TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Jekaterina Izotova

Absoluutselt summeerivad operaatorid ruumil $B(\mathcal{F})$

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: dotsent Märt Põldvere

Autor: .... "....." jaanuar 2013
Juhendaja: .... "....." jaanuar 2013

Lubada kaitsmisele

Professor .... "....." jaanuar 2013

TARTU 2013

Sisukord

Sissejuhatus

Olgu X Banachi ruum ning olgu $p \in [1, \infty)$. Öeldakse, et ruumi X elementide jada $(x_j) = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ on *tugevalt p-summeeruv,* kui $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty$. Öeldakse, et jada (x_j) on *nõrgalt p-summeeruv,* kui iga $x^* \in X^*$ korral $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \big|x^*(x_j)\big|^p < \infty$.

Olgu Y Banachi ruum (üle sama korpuse, mis X) ning olgu $q \in [1, \infty)$. Öeldakse, et pidev lineaarne operaator $T \colon X \to Y$ on *(q, p)-summeeriv,* kui iga nõrgalt p-summeeruva ruumi X elementide jada (x_j) korral on (Tx_j) tugevalt q-summeeruv jada ruumis Y, s.t operaator T teisendab nõrgalt p-summeeruvad jadad ruumis X tugevalt q-summeeruvateks jadadeks ruumis Y. Seejuures (p, p)-summeerivaid operaatoreid nimetatakse ka *p-summeerivateks* operaatoriteks ning $(1, 1)$-summeerivaid operaatoreid (ehk, teisisõnu, 1-summeerivaid operaatoreid) *absoluutselt summeerivateks* operaatoriteks. Osutub, et T on absoluutselt summeeriv parajasti siis, kui ta teisendab ruumi X elementide jadad, mille liikmete rida on tingimatult koonduv, ruumi Y elementide jadadeks, mille liikmete rida on absoluutselt koonduv. Kirjanduses nimetatakse (q, p)-summeerivaid ja p-summeerivaid operaatoreid sageli ka vastavalt *(q, p)-absoluutselt summeerivatesks* (või ka *absoluutselt (q, p)-summeerivateks*) ja *p-absoluutselt summeerivateks* (või ka *absoluutselt p-summeerivateks*) operaatoriteks.

Absoluutselt summeerivad operaatorid hakkasid kirjanduses esile tõusma 1950ndatel aastatel. A. Dvoretzky ja C. A. Rogers tõestasid artiklis [DR], et *igas lõpmatumõõtmelises Banachi ruumis leidub tingimatult koonduv rida, mis ei koondu absoluutselt.* Teisisõnu ütleb Dvoretzki–Rogersi teoreem, et lõpmatumõõtmelise Banachi ruumi ühikoperaator pole kunagi absoluutselt summeeriv. A. Grothendiecki *Résumé* [G] sisaldab tulemuse, mis väidab implitsiitselt, et iga pidev lineaarne operaator $\ell_1 \to \ell_2$ on absoluutselt summeeriv. p-summeeriva ja (q, p)-summeeriva operaatori mõisted tõid 1960ndatel aastatel sisse vastavalt A. Pietsch [P] ja B. Mitjagin ja A. Pełczyński [MP].

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on tutvuda, ühelt poolt, absoluutselt summeerivate operaatorite ja, teiselt poolt, vektormõõtude alaste põhimõistetega. Neid kahte teemaderingi ühendab absoluutselt summeerivate operaatorite kirjeldus ruumil $B(\mathcal{F})$: pidevad lineaarsed operaatorid ruumil $B(\mathcal{F})$ esituvad integraalina tõkestatud vektormõõtude järgi, kusjuures absoluutselt summeerivad operaatorid esituvad integraalina tõkestatud variatsiooniga vektormõõtude järgi.

Bakalaureusetöö on referatiivne, toetudes monograafiate [DJT] ja [DU] vastavatele osadele. Töös vaatluse all olev materjal on nimetatud allikates väga lakooniliselt esitatud, tõestused kas üldse puuduvad (seda tavaliselt niisugusel juhul, kui tõestuseks on definitsioonist lähtuv vahetu kontroll) või piirduvad sageli ainult näpunäidetega (à la “tõestus on vahetu, kui õiges kohas rakendada teoreemi kinnisest graafikust”) või viitega sarnase ideega tõestusele. Töö autori ülesandeks oli esitada kõigi tulemuste üksikasjalikud tõestused.

Töö koosneb kolmest paragrahvist.

Esimeses paragrahvis on välja toodud funktsionaalanalüüsi põhikursus(t)esse kuuluv materjal, mille valdamisel on võtmeroll järgnevate osade mõistmisel. Siia kuuluvad, esiteks, Minkowski võrratus, Baire'i teoreem, Zabreiko lemma ja teoreem kinnisest graafikust. Lisaks kirjutatakse operaatorite laiendamisest, esitatakse Hahn–Banachi teoreemi järeldust piisavast arvust funktsionaalidest ning kirjeldatakse kompleksse pideva lineaarse funktsionaali ja tema reaal- ja imaginaarosa vahekorda.

Teises paragrahvis tutvutakse (q,p)-summeerivate operaatoritega. Selle paragrahvi esimeses kahes punktis veendutakse vastavalt, et tugevalt ja nõrgalt p-summeeruvate jadade ruumid $\ell_p(X)$ ja $\ell_p^w(X)$ on Banachi ruumid. Kolmandas punktis tuuakse sisse (q,p)-summeeriva operaatori mõiste, näidatakse, et (q,p)-summeerivate operaatorite ruum $\Pi_{q,p}(X,Y)$ on Banachi ruum ja tõestatakse oluline tarvilik ja piisav tingimus operaatori (q,p)-summeerivuseks. Neljandas punktis näidatakse, et pidev lineaarne operaator on absoluutselt summeeriv parajasti siis, kui ta teisendab tingimatult koonduvad read absoluutselt koonduvateks ridadeks.

Kolmas paragrahv käsitleb vektormõõtusid ja pidevaid lineaarseid operaatoreid ruumil $B(\mathcal{F})$. Esimeses punktis veendutakse, et $B(\mathcal{F})$ on Banachi ruum. Teises punktis tuuakse sisse vektormõõdu mõiste ning uuritakse tema variatsiooni ja poolvariatsiooni omadusi. Kolmandas punktis defineeritakse integraal $\int f\,dF$ funktsioonist $f \in B(\mathcal{F})$ tõkestatud vektormõõdu $F\colon \mathcal{F} \to X$ järgi ja näidatakse, et pidevad lineaarsed operaatorid $B(\mathcal{F}) \to X$ võib samastada selliste vektormõõtudega: ühelt poolt, iga tõkestatud vektormõõdu $F\colon \mathcal{F} \to X$ korral on $T_F\colon B(\mathcal{F}) \ni f \mapsto \int f\,dF \in X$ pidev lineaarne operaator; teiselt poolt, iga pideva lineaarse operaatori $T\colon B(\mathcal{F}) \to X$ korral leidub üheselt määratud tõkestatud vektormõõt $F\colon \mathcal{F} \to X$ nii, et $T = T_F$; seejuures operaatori T norm $\|T\|$ on võrdne poolvariatsiooniga $\|F\|(\Omega)$. Neljandas punktis tõestatakse, et absoluutselt summeerivad operaatorid on selle skeemi järgi samastatavad tõkestatud variatsiooniga vektormõõtudega, kusjuures absoluutselt summeeriva operaatori $T\colon B(\mathcal{F}) \to Y$ norm $\pi(T)$ absoluutselt summeerivate operaatorite ruumis $\Pi\big(B(\mathcal{F}),Y\big)$ on teda esitava vektormõõdu täisvariatsioon $|F|(\Omega)$.

Kõikjal selles töös on $\mathbb{K}$ üks korpustest $\mathbb{R}$ või $\mathbb{C}$.

Arvu $\alpha \in \mathbb{K}$ *märk* $\operatorname{sign}\alpha$ defineeritakse võrdusega

$$\operatorname{sign}\alpha := \begin{cases} 1, & \text{kui } \alpha = 0; \\ \dfrac{\alpha}{|\alpha|}, & \text{kui } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Selle definitsiooni järgi $\alpha = |\alpha| \operatorname{sign}\alpha$ ja seega $|\alpha| = \dfrac{\alpha}{\operatorname{sign}\alpha}$.

Olgu X normeeritud ruum (või, erijuhuna, Banachi ruum) üle korpuse $\mathbb{K}$.

Sümbolid $\overline{B}(a,r)$ ja B_X tähistavad vastavalt kinnist kera ruumis X keskpunktiga $a \in X$ ja raadiusega $r > 0$ ja ruumi X *kinnist ühikkera,* s.t

$$\overline{B}(a,r) := \bigl\{x \in X\colon\ \|x - a\| \leqslant r\bigr\}$$

ja

$$B_X := \overline{B}(0,1) = \bigl\{x \in X\colon\ \|x\| \leqslant 1\bigr\}.$$

Kui Y on normeeritud ruum (üle sama korpuse, mis X), siis sümbol $\mathcal{L}(X,Y)$ tähistab pidevate lineaarsete operaatorite $X \to Y$ normeeritud ruumi normiga

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|, \quad T \in \mathcal{L}(X,Y).$$

Meenutame, et kui $X \neq \{0\}$, siis $\mathcal{L}(X,Y)$ on Banachi ruum parajasti siis, kui Y on Banachi ruum (vt nt [OO, lk 124 ja 125]). Ruumi X *kaasruum* X^* on pidevate lineaarsete funktsionaalide $X \to \mathbb{K}$ ruum, s.t $X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$; norm kaasruumis X^* on niisiis defineeritud võrdusega

$$\|x^*\| = \sup_{x \in B_X} \bigl|x^*(x)\bigr|, \quad x^* \in X^*.$$

Olgu $\Omega \neq \emptyset$.

Funktsiooni $f\colon\ \Omega \to \mathbb{K}$ *absoluutväärtus* ehk *moodul* $|f|\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ defineeritakse loomulikul viisil:

$$|f|(\omega) = \bigl|f(\omega)\bigr|, \quad \omega \in \Omega.$$

Funktsiooni $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$ *reaal-* ja *imaginaarosa* $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ defineeritakse loomulikul viisil:

$$(\operatorname{Re} f)(\omega) = \operatorname{Re}\bigl(f(\omega)\bigr) \quad \text{ja} \quad (\operatorname{Im} f)(\omega) = \operatorname{Im}\bigl(f(\omega)\bigr), \quad \omega \in \Omega.$$

Edasises jätame avaldistes $\operatorname{Re} f(\omega)$ ja $\operatorname{Im} f(\omega)$ täiendavad sulud panemata, sest sõltumata nende asukohast on avaldise tähendus sama.

§ 1. Vajalikud eelteadmised ja abitulemused

Selles paragrahvis esitame mõned definitsioonid ja teoreemid, mida me vajame töö järgmises osas. Neist enamiku, mis kuulub funktsionaalanalüüsi põhikursusesse, esitame ilma tõestuseta.

1.1. Minkowski võrratus

Lemma 1.1 (Minkowski võrratus)**.** *Olgu* $1 \leqslant p < \infty$ *ning olgu* $a_{ij} \geqslant 0$, $i, j \in \mathbb{N}$. *Siis mis tahes* $m, n \in \mathbb{N}$ *korral*

(a) $$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}};$$

(b) $$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}};$$

(c) $$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

TÕESTUS. (a) on tõestatud õpikus [OO, lk 11–12].

(b). Võrratuse (a) põhjal mis tahes $m \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{m}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

(c). Võrratuse (a) põhjal mis tahes $m, n \in \mathbb{N}$ korral

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Piirprotsessis $m \to \infty$ saame siit, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

millest piirprotsessis $n \to \infty$ järeldub soovitud võrratus. □

1.2. Tarvilik ja piisav tingimus normeeritud ruumi täielikkuseks

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et rida $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ normeeritud ruumis X on *absoluutselt koonduv,* kui tema liikmete absoluutväärtuste (arv)rida koondub, s.t

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty.$$

Tõhus tööriist normeeritud ruumi täielikkuse tõestamiseks on

Teoreem 1.2 (vt nt [OO, lk 96])**.** *Normeeritud ruum on Banachi ruum parajasti siis, kui temas iga absoluutselt koonduv rida koondub.*

1.3. Baire'i teoreem. Zabreiko lemma. Teoreem kinnisest graafikust

Sellest punktis tutvustatavatest tulemustest olulisemate – Zabreiko lemma ja teoreemi kinnisest graafikust – tõestused toetuvad Baire'i teoreemile.

Teoreem 1.3 (Baire'i teoreem; vt nt [OO, lk 33])**.** *Kui mittetühi täielik meetriline ruum avaldub kinniste hulkade loenduva ühendina, siis vähemalt üks nendest hulkadest sisaldab mingit kera.*

Definitsioon 1.2. Olgu X vektorruum. *Poolnormiks* ruumis X nimetatakse funktsiooni $p\colon X \to \mathbb{R}$, mis rahuldab tingimusi

1° $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x), \quad \lambda \in \mathbb{K},\ x \in X;$

2° $p(x+z) \leqslant p(x) + p(z), \quad x, z \in X.$

Definitsioon 1.3. Olgu X normeeritud ruum. Öeldakse, et poolnorm $p\colon X \to \mathbb{R}$ on *tõkestatud,* kui leidub arv $M \geqslant 0$ nii, et

$$p(x) \leqslant M\|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.} \tag{1.1}$$

Poolnormi tõkestatuse kontrollimisel osutub tihti kasulikuks järgnev lemma.

Lemma 1.4. *Poolnorm p normeeritud ruumis X on tõkestatud parajasti siis, kui ta on tõkestatud mingis kinnises keras, s.t leiduvad $a \in X$, $r > 0$ ja $M \geqslant 0$ nii, et*

$$p(x) \leqslant M \quad \textit{iga } x \in \overline{B}(a,r) \textit{ korral.} \tag{1.2}$$

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu poolnorm p tõkestatud, s.t leidub arv $M \geqslant 0$ nii, et kehtib (1.1). Nüüd $\|x\| \leqslant 1$ korral

$$p(x) \leqslant M \cdot 1 = M,$$

s.t poolnorm p on tõkestatud ruumi X kinnises ühikkeras.

Piisavus. Olgu p tõkestatud mingis kinnises keras, s.t mingite $a \in X$, $r > 0$ ja $M \geqslant 0$ korral kehtib (1.2). Kui $z \in \overline{B}(0, r)$, siis $a + z \in \overline{B}(a, r)$, järelikult

$$p(z) = p(a + z - a) \leqslant p(a + z) + p(a) \leqslant M + p(a) =: L.$$

Nüüd mis tahes $x \in X \backslash \{0\}$ korral $\frac{r}{\|x\|} x \in \overline{B}(0, r)$, seega

$$\frac{r}{\|x\|} p(x) = p\left(\frac{r}{\|x\|} x\right) \leqslant L$$

ehk

$$p(x) \leqslant \frac{L}{r} \|x\|.$$

Kuna saadud võrratus kehtib ka $x = 0$ korral, siis poolnorm p on tõkestatud. □

Definitsioon 1.4. Olgu X normeeritud ruum. Öeldakse, et poolnorm p ruumis X on *loenduvalt pooladitiivne* (ehk *loenduvalt subaditiivne*), kui mis tahes ruumi X elementide koonduva rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ korral

$$p\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k).$$

Kõige tõhusam tööriist poolnormi tõkestatuse tõestamisel on tavaliselt

Lemma 1.5 (Zabreiko lemma; vt nt [OO, lk 132])**.** *Loenduvalt pooladitiivne poolnorm Banachi ruumil on tõkestatud.*

Definitsioon 1.5. Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Operaatori $T\colon X \to Y$ *graafikuks* nimetatakse otsekorrutise $X \times Y = \{(x, y)\colon x \in X, y \in Y\}$ alamhulka

$$\{(x, Tx) \in X \times Y\colon x \in X\}.$$

Meenutame, et kui X ja Y on normeeritud ruumid, siis otsekorrutis $X \times Y$ on normeeritud ruum järgmise normi suhtes:

$$\big\|(x, y)\big\| = \|x\| + \|y\|, \qquad (x, y) \in X \times Y.$$

Tõhus tööriist lineaarse operaatori pidevuse kontrollimisel on

Teoreem 1.6 (teoreem kinnisest graafikust; vt nt [OO, lk 148])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning olgu $T\colon\ X \to Y$ lineaarne operaator. Operaator T on pidev parajasti siis, kui tema graafik on kinnine hulk ruumis $X \times Y$.*

Tarvilikkus teoreemis kinnisest graafikust on üsna ilmne. Selle teoreemi tegelik tähtsus seisneb piisavuses, mille kohaselt lineaarne operaator T Banachi ruumist X Banachi ruumi Y on pidev, kui kehtib implikatsioon

$$x_i, x \in X,\ i \in \mathbb{N},\ \ y \in Y,\ \ x_i \xrightarrow[i\to\infty]{} x,\ \ Tx_i \xrightarrow[i\to\infty]{} y \qquad \Longrightarrow \qquad Tx = y.$$

1.4. Operaatorite laiendamisest. Teoreem piisavast arvust funktsionaalidest

Olgu X ja Y mingid mittetühjad hulgad ning olgu X_0 hulga X mittetühi alamhulk.

