, \bar{j}\}$, kusjuures ristreeperi telgedeks on kaldreeperi telgede vaheliste nurkade poolitajad.

7.106. Leida koordinaatide teisendusvalemid üleminekul kaldreeperilt $R = \{O, e_i\}$, $i = 1,2$ (reeperinurgaga ω) kaldreeperile $R' = \{O', \bar{e}'_i\}$ (sama nurgaga ω), kui nende reeperite samanimelised teljed on teineteisega risti, erinimelised teljed aga moodustavad teravnurga.

7.107. Kuidas tuleb muuta reeperit, et 1) kõikide punktide abstsissid suureneksid viie ühiku võrra; 2) kõikide punktide ordinaadid väheneksid kahe ühiku võrra; 3) kõikide punktide abstsissid väheneksid samaaegselt kolme ühiku võrra ning ordinaadid suureneksid kolme ühiku võrra ?

7.108. Leida afiinsete koordinaatide teisendusvalemid, kui on antud uute ühikvektorite ja uue alguspunkti vanad koordinaadid:

1) $\overrightarrow{O'E'_1} = (2, 5)$, $\overrightarrow{O'E'_2} - (7, 9)$, $O'(3, 1)$;

2) $\overrightarrow{O'E'_1} = (5, 0)$, $\overrightarrow{O'E'_2} = (0, 4)$, $O'(3, 5)$;

3) $\overrightarrow{O'E'_1} = (0, 2)$, $\overrightarrow{O'E'_2} = (-7, 0)$, $O'(0, 2)$;

4) $\overrightarrow{O'E'_1} = (a, 0)$, $\overrightarrow{O'E'_2} = (0, b)$, $O'(0, 0)$;

5) $\overrightarrow{O'E'_1} = (0, a)$, $\overrightarrow{O'E'_2} = (b, 0)$, $O'(0, 0)$.

7.109. Leida afiinsete koordinaatide teisendusvalemid , kui on antud uute ühikpunktide ja uue alguspunkti vanad koordinaadid:

1) $E_1'(2, 5)$, $E_2'(-3, 7)$, $O'(5, 4)$;

2) $E_1'(0, 0)$, $E_2'(0, 1)$, $O'(1, 0)$;

3) $E_1'(a, 0)$, $E_2'(0, b)$, $O'(a, b)$.

7.110. Tasandi suvalise punkti M afiinsed koordinaadid reeperi R suhtes on (x, y) ning reeperi R' suhtes (x', y'), kusjuures koordinaatide teisendusvalemid on

$$x = 2x' - 5y' + 3, \quad y = -x' + 2y' - 2.$$

Määrata reeperi R' alguspunkti ja telgede ühikvektorite koordinaadid reeperi R suhtes.

7.111. On antud punktid A(2,1), B(3,0), C(1,4) afiinse reeperi suhtes. Uue afiinse reeperi suhtes on A(1,6), B(1,9), C(3,1). Leida afiinsete koordinaatide teisendusvalemid. Leida uue reeperi alguspunkti ja ühikpunktide vanad koordinaadid ning vana reeperi alguspunkti ja ühispunktide uued koordinaadid.

7.112. On antud kaks reeperit $R = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ja $R' = \{O', \bar{e}_1', \bar{e}_2'\}$. Uue reeperi R' alguspunkt vana suhtes on $O'(-4, 2)$, x' - telg lõikab x- telge punktis A(2, 0) ja y'- telg lõikab y - telge punktis B(0, 8). Võttes teise reeperi ühikvektoriteks $\overrightarrow{O'A}$ ja $\overrightarrow{O'B}$, avaldada suvalise punkti M vanad koordinaadid uute koordinaatide kaudu.

7.113. Uue afiinse reeperi telgedeks on sirged $2x + y - 4 = 0$ (x'- telg), $x - y + 2 = 0$ (y'- telg) ja uue reeperi alguspunkt asetseb punktis $O'(3, 7)$. Leida koordinaatide teisendusvalemid (lähtereeper on afiinne).

7.114. Sirge s on afiinse reeperi suhtes määratud võrrandiga $x - y + 6 = 0$. Leida sirge s võrrand uue reeperi suhtes, kui uue reeperi telgedeks on sirged

$$x + y - 4 = 0 \qquad (x'\text{- telg})$$

$$2x - y + 1 = 0 \qquad (y'\text{- telg})$$

ning uueks ühikpunktiks on vana reeperi alguspunkt.

7.115. On antud rööpkülik OACB. Vaatleme kaht reeperit, kusjuures mõlema reeperi alguspunktiks on rööpküliku tipp O, x ja y telgede ühisvektoriteks on esimeses reeperis rööpküliku küljed $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OB}$, x'- ja y'- telgede ühisvektoriteks teises reeperis on vastavalt $\overrightarrow{OK}$ ja $\overrightarrow{OL}$, kus K ja L on külgede AC ja BC keskpunktid. Leida rööpküliku tippude koordinaadid teise reeperi suhtes.

7.116. Kolmnurga OAB mediaanid AD ja BE lõikuvad punktis O'. Vaatleme kaht reeperit $R = \{O, \vec{e}_i\}$ ja $R' = \{O', \vec{e}_i'\}$, $i = 1,2$, kus $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_1' = \overrightarrow{O'A}$, $\vec{e}_2' = \overrightarrow{O'B}$. Määrata suvalise punkti M koordinaatide teisendusvalemid üleminekul reeperilt R reeperile R'.

7.117. Kolmnurga üks tipp asetseb ristreeperi alguspunktis, kahe ülejäänud tipu koordinaadid on $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$. Sel korral kolmnurga pindalaks on teatavasti $S = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2)$. Avaldada selle kolmnurga pindala tippude uute koordinaatide kaudu, kui 1) reeperi alguspunkt on rööplükkega viidud punkti $O'(a, b)$,
2) reeperi alguspunkt ja abstsisstelg on endised, kuid ristreeperi asemel on kaldreeper reeperinurgaga ω.

7.118. On antud romb küljega $a = 2$. Reeperi teljed ühtivad algul rombi kahe küljega, mille vahel on nurk $\omega = 120°$, seejärel aga rombi diagonaalidega. Avaldada rombi tippude koordinaadid teise reeperi suhtes ning anda vastavad teisendusvalemid.

7.119. On antud korrapärane kuusnurk ABCDEF. Võttes esimese reeperi alguspunktiks punkti A ning x- ja y- telgede ühikvektoriteks vektorid $\vec{AB}$ ja $\vec{AF}$; teise reeperi alguspunktiks punkti D ning x'- ja y'- telgede ühikvektoriteks $\vec{DB}$ ja $\vec{DF}$, leida kuusnurga tippude koordinaadid mõlema reeperi suhtes.

7.120. Trapetsi ABCD alus AD on kaks korda suurem alusest BC. Esimese reeperi alguspunktiks O valime trapetsi haarade AB ja DC lõikepunkti, x- ja y- telgede ühikvektoriteks aga vastavalt vektorid $\vec{OB}$ ja $\vec{OC}$. Teise reeperi alguspunktiks O' valime diagonaalide AC ja BD lõikepunkti, x'- ja y'- telgede ühikvektoriteks aga vektorid $\vec{O'B}$ ja $\vec{O'C}$. Avaldada suvalise punkti vanad koordinaadid uute koordinaatide kaudu.

Afiinsed teisendused tasandil.

7.121. On antud afiinne teisendus

$$x' = 2x + 3y + 5,$$
$$y' = 4x - 3y - 2.$$

Millisteks punktideks teisenevad antud teisenduse korral punktid O(0, 0), A(5, 2), B(-1, 4) ?

7.122. On antud afiinne teisendus

$$x' = 3x + y - 6,$$

$$y' = x + y + 1.$$

Milliseks punktiks teiseneb antud teisenduse korral punkt A (9, 8) ?

7.123. On antud afiinne teisendus

$$x' = 3x + 4y - 12,$$
$$y' = 4x - 3y + 0.$$

Sirgel $7x - 2y - 24 = 0$ leida selline punkt, mis antud teisenduse korral teiseneb sama sirge punktiks.

7.124. Afiinne teisendus α viib punktid A(2, 1), B (3, 0), C(1, 4) vastavalt punktideks $A'(1, 6)$, $B'(1, 9)$, $C'(3, 1)$. Kuhu teiseneb antud teisenduse korral punkt M(5, 7)? Leida antud teisenduse püsipunktid.

7.125. Leida afiinne teisendus, mis antud kolm punkti

$A_1(1, 0)$, $A_2(0, 2)$, $A_3(-3, 0)$

teisendab vastavalt punktideks

$A_1'(2, 3)$, $A_2'(-1, 4)$, $A_3'(-2, -1)$.

7.126. Leida antud afiinse teisenduse $x' = 4x + 5y - 11$, $y' = 2x + 4y - 7 = 0$ püsipunkt.

7.127. Leida antud afiinse teisenduse $x' = 3x + 4y - 8$, $y' = x + 3y - 4$ püsipunktid.

7.128. On antud afiinne teisendus $x' = 2x + 3y + 5$, $y' = 4x - 3y - 2$. Millised sirged teisenevad antud teisenduse korral

1) x - teljeks ja y - teljeks,

2) sirgeks $2x + 3y + 5 = 0$,
$4x - 3y - 2 = 0$,

3) sirgeks $2x - 6y - 7 = 0$.

7.129. On antud afiinne teisendus $x' = 2x + y - 2$, $y' = x - y - 1$ ja punkt A(1, 1). Leida sirge, mis läbib punkti A ja mis antud teisenduse korral teiseneb punkti A läbivaks sirgeks.

7.130. Leida üldjuhul tasandi afiinne teisendus, mis teisendab reeperiteljed sirgeteks $ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$.

7.131. Leida afiinse teisenduse

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1;$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2$$

püsisirged.

Märkus: Sirget nimetatakse afiinse teisenduse püsisirgeks (invariantseks sirgeks), kui afiinne teisendus teisendab sirge iseeneseks. (Sirge punktid ei pea olema püsipunktid.)

7.132. Leida afiinse teisenduse $x' = 7x - y + 1$, $y' = 4x + 2y + 4$ püsisirged.

7.133. Tõestada, et afiinsel teisendusel $x' = ax - bg$, $y' = bx + ay$, $a^2 + b^2 \neq 0$ ei ole püsisirgeid.

7.134. On antud afiinne teisendus $x' = 5x + 5$, $y' = 4x + 8y$. Leida vektorid, mille kujutised on kollineaarsed originaalidega. Leida selle afiinse teisenduse valemid, kui uue reeperi ühikvektoriteks võtta leitud vektorid.

7.135. On antud afiinsed teisendused

1) $x' = 3x - y$, $y' = x + y$,

2) $2x - 5y$, $y' = 2x + 3y$.

Leida vektorid, mille kujutised on kollineaarsed originaalidega.

7.136. On antud afiinne teisendus

$$x' = 10x + 11y, \quad y' = 10x + 9y.$$

Leida vektor, mille kujutis on risti originaaliga.

7.137. Leida üldkujul afiinsed teisendused, mille korral x - telje iga punkt on püsipunkt.

7.138. Leida üldkujul afiinsed teisendused, mille korral koordinaatteljed on püsisirgeteks.

7.139. Leida üldkujul afiinsed teisendused, mille korral x - telg on püsisirge ja kôik y - telje punktid on püsipunktid.

7.140. Leida afiinne teisendus, mille korral koordinaatteljed on püsisirgeteks ja punktid $A(2, 0)$ ja $B(0,4)$ teisenevad vastavalt punktideks $A'(-6, 0)$ ja $B'(0, 8)$.

7.141. Leida afiinne teisendus, mille korral kôik x-telje punktid on püsipunktid ja punkt $A(2, 6)$ teiseneb punktiks $A'(-1, -4)$.

7.142. Leida afiinne teisendus, mille korral ristkülik $OAOB$ teiseneb rööpkülikuks $OAC'B'$ samade küljepikkustega ja nurgaga $\angle AOB' = \omega$. Ristreeperi alguspunktiks valida punkt O ning baasivektoreiks $\overline{OA}$ ja $\overline{OB}$.

7.143. Leida üldkujul afiinsed teisendused, mille korral sirge $Ax + By + C = 0$ iga punkt on püsipunkt.

7.144. Leida afiinne teisendus, mille korral sirge $x + 2y - 1 = 0$ iga punkt on püsipunkt ja punktid $M(1, 2)$ja

$M'(2, 2)$ on vastavad punktid.

7.145. Leida üldkujul afiinsed teisendused, mille korral sirge $Ax + By + C = 0$ kõik punktid on püsipunktid ja punkt $O(0, 0)$ teiseneb punktiks $S_0(x_0, y_0)$.

7.146. Leida teisendus, mille korral iga punkt teiseneb antud punktiga sümmeetriliseks punktiks antud sirge suhtes: 1) $Ax + By + C = 0$; 2) $x + y - 5 = 0$.

7.147. Leida afiinne teisendus, mille korral sirged $x + y + 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$ on püsisirged ja punkt $M(1, 1)$ teiseneb punktiks $M'(2, 1)$.

7.148. Leida üldkujul afiinsed teisendused, mille korral sirged $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ teisenevad vastavalt y- ja x - teljeks ja punkt $M_0(x_0, y_0)$ teiseneb punktiks $E(1, 1)$.

7.149. Leida üldkujul afiinsed teisendused, mille korral sirged $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $D_1x + E_1y + F_1 = 0$ teisenevad vastavalt sirgeteks $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $D_2x + E_2y + F_2 = 0$ ja punkt $M_1(x_1, y_1)$ teiseneb punktiks $M_2(x_2, y_2)$.

7.150. Leida afiinne teisendus, mille korral sirged $5x - 6y - 7 = 0$, $3x - 4y = 0$ teisenevad vastavalt sirgeteks $2x + y - 4 = 0$, $x - y + 1 = 0$ ja punkt $A(6, 4)$ teiseneb punktiks $A'(2, 1)$.

7.151. Leida antud afiinse teisenduse $x' = 2x + 3y - 7$, $y' = 3x + 5y - 9$ pöördteisendus.

7.152. On antud kaks afiinset teisendust

$$\mu : \quad x' = 2x + y - 5, \quad y' = 3x - y + 7,$$

$$\nu : \quad x' = x - y + 4, \quad y' = -x + 2y + 5.$$

Leida afiinsed teisendused $\mu\nu$ ja $\nu\mu$.

7.153. Leida afiinsed teisendused, mille ruut on ühikteisendus (samasusteisendus).

7.154. Ristreeperi suhtes on antud afiinne teisendus $x' = 7x + y$, $y' = -5x + 5y$. Leida kaks ristuvat vektorit, mis antud teisenduse korral teisenevad ristuvateks vektoriteks. Esitada antud teisendus pöörde ja kahe rist - telgafiinsuse korrutisena.

7.155. Leida tsentroafiinse teisenduse μ peasihid, kui teisendus on ristreeperi suhtes määratud järgmiste valemitega

$$\mu : \quad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned}$$

Märkus. Afiinset teisendust nimetatakse tsentroafiinseks teisenduseks, kui teisendus säilitab vähemalt ühe punkti. Kahte ristuvat sihti, milledele afiinse teisenduse korral vastavad kaks ristuvat sihti, nimetatakse antud afiinse teisenduse peasihtideks.

7.156. Kas tasandi afiinsed teisendused $x' = ax + b$, $y' = cy + d$, kus a, b, c, d on reaalarvud ja $a \neq 0$, $c \neq 0$, moodustavad rühma ?

7.157. Kas tasandi afiinsed teisendused $x' = x$, $y' = ky$, kus k on suvaline nullist erinev reaalarv, moodustavad rühma ? Selgitada antud teisenduse geomeetriline sisu.

7.158. Kas afiinsed teisendused $x' = x + ky$, $y' = y$ (k suvaline reaalarv) moodustavad rühma? Selgitada antud teisenduse geomeetriline sisu.

7.159. Kas afiinsed teisendused $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, kus λ on nullist erinev reaalarv, moodustavad rühma? Selgitada teisenduse geomeetriline sisu.

7.160. Kas ristreeperi korral afiinsed teisendused

$$x' = r\,(x \cos \varphi - y \sin \varphi),$$

$$y' = r\,(x \sin \varphi + y \cos \varphi),$$

kus r ja φ on reaalarvud ja $r > 0$, moodustavad rühma? Selgitada teisenduse geomeetriline sisu.

7.161. Kas afiinsed teisendused $x' = ax - by$, $y' = bx + ay$, kus a, b on reaalarvud, $a^2 + b^2 \neq 0$, moodustavad rühma? Selgitada teisenduse geomeetriline sisu.

7.162. Kas afiinsed teisendused

$$x' = r\,(x \cos \varphi - y \sin \varphi) + a,$$

$$y' = r\,(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + b,$$

kus r, a, b on reaalarvud ja $r > 0$, moodustavad rühma ?

Selgitada teisenduse geomeetriline sisu.

7.163. On antud kolmnurga külgede võrrandid ristreeperi suhtes: $A_i x + B_i y + c_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$
Arvutada kolmnurga pindala.

Märkus: Kasutada afiinseid teisendusi.

7.164. On antud rööpküliku külgede võrrandid ristreeperi suhtes: $Ax + By + C = 0$, $Ax + By + D = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$, $A'x + B'y + D' = 0$. Arvutada rööpküliku pindala, kasutades afiinseid teisendusi.

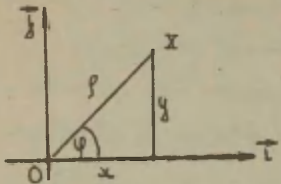
7.165. Koostada sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P(15, 6)$ ja moodustab koos sirgetega $5x - 2y - 5 = 0$, $2x + 5y - 2 = 0$ kolmnurga, mille pindala on 29. (Kasutada afiinseid teisendusi.)

7.166. Koostada sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P(-3, -5)$ ja otsitava sirge lõik, mis jääb sirgete $2x + 3y - 15 = 0$, $4x - 5y - 12 = 0$ vahele, poolitub punktis P. Reeper on afiinne.

7.167. Üldise afiinse reeperi suhtes on antud afiinne teisendus:
$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2.$$
Leida antud afiinse teisenduse valemid uues reeperis, kui üleminekuvalemid vanalt reeperilt uuele määratakse järgmiste seostega:
$$x = c_{11}x^* + c_{12}y^* + c_1,$$
$$y = c_{21}x^* + c_{22}y^* + c_2.$$

3. Polaarkoordinaatide teisendused

Olgu tasandil antud ristreeper ja polaarreeper nii, et poolus asub ristreeperi alguspunktis ning polaartelg ühtib x - teljega (joon. 7.8.) Tasandi igal punktil X on siis koordinaadid (x, y), mis on seotud järgmiselt:



$$x = r \cos \varphi ,$$
$$y = r \sin \varphi , \qquad (7.25)$$

Joon. 7.8.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} , \qquad \cos \varphi = \frac{x}{x^2 + y^2} ,$$
$$\tan \varphi = \frac{y}{x} , \qquad \sin \varphi = \frac{y}{x^2 + y^2} . \qquad (7.26)$$

Valemid (7.25) võimaldavad arvutada punkti ristkoordinaate antud polaarkoordinaatide kaudu; valemid (7.26) vastupidi. Seega on tegemist koordinaatide teisendusvalemitega.

7.168. Punktide polaarkoordinaadid on: $A(2, \frac{\pi}{3})$, $B(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$, $C(5, \frac{\pi}{2})$, $D(3, -\frac{\pi}{6})$, $E(6, \frac{\pi}{2})$, $F(5, 0)$, $G(2, \frac{\pi}{4})$, $H(10, -\frac{\pi}{3})$, $I(8, \frac{2}{3}\pi)$, $J(12, -\frac{\pi}{6})$, $K(1, 45°)$, $L(3, 210°)$ $M(2, 315°)$. Leida nende punktide ristkoordinaadid, kui abstsisstelg ühtib polaarteljega ning reeperi alguspunkt asetseb pooluses.

7.169. Punkti polaarkoordinaadid on $(10, 30°)$. Leida selle punkti ristkoordinaadid, kui poolus on punktis $(2, 3)$ ja polaartelg on rööbik x - teljega.

7.170. Polaartelg on paralleelne ning samasuunaline ristreeperi abstsissteljega ning pooluseks on punkt $O'(1, 2)$. Leida oma polaarkoordinaatidega antud punktide $M_1(7, \frac{\pi}{2})$, $M_2(3, 0)$, $M_3(5, -\frac{\pi}{2})$, $M_4(2, \frac{2}{3}\pi)$ ja $M_5(2, -\frac{\pi}{6})$ ristkoordinaadid.

7.171. Polaarkoordinaatide poolus ühtib ristreeperi alguspunktiga, polaartelg aga esimese reeperinurga poolitajaga. On antud punktide $M_1(5, \frac{\pi}{4})$, $M_2(3, -\frac{\pi}{4})$, $M_3(1, \frac{3}{4}\pi)$, $M_4(6, -\frac{3}{4}\pi)$, $M_5(2, -\frac{\pi}{12})$ polaarkoordinaadid. Leida nenda punktide ristkoordinaadid.

7.172. Poolus asetseb punktis $(3, 5)$. Polaartelg on paralleelne ja samasuunaline y - teljega. Leida punktide $M_1(9, -1)$ ja $M_2(5,5, -2\sqrt{3})$ polaarkoordinaadid.

7.173. Polaarreeperi poolus asetseb ristreeperi alguspunktis ning polaartelg ühtib abstsisstelje positiivse poolteljega. Ristreeperis on antud punktid: $A(-1,1)$, $B(0, 2)$, $C(5,0)$, $O(-4, 0)$, $E(1, 1)$, $F(0, 3)$, $G(0, -1)$, $H(3, -3)$, $I(0, 5)$, $J(-3, 0)$, $K(\sqrt{3}, 1)$, $L(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $U(1, -\sqrt{3})$, $N(8, -6)$. Leida nende punktide polaarkoordinaadid.

7.174. Leida punkti $A = (9, -1)$ polaarkoordinaadid, kui poolus on punktis $(3, 5)$ ja polaartelg on paralleelne y - teljega.

7.175. Polaartelg on paralleelne ja samasuunaline ristreeperi abstsissteljega. On antud pooluse $O(3, 2)$ ja punktide $M_1(5, 2)$, $M_2(3, 1)$, $M_3(3, 5)$, $M_4(3 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$, $M_5(3 + \sqrt{3}, 3)$ ristkoordinaadid. Leida nende punktide polaarkoordinaadid.

7.176. Polaarreeperi poolus ühtib ristreeperi alguspunktiga. Polaartelg ühtib esimese reeperinurga poolitajaga. On antud punktide $M_1(-1, 1)$, $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $M_3(1, \sqrt{3})$, $M_4(-\sqrt{3}, 1)$, $M_5(2\sqrt{3}, -2)$ ristkoordinaadid. Leida nende punktide polaarkoordinaadid.

7.177. Ordinaatteljega paralleelse sirge kõikide punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit : $x = a$. Millist võrrandit rahuldavad nende punktide polaarkoordinaadid?

7.178. Pooluse ümber raadiusega a joonestatud ringjoone kõikide punktide polaarkoordinaadid rahuldavad tingimust $\rho = a$. Millist tingimust rahuldavad nende punktide ristkoordinaadid?

7.179. On antud punktide $A(3, \frac{\pi}{2})$, $B(2, -\frac{\pi}{4})$, $C(1, \pi)$, $D(5, -\frac{3}{4}\pi)$, $E(3, 2)$ ja $F(2, -1)$ polaarkoordinaadid. Määrata antud punktide polaarkoordinaadid uues süsteemis, kus polaartelje suund on muudetud vastupidiseks.

7.180. On antud punktide $M_1(3, \frac{\pi}{3})$, $M_2(1, \frac{2}{3}\pi)$, $M_3(2, 0)$, $M_4(5, \frac{\pi}{4})$, $M_5(3, -\frac{2}{3}\pi)$ ja $M_6(1, \frac{11}{12}\pi)$ polaarkoordinaadid. Pöörame polaartelge, nii et ta läbiks punkti M_1. Leida antud punktide polaarkoordinaadid uues süsteemis.

7.181. On antud punktide $A(2, \frac{\pi}{6})$, $B(3, \frac{4\pi}{3})$, $C(1, \frac{3\pi}{2})$, $D(5, \pi)$, $E(5, 0)$ polaarkoordinaadid. Millised on nende punktide polaarkoordinaadid, kui polaartelge pöörata ümber pooluse positiivses suunas nurga $\frac{3\pi}{4}$ võrra?

7.182. Ristreeperis on antud punktid $M_1(2, -3)$, $M_2(1, -4)$, $M_3(-1, -7)$ ja $M_4(-4, 8)$. Leida lõikude 1) $\overline{M_1M_2}$ 2) $\overline{M_1M_3}$, 3) $\overline{M_2M_4}$, 4) $\overline{M_4M_3}$ pikkused ning polaarnurgad.

