Leitfaden

für den

geometrischen Anschauungsunterricht

nach

Lorey's Grundsätzen zusammengestellt

von

J. Spalving,
wissenschaftlichem Lehrer an der Kreisschule zu Dorpat.

(Bestimmt für die untere Klasse der Kreisschulen, sowie für andere Anstalten, in denen der geometrische Unterricht seinen Anfang nimmt.)

Dorpat.

Druck und Verlag von E. J. Karow, Universitäsbuchhändler.

1863.

Leitfaden

für den

geometrischen Anschauungsunterricht

nach

Lorey's Grundsätzen zusammengestellt

von

J. Spalving,
wissenschaftlichem Lehrer an der Kreisschule zu Dorpat.

(Bestimmt für die untere Klasse der Kreisschulen, sowie für andere Anstalten, in denen der geometrische Unterricht seinen Anfang nimmt.)

Dorpat.

Druck und Verlag von E. J. Karow, Universitätsbuchhändler.

1863.

Gestattet von der Censur.

Dorpat, den 22. Juni 1863.

Vorwort.

Es ist ein großer Zeitverlust, wenn der Leser alle die Sätze, welche er dem Schüler beibringen will, erst in die Feder dictiren muß. Solches geschieht in unsren Schulen leider gar zu oft. So giebt es auch für den geometrischen Anschauungsunterricht empfehlenswerthe Bücher für den Lehrer genug, aber für den Schüler sind dieselben zu voluminös. Dieses war der Beweggrund, weshalb ich im vorliegenden Büchlein, dem Gedankengange Lorey's folgend, die wichtigsten Sätze zusammenstelle und somit diesen Leitfaden als einen für den Schüler abgedruckten Auszug des „geometrischen Anschauungsunterrichtes von Lorey" betrachte. — Daß der geometrische Unterricht durch einen geometrischen Anschauungsunterricht vorbereitet werden muß, wird schwerlich Jemand bezweifeln. Die Nothwendigkeit eines geometrischen Anschauungsunterrichts ist von allen den Männern, welche mit diesem Unterrichte zu thun haben, eingesehen und festgehalten worden, da man sich längst davon überzeugt hat, daß wir nur leeres Stroh dreschen, wenn wir bei dem Kinde Begriffe voraussetzen, die durchaus nicht vorhanden sind, und eine solche Ungerechtigkeit begehen wir jedes Mal, wenn wir in der Geometrie gleich von Anfang an mit abstracten Begriffen kommen, anstatt dem Kinde an den Körpern das zu zeigen, was wir in umfaßlichen Definitionen geben. Daher habe ich die Netze der im vorliegenden Büchlein besprochenen Körper am Schlusse zusammengestellt und diese Netze müssen die Schüler bei dem jedes Mal vom Lehrer durchgenommenen Körper zeichnen, ausschneiden und pappen. Auf solche Weise gewinnt der Schüler ein richtiges Bild von der Entstehung und den einzelnen Bestandtheilen des Körpers. Nothwendig ist es, daß eine jede Schule, wo dieser Unterricht betrieben wird, eine Sammlung von Körpern hat, die beim Unterrichte benutzt werden können. Wenn wir in dieser Art in den untersten Classen der Kreisschulen, wie auch in anderen Anstalten, wo mit dem geometrischen Unterrichte der Anfang gemacht wird, zu Werke gehen, werden wir schwerlich die bittere Erfahrung machen, daß Schüler, welche schon mit Zeugnissen der Reife versehen werden, bei einem an die Tafel gezeichneten Körper nicht sagen können, welche Kante vorn und welche hinten stehe. Mit äußeren Anschauungen und Betrachtungen sollen wir also den Anfang beim geometrischen Unterrichte machen.

Dorpat, im Juni 1863.

J. Spalving.

Der Würfel.

An dem Würfel oder Cubus, oder auch Hexaëder oder Sechsflächner genannt, sieht man: 8 Ecken, 4 oben und 4 unten; Flächen und zwar 6 viereckige Flächen (Quadrate), — eine Fläche, auf welcher er ruht, eine ihr gegenüberstehende und 4 stehende Flächen; 12 gerade Linien (Kantenlinien), 4 unten, 4 oben, 4 stehende; 24 Winkel, in jedem Vierecke 4, an jeder Ecke 3; 12 Kanten, an jeder Kantenlinie eine; 3 Flächenachsen, d. h. 3 gedachte gerade Linien, von dem Mittelpunkte einer Fläche bis zum Mittelpunkte der ihr gegenüberliegenden Fläche, um welche man den Würfel gedreht denken kann; 4 Eckenachsen; 6 Kantenachsen.

Der Würfel hat drei Ausdehnungen, nämlich eine von Vorn nach Hinten oder (wenn der Würfel so auf den Tisch gestellt ist, daß er der Lage nach mit den Himmelsgegenden übereinstimmt) von Norden nach Süden, eine zweite von Rechts nach Links oder von Osten nach Westen, eine dritte von Oben nach Unten.

Kommt man vom Würfel auf andere Gegenstände, ein Buch, eine Tafel, einen Tisch, ein Haus u. s. w., so findet man wieder drei Ausdehnungen, — kurz alle mit unseren Sinnen wahrnehmbaren Gegenstände haben drei Ausdehnungen. Alle Gegeustände, welche drei Ausdehnungen haben, heißen Körper, also ist der Würfel ein Körper.

Der Würfel hat nicht nur drei Ausdehnungen, derselbe ist ferner von sechs Flächen eingeschlossen. Diese sind die vordere, die hintere, rechte, linke, untere, obere. Wir stellen uns den Würfel auf einer Fläche stehend oder ruhend vor, obgleich derselbe auch auf einer Kante oder Ecke stehend gedacht werden kann. Auf einer Fläche stehend hat der Würfel die größte Standhaftigkeit. Die Fläche, auf welcher der Würfel steht oder die untere, heißt die Grundfläche. Jede Fläche ist nach zwei Richtungen hin ausgedehnt, so die vordere von Unten nach Oben, von Osten nach Westen oder von Rechts nach Links, ebenso die hintere; die obere von Vorn nach Hinten, von Nord nach Süd, und von Rechts nach Links oder Ost nach West ausgedehnt, ebenso die untere; die rechte und östliche Fläche von Oben nach Unten, von Nord nach Süd oder von Vorn nach Hinten ausgedehnt, ebenso die linke oder westliche. Alle Flächen am Würfel haben also zwei Ausdehnungen. Auch die Flächen an andern Körpern, überhaupt alle Flächen haben zwei Ausdehnungen.

Wollte man eine von den sechs Flächen des Würfels, etwa die vordere, vom Würfel lostrennen, so würde dies und wenn es mit dem schärfsten Messer gemacht würde, unmöglich sein, weil die vom Körper abgeschnittene Fläche doch noch auch in der dritten Richtung ausgedehnt, also ein Körper sein würde; man kann also nur einen Theil des Körpers, welcher selbst wieder Körper ist, abtrennen; die Flächen, welche den Körper einschließen und begrenzen, sind untrennbar mit demselben verbunden. Flächen, die nur nach zwei Richtungen hin ausgedehnt sind, kommen also nicht selbständig, sondern nur an den Körpern befindlich vor; die selbständigen Flächen sind nur, auf Grund der an den Körpern angeschauten Flächen, vorhanden. — Streng genommen sieht man eigentlich keinen Körper, sondern nur Flächen der Körper, beim Würfel höchstens drei; auf einmal sieht man eigentlich nur zwei Ausdehnungen beim Würfel, denn man muß erst seine Stellung ändern, um die dritte Ausdehnung wahrzunehmen.

Eine jede Fläche am Würfel ist von vier geraden Linien eingeschlossen und begrenzt; gerade sind dieselben deshalb, weil sie von Vorn nach Hinten, oder von Rechts nach Links zwischen je zwei Eckpunkten die kürzesten sind, wie überhaupt die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist. Eine jede solche Gerade, welche in Bezug auf den Würfel auch Kante heißt, hat nur eine einzige Ausdehnung, z. B. von Oben nach Unten, von Rechts nach Links, von Vorn nach Hinten. Wollte man eine solche Linie oder Kante, welche die Fläche begrenzt, von derselben abtrennen, so daß man dieselbe selbständig hätte, so würde man wiederum einen nach drei Richtungen hin ausgedehnten Körper erhalten, aber nicht eine Linie, auch keine Fläche. Also ist die Linie, hier die gerade, die Grenzlinie der Fläche, welche sich am Körper befindet, nur nach einer Richtung ausgedehnt, nämlich in die Länge und etwas auf dem Grunde der sinnlichen Anschauung von uns Gedachtes, in der Wirklichkeit gar nicht Vorhandenes. — Jede der zwölf Kanten oder geraden Linien hört auf in einem Punkte oder wird von zwei Punkten begrenzt, welche gar keine Ausdehnung haben und nur eine Stelle im Raume bezeichnen, die wir gerade bestimmen wollen. Da der Punkt gar keine Ausdehnung hat, so kann man auch nicht von der Größe oder der Gestalt der Punkte reden; es giebt weder große, noch kleine, weder runde, noch eckige Punkte. Das Zeichen eines Punktes ist nur ein Bild desselben, unter welchem wir uns die Sache oder den Begriff selbst vorstellen, kein wirklicher Punkt.

Denkt man an den Stoff des Würfels, so betrachtet man ihn als einen natürlichen oder physischen Körper, wie alle andern Körper es auch sind, welche wir mit den Sinnen wahrnehmen. Sieht man aber bei den Körpern vom Stoffe ab und faßt immer nur das Ausgedehntsein nach den drei Richtungen, die damit zusammenhängende Größe und Gestalt ins Auge, so hat man einen mathematischen Würfel, mathematischen Körper. Derselbe läßt sich nicht mit unseren Sinnen wahrnehmen, ist etwas Gedachtes, nur in unserem Geiste Vorhandenes; wir kommen aber erst durch Wahrnehmung und Betrachtung des natürlichen, sinnlichen Körpers zum Begriffe des mathematischen. So wie es physische und mathematische Körper giebt, so giebt es dem entsprechend auch physische und mathematische Flächen, physische und mathematische Linien, physische und mathematische Punkte. Die physischen Körper, Flächen, Linien und Punkte sind für uns nur Bilder der mathematischen Körper, Flächen, Linien und Punkte.

Betrachtet man eine von den sechs ebenen Flächen oder Ebenen, so findet man, daß jede von vier Geraden eingeschlossen ist. Eine solche von vier Geraden eingeschlossene, ebene Fläche heißt deshalb ein Vierseit. Da der Würfel von sechs dergleichen Vierseiten, deren jedes vier Seiten hat, eingeschlossen wird, so hat man am Würfel im Ganzen 6 mal 4 = 24 Seiten oder Kanten. Jede aber gehört zu je zwei Flächen, z. B. die vordere obere Kante gehört ebenso zur vorderen, wie zur oberen Fläche, daher sind nur die Hälfte von den 24 oder 12 Kanten vorhanden. Diese 12 Kanten haben verschiedene Namen, welche man leicht findet, z. B. untere vordere, obere vordere, rechte vordere, linke vordere u. s. w. Faßt man die vordere Fläche ins Auge, so hat man eine obere und eine untere Kante oder Seite (Gerade), eine rechte und eine linke, welche zwei und zwei paarweise gleich gerichtet sind, oder gleiche Lage haben; denn die obern und untern laufen beide von Ost nach West oder von Rechts nach Links; die beiden andern von unten nach oben. Linien, welche dieselbe Lage oder Richtung haben, heißen parallel; soweit man dieselben auch verlängert, so können sie sich doch nimmer schneiden, sie können sich einander auch nicht nähern, sondern müssen immer gleich weit von einander entfernt bleiben. Also je zwei und zwei Seiten eines Vierseits laufen mit einander parallel; ein solches Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Seiten parallel laufen, heißt ein Parallelogramm; also ist der Würfel von sechs Parallelogrammen eingeschlossen. Von den Kanten des Würfels laufen stets je vier einander parallel: 1) die rechte vordere, rechte hintere, linke vordere, linke hintere; 2) die rechte obere, linke obere, rechte untere und linke untere; 3 die untere vordere, obere vordere, untere hintere, obere hintere. Vergleicht man aber das Verhalten der oberen vorderen Kante und der rechten vorderen Kante, so laufen sie nicht parallel, sondern treffen sich in dem rechten oberen vorderen Eckpunkte und bilden einen Linienwinkel (ebenen Winkel); ebenso trifft noch die rechte obere Kante in demselben Punkte mit der vorderen oberen und der rechten vorderen Kante zusammen, um einen Winkel zu bilden. Der Punkt, in welchem die drei Kanten zusammen treffen, heißt Eckpunkt des Würfels; solcher Eckpunkte giebt es acht, denn die 24 Kanten lassen sich acht mal zu je drei in einem Punkte vereinigen. Je zwei Kanten bilden bei ihrem Zusammentreffen einen Winkel; derselbe heißt Linienwinkel, weil er von zwei Linien gebildet wird; der Punkt, in welchem sich die Linien schneiden oder treffen, heißt Scheitelpunkt des Winkels; die Linien selbst, durch deren Treffen der Winkel entstanden ist, heißen Schenkel des Winkels. Also sind die Bestandtheile eines Winkels: 1) der Scheitelpunkt; 2) die beiden Schenkel und 3) die zwischen beiden liegende, nicht eingeschlossene ebene oder Winkelfläche. Da an einer jeden von den sechs Flächen vier Winkel oder Ecken vorkommen, so kann man eine solche Fläche nicht nur Vierseit, sondern auch Viereck nennen. Daher: Der Würfel ist von sechs Vierseiten oder Vierecken eingeschlossen, welche Parallelogramme sind. Da ein jedes von den sechs Vierecken je vier Linienwinkel hat, so kommen im Ganzen 24 vor; je drei gehören dazu, um eine sogenannte körperliche Ecke zu bilden, daher kann es am Würfel nicht mehr als acht Ecken oder Eckpunkte geben. Die Namen derselben lassen sich leicht bestimmen, z. B. rechte vordere obere, rechte vordere untere, rechte obere hintere u. s. w. Jede Fläche von den sechs Flächen kann einmal zur vorderen Fläche gemacht werden. Von den Linien, welche die einzelnen Winkel bilden, geht die eine von Osten nach Westen, die andere von Unten nach Oben; die Linien, welche die Schenkel dieser Winkel sind, laufen also in gerade entgegengesetzter Richtung — solche Winkel heißen rechte Winkel oder Rechte. Denkt man sich z. B. um den rechten oberen Eckpunkt noch drei an Gestalt und Größe gleiche Ebenen oder Flächen gelegt, so daß sie zusammen wieder eine Ebene bilden, so wäre der rechte Winkel der vierte Theil dieser Ebene. Alle ebenen oder Linienwinkel am Würfel sind rechte; alle sechs Vierecke sind rechtwinklige Parallelogramme. Mißt man ferner die einzelnen Kanten mit dem Zirkel, so wird man finden, daß dieselben alle gleich sind — daher kann man die rechtwinkligen Parallelogramme, von denen der Würfel eingeschlossen ist, auch gleichseitige nennen und man faßt alle diese Eigenschaften zusammen unter dem Namen Quadrat = rechtwinkliges, gleichseitiges Parallelogramm. Man kann sich größere und kleinere Quadrate denken, alle stimmen in der Gestalt überein — die sechs Quadrate des Würfels stimmen aber nicht nur in der Gestalt, sondern auch in der Größe überein oder sie sind gleich und ähnlich d. h congruent. Sie sind auch ganz auf dieselbe Weise entstanden, indem sich z. B. die untere Kante so von Unten nach Oben bewegte, daß sie weder nach Vorn noch nach Hinten abwich, was man senkrecht nennt, während ihre ursprüngliche Lage wagerecht heißt und zwar so hoch, als dieselbe selbst lang ist. Also: Der Würfel ist ein Körper, welcher von sechs congruenten Quadraten eingeschlossen ist, zwölf Kanten und acht Ecken hat.

