A. T e l g m a a

M A T E M A A T I K A

ÕHTUKOOLI VIII KLASSILE

Tallinn
1970

Eesti NSV Haridusministeerium

A. Telgmaa

M A T E M A A T I K A

õhtukooli VIII klassile

Saatematerjali üleminekuprogrammi juurde

Tallinn 1970

Sissejuhatus

1971/72. õppeaastal hakkavad õhtukoolide 9. kl. õpilased õppima matemaatikat uue programmi ja päevakooli uue õpiku järgi. See üleminek nõuab õpilaste ettevalmistamist, sest nad peavad tundma seda materjali, mida päevakoolide õpilased on õppinud eelnevatel õppeaastatel ja millele 9. kl. kursus baseerub. Seepärast õpivad õhtukoolide 8. kl. õpilased 1970/71. õppeaastal üleminekuprogrammi järgi. See programm on endine õhtukooli 8. kl. programm, mida on täiendatud mõnede uute teemadega, et tagada sujuv üleminek 9. klassi. Üleminekuprogrammi kohta uut õpikut ei kirjutata. Seda lünka püüab täita käesolev abiraamat, mis peab osaliselt asendama õpikut, metoodilist juhendit ja ka ülesannete kogu. Selles raamatus käsitletakse üleminekuprogrammi uusi teemasid, millele lisatakse ka hädavajalik harjutusmaterjal. Enamus ülesandeid on varustatud kas täielikult või osaliselt vastustega. Et raamatul on korraga täita mitu ülesannet, siis tingib see ka stiili mõningase ebaühtluse: kohati meenutab käsitluslaad kooliõpikut, samas aga metoodilist juhendit, kus näidatakse vajalikud rõhuasetused.

Käesolevas abiraamatus on neli osa.

Esimeses osas "Kordamiseks ja täiendamiseks" käsitletakse küsimusi üleminekuprogrammi samanimelisest teemast 1.

Teises osas "Liikumisteisendusi tasapinnal" on kokku võetud programmi teemad 2, 3 ja 4.

Kolmandas osas "Funktsioonid. Võrrandid" leiavad käsitlemist küsimused, mis kuuluvad programmi teemade 5, 6, 7 ja 8 hulka.

Neljandas osas "Hulknurkade sarnasus" vaadeldakse teemasid 9 ja 10.

Järgnevalt juhatame õpetaja mõningate allikate juurde, mis üleminekuprogrammi realiseerimisel abiks võivad olla.

1) E. Etverk, A. Vihman. Matemaatika VII klassile. Tln. 1969.
2) E. Etverk, A. Vihman. Uuest seitsmenda klassi matemaatika programmist ja õpikust. "Nõukogude Kool" 1969, nr. 7, 8, 10.
3) E. Etverk. Uuest seitsmenda klassi matemaatika programmist ja õpikust. "Nõukogude Kool", 1969, nr. 12.
4) E. Etverk. Naturaalarvud ja tehted nendega. "Nõukogude Kool", 1967, nr. 10, 12.
5) E. Etverk. Hulgateooria elemente koolimatemaatikasse. "Nõukogude Kool", 1966, nr. 10, 11.
6) E. Etverk, A. Telgmaa. Matemaatika IV klassile. Tln. 1970.
7) A. Telgmaa. Arvude jaguvus hulgateoreetilisest vaatekohast. "Nõukogude Kool", 1968, nr. 3.

1. KORDAMISEKS JA TÄIENDAMISEKS

1.1. Hulk ja selle element

Hulgateooria on kaasaegse matemaatika alusmüüriks, sest ühel või teisel viisil tegeldakse matemaatikas ikka hulkadega (arvude hulgad, punktide hulgad, funktsioonide hulgad jt.). Hulga mõiste on algmõiste, s.o. mõiste, mida otseselt ei defineerita. Seda asjaolu tuleb ka õpetamisel kindlalt arvestada - õpilasi ei tule juhtida vastustele, mis võiksid näida hulga mõiste definitsioonina. Hulga mõiste kujunemine koolis peab toimuma meie lähemast ümbrusest valitud asjakohaste näidete varal, kus sageli kasutatakse hulgatermini sünonüüme: kari, parv, kollektiiv, klass, rühm, grupp, perekond jne. Tuleb rõhutada, et kõigil juhtudel, kus kasutatakse nimetatud termineid, on võetud teatavate kindlate tunnustega objektid (asjad, esemed, olendid, nähtused jne.) kokku üheks tervikuks, mille kohta matemaatikas kasutatakse enamasti ühte ja sama terminit - hulk. Nii võime kõnelda näiteks lindude hulgast, loomade hulgast, õpilaste hulgast, antud klassi kommunistlike noorte hulgast, kõigi naturaalarvude hulgast, kümnega jaguvate arvude hulgast, naturaalarvude hulgast jne. Need objektid, milledest hulk koosneb (mis moodustavad hulga), on hulga elemendid. Antud hulga iga elemendi kohta öeldakse, et element kuulub antud hulka. Kõigi teiste objektide (elementide) kohta öeldakse, et nad ei kuulu sellesse hulka. Näiteks, kümnest väiksemate paaritute arvude hulga elementideks on 1, 3, 5, 7, 9. Nende arvude ühiseks omaduseks on see, et nad on kümnest väiksemad ja et nad on paaritud arvud. Arv 7 kuulub kümnest väiksemate paaritute arvude hulka, arv 8 ei kuulu sellesse hulka.

Hulk on antud (määratud), kui iga suvaliselt võetud objekti kohta saab öelda, kas ta kuulub sellesse hulka või ei kuulu. Hulka saab anda kahel viisil: kas hulka kõigi elementide loetlemise teel või mingi iseloomuliku tunnuse andmisega, mille järgi saab otsustada, kas suvaliselt võetud element kuulub sellesse hulka või ei. Näiteks hulga, mille elementideks on Eesti, Läti ja Leedu (siin on hulga elemendid loetletud) võib anda ka hulgana, mille elementideks on nõukogude vabariigid, mis asetsevad Baltimere ääres (sellega on antud hulga elementide olulinе tunnus). Mõlemal juhul saab iga suvalise elemendi kohta öelda, kas ta kuulub antud hulka või ei.

Hulki tähistatakse enamasti suurte ladina tähtedega A, B, C jne. Vajaduse korral kasutatakse ka indekseid. Hulga kirjalikul esitamisel kirjutatakse loogelistesse sulgudesse kas hulga kõik elemendid (kui hulk antakse elementide loetlemise teel) või eeskiri (tunnus), mille järgi antud hulk on moodustatud. Näiteks, kui hulga A elementideks on 0, 2, 4, 6 ja 8, siis võib seda hulka üles kirjutada kahel viisil:

$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ või

$A = \{\text{ühekohalised paarisarvud}\}$.

Elemendi kuuluvust hulka tähistatakse märgiga $\in$ ja mittekuuluvust hulka märgiga $\notin$. Eelmise näite korral võime seega kirjutada, et $2 \in A$ (arv 2 kuulub hulka A), kuid $5 \notin A$ (arv 5 ei kuulu hulka A).

Hulga mõiste käsitlemisel on näidete varal vaja anda ka <u>tühja hulga</u> mõiste. Tühjas hulgas ei ole ühtegi elementi, selle hulga tähiseks on $\emptyset$. Näiteks õhtukooli 8. klassis õppivate pioneeride hulk on tühi. Niisamuti saame, et

$\{\text{võrrandi } x^2 = -4 \text{ lahendid}\} = \emptyset$

$\{\text{kümnest suuremad ühekohalised arvud}\} = \emptyset$

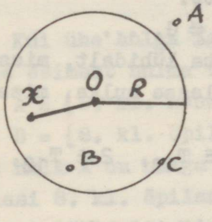
$\{\text{arvu 7 kordarvulised tegurid}\} = \emptyset$

On olemas <u>lõplikud hulgad</u> ja <u>lõpmatud hulgad</u>. Lõpliku hulga elementide arvu saab ikka väljendada mingi kindla naturaalarvuga. Lõpmatu hulga puhul pole see võimalik. Lõpmatud hulgad on näiteks naturaalarvude hulk

$N = \{0, 1, 3, \ldots\}$ ja täisarvude hulk

$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

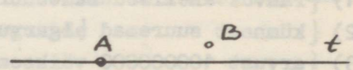
Olgu märgitud, et tähed N ja Z jäävad ka edaspidi vastavalt naturaalarvude hulga ja täisarvude hulga tähiseks. Ratsionaalarvude hulga tähiseks on Q.



Joon. 1

Hulga elementideks võivad olla ka tasapinna punktid. Näiteks, olgu antud ringjoon raadiusega R (joon. 1) ja suvaline punkt X, mille kaugus ringjoone keskpunktist on d. Sellise punkti kohta võime alati öelda, kas ta asub ringjoonel või ei: kui d = R, siis asetseb punkt X ringjoonel, kui $d \neq R$, siis punkt X ei asetse ringjoonel. Seetõttu võime ringjoont vaadelda kui samal tasapinnal asetsevate punktide hulka J, mille kõigil punktidel on see omadus, et nad asetsevad selle tasapinna ühest kindlast punktist võrdsetel kaugustel.

Niisiis võime öelda, et punkt C kuulub ringjoone punktide hulka, lühidalt punkt $C \in J$. Punktid A ja B ei kuulu ringjoone punktide hulka, lühidalt $A \notin J$, $B \notin J$. Kõik need punktid, mis asetsevad seespool ringjoont ($d < R$), kuuluvad ringi punktide hulka P. Jooniselt 1 võime näiteks kirjutada, et punkt $B \in P$.



Joon. 2

Samal viisil võime kõiki teisi geomeetrilisi kujundeid, nagu sirge, kiir, sirglõik, kolmnurk, nelinurk jne., vaadelda punktide hulgana. Näiteks kui punkt A asetseb sirgel t ehk sirge t läbib punkti A (joon. 2), siis võime ka öelda, et punkt A kuulub sirge t punktide hulka; punkt $A \in t$; samal ajal aga punkt $B \notin t$. Kui mõtteselgus ei kannata, siis jäetakse sõna "punkt" enamasti kirjutamata.

Siin kasutatud sümboolikat ja terminoloogiat tuleb matemaatika õpetamisel rakendada kõikjal, kus see otstarbekaks osutub.

Ülesandeid

1. Olgu algarvude hulk tähistatud tähega G. Kirjuta lühidalt, missugused arvudest 1, 2, 3, 4, 5, 10, 13, 15, 16, 19, 20 kuuluvad sellesse hulka, missugused mitte.
   V: $2 \in G$, $3 \in G$, ... $1 \notin G$, $4 \notin G$, ...
2. Koosta arvu 18 tegurite hulk T_{18}. Kirjuta lühidalt, missugused arvudest 1, 2, 3, 4, 5 kuuluvad sellesse hulka, missugused mitte.
   V: $T_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$; $1 \in T_{18}$, $2 \in T_{18}$, $3 \in T_{18}$, $4 \notin T_{18}$, $5 \notin T_{18}$.
3. Esita elementide loetlemise teel järgmised hulgad:
   A = {ühekohalised paaritud arvud}. V: A = {1, 3, 5, 7, 9}.
   B = {meie klassi meesõpilased}
   C = {kahekohalised arvu 25 kordsed}. V: C = {25, 50, 75}.
   D = {arvu 12 tegurid}. V: D = {1, 2, 3, 4, 6, 12}.
4. Esita elementide oluliste tunnuste abil järgmised hulgad:
   X = {20, 40, 60, 80}. V: X = {kahekohalised arvu 20 kordsed}.
   Y = {3, 6, 9,}. V: Y = {kümnest väiksemad kolmekordsed}.
   R = {kalkun, kana, kukk, part, hani}. V: R = {kodulinnud}.
5. Otsusta, missugused järgmistest hulkadest on lõplikud, lõpmatud või tühjad.
   1) {rahvusvahelised malesuurmeistrid}. (lõplik)
   2) {kümnest suuremad algarvud}. (lõpmatu)
   3) {arvust 100000000 väiksemad naturaalarvud}. (lõplik)
   4) {võrrandi $x + 5 = 7$ lahendid}. (lõplik)
   5) {võrrandi $x + \frac{1}{2} = 1$ naturaalarvulised lahendid}. (Ø)
   6) {paarisarvud}. (lõpmatu)
   7) {sirglõigu AB punktid}. (lõpmatu)
6. Mida võib öelda kahe erineva sirge s ja t kohta, kui $A \in s$ ja $A \in t$? V: Lõikuvad.

7. On antud kaks erinevat punkti A ja B. Mida võib öelda sirgete u ja v kohta, kui $A \in u$, $A \in v$, $B \in u$ ja $B \in v$?

V: ühtuvad.

1.2. Hulk ja selle osahulk

Kui ühe hulga iga element kuulub teise hulka, siis nimetatakse esimest hulka teise osahulgaks. Näiteks, kui

$A = \{8.\ \text{kl. meesõpilased}\}$,

$B = \{8.\ \text{kl. õpilased}\}$,

siis hulk A on hulga B osahulk, sest iga 8. kl. meesõpilane on ühtlasi 8. kl. õpilane. Seost "hulk A on hulga B osahulk" märgitakse lühidalt nii:

$A \subset B$.

Kui aga hulga A iga element ei ole hulga B element, siis hulk A ei ole B osahulk. Seda tõsiasja märgitakse lühidalt kujul

$A \not\subset B$.

Näiteks, kui $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{a, b, d, e\}$, siis $A \subset B$, samuti ka $B \not\subset A$.

Iga hulk loetakse iseenda osahulgaks. Tühi hulk on aga iga hulga osahulk. Kui $A \subset B$ ja ka $B \subset A$, siis on hulga A iga element hulga B elemendiks ja ka ümberpöördult, hulga B iga element on hulga A elemendiks. Hulgad A ja B koosnevad sel juhul samadest elementidest - need hulgad on võrdsed: $A = B$. Näiteks, kui

$A = \{\text{arvu 6 algarvulised tegurid}\}$

ja

$B = \{\text{arvust 5 väiksemad algarvud}\}$,

siis $A = B$. Tuleb selgitada, et hulkade võrdsuse üle ei saa otsustada elementide arvu järgi neis hulkades. Näiteks, kui

$M = \{a, b, c\}$

ja

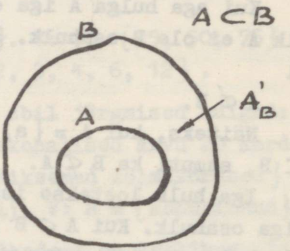
$N = \{0, 1, 2\}$,

siis mõlemas hulgas on küll 3 elementi, kuid $M \neq N$, sest hulgad ei koosne samadest elementidest.

Seoses osahulga mõistega on vaja anda ka <u>hulga täiendi</u> mõiste. Kui $A \subset B$, kuid $A \neq B$, siis leidub hulgas B selliseid elemente (vähemalt üks), mis ei kuulu hulka A. Need elemendid moodustavad hulga, mida nimetatakse <u>hulga A täiendiks</u> hulgani B, lühidalt A'_B. Kui näiteks hulgaks A on 8. kl. meesõpilased ja hulgaks B kõik 8. kl. õpilased, siis $A'_B = \{$8. kl. naisõpilased$\}$ (eeldusel, et tegemist on segaklassiga, s.t. $A \neq B$).

Hulgateooria mõistete näitlikustamiseks kujutatakse hulka graafiliselt sel teel, et tõmmatakse mingi kinnine joon ja kõik seespool seda joont kujutletavad punktid loetakse selle hulga elementideks. Seost $A \subset B$ kujutab siis graafiliselt joonis 3. Kõik need punktid, mis jäävad joonisel kujutatud kahe joone vahele, kujutavad elemente, mis kuuluvad hulka A'_B.

<u>Ülesandeid</u>



Joon. 3

1. Kirjuta kahe kõrvuti seisva hulga vahele märk $\subset$ või $\not\subset$, nii et saadud seos on õige.
$\{1, 2, 3\}$ ... $\{5, 4, 3, 2, 1\}$; $\{a, b, c, d\}$ ... $\{a, b, d\}$; {tööpäevad} ... {nädalapäevad}; {meie klassi õpilased} ... {meie kooli õpilased}; {meie klassi õpilased} ... {meie tehase töölised}; {ruudud} ... {rööpkülikud}; {kolmnurgad} ... {nelinurgad}; {kuubid} ... {risttahukad}; {püramiidid} ... {kuubid}; {võrdhaarsed kolmnurgad} ... {täisnurksed kolmnurgad}; {võrdkülgsed kolmnurgad} ... {võrdhaarsed kolmnurgad}.
2. Moodusta hulga $\{0, 1, 2\}$ kõik osahulgad.
V: $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,2\}$, $\{0,1,2\}$.
3. Moodusta hulga $\{1, 2, 3\}$ täiend hulgani $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
V: $\{4, 5\}$.

4. Mis on naturaalarvude hulga täiend täisarvude hulgani?
V: {negatiivsed täisarvud} (kui arv 0 lugeda naturaalarvude hulka),
5. Kui Z = {täisarvud} ja Q = {ratsionaalarvud}, mis on siis Z'_R?
V: {murdarvud}.
6. Mis on paaritute arvude hulga täiendiks naturaalarvude hulgas?
V: {paarisarvud}.
7. $A \subset B$. Selgita graafiliselt, millega võrdub $(A'_B)'_B$.
V: A.
8. A = B. Millega võrdub A'_B? aga B'_A?
V: $\emptyset$.
9. Joonesta suvaline ringjoon ja märgi sellel kaks punkti. Mitmeks osahulgaks jaotub siis ringjoone punktide hulk? Kuidas neid osahulki nimetatakse?
V: kaks osahulka, kaared.
10. Mitmeks osahulgaks jaotab sirge punktide hulga sellel sirgel võetud punkt A? Kuidas neid osahulki nimetatakse?
V: kaks osahulka, kiired.
11. Mitmeks osahulgaks jaotavad sirge punktide hulga sellel sirgel võetud punktid A ja B? Kuidas neid osahulki nimetatakse?
V: kolm osahulka, kaks kiirt, üks sirglõik.

1.3. Hulkade ühend ja ühisosa

Kahest antud hulgast (üldisemalt mistahes lõplikust arvust hulkadest) on võimalik teatavate eeskirjade järgi moodustada uusi hulki, teisiti öeldes: hulkadega on võimalik teostada tehteid. Koolimatemaatikas õpitakse eeskätt tundma kahte tehet: kahe hulga ühendi leidmist ja kahe hulga ühisosa leidmist. Mõlemad tehted tuleb ette valmistada konkreetsete näidetega ja alles siis anda sobiv definitsioon.

Hulkade ühendi mõiste selgitamiseks võib olla selline näide:

8. kl. korvpallimeeskonnaks on hulk

A = {Jüri, Tõnu, Madis, Rein, Jaan}

ja võrkpallimeeskonnaks on hulk

B = {Madis, Rein, Tõnu, Lembit, Priit, Vello}.

Koostame nimekirja neist õpilastest, kes kuuluvad korvpallimeeskonda <u>või</u> võrkpallimeeskonda, teisiti, kes kuuluvad vähemalt ühte kahest võistkonnast. Nii saame uue hulga

C = {Jüri, Tõnu, Madis, Rein, Jaan, Lembit, Priit, Vello}.

Sel juhul ütlemegi, et hulgad A ja B on <u>ühendatud</u> ehk on leitud <u>hulkade A ja B ühend</u>. Hulkade ühendamise märkimiseks kasutatakse märki $\cup$. Nii saame, et

C = A $\cup$ B (hulk C on hulkade A ja B ühend).

Eriti oluline on siin juhtida tähelepanu sellele, et kui antud hulkades on ühiseid elemente (nagu antud näites Tõnu,Rein ja Madis), siis hulkade ühendis esinevad need elemendid ainult üks kord. Kui antud hulkadel ühiseid elemente ei ole, siis ühendi moodustamine on eriti lihtne: tuleb võtta kõik ühe hulga elemendid ja kirjutada sinna juurde kõik teise hulga elemendid.

Hulkade ühendamisega seoses väärib rõhutamist sidesõna <u>või</u> mittevälistav tähendus: hulkade ühendi iga element võib kuuluda kas ühte antud hulkadest või ka mõlemasse korraga. (Seevastu näiteks lauses "arv a (a $\neq$ b) on arvust b väiksem või suurem" on <u>või</u> välistavas tähenduses.)

Kahe hulga ühendi definitsioonina tuleks anda üks järgmistest:

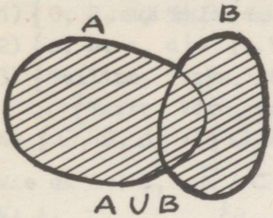
1) <u>hulka C nimetatakse hulkade A ja B ühendiks, kui hulga C elementideks on kõik need ja ainult need elemendid, mis kuuluvad hulka A või hulka B (vähemalt ühte nendest)</u>.
2) <u>kahe antud hulga ühendiks nimetatakse hulka, mille elementideks on antud hulkade kõik elemendid ja ainult need</u>.

Õpetajapoolset selgitamist vajab kindlasti matemaatilistes lausetes sageli esinev sõnaühend "need ja ainult need" (mõnikord: "siis ja ainult siis"). Kui ütleme näiteks"hulga M kõik elemendid kuuluvad hulka P", siis selle lause kohaselt võib hulka P kuuluda veel teisigi elemente, mis ei kuulu hulka M. Kui on aga veel teada, et ükski element, mis ei kuulu hulka M, ei kuulu ka hulka P, siis öeldaksegi "hulka P kuuluvad kõik hulga M elemendid ja ainult need" (s.t. M = P). Viimasesse lausesse on kokku võetud seega kaks lauset:

1) hulga M kõik elemendid kuuluvad hulka P;

2) hulgas P ei ole elemente, mis ei kuulu hulka M.

Graafiliselt kujutab hulkade A ja B ühendit joonis 4.



Joon. 4

Hulkade ühisosa mõiste selgitamiseks vaatleme näidet. On antud

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

ja

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Moodustame nende hulkade järgi uue hulga C, millesse kuuluvad kõik need ja ainult need elemendid, mis kuuluvad nii hulka A kui ka hulka B, ehk teisiti, mis kuuluvad hulka A <u>ja</u> hulka B (sellised elemendid kannavad hulkade A ja B <u>ühiste</u> elementide <u>nimetust</u>). Nii saame, et

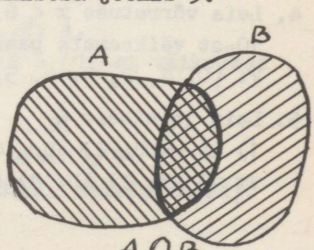
$C = \{3, 4\}$.

Hulka C nimetatakse hulkade A ja B ühisosaks, sümbolites

$C = A \cap B$.

Graafiliselt kujutab kahe hulga ühisosa joonis 5.

Kahe hulga ühisosa moodustamisel vajab rõhutamist sidesõna <u>ja</u> tähendus: element peab kuuluma korraga nii ühte kui ka teise hulka.



Joon. 5

Kahe hulga ühisosa definitsioonina võib anda ühe järgmistest:

1) <u>hulka C nimetatakse hulkade A ja B ühisosaks, kui hulga C</u>

elementideks on kõik need ja ainult need elemendid, mis kuuluvad hulka A ja hulka B (on mõlemale hulgale ühised);

2) kahe hulga ühisosaks nimetatakse hulka, mille elementideks on antud hulkade kõik ühised elemendid ja ainult need.