7.183. Konstrueerida lõigud, mille alguspunktiks on $M(2, 3)$ ning pikkused ja polaarnurgad on vastavalt: 1) $d =$

$= 2,\ \theta = -\frac{\pi}{10}$; 2) $d = 1,\ \theta = \frac{\pi}{9}$; 3) $d = 5,\ \theta = -\frac{\pi}{2}$.
(Punkti M koordinaadid on antud ristreeperis.)

4. Teisendused ruumis

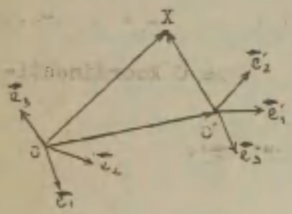
Afiinne teisendus ruumis.

Olgu ruumis antud kaks afiinset reeperit: vana $R = \{O, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_3\}$ ja uus $R' = \{O', \bar e_1', \bar e_2', \bar e_3'\}$ (joon. 7.9). Olgu teada uue reeperi asend vana reeperi suhtes, s.t. olgu antud uue reeperi alguspunkt O' ja uued reeperivektorid oma koordinaatidega $\bar e_i'$ vana reeperi suhtes:

$O'(c_1, c_2, c_3)$ ehk $\overline{OO'} = \bar e_1 c_1 + \bar e_2 c_2 + \bar e_3 c_3$, (7.27)

$\bar e_i' = (c_{1i}, c_{2i}, c_{3i})$ ehk $\bar e_i' = \bar e_1 c_{1i} + \bar e_2 c_{2i} + \bar e_3 c_{3i}$, (7.28)

kus $i = 1,2,3$.



Joonis 7.9.

Maatriksit

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

mille veergudeks on uue reeperivektorite vanad koordinaadid, nimetatakse vaadeldava afiinse teisenduse maatriksiks. Ta on alati regulaarne: det $|C| \neq 0$. Seega kas det $|C| > 0$ või det $|C| < 0$. Esimesel juhul kõneldakse, et reeperid R ja R' on sama orientatsiooniga, teisel juhul vastupidise orientatsiooniga.

Olgu ruumi suvalise punkti X koordinaadid vanas reeperis (x_1, x_2, x_3) ja uues (x_1', x_2', x_3') (vt. joon. 7.9).

$$\overrightarrow{OX} = \vec{e}_1x_1 + \vec{e}_2x_2 + \vec{e}_3x_3 ,$$
$$\overrightarrow{O'X} = \vec{e}_1'x_1' + \vec{e}_2'x_2' + \vec{e}_3'x_3' \qquad (7.29)$$

Jooniselt (7.9) ilmneb, et kehtib võrdus

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{O'X} + \overrightarrow{OO'},$$

milliste seoste (7.27 - 29) põhjal järeldub, et

$$\vec{e}_1x_1 + \vec{e}_2x_2 + \vec{e}_3x_3 = \vec{e}_1 (c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + c_{13}x_3') + \vec{e}_2(c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + c_{23}x_3') + \vec{e}_3(c_{31}x_1' + c_{32}x_2' + c_{33}x_3').$$

Baasivektorite lineaarse sõltumatuse tõttu saame seosed

$$x_i = c_{i1}x_1' + c_{i2}x_2' + c_{i3}x_3' + c_i \quad i = 1,2,3, \qquad (7.30)$$

mis määravad punkti M vanad koordinaadid uute koordinaatide ja uut baasi määravate suuruste kaudu. Seoseid (7.30) nimetatakse afiinsete koordinaatide <u>teisendusvalemiteks</u> üleminekul reeperilt R reeperile R'.

Kasutades maatrikssümboolikat (vt. 1. p.2.) ja tähistades baasivektoritest ja punktide M ja O' koordinaatidest moodustatud maatriksid vastavalt

$$E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) , \qquad E' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

saame baasivektorite teisendusvalemid (2.28) ja reeperi teisendusvalemid (2.30) esitada kujul

$$e' = eC, \qquad (7.28')$$
$$x = Cx + c. \qquad (7.30')$$

Valemid (7.28'), (7.30') on alati pööratavad. Saab alati leida üleminekuvalemid $R' \to R$, kusjuures pöördteisenduse maatriks on lähteteisenduse maatriksi pöördmaatriks.

Valemeid (7.30$'$) saab tõlgendada kahel viisil:

1) reeper ruumis muutub ($R \to R'$) ja selle tõttu iga punkti koordinaadid teisenevad ($(x_i) \to (x_i')$) valemite (7.30$'$) abil; (x_i) ja (x_i') on ühe ja sellesama punkti koordinaadid erinevate reeperite suhtes.

2) (x_i) ja (x_i') on erinevate punktide koordinaadid ühe ja selleeama reeperi suhtes; reeper on muutumatu, muutuvad punktide asendid reeperi suhtes: tegemist on ruumi afiinse teisendusega.

Üldise afiinse teisenduse olulisteks erijuhtudeks on tsentroafiinne teisendus ja rööplüke. Esimest iseloomustab ühe liikumatu punkti (ehk püsipunkti) olemasolu, mistõttu teda nimetatakse ka afiinseks pöördeks. Kui valida see punkt reeperi alguspunktiks, siis seoste (7.30$'$) järgi saame tsentroafiinse teisenduse valemid kujul

$$x = Cx', \tag{7.31}$$

need valemid on homogeensed.

Kui teisendusmaatriks C homogeensetes valemites (7.31) on ühikmaatriks, siis punkti koordinaadid säilivad (ükski punkt ei muuda oma asukohta). Sellist teisendust nimetatakse samasusteisenduseks.

Kui mittehomogeensetes valemites (7.30) $c_{ij} = \delta_{ij}$, s.t. teisendusmaatriks C on ühikmaatriks (vt. 7.30$'$), siis valemid (7.30) omavad kuju

$$x_i = x_i' + c_i. \tag{7.32}$$

Sel korral baasivektorid ei muutu ning tegemist on <u>rööplükkega</u> ruumis: iga ruumi punkt liigub vektori $\overrightarrow{OO'}$ võrra.

Punkte, mis antud afiinse teisenduse korral ei muutu, nimetatakse antud afiinse teisenduse püsipunktideks ehk invariantseteks punktideks.

Sirgeid (tasandeid), mis antud afiinse teisenduse korral teisenevad iseenesteks, nimetatakse antud afiinse teisenduse püsisirgeteks (püsitasanditeks) ehk invariantseteks sirgeteks (tasanditeks).

2. <u>Isomeetriline teisendus ruumis.</u>

Isomeetriline teisendus ehk ortogonaalteisendus on üldise afiinse teisenduse erijuht, mille puhul ristreeper teiseneb jällegi ristreeperiks.

Kui reeperid R ja R' on ristreeperid, siis

$$\bar{e}_i\bar{e}_j = \delta_{ij}, \quad \bar{e}'_i\bar{e}'_j = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3.$$

Reeperi teisendusmaatriksi C veeruvektoriteks on uue reeperi vektorid. Seega kehtib teisendusmaatriksi veergude vahel kuus võrdust

$$c_{1j}c_{1k} + c_{2j}c_{2k} + c_{3j}c_{3k} = \delta_{jk} \tag{7.33}$$

ehk üksikasjalikult

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1,$$

$$c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1,$$

$$c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1,$$

$$c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0,$$

$$c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0,$$

$$c_{13}c_{11} + c_{23}c_{21} + c_{33}c_{31} = 0.$$

või maatrikskujus

$$C^T C = E, \qquad (7.33')$$

kus C^T on teisenduse transponeeritud maatriks ja E ühikmaatriks. Maatriksit, mille korral kehtib seos (7.33'), nimetatakse <u>ortogonaalmaatriksiks.</u> Teisendusmaatriksi ortogonaalsus on mitte ainult tarvilik, vaid ka piisav selleks, et ristreeper teiseneks ristreeperiks. Ortogonaalmaatriksi korral $\det|C| = \pm 1$. Kui siin $\det|C| = 1$, siis kõneldakse ristreeperi pöördest. Ortogonaalsuse tingimused (7.33) määravad 6 sõltumatut seost 9 kordaja c_{ij} vahel. Seega ristreeperi pööre on täielikult määratud kolme parameetriga. Nendeks võetakse tavaliselt kolm nurka, milliseid nimetatakse <u>Euleri nurkadeks.</u> Üldise isomeetrilise teisenduse korral lisandub neile veel kolm vabaliiget c_i, mis määravad rööplükke. Seega sõltub isomeetriline teisendus ruumis maksimaalselt kuuest parameetrist. Isomeetriline teisendus, mille puhul $\det|C| = 1$, on <u>liikumine.</u>

<u>7.184.</u> Kahes paralleelsete ja samasuunaliste telgedega reeperites on punkti A koordinaadid (1,1,1) ja (7,3,-5). Määrata 1) alguspunktide koordinaadid mõlema reeperi suhtes; 2) alguspunktidevahelise lõigu keskpunkti koordinaadid mõlema reeperi suhtes.

<u>7.185.</u> Punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$3x^2 + y^2 - 2xz + 2x - 6y + 4z - 5 = 0.$$

Missugust võrrandit rahuldavad samade punktide koordinaadid uue reeperi suhtes, kui nullpunkt viia rööplükkega punkti $O' = (2, 3, 7)$?

<u>7.186.</u> Üldise ristreeperi pöörde võib esitada kolme

järgmise teisenduse korrutisena

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi , \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi , \\ z_1 = z , \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 , \\ y_2 = y_1\cos\psi - z_1\sin\psi , \\ z_2 = y_1\sin\psi + z_1\cos\psi , \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2\cos\chi - z_2\sin\chi , \\ y_3 = y_2 , \\ z_3 = x_2\sin\chi + z_2\cos\chi . \end{cases}$$

Nurki φ , ψ , χ nimetatakse Euleri nurkadeks. Selgitada Euleri nurkade geomeetriline tähendus.

7.187. On antud kaks afiinset reeperit $R = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ja $R' = \{0, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1\}$. Koostada suvalise punkti koordinaatide teisendusvalemid üleminekul reeperilt R reeperile R'.

7.188. Leida afiinne teisendus püsipunktidega $O(0,0,0)$, $E_1\ (1,0,0)$, $E_2\ (0,1,0)$, mis teisendab punkti $E_3\ (0,0,1)$ punktiks $E\ (1,1,1)$.

7.189. Leida afiinse teisenduse

$$x' = 2x + y + z - 1,$$
$$y' = x + z - 1,$$
$$z' = -z - 2$$

püsipunktid.

7.190. Leida üldkujul afiinsed teisendused, mille püsisirgeteks on reeperiteljed.

7.191. Leida üldkujul afiinsed teisendused, mille püsipunktideks on kõik xy - tasandi punktid.

7.192. Leida üldkujul afiinsed teisendused, mille püsipunktideks on kõik z-telje punktid.

7.193. Leida afiinne teisendus, mille püsipunktideks on $E_1(1,0,0)$, $E_2(0,1,0)$, $E_3(0,0,1)$ ja mis viib reeperi alguspunkti O punkti O', mis on sümmeetriline punktiga O tasandi E_1, E_2, E_3 suhtes.

7.194. Leida afiinne teisendus, mille püsisirgeteks on x - telg, x - ning z - ja y- ning z - telgede vaheliste nurkade poolitajad, kusjuures vektorid z - teljel ei muutu, kuid vektorid nendel nurgapoolitajatel pikenevad kaks korda suunda muutmata.

7.195. On antud tsentroafiinne teisendus

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z\,,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z\,,$$
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z\,.$$

Määrata reeperi alguspunkti läbivate sirgete hulk, mille kujutised on risti originaalidega.

7.196. On antud afiinne teisendus

$$x' = 2x + y, \quad y' = x + 2y, \quad z' = 3x + 4y - 5z.$$

1) Leida vektorid, mille kujutis on kollineaarne originaaliga.

2) Millise kujuga tulevad teisendusvalemid, kui koordinaattelgedeks võtta sirged läbi koordinaatide alguspunkti, mis on paralleelsed punktis 1) vaadeldud vektoritega?

7.197. On antud afiinne teisendus $x' = x + y + 3z$, $y' = x + 5y + z$, $z' = 3x + y + z$.

Leida kolm ristuvat vektorit, mis antud teisenduse korral teisenevad ristuvateks vektoriteks. Esitada antud teisendus isomeetrilise teisenduse ja kolme vastastikku ristuva venituse korrutisena.

7.198. On antud liikumine teisendusvalemitega

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z ,$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z ,$$
$$z' = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z .$$

Eeldades, et see ei ole samasusteisendus, leida tema püsipunktidest koosneva püsisirge sihivektor.

7.199. Eelmises ülesandes antud liikumist võib vaadelda kui pööret ümber püsisirge nurga φ võrra. Leida nurk φ.

7.200. Olgu $\vec{x}$ üle-eelmises ülesandes vaadeldud liikumise (pöörde) püsisirgega ristuv suvaline vektor ja olgu $\vec{x}'$ tema kujutis selles liikumises. Millist tingimust peavad rahuldama püsisirge sihivektori $\vec{e} = (a,b,c)$ koordinaadid, et vektorite kolmik $\vec{r}, \vec{r}^*, \vec{e}$ ja lähtereeperi reeperivektorite kolmik oleksid sama orientatsiooniga.

7.201. On antud ortogonaalteisendus

$$x' = \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{2}{3}z ,$$

$$y' = \frac{2}{15}x + \frac{14}{15}y - \frac{1}{3}z ,$$

$$z' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z .$$

Leida püsisirge sihivektor ja pöördenurk.

7.202. On antud liikumine

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{2}z,$$
$$y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{2}z,$$
$$z' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z.$$

Leida liikumine, mis teostab pöörde ümber sama telje sama nurga võrra, mis antud teisendus, kuid vastupidises suunas.

7.203. Leida liikumise valemid, kui antud pöördetelje sihivektor $\vec{e} = (a,b,c)$ ja pöördenurk φ.

7.204. Koostada koordinaatide teisendusvalemid üleminekult ühelt ristreeperilt teisele, kui uue reeperi koordinaattasandid vana reeperi suhtes on määratud järgmiste võranditega:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0.$$

7.205. Reeperite R ja R' korral xz - ja yz - tasandid ühtivad vastavalt $x'z'$- ja $y'z'$-tasanditega ning xy - tasandi võrrand reeperi R suhtes on $2x + 3y - 6z + 6 = 0$. Avaldada suvalise punkti M uued koordinaadid vanade kaudu, teades, et punktil A on mõlemas reeperis samad koordinaadid $(2,4,6)$.

7.206. Näidata, et kolm tasandit $2x - 2y + z - 3 = 0$, $3x - 6z + 1 = 0$, $4x + 5y + 2z = 0$ on vastastikku risti, ning leida reeperi teisendusvalemid, kui antud tasandid võtta vastavalt $x'y'$-, $y'z'$-, ja $x'z'$- tasandiks. Telgede suunad on valitud selliselt, et vana reeperi alguspunktil uues reeperis on positiivne abstsiss ja negatiivne aplikaat.

7.207. Uue reeperi ühikpunkti E' ning reeperitasandite võrrandid antud reeperi suhtes on:

$$E'(1,3,5), \quad y'z': x + 1 = 0,$$
$$x'z': 2x - y = 0,$$
$$x'y': x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

Leida ruumi suvalise punkti vanad koordinaadid.

7.208. Uute reeperitasandite võrrandid antud reeperi suhtes on:

$$y'z': x + 2y + 5z + 1 = 0,$$
$$x'z': 2x - y + 1 = 0,$$
$$x'y': x + 2y - z - 1 = 0.$$

Kontrollida, kas uued reeperitasandid on vastastikku risti, ning avaldada suvalise punkti M uued koordinaadid vanade koordinaatide kaudu tingimusel, et vanal alguspunktil O on uue reeperi suhtes positiivsed koordinaadid.

7.209. Uue reeperi koordinaattasandite võrrandid antud reeperi suhtes on:

$$y'z': x + y + z - 1 = 0,$$
$$x'z': 2x - y - z + 1 = 0,$$
$$x'y': y - z + 2 = 0.$$

Kontrollida, kas uued reeperitasandid on risti ning avaldada suvalise punkti M uued koordinaadid vanade koordinaatide kaudu, arvestades, et punktil, mille koordinaadid vana reeperi suhtes on $(-1,-1,-1)$, on uues reeperis positiivsed koordinaadid.

7.210. Leida üldjuhul afiinne teisendus, mis teisendab punktid $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$ vastavalt punktideks (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), (x_4,y_4,z_4).

7.211. Leida tasandid, mis afiinee teisenduse

$$x_i' = a_i^j x_j + c_i, \quad \det |a_i^j| \neq 0, \quad i,j = 1,2,3$$

korral teisenevad reeperitasanditeks.

7.212. Leida sirged, mis eelmises ülesandes antud afiinee teisenduse korral teisenevad reeperitelgedeks.

7.213. Leida ortogonaalteisendus, mis jätab reeperi alguspunkti paigale ja teisendab x - telje sirgeks

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu} .$$

V a s t u s e d

IV peatükk

SIRGE TASANDIL

4.2. $P_1 = (-2,-1)$; $P_2 = (-7,2)$. 4.3. Punktid M_1, M_3 ja M_4 asetsevad antud sirgel; punktid M_5, M_7 asuvad positiivsel pooltasandil ning M_2 ja M_6 negatiivsel pooltasandil sirge a suhtes. 4.4. Sirge tõusuga v ja ordinaatlõiguga s_0. 4.5. Märkus. Sirge joonestamiseks on vaja teada kaht tema punkti. Antud sirgetel on teada nende lõikepunktid ordinaatteljega (0,b), seetõttu piisab ühe punkti leidmisest iga sirge jaoks. 4.7. 1) $k = 2$, $b = 3$; 2) $k = -\frac{5}{2}$, $b = 4$; 3) $k = -\frac{3}{8}$, $b = -2$. 4.8. 1) $2x - 3y + 9 = 0$; 2) $3x - y = 0$; 3) $y + 2 = 0$; 4) $3x + 4y - 12 = 0$; 5) $2x + y + 5 = 0$; 6) $x + 3y - 2 = 0$. 4.9. $\sqrt{3}\,x + 3y + 1 = 0$, $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$. 4.10. 1) $-\frac{5}{3}$; 2) $\frac{3}{5}$. 4.11. 1) $x - \sqrt{3}\,y = 0$; 2) $x - y = 0$; 3) $\sqrt{3}\,x - y = 0$; 4) $\sqrt{3}\,x + y = 0$; 5) $x + y = 0$, 6) $y = 0$. 4. 12. $x + y + 2 = 0$. 4.13. (6,0); $2x + 3y - 12 = 0$. 4.14. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Märkus. Kiir tuleb suunata nii, et kui ta peegelduks x-teljelt, siis läbiks ta punkti B', mis on sümmeetriline punktiga B x-telje suhtes. Ülesanne taandub sirge AB' ja x-telje vahelise nurga leidmisele. 4.15. $S \geqslant 2x_1y_1$. 4.16. 1) $b = -a$; 2) $b = a$; 3) $b = -a\sqrt{3}$. Märkus. $k = -\frac{b}{a}$.

__4.17.__ $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$; 2) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{8} = 1$; 3) $\frac{2x}{9} + \frac{y}{3} = 1$; 4) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{2} = 1$; 5) $5x + 2y = 1$. __4.18.__ 1) $x + y + 4 = 0$; 2) $x + y - 5 = 0$; $x - y + 1 = 0$, $3x - 2y = 0$; 3) $x + y = 7$. __4.19.__ 1) $x + y - 2 = 0$; 2) $(\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{2} - 1)y - 10 = 0$, $(\sqrt{2} - 1)x + (\sqrt{2} + 1)y + 10 = 0$, $x - y - 10 = 0$; 3) $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$; 4) $x + 3y - 30 = 0$, $3x + 4y - 60 = 0$, $3x - y - 30 = 0$, $x - 12y + 60 = 0$. __4.20.__ $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$. __4.21.__ 1) $4x + 3y - 12 = 0$; 2) $4x + \sqrt{33}\,y - 4\sqrt{33} = 0$; 3) $x - \sqrt{3}\,y + 4\sqrt{3} = 0$; 4) $5x + 3y - 12 = 0$. __4.22.__ $v = 16$ km/t. __4.24.__ 1) $2x + 9y - 26 = 0$, $7x + 3y + 23 = 0$, $5x - 6y - 8 = 0$; 2) $2x - 3y - 4 = 0$, $2x - y = 0$, $y = 0$; 3) $x - a = 0$, $y - a - b = 0$, $ax + (a - b)y - (a^2 + ab - b^2) = 0$. __4.25.__ Küljede võrrandid: AB: $2x + y - 8 = 0$; BC: $x + 2y - 1 = 0$; CA: $x - y - 1 = 0$; mediaanide võrrandid: $x - 3 = 0$; $x + y - 3 = 0$; $y = 0$. __4.26.__ 1) $k = 7$; $k = \frac{7}{10}$; 3) $k = -\frac{3}{2}$. __4.28.__ 1) asuvad; 2) ei asu. __4.29.__ $(3,-1)$. __4.30.__ $(4,-5)$. __4.31.__ $P(7{,}2,\ 5{,}4)$. Märkus. 1) $OM = 5$, $OP = 9$; $PM = 4$; $\frac{OP}{PM} = \frac{+9}{-4}$. Punkt P jagab lõigu OM suhtes $\lambda = \frac{+9}{-4}$. 2) Teine võimalus. Olgu $P(x_0, y_0)$. Punkt asetseb sirgel OM, s.t. $3x_0 - 4y_0 = 0$; Punkti P kaugus nullpuntist on 9, s.t. $\overrightarrow{OM}^2 = 9^2$ ehk $x_0^2 + y_0^2 = 9^2$. Saadud võrrandisüsteemist saame leida x_0 ja y_0. __4.32.__ $(-8,-7)$ ja $(0;-1)$, __4.33.__ $(\frac{7}{13}, -\frac{4}{13})$ ja $(-\frac{33}{13}, \frac{100}{13})$. __4.34.__ $BC \parallel DA$; $3x - 5y + 5 = 0$; $x - y = 0$; $y - 1 = 0$. Märkus. Et kontrollida antud nelinurga kahe külje paralleelsust, arvutame külgede tõusu. Et leida kesklõiku, arvutame mitteparalleelsete külgede AB ja CD keskpunktid. Diagonaali AC võrrandi koostamiseks kasutame võrrandit (4.5). Antud juhul on AC: $\frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{0}$. Võrdus kehtib ainult juhul, kui teise murru lugeja on null, s.o. $y - 1 = 0$.

<u>4.35.</u> 1) $y = -1$; $y = x - 4$ või $y = -x + 2$; 3) $y = 3x - 10$.

<u>4.36.</u> 1) $2x + 3y - 7 = 0$; 2) $3x - 2y - 4 = 0$.

<u>4.37.</u> $y = \pm x \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$. <u>4.38.</u> 1) $y = 4x$; 2) $y = -2x$; 3) $3x + y = 0$ või $y = \frac{1}{3}x$; 4) $x - (2t \pm \sqrt{3})y = 0$

<u>4.39.</u> $M_1(0,2)$ ja $M_2(0,-8)$. <u>4.40.</u> $x = \sqrt{3}\,t$, $y = t$. <u>4.43.</u> 1) $4x + y = 0$; 2) $4x - 7y - 15 = 0$; 3) $x - 2 = 0$; 4) $y + 3 = 0$. <u>4.44.</u> $7x - 2y - 20 = 0$. <u>4.45.</u> 1) $a = -2$, $5y - 33 = 0$; 2) $a_1 = -3$, $x - 56 = 0$; $a_2 = 3$, $5x + 8 = 0$; 3) $a_1 = 1$, $3x - 8y = 0$; $a_2 = \frac{5}{3}$, $33x - 56y = 0$. <u>4.46.</u> $m = 7$, $n = -2$, $y + 3 = 0$. <u>4.47.</u> $m = -4$, $n = 2$, $x - 5 = 0$. <u>4.48.</u> 1) $3x + 4y - 16 = 0$; $5x + 3y - 1 = 0$; $2x - y - 7 = 0$; 2) $5x - 2y - 33 = 0$, $x + 4y - 11 = 0$, $7x + 6y + 33 = 0$. <u>4.49.</u> $7x - 2y - 12 = 0$, $5x + y - 28 = 0$, $2x - 3y - 18 = 0$. <u>4.50.</u> $2x + y - 1 = 0$; $2x - y + 1 = 0$; $6x - 3y + 19 = 0$; $6x + 3y - 19 = 0$.

<u>4.51.</u> $3x + 2y = 0$, $2x - 3y - 13 = 0$. <u>4.53.</u> $5x - 6y = 0$.