Die am Würfel, in den einzelnen Quadraten befindlichen Winkel sind rechte Winkel, von denen ein jeder den vierten Theil einer Ebene beträgt. Denkt man sich eine Gerade in einer Ebene liegend, dann in eine drehende Bewegung gesetzt, so daß sie mit dem einen Punkte festliegend ihre Richtung fortwährend ändert, mit dem anderen Endpunkte den zurückgelegten Weg (Kreislinie) bezeichnet, so erhält man verschiedene Winkel, je nachdem man das zwischen je zwei verschiedenen Lagen der sich drehenden Linie liegende Stück der Ebene ins Auge faßt. Der vierte Theil der Umdrehung heißt ein rechter Winkel; ein Winkel, kleiner als ein rechter Winkel, heißt spitz; ein Winkel größer als ein Rechter, stumpf; dreht sich die Gerade in die entgegengesetzte Lage, dadurch, daß dieselbe eine halbe Umdrehung macht, so hat man den gestreckten Winkel, $^2/_4 = {}^1/_2$ der Umdrehung = zwei Rechten; ein Winkel, größer als zwei, aber kleiner als vier Rechte, heißt ein überstumpfer. Ein Winkel, welcher $^1/_{360}$ der Umdrehung ist, heißt ein Grad. Daher: der Rechte = 90°; der spitze Winkel mehr als 0°, aber kleiner als 90°; der stumpfe Winkel größer als 90°, kleiner als 180°; der gestreckte Winkel = 180° und kleiner als 360°. Es ergiebt sich daraus, daß alle rechten und alle gestreckten Winkel einander gleich sind; daß die spitzen, stumpfen und überstumpfen Winkel je unter sich zwar gleich sein können, aber nicht gleich sein müssen. Der Grad ist also das Winkelmaß; so oft sich derselbe in einen Winkel hineinlegen läßt, so viele Grade hat ein Winkel; bleibt ein Rest kleiner als ein Grad, so hat man den Winkelgrad wieder in 60 Winkelminuten, die Winkelminuten in 60 Winkelsekunden, die Winkelsekunden in 60 Tertien eingetheilt. — Das gewöhnliche Winkelinstrument ist der Transporteur, ein in 180° getheilter Halbkreis, welchen man aus Pappe leicht anfertigen kann. — Bei der Entstehung eines Winkels durch Drehung einer Geraden um einen festliegenden Punkt kommt die Länge der Schenkel gar nicht in Betracht, sondern nur die Größe der Drehung. Je größer die Drehung, desto größer der Winkel oder auch je größer der Unterschied in der Richtung der beiden Schenkel; denn man kann sich einen Winkel auch dadurch entstanden denken, daß zwei Gerade von einem Punkte nach verschiedenen Richtungen hinlaufen. Dann ist der Winkel der Richtungsunterschied zwischen zwei geraden Linien.

Bei den Quadraten, welche den Würfel einschließen, kann man außer der Gestalt und Größe auch noch die Lage derselben berücksichtigen. So liegen die Grundfläche und die obere Fläche, die vordere und die hintere, die rechte und die linke so, daß sie sich niemals treffen, auch sich einander gar nicht nähern, sondern immer um die Länge der Kante von einander entfernt bleiben, d. h. sie sind gleichlaufend oder parallel. Zwei Ebenen können also ebenso gut parallel laufen, als zwei gerade Linien. Betrachtet man aber die obere Fläche und die vordere, die obere und die rechte, die obere und die linke u. s. w., so haben sie nicht gleiche Richtung und Lage; denn die eine richtet sich von Unten nach Oben, die andere von Vorn nach Hinten u. s. w. Sie treffen sich dann und schneiden sich und zwar in einer Geraden, welche die Kante des Würfels ist. Dadurch entsteht der Flächenwinkel; die Linie, in welcher sich beide Flächen oder Schenkel schneiden, heißt die Scheitellinie. Ein solcher Flächenwinkel, wie die Flächen am Würfel bilden, heißt ein rechter Winkel.

Eine Linie steht auf einer Linie senkrecht, wenn sie mit derselben einen rechten Winkel, schief, wenn sie mit derselben einen schiefen, d. h. einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet. Ebenso steht eine Fläche auf einer andern senkrecht oder schief, je nachdem der gebildete Flächenwinkel ein rechter oder schiefer (spitzer oder stumpfer) ist.

Geht die senkrechte Linie durch den Mittelpunkt der Erde, wie das ruhende, verlängerte Loth einer Pendeluhr, so heißt die senkrechte Linie lothrecht. Alle lothrechten Linien sind senkrecht, nicht alle senkrechten aber lothrecht; denn eine Linie kann eine in irgend einer Lage befindliche Linie senkrecht treffen, ohne verlängert durch den Mittelpunkt der Erde zu gehen.

Trifft eine der sechs Flächen eine andere, so schneiden sich dieselben in einer Geraden; beide Ebenen haben dann unendlich viele Punkte mit einander gemein, welche aber alle in einer geraden Linie liegen. Hätten die beiden Ebenen noch einen weiteren Punkt, welcher nicht in der Geraden läge, gemein, so fielen dieselben ganz in einander und deckten sich. Durch drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte ist die Lage einer Ebene bestimmt.

Wie kann aber die Lage einer Geraden zu einer Ebene sein? Es kommen verschiedene Fälle vor. So laufen die obere vordere Kante, die rechte obere, die linke obere, die hintere obere zur Grundfläche parallel. So weit man dieselben auch verlängert, so findet kein Zusammentreffen, kein Annähern statt. — Mehr als einen Punkt kann die Gerade mit der Ebene nicht gemein haben; denn läge z. B. der oberste Punkt einer Kante und auch der unterste in der Grundfläche, so fielen zugleich alle übrigen Punkte der Geraden in die Ebene hinein und die Gerade selbst. Also: Eine Gerade hat mit einer Ebene entweder nur einen oder alle Punkte gemein und fällt ganz in dieselbe hinein. Hat aber eine Kante mit der Ebene einen Punkt gemein, so zeigen uns alle Seitenkanten des Würfels eine solche Stellung zur Grundfläche, daß dieselben in ihrer Richtung von Oben nach Unten nach keinerlei anderer Richtung hin abweichen, weder nach Vorn noch nach Hinten, weder nach Rechts noch nach Links, noch nach irgend einer Zwischenrichtung. Man sagt daher: sie stehen auf der Grundfläche senkrecht. Der Punkt einer Linie, wo dieselbe eine Ebene trifft, heißt der Fußpunkt. Denkt man sich durch den Fußpunkt der Senkrechten in der Grundfläche nach allen möglichen Richtungen hin Gerade gelegt, so bildet diese Senkrechte mit jeder der Geraden einen Rechten. Weicht aber eine Gerade, welche von Oben nach Unten geht, in ihrer Richtung nach irgend einer andern Seite hin, nach Vorn und Hinten, Rechts oder Links u. s. w. ab, so steht dieselbe dann zur Grundfläche oder überhaupt Ebene schief. Zieht man in der von der schiefen Linie getroffenen Ebene durch den Fußpunkt derselben nach allen Richtungen hin gerade Linien, so bildet die schiefe Linie mit jeder je einen spitzen und einen stumpfen Winkel, welche zusammen 180° oder zwei Rechte ausmachen und Nebenwinkel heißen. Der kleinste von den genannten spitzen Winkeln heißt der Neigungswinkel. Sie haben den Scheitel, einen Schenkel gemein, während die beiden andern Schenkel eine Gerade bilden. Sind die beiden Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder einzeln ein rechter und der beiden gemeinschaftliche Schenkel heißt seiner Richtung nach senkrecht; sind die Nebenwinkel ungleich, schief.

Denken wir uns die beiden einander gegenüberliegenden Endpunkte eines Quadrats durch eine Gerade verbunden, so heißt dieselbe die Diagonale des Quadrats. Solcher Diagonalen giebt es zwei; jede theilt das Quadrat in zwei Dreicke, d. h. Ebenen, welche von drei Seiten eingeschlossen sind und drei Winkel haben. Die beiden Seiten, welche den rechten Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks einschließen; heißen Katheten; die Linie aber, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, heißt Hypotenuse. Die Hypotenuse ist zwar größer als eine der beiden Katheten, aber doch kleiner, als beide Katheten zusammen. Wenn bei einem Dreiecke zwei Seiten gleich sind, so heißt das Dreieck gleichschenklig, also: die Diagonale zerlegt das Quadrat in zwei gleichschenkligrechtwinklige Dreiecke, welche über einander gelegt sich gegenseitig decken oder congruent sind. Daraus ergiebt sich, daß die Diagonale die Winkel des Quadrats halbirt hat, daß jeder der beiden spitzen Winkel in den beiden Dreiecken nun 45° betragen muß. Zieht man noch die zweite Diagonale im Quadrate, so zerfällt das ganze in vier congruente gleichschenklige Dreiecke.

Die beiden Diagonalen halbiren sich, der Halbirungspunkt steht von den Ecken des Quadrats und den Seiten gleichweit ab, oder der Halbirungspunkt der Diagonalen ist centrisch nach den Ecken und Seiten, so daß man um das Quadrat einen Kreis durch seine vier Ecken legen kann und die vier Seiten in den Kreis hineinfallen, ebenso auch in das Quadrat, so daß jede Seite desselben den Kreis berührt oder nur einen Punkt mit demselben gemein hat. (Umschriebener und eingeschriebener Kreis, eingeschriebenes und umschriebenes Quadrat). Die Diagonalen des Quadrats schneiden sich unter rechten Winkeln; zwei einander gegenüberliegende, welche den Scheitel gemein haben, deren Schenkel gerade Linien bilden, heißen der Lage nach Scheitelwinkel, welche entstehen, wenn sich zwei Gerade durchschneiden, oder wenn man sich die Schenkel eines Winkels rückwärts über den Scheitel verlängert. In diesem Falle, wie überhaupt sind die Scheitelwinkel einander gleich, denn ein und derselbe Nebenwinkel ergänzt sie zu zwei Rechten oder 180°.

Verbindet man den centrischen Punkt der oberen Fläche mit dem centrischen Punkte der Grundfläche, ebenso den centrischen Punkt der vorderen und hintern, der rechten und linken Fläche, so erhält man drei Gerade, welche Achsen des Würfels heißen. Dieselben sind gleich groß und schneiden sich rechtwinklig in einem Punkte im Innern des Würfels, welcher von den Eckpunkten des Würfels und den Seitenflächen desselben eine gleiche Entfernung hat oder centerisch ist, so daß man sowhl durch die acht Ecken des Würfels eine Kugel legen kann, als auch eine solche Kugel, welche die sechs Seitenflächen des Würfels in je einem Punkte berührt. (Umschriebene und eingeschriebene Kugel, eingeschriebene und umschriebener Würfel). Um aber zu messen, wie weit ein Punkt vom andern entfernt ist, dazu hat man die Gerade zwischen beiden Punkten zu messen, die Entfernung eines Punktes von einer Geraden oder einer Ebene aber ist die Senkrechte, welche von demselben nach der Geraden oder nach der Ebene gezogen werden kann.

Verbindet man die rechte obere vordere Ecke mit der linken untern hintern Ecke durch eine Gerade, so heißt eine solche Linie Diagonale des Würfels oder Eckenachse. Solcher Diagonalen oder Eckenachsen, welche an Größe gleich sind und sich unter schiefen Winkeln schneiden giebt es beim Würfel vier, weil an demselben acht Ecken vorkommen, von welchen je zwei und zwei entgegengesetzte mit einander verbunden werden. — Verbindet man ferner die einander entgegengesetzten Kanten eines Würfels, z. B. die vordere obere mit der hintern unteren u. s. w., so erhält man eine Kantenachse. Solcher Kantenachsen giebt es 6 beim Würfel, weil derselbe 12 Kanten hat. — Der Flächenachsen, welche durch Verbindung der centrischen Punkte entgegengesetzter Flächen entstanden, giebt es drei, weil der Würfel sechs Flächen hat.

Messung der Linien, Flächen und des Körperinhaltes beim Würfel.

Wenn es sich um Messung von Linien, Winkeln, Flächen und Körperinhalten handelt, so ist vor allen Dingen zweierlei ins Auge zu fassen: 1) der Gegenstand, welcher gemessen werden soll; 2) das Maß, womit man mißt. — Das Maß ist je nach der Beschaffenheit des zu messenden Gegenstandes verschieden, weil dasselbe immer von derselben Art sein muß, wie der zu messende Gegenstand. Zur Ausmessung von Linien bedient man sich einer Linie, Flächen werden durch eine Fläche, Winkel durch einen Winkel, Kubikinhalte durch einen bestimmten Kubikinhalte gemessen, z. B. ein größerer Würfel durch einen kleineren. Am Würfel kann entweder die Fläche eines einzelnen Quadrats ausgemessen und berechnet worden oder die Gesammtoberfläche des Würfels, welche aus den sechs gleich großen Quadraten des Würfels besteht. Um also die Oberfläche des Würfels zu finden, hat man nur die Fläche des einzelnen Quadrats sechs mal zu nehmen. Da man Flächen nur wieder durch eine Fläche messen kann, so kommt es darauf an, für das Quadrat ein solches Flächenmaß zu finden, welches irgendoft auf dem zu messenden Quadrat oder auf der zu messenden Fläche sich auftragen ließe. Man hat ein kleines Quadrat als Flächenmaaß angenommen, dessen Seite eine Linie, ein Zoll oder ein Fuß ist. — Wäre die Seite eines Quadrats z. B. 7 Zoll, die eines andern 14 Zoll lang, so wäre die Fläche des ersten 49 □ Zoll, die des zweiten 196 □ Zoll; daher das erste im zweiten ebenso oft enthalten, als 49 in 196 oder 4mal. Hat man auf solche Weise den Flächeninhalt eines Quadrats gefunden, so braucht man nur die Fläche des einzelnen Quadrats 6mal zu nehmen, um die Gesammtoberfläche des Würfels zu finden, also, wenn die Oberfläche eines Quadrats 49 □ Zoll beträgt, so ist die Gesammtoberfläche des Würfels 49 $\times$ 6 = 294 □ Zoll.

Berechnung der Gesammtoberfläche des Würfels.

Um etwas Körperliches, den Kubikinhalt des Würfels zu messen, muß man ein körperliches und cubisches Maß annehmen. Setzen wir den Fall, daß sich die Kante des zu messenden Würfels mit irgend einem Längenmaße, z. B. durch die Linie ausmessen lasse, so ist die kleinste Einheit des cubischen Maßes die Cubiklinie, d. h. ein kleiner Würfel, an welchem jede Kante eine Linie lang ist. Die nächst größeren Einheiten des Körpermaßes wären dann der Cubikzoll, Cubikfuß, Cubikfaden, Cubikwerst, Cubikmeile u. s. w.