Definitsioon 1.6. Öeldakse, et kujutus $T\colon\ X \to Y$ on kujutuse $T_0\colon\ X_0 \to Y$ *jätk* (ehk *laiend*) (hulgale X), kui

$$Tx = T_0 x \quad \text{iga } x \in X_0 \text{ korral.}$$

Sel juhul öeldakse ka, et kujutus T_0 on kujutuse T *ahend* alamhulgale X_0 ja kirjutatakse $T|_{X_0} = T_0$.

Konkreetsemalt, kui sellised X_0, X ja Y on normeeritud ruumid ja $T_0\colon\ X_0 \to Y$ on pidev lineaarne operaator, siis üldjuhul ei tarvitse operaatoril T_0 leiduda pidevat lineaarset jätku ruumile X. (Kõige tavalisem näide sellisest olukorrast on juht, kus $X_0 = Y = c_0$, $X = \ell_\infty$ ja $T_0 = I_{c_0}$ on ruumi c_0 ühikoperaator, vt nt [M, järeldus 3.2.21].) Kui selline pidev lineaarne jätk T on olemas, siis

$$\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|Tx\| \geqslant \sup_{x\in B_{X_0}} \|Tx\| = \sup_{x\in B_{X_0}} \|T_0 x\| = \|T_0\|,$$

s.t operaatori jätkamisel tema norm ei kahane. Seejuures, isegi siis, kui operaatoril T_0 leidub pidev lineaarne jätk ruumile X, võib juhtuda, et tema iga jätku $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ korral $\|T\| > \|T_0\|$, s.t operaatorit T_0 pole võimalik jätkata normi säilides. (Kõige tavalisem näide sellisest olukorrast on juht, kus $X_0 = Y = c_0$, $X = c$ ja $T_0 = I_{c_0}$ on ruumi c_0 ühikoperaator: kui $T \in \mathcal{L}(c, c_0)$ on selline, et $T|_{c_0} = I_{c_0}$, siis $\|T\| \geqslant 2 > 1 = \|I_{c_0}\|$; vt nt [W, ülesanne III.6.22, (b)].)

Järgnevalt esitame kaks näidet olukordadest, kus pideva lineaarse operaatori pidev lineaarne jätkamine normi säilides on alati võimalik. Esimene neist on juht, kus alamruum X_0 on kõikjal tihe ruumis X, s.t $\overline{X_0} = X$, ning sihtruum Y on Banachi ruum, s.t Y on täielik.

Teoreem 1.7 (vt nt [OO, lk 149])**.** *Olgu X normeeritud ruum, olgu Y Banachi ruum ning olgu X_0 ruumi X kõikjal tihe alamruum. Siis igal operaatoril $T_0 \in \mathcal{L}(X_0, Y)$ eksisteerib parajasti üks pidev jätk $T\colon X \to Y$. See jätk on lineaarne, s.t $T \in \mathcal{L}(X,Y)$; seejuures $\|T\| = \|T_0\|$.*

Teine näide olukorrast, kus pideva lineaarse operaatori pidev lineaarne jätkamine normi säilides on alati võimalik, on juht, kus operaatori sihtruum on arvude ruum $\mathbb{K}$, s.t operaatorid on pidevad lineaarsed funktsionaalid.

Teoreem 1.8 (Hahn–Banachi teoreem; vt nt [OO, lk 165])**.** *Olgu X_0 normeeritud ruumi X alamruum ning olgu $g \in X_0^*$. Siis leidub $f \in X^*$ nii, et*

$$f|_{X_0} = g \quad ja \quad \|f\| = \|g\|.$$

Käesolevas töös läheb meil vaja järgnevat järeldust Hahn–Banachi teoreemist.

Teoreem 1.9 (teoreem piisavast arvust funktsionaalidest; vt nt [OO, lk 170])**.** *Olgu $X \neq \{0\}$ normeeritud ruum. Siis iga $x \in X$ korral leidub funktsionaal $f \in X^*$ nii, et $\|f\| = 1$ ja $f(x) = \|x\|$.*

1.5. Kompleksse pideva lineaarse funktsionaali reaal- ja imaginaarosa

Olgu X kompleksne vektorruum (s.t vektorruum üle korpuse $\mathbb{C}$). Siis X on loomulikul viisil tõlgendatav reaalse vektorruumina, defineerides seal liitmise ja reaalarvuga korrutamise nagu kompleksse ruumi X puhul – kompleksarvude korpus sisaldab reaalarvude korpuse, seega on elemendi korrutamine reaalarvuga ruumis X defineeritud. Ruumi X, tõlgendatuna sel viisil reaalse ruumina, nimetatakse (kompleksse) ruumiga X *assotsieeruvaks reaalseks (vektor)ruumiks* ja tähistatakse sümboliga $X_{\mathbb{R}}$. Rõhutame, et kui $X \neq \{0\}$, siis ruumid X ja $X_{\mathbb{R}}$ on algebralises mõttes erinevad: näiteks kui $x \neq 0$, siis elemendid x ja ix on ruumis X lineaarselt sõltuvad, ruumis $X_{\mathbb{R}}$ aga lineaarselt sõltumatud.

Öeldakse, et funktsionaal $g\colon X \to \mathbb{R}$ on *reaal-lineaarne,* kui mis tahes $x, y \in X$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral

1° $g(x+y) = g(x) + g(y)$,

2° $g(\alpha x) = \alpha g(x)$.

Teisisõnu, reaal-lineaarseteks funktsionaalideks kompleksel vektorruumil X nimetatakse lineaarseid funktsionaale assotsieeruval reaalsel ruumil $X_{\mathbb{R}}$.

Lineaarseid funktsionaale $X \to \mathbb{C}$ nimetame edaspidi ka *kompleks-lineaarseteks* funktsionaalideks.

Kui X on normeeritud ruum, siis ka $X_{\mathbb{R}}$ on normeeritud ruum sama normi suhtes. (Juhime tähelepanu, et meetriliste ruumidena on X ja $X_{\mathbb{R}}$ identsed, kuid normeeritud ruumidena juhul $X \neq \{0\}$ mitte, sest nad on vektorruumidena erinevad.)

Järgnevad lause (mida kasutab ka ülaltoodud Hahn–Banachi teoreemi tõestus kompleksel juhul) ja järeldus selgitavad pideva kompleks-lineaarse funktsionaali ning tema reaal- ja imaginaarosa vahekorda.

Lause 1.10 (vt nt [M, lause 1.9.3])**.** *Olgu X kompleksne vektorruum.*

(a) *Olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ kompleks-lineaarne funktsionaal. Siis* $\operatorname{Re} f\colon X \to \mathbb{R}$ *on reaal-lineaarne. Seejuures*

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

(b) *Olgu $u\colon X \to \mathbb{R}$ reaal-lineaarne funktsionaal. Siis leidub parajasti üks kompleks-lineaarne funktsionaal $f\colon X \to \mathbb{C}$ nii, et $u = \operatorname{Re} f$. Seejuures*

$$f(x) = u(x) - iu(ix) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

(c) *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ kompleks-lineaarne funktsionaal. Siis $f \in X^*$ parajasti siis, kui $\operatorname{Re} f \in X_{\mathbb{R}}^*$. Seejuures $\|f\| = \|\operatorname{Re} f\|$.*

Järeldus 1.11. *Olgu X kompleksne vektorruum.*

(a) *Olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ kompleks-lineaarne funktsionaal. Siis* $\operatorname{Im} f\colon X \to \mathbb{R}$ *on reaal-lineaarne. Seejuures*

$$f(x) = \operatorname{Im} f(ix) + i \operatorname{Im} f(x) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

(b) *Olgu $v\colon X \to \mathbb{R}$ reaal-lineaarne funktsionaal. Siis leidub parajasti üks kompleks-lineaarne funktsionaal $f\colon X \to \mathbb{C}$ nii, et $v = \operatorname{Im} f$. Seejuures*

$$f(x) = v(ix) + iv(x) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

(c) *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ kompleks-lineaarne funktsionaal. Siis $f \in X^*$ parajasti siis, kui $\operatorname{Im} f \in X_{\mathbb{R}}^*$. Seejuures $\|f\| = \|\operatorname{Im} f\|$.*

TÕESTUS. (a). Ilmselt $-if\colon X \to \mathbb{C}$ on kompleks-lineaarne funktsionaal, kusjuures iga $x \in X$ korral

$$\operatorname{Re}(-if)(x) = \operatorname{Re}\bigl(-i \operatorname{Re} f(x) + \operatorname{Im} f(x)\bigr) = \operatorname{Im} f(x).$$

Lause 1.10, (a), põhjal $\operatorname{Im} f = \operatorname{Re}(-if)\colon X \to \mathbb{R}$ on reaal-lineaarne funktsionaal; seejuures iga $x \in X$ korral

$$-if(x) = \operatorname{Re}(-if)(x) - i \operatorname{Re}(-if)(ix) = \operatorname{Im} f(x) - i \operatorname{Im} f(ix),$$

millest $f(x) = \operatorname{Im} f(ix) + i \operatorname{Im} f(x)$.

(b). Kui $f\colon X \to \mathbb{C}$ oleks kompleks-lineaarne funktsionaal, mille korral $v = \operatorname{Im} f$, siis väite (a) põhjal

$$f(x) = \operatorname{Im} f(ix) + i \operatorname{Im} f(x) = v(ix) + iv(x),$$

järelikult saab niisuguseid funktsionaale f olla ülimalt üks. Niisiis jääb veenduda sellise f olemasolus. Selleks paneme tähele, et lause 1.10, (b), põhjal leidub kompleks-lineaarne funktsionaal $g\colon X \to \mathbb{C}$, mille korral $v = \operatorname{Re} g$. Nüüd ilmselt ka $f := ig\colon X \to \mathbb{C}$ on kompleks-lineaarne funktsionaal, kusjuures $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(ig) = \operatorname{Re} g = v$.

(c). Väite (a) tõestuses panime tähele, et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Re}(-if)$. Seega saame lause 1.10, (c), põhjal, et

$$f \in X^* \quad \iff \quad -if \in X^* \quad \iff \quad \operatorname{Re}(-if) \in X^*_{\mathbb{R}} \quad \iff \quad \operatorname{Im} f \in X^*_{\mathbb{R}}.$$

Seejuures, jällegi lause 1.10, (c), põhjal

$$\|f\| = \|-if\| = \bigl\|\operatorname{Re}(-if)\bigr\| = \|\operatorname{Im} f\|.$$

$\square$

§ 2. Absoluutselt summeerivad operaatorid

Kõikjal selles paragrahvis on X Banachi ruum üle korpuse $\mathbb{K}$ ning $1 \leqslant p < \infty$.

2.1. Tugevalt p-summeeruvate jadade ruum $\ell_p(X)$

Definitsioon 2.1. Öeldakse, et ruumi X elementide jada $(x_j) = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ on *tugevalt p-summeeruv,* kui

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty.$$

Kõigi tugevalt p-summeeruvate (ruumi X elementide) jadade hulka tähistatakse sümboliga $\ell_p^{strong}(X)$ või ka lihtsalt $\ell_p(X)$. On ilmne, et $\ell_p(X)$ on loomulike tehete suhtes vektorruum, s.t ta on kinnine liitmise ja arvuga korrutamise suhtes.

Tõepoolest, olgu $(x_j), (z_j) \in \ell_p(X)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Kahe jada liitmine tähendab vastavate komponentide liitmist, s.t $(x_j) + (z_j) = (x_j + z_j)$. Minkowski võrratusest järeldub, et $(x_j + z_j) \in \ell_p(X)$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j + z_j\|^p \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \big(\|x_j\| + \|z_j\|\big)^p &= \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} \big(\|x_j\| + \|z_j\|\big)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \\ &\leqslant \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p < \infty.\end{aligned}$$

Jada arvuga korrutamine tähendab jada iga liikme korrutamist selle arvuga, s.t $\lambda(x_j) = (\lambda x_j)$. Näitame, et $(\lambda x_j) \in \ell_p(X)$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\lambda x_j\|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|^p \|x_j\|^p = |\lambda|^p \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty.$$

Lause 2.1. *$\ell_p(X)$ on Banachi ruum järgmise normi suhtes:*

$$\big\|(x_j)\big\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (x_j) \in \ell_p(X).$$

TÕESTUS. On ilmne, et suurus $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ on lõplik. Näitame, et $\|\cdot\|_p$ on norm ruumis $\ell_p(X)$. Selleks on vaja kontrollida normi aksioomide kehtivust.

Olgu $(x_j),(z_j)\in\ell_p(X)$ ja $\lambda\in\mathbb{K}$. Siis

$$1^\circ\quad \big\|(x_j)\big\|_p=0\Leftrightarrow\left(\sum_{j=1}^\infty\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=0\Leftrightarrow\sum_{j=1}^\infty\|x_j\|^p=0\Leftrightarrow\|x_j\|^p=0,\ j\in\mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow\|x_j\|=0,\ j\in\mathbb{N}\Leftrightarrow x_j=0,\ j\in\mathbb{N}\Leftrightarrow(x_j)=0;$$
$$2^\circ\quad \big\|\lambda(x_j)\big\|_p=\left(\sum_{j=1}^\infty\|\lambda x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{j=1}^\infty|\lambda|^p\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(|\lambda|^p\sum_{j=1}^\infty\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=|\lambda|\left(\sum_{j=1}^\infty\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\lambda|\,\big\|(x_j)\big\|_p\,;$$
$$3^\circ\quad \big\|(x_j)+(z_j)\big\|_p=\left(\sum_{j=1}^\infty\|x_j+z_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{j=1}^\infty\big(\|x_j\|+\|z_j\|\big)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\left(\sum_{j=1}^\infty\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^\infty\|z_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\big\|(x_j)\big\|_p+\big\|(z_j)\big\|_p\,.$$

Jääb näidata, et ruum $\ell_p(X)$ on täielik. Selleks kasutame teoreemi 1.2. (Ruumi $\ell_p(X)$ täielikkuse tõestus, mis toetub vahetult täielikkuse definitsioonile, on esitatud märkuses 2.1.)

Olgu $\sum\limits_{i=1}^\infty(x_j^i)=\sum\limits_{i=1}^\infty(x_j^i)_{j=1}^\infty$ absoluutselt koonduv rida ruumis $\ell_p(X)$, s.t

$$\sum_{i=1}^\infty\big\|(x_j^i)\big\|=\sum_{i=1}^\infty\left(\sum_{j=1}^\infty\|x_j^i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Veendumaks, et ruum $\ell_p(X)$ on täielik, piisab teoreemi 1.2 põhjal näidata, et rida $\sum\limits_{i=1}^\infty(x_j^i)$ koondub ruumis $\ell_p(X)$. Selleks paneme tähele, et iga $j\in\mathbb{N}$ korral

$$\sum_{i=1}^\infty\|x_j^i\|=\sum_{i=1}^\infty\big(\|x_j^i\|^p\big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_{i=1}^\infty\left(\sum_{k=1}^\infty\|x_k^i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

s.t rida $\sum\limits_{i=1}^\infty x_j^i$ on absoluutselt koonduv, seega ruumi X täielikkuse tõttu teoreemi 1.2 põhjal rida $\sum\limits_{i=1}^\infty x_j^i$ koondub ruumis X. Ruumi $\ell_p(X)$ täielikkuseks jääb näidata, et $\left(\sum\limits_{i=1}^\infty x_j^i\right)\in\ell_p(X)$, kusjuures $\sum\limits_{i=1}^\infty(x_j^i)=\left(\sum\limits_{i=1}^\infty x_j^i\right)$ ruumis $\ell_p(X)$.

Veendumaks, et $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_j^i\right) \in \ell_p(X)$, piisab näidata, et $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_j^i\right\|^p < \infty$:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} x_j^i\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_j^i\|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Veendume, et $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_j^i) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_j^i\right)$ ruumis $\ell_p(X)$. Olgu $n \in \mathbb{N}$, siis

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_j^i\right) - \sum_{i=1}^{n}(x_j^i)\right\| &= \left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_j^i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_j^i\right)\right\| = \left\|\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} x_j^i\right)\right\| \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} x_j^i\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \|x_j^i\|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

sest koonduva rea jääkliige koondub nulliks. □

Lause 2.2. *Olgu* $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}, x^i = (x_j^i)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$, $i \in \mathbb{N}$, *sellised, et* $x^i \xrightarrow[i\to\infty]{} x$ *ruumis* $\ell_p(X)$. *Siis iga* $j \in \mathbb{N}$ *korral* $x_j^i \xrightarrow[i\to\infty]{} x_j$ *ruumis* X. *Teisisõnu, koonduvusest ruumis* $\ell_p(X)$ *järeldub koordinaaditi koonduvus.*

Tõestus. Mis tahes $j \in \mathbb{N}$ korral

$$\|x_j^i - x_j\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^i - x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x^i - x\|_p \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

seega $x_j^i \xrightarrow[i\to\infty]{} x_j$. □

Märkus 2.1. Esitame ruumi $\ell_p(X)$ täielikkuse tõestuse, mis toetub vahetult täielikkuse definitsioonile, s.t näitame, et iga Cauchy jada ruumis $\ell_p(X)$ koondub.