Märkus. Otsitav sirge läbib reeperi alguspunkti, s.t. vabaliige sirge võrrandis on võrdne nulliga ning võrrand on $Ax + By = 0$. Antud sirge sihivektor on otsitava sirge normaalvektoriks. Seega on kõige lihtsam võtta otsitava sirge tundmatu x kordajaks antud sirge tundmatu y kordaja ja otsitava sirge tundmatu y kordajaks antud sirge tundmatu x kordaja vastandmärgiga. <u>4.54.</u> 1) $2x + 3y - 26 = 0$; 2) $x +$

$+ 4y - 3 = 0$; 3) $y - 3 = 0$; 4) $x + 2 = 0$. 4.55. $5x - 3y - 25 = 0$ ja $5x - 3y + 9 = 0$. 4.56. $5x - y + 3 = 0$, $17x + 34y - 38 = 0$, $22x + 33y - 35 = 0$. 4.57. $4x + 3y - 11 = 0$, $x + y + 2 = 0$, $3x + 2y - 13 = 0$. 4.58. $4x + y - 3 = 0$. 4.59. $x - 5 = 0$. 4.60. B(6,4). 4.61. $5x + y - 16 = 0$, $x - 5y + 2 = 0$. 4.62. $3x - 4y - 10 = 0$. 4.63. $3x + 4y + 8 = 0$. 4.64. $\pm 20x - 21y + 105 = 0$. 4.65. $72x - y = 0$, $12x + 71y = 0$. 4.66. $7x - 3y - 73 = 0$ või $3x + 7y - 23 = 0$ Märkus. Kuna kiir langeb sirgele 45°-se nurga all, siis peegeldunud kiir on eellega risti. 4.67. $3x + y + 9 = 0$, $3x - y + 9 = 0$. 4.68. Langev kiir $5x - 4y + 2 = 0$, peegeldunud kiir $4x - 5y + 1 = 0$. 4.69. $29x - 2y + 33 = 0$. 4.70. $y = (-1 + \sqrt{2})x$. 4.71. $y = -2x + 7$, $y = -\frac{1}{2}x - 3$. Märkus. Mõlemad kaatetid läbivad punkti A; üks neist moodustab hüpotenuusiga 45°-se nurga (kolmnurk on võrdhaarne), teine kaatet on risti esimesega. 4.72. $x - 2y - 1 = 0$. 4.73. $M_1(4,0)$, $M_2(-1,5)$. 4.74. $\frac{+y}{-2} + \frac{x}{5} = 1$. 4.75. Punktid M_1 ja M_2 on sirgel. Punktid M_2, M_4, M_5, M_6 asuvad positiivsel pooltasandil ja M_3, M_7 negatiivsel pooltasandil sirge suhtes. 4.79. 1) $k = 2$, $a = -2$, $b = 4$; 2) $k = -\frac{2}{3}$, $a = 3$, $b = 2$; 3) $k = -\frac{1}{2}$, $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$; 4) $k = \frac{3}{4}$, $a = -2$, $b = \frac{3}{2}$; 5) $k = -\sqrt{3}$, $a = -1$, $b = -\sqrt{3}$. 4.81. $5x - y - 7 = 0$. 4.82. $3x - y + 4 = 0$. 4.83. $x = -6 + 7t$, $y = -4 - 3t$. 4.84. 1) $x = -2t$, $y = -5/6 + t$; 2) $x = 4 + 2t$, $y = t$; 3) $x = t$, $y = -3t + 5$; 4) $x = 2$, $y = t$; 5) $x = t$, $y = -3$; 6) $x = 3t$, $y = -2t$. 4.85. $3x + y - 1 = 0$, $7x + 5y - 34 = 0$. 4.86. $x = 3 + 3t$, $y = -5t$. 4.87. $-1/6 \leqslant t \leqslant 1/3$. 4.88. 1) $8x - y = 0$; 2) $x - y + 2 = 0$;

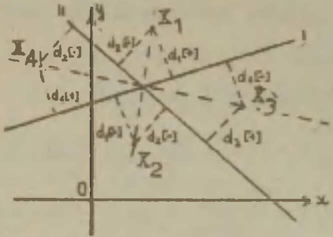
3) $3x - 2y = 0$; 4) $x - 1 = 0$; 5) $y + 3 = 0$. __4.89.__ $3x + 8y - 9 = 0$. __4.90.__ $x - 2y - 4 = 0$. __4.91.__ $5x + 7y - 11 = 0$. __4.92.__ 1) $x = -2t + 3$, $y = t - 5$; 2) $x = 5t + 2$, $y = 4t + 5$. __4.93.__ 1) $x - 3 = 0$, $y + 2 = 0$; 2) $3x - 2y - 13 = 0$; 3) otsitav sirge ühtib antud sirgega. __4.94.__ $x - 3y - 7 = 0$, $2x + 5y - 3 = 0$. __4.95.__ $3x + 4y - 16 = 0$, $5x + 3y - 1 = 0$, $2x - y - 7 = 0$. __4.96.__ $x + y - 7 = 0$. __4.97.__ $x - y - 7 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$. __4.98.__ $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 6 = 0$, $x + 2y - 23 = 0$, $2x - y + 14 = 0$. __4.99.__ $9x + 12y + 20 = 0$, $5x - 12y + 36 = 0$. __4.100.__ $\sqrt{3}x - 2y = 0$ (risti x-teljega); $2x - \sqrt{3}y = 0$ (risti y-teljega). __4.101.__ 1) $7x + 5y = 0$; 2) $x + 7y - 27 = 0$; 3) $x - 5y - 5 = 0$. __4.102.__ 1) $\omega = \frac{1}{4}\pi$; 2) $\omega = 60°$ või $300°$. __4.103.__ Sirge moodustab telgedega x ja y nurgad $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ja $\omega - \varphi = -\frac{1}{6}\pi$. Märkus. Kasutame valemit (4.34). __4.104.__ 1) $x - 2y - 5 = 0$; 2) $y = x - 2$; 3) $y = 2x - 1$. __4.105.__ $\omega = 60°$ või $\omega = 300°$. __4.106.__ $11x + y - 17 = 0$. __4.107.__ $x + y - 4 = 0$. __4.108.__ $x + 2y - 7 = 0$ ja $2x - 3y = 0$. __4.109.__ $d = 7$. __4.110.__ $S = 12$. __4.111.__ Sirge $x + y = 3$. __4.112.__ $\vartheta = \frac{2}{3}\pi$. __4.113.__ $x + y + a = 0$ ja $x - y = 0$. __4.114.__ $(x - x')\sin\alpha - (y - y')\cos\alpha = 0$. __4.115.__ 1), 4), 6) on antud normaalvõrranditega. __Märkus.__ Normaalvõrrandi korral on normeeriv tegur 1. __4.116.__ 1) $\frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} - 2 = 0$; 2) $\frac{-4x}{5} + \frac{3y}{5} - 10 = 0$; 3) $\frac{-12x}{13} + \frac{5y}{13} - 1 = 0$; 4) $-x - 2 = 0$; 5) $2x - y - \sqrt{5} = 0$; ; 6) $\frac{y}{2} - x\sqrt{\frac{3}{2}} - 2 = 0$; 7) $-x\cos 10° - y\sin 10° - 4 = 0$ või $x\cos 190° + y\sin 190° - 4 = 0$. __4.117.__ $p = \frac{2}{3}$. __4.118.__ $x + 2y \pm 5 = 0$. __4.119.__ 1) $3\sqrt{2}$; 2) 7/5. __4.120.__ 1) $d = 3$; 2) $d = 4$; 3) $d = 5\frac{2}{3}$; 4) $d = 0$, s.t. punkt

P_4 asetseb antud sirgel; 5) d = - 2,2. 4.121. 13/5, 2, 11/5, 12/5, 0. 4.122. d = 2. 4.123. $h_A = \frac{29\sqrt{5}}{28}$; $h_B = 4\frac{6}{13}$; $h_C = 2$. Märkus: Et leida kõrguste pikkust, arvutame iga tipu kauguse vastasküljest. 4.124. 78, 273, 70. 4.125. $d = 25/\sqrt{34}$. 4.126. 4. 4.127. 1) d = 3, δ = 3; 2) d = 1, δ = 1; 3) d = 4, δ = -4; 4) d = 0, δ = 0 - punkt Q asub sirgel. 4.128. 8x - 15y + 9 = 0. 4.129. M(2,3). 4.130. $M_1(0,-12)$, $M_2(0,4/3)$. 4.131. M(x,0), kus $x = a \pm \frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$; ruutjuure ees olev märk sõltub sellest, kas a ja b on sama või erineva märgiga. 4.132. (-10,1), (-4,3); (-11/4,-11/8), (9/4,9/8). 4.133. (3,5) ja (-37,45). 4.134. 1) (3,0); 2) (1,6 , -1,4). 4.135. (8,1) ja (808/49,465/49). 4.136. P(0, 11). 4.137. P(2,-1). 4.138. P(2,5). 4.139. 1) (5,5), (-3, 11), (3,19), (11,13); 2) (1,8). 4.140. (-3/10,0), (0,9/2). 4.141.(0,6), (-1,13/2). 4.142. (6/5,-17/5), (-74/5,43/5), (66/5,37/5), (-14/5,23/5). 4.143. P(11/6,1/6). 4.144. 1), 3), 4) - samal pool; 2), 5) - teine teisel pool. 4.145. 1) On kumer. 2) Ei ole. 4.146. 1) teravnurgas; 2) nürinurgas. 4.147. 1) ühes nurgas; 2) kõrvunurkades; 3) tippnurkades. 4.148. 1) tippnurkades; 2) kõrvunurkades; 3) samas nurgas. 4.149. Kolmnurga sees. 4.150. Väljaspool kolmnurka. 4.153. $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. 4.154. d = 0,5. 4.155. $1/\sqrt{58}$. 4.156. d = = 2,5; 2) d = 3; 3) d = 0,5; 4) d = 3,5. 4.157. 5x - 12y - - 32 = 0. 4.158. 4x - 3y + 26 = 0, 4x - 3y - 24 = 0. 4.159. x - 10 = 0, x + 4 = 0. 4.160. 3x - 4y - 25 = 0, 3x- 4y + + 5 = 0. 4.161. 5x + 12y + 64 = 0. 5x + 12y - 66 = 0. 4.163. 1) 3x - 2y - 7 = 0; 2) 5x + y - 7 = 0; 3) 8x + 12y+

30

$+ 5 = 0$; 4) $5x + 7y + 9 = 0$; 5) $6x - 30y - 7 = 0$. <u>4.164.</u> Suhtes 2:3, arvestades teisest sirgest. <u>4.165.</u> $x-2y=0$ ja $x - 2y + 5 = 0$ või $2x + y = 0$ ja $2x+y-5 = 0$. <u>4.166.</u> $x + 2y + 3 = 0$, $x + 2y + 7 = 0$ ja $x - 2y + 3 = 0$, $x - 2y + 7 = 0$. <u>4.167.</u> 1) $5x + 12y - 94 = 0$, $y - 7 = 0$; 2) $7x + 24y - 134 = 0$, $x - 2 = 0$; 3) $3x - 4y - 13 = 0$; Märkus. Ülesanne tõmmata läbi punkti P kaks sirget, mis asuvad punktist Q d ühiku kaugusel, on samaväärne ülesandega tõmmata läbi punkti P kaks puutujat ringjoonele, mille raadius on d ja mille keskpunkt on Q. Kui kaugus PQ on suurem ringjoone raadiusest ($PQ > d$), saame sellele ringjoonele joonestada punktist P kaks puutujat; kui kaugus $PQ = d$, saame tõmmata ainult ühe vaadeldud omadusega sirge; kui $PQ < d$, ei ole võimalik tõmmata ühtegi vaadeldud omadusega sirget. Punkti $P(x_0,y_0)$ läbiva sirge võrrand on $y - y_0 = k(x - x_0)$, kus k on sirge tõus. Tõusu k määrame tingimusel, et sirge asub punktist Q kaugusel d. <u>4.168.</u> $x - y + 2 = 0$. Sirge, mis on risti lõiguga AB ja jaotab selle lõigu pooleks. Märkus. Et leida otsitava hulga võrrandit, kasutame punkti M omadust $AM = BM$. Avaldame need lõigud koordinaatide abil ja lihtsustame. <u>4.169.</u> 1) sirge $x - y = 0$; 2) sirge $x + y = 0$; 3) sirge $x - 1 = 0$; 4) sirge $y - 2 = 0$. <u>4.170.</u> Punkt võib liikuda kas mööda sirget $y = 0$ või $y = \sqrt{3}x$. <u>4.171.</u> 1) $x + 2y - 5 = 0$, $x - 6y + 11 = 0$; 2) $4x + y + 5 = 0$, $y - 3 = 0$; 3) $4x + y - 6 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$. Märkus. Punkti $M(1,2)$ läbiva sirge võrrand on $y - 2 = k(x - 1)$ või $kx - y - k + 2 = 0$. Selle sirge kaugus punktist A on $d_1 = \frac{|3k - 3 - k + 2|}{\sqrt{1 + k^2}}$ ja punktist B(5,2) $d_2 = \frac{|5k - 2 - k + 2|}{\sqrt{1 + k^2}}$. Vastavalt ülesande tingimustele $d_1 = d_2$ või kasutades leitud kaugusi $\frac{|2k - 1|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{|4k|}{\sqrt{1 + k^2}}$. Siit saame tõusu k kaks väärtust, seega ülesannet rahuldavad vastuses antud kaks sirget. 4.172. $y - 3 = 0$ ja $12x - 5y - 117 = 0$. Märkus. Ülesande lahendamiseks kasutame valemit $y = kx + b$. Et punkti A kaugus sirgest on 6 ja punkti B kaugus sirgest on 4, siis saame vastavalt

$\frac{2k + 3 + b}{\sqrt{1 + k^2}} = \pm 6$ ja $\frac{5k + 1 + b}{\sqrt{1 + k^2}} = \pm 4$, milledest avaldame k ja b. Sellel ülesandel peab olema neli lahendit; geomeetriliselt tähendab ta kahe ringjoone (keskpunktid on A ja B ning raadiused vastavalt 6 ja 4)ühiste puutujate leidmist. Antud näites on kaks neist reaalsed ja ülejäänud kaks imaginaarsed. 4.173. $4x + 3y + 3 = 0$, $y - 1 = 0$. 4.174. 1) $(3 \pm \sqrt{3})x + 4y = 0$; 2) $y \pm x = 0$; 3) $x + 4y + 1 = 0$, $13x + 16y - 23 = 0$. 4.175. $x + y = 7 \pm 5\sqrt{2}$ (kaks sirget). 4.176. $2x - y = 0$, $22x - 19y = 0$. $4(\sqrt{21} - 2)x + (\sqrt{21} + 32)y = 0$, $-4(\sqrt{21} + 2) + (32 - \sqrt{21})y = 0$. 4.177. $k = \pm 4/3$. Märkus. Iga punkti P(-2,1) läbiva sirge võrrand on $y - 1 = k(x + 2)$. Parameetri k leiame tingimusest, et sirge on 4 ühiku kaugusel punktist C. 4.178. $4x + 3y - 25 = 0$ ja $24x - 7y + 125 = 0$. 4.179. $3x - y - 21 = 0$, $3x - y - 1 = 0$. 4.180. $3x - 2y - 27 = 0$. 4.181. $3x + 4y - 64 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$, $4x - 3y - 2 = 0$, $4x - 3y + 48 = 0$, (0,16), (8,10), (2,2), (-6,8). 4.182. $x \pm 2y \pm 4 = 0$. 4.184. $3x - 3y + 19 = 0$, $3x - 3y - 5 = 0$. 4.185. Sirged $x \pm y = 0$. 4.186. $8x - 2y - 3 = 0$, $4x + 16y - 39 = 0$. Nurgapoolitajad on risti. Lahendus. Otsitavad nurgapoolitajad on nurga külgedest võrdsetel kaugustel olevate punktide hulgaks. Kui me võtame nurgapoolitajal vabalt punkti X_1, siis selle kaugused d_1 ja d_2 antud sirgetest on võrdsed. Me võime arvutada d_1 ja d_2 kas pluss- või miinusmärgiga sõltuvalt sellest, kuidas asetsevad punkt ja sirged. Nurgapoolitaja X_1X_2 kõikide punktide kaugused d_1 ja d_2 on sama märgiga, nurgapoolitaja X_3X_4 kõikide punktide kaugused d_1 ja d_2 on aga erinevate märkidega. Tähistades x ja y nurgapoolitaja muutuvad koordinaadid, saame



Joon.4.12.

$$d_1 = \pm\frac{2x - 9y + 18}{\sqrt{85}},$$

$$d_2 = \pm\frac{6x + 7y - 21}{\sqrt{85}}.$$

Nurgapoolitaja M_1M_2 võrrand on

$$\frac{2x - 9y + 18}{-\sqrt{85}} = \frac{6x + 7y - 21}{\sqrt{85}}$$

või pärast lihtsustamist $8x - 2y - 3 = 0$. Nurgapoolitaja M_3M_4 võrrand on

$$\frac{2x - 9y + 18}{-\sqrt{85}} = -\frac{6x + 7y - 21}{\sqrt{85}}$$

või pärast lihtsustamist $4x + 16y - 39 = 0$.

4.187. 1) $6x + 1 = 0$, $2y - 9 = 0$; 2) $64x + 8y + 11 = 0$, $14x - 112y + 41 = 0$; 3) $x = 0$, $y = 0$; 4) $(3 + \sqrt{5})x +$

$+ 2(2 + \sqrt{5})y = 0$, $(3 - \sqrt{5})x + 2(2 - \sqrt{5})y = 0$. 4.188. $7x + 56y - 40 = 0$. 4.189. $4x - 4y + 5 = 0$. 4.190. $x + y + 5 = 0$. 4.191. $8x + 4y - 5 = 0$. 4.192. $3x - 19 = 0$. 4.193. $12x + 4y - 11 = 0$. 4.194. $x + 3y - 2 = 0$. 4.195. $10x - 10y - 3 = 0$. 4.196. $x - y = 0$, $7x - 56y + 25 = 0$, $77x + 21y - 50 = 0$. 4.197. $4\frac{2}{27}$. 4.198. $(6,6)$, $(-8,-8)$, $(-8,8)$, $(6,-6)$. 4.199. $(0,\sqrt{2})$, $(0,3\sqrt{2})$. 4.200. $x + 2y - 23 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 6 = 0$, $2x - y + 14 = 0$. Märkus. Kahe esimese külje võrrandid võib koostada lihtsamalt. Teades, et ruut on oma keskpunkti suhtes sümmeetriline kujund, siis punkti A läbiv külg peab läbima punkti B', mis on sümmeetriline punktiga B punkti M suhtes. 4.201. 5. 4.202. 49. 4.203. Ülesande tingimust rahuldab kaks ruutu, mis on sümmeetrilised külje AB suhtes. Esimese ruudu külgede võrrandid on: $4x + 3y - 8 = 0$, $4x + 3y + 17 = 0$, $3x - 4y - 6 = 0$, $3x - 4y + 19 = 0$. Teise ruudu külgede võrrandid on: $4x + 3y - 8 = 0$, $4x + 3y - 33 = 0$, $3x - 4y - 6 = 0$, $3x - 4y + 19 = 0$. 4.204. Ülesande tingimusi rahuldavad kaks ruutu; esimese ruudu küljed asuvad sirgetel $3x + 4y - 11 = 0$, $4x - 3y - 23 = 0$, $3x + 4y - 27 = 0$; teise ruudu küljed asuvad sirgetel $3x + 4y - 11 = 0$, $4x - 3y - 23 = 0$, $3x + 4y + 5 = 0$. 4.205. $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$ või $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y + 26 = 0$. 4.206. $12x - 5y + 61 = 0$, $12x - 5y + 22 = 0$ või $12x - 5y + 61 = 0$, $12x - 5y + 100 = 0$. 4.207. $3x - y + 9 = 0$, $3x - y - 3 = 0$, $x + 3y + 7 = 0$. 4.208. Ülesandel on kaks lahendit: $x - 3y + 1 = 0$, $x - 3y + 12 = 0$, $3x + y - 1 = 0$, $3x + y + 10 = 0$ ja $7x + y - 15 =$

$= 0$, $7x + y - 26 = 0$, $x - 7y + 7 = 0$, $x - 7y - 4 = 0$. 4.210. 3. 4.211. (0,1). 4.212. $x - 3y + 12 = 0$. 4.213. $x - 3y - 5 = 0$, $3x + y - 5 = 0$. Märkus. Otsitavad sirged läbivad punkti P ja on risti antud sirgete poolt moodustatud nurkade poolitajatega. 4.214. Ülesandel on kaks lahendit: $y = 0$, $y = 5$ ja $20x + 21y - 20 = 0$, $20x + 21y - 165 = 0$. Märkus. Leida otsitavate külgede tõusud arvestades, et rombi vastaskülgede vahelised kaugused on võrdsed. 4.215. $r = 5$. 4.216. Lahendus. Antud ringjoone keskpunkt asub koordinaatide alguspunktis ja raadius $r = 3$; järelikult asub otsitav puutuja koordinaatide alguspunktist kaugusel $p = 3$. Leiame selle sirge normaalvõrrandi; parameeter p on juba teada ja võrrandil on kuju: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - 3 = 0$; teise parameetri α määrame tingimusel, et sirge läbib punkti (5, 0); järelikult selle punkti koordinaadid rahuldavad sirge võrrandit. Asendades need punktid sirge võrrandisse, saame: $5\cos\alpha - 3 = 0$, millest $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Seejärel leiame viimase kordaja:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}.$$

Ülesandel on kaks lahendit $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3 = 0$ ja $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$, sest ringjoonest väljaspool asuvast punktist saab ringjoonele tõmmata kaks puutujat. 4.217. $5x + 2y - 29 = 0$ ja $2x - 5y - 29 = 0$. 4.218. $C_1(-\frac{5}{3}, 11\frac{1}{4})$, $C_2(-15, -\frac{5}{4})$, $C_3(-\frac{5}{3}, -8\frac{3}{4})$, $C_4(11\frac{2}{3}, \frac{5}{4})$. 4.219. $M_1(0.1)$. $M_2(-9,4)$, $M_3(0,-5)$, $M_4(3, 4)$. Märkus. Kolmnurga sissejoonestatud ringjoone keskpunkt peab asetsema võrdsel kaugusel kõigist kolmest kolmnurga küljest, s.o. peab asetsema kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunktis. Ülesande tingimusi rahuldab neli punkti: kolmnurga sisenurkade poolitajate lõikepunkt M_1 ning punktid, mis tekivad vastavate nurkade A, B ja C sisenurkade poolitajate lõikumisel teiste nurkade välisnurkade poolitajatega (M_2,M_3 ja M_4). 4.220. $(\frac{-5}{12}, -\frac{-5}{12})$. 4.221. $(-2,-6)$. 4.222. 1) $\frac{x}{2\sqrt{7}} + \frac{5y}{2\sqrt{7}} - 2/\sqrt{7} = 0$; 2) $-\frac{x}{7} + \frac{5y\sqrt{3}}{14} - 0{,}5 = 0$; 3) $\frac{2x}{2\sqrt{13}} - \frac{y}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{13}}{2} = 0$. 4.223. $d = 1$. 4.224. $p = \frac{1}{6}$; $\alpha = 0$; $\beta = \frac{\pi}{4}$. 4.225. $\omega = \frac{\pi}{3}$. 4.226. $d = 14\frac{2}{17}$. 4.227. $\frac{10x + 56y - 39}{\pm 13} = 0$. Märkus. Lähtuda valemitest kaldreeperis, teostades reeperivektorite afiinse teisenduse (venituse). 4.228. Normeeriv tegur $N = \pm 1/13$, $d = 3$. 4.231. Sirged $y \pm b = 0$. 4.232. Sirged $x \pm a = 0$. 4.233. 1), 3), 5), 6). 4.234. Sirged a ja b on paralleelsed, nende mõlemaga on risti sirge d; sirged e ja g on paralleelsed ning nendega on risti sirge f. 4.235. $a_1 = 2$, $a_2 = -2/3$. Märkus. Paralleelsete sirgete võrrandites tundmatute kordajad on võrdelised, s.t. $\frac{a+1}{3a} = \frac{-2a}{-8}$. 4.236. 1) $a \neq 3$; 2) $a=3$ ja $b \neq 2$; 3) $a = 3$ ja $b = 2$. 4.237. 1) $m = -4$, $n = 2$ ja $m = 4$, $n = -2$; 2) $m = -4$, $n = 2$ ja $m = 4$, $n = -2$; 3) $m = 0$, n - suvaline. 4.238. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. 4.239. $(\frac{29}{14}, -\frac{5}{14})$. 4.240. 1) $(6,0)$; 2) $(-9,0)$. Märkus. Esimene võimalus: kahe sirge lõikepunkti leidmine; teine võimalus on lahendada ülesanne sirge AB võrrandit koostamata järgmiselt: otsitav punkt asetseb abstsissteljel, järelikult tema ordinaat on null. Teades otsitava punkti ordinaati ja punktide A ja B ordinaate, leiame suhte, milles otsitav punkt jagab lõigu