Um einen Würfel von zwei Linien Kantenlänge zu erhalten, müßte man 8 Cubiklinien zusammensetzen und zu einem Würfel anordnen; 27 Cubiklinien bildeten einen Würfel, dessen Kante 3 Linien, 64 Cubiklinien bildeten einen Würfel, dessen Kante 4 Linien lang wäre; 125 Cubiklinien = 5 Linien Kantenlänge; 216 Cubiklinien = 6 Linien Kantenlänge; 343 Cubiklinien = 7 Linien Kantenlänge; 512 Cubiklinien = 8 Linien Kantenlänge; 729 Cubiklinien = 9 Linien Kantenlänge; 1000 Cubiklinien = 10 Linien Kantenlänge; 1331 Cubiklinien = 11 Linien Kantenlänge; 1728 Cubiklinien = 12 Linien Kantenlänge. Da aber 12 Linien einen Zoll bilden, so hätte man einen Cubikzoll, welcher 1728 Cubiklinien hat.

Will man aus dem bekannten Cubikinhalte eines Würfels die Länge der Kante desselben bestimmen, so muß man rückwärts die den Cubikinhalt ausdrückende Zahl in drei gleiche Factoren zerlegen und einen davon nehmen oder wie man zu sagen pflegt die Cubikwurzel ausziehen. Hätte z. B. ein Würfel einen Cubikinhalt von 8 Cubikzoll, so müßte die Kante 2 Zoll betragen, weil 2 $\times$ 2 $\times$ 2 = 8 ist. Aus demselben Grunde ist bei einem Würfel von 27 Cubikzoll Inhalt, die Kante 3 Zoll lang; bei 64 Cubikzoll 4 Zoll u. s. w.

Faßt man in einen Satz die cubische oder körperliche Berechnung des Würfels zusammen, so heißt es: Man multiplicire die Grundfläche des Würfels mit der Höhe. Da die Grundfläche des Würfels ein Quadrat und jede Seite dieses Quadrats gleich der Höhe des Würfels ist, so braucht man nur eine beliebige Seite des Würfels zu messen, die auf solche Weise gefundene Zahl dreimal mit sich selbst zu multipliciren, oder wie man sagt: diese Zahl zum Cubus zu erheben. Beispiel: Sei 6 Zoll die Länge der Kante eines Würfels, so ist dessen Grundfläche 36 □ Zoll, die mit der Höhe 6 Zoll multiplicirt 216 Cubikzoll als den körperlichen Inhalt des Würfels giebt.

Ein Würfel entsteht, wenn ein Quadrat bis zur Höhe der eignen Seite senkrecht nach oben sich bewegt. Denkt man sich die Entstehung zwei oder mehrere Male wiederholt, so erhält man zwei oder mehrere Würfel, welche nach einem und demselben Bildungsgesetze entstanden und deshalb an Größe und Gestalt übereinstimmend, d. h. congruent sind. Hätten wir zwei solche congruente Würfel, so hörte der Begriff des Deckens, wie es bei den Geraden und Quadraten der Fall war, auf; man müßte sich den einen Raum vollkommen leer denken, dann würde der andere Würfel denselben ausfüllen. (Begriff der Congruenz bei Flächen und Körpern.) — Bei congruenten Würfeln stimmen alle Seitenflächen in Größe und Gestalt und Anordnung überein; ebenso alle Linien; ebenso auch alle Flächen- und Linienflächenwinkel. Ebenso ist jede Ecke, welche man ein Dreikant nennen könnte, ganz auf dieselbe Weise entstanden, also congruent; es treffen sich nämlich drei congruente Quadrate in einem Punkte.

Entstehung eines Prismas:

Hat man etwa ein Quadrat, z. B. von 3 Zoll Kantenlänge, also von 90 □ Zoll Fläche und läßt sich dasselbe senkrecht emporbewegen, so würde, wenn es sich 3 Zoll emporbewegte, ein Würfel entstehen, dessen Kante 3 Zoll lang wäre. Ließe man aber das Quadrat sich mehr als 3, z. B. 4, 5, 6 Zoll hoch bewegen, so entstände zwar ein nach zwei Richtungen (Länge und Breite, rechts und links, von vorn nach hinten) hin gleichweit (3 Zoll), aber nach der dritten Richtung, nach der Höhe hin, ungleichweit, z. B. 6 Zoll hoch, ausgedehnter Körper. Steht dieses Prisma auf dem Quadrate von 3 Zoll Seite, so liegt demselben ein congruenter, an Größe und Gestalt gleiches, dem untern paralleles Quadrat gegenüber, gerade wie beim Würfel; die beiden Ausdehnungen von vorn nach hinten, von rechts nach links sind gleich, wie beim Würfel; die Anzahl der Begränzungsflächen, die Anzahl der Ausdehnungen des Körpers (3), die zwei Ausdehnungen der Flächen, die eine Ausdehnung der Linien, die Ausdehnungslosigkeit der Punkte oder Ecken, die Unmöglichkeit die Flächen vom Körper, die Linien von den Flächen, die Punkte von den Linien zu trennen u. s. w. — Alles wie beim Würfel. Ebenso die Anzahl und Lage der Kanten und Flächen; die Rechtwinkligkeit der Linien- und Flächenwinkel; das Senkrechtstehen der Seitenflächen und Kanten zu ihren bezüglichen Flächen; die Anzahl der zur Bildung einer Ecke nöthigen Winkel; die Größe, Gestalt, Stoff u. s. w. Worin liegt also der Unterschied des (neuen Körpers vom alten) Prismas vom Würfel? Der Unterschied besteht darin, daß die Höhe von den beiden andern Ausdehnungen verschieden und zwar entweder größer oder kleiner ist. Die vier Seitenflächen sind zwar paarweise parallel, congruent, rechtwinklig, aber nur die gegenüberliegenden Seiten sind in denselben gleich und parallel — daher sind die Seitenflächen Oblongen.

Bemerkung. Es giebt sechs verschiedene Vierecke: 1) das Quadrat, welches gleichseitig und rechtwinklig ist; 2) der Rhombus oder die Raute, gleichseitig, aber schiefwinklig; 3) Rechteck, Oblongum oder Rectangel, rechtwinklig, aber ungleichseitig; 4) Rhomboid oder längliche Raute, ungleichseitig und schiefwinklig; 5) Trapez, nur zwei parallele Seiten; 6) Trapezoid, gar keine parallelen Seiten.

Die Diagonalen der Grund- und oberen Fläche des genannten vierseitigen Prismas sind gleich, ebenso die Diagonalen der Seitenflächen, die ersteren aber von den zweiten an Größe verschieden; die Diagonalen in den Oblongen halbiren sich ebenso gegenseitig, wie in den Quadraten; von den Achsen, d. h. den Linien, welche diese Halbirungspunkte der Diagonalen in der untern und oberen, rechten und linken, vordern und hintern Fläche verbinden und sich unter rechten Winkeln schneiden, sind nur die letztern gleich; die von unten nach oben gehende Achse kann ebenso lang, aber auch länger oder kürzer als die beiden andern sein, was von der Höhe des Prismas und der Neigung der Seitenflächen gegen die Grundfläche abhängt. Die Diagonalen des Körpers, d. h. die Geraden von der rechten oberen vorderen zur linken untern hintern Ecke; von der rechten obern hintern zur linken unteren vorderen u. s. w. sind vier und sich an Größe gleich. Der beschriebene Körper, dessen Grundfläche ein Quadrat, dessen obere ein der Grundfläche congruentes und paralleles Quadrat ist, dessen Seitenflächen vier congruente Oblongen sind, von denen je 2 und 2 parallel laufen, welche die Seite des Quadrats zur Grundlinie und die Höhe des Körpers zur Höhe haben, dessen Seitenflächen zur Grundfläche senkrecht stehen, heißt eine quadratische senkrechte Säule. Die Entstehung derselben läßt sich noch auf andere Weise denken, z. B. wenn sich das vordere Oblongum ohne Abweichung nach hinten, oder das rechte ohne Abweichung nach links bewegt und zwar um die Länge einer Seite der Grundfläche.

Wie bei dem Würfel, so lassen sich die Linien, Flächen und der Cubikinhalt bei der quadratischen Säule ausmessen und berechnen. Alle Säulen derselben sind zusammen so groß, als zweimal der Umfang des Quadrats, welches die Grundfläche bildet $\times$ viermal Umfang eines Oblongums, welches die Seitenfläche bildet, durch zwei getheilt. Gesetzt, die eine Seite der Grundfläche der quadratischen senkrechten Säule betrage 3 Zoll, so beträgt der Umfang der Grundfläche 4mal 3 = 12 Zoll, der untern und oberen also 24 Zoll; jede Seitenkante 6 Zoll, daher zusammen 24 Zoll; alle Kanten zusammengenommen 48 Zoll oder 4 Fuß. Der Umfang eines Oblongums besteht aus 2mal Seite der Grundfläche $\times$ 2mal Seitenkante = 2mal 3 $\times$ 2mal 6 Zoll = 18 Zoll $\times$ 4mal 18 Zoll = 72, die obere nnd untere Fläche haben 14 Zoll Umfang, macht zusammen 96 Zoll; jede Kante ist aber zweimal gerechnet, daher 48 Zoll = 4 Fuß.

Bemerkung. Die Fläche eines Oblongums findet man, wenn man die lange mit der kurzen Seite multiplicirt, also wenn wir eins von den Oblongen nehmen, welche die obige Säule bildet, so betrug die kurze Seite des Oblongums 3 Zoll, die lange Seite 6 Zoll, folglich der Flächeninhalt des ganzen Oblongums 3mal 6 = 18 □ Zoll. — Ueberhaupt ist der Flächeninhalt eines jeden Parallelograms gleich der Grundlinie mal Höhe. Unter Parallelogramm versteht man eine solche vierseitige Figur, in welcher die gegenüberstehenden Seiten parallel laufen; solcher Parallelogramme giebt es vier: 1) das Quadrat; 2) der Rhombus oder die Raute; 3) das Rechteck, Oblongum oder Recktangel und 4) das Rhomboid oder längliche Raute. — Da ein jedes Parallelogramm durch die Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt werden kann und bei dem Parallelogramm der Flächeninhalt gleich Grundlinie mal Höhe war, so ist der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks Grundlinie mal Höhe dividirt durch zwei.

Nachdem wir die Kanten der quadratischen Säule berechnet haben, betrachten wir auch noch die Oberfläche und den Cubikinhalt der Säule.

Die Oberfläche der quadratischen Säule besteht aus den beiden Quadraten, welche die Grundfläche und obere Fläche bilden und aus den vier congruenten Oblongen. Behalten wir dieselben Zahlen bei, welche bereits bei der Kantenberechnung gegeben waren, nämlich die Quadratseite = 3 Zoll, die kurze Seite des Oblongums = 3 Zoll, die lange Seite = 6 Zoll, so beträgt jedes der beiden Quadrate 9 □ Zoll, jedes Oblongum 18 □ Zoll, und da es zwei Quadrate und vier Oblongen gab, so die Oberfläche der quadratischen Säule = $(2 \times 9 + 4 \times 18)$ □ Zoll = 90 □ Zoll.

Um den Cubikinhalt der Säule zu finden, betrachte man diese Säule etwa aus 54 Cubikzollen zusammengesetzt. Auf der Grundfläche stehen neun, dann folgen noch fünf Schichten von je neun Cubikzoll — der ganze Inhalt beträgt also 6 mal 9 Cubikzoll, oder 6 mal 3 mal 3 = 54 Cubikzoll. Die 6 Zoll bezeichnen die Höhe, die einen 3 Zoll die Breite, die andern 3 Zoll bezeichnen die Länge. Daher ist der Cubikinhalt gleich der Länge mal Breite mal Höhe, oder Grundfläche mal Höhe.

Wenn bei der quadratischen senkrechten Säule anstatt eines Quadrates ein Oblongum zur Grundfläche wird, so daß also die drei Ausdehnungen verschieden werden, z. B. die Länge oder Ausdehnung von rechts nach links 5 Zoll, die Breite oder Ausdehnung von vorn nach hinten 4 Zoll, die Höhe 7 Zoll betrüge, so hätte man die senkrechte oblongische Säule. Die Grundfläche hätte dann 20 □ Zoll, die obere derselben parallele und congruente ebensoviel; die vordere hätte 35 □ Zoll, die hintere wäre der vorderen parallel und congruent; die rechte der linken parallele und congruente, enthielte 28 □ Zoll. Das Uebrige wie beim Würfel in der quadratischen Säule. Die drei Achsen (Flächenachsen) schneiden sich zwar unter rechten Winkeln, sind aber alle drei an Größe ungleich und stimmen mit den drei Ausdehnungen überein. Wie die quadratische Säule dadurch entstand, daß sich ein Quadrat z. B. von 9 □ Zoll zu einer Höhe von 6 Zoll senkrecht emporbewegte so entsteht die senkrechte oblongische Säule, wenn sich ein Oblongum z. B. von 5 Zoll Länge und 4 Zoll Breite 7 Zoll senkrecht emporbewegt. Alle Kanten betragen zusammen 64 Zoll oder 5 Fuß 4 Zoll; denn jede Kante ist 4 mal vorhanden, daher $4 . 5 + 4 . 4 + 4 . 7 = 4 (5 + 4 + 7) = 4 . 16 = 64$ Zoll. Man hat also nur die drei Ausdehnungen zu addiren und ihre Summe viermal zu nehmen, um die Summe aller Kanten zu finden.

Die Oberfläche der oblongischen Säule ist = 2 mal Grundfläche + 2 mal vordere + 2 mal linke Seitenfläche; also 2 mal 5 mal 4 □ Zoll + 2 mal 5 mal 7 □ Zoll + 2 mal 4 mal 7 □ Zoll = (40 + 70 + 56) □ Zoll = 166 □ Zoll.

Der Cubikinhalt der oblongischen Säule ist gleich Länge mal Breite mal Höhe oder Grundfläche mal Höhe (wie bei der früheren Säule). Beträgt daher die Länge der Grundfläche 5 Zoll; die Breite 4 Zoll, die Höhe der Säule 7 Zoll, so ist der Cubikinhalt $4 . 5 . 7 = 140$ Cubikzoll. Man hat daher 7 Schichten von solchen kleinen Cubikzollen über einander geschichtet, von denen jede Schicht aus 20 Cubikzollen besteht, im Ganzen 140 Cubikzoll.

Bewegt sich ein Rhombus (oder Raute) um einige Zoll senkrecht empor, so entsteht die rhombische Säule. Theilt man aber den Rhombus durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke, und erhebt sich eins von diesen Dreiecken senkrecht empor bis zu einer gewissen Höhe, so entsteht eine dreieckige senkrechte Säule. Würden sich die beiden Dreiecke, welche bei der Theilung des Rhombus durch die Diagonale entstanden, senkrecht emporbewegen, so entständen zwei dreieckige senkrechte Säulen, von denen die eine in den leeren Raum der andern hineingedacht, denselben vollkommen ausfüllen müßte, d. h. an Größe und Gestalt völlig übereinstimmen.