Olgu $(x^i)_{i=1}^{\infty} = \big((x_j^i)_{j=1}^{\infty}\big)_{i=1}^{\infty}$ Cauchy jada ruumis $\ell_p(X)$. Siis mis tahes $\varepsilon > 0$ korral leidub $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ nii, et

$$i, k > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|x^i - x^k\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^i - x_j^k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon;$$

seega

$$i, k > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^i - x_j^k\|^p < \varepsilon^p. \tag{2.1}$$

Eelnevast implikatsioonist järeldub, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral

$$i, k > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|x_j^i - x_j^k\| < \varepsilon,$$

seega jada $(x_j^i)_{i=1}^\infty$ on Cauchy jada Banachi ruumis X ja ta koondub mingiks elemendiks $x_j \in X$. Näitame, et $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ on jada $(x^i)_{i=1}^\infty$ piirväärtus ruumis $\ell_p(X)$. Tingimusest (2.1) järeldub protsessis $k \to \infty$, et

$$i > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j^i - x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon,$$

sest tingimuse (2.1) põhjal iga $m \in \mathbb{N}$ korral

$$i, k > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^m \|x_j^i - x_j^k\|^p < \varepsilon^p,$$

millest protsessis $k \to \infty$ järeldub implikatsioon

$$i > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^m \|x_j^i - x_j\|^p \leqslant \varepsilon^p,$$

millest piirprotsessis $m \to \infty$ järeldub implikatsioon

$$i > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^\infty \|x_j^i - x_j\|^p \leqslant \varepsilon^p.$$

Järelikult, esiteks, $x^i - x = (x_j^i - x_j) \in \ell_p(X)$ ning seega ka $x = x^i - (x^i - x) \in \ell_p(X)$, ning, teiseks, $\|x^i - x\|_p \leqslant \varepsilon$, kui $i > N_\varepsilon$. Kuna $\varepsilon > 0$ oli suvaline, siis jada $(x^i)_{i=1}^\infty$ koondub elemendiks x ruumis $\ell_p(X)$.

2.2. Nõrgalt p-summeeruvate jadade ruum $\ell_p^w(X)$

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et ruumi X elementide jada (x_j) on *nõrgalt p-summeeruv,* kui iga $x^* \in X^*$ korral

$$\sum_{j=1}^\infty \left| x^*(x_j) \right|^p < \infty.$$

Kõigi nõrgalt p-summeeruvate (ruumi X elementide) jadade hulka tähistatakse sümboliga $\ell_p^{weak}(X)$ või ka lihtsalt $\ell_p^w(X)$. On ilmne, et $\ell_p^w(X)$ on vektorruum loomulike tehete suhtes.

Tõepoolest, olgu $(x_j), (z_j) \in \ell_p^w(X)$, olgu $\lambda \in \mathbb{K}$ ning olgu $x^* \in X^*$. Esiteks,

$(x_j)+(z_j)=(x_j+z_j)\in \ell_p^w(X)$, sest

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j+z_j)\big|^p &= \sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j)+x^*(z_j)\big|^p \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\big(|x^*(x_j)|+|x^*(z_j)|\big)^p\\ &= \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty}\big(|x^*(x_j)|+|x^*(z_j)|\big)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p\\ &\leqslant \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(z_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p<\infty;\end{aligned}$$

teiseks, $\lambda(x_j)=(\lambda x_j)\in \ell_p^w(X)$, sest

$$\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(\lambda x_j)\big|^p=\sum_{j=1}^{\infty}\big|\lambda\big|^p\big|x^*(x_j)\big|^p=|\lambda|^p\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j)\big|^p<\infty.$$

Lause 2.3. *$\ell_p^w(X)$ on Banachi ruum järgmise normi suhtes:*

$$\big\|(x_j)\big\|_p^w := \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad (x_j)\in \ell_p^w(X).$$

TÕESTUS. Kõigepealt tuleb näidata, et

(•) iga $(x_j)\in \ell_p^w(X)$ korral $\big\|(x_j)\big\|_p^w<\infty$.

Selleks kasutame teoreemi 1.6 kinnisest graafikust. (Alternatiivseid meetodeid väite (•) tõestuseks on demonstreeritud märkuses 2.2.)

Olgu $(x_j)\in \ell_p^w(X)$. Defineerime operaatori $T\colon\ X^*\to \ell_p$ võrdusega

$$Tx^*=\big(x^*(x_j)\big),\quad x^*\in X^*.$$

Veendumaks, et $\big\|(x_j)\big\|_p^w<\infty$, piisab näidata, et $T\in\mathcal{L}(X^*,\ell_p)$, sest sel juhul operaator T on tõkestatud, seega

$$\big\|(x_j)\big\|_p^w=\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\sup_{x^*\in B_{X^*}}\big\|\big(x^*(x_j)\big)\big\|_{\ell_p}=\sup_{x^*\in B_{X^*}}\|Tx^*\|=\|T\|<\infty.$$

Operaator T on korrektselt defineeritud ja lineaarne. Tõepoolest, kui $x^*\in X^*$, siis $Tx^*=\big(x^*(x_j)\big)\in\ell_p$, sest $\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j)\big|^p<\infty$. Operaator T on lineaarne, sest mis tahes

$x^*, z^* \in X^*$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ korral

$$\begin{aligned}
1^\circ \quad T(x^*+z^*) &= \big((x^*+z^*)(x_j)\big) = \big(x^*(x_j)+z^*(x_j)\big) = \big(x^*(x_j)\big) + \big(z^*(x_j)\big)\\
&= Tx^* + Tz^*;\\
2^\circ \quad T(\lambda x^*) &= \big(\lambda x^*(x_j)\big) = \lambda\big(x^*(x_j)\big) = \lambda Tx^*.
\end{aligned}$$

Operaatori T pidevuse tõestuseks kasutame teoreemi 1.6 kinnisest graafikust. Koondugu jada $(x_i^*)_{i=1}^\infty$ elemendiks x^* ruumis X^* ning koondugu jada $(Tx_i^*)_{i=1}^\infty = \Big(\big(x_i^*(x_j)\big)_{j=1}^\infty\Big)_{i=1}^\infty$ elemendiks $y = (y_j)_{j=1}^\infty$ ruumis ℓ_p. Operaatori T pidevuseks piisab näidata, et $Tx^* = y$, s.t $\big(x^*(x_j)\big)_{j=1}^\infty = (y_j)_{j=1}^\infty$, s.t iga $j \in \mathbb{N}$ korral $x^*(x_j) = y_j$. Olgu $j \in \mathbb{N}$. Ühelt poolt, kuna $x_i^* \xrightarrow[i\to\infty]{} x^*$, siis

$$x_i^*(x_j) \xrightarrow[i\to\infty]{} x^*(x_j).$$

Teiselt poolt, kuna koonduvusest ruumis ℓ_p järeldub koordinaaditi koonduvus, siis

$$x_i^*(x_j) \xrightarrow[i\to\infty]{} y_j.$$

Piirväärtuse ühesuse tõttu $x^*(x_j) = y_j$, nagu soovitud.

Oleme näidanud, et $\big\|(x_j)\big\|_p^w$ on lõplik.

Nüüd tuleb veenduda, et $\|\cdot\|_p^w$ on tõepoolest norm ruumis $\ell_p^w(X)$. Kontrollime normi aksioomide kehtivust. Olgu $(x_j), (z_j) \in \ell_p^w(X)$ ning olgu $\lambda \in \mathbb{K}$. Siis

$$\begin{aligned}
1^\circ \quad \big\|(x_j)\big\|_p^w = 0 &\Leftrightarrow \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^\infty \big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^\infty \big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0,\ x^* \in B_{X^*}\\
&\Leftrightarrow \sum_{j=1}^\infty \big|x^*(x_j)\big|^p = 0,\ x^* \in B_{X^*} \Leftrightarrow \big|x^*(x_j)\big|^p = 0,\ x^* \in B_{X^*},\ j \in \mathbb{N}\\
&\Leftrightarrow \big|x^*(x_j)\big| = 0,\ x^* \in B_{X^*},\ j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_j = 0,\ j \in \mathbb{N}\\
&\Leftrightarrow (x_j) = 0;\\
2^\circ \quad \big\|\lambda(x_j)\big\|_p^w &= \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^\infty \big|x^*(\lambda x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda|^p \big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= |\lambda| \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^\infty \big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= |\lambda|\, \|(x_j)\|_p^w;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3^\circ \quad \big\|(x_j)+(z_j)\big\|_p^w &= \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j+z_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j)+x^*(z_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\big(|x^*(x_j)|+|x^*(z_j)|\big)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(z_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&\leqslant \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(z_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \big\|(x_j)\big\|_p^w + \big\|(z_j)\big\|_p^w .
\end{aligned}
$$

Jääb näidata, et ruum $\ell_p^w(X)$ on normi $\|\cdot\|_p^w$ suhtes täielik. Selleks kasutame teoreemi 1.2. (Ruumi $\ell_p^w(X)$ täielikkuse tõestus, mis toetub vahetult täielikkuse definitsioonile, on esitatud märkuses 2.3.)

Olgu $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_j^i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_j^i)_{j=1}^{\infty}$ absoluutselt koonduv rida ruumis $\ell_p^w(X)$, s.t

$$
\sum_{i=1}^{\infty}\big\|(x_j^i)\big\|_p^w = \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j^i)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.
$$

Veendumaks, et ruum $\ell_p(X)$ on täielik, piisab teoreemi 1.2 põhjal näidata, et rida $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_j^i)$ koondub ruumis $\ell_p^w(X)$. Selleks paneme tähele, et iga $j\in\mathbb{N}$ korral

$$
\sum_{i=1}^{\infty}\|x_j^i\| = \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\big|x^*(x_j^i)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty}\big|x^*(x_k^i)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,
$$

s.t rida $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_j^i$ on absoluutselt koonduv, seega ruumi X täielikkuse tõttu teoreemi 1.2 põhjal rida $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_j^i$ koondub ruumis X. Ruumi $\ell_p^w(X)$ täielikkuseks jääb näidata, et $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_j^i\right)\in\ell_p^w(X)$, kusjuures $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_j^i) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_j^i\right)$ ruumis $\ell_p^w(X)$.

Fikseerime vabalt $x^*\in X^*$. Veendumaks, et $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_j^i\right)\in\ell_p^w(X)$, piisab näidata, et $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|x^*\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_j^i\right)\right|^p = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^*(x_j^i)\right|^p < \infty$:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}x^*(x_j^i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x^*(x_j^i)\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x^*(x_j^i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Veendume, et $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_j^i) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_j^i\right)$ ruumis $\ell_p^w(X)$:

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_j^i\right) - \sum_{i=1}^{n}(x_j^i)\right\|_p^w = \left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_j^i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}x_j^i\right)\right\|_p^w = \left\|\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}x_j^i\right)\right\|_p^w$$

$$= \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x^*\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}x_j^i\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=n+1}^{\infty}x^*(x_j^i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\left|x^*(x_j^i)\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x^*(x_j^i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty}\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x^*(x_j^i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=n+1}^{\infty}\left\|(x_j^i)\right\|_p^w \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

sest koonduva rea jääkliige koondub nulliks. □

Lause 2.4. *Olgu $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}, x^i = (x_j^i)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(X)$, $i \in \mathbb{N}$, sellised, et $x^i \xrightarrow[i\to\infty]{} x$ ruumis $\ell_p^w(X)$. Siis iga $j \in \mathbb{N}$ korral $x_j^i \xrightarrow[i\to\infty]{} x_j$ ruumis X. Teisisõnu, koonduvusest ruumis $\ell_p^w(X)$ järeldub koordinaaditi koonduvus.*

TÕESTUS. Mis tahes $j \in \mathbb{N}$ korral

$$\|x_j^i - x_j\| = \sup_{x^*\in B(\mathcal{F})}\left|x^*(x_j^i - x_j)\right| \leqslant \sup_{x^*\in B(\mathcal{F})}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x^*(x_k^i - x_k)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x^i - x\|_p^w \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

seega $x_j^i \xrightarrow[i\to\infty]{} x_j$. □

Märkus 2.2. Väite (•) tõestuseks võib teoreemi asemel kinnisest graafikust kasutada ka näiteks Zabreiko lemmat või lemmat 1.4 koos Baire'i teoreemiga.

Nimelt, väite (•) tõestuseks piisab näidata, et fikseeritud $(x_j) \in \ell_p^w(X)$ korral poolnorm $p\colon X^* \to \mathbb{R}$,

$$p(x^*) = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x^*(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x^* \in X^*,$$

on tõkestatud.

Tõepoolest, sel juhul leidub $M \geqslant 0$ nii, et iga $x^* \in X^*$ korral

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x^*(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant M\|x^*\|,$$

seega

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x^*(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant M.$$

Funktsioon p on korrektselt defineeritud. Näitame, et ta rahuldab poolnormi aksioome. Olgu $x^*, z^* \in X^*$ ning $\lambda \in \mathbb{K}$, siis

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad p(\lambda x^*) &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\lambda x^*(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\lambda\right|^p \left|x^*(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x^*(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda|\, p(x^*); \\ 2^\circ \quad p(x^* + z^*) &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|(x^* + z^*)(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x^*(x_j) + z^*(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(|x^*(x_j)| + |z^*(x_j)|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x^*(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|z^*(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= p(x^*) + p(z^*). \end{aligned}$$

(a). Zabreiko lemma 1.5 põhjal piisab poolnormi p tõkestatuseks näidata, et p on loenduvalt pooladitiivne, s.t iga ruumis X^* koonduva rea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^*$ korral

$$p\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^*\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k^*).$$

Koondugu rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^*$ ruumis X^*. Siis Minkowski võrratuse põhjal

$$\begin{aligned} p\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^*\right) &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^*(x_j)\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_k^*(x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k^*). \end{aligned}$$

(b). Lemma 1.4 põhjal piisab poolnormi p tõkestatuseks näidata, et leiduvad kera B kaasruumis X^* ja arv $M \geqslant 0$ nii, et $p(x^*) \leqslant M$ iga $x^* \in B$ korral. Sellise kera $B \subset X^*$

leidmiseks tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$B_n := \big\{x^* \in X^* \colon\ p(x^*) \leqslant n\big\}.$$

Paneme tähele, et $X^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, kusjuures hulgad B_n, $n \in \mathbb{N}$, on kinnised. Tõepoolest, olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $x_i^* \in B_n$, $i \in \mathbb{N}$, $x^* \in X^*$ sellised, et $x_i^* \xrightarrow[i\to\infty]{} x^*$. Hulga B_n kinnisuseks piisab näidata, et $x^* \in B_n$, s.t $p(x^*) \leqslant n$. Selleks piisab, et iga $m \in \mathbb{N}$ korral

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant n. \tag{2.2}$$

Olgu $m \in \mathbb{N}$, siis iga $i \in \mathbb{N}$ korral

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \big|x_i^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant p(x_i^*) \leqslant n.$$

Protsessis $i \to \infty$ järeldub siit võrratus (2.2).

Baire'i teoreemi 1.3 põhjal vähemalt ühe $n \in \mathbb{N}$ korral hulk B_n sisaldab mingi kera B, aga nüüd iga $x^* \in B$ korral $p(x^*) \leqslant n =: M$, nagu soovitud.

Märkus 2.3. Esitame ruumi $\ell_p^w(X)$ täielikkuse tõestuse, mis toetub vahetult täielikkuse definitsioonile, s.t näitame, et iga Cauchy jada ruumis $\ell_p^w(X)$ koondub.

Olgu $(x^i)_{i=1}^{\infty} = \big((x_j^i)_{j=1}^{\infty}\big)_{i=1}^{\infty}$ Cauchy jada ruumis $\ell_p^w(X)$. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ nii, et

$$i, k > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|x^i - x^k\|_p^w = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \big|x^*(x_j^i - x_j^k)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Nüüd iga $j \in \mathbb{N}$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral

$$i, k > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|x_j^i - x_j^k\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \big|x^*(x_j^i - x_j^k)\big| < \varepsilon.$$

See tähendab, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral $(x_j^i)_{i=1}^{\infty}$ on Cauchy jada Banachi ruumis X, järelikult ta koondub mingiks elemendiks $x_j \in X$. Näitame, et $x := (x_j)$ on jada $(x^i)_{i=1}^{\infty}$ piirväärtus ruumis $\ell_p^w(X)$. Seosest (2.3) järeldub, et iga $x^* \in B_{X^*}$ korral

$$i, k > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} \big|x^*(x_j^i - x_j^k)\big|^p < \varepsilon^p,$$

järelikult kõikide $x^* \in B_{X^*}$ ja $m \in \mathbb{N}$ korral

$$i, k > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} \bigl|x^*(x_j^i - x_j^k)\bigr|^p < \varepsilon^p,$$

millest protsessis $k \to \infty$ järeldub implikatsioon

$$i > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} \bigl|x^*(x_j^i - x_j)\bigr|^p \leqslant \varepsilon^p.$$

Eelnevast seosest järeldub protsessis $m \to \infty$, et iga $x^* \in B_{X^*}$ korral

$$i > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^{\infty} \bigl|x^*(x_j^i - x_j)\bigr|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon.$$

Siit järeldub, et, kui $i > N_\varepsilon$, siis esiteks, $x^i - x = (x_j^i - x_j) \in \ell_p^w(X)$ ja seega ka $x = x^i - (x^i - x) \in \ell_p^w(X)$, ning, teiseks, $\|x^i - x\|_p^w \leqslant \varepsilon$. Kuna $\varepsilon > 0$ oli suvaline, siis jada $(x^i)_{i=1}^\infty$ koondub elemendiks x ruumis $\ell_p^w(X)$.