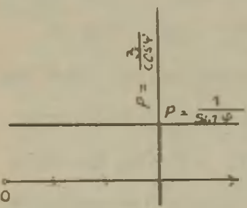
AB. Teades suhet λ , leiame otsitava punkti abtsissi (punktid asetsevad ühel sirgel). 4.241. 1) (0,-3); 2) (0,-11). 4.242. (7,0); $(0,2\frac{1}{3})$. 4.243. 1) 6; 2) 9. 4.244. $m = \frac{7}{12}$. Märkus. Sirgete võrranditest moodustatud võrrandisüsteemil peab olema ühene lahend, s.t. süsteemi determinant $\Delta \neq 0$. Kuna lõikepunkti ordinaat $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ on abstsissteljel, siis $\Delta_2 = 0$. 4.245. $m_1 = 0$, $m_2 = 6$. 4.246. 1) (2,5); 2) sirged on paralleelsed; 3) (-1,4); 4) (3,-5); 5) (5,6); 6) $(-\frac{3}{5}$, 2). 4.248. 1) (3,0), (0,-5), (-2,1); 2) (2,-1), (-1,3), (2, 4); 3) (2,0), (0,5), (-3,0); 4) sirged lõikuvad ühes punktis (2,0). 4.249. S = 17 ruutühikut. 4.250. $C_1(1,-1)$ või $C_2(-2,-10)$. 4.251. (3,4). 4.252. A(6,-2), B(1,2 , 2,8), C(-1,2 , -6,8), D(-6,-2). 4.253. (2,1). 4.254. (2,1), (4, 2), (-1,7), (1,8). 4.255. (3,1), (12,-2), $(8\frac{40}{13}, 3\frac{4}{13})$, $(6\frac{3}{13}, -4\frac{4}{13})$. Märkus. Ülesande lahendamisel võib kasutada asjaolu, et rombi diagonaalid on risti ning poolitavad teineteist. 4.256. (1.-3), (-2,5), (5,-9) ja (8,-17). 4.257. $x + 3y - 1 = 0$. 4.258. $4x + 5y - 21 = 0$. 4.259. $91x - 26y - 2 = 0$. 4.260. $3x - 2y - 7 = 0$. 4.261. $\lambda = -0,5$. 4.262. 1) (2,-7); 2) (-2,-1); 3) (-12,5). 4.263. $2x + 3y - 13 = 0$. 4.264. 1) P'(11,-11); 2) Q'(10,21); 3) R'(2,3); 4) S'(10, -5). Märkus. Tõmbame antud punktist P ristsirge antud sirgele ning leiame nende lõikepunkti P_0, mis on punkti P ja otsitava punkti P' vahelise lõigu keskpunktiks. 4.265. $P(\frac{5}{3},0)$. Märkus. Ülesannet võib lahendada järgmise skeemi järgi: 1) teeme kindlaks, kas punktid M ja N asetsevad ühel pool abstsisstelge; 2) leiame sümmeetrilise punkti ühega neist punktidest abstsisstelje suhtes, näiteks punkti N_1, mis on sümmeetriline punktiga N; 3) leiame punkte M ja N_1 läbiva sirge võrrandi; 4) lahendades saadud võrrandist ja abstsisstelje võrrandist saadud süsteemi, leiame otsitava punkti koordinaadid. 4.267. 1) $\frac{\pi}{7}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0; 4) $-\frac{\pi}{3}$; 5) arctan(-0,75); 6) $\frac{\pi}{4}$; 7) $\frac{\pi}{3}$. 4.268. 1) 5; 2) -7; 3) $-\frac{21}{20}$; 4) $\frac{56}{33}$. 4.269. 45° ja 135°. 4.270. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. 4.271. $AB = 5\sqrt{2}$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$. 4.272. $x + y - 6 = 0$, $x - y = 0$. 4.273. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$. 4.274. 1) $\alpha = 45°$, $\beta \approx 108°26'$, $\gamma = 26°34'$; 2) $\alpha \approx 16°33'$, $\beta \approx 145°18'$, $\gamma \approx 18°9'$; 3) $\alpha = 90°$, $\beta \approx 8°8'$, $\gamma \approx 81°52'$. 4.276. $M(0,3)$, φ = arctan(-2). 4.277. 1) kõrvunurkades; 2) samas nurgas, 3) tippnurkades. 4.278. nürinurgas. 4.279. $\pi/6$. 4.280. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, eeldades, et nurk on tekkinud esimese sirge pöörlemisel vastu kellaosuti liikumist ühtimiseni teise sirgega. 4.284. 1), 2), 3), 5) on; 4), 6), 7) ei ole. 4.285. $a = -7$. 4.286. $3a + 7b + 3 = 0$. 4.288. $S(2,-1)$. 4.291. $C = -29$. 4.292. $a \neq -2$. 4.293. 1) $3x + 2y - 7 = 0$; 2) $2x - y = 0$; 3) $y - 2 = 0$; 4) $x - 1 = 0$; 5) $4x + 3y - 10 = 0$; 6) $3x - 2y + 1 = 0$. 4.294. $25x + 29y - 21 = 0$. Lahendus. Kahe antud sirge lõikepunkti läbiva sirge võrrand on $7x - y + 3 + q(3x + 5y - 4) = 0$. Parameetri q leidmiseks arvestame, et sirge läbib punkti $A(2,-1)$, s.o. selle punkti koordinaadid peavad rahuldama sirge võrrandit; asetades nad sirge kimbu võrrandisse, saame: $q = 6$. Otsitava sirge võrrand on $7x - y + 3 + 6(3x + 5y - 4) = 0$. Lihtsustame. 4.295. 1) $4x - y = 0$; 2) $11y - 16 = 0$; 3) $11x - 4 = 0$; 4) $17x - 40y +$

31

$+ 52 = 0$. Märkus. Kasutame sirgete kimbu võrrandit. 4.296. $14x - 7y + 32 = 0$, $7x + 21y - 75 = 0$. Märkus. Kimbu baasisirged leiame kimbu võrrandist, kui $\alpha = 0$ või $\beta = 0$. 4.297. $91x - 26y + 2 = 0$. 4.298. $x + y + 2 = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x + y = 0$. 4.299. $2x + y - 6 = 0$, $9x + 2y + 18 = 0$. 4.300. $74x + 13y + 39 = 0$. 4.301. $x - 5y + 13 = 0$, $5x + y + 13 = 0$. 4.302. $5x + y - 16 = 0$, $x - 5y + 2 = 0$. 4.303. $7x - 6y + 19 = 0$, $9x + 2y + 5 = 0$. 4.304. $x + 4 = 0$, $3x - 4y + 20 = 0$. 4.305. $3x - 4y + 20 = 0$, $4x + 3y - 15 = 0$. 4.306. $3x - y + 1 = 0$. 4.308. $7x + y - 9 = 0$, $2x + y + 1 = 0$. 4.309. $x - y - 7 = 0$. 4.310. $x - y + 1 = 0$. 4.311. $8x - y - 24 = 0$. 4.312. $2x - y - 5 = 0$. 4.313. $2x + y + 8 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$. 4.314. $3x + y = 0$, $x - 3y = 0$; $3x + 4y - 1 = 0$, $7x + 24y - 61 = 0$. 4.315. Ruudu külgede võrrandid on: $4x + 3y - 14 = 0$, $3x - 4y + 27 = 0$, $3x - 4y + 2 = 0$, $4x + 3y + 11 = 0$; teise diagonaali võrrand on $7x - y + 13 = 0$. 4.316. $7x + 19y - 2 = 0$. 4.317. $x + 5y - 13 = 0$, $5x - y + 13 = 0$. 4.318. $6x + 17y - 15 = 0$. 4.319. $3x + y + 16 = 0$. 4.320. $4x + y + 5 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$, $2x + 5y - 11 = 0$. 4.321. 1) $22x + 33y - 35 = 0$, $5x - y + 3 = 0$, $17x + 34y - 38 = 0$; 2) $4x - 5y + 22 = 0$, $4x + y - 18 = 0$, $2x - y + 1 = 0$. 4.322. CB: $5x - y - 5 = 0$, AC: $x - y + 3 = 0$, CK: $3x - y - 1 = 0$, 2) AC: $4x + 5y - 20 = 0$, CI: $3x - 12y - 1 = 0$, BC: $x - y - 3 = 0$. 4.323. $x + 3y - 9 = 0$, $68x - 17y + 57 = 0$; $65x - 26y + 72 = 0$. Lahendus. Esimest tippu, s.o. kahe esimese sirge lõikepunkti läbiva sirge võrrand on $5x - 2y + 6 + q(4x - y + 3) = 0$. Otsitav sirge, mis läbib seda tippu, peab olema paralleelne kolmnurga kolmanda küljega, järelikult peavad nende võrrandite tundmatute kordajad olema võrdelised: $\frac{5 + 4q}{1} = \frac{-2 - q}{3}$, millest $q = -\frac{17}{13}$. Asendanud leitud q väärtuse sirgete kimbu võrrandisse, saame otsitava sirge võrrandi: $3y + x - 9 = 0$. Samal viisil leiame ka ülejäänud otsitavad sirged. <u>4.324.</u> $x - 5y - 7 = 0$, $5x + y + 17 = 0$, $10x + 7y - 13 = 0$. <u>4.325.</u> 1) AC: $x - 3 = 0$, BD: $y = 0$; 2) AC: $3x + 8y - 7 = 0$, BD: $8x - 3y + 7 = 0$. <u>4.328.</u> $2x - 5y - 2 = 0$. Lahendus. Esimene võimalus. Otsitav sirge on esitatav parameetrite q ja q' vastavate väärtuste puhul nii võrrandiga $x + y - 1 + q(x - 1) = 0$ kui ka võrrandiga $2x - 3y + q'(y + 1) = 0$. Et kaks võrrandit esitaksid üht ja sama sirget, peavad nende võrrandite kõik kordajad olema võrdelised (ka vabaliikmed), s.o. $\frac{1 + q}{2} = \frac{1}{q' - 3} = \frac{1 + q}{-q'}$. Saadud võrdustest leiame q või q'. Lahendi leidmiseks piisab neist ühest, teist kasutame kontrolliks. Tähistades otsitava sirge kordajad A, B, C, nõuame, et kolm sirget läbiksid ühte punkti, s.t.

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

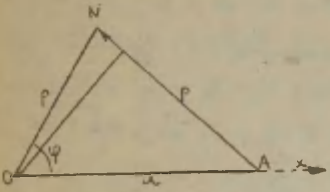
millest leiame, et $A : B : C = 2 : (-5) : (-2)$. <u>4.329.</u> $5x - 2y - 7 = 0$. <u>4.330.</u> 1), 3) lõikuvad ühes punktis (kimp); 2), 4), 5) on paralleelsed (ebakimp); 6) moodustavad kolmnurga; 7) kaks esimest on paralleelsed, kolmas lõikab neid. <u>4.331.</u> $5x - 2y = 0$. <u>4.332.</u> $25x + 29y - 21 = 0$. <u>4.333.</u> $38x - 19y + 30 = 0$. <u>4.334.</u> $32x - 9 = 0$, $32y - 19 = 0$. <u>4.335.</u> $8x - 49y + 20 = 0$. <u>4.336.</u> Kui $\lambda > 0$, siis sirge c on paralleelne antud sirgetega a ja b ning asetseb nende vahel, kui $\lambda = 0$ - sirge c ühtib sirgega a; kui $-1 < \lambda < 0$ - sirge a asetseb sirgete b ja c vahel; kui $-\infty < \lambda < +1$, siis sirge b asetseb sirgete a ja c vahel. 4.337. $r = \frac{b}{\sin\varphi - k\cos\varphi}$. 4.338. 1) $(6, \frac{\pi}{3})$; 2) $(6, -\frac{\pi}{3})$; 3) $(3, 0)$; 4) $(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$; sirge, mis on risti polaarteljega ning eráldab sellel lõigu pikkusega 3 ühikut (vt. joon. 4.13)



Joon. 4.13.

4.339. 1) $(1, \frac{\pi}{2})$; 2) $(2, \frac{\pi}{6})$ ja $(2, \frac{5\pi}{6})$; 3) $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ ja $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$. Sirge, mis asetseb ülemisel pooltasandil, on paralleelne polaarteljega ning asetseb sellest 1 ühiku kaugusel (vt. joon. 4.13.). 4.340. 1) $= \frac{\pi}{3}$ 2) $\varphi = \frac{\pi}{5}$; 3) $\tan\varphi = 1$; 4) $\varphi = 20°$. 4.341. $\rho = p\sec(\varphi - \alpha)$. Märkus. Võrrandi tuletamiseks teha joonis ja kontrollida tulemust ristreeperis. 4.342. $\rho\cos(\varphi - \alpha) = \rho_1\cos(\varphi_1 - \alpha)$. 4.343. $\rho\sin(\beta - \varphi) = \rho_1\sin(\beta - \varphi_1)$; $\rho\cos(\frac{\pi}{4} + \varphi) = 1{,}5$. 4.344. 1) $\rho\sin(\beta - \varphi) = p$, $\rho\sin(\frac{\pi}{6} - \varphi) = 3$; 2) $\rho\cos(\varphi - \alpha) = a\cos\alpha$, $\rho\cos(\varphi + \frac{2}{3}\pi) = -1$; 3) $\rho\sin(\beta - \varphi) = a\sin\beta$, $\rho\sin(\pi/6 - \varphi) = 3$. 4.345. $\rho = \frac{5\sqrt{3}}{\cos(30° - \varphi)}$. 4.346. $\frac{\rho\sin(\varphi - \varphi_1)}{\rho_2\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi - \varphi_1)}}{\sqrt{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_2\rho_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}$, $\frac{7\sqrt{3}}{12}\rho\sin(\varphi - \frac{\pi}{12}) = \sqrt[3]{\rho^2 - 10\rho\cos(\varphi - \frac{\pi}{12}) + 25}$. 4.347. 1) $\rho\cos\varphi = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

$= \frac{8\cos 70^\circ}{\cos\varphi}$. 4.348. $\rho\cos\varphi = 3$. 4.349. 1) $\rho\sin\varphi = 1$; 2) $\rho = \frac{1}{2\sin\varphi}$. 4.350. $\rho = \frac{\rho_0\cos(\alpha - \varphi_0)}{\cos(\alpha - \varphi)}$. 4.351. $\rho = \frac{\rho_0\sin(\alpha - \varphi_0)}{\sin(\alpha - \varphi)}$. 4.352. $\rho\sin\varphi + 5 = 0$, $\rho\sin\varphi - 5 = 0$. 4.353. $d = \rho_0\cos(\alpha - \varphi_0) - p$. 4.354. 1) $\alpha = 0$, $p = 2$; 2) $\alpha = \pi$, $p = 2$; 3) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $p = 3$; 4) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $p = 3$; 5) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $p = 3$; 6) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, $p = \sqrt{2}$; 7) $\alpha = \frac{-2\pi}{3}$, $p = 1$; 8) $\alpha = -\beta$, $p = q$; 9) $\alpha = \beta - \pi$, $p = q$. 4.355. $\rho\sin\varphi = \frac{M}{a}$ või $y = \frac{M}{a}$. Sirge, mis on paralleelne x-teljega, kui x-teljeks on võetud sirge OA (joon. 4.14).



Joonis 4.14.

4.356. 1) $3x - 4y - 12 = 0$; 2) $\frac{3x}{5} - \frac{4y}{5} - \frac{12}{5} = 0$; 3) $y = \frac{3x}{4} - 3$; 4) $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$; 5) $\frac{x}{4} = \frac{(y+3)}{3}$. 4.358. $M_2(3,0)$. 4.360. $y = \frac{\lambda x}{q}$. Märkus. Telgede vahel asuva liikuva sirglõigu otspunktid on $A(bq,0)$ ja $B(0,b)$. Lõiku AB suhtes λ jagava punkti M koordinaadid on $x = \frac{b\cdot q}{1+\lambda}$ ja $y = \frac{\lambda\cdot b}{1+\lambda}$. Elimineerides neist võrdustest b, leiame otsitava trajektoori võrrandi. 4.361. $(A_1A_2 + B_1B_2)(A_1l + B_1m)(A_2l + B_2m) > 0$. 4.362.

$$(A_1A_2 + B_1B_2)\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} < 0.$$

4.363. Sirge. 4.364. $y = \frac{v_2}{v_1}x$. Märkus. Igal ajamomendil t on punktil abstsiss $x = v_1t$ ja ordinaat $y = v_2t$. Elimineerides nendest võrranditest t, saamegi otsitava trajektoori. 4.365. $y = \frac{g_2}{g_1}x$. 4.366. $x/\lambda a + y/\lambda b = 1$ – esialgsega paralleelne sirge.

4.367. $x + y - 4 = 0$, $x - y - 6 = 0$. 4.368. $M(\frac{196}{65}, \frac{112}{65})$. Märkus. Kolmnurkade sarnasusest leiame suhte, milles punkt M jagab lõigu AB ($\lambda = \frac{16}{49}$). 4.369. 4. 4.370. $M(12,-11)$. 4.371. $B(-3, \frac{16}{3})$. 4.372. $\lambda = -2$. 4.373. $x - y = 4$. 4.374. Sirged $4ax \pm c = 0$. 4.375. $y + 4 = 0$. 4.376. $x - 5 = 0$. 4.377. $x - 2y + 9 = 0$, $2x + y - 2 = 0$ või $2x - y + 6 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$. 4.378. Kaateti võrrand: $2x - 3y + 11 = 0$ ja hüpotenuusi võrrand: $x + 5y - 40 = 0$ või $5x - y - 18 = 0$. 4.379. 1) $3x - 4y + 12 = 0$, $4x + 3y + 16 = 0$, $2x - y - 2 = 0$; 2) $7x - y + 3 = 0$; 3) $x + 7y + 4 = 0$; 4) $3x - 4y + 12 = 0$. Märkus. Kolmnurga nurgapoolitaja (bisektriss) jagab vastaskülje osadeks, mis on võrdelised lähisküIgedega, seetõttu tuleb ülesande kolmanda osa lahendamiseks leida külgede AB ja BC pikkused ja suhe $\lambda = AB/BC$. 4.380. $2x - 3y + 20 = 0$, $3x + 2y - 9 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$ või $2x - 3y - 6 = 0$, $3x + 2y + 17 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$. 4.381. $x - 7y + 32 = 0$, $x - y + 2 = 0$. 4.382. Ülesandel on neli lahendit: $(9,-3)$, $(-5,-5)$, $(-1,7)$; $(-9,3)$, $(5,5)$, $(1,-7)$; $(4,-28)$, $(-20,-20)$, $(-6,-18)$; $(-4,28)$, $(20,20)$, $(6,18)$. 4.383. $(7 - \sqrt{5}, 3\sqrt{5} - 10)$ ja $(\frac{14}{3},-3)$. 4.384. $2x - y + 4 = 0$. 4.385. $h = \frac{21}{\sqrt{17}}$; $M(\frac{17}{12}, \frac{11}{3})$; $S = 13\frac{1}{8}$. 4.386. $A_1(-7,15)$; $A_2(9,-9)$. 4.387. $(-0{,}5\ ,\ 0{,}5)$. 4.388. 0,5. 4.389. $x + 2y = 0$, $23x + 25y = 0$. 4.390. $(\frac{10}{3}, \frac{7}{3})$. 4.391. $2x + 5y \pm 10 = 0$. 4.392. $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 8y + 12 = 0$. 4.393. $(-\frac{11}{7},2)$, $(-\frac{1}{3},0)$. 4.394. $(19,0)$, $(21,5)$. 4.395. $(1,2)$, $(5,4)$ või $(\frac{-17}{3}, \frac{11}{3})$, $(\frac{-5}{3}, \frac{17}{3})$. 4.396. $17x - 7y + 49 = 0$, $7x - 3y + 23 = 0$, $2x - y + 7 = 0$ või

$11x - 7y + 49 = 0$, $5x - 3y + 19 = 0$, $2x - y + 7 = 0$. 4.397. $x - 12y + 57 = 0$, $8x - 9y - 56 = 0$. 4.398. $x - 3y + 9 = 0$, $x - 3y - 5 = 0$. 4.399. $x + y - 3 = 0$. 4.400. $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2A_3 + B_2B_3) = (A_2x + B_2y + C_2)(A_1A_3 + B_1B_3)$ ja analoogilise kahe ülejäänud kõrguse kohta. 4.401. $5x + 3y - 4 = 0$, $3x + y - 2 = 0$, $x - y = 0$. 4.402. $3x - 4y + 12 = 0$. 4.403. $AA_1 \approx 10{,}11$, $BB_1 \approx 8{,}04$, $CC_1 \approx 7{,}78$. 4.404. $39x - 9y - 4 = 0$. 4.405. 1) $O(2,4)$; 2) $O(6,-6)$. 4.406. 1) $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$; 2) $4x - y - 13 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 8y + 5 = 0$. 4.407. 1) BC: $x - y - 3 = 0$; AC: $4x + 5y - 20 = 0$; CL: $3x - 12y - 1 = 0$; 2) BC: $3x + 4y - 22 = 0$; CA: $2x - 7y - 5 = 0$; CL: $3x + 5y - 23 = 0$. 4.408. 1) $2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$, $x - y + 2 = 0$; 2) $3x - 5y - 13 = 0$, $8x - 3y + 17 = 0$, $5x + 2y - 1 = 0$. 4.409.

$$S = 0{,}5 \begin{vmatrix} \frac{61}{53} & \frac{237}{53} & 1 \\ \frac{9}{29} & \frac{127}{29} & 1 \\ -\frac{121}{74} & \frac{97}{74} & 1 \end{vmatrix} \approx 1{,}68 \text{ ruutühikut.}$$

4.410. $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$. 4.411. $3x + 7y - 5 = 0$, $3x + 2y - 10 = 0$, $9x + 11y + 5 = 0$. 4.413. $4x + 7y - 1 = 0$, $y - 3 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$. 4.414. $3x + 4y - 15 = 0$; $h = 4{,}4$. 4.415. $P(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$, $S = 7{,}5$. 4.416. 1) $3x + 5y - 30 = 0$, $x - 5 = 0$, $y - 3 = 0$; 2) $4x - 15y - 21 = 0$, $16x + 15y + 41 = 0$, $x + 1 = 0$. 4.417. $(2,-4)$, $(1,2)$, $(3,-4)$ või $(2,0)$, $(3,-6)$, $(1,0)$. 4.418. $(4,1)$. 4.419. 1) $2x + y - 8 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x + 4y - 4 = 0$; 2) $x + 2y - 7 = 0$, $x - 4y - 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$. Märkus. Leiame mediaanide lõikepunkti M. Seejärel leiame mediaani AM ja kolmnurga külje BC lôikepunkti D, mis jaotab lôigu AM suhtes $\lambda = -3$. Paneme läbi punkti D sirge, nii et mediaanidevaheline lôik jaotuks punktis D pooleks. See ongi tipu A vastas asuv kolmnurga külg. 4.420. AB: $4x + 3y - 27 = 0$, AC: $x = 3$, BC: $7x - 3y - 39 = 0$. 4.423. $S_1 : S_2 = 4 : 3$. 4.424. Küljed: $3x + 5y - 15 = 0$, $4x - 3y - 20 = 0$, $7x + 2y - 6 = 0$. Mediaanid: $11x - y - 26 = 0$, $10x + 7y - 21 = 0$, $x - 8y - 5 = 0$. 4.425. 1) $x + 7y - 6 = 0$, $x - y - 6 = 0$, $7x + y - 10 = 0$; 2) $2x - y + 3 = 0$, $2x + y - 7 = 0$, $x - 2y - 6 = 0$. Märkus. Ülesande lahendamisel arvestame, et nurga haarad on sümmeetrilised nurgapoolitaja suhtes, seepärast on küljed AB ja BC sümmeetrilised nurga B poolitaja ($x+y-2=0$) suhtes. Teiste sônadega, küljel BC on punkt A_1, mis on sümmeetriline tipuga A sirge $x+y-2=0$ suhtes. Samal pôhjusel on küljel BC veel teine punkt A_2, mis on sümmeetriline punktiga A nurga C poolitaja ($x-3y-6=0$) suhtes. Selliselt vôime leida sirgel BC kaks punkti A_1 ja A_2 ning külje BC vôrrandi. Kolmnurga teised tipud leiame, kui külje BC lôikepunktid B ning C nurgapoolitajatega.