Die rhomboidische Säule unterscheidet sich von der vorhergehenden nur darin, daß sie ein Rhomboid oder längliche Raute, d. h. ein Parallelogramm zur Grundfläche und ein congruentes paralleles Parallelogramm zur oberen Fläche hat, in welchem die schief und die einen schiefen Winkel einschließenden Seiten ungleich und nur die gegenüberliegenden Seiten gleich sind, und welche nicht vier congruente Oblongen zu Seitenflächen hat, sondern nur paarweise congruente (die vordere und hintere, die rechte und die linke). Bezüglich der Anzahl der Ausdehnungen, Anzahl der Begrenzungsflächen und der Eigenschaft, daß alle Flächen Parallelogramme sind, von denen wenigstens die gegenüberliegenden congruiren; bezüglich der Anzahl der Ecken, Anzahl der ebenen Winkel, welche eine Ecke bilden, Anzahl und Länge der Kanten zu einander u. s. w. stimmen die bisher genannten Säulen überein. Der Würfel und die oblongische Säule stimmen in der Rechtwinkligkeit ihrer Parallelogramme überein, die rhomboidische und rhombische Säule haben das gemein, daß ihre Grund- und obere Fläche schiefwinklige Parallelogramme sind, die Seitenflächen Oblongen. Bei der oblongischen und rhomboidischen Säule sind nur die gegenüberliegenden Seitenflächen congruent, bei der rhombischen Säule alle Seitenflächen, beim Würfel alle Flächen. Die Diagonalen der rhomboidischen Säule sind ungleich. In Betreff der Winkel stimmen die rhombische und rhomboidische Säule mit einander überein. Alle Säulen oder Prismen, welche von Parallelogrammen eingeschlossen werden, nennt man Parallelopipeden; solche waren z. B. der Würfel, die quadratische, oblongische, rhombische und rhomboidische Säule. Die rhombische Säule nennt man auch ein Rhomboeder, weil die Begrenzungsflächen lauter Rhomben sind. Sind die Seiten und Grundflächen eines Parallelepipedons Rechtecke, wie z. B. bei dem Würfel, der quadratischen und der oblongischen Säule, so heißt ein solches Parallelepipedon ein rechtwinkliges, rechteckiges oder gerades.

Allgemeine Eigenschaften der Parallelogramme.

1) Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Seiten parallel laufen; 2) Die 4 Winkel eines Parallelogramms sind entweder einzelne rechte oder zwei stumpfe und zwei spitze Winkel, aber zusammengenommen immer 4 Rechte oder 360°; 3) Ein jedes Parallelogramm zerfällt durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke; 4) In einem jeden Parallele sind die gegenüberliegenden Winkel und Seiten einander gleich; 5) In einem jeden Parallelogramm halbiren sich die Diagonalen gegenseitig; 6) Die Parallelogramme sind entweder rechtwinklige (Quadrat und Oblongum) oder schiefwinklige (Rhombus und Rhomboid); 7) In einem Parallelogramm sind entweder alle Seiten gleich oder nur die gegenüberliegenden und die Parallelogramme zerfallen deshalb in gleichseitige und ungleichseitige; bei ersteren sind die einen Winkel einschließenden Seiten gleich (Quadrat und Rhombus), bei letztern ungleich (Oblongum und Rhomboid; 8) Im Oblongum und Quadrat sind die Diagonalen einander gleich, aber nicht im Rhombus und Rhomboid; 9) Im Quadrat und Rhombus schneiden sich die Diagonalen unter rechten, im Oblongum und Rhomboid unter schiefen Winkeln; 10) Um das Quadrat läßt sich ein Kreis beschreiben und ebenso in dasselbe; um das Oblongum, aber nicht in dasselbe; in den Rhombus, aber nicht um denselben; weder in das Rhomboid, noch um dasselbe; 11) Will man ein Parallelogramm zeichnen, so müssen dazu zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sein; ist das Parallelogramm gleichseitig, so braucht nur eine Seite gegeben zu sein; 12) die Diagonale halbirt den Winkel im Quadrat und Rhombus, aber nicht im Oblongum und Rhomboid; 13) Je zwei an einer Seite des Parallelogramms liegende Winkel betragen zusammen zwei Rechte; 14) Durch einen Winkel des Parallelogramms sind alle übrigen bestimmt; 15) Bei allen Parallelogrammen ist der Flächeninhalt gleich dem Producte aus Grundlinie und Höhe mal Flächeneinheit. Dabei ist die Höhe die Senkrechte zwischen zwei Parallelen; 16) Ein jedes schiefwinklige Parallelogramm ist an Flächeninhalt ebenso groß, als ein rechtwinkliges von derselben Grundlinie und Höhe; 17) Alle Parallelogramme verhalten sich wie die Producte aus Grundlinie und Höhe; bei gleicher Grundlinie, wie ihre Höhen; bei gleicher Höhe, wie ihre Grundlinie.

Die dreieckige senkrechte Säule hat drei Ausdehnungen, wie alle Körper, eine Grundfläche, welche ein Dreieck ist, d. h. eine ebene Fläche mit 3 Seiten und 3 Winkeln, 5 Flächen, also 2 mehr, als die Grundfläche Seiten oder Winkel hat, wie bei allen Seiten, 6 Ecken, 9 Kanten, ähnlich wie bei den bisherigen Säulen. Der Grundfläche liegt ein congruentes paralleles Dreieck gegenüber; denn die dreieckige Säule entsteht dadurch, daß sich ein beliebiges Dreieck senkrecht, mit sich selbst parallel, emporbewegt. Die Seitenflächen sind Oblongen, welche mit einander Flächenwinkel bilden, die entweder alle drei spitz sind, wenn das Grundflächendreieck spitzwinklig ist, oder unter denen einer recht oder stumpf ist, je nachdem das Grundflächendreieck rechtwinklig oder stumpfwinklig ist. Denn alle Dreiecke zerfallen in Betreff ihrer Winkel in spitz-, recht- und stumpfwinklige. Da alle 4 Winkel zusammen zwei Rechte oder 180° ausmachen, so müssen 2 kleiner sein, als zwei Rechte, daher entweder alle 3 Winkel spitz oder wenigstens 2 und der dritte recht oder stumpf. Flächenwinkel bei der Grundfläche sind Rechte, die Seitenkanten stehen auf der Grundfläche senkrecht. Die Seitenflächen (Oblongen) sind entweder alle drei, oder nur zwei, oder gar nicht congruent, je nachdem alle Seiten des Dreiecks gleich sind (gleichseitiges Dreieck) oder nur zwei (gleichschenkliges) oder alle ungleich (ungleichseitiges). An einem Dreieck bemerkt man sechs Stücke, nämlich drei Seiten und drei Winkel. Die Seiten und Winkel eines Dreiecks können unter sich gleich oder ungleich sein; daher unterscheidet man sechs verschiedene Dreiecke: 1) gleichseitige, in welchen die drei Seiten gleich sind; 2) gleichschenklige, in welchen zwei Seiten einander gleich sind; 3) ungleichseitige, in welchen die drei Seiten ungleich sind; 4) rechtwinklige, in welchen ein rechter und zwei spitze Winkel sind; 5) stumpfwinklige, in welchen ein stumpfer und zwei spitze Winkel sind und 6) spitzwinklige, in welchen die drei Winkel spitz sind.

Fassen wir nochmal die Merkmale eines dreiseitigen Prismas oder einer dreiseitigen Säule nach den Flächen, Ecken, Kanten, Winkeln und Achsen zusammen, so sind dieselben folgende:

a) Flächen: Das dreiseitige Prisma ist von 5 Flächen begränzt, von 2 Dreiecken und 3 Vierecken. Die 2 Dreiecke liegen einander gegenüber, haben eine parallele Lage, dieselbe Form und dieselbe Größe. Die 3 Vierecke liegen an einander; jedes hängt mit den beiden andern zusammen.

b) Die Ecken: Das dreieckige Prisma hat 6 Ecken. Steht das Prisma, so liegen 3 Ecken unten und 3 oben; liegt es, so liegen 4 Ecken unten, 2 oben. An jeder Ecke stoßen 3 Winkel zusammen.

c) Die Kantenlinien: Jedes Dreieck ist von drei Kantenlinien, jedes Viereck von 4 Kantenlinien begränzt; an dem dreiseitigen Prisma befinden sich 9 Kantenlinien. Jede Kantenlinie gehört zu

2 Figuren; 6 derselben zu einem Dreieck und einem Viereck, und die übrigen 3 allein zu den Vierecken. An jeder Ecke stoßen 3 Kantenlinien zusammen. Die 3, den Vierecken angehörenden, Kantenlinien stehen auf den Kantenlinien der Dreiecke senkrecht; die Kantenlinien der Dreiecke stehen nicht auf einander senkrecht. Je zwei einander gegenüberliegende Seiten der Vierecke sind parallel.

Die 6 Kantenlinien der Dreiecke sind gleich lang. Dasselbe gilt von den 3 Kantenlinien, welche den Vierecken allein angehören.

d) Die Winkel. I. die Flächenwinkel oder Kanten: An jeder Kantenlinie liegt eine Kante oder ein Kanten- oder Flächenwinkel. Dieses dreiseitige Prisma hat also 9 Kanten; 6 liegen an den Kantenlinien der Dreiecke und 3 ausschließlich an den Kantenlinien der Vierecke. Jene 6 sind recht-, diese 3 sind nicht rechtwinklige Kanten.

II. Die Linienwinkel: Jedes Dreieck hat 3 (Linien-) Winkel, jedes Viereck 4 Winkel. In den beiden Dreiecken liegen 6, in den 3 Vierecken 12 Winkel; an dem dreiseitigen Prisma liegen $12 + 6 = 18$ Winkel. An jeder Ecke stoßen 3 dieser Winkel zusammen. Die 12 Winkel der Vierecke sind rechte, die 6 Winkel der Dreiecke sind nicht rechte Winkel. Je 2 Winkel der beiden gegenüberliegenden Dreiecke haben dieselbe Lage; die Schenkel derselben sind paarweise parallel. In jedem Dreiecke steht jeder Seite ein Winkel gegenüber; in jedem Vierecke steht jeder Seite eine Seite und jedem Winkel ein Winkel gegenüber.

e) Die Achsen: An dem dreiseitigen Prisma sind denkbar: 1 Flächenachse, 3 Flächenkantenachsen oder 3 Kantenflächenachsen, 6 Eckenkantenachsen oder 6 Kanteneckenachsen.

Um die Oberfläche der dreiseitigen senkrechten Säule zu finden, muß man 1) die Seiten der Grundfläche messen, 2) die zu einer Seite gehörige Höhe der Grundflächen, 3) endlich die Höhe der Säule und aus diesen einzelnen Größen den Inhalt der Grundfläche und oberen und jeder Seitenfläche berechnen und alle einzelnen addiren; — oder mit andern Worten: Man berechne den Flächeninhalt der beiden Dreiecke der Grund- und Oberfläche, ferner den Flächeninhalt der Seitenoblongen, addire diese 5 Flächeninhalte zusammen, so erhält man die Oberfläche der ganzen dreiseitigen Säule. Der Cubikinhalt der dreiseitigen Säule ist gleich der Grundfläche mal Höhe mal entsprechende Cubikeinheit.

Allgemeine Merkmale der senkrechten Säulen:

1) Alle Säulen (Prismen) haben drei Ausdehnungen. 2) Alle haben ein Dreieck, Viereck oder irgend eine gradlinige Figur zur

Grundfläche und eine ebenso große, congruente, parallele obere Fläche. 3) Alle haben so viele Oblongen zu Seitenflächen, als die Grundfläche Seiten hat. Diese haben alle gleiche Höhe; ist noch ihre Grundlinie gleich, was davon abhängt, ob die Grundfläche gleichseitig ist oder nicht, so sind dieselben congruent; ist die Grundfläche ein Parallelogramm, so sind die gegenüberliegenden Seitenflächen wenigstens gleich. 4) Alle Seitenflächen stehen zu der untern und oberen Fläche senkrecht, ebenso stehen alle Kanten zur untern oder oberen Fläche senkrecht. 5) Die Flächenwinkel, welche die Seitenflächen mit einander bilden, entsprechen der Größe der Winkel, welche sich in der Grundflächenfigur finden; sind hier rechte, wie beim Quadrat oder Oblongum, so sind die Flächenwinkel der Seitenflächen auch rechte. 6) Alle Seitenkanten sind unter einander parallel, ebenso alle Kanten der Grund- und oberen Fläche. 7) Alle haben zwei Flächen mehr, als die Grundfläche Seiten oder Ecken hat. 8) Alle haben so viele Seitenflächen, als die Grundfläche Seiten hat. 9) Alle haben zweimal soviel Ecken, als die Grundfläche Seiten hat oder Ecken. 10) Zu einer Ecke oder einem Körperwinkel gehören stets 3 ebene Winkel. 11) Die Oberfläche wird gefunden durch Berechnung und Addition der einzelnen Flächen. 12) Der Cubikinhalt ist stets gleich der Grundfläche mal Höhe mal entsprechende Cubikeinheit. 13) Alle senkrechten Säulen entstehen dadurch, daß irgend eine geradlinige Figur sich senkrecht nach oben bewegt, so daß jede Lage zur früheren parallel bleibt.

Die schiefen Säulen oder schiefen Prismen.

Die schiefen Säulen unterscheiden sich von den senkrechten Säulen wesentlich darin, daß die Seitenflächen auf der Grund- und oberen Fläche nicht mehr senkrecht stehen, sondern schief, daß also die Flächenwinkel, welche die Grund- und obere Fläche mit den Seitenflächen bildet, nicht mehr rechte, sondern schiefe sind. Waren die Seitenflächen bei den senkrechten Säulen stets Oblongen, so sind dieselben bei den schiefen Säulen schiefwinklige Parallelogramme und zwar Rhomben oder Rhomboide, je nachdem die Seite der Grundfläche und die Seitenkante entweder an Größe gleich oder ungleich sind. Die Grundfläche ist entweder ein Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w. oder irgend eine geradlinige Figur, welche sich schief zur Grundfläche so emporbewegt, daß eine jede Lage zur vorhergehenden parallel ist. Die Seitenflächen können unter sich gleich oder ungleich sein, je nachdem die Kanten der Grundfläche einander gleich sind oder nicht. Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, z. B. ein Quadrat und bewegt sich dasselbe schief soweit empor, als die Seite des Quadrats lang ist, so sind die Seitenflächen lauter Rhomben, welche die Quadratseite zur Seite haben; bewegt sich ein Oblongum schief aufwärts, soweit als die lange Seite des Oblongums beträgt, so müssen die Seitenflächen theils Rhomben werden mit der langen Seite, theils Rhomboide, welche die kurze Seite zur Grundlinie und die lange Seite des Oblongums zur andern Seite haben. Bewegt sich ein Rhombus aufwärts, so daß die schiefe Linie der Seite des Rhombus gleich wird, so hat die Säule lauter Rhomben zu Seitenflächen; bewegt sie sich durch eine längere oder kürzere Linie, so entstehen Rhomboide; bewegt sich ein Rhomboid als Grundfläche aufwärts und zwar so weit, als die größere Seite beträgt, so erhält man theils Rhomben, theils Rhomboide zu Seitenflächen. Die obere Fläche ist immer mit der untern stets congruent, denn die untere bewegt sich so lange nach oben, bis sie in der oberen ruht. Bewegt sich eine regelmäßige Figur nach oben, so werden dadurch, wie lang auch die schiefe Linie sein mag, durch welche sich die Grundfläche hindurch bewegt, die Seitenflächen alle unter sich congruent.

Bei den geraden Säulen ist die senkrechte Achse zugleich auch die Höhe, bei den schiefen dagegen ist die Höhe ein Perpendikel von der oberen Fläche zur Grundfläche oder zu deren Verlängerung.

Die Walze, die runde Säule oder der Cylinder.

Wenn der Cylinder liegt, so heißt er Walze, wenn er steht, so heißt er Säule. Er hat zwei gerade oder ebene Flächen und eine krumme Fläche zu Gränzen. Die beiden ebenen Flächen, die Grundflächen des Cylinders, liegen einander parallel gegenüber, sind gleich groß und beide von einer krummen Linie begränzt, welche von den Mittelpunkten dieser Flächen gleich weit absteht. Die Seitenfläche ist krumm. In der Richtung von einer Grundfläche zur andern lassen sich gerade Linien in ihr ziehen. Auf dieser krummen Fläche kann man den Cylinder rollend fortschieben. Daher der Name Walze. Die Grundflächen stehen senkrecht auf der Seitenfläche. Die gerade Linie, von der Mitte der einen Grundfläche zur Mitte der andern gezogen ist, ist die Achse des Cylinders, um welche er sich drehend schwingt oder umwälzt. Dreht man ein Rechteck um eine seiner Seiten, so beschreibt die, dieser ruhenden Seite gegenüber liegende Seite die krumme Seitenfläche eines Cylinders und die beiden andern Seiten bilden die beiden Grundflächen desselben.