Märkus 2.4. Ruum $\ell_p(X)$ on ruumi $\ell_p^w(X)$ vektoralamruum, s.t $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$. Tõepoolest, kui $(x_j) \in \ell_p(X)$, siis $(x_j) \in \ell_p^w(X)$, sest iga $x^* \in B_{X^*}$ korral

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bigl|x^*(x_j)\bigr|^p \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \bigl(\|x^*\|\,\|x_j\|\bigr)^p = \|x^*\|^p \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty.$$

Märkus 2.5. Kui defineerida loomulikul viisil normid $\|\cdot\|_\infty$ ja $\|\cdot\|_\infty^w$ ning ruumid $\ell_\infty(X)$ ja $\ell_\infty^w(X)$, siis iga ruumi X elementide jada (x_j) korral

$$\bigl\|(x_j)\bigr\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{x^*\in B_{X^*}} \bigl|x^*(x_j)\bigr| = \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \bigl|x^*(x_j)\bigr| =: \bigl\|(x_j)\bigr\|_\infty^w,$$

s.t $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_\infty^w$; niisiis ruumid $\ell_\infty(X)$ ja $\ell_\infty^w(X)$ langevad kokku.

2.3. (q, p)-summeerivate operaatorite ruum $\Pi_{q,p}(X, Y)$

Olgu nüüd Y Banachi ruum üle sama korpuse, mis ruum X, ning olgu $1 \leqslant q < \infty$.

Definitsioon 2.3. Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ on

- (q, p)*-summeeriv,* kui iga $(x_j) \in \ell_p^w(X)$ korral $(Tx_j) \in \ell_q(Y)$ (teisisõnu, T teisendab nõrgalt p-summeeruvad (ruumi X elementide) jadad tugevalt q-summeeruvateks (ruumi Y elementide) jadadeks);
- p*-summeeriv,* kui ta on (p, p)-summeeriv;
- *absoluutselt summeeriv,* kui ta on 1-summeeriv (ehk, teisisõnu, $(1, 1)$-summeeriv).

Kõigi (q,p)-summeerivate operaatorite $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ hulka tähistatakse sümboliga $\Pi_{q,p}(X,Y)$. Ilmselt on $\Pi_{q,p}(X,Y)$ vektorruum loomulike tehete suhtes.

Kui operaator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ on (q,p)-summeeriv, siis on määratud operaator

$$\widehat{T}\colon\ \ell_p^w(X) \ni (x_j) \longmapsto (Tx_j) \in \ell_q(Y).$$

Operaator $\widehat{T}$ on lineaarne, sest kui $(x_j),(z_j) \in \ell_p^w(X)$ ning $\lambda \in \mathbb{K}$, siis

$$\begin{aligned} 1^\circ\quad \widehat{T}\big((x_j)+(z_j)\big) &= \widehat{T}(x_j+z_j) = \big(T(x_j+z_j)\big) = (Tx_j+Tz_j) = (Tx_j)+(Tz_j) \\ &= \widehat{T}(x_j)+\widehat{T}(z_j); \end{aligned}$$

$$2^\circ\quad \widehat{T}\big(\lambda(x_j)\big) = \widehat{T}(\lambda x_j) = \big(T(\lambda x_j)\big) = \big(\lambda Tx_j\big) = \lambda(Tx_j) = \lambda\widehat{T}(x_j).$$

Lause 2.5. $\widehat{T} \in \mathcal{L}\big(\ell_p^w(X), \ell_q(Y)\big)$.

Tõestus. On vaja tõestada, et operaator $\widehat{T}$ on pidev ja lineaarne. Lineaarsus on kontrollitud lausele eelnevas arutelus. Operaatori $\widehat{T}$ pidevuse kontrolliks kasutame teoreemi 1.6 kinnisest graafikust. (Alternatiivseid meetodeid operaatori $\widehat{T}$ pidevuse tõestuseks on demonstreeritud märkuses 2.6.)

Koondugu jada $(x^i)_{i=1}^\infty = \big((x_j^i)_{j=1}^\infty\big)_{i=1}^\infty$ elemendiks $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ ruumis $\ell_p^w(X)$ ning koondugu jada $(\widehat{T}x^i)_{i=1}^\infty = \big((Tx_j^i)_{j=1}^\infty\big)_{i=1}^\infty$ elemendiks $y = (y_j)_{j=1}^\infty$ ruumis $\ell_q(Y)$. Operaatori $\widehat{T}$ pidevuseks piisab teoreemi 1.6 põhjal kinnisest graafikust näidata, et $\widehat{T}x = y$ ehk $(Tx_j)_{j=1}^\infty = (y_j)_{j=1}^\infty$ ehk iga $j \in \mathbb{N}$ korral $Tx_j = y_j$. Olgu $j \in \mathbb{N}$. Kuna koonduvusest ruumis $\ell_p^w(X)$ järeldub koordinaaditi koonduvus, siis $x_j^i \xrightarrow[i\to\infty]{} x_j$, seega operaatori T pidevuse tõttu

$$Tx_j^i \xrightarrow[i\to\infty]{} Tx_j.$$

Teiselt poolt, kuna koonduvusest ruumis $\ell_q(Y)$ järeldub koordinaaditi koonduvus, siis

$$Tx_j^i \xrightarrow[i\to\infty]{} y_j.$$

Piirväärtuse ühesuse tõttu $Tx_j = y_j$, nagu soovitud. □

Teoreem 2.6. $\Pi_{q,p}(X,Y)$ *on Banachi ruum järgmise normi suhtes:*

$$\begin{aligned} \pi_{q,p}(T) := \|\widehat{T}\| &= \sup\big\{\|\widehat{T}(x_j)\|_q\colon\ (x_j) \in B_{\ell_p^w(X)}\big\} = \sup\big\{\|(Tx_j)\|_q\colon\ (x_j) \in B_{\ell_p^w(X)}\big\} \\ &= \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^\infty \|Tx_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\colon\ (x_j) \in B_{\ell_p^w(X)}\right\}, \quad T \in \Pi_{q,p}(X,Y). \end{aligned}$$

Ruumi $\Pi_{q,p}(X,Y)$ täielikkuse tõestuse lihtsustamiseks on eelnevalt otstarbekas tõestada

Lause 2.7. *Iga $T \in \Pi_{q,p}(X,Y)$ korral*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \pi_{q,p}(T).$$

Tõestus. Olgu $x \in B_X$. Siis $(x,0,0,\dots) \in \ell_p^w(X)$, kusjuures

$$\big\|(x,0,0,\dots)\big\|_p^w = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \big|x^*(x)\big| = \|x\| \leqslant 1.$$

Seega

$$\|Tx\| = \big\|(Tx,0,0,,\dots)\big\|_q = \big\|\widehat{T}(x,0,0,\dots)\big\| \leqslant \|\widehat{T}\|\,\|x\| \leqslant \|\widehat{T}\| = \pi_{q,p}(T),$$

millest

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| \leqslant \pi_{q,p}(T).$$

□

Teoreemi 2.6 tõestus. Iga (q,p)-summeeriva operaatori T korral $\pi_{q,p}(T)$ on lõplik. Veendume, et $\pi_{q,p}(\cdot)$ on tõepoolest norm ruumis $\Pi_{q,p}(X,Y)$. Kontrollime normi aksioomide kehtivust.

Olgu T, $T' \in \Pi_{q,p}(X,Y)$ ning $\lambda \in \mathbb{K}$, siis

1° $\pi_{q,p}(T) = 0 \Leftrightarrow \|\widehat{T}\| = 0 \Leftrightarrow \widehat{T} = 0 \Leftrightarrow T = 0$;

2° $\pi_{q,p}(\lambda T) = \|\widehat{\lambda T}\| = \|\lambda \widehat{T}\| = |\lambda|\,\|\widehat{T}\| = |\lambda| \pi_{q,p}(T)$;

3° $\pi_{q,p}(T+T') = \|\widehat{T+T'}\| = \|\widehat{T} + \widehat{T'}\| \leqslant \|\widehat{T}\| + \|\widehat{T'}\| = \pi_{q,p}(T) + \pi_{q,p}(T')$.

Jääb näidata, et ruum $\Pi_{q,p}(X,Y)$ on normi $\pi_{q,p}(\cdot)$ suhtes täielik. Selleks kasutame teoreemi 1.2. (Ruumi $\Pi_{q,p}(X,Y)$ täielikkuse tõestus, mis toetub vahetult täielikkuse definitsioonile, on esitatud märkuses 2.7.)

Olgu $\sum\limits_{i=1}^{\infty} T_i$ absoluutselt koonduv rida ruumis $\Pi_{q,p}(X,Y)$, s.t $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \pi_{q,p}(T_i) < \infty$. Teoreemi 1.2 põhjal piisab ruumi $\Pi_{q,p}(X,Y)$ täielikkuseks näidata, et rida $\sum\limits_{i=1}^{\infty} T_i$ koondub ruumis $\Pi_{q,p}(X,Y)$. Selleks märgime, et lause 2.7 põhjal $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|T_i\| < \infty$, s.t rida $\sum\limits_{i=1}^{\infty} T_i$ koondub absoluutselt ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$, järelikult teoreemi 1.2 põhjal ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ täielikkuse tõttu mingi $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ korral $\sum\limits_{i=1}^{\infty} T_i = T$ ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $T \in \Pi_{q,p}(X,Y)$, kusjuures $\sum\limits_{i=1}^{\infty} T_i = T$ ruumis $\Pi_{q,p}(X,Y)$.

Näitame, et $T \in \Pi_{q,p}(X,Y)$. Fikseerides vabalt $(x_j) \in \ell_p^w(X)$, piisab selleks näidata, et $(Tx_j) \in \ell_q(Y)$, s.t $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|Tx_j\|^q < \infty$. Veendume selles:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|Tx_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i\right)x_j\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i x_j\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T_i x_j\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T_i x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \big\|(T_i x_j)\big\|_q = \sum_{i=1}^{\infty} \big\|\widehat{T}_i(x_j)\big\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \big\|\widehat{T}_i\big\| \, \big\|(x_j)\big\|_p^w \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{q,p}(T_i)\right) \big\|(x_j)\big\|_p^w < \infty.
\end{aligned}$$

Näitame, et $\sum\limits_{i=1}^{\infty} T_i = T$ ruumis $\Pi_{q,p}(X,Y)$, s.t

$$\pi_{q,p}\left(T - \sum_{i=1}^{n} T_i\right) = \pi_{q,p}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} T_i\right) = \left\|\widehat{\sum_{i=n+1}^{\infty} T_i}\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Mis tahes $(x_j) \in \ell_p^w(X)$ korral analoogiliselt eelmise võrratusteahelaga

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\widehat{\sum_{i=n+1}^{\infty} T_i}\right)(x_j)\right\| &= \left\|\left(\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} T_i\right)x_j\right)\right\|_q = \left\|\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} T_i x_j\right)\right\|_q = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} T_i x_j\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \pi_{q,p}(T_i)\right) \big\|(x_j)\big\|_p^w,
\end{aligned}$$

seega

$$\left\|\widehat{\sum_{i=n+1}^{\infty} T_i}\right\| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \pi_{q,p}(T_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

sest koonduva rea jääkliige koondub nulliks. □

Operaatori T (q,p)-summeerivusega samaväärset tingimust (ii) järgnevas teoreemis esitatakse kirjanduses sageli (q,p)-summeeruvuse definitsioonina.

Teoreem 2.8. *Olgu $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) T *on (q,p)-summeeriv;*

(ii) *leidub konstant $K \geqslant 0$ nii, et mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \ldots, x_n \in X$ korral*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} \big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.4}$$

Seejuures vähim konstant K, mis kõikide $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \ldots, x_n \in X$ korral rahuldab tingimust (2.4)*, on $\pi_{q,p}(T)$.*

TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu T (q,p)-summeeriv ning olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \ldots, x_n \in X$. Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et tingimus (2.4) kehtib, kui $K = \pi_{q,p}(T)$. Selleks tähistame $x := (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in \ell_p^w(X)$. Siis

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|\widehat{T}x\| \leqslant \|\widehat{T}\|\, \|x\|_{\ell_p^w(X)} = \pi_{q,p}(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} \big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu teoreemi tingimus (ii) ning olgu $(x_j) \in \ell_p^w(X)$. Veendumaks, et $T \in \Pi_{q,p}(X,Y)$, piisab näidata, et $(Tx_j) \in \ell_q(Y)$, s.t $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|Tx_j\|^q < \infty$. Tingimusest (2.4) järeldub, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^q &\leqslant K^q \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} \big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{q}{p}} \leqslant K^q \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{q}{p}} \\ &= K^q \big\|(x_j)\big\|_{\ell_p^w(X)}^q,\end{aligned}$$

millest protsessis $n \to \infty$ järeldub, et

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Tx_j\|^q \leqslant K^q \big\|(x_j)\big\|_{\ell_p^w(X)}^q < \infty,$$

nagu soovitud. Eelnevast järeldub ka, et iga $(x_j) \in \ell_p^w(X)$ korral

$$\big\|(Tx_j)\big\|_q = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|Tx_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant K \big\|(x_j)\big\|_{\ell_p^w(X)},$$

järelikult $\pi_{q,p}(T) \leqslant K$. Seega $K = \pi_{q,p}(T)$ on tõepoolest vähim konstant, mille korral kehtib tingimus (2.4). $\square$

Märkus 2.6. Operaatori $\widehat{T}$ pidevuse tõestuseks lauses 2.5 võib teoreemi asemel kinnisest graafikust kasutada ka näiteks Zabreiko lemmat või lemmat 1.4 koos Baire'i teoreemiga.

Nimelt, operaatori $\widehat{T}$ pidevuseks piisab näidata, et ta on tõkestatud, milleks piisab veenduda, et poolnorm $p\colon\ \ell_p^w(X)\to\mathbb{R}$,

$$p\big((x_j)\big) := \big\|\widehat{T}(x_j)\big\|_q = \big\|(Tx_j)\big\|_q = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Tx_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (x_j)\in\ell_p^w(X),$$

on tõkestatud, s.t leidub arv $M\geqslant 0$ nii, et

$$p\big((x_j)\big)\leqslant M\big\|(x_j)\big\|_p^w \qquad \text{iga } (x_j)\in\ell_p^w(X) \text{ korral.}$$

Tõepoolest, sellisel juhul $\widehat{T}$ on tõkestatud, sest iga $(x_j)\in\ell_p^w(X)$ korral

$$\big\|\widehat{T}(x_j)\big\|_q = p\big((x_j)\big)\leqslant M\big\|(x_j)\big\|_p^w.$$

Funktsioon p on korrektselt defineeritud. Näitame, et ta rahuldab poolnormi aksioome. Olgu (x_j), $(z_j)\in\ell_p^w(X)$ ning $\lambda\in\mathbb{K}$, siis

$$\begin{aligned}
1^\circ\quad p\big(\lambda(x_j)\big) &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\big\|T(\lambda x_j)\big\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda|^q\|Tx_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = |\lambda|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Tx_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= |\lambda|\,p\big((x_j)\big);\\
2^\circ\quad p\big((x_j)+(z_j)\big) &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\big\|T(x_j+z_j)\big\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\big\|Tx_j+Tz_j\big\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}\big(\|Tx_j\|+\|Tz_j\|\big)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Tx_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Tz_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= p\big((x_j)\big)+p\big((z_j)\big).
\end{aligned}$$

Poolnormi p tõkestatust võib näidata mitmel viisil.