Nii ühendi kui ka ühisosa käsitlemisel tuleb kasutada ka punktide hulki. Nii võime näiteks kahe samal tasapinnal asetseva sirge s ja t paralleelsuse tingimusena kirjutada, et $s \cap t = \emptyset$. Kui sirged s ja t aga lõikuvad punktis M, siis $M = s \cap t$. Viimasel juhul tuleks märkida, et $s \cap t$ on hulk, seetõttu saaksime täpsemalt kirjutades, et $\{M\} = s \cap t$. Kokkuleppeliselt jäetakse siin siiski loogelised sulud ära.

Ülesandeid

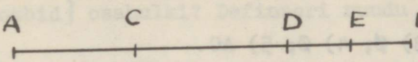
1. Leia:
   1) $\{3, 4\} \cup \{5, 6\}$
   2) $\{a, b, c\} \cup \{c, d\}$
   3) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{0, 2, 4, 6\}$
   4) $\{\triangle, \bigcirc, \square\} \cup \{\square, \Box\}$

2. Mis on $A \cup B$, kui $A \subset B$?
   V: B.

3. Moodusta hulkade A ja B ühend, kui
   1) $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{5\}$. V: A.
   2) A = {paarisarvud}, B = {paaritud arvud}. V: Z.
   3) A = {ristkülikud}, B = {ruudud}. V: A.
   4) A = {risttahukad}, B = {kuubid}. V: A.

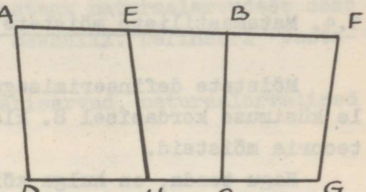
4. Leia võrratuse $x < 6$ naturaalarvuliste lahendite hulga ja 10-st väiksemate paaritute arvude hulga ühend.
   V: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

5. Leia jooniselt 6
   1) $AD \cup DB$; 2) $AC \cup CD$; 3) $AD \cup CB$; 4) $AC \cup AB$.
   V: 1) AB; 2) AD; 3) AB; 4) AB.



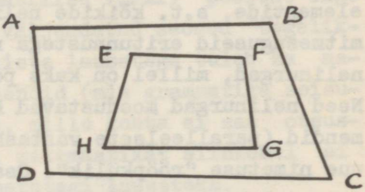
Joon. 6

6. Leia $ABCD \cup EFGH$:
   1) jooniselt 7; V: AFGD
   2) jooniselt 8; V: ABCD



Joon. 7

7. Leia hulkade ühisosad.
   1) $\{0, 2, 4, 6\} \cap \{4, 6, 7\}$.
   2) $\{a, b, c, d\} \cap \{a, b, c, e\}$.
   3) {Tallinn, Tartu, Pärnu} $\cap$
      $\cap$ {Tartu, Võru, Narva}
   4) $\{\square, \bigcirc, \triangle\} \cap \{\bigcirc, \triangle, \square\}$
8. Mis on $A \cap B$, kui $A \subset B$?
   V: A.
9. Mis on $A \cap B$, kui hulkadel A ja B pole ühiseid elemente?
   V: $\emptyset$.



Joon. 8

10. Leia hulkade A ja B ühisosa, kui
    1) $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$,
       $B = \{7, 8, 9\}$.
       V: B.
    2) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d\}$. V: A.
    3) A = {võrratuse $x < 20$ lahendid}, B = {10-st väiksemad paarisarvud}. V: B.
    4) A = {ristkülikud}, B = {ruudud}. V: B.
    5) A = {paarisarvud}, B = {paaritud arvud}. V: $\emptyset$.
    6) A = {8. kl. meesõpilased}, B = {8.kl. naisõpilased}.
       V: $\emptyset$.
11. Leia jooniselt 6
    1) $AD \cap CE$; 2) $AE \cap DE$; 3) $AD \cap EB$; 4) $AC \cap DE$;

5) $AC \cap AB$.

V: 1) CD; 2) DE; 3) $\emptyset$; 4) $\emptyset$; 5) AC.

12. On antud kaks sirget s ja t. Mida võib öelda nende sirgete kohta, kui $s \cap t = \emptyset$?

1.4. Matemaatiliste mõistete defineerimine

Mõistete defineerimisega õpilased tutvusid 7. klassis. Selle küsimuse kordamisel 8. klassis kasutatakse mõningaid hulgateooria mõisteid.

Nagu teada, on hulga kõigil elementidel kindlad tunnused, mille alusel saab otsustada, kas mingi suvaline element kuulub antud hulka. Lisaks võivad aga hulga mõnedel elementidel olla oma eritunnused. Sel juhul saab selle eritunnuse põhjal moodustada osahulga, mille elementidele võib anda ka uue nimetuse. Näiteks, kui vaadelda hulka M = {nelinurgad}, siis selle hulga elementide, s.t. kõikide nelinurkade seas võime panna tähele mitmesuguseid eritunnustega nelinurki. Võtame näiteks sellised nelinurgad, millel on kaks paari paralleelseid vastasküłgi. Need nelinurgad moodustavad hulga M ühe osahulga P, mille elemendid (paralleelsete vastaskülgedega nelinurgad) on saanud uue nimetuse "rööpkülik". Osahulga P elemente võime iseloomustada sel teel, et ütleme hulga M elemendi nimetuse (nelinurk), millele lisame osahulga P elemendi eritunnuse. Nii saame täpse vastuse küsimusele "mis on rööpkülik?" ehk nii saame defineerida rööpküliku mõiste: rööpkülikuks nimetatakse nelinurka, millel on kaks paari paralleelseid vastasküłgi. Sel juhul öeldakse ka, et mõiste "rööpkülik" on defineeritud mõiste "nelinurk" kaudu.

Ülesandeid

1. Missuguste eritunnustega rööpkülikutest saab moodustada hulga M = {rööpkülikud} osahulki? Defineeri rombi, ruudu ja ristküliku mõisted rööpküliku mõiste kaudu.

2. Missuguste eritunnustega rombidest saab moodustada hulga $M = \{rombid\}$ osahulki? Defineeri ruudu mõiste rombi mõiste kaudu.

3. Missuguste eritunnustega ristkülikutest saab moodustada hulga $M = \{ristkülikud\}$ osahulki? Defineeri ruudu mõiste ristküliku mõiste kaudu.

4. Too näiteid, missuguste eritunnustega naturaalarvudest saab moodustada naturaalarvude hulga osahulki. Defineeri vastavad mõisted.

   V: Näiteks naturaalarvulised paarisarvud, naturaalarvulised paaritud arvud, algarvud.

1.5. Lause ja selle eitus. Järeldamine

Inimene väljendab oma mõtteid mitmesuguste lausete näol. Nende lausete hulgas on selliseid, mille kohta saab otsustada, kas lause on oma sisu (mitte grammatilise vormi) poolest õige (tõene) või väär, s.t. kas lauses väljendatud seosed tegelikkuses aset leiavad või mitte. Selliste lausetega tuleb ka matemaatikas tegelda. Kõik muud väljendid (mis grammatika seisukohalt küll ka laused võivad olla), mille kohta ei saa otsustada, kas nad on õiged või väärad, matemaatikat siinkohal ei huvita ja neid matemaatikas ei nimetatagi lauseteks.

Lause mõiste selgitamiseks õpilastele on vaja esitada rohkesti asjakohaseid näiteid. Esitame siinjuures mõned sellised.

1) Tallinn on Eesti NSV pealinn. - Õige lause.
2) Narva ei ole Läti NSV pealinn. - Õige lause.
3) Minu pikkus on 9,7 m. - Väär lause.
4) $2 + 3 = 5$. - Õige lause.
5) $3 = 1 + 9$. - Väär lause.
6) $5 \neq 1 + 4$. - Väär lause.
7) Millega võrdub $1 + 1$? - Ei ole lause.
8) $3 + 4$. - Ei ole lause.
9) $5 \in \{3, 4, 5\}$. - Õige lause.
10) $\{1\} \not\subset \{1, 2\}$. - Väär lause.

Väärib rõhutamist, et kõik sellised seosed nagu "on võrdne", "on suurem", "on väiksem", "kuulub hulka", "on osahulk" jt., mille kohta saab otsustada, kas vastav seos tegelikult leiab aset või mitte, võib väljendada lausetena.

Näidete abil on vaja selgitada, et igast lausest saab moodustada selle <u>lause eituse</u>. Näiteks, kui on antud lause "arv 5 on algarv", siis selle lause eitus on "arv 5 ei ole algarv" ehk "ei ole õige, et 5 on algarv".

Kui antud lauset tähistada lühidalt tähega p, siis selle lause eituse tähiseks on $\overline{p}$. Näidete analüüsimine peab viima õpilased kindlasti ka selle tõe juurde, et kahest lausest p ja $\overline{p}$ üks on alati õige, teine väär.

Teoreemi mõiste kordamisel on vaja rõhutada, et iga teoreemi võib vaadata kui liitlauset, mis on moodustatud teoreemi eeldusest ja väitest sõnaühendi "kui ... siis" abil. Kui teoreemi eelduseks olev lause tähistada tähega p ja väiteks olev lause tähega q, siis võib iga teoreemi väljendada lühidalt "kui p, siis q"
ehk teisiti
$p \Rightarrow q$.
Märk $\Rightarrow$ on järeldamismärk, sest lause $p \Rightarrow q$ tähendab teiste sõnadega seda, et lause q järeldub lausest p ehk veel teisiti: kui lause p on õige, siis on kindlasti ka lause q õige. Lause q õigsuse põhjendamine on teoreemi $p \Rightarrow q$ <u>tõestamine</u>.

Näiteks, kui on antud teoreem "kui arvu ristsumma jagub 9-ga, siis arv jagub 9-ga", siis on lauseks p "arvu ristsumma jagub 9-ga" ja lauseks q "arv jagub 9-ga".

Tuleb märkida, et laused p ja q on sageli veel ise liitlaused. Näiteks teoreemis "kui $a > b$ ja $m > 0$, siis $am > bm$" on lauseks p "$a > b$ ja $m > 0$". Antud teoreemi võib lühidalt kirja panna nii

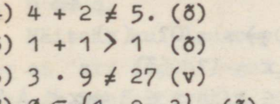
$$a > b,\ m > 0 \Rightarrow am > bm.$$

Seoses siin kõne all olevate küsimustega on vaja teha mitmesuguseid harjutusi, nagu antud lause eituse moodustamine, järeldamisharjutused, antud teoreemi sõnalisest formuleeringust lausete p ja q leidmine, antud p ja q järgi teoreemi formuleerimine ja selle üleskirjutamine sümbolite abil. Osaliselt saab selleks kasutada õhtukooli 7. kl. õpiku vastavaid ülesandeid, kui neid sobivalt formuleerida. Allpool on esitatud veel mõningaid lisaülesandeid, mille sarnaseid ka õpetaja ise võib koostada.

Ülesandeid

1. Missugused järgmistest lausetest on õiged, missugused väärad?
   1) Pärnu on kuurordilinn. (õ)
   2) Auto ei ole hobune. (õ)
   3) Mina kaalun 537 kg. (v)
   4) $4 + 2 \neq 5$. (õ)
   5) $1 + 1 > 1$ (õ)
   6) $3 \cdot 9 \neq 27$ (v)
   7) $\emptyset \subset \{1, 2, 3\}$ (õ)
   8) $\{2, 3\} \not\subset \{1, 2, 3\}$ (v)
   9) $5 \in \{2, 3, 4\}$ (v)
   10) $a \notin \{a, b, c\}$ (v)

2. Järgnevad laused on kirjutatud välja jooniselt 9. Missugused neist on õiged, missugused väärad?



Joon. 9

$s \cap t = \emptyset$ (v), $B = s \cap t$ (v),
$A = s \cap t$ (õ), $D \in t$ (õ), $A \in s$ (õ),
$C \in t$ (v), $B \notin s$ (v), $AB \subset s$ (õ),
$EB \subset t$ (v), $EB \not\subset AB$ (õ),
$AB \cup EB = EA$ (õ), $EA \cup BA = EA$ (õ),
$EB \cap EA = BA$ (v), $EB \cap EA = EB$ (õ).

3. Moodusta järgmiste lausete eitused ning otsusta igakord, kumb on õige, kas antud lause või tema eitus.
   1) $3 > 5$. V: Ei ole õige, et $3 > 5$ (õ).
   2) $5 \in \{0, 1, 2, 5\}$. V: $5 \notin \{0, 1, 2, 5\}$. (v).
   3) $0{,}7 \notin N$. V: Ei ole õige, et $0{,}7 \notin N$ (v).
   4) $3 \cdot 4 = 12$, V: $3 \cdot 4 \neq 12$ (v).
   5) Tallinn on Peipsi järve kaldal.
   V: Tallinn ei ole Peipsi kaldal (õ).

4. Otsusta, mida saab järeldada järgmistest lausetest.
   1) Arv x ei ole positiivne. V: $x \leq 0$
   2) Arv a ei ole väiksem kui 3. V: $a \geq 3$.
   3) Arvu x absoluutväärtus on suurem kui 2. V: $x < -2$ või $x > 2$.

5. Tee järeldus igast järgmisest eelduste paarist.

1)	2)	3)	4)
$a > b$	$m = a - b$	$a \cdot b = c$	$s \perp t$
$b > c$	$m = a - c$	$a = 0$	$u \perp s$
V: $a > c$	V: $b = c$	V: $c = 0$	V: $u \parallel t$

6. Kas on õige, et
   1) $a = b \Rightarrow b = a$? (õ)   2) $mn = 0 \Rightarrow m = 0$? (v)
   3) $(x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -3$ või $x = 1$? (õ)
   4) $a = b \Rightarrow a + m = b + m$? (õ) 5) $x \in A$ ja $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$?(õ)
   6) $x \in A$ ja $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$? (õ) 7) $x \in A$ ja $x \notin B \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in A \cap B$? (v) 8) $x \in M$ ja $M \subset N \Rightarrow x \in N$? (õ)
   9) $x \in N$ ja $M \subset N \Rightarrow x \in M$? (v) 10) $x \in N$ ja $M \subset N \Rightarrow x \in M$ või $x \in M'_N$? (õ) 11) $x \in A \cup b \Rightarrow x \in A$ ja $x \in B$? (v)
   12) $x \in A \cap b \Rightarrow x \in A$ ja $x \in B$? (õ).

1.6. Teoreem ja pöördteoreem

Kui antud teoreemis $p \Rightarrow q$ vahetada eeldus p ja väide q, siis saame uue lause $q \Rightarrow p$, mida nimetatakse antud teoreemi pöördteoreemiks. Antud teoreemi nimetatakse sel juhul otseseks teoreemiks. On arusaadav, et ka pöördteoreemi võime otseseks lugeda, siis endine otsene teoreem on pöördteoreemiks. Teiste sõnadega, laused $p \Rightarrow q$ ja $q \Rightarrow p$ on teineteise pöördteoreemid.

Õpilased peavad konkreetsete näidete varal kindlalt omandama, et teoreem ja pöördteoreem ei ole alati mõlemad korraga õiged.

Näiteks, kui antud teoreem on "kui arvu viimane number on paarisnumber, siis arv jagub 2-ga", siis pöördteoreem on "kui arv jagub kahega, siis selle arvu viimane number on paarisnumber".

Mõlemad teoreemid on õiged.

Kui antud teoreem on "kui α, β ja γ on kolmnurga nurgad, siis $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$", siis pöördteoreem on "kui $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, siis α, β ja γ on kolmnurga nurgad".

On arusaadav, et pöördteoreem pole õige, s.t. lausest "$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$" ei järelda, et α, β ja γ on kolmnurga nurgad.

Kui mõlemad laused, nii $p \Rightarrow q$ kui ka $q \Rightarrow p$ on õiged, siis nimetatakse lauseid p ja q <u>samaväärseteks</u>. Nende lausete samaväärsust märgitakse lühidalt nii:

$p \Leftrightarrow q$.

Näiteks kui lause p on "arvu ristsumma jagub 3-ga" ja lause q on "arv jagub 3-ga", siis $p \Leftrightarrow q$, sest esimesest järeldub teine ja ümberpöördult, teisest järeldub esimene. Teisiti öeldes, kolmega jaguvate arvude hulk ühelt poolt ja teiselt poolt hulk, milles iga arvu ristsumma jagub kolmega, on võrdsed - nad koosnevad samadest elementidest, kuid neid elemente on iseloomustatud kahel erineval viisil.

<u>Ülesandeid</u>.

1. Moodusta järgmiste teoreemide pöördteoreemid ja otsusta, kas nad on õiged või väärad.
   1) Kui arvu ristsumma jagub 9-ga, siis arv jagub 3-ga.
      V: Kui arv jagub 3-ga, siis arvu ristsumma jagub 9-ga (v).
   2) Kui arvu viimane number on 5, siis arv jagub 5-ga.
      V: Kui arv jagub 5-ga, siis viimane number on 5 (v).
   3) $|m| = |n| \Rightarrow m^2 = n^2$.
      V: $m^2 = n^2 \Rightarrow |m| = |n|$ (õ).
   4) $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$.
      V: $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ (v).
   5) Silindri ruumala võrdub silindri põhja pindala ja silindri kõrguse korrutisega.
      V: kui keha ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega, siis see keha on silinder (v).

6) Kui $x = 0$ või $y = 0$, siis $xy = 0$.
V: Kui $xy = 0$, siis $x = 0$ või $y = 0$ (õ).
7) Kui $m = 0$, siis $mn = 0$.
V: Kui $mn = 0$, siis $m = 0$ (v).

1.7. Teoreem ja vastandteoreem. Tarvilikkus ja piisavus

Teoreemist $p \Rightarrow q$ saab tuletada veel uue lause sel teel, et asendame laused p ja q nende eitustega. Nii saame lause

$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$,

mida nimetatakse antud teoreemi $p \Rightarrow q$ vastandteoreemiks. Näiteks, olgu lause p "mõlemad liidetavad jaguvad arvuga m" ja lause q "summa jagub arvuga m". Siis saame teoreemi $p \Rightarrow q$ "kui mõlemad liidetavad jaguvad arvuga m, siis summa jagub arvuga m" ja vastandteoreemi $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ "kui mõlemad liidetavad ei jagu arvuga m, siis summa ei jagu arvuga m". On ilmne, et siin lähteteoreem on õige, kuid vastandteoreem ei ole õige ($9 + 3 = 12$; 9 ei jagu 4-ga ja 3 ei jagu 4-ga, kuid 12 jagub 4-ga).

Mõnel juhul on aga nii teoreem kui ka tema vastandteoreem mõlemad õiged. Nii näiteks on õige teoreem "kui punkt asetseb nurgapoolitajal, siis ta on nurga haaradest võrdsetel kaugustel" ning samuti on õige vastandteoreem "kui punkt ei asetse nurgapoolitajal, siis ta ei ole nurga haaradest võrdsetel kaugustel".

Niisiis ka teoreem ja vastandteoreem ei ole alati mõlemad õiged.

On arusaadav, vastandteoreemi võime moodustada mitte ainult antud teoreemist $p \Rightarrow q$, vaid ka selle pöördteoreemist $q \Rightarrow p$. Nii saame pöördteoreemi vastandteoreemi $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. Siit järeldub, et igast antud teoreemist saab tuletada kolm uut teoreemi, nii et koos antud teoreemiga saame kokku neli erinevat lauset. Nii saame teoreemist (1) "kui punkt asetseb lõigu keskristsirgel, siis ta on lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel" tuletada veel kolm teoreemi:

(2) "kui punkt on lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel, siis ta asetseb selle lõigu keskristsirgel (pöördteoreem),

(3) "kui punkt ei asetse lõigu keskristsirgel, siis ta ei ole lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel (vastandteoreem),

(4) "kui punkt ei ole lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel, siis ta ei asetse selle lõigu keskristsirgel (pöördteoreemi vastandteoreem).

Kõik need neli lauset on õiged.

Parema ülevaate saamiseks on soovitav paigutada teoreem $p \Rightarrow q$ ja sellest tulenevad kolm teoreemi tabelisse, milles kõrvuti asetsevad teineteise pöördteoreemid ja kohakuti teineteise vastandteoreemid.

Teoreem	Pöördteoreem
$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
Vastandteoreem	Pöördteoreemi vastandteoreem
$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

Nüüd püstitame probleemi: kui teoreem $p \Rightarrow q$ on õige, (s.t. lause p õigsusest järeldub lause q õigsus), kas siis sellest järeldub, et mõni ülejäänud kolmest lausest ka õige on või võivad need kolm lauset kõik korraga väärad olla? Me juba nägime, et teoreemi $p \Rightarrow q$ õigsusest ei järeldu lause $q \Rightarrow p$ ega ka lause $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ õigsus. Ometi saab aga näidata, et kui $p \Rightarrow q$ on õige, siis on paratamatult õige ka $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$, s.t. lause $\overline{q}$ õigsusest järeldub lause $\overline{p}$ õigsus. Tõepoolest, oletades, et lause $\overline{p}$ ei ole õige, peab kindlasti õige olema lause p. Otsese teoreemi kohaselt peab siis olema õige ka lause q. See on aga vastuolus eeldusega, et $\overline{q}$ on õige, seega $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

Niisamuti saaks näidata, et pöördteoreemi $q \Rightarrow p$ õigsusest järeldub vastandteoreemi $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ õigsus ja ümberpöördult. Nii näeme, et antud tabelis diagonaalselt paigutatud laused on samaaegselt õiged või väärad ehk teisiti öeldes, need laused on samaväärsed:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$$
$$(\overline{p} \Rightarrow \overline{q}) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$$

Kui kõne all olevate lausete samaväärsuse põhjendamine üldisel kujul osutub raskeks, siis võib seda teha konkreetsete näidete abil. Näiteks, kui võtta teoreem "kui arv lõpeb 5-ga, siis ta jagub 5-ga" ja selle pöördteoreemi vastandteoreem "kui arv ei jagu 5-ga, siis ta ei lõpe 5-ga", siis on viimane kindlasti õige. Tõepoolest, kui arv ei jaguks 5-ga, aga ta siiski lõpeks 5-ga, siis peaks ta otsese teoreemi põhjal ometi jaguma 5-ga. See on aga vastuolus meie eeldusega, et arv ei jagu 5-ga.

Ülaltoodust tuleneb, et otsese teoreemi asemel võib tõestada pöördteoreemi vastandteoreemi. Selles avaldub vastuväiteline tõestusviis, millega õpilased on tutvunud juba 7. klassis.

Siin käsitluse all olevate küsimustega on otseselt seotud tingimuse tarvilikkuse ja piisavuse mõiste. Kui lause $p \Rightarrow q$ on õige, siis lause p väljendab piisavat tingimust selleks, et kehtiks lause q. Kui aga on õige lause $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$, siis lause p väljendab tarvilikku tingimust selleks, et lause q oleks õige. Kui laused $p \Rightarrow q$ ja $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ on mõlemad õiged, siis lause p väljendab korraga nii tarvilikku kui ka piisavat tingimust. Näiteks lauses "kui kolmnurgad on võrdsed, siis on nende pindalad võrdsed" on kolmnurkade võrdsus piisav selleks, et pindalad oleksid võrdsed, ometi aga mitte tarvilik, sest lause "kui kolmnurgad ei ole võrdsed, siis nad pole võrdsete pindaladega" ei ole õige. Lause "kui mul on 10 rbl., siis ma saan osta mootorratta" ei ole õige. Õige on aga vastandlause "kui mul ei ole kümmet rubla, siis ma ei saa osta mootorratast". Seepärast on 10 rbl. olemasolu mootorratta ostmiseks küll tarvilik, ometi aga mitte piisav. Arvu ristsumma jaguvus kolmega on arvu kolmega jaguvuseks tarvilik ja piisav.

Et laused $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ ja $q \Rightarrow p$ on samaväärsed, siis tähendab lause $p \Rightarrow q$ ja pöördlause $q \Rightarrow p$ tõestamine alati selle kinnitamist, et lause p väljendab tarvilikku ja piisavat tingimust lause q kehtimiseks.