Es giebt ebene oder gerade und krumme Flächen. Jene heißen auch schlechthin Ebenen. Es sind solche Flächen, welche nach allen Seiten gerade sind, oder auf und in welche nach allen Richtungen gerade Linien gezogen werden können. Diejenigen Flächen, welche nicht gerade sind, heißen krumme Flächen. So wie es gerade und krumme Flächen giebt, so giebt es auch gerade und krumme Linien. Eine gerade Linie ist eine solche Linie, deren Theile nach einer und derselben Richtung hin liegen; jede andere Linie, die weder gerade, noch aus geraden Linien zusammengesetzt ist, heißt krumm; eine Linie, welche aus mehreren Geraden in verschiedenen Richtungen zusammengesetzt ist, nennt man eine gebrochene Linie, und eine Linie, die aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist, heißt eine gemischte Linie.

Eine ebene Fläche, welche von einer krummen Linie begränzt ist, die von einem Punkte in ihr, dem Mittelpunkte oder Centrum der Ebene, überall gleichweit entfernt ist, heißt eine Kreisebene oder schlechthin ein Kreis oder Cirkel. Ein Kreis entsteht, wenn eine gerade Linie in einer Ebene um ihren einen festen Endpunkt so lange stetig herumbewegt wird, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage tritt. Daher ist ein Kreis eine ebene Figur, deren Grenzpunkte von einem Punkte innerhalb der Figur gleichweit entfernt sind. Die krumme Grenzlinie des Kreises heißt Kreislinie oder Peripherie und ein Theil derselben Bogen. Eine gerade Linie vom Mittelpunkte bis zur Peripherie heißt Radius oder Halbmesser; alle Radien eines Kreises sind einander gleich. Eine gerade Linie zwischen zwei Punkten der Pheripherie heißt Sehne oder Chorde. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt des Kreises, so heißt sie Durchmesser oder Diameter. Dieser besteht aus zwei Radien; daher sind auch alle Durchmesser eines Kreises einander gleich. Jede Gerade, die den Kreis schneidet, heißt Sekante. Eine gerade Linie, die mit der Kreislinie nur einen einzigen Punkt gemein hat, und auch verlängert dieselbe nicht schneidet, heißt Berührungslinie oder Tangente, und den Punkt, welchen die Berührungslinie mit der Kreislinie gemein hat, nennt man Berührungspunkt. Auch krumme Linien berühren einander, wenn sie, ohne einander zu schneiden, einen Punkt gemein haben.

Ein Mittelpunkts- oder Centriwinkel ist ein solcher Winkel, der von zwei Radien eines Kreises gebildet wird und dessen Scheitel im Mittelpunkte des Kreises liegt. Ein Peripheriewinkel ist ein solcher Winkel, der von zwei Sehnen eines Kreises gebildet wird und dessen Scheitel in der Peripherie des Kreises liegt. Derjenige Theil der Kreisfläche, der von einer Sehne und dem zugehörigen Bogen eingeschlossen ist, heißt Segment oder Abschnitt, und der Theil der Kreisfläche, der von zwei Radien und dem zugehörigen Bogen eingeschlossen ist, wird Sector oder Ausschnitt genannt. Der Theil der Kreisfläche, der von einem Durchmesser und dem zugehörigen Bogen eingeschlossen ist, heißt Halbkreis.

Durch den Kreis hat man auch ein Mittel der Winkelmessung. Denn der Halbmesser vollendet entweder eine Drehung, welche kleiner ist, als der vierte Theil der Umdrehung oder einen spitzen Winkel oder eine Drehung, welche dem vierten Theil der Umdrehung gleich ist oder einen rechten Winkel einen Rechten oder eine Drehung, größer als den vierten Theil und kleiner als die Hälfte der ganzen Umdrehung, oder einen stumpfen Winkel, ferner eine halbe Umdrehung oder einen gestreckten Winkel und endlich eine Drehung, welche größer als die halbe, aber kleiner als die ganze Umdrehung ist oder einen überstumpfen Winkel. Die spitzen, rechten und stumpfen Winkel heißen auch hohle; daher die drei Hauptarten der Winkel: hohle, gestreckte und überstumpfe. Die spitzen, stumpfen und überstumpfen Winkel können unter sich gleich sein, müssen es aber nicht, die rechten und gestreckten Winkel müssen als Viertel und Hälften derselben Umdrehung einander gleich sein. Wie die Hälften, Viertel des Kreisbogens, so sind auch die 360 Theile desselben einander gleich: den 360. Theil des ganzen Kreisumfanges nennt man einen Grad; verbindet man die Endpunkte des Grades durch zwei Radien mit dem Mittelpunkte, so hat man einen kleinen Winkel, welcher Winkelgrad heißt und auch entsteht, wenn man den Radius sich um den 360. Theil der ganzen Umdrehung drehen läßt. 360 solcher kleinen Winkelchen lassen sich mit dem Scheitel und je einem Schenkel so zusammenlegen, daß sie gerade die Kreisebene ausfüllen.

Will man einen Körper nur von geraden Flächen begrenzen, so sind wenigstens 4 gerade oder ebene Flächen nothwendig, um einen Raum einzuschließen, aber schon zwei ebene und eine einseitig gekrümmte (Cylinder), ferner eine ebene und eine einseitig gekrümmte (Kegel), endlich sogar eine einzige allseitig gekrümmte Oberfläche (Kugel) können einen Körperraum begrenzen.

Man kann sich die senkrechte Walze oder den senkrechten Cylinder dadurch entstanden denken, daß sich ein Kreis senkrecht nach oben bewegt und zwar bis zu einer solchen Höhe, daß dieselbe größer ist, als der Durchmesser des Kreises. Denn wenn auch ein solcher Körper mit einer Höhe gleich oder kleiner als der Durchmesser immer noch unter den allgemeinen Begriff des Cylinders fiele, so pflegt man doch denselben, wie z. B. einen Thaler oder Rubel, nicht einen Cylinder, sondern eine Scheibe zu nennen, weil die Höhe oder Länge desselben nicht größrr ist als der Durchmesser. Anstatt daß aber der Kreis sich senkrecht nach oben beweget, kann man sich auch vorstellen, daß derselbe bei seiner Bewegung nach oben rechts oder links, nach vorn oder hinten abweiche, wodurch der schiefe Cylinder entsteht. Bei dem geraden Cylinder ist die Achse zugleich die Höhe, bei dem schiefen dagegen ist die Höhe ein Perpendikel von der oberen Fläche zur Grundfläche. Der senkrechte Cylinder kann auch noch anders entstehen: wenn man nämlich ein Rechteck oder Oblongum um eine seiner Seiten so lange herumdreht, bis es wieder in seine ursprüngliche Lage tritt. In diesem Falle beschreiben alle Perpendikel auf die Umdrehungsseite Kreise, die einander gleich sind. Daher wird jeder Schnitt des geraden Cylinders senkrecht auf die Achse ein Kreis, jeder Schnitt, in welchem die Achse liegt, ein Rechteck sein.

Bei den bisher betrachteten Körpern waren die Kanten gerade Linien in verschiedener Anzahl; beim Cylinder sind nur zwei Kanten da, welche durch den Durchschnitt der gekrümmten Seitenfläche mit der oberen und unteren Fläche entstehen und krumme, ja Kreislinien sind. Der Cylinder unterscheidet sich auch von den früheren Körpern dadurch, daß derselbe keine Ecken hat.

Die Seitenfläche steht beim senkrechten Cylinder zur obern und untern Fläche senkrecht, daher ist der gebildete Flächenwinkel ein Rechter, ebenso steht die Achse oder die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte auf den Endflächen senkrecht, daher die Linienflächenwinkel Rechte sind.

Anstatt eines Kreises kann man aber auch einen länglich runden Kreis oder eine Ellipse sich senkrecht oder schief nach oben bewegt denken; es würde dann eine senkrechte oder schief elliptische Walze entstehen. Legt man bei einer stehenden Walze eine Ebene parallel zur Grundfläche und läßt dieselbe die Walze durchschneiden, so ist der Durchschnitt ein Kreis, welcher mit der oberen und unteren Kreisfläche congruent ist. Wird aber der Schnitt schief gegen die Achse des Cylinders geführt, so entsteht die Ellipse, ein länglich runder Kreis oder Langrund, wo man einen langen und einen kurzen Durchmesser hat und in dem langen Durchmesser zwei Punkte, welche Brennpunkte heißen.

Um die krummen Linien, welche die obere und untere Kreisfläche begrenzen, zu messen, kann man ein Band um die Seitenfläche des Cylinders schlingen, dasselbe dann gerade ziehen und dann mit einem Längenmaße messen. Man würde dann finden, daß wenn der Durchmesser 7 Linien, Zolle oder Fuße hat, der Umfang 22 Linien, Zolle oder Fuße haben muß, so daß also der Umfang $3\,{}^1/_7$ mal so groß wäre, als der Durchmesser. Man findet demnach den Umfang des Kreises, wenn man den Durchmesser mit einem Längenmaße mißt und die erhaltene Zahl $3\,{}^1/_7$ mal nimmt.

Zu der Wahrheit, daß der Durchmesser in dem Kreise $3\,{}^1/_7$ mal (oder genauer $3,14 = 3\,{}^7/_{50}$ mal) enthalten sei, ist man durch den Lehrsatz gekommen, daß die Seite eines regelmäßigen Sechsecks im Kreise dem Radius desselben gleich ist. Ist aber der Radius 6 mal, so ist der Durchmesser natürlich 3 mal in dem Kreise enthalten. Verändert man das erwähnte regelmäßige Sechseck im Kreise zu einem regelmäßigen Zwölfeck, das Zwölfeck zu einem regelmäßigen Vierundzwanzigeck u. s. w., so werden die Seiten des regelmäßigen Polygons allmählig kleiner und nähern sich immer mehr dem Kreise, ja sie fallen zuletzt mit dem Kreise ganz zusammen und somit ist der Kreis als ein Polygon von unzählig kleinen Seiten zu betrachten, — und war der Radius 6 mal oder der Durchmesser 3 mal wenigstens in dem Kreise enthalten bei dem regelmäßigen Sechseck, so ergiebt sich durch die Verkleinerung der Seiten des Polygons noch ein Bruch $3\,{}^1/_7$ (genauer $3,14 = 3\,{}^7/_{50}$).

Weiß man den Umfang des Kreises, so kann man auch den Flächeninhalt desselben berechnen, indem man den ganzen Kreis als ein Dreieck betrachtet, dessen Grundlinie gleich der Peripherie und dessen Höhe gleich dem Radius ist. Da aber der Flächeninhalt eines Dreiecks gleich ist der Grundlinie mal Höhe dividirt durch 2, so ist auch der Flächeninhalt eines Kreises gleich der Peripherie mal dem Radius dividirt durch 2, oder Peripherie mal dem halben Radius.

Will man den Flächeninhalt der gekrümmten Seitenfläche oder des Mantels eines Cylinders berechnen, so braucht man nur den Mantel aufzuwickeln und in eine Ebene zu legen, dann ist derselbe ein Oblongum, welches des Cylinders Höhe zur Höhe und den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie hatte. Weiß man somit den Flächeninhalt des Mantels und den Flächeninhalt der beiden Grundflächen des Cylinders, so findet man die Gesammtoberfläche eines Cylinders, wenn man den Flächeninhalt des Mantels mit dem Flächeninhalte der beiden Grundflächen addirt.

Soll der Cubikinhalt des Cylinders berechnet werden, so betrachtet man denselben als eine Säule und hat dann Grundfläche mal Höhe, z. B. Es ist ein Cylinder von 7 Ellen Höhe und 4 Ellen Durchmesser gegeben. Der Inhalt der Grundfläche dieses Cylinders beträgt $12^{56}/_{100}$ □ Ellen, die mit 7 multiplizirt $87^{92}/_{100}$ Cubikellen für den körperlichen Inhalt des Cylinders geben.

Der Schwerpunkt eines Kreises oder eines kreisförmigen Ringes liegt im Mittelpunkte desselben. Der Schwerpunkt eines Cylinders liegt in der Mitte seiner Achse oder der Geraden zwischen den beiden Mittelpunkten.

Welchen Schatten wirft ein Cylinder? Die einfachsten Fälle sind 1) daß der leuchtende Punkt dem Mittelpunkte senkrecht gegenüberliegt und die verlängerten Lichtstrahlen zur Schattenfläche senkrecht stehen, so wird man einen Kreis als Schatten sehen; stände 2) der Lichtpunkt dem Mittelpunkte einer der Grundflächen zwar senkrecht gegenüber, fielen aber die zu verlängernden Lichtstrahlen schief auf die Schattenfläche, so würde man einen ins Längliche gezogenen Kreis sehen. Fielen endlich 3) die Lichtstrahlen wagerecht auf den senkrecht stehenden Kegel, so würde man als Schatten an der Wand ein Oblongum sehen, dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich und dessen obere und untere Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich wäre. Beim Schiefeinfallen der Sonnenstrahlen würde das Oblongum sich zu einem Rhomboid umgestalten.

Die Pyramide oder Spitzsäule.

Eine Pyramide kann auf verschiedene Weise entstehen. So kann sich im einfachsten Falle irgend ein Dreieck senkrecht oder schief, mit seiner früheren Lage stets parallel nach oben bewegen und dabei nach einem bestimmten Gesetze so lange an Größe abnehmen, bis dasselbe endlich zu einem Punkte zusammenschrumpft. Man könnte aber auch drei Winkel mit den zwischen ihren Schenkeln liegenden Ebenen so zusammenhalten, daß sie eine körperliche Ecke bildeten und dieselbe durch eine vierte Ebene, welche ein Dreieck werden müßte, durchschneiden.

Die dreiseitige Pyramide ist ein von 4 Dreiecken eingeschlossener Körper. Dieselbe hat 3 Ausdehnungen; die eine von rechts nach links, die zweite von vorn nach hinten, die dritte von unten nach oben. Das hat dieselbe mit den früheren Körpern gemein, ebenso, daß dieselbe von ebenen, geradlinigen Körpern eingeschlossen ist. Die Grundfläche ist ein Dreieck, auf welchem die Pyramide steht; der Seitenflächen, welche nach oben in eine Spitze zusammenlaufen, giebt es drei. Man findet 6 Kanten, nämlich: 3 Grundflächenkanten und 3 Seitenkanten, 4 Ecken, von denen jede durch drei ebene Winkel gebildet und eine die Spitze ist. Also die Kantenzahl ist 2mal so groß, als die Seitenzahl der Grundfläche, die Eckenzahl um 1 größer. Je nach der Beschaffenheit der Grundfläche, ob dieselbe ein gleichseitiges, gleichschenkliges, ungleichseitiges, recht-, stumpf-, oder spitzwinkliges Dreieck ist, gestaltet sich die Pyramide anders. Zwei Seitenflächen können höchstens auf der Grundfläche senkrecht stehen, die dritte muß stets schief stehen und einen Flächenwinkel, kleiner als 90^o bilden. Was die Winkel der Grundfläche anlangt, so kann unter denselben höchstens ein rechter oder stumpfer sein, dasselbe gilt von den Winkeln der Seitenflächen, da dieselben auch Dreiecke sind. Heißt man die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche die Höhe und fällt diese noch innerhalb der Grundfläche, so werden die Flächenwinkel, welche die Seitenflächen mit der Grundfläche bilden, kleiner als 90^o; fällt die Höhe mit ihrem Fußpunkte in den Umfang des Dreiecks, so steht auch eine von den Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche und man hat einen rechten Flächenwinkel und zwei spitze, welche die Seitenflächen mit der Grundfläche bilden. Man könnte auch sagen, fällt die Höhe in eine Seitenfläche, so steht dieselbe auf der Grundfläche senkrecht; fällt die Höhe mit einer Seitenkante zusammen, so stehen 2 Seitenflächen — aber nicht mehr auf der Grundfläche senkrecht. Fällt endlich die Höhe weiter innerhalb der Grundfläche, noch nicht in den Umfang, sondern in die verlängert zu denkende Grundfläche, so muß der eine Flächenwinkel stumpf werden. Ist das Grundflächendreieck rechtwinklig und stehen auf den beiden Katheten zwei rechtwinklige Dreiecke senkrecht, welche die Höhe oder eine Kathete gemein haben, so bilden zwei Seitenflächen mit der Grundfläche rechte Flächenwinkel; der dritte muß dann schief und zwar spitz sein.