(a). Zabreiko lemma põhjal piisab poolnormi p tõkestatuseks näidata, et p on loenduvalt pooladitiivne, s.t iga ruumis $\ell_p^w(X)$ koonduva rea $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_j^k)$ korral

$$p\left(\sum_{k=1}^{\infty}(x_j^k)\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}p\big((x_j^k)\big).$$

Koondugu rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_j^k)$ ruumis $\ell_p^w(X)$. Kuna koonduvusest ruumis $\ell_p^w(X)$ järeldub koordinaaditi koonduvus, siis

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_j^k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_j^k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}x_j^k\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}x_j^k\right),$$

seega Minkowski võrratuse põhjal

$$p\left(\sum_{k=1}^{\infty}(x_j^k)\right) = p\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_j^k\right)\right) = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\sum_{k=1}^{\infty}x_j^k\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}Tx_j^k\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|Tx_j^k\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Tx_j^k\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sum_{k=1}^{\infty}p\big((x_j^k)\big).$$

(b). Lemma 1.4 põhjal piisab poolnormi p tõkestatuseks näidata, et leiduvad kera B ruumis $\ell_p^w(X)$ ja arv $M \geqslant 0$ nii, et $p\big((x_j)\big) \leqslant M$ iga $(x_j) \in B$ korral. Sellise kera leidmiseks tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$B_n := \big\{(x_j) \in \ell_p^w(X)\colon\ p\big((x_j)\big) \leqslant n\big\}.$$

Märgime, et $\ell_p^w(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, kusjuures hulgad B_n, $n \in \mathbb{N}$, on kinnised. Tõepoolest, olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $x^i = (x_j^i)_{j=1}^{\infty} \in B_n$, $i \in \mathbb{N}$, ja $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(X)$ sellised, et $x^i \xrightarrow[i\to\infty]{} x$. Hulga B_n kinnisuseks piisab näidata, et $x \in B_n$, s.t $p(x) = p\big((x_j)\big) \leqslant n$. Selleks piisab, et iga $m \in \mathbb{N}$ korral

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\|Tx_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant n. \tag{2.5}$$

Olgu $m \in \mathbb{N}$; siis iga $i \in \mathbb{N}$ korral

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\|Tx_j^i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant p\big((x_j^i)\big) \leqslant n. \tag{2.6}$$

Kuna koonduvusest ruumis $\ell_p^w(X)$ järeldub koordinaaditi koonduvus, siis iga $j \in \mathbb{N}$ korral $x_j^i \xrightarrow[i\to\infty]{} x_j$, järelikult operaatori T pidevuse tõttu $Tx_j^i \xrightarrow[i\to\infty]{} Tx_j$, seega piirprotsessis $i \to \infty$ järeldub võrratustest (2.6) võrratus (2.5).

Baire'i teoreemi põhjal vähemalt ühe $n \in \mathbb{N}$ korral hulk B_n sisaldab mingi kera B. Nüüd iga $(x_j) \in B$ korral $p\big((x_j)\big) \leqslant n =: M$, nagu soovitud.

Märkus 2.7. Esitame ruumi $\Pi_{q,p}(X,Y)$ täielikkuse tõestuse, mis toetub vahetult täielikkuse definitsioonile, s.t näitame, et iga Cauchy jada ruumis $\ell_p^w(X)$ koondub.

Olgu $(T_i) = (T_i)_{i=1}^{\infty}$ Cauchy jada ruumis $\Pi_{q,p}(X,Y)$. On vaja näidata, et leidub (q,p)-summeeriv operaator T nii, et $T_i \xrightarrow[i\to\infty]{} T$ ruumis $\Pi_{q,p}(X,Y)$. Cauchy jada definitsiooni põhjal $\pi_{q,p}(T_i - T_k) \xrightarrow[i,k\to\infty]{} 0$, seega lause 2.7 põhjal ka

$$\|T_i - T_k\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \xrightarrow[i,k\to\infty]{} 0.$$

See tähendab, et (T_i) on Cauchy jada Banachi ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$, järelikult ta koondub selles ruumis, s.t leidub $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ nii, et $T_i \xrightarrow[i\to\infty]{} T$ ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$.

Jääb näidata, et $T \in \Pi_{q,p}(X,Y)$ ja $T_i \xrightarrow[i\to\infty]{} T$ ruumis $\Pi_{q,p}(X,Y)$.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1,\ldots,x_n \in X$. Selleks, et $T \in \Pi_{q,p}(X,Y)$, piisab teoreemi 2.8 põhjal näidata, et T rahuldab tingimust (2.4), kus $K := \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} \pi_{q,p}(T_i) < \infty$. (Supreemumi lõplikkus tuleb sellest, et (T_i) kui Cauchy jada on tõkestatud.) Veendume selles:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \lim_{i\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} \|T_i x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant K \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{n} \big|x^*(x_j)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Olgu $\varepsilon > 0$. Selleks, et $T_i \xrightarrow[i\to\infty]{} T$ ruumis $\Pi_{q,p}(X,Y)$, piisab leida selline $N \in \mathbb{N}$, et

$$i > N \quad\Longrightarrow\quad \pi_{q,p}(T_i - T) \leqslant \varepsilon,$$

s.t kui $i > N$, siis mis tahes $(x_j) \in B_{\ell_p^w(X)}$ ja $m \in \mathbb{N}$ korral

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|T_i x_j - Tx_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \varepsilon. \tag{2.7}$$

Selleks valime $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$i,k > N \quad\Longrightarrow\quad \pi_{q,p}(T_i - T_k) \leqslant \varepsilon.$$

Olgu nüüd $i > N$ ning olgu $(x_j) \in B_{\ell_p^w(X)}$ ja $m \in \mathbb{N}$. Siis iga $k > N$ korral

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|T_i x_j - T_k x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \pi_{q,p}(T_i - T_k) \leqslant \varepsilon,$$

millest, arvestades, et $T_k \xrightarrow[k\to\infty]{} T$ ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$, järeldub protsessis $k \to \infty$ võrratus (2.7).

2.4. Absoluutselt summeerivad operaatorid

Kui $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ on rida ruumis X ja $\eta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on bijektsioon, siis rida $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_{\eta(j)}$ nimetatakse rea $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ *ümberjärjestuseks.*

Definitsioon 2.4. Öeldakse, et rida $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ ruumis X on *tingimatult koonduv,* kui tema iga ümberjärjestus koondub ruumis X.

Tähistame

$$\ell^u(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \colon\ x_j \in X,\ j \in \mathbb{N},\ \text{rida} \sum_{j=1}^{\infty} x_j \text{ koondub tingimatult ruumis } X \right\}.$$

Lause 2.9. *$\ell^u(X)$ on Banachi ruumi $\ell_1^w(X)$ kinnine alamruum. Niisiis, $\ell^u(X)$ on normi $\|\cdot\|_1^w$ suhtes Banachi ruum.*

Märkus 2.8. Bessaga–Pełczyński teoreemi (vt nt [DU, lk 22]) põhjal $\ell^u(X) = \ell_1^w(X)$ parajasti siis, kui ruum X ei sisalda ruumiga c_0 isomorfseid alamruume.

Alamruumi $\ell^u(X)$ kinnisuse tõestamisel lauses 2.9 on mugav toetuda järgmisele lemmale.

Lemma 2.10. *Olgu $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}, x^i = (x_j^i)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(X)$, $i \in \mathbb{N}$, sellised, et*

$$\text{read } \sum_{j=1}^{\infty} x_j^i,\ i \in \mathbb{N},\ \text{koonduvad ruumis } X \qquad \text{ja} \qquad x^i \xrightarrow[i\to\infty]{} x \text{ ruumis } \ell_1^w(X).$$

Siis ka rida $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ koondub ruumis X.

Tõestus. Rea $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ koonduvuseks piisab ruumi X täielikkuse tõttu näidata, et tema osasummade jada on Cauchy jada, s.t iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n, m > N,\ m > n \quad \Longrightarrow \quad \left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j \right\| < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Selleks paneme tähele, et kõikide $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, ja $i \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j \right\| &\leqslant \left\| \sum_{j=n+1}^{m} (x_j - x_j^i) \right\| + \left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j^i \right\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left| x^* \Big(\sum_{j=n+1}^{m} (x_j - x_j^i) \Big) \right| + \left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j^i \right\| \\
&\leqslant \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=n+1}^{m} \left| x^*(x_j - x_j^i) \right| + \left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j^i \right\| \\
&\leqslant \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{\infty} \left| x^*(x_j - x_j^i) \right| + \left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j^i \right\| = \|x - x^i\| + \left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j^i \right\|.
\end{aligned}$$

Seega, kui $\varepsilon > 0$, siis, valides $i \in \mathbb{N}$ nii, et $\|x - x^i\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ja $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n, m > N,\ m > n \quad \Longrightarrow \quad \left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j^i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(selline N valik on võimalik, sest rida $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j^i$ koondub ning seega tema osasummade jada on Cauchy jada), kehtib (2.8). $\square$

LAUSE 2.9 TÕESTUS. Olgu $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ tingimatult koonduv rida ruumis X ning olgu $x^* \in X^*$. Veendumaks, et $\ell^u(X) \subset \ell_1^w(X)$, piisab näidata, et $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\big|x^*(x_j)\big| < \infty$. Selleks piisab näidata, et rea $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x^*(x_j)$ iga ümberjärjestus koondub (sest arvrida koondub absoluutselt parajasti siis, kui ta koondub tingimatult). Kui $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_{\eta(j)}$ on rea $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ mingi ümberjärjestus, siis rea $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ tingimatu koonduvuse tõttu see ümberjärjestus koondub, s.t mingi $x \in X$ korral $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_{\eta(j)}$. Nüüd

$$
\begin{aligned}
x^*(x) = x^*\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{\eta(j)}\right) &= x^*\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} x_{\eta(j)}\right) = \lim_{n\to\infty} x^*\left(\sum_{j=1}^{n} x_{\eta(j)}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} x^*(x_{\eta(j)}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} x^*(x_{\eta(j)});
\end{aligned}
$$

niisiis ümberjärjestus $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x^*(x_{\eta(j)})$ koondub.

Ilmselt on $\ell^u(X)$ ruumi $\ell_1^w(X)$ vektoralamruum.

Olgu $x^i = (x_j^i)_{j=1}^{\infty} \in \ell^u(X)$, $i \in \mathbb{N}$, ja $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(X)$ sellised, et $x^i \xrightarrow[i\to\infty]{} x$ ruumis $\ell_1^w(X)$. Veendumaks, et $\ell^u(X)$ on ruumi $\ell_1^w(X)$ kinnine alamruum, piisab näidata, et $x \in \ell^u(X)$, s.t rida $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$ koondub tingimatult. Fikseerides vabalt bijektsiooni $\eta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tuleb selleks näidata, et rida $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_{\eta(j)}$ koondub, milleks lemma 2.10 põhjal piisab veenduda, et, tähistades $z^i := (x_{\eta(j)}^i)_{j=1}^{\infty} \in \ell^u(X)$, $i \in \mathbb{N}$, ja $z := (x_{\eta(j)})_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(X)$, kehtib $z^i \xrightarrow[i\to\infty]{} z$ ruumis $\ell_1^w(X)$. Veendume, et see on nii:

$$
\begin{aligned}
\|z^i - z\| &= \left\|(x_{\eta(j)}^i - x_{\eta(j)})_{j=1}^{\infty}\right\|_1^w = \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{\infty}\left|x^*(x_{\eta(j)}^i - x_{\eta(j)})\right| \\
&= \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{\infty}\left|x^*(x_j^i - x_j)\right| = \left\|(x_j^i - x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_1^w = \|x^i - x\| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

Teoreem 2.11. *Olgu $T\colon X \to Y$ pidev lineaarne operaator. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *T on absoluutselt summeeriv;*

(ii) *T kujutab tingimatult koonduvad read ruumis X absoluutselt koonduvateks ridadeks ruumis Y, s.t kui $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ on tingimatult koonduv rida ruumis X, siis $\sum_{j=1}^{\infty} Tx_j$ on absoluutselt koonduv rida ruumis Y.*

TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu operaator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ absoluutselt summeeriv. Siis definitsiooni põhjal iga $(x_j) \in \ell_1^w(X)$ korral $(Tx_j) \in \ell_1(Y)$. Kuna $\ell^u(X) \subset \ell_1^w(X)$, siis ka iga $(x_j) \in \ell^u(X)$ korral $(Tx_j) \in \ell_1(Y)$, s.t iga tingimatult koonduva rea $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ korral ruumis X rida $\sum_{j=1}^{\infty} \|Tx_j\|$ koondub ruumis Y.

(ii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu teoreemi tingimus (ii). Näitame, et kehtib teoreemi 2.8 tingimus (ii), kus $p = q = 1$. Selleks piisab näidata, et lineaarne operaator

$$\widetilde{T}\colon\ \ell^u(X) \ni (x_j) \longmapsto (Tx_j) \in \ell_1(Y)$$

on pidev. Tõepoolest, kui $\widetilde{T}$ on pidev, siis mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \ldots, x_n \in X$ korral

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\| &= \big\|(Tx_1, \ldots, Tx_n, 0, 0, \ldots)\big\|_{\ell_1(Y)} = \big\|\widetilde{T}(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\big\|_{\ell_1(Y)} \\ &\leqslant \|\widetilde{T}\|\, \big\|(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\big\|_1^w = \|\widetilde{T}\| \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} \big|x^*(x_j)\big|,\end{aligned}$$

s.t kehtib tingimus (2.4), kus $p = q = 1$ ja $K = \|\widetilde{T}\|$.

Operaatori $\widetilde{T}$ pidevuse tõestuseks kasutame teoreemi 1.6 kinnisest graafikust. Koondugu jada $(x^i)_{i=1}^{\infty} = \big((x_j^i)_{j=1}^{\infty}\big)_{i=1}^{\infty}$ elemendiks $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ ruumis $\ell^u(X)$ ning koondugu jada $(\widetilde{T}x^i)_{i=1}^{\infty} = \big((Tx_j^i)_{j=1}^{\infty}\big)_{i=1}^{\infty}$ elemendiks $y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$ ruumis $\ell_1(Y)$. Operaatori $\widetilde{T}$ pidevuseks piisab teoreemi 1.6 põhjal kinnisest graafikust näidata, et $\widetilde{T}x = y$, s.t $(Tx_j)_{j=1}^{\infty} = (y_j)_{j=1}^{\infty}$, s.t iga $j \in \mathbb{N}$ korral $Tx_j = y_j$. Olgu $j \in \mathbb{N}$. Kuna koonduvusest ruumis $\ell^u(X)$ järeldub koordinaaditi koonduvus, siis $x_j^i \xrightarrow[i\to\infty]{} x_j$, seega operaatori T pidevuse tõttu

$$Tx_j^i \xrightarrow[i\to\infty]{} Tx_j.$$

Teiselt poolt, kuna koonduvusest ruumis $\ell_1(Y)$ järeldub koordinaaditi koonduvus, siis

$$Tx_j^i \xrightarrow[i\to\infty]{} y_j.$$

Piirväärtuse ühesuse tõttu $Tx_j = y_j$, nagu soovitud. □

§ 3. Absoluutselt summeerivad operaatorid Banachi ruumil $B(\mathcal{F})$

Kõikjal selles paragrahvis $\Omega \neq \emptyset$ on mingi hulk, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ on algebra ning X on Banachi ruum üle korpuse $\mathbb{K}$.

3.1. Banachi ruum $B(\mathcal{F})$

Definitsioon 3.1. Olgu $E \subset \Omega$. Funktsiooni $\chi_E \colon \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\chi_E(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \omega \in E, \\ 0, & \text{kui } \omega \notin E, \end{cases} \qquad \omega \in \Omega,$$

nimetatakse *hulga E karakteristlikuks funktsiooniks.*

Definitsioon 3.2. Funktsiooni $\phi \colon \Omega \to \mathbb{K}$ nimetatakse *lihtsaks mõõtuvaks funktsiooniks,* kui ta esitub kujul

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}, \quad \text{kus } n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}.$$

Kõikide niisuguste funktsioonide $f \colon \Omega \to \mathbb{K}$ vektorruumi, mille korral leidub lihtsate mõõtuvate funktsioonide jada $(\phi_i) = (\phi_i)_{i=1}^{\infty}$ nii, et $\phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ühtlaselt, tähistatakse sümboliga $B(\mathcal{F})$.

Veendume, et $B(\mathcal{F})$ on vektorruum loomulike tehete suhtes. Olgu $f, g \in B(\mathcal{F})$, siis leiduvad lihtsate mõõtuvate funktsioonide jadad (ϕ_i) ja (ψ_i) selliselt, et $\phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ja $\psi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} g$ ühtlaselt. Iga $i \in \mathbb{N}$ korral $\phi_i + \psi_i$ on lihtne mõõtuv funktsioon. Seejuures $\phi_i + \psi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f + g$ ühtlaselt, seega $f + g \in B(\mathcal{F})$. Nüüd olgu $\lambda \in \mathbb{K}$. Iga $i \in \mathbb{N}$ korral $\lambda\phi_i$ on lihtne mõõtuv funktsioon. Seejuures $\lambda\phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \lambda f$ ühtlaselt, seega $\lambda f \in B(\mathcal{F})$.

Lause 3.1. *$B(\mathcal{F})$ on Banachi ruum järgmise normi suhtes:*

$$\|f\| := \sup_{\omega\in\Omega} \bigl|f(\omega)\bigr|, \quad f \in B(\mathcal{F}).$$

TÕESTUS. Kõigepealt tuleb näidata, et iga $f \in B(\mathcal{F})$ korral $\|f\| < \infty$. Selleks piisab veenduda, et $\sup_{\omega\in\Omega} \bigl|f(\omega)\bigr| < \infty$, s.t f on tõkestatud.