Ülesandeid

1. Moodusta järgmiste teoreemide vastandteoreemid ja otsusta, kas nad on õiged või väärad.

1) Kui punkt asetseb nurgapoolitajal, siis ta on nurga haaradest võrdsetel kaugustel.
V: Kui punkt ei asetse nurgapoolitajal, siis ta ei ole nurga haaradest võrdstel kaugustel (õ).
2) Kui $m \in N$ ja $n \in N$, siis $mn \in N$.
V: Kui $m \notin N$ ja $n \notin N$, siis $mn \notin N$ (v).
3) Kui $a > 0$ ja $b > 0$, siis $ab > 0$.
V: Kui ei ole õige, et $a > 0$ ja $b > 0$, siis ei ole õige, et $ab > 0$ (v).

2. Tuleta kummastki järgmisest teoreemist kolm uut teoreemi ja otsusta, missugused neist on õiged, missugused väärad.
1) Kui arv lõpeb 8-ga, siis ta jagub 2-ga.
V: Pöördteoreem: kui arv jagub 2-ga, siis ta lõpeb 8-ga (v).
Vastandteoreem: kui arv ei lõpe 8-ga, siis ta ei jagu 2-ga (v).
Pöördteoreemi vastandteoreem: kui arv ei jagu 2-ga, siis ta ei lõpe 8-ga (õ).
2) Kui ringi diameeter on risti kõõluga, siis ta poolitab kõõlu.
V: Pöördteoreem: kui ringi diameeter poolitab kõõlu, siis ta on risti kõõluga (õ).
Vastandteoreem: kui ringi diameeter ei ole risti kõõluga, siis ta ei poolita kõõlu (õ).
Pöördteoreemi vastandteoreem: kui ringi diameeter ei poolita kõõlu, siis ta ei ole risti kõõluga (õ).

3. Järgnevalt on antud rida lausete paare. Otsusta iga paari korral, kas esimene lause annab tarviliku, piisava või tarviliku ja piisava tingimuse teise lause kehtivuseks.

Arv lõpeb nulliga.	Arv jagub viiega (p.)
Arv lõpeb paarisnumbriga	Arv jagub kahega (t. ja p.)
Arv lõpeb paarisnumbriga	Arv jagub neljaga (t.)
Punkt asetseb lõigu keskristsirgel	Punkt on lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel (t. ja p.)
Mul on 100 rbl.	Ma saan osta sulepea (p.)

1.8. Naturaalarvude hulk. SÜT ja VÜK

Seni kehtinud õpikute ja programmide kohaselt moodustavad naturaalarvude hulga arvud 1, 2, 3, 4, ... Uue programmi kohaselt loetakse naturaalarvuks ka arv 0 kui tühja hulga karakteristik. Kordamisel tuleks täiendus teha teatavaks ka õpilastele.

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

Naturaalarvu mõistet ei defineerita. Naturaalarvu kasutatakse hulga elementide loendamisel.

Naturaalarvude hulga omadustena vaadeldakse:

1) Naturaalarvude hulgas kehtib seos "järgneb vahetult" ja "eelneb vahetult" (viimane ei kehti arvu 0 korral).
2) Iga naturaalarv on ühe võrra suurem talle vahetult eelnevast naturaalarvust ja ühe võrra väiksem talle vahetult järgnevast naturaalarvust.
3) Naturaalarvude hulgas leidub kõige väiksem element (arv 0), kuid ei leidu kõige suuremat elementi. Naturaalarvude hulk on lõpmatu.

Peatuda tuleks ka numeratsioonil ning anda järkarvu ja järguühiku mõiste. Naturaalarvulised järguühikud on 1, 10,100, 1000, ... Naturaalarvu kirjaliku numeratsiooni korral tuleb rõhutada seda, et liikudes paremalt vasakule tähistab iga number 10 korda suuremaid ühikuid, kui eelmine number. Iga naturaalarvu saab esitada järkarvude summana, viimast aga omakorda järguühikute kordsete summana. Näiteks,

$6783 = 6000 + 700 + 80 + 3 = 6 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 3.1.$

Arvud 6000, 700, 80 ja 3 on antud arvu järkarvud. Niisamuti saame, et

$270895 = 2 \cdot 100000 + 7 \cdot 10000 + 0 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 5 \cdot 1.$

Kõneldes tehetest naturaalarvude hulgas, tuleb rõhutada, et liitmine ja korrutamine on selles arvuhulgas alati teostatavad, lahutamine ja jagamine aga mitte. Tehete põhiseadused on:

$a + b = b + c$ – liitmise kommutatiivsus,

$a + (b + c) = (a + b) + c$ – liitmise assotsiatiivsus,

$ab = ba$ - korrutamise kommutatiivsus,

$a(bc) = (ab)c$ - korrutamise assotsiatiivsus,

$a(b + c) = ab + ac$ - korrutamise distributiivsus liitmise suhtes.

Naturaalarvude hulka saab jaotada kolmeks osahulgaks: {algarvud}, {kordarvud} ja {1}.

Igal kordarvul n on teatav hulk algtegureid. Tähistame seda hulka tähega A_n. Näiteks $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ja seega $A_{30} = \{2, 3, 5\}$. Sel juhul, kui algtegurite seas on kordseid tegureid, märgime need arvud algtegurite hulga elemendina vastav arv korda. Näiteks $54 = 2 \cdot 3_1 \cdot 3_2 \cdot 3_3$ ja $A_{54} = \{2, 3_1, 3_2, 3_3\}$. Juhime tähelepanu sellele, et siin ei tule kolmedele vaadata mitte kui ühele ja samale elemendile (sama element ei saa olla samas hulgas mitu korda), vaid ikkagi kui erinevatele elementidele (esimene 3, teine 3, kolmas 3), mis on tähistatud sama märgiga, kuid erineva indeksiga.

Uue programmi kohaselt seostatakse antud arvude suurima ühisteguri (SÜT) ja väikseima ühiskordse (VÜK) arvutamine vastavalt hulkade ühisosa ja ühendi leidmisega. Nagu teada, tuleb arvu SÜT leidmiseks arvutada nende arvude kõigi ühiste algtegurite korrutis. Antud arvude ühiste algtegurite hulk on aga nende arvude algtegurite hulkade ühisosa. Antud arvude VÜK arvutamiseks tuleb aga leida nende arvude algtegurite hulkade ühend. Saadud hulga elementide korrutis ongi VÜK.

Näiteks $A_{60} = \{2_1, 2_2, 3, 5\}$ ja $A_{24} = \{2_1, 2_2, 2_3, 3\}$.
Siit saame, et

$A_{60} \cap A_{24} = \{2_1, 2_2, 3\}$ ning SÜT(60;24) = $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

$A_{60} \cup A_{24} = \{2_1, 2_2, 2_3, 3, 5\}$, VÜK(60;24) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

<u>Ülesandeid</u>

1. Leia neli vahetult järgnevat naturaalarvu alates arvust 10898. V: 10899, 10900, 10901, 10902.

2. Leia 3 vahetult eelnevat naturaalarvu alates arvust 120902. V: 120901, 120900, 119899.

3. Kas liitmistehe on teostatav

1) paarisarvude hulgas? V: Ja.

2) paaritute arvude hulgas? V: Ei.

4. Kas korrutamistehe on teostatav

1) paarisarvude hulgas? V: Ja.

2) paaritute arvude hulgas? V: Ja.

5. Leia suurimad ühistegurid.

168 ja 252 (84), 300 ja 120 (60), 280 ja 196 (28), 1680 ja 280 (280), 1948 ja 198 (66), 252 ja 42 (42), 150 ja 77 (1), 180 ja 49 (1).

6. Leia väikseimad ühiskordsed.

72 ja 120 (360), 60 ja 18 (180), 105 ja 75 (525), 35 ja 75 (525), 360 ja 48 (720), 70 ja 350 (350), 6 ja 35 (210), 15 ja 14 (210).

1.9. Murrud

Murdude kordamisel olgu peatähelepanu pööratud aritmeetilistele tehetele ning seosele harilike murdude hulga ja kümnendmurdude hulga vahel. Alljärgnevalt peatume viimasel küsimusel.

Nagu teada, saab iga kümnendmurdu kirjutada hariliku murruna. Näiteks

$$0{,}372 = \frac{372}{1000} = \frac{93}{250}; \quad 1{,}49 = 1\,\frac{49}{100}.$$

Esitame nüüd küsimuse ümberpöördult: kas iga harilikku murdu saab kirjutada ka kümnendmurruna? Lihtne on seda teha siis, kui antud hariliku murru nimetaja on ühest suurem järguühik või kui antud harilikku murdu saab nõnda laiendada, et nimetajasse tekiks järguühik. Näiteks

$$\frac{39}{1000} = 0{,}039; \quad \frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0{,}12.$$

Selgitame, missugustel tingimustel saab harilikku murdu laiendada nimetajani, milleks on järguühik. Konkreetsete näidete vaatlemine viib järeldusele, et see on võimalik siis ja ainult siis, kui hariliku murru (taandumatus kujus) nimetajas ei ole arvudest 2 ja 5 erinevaid algtegureid. Kui aga taandatud hariliku murru nimetajas on teisi algtegureid, siis saab seda murdu teisendada kümnendmurruks lugeja ja nimetaja jagamise teel. Sobivalt valitud näidetest aga selgub, et saadud kümnendmurrul on kaks olulist omadust: 1) ta on lõpmatu; 2) ta on perioodiline. Tõepoolest, lõplik ta ei saa olla, sest siis peaks antud harilik murd laskma ennast laiendada nimetajani, milleks on järguühik. Ka perioodi tekkimine on paratamatu, sest lõpmatul jagamisel tekkivate erinevate jääkide arv on lõplik (see on ikka väiksem kui jagaja). Seega peavad jäägid hakkama korduma. Kui aga mingi jääk kordub, siis see kutsub esile ka kõigi teiste jääkide perioodilise kordumise. Nii jõutakse olulisele tulemusele: iga harilik murd teisendub kas lõplikuks kümnendmurruks või lõpmatuks perioodiliseks kümnendmurruks. Kolmandat võimalust ei ole.

Järgnevalt on vaja öelda, et ka iga suvaliselt võetud lõpmatu perioodiline kümnendmurd laseb ennast harilikuks murruks teisendada (seda veel eelnevast ei saa järeldada). Selle lause põhjendamist programm ei nõua.

Kokkuvõtteks saame formuleerida väga tähtsa tulemuse: iga harilikku murdu saab teisendada kas lõplikuks kümnendmurruks või lõpmatuks perioodiliseks kümnendmurruks ja ümberpöördult, iga lõplikku kümnendmurdu, samuti lõpmatut perioodilist kümnendmurdu saab teisendada harilikuks murruks. Siit järeldub, et harilike murdude hulk ühelt poolt ning lõplike kümnendmurdude ja lõpmatute perioodiliste kümnendmurdude hulk teiselt poolt kujutavad endast üht ja sama murdarvude hulka, vahe on ainult kirjutusviisis.

Praktilises arvutustöös eelistatakse kümnendmurde, sest nendega on lihtsam opereerida. Muidugi mõista, ei ole võimalik arvutada lõpmatute kümnendmurdudega, vaid ainult nende lõplike lähenditega. Seepärast tuleb silmas pidada, et kui mingile ülesandele nõutakse täpset vastust ja ülesande andmete seas on lõplikuks kümnendmurruks mitteteisenduvaid harilikke murde, siis tuleb need harilikud murrud jätta teisendamata.

<u>Ülesandeid</u>

1. Arvuta kümnendmurdudes, kasutades vajaduse korral harilike murdude lähendeid täpsusega 0,01.

   1) $1\frac{2}{3} - 0{,}7$ (0,97) 2) $3\frac{5}{6} + 9\frac{1}{2}$ (10,37)

   $11\frac{7}{8} + 31\frac{1}{2}$ (43,375) $37\frac{1}{6} + 51{,}42$ (88,59)

   $3\frac{1}{9} + 17{,}1$ (20,21) $45\frac{1}{7} - 32{,}6$ (12,54)

2. Arvuta, ümardades vastuse sajandikeni.

   1) $3{,}87 \cdot 0{,}26$ (1,01) 2) $29 \cdot 1{,}456$ (42,22)

   $0{,}047 \cdot 5{,}1$ (0,24) $106 \cdot 4{,}002$ (424,21)

   $3{,}92 \cdot 0{,}034$ (0,13) $0{,}503 \cdot 209$ (105,13)

3. Arvuta harilikes murdudes.

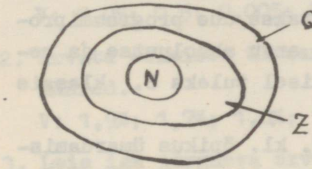
   1) $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} - \frac{3}{7}$ $\left(\frac{3}{14}\right)$ 2) $2 : \frac{3}{5} + 6\frac{2}{3} : 10 - \frac{1}{5} \cdot 3 + 1\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$ $\left(4\frac{3}{5}\right)$

   $\frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ $\left(1\frac{5}{24}\right)$ $\frac{3}{5} : 1\frac{2}{5} + 3\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} - \frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ $\left(3\frac{7}{40}\right)$

   $\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{9}{20}$ $\left(\frac{7}{12}\right)$ $1 : 1\frac{3}{5} - \frac{1}{16} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} : 6$ $\left(\frac{2}{3}\right)$

1.10. <u>Ratsionaalarvude hulk</u>

Ratsionaalarvude hulga kordamisel on soovitav motiveerida negatiivsete arvude kasutusele võtmist (vastassuunaliste muutuste mõõtmine, võrrandi $a + x = b$ lahenduvus) ning kontrollida, et õpilased oleksid kindlalt omandanud tehted ratsionaalarvude hulgas. Meelde on vaja tuletada absoluutväärtuse ja vastandarvu mõisted. Naturaalarvude hulga ja naturaalarvude vastandarvude hulga ühend on <u>täisarvude hulk</u> Z. Positiivsete ja negatiivsete murdarvude hulga ja täisarvude hulga ühend ongi <u>ratsionaalarvude hulk</u> Q. Niisiis $N \subset Z$ ja $Z \subset Q$, millest muidugi järeldub, et ka $N \subset Q$ (joon. 10). Iga ratsionaalarvu saab esitada kujul $\frac{a}{b}$, kus $a \in z$ ja $b \in Z$.



Joon. 10

Ratsionaalarvude hulga omadustest nimetame järgmisi: 1) neli aritmeetilist tehet (välja arvatud jagamine nulliga) on ratsionaalarvude hulgas piiramatult teostatavad.

2) Ratsionaalarvude hulgas kehtivad samad arvutamise põhiseadused, mis naturaalarvude hulgaski.

3) Ratsionaalarvude hulk on lõpmatu.

4) Ratsionaalarvud on järjestatavad suuruse järgi.

5) Mistahes kahe ratsionaalarvu vahel on veel lõpmatu hulk ratsionaalarve (neid võib leida näiteks aritmeetilise keskmise korduva arvutamisega) - ratsionaalarvude hulga tiheduse omadus.

<u>Ülesandeid</u>

1. Mis on 1) Z'_Q? 2) N'_Z? 3) N'_Q? (joon. 10)
   V: 1) murrud kujul $\frac{a}{b}$, kus a ei jagu b-ga; 2) negatiivsed täisarvud; 3) negatiivsed täisarvud ja kõik negatiivsed ja positiivsed murdarvud kujus $\frac{a}{b}$, kus a ei jagu b-ga.
2. Leia tähe x väärtused, kui $x > -3$ ja $x < 2$ ja $x \in Z$.
   V: $x \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 1\}$.
3. Leia tähe a väärtused, kui $|a| < 3$ ja $a \in Z$.
   V: $a \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.
4. Leia vähemalt kolm x-i väärtust, mis täidavad tingimust $-\frac{5}{6} < x < -\frac{4}{5}$.

1.11. Ligikaudse arvu absoluutse vea ja relatiivse vea ülemmäär

Ühenduses ligikaudsete arvudega antakse uue programmiprojekti kohaselt 7. klassis ka ligikaudse arvu absoluutse ja relatiivse vea ülemmäärade mõiste. Kordamisel tuleks 8. klassis ka nendel mõistetel peatuda.

Nagu teada, kõneldakse õhtukooli 7. kl. õpikus ümardamisvea, samuti mõõtmisvea ülemmäärast. Üldreeglina kirjutatakse ligikaudne arv ikka nii, et selle arvu vea ülemmäär ei oleks suurem kui viimase järgu pool ühikut. Kui teada olev vea ülemmäär on aga viimase järgu poolest ühikust erinev, siis märgitakse see ülemmäär tavaliselt arvu järele sulgudesse. Näiteks $2{,}7(\pm 0{,}2)$ tähendab siis, et täpne arv on kahe tõkke $2{,}7 - 0{,}2 = 2{,}68$ ja $2{,}7 + 0{,}2 = 2{,}72$ vahel.

Kirjeldatud viisidel vea ülemmäära andmine ei iseloomusta piisavalt ligikaudse arvu täpsust. Näiteks, kui on antud kaks mõõtarvu 10 m ja 100 m, mõlemad ühesuguse vea ülemmääraga 0,5 m, siis tuleb tunnistada, et teine arv on suhteliselt täpsem - siin tuleb ühe ühiku kohta vea ülemmääraks 0,5 m : 100 m = 0,005 osa antud vea ülemmäärast, esimesel juhul aga 0,5 : 10 m = 0,05 osa.

Ligikaudsete arvude täpsuse võrdlemisel kasutataksegi vea ülemmäära ja ligikaudse arvu jagatist, mida nimetatakse ligikaudse arvu relatiivse vea ülemmääraks. Mida väiksem on relatiivse vea ülemmäär, seda täpsem see arv suhteliselt on. Relatiivse vea ülemmäär kui kahe samanimelise arvu suhe on nimeta arv, mis tavaliselt esitatakse protsentides. Näiteks, kui $x = 37(\pm 0{,}7)$ cm, siis arvu x relatiivne viga on

$$\frac{0{,}7}{37} = 0{,}0189 \approx 1{,}9\%.$$

Relatiivse vea ülemmäär arvutatakse tavaliselt protsentide kümnendikuni ja ümardatakse ikka liiaga.

Seni kasutatud arvu vea ülemmäära nimetatakse edaspidi absoluutse vea ülemmääraks, et seda mitte ära segada relatiivse vea ülemmääraga. Kui antud ligikaudne arv on nimega arv, siis on ka absoluutse vea ülemmäär samanimeline arv.

Ülesandeid

1. **Leia järgnevate ligikaudsete arvude absoluutse vea ülemmäärad.**
   2,7; 31; 5,16; 2,9; 3,82; 3,820; 100; 320; 3000.
   V: 0,05; 0,5; 0,005; 0,05; 0,005; 0,0005; 50; 5; 500.
2. **Arvuta eelmises ülesandes antud arvude relatiivse vea ülemmäärad.**
   V: 1,9%; 1,7%; 1,0%; 1,8%; 1,4%; 0,14% 50%; 1,6%; 16,7%.
3. **Leia iga järgneva arvu alam- ja ülemtõke ning relatiivse vea ülemmäär.**
   2,5(±0,2); 3,72(±0,05)kg; 41,0(±0,8)g.
   V: 8%; 1,4%; 2%.
4. **Leia iga järgneva arvu absoluutse vea ülemmäär, kui relatiivse vea ülemmäär on 1,5%.**
   3,7 g; 42,6 cm; 13,0; 129; 0,25 m.
   V: 0,06 g; 0,7 cm; 0,2; 2; 0,004 m.

1.12. Ratsionaalavaldised

Ratsionaalavaldiste all mõeldakse selliseid avaldisi, milles pole tehteid peale liitmise (lahutamise), korrutamise, jagamise ja astendamise naturaalarvulise astendajaga.

Ratsionaalavaldised võib liigitada kaheks:

1) **täisratsionaalsed avaldised (algebralised täisavaldised),**
2) **murdratsionaalsed avaldised (algebralised murrud).**

Täisratsionaalsete avaldiste seas on tähtis koht üksliikmetel ja hulkliikmetel, mille definitsioonid on vaja ka õpilastele meelde tuletada. Ei tule arvata, et üksliikmete ja hulkliikmetega on algebralise täisavaldise mõiste ammendatud, sest on olemas täisavaldisi, mis pole ei üksliige ega hulkliige.

Näited.

$5,\ 3a,\ a^2b,\ x,\ \frac{a^2}{3},\ -7ab^2xy$ – **üksliikmed**

$5 - b,\ 3a + b,\ 7x^2 - ab$ – **hulkliikmed**

$\frac{3}{a}, \frac{1}{x}, \frac{5}{a+b}, \frac{m}{2a}$ - algebralised murrud

Avaldised $a(m + n)$, $m^2 - (a - b)^2$ jt. on algebralised täisavaldised, kuid ei kuulu üksliikmete ega ka hulkliikmete hulka.

Seoses ratsionaalavaldistega peatume järgnevalt ainult sellel, mis on perspektiivses programmis uudne.

Võtame kõigepealt korrutamise abivalemid

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Esitatud nelja valemi asemel piisab kahe valemi

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

tundmisest, kui nende valemite kasutamisel peame alati silmas sulgavaldise liikmete märke. Näiteks,

$$(5x - 2y)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x(-2y) + (-2y)^2 = 25x^2 - 20xy + 4y^2,$$

kus $a = 5x$ ja $b = -2y$.

Sama märkus kehtib ka valemi

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

kohta. Näiteks,

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 8x^3 - y^3,$$

kus $a = 2x$ ja $b = -y$.

Kõrvuti binoomi ruuduga õpitakse induktiivsel teel tundma ka hulkliikme ruutu. Nagu teada, on

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

Võtame kaksliikme $(a + b)$ asemele kolmliikme $(a + b + c)$, mida vaatame kui kaksliikme ja üksliikme summat, leiame selle ruudu

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2c(a + b) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \text{ (joon. 11)}.$$

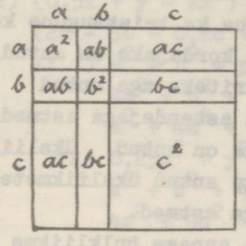
Õpetaja ülesandeks jääb näidata, et

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Kui on vaja, tuleb otsitava seaduspärasuse avastamiseks leida ka

$(a + b + c + d + e)^2$.

Vaadeldud näidetest tehakse üldistus: <u>hulkliikme ruut võrdub kõigi liikmete ruutude summaga, millele on liidetud kõigi kahekaupa võetud liikmete kahekordsed korrutised.</u>



Joon. 11

Muidugi mõista, tuleb iga konkreetse hulkliikme ruudu leidmisel arvestada selle hulkliikme iga liikme märki. Näiteks,

$$(3x - 2y + m)^2 = (3x)^2 + (2y)^2 + m^2 + 2 \cdot 3x(-2y) + 2 \cdot 3xm + 2 \cdot (-2y) \cdot m = 9x^2 + 4y^2 + m^2 - 12xy + 6mx - 4my.$$

Üksliikme mõiste kordamisel tuleb selgitada ka <u>üksliikme suurima ühisteguri ja väikseima ühiskordse mõistet</u>. Seejuures tuleb silmas pidada, et üksliikme algteguriteks loetakse kõik kordaja algtegurid ja üksliikmes esinevad tähed nii mitme kordselt, kui suur on tähelise teguri astendaja. Nii näiteks on üksliikme $M = 6a^2bc^3$ algtegurite hulk

$$A_M = \{2, 3, a_1, a_2, b, c_1, c_2, c_3\}.$$

Üksliikmete SÜT ja VÜK leidmine on analoogiline naturaalarvude SÜT ja VÜK arvutamisega. Üksliikmete SÜT arvutamiseks leitakse nende üksliikmete algtegurite hulgad ning nende hulkade ühisosa; selle ühisosa elementide korrutis ongi üksliikmete SÜT.