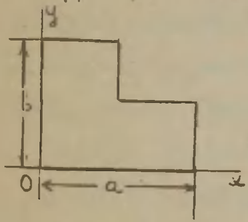
4.426. $7x + y + 18 = 0$. 4.427. $5x + y - 3 = 0$ – sisenurga poolitaja; $x - 5y - 11 = 0$ – välisnurga poolitaja. 4.428. $3x - 4y + 24 = 0$; $5x + 12y + 16 = 0$. 4.429. $x + 3y - 13 = 0$. 4.430. $(2\sqrt{34} + 5\sqrt{5})x + (\sqrt{34} - 3\sqrt{5})y - 7\sqrt{34} - 5 = 0$. 4.431. $x + y - 7 = 0$, $x + 7y + 5 = 0$, $x - 8y + 20 = 0$. 4.432. $2x + 9y - 65 = 0$, $6x - 7y - 25 = 0$, $18x + 13y - 41 = 0$. 4.433. $M_1(2,5)$, kui $BM \parallel AC$ vôi $M_2(14,17)$, kui $AB \parallel CM$. 4.434. $x - y + 1 = 0$; $3x - y - 1 = 0$; $x - 2y + 5 = 0$; $C_1(\frac{7}{5}, \frac{16}{5})$ vôi $x - y + 1 = 0$; $x - 3y + 5 = 0$; $2x - y - 2 = 0$; $C_2(\frac{11}{5}, \frac{12}{5})$. 4.435. CA: $x + 3 = 0$; CB: $2x - 11y + 28 = 0$; vôi CA: $3x -$

$- 4y + 17 = 0$; CB: $2x + y + 4 = 0$. <u>4.436.</u> $-7, 2, 1\frac{1}{3}$. <u>4.437.</u> Sirglõik, mis ühendab kolmnurga aluse ja kõrguse keskpunkte. <u>4.439.</u> A'B': $2x - 5y - 18 = 0$; B'C': $x + 3y - 20 = 0$; C'A': $3x - 2y - 5 = 0$ või A"B": $6x - 15y + 72 = 0$; B"C": $x + 3y + 34 = 0$; C"A": $3x - 2y + 25 = 0$. Märkus. Et leida suurema kolmnurga külgi, arvutame tippude koordinaadid. Tipp A' asub sirgel MA, kusjuures ta kaugus sarnasuskeskpunktist M, s.o. lõik MA', on kolm korda suurem lõigust MA; teiste sõnadega, punkt A' jagab lõigu MA suhtes $\lambda = -\frac{3}{2}$. Tipud B' ja C' jagavad lõigud MB ja MC samas suhtes. Teine kolmnurk on sümmeetriline esimesega sarnasuskeskpunkti suhtes ja ta tipud saadakse lõikude MA, MB ja MC jagamisel suhtes $\lambda_1 = -0,75$. <u>4.440.</u> Lõik, mille otspunktideks on kolmnurga kolmanda külje juures olevate nurkade nurgapoolitajate lõikepunktid nende nurkade vastaskülgedega. <u>4.441.</u> $3x + y - 2 = 0$; $x-3y-14=0$; $x-3y + 16 = 0$ ja $3x + y - 32 = 0$. <u>4.442.</u> Rundu küljed: $4x + 3y + 1 = 0$, $3x - 4y + 32 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$; teine diagonaal: $x + 7y - 31 = 0$. <u>4.443.</u> $3x - 4y + 15 = 0$, $4x + 3y - 30 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$. <u>4.444.</u> $2x + y - 16 = 0$, $2x + y + 14 = 0$, $x - 2y - 18 = 0$. <u>4.445.</u> Ristküliku küljed on $2x - 5y + 3 = 0$, $2x - 5y - 26 = 0$; diagonaali võrrand on $7x - 3y - 33 = 0$. <u>4.446.</u> $2x - 11y + 17 = 0$, $2x - y + 7 = 0$, $2x - 11y + 67 = 0$ ja $2x - y - 3 = 0$. <u>4.447.</u> $S = 37\frac{11}{13}$ ruutühikut. <u>4.448.</u> $3x - 5y + 4 = 0$, $x + 7y - 16 = 0$; $3x - 5y - 22 = 0$, $x + 7y + 10 = 0$. <u>4.449.</u> $x-y-7=0$ ja $x-2y-10=0$. Märkus. Leiame rööpküliku esimese tipu kui kahe antud külje lõikepunkti; seejärel leiame vastastipu C kui diagonaali AC otspunkti, kui on

32

teada lõigu alguspunkt A ning keskpunkt M. Otsitavad küljed läbivad punkti C ning on paralleelsed antud külgedega.
4.450. $\left|\frac{(C-D)(C'-D')}{AB'-A'B}\right|$. 4.451. $x+y-11=0$, $3x-y-16=0$.
4.452. $3x+4y=\pm 1$, $3x-4y=\pm 1$. 4.453. Küljed: $6x-y-21=0$, $x-9y+23=0$, $7x+2y+31=0$, $x-3y-12=0$; diagonaalid: $5x+8y+9=0$, $8x-7y-11=0$. 4.454. $S_1 = 18{,}75$ või $S_2 = 33\frac{1}{3}$. 4.455. (1, 3). 4.456. D(6,3). 4.457. AB: $y = 0$; BC: $y=-\sqrt{3}x+a\sqrt{3}$; CD: $y=-x\sqrt{3}/2+a\sqrt{3}$; DE: $y=2a\sqrt{3}$; EF: $y=-\sqrt{3}x-a\sqrt{3}$; FA: $y=-x\sqrt{3}/2$.
4.458. $y=0$, $y=2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$. (üks võimalikest vastustest sõltuvalt telgede lõplikust fikseerimisest)
4.459. $h=0{,}3\sqrt{5}$. 4.460. (29/18,47/54). 4.461. (2,0) ja (-1,7).
4.462. M(1,0). Märkus. Kerge on veenduda, et murdjoon AMB on punkti M mistahes asendi puhul x-teljel pikkuselt võrdne murdjoonega AMB_1, kus B_1 on punktiga B sümmeetriline punkt x-telje suhtes; murdjoone pikkus on aga lühim, kui kõik kolm punkti A, M ja B_1 asuvad ühel sirgel. Ülesande lahendamisel tuleb leida kõigepealt sirge AB_1 lõikepunkt x-teljega.
4.463. $3x+4y-2=0$, $4x+3y-5=0$. 4.464. $x+y-8=0$. Märkus. Ülesande tingimust rahuldavad kaks sirget: üks neist läbib punkti P ning punkte A ja B ühendava sirge keskpunkti; teine aga läbib punkti P ning on paralleelne lõiguga AB. 4.465. (1,5) ja $\left(\frac{183}{29}, -\frac{79}{29}\right)$. 4.466. $\left(-\frac{2}{5}, \frac{13}{5}\right)$, $\left(\frac{4}{7}, \frac{17}{7}\right)$. 4.467. $3x+y-4=0$; $x+3y-5=0$. Märkus. Iga otsitav sirge läbib üht antud punkti ja teise punktiga antud sirge suhtes sümmeetrilist punkti. 4.468. $4x-3y-1=0$, $2x-y-1=0$, $x-2y+1=0$, $3x-4y+1=0$.
4.470. P'(0,8 ,-1,6). 4.471. (6,0), $2x+3y-12=0$. 4.472. a) $14x-43y+29=0$; b) $2x-25y+23=0$. 4.473. $x=\frac{mx_1+nx_2+px_3}{m+n+p}$, $y =$

$= \frac{my_1+ny_2+py_3}{m+n+p}$. Märkus. Võib algul leida kahe materiaalse punkti raskuskeskme, seejärel leitud punkti ja kolmanda punkti raskuskeskme. 4.474. (5,5 , 4,75). 4.476. $Q(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$. 4.477. $(\frac{a^2}{2(a+b)}, \frac{b^2}{2(a+b)})$. Märkus. Nurga tipp on valitud reeperi alguspunktiks ja nurga haarad telgedeks. 4.478. $(\frac{2}{7}, \frac{25}{14})$. 4.479. $Q(\frac{x_1(b+c)+x_2(a+c)+x_3(a+b)}{2(a+b+c)}, \frac{y_1(b+c)+y_2(a+c)+y_3(a+b)}{2(a+b+c)})$. 4.480. Q(4,2). 4.481. Q(1, 1,5), kui x-telg suunata mööda lühemat ja y-telg mööda pikemat kaatetit. 4.482. $x = 0$, $y \approx 1{,}5867$. Märkus. Valime x-teljeks sirge AB ja y-teljeks raami sümmeetriatelje EC. Kuna raam on ühtlane, siis kaal on võrdeline pikkusega. 4.483. $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$ – mediaanide lõikepunkt. 4.485. C(-a,-b) – üks võimalikest lahendeist. 4.486. $x-y-2=0$. 4.487. $y=2x$. 4.488. $2x-3y=0$. 4.489. Q(8,2 , 6,2). Märkus. Diagonaal AC jagab nelinurga kaheks kolmnurgaks ABC ja ADC. Leiame eraldi tekkinud kolmnurkade raskuskeskmed. Nelinurga raskuskese jagab kolmnurkade raskuskeskmeid ühendava lõigu suhtes, mis on pöördvõrdeline vaadeldud kolmnurkade pindalaga. 4.490. $Q(-\frac{6}{11}, \frac{45}{11})$. 4.491. $Q(\frac{7}{17}, \frac{10}{3})$. 4.492. (5,5). 4.493. $(\frac{5}{12}a, \frac{5}{12}b)$. 4.494. $(\frac{19}{21}a, \frac{19}{21}a)$. 4.495. (7,8). 4.496. 1) Lõikuvad punktis (1,2); 2), 5), 8), 13) ühtivad; 3) lõikuvad punktis (-5,0); 4), 7), 12) on paralleelsed; 6) lõikuvad punktis (15,-10); 10) lõikuvad punktis (-4,-3). 4.498. $(Ax_0+By_0+C)(Ax_0+By_0+D)$ 0. 4.500. $x-2=0$, $x-3y+13=0$. 4.501. $3x-5y+9=0$, $x-y+3=0$, $x-3y+11=0$.



Joonis 4.15.

4.502. $5x - 7y - 3 = 0$, $x+y+3=0$, $7x-5y-9=0$. 4.503. 1) ja 2) $M_1M_2 \parallel l$; 3) M_1 ja M_2 asetsevad teine teisel pool sirget; 4) sirge l lõikab lõigu M_1M_2 pikendit üle punkti M_2. 4.504. Punktid A, B ja C asetsevad paralleelsete sirgete vahel, punktid D aja F asetsevad ühes ning E teises välispiirkonnas. 4.505. Punkt K asetseb külje BC pikendil üle tipu B. Punkt L paikneb küljega AB ja külgede BC ja CA pikenditega üle tippude B ja A piiratud alas. Punkt M asetseb alas, mis on piiratud küljega CA ning külgede AB ja BC pikenditega üle punktide A ja C. Punkt N asetseb külgedega AB ja BC pikenditega üle tipu B piiratud alas. Tulemust on soovitav kontrollida joonisel. 4.506. Antud sirge lõikab kolmnurga külgi CB ja BA ning külje CA pikendit üle tipu A. 4.507. Sirge $2x-y+3=0$ on paralleelne küljega M_1M_3 ning lõikab külgede M_1M_2 ja M_2M_3 pikendit üle punkti M_2. 4.508. Sirge, mille tõus ja y-teljel eraldatud lõik on antud sirgete tõusude ja vastavate lõikude aritmeetilised keskmised. 4.509. $y=cx$. Sirge, mis läbib kahe antud sirge lõikepunkti. Märkus. Antud sirged võtame reeperitelgedeks ning lahendame ülesande kaldreeperis. 4.510. Sirge, mis ühendab diagonaalide keskpunkte. 4.511. $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2B_3 - A_3B_2) = (A_2x+B_2y+C_2)(A_3B_1 - A_1B_3)$ ja analoogiline kahe ülejäänud mediaani jaoks. 4.512. 1) $(-3,7)$, $(-6,10)$, $(9,-17)$, $9x+5y+4=0$; 2) $(1,5)$, $(-3,0)$, $(2,1)$, $x-5y+3=0$. 4.513. $(0,0)$, $(4,8)$, $(2,10)$, $x+y-12=0$; 2) Ülesandel on kaks lahendit: $x-3=0$ ja $5x-3y-1=0$. 4.514. $3x+8y-17=0$, $6x-y-17=0$, $9x+7y+17=0$; $(-5,4)$, $(3,1)$. 4.515. Ülesandel on kolm lahendit: $(1,4)$, $(3,5)$, $(14,-12)$, $16x+13y-68=0$, $17x+11y-106=0$; $(-1,3)$, $(3,5)$, $(16,-11)$, $14x+17y-37=0$,

$16x+13y-113=0$; $(1,4)$, $(5,6)$, $(12,-13)$, $17x+11y-61=0$, $19x+$ $+7y-137=0$. 4.516. Sirge, mis läbib sirgete p ja q lõikepunkti. 4.517. Punkt O ja kolmnurga ABC ümberjoonestatud ringjoon. 4.518. Sirge.

V peatükk

TASAND

5.1. Märkus. Tasand, mille normaalvektoriks on vektor $\vec{n} = (A, B, C)$ ja millel asub punkt $X_1(x_1, y_1, z_1)$, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit $Ax_1+By_1+Cz_1 = -D$, määratakse antud lineaarvõrrandiga. Kui $x=(x,y,z)$ ja $x_1(x_1,y_1,z_1)$ on vastavalt tasandi suvalise ja antud punkti kohavektorid, siis, $\vec{n}(\vec{x}-\vec{x}_1)=0$. 5.2. Tasand läbib punkte A,B,C ja F. 5.3. 9 5.4. 1) $x-4y-z+16=0$; 2) $x+5y-z+5=0$. 5.5. 1) tasand on paralleelne y-teljega; 2) tasand on paralleelne xz-tasandiga; 3) tasand on paralleelne z-teljega; 4) tasand läbib reeperi alguspunkti; 5) tasand läbib x-telge. 5.6. 1) $2y+z=0$; 2) $3x+z=$ $=0$; 3) $4x+3y=0$. 5.7. $y+4z+10=0$; 2) $x-z-1=0$; 3) $5x+y-13=0$. 5.8. $x-2y=0$, $2x+z=0$, $4y+z=0$. 5.9. $5x+3y=0$, $x-3z=0$, $y+5z=0$. 5.10. 1) $z+7=0$; 2) $y-2=0$; 3) $x-3=0$. 5.11. 1) $z-3=0$; 2) $y+2=$ $=0$; 3) $x+5=0$. 5.13. $x-2z=0$. 5.14. $x=2$, $y=6$, $z=-3$. 5.15. $x-$ $-2y+4z-17=0$ 5.16. $7x+y-9z-8=0$ 5.17 $(Ax_0+By_0+Cz_0+D)(Ax_0+By_0+$ $+Cz_0+E) < 0$. 5.18. $E < D < F$ või $E > D > F$. 5.19. $20x+19y-5z+$ $+41=0$. 5.21. $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2}=1$. 5.22. 1) -6; 4; 12; 2) 3; 15; -5; 3) 1; -1; 1; 4) -6; ∞; 1,5; (tasand on paralleelne y-teljega) 5) 0; 0; 0; 6) 7; ∞ ; ∞ ; (tasand on paralleelne yz-tasendiga) 7)-4; 3; 0,5. 5.23. x+y+z-9=0, x-y-z+1=0, x-y+ +z-3=0, x+y-z-5=0. 5.24. x+y+z-2=0. 5.25. 2x-21y+2z+88=0, 2x-3y-2z+12=0; 2) 7x+7y-6z-50=0; 3) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-1,5}=1$. 5.26. 3x-2y+7z-6=0. 5.27. 2x-3y+z-6=0. 5.28. x-3y-2z+2=0. 5.29. 240. 5.30. $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{15}$, $\cos\gamma=\frac{11}{15}$. 5.31. 1) 8; 2) 27. 5.32. a=3. Märkus. Kuna antud tasand lôikab x ja y-telgedelt positiivsed lôigud, aga z-teljelt negatiivse, siis on kuup viiendas oktandis ja antud tasandil asuva kuubi tipu koordinaadid on x=y=-z=a, kus a on kuubi serv. 5.33. 2. 5.34. $3\sqrt{5}x-6y+4\sqrt{5}z-12\sqrt{5}=0$. 5.35. a=4, b=-4, $c=\frac{4}{7}$. 5.36. 35x+21y- -15z-105=0. 5.37. $(\vec{x}-\vec{a})(\vec{b}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a})=0$. 5.39. 1) 4x-y-14z=0; 2) 4x-y-14z=0; 3) 3x+3y+z-8=0; 4) x+3y+6z-13=0. 5.40. 1) Ei saa; 2) Saab. 5.41. x-3y-z+2=0 (ABC); x-4y-z+2=0 (ABD); 2x- -8y-3z+6=0 (ACD); 2x-11y-3z+9=0 (BCD). V=0,5. 5.42. x+y=0. 5.43. 4x-11y+3z=0. 5.44. 1) x+2y+z-9=0; 2) x+y-2=0. 5.45. $\vec{a}_1\vec{a}_2(\vec{x}-\vec{x}_0)=0$ ehk vt. (5.3'). 5.47. x+26y+11z=0. 5.48. 3x- -5y+14=0. 5.49. x+4y+7z+16=0. 5.51. 1) x-y-z=0; 2) 24x-5y- -30z-41=0. 5.52. 10x+9y+5z-74=0. 5.53. x=2-5u+4v, y=3+6u-2v, z=-5+4u; 5x-6y-7z+41=0. 5.54. $(\vec{x}-\vec{a})\vec{n}=0$. 5.55. Ax+By+Cz+D=0. 5.56. 1) x-2=0; 2) y+z+4=0; 3) 4x+5y-z+30=0. 5.57. 2x-y-3z- -15=0. 5.58. 5x-3z=0 ; 2) x-2y+3z+3=0. 5.59. $\overrightarrow{X_1X}\ \overrightarrow{X_1X_2}=0$. 5.60. x-y-3z+2=0. 5.61. 6x-7y+6z-94=0. 5.62. 3x+2y+4z-38=0. 5.63. x+3y-2z-3=0. 5.64. x=4. Hulk on tasand, mis on risti x-teljega ja läbib punkti A(4,0,0). 5.65. $(\vec{x}-\vec{a})\vec{a}=0$ vôi $\vec{x}\vec{a}-\vec{a}^2=0$. 5.66. 1) 2x-y-z-6=0; 2) 3x-6y+2z-49=0. 3) 2x+6y-4z- -56=0. 5.67. 1) n=(2,-1,-2), n=(2 λ ,-λ ,-2 λ); 2) n=(1,5,

$-1)$, $n=(\lambda, 5\lambda, -\lambda)$; 3) $n=(3,-2,0)$, $n=(3\lambda, -2\lambda, 0)$; 4) $n=(0, 5,-3)$, $n=(0,5\lambda,-3\lambda)$; 5) $n=(1,0,0)$, $n=(\lambda,0,0)$; 6) $n=(0,1,0)$; $n=(0,\lambda,0)$, kus λ on suvaline nullist erinev arv. 5.69. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. 5.70. $5x-3y+2z=0$. 5.71. $2x-3z-27=0$; 2) $3x-7y+5z-66=0$; 3) $3x-8y+z+7=0$. 5.72. $2x+3y+4z-1=0$, $x+3y+9=0$, $z-1=0$. 5.74. 1) $7x+y-3z=0$; 2a) $5x+7y+3=0$; 3) $4x-y-2z-9=0$; 4) $3x+y+2z-23=0$. 5.76. $\vec{n}_1\vec{n}_2(\vec{x}-\vec{x}_0)=0$. 5.77. 1) $7x-y-5z=0$; 2) $x+2z-4=0$; 3) $23x+5y-11z+15=0$. 5.78. 1), 2), 4)- lõikuvad, 3) on paralleelsed, 5) ühtivad. 5.79. 1) ja 3). 5.80. $l=3$, $m=-4$; 2) $l=3$, $m=-\frac{2}{3}$; 3) $l=-\frac{10}{3}$, $m=-\frac{6}{5}$. 5.81. 1) ja 2). 5.82. 1) 6; 2) -19; 3) $-\frac{1}{7}$. 5.83. $\vec{x}\vec{a}\vec{b}=0$. 5.84. vt. (5.16). 5.86. $\alpha=\frac{1}{3}\pi$. Märkus. Otsitav nurk on võrdne x-telje ja antud tasandi normaali vahelise nurgaga. 5.87. $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$; $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{6}}$; $\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{6}}$. 5.88. 1) $\cos\varphi=0,7$; 2) tasandid ristuvad; 3) tasandid on paralleelsed; 4) $\cos\varphi=\frac{8}{21}$. 5.89. 1) $\pm\frac{20}{\sqrt{14\cdot55}}$; 2) tasandid ristuvad. 5.90. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. 5.91. $x+3y=0$; $3x-y=0$. 5.92. $x+20y+7z=0$; $x-z=0$. 5.93. $x+y+(4\pm3\sqrt{2})z-2=0$. 5.94. $x+3y=0$; $3x-y=0$. 5.95. $\varphi=\arccos\frac{4}{13}$. 5.96. $\frac{1}{3}\pi$ ja $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{1}{4}\pi$ ja $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\frac{1}{2}\pi$; 4) $\arccos\frac{2}{15}$ ja $\pi-\arccos\frac{2}{15}$. 5.97. $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$. 5.98. $(\vec{x}-\vec{x}_0)\vec{n}_0=0$, kus $\vec{x}=(x,y,z)$ - tasandi suvalise punkti kohavektor, $\vec{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ - tasandi normaali sihiline ühikvektor, $\vec{x}_0$ - tasandi fikseeritud punkti kohavektor. 5.100. Tasandid 1), 4), 5), 7), 9), 11) ja 12) on antud normaalkujul. 5.101. 3); 4). 5.102. $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-6=0$; 2) $-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-3=0$; 3) $\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{11}{14}=0$; 4) $\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{1}{6}=0$; 5) $-\frac{5}{13}y+\frac{12}{13}z-2=0$; 6) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}=0$; 7) $-y-2=0$; 8) $x-5=0$; 9) $z-3=0$; $z-\frac{1}{2}=0$

$\underline{5.103.}$ $P(\frac{b}{a^2}\vec{a})$ teiseneb juhul $P(p\vec{n})$. Märkus. Projektsiooni kohavektor on kollineaarne vektoriga $\vec{a}$, s.t. $\lambda\vec{a}$. Teguri λ arvutame tingimusest, et punkt P asub tasandil. $\underline{5.104.}$ $\frac{4}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{3}{13}z - 4 = 0$. $\underline{5.105.}$ $d = |\vec{x}_1\vec{n}_0 - p|$; $d = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|$. $\underline{5.107.}$ 1) $p = 3$; 2) $p = 1$; 3) $p = 10$. $\underline{5.108.}$ 1) $d = 1$; 2) $d = \frac{3}{2}$; 3) $d = 0$; 4) $d = 4$; 5) 2. $\underline{5.109.}$ 1) $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$, $p = 5$; 2) $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$, $p = 8$; 3) $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 45°$, $p = 3\sqrt{2}$; 4) $\alpha = 90°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 45°$, $p = \sqrt{2}$; 5) $\alpha = 150°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 90°$, $p = 5$; 6) $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 0°$, $p = 2$; 7) $\alpha = 180°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 90°$, $p = \frac{3}{2}$; 8) $\alpha = 90°$, $\beta = 180°$, $\gamma = 90°$, $p = \frac{1}{2}$; 9) $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$, $\beta = \pi - \arccos\frac{2}{3}$, $\gamma = \arccos\frac{2}{3}$, $p = 2$; 10) $\alpha = \pi - \arccos\frac{2}{7}$, $\beta = \pi - \arccos\frac{3}{7}$, $\gamma = \arccos\frac{6}{7}$, $p = \frac{4}{7}$.