Olgu $f \in B(\mathcal{F})$. Teame, et mingi lihtsate mõõtuvate funktsioonide jada (ϕ_i) korral

$\phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ühtlaselt hulgas Ω. Seega leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$i > N \quad \Longrightarrow \quad \sup_{\omega\in\Omega}\bigl|\phi_i(\omega) - f(\omega)\bigr| < 1;$$

niisiis, kui $i > N$, siis iga $\omega \in \Omega$ korral

$$\bigl|f(\omega)\bigr| - \bigl|\phi_i(\omega)\bigr| \leqslant \bigl|\phi_i(\omega) - f(\omega)\bigr| < 1,$$

seega

$$\bigl|f(\omega)\bigr| < \bigl|\phi_i(\omega)\bigr| + 1.$$

Fikseerime $i > N$. Funktsioon ϕ_i kui lihtne funktsioon on tõkestatud, seega leidub $M \geqslant 0$ nii, et

$$\bigl|\phi_i(\omega)\bigr| \leqslant M \quad \text{iga } \omega \in \Omega \text{ korral.}$$

Seega iga $\omega \in \Omega$ korral

$$\bigl|f(\omega)\bigr| < \bigl|\phi_i(\omega)\bigr| + 1 \leqslant M + 1,$$

niisiis f on tõkestatud.

Nüüd veendume, et $\|\cdot\|$ on tõepoolest norm ruumis $B(\mathcal{F})$. Kontrollime normi aksioomide kehtivust. Olgu $f, g \in B(\mathcal{F})$ ning $\lambda \in \mathbb{K}$, siis

1° $\|f\| = \sup_{\omega\in\Omega}\bigl|f(\omega)\bigr| = 0 \ \Leftrightarrow\ \bigl|f(\omega)\bigr| = 0,\, \omega \in \Omega \ \Leftrightarrow\ f(\omega) = 0,\, \omega \in \Omega \ \Leftrightarrow\ f = 0;$

2° $\|\lambda f\| = \sup_{\omega\in\Omega}\bigl|(\lambda f)(\omega)\bigr| = \sup_{\omega\in\Omega}\bigl|\lambda\bigl(f(\omega)\bigr)\bigr| = \sup_{\omega\in\Omega}|\lambda|\,\bigl|f(\omega)\bigr| = |\lambda|\sup_{\omega\in\Omega}\bigl|f(\omega)\bigr| = |\lambda|\,\|f\|;$

3° $$\begin{aligned}\|f+g\| &= \sup_{\omega\in\Omega}\bigl|(f+g)(\omega)\bigr| = \sup_{\omega\in\Omega}\bigl|f(\omega)+g(\omega)\bigr| \leqslant \sup_{\omega\in\Omega}\bigl(|f(\omega)| + |g(\omega)|\bigr)\\ &\leqslant \sup_{\omega\in\Omega}\bigl|f(\omega)\bigr| + \sup_{\omega\in\Omega}\bigl|g(\omega)\bigr| = \|f\| + \|g\|.\end{aligned}$$

Lõpuks tuleb näidata, et ruum $B(\mathcal{F})$ on täielik.

Olgu $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ Cauchy jada ruumis $B(\mathcal{F})$. On vaja näidata, et leidub funktsioon $f \in B(\mathcal{F})$ nii, et $f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ruumis $B(\mathcal{F})$, s.t iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ nii, et

$$i > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|f_i - f\| = \sup_{\omega\in\Omega}\bigl|f_i(\omega) - f(\omega)\bigr| \leqslant \varepsilon.$$

Kuna (f_i) on Cauchy jada, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ nii, et

$$i, k > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|f_i - f_k\| = \sup_{\omega\in\Omega}\bigl|f_i(\omega) - f_k(\omega)\bigr| < \varepsilon.$$

Muuhulgas iga $\varepsilon > 0$ korral

$$i, k > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \text{iga } \omega \in \Omega \text{ korral } \big|f_i(\omega) - f_k(\omega)\big| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Siit järeldub, et iga $\omega \in \Omega$ korral $\big(f_i(\omega)\big)$ on Cauchy jada, järelikult eksisteerib piirväärtus

$$f(\omega) := \lim_{i\to\infty} f_i(\omega).$$

Näitame, et $f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ühtlaselt. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Seosest (3.1) järeldub protsessis $k \to \infty$, et

$$i > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \text{iga } \omega \in \Omega \text{ korral } \big|f_i(\omega) - f(\omega)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Seega

$$i > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sup_{\omega\in\Omega}\big|f_i(\omega) - f(\omega)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Teoreemi tõestuseks jääb nüüd näidata, et $f \in B(\mathcal{F})$, sest sel juhul $\|f_i - f\| = \sup_{\omega\in\Omega}\big|f_i(\omega) - f(\omega)\big|$, seega järelduks eelnevast, et $f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ruumis $B(\mathcal{F})$.

Veendume, et $f \in B(\mathcal{F})$, s.t leidub lihtsate mõõtuvate funktsioonide jada (ϕ_i) nii, et $\phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ühtlaselt. Kuna iga $i \in \mathbb{N}$ korral $f_i \in B(\mathcal{F})$, siis iga $i \in \mathbb{N}$ korral leidub lihtne mõõtuv funktsioon ϕ_i nii, et

$$\sup_{\omega\in\Omega}\big|\phi_i(\omega) - f_i(\omega)\big| < \frac{1}{i}.$$

Nüüd

$$\begin{aligned}\sup_{\omega\in\Omega}\big|\phi_i(\omega) - f(\omega)\big| &\leqslant \sup_{\omega\in\Omega}\Big(\big|\phi_i(\omega) - f_i(\omega)\big| + \big|f_i(\omega) - f(\omega)\big|\Big)\\ &\leqslant \sup_{\omega\in\Omega}\big|\phi_i(\omega) - f_i(\omega)\big| + \sup_{\omega\in\Omega}\big|f_i(\omega) - f(\omega)\big| < \frac{1}{i} + \|f_i - f\| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Niisiis $\phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ühtlaselt, nagu soovitud. □

Märkus 3.1. Koonduvus ruumis $B(\mathcal{F})$ on funktsioonide ühtlane koonduvus.

Tõepoolest, olgu $f, f_i \in B(\mathcal{F})$, $i \in \mathbb{N}$; siis

$$\begin{aligned} f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f \text{ ruumis } B(\mathcal{F}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \|f_i - f\| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{\omega\in\Omega}\big|f_i(\omega) - f(\omega)\big| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0\\ &\Longleftrightarrow \quad f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f \text{ ühtlaselt.}\end{aligned}$$

Märkus 3.2. Kui $\mathcal{F}$ on σ-algebra, siis $B(\mathcal{F})$ koosneb parajasti tõkestatud mõõtuvatest funktsioonidest $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$. (Funktsiooni $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ mõõtuvus tähendab, et iga Boreli hulga $E \subset \mathbb{K}$ korral $f^{-1}[E] \in \mathcal{F}$, kus $f^{-1}[E] := \{\omega \in \Omega\colon\ f(\omega) \in E\}$.)

Tõepoolest, olgu $\mathcal{F}$ σ-algebra ning olgu $f \in B(\mathcal{F})$. Siis leidub lihtsate mõõtuvate funktsioonide jada (ϕ_i) nii, et $\phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ühtlaselt. Ühtlasest koonduvusest järeldub punktiviisi koonduvus, seega ka $\phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ punktiviisi. Kuna funktsioonid ϕ_i, $i \in \mathbb{N}$, on mõõtuvad, siis ka funktsioon f on mõõtuv, sest mõõtuvate funktsioonide punktiviisi piirväärtus on mõõtuv (vt nt [F, lause 2.7 ja järeldus 2.9]).

Funktsioonide $f \in B(\mathcal{F})$ tõkestatus on näidatud lause 3.1 esimeses osas.

Teiselt poolt, kui $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ on tõkestatud mõõtuv funktsioon, siis leidub lihtsate mõõtuvate funktsioonide jada (ϕ_i) nii, et $\phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ühtlaselt (vt nt [F, teoreem 2.10]), seega $f \in B(\mathcal{F})$.

Lause 3.2. *Olgu $f \in B(\mathcal{F})$. Siis ka $|f| \in B(\mathcal{F})$, kusjuures $\big\||f|\big\| = \|f\|$.*

Tõestus. Olgu lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_i \in B(\mathcal{F})$, $i \in \mathbb{N}$, sellised, et $\phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ühtlaselt, s.t

$$\sup_{\omega\in\Omega}\big|\phi_i(\omega) - f(\omega)\big| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Siis ka $|\phi_i| \in B(\mathcal{F})$, $i \in \mathbb{N}$, on lihtsad mõõtuvad funktsioonid, kusjuures

$$\sup_{\omega\in\Omega}\big||\phi_i(\omega)| - |f(\omega)|\big| \leqslant \sup_{\omega\in\Omega}\big|f(\omega) - \phi_i(\omega)\big| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

s.t $|\phi_i| \xrightarrow[i\to\infty]{} |f|$ ühtlaselt. Seega $|f| \in B(\mathcal{F})$. Seejuures

$$\big\||f|\big\| = \sup_{\omega\in\Omega}\big||f|(\omega)\big| = \sup_{\omega\in\Omega}\big|\,|f(\omega)|\big| = \sup_{\omega\in\Omega}\big|f(\omega)\big| = \|f\|.$$

□

3.2. Vektormõõdud

Definitsioon 3.3. Öeldakse, et hulgafunktsioon $F\colon \mathcal{F} \to X$ on *lõplikult aditiivne vektormõõt* ehk lihtsalt *vektormõõt,* kui mis tahes lõikumatute hulkade $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ korral

$$F(E_1 \cup E_2) = F(E_1) + F(E_2).$$

Olgu $F\colon \mathcal{F} \to X$ vektormõõt.

Definitsioon 3.4. Hulgafunktsiooni $|F|\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$, kus $E \in \mathcal{F}$ korral

$$|F|(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n}\big\|F(A_j)\big\|\colon\ n \in \mathbb{N}, A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{j=1}^{n} A_j = E\right\},$$

nimetatakse vektormõõdu $F\colon \mathcal{F} \to X$ *variatsiooniks.*

Kui $|F|(\Omega) < \infty$, siis öeldakse, et F on *tõkestatud variatsiooniga* vektormõõt.

Märgime, et iga $x^* \in X^*$ korral $x^*F\colon \mathcal{F} \to \mathbb{K}$ on vektormõõt, sest mis tahes $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, korral

$$x^*F\,(E_1 \cup E_2) = x^*\big(F(E_1 \cup E_2)\big) = x^*\big(F(E_1) + F(E_2)\big) = x^*F\,(E_1) + x^*F\,(E_2).$$

Definitsioon 3.5. Hulgafunktsiooni $\|F\|\colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$,

$$\|F\|(E) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*F|(E), \quad E \in \mathcal{F},$$

kus $|x^*F|\colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$ on vektormõõdu $x^*F\colon \mathcal{F} \to \mathbb{K}$ variatsioon, nimetatakse vektormõõdu $F\colon \mathcal{F} \to X$ *poolvariatsiooniks.*

Kui $\|F\|(\Omega) < \infty$, siis öeldakse, et F on *tõkestatud poolvariatsiooniga* vektormõõt.

Lause 3.3. *Olgu $F\colon \mathcal{F} \to X$ vektormõõt. Siis*

(a) $F(\emptyset) = 0$*;*

(b) *variatsioon $|F|\colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$ on aditiivne, s.t*

$$E_1, E_2 \in \mathcal{F},\ E_1 \cap E_2 = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad |F|(E_1 \cup E_2) = |F|(E_1) + |F|(E_2),$$

seega $|F|$ on ka monotoonne, s.t

$$E_1, E_2 \in \mathcal{F},\ E_1 \subset E_2 \quad \Longrightarrow \quad |F|(E_1) \leqslant |F|(E_2),$$

ja subaditiivne, s.t

$$E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{F}\ (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad |F|\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} |F|(E_j);$$

(c) *poolvariatsioon $\|F\|\colon \mathcal{F} \to \mathbb{K}$ on monotoonne, s.t*

$$E_1, E_2 \in \mathcal{F},\ E_1 \subset E_2 \quad \Longrightarrow \quad \|F\|(E_1) \leqslant \|F\|(E_2),$$

ja subaditiivne, s.t

$$E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{F}\ (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \|F\|\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|F\|(E_j);$$

(d) *iga $E \in \mathcal{F}$ korral $\|F\|(E) \leqslant |F|(E)$.*

TÕESTUS. (a). Kuna $F(\emptyset) = F(\emptyset \cup \emptyset) = F(\emptyset) + F(\emptyset) = 2F(\emptyset)$, siis $F(\emptyset) = 0$.

(b). Näitame, et variatsioon on aditiivne. Olgu $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Kui $n, m \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{F}$ on sellised, et $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = E_1$ ja $\bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i = E_2$, siis $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j\right) \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i\right) = E_1 \cup E_2$, seega

$$\sum_{j=1}^{n} \|F(A_j)\| + \sum_{i=1}^{m} \|F(B_i)\| \leqslant |F|(E_1 \cup E_2).$$

Võttes võrratuse vasakul poolel olevates summades supreemumi vastavalt üle $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatute $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = E_1$, ning $m \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatute $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{F}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i = E_2$, saame

$$|F|(E_1) + |F|(E_2) \leqslant |F|(E_1 \cup E_2).$$

Teiselt poolt, kui $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ on sellised, et $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = E_1 \cup E_2$, siis $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \cap E_1 = E_1$ ja $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \cap E_2 = E_2$, seega

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \|F(A_j)\| &= \sum_{j=1}^{n} \big\|F\big((A_j \cap E_1) \cup (A_j \cap E_2)\big)\big\| = \sum_{j=1}^{n} \|F(A_j \cap E_1) + F(A_j \cap E_2)\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big(\|F(A_j \cap E_1)\| + \|F(A_j \cap E_2)\|\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \|F(A_j \cap E_1)\| + \sum_{j=1}^{n} \|F(A_j \cap E_2)\| \leqslant |F|(E_1) + |F|(E_2).
\end{aligned}$$

Võttes võrratusteahela vasakul poolel supreemumi üle $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatute hulkade $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = E_1 \cup E_2$, saame

$$|F|(E_1 \cup E_2) \leqslant |F|(E_1) + |F|(E_2).$$

Kuna iga aditiivne hulgafunktsioon $\mathcal{F} \to [0, \infty]$ on monotoonne ja subaditiivne, siis on seda ka variatsioon $|F|$.

(c). Näitame, et poolvariatsioon on monotoonne. Olgu $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, $E_1 \subset E_2$. Siis variatsiooni monotoonsuse tõttu iga $x^* \in B_{X^*}$ korral $|x^*F|(E_1) \leqslant |x^*F|(E_2)$, seega

$$\|F\|(E_1) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*F|(E_1) \leqslant \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*F|(E_2) = \|F\|(E_2).$$

Nüüd veendume, et poolvariatsioon on subaditiivne. Olgu $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$. Siis variatsiooni subaditiivsuse tõttu

$$\|F\| \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j \right) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^* F| \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j \right) \leqslant \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} |x^* F|(E_j)$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^* F|(E_j) = \sum_{j=1}^{n} \|F\|(E_j).$$

(d). Olgu $E \in \mathcal{F}$. Siis

$$\begin{aligned}
&\|F\|(E) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^* F|(E) \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |x^* F(A_j)| \colon n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{j=1}^{n} A_j = E \right\} \\
&\leqslant \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} \|x^*\| \|F(A_j)\| \colon n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{j=1}^{n} A_j = E \right\} \\
&= \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} \|F(A_j)\| \colon n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{j=1}^{n} A_j = E \right\} \\
&= |F|(E).
\end{aligned}$$

□

Lause 3.4. *Olgu $F \colon \mathcal{F} \to X$ vektormõõt. Mis tahes hulga $E \in \mathcal{F}$ korral*

(a) $$\|F\|(E) = \sup \Bigg\{ \Big\| \sum_{j=1}^{n} \theta_j F(A_j) \Big\| \colon n \in \mathbb{N}, \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{K}, |\theta_1|, \dots, |\theta_n| \leqslant 1, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{j=1}^{n} A_j = E \Bigg\};$$

(b) $$\sup_{E \supset D \in \mathcal{F}} \big\| F(D) \big\| \leqslant \|F\|(E) \leqslant 4 \sup_{E \supset D \in \mathcal{F}} \big\| F(D) \big\|.$$

Märkus 3.3. Lause 3.4 väitest (b) järeldub muuhulgas, et vektormõõt on tõkestatud poolvariatsiooniga parajasti siis, kui ta on tõkestatud, s.t tema väärtuste hulk on tõkestatud. Seetõttu nimetame edaspidi tõkestatud poolvariatsiooniga vektormõõtusid ka *tõkestatud vektormõõtudeks.*

Märkus 3.4. Lause 3.4 tõestusest näeme, et kui X on reaalne Banachi ruum, siis väite (b) teine võrratus jääb kehtima, kui temas kordaja 4 asendada kordajaga 2.