Üksliikmete VÜK arvutamisel tuleb aga leida algtegurite hulkade ühend; selle ühendi elementide korrutis on antud üksliikmete VÜK.

Näiteks, kui $M = 12ab^3c$ ja $N = 9a^2b^2$, siis

$$A_M = \{2_1, 2_2, 3, a, b_1, b_2, b_3, c\},$$
$$A_N = \{3_1, 3_2, a_1, a_2, b_1, b_2\}$$

ja

$$A_M \cap A_N = \{3, a, b_1, b_2\}$$

ning

$$A_M \cup A_N = \{2_1, 2_2, 3_1, 3_2, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c\}.$$

Järelikult

$SÜT(M,N) = 3ab^2$ ja $VÜK(M,N) = 36a^2b^3c$.

Muidugi võib antud üksliikmeid olla ka rohkem kui kaks.

Sellistest näidetest on võimalik teha ka teistsugune kokkuvõte: üksliikmete SÜT on üksliige, mille kordajaks on antud üksliikmete kordajate SÜT, tähelisteks teguriteks aga antud üksliikmete kõigi ühiste tegurite väikseima astendajaga astmed; üksliikmete VÜK on üksliige, mille kordajaks on antud üksliikmete kordajate VÜK, tähelisteks teguriteks aga antud üksliikmete kõigi täheliste tegurite suurima astendajaga astmed.

Hulkliikmete teguriteks lahutamisel anname hulkliikme algteguri mõiste: hulkliikme algteguriteks on sellised tegurid, mida pole enam võimalik teguriteks lahutada ehk teisiti, mis jaguvad ainult iseendaga ja arvuga 1. Siinjuures tuleb rääkida ka <u>hulkliikmete suurimast ühistegurist ja väikseimast ühiskordsest.</u> Ka hulkliikmete SÜT ja VÜK leidmise saab taandada vastavalt hulkade ühisosa ja ühendi elementide korrutise arvutamisele. Et aga hulkliikme algtegurid on enamasti ise hulkliikmed, siis tuleks selle algtegurite hulga kirjapanemiseks kirjutada mõnikord üsna pikki ridu. Selle vältimiseks lahutatakse antud hulkliikmed teguriteks, kuid algtegurite hulki eraldi välja ei kirjutata. Hulkliikmete SÜT on kõigi ühiste algtegurite korrutis. Hulkliikmete VÜK on aga korrutis, mille tegureiks on ühe hulkliikme kõik algtegurid ning teiste hulkliikmete algtegurite hulgast veel need, mis eelmistes puuduvad.

<u>Näide</u>. Leiame hulkliikmete

$M = 10a^2 - 10a$,

$N = 2a^3 - 2a$ ja

$P = 25a^3 - 50a^2 + 25a$

SÜT ja VÜK.

Saame

$$M = 10a^2 - 10a = 10a(a-1) = 2 \cdot 5 \cdot a(a-1)$$
$$N = 2a(a^2 - 1) = 2a(a-1)(a+1)$$
$$P = 25a(a^2 - 2a + 1) = 5^2 \cdot a(a-1)^2$$

$$SÜT(M,N,P) = a(a-1)$$
$$VÜK(M,N,P) = 2 \cdot 5^2 \cdot a(a-1)^2(a+1).$$

Ülesandeid

1. Leia hulkliikmete ruudud.
   1) $(m + n + p)^2$; $(2m - n + p)^2$; $(m - 2n - 2p)^2$
   2) $(0{,}5x + y - 2x^2)^2$; $(a - b + 2c + d)^2$;
   $(2a - 3b - 0{,}2c + d)^2$.

   V: 1) $m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2mp + 2np$,
   $4m^2 + n^2 + p^4 - 4mn + 4mp - 2np$,
   $m^2 + 4n^2 + 4p^2 - 4mn - 4mp + 8np$.
   2) $0{,}25x^2 + y^2 + 4x^4 + xy - 2x^3 - 4x^2y$,
   $a^2 + b^2 + 4c^2 + d^2 - 2ab + 4ac + 2ad - 4bc - 2bd + 4cd$,
   $4a^2 + 9b^2 + 0{,}04c^2 + d^2 - 12ab - 0{,}8ac + 4ad +$
   $+ 1{,}2bc - 6bd - 0{,}4cd$.

2. Leia iga üksliikmete paari SÜT ja VÜK.

1)		2)		3)	
$3a$;	$6a$	$2mn$;	$4np$	$12a^4$;	$27a^6$
$5k$;	k^2	$6x^2y$;	$9y^2$	$18c^2d^4$;	$24c^3d^2$
mn;	m	$7a^2$;	$5a^2$	$15m^2n$;	$25m^3np$
a^2b;	ab^2	$9mn$;	$12n$	$13ab$;	$11cd$

   V: 1) SÜT: $3a$; k; m; ab; VÜK: $6a$; $5k^2$; mn; a^2b^2.
   2) SÜT: $2n$; $3y$; a^2; $3n$. VÜK: $4mnp$; $18x^2y^2$; $35a^2$; $36mn$.
   3) SÜT: $3a^4$; $6c^2d^2$; $5m^2n$; 1. VÜK: $108a^6$; $72c^3d^4$;
   $75m^3np$; $143abcd$.

3. Leia iga avaldisepaari SÜT.
   1) $8mnp$ / $12mn^2p + 8m^2np$ 2) $a^2y + ay^2$ / $a^2y - ay^2$ 3) $x^2 - 9$ / $3x^2 + 18x + 27$

   V: 1) $4mnp$; 2) ay; 3) $x + 3$.

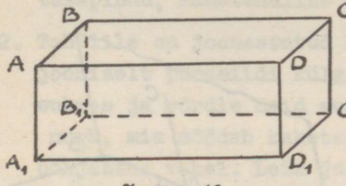
4. Leia iga avaldisepaari VÜK.
   1) 3 / $3a - 3b$ 2) m / $m^3 + m^2$ 3) $x^2 - u^2$ / $5x + 5u$ 4) $1 - x^2$ / $(x - 1)(x - 5)$

   V: 1) $3(a - b)$; 2) $m^2(m + 1)$; 3) $5(x - u)(x + u)$;
   4) $-(x - 1)(x + 1)(x - 5)$.

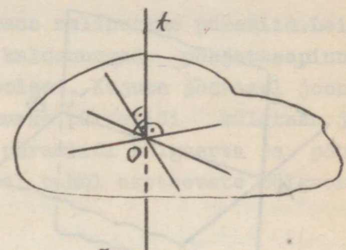
1.13. Ruumigeomeetria küsimusi

Ühenduses ruumigeomeetria elementide kordamisega on vaja õpitut täiendada mõningate teadmistega sirgete ja tasapindade vastastikuse asendi kohta. Tuleb kohe rõhutada, et nende küsimuste õpetamine on tarvis teha maksimaalselt näitlikuks. Selleks on vaja kasutada mitmesuguseid mudeleid ja toetuda näidetele oma kõige lähemast ümbrusest. Sirgete ja tasapindade asendit tuleb uurida iga varem õpitud tahkkeha juures. On vaja peatuda tasapinna mõistel. See on algmõiste, mida ei defineerita. Kujutlus tasapinnast tuleb luua sellekohaste näidete varal (vaikse vee pind, sile laua pind jt.) selgitades ikka, et neis näidetes on juttu ainult tasapinna (täpsemalt: tasapinna tükkide) mudelitest. Tasapinda kui matemaatilist objekti (samuti nagu näiteks sirget ja punktigi) pole tegelikult olemas. Meenutades nüüd varem õpitud tahkkehi (prisma, püramiid) on vaja tähelepanu juhtida sellele, et nende kehade tahud on tasapinna tükid. On vaja vahet teha antud tahu ja selle tahu tasapinna vahel. Nii on näiteks püramiidi põhitahk üks tükk põhitahu tasapinnast, millel me kujutleme püramiidi põhitahku asetsevat. Paigutades püramiidi põhjaga lauale, võime öelda, et püramiidi põhi ja laua pind on kumbki tükk nende ühisest tasapinnast. Samal viisil tuleb selgitada, et tahkkeha lõikejooned (servad) kujutavad sirglõike, mis asetsevad tasapindade lõikesirgetel. Sirgete ja tasapindade vahel võib esineda mitmesuguseid seoseid, mida me väljendame näiteks sõnadega "paralleelne", "risti", "kaldu". Kujutluse kahest paralleelsest tasapinnast annab näiteks risttahuka kahe vastastahu vaatlemine. Kui me oma kujutluses laiendame risttahuka kahte vastastahku üle kõigi servade (asetame risttahuka lauale ja paneme tema ülemisele põhjale papist plaadi), siis nende vastastahkude tasapindadel ei ole ühiseid punkte. Sellised tasapinnad ongi paralleelsed tasapinnad.

Ka sirge ja tasapinna paralleelsust saab selgitada risttahuka mudeli abil (joon. 12). Kujutledes näiteks ülemist põhiserva AD pikendatuna mõlemas suunas kuitahes kaugele, on ilmne, et saadud sirge ei saa lõikuda alumise tasapinnaga (sest siis peaksid lõikuma ka AD ja A_1D_1). Sirge AD on paralleelne risttahuka põhjatasapinnaga. Kui sirgel ja tasapinnal ei ole ühtegi ühist punkti, siis on sirge ja tasapind paralleelsed.



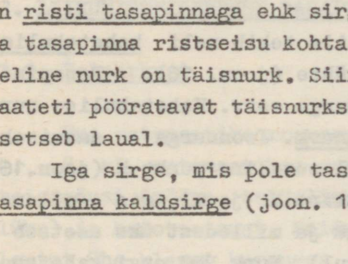
Joon. 12



Joon. 13

Joonisel 13 on tasapinda lõigatud sirgega t punktis O, kusjuures kõik punkti O läbivad sirged tasapinnal on risti sirgega t. Sel juhul öeldakse, et sirge t on <u>risti tasapinnaga</u> ehk sirge t on <u>tasapinna ristsirge</u>. Sirge ja tasapinna ristseisu kohta öeldakse, et sirge ja tasapinna vaheline nurk on täisnurk. Siin on soovitav vaadelda ka ümber ühe kaateti pööratavat täisnurkset kolmnurka, mille teine kaatet asetseb laual.

Iga sirge, mis pole tasapinnaga risti ega paralleelne, on <u>tasapinna kaldsirge</u> (joon. 14). Tasapinna <u>kaldsirge ja tasapinna vaheline nurk</u> ehk sirge <u>kaldenurk</u> leitakse järgmiselt (joon. 14):



Joon. 14

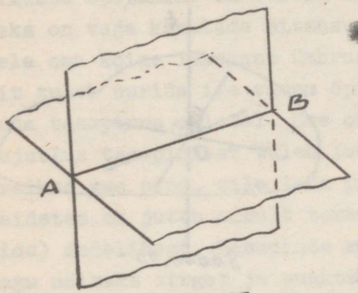
1) võtame kaldsirgel väljaspool tasapinda suvalise punkti A;

2) paneme läbi punkti A sirge AB, mis on risti tasapinnaga;

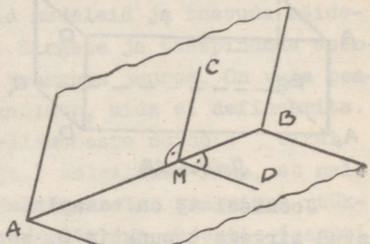
3) ühendame kaldsirge aluspunkti O ja ristsirge aluspunkti B,

nii saame täisnurkse kolmnurga AOB, mille nurka AOB nimetatakse gi sirge kaldenurgaks tasapinna suhtes.

Kui õpetaja peab võimalikuks, siis võib anda ka sirge projektsiooni mõiste ning defineerida siis sirge kaldenurka kui sirge ja tema projektsiooni vahelist nurka.



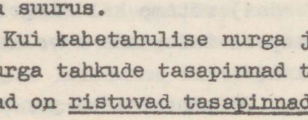
Joon. 15



Joon. 16

Kui kaks tasapinda lõikuvad, siis tekib neli <u>kahetahulist nurka</u> (joon. 15). Vaatame nendest ühte (joon. 16). Tasapindade lõikesirge AB on kahetahulise nurga serv. Kahetahulise nurga mõõtmiseks mõõdetakse tema <u>joonnurk</u>. Joonnurga saamiseks valitakse kahetahulise nurga serval suvaline punkt M (joon.16). Sellest punktist tõmmatakse kaks kiirt MC ja MD, mis mõlemad on risti kahetahulise nurga servaga ja milledest üks asetseb ühel, teine teisel tasapinnal (tahul). Nurk DMC ongi kahetahulise nurga joonnurk. Selle joonnurga suurus on ka kahetahulise nurga suurus.

Kui kahetahulise nurga joonnurk on täisnurk, siis on selle nurga tahkude tasapinnad teineteisega risti ehk need tasapinnad on <u>ristuvad tasapinnad</u> (joon. 17). Sel juhul on joonnurga üks haar risti ühe, teine teise tasapinnaga. Seepärast võime öelda ka, et tasapinnad ristuvad, kui üks tasapindadest läbib teise tasapinna ristsirget.



Joon. 17

Ülesandeid

1. Tahvlile on joonestatud risttahukas ja kolmnurkne püstprisma. Leia jooniselt paralleelseid tasapindu, tasapinnaga paralleelseid sirgeid, tasapinnaga ristuvaid sirgeid, ristuvaid tasapindu, kahetahulise nurga joonnurki.

2. Tahvlile on joonestatud korrapärane nelinurkne püramiid. Leia jooniselt püramiidi külgservade kaldenurgad põhjatasapinna suhtes ja võrdle neid suuruse poolest. Kujuta joonisel joonnurk, mis mõõdab kahetahulist nurka püramiidi külgtahu ja põhjatahu vahel. Leia jooniselt püramiidi külgserva ja põhjaserva vahelisi nurki, kahe samal tahul asetsevate külgservade vahelisi nurki.

2. LIIKUMISTEISENDUSI TASAPINNAL

2.1. Eelmärkusi

Uue matemaatikaprogrammi projekti kohaselt käsitletakse 4. - 8. kl. matemaatikas geomeetrilisi teisendusi - liikumisteisendusi (pööre, teljeline sümmeetria, tsentraalsümmeetria ja lüke) ja homoteetsust. Muidugi ei leia need teisendused käsitlemist ühe klassi kursuses, nagu seda 8. kl. üleminekuprogrammis tuleb teha, vaid küsimused on hajutatud erinevate klasside vahel. Iga teisendusega koos vaadeldakse geomeetrilisi kujundeid, mille omaduste tundmaõppimisel saab kasutada vastavat teisendust.

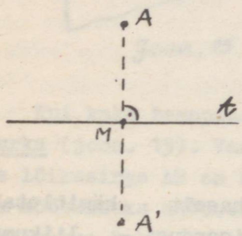
Alljärgnevalt peatume liikumisteisendustel - teljelisel ja tsentraalsel sümmeetrial ning lükkel. Arusaadavalt ei saa neid küsimusi üleminekuprogrammis antud tundide arvu juures käsitleda kuigi põhjalikult. Seepärast tuleb pearõhk asetada ainult mõnede põhimõistete tundmaõppimisele.

Nagu teada, mõistetakse üldiselt geomeetrilise teisenduse all kogu tasapinna punktide hulga teisendamist iseendaks. Liikumisteisenduste õpetamisel 8-kl. koolis juhindume siiski kitsamast ülesandest: kuidas antud kujundist (kui teatavast punktide hulgast) tuletada selle kujundiga kongruentset (võrdset) kujundit ehk piltlikumalt väljendades, kuidas "liigutada" antud kujundit tasapinnal teise kohta teatavate kujundite suhtes. Seda saab teha teatavate geomeetriliste konstruktsioonide abil.

2.2. Teljeline sümmeetria

Punkte A ja A' (loe: A prim) nimetatakse teineteisega sümmeetrilisteks sirge t suhtes, kui

$AA' \perp t$ ja $AM = A'M$, kus $M = t \cap AA'$ (joon. 18).



Joon. 18

Sirget t nimetatakse sümmeetriateljeks. Lauset "punkt A' on sümmeetriline punktiga A sirge t suhtes" kirjutatakse lühidalt kujul

$A' = t(A)$.

Kui punkt asetseb sümmeetriateljel, siis ta loetakse sümmeetriliseks iseendaga.

Sümmeetriatelg on sümmeetrilisi punkte ühendava lõigu keskristsirge, seepärast on sümmeetriatelje punktidel samad omadused, mis lõigu keskristsirge punktidelgi. Ühenduses sümmeetriaga võetakse need kokku sümmeetriliste punktide põhiomaduseks järgmises teoreemis:

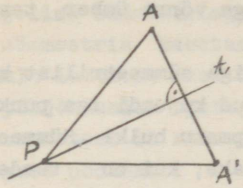
kui ühendada kaks teineteisega sümmeetrilist punkti sümmeetriatelje mingi punktiga, siis

1) saadakse võrdsed lõigud,

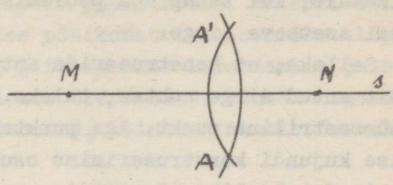
2) saadud lõigud moodustavad teljega võrdsed nurgad.

Esitatud teoreemi on kerge tõestada, toetudes täisnurksete kolmnurkade kongruentsusele (joon. 19). See teoreem võimaldab ainult sirkli abiga leida punkti A', mis on sümmeetriline antud punktiga A antud sirge s suhtes (joon. 20).

Mitmetes konstruktsioonides on vaja kasutada antud teoreemi esimese osa pöördteoreemi, mida võib sõnastada järgmiselt:



Joon. 19

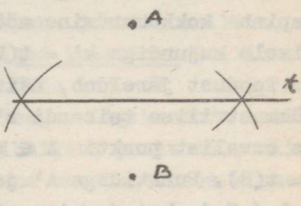


Joon. 20

kui mingi punkt on kahest punktist võrdsetel kaugustel, siis ta asetseb nende punktide sümmeetriateljel.

Pöördteoreem võimaldab kahele antud punktile A ja B leida sümmeetriatelge t (joon. 21).

Ülaltoodu põhjal on selge, kuidas leida antud punktiga sümmeetrilist punkti antud telje suhtes. Lahtiseks on jäänud aga küsimus sellest, kuidas leida antud kujundiga (näiteks kolmnurgaga) kui punktide hulgaga sümmeetrilist kujundit ehk teisiti, kuidas <u>teisendada</u> antud kujundit temaga sümmeetriliseks kujundiks. Enne selle küsimuse selgitamist peame silmas, et kujundeid k ja k' nimetatakse sümmeetrilisteks telje t suhtes, kui kummagi kujundi iga punkt on selle telje suhtes sümmeetriline teise kujundi mingi punktiga. Kui antud kujund on k, siis kujundit k' nimetatakse ka kujundi k <u>teisendiks</u>. Parema ettekujutuse saamiseks sümmeetrilistest kujunditest on oluline näidata, et antud kujundiga sümmeetrilist kujundit näeme peeglist, kui asetame peegli serviti joonise pinnale nii, et peegli tasapind ja joonise tasapind on risti. Sümmeetriateljeks on siis nende tasapindade lõikejoon. Seepärast nimetatakse antud kujundiga sümmeetrilist kujundit ka antud kujundi <u>peegelduseks</u> antud sirgest.



Joon. 21

Antud kujundiga sümmeetrilise kujundi saamist tuleb tõlgitseda ka kui tasapinna kokku murdmist mööda sümmeetriatelge ehk üldisemalt, kui tasapinna pööramist sirgnurga võrra ümber tasapinnal asetseva sirge.

Selleks, et konstrueerida antud kujundiga sümmeetrilist kujundit antud sirge suhtes, tuleks leida antud kujundi iga punktiga sümmeetriline punkt. Aga punkte on ju lõpmatu hulk! Sümmeetrilise kujundi konstrueerimine osutub lihtsaks, kui on teada järgmised teljelise sümmeetria omadused:

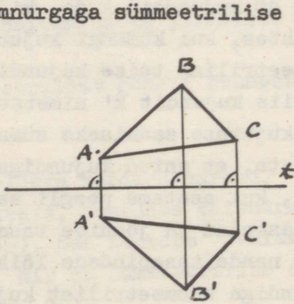
1) sirgega sümmeetriline kujund on sirge,

2) antud lõiguga sümmeetriline kujund on selle lõiguga võrdne lõik,

3) antud nurgaga sümmeetriline kujund on selle nurgaga võrdne nurk.

Nende lausete õigsus on ilmne, sest vastasel juhul ei viiks tasapinna kokkumurdmine mööda sümmeetriatelge t kujundit k ühtimisele kujundiga $k' = t(k)$.

Toodust järeldub, näiteks, et telje t suhtes antud sirgega s sümmeetrilise teisendi $s' = t(s)$ leidmiseks piisab, kui võtame kaks suvalist punkti $A \in s$ ja $B \in s$ ning leiame $A' = t(A)$ ja $B' = t(B)$. Punktidega A' ja B' ongi määratud otsitav sirge. Kui $s \cap t \neq \emptyset$ ja kui joonise mõõtmed lubavad, siis on kasulik võtta $A = s \cap t$, sest siis $A \equiv A'$ (sümmeetriatelje punkt on iseendaga sümmeetriline). Kolmnurgaga ABC sümmeetrilise kujundi saamiseks piisab, kui leiame kolmnurga iga tipuga sümmeetrilised punktid, millede ühendamisel saamegi antud kolmnurgaga sümmeetrilise kolmnurga A'B'C' (joon. 22). Siin on vaja tähelepanu juhtida sellele, et kolmnurga ja selle teisendi tippude <u>ringjärjestused</u> on vastupidiste suundadega ehk need kolmnurgad on <u>vastupidiste orientatsioonidega</u>. Kolmnurga ABC tippude A, B, C ringjärjestus ühtib kellaosuti liikumissuunaga, kolmnurga A'B'C' vastavate tippude



Joon. 22

A', B', C' ringjärjestus on aga vastupidine.

Teljeline sümmeetria osutub tõhusaks vahendiks mitmete konstruktsioonülesannete lahendamisel. Pärast seda, kui on omandatud teljelise sümmeetriaga seoses olevad põhimõisted, tulebki näidata sümmeetria kasutamist mõnedes põhikonstruktsioonides. Allpool ainult loetleme need ülesanded, jättes nende lahendamise ja selle põhjendamise õpetaja ja õpilaste ülesandeks. Mõned nendest ülesannetest on sisu poolest identsed, erinevad ainult formuleeringute poolest.

1. Ehita antud sirgele ristsirge läbi punkti, mis asetseb väljaspool antud sirget.

2. Joonesta kahe antud punkti sümmeetriatelg.

3. Poolita antud lõik.

4. Ehita antud sirgele ristsirge läbi punkti, mis asetseb antud sirgel.

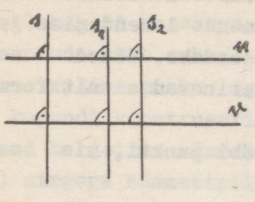
5. Poolita antud nurk.

Järgnevalt on vaja õpilaste tähelepanu juhtida sellele, et on olemas kujundeid, mis on sümmeetrilised iseendaga. Selliste kujundite korral saab leida sirge, mida mööda kujundi tasapinda kokku murdes kujundi üks pool ühtib teisega. Ligikaudu sellist sümmeetriat esineb looduses (näiteks liblikas, puulehed), niisugust sümmeetriat järgib sageli ka inimene oma tegevuses mitmesuguste esemete valmistamisel.