$\underline{5.110.}$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ y_1-y_3 & z_1-z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1-z_2 & x_1-x_2 \\ z_1-z_3 & x_1-x_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{vmatrix}^2}}$$

$\underline{5.111.}$ $d = 4$. $\underline{5.112.}$ 1) $h = 3$; 2) $h = \frac{1}{\sqrt{11}}$. $\underline{5.113.}$ $1\frac{1}{3}$.
$\underline{5.114.}$ $x + y - \sqrt{2}z - 2 = 0$. $\underline{5.115.}$ 1) $6x + 3y + 2z \pm 42 = 0$; 2) $6x + 3y + 2z - 75 = 0$, $6x + 3y + 2z - 19 = 0$.
$\underline{5.116.}$ $(-\frac{17}{53}, \frac{63}{53}, 0)$. $\underline{5.117.}$ $d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. $\underline{5.118.}$

Märkus. Kuna reeperi alguspunkt asetseb antud paralleelsete tasandite vahel, siis otsitav kaugus leitakse, kui kauguste summa reeperi alguspunktist : $d = p_1 + p_2 = 1 + 3 = 4$. Teisiti võib antud kaugust leida veel kui ühe tasandi punkti kaugust teisest tasandist. 5.119. 1) $d = 2$; 2) $d = 3{,}5$; 3) $d = 6{,}5$; 4) $d = 1$; 5) $d = 0{,}5$; 6) $d = \frac{5}{8}$. 5.120. $Ax + By + Cz + D \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d = 0$. 5.121. 1) $3x - 6y - 2z + 35 = 0$ ja $3x - 6y - 2z - 7 = 0$; 2) $2x - 2y - z - 18 = 0$, $2x - 2y - z + 12 = 0$; 3) $20x - 4y - 5z + 133 = 0$, $20x - 4y - 5z - 119 = 0$. 5.122. $Ax + By + Cz + \frac{D_1 + D_2}{2} = 0$. 5.123. $8x - 16y + 8z - 5 = 0$. 5.124. 8. 5.125. $l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) \pm d\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 0$. 5.126. Antud tasand ja tasand $x + 2y - 2z - 35 = 0$. Märkus. Otsitava tasandi võrrandi võib kohe kirjutada kujul $x + 2y - 2z + D = 0$. D leiame tingimusest, et punkti M kaugus otsitavast tasandist on 7. Saame $D_1 = 7$, $D_2 = -35$. 5.127. $2x + y - 4z + 17 = 0$, $2x + y - 4z - 25 = 0$. 5.128. $x + 2y + 2z - 9 = 0$, $y - 2 = 0$. 5.129. $3x - z = 0$, $x - z = 0$. 5.130. 1) $4x - y - 2z - 4 = 0$; 2) $3x + 2y - z + 1 = 0$; 3) $20x - 12y + 4z + 13 = 0$. 5.131. (0, 7, 0), (0, -5, 0). 5.132. (0, 0, 3). 5.133. (2, 0, 0), $(\frac{11}{43}, 0, 0)$. 5.134. (0, -3, 0). 5.135. M(0, 0, 3), $M(0, 0, -\frac{5}{2})$. 5.136. $x + 2y + 2z - 9 = 0$ või $y - 2 = 0$. Märkus. Lihtsam on tasandi normaalvõrrandi leidmine. Nelja suuruse $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ja p leidmiseks on teada kolm kaugust ja sirge sihikoosinuste suhe. 5.137. $M(\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{9})$. Märkus. Vastus anda sfääri kohta, mis asetseb antud tetraeedri sees. Leidub veel teisi sfääre, mis puutuvad küll tetraeedri tahke, kuid asetsevad väljaspool seda. 5.138. M(3/2, - 3/2, - 3/2), r = 3/2. 5.139. Seitse tasandit: $x - z - 6 = 0$, $x + y - 10 = 0$, $x + 2y - z - 8 = 0$, $2x + y - z - 14 = 0$, $x - y - z - 2 = 0$, $2x + y + z - 16 = 0$, $5x + y - 2z -$

$-28 = 0$. 5.140. 1), 2), 4) samal pool; 3), 5),6) erinevatel pooltel. 5.141. Punktid A ja B asuvad antud tasandil, punktid D ja E ühel pool ja punktid C ja F teisel pool tasandit. 5.144. $P(-12, -4, 18)$. 5.145. A' $A'(\frac{9}{7}, -\frac{13}{7}, \frac{17}{7})$. Märkus. Punktiga A antud tasandi suhtes sümmeetrilise punkti A' leidmiseks arvutame punkti A kauguse sellest tasandist $d = 3$; järelikult $AA = 2d = 6$. Lõigu AA' suund on vastupidine reeperi alguspunktist tasandile tõmmatud ristlõiguga, s.t. punkt A ja reeperi alguspunkt asetsevad teine teisel pool tasandit. Teades lõigu pikkust, algust ja suunda, saame leida ka selle lõpp-punkti. 5.146. $(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)(A_1x_o + B_1y_o + C_1z_o + D_1)(A_2x_o + B_2y_o + C_2z_o + D_2) < 0$. 5.147. 1) Kõrvunurkades; 2) samas nurgas; 3) tippnurkades. 5.148. 1) kõrvunurkades; 2) tippnurkades. 5.149. Teravnurgas. 5.150. Nürinurgas. 5.151.

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Märkus. Otsitavad tasandid on punktide $X(x,y)$ hulgad, mille kaugused antud tasanditest on võrdsed

$$d_1 = \frac{|A_1x + B_1y + C_1z + d_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = d_2.$$

Viimasest tingimusest saamegi otsitava tasandi võrrandi. 5.152. $\vec{x}(\vec{n}_1 - \vec{n}_2) = p_1 - p_2$ ja $\vec{x}(\vec{n}_1 + \vec{n}_2) = p_1 + p_2$. 5.153. $4x - 4y + 4z - 7 = 0$, $10x + 6y - 4z - 5 = 0$. 5.154. 1) $4x - 5y + z - 2 = 0$, $2x + y - 3z + 8 = 0$; 2) $x - 3y - 1 = 0$, $3x + y - 2z - 1 = 0$; 3) $3x - 6y + 7z + 2 = 0$, $x + 4y + 3z +$

$+ 4 = 0$. 5.155. $8x - 4y - 4z + 5 = 0$. 5.156. $8x + 5y - 9z - 24 = 0$. 5.157. $-\frac{4}{3\sqrt{21}}$. 5.158. $23x - y - 4z - 24 = 0$. 5.159. $(3 + \sqrt{61})x - 4y + 6z - 2 = 0$. 5.160. $x - y - z - 1 = 0$. 5.161. $x + y + 2z = 0$. 5.162. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$,

$$\frac{\Delta\cdot(A_3x_0 + B_3y_0 + C_3z_0 + D_3)}{A_1B_2 - A_2B_1} > 0, \frac{\Delta\cdot(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)}{A_2B_3 - A_3B_2} > 0, \frac{\Delta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2)}{A_3B_1 - A_1B_3} > 0, \text{ kus } \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}.$$

5.164. Punktid D ja E. 5.167. 1) kolm tasandit lôikuvad punktis (3,5,7); 2) kolm tasandit on paarikaupa paralleelsed; 3) kolm tasandit läbivad ühte sirget; 4) tasandid lôikuvad paarikaupa ning kahe tasandi lôikesirge on paralleelne kolmanda tasandiga; 5) esimene ja kolmas tasand on paralleelsed ning teine tasand lôikab neid. 5.168. $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$. 5.169. 1) (1, 2, -3); 2) (5, -7, 8). 5.170. 1) (3, -1, 0); 2) kôigi kolme tasandi lôikepunkti pole, kuna esimene ja kolmas tasand on paralleelsed; 3) lôikepunkt pole määratud, kuna kôik kolm tasandit läbivad üht sirget. 5.171. 1) $a \neq 7$; 2) $a = 7$, $b = 3$; 3) $a = 7$, $b \neq 3$. 5.172.

$$\operatorname{mod} \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \sqrt{A_4^2 + B_4^2 + C_4^2}}.$$

5.173. 1) $10x - 7z = 0$;

2) $6y - 7 = 0$; 3) $39x - 29y - 7z = 0$. 5.174. $24x + 21y - 33z + 50 = 0$. 5.175. Kuulub. 5.176. Ei kuulu. 5.177. xz-tasand. 5.178. $l = -5$, $m = -11$. 5.179. $A = 13/3$, $D = 23/3$. 5.181. 1) $6x + 9y - 22z = 0$; 2) $9x + 3y + 5z = 0$.

5.182. $x\left(\vec{a} - \frac{\vec{a}\,\vec{c}}{\vec{b}\,\vec{c}}\right) = k - \frac{\vec{a}\,\vec{c}}{\vec{b}\,\vec{c}}\, l$. 5.183. 1) $9x + 3y + 5z = 0$; 2) $23x - 32y + 26z - 17 = 0$; 3) $21x + 14z - 3 = 0$; 4) $7x + 14y + 5 = 0$. Märkus. Kasutada tasandite kimbu võrrandit. 5.184. 1) $23x - 2y + 21z - 33 = 0$; 2) $y + z - 18 = 0$; 3) $x + z - 3 = 0$; 4) $x - y + 15 = 0$. 5.185. $5y + 13z - 60 = 0$. 5.186. $5x + 5z - 8 = 0$. 5.187. $(5x - 2y - z - 3) + \beta(x + 3y - 2z + 5) = 0$. Märkus. Tasandite $5x - 2y - z - 3 = 0$, $x + 3y - 2z + 5 = 0$ lõikesirge on paralleelne vektoriga $l = (7, 9, 17)$; järelikult rahuldavad ülesande tingimusi kõik tasandid, mis kuuluvad seda sirget läbivate tasandite kimpu. 5.188. $9x + 7y + 8z + 7 = 0$. 5.189. $3x + 5y - 4z + 25 = 0$. 5.190. $11x - 2y - 15z - 3 = 0$. 5.191. $\alpha(5x - y - 2z - 3) + \beta(3x - 2y - 5z + 2) = 0$. Märkus. Tasandite $5x - y - 2z - 3 = 0$, $3x - 2y - 5z + 2 = 0$ lõikesirge on risti tasandiga $x + 19y - 7z - 11 = 0$. Järelikult rahuldavad ülesande tingimusi kõik tasandid, mis kuuluvad seda sirget läbivate tasandite kimpu. 5.192. $41x - 19y + 52z - 68 = 0$, $33x + 4y - 5z - 63 = 0$. 5.193. $3x + 4y - z + 1 = 0$ ja $x - 2y - 5z + 3 = 0$. 5.194. $15x - 3y - 26z - 6 = 0$. Märkus. Otsitav tasand kuulub antud tasandi ning xy-tasandiga määratud tasandite kimpu. 5.195. $2x + 2y - 2z - 1 = 0$. 5.196. $2x - 2y - 2z - 1 = 0$. 5.197.

$x + 20y + 7z - 12 = 0$, $x - z + 4 = 0$. <u>5.198.</u> $3x - 2y + 6z + 21 = 0$, $189x + 28y + 48z - 591 = 0$. <u>5.199.</u> $x - 2y + z - 2 = 0$, $x - 5y + 4z - 20 = 0$. <u>5.200.</u> $2x - 3y - 6z + 19 = 0$, $6x - 2y - 3z + 18 = 0$. <u>5.201.</u> $4x - 3y + 6z - 12 = 0$, $12x - 49y + 38z + 84 = 0$. <u>5.202.</u> $(-2, 1, 4)$. <u>5.203.</u>

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Tähistades maatriksite astakud vastavalt r ja r_1, siis sidumi korral $r = r_1$ ja ebasidumi korral $r < r_1$.

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

<u>5.204.</u> 1) $2y - z = 0$; 2) $y - 3 = 0$; 3) $3x - y = 0$. <u>5.205.</u> 1) Kõik neli tasandit läbivad üht ja sama punkti; 2) antud tasanditel pole ühist punkti. <u>5.206.</u> $\bar{x}\,\bar{k} = 0$ xy-tasand; $\bar{x}\,\bar{j} = 0$ xz-tasand; $\bar{x}\,\bar{i} = 0$ yz-tasand. <u>5.207.</u> 1) Tasand, mis on risti y-teljega ning läbib punkti $(0, -5, 0)$; 2) tasand, mis on risti z-teljega ning läbib punkti $(0, 0, 6)$. <u>5.210.</u> $(-31/10, 0, 14/5)$, $(17/10, 0, 2/5)$. <u>5.211.</u> $y - z = 0$. <u>5.214.</u> $27x + 11y + z - 65 = 0$. <u>5.215.</u> $2/7, 3/7, 6/7$. <u>5.216.</u> $1/3$. <u>5.217.</u> $16x + 50y - 3z - 132 = 0$. <u>5.218.</u> $11x + 16y + 5z + 4 = 0$. <u>5.219.</u> $(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)(A_1A_3 + B_1B_3 + C_1C_3)(A_2A_3 + B_2B_3 + C_2C_3) < 0$. <u>5.220.</u> $\frac{73}{75}$. <u>5.221.</u> $4y - 3z - 3 = 0$, <u>5.225.</u> $\dfrac{[\bar{r}_3 \times (\bar{r}_2 \times \bar{r}_3)](\bar{r}_1\bar{r}_2) + [(\bar{r}_2 \times \bar{r}_3) \times \bar{r}_2](\bar{r}_1\bar{r}_3)}{(\bar{r}_2 \times \bar{r}_3)^2}$.

<u>5.226.</u> 1) Tasand läbib poolust; 2) tasand on paral-

leelne z-teljega; 3) tasand läbib x-telge; 4) tasand on risti z-teljega; 5) yz-tasand. 5.227. $\vec{x}(11i - 7j - 9k) + 15 = 0$. 5.228. 1) $-\frac{D}{A}, \frac{D}{B}, \frac{D}{C}$; 2) $\frac{D}{\vec{a}\vec{i}}, \frac{D}{\vec{a}\vec{j}}, \frac{D}{\vec{a}\vec{k}}$. 5.229. $\vec{x}(i + j + k) = 10$. 5.230. 1) $\vec{x}(-2i + 36j + 10k) = 0$; 2) $\vec{x}(11i - 5j + 4k) = 34$. 5.231. 1) $\vec{x}\vec{k} = 0$; 2) $\vec{x}(3i - 8j + k) = 41$; 3) $\vec{x}(2j + 3k) = 0$.

VI peatükk

SIRGE JA TASAND RUUMIS

6.1. $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$. 6.2. $(\vec{x} - \vec{x}_1)x(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = 0$. 6.3. AB : $\frac{x}{5} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z - 1}{3}$; AC : $\frac{x}{3} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z - 1}{-2}$; BC : $\frac{x - 3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z + 1}{5}$. 6.4. $\frac{x}{4} = \frac{z - 2}{3}$, $y = 0$, $x - 4 = \frac{y}{3} = \frac{z - 5}{-5}$; $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z - 2}{-2}$; $-x = \frac{y}{4} = \frac{z - 2}{-4}$; $\frac{x - 4}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z - 5}{-7}$; $\frac{x - 5}{-6} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z}{-2}$. 6.5. sirgel $\frac{x - 3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z - 1}{3}$. 6.6. Märkus. Kasutame kahte antud punkti läbiva sirge võrrandit. 6.7. (9, -4, 0), (3,0,-2), (0,2,-3).

6.8. $x_3 = 0$; $y_3 = \frac{-x_2 y_1}{x_2 - x_1}$; $z_3 = -\frac{x_1 z_2}{x_2 - x_1}$. 6.9. P(-3, 2, 3). 6.10. 1) $A = 0$ ja $A_1 = 0$, s.t. mõlemad tasandid on paralleelsed x-teljega; 2) $\frac{B}{B_1} = \frac{D}{D_1}$, s.t. mõlemad tasandid lõikavad y-telge ühes ja samas punktis $x = 0$, y –

$= -\frac{D}{B} = -\frac{D_1}{B_1}$, $z = 0$; 3) $C = D = 0$, $C_1 = D_1 = 0$, s.t. mõlemad tasandid läbivad z-telge; 4) $\frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$. Kui sirge on paralleelne yz-tasandiga, siis tasandite kimbus $Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$, mis läbivad yz-tasandit, peab leiduma tasand, mis on paralleelne yz-tasandiga, s.t. $B + \lambda B_1 = 0$ ja $C + \lambda C_1 = 0$ ühe ja sama λ väärtuse korral; 5) $\frac{A}{A_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}$, kuna kimp $Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$ sisaldab xz-tasandit, s.t. ühe ja sama λ väärtuse korral saame $A + \lambda A_1 = 0$, $C + \lambda C_1 = 0$ ja $D + \lambda D_1 = 0$. 6) $D = D_1 = 0$, s.t. mõlemad tasandid läbivad reeperi alguspunkti. 6.11. 1) Sirge läbib reeperi alguspunkti; 2) sirge on paralleelne z-teljega; 3) Sirge on paralleelne xz-tasandiga; 4) sirge on paralleelne x-teljega; 5) sirge ühtib y-teljega; 6) sirge on risti x-teljega ja lõikab x-telge; 7) sirge asetseb yz-tasandil. 6.12. $D = 3$. Märkus. Ülesande tingimuse täitmiseks on tarvilik, et mõlemad tasandid, mis määravad sirge, lõikaksid z-telge ühes ja samas punktis.. 6.13. $B = -6$; $D = -27$. Märkus. Kui sirge asetseb xy-tasandil, siis ta lõikab abtsiss- ja ordinaattelge. Võib ka arvestada, et xy-tasand kuulub tasandite $x - 2y + z - 9 + k(3x + By + z + D) = 0$ kimpu. 6.14. 1) $\vec{x} \times \vec{a} = \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$; 2) $\vec{x} \times \vec{a} = \gamma\vec{k}$; 3) $\vec{x} \times \vec{a} = 0$.

6.15. $x - 1 = \frac{y + 5}{\sqrt{2}} = -(z - 3)$. 6.16. 1) 4/13, 3/13, 12/13; 2) 12/25, 9/25, 20/25; 3) 6/11, 7/11, 6/11. 6.17. 1) $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 1}{-2}$; 2) $\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z}{3}$; 3) $\frac{z}{3} = \frac{y + 2}{0} =$

$\frac{z-3}{-2}$; 4) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{0}$. 6.18. 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{-5}$; 2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x+32}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$. 6.19. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}$; 2) $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{7}$. 6.20. Lahendus. Vaatame suvalist punkti $X(\vec{x})$. Oletame, et punkti kohavektor $\vec{x}$ rahuldab antud võrrandit. Sel korral $\vec{x} - x_0 = \overrightarrow{X_0X}$, $\overrightarrow{X_0X} \parallel \vec{a}$ ja punkt X asetseb sirgel, mis läbib punkti X_0, vektori $\vec{a}$ sihis. Vastupidi oletame, et punkt X asetseb sellel sirgel, siis vektor $\overrightarrow{X_0X} \parallel \vec{a}$. Järelikult $\overrightarrow{X_0X} \times \vec{a} = 0$. Kuid rahuldab $\overrightarrow{X_0X} = \vec{x} - \vec{x}_0$. Siit $(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{a} = 0$. Järelikult antud võrrandit rahuldab punkti X kohavektor siis ja ainult siis, kui punkt X asetseb antud sirgel. 6.21. $\frac{x + \frac{\beta}{n}}{l} = \frac{y - \frac{\alpha}{n}}{m} = \frac{z}{n}$, kui $n \neq 0$. Märkus. Korrutades vektorvõrrandi mõlemaid pooli skalaarselt vektoritega $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ ning avaldades sirge suvalise punkti kohavektori tema koordinaatide kaudu, saame kolm võrrandit $ny - mz = a$, $-nx + lz = b$, $mx - ly = c$. Kui $n \neq 0$ kaks esimest võrrandit annavad vastuse. Kolmas võrrand on kahe esimese järeldus. 6.22. $\vec{x} \times \vec{s} = \vec{p}$, kus $\vec{s} = (m, n, p)$, $\vec{p} = \vec{x}_0 \times \vec{a}$ $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. 6.23. $\vec{x} \times (3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}) = 25\vec{i} - 19\vec{j} + 10\vec{k}$. 6.24. 1) $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{-6}$; 2) $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{7}$; 3) $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{-3}$. 6.25. 1) $x = t + 2$, $y = -2t + 1$, $z = t + 1$; 2) $x = t + 3$, $y = -t - 1$, $z = t$; 3) $x = 0$, $y = t$, $z = -3t + 1$. 6.26. 1) $x = 2t + 1$, $y = -3t - 1$, $z = 4t - 3$; 2) $x = 2t + 1$, $y = 4t - 1$, $z = -3$; 3) $x =$

$= 3t + 1,\ y = -2t - 1,\ z = 5t - 3$. 6.27. $x = 5t + 4,\ y = -11t - 7,\ z = -2$. 6.28. $x = 3t + 3,\ y = 15t + 1,\ z = -19t - 3$. 6.29. 1) $\vec{a} = (1, 1, 3)$; 2) $\vec{b} = (-2, 11, 5)$. 6.30. 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$; 2) $\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z+1}{13}$; 3) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$; 4) $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1}$; 5) $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{1}$ (vt. sirge kahe tasandi lôikejoonena lk. 259). 6.31. 1) $x = t + 1,\ y = -7t,\ z = -19t - 2$; 2) $x = -t + 1,\ y = 3t + 2,\ z = 5t - 1$. 6.32. $A(-1, +7{,}5, 0)$; $B(+2, 0, +3)$ ja $C(0, +5, +1)$. 6.33. $5x - 7y - 3 = 0,\ z = 0$; $5x + 2z - 3 = 0,\ y = 0$; $7y - 2z + 3 = 0,\ x = 0$. 6.34. $3x - y - 7z + 9 = 0,\ 5y + 2z = 0$. 6.35. 1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1}{D_2}$; 2) $\frac{B_1}{B_2} = \frac{D_1}{D_2}$; 3) $\frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$; 4) $A_i = D_i = 0,\ (i = 1,2)$; 5) $B_i = D_i = 0$; 6) $C_i = D_i = 0$; 7) $A_1 = A_2 = 0,\ (D_1)^2 + (D_2)^2 \neq 0$; 8) $B_1 + B_2 = 0,\ (D_1)^2 + (D_2)^2 \neq 0$. 6.36. 1) $D = -4$; 2) $D = 9$; 3) $D = 3$. 6.38. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{-5}$. 6.39. 1) $\vec{x} \times (-6\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = 2\vec{i} + \vec{j} + 10\vec{k}$; 2) $\vec{x} \times (5\vec{i} - 17\vec{j} - 13\vec{k}) = 19\vec{i} + 14\vec{j} - 11\vec{k}$. 6.40. 1) $\vec{x} \times (4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = (5\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{k})$; 2) $x = 4t + 2,\ y = -t + 1,\ z = 2t + 3$; 3) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$. 6.42. $d = \frac{|(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$;

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Märkus. Rööpküliku kõrguse arvutamine, kui on võimalik leida rööpküliku pindala ja aluse pikkus.

6.43.
$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{y_1-y_0}{m} & \frac{z_1-z_0}{n} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{z_1-z_0}{n} & \frac{x_1-x_0}{l} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{x_1-x_0}{l} & \frac{y_1-y_0}{m} \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

6.44. 1) $d = \sqrt{22}$; 2) $\sqrt{14}$; 3) $\sqrt{\frac{35}{6}}$; 4) $8\frac{3}{4}\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{\frac{157}{14}}$.
6.45. 1) $p_1 = 13$; 2) $p_2 = \frac{3}{14}\sqrt{42}$ 3) $p_3 = 0$. 6.46. 1) $\sqrt{14}$; 2) 10; 3) $2\sqrt{41}$. 6.47. $P'(3, -1, 0)$. 6.48. $P'(2, 9, 6)$.
6.49. Sirged on paralleelsed ja asetsevad võrdsel kaugusel, kuid teine teisel pool poolust.

6.51.
1)
$$\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_4 & C_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & C_3 \\ A_4 & C_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix}};$$

2)
$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_4 & C_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_3 & C_3 \\ A_4 & C_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix}.$$

6.52. 1) ja 2) lõikuvad sirged ; 3) kiivsirged ; 4) paralleelsed; 5) ühtivad. 6.53. Sirge on paralleelne 1) x-teljega; 2) y-teljega; 3) z-teljega; 4) xy-tasandiga, s.t. risti z-teljega; 5) yz-tasandiga; 6) xz-tasandiga; 7) sirge on yz-tasandil; 8) sirge asetseb z-telge läbival tasandil. 6.54. 1) Jaa. Juhul 2) võib asendada antud võrrandsüsteemid sirgete kanooniliste võrranditega või teisendada ühte sirget määrava süsteemi parameetrilisele kujule ja püüda määrata teisest süsteemist lõikepunkti parameeter või kasutada nelja tasandi ühte punkti läbimise tingimust (vt. üles.

6.50.). 3) Lõikepunkti parameetrid $t = 3$, $\lambda = -2$, lõikepunkt $A(3, 7, -6)$. 6.55. 1) $(1, -2, 0)$; 2) $(-3, 5, -3)$. 6.56. $D = 3$. 6.57. $l = 3$. Märkus. Vt. pt. VI, 1. p. 5. 6.61. Vt. (6.17) ja (6.18′). 6.62. 1) $\begin{cases} x - 2 = 0, \\ y + 5 = 0, \end{cases}$

2) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}$; 3) $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$.