Lause 3.4 tõestus. (a). Olgu $E \in \mathcal{F}$. Tähistame võrduse (a) paremal poolel oleva supreemumi sümboliga γ. Peame näitama, et $\|F\|(E) = \gamma$.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja olgu $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ paarikaupa lõikumatud hulgad, mille korral $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = E$.

Kui $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{K}$, $|\theta_1|, \ldots, |\theta_n| \leqslant 1$, siis

$$\Bigl\| \sum_{j=1}^{n} \theta_j F(A_j) \Bigr\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \Bigl| x^* \sum_{j=1}^{n} \theta_j F(A_j) \Bigr| \leqslant \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} \bigl| \theta_j x^* F(A_j) \bigr|$$
$$\leqslant \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{n} \bigl| x^* F(A_j) \bigr| \leqslant \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^* F|(E) = \|F\|(E),$$

seega, võttes võrratusteahela vasakul poolele supreemumi üle $n \in \mathbb{N}$, $\theta_1, \ldots, \theta_n \in B_{\mathbb{K}}$ ja paarikaupa lõikumatute $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = E$, saame, et $\gamma \leqslant \|F\|(E)$.

Teiselt poolt, kui $x^* \in B_{X^*}$, siis, tähistades $\theta_j := \dfrac{1}{\operatorname{sign} x^* F(A_j)}$, kehtib $|\theta_j| \leqslant 1$, $j = 1, \ldots, n$; seejuures

$$\sum_{j=1}^{n} \bigl| x^* F(A_j) \bigr| = \sum_{j=1}^{n} \theta_j x^* F(A_j) = \Bigl| x^* \sum_{j=1}^{n} \theta_j F(A_j) \Bigr| \leqslant \Bigl\| \sum_{j=1}^{n} \theta_j F(A_j) \Bigr\| \leqslant \gamma.$$

Võttes võrratusteahela vasakul poolel supreemumi üle $x^* \in B_{X^*}$, $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatute hulkade $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = E$, saame, et $\|F\|(E) \leqslant \gamma$.

(b). Paneme tähele, et kui $E \supset D \in \mathcal{F}$, siis

$$\bigl\| F(D) \bigr\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \bigl| x^* F(D) \bigr| \leqslant \sup_{x^* \in B_{X^*}} \Bigl(\bigl| x^* F(D) \bigr| + \bigl| x^* F(E \setminus D) \bigr| \Bigr)$$
$$\leqslant \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^* F|(E) = \|F\|(E),$$

seega ka $\sup\limits_{E \supset D \in \mathcal{F}} \bigl\| F(D) \bigr\| \leqslant \|F\|(E)$.

Teiselt poolt, kui $x^* \in B_{X^*}$, $n \in \mathbb{N}$ ning paarikaupa lõikumatud $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, sellised, et $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = E$, siis, juhul, kui X on Banachi ruum üle $\mathbb{R}$, tähistades

$$\pi^+ = \Bigl\{ j \in \{1, \ldots, n\} \colon \ x^* F(A_j) \geqslant 0 \Bigr\}$$

ja

$$\pi^- = \Bigl\{ j \in \{1, \ldots, n\} \colon \ x^* F(A_j) < 0 \Bigr\},$$

saame, et

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\big|x^*F(A_j)\big| &= \sum_{j\in\pi^+} x^*F(A_j) - \sum_{j\in\pi^-} x^*F(A_j) = x^*\sum_{j\in\pi^+} F(A_j) - x^*\sum_{j\in\pi^-} F(A_j)\\ &= \left|x^*\sum_{j\in\pi^+} F(A_j)\right| + \left|x^*\sum_{j\in\pi^-} F(A_j)\right| \leqslant \left\|\sum_{j\in\pi^+} F(A_j)\right\| + \left\|\sum_{j\in\pi^-} F(A_j)\right\|\\ &= \left\|F\Big(\bigcup_{j\in\pi^+} A_j\Big)\right\| + \left\|F\Big(\bigcup_{j\in\pi^-} A_j\Big)\right\| \leqslant 2\sup_{E\supset D\in\mathcal{F}}\big\|F(D)\big\|,\end{aligned}$$

järelikult, juhul kui X on Banachi ruum üle $\mathbb{C}$, siis lause 1.10 ja järelduse 1.11 põhjal

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\big|x^*F(A_j)\big| &= \sum_{j=1}^{n}\sqrt{\big|\operatorname{Re} x^*F(A_j)\big|^2 + \big|\operatorname{Im} x^*F(A_j)\big|^2}\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n}\big|\operatorname{Re} x^*F(A_j)\big| + \sum_{j=1}^{n}\big|\operatorname{Im} x^*F(A_j)\big| \leqslant 2\cdot 2\sup_{E\supset D\in\mathcal{F}}\big\|F(D)\big\|.\end{aligned}$$

Võttes viimase kahe võrratusteahela vasakul poolel supreemumi üle $x^*\in B_{X^*}$, $n\in\mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatute hulkade $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{F}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = E$, saame reaalse ruumi X juhul

$$\|F\|(E)\leqslant 2\sup_{E\supset D\in\mathcal{F}}\big\|F(D)\big\|.$$

ning kompleksse ruumi X juhul

$$\|F\|(E)\leqslant 4\sup_{E\supset D\in\mathcal{F}}\big\|F(D)\big\|.$$

□

Järgnev lause ütleb, et arvväärtustega vektormõõdu variatsioon ja poolvariatsioon on üks ja sama hulgafunktsioon; seejuures mittenegatiivsete reaalsete väärtustega vektormõõdu variatsioon (ja seega ka poolvariatsioon) on tema ise.

Lause 3.5. *Olgu $F\colon \mathcal{F}\to\mathbb{K}$ vektormõõt. Siis*

(a) $|F| = \|F\|$ *(s.t $|F|(E) = \|F\|(E)$ iga $E\in\mathcal{F}$ korral);*

(b) *kui $F(E)\in[0,\infty)$ iga $E\in\mathcal{F}$ korral, s.t F väärtused on reaalarvulised ja mittenegatiivsed, siis $|F| = \|F\| = F$.*

TÕESTUS. (a). Olgu $E\in\mathcal{F}$. Lause 3.3, (d), põhjal $|F|(E)\geqslant\|F\|(E)$. Jääb näidata, et $|F|(E)\leqslant\|F\|(E)$.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu paarikaupa lõikumatud hulgad $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ sellised, et $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = E$. Tähistades $\theta_j := \dfrac{1}{\operatorname{sign} F(A_j)}$, kehtib $|\theta_j| \leqslant 1$, $j = 1, \ldots, n$, seega lause 3.4 põhjal

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \big\| F(A_j) \big\| &= \sum_{j=1}^{n} \big| F(A_j) \big| = \sum_{j=1}^{n} \theta_j F(A_j) = \left| \sum_{j=1}^{n} \theta_j F(A_j) \right| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \theta_j F(A_j) \right\| \\ &\leqslant \|F\|(E).\end{aligned}$$

Võttes võrratusteahela vasakul poolel supreemumi üle $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatute hulkade $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = E$, saame soovitud võrratuse.

(b). Olgu F väärtused reaalarvulised ja mittenegatiivsed ning olgu $E \in \mathcal{F}$. Mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatute hulkade $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = E$, korral

$$\sum_{j=1}^{n} \big\| F(A_j) \big\| = \sum_{j=1}^{n} \big| F(A_j) \big| = \sum_{j=1}^{n} F(A_j) = F\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) = F(E);$$

järelikult $|F|(E) = F(E)$; niisiis $|F| = \|F\| = F$. $\square$

3.3. Pidevad lineaarsed operaatorid Banachi ruumil $B(\mathcal{F})$

Tähistame ruumi $B(\mathcal{F})$ lihtsate mõõtuvate funktsioonide alamruumi sümboliga $S(\mathcal{F})$.

Defineerime integraali $\int f\,dF$ funktsioonist $f \in B(\mathcal{F})$ tõkestatud vektormõõdu $F\colon \mathcal{F} \to X$ järgi.

Esmalt vaatleme juhtu, kus $f \in S(\mathcal{F})$, s.t f on lihtne mõõtuv funktsioon. Siis f on esitatav kujul

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}, \tag{3.2}$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. (Lihtsa mõõtuva funktsiooni f niisugust esitust nimetatakse tema *kanooniliseks esituseks.*) Defineerime

$$\int f\,dF := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(A_j).$$

Funktsiooni f kanooniline esitus ei ole mitte kunagi ühene. Märgime, et integraali $\int f\,dF$ definitsioon on korrektne, s.t ta ei sõltu funktsiooni f kanoonilisest esitusest. Tõepoolest, kui $f = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{B_i}$ on samuti funktsiooni f kanooniline esitus, siis, tähistades

$$A_0 = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j \text{ ja } B_0 = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B_i,$$

$$A_j = A_j \cap \Omega = A_j \cap \bigcup_{i=0}^{m} B_i = \bigcup_{i=0}^{m} A_j \cap B_i \quad \text{iga } j \in \{0, 1, \ldots, n \text{ korral}\} \tag{3.3}$$

ja

$$B_i = B_i \cap \Omega = B_i \cap \bigcup_{j=0}^{n} A_j = \bigcup_{j=0}^{n} B_i \cap A_j \quad \text{iga } i \in \{0, 1, \ldots, m\} \text{ korral.} \tag{3.4}$$

Tähistame $\alpha_0 = 0$ ja $\beta_0 = 0$. Olgu $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ja $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Kui $A_j \cap B_i \neq \emptyset$, siis mis tahes $\omega \in A_j \cap B_i$ korral $\alpha_j = f(\omega) = \beta_i$; kui aga $A_j \cap B_i = \emptyset$, siis $F(A_j \cap B_i) = 0$. Järelikult

$$\alpha_j F(A_j \cap B_i) = \beta_i F(A_j \cap B_i) \quad \text{kõikide } j \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ ja } i \in \{0, 1, \ldots, m\} \text{ korral.}$$

Seega

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \beta_i F(B_i) &= \sum_{i=0}^{m} \beta_i F(B_i) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i F\Big(\bigcup_{j=0}^{n} B_i \cap A_j\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \beta_i \sum_{j=0}^{n} F(B_i \cap A_j) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \beta_i F(B_i \cap A_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \alpha_j F(A_j \cap B_i) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \sum_{i=0}^{m} F(A_j \cap B_i) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j F\Big(\bigcup_{i=0}^{m} A_j \cap B_i\Big) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j F(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(A_j).
\end{aligned}$$

Niisiis, funktsiooni $f \in S(\mathcal{F})$ integraali definitsioon ei sõltu tema kanoonilisest esitusest.

Olgu $F\colon \mathcal{F} \to X$ tõkestatud vektormõõt. Defineerime operaatori $T_F\colon\ S(\mathcal{F}) \to X$ võrdusega

$$T_F f := \int f \, dF, \quad f \in S(\mathcal{F}).$$

Lause 3.6. *$T_F \in \mathcal{L}\big(S(\mathcal{F}), X\big)$, kusjuures $\|T_F\| = \|F\|(\Omega)$.*

Tõestus. Veendume, et operaator T_F on lineaarne. Olgu $f, g \in S(\mathcal{F})$ ning olgu

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} \quad \text{ja} \quad g = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{B_i}$$

funktsioonide f ja g kanoonilised esitused. Tähistame $A_0 = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, $B_0 = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ ja $\alpha_0 := \beta_0 := 0$; siis ka

$$f = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} \quad \text{ja} \quad g = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \chi_{B_i}$$

on funktsioonide f ja g kanoonilised esitused; seejuures kehtivad (3.3) ja (3.4); järelikult

$$\begin{aligned}
f + g &= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} + \sum_{i=0}^{m} \beta_i \chi_{B_i} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \chi_{\bigcup\limits_{i=0}^{m} A_j \cap B_i} + \sum_{i=0}^{m} \beta_i \chi_{\bigcup\limits_{j=0}^{n} B_i \cap A_j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \sum_{i=0}^{m} \chi_{A_j \cap B_i} + \sum_{i=0}^{m} \beta_i \sum_{j=0}^{n} \chi_{B_i \cap A_j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \alpha_j \chi_{A_j \cap B_i} + \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \beta_i \chi_{A_j \cap B_i} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} (\alpha_j + \beta_i) \chi_{A_j \cap B_i}
\end{aligned}$$

on funktsiooni $f + g$ kanooniline esitus. Seega

$$\begin{aligned}
T_F(f + g) &= \int (f + g)\, dF = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} (\alpha_j + \beta_i) F(A_j \cap B_i) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \alpha_j F(A_j \cap B_i) + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \beta_i F(A_j \cap B_i) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \sum_{i=0}^{m} F(A_j \cap B_i) + \sum_{i=0}^{m} \beta_i \sum_{j=0}^{n} F(A_j \cap B_i) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j F\Big(\bigcup_{i=0}^{m} A_j \cap B_i\Big) + \sum_{i=0}^{m} \beta_i F\Big(\bigcup_{j=0}^{n} B_i \cap A_j\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j F(A_j) + \sum_{i=0}^{m} \beta_i F(B_i) = \int f\, dF + \int g\, dF \\
&= T_F f + T_F g,
\end{aligned}$$

järelikult T_F on aditiivne. Nüüd olgu $\lambda \in \mathbb{K}$. Siis

$$T_F(\lambda f) = \int (\lambda f)\, dF = \sum_{j=1}^{n} \lambda \alpha_j F(A_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(A_j) = \lambda \int f\, dF = \lambda\, T_F f,$$

järelikult T_F on homogeenne; niisiis T_F on lineaarne.

Kui $f \neq 0$, siis, lause 3.4, (a), põhjal

$$\|T_F f\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(A_j) \right\| = \|f\| \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\|f\|} F(A_j) \right\| \leqslant \|F\|(\Omega)\, \|f\|.$$

Seega T_F on tõkestatud, järelikult $T_F \in \mathcal{L}\big(S(\mathcal{F}), X\big)$; seejuures $\|T_F\| \leqslant \|F\|(\Omega)$.

Jääb näidata, et $\|T_F\| \geqslant \|F\|(\Omega)$. Selleks piisab veenduda, et kui $x^* \in B_{X^*}$, siis

$$\|T_F\| \geqslant |x^*F|(\Omega). \tag{3.5}$$

Olgu $x^* \in B_{X^*}$ ning olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$. Võrratuse (3.5) kehtivuseks piisab näidata, et

$$\|T_F\| \geqslant \sum_{j=1}^{n} \big|x^*F(A_j)\big|.$$

Tähistame $\theta_j := \dfrac{1}{\operatorname{sign} x^*F(A_j)}$, $j = 1, \ldots, n$, ja $\phi := \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_j \chi_{A_j}$; siis

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \big|x^*F(A_j)\big| &= \sum_{j=1}^{n} \theta_j x^*F(A_j) = x^* \sum_{j=1}^{n} \theta_j F(A_j) = x^* \left(\int \left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j \chi_{A_j} \right) dF \right) \\
&= x^* T_F \left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j \chi_{A_j} \right) = x^*(T_F \phi) \leqslant \|x^*\| \, \|T_F \phi\| \leqslant \|T_F \phi\| \leqslant \|T_F\| \, \|\phi\| \\
&\leqslant \|T_F\|.
\end{aligned}$$

□

Kuna alamruum $S(\mathcal{F})$ on ruumis $B(\mathcal{F})$ kõikjal tihe, siis teoreemi 1.7 põhjal leidub operaatoril $T_F \colon S(\mathcal{F}) \to X$ parajasti üks pidev jätk ruumile $B(\mathcal{F})$; seejuures see jätk on lineaarne ja tema norm on $\|T_F\| = \|F\|(\Omega)$. Tähistades ka selle jätku $B(\mathcal{F}) \to X$ sümboliga T_F, defineerime integraali funktsioonist $f \in B(\mathcal{F})$ vektormõõdu F järgi võrdusega

$$\int f \, dF := T_F f.$$

Järgmine teoreem kirjeldab üksühest vastavust pidevate lineaarsete operaatorite $B(\mathcal{F}) \to X$ ja tõkestatud vektormõõtude $\mathcal{F} \to X$ vahel.

Teoreem 3.7. *Kui $F \colon \mathcal{F} \to X$ on tõkestatud vektormõõt, siis*

$$T_F \colon B(\mathcal{F}) \ni f \longmapsto \int f \, dF \in X$$

on pidev lineaarne operaator, s.t $T_F \in \mathcal{L}\big(B(\mathcal{F}), X\big)$, kusjuures $\|T_F\| = \|F\|(\Omega)$.

Teiselt poolt, kui $T \in \mathcal{L}\big(B(\mathcal{F}), X\big)$, siis leidub parajasti üks tõkestatud vektormõõt $F \colon \mathcal{F} \to X$ nii, et $T = T_F$.

