

TARTU ÜLIKOOL  
Majandusteaduskond  
Rahanduse ja arvestuse instituut  
Ärerahanduse ja investeringute õppetool

Dissertatsioon *magister artium* kraadi taotlemiseks majandusteaduses

Nr. 107

Marek Lambing

## **KVANTIILIL BASEERUV PORTFELLI RISKI JUHTIMINE**

Juhendajad: dotsent Otto Karma, knd (füüs-mat)

lektor Priit Sander, MA (maj)

Tartu 2004

Kaitsmine toimub Tartu Ülikooli majandusteaduskonna nõukogu koosolekul 16. juunil 2004. aastal kell 10.00 Narva mnt. 4 auditooriumis A216.

Ametlikud oponentid:                      professor Raul Kangro, PhD (mat)  
teadur Jaan Masso, MA (maj)

Majandusteaduskonna  
nõukogu sekretär:                      dotsent Kaia Philips, PhD (maj)

## SISUKORD

Sissejuhatus .....	4
1. Kvantiilil põhinevad riskimõõdud .....	8
1.1. Koherentsed riskimõõdud .....	8
1.2. <i>Value-at-Risk</i> ja <i>Expected Shortfall</i> .....	10
1.3. Subjektiivne suhtumine riski .....	16
2. Erinevate riskimõõtude põhjal portfelli koostamine .....	27
2.1. Üldine püstitus .....	27
2.2. Portfellide koostamine $\sigma$ , $VaR_\alpha$ ja $ES_\alpha$ põhjal .....	33
3. Portfellide empiiriline analüüs .....	38
3.1. Kasutatavad andmed ja tarkvara .....	38
3.2. Portfellide efektiivsuspiirid .....	40
3.3. Optimaalsete portfellide koosseis ja riski kujunemine .....	44
3.4. Portfellide eelistus jaotusfunktsioonide põhjal .....	51
Kokkuvõte .....	58
Kasutatud kirjandus .....	62
Lisad .....	67
Lisa 1. Töös kasutatavad olulisemad lühendid .....	67
Lisa 2. $VaR_\alpha$ -portfelli optimeerimise algoritm .....	68
Lisa 3. Analüüsitud aegread .....	69
Lisa 4. Arenenud aktsiaturgude tulususte karakteristikud .....	70
Lisa 5. Arenevate aktsiaturgude tulususte karakteristikud .....	71
Lisa 6. Katteta ettemüügita portfellide efektiivsuspiirid .....