6.63. $\vec{x} \times (4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) = 10\vec{i} - 14\vec{j} + 2\vec{k}$. 6.64. 1) 3; 2) $\sqrt{2}$; 3) $a \nparallel b$. 6.65. $d = 3$, $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}$. 6.66. $\vec{x} \times (-3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = 6\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$. 6.67. $P(2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. 6.68. $(\vec{x} - \vec{x}_0) \times (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = 0$. 6.69. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}$. 6.70. $\vec{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a}^2}$; $\vec{n} = -0{,}72\vec{i} + 0{,}04\vec{j} + 0{,}8\vec{k}$. 6.71. $\vec{x} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$; $\vec{x} \times (10\vec{i} - 23\vec{j} - \vec{k}) = 0$. 6.72. $x + 3y = 0$, $3x - y + 4z - 12 = 0$ $h = \sqrt{\frac{117}{5}}$. 6.73. $\frac{x-2}{74} = \frac{y}{57} = \frac{z}{-110}$, $\frac{x-4}{24} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+2}{-15}$, $\frac{x+2}{46} = \frac{y-3}{-22} = \frac{z+5}{35}$.

6.74. $\begin{cases} 3x + z = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ või, kanoonilisel kujul $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-3}$.

6.75. $\vec{x} \times (\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$. 6.76. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

6.77. 1) $\frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-5}$; 2) $\frac{x}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0}$.

6.78. 1) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$; 2) $\frac{x}{33} = \frac{y}{-26} = \frac{z}{27}$. 3) $\begin{cases} 5x - 5y + 4z - 4 = 0, \\ x - 3y - 5z + 7 = 0. \end{cases}$ Märkus. Kuna otsitav sirge läbib punkti A, siis tema võrrand omab kuju $\frac{x-2}{m} = \frac{y-3}{n} = \frac{z-1}{p}$. Sirge sihivektori koordinaadid, täpsemini nende suhted määratakse tingimusest, et otsitav sirge on risti antuga $(2m-n+3p=$

$= 0)$ ja lôikab antud sirget $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & m & n \end{vmatrix} = 0.$ <u>6.80.</u> $\frac{x}{8} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+9}{1}$. Märkus. Sirge sihivektori koordinaadid on teada paralleelsuse tingimusest $m : n : p = 8 : 7 : 1$. Sirge lôikumisest antud sirgetega vôib määrata sirge mingi punkti $A(x_o, y_o, z_o)$ koordinaadid. Ühe neist koordinaatidest vôib vôtta vabalt. <u>6.81.</u> $\begin{cases} 2y - z + 2 = 0, \\ x - 7y + 3z - 17 = 0. \end{cases}$

<u>6.82.</u> $\begin{cases} 4x + 3y - z = 0, \\ 13x + 2y - 8z = 0. \end{cases}$ <u>6.83.</u> 1) $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}$; 2) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$; 3) $\frac{x-4}{13} = \frac{y}{37} = \frac{z+1}{58}$; 4) $\begin{cases} 22x - y + 71 = 0; \\ 2x - z - 3 = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - 9y + 5z + 20 = 0, \\ x - 2y - 5z + 9 = 0; \end{cases}$ 6) $\frac{x}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-8}{2}$. <u>6.84.</u> 1) $x*(b_1 \times b_2)=0$; 2) $[r(13\vec{i} + 37\vec{j} + 58\vec{k})] = 37\vec{i} - 245\vec{j} + 148\vec{k}$. <u>6.85.</u> 1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{4}$; 2) $x - \frac{1}{3} = y - \frac{2}{3} = -z$; 3) $\begin{cases} x - 3z + 1 = 0, \\ 4y + 20z + 17 = 0; \end{cases}$ 4) $\vec{x} \times (11\vec{i} + 11\vec{j} - 22\vec{k}) = -33\vec{i} + 105\vec{j} + 36\vec{k}$. Märkus. Otsitava sirge vôrrand sisaldab 4 tundmatut parameetrit: kaks sihivektori koordinaatide suhet ja kaks sirgel asetseva mingi punkti koordinaati (kolmandale koordinaadile vôib anda suvalise väärtuse). Nende parameetrite määramiseks saame neli vôrrandit: otsitav sirge on risti môlema antuga (2 vôrrandit), ja sirge lôikab môlemat antut sirget (2 vôrrandit). <u>6.86.</u> $x = 2t - 5$, $y = -3t + 1$, $z = -4t$. <u>6.87.</u> $d = \frac{|\vec{a}_1 \vec{a}_2 (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$.

Märkus. Rööptahuka kôrguse arvutamine, rööptahuka ruumala ja põhja pindala kaudu:

$$6.88.\quad d = \frac{\left|\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 n_1 \\ m_2 n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 l_1 \\ n_2 l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 m_1 \\ l_2 m_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

6.89. 1) $\frac{18}{\sqrt{110}}$; 2) 2; 3) 0 (sirged lõikuvad); 4) $d = \frac{12}{\sqrt{66}}$; 5) $\frac{6}{\sqrt{35}}$; 6) $\frac{4}{\sqrt{6}}$; 7) 7; 8) $\frac{16}{\sqrt{6}}$; 9) $2\sqrt{21}$. 6.90. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. 6.91. $d_1 = \frac{2}{5}$, $d_2 = \frac{3}{10}$, $d_3 = \frac{6}{13}$. 6.92. $\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \bar{s}_3}{s_1 s_3}$, kus $\bar{s}_a = (\bar{n}_a \times \bar{n}_{a+1})$, $a = 1, 3$, $\bar{n}_I = (A_I, B_I, C_I)$, $I = 1, 2, 3, 4$. 6.93. 1) 135°, 90°, 45°; 2) 45°, 135°, 90°. 6.94. 60°. 6.95. 135°. 6.96. $\cos\varphi = \pm\frac{4}{21}$.

6.97. 1) $\cos\varphi = \frac{72}{77}$; 2) $\cos\varphi = \frac{98}{195}$; 3) $\cos\varphi = \frac{20}{7\sqrt{41}}$.

6.98. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$. 6.99. $\frac{5}{\sqrt{30}}$, $-\frac{2}{\sqrt{30}}$, $\frac{1}{\sqrt{30}}$.

6.100. $\gamma_1 = 45°$, $\gamma_2 = 135°$. 6.101. $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6.102. 1) $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$, 0. 6.103. $[\vec{x}(4\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})] = 13(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$; $\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{7}}{6}\right)$. 6.104. 1) $\cos\varphi = -\frac{3}{\sqrt{87}}$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 6.106. $y - 2z = 0$. 6.107. Märkus. Sirget on lihtne konstrueerida ühe punkti ja sihivektori järgi. Sihivektoriks on vasakul esinev vektor, mis on korrutatud vektoriga $\vec{x}$. 6.108. $\vec{a} \perp \vec{b}$. 6.109. $\vec{r}_0 + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)a}{\vec{a}^2}\vec{a}$, $x = x_0 + \frac{(x_1 - x_0)l + (y_1 - y_0)m + (z_1 - z_0)n}{l^2 + m^2 + n^2}\, l$,

$$y = y_0 + \frac{(x_1-x_0)l+(y_1-y_0)m+(z_1-z_0)n}{l^2 + m^2 + n^2} m, \qquad z = z_0 +$$

$$+ \frac{(x_1-x_0)l+(y_1-y_0)m+(z_1-z_0)n}{l^2 + m^2 + n^2} n.$$ 6.113. 1) $\vec{x}_e = \vec{x}_0 +$

$+ \vec{a} \dfrac{c - \vec{x}_0 \vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}$; 2) $\vec{x}_e = \vec{x}_0 + \vec{a} \dfrac{(\vec{x}_1-\vec{x}_0) \vec{l}_1\vec{l}_2}{\vec{a}\vec{l}_1\vec{l}_2}$; 3) $\vec{x}_e =$

$= \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a}^2} + \vec{a} \dfrac{c - \vec{b}\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}$; 4) $x_e = x_0 - a$

$\dfrac{\vec{x}_0\vec{x}_1\vec{x}_2 + \vec{x}_0\vec{x}_2\vec{x}_3 + \vec{x}_0\vec{x}_3\vec{x}_1 + \vec{x}_1\vec{x}_2\vec{x}_3}{\vec{a}(\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 + \vec{x}_2 \times \vec{x}_3 + \vec{x}_3 \times \vec{x}_1)}$. 6.114. 1) (-1;7,5;0), (2,0,3), (0,5,1); 2) (6,-2,0), (7,0,-5/2), (0,-14,15) .

6.115. $\left(-\dfrac{x_2z_1}{z_2-z_1}, \dfrac{y_1z_2}{z_2-z_1}, 0\right)$. 6.116. 1) (1,1,1); 2) (5, -1,2); 3) (2,3,1); 4)(6,-2,6). 6.118. $B = -6$, $D = -27$. 6.119. $[r(3i - 2j + 2k)] = \pm\sqrt{17}(2i + j - 2k)$. 6.120. $\vec{a}_1\vec{a}_2(\vec{b}_2-\vec{b}_1) = 0$. 6.121. (Vt. ül. 6.120) . 6.122. 1,3 ja 2),4) ei. 6.123. 1) $\vec{a}\ \vec{n} \neq 0$; 2) $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$; 3) $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{x}_0 \cdot \vec{n} \neq D$; 4) $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{x}_0 \cdot \vec{n} = D$. 6.124. 1) $\vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0$; 2) $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$; 3) $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{n}\ \vec{a} \cdot \vec{b} - a^2C \neq 0$; 4) $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{n}\ \vec{a}\ \vec{b} - a^2C = 0$. 6.125. 1)(0,0,-2); 2),6) paralleelsed; 3),7) sirge asetseb tasandil; 4) (2,3,1); 5) (2,4,6) .

6.126. $\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$. 6.128. 1) $m = -3$; 2) $m = -5$. 6.129. $\dfrac{x - 1}{-4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-1}$. 6.130. 1) $A \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} -$

$- B\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{A} = \dfrac{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{B} = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{C}$. 6.131. $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{n}t$; $\dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} = \dfrac{z - z_0}{C}$.

6.132. 1) $\sin\varphi = \dfrac{33}{2\sqrt{713}}$; 2) $\sin\varphi = \dfrac{1}{14}$; 3) $\sin\varphi = \dfrac{3}{133}$.

6.133. $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = -\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$, $\cos\gamma = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

6.134. 1) $x = x_0 + At$, $y = y_0 + Bt$, $z = z_0 + Ct$; 2) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z-3}{-8}$; 3) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{11} = \dfrac{z-3}{0}$; 4) $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{1}$; 5) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-4}{-7}$; 6) $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+5}{-5}$. 6.135. $\dfrac{x-2}{74} = \dfrac{y}{-57} = \dfrac{z}{-110}$. 6.136. Tasand $l(x-x_0) + m(y-y_0) + n(z-z_0) = 0$. 6.137. 1) $(\vec{x}-\vec{x}_0)\vec{a} = 0$; 2) $x + y + z = 0$; 3) $4x - y + 3z - 11 = 0$. 6.138. $d = 10$. Märkus. Koostame antud punkti läbiva ja antud sirgega ristuva tasandi võrrandi. Leiame sirge ja tasandi lõikepunkti Q. Punkti P kaugus sirgest $d = |\overline{PQ}|$. 6.139. $\sqrt{14}$. 6.140. $(\vec{x}-\vec{x}_0)\vec{n}_1\vec{n}_2 = 0$ e. $\vec{x} = \vec{x}_0 + u\vec{n}_1 + v\vec{n}_2$. 6.141. $5x + 7y + 9z - 44 = 0$. 6.142. $\vec{x}\,\vec{b} = 0$. 6.143. $\vec{a}_1\vec{a}_2(\vec{x}-\vec{x}_0) = 0$. 6.144. 1) $2x + 3y + z + 5 = 0$; 2) $3x + 2y - 3z + 25 = 0$; 3) $\vec{x}(23\vec{i} - 17\vec{j} - 5\vec{k}) = 78$. 6.145. 1) $(\vec{x}-\vec{x}_0)(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\vec{a} = 0$; 2) $(\vec{x}-\vec{x}_0)(\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{x}_0 a^2\vec{a} = 0$ e. $(\vec{x}-\vec{x}_0)(\vec{b}-\vec{x}_0 \times \vec{a}) = 0$;

3) $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$; 4) $x - 3y + 5z = 0$; 5) $x - 3y - 3z + 11 = 0$; 6) $20x + 19y - 5z + 41 = 0$; 7) $x - 3y -$

$-z-10=0.$ <u>6.146.</u> 1) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$, 2) $2x + y - 1 = 0$; 3) $\vec{x}\ 17\vec{i} - 13\vec{j} - 16\vec{k} = 10$. <u>6.147.</u> $(\vec{x}-\vec{x}_0)\vec{a}\vec{b} = 0$; 2) $(Ax + By + Cz + D)(A_1l + B_1m + C_1n)-(Al + Bm + Cn)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$. Märkus. Võrrandi koostamiseks on lihtne kasutada tasandite kimbu võrrandit.

3) $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$; 4) $\vec{x}(23\vec{i} - 16\vec{j} + 10\vec{k}) = 153$.

<u>6.148.</u> 1) $x - 2y - 2z + 2 = 0$; 2) $18x - 11y + 3z - 47 = 0$; 3) $x - 3y + 2z - 4 = 0$; 4) $5x + 6z = 0$. <u>6.149.</u> 1) $(\vec{x}-\vec{x}_0)\vec{a}\vec{b} = 0$; 2) $x + y - z + 3 = 0$. <u>6.150.</u> 1) $\begin{cases} 11x - 4y + 6 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x + 5y - 38 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ <u>6.151.</u> $\begin{cases} x - 3z + 16 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

<u>6.152.</u> $\begin{cases} 9x - 4y + 13 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 15x - 8z + 3 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 5y - 6z - 14 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

<u>6.153.</u> $\vec{r} \times (7\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}) = \vec{i} - 9\vec{j} - 29\vec{k}$.

<u>6.154.</u> 1) $\begin{cases} 11x + 4y - 2z - 31 = 0, \\ 2x - 5y + z - 2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 13y - 12z + 20=0, \\ 2x - 2y + 3z - 5=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - z - 1 = 0, \\ x + y + z = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 3y - 2z + 1 = 0, \\ 5x + 2y + 2z - 7 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x + 2y + z - 15 = 0, \\ 4x - 9y + 10z - 9 = 0. \end{cases}$ <u>6.155.</u> $4x + 5y - 32 = 0$, $11x + 10z - 78 = 0$, $11y - 8z - 8 = 0$. <u>6.156.</u> 1) $(\vec{x}-\vec{x}_0)\vec{a}\vec{n} = 0$;

2) $(\vec{x} - \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}^2})(\vec{a}\times\vec{n}) = 0$ ehk $\vec{n}((\vec{x}\times\vec{a}) - \vec{b}) = 0$;

3) $\vec{x}\vec{n}(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = C_1\vec{n}_2\vec{n} - C_2\vec{n}_1\vec{n}$. <u>6.157.</u> 1) $x - 8y - 13z + 9 =$

$= 0$; 2) $x - 2z - 10 = 0$; 3) $9x - 7y + 7 - 39 = 0$. 6.158. $6x - 22y + 35z - 92 = 0$. 6.159. $\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_1) = 0$, $l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0$. 6.160. $P_1(3,-2,4)$. 6.161. $M_1(3,-1,0)$. 6.162. 1) $Q_1(7,1,0)$; 2) $Q_1(1,4,-7)$. 6.163. $(2,-3,-5)$. 6.164. $\bar{x}_1 = 10/9\,(i + 2j - 2k)$. 6.165. $(4,-1,3)$. 6.166. $Q(1,2,-2)$. 6.167. $Q(1,-6,3)$. 6.168. $\bar{x}_0 + \bar{a}\,\dfrac{c - \bar{x}_0\bar{n} + dn}{\bar{a}\,\bar{n}}$.

6.169. $P(3,-4,0)$. 6.170. $P(-2,-2,5)$. 6.171. $P(-1,3,-2)$. 6.172. $P(-2,0,3)$. 6.173. $x = 8t - 3$, $y = -3t - 1$, $z = -4t + r$. 6.174. $x = \frac{3}{7}$, $z = \frac{18}{7}$. 6.175. 1) $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$; 2) $\frac{x-1}{68} = \frac{y}{70} = \frac{z-7}{-67}$;

3) $\begin{cases} 3x - 4y + z - 1 = 0, \\ 10x - 12y + 9z + 26 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x + 3z = 0, \\ y + 2z + 9 = 0. \end{cases}$

6.176. 1)sirged ühtivad; 2)paralleelsed sirged, $36x+3y+8z=0$; 3),4)kiivsirged. 6.177. 1)$mz_0-ny_0=0$; 2)$lz_0-nx_0=0$; 3) $ly_0-mz_0=0$; 4)$n=0, z_0=0$; 5)$m=0, y_0=0$; 6)$l=0, x_0=0$.

6.178. $(\bar{x}-\bar{x}_0)\,\bar{a}\,(\bar{a} \times \bar{n}) = 0$, $\bar{r} \cdot \bar{n} = D$. 6.179. arvud $(\bar{x}_1-\bar{x}_0)(\bar{x}_2-\bar{x}_0)\bar{a}$, $(\bar{x}_2-\bar{x}_0)(\bar{x}_3-\bar{x}_0)\bar{a}$, $(\bar{x}_3-\bar{x}_0)(\bar{x}_1-\bar{x}_0)\bar{a}$ peavad olema samamärgilised. 6.180. Arvud $\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}$ peavad olema samamärgilised. 6.181. $(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)(A_1l + B_1m + C_1n)\cdot(A_2l + B_2m + C_2n) > 0$. 6.184. $\bar{n}_1\bar{n}_2\bar{n}_3 = 0$, $(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)^2 + (\bar{n}_2 \times \bar{n}_3)^2 + (\bar{n}_3 \times \bar{n}_1)^2 \neq 0$, $C_1(\bar{n}_2 \times \bar{n}_3) + C_2(\bar{n}_3 \times \bar{n}_1) + C_3(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) = 0$. 6.186. Ei leidu, kuna antud sirge lõikab tasandit lõplikus punktis ja sellepärast iga tasand, mis teda läbib, lõikab antud tasandit. 6.188. $y - 2z = 0$. 6.189. $x - 8y + 3z + 8 = 0$. 6.191. $13x + y - 20 = 0$. 6.192. 6.192. $\{0,7,1\}$, $\{7,0,2\}$, $\{1,-2,0\}$. 6.193. 1) $x = -13$, $y = 13$, $z = -9$; 2) $u = \frac{-1}{5}$, $v = \frac{2}{5}$.

$$\begin{vmatrix} A_1B_1C_1D_1 \\ A_2B_2C_2D_2 \\ A_3B_3C_3D_3 \\ A_4B_4C_4D_4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_2B_2C_2 \\ A_3B_3C_3 \\ A_4B_4C_4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_3B_3C_3 \\ A_4B_4C_4 \\ A_1B_1C_1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_2B_2C_2 \\ A_3B_3C_3 \\ A_1B_1C_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} A_2B_2C_2 \\ A_4B_4C_4 \\ A_1B_1C_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

VII peatükk

Teisendused

7.1. $O'(0)$; $E(\frac{1}{a})$. 7.2. $O'(b)$, $E'(a+b)$, $O(-\frac{b}{a})$, $E(\frac{1-b}{a})$. 7.3. Vaadeldav teisendus kas säilitab reeperi alguspunkti või on nihe. 7.4. $x' = \frac{x}{a}$. 7.5. Ei. Antud teisendus on peegeldus nullpunkti suhtes, millele järgneb lüke vektori $\bar{a}(a)$ võrra. 7.6 1) Jah, lüke; 2) jah, venitus kordajaga a, kui $a > 0$ ja venitus kordajaga a, kui $a < 0$, millele järgneb peegeldus alguspunkti suhtes. 7.7. $x' = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$. 7.8. $x' = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$. 7.9. $O'(\frac{3}{2})$, $E'(1)$. 7.10. -1. 7.11. 5. 7.12. $A(3)$ $B(-1)$; $C(-3)$; $D(-5)$; $E(-10)$; $M(x-3)$; $A(11)$; $B(7)$; $C(5)$; $D(3)$; $E(-2)$; $M(x5)$. 7.13 $x'_A = \frac{5}{7}$ $x'_B = 0$, $x'_C = -\frac{2}{7}$, $x_E = \frac{3}{7}$. 7.14. $O'(8)$. 7.15. Uue alguspunkti vana koordinaat on $a = -4$. 7.16. Paigutada reeperi alguspunkt punkti $O'(-7)$ ning muuta reeperitelje suund vastupidiseks. 7.17. Paigutada reeperi alguspunkt punkti $O'(10)$ ning muuta reeperitelje suund vastupidiseks. 7.18. Paigutada reeperi alguspunkt punkti $O'(4)$, muuta ühikvektori suund vastupidiseks ja vähendada pikkusühikut kaks korda. **Märkus:** sobiv on kasutada reeperiteisenduse üldvalemit. 7.19. 1) On muudetud pikkusühikut: $e' = 5e$; 2) pikkusühiku ja suuna muutus $e' = 3e$; 3) reeperi alguspunkt on paigutatud punkti (-1) ning ühikut on suurendatud kaks korda; 4) alguspunkt on paigutatud punkti $O'(3)$ ning on muudetud suunda; 5) on muudetud suunda ning ühikut on vähendatud kaks korda; 6) ühiku muutus $e' = ne$; reeperi alguspunkt e i m u u t u ; 7) reeperi alguspunkt on paigutatud punkti $O(a)$, pikkusühik on muudetud suhtes $\frac{e'}{e} = n$ kui $n > 0$, siis suund säilib, kui $n < 0$, siis suund muutub. 7.20. $x = \frac{20}{19}(t-1)$, kus t on termomeetri näit, x — Celsiuse skaala temperatuur. Märkus: selle ülesande lahendamisel kasutame reeperi teisendusvalemeid, kusjuures reeperi alguspunkt paigutatakse punkti $E(1)$ ning peale selle muutub pikkusühik. Et leida esialgse ja uue reeperi pikkusühikute suhet, pöörame tähelepanu vee keemistemperatuurile: endisel skaalal olnud $+96°$ peab vastama $+100°$. Seega $+1$ ja $+96$ vahel 95 esialgset ühikut peab vastama uues süsteemis 100 ühikule. Järelikult $\frac{e'}{e} = +\frac{95}{100} = \frac{19}{20}$ ning teisendusvalem on $t = \frac{19}{20}x + 1$. Vastuse leidmiseks tuleb see võrrand lahendada x suhtes. 7.21. $x_0 = 53,4$. Märkus: ülesande lahendamiseks kasutame valemit, $x = (\frac{e'}{e})x + x_0$. Antud juhul $x = 57$, $x' = 4$, $\frac{e'}{e} = \frac{9}{10}$, $x_0 = ?$ 7.22. 1) $A(3)$, $B(\frac{5}{3})$, $C(-1)$, $D(-\frac{8}{3})$, $M(-\frac{x}{3})$; 2) $a(18)$, $B(10)$, $C(-6)$, $D(-16)$, $M(2X)$; 3) $A(3,6)$, $B(2)$, $C(-1,2)$, $D(-3,2)$, $M\left(\frac{2x}{5}\right)$. 7.23. $x = \frac{5}{4}t$. 7.24. $x = \frac{5000}{4687}a$, kus a on verstade arv, x on vastavate kilomeetrite arv. Valemit võib tunduvalt lihtsustada, sest $\frac{5000}{4687} = 1,0667.1,0(6)\ldots = \frac{16}{15}$, järelikult $x \approx \frac{16}{15}a$. 7.25. $x = \frac{b}{1-a}$, kui $a \neq 1$. 7.26. Ei. 7.27. 1). 3) Jah; 2) ei. 7.28. 1) Jah; 2) ei 3) jah. 7.29. 7.30. $x' = \frac{5}{2}x - 7$. 7.31. $x' =$

$= \frac{x_2'-x_1'}{x_2-x_1}x + \frac{x_1'x_2 - x_1x_2'}{x_2-x_1}$. 7.32. 1) Nihe: $x' = x + a$, kus a väärtuseks võivad olla kõik reaalarvud; 2) $x' = \pm x + a$, s.t. nihe $x' = x + a$ või nihe ja peegeldus reeperi alguspunkti suhtes. 7.33. $x^{*\prime} = ax^* + \frac{a\alpha+b-\alpha}{\beta-a\alpha}$. 7.34. 1) $x' = -2x + 19$; 2) $x' = -2x + 5$; 3) $x' = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; 4) $B^{-1}A = BA$ (või $B^{-1} = B$); 5) $x' = -4x + 41$.