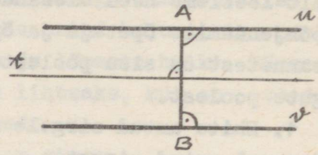
Anname õpilastele ülesande leida varem õpitud geomeetriliste kujundite hulgast iseendaga sümmeetrilised kujundid. Sellised kujundid on: võrdhaarne kolmnurk, ristkülik, romb, ruut, ring, võrdhaarne trapets, korrapärane hulknurk. Nende kujundite vaatlemisel on vaja selgitada, mitu sümmeetriatelge ühelgi kujundil on (näiteks ringil lõpmatu hulk, võrdhaarsel trapetsil ainult üks). Samuti on vaja näidata (mõne konkreetse näitena), kuidas nende kujundite varem tundma õpitud omadused (näiteks rombi diagonaalide ristseis) kergesti tulenevad ka sümmeetriast.

Uudse kujundina õpitakse programmiprojekti kohaselt tundma riba. Riba on kujund, mis koosneb kahest paralleelsest sirgest ja nende vahelisest tasapinna osast. Kui riba on piiratud sirgetega u ja v, siis riba tähiseks on $u \parallel v$.

Riba on iseendaga sümmeetriline kujund. Riba sümmeetriateljedeks on riba ristsirged (joon. 23), s.o. mõlema paralleeli ühised ristsirged, sest $u = s(u) = s_1(u) = s_2(u) = \ldots$ ja $v = s(v) = s_1(v) = s_2(v) = \ldots$ Riba ristsirge paralleelide vaheline lõik



Joon. 23



Joon. 24

(paralleelide vaheline kaugus) on riba laius. Riba laius ei olene ristsirge asukohast. Peale ristsirgete on riba sümmeetriateljeks veel riba kesksirge (joon. 24), s.o. paralleelide vahelise ristlõigu keskristsirge, sest selle sirge iga punkt on paralleelidest võrdsetel kaugustel. Seega $u = t(v)$ ja $v = t(u)$.

Ülesandeid

1. Selgita joonise abil, mida võib öelda punktide M ja M' kohta, kui t on antud sirge, $MM' \perp t$, $MP = M'P$ ja $P = MM' \cap t$.
2. Joonesta antud kujundiga antud sirge t suhtes sümmeetriline kujund, kui antud kujundiks on:
   1) punkt $A \notin t$;
   2) lõik AB, kui punktid A ja B on ühel pool sirget t;
   3) lõik AB, kui punktid A ja B on teine teisel pool sirget t;
   4) sirge $s \parallel t$;
   5) sirge s, kus $s \cap t \neq \emptyset$ ja sirged s ja t pole risti;
   6) sirge $s \perp t$;
   7) sirge t;
   8) $\triangle ABC$, kus $\triangle ABC \cap t = \emptyset$;
   9) $\triangle ABC$, kus $\triangle ABC \cap t \neq \emptyset$;
   10) ringjoon, mille keskpunkt $O \notin t$.

3. Joonesta romb, mille külje pikkus on 3 cm ja ühe diagonaali pikkus on 5 cm.

4. Joonesta romb, mille diagonaalide pikkused on 3 cm ja 5 cm.

5. Mitu sümmeetriatelge on võrdkülgsel kolmnurgal? Mida võib öelda nende telgede lõikumise kohta?

6. Näita, et rööpkülik on kahe riba ühisosa.

7. On antud riba $u \parallel v$ ning väljaspool seda mingi kolmnurk k. Joonesta kolmnurk k' = u(k) ja kolmnurk k" = v(k').

8. On antud sirged s ja t, kus $s \perp t$ ning mingi kolmnurk k. Joonesta kolmnurk k' = s(k) ja kolmnurk k" = t(k').

9. Ühel pool sirget t on sellest erinevatel kaugustel punktid A ja B. Leia sirgel t selline punkt M, et lõikude summa AM + MB oleks võimalikult väike.
V: Tuleb leida A' = t(A) või B' = t(B) . Otsitav punkt on $t \cap A'B$ (või $t \cap AB'$).

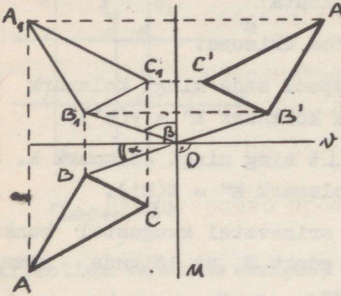
10. Üks nurkadest, mis tekib sirgete u ja v lõikumisel, on 40°. Kui suured on nurgad, mis tekivad sirgete u(v) ja v(u) lõikumisel? V: 120°, 60°.

11. Leia riba $s \parallel t$ laius, kui on teada, et peegelduste s(t) ja t(s) poolt piiratud riba laius on 18 cm. V: 6 cm.

2.3. Tsentraalsümmeetria

Tsentraalsümmeetria olemuse selgitamiseks vaatame mingi kujundi k, näiteks kolmnurga ABC, peegeldamist sirgest u, mille tulemusena saame kolmnurga $A_1B_1C_1$ (joon. 25), ning veel saadud kolmnurga $A_1B_1C_1$ peegeldamist sirgest $v \perp u$. Sellise kahe järjestikuse peegeldamise tulemusena kahest ristuvast sirgest saame kolmnurga A'B'C'. Küsime nüüd, missuguse konstruktsiooni teel võiks kolmnurgast ABC saada "otse" kolmnurga A'B'C'. Selle küsimuse selgitamiseks võtame antud kolmnurga mingi tipu, näiteks tipu B ja selle peegeldused B_1 ning B' ja ühendame need punktiga $O = u \cap v$. On ilmne, et sümmeetria tõttu on

$$\left.\begin{array}{l} OB = OB_1 \\ OB_1 = OB' \end{array}\right\} \Rightarrow OB = OB'$$



Joon. 25

Näitame, et punktid B ja B' on punktiga O ühel ja samal sirgel, s.t. et $\angle BOB' = 180^\circ$. Tõepoolest, jooniselt ilmneb, toetudes teljelise sümmeetria omadustele, et

$$\angle BOB' = \alpha + \alpha + \beta + \beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ,$$

sest $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Kokkuvõttes oleme seega näidanud, et

$OB = OB'$ ja $O \in BB'$ (punkt O on lõigu BB' keskpunkt).

Sel juhul öeldakse, et punkt B' on sümmeetriline punktiga B punkti O suhtes ja ümberpöördult, punkt B on sümmeetriline punktiga B' punkti O suhtes. Lühidalt - punktid B ja B' on <u>sümmeetrilised punkti O suhtes</u>. Punkt O on <u>sümmeetriakeskpunkt</u>, mis loetakse iseendaga sümmeetriliseks. Lauset "punkt B' on sümmeetriline punktiga B punkti O suhtes" kirjutatakse lühidalt kujul

$B' = O(B)$.

Sümmeetriat punkti suhtes nimetatakse ka <u>tsentraalsümmeetriaks</u>.

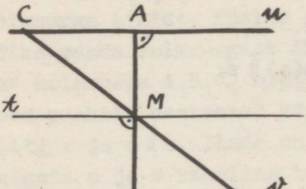
Muidugi kehtib eeltoodud arutelu mitte üksi punktide B ja B' kohta, vaid mistahes vastavate punktide kohta kolmnurkades ABC ja A'B'C' (joon. 25). Seepärast ütleme, et kolmnurgad ABC ja A'B'C' on sümmeetrilised punkti O suhtes. Üldiselt, kujundid k ja k' on sümmeetrilised punkti O suhtes, kui kummagi kujundi iga punkt on punkti O suhtes sümmeetriline teise kujundi mingi punktiga.

On kerge näha, et tsentraalsümmeetrial on samad omadused (1-3), mis teljelisel sümmeetrial (lk. 44). See võimaldab ka lihtsa konstruktsiooniga (kahe järjestikuse peegelduse asemel) leida antud kolmnurgaga antud punkti suhtes sümmeetrilist kolmnurka. Selleks tuleb kolmnurga iga tipp ühendada sümmeetriakeskpunktiga ning pikendada iga saadud lõiku üle selle keskpunkti iseenda pikkuse võrra; nii saame kolmnurga tippudega sümmeetrilised punktid, millede ühendamisel saamegi vajaliku kolmnurga. Ilmselt on punkti suhtes sümmeetrilised kolmnurgad sama orientatsiooniga (kaks peegeldust).

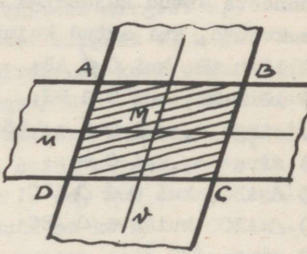
Olgu märgitud, et kujundiga k antud punkti O suhtes sümmeetrilise kujundi k' = O(k) konstrueerimist nimetatakse ka kujundi k <u>peegeldamiseks</u> punktist O, kujundit k' aga kujundi k <u>peegelduseks</u> sellest punktist.

Kindlasti on vaja näidata, et tsentraalsümmeetriat saab tõlgendada ka kujundi ehk üldisemalt kogu <u>tasapinna pööramisena</u> ümber sümmeetriakeskpunkti sirgnurga võrra.

Tsentraalsümmeetria on määratud, kui on antud sümmeetriakeskpunkt, sest siis saab leida tasapinna iga punktiga sümmeetriliselt asetseva punkti.



Joon. 26



Joon. 27

Järgnevalt on vaja peatuda mõnedel kujunditel, mis on mingi punkti suhtes <u>iseendaga sümmeetrilised</u>. Alustame ribast. Näitame, et riba kesksirge iga punkt on riba sümmeetriakeskpunktiks. Selleks on vaja tõestada, et riba kesksirge poolitab iga lõigu paralleelide vahel. Tõetus selgub jooniselt 26, kus ilmselt

$\triangle$ AMC = $\triangle$ BMD.

Riba sümmeetriast järeldub otseselt, et ka rööpkülik (ja tema eriliigid) on sümmeetriline kujund, sest rööpkülik on kahe riba ühisosa. Rööpküliku sümmeetriakeskpunktiks on ribade kesksirgete lõikepunkt. Tõepoolest (joon. 27), kui riba $AB | DC$ kesksirge on u ja riba $AD | BC$ kesksirge on v, siis on punkt $M = u \cap v$ mõlema riba ühine sümmeetriakeskpunkt. Seepärast on sirge $AB = M(DC)$ ja sirge $AD = M(BC)$. Viimasest aga järeldub, et sirgete AB ja AD ühine punkt A peab siis olema sümmeetriline sirge DC ja BC ühise punktiga C: $A = M(C)$. Niisamuti $B = M(D)$. Sellega on väide tõestatud, sest joonise pööramisel ümber punkti M 180°võrra võtab kogu joonis endise asendi: punkt D satub punkti B kohale ja vastupidi, punkt A satub punkti C kohale ja vastupidi.

Sümmeetria tõttu $M \in BD$ ja $M \in AC$. Järelikult punkt M on rööpküliku diagonaalide lõikepunkt.

Ülesandeid

1. Joonesta antud kujundiga antud punkti O suhtes sümmeetriline kujund, kui antud kujundiks on:
   1) lõik AB, kui $O \notin AB$;
   2) lõik MN, kui $O \in MN$;
   3) sirge s, kui $O \notin s$; tõesta, et $O(s) \parallel s$;
   4) sirge s, kui $O \in s$;
   5) $\triangle ABC$, kui $O \notin \triangle ABC$;
   6) $\triangle ABC$, kui $O \in \triangle ABC$;
   7) ruut AOBC.
2. Joonesta võrdkülgsele kolmnurgale tema keskpunkti suhtes sümmeetriline kujund. Mitu sümmeetriatelge on tekkinud tähtkuusnurgal?
3. Visanda joonis ja sõnasta teoreem: $M \in t \Rightarrow O(M) \in O(t)$.
   V: Kui punkt asetseb sirgel t, siis selle punktiga sümmeetriline punkt antud punkti O suhtes asetseb sirgega t sümmeetrilisel sirgel sama punkti suhtes.

4. Visanda joonis ja sõnasta teoreem:

$$\left.\begin{array}{l} s' = O(s) \\ t' = O(t) \end{array}\right\} \Rightarrow s' \cap t' = O(s \cap t)$$

v: Kui on antud punkt O, kaks sirget s ja t ning nende sirgetega sümmeetrilised sirged s' ja t' antud punkti O suhtes, siis sirgete s' ja t' lõikepunkt on punkti O suhtes sümmeetriline sirgete s ja t lõikepunktiga.

5. Sirge s on punktist O 2 cm kaugusel. Kui kaugel on sirge O(s) punktist O? V: 2 cm.

6. Leia punktide B ja C vaheline kaugus, kui on teada, et $B = O(A)$, $C = B(O)$ ja $AB = 6$ cm. V: 3 cm.

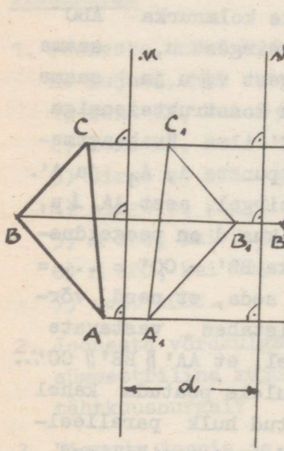
2.4. Lüke. Vektor

Ka lükke mõiste selgitamisel lähtume teljelisest sümmeetriast, nimelt peegeldame kujundit k, näiteks kolmnurka ABC (joon. 28) järjestikku kaks korda: esiteks sirgest u, saame kolmnurga $A_1B_1C_1$, mida peegeldame veel sirgest $v \parallel u$ ja saame kolmnurga A'B'C'. Küsime jällegi, missuguse konstruktsiooniga võiks saada kolmnurgast ABC kolmnurga A'B'C' ilma "vaheastmeta" kolmnurga $A_1B_1C_1$ näol? Vaatame näiteks punkte A, A_1 ja A'. Need punktid asetsevad kõik ühel ja samal sirgel, sest $AA_1 \perp u$, $A_1A' \perp v$ ja $u \parallel v$. Ilmne on ka, et $AA' = 2d$, kus d on peegeldustelgede u ja v vaheline kaugus. Samuti on ka $BB' = CC' = \ldots =$ $= 2d$, kus kolm punkti võrduste reas näitab seda, et need võrdused on õiged kolmnurkade ABC ja A'B'C' mistahes vastavate punktide korral. Edasi selgub jooniselt veel, et $AA' \parallel BB' \parallel CC' \ldots$

Enne, kui arutelust kokkuvõtet teha, tuleks peatuda kahel mõistel: <u>siht</u> ja <u>suund</u>.[1] Nimelt, kui on antud hulk paralleelseid sirgeid, siis öeldakse, et need sirged on <u>samasihilised</u>

[1] Kui õpetaja peab vajalikuks, siis võib sihi ja suuna mõiste anda enne lükke käsitlemist.

(näiteks rõhtsihilised, püstsihilised, kaldsihilised). On arusaadav, et siht on määratud, kui on antud mingi sirge teatavast paralleelsete sirgete hulgast. Sirge on aga määratud kahe punktiga. Seepärast võime öelda, et iga kaks punkti A ja B määravad ühe sihi. Peale selle võib aga iga kahe punktiga määratud sihil kõnelda kahest teineteisele vastupidisest suunast, mida sõnades võib väljendada vastavalt olukorrale mitmeti, näiteks punkti A poolt punkti B poole - punkti B poolt punkti A poole; vasakult paremale - paremalt vasakule; alt üles - ülevalt alla; positiivses suunas - negatiivses suunas jne. Väärib rõhutamist, et suunast saab kõnelda ikka alles siis, kui teatav siht on enne antud. Suunast "vasakult paremale" on mõte rääkida nimelt siis, kui on antud rõhtsiht, suunast "alt üles" kõneldakse tavaliselt ainult vertikaalsihil, positiivsel suunal on mõte alles siis, kui on antud mingi siht, millel üks suund loetakse kokkuleppeliselt positiivseks.

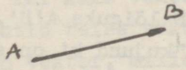


Joon. 28

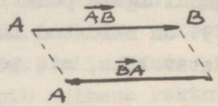
Minnes nüüd tagasi joonisel 28 tehtud arutelu juurde, võime formuleerida sellise kokkuvõtte: kujundi kahel järjestikusel peegeldamisel kahest paralleelsest sirgest nihkuvad kujundi kõik punktid ühes ja samas sihis, ühes ja samas suunas, ühe ja sama lõigu võrra. Kujundi sellist liikumist nimetatakse rööplükkeks ehk lühidalt lihtsalt lükkeks. Lüke asendab seega peegeldamist kahest paralleelsest sirgest.

Ei ole raske näha, et rööplükkel on samad omadused (1-3), mis peegeldumisel sirgest ja peegeldumisel punktist. Täiendavalt väärib aga märkimist, et lõik teisendub rööplükkel endaga võrdseks ja samasihiliseks lõiguks (antud lõik ja selle teisend asetsevad samasihilistel sirgetel).

Rööplükkega seoses käsitletakse vektoreid. Nagu nüüd teada, liiguvad kujundi kõik punktid rööplükkel ühes ja samas sihis, ühes ja samas suunas ühe ja sama lõigu võrra. Samasihiliste, samasuunaliste ja võrdsete lõikude hulka nimetatakse vektoriks. See hulk on antud, kui on antud selle hulga üks element (kui rööplükkel on määratud kujundi ühe punkti liikumine, siis sellega on määratud ka kõigi teiste punktide liikumine). Seepärast nimetatakse ka selle hulga iga elementi vektoriks. Seega võime öelda, et vektor on kindla sihi, suuna ja pikkusega sirglõik. Joonisel (joon. 29) kujutatakse vektorit sirglõiguna (määrab sihi), mille ühes otsas on nooleke (määrab suuna).



Joon. 29



Joon. 30

Punkt A on vektori alguspunkt, punkt B - lõpp-punkt. Vektorit tähistatakse tähepaarina, mille kohale on märgitud nooleke. Esimene täht selles tähepaaris on ikka alguspunkti tähis, teine lõpp-punkti tähis. Joonisel 29 on seega vektor $\overrightarrow{AB}$ (mitte $\overrightarrow{BA}$). Mõnikord kasutatakse vektori tähisena ka väikest tähte, mille kohal on nooleke, näiteks $\vec{a}$. Tähelepanu on vaja juhtida sellele, et vektori definitsioon ei ütle midagi vektori alguspunkti valiku kohta. Seepärast võib vektori alguspunkti vabalt valida (vabavektorid).

Kui vektori tähises $\overrightarrow{AB}$ tähtede järjekord muuta, siis saame vastandvektori $\overrightarrow{BA}$, mis erineb antud vektorist ainult suuna poolest (joon. 30). Et ühe suuna võib lugeda alati positiivseks ja vastandsuuna negatiivseks, siis võime vektori $\overrightarrow{AB}$ vastandvektorit kirjutada ka kujul $-\overrightarrow{AB}$.

Vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkust nimetatakse selle vektori mooduliks, mida märgitakse kujul $|\overrightarrow{AB}|$.

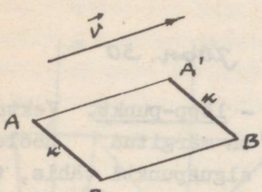
Kahte vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ nimetatakse võrdseteks (lühidalt: $\vec{a} = \vec{b}$), kui nad on samasihilised, samasuunalised ja võrdse pikkusega (olenemata alguspunkti asukohast). Vastandvektori definitsioonist tuleneb, et

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt ühtivad, nimetatakse <u>nullvektoriks</u>.

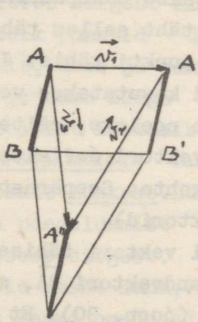
Kui kujundi k lükke siht ja suund ühtivad antud vektori $\vec{v}$ sihi ja suunaga, kusjuures kujundi k ja selle teisendi k' vastavate punktide vaheline kaugus on võrdne vektori $\vec{v}$ pikkusega $|\vec{v}|$, siis nimetatakse vektorit $\vec{v}$ kujundi k <u>lükke vektoriks</u>. Lüke on määratud, kui on antud lükke vektor, sest siis saab leida antud kujundi igale punktile vastava punkti kujundi teisendil. Joonisel 31 on näidatud lõigu AB lükke vektor $\vec{v}$ ja sellele vektorile vastav lüke, mis teisendab lõigu AB lõiguks A'B'.

Lause "kujund k' on saadud kujundist k lükkel vektoriga $\vec{v}$" kirjutatakse lühidalt kujul k' = $= \vec{v}(k)$.



Joon. 31

<u>Vektorite liitmise</u> selgitamiseks vaatame mingi kujundi, näiteks lõigu AB (joon. 32), kahte järjestikust lüket, kus esimese lükke vektor on $\vec{v}_1$ ja teise lükke vektor $\vec{v}_2$. Selle tulemusel saame lõigu A"B". Rööplükke omaduse tõttu on ilmne, et



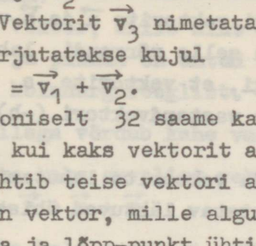
Joon. 32

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AB = A'B' \\ A'B' = A''B''\end{array}\right\} \Rightarrow AB = A''B'' \\ \left.\begin{array}{l}AB \parallel A'B' \\ A'B' \parallel A''B''\end{array}\right\} \Rightarrow AB \parallel A''B''\end{array}\right\} \Rightarrow \text{nelinurk } AA''B''B \text{ on rööpkülik.}$$

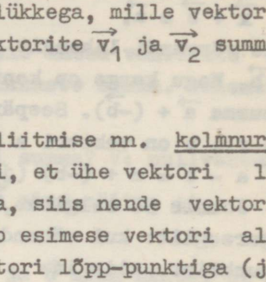
Et nelinurk AA"B"B on rööpkülik, siis on lõik A"B" saadav lõigust AB rööplükkega, mille vektor on $\vec{v}_3 = \overrightarrow{AA''}$. Muidugi jääb tähelepandu maksma ka siis, kui antud kujundiks on mitte lõik, vaid suvaline punktide hulk. Kahte järjestikust lüket vektoritega $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ saab alati asendada ühe lükkega, mille vektor olgu $\vec{v}_3$. Vektorit $\vec{v}_3$ nimetatakse siis vektorite $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ summaks ning kirjutatakse kujul

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Jooniselt 32 saame ka vektorite liitmise nn. <u>kolmnurgareegli</u>: kui kaks vektorit asetsevad nii, et ühe vektori lõpppunkt ühtib teise vektori alguspunktiga, siis nende vektorite summa on vektor, mille alguspunkt ühtib esimese vektori alguspunktiga ja lõpp-punkt ühtib teise vektori lõpp-punktiga (joon. 33).



Joon. 33



Joon. 34

Muidugi ei tule asja mõista nii, nagu saaksime liita ainult selliseid vektoreid, mis on kolmnurgareeglis tähendatud asendis. Peame silmas, et vektorit võib kanda paralleelselt iseendaga ehk rööplükkega (see tuleneb võrdsete vektorite definitsioonist) tasapinna suvalisse punkti, seega ka nii, et ühe vektori alguspunkt ühtiks teise lõpp-punktiga (joon. 34). Järelikult kahe antud vektori summa on alati leitav. Õpetaja ja õpilaste ülesandeks jäägu näidata, et vektorite summa on kommutatiivne ja et vektoreid saab liita ka nn. <u>rööpkülikureegli</u> järgi: kui liidetavad vektorid kanda ühisesse alguspunkti ja ehitada neile vektoreile rööpkülik, siis on vektorite summaks nende ühisest alguspunktist lähtuv rööpküliku diagonaalvektor. (Selleks viia joonisel 34 vektori $\vec{n}$ alguspunkt vektori $\vec{m}$ alguspunkti ja siis vektori $\vec{m}$ alguspunkt vektori $\vec{n}$ lõpp-punkti.)