Man kann sich aber auch anstatt einer dreieckigen Grundfläche eine beliebige vier-, fünf-, sechs- und mehrseitige Grundfläche denken, durch deren Aufwärtsbewegung die mehrseitige Pyramide ge bildet wird.

Legt man durch die Spitze einer Pyramide und die Höhe eine Ebene senkrecht zur Grundfläche, so muß die Durchschnittsfigur ein rechtwinkliges Dreieck sein, wenn die Höhe in eine Seitenfläche der Pyramide fällt; das Dreieck wird spitzwinklig, wenn der Fußpunkt der Höhe innerhalb der Grundfläche liegt, und stumpfwinklig, wenn dieser Fußpunkt in die zu verlängernde Grundfläche fällt.

Sind die Seitenkanten einer Pyramide gleich, so muß die Grundfläche einen nach den Ecken centrischen Punkt haben; es geht ferner das aus dem Scheitel auf die Grundfläche gefällte Perpendikel durch den Mittelpunkt derselben, weil die Fußpunkte der Seitenkanten vom Fußpunkte der Höhe gleiche Entfernung haben. Setzt man die Seitenflächen einer Pyramide als gleichschenklige, congruente Dreiecke voraus, so ist auch die Grundfläche gleichseitig, centrisch nach den Ecken und das vom Scheitelpunkt gefällte Perpendikel trifft den centrischen Punkt. Die Grundfläche ist also auch centrisch nach den Seiten. Eine Pyramide ist demnach gerade, wenn die Seitenflächen derselben gleichschenklige congruente Dreiecke sind. Die Geradheit einer Pyramide ergiebt sich auch, wenn sie nur gleichschenklige Dreiecke zu Seitenflächen hat und diese mit der Grundfläche gleiche Winkel bilden; denn die Grundfläche ist dann nach Ecken und Seiten centrisch, während die Senkrechte aus dem Scheitel durch den Mittelpunkt der Grundfläche geht.

Da eine Pyramide durch Bewegung eines Vielecks nach einem bestimmten Gesetze in der Richtung nach oben entstand, so kann man sich auch denken, daß dasselbe Vieleck nach demselben Gesetze und in derselben Weise sich wiederholt bewegte, so würden Pyramiden entstehen, welche als nach einem und demselben Bildungsgesetze entstanden, in Bezug auf Größe und Gestalt mit einander übereinstimmten oder congruent wären. Denkt man sich den von der einen eingenommenen Raum leer, so könnte man jede von den übrigen so in denselben hineinschieben, daß er den Raum derselben vollkommen ausfüllte. Zwei solche Pyramiden stimmten in jeder Beziehung mit einander überein — also in den Grundflächen, in der Anzahl und Congruenz und Aufeinanderfolge der Seitenflächen, in der Größe und Aufeinanderfolge der Seitenkanten, der Flächenwinkel u. s. w. — Wollte man wissen, welche von den Bestandtheilen einer Pyramide man kennen müßte, um aus denselben die Pyramide zu bilden, so daß dieselbe an Gestalt und Größe bestimmt wäre, so daß die wiederholt gebildete Pyramide allen früheren congruent wäre. Der Fälle dieser Art sind verschiedene. So ist z. B. die Pyramide, welche von 4 gleichseitigen, unter sich congruenten Dreiecken eingeschlossen ist und das Tetraeder oder der Vierflächner genannt wird, schon bestimmt, wenn man eine Kante oder die Seite des gleichseitigen Dreiecks kennt. Denn aus derselben kann man das gleichseitige Dreieck, welches die Grundfläche bildet, zeichnen und die übrigen dann so anlegen, daß sich die Kanten an einander anschließend zur Spitze zusammenlaufen und dabei die Flächenwinkel zur Grundfläche und unter sich selbst mit Nothwendigkeit bilden. Ebenso könnte man leicht eine gerade Pyramide bauen aus der Grundfläche, welche eine regelmäßige Figur wäre und aus einer der congruenten Seitenflächen u. s. w. Kennt man bei einer Pyramide die an der Spitze liegenden Flächen nach Größe, Gestalt und Aufeinanderfolge und das Raumvieleck, welches durch dieselben gebildet wird, und die Länge der Kanten, welche mit der Größe und Gestalt der Flächen gegeben ist, so kennt man überhaupt die Pyramide oder dieselbe ist bestimmt.

An zwei Pyramiden kann man oft ganz dieselben, an Gehalt und Größe gleichen Bestandtheile voraussetzen; aber was an der einen von einem bestimmten Punkte aus rechts herum, kann bei der andern links herum liegen, was durch Drehung des erzeugenden Dreiecks in entgegengesetztem Sinne entstanden sein kann. Solche Pyramiden heißen symetrisch. Man müßte eine von beiden wie einen Handschuh erst umstülpen, d. h. die innere Seite nach Außen kehren, wenn Congruenz stattfinden sollte. Bei symetrischen Dreiecken braucht man nur das eine von beiden umzudrehen. Symetrisch gleich oder blos symetrisch heißen daher zwei Körper, die zwar in allen Stücken übereinstimmen, aber niemals zusammenfallen können, in welche Lage man sie auch bringen mag, weil die einzelnen Stücke bei dem einen Körper in entgegengesetzter Ordnung auf einander folgen, als bei dem andern. So ist z. B. jedes Spiegelbild eines Körpers diesem symetrisch gleich. Ebenso ein Paar Handschuhe.

Worin stimmen die Pyramiden mit den Säulen überein und worin unterscheiden sie sich von denselben? Sowohl die Säulen, als auch die Pyramiden haben drei Ausdehnungen; beide sind von ebenen, geradlinigen Figuren eingeschlossen; beide haben eine gewisse Größe und können sogar oft in derselben übereinstimmen; beide sind durch Bewegung einer ebenen Fläche von unten nach oben entstanden. Die Unterschiede bestehen darin 1) daß die Säule zwei congruente Flächen, die untere und obere besitzt, welche beide parallel sind, während die Pyramide nur eine mehrseitige Grundfläche besitzt, aber keine obere, derselben parallele und congruente, weil dieselbe bei der Bewegung nach oben zum Punkte zusammengeschrumpft ist und Spitze heißt; 2) sieht man von den Grundflächen ab und berücksichtigt die Seitenflächen, so sind dieselben bei der Säule stets Parallelogramme, bei der Pyramide Dreiecke; 3) bei der Pyramide können die Flächenwinkel, welche die Seitenflächen mit der Grundfläche bilden, nie alle rechte sein, wie bei einer senkrechten Säule; 4) bei einer Säule müssen alle Seitenkanten gleich sein, nicht so bei einer Pyramide; 5) durch Legung von Diagonalebenen zerfällt die Säule zuletzt in 2 oder mehrere dreiseitige Säulen, die Pyramide in 2 oder mehrere dreiseitige Pyramiden.

Nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche wird eine Pyramide benannt. Hat die Grundfläche drei Seiten, so heißt sie eine dreiseitige, hat die Grundfläche vier Seiten, eine vierseitige Pyramide u. s. w.

Eine Pyramide heißt regelmäßig, gerade oder senkrecht, wenn ihre Grundfläche eine regelmäßige Figur und das Perpendikel aus ihrer Spitze auf die Ebene der Grundfläche den Mittelpunkt derselben trifft. Dieses Perpendikel heißt alsdann die Achse der Pyramide. Zwei dreieckige Pyramiden sind ähnlich, wenn ihre Seiten- und Grundflächen einzeln ähnlich sind, ähnlich liegen und ihre Seitenkanten gegen die Grundfläche gleiche Neigungswinkel bilden.

Wenn man von einer Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene den obern Theil abschneidet, so heißt der übrigbleibende Körper eine abgestumpfte Pyramide, der obere Theil bis zur Spitze, Ergänzungspyramide.

Die Pyramide oder Spitzsäule ist also ein Körper, dessen Grundfläche jede beliebige geradlinige Figur ist und dessen Seitenflächen Dreiecke sind, die alle durch einen Punkt gehen, welcher außerhalb der Grundfläche liegt und die Spitze heißt. Verbindet man die Spitze der Pyramide mit dem Mittelpunkte der Grundfläche, so heißt diese Linie die Achse. Steht die Achse senkrecht auf der Grundfläche, so heißt die Pyramide gerade, im entgegengesetzten Falle eine schiefe. Bei der schiefen Pyramide ist die Höhe ein Perpendikel von der Spitze zur Grundfläche oder zu deren Verlängerung. Eine Senkrechte aus der Spitze einer Pyramide auf eine Kante ihrer Grundfläche heißt die Seitenhöhe der Pyramide.

Um den Flächeninhalt der Gesammtoberfläche der Pyramide zu finden, berechne man den Flächeninhalt der Grundfläche, der einzelnen Dreiecke, welche als Seitenflächen dienen, und addire dieselben zusammen, so hat man die ganze Oberfläche.

Um den Cubikinhalt einer Pyramide zu finden, merke man sich 1) daß 2 dreiseitige Pyramiden, welche gleiche Grundfläche und Höhe haben, an Cubikinhalt einander gleich sind. Am deutlichsten erkennt man das daran, daß das von den beiden Pyramiden aus einem mit Wasser vollständig angefüllten Gefäße verdrängte Wasser an Inhalt oder Ausdehnung gleich ist; 2) müßte man sich ein dreiseitiges Prisma machen und so zusammensetzen, daß man dasselbe in 3 an Grundfläche und Höhe gleiche Pyramiden zerlegen ließe, so daß die erste mit der zweiten, die zweite mit der dritten Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe, also gleichen Cubikinhalt hätte. Man könnte auch die drei Pyramiden, in welche sich das dreiseitige Prisma zerlegen ließe, einzeln vorher in ein mit Wasser gefülltes Gefäß werfen und sich aus der verdrängten Wassermenge überzeugen, daß die 3 Pyramiden gleichen Inhalt haben. Man käme dann 3) zu dem Satze: Eine jede Pyramide ist der dritte Theil eines entsprechenden dreiseitigen Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe. Da aber der Cubikinhalt des dreiseitigen Prismas gleich ist der Grundfläche mal Höhe, so ist der Cubikinhalt der dreiseitigen Pyramide und jeder andern Pyramide gleich der Grundfläche mal Höhe dividirt durch drei. So sei z. B. die Grundfläche einer Pyramide, deren Höhe 132 Fuß beträgt, ein Rechteck, dessen Länge 20 Fuß und dessen Breite 16 Fuß; folglich ist der Inhalt dieser Grundfläche 320 □ Fuß. Der dritte Theil der Höhe dieser Pyramide ist 34 Fuß; multiplicirt man daher 320 mit 34, so erhält man 10,880 Cubikfuß als körperlichen Inhalt der Pyramide.

Um eine abgestumpfte Pyramide ihrem Cubikinhalte nach zu bestimmen, ergänze man die abgestumpfte Pyramide zu einer ganzen, berechne die ganze Pyramide und die Ergänzungspyramide; ziehe darauf die Ergänzungspyramide von der ganzen Pyramide ab, so giebt das den Inhalt der abgestumpften Pyramide.

Der Kegel.

Wie man aus jedem Prisma einen Cylinder erhalten kann, indem man die Seitenzahl der beiden Grundflächen immer weiter verdoppelt, so daß zuletzt die Polygone der Grundflächen sich einem Kreise nähern, ebenso kann man aus jeder Pyramide einen Kegel erhalten, wenn man die Seitenzahl der Grundfläche immer weiter verdoppelt, bis endlich aus dem Polygon der Grundfläche ein Kreis wird.

Sind die Flächen, welche einen Körper einschließen, gerade Flächen, so braucht man derselben wenigstens 4 zur vollständigen Begrenzung eines Körpers, wie z. B. bei der dreiseitigen Pyramide; der Cylinder war schon durch 3 Flächen vollständig begrenzt, von denen zwei zwar eben, aber krummlinig begrenzt waren, die dritte eine einseitig gekrümmte Fläche war; bei dem Kegel haben wir nur zwei Begrenzungsflächen. Die eine derselben, die Grundfläche, ist eine ebene, krummlinig begrenzte, eine Kreisfläche; die andere, der Mantel, ist eine einseitig gekrümmte. In derselben kann man nur von der Spitze nach irgend einem Punkte des Umfanges der Grundfläche eine Gerade ziehen, also in der Richtung von oben nach unten. Demnach ist der Kegel ein solcher Körper, dessen Grundfläche ein Kreis und dessen Seitenfläche eine krumme Fläche ist, die durch einen außerhalb der Grundfläche befindlichen festen Punkt geht. Der Kreis heißt die Grundfläche, und der feste Punkt die Spitze des Kegels. Die Verbindungslinie von der Spitze bis zur Mitte der

Grundfläche heißt die Achse. Steht die Achse senkrecht auf der Grundfläche, so heißt der Kegel ein gerader und bei dem geraden Kegel ist die Achse zugleich die Höhe des Kegels, denn unter der Höhe des Kegels versteht man die senkrechte Entfernung der Spitze von der Grundfläche. Steht die Achse nicht senkrecht auf der Grundfläche, so heißt der Kegel ein schiefer; bei dem schiefen Kegel ist die Höhe ein Perpendikel von der Spitze zur Grundfläche oder zu deren Verlängerung, falls die Spitze über die Grundfläche hinaus geneigt ist. Die krumme Fläche, welche den Kegel einschließt, heißt Kegelfläche oder Mantel des Kegels. Die Entfernung der Spitze von einem Punkte der Peripherie der Grundfläche heißt die Seitenhöhe des Kegels. Wenn man von einem Kegel durch eine mit der Grundfläche Ebene den obern Theil abschneidet, so heißt der übrigbleibende Körper ein abgestumpfter Kegel, der obere Theil bis zur Spitze heißt ein Ergänzungskegel.

Man kann sich die Entstehung eines Kegels auch noch anders denken. Wenn sich nämlich eine Kreisfläche entweder senkrecht oder schief nach oben bewegt, so daß jede neue Lage derselben zur ursprünglichen parallel bleibt, dabei die sich nach oben bewegende Kreisfläche ihre Größe allmählig in gleicher Weise verändert und diese Veränderung so lange fortsetzt, bis der ganze Kreis zu einem Punkte oder zu einer Spitze zusammenschrumpft.