Tõestus. Kui $F\colon \mathcal{F} \to X$ on tõkestatud vektormõõt, siis integraali $\int f\,dF$ ja operaatori T_F definitsioonide põhjal $T_F \in \mathcal{L}\big(B(\mathcal{F}), X\big)$, kusjuures teoreemi 1.7 ja lause 3.6 põhjal

$$\|T_F\| = \|T_F|_{S(\mathcal{F})}\| = \|F\|(\Omega).$$

Nüüd olgu $T \in \mathcal{L}\big(B(\mathcal{F}), X\big)$. Kui tõkestatud vektormõõt $F\colon \mathcal{F} \to X$ oleks selline, et $T = T_F$, siis muuhulgas iga $E \in \mathcal{F}$ korral

$$T\chi_E = T_F\chi_E = \int \chi_E\,dF = F(E).$$

Siit järeldub, et operaatorit T esitavaid vektormõõtusid saab olla ülimalt üks.

Defineerimegi hulgafunktsiooni $F\colon \mathcal{F} \to X$ võrdusega $F(E) = T\chi_E$. Näitame, et F on tõkestatud vektormõõt, kusjuures $T = T_F$. Kui $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ on lõikumatud hulgad, siis

$$F(E_1 \cup E_2) = T\chi_{E_1\cup E_2} = T(\chi_{E_1} + \chi_{E_2}) = T\chi_{E_1} + T\chi_{E_2} = F(E_1) + F(E_2),$$

seega F on vektormõõt. Vektormõõt F on tõkestatud, sest mis tahes $E \in \mathcal{F}$ korral

$$\big\|F(E)\big\| = \|T\chi_E\| \leqslant \|T\|\,\|\chi_E\| \leqslant \|T\|.$$

Võrduse $T = T_F$ näitamiseks piisab veenduda, et

$$T\phi = T_F\phi \quad \text{iga } \phi \in S(\mathcal{F}) \text{ korral,}$$

sest alamruum $S(\mathcal{F})$ on kõikjal tihe ruumis $B(\mathcal{F})$. Olgu $\phi = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j\chi_{A_j} \in S(\mathcal{F})$, kus $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$; siis T lineaarsuse tõttu ja vektormõõdu F definitsiooni põhjal

$$T\phi = T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\chi_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T\chi_{A_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(A_j) = \int \phi\,dF = T_F\phi.$$

□

3.4. Absoluutselt summeerivad operaatorid Banachi ruumil $B(\mathcal{F})$

Eelmisest punktist teame, et pidevad lineaarsed operaatorid $B(\mathcal{F}) \to X$ ja tõkestatud vektormõõdud $\mathcal{F} \to X$ on üksüheses vastavuses. Ülaltoodu valguses kerkib loomulik küsimus: milliste omadustega vektormõõdud $F_T\colon \mathcal{F} \to X$ vastavad absoluutselt summeerivatele operaatoritele $T\colon B(\mathcal{F}) \to X$? Sellele küsimusele vastab järgmine teoreem.

Teoreem 3.8. *Operaator $T \in \mathcal{L}\big(B(\mathcal{F}), X\big)$ on absoluutselt summeeriv parajasti siis, kui teda esitav vektormõõt F_T on tõkestatud variatsiooniga. Seejuures $\pi(T) := \pi_{1,1}(T) = |F_T|(\Omega)$.*

Teoreemi 3.8 tõestuse lihtsustamiseks tõestame kõigepealt

Lause 3.9. *Olgu $F\colon \mathcal{F} \to X$ tõkestatud variatsiooniga vektormõõt ning olgu $f \in B(\mathcal{F})$. Siis*

$$\left\| \int f\, dF \right\| \overset{(1)}{\leqslant} \int |f|\, d|F| \overset{(2)}{\leqslant} \|f\|\, |F|(\Omega).$$

Tõestus. Lause 3.2 põhjal $|f| \in B(\mathcal{F})$, kusjuures $\big\| |f| \big\| = \|f\|$. Kuna F on tõkestatud variatsiooniga, siis $|F|\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ on tõkestatud vektormõõt, seega eksisteerib $\mathbb{R}$-väärtustega integraal $\int |f|\, d|F| = T_{|F|}|f|$ (vt teoreemi 3.7). Seejuures

$$\int |f|\, d|F| = T_{|F|}|f| \leqslant \big\|T_{|F|}\big\|\, \big\||f|\big\| = \big\||F|\big\|(\Omega)\, \big\||f|\big\| = |F|(\Omega)\, \|f\|,$$

sest lause 3.5 põhjal $\big\||F|\big\|(\Omega) = |F|(\Omega)$; niisiis võrratus (2) kehtib.

Jääb tõestada võrratus (1). Olgu lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_i \in B(\mathcal{F})$, $i \in \mathbb{N}$, sellised, et $\phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ühtlaselt. Siis ka $|\phi_i| \xrightarrow[i\to\infty]{} |f|$ ühtlaselt, seega $\phi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ ja $|\phi_i| \xrightarrow[i\to\infty]{} |f|$ ruumis $B(\mathcal{F})$, järelikult

$$\left\| \int f\, dF \right\| = \|T_F f\| = \left\| \lim_{i\to\infty} T_F \phi_i \right\| = \lim_{i\to\infty} \|T_F \phi_i\| = \lim_{i\to\infty} \left\| \int \phi_i\, dF \right\|$$

ja

$$\int |f|\, d|F| = T_{|F|}|f| = \lim_{i\to\infty} T_{|F|}|\phi_i| = \lim_{i\to\infty} \int |\phi_i|\, d|F|.$$

Võrratuse (1) tõestuseks piisab seega näidata, et iga lihtsa mõõtuva funktsiooni $\phi \in B(\mathcal{F})$ korral $\left\|\int \phi\, dF\right\| \leqslant \int |\phi|\, d|F|$. Olgu $\phi \in B(\mathcal{F})$ lihtne mõõtuv funktsioon ning olgu $\phi = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$ funktsiooni ϕ kanooniline esitus. Siis $|\phi| = \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_j| \chi_{A_j}$ on funktsiooni $|\phi|$ kanooniline esitus, seega

$$\left\| \int \phi\, dF \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(A_j) \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\, \big\|F(A_j)\big\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\, |F|(A_j) = \int |\phi|\, d|F|.$$

$\square$

Teoreemi 3.8 tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu $T \in \mathcal{L}\big(B(\mathcal{F}), X\big)$ absoluutselt summeeriv operaator; siis teoreemi 2.8 põhjal mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja $f_1, \dots, f_n \in B(\mathcal{F})$ korral

$$\sum_{j=1}^{n} \|Tf_j\| \leqslant \pi(T) \sup_{f^* \in B_{B(\mathcal{F})^*}} \sum_{j=1}^{n} \bigl|f^*(f_j)\bigr|. \tag{3.6}$$

Näitame, et operaatorit T esitav vektormõõt $F_T \colon \mathcal{F} \to X$ on tõkestatud variatsiooniga, kusjuures $|F_T|(\Omega) \leqslant \pi(T)$.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu paarikaupa lõikumatud hulgad $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ sellised, et $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = \Omega$. Väite tõestuseks piisab näidata, et

$$\sum_{j=1}^{n} \bigl\|F_T(A_j)\bigr\| \leqslant \pi(T), \tag{3.7}$$

sest sel juhul, võttes võrratuse (3.7) vasakul poolel supreemumi üle $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatute hulkade $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = \Omega$, saame $|F_T|(\Omega) \leqslant \pi(T)$.

Kuna iga $A \in \mathcal{F}$ korral $F_T(A) = T\chi_A$, siis (3.6) põhjal

$$\sum_{j=1}^{n} \bigl\|F_T(A_j)\bigr\| = \sum_{j=1}^{n} \bigl\|T\chi_{A_j}\bigr\| \leqslant \pi(T) \sup_{f^* \in B_{B(\mathcal{F})^*}} \sum_{j=1}^{n} \bigl|f^*(\chi_{A_j})\bigr|.$$

Olgu $f^* \in B_{B(\mathcal{F})^*}$. Võrratuse (3.7) tõestuseks piisab näidata, et

$$\sum_{j=1}^{n} \bigl|f^*(\chi_{A_j})\bigr| \leqslant 1.$$

Tähistame $\theta_j = \dfrac{1}{\operatorname{sign} f^*(\chi_{A_j})}$, $j = 1, \dots, n$, siis

$$\sum_{j=1}^{n} \bigl|f^*(\chi_{A_j})\bigr| = \sum_{j=1}^{n} \theta_j f^*(\chi_{A_j}) = f^* \sum_{j=1}^{n} \theta_j \chi_{A_j} \leqslant \|f^*\| \left\| \sum_{j=1}^{n} \theta_j \chi_{A_j} \right\| \leqslant 1.$$

Piisavus. Olgu operaatorit $T \in \mathcal{L}\bigl(B(\mathcal{F}), X\bigr)$ esitav vektormõõt F_T tõkestatud variatsiooniga. Veendumaks, et operaator T on absoluutselt summeeriv, kusjuures $\pi(T) \leqslant |F_T|(\Omega)$, piisab teoreemi 2.8 põhjal näidata, et mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja $f_1, \dots, f_n \in B(\mathcal{F})$ korral

$$\sum_{j=1}^{n} \|Tf_j\| \leqslant |F_T|(\Omega) \sup_{f^* \in B_{B(\mathcal{F})^*}} \sum_{j=1}^{n} \bigl|f^*(f_j)\bigr|. \tag{3.8}$$

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $f_1, \dots, f_n \in B(\mathcal{F})$. Lause 3.9 põhjal

$$\sum_{j=1}^{n} \|Tf_j\| = \sum_{j=1}^{n} \left\| \int f_j \, dF_T \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \int |f_j| \, d|F_T| = \int \sum_{j=1}^{n} |f_j| \, d|F_T| \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{n} |f_j| \right\| |F_T|(\Omega).$$

Kuna, tähistades kõikide $\omega \in \Omega$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$ korral $\theta_j^\omega = \dfrac{1}{\operatorname{sign} f_j(\omega)}$,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{n} |f_j| \right\| &= \sup_{\omega \in \Omega} \left| \sum_{j=1}^{n} \big| f_j(\omega) \big| \right| = \sup_{\omega \in \Omega} \left| \sum_{j=1}^{n} \theta_j^\omega f_j(\omega) \right| = \sup_{\omega \in \Omega} \left\| \sum_{j=1}^{n} \theta_j^\omega f_j \right\| \\
&= \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{f^* \in B_{B(\mathcal{F})^*}} \left| f^* \sum_{j=1}^{n} \theta_j^\omega f_j \right| = \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{f^* \in B_{B(\mathcal{F})^*}} \left| \sum_{j=1}^{n} \theta_j^\omega f^*(f_j) \right| \\
&\leqslant \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{f^* \in B_{B(\mathcal{F})^*}} \sum_{j=1}^{n} |\theta_j^\omega| \, |f^*(f_j)| = \sup_{f^* \in B_{B(\mathcal{F})^*}} \sum_{j=1}^{n} \big| f^*(f_j) \big|,
\end{aligned}$$

siis (3.8) kehtib. $\square$

Absolutely Summing Operators on the Space $\mathcal{B}(\mathcal{F})$

Bachelor's Thesis

Jekaterina Izotova

Summary

Let X be a Banach space and let $p \in [1, \infty)$. A sequence $(x_j) = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ in X is said to be *strongly p-summable* if $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty$. The sequence (x_j) is said to be *weakly p-summable* if $\sum_{j=1}^{\infty} \bigl|x^*(x_j)\bigr|^p < \infty$ for all $x^* \in X^*$.

Let Y be a Banach space (over the same scalar field as X) and let $q \in [1, \infty)$. A continuous linear operator $T\colon X \to Y$ is said to be *(q,p)-summing* if, for every weakly p-summable sequence (x_j) in X, the sequence (Tx_j) in Y is strongly q-summable, i.e., T maps weakly p-summable sequences in X into strongly q-summable sequences in Y. In particular, (p,p)-summing operators are also called *p-summing* operators and $(1,1)$-summing operators (i.e., 1-summing operators) are called *absolutely summing* operators. It turns out that T is absolutely summing if and only if it maps unconditionally convergent series in X into absolutely convergent series in Y. In literature, (q,p)-summing and p-summing operators are often called, respectively, *(q,p)-absolutely summing* (or *absolutely (q,p)-summing*) and *p-absolutely summing* (or *absolutely p-summing*) operators.

Absolutely summing operators began to emerge in literature in the 1950s. In 1950, A. Dvoretzky and C. A. Rogers proved that every infinite dimensional Banach space contains an unconditionally convergent series which is not absolutely convergent. In other words, this result (known as the Dvoretzki–Rogers theorem) says that the identity operator of an infinite dimensional Banach space is never absolutely summing. A. Grothendieck's *Résumé* (1953/1956) contains a result asserting implicitly that every continuous linear operator $\ell_1 \to \ell_2$ is absolutely summing. The concepts of p-summing and (q,p)-summing operators were introduced, respectively by A. Pietsch, and B. Mitiagin and A. Pełczyński in the 1960s.

The objective of this thesis is to give a detailed exposition of the elementary theory of (q,p)-summing operators on one hand, and vector measures on the other hand. These two topics meet in the description of absolutely summing operators acting from the space $B(\mathcal{F})$: continuous linear operators from $B(\mathcal{F})$ are integrals with respect to bounded vector measures, absolutely summing operators from $B(\mathcal{F})$ are integrals with respect to vector measures of bounded variation.

The thesis consists of three sections.

Section 1 presents the prerequisites for understanding the Banach space techniques applied in the thesis: Minkowski's inequality, the criterion of completeness of a normed space in terms of convergence of absolutely convergent series, Baire's theorem, Zabreĭko's lemma, and the closed graph theorem, basic facts about extension of operators including the Hahn–Banach theorem and its corollary on the existence of "sufficiently many" functionals, and the relationship between a complex-linear functional and its real and imaginary parts.

In Section 2, the Banach spaces $\ell_p(X)$, $\ell_p^w(X)$, and $\Pi_{q,p}(X,Y)$ of, respectively, strongly p-summable and weakly p-summable sequences in X, and (q,p)-summing operators $X \to Y$ are introduced. The section concludes by proving that a bounded linear operator is absolutely summing if and only if it maps unconditionally convergent series into absolutely convergent series.

Section 3 starts by introducing the Banach space $B(\mathcal{F})$ (here $\mathcal{F}$ is an algebra of subsets of a non-empty set). Next, the concepts of a vector measure and its variation and semivariation are defined, and vector measures of bounded semivariation are characterized as bounded vector measures. Then, the integral $\int f\,dF$ of a function $f \in B(\mathcal{F})$ with respect to a bounded vector measure $F\colon \mathcal{F} \to X$ is introduced, and the one-to-one correspondence between continuous linear operators $B(\mathcal{F}) \to X$ and bounded vector measures $\mathcal{F} \to X$ is established: on one hand, for every bounded vector measure $F\colon \mathcal{F} \to X$, the operator $T_F\colon B(\mathcal{F}) \ni f \mapsto \int f\,dF \in X$ is continuous and linear; on the other hand, for every continuous linear operator $T\colon B(\mathcal{F}) \to X$, there is a unique bounded vector measure $F\colon \mathcal{F} \to X$ such that $T = T_F$; in particular, the norm $\|T\|$ is equal to the semivariation $\|F\|(\Omega)$. The thesis concludes by showing that, in this correspondence, absolutely summing operators correspond to vector measures of bounded variation; in particular, the norm $\pi(T)$ of an absolutely summing operator $T\colon B(\mathcal{F}) \to X$ in the space $\Pi\big(B(\mathcal{F}), X\big)$ of absolutely summing operators is the total variation $|F|(\Omega)$ of its representing vector measure F.

Kirjandus

[DJT] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Vector Measures,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[DU] J. Diestel, J. J. Uhl, jr., *Vector Measures,* Math. Surveys, vol. 15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.

[DR] A. Dvoretzky, C. A. Rogers, *Absolute and Unconditional Convergence in Normed Linear Spaces,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 192–197.

[F] G. B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications,* Second Edition, Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, New York, 1999.

[G] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques,* Bol. Soc. Mat. Saõ Paulo **8** (1953), 1–79.

[M] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory,* Graduate Texts in Mathematics, 183, Springer, New York, 1998.

[MP] B. S. Mitiagin, A. Pełczyński, *Nuclear operators and approximative dimension,* Proc. Internat. Congr. Math. (Moscow, 1966), 366-372, Mir, Moscow, 1968.

[OO] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs,* Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[P] A. Pietsch, *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen,* Studia Math. **28** (1966/67), 333–353.

[W] D. Werner, *Funktionalanalysis,* 6. Aufl., Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2007.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina _______Jekaterina Izotova_____________________________________

(*autori nimi*)

(sünnikuupäev: _______19.10.1990____)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose
__ Absoluutselt summeerivad operaatorid ruumil B(F) ___________________________ ,

(*lõputöö pealkiri*)

mille juhendaja on ________Märt Põldvere____________________________________,

(*juhendaja nimi*)

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus/Tallinnas/Narvas/Pärnus/Viljandis, 01.02.2013 (*kuupäev*)