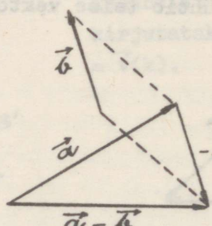
Nii nagu arvude lahutamine, defineeritakse ka vektorite lahutamine liitmise pöördtehtena, mille juurde viib võrrand

$\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$.

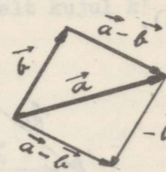
Selle võrrandi lahendit nimetataksegi vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheks $\vec{a} - \vec{b}$. Nagu kerge on kontrollida, on selle võrrandi lahendiks ka summa $\vec{a} + (-\vec{b})$. Seepärast ütlemegi, et vektorite a ja b vahe a - b on vektori a ja vektori b vastandvektori (-b) summa

a - b = a + (-b) (joon. 35).

Joonis 36 selgitab, kuidas saada vektorite lahutamise kolmnurgareeglit: kui vähendatav ja lahutatav lähtuvad ühisest alguspunktist, siis lahutatava lõpp-punktist vähendatava lõpppunkti minev vektor on antud vektorite vahe.



Joon. 35



Joon. 36

<u>Ülesandeid</u>

1. Teosta lüke suvalise kolmnurgaga ABC, kui lükke vektor on joonisel rõhtsihiline suunaga vasakult paremale ja vektori pikkus on 3 cm.
2. Põhjenda ülesandes 1 tehtud joonise abil, et lõik teiseneb lükkel antud lõiguga samasihiliseks lõiguks.
3. Põhjenda, et lükkel:
   1) sirge teisendub sirgeks,
   2) lõik teisendub antud lõiguga võrdseks lõiguks,

3) nurk teisendub antud nurgaga võrdseks nurgaks.
Näpunäide: Pea silmas, et lüke asendab kahte peegeldust.

4. Rakenda kolmnurgale ABC rööplüket, mille lükke vektor on $\overrightarrow{BC}$.

5. Ruudu ABCD tipp A on ühendatud külje DC keskpunktiga E. Rakenda sellele ruudule lüket vektoriga $\overrightarrow{EA}$.

6. Joonesta romb ABCD ühes diagonaalide lõikepunktiga O. Leia joniselt võrdseid vektoreid ja vastandvektoreid.

7. Millega võrdub kahe samasihilise ja samasuunalise vektori summa?
V: Vektor, mille siht ja suund ühtib antud vektorite omaga ja pikkus on antud vektorite pikkuste summa. Tuleneb kolmnurgareeglist.

8. Millega võrdub kahe vastandvektori summa? V: nullvektor.

9. Võta kaks suvalist vektorit $\vec{m}$ ja $\vec{n}$ ning näita, et $\vec{m} + \vec{n} = \vec{n} + \vec{m}$.

10. Võta kolm suvalist vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$, ja $\vec{c}$ ning näita, et $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
Näpunäide: kasuta kolmnurgareeglit.

11. Joonesta rööpkülik ABCD ühes diagonaalide lõikepunktiga O. Otsusta, missugused järgnevatest võrdustest on õiged, missugused väärad:
1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (v); 2) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (õ); 3) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ (õ);
4) $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO}$ (v); 5) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ (õ); 6) $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$ (õ);
7) $\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OA}$ (v) 8) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ (õ); 9) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA}$ (v);
10) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$ (õ); 11) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} = \vec{O}$ (õ); 12) $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{AB}$ (õ).

3. FUNKTSIOONID. VÕRRANDID

3.1. Vastavus kahe hulga elementide vahel

Programmi kohaselt tuleks seda teemat käsitleda vahetult enne funktsiooni mõiste defineerimist. Et aga ka punkti koordinaatide mõiste on seotud vastavusega, siis peatume sellel mõistel siin käsitlemisele tulevate probleemide ringis kõige esimesena.

Vastavuse mõistega on õpilased varemgi kokku puutunud (vastavad elemendid võrdsetes kolmnurkades, vastavad punktid sümmeetrilistel kujunditel jm). Alljärgnevas seostame selle mõiste hulga mõistega, mis lubab vastavust näha mõnevõrra uues valguses.

Vaatame näiteks kahekohaliste arvude hulka

$A = \{12, 23, 15, 25, 36, 47, 37, 22\}$.

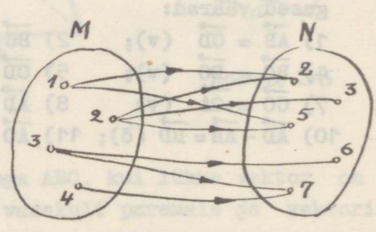
Selle hulga iga arvu kümneliste number kuulub hulka

$M = \{1, 2, 3, 4\}$

ja üheliste number kuulub hulka

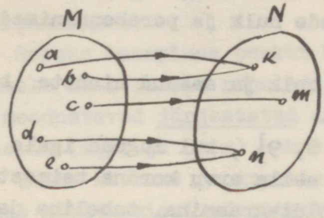
$N = \{2, 3, 5, 6, 7\}$.

Kujutame need hulgad graafiliselt (diagrammis) ja näitame noolt tega, missugune arv tuleb võtta üheliste numbriks iga hulka M kuuluva kümneliste numbri korral, et saada hulka A kuuluvat kahekohalist arvu (joon. 37). Nii saame <u>nooldiagrammi</u>, mis määrab <u>vastavuse</u> hulkade M ja N elementide vahel. Selle nooldiagrammi järgi on võimalik kirjutada välja mistahes arvu hulgast A. Joonisel 37 kujutatud vastavus on <u>mitmene</u>, sest hulga M elementidele vastab hulgast N üldiselt enam kui üks (mitu) elementi. Näiteks arvule 2 vastab kolm elementi 2, 3 ja 5. Kui hulga M igale elemendile vastab üks ja ainult üks element hulgast N, siis nimetatakse vastavust <u>üheseks</u>. Joonisel 38 esitatud nooldiagramm kujutab ühest vastavust kahe hulga vahel. Siin viib hulga M iga elemendi juurest üks ja ainult üks nool hulga N elemendi juurde. Kui hulkade M ja N elementide vahel on selline ü h e n e vastavus, et hulga N iga element on vastavuses hulga M ühe ja ainult ühe ele-

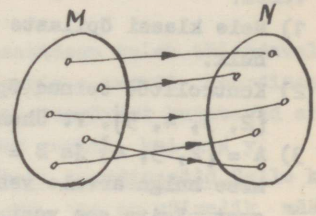


Joon. 37

mendiga, siis nimetatakse vastavust üksüheseks. Üksühese vastavuse korral läheb hulga M iga elemendi juurest üks ja ainult üks nool ning hulga N iga elemendi juurde viib samuti üks ja ainult üks nool (joon. 39).



Joon. 38



Joon. 39

Vastavust kahe hulga elementide vahel võib kujutada ka tabelina, milles hulkade vastavad elemendid on kohakuti. Järgnevas tabelis on esitatud vastavus joonisel 37 kujutatud hulkade vahel.

1	2	2	2	2	3	3	4
2	5	2	3	5	6	7	7

Vastavust kahe hulga elementide vahel saab veel esitada üheainsa hulgana, mille elementideks on järjestatud paarid. Iga paari esimeseks elemendiks on esimese hulga element ja teiseks elemendiks esimesele elemendile vastav element teisest hulgast. Joonisel 38 kujutatud vastavus on esitatav hulgana

$$P = \{(a;k), (b;k), (c;m), (d;n), (e;n)\}.$$

Vastavuse mõiste selgitamisel olgu õpetajal varuks rohkesti näiteid. Mõned sellised on esitatud ka õpikus lk. 16. Aine käsitlemisel on soovitav need formuleerida "hulgateooria keeles".

Ülesandeid

1. Mis liiki vastavus esineb joonisel kujutatud hulkade A ja B elementide vahel (õpetaja visandab tahvlile joonised nool-

diagrammidena). Esita need vastavused tabelina ja järjestatud paaride hulgana.

2. Mis liiki vastavus esineb iga järgmise kahe hulga elementide vahel?

1) Meie klassi õpilaste eesnimede hulk ja perekonnanimede hulk.

2) Kontrolltöö teinud õpilaste hulk ja saadud hinnete hulk $\{2, 3, 4, 5\}$. V: Ühene.

3) $A = \{2, 3, 4\}$ ja $B = \{4, 6, 8, 9\}$, kui lugeda igale esimese hulga arvule vastavaks selle arvu kordne teisest hulgast. Esita see vastavus nooldiagrammina, tabelina ja järjestatud paaride hulgana.

V: Mitmene. $\{(2;4),(2;6),(2;8),(3;6),(3;9),(4;4),(4;8)\}$.

4) Telje suhtes sümmeetrilised punktide hulgad.

V: Üksühene.

5) Punkti suhtes sümmeetrilised punktide hulgad.

V: Üksühene.

3. On antud hulk $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Selle hulga elementidele vastavateks hulga B elementideks on antud arvude kahekordsed. Esita vastavus nende hulkade elementide vahel nooldiagrammina, tabelina ja järjestatud paaride hulgana.

V: $\{(1;2),(2;4),(3;6),(4;8),(5;10)\}$.

4. Hulga $X = \{0, 1, 2, 3\}$ elementidele vastavad hulga Y elemendid leitakse valemiga $y = x^2 - 1$, kus $x \in X$ ja $y \in Y$. Esita vastavus tabelina ja järjestatud paaride hulgana.

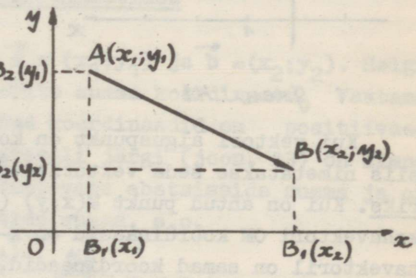
V: $\{(0;1), (1;0), (2;3), (3;8)\}$.

3.2. Punkti ja vektori koordinaadid

Kui sirgel on valitud nullpunkt ja ühik, s.o. lõik, mille pikkuse loeme üheks ühikuks, siis saab leida igale ratsionaalarvule x vastava punkti M. Arv x on siis punkti M koordinaat, mida lühidalt märgitakse kujul M(x). Õpetaja peab olema muidugi teadlik selles, et vastavus ratsionaalarvude hulga ja sirge punktide hulga vahel ei ole üksühene, sest on sirgjoone punkte, millele ei vasta ühtegi ratsionaalarvu. Mõõtmise täpsuse piirides saab muidugi igale sirge punktile ligikaudu leida vastava ratsionaalarvu.

Seoses tasapinna punkti koordinaatidega tuleb täiendavalt senisele käsitlusele rõhutada, et tasapinna punkti koordinaadid moodustavad järjestatud arvupaari. Seepärast kujutavad arvupaarid (x;y) ja (y;x) kahte erinevat punkti, kui $x \neq y$.

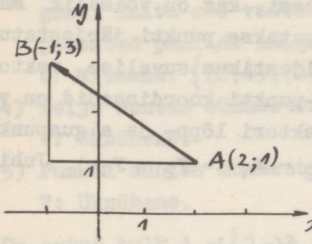
Uudne küsimus programmis on vektori koordinaadid. Selle küsimuse käsitlemisel püstitame probleemi, kas on võimalik määrata vektorit samal viisil nagu määratakse punkti järjestatud arvupaari abil. Võtame koordinaatteljestikus suvalise vektori $\overrightarrow{AB}$ (joon. 40), mille algus- ja lõpp-punkti koordinaadid on vastavalt $(x_1;y_1)$ ja $(x_2;y_2)$. Leiame vektori lõpp- ja alguspunkti samanimeliste koordinaatide vahed $x_2 - x_1$ ja $y_2 - y_1$. Juhime tähelepanu sellele, et nende vahede absoluutväärtused kujutavad vastavalt lõikude A_1B_1 ja A_2B_2 pikkusi. On ilmne, et kui viia antud vektor rööplükkega teise kohta, siis vaadeldavad vahed ei muutu. Teiste sõnadega, kõigi võrdsete vektorite lõpp- ja alguspunktide samanimeliste koordinaatide vahed on vastavalt võrdsed. Kui aga võtta vektori $\overrightarrow{AB}$ asemele mõni sellega mittevõrdne vektor (s.t. erineb antud vektorist kas sihi või suuna või pikkuse poolest), siis oleksid selle vektori lõpp- ja alguspunktide samanimeliste koordinaatide vahed muidugi erinevad vastavatest vahedest vektori $\overrightarrow{AB}$ juures. Seega on vektori lõpp- ja alguspunktide samanimeliste koordinaatide vahedega vektor täielikult määratud (täpsemalt, on määratud lõpmatu hulk vektoreid, mis on kõik võrdsed). Neid vahesid nimetatakse vektori



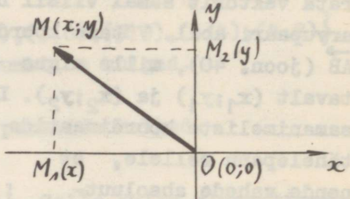
Joon. 40

koordinaatideks. Lõpp- ja alguspunktide abstsisside vahe on vektori abstsiss ja ordinaatide vahe on vektori ordinaat. Vektorit $\overrightarrow{MN}$, mille abstsiss on x ja ordinaat y, märgitakse kujul $\overrightarrow{MN} = (x;y)$.

Selleks, et joonestada näiteks vektor $\overrightarrow{a} = (-3;2)$ valime vektori alguspunkti suvaliselt, ütleme punkti A(2;1) (joon.41). Nüüd nihutame punkti A 3 ühiku võrra x-telje negatiivses suunas ($-3 < 0$) ja siis veel 2 ühiku võrra y-telje positiivses suunas ($2 > 0$). Jõuame punkti B(-1;3). Otsitav vektor on $\overrightarrow{AB}$, sest tema koordinaadid on tõepoolest $-1-2 = -3$ ja $3 - 1 = 2$.



Joon. 41



Joon. 42

Kui vektori alguspunkt on koordinaatide alguspunktis O, siis nimetatakse seda vektorit vektori lõpp-punkti kohavektoriks. Kui on antud punkt M(x;y) (joon. 42), siis selle punkti kohavektori OM koordinaadid on $x-0 = x$ ja $y-0 = y$. Punkti kohavektoril on samad koordinaadid, mis sel punktilgi.

Edaspidi tegeleme põhiliselt kohavektoritega.

Ülesandeid

1. Joonesta vektorid nende algus- ja lõpp-punkti koordinaatide järgi. Määra iga vektori koordinaadid.
   1) M(1;1) ja N(3;-2), v: $\overrightarrow{MN} = (2;-3)$
   2) A(-5;0) ja B(-5;1). V: $\overrightarrow{AB} = (0;1)$
   3) P(-1;-5) ja Q(2;-7). V: $\overrightarrow{PQ} = (3;-2)$
   4) C(-3;1) ja D(-3;1). V: $\overrightarrow{CD} = (0;0)$.

2. Joonesta järgnevad vektorid nende antud alguspunktiga.

1) $\overrightarrow{AB} = (1;2)$ $A(1;1)$. 2) $\overrightarrow{MN} = (-2;2)$, $M(-1;0)$.

3) $\overrightarrow{AB} = (3;-2)$ $A(0;0)$. 4) $\overrightarrow{MN} = (-1;-2)$, $M(-1;-1)$.

3. Leia kohavektoriga $\vec{a} = (2;1)$ sümmeetriline vektor

1) x-telje suhtes

2) y-telje suhtes

V: 1) $(2;-1)$, 2) $(-2;1)$.

4. Leia kohavektori $\overrightarrow{OM} = (-2;-1)$ vastandvektor.

V: $(2;1)$.

5. On antud kohavektorid 1) $\vec{m} = (1;2)$, 2) $\vec{a} = (3;-1)$, 3) $\vec{r} = (-2;-2)$. Leia nendega sümmeetrilised vektorid sirge suhtes, mis poolitab koordinaattelgede vahelised nurgad esimeses ja kolmandas veerandis.

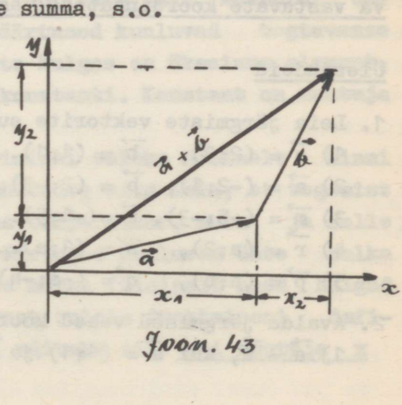
V: 1) $(2;1)$, 2) $(-1;3)$, 3) $(-2;-2)$.

3.3. Vektorite summa ja vahe koordinaatides

Olgu antud kaks vektorit $\vec{a} = (x_1;y_1)$ ja $\vec{b} = (x_2;y_2)$. Selgitame, kuidas leida nende vektorite summa koordinaate. Vaatame esiteks juhtumit, kus kõik antud koordinaadid on positiivsed. Liites need vektorid kolmnurgareegli järgi (joon. 43) on ilmne, et summa $\vec{a} + \vec{b}$ abstsiss on liidetavate abstsisside summa ja ordinaat on liidetavate ordinaatide summa, s.o.

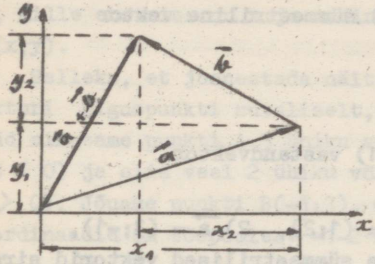
$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2).$$

Tehtud tähelepanek jääb jõusse ka siis, kui mõni koordinaatidest on negatiivne. Joonisel 44 on näiteks $x_2 < 0$ (sest vektori b lõpp-punkti abstsiss on väiksem kui alguspunkti abstsiss) ja vektorite summa $\vec{a} + \vec{b}$ abstsiss on ikkagi $x_1 + x_2$. Üldiselt vektorite summa koordinaadid



Joon. 43

on võrdsed liidetavate vektorite vastavate koordinaatide summaga.



Joon. 44

Selleks, et vektorite vahet koordinaatides leida, peame silmas, et vektorite $\vec{b}$ ja $\vec{a}$ vahe $\vec{b} - \vec{a}$ leidmine tähendab võrrandi

$$\vec{z} + \vec{a} = \vec{b}$$

lahendamist, kus $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on antud ja $\vec{z}$ otsitav vektor. Olgu $\vec{a} = (m;n)$ ja $\vec{b} = (p;q)$, vektori $\vec{z}$ otsitavad koordinaadid olgu x ja y. Vektorite liitmise eeskirja järgi saame, et

$$\vec{z} + \vec{a} = (x+m;\ y+n).$$

Et kaks vektorit $\vec{z}+\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on võrdsed, siis ja ainult siis, kui nende vastavad koordinaadid on võrdsed, siis

$$x+m = p \text{ ja } y+n = q,$$

millest

$$x = p-m \text{ ja } y = q-n.$$

Niisiis vektorite $\vec{b} = (p;q)$ ja $\vec{a} = (m;n)$ vahe $\vec{b} - \vec{a}$ koordinaadid on p-m ja q-n.

Vektorite vahe koordinaadid on võrdsed vähendatava ja lahutatava vastavate koordinaatide vahega.

Ülesandeid

1. Leia järgmiste vektorite summade koordinaadid.
   1) $\vec{a} = (2;3)$, $\vec{b} = (1;1)$. V: (3;4)
   2) $\vec{a} = (-2;1)$, $\vec{b} = (2;-3)$. V: (0;-2)
   3) $\vec{m} = (-5;-3)$, $\vec{n} = (-1;5)$. V: (-6;2)
   4) $\vec{r} = (a;2)$, $\vec{s} = (1;a)$. V: (a+1; a+2)
   5) $\vec{p} = (a;b)$, $\vec{q} = (-a;-b)$. V: (0;0)
2. Avalda järgmised vahed koordinaatides.
   1) $\vec{a} - \vec{b}$, kui $\vec{a} = (1;1)$ ja $\vec{b} = (2;3)$. V: (-1;-2)

2) $\vec{m} - \vec{n}$, kui $\vec{m} = (-5;1)$ ja $\vec{n} = (2;-6)$. V: $(-7;7)$

3) $\vec{a} - \vec{b}$, kui $\vec{a} = (2;m)$ ja $\vec{b} = (-2;-m)$. V: $(4;2m)$

3.4. Muutuja. Funktsioonid

Traditsiooniliselt defineeritakse funktsiooni mõiste muutuvate suuruste kaudu. Viimasel ajal aga püütakse matemaatikas loobuda suuruse mõistest, kuna viimane kuulub oma iseloomult enam füüsika valdkonda. Muutuva suuruse asemel kasutatakse muutuja mõistet (nimisõna tähenduses), mida uue programmi kohaselt hakatakse kujundama juba alates esimesest klassist. Muutujat tuleb vaadata kui teatavat avaldises esinevat märki (enamasti tähte), mille asemele me võime võtta suvalise elemendi teatavast hulgast. Näiteks, avaldises $x + 5$ on muutujaks täht x. Kui ei ole esitatud mingisuguseid kitsendusi, siis võime tähe x asemele kirjutada suvalise ratsionaalarvu, ikka on antud avaldisel selge mõte. Seevastu pole näiteks mõtet võtta x asemele elementi hulgast $\{$Tõnu, Tiina, Liisi$\}$. Seepärast ütleme, et avaldises on muutuja väärtuste hulgaks ratsionaalarvude hulk: $x \in Q$. Samuti võiks võtta näiteks avaldises $3 * 7$ muutujaks tärni ja lugeda selle muutuja väärtuste hulgaks $\{+, -, :, \times\}$. Avaldises "kodanik N" on muutuja N väärtuste hulgaks teatav inimeste hulk, näiteks 8. kl. õpilaste hulk. Edaspidi tegeleme ikka muutujatega, mille väärtused kuuluvad teatavasse <u>arvuhulka</u>. Kui muutuja x väärtuste hulgas on üksainus element, siis ütleme, et täht x tähistab konstanti. Konstant on muutuja erijuhtum.

Funktsiooni mõiste defineerimisel tuleks üldiselt kinni pidada õpiku plaanist (§3.3), rõhutades siin ikka, et tegemist on kahe muutujaga (näiteks aeg ja temperatuur, nurk ja selle vastaskaatet a), milledest ühe väärtused kuuluvad ühte hulka ja teise väärtused mingisse teise hulka (üldiselt need hulgad võivad ka kokku langeda). Seepärast tuleks funktsiooni definitsioongi anda üldisemal kujul, näiteks nii: <u>kui muutuja x</u>

igale väärtusele tema väärtuste hulgast X vastab mingi eeskirja järgi muutuja y üks kindel väärtus tema väärtuste hulgast Y, siis nimetatakse muutujat y muutuja x funktsiooniks.

Muutujat x nimetatakse funktsiooni y argumendiks. Argumendi väärtuste hulk X on funktsiooni määramispiirkond. Hulk Y on funktsiooni väärtuste hulk. Õpikus lk. 18 antud tabelis on funktsiooni määramispiirkonnaks hulk $\{10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°\}$ ja funktsiooni väärtuste hulgaks on $\{0{,}9; 1{,}7; 2{,}5; 3{,}2; 3{,}8; 4{,}3; 4{,}7; 4{,}9\}$.