7.35. 1) $x = x' + 3$, $y = y' + 4$; 2) $x = x' - 2$, $y = y' + 1$; 3) $x = x' - 3$, $y = y' + 5$. 7.36. A(4, -1), B(0, -4), C(2, 0). 7.37. 1) A(0, 0), B(-3, 2), C(-4, 4); 2) A(3,-2), B(0, 0), C(-1, 2); 3) A(4,-4), B(1,-2), C(0, 0). 7.38. 1) (-6,-2); 2) (-6,8); 3) (2,-2). 7.39. (-5,4), (-12,5), (-7,3). 7.40. 1) (5,-8); 2) (11,-12); 3) (4,4); 4) (8,-3); 5) (4,0). 7.41. 1) $O'(6,-2)$, $E_1'(7,-2)$, $E_2'(6,-1)$; 2) $O(-6,2)$, $E_1(-5,2)$, $E_2(-6,3)$. 7.42. 1) (3,5); 2) (-2,1); 3) (0,-1); 4) (-5,0). 7.43. $O'(2,-4)$. 7.44. $x = x' + 1$, $y = y' - 3$. 7.45. 1) (9,-17), (-9,17); 2) (5,-1), (-5,1). 7.46. (3,2), (-3,-2). 7.47. 1) $x'^2 + y'^2 = +$; 2) $x' \cdot y' = 0$. 7.48. 1) $O'(-3,+1)$ teisendatud võrrand: $x'^2 + 2x'y' - y'^2 - 7 = 0$; 7.49. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 25$. 7.50. 1) $O'(3,1)$; 2) sellist punkti ei leidu. 7.51. $d = 5$. 7.52. $d = 0$. Punktid A ja B ühtivad. 7.56. Märkus. Võib kasutada, et näiteks kolmnurk BDF saadakse kolmnurgast AEF tasandi nihke teel vektori $\vec{AF}$ võrra. 7.57. $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$. 7.58. Nihkevektor on paralleelne ruudu ühe diagonaaliga. 7.59.

$$\begin{cases} \vec{i} = \vec{i}'\cos\varphi - \vec{j}'\sin\varphi, \\ \vec{j} = \vec{i}'\sin\varphi + \vec{j}'\cos\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{i} = \vec{i}'\cos\varphi + \vec{j}'\sin\varphi, \\ \vec{j} = \vec{i}'\sin\varphi - \vec{j}'\cos\varphi. \end{cases}$$

7.60. $x = x'$, $y = -y'$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{i}' = \bar{i}$, $\bar{j}' = -\bar{j}$, 7.62. $A(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$. 7.63. 1) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$, $y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$ (kui x' ja y'-telgede suunad moodustavad vastavalt 45° ja 135° x-telje positiivse suunaga); 2) $A(+\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$. 7.64. 1) $x = \frac{x' - y'\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}$; 2) $x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}$; 3) $x = -y'$, $y = x'$; 4) $x = y'$, $y = -x'$; 5) $x = -x'$, $y = -y'$. 7.65. 1) $M(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $N(-3\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $P(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$; 2) M(1, -3), N(5, 1), P(-1, 3); 3) M(-1, 3), N(-5, -1), P(1, -3); 4) M(-3, -1), N(1, -5), P(3, 1). 7.66. $A(3\sqrt{3}, 1)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$, $C(3, -\sqrt{3})$. 7.67. 1) A(-3, -2), B(+5, +1), X(y, -x); 2) A(+3, +2), B(-5, -1), X(-y, x); 3) A(-2, +3), B(+1, -5), X(-x, -y). 7.68. 1) 60°; 2) -30°. 7.69. $x'^2 + y'^2 - x'y' = 9$. 7.70. $2x' \cdot y' = a^2$. 7.71. $f(x, y) = 2xy - 16$. 7.72. Antud avaldis on reeperi pöörde invariant, s.t. ei muutu reeperi pööramisel. 7.73. $\alpha = \frac{\pi}{4}$. 7.74. 1) ± 45° või ± 135°; 2) 30°, 120°, -60°, -150°. 7.75. $x = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'$, $y = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$. 7.76.

$$\begin{cases} x'' = x\cos\varphi + y\sin\varphi - a, \\ y'' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi - b, \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} x'' = x\cos\varphi + y\sin\varphi - a, \\ y'' = x\sin\varphi - y\cos\varphi - b. \end{cases}$$

7.77.
$$\begin{cases} x'' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a\cos\varphi - b\sin\varphi, \\ y'' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + a\sin\varphi + b\cos\varphi. \end{cases}$$

7.78. $x = -\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' - 3$, $y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' - 2$. 7.79. $x = -\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}y'}{2} - 4$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' + 2$. 7.80. A(2, 3).

__7.81.__ $M_1(1, 5)$, $M_2(2, 0)$, $M_3(16, -5)$. __7.82.__ $x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' + 2$, $y = -\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + 3$. __7.83.__ $A(6, 3)$, $B(0, 0)$, $C(5, -10)$. __7.84.__ 1) $O'(3, -2)$, $\alpha = 90°$; 2) $O'(-1, 3)$, $\alpha = 180°$; 3) $O'(5, -3)$, $\alpha = -45°$. __7.85.__ $x = -\frac{15}{17}x' - \frac{8}{17}y' + 9$, $y = \frac{8}{17}x' - \frac{15}{17}y' - 3$. __7.86.__ $x = \frac{x' - 3y'}{\sqrt{10}} + \frac{3}{10}$, $y = \frac{3x' + y'}{\sqrt{10}} + \frac{9}{10}$.

__7.87.__ $x = \frac{(x' - y')\sqrt{2} + 1}{2}$, $y = \frac{(x' + y')\sqrt{2} + 1}{2}$. __7.88.__ $A(0, -\frac{9}{5})$, $B(0, +\frac{16}{5})$, $C(-\frac{12}{5}, 0)$, $x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' + \frac{48}{25}$, $y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' + \frac{36}{25}$. __7.89.__ $x'y' + 4 = 0$.

__7.90.__ $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. __7.91.__ $x + y - 2 - \sqrt{2} = 0$, $x - y + 4 - 3\sqrt{2} = 0$. __7.92.__ $11x + 2y - 3 = 0$. __7.93.__ $\tan\alpha = -\frac{3}{2}$. __7.94.__ $x - y + 6 = 0$, $x + y - 8 = 0$. __7.95.__ $(-2 + \sqrt{3})x + (1 + 2\sqrt{3})y + 27 - 7\sqrt{3} = 0$, $(2 + \sqrt{3})x + (-1 + 2\sqrt{3})y - 27 - 7\sqrt{3} = 0$. __7.96.__ $(-1 + \sqrt{3}, 0)$, $(0, -1 + \sqrt{3})$. __7.97.__ $A_1(-3, -4)$, $B_1(7, -2)$, $A_2(-2, 4)$, $B_2(3, 5)$. __7.98.__ $k_1 = -3\sqrt{3}$, $k_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3 = -\frac{\sqrt{3}}{5}$; $k_1' = 3\sqrt{3}$, $k_2' = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3' = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

__7.99.__ $B_1\left(4 + \frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $C_1\left(3 + \frac{5\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)$, $D_1(3, \sqrt{3} - 1)$. Märkus. Uue reeperi seome ristküliku külgede (A_1B_1 ja A_1D_1) uue asendiga: alguspunkti paigutame punkti $(4, -1)$ ja telgi pöörame nurga $\alpha = 30°$ võrra. Teisendusvalemid on järgmised: $x = x'\frac{\sqrt{3}}{2} - y'\frac{1}{2} + 4$ ja $y = x'\frac{1}{2} + y'\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. Tippude koordinaadid uue reeperi suhtes on $A_1(0,0)$, $B_1(5,0)$, $C_1(5,2)$, $D_1(0,2)$. Jääb esitatud valemite järgi arvutada nende punktide koordinaadid esialgse reeperi suhtes.

7.100. $4x + 2y + 1 = 0$, $(2 - \sqrt{3})x + (2\sqrt{3} + 1)y \pm 1 = 0$, $(2 + \sqrt{3})x + (1 - 2\sqrt{3})y \pm 1 = 0$. 7.101. $(A \cos \frac{2k\pi}{n} - B \sin \frac{2k\pi}{n})(x - x_0) + (A \sin \frac{2k\pi}{n} + B \cos \frac{2k\pi}{n})(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0$, $k = 1,2,\ldots,n-1$. 7.102. a) $x = x'$, $y = -y'$; b) $x = y'$, $y = x'$. 7.103. $x' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y' = \frac{5}{2}$.

7.104. $x = x' - \frac{y'}{\sqrt{2}} + a$, $y = \frac{y'}{\sqrt{2}}$. 7.105. $x' = (x + y)\cos\frac{\omega}{2}$, $y' = (-x + y)\sin\frac{\omega}{2}$. 7.106. $x = \frac{-x'\cos\omega + y'}{\sin\omega}$, $y = \frac{x' - \cos\omega}{\sin\omega}$.

7.107. Reeperi alguspunkt tuleb paigutada punkti 1) $O'(-5, 0)$; 2) $O''(0, 2)$; 3) $O'''(3, -3)$. 7.108. 1) $x = 2x' + 7y' + 3$, $y = 5x' + 9y' + 1$; 2) $x = 5x' + 3$, $y = 4y' + 5$; 3) $x = -7y'$, $y = 2x' + 2$; 4) $x = ax'$, $y = by'$; 5) $x = by'$, $y = ax'$. 7.109. 1) $x = -3x' - 8y' + 5$, $y = x' + 3y' + 4$; 2) $x = -x' - y' + 1$, $y = y'$; 3) $x = -ay' + a$, $y = -bx' + b$. 7.110. $O'(3, -2)$, $e_1' = (2, -1)$, $e_2' = (-5, 2)$. 7.111. $x' = x + y - 2$, $y' = 2x - y + 3$, $O'\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $E_1'(0, 3)$, $E_2'(0, 2)$, $O(-2, 3)$, $E_1(-1, 5)$, $E_2(-1, 2)$. 7.112. $x = 6x' + 4y' - 4$, $y = -2x' + 6y' + 2$. 7.113. $x' = \frac{-x + y - 2}{2}$, $y' = \frac{2x + y - 4}{9}$. 7.114. $14x' + 4y' - 3 = 0$. 7.115. $O(0, 0)$, $A\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $C\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$. 7.116. $x = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}$. 7.117. 1) $S = \frac{1}{2}\left[x_1'(y_2' - y_3') + x_2'(y_3' - y_1') + x_3'(y_1' - y_2')\right]$, siin kolmanda selle tipu koordinaadid, mis varem ühtis reeperi alguspunktiga, on

$-a = x_3$ ja $-b = y_3$; 2) $S = \frac{\sin\omega}{2}(x_1'y_2' - y_1'x_2')$.

7.118. $(-1, 0)$, $(+1, 0)$, $(0, +\sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$, $x = x' - \frac{y'}{\sqrt{3}} + 1$, $y = x' + \frac{y'}{\sqrt{3}} + 1$. 7.119. Esimese reeperi suhtes: $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(2, 1)$, $D(2, 2)$, $E(1, 2)$, $F(0, 1)$. Teises reeperi suhtes: $A\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $B(1, 0)$, $C\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $D(0, 0)$, $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $F(0, 1)$. 7.120. $x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}$. 7.121. $O'(5, -2)$, $A'(21, 12)$, $B'(15, -18)$. 7.122. $A'(4, 3)$. 7.123. $(4, 2)$. 7.124. $M'(10, 6)$, $P(\frac{1}{2}, 2)$. 7.125. $x' = x - y + 1$, $y' = x + y + 2$. 7.126. $(2, 1)$. 7.127. Püsisirge $x + 2y - 4 = 0$. 7.128. 1) $2x - y - 12 = 0$, $x + y - 3 = 0$; 2) $x = 0$, $y = 0$, 3) $x - y = 0$. 7.129. $2x + y - 3 = 0$. 7.132. $2x - 2y - 3 = 0$, $4x - y = 0$. 7.134. $\bar{e}_1' = (1, 4)$, $\bar{e}_2 = (1, -1)$, $x'^* = 9x^*$, $y'^* = 4y^*$. 7.135. 1) $(1,1)$; 2) Selliseid reaalsete koordinaatidega vektoreid ei leidu. 7.136. $(3, -2)$ ja $(3, -5)$. 7.137. $x' = x + C_{12}y$, $y' = C_{22}y$. 7.138. $x' = C_{11}x$, $y' = C_{22}y$. 7.139. $x' = C_{11}x$, $y' = y$. 7.140. $x' = 3x$, $y' = 2y$. 7.141. $x' = x - 0{,}5\,y$, $y' = -{}^2/_3 y$. 7.142. $x' = x + y\cos\omega$, $y' = y\sin\omega$. 7.143. $x' = x + s(Ax + By + C)$, $y' = y + t(Ax + By + C)$, kus s ja t võivad omada suvalisi väärtusi. 7.144. $x' = 1{,}25x + 0{,}5y - 0{,}25$, $y' = y$ (vt. eelnev ülesanne).

7.145. $x' = \left(1 + \frac{A}{C}x_0\right)x + \frac{B}{C}x_0 y + x_0$, $y' = \frac{A}{C}y_0 x + \left(1 + \frac{B}{C}y_0\right)y + y_0$, $C \neq 0$. 7.146. 1) $x' = x - 2A\frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}$,

$y' = y - 2B\frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}$; 2) $x' = -y + 5$, $y' = -x + 5$.

7.147. $x' = \frac{1}{12}(17x - y + 8)$, $y' = \frac{1}{12}(-x + 17y - 4)$. 7.148.

$x' = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_1x_o + B_1y_o + C_1}$, $y' = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{A_2x_o + B_2y_o + C_2}$. 7.149.

$\frac{A_2x' + B_2y' + C_2}{A_2x_2 + B_2y_2 + C_2} = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}$, $\frac{D_2x' + E_2y' + F_2}{D_2x_2 + E_2y_2 + F_2} =$

$= \frac{D_1x + E_1y + F_1}{D_1x_1 + E_1y_1 + F_1}$. 7.150. $x' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + 10)$, $y' =$

$= \frac{1}{3}(-11x + 14y + 13)$. 7.151. $x' = 5x - 3y + 8$, $y' = -3x +$ $+ 2y - 3$. 7.152. $x' = x + 8$, $y' = 4x - 5y + 14$, $x' = -x +$ $+ 2y - 8$, $y' = 4x - 3y + 24$. 7.153. 1) Samasusteisendus; 2) tsentraalne sümmeetria mingi tasandi punkti suhtes; 3) kaldsümmeetria mingi sirge suhtes antud vektori sihis.

7.154. (1, 3), (3, -1), $x^* = \frac{2}{5}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y$, $y^* = -\frac{1}{\sqrt{5}}x +$ $+ \frac{2}{\sqrt{5}}y$, $X = \sqrt{20}x$, $Y = \sqrt{80}y$. 7.156. ja. 7.157. Jaa. Ühtlane tasandi venitus (k korda) y-telje sihis. 7.158. Jaa. Tasandi nihe (e. rööp-telgafiinsus) x-telje sihis. 7.159. Jaa. Homoteetia. 7.160. Jaa. Tasandi pööre ümber reeperi alguspunkti nurga φ võrra ja homoteetsus (kordajaga k). Kui $r < 0$, lisandub veel sümmeetria reeperi alguspunkti suhtes. 7.161. Jaa. Geom. sisu kohta vt. eelmine ülesanne ($r =$ $= \sqrt{a^2 + b^2}$). 7.162. Jaa. Sarnasusteisendus: pööre, homoteetsus, rööplüke.

7.163. $S = \dfrac{\frac{1}{2}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}$. Märkus. Afiinne teisendus $x' = A_1x + B_1y + C_1$, $y' = A_2x + B_2y + C_2$ viib kaks antud kolmnurga külge vastavalt y- ja x-teljeks, aga kolmandä külje sirgeks $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 - x' \\ A_2 & B_2 & C_2 - y' \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$. Leiame viimase sirge telglõigud ja teisendatud kolmnurga pindala, seejärel aga lähtekolmnurga pindala. 7.164. $S = \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}^{-1}$ $(C - D)(C' - D')$. Märkus. Vt. eelmine ülesanne. 7.165. $x - 12y + 57 = 0$, $8x - 9y - 66 = 0$. Märkus. Kasutada afiinset teisendust, mis viib antud sirged reeperitelgedeks. 7.166. $142x - 183y - 489 = 0$. Märkus. Kasutades afiinset teisendust, mis viib antud sirged reeperitelgedeks ja antud punkti ühikpunktiks. 7.167. Lahendus. Olgu vanas reeperis antud suvaline punkt $X(x, y)$ ja olgu punkt $X'(x', y')$ punkti X kujutis antud afiinse teisenduse korral, uues reeperis

$X(x^*, y^*)$ ja $X'(x^{*\prime}, y^{*\prime})$.

Siis

$$x' = c_{11}x^{*\prime} + c_{12}y^{*\prime} + c_1,$$
$$y' = c_{21}x^{*\prime} + c_{22}y^{*\prime} + c_2 .$$

Asendades x' ja y' antud afiinse teisenduse valemitega ning x ja y reeperiteisendusvalemitega ning lahendades saadud süsteemi $x^{*\prime}$ ja $y^{*\prime}$ suhtes, saamegi otsitavad seosed kujul:

$$x^{*\prime} = b_{11}x^* + b_{12}y^* + b_1 ,$$
$$y^{*\prime} = b_{21}x^* + b_{22}y^* + b_2 .$$

7.168. $A(1, \sqrt{3})$, $B(-1, 1)$, $C(0, 5)$, $D\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $E(0, 6)$, $F(5, 0)$, $G(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $H(5, -5\sqrt{3})$, $I(-4, 4\sqrt{3})$, $J(6\sqrt{3}, -6)$, $K\ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$, $L - \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}$, $M(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. 7.169. $(2 + 5\sqrt{3}, 8)$. 7.170. $M_1(1, 9)$, $M_2(4, 2)$, $M_3(1, -3)$, $M_4(0, 2 + \sqrt{3})$, $M_5(1 + \sqrt{3}, 1)$. 7.171. $M_1(0, 5)$, $M_2(3, 0)$, $M_3(-1, 0)$, $M_4(0, -6)$, $M_5(\sqrt{3}, 1)$. 7.172. $M_1\left(6\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $M_2\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$. 7.173. $A\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $B\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, $C(5, 0)$, $D(4, \pi)$, $E\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $F\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, $G\left(1, \frac{3}{2}\pi\right)$, $H\left(3\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi\right)$, $I\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $J(3, \pi)$, $K\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, $L\left(2, -\frac{3}{4}\pi\right)$, $M\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$, N: $\varphi = 10$, $\arccos \varphi = \frac{4}{5}$, $\arcsin \varphi = -\frac{3}{5}$. 7.174. $(6\sqrt{2}, 225°)$. 7.175. $M_1(2, 0)$, $M_2\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, $M_4\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$, $M_5\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$. 7.176. $M_1\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\pi\right)$, $M_2\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(2, \frac{\pi}{12}\right)$, $M_4\left(2, \frac{7}{12}\pi\right)$, $M_5\left(4, -\frac{7}{12}\pi\right)$. 7.177. $p \cos \varphi = a$. 7.178. $x^2 + y^2 = a^2$. 7.179. $A\left(3, -\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2, \frac{3}{4}\pi\right)$, $C(1, 0)$, $D\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$, $E(3, 2 - \pi)$, $F(2, \pi - 1)$. 7.180. $M_1(3, 0)$, $M_2\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $M_3\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_4\left(5, -\frac{\pi}{12}\right)$, $M_5(3, \pi)$, $M_6\left(1, \frac{7}{12}\pi\right)$. 7.181. $A\left(2, \frac{17\pi}{12}\right)$, $B\left(3, \frac{7\pi}{12}\right)$, $C\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$, $D\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(5, \frac{9\pi}{4}\right)$. 7.182. 1) $d = \sqrt{2}$, $0 = -\frac{3}{4}\pi$, 2) $d = 5$, $0 = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} - \pi$, 3) $d = 13$, $0 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$, 4) $d = \sqrt{234}$, $0 = -\operatorname{arctg} 5$. 7.184. 1) $(6, 2, -6)$, $(-6, -2, 6)$, 2) $(-3, -1, 3)$, $(3, 1, -3)$. 7.185. $3x'^2 + y'^2 - 2x'z' + 2 = 0$. 7.188. $x' = x + z$, $y' = y + z$,

$z' = z$. 7.189. $(2,0,-1)$. 7.190. $x' = c_{11}x$, $y' = c_{22}y$, $z' = c_{33}z$. 7.191. $x' = x + c_{13}z$, $y' = y + c_{23}z$, $z' = c_{33}z$. 7.192. $x' = c_{11}x + c_{12}y$, $y' = c_{21}x + c_{22}y$, $z' = c_{31}x + c_{32}y + z$. 7.193. $x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}$, $y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}$, $z' = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$. 7.194. $x' = 2x$, $y' = 2y$, $z' = x + y + z$. 7.195. $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz = 0$. 7.196. 1) $\{6, -6, 1\}$, $\{8, 8, 7\}$, $\{0, 0, 1\}$, 2) $x'^* = x^*$, $y'^* = 3y^*$, $z'^* = -5z^*$. 7.197. $\vec{e}_1' = (1,-1,1)$, $\vec{e}_2' = (1,2,1)$, $\vec{e}_3' = (1,0,-1)$. Antud teisenduse võib esitada samasusteisenduse ja kolme ristuva venituse (venituskoefitsientidega vastavalt $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$ vektorite $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ sihis) ning vektoritega $\vec{e}_2, \vec{e}_3'$ kollineaarse tasandi suhtes peegelduse korrutisena. 7.198. Otsitava sirge sihivektori koordinaadid a, b, c määratakse võrrandisüsteemiga

$$
\begin{aligned}
(c_{11} - 1)a + c_{12}b + c_{13}c &= 0,\\
c_{21}a + (c_{22} - 1)b + c_{23}c &= 0,\\
c_{31}a + c_{32}b + (c_{33} - 1)c &= 0.
\end{aligned}
$$

7.199. $\cos\varphi = \frac{c_{11} + c_{22} + c_{33} - 1}{2}$. 7.200. $(c_{32} - c_{23})a + (c_{31} - c_{13})b + (c_{21} - c_{12})c > 0$. 7.201. $e = \{-1, -2, 0\}$, $\cos\varphi = \frac{2}{3}$. 7.202. $x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z$, $y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$,

$$z' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z.$$

7.203. $\vec{x}' = x\cos\varphi + (\vec{e} \times \vec{r})\sin\varphi + \vec{e}(\vec{e}, \vec{r})(1 - \cos\varphi)$, kus $\vec{x}$ on suvaline vektor ja $\vec{x}'$ on tema kujutis, ehk koordinaatides $x' = [a^2(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi]x + [ab(1 - \cos\varphi) - c\sin\varphi)y + [ac(1 - \cos\varphi) + b\sin\varphi]z$, $y' = ab(1 - \cos\varphi) +$

$+ c \sin\varphi] x + [b^2(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi] y + [bc(1 - \cos\varphi) - a \sin\varphi] z$, $z' = [ac(1 - \cos\varphi) - b \sin\varphi] x + [bc(1 - \cos\varphi) + a \sin\varphi] y + [c^2(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi] z$. 7.205. $x' = x$, $y' = y$, $z' = -\frac{3}{7}(2x + 3y - 6z + 6)$.

7.206. $x = \dfrac{3\sqrt{5}x' + 4\sqrt{5}y' + 10z' + 9}{15}$, $y = \dfrac{\sqrt{5}y' - 2z' - 2}{3}$, $z = \dfrac{-6\sqrt{5}x' + 2\sqrt{5}y' + 5z' + 7}{15}$. Märkus. Suvalise punkti $X(x, y, z)$ uued koordinaadid on absoluutväärtuselt võrdsed selle punkti kaugusega antud tasandist, s.o. $x' = \dfrac{3x - 6z + 1}{3\sqrt{5}}$, $y' = \dfrac{4x + 5y + 2z}{3\sqrt{5}}$, $z' = \dfrac{2x - 2y + z - 3}{3}$, kusjuures märgid on kooskõlas viimase tingimusega. Lahendades need võrrandid vanade koordinaatide suhtes, saame otsitavad valemid.

7.207. $x' = \dfrac{x + 1}{2}$, $y' = -(2x - y)$, $z' = \dfrac{x + 2y + 3z - 6}{16}$.

7.208. $x' = \dfrac{x + 2y + 5z + 1}{\sqrt{30}}$, $y' = \dfrac{2x - y + 1}{\sqrt{5}}$, $z' = -\dfrac{x + 2y - z - 1}{\sqrt{6}}$. 7.209. $x' = -\dfrac{x + y + z + 1}{\sqrt{3}}$, $y' = \dfrac{2x - y - z + 1}{\sqrt{6}}$, $z' = \dfrac{y - z + 2}{\sqrt{2}}$.

Sisukord

ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ II.
Прямая и плоскость.
Изд. 2-е, исправл.
Составитель Лейда Туулметс.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja H. Kilp.
Paljundamisele antud 11.07.1984.
Formaat 60x84/16.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 16,74.
Arvestuspoognaid 13,51. Trükipoognaid 18,0.
Trükiarv 600.
Tell. nr. 816.
Hind 45 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Pälsoni t. 14.

45 kop.