Ein gerader Kegel entsteht auch noch dadurch, wenn ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten so lange herumgedreht wird, bis es wieder in seine ursprüngliche Lage tritt. Es beschreibt dann jeder Punkt der Hypotenuse dieses Dreiecks einen Kreis; folglich muß jede Durchschnittsebene, die parallel der Grundfläche eines geraden Kegels durch denselben gelegt wird, eine Kreisfläche sein, und jeder ebene Schnitt, in welchem die Achse liegt, ein Dreieck bilden; dieses Dreieck wird einmal ein gleichschenkliges, ein anderes Mal ein ungleichseitiges sein; ein gerader Kegel bildet, wenn man denselben der Achse entlang durchschneidet, stets nur gleichschenklige Dreiecke, — der schiefe Kegel dagegen bildet gleichschenklige und ungleichseitige Dreiecke bei ähnlichem Durchschnitt. Schneidet eine Ebene einen geraden Kegel der Achse entlang, so theilt dieselbe den Kegel in zwei congruente Theile. Jeder hat die halbe Grundfläche zu seiner Grundfläche, den halben Mantel als zweite und das gleichschenklige Dreieck, welches die Durchschnittsebene bildet, zur dritten Begrenzungsfläche. Die Ebene kann ferner mit der Grundfläche zusammenfallen oder doch derselben parallel liegen, dann schneidet sie den Kegelmantel in einem Kreise. Diese Durchschnittskreise werden immer kleiner, je weiter die

Schneideebene nach der Spitze zu liegt; geht diese, der Grundfläche parallel, durch die Spitze, so hat dieselbe mit dem Kegel nur einen Punkt gemein. Die schneidende Ebene kann aber nicht nur senkrecht oder so gelegt werden, daß dieselbe der Grundfläche parallel läuft und die Achse auf derselben senkrecht steht und also der Durchschnitt eine Kreislinie wird, sondern so, daß dieselbe die Achse unter schiefen Winkeln schneidet. Dann wird der Durchschnitt zwar auch eine in sich geschlossene gekrümmte Linie, aber nicht eine Kreislinie, sondern eine bezüglich runde Linie oder Ellipse; wird der Schnitt parallel zur Achse durch irgend einen Punkt des Kegelmantels gelegt, so heißt derselbe eine Hyperbel; läuft endlich der Schnitt parallel zu einer Seite, so erhält man eine krumme Linie, welche Parabel genannt wird.

Denkt man sich den Kegel von Pappe, inwendig hohl, schneidet die Pappe einer Geraden von der Spitze zu einem des Umfanges entlang durch und löst auch die Grundfläche ab, indem man dem Umfange entlang durchschneidet, so daß die Grundfläche nur noch in einem Punkte an dem Mantel hängt, so erhält man das Netz eines Kegels. Der Mantel gestaltet sich dann zu einem Kreisausschnitt, welcher zu dem Kreise gehört, der mit der Seite des Kegels als Halbmesser geschlagen werden kann und dessen Bogen so groß ist, als der Umfang der Grundfläche des Kegels.

Der Schwerpunkt eines Kegels von kreisförmiger Grundfläche liegt in der Geraden, welche von der Spitze nach dem Mittelpunkte der Grundfläche gezogen werden kann und zwar ist seine Entfernung von dem Mittelpunkte der Grundfläche $1/4$ dieser ganzen Linie.

Wenn man die Mantelfläche eines geraden Kegels ausbreitet, so ist dieselbe nach dem früher angegebenen Netze ein Kreisausschnitt, dessen Radius gleich der Seitenhöhe und dessen Bogen gleich der Peripherie der Grundfläche des Kegels ist. Ja man kann den Mantel des Kegels auch als ein Dreieck sich vorstellen, dessen Grundlinie gleich dem Umfange der Grundfläche des Kegels und dessen Höhe gleich der Seitenhöhe des Kegels ist. — Da der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks gleich ist dem halben Product aus der Grundlinie mal Höhe, so ist der Flächeninhalt des Kegelmantels gleich dem halben Producte aus der Peripherie der Grundfläche des Kegels mal der Seitenhöhe. Will man die ganze Oberfläche des Kegels haben, so berechne man einzeln den Flächeninhalt des Mantels und den der Grundfläche, darnach addire dieselben zusammen. Da die Grundfläche des Kegels ein Kreis ist, so ist nach dem Früheren der Flächeninhalt derselben gleich dem halben Producte aus der Peripherie mal dem Radius.

Man kann den Kegel als eine Pyramide von unzählig vielen

Seiten betrachten, daher stimmt die Berechnung des Kegels mit der einer Pyramide in Vielem überein.

Um den Inhalt des Mantels eines abgestumpften geraden Kegels zu finden, kann man die Seite des abgestumpften Kegels zur Seite des ganzen Kegels ergänzen und die Mantelfläche des abgestumpften Kegels als Unterschied zwischen der Mantelfläche des ganzen Kegels weniger der Mantelfläche des Ergänzungskegels ansehen. — Da die Berechnung des Kegels mit der Berechnung der Pyramide übereinstimmt und der Cubikinhalt einer Pyramide gleich war dem dritten Theile aus der Grundfläche mal Höhe, so ist auch der Cubikinhalt eines Kegels gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche mal Höhe. So wie der Cubikinhalt einer Pyramide gleich ist dem dritten Theile eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe, so ist auch der Cubikinhalt eines Kegels der dritte Theil des Körperinhalts eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe. Ferner ist der Cubikinhalt einer Pyramide nicht blos gleich dem dritten Theile eines Prismas, sondern auch eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe; ebenso ist der Cubikinhalt eines Kegels nicht blos der dritte Theil eines Cylinders, sondern auch eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe. Da man gleichfalls den Cylinder als ein Prisma von unzählig vielen Seiten betrachten kann, so ist der Cubikinhalt eines Cylinders gleich dem Cubikinhalte eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe.

Um den Cubikinhalt eines abgestumpften Kegels zu finden, ergänze man den abgestumpften Kegel zu einem ganzen, berechne den Cubikinhalt des ganzen Kegels und ziehe davon ab den Cubikinhalt des Ergänzungskegels.

Es ist ein Kegel von 33 Zoll Höhe gegeben, dessen Grundfläche 20 Zoll im Durchmesser hat; es wird folglich, da 314 □ Zoll der Inhalt dieser Grundfläche ist, 314 × 11 d. h. 3454 Cubikzoll gleich dem körperlichen Inhalte dieses Kegels sein, denn der dritte Theil des Products aus der Grundfläche und Höhe gab den Cubikinhalt des Kegels.

Die Kugel.

Dreht sich ein Halbkreis einmal ganz um seinen Durchmesser oder ein ganzer Kreis einmal halb um seinen Durchmesser, so entsteht ein nach drei Richtungen hin gleichweit ausgedehnter Körper, die Kugel. Demnach ist die Kugel ein runder Körper, an welchem alle Punkte der Oberfläche von einem innern Punkte, welcher Mittelpunkt der Kugel heißt, gleich weit entfernt sind. Wenn die Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises entsteht, so muß jeder Punkt in dem Bogen des Halbkreises bei seiner Umdrehuug einen Kreis beschreiben; demnach muß jeder ebene Schnitt durch die Kugel ein Kreis sein. Legt man die Kugel auf eine ebene Fläche, so hat sie mit der Ebene nur einen Punkt gemein; bewegt sie sich auf dem ebenen Tische nach keiner Richtung hin, so liegt die Tischplatte wagerecht. In keinerlei Richtung kann man auf der Oberfläche der Kugel eine Gerade ziehen; die Oberfläche der Kugel ist also allseitig gekrümmt und eine Gerade, auf die Oberfläche der Kugel gelegt, hat mit derselben nur einen Punkt gemein. Denn hätte dieselbe noch einen Punkt mit der Oberfläche der Kugel gemein, so hätte ja die Gerade zwei oder mehrere Punkte, welche nicht in einer und derselben Richtung lägen, was unmöglich ist. Alle Linien, welche in der Oberfläche der Kugel liegen, müssen also krumme Linien sein. Es kann aber eine Kugel auch noch auf andere Weise entstehen. So kann man sich von einem Punkte im Raume unendlich viele gerade Linien oder Strahlen auslaufend vorstellen, alle gleich lang; dann ist die Kugel der durch dieselben durchstrahlte, durch die Endpunkte der Strahlen, welche alle durch eine Fläche eingeschlossen und verbunden zu denken sind, begrenzte Raum; ebenso entsteht die Kugel, wenn sich eine Kreisfläche senkrecht einmal nach oben und nach unten bewegt und dabei nach einem bestimmten Gesetze in lückenloser Folge sich verkleinernd zu einem Punkte verschwindet. Aus der Entstehungsweise der Kugel geht hervor, daß die Kugeloberfläche eine einzige gekrümmte Fläche ist, so daß jeder Punkt derselben vom Mittelpunkte gleichweit entfernt ist. Bei einer ebenen Fläche kann ein Punkt nicht von allen Punkten derselben gleichweit abstehen.

Die von der Peripherie des Kreises erzeugte krumme Fläche heißt die Kugelfläche und der Mittelpunkt des Kreises wird auch der Mittelpunkt der Kugel genannt. Die Entfernung des Mittelpunkts von einem Punkte der Kugelfläche, welche Entfernung überall gleich ist, heißt der Radius der Kugel und die aus zwei Radien zusammengesetzte Gerade, der Durchmesser oder Diameter der Kugel. Den Durchmesser und Halbmesser einer Kugel kann man finden, wenn man die Kugel entweder in einen Schraubstock einklemmt und die Entfernung der beiden parallelen, einklemmenden Flächen mißt oder man messe den größten Umfang der Kugel und theile die erhaltene größte Peripherie durch $3\frac{1}{7}$ (genauer 3,14). Wird eine Ebene durch eine Kugel gelegt, so heißt die Durchschnittslinie auf der Oberfläche der Kugel, Kugelkreis, und geht die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel, ein größter Kreis. Ein auf der Oberfläche der Kugel gezogener Kreis theilt dieselbe in zwei Theile, die beiden Theile können entweder gleich oder ungleich sein, dann heißt ein solcher Kreis ein größter oder kleiner. Legt man durch den Kreis eine Ebene, so wird die Kugel, wenn der Schnitt durch einen großen Kreis geht, halbirt; im Gegentheile in zwei ungleiche Theile getheilt. Die größten Kreise sind alle gleich, die kleinen aber nicht. Die beiden Kugelstücke, in welche eine Kugel durch eine Ebene zerfällt, welche durch einen kleinen Kreis gelegt wird, heißen Kugelkappen, Kugelabschnitte, Kugelsegmente. Die Durchschnittslinien paralleler Ebenen auf der Oberfläche einer Kugel nennt man Parallelkreise, und den Durchmesser, der durch ihre Mittelpunkte geht, ihre Achse. Man kann auch sagen, die Achse der Kugel ist ein Durchmesser, um welchen die Kugel gedreht wird, so daß alle in demselben liegenden Punkte ruhen. Da es unendlich viele Durchmesser giebt, so giebt es auch unendlich viele Achsen. Die Endpunkte einer Achse heißen Pole. Da die Erde als eine Kugel betrachtet wird, so nennt man den Durchmesser derselben, welcher von Norden nach Süden geht und um welchen sich die Erde binnen 24 Stunden dreht, die Erdachse, ihre Endpunkte Nord- und Südpol. Jeder größte Kreis, welcher durch die Pole der Parallelkreise geht, heißt Meridian oder Mittagslinie. Den größten durch den Mittagspunkt der Kugel gehenden Parallelkreis nennt man Aequator oder Gleicher. — Derjenige Theil der Kugeloberfläche, der zwischen zwei Parallelkreisen liegt, heißt Kugelzone oder Kugelgürtel, auch einfach Gürtel, und das zwischen zwei Parallelkreisen liegende Stück der Kugel selbst wird Kugelschicht genannt. Derjenige körperliche Raum der Kugel, der durch eine beliebig durch die Kugel gelegte Ebene von derselben abgeschnitten wird, hieß Kugelabschnitt, Kugelsegment oder Kugelkappe, die krumme Oberfläche desselben wird Kugelhaube oder Kalotte genannt. Das im Mittelpunkte des Abschnittkreises errichtete und bis zur Oberfläche der Kugel verlängerte Perpendikel wird die Höhe des Kugelabschnitts genannt. — Verbindet man alle Punkte des Begrenzungskreises eines Kugelabschnitts durch Radien mit dem Mittelpunkte, oder denkt man sich über der Grundfläche eines Kugelabschnitts noch einen Kegel, welcher mit der Spitze im Mittelpunkte liegt, so heißt der Körperraum, welchen der bezeichnete Kugelabschnitt mit seinem entsprechenden Kegel einnimmt, ein Kugelausschnitt oder Kugelsektor, oder auch Kugelkegel, weil seine Grundfläche nicht eine ebene Fläche ist, sondern ein Theil der gekrümmten Kugeloberfläche. Man kann den Kugelausschnitt oder Kugelsektor auch als einen solchen körperlichen Raum der Kugel betrachten, der durch einen um die Peripherie des Kugelabschnittkreises bewegten Radius von der Kugel ausgeschnitten wird. Der Kugelausschnitt hat zu seiner Grundfläche die Kugelhaube.

Setzt man eine Gerade in Beziehung zur Kugel, so kann dieselbe außerhalb der Kugel liegen, die Kugel in einem Punkte berühren oder durch dieselbe hindurch gehen; im letzteren Falle hat dieselbe zwei Punkte mit der Oberfläche gemein. Eine Gerade liegt dann außerhalb der Kugel, wenn die Senkrechte vom Mittelpunkte der Kugel auf dieselbe gefällt, größer ist als der Halbmesser. Eine Linie erkennt man als Berührungslinie oder Tangente daran, daß der nach dem gemeinsamen Punkte gezogene Halbmesser senkrecht auf der Tangente steht.

Ist die Senkrechte vom Mittelpunkte auf die Gerade kleiner als der Halbmesser, so geht die Linie durch die Kugel hindurch, hat mit der Oberfläche zwei, mit der Kugel selbst unendlich viele Punkte gemein und heißt Kugelsehne. Geht die Gerade oder Kugelsehne durch den Mittelpunkt, so wird sie zum Kugeldurchmesser; liegt ein Theil der Kugelsehne außerhalb der Kugeloberfläche, so hat man die Kugelsekante. Die Senkrechte, welche man vom Kugelmittelpunkte nach einer Tangente fällt, trifft den Tangenzpunkt. Dreht man die Senkrechte mit der Tangente um den Radius, so erhält man eine Tangentialebene oder Berührungsebene, in welcher unendlich viele Tangenten an dem einen Punkt der Kugel liegen.

Eine Ebene in Beziehung zur Kugel gesetzt, kann die Kugel berühren d. h. einen einzigen Punkt mit der Kugeloberfläche gemein haben; hätte sie mehr Punkte mit derselben gemein, so müßte entweder die Ebene eine gekrümmte oder die Kugeloberfläche eine ebene Fläche sein. Zieht man vom Mittelpunkte der Kugel einen Halbmesser nach dem Berührungspunkte der Ebene, so muß derselbe auf der Ebene senkrecht stehen. — Hatte man eine Tangente und drehte dieselbe einmal um, so entstand die Tangential- oder Berührungsebene; so oft man die Drehung wiederholt, entsteht eine mit der vorigen in allen Punkten zusammenfallende Berührungsebene. Daher ist an einem Punkte einer Kugel eine einzige Berührungsebene möglich. Daraus folgt, daß eine Ebene, welche mit der Kugel einen Punkt gemein hat, ohne Tangenzebene zu sein, die Kugel durchschneiden muß. Da ferner von einem Punkte außerhalb der Kugel an dieselbe unzählige Berührungslinien möglich sind, so müssen auch von demselben Punkte aus unzählige Berührungsebenen möglich sein.

Größte Kreise giebt es in einer Kugel unzählig viele; alle gehen durch den Mittelpunkt der Kugel, es muß also die Durchschnittslinie zweier größten Kreise auch durch den Mittelpunkt gehen, Kugeldurchmesser sein und die größten Kreise halbiren. Alle Kugelkreise, welche auf einem solchen Durchmesser senkrecht stehen, haben den Durchmesser zur gemeinschaftlichen Achse, wie die Meridiane den Durchmesser zwischen Nord- und Südpol. Durch einen größten Kugelkreis ist die Größe und Lage der Kugel bestimmt, denn man kennt dann die Lage des Mittelpunkts derselben und ihren Halbmesser; aber ein und derselbe kleine Kugelkreis kann unendlich vielen an Größe verschiedenen Kugeln angehören. Größte Kreise müssen sich stets schneiden und halbiren; zwei andere Kreise aber, zwei kleine Kugelkreise oder ein kleiner und ein größter können zu einander parallel sein oder auch sich schneiden. Die parallelen Kreise haben dieselbe Achse und dieselben Pole; der Durchmesser der Kugel, welcher durch den einen Kugelkreis geht, steht sowohl auf diesem, als auch auf dem andern senkrecht. Umgekehrt sind Kugelkreise mit gemeinschaftlicher Achse zu einander parallel; alle parallelen Kreise setzen eine gemeinschaftliche Achse voraus; jeder durch die Achse gelegter Meridiankreis muß auf den parallelen Kreisen senkrecht stehen. Der Meridian halbirt den Aequator, welcher der größte von Osten nach Westen gehende Parallelkreis ist; legt man noch durch den Ost- und Westpunkt einen Meridian, so liegt vom Ost- zum Südpunkte hin ein Viertelkreis. Die Ebenen der beiden Meridiane schneiden sich unter einem rechten Winkel; man kann dieselben aber um ihre gemeinschaftliche Achse so drehen, daß sie sich unter jedem beliebigen Winkel zwischen 0° und 180° schneiden können. Die Meridianbogen zwischen dem Pole und Parallelkreise sind gleich; ebenso die Bogen zwischen zwei Parallelkreisen; der Pol steht vom Aequator um einen Viertelkreis oder Quadranten ab. Nicht parallele Kugelkreise müssen verschiedene Achsen haben; die beiden Achsen schneiden sich im Mittelpunkte der Kugel; Kugelkreise, deren Achsen sich schneiden, können nicht parallel sein. Zwei nicht parallele Kugelkreise schneiden sich in zwei Punkten der Kugeloberfläche; in drei Punkten können sich überhaupt zwei Kreise nicht schneiden, ohne ganz in einander zu fallen. Errichtet man die zu den sich schneidenden Kreisen gehörigen Achsen, so erhält man den Mittelpunkt der Kugel und den Halbmesser.

Der Schatten einer Kugel ist so lange kreisrund, als die Lichtstrahlen, welche durch die Kugel aufgehalten werden, bei ihrer Verlängerung zur Schattenfläche senkrecht stehen. Treffen aber die zu verlängernden Lichtstrahlen die Schattenfläche schief, so nimmt der Schatten der Kugel eine elliptische Gestalt an. Kugelförmige Körper sind in der Natur z. B. die Wassertropfen, Thautropfen, die Kegelkugel, der Ball, die Erdkugel und vermuthlich die meisten Himmelskörper.

Legt man zwischen beide Pole einen größten, von Westen nach Osten gehenden Kreis, so zerfällt die ganze Kugel in zwei Halbkugeln, eine nördliche und südliche. Diesen Kreis nannten wir den Aequator oder Gleicher. Der Aequator ist daher eine solche Kreislinie auf der Kugel, welche von beiden Polen gleich weit entfernt ist. Diejenigen Kreislinien aber, welche durch beide Pole gehen, daher den Aequator und die Parallelkreise rechtwinklig durchschneiden, hießen nach dem Frühern Meridiane oder Mittagslinien. Jeder Meridian halbirt sowohl den Aequator als auch die Parallelkreise, zerlegt ferner die ganze Kugel in zwei Hälften, eine östliche und westliche. Will mau den Aequator in 360 gleiche Theile oder Grade zerlegen, so braucht man dazu 180 Meridiane, welche sich alle in Nord- und Südpole schneiden. Einen Meridian, welcher durch einen beliebigen bestimmten Punkt der Kugel geht, betrachtet man als den ersten; der Nordpol desselben steht vom Aequator um einen Viertelkreis oder 90^{0} ab; durch jeden Grad des Meridianquadranten (d. h. den vierten Theil des Meridians) zwischen Norden und Süden lege man je einen, mit dem Aequator parallelen Kreis, so daß man 90 Parallelkreise erhält. Diese werden immer kleiner, je weiter sie sich dem Nord- oder Südpole nähern oder vom Aequatoc entfernen. Im Nord- und Südpole verschwinden dieselben oder werden zu Null. Die Grade des Aequators und Meridians müssen immer gleich bleiben, weil beide größten Kreise und alle größten Kreise einer Kugel gleich sind, also auch ihre Grade oder 360ten Theile. Ein Grad des ersten, zweiten, dritten u. s. w. Parallelkreises kann aber nicht mehr dieselbe Länge haben, weil die ganzen Kreise kleiner werden, also auch ihre gleichvielten Theile.

Die wichtigsten Bestimmungsstücke, welche an einer Kugel zu berechnen wären, sind: Der Durchmesser, der Halbmesser, die Oberfläche und der Cubikinhalt. Um den Durchmesser zu finden, müßte man eine Gerade durch den Mittelpunkt legen und dieselbe messen, aber immer ist dies Verfahren nicht leicht anwendbar. Nach dem schon früher angegebenen Verfahren könnte man eine Kugel zwischen die beiden Platten eines Schraubstocks oder einer Drehbank bringen und die Entfernung der beiden parallelen Flächen messen. Ferner findet man den Durchmesser, wenn man die Länge eines Grades oder den ganzen Umfang eines größten Kreises der Kugel berechnet; den Durchmesser erhält man nach dem Frühern, wenn man die Länge der Peripherie durch $3\frac{1}{7}$ (genauer 3,14) dividirt. Der Halbmesser ist die Hälfte des Durchmessers.

Wenn man den Halbmesser als bekannt und als Maßstab voraussetzt, so kann man bestimmen, wievielmal so groß die Oberfläche ist, als das Quadrat des Halbmessers und wievielmal so groß der Cubikinhalt der Kugel ist, als der Würfel, welcher den Halbmesser als Kante hat. Man kann dabei von verschiedenen Betrachtungsweisen ausgehen. Denkt man sich die Oberfläche der Kugel in unendlich viele und unendlich kleine Kreisflächen zerlegt und alle Punkte der einzelnen Kreisumfänge mit dem Mittelpunkte der Kugel durch gerade Linien verbunden, so zerfällt die Kugel in unendlich viele, kleine Kegel, welche zusammen den Cubikinhalt der Kugel bilden. Streng genommen kann man jede krumme Grundfläche nur annähernd als eine gerade betrachten; der Halbmesser ist die Höhe einer der kleinen Kegel, aus denen die Kugel bestand. Der erste Kegel ist nach dem Früheren = Grundfläche mal $\frac{1}{3}$ Höhe oder = Grundfläche mal $\frac{1}{3}$ Radius, der zweite = Grundfläche mal $\frac{1}{3}$ Radius u. s. w., bis die ganze Oberfläche mit $\frac{1}{3}$ Radius multiplicirt ist. Anstatt aber alle die einzelnen Grundflächen mit $\frac{1}{3}$ Radius zu multipliciren und dann die einzelnen Theile zu addiren, kann man der Kürze wegen sogleich die ganze Oberfläche der Kugel mit dem dritten Theile des Radius multipliciren, um den Cubikinhalt der Kugel zu finden. Daher ist der Cubikinhalt der Kugel gleich der Oberfläche mal $\frac{1}{3}$ Radius. Daraus ist zu ersehen, daß Cubikinhalt und Oberfläche einer Kugel von einander abhängig sind, d. h. weiß man die Oberfläche, so braucht man dieselbe nur mit dem dritten Theile des Radius zu multipliciren, um den Cubikinhalt zu finden; weiß man aber den Cubikinhalt, so braucht man denselben nur 3mal zu nehmen und noch durch den Radius zu dividiren, so findet man die Oberfläche. Eine von beiden Größen, Cubikinhalt oder Oberfläche muß als ein Vielfaches des Würfels oder Quadrats des Radius unabhängig vom andern bestimmt werden.

Um die Kugelberechnung noch mehr zu veranschaulichen, betrachten wir den Archimedischen Lehrsatz, welcher heißt: Cylinder, Kugel und Kegel verhalten sich zu einander bei gleicher Grundfläche und Höhe, wie die Zahlen 3, 2 und 1. — Beweis: Kugel, Kegel und Cylinder mögen gleichen Durchmesser und gleiche Höhe, d. h. den Durchmesser zur Höhe haben, so kann man die Kugel und den Kegel in den Cylinder beschreiben, so daß des Kegels Grundfläche mit der des Cylinders und die Spitze des Kegels mit dem Mittelpunkte der oberen parallelen Kreisfläche zusammenfällt; die in den Cylinder beschriebene Kugel würde in zwei Punkten die Mittelpunkte der beiden Kreisflächen berühren und in noch zwei Punkten den Mantel des Cylinders, welche Punkte die Endpunkte des Durchmessers wären, welcher im Mittelpunkte eines zweiten Durchmessers senkrecht stände, welcher die Mittelpunkte der beiden Kreisflächen des Cylinders verbände. Vergleicht man die drei beschriebenen Körper: Cylinder, Kegel und Kugel mit einander, und untersucht die Menge des Wassers, welche von jedem einzelnen Körper aus einem vollen Gefäße verdrängt wird, so ergiebt sich, daß der Cubikinhalt des Kegels den dritten Theil des Cylinders, die Kugel aber zwei Dritttheile von dem Cubikinhalte des Cylinders ausmacht. Um also den Cubikinhalt der Kugel zu finden, müßte man den Cubikinhalt eines Kegels, welcher denselben Durchmesser und noch den Durchmesser der Kugel zur Höhe hätte, 2mal nehmen, also: die Grundfläche des Kegels hat den Radius r, ist also r mal r mal $3\frac{1}{7}$; die Höhe $= 2r$, also der Cubikinhalt des Kegels = r mal r mal 2 r mal $3\frac{1}{7}$ mal $\frac{1}{3}$, also Cubikinhalt der Kugel = 2mal r mal r mal 2 r mal $3\frac{1}{7}$ mal $\frac{1}{3}$ oder wenn man besser ordnet $\frac{4}{3}$. r mal r mal r mal $3\frac{1}{7}$, d. h. der Cubikinhalt der Kugel wird gefunden, wenn man zum Würfel des Radius noch seinen dritten Theil setzt und die Summe mit $3\frac{1}{7}$ multiplicirt. Zu demselben Schlusse gelangt man, wenn man die Kugel mit dem Cylinder vergleicht. Denn die Grundfläche des Cylinders $= r . r . 3\frac{1}{7}$, die Höhe $= 2 r$, also der Cubikinhalt des Cylinders $= 2 . r . r . r . 3\frac{1}{7}$; davon beträgt der Cubikinhalt der Kugel $\frac{2}{3}$, daher Cubikinhalt der Kugel $= \frac{2}{3}$mal 2mal r mal r mal r mal $3\frac{1}{7}$ = $\frac{4}{3}$mal Würfel des Halbmessers mal $3\frac{1}{7}$. Untersucht man überhaupt wie viel Wasser von einer Kugel verdrängt wird, so findet man stets, daß diese Wassermasse dem Producte gleich ist, wenn man den Würfel des Halbmessers mit $\frac{4}{3}$ und $3\frac{1}{7}$ multiplicirt. Also Cubikinhalt der Kugel = $\frac{4}{3}$ mal Würfel über den Halbmesser mal $3\frac{1}{7}$.

Fassen wir nun noch einen Satz zusammen, wie man den Cubikinhalt einer Kugel berechnet, so heißt es: Man multiplicirt ihre größte Kreisfläche mit $\frac{2}{3}$ des Durchmessers, oder, welches gleichviel ist, man multiplicirt die größte Kreisfläche mit dem Durchmesser und nimmt $\frac{2}{3}$ von dem Producte; auch kann man die größte Kreisfläche 4mal nehmen und dann das Product mit dem dritten Theile des Halbmessers multipliciren, so wird man den Cubikinhalt einer Kugel erhalten. Diese Berechnung gründet sich auf den Archimedischen Lehrsatz.

Die Oberfläche der Kugel findet man, wenn man die größte Kreisfläche der Kugel viermal nimmt. Zu diesem

Schlusse kommen wir, wenn man die Kugeloberfläche als die Grenze betrachtet, welcher die Fläche eines regelmäßigen eingeschriebenen und umschriebenen Körpers zustrebt.

Die ein- und umschriebenen regelmäßigen Körper können sein z. B. ein Tetraeder oder Vielflächner, Octaeder oder Achtflächner, Ikosaeder oder Zwanzigflächner, Dodekaeder oder Zwölfflächner, Hexaeder oder Sechsflächner, auch Cubus oder Würfel genannt (welche Körper im folgenden Capitel noch näher besprochen werden). Nimmt man z. B. die Oberfläche eines Ikosaeders oder Zwanzigflächners, welches die Kugel ein- und umschreibt, so weicht die Oberfläche dieses Körpers von der Kugeloberfläche allerdings noch sehr ab, aber man findet einen, wenn auch nicht ganz genauen Näherungswerth, wenn man die Oberfläche des eingeschriebenen und umschriebenen Ikosaeders zusammenzählt und durch 2 theilt. Aber die Oberfläche des eingeschriebenen und umschriebenen Ikosaeders muß zuvor im Quadratmaße angegeben und die Quadratseite im Werthe des Radius berechnet sein. — Denkt man sich endlich die Flächenanzahl des eingeschriebenen Körpers immer wachsend, so muß sich die Oberfläche des dadurch entstehenden Polyeders immer mehr und mehr der Oberfläche der Kugel nähern und zuletzt ganz mit derselben zusammenfallen.

Ebenso gestaltet es sich mit dem Cubikinhalte, wenn man den Cubikinhalt der Kugel als die Grenze betrachtet, welchem der Cubikinhalt des ein- und umschriebenen regelmäßigen Polyeders zustrebt.

Die Oberfläche einer Kugel war also gleich viermal dem Flächeninhalte des größten Kugelkreises. Der Cubikinhalt der Kugel aber gleich dem Produkte des dritten Theils des Radius mit der Oberfläche der Kugel, — oder man multiplizirt ihre größte Kreisfläche mit $^2/_3$ des Durchmessers, — mit andern Worten: Man multiplicirt die größte Kreisfläche mit dem Durchmesser und nimmt $^2/_3$ von dem Product.

Beispiel: Es ist eine Kugel von 8 Fuß Durchmesser gegeben. Ihre größte Kreisfläche ist $50^{27}/_{100}$ □ Fuß, folglich, weil $5^1/_3$ zwei Drittel des Durchmessers, $50^{27}/_{100} \times 5^1/_3$ d. h. $268^{11}/_{100}$ Cubikfuß der Inhalt der Kugel.

Netze der besprochenen Körper, welche von den Schülern zu zeichnen, auszuschneiden u. zu pappen sind.