Eelmises näites on funktsiooni määramispiirkond antud hulga elementide loetlemise teel. Sageli pole see aga võimalik. Näiteks, kui määramispiirkonnaks on kõik ratsionaalarvud, mis täidavad tingimust $-5 \leqslant x \leqslant 0$, siis vastav hulk kirjutatakse kujul

$$\{x \in Q \mid -5 \leqslant x \leqslant 0\}.$$

Kui funktsiooni määramispiirkonnaks on hulk X, siis öeldakse ka, et funktsioon on defineeritud hulgal X.

Nagu näha, pole funktsionaalne sõltuvus midagi muud kui ühene vastavus kahe hulga elementide vahel. Seepärast sobivad funktsionaalse sõltuvuse esitamiseks need samad vahendid, mis vastavuse esitamisekski (nooldiagramm, tabel, järjestatud arvupaaride hulk). Täiendavalt tuleb õpiku kohaselt käsitleda veel funktsionaalse sõltuvuse graafilist esitusviisi, samuti valemit.

Konkreetsete funktsioonide õpikukäsitlusele lisame siin vaid niipalju, et kõikjal kus otstarbekas, tuleb kasutada varem omandatud teadmisi, terminoloogiat ja sümboolikat. Lineaarfunktsiooni, samuti ruutfunktsiooni graafikute õpetamisel kasutame kindlasti lükke mõistet. Funktsiooni $y = ax + b$ graafik saadakse funktsiooni $y = ax$ graafikust lükkel vektoriga $\vec{v} = (0;b)$. Funktsioonide $y = ax^2 + c$, $y = a(x + m)^2$, $y = a(x + m)^2 + n$, $y = ax^2 + bx + c$ graafikud saadakse kõik funktsiooni $y = ax^2$ graafikust lükkel vastavalt vektoriga $\vec{v} = (0;c)$, $\vec{v} = (-m;0)$, $\vec{v} = (-m;n)$, $\vec{v} = (-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a})$. Viimased koordinaadid on vaja ka üldkujul anda ruutkolmliikme $ax^2 + bx + c$ teisendamise teel täisruudu eraldamise võttega.

Ülesandeid

1. Arvuta avaldise
   $\dfrac{2x - 3}{5}$
   väärtused, kui muutuja x väärtuste hulk on $\left\{1,5;\ \frac{1}{2};\ 3\right\}$.
   V: $0;\ -\frac{4}{5};\ \frac{3}{5}$.
2. Missugused järgmistest tabelitest esitavad funktsioone?
   Leia iga funktsiooni määramispiirkond ja väärtuste hulk.

1)

1	3	5
2	4	7

2)

1	1	4	2
2	3	1	3

3)

1	2	5	6
3	3	5	5

4)

1	2	5
1	1	1

5)

0	2	4
1	3	5

   V: 1), 3), 4), 5), sest need kujutavad ühest vastavust.
3. Esita järjestatud paaride hulgana funktsioon $y = 2x - 1$, mis on defineeritud hulgal $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, 3\}$.
   V: $\{(0;-1), (1;1), (2;3), (3;5)\}$.
4. Esita graafiliselt funktsioon $y = x - 1$, mis on defineeritud hulgal $\mathbb{X} = \{x \in Q \mid -1 \leqslant x \leqslant 4\}$.
5. Mis on lükke vektoriks, et nihutada
   1) funktsiooni $y = 2x$ graafik ühtivusse funktsiooni $y = 2x+5$ graafikuga?
   2) funktsiooni $y = 2x^2$ graafik ühtivusse funktsiooni $y = 2x^2 + 4x - 1$ graafikuga?
   V: 1) $\vec{v} = (0;5)$, 2) $\vec{v} = (-1;-3)$.

3.5. Arvu ruutjuur

Ühenduses ruutfunktsiooniga õpitakse tundma arvu ruutjuurt. Teeme ka selle mõiste kohta mõned täiendavad märkused. Eelkõige rõhutame, et arvu ruutjuur defineeritakse üheselt: positiivse arvu a ruutjuureks nimetatakse niisugust positiivset arvu, mille ruut on a. Niisiis $\sqrt{9} = 3$ (mitte -3). Et nulli ruutjuur on null, siis on ka ilmne, et võrdusel $(\sqrt{a})^2 = a$ on mõte ainult siis, kui $a \geqslant 0$. Ruutjuure ühene defineerimine annab ka, et

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a, \text{ kui } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ kui } a < 0 \end{cases}$$

ehk lühemalt

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Uue programmiprojekti kohaselt tuleb õpilasi tutvustada ruutjuure ligikaudsete väärtuste arvutamise võimalusega. Üks selline võte (Newtoni meetod) on antud peenkirjaga näitena õpikus lk. 109. Esitame järgnevalt selle üldisema käsitluse.

Olgu $\sqrt{a} = x$, kus $a > 1$ on naturaalarv (ruutjuure leidmise igast ratsionaalarvust saab taandada naturaalarvu juurimisele). Olgu mingi võttega leitud otsitava ruutjuure mingi lähend x_1, s.t.

$\sqrt{a} \approx x_1$ ehk

$\sqrt{a} = x_1 + h$, kus $h < 1$ tähistab esimese lähendi parandust. Viimasest võrdusest tuleneb, et

$$a = x_1^2 + 2hx_1 + h^2.$$

Arvestades, et $h < 1$, jätame viimases võrduses h^2 arvesse võtmata, mille tõttu saame, et

$$h \approx \frac{a - x_1^2}{2x_1} \text{ ja}$$

$$a \approx x_1 + \frac{a - x_1^2}{2x_1} = \frac{a + x_1^2}{2x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_1} + x_1\right).$$

Leitud lähendi võtame otsitava ruutjuure uueks, teiseks lähendiks x_2, s.t.

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_1} + x_1\right).$$

Teise lähendiga võime kõiki samu operatsioone korrata mis esimese lähendiga x_1, saame uue lähendi x_3 jne. Üldiselt

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_k} + x_k\right) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Märgime, et kirjeldatud võte on arvutustehnika seisukohalt üsna efektiivne: saab näidata, et lähendite jada

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$$

koondub alglähendist x_1 sõltumata. Koonduvus on seejuures kiire — kui mingis lähendis on n õiget kümnendkohta, siis järgnevas lähendis on juba 2n õiget kümnendkohta.

Praktiliselt lõpetatakse arvutamine siis, kui kahes naaberlähendis vajalik arv kümnendkohti kordub. Näiteks leiame $\sqrt{6}$ kolme tüvenumbriga. Võtame

$\sqrt{6} \approx 2,5$, siis

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{2,5} + 2,5\right) = \frac{1}{2}(2,4 + 2,5) = 2,45.$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{2,45} + 2,45\right) = \frac{1}{2}(2,449 + 2,45) = 2,45.$$

Nõutava täpsusega on $\sqrt{6} = 2,45$.

Saab näidata, et lähendi x_{k+1} viga võib hinnata võrratusega

$$|x_{k+1} - \sqrt{a}| < (x_{k+1} - x_k)^2.$$

Teadnuks seda vahehinnangut, oleks võinud eelmises näites jätta juba lähendi x_3 arvutamata, sest lähendi x_2 vahehinnang $0,05^2 = 0,0025$, mis ütleb, et selles lähendis on kaks õiget kümnendkohta.

Ruutjuure lähendite arvutamise kohta tuleb lahendada ka ülesandeid, mille esitamiseks siinkohal ei ole vajadust.

3.6. Matemaatilistest tabelitest

Seoses funktsioonide õpetamisega käsitletakse ka matemaatilisi tabeleid. Nendega tutvumisel tuleb ikka rõhutada, et iga tabel kujutab üksühest vastavust argumendi väärtuste hulga ja teatava funktsiooni väärtuste hulga vahel. Juhime ühtlasi tähelepanu sellele, et kolmekohaliste tabelite asemel hakatakse 8. klassis edaspidi kasutama neljakohalisi tabeleid (autor V. Bradis). Et tabeli kasutamist lihtsustada, jäetakse selles kooliastmes kõigi tabelite korral vaatluse alt välja nn. paranduste veerud. Seega võimaldavad sellised tabelid (peale trigonomeetriliste funktsioonide tabelite, millest tuleb juttu veel tagapool) leida funktsiooni nelja tüvenumbriga väärtusi, kui argumendi väärtus on antud kolme, mõnel juhul ka nelja tüvenumbriga. Kui argumendi väärtus on ligikaudne kolme tüvenumbriga arv ja kui leitud funktsiooni väärtus jääb lõppvastuseks, siis tuleb viimane ümardada ligikaudse arvutamise eeskirjade kohaselt kolme tüvenumbriga arvuks. Kui aga tabelist võetud funktsiooni väärtus leiab kasutamist edaspidises arvutustöös, siis jäetakse viimane number varunumbriks.

Kui argumendi väärtuses on tüvenumbreid rohkem kui tabelis antud, siis tuleb enne tabeli kasutamist see väärtus ümardada.

Täiendavalt senistele tabelitele tuleb koos pöördvõrdelise sõltuvusega edaspidi ka õhtukoolis õpetada pöördarvude tabelit. See võimaldab leida funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ väärtusi argumendi väärtuse nelja tüvenumbri järgi vahemikus 1,000 kuni 1,799 ja kolme tüvenumbri järgi vahemikus 1,80 kuni 9,99. Eeldusel, et argumendi väärtused on täpsed arvud, saame näiteks

$$\frac{1}{1{,}02} = 0{,}9804; \quad \frac{1}{1{,}546} = 0{,}6468; \quad \frac{1}{8{,}6} = 0{,}1163$$

Kui argumendi väärtused ei kuulu eelmärgitud vahemikesse, siis selgitavad tabeli kasutamist järgmised näited:

$$\frac{1}{37{,}5} = \frac{1}{3{,}75} : 10 = 0{,}2667 : 10 = 0{,}02667;$$

$$\frac{1}{0{,}057} = \frac{1}{5{,}7} \cdot 100 = 0{,}1754 \cdot 100 = 17{,}54;$$

$$\frac{1}{239} = \frac{1}{2{,}39} : 100 = 0{,}4184 : 100 = 0{,}004184;$$

$$\frac{1}{0{,}00098} = \frac{1}{9{,}8} \cdot 10000 = 0{,}1020 \cdot 10000 = 1020.$$

Pöördarvude tabel võimaldab jagamistehet asendada korrutamistehtega, mis kirjalikku arvutustööd mõnevõrra lihtsustab. Näiteks

$$8{,}7 : 34{,}7 = 8{,}7 \cdot \frac{1}{34{,}7} = 8{,}7 \cdot 0{,}02882 = 0{,}2507.$$

Harjutusmaterjali pöördarvude tabeli kasutamise kohta valigu iga õpetaja oma äranägemise järgi, toetudes siin esitatud näidetele.

3.7. Võrdus, võrrand, samasus

Kui ühendame kaks avaldist võrdusmärgiga, siis saame võrduse. Võrdused on näiteks $2 + 3 = 5$, $3 \cdot 8 = 24$, $4 = 4$, $5 + 1 = 10$. Nendest kolm esimest on õiged, viimane on väär võrdus. Võrduses võib esineda muutuja, nagu näiteks $x + 7 = 9$, $(a-1)^2 - (a^2 + 1) = -2a$. Muutujat sisaldav võrdus on võrrand. Muutujat sisaldava võrduse, s.o. võrrandi kohta ei oma mõtet küsimus, kas võrdus on õige või väär, sest võrduse õigsus oleneb üldiselt sellest muutuja väärtusest, mille ta saab oma väärtuste hulgast. Näiteks võrrandist $x + 7 = 9$ saame õige võrduse, kui $x = 2$ ja väära võrduse kõigil teistel muutuja väärtustel. Kui muutuja väärtuste hulga suhtes ei ole esitatud kitsendusi, siis loeme selleks kogu ratsionaalarvude hulga. Muutuja seda väärtust, millega muutujat asendades saame võrrandist õige võrduse, nimetatakse võrrandi lahendiks. Võrrandi lahendi kohta öeldakse, et ta rahuldab võrrandit. Lahendi leidmine on võrrandi lahendamine. Võrrandi lahendite hulga tähistamiseks kasutatakse loogelisi sulge, millesse märgitakse muutuja väärtuste hulk ja võrrand, mille lahend sellest väärtuste hulgast on vaja leida. Võrrandi $x + 7 = 9$ ratsionaalarvuliste lahendite hulk on $\{x \in Q \mid x + 7 = 9\} = \{2\}$. Kui muutuja väärtuste hulgaks on ratsionaalarvude hulk, siis jäetakse see tavaliselt märkimata ja eeltoodud võrrandi lahendite hulk avaldub siis kujul $\{x \mid x + 7\} = \{9\}$.

On võrrandeid, mille lahendite hulk ühtib muutuja väärtuste hulgaga, s.t. muutuja iga väärtus tema väärtuste hulgast on võrrandi lahendiks. Sellised võrrandid kannavad samasuse nime. Kerge on veenduda, et eespool toodud võrrandeist teine on samasus, selle võrrandi vasaku poole teisendamine annab võrrandi parema poole.

$$(a - 1)^2 - (a^2 + 1) = a^2 - 2a + 1 - a^2 - 1 = -2a.$$

Võrdus $-2a = -2a$ on õige muutuja a mistahes väärtustel, s.t.

$$\{a \mid (a - 1)^2 - (a^2 + 1) = -2a\} = Q.$$

Teisendus, mille abil saadakse võrduse ühest poolest teine pool, on samasusteisendus. Sulgude avamine ja sarnaste liikmete koondamine on samasusteisendused.

Võrrandil võib ka lahend puududa. Näiteks

$\{x \mid |x| = -1\} = \emptyset$, samuti

$\{x \in N \mid x + 2 = 0\} = \emptyset$.

Võrrandi põhiomaduste kordamisel on vaja anda ka võrrandite samaväärsuse mõiste. Kaks võrrandit on samaväärsed, kui neil võrrandeil on võrdsed lahendite hulgad. Võrrandi põhiomaduste rakendamine võimaldab kasutada ka samaväärsuse märki $\Leftrightarrow$. Näiteks

$$3x - 4(2 - x) = 6 \Leftrightarrow 3x - 8 + 4x = 6 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ülesandeid

1. Leia hulgast $\{-1, 2, 3, 0, -3\}$ võrrandi $x^2 - x = 2$ lahendid.
   V: -1 ja 2.
2. Näita, et kui muutuja väärtuste hulk on $A = \{0, 1, 2, 3\}$, siis hulk $\{x \in A \mid x - 5 = 4\} = \emptyset$.
3. Põhjenda, et $\{x \mid x^2 = -5\} = \emptyset$.
4. Tõesta, et järgmised võrdused on samasused; selleks näita, et võrduse ühe poole teisendamine annab selle võrduse teise poole.
   1) $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$
   2) $(x - 1)^3 - x^3 + 3x^2 = 3x - 1$
   3) $2mn = (m + n)^2 - m^2 - n^2$.

3.8. Kahe muutujaga lineaarne võrrandisüsteem

Enne kui asuda kahe muutujaga võrrandite käsitlemisele, on vaja juhtida õpilaste tähelepanu sellele, et seni õpitud võrrandid olid ühe muutujaga võrrandid - neis võrrandeis loeti ikka ainult üks täht muutujaks. Võrrandis võib olla ka kaks, kolm jne. muutujat vastavalt sellele, mitu võrrandis olevat tähte me loeme muutujaks.

Näited. 1) $3x = 7y + 8$ on kahe muutujaga võrrand.

2) $ax - 3y = 7x^2$ on kahe muutujaga võrrand, kui loeme

muutujateks näiteks y ja x. Kui loeme muutujaks ka a, siis saame kolme muutujaga võrrandi.

Meie edaspidine ülesanne on õppida lähemalt tundma kahe muutujaga lineaarvõrrandit, millele pärast võimalikke lihtsustusi saab anda kuju

$ax + by = c,$

kus x ja y on muutujad, a, b ja c tähistavad antud arve - need on võrrandi kordajad. Antud kujus võrrandit nimetatakse kahe muutujaga normaalkujuliseks lineaarvõrrandiks. Tähelepanu on vaja juhtida sellele, et normaalkujuline võrrand kirjutatakse ikka nii, et muutujad on tähestikulises järjekorras. On oluline teha harjutusi võrrandite normaalkujuliseks teisendamise kohta. Seejuures kasutatakse võrrandi põhiomadusi.

Kui on antud mingi kahe muutujaga lineaarvõrrand, näiteks

$2x - 5y = 5,$

ja kui muutujate väärtuste hulga kohta pole seatud mingisuguseid kitsendusi, siis loetakse selleks hulgaks kogu ratsionaalarvude hulk (sest muid arve õpilased veel ei tunne). See tähendab, et võrrandi muutujate asemele võib võtta suvaliste ratsionaalarvude paare. Need arvupaarid, millega asendatakse antud võrrandi muutujad, kirjutatakse ümarsulgudesse, nii et esimesel kohal on normaalkujulise võrrandi esimese muutuja väärtus ja teisel kohal teise muutuja väärtus (muutujad on tähestikulises järjekorras). Seega on tegemist järjestatud arvupaaridega. Arvupaar (5;1) on näiteks võrrandi $2x - 5y = 5$ lahend, kuid arvupaar (1;2) ei ole lahend. Muidugi võib selliste arvupaaride kirjutamiseks kasutada ka õpiku kirjaviisi loogeliste sulgude abil.

Oluline on näidata, et ratsionaalarvude hulgas on võrrandil $ax + by = c$ lõpmata hulk lahendeid. Seda lahendite hulka kirjutatakse kujul

$\{(x;y) \mid ax + by = c\}.$

Kui aga muutujate hulga väärtuste kohta on esitatud kitsendusi, siis tuleb need hulgad võrrandi lahendite hulga kirjutamisel ka ära näidata. Sellisel juhul võib kahe muutujaga lineaarsel võrrandil olla lõplik hulk lahendeid, kuid see hulk võib ka tühi olla. Näiteks

$$\{(x;y) \mid x \in N,\ y \in N \text{ ja } x+y=3\} = \{(0;3),(1;2),(2;1),(3;0)\},$$
$$\{(u;v) \mid u \in N,\ v \in N \text{ ja } u+v=-1\} = \emptyset.$$

Pärast kahe muutujaga lineaarvõrrandi graafilist käsitlemist tutvutakse näidete varal kahe muutujaga lineaarse võrrandisüsteemiga, mille üldine normaalkuju on

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Siin on oluline näidata, et võrrandisüsteemi lahend peab ühekorraga rahuldama esimest võrrandit ja teist võrrandit, s.t. süsteemi lahend peab kuuluma mõlema võrrandi lahendite hulkade ühisossa. Kui antud võrrandite lahendite hulgad on

$$L_1 = \{(x;y) \mid a_1x + b_1y = c_1\} \text{ ja}$$
$$L_2 = \{(x;y) \mid a_2x + b_2y = c_2\}, \text{ siis}$$

süsteemi lahendite hulk on

$$L = L_1 \cap L_2 = \{(x;y) \mid a_1x + b_1y = c_1\} \cap \{(x;y) \mid a_2x + b_2y = c_2\},$$

mida märgitakse hulgana nii:

$$L = \{(x;y) \mid a_1x + b_1y = c_1 \text{ ja } a_2x + b_2y = c_2\}.$$

Kui ühe või mõlema muutuja väärtuste hulgaks ei ole kogu ratsionaalarvude hulk, siis tuleb vastavad hulgad koos lahendite hulgaga ära näidata. Näiteks, kui süsteemis

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$x \in A = \{1, 2, 3\}$, siis

$$L_1 = \{(x;y) \mid x \in A \text{ ja } 3x - 2y = 7\} = \{(1;-2),(2;-0,5),(3;1)\},$$
$$L_2 = \{(x;y) \mid x \in A \text{ ja } x + 2y = 5\} = \{(1;2),(2;1,5),(3;1)\}.$$

Antud süsteemi lahendite hulk on

$$L = L_1 \cap L_2 = \{(3;1)\}.$$

Sellel süsteemil on üks ainus lahend (3;1) ehk teisiti kirjutades

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Kahe muutujaga lineaarse võrrandisüsteemi graafiline tõlgendamine viib veendumusele, et süsteemi lahendite hulgas võib olla üks ainus arvupaar, lõpmatu hulk arvupaare, ent lahendite hulk võib ka tühi olla.

Ülesandeid

1. Leia võrrandi $2x - y = 1$ lahendite hulk, kui $x \in \{0;-1;1,5\}$.
V: $\{(0;-1), (-1;-3), (1,5;2)\}$.
2. Leia hulk $\{(x;y) \mid y \in M$ ja $x - 3y = 8\}$, kui $M = \{-2;-1;0;\frac{1}{2}\}$.
V: $\{(2;-2), (5;-1), (8;0), (9\frac{1}{2};\frac{1}{2})\}$.
3. Kujuta graafiliselt hulk $\{(x;y) \mid x - y = 3\}$.
4. Leia graafiliselt hulk
$\{(x;y) \mid x - y = 2\} \cap \{(x;y) \mid x + 2y = 4\}$.
V: $\{(3;0,5)\}$.
5. Leia graafiliselt hulk $\{(x;y) \mid 7x - 3y = 15$ ja $5x + 6y = 27\}$.
V: $\{(3;2)\}$.
6. Selgita, missugused järgmistest lausetest on õiged.
1) $(3;1) \in \{(x;y) \mid 2x + 4y = 10\}$ (õ.)
2) $(-1;4) \in \{(x;y) \mid x + y = 3$ ja $x - y = 2\}$ (v.)
3) $(5;-5) \in \{(x;y) \mid x + y = 0$ ja $x - y = 10\}$ (õ.)

3.9. Kahe muutujaga lineaarse võrrandisüsteemi lahendivalemid

Uue programmiprojekti kohaselt õpitakse kahe muutujaga lineaarset võrrandisüsteemi lahendama determinantide abil. Selle ettevalmistamiseks on vaja tutvustada liitmisvõtet (õpikus § 9). Oskuste ja vilumuste omandamist liitmisvõtte kasutamiseks programmiprojekt ette ei näe.

Lahendades võrrandisüsteeme liitmisvõttega, juhime tähelepanu sellele, et lahendamise käigus me teisendame antud võrrandeid (toetudes võrrandi põhiomadustele) kindla skeemi järgi,kuni leiame lahendi. Seejuures on oluline, et süsteemi lahend on täielikult määratud süsteemi kordajatega. Kui kordajaid muuta, siis muutub ka lahend. Seepärast seame eesmärgiks avaldada võrrandisüsteemi muutujad süsteemi kordajate kaudu valemite kujul. Lahendivalemite tuletamisel on soovitav liigendada tehtav töö kolmeks etapiks. Esimesel etapil saame liitmisvõtte rakendamisega võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

et $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$ ja

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Kui $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, siis

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ ja}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Saadud valemid ongi tegelikult võrrandisüsteemi lahendivalemid. Enne nende rakendamist püüame neid avaldada teisel kujul, mis võimaldab neid ka kergesti meelde jätta. Selleks tuleb anda kaherealise determinandi mõiste, mis ongi meie töö teiseks etapiks. Paneme tähele, et kummagi murru lugejaks kui ka nimetajaks on kahe teguri korrutiste vahe. Sellised korrutiste vahed kirjutatakse tabelina kahe püstkriipsu vahele:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Need tabelina kirjutatud korrutiste vahed on kaherealised <u>determinandid</u>. Püstkriipsude vahele kirjutatud arve nimetatakse determinandi <u>elementideks</u>. Vasemal ülal ja paremal all olevad elemendid paiknevad determinandi <u>peadiagonaalil</u>, teised <u>kõr-</u>

valdiagonaalil. Lugedes antud võrdusi paremalt vasakule, saame determinandi arvutamise eeskirja: determinant võrdub oma peadiagonaali ja kõrvaldiagonaali elementide korrutiste vahega.

Enne kui determinante rakendada võrrandisüsteemi lahendivalemites, tuleb kindlasti teha harjutusi determinantide arvutamise kohta, samuti vahe kirjutamiseks determinandi tähise abil.

Kolmandal etapil näitame, kuidas võrrandisüsteemi lahendivalemeid saab avaldada determinantide abil:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}$$

Need valemid väljendavad Crameri[1] reeglit.

Mõlema saadud murru nimetajaks on üks ja sama determinant, mida nimetatakse süsteemi determinandiks. Seda determinanti on kerge meelde jätta, sest selle determinandi elementideks on süsteemi muutujate kordajad, mille paigutus determinandis on samasugune nagu normaalkujulises süsteemis. Ka lugejates olevaid determinante on lihtne meeles pidada. Determinant D_x saadakse süsteemi determinandist sel teel, et selles asendatakse muutuja x kordajad a_1 ja a_2 vastava võrrandi vabaliikmega c_1 ja c_2. Determinant D_y saadakse samuti süsteemi determinandist, kui muutuja y kordajad selles asendada vastava võrrandi vabaliikmega c_1 ja c_2.

Lahendivalemitest on näha, et süsteemi ühese lahenduvuse tingimuseks on $D \neq 0$.

Nüüd järgnevad harjutused võrrandisüsteemi lahendamiseks determinandi abil. Seejuures tuleb ikka rõhutada, et Crameri reeglit saab süsteemi lahendamiseks rakendada alles siis, kui süsteemile on antud normaalkuju.

[1] Cramer, Gabriel (1704 - 1752) - Itaalia matemaatik.

Asudes süsteemi lahendama, arvutame esiteks süsteemi determinandi D, et veenduda lahendi olemasolus. Näiteks, süsteemi

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

lahendamisel saame, et

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4-15 = -19$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -26-12 = -38$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 -65 = -57$$

$$x = D_x : D = (-38) : (-19) = 2$$

$$y = D_y : D = (-57) : (-19) = 3.$$

Kontroll näitab, et leitud arvupaar (2;3) tõepoolest rahuldab süsteemi.

Ülesandeid

1. Arvuta järgmised determinandid.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} m & 2n \\ m & n \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & ab \end{vmatrix}$

V: 1) -5, 2) 1, 3) 11, 4) -mn, 5) 0.

2. Kirjuta determinandi tähise abil järgmised avaldised.

1) $2 \cdot 3 - 4 \cdot 5$ 2) $-4 \cdot 5 + 3 \cdot 1$ 3) $ab - cd$

$3 \cdot 4 - 3 \cdot 2$ $6 \cdot (-2) - 9 \cdot 7$ $2x + 3y$

4. HULKNURKADE SARNASUS

4.1. Eelmärkusi

Teema "Hulknurkade sarnasus" all käsitleme alljärgnevalt mõningaid üleminekuprogrammi 9. ja 10. teema küsimusi. Teeme kõigepealt mõned märkused nende teemade õpetamise järjekorra kohta. Üleminekuprogramm käsitleb esimese teemana sarnaseid hulknurki ja teises järjekorras täisnurkse kolmnurga lahendamist. Sel juhul saab täisnurkse kolmnurga joonelementide vaheliste seoste (Pythagorase teoreem, Eukleidese teoreem, kõrguseteoreem) tuletamisel toetuda kolmnurkade sarnasusele. Kui aga õpetaja peab otstarbekaks pidada kinni õpikukäsitlusest, mis mõnevõrra erineb traditsioonilisest, siis võib ta seda muidugi teha. Nii ühe kui teise käsitlusviisi juures aga ühenduses kiirteteoreemiga on vaja täiendavalt märkida, et õige on ka selle teoreemi pöördteoreem: <u>kui kaks sirget lõikavad nurga haarasid nii, et haaradel tekivad võrdelised lõigud, siis need lõikajad on paralleelsed</u>. Seda lauset on kerge tõestada vastuväiteliselt. Lause tundmist on vaja homoteetsuse käsitlemisel.

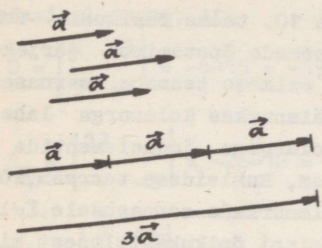
4.2. Vektori korrutamine arvuga

Olgu vaja leida näiteks kolme võrdse vektori summa $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ (joon. 45).

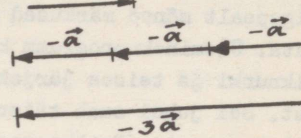
Kandes need vektorid järjestikku ühele sirgele, on ilmne, et otsitavaks summaks on uus vektor, mis on antud vektoritega samasihiline, samasuunaline ja mille pikkus on 3 korda suurem antud vektori pikkusest, s.t. $3\,|\vec{a}|$. See vektor on arvu 3 ja vektori $\vec{a}$ korrutis, mis kirjutatakse kujul $3\vec{a}$. Seega $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}$.

Vektori $3\vec{a}$ vastandvektor on $-3\vec{a}$, mida saab tõlgendada kui vektori $\vec{a}$ vastandvektori 3-kordset (joon. 46). paneme jällegi tähele, et vektori $-3\vec{a}$ pikkus on $|-3|\,|\vec{a}| = 3|\vec{a}|$, ta on vektoriga $\vec{a}$ samasihiline kuid vastandsuunaline.

Samasugusel viisil tõlgendatakse arvu ja vektori korrutist ka siis, kui antud arv ei ole naturaalarv. Üldiselt, kui k tähistab suvalist arvu, siis korrutis $k\vec{a}$ on vektor, mis rahuldab kolme tingimust:



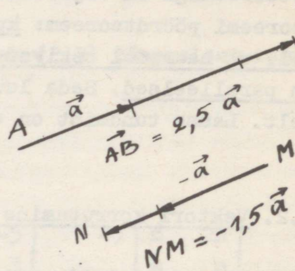
Joon. 45



Joon. 46

1) vektor $k\vec{a}$ on samasihiline vektoriga $\vec{a}$,
2) $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;
3) vektor $k\vec{a}$ on vektoriga $\vec{a}$ samasuunaline kui $k > 0$ ja vastandsuunaline, kui $k < 0$.

Kui $k = 0$, siis $k\vec{a} = 0$; niisamuti, kui $\vec{a} = \vec{0}$, siis $k\vec{a} = 0$. Joonisel 47 on näiteks kujutatud vektorid $2{,}5\vec{a}$ ja $-1{,}5\vec{a}$.



Joon. 47

<u>Ülesandeid</u>

1. Võta suvaline vektor $\vec{r}$ ja joonesta vektorid $2\vec{r}$, $\frac{1}{2}\vec{r}$, $-3\vec{r}$, $-1{,}5\vec{r}$, $\frac{3}{5}\vec{r}$, $-2{,}4\vec{r}$.

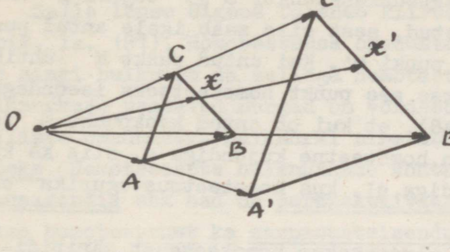
2. Võta kaks suvalist vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ning leia joonise abil $\vec{a} + 2\vec{b}$; $2\vec{a} - 2\vec{b}$; $-3\vec{a} + 1{,}5\vec{b}$.

3. Näita joonise abil, et kehtib võrdus $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$.

4.3. Homoteetsus

Eespool õppisime tundma kujundite teisendamist, mille tulemusel antud kujund q ja tema teisend q' osutusid ikka võrdseteks. Nad erinesid ainult oma asendi poolest teatavate kujundite suhtes. Alljärgnevalt õpime kujundit teisendama nii, et kujund ja tema teisend pole võrdsed, nad erinevad teineteisest oma mõõtmete poolest.

Olgu antud kujundiks q mingi kolmnurk ABC (joon. 48). Võtame kolmnurga tasapinnal suvalise punkti O ning joonestame vektorid $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ja $\overrightarrow{OC}$, nii et kõigil neil vektoreil on ühine alguspunkt O ning iga vektori lõpp-punktiks on antud kolmnurga üks tipp. Korrutame iga vektorit ühe ja sama arvuga k (joonisel 48 on k = 2), saame uued vektorid



Joon. 48

$\overrightarrow{OC'} = k \cdot \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$

Nii on punktid A, B ja C teisendunud vastavalt punktideks A', B' ja C'. Ühendades need punktid sirglõikudega, saame uue kujundina q' kolmnurga A'B'C'. Paneme esmalt tähele, et kiirteteoreemi pöördteoreemi põhjal on kolmnurkade ABC ja A'B'C' vastavad küljed (ühendavad vastavaid tippe) paralleelsed:

$AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $AC \parallel A'C'$.

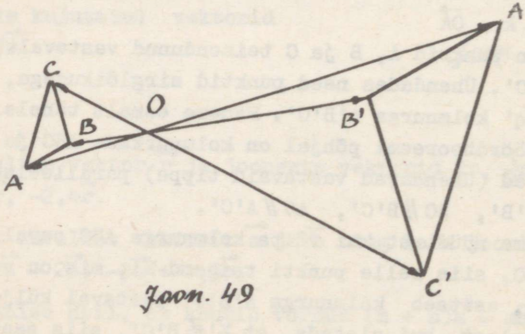
Näitame nüüd, et kui võtta kolmnurga ABC suvaline punkt, ütleme $X \in BC$, siis selle punkti teisend X', mis on vektori $k \cdot \overrightarrow{OX}$ lõpp-punkt, asetseb kolmnurga A'B'C' vastaval küljel B'C' (joon. 48). Tõepoolest, kui oletada, et $X' \notin B'C'$, siis saaks läbi punkti C' tõmmata kaks erinevat sirget, kumbki paralleelne lõiguga [illegible]: üks on määratud punktidega C' ja B', teine punktidega C' ja $X' \nparallel C'B'$, Sellest vastuolust tulenebki lause õigsus. Nii näeme, et kujundi q mistahes punktil X ja tema teisendil X' kujundis q' on järgmised omadused:

1) punktid X ja X' asetsevad ühel sirgel antud punktiga O;
2) $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$, kus k on antud arv.

Esitatud tingimustel öeldakse, et kujund q' on homoteetne kujundiga q. Teisendust (konstruktsiooni), millega saadakse antud kujundist sellega homoteetne kujund, nimetatakse homoteetsuseks. Punkti O nimetatakse homoteetsuskeskpunktiks, arvu k homoteetsusteguriks. Homoteetsuskeskpunkti O ja teguri k andmisega on homoteetsus määratud, sest siis saab igale antud punktile M leida talle vastava punki M'. Kui antud punkt M ühtib keskpunktiga O, siis loetakse see punkt homoteetseks iseendaga.

On kerge näha (joon. 48), et kui on antud keskpunkt O ja tegur k ja kui kujund q' on homoteetne kujundiga q, siis ka kujund q on homoteetne kujundiga q', kus homoteetsusteguriks on $\frac{1}{k}$.

Kui tegur $k > 0$, siis nimetatakse homoteetsust päripidiseks, kui $k < 0$, siis vastupidiseks. Joonisel 49 on kujutatud vastupidine homoteetsus, kui $k = -2$. Siin $\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = -2\overrightarrow{OB}$ ja $\overrightarrow{OC'} = -2\overrightarrow{OC}$.



Joon. 49

Eespool kirjeldatud konstruktsioonidest tulenevad homoteetsuse omadused:

1) Homoteetsuskeskpunkti läbiv sirge teisendub iseendaks, iga muu sirge teisendub endaga paralleelseks sirgeks.

Selle lause õigsus keskpunkti läbiva sirge kohta tuleneb homoteetsuse definitsioonist, iga muu sirge kohta aga kiirteteoreemi pöördteoreemist.

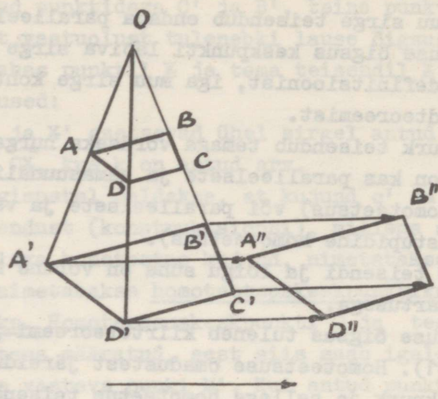
2) Iga nurk teisendub temaga võrdseks nurgaks, sest vastavad nurgad on kas paralleelsete ja samasuunaliste haaradega (päripidine homoteetsus) või paralleelsete ja vastassuunaliste haaradega (vastupidine homoteetsus).

3) Lõigu teisendi ja lõigu suhe on võrdne homoteetsusteguri absoluutväärtusega.

Selle lause õigsus tuleneb kiirteteoreemi järeldusest (Õpik, lk. 181). Homoteetsuse omadustest järeldub, et kui on antud mingi hulknurk ja sellega homoteetne teisend, siis nende hulknurkade vastavad nurgad on võrdsed ja küljed on võrdelised. Selliste omadustega hulknurki nimetatakse <u>sarnasteks hulknurkadeks</u>. Homoteetsete hulknurkade kohta öeldakse, et nad on <u>sarnasusasendis</u> ehk nad on <u>perspektiivsarnased</u>. Seepärast nimetatakse homoteetsust ka <u>sarnasusteisenduseks</u>. See teisendus annab antud hulknurgast kas suurendatud või vähendatud "koopia". Kui üks kahest perspektiivsarnasest hulknurgast viia tasapinnal teise kohta, näiteks lükke abil (joon. 50), siis perspektiivsarnasus (homoteetsus) kaob, jääb ainult sarnasus. Seega siis sarnasus on üldisem mõiste kui homoteetsus: iga paar homoteetseid hulknurki on sarnased, kuid iga paar sarnaseid hulknurki pole homoteetsed.

Märgime, et homoteetsete hulknurkade vastavad nurgad ja küljed on kergesti määratavad. Mittehomoteetsete sarnaste hulknurkade korral pole see nii lihtne - vastavus tuleb siin kas eraldi ära näidata või teatavate tingimuste põhjal määrata.

Järgnevalt on vaja teha harjutusi perspektiivsarnaste hulknurkade joonestamise kohta ning siis asuda kolmnurkade sarnasuse tunnuste käsitlemisele. Rõhutame, et homoteetsuskeskpunkti valik on sarnasusteisenduse korral üldiselt vaba - ta võib asetseda väljas- või seespool hulknurka, kuid ka hulknurga küljel või tipus.



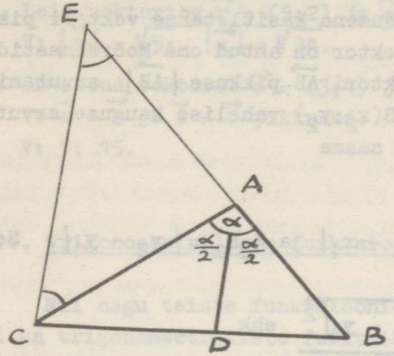
Joon. 50

Ülesandeid

1. Joonesta antud kolmnurgaga homoteetne kolmnurk, kui k = 1,5, valides homoteetsuskeskpunktiks kolmnurga ühe tipu.
2. Kolmnurga küljed on 5 cm, 6 cm ja 3 cm. Joonesta selle kolmnurgaga homoteetne kolmnurk, kui k = 0,5 ja homoteetsuskeskpunkt on kolmnurga sees.
3. Ristküliku küljed on 3 cm ja 4 cm. Joonesta selle ristkülikuga homoteetne ristkülik, kui k = -1,5. ja homoteetsuskeskpunkt on ristküliku ühes tipus.
4. Näita, et vastupidist homoteetsust keskpunktiga O ja teguriga k saab asendada päripidise homoteetsusega, mille keskpunkt on O ja tegur -k, ning sellele järgneva peegeldusega punktist O. Võta antud kujundiks mingi kolmnurk ning homoteetsusteguriks näiteks k = -1,5.

4.4. Kolmnurga sisenurga poolitaja omadus

Kehtiva programmi kohaselt õpitakse kolmnurga sisenurga poolitaja omadust tundma ainult ülesannete lahenduste kaudu. Uue programmiprojekti järgi tuleb seda omadust käsitleda teoreetiliste palade hulgas. Teeme meiegi seda.



Joon. 51

Joonisel 51 on antud kolmnurk ABC ja nurga A poolitaja AD. Tõestame, et nurgapoolitaja jaotab poolitatud nurga vastaskülje võrdeliselt selle nurga lähisküljedega, s.o.

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}.$$

Tõestuseks tõmbame punktist C nurgapoolitajaga paralleeli, mis lõikub külje AB pikendusega punktis E. Nüüd on põik- ja kaasnurkade omaduse tõttu

$$\left.\begin{array}{l} \angle ECB = \frac{\alpha}{2} \\ \angle CEA = \frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ECB = \angle CEA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AE = AC.$$

Kiirteteoreemi järgi on

$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD}$ ehk $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$, m.o.t.t.

Ülesandeid

1. Lõik BD on nurga B poolitaja kolmnurgas ABC. Arvuta:
   1) lõigud AD ja DC, kui AB = 10 cm, BC = 15 cm ja AC = 20 cm;
   2) külg BC, kui AD : DC = 8 : 5 ja AB = 16 cm;
   3) külg AC, kui AB : BC = 2 : 7 ja DC − AD = 1 cm.

   V: 1) AD = 8 cm, DC = 12 cm
   2) BC = 10 cm
   3) AC = 1,8 cm.

2. Kolmnurka ABC on joonestatud romb ADEF nii, et tipud D, E ja F asetsevad vastavalt külgedel AB, BC ja AC. Arvuta lõigud BE ja EC, kui AB = 14 cm, BC = 12 cm ja AC = 10 cm.
V: 7 cm, 5 cm.

4.5. Vektori pikkus koordinaatides

Pythagorase teoreemi rakendusena käsitletakse vektori pikkuse (mooduli) arvutamist, kui vektor on antud oma koordinaatidega. Jooniselt 40 selgub, et vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkuse $|\overrightarrow{AB}|$ arvutamine tähendab punktide $A(x_1;y_1)$ ja $B(x_2;y_2)$ vahelise kauguse arvutamist. Täisnurksest kolmnurgast saame

$$|AB| = \sqrt{A_1B_1^2 + A_2B_2^2}.$$

Ilmselt on aga $A_1B_1 = |x_2 - x_1|$ ja $A_2B_2 = |y_2 - y_1|$. Seepärast saame, et

$$|AB| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \text{ ehk}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Niisiis, kahe punkti vaheline kaugus võrdub ruutjuurega nende punktide samanimeliste koordinaatide vahede ruutude summast.

Vahe $x_2 - x_1$ on aga vektori AB abstsiss ja vahe $y_2 - y_1$ on sama vektori ordinaat. Seega võime öelda, et vektori pikkus võrdub ruutjuurega selle vektori koordinaatide ruutude summast.

Ülesandeid

1. Arvuta punktide A(0;0) ja B(3;4) vaheline kaugus.
V: 5.
2. Arvuta punktide P(1;2) ja Q(3;-4) vaheline kaugus.
V: $2\sqrt{2}$.
3. Kolmnurga tippude koordinaadid on A(0;0), B(1;1) ja C(0;1).

Arvuta selle kolmnurga ümbermõõt.

V: $2 + \sqrt{2}$.

4. On antud nelinurk tippudega A(-3;2), B(2;4), C(3;-1) ja D(-2;-3). Arvuta selle nelinurga ümbermõõt ja diagonaalide pikkused.

   V: $2(\sqrt{29} + \sqrt{26})$, $\sqrt{65}$, $3\sqrt{5}$.

5. Leia vektorite $\vec{r} = (1;2)$ ja $\vec{a} = (-3;5)$ pikkused.

   V: $|\vec{r}| = \sqrt{5}$; $|\vec{a}| = \sqrt{34}$.

6. On antud vektorid $\vec{a} = (3;4)$ ja $\vec{b} = (-6;-8)$. Arvuta vektorite $\vec{a} + \vec{b}$ ja $\vec{a} - \vec{b}$ pikkused.

   V: 5; 15.

4.6. Trigonomeetriliste funktsioonide tabelid

Nii nagu teiste funktsioonide korral, kasutatakse edaspidi ka trigonomeetriliste funktsioonide jaoks 8. klassis V.Bradise neljakohalisi tabeleid ilma paranduste veeruta (kuigi viimased on trükitud). Tabelite kasutamisel tuleb arvestada, et täiendusnurkade omaduse

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x$$

$$\tan(90^\circ - x) = \cot x$$

tõttu saab siinuse ja koosinuse väärtused paigutada ühte ning tangensi ja kootangensi väärtused kokku te.se tabelisse.

Siinuse ja koosinuse tabel võimaldab leida nende funktsioonide väärtusi vahemikus 0° kuni 90° iga $0,1^\circ$ ehk 6' tagant. Siinuse leidmiseks võetakse täiskraadid tabeli vasakpoolsest veerust A ning minutid tabeli ülemisest reast. Vastava rea ja veeru ristumiskohal on otsitav siinus. Näiteks $\sin 56^\circ 24' = 0,8329$. Koosinuse leidmisel võetakse täiskraadid tabeli parempoolsest veerust (mille all on A) ja minutid kõige alumisest reast. Näiteks $\cos 14^\circ 36' = 0,9677$. Kui antud nurka ei ole tabelis, siis tuleb ta ümardada lähima nurgani tabelis. Kui seal on kaks nurka, mis mõlemad erinevad antud nurgast ühepalju, siis ümardame antud nurga ikka ülespoole (liiaga). Nii saame näiteks $\sin 20^\circ 8' \approx \sin 20^\circ 6' = 0,3437$, $\sin 69^\circ 33' \approx \sin 69^\circ 36' = 0,9373$, $\cos 25^\circ 41' \approx \cos 25^\circ 42' = 0,9011$. Kui tabelist nii saadud funktsiooni väärtused ei leia arvutuses enam kasutamist, siis ümardame nad kolme tüvenumbrini.

Funktsiooni antud väärtuse järgi nurga leidmiseks tuleb tabelist leida antud väärtusele kõige lähem väärtus (kui antud väärtust tabelis täpselt ei ole) ja võtta sellele vastav nurk. Näiteks, kui

$\sin x = 0,6845$, siis $x = 43^\circ 12'$,
$\sin x = 0,833$, siis $x = 56^\circ 24'$,
$\cos x = 0,921$, siis $x = 22^\circ 54'$.

Tangensi ja kootangensi tabeli kasutamine on analoogiline, välja arvatud see erinevus, et argumendi väärtustel 76° kuni $89^\circ 59'$ ($1'$ kuni 14°) saab tangensi (kootangensi) väärtusi leida iga $1'$ tagant.

Märgime, et üldreeglina tuleb 8. kl. vältida suurte täpsuste "tagaajamist".

Juhime õpetaja tähelepanu lõpuks sellele, et nurga kootangensi käsitlemist uus programmiprojekt ette ei näe ja seetõttu võib üleminekuprogrammis selle õpetamisest loobuda.

S i s u k o r d

М а т е м а т и к а

для УIII кл. вечерней (сменной)
общеобразовательной школы

Дополнительный материал
к переходной программе

На эстонском языке

Министерство просвещения Эстонской ССР

Toimetaja M. Kärner

Trükkimisele antud 7.07.70. Paber 60x84/16. Trükipoognaid 6,0. Trükiarv 300. MB-06530. Tell. 135.
VÕT rotaprint
Hind 10 kop.

Hind 10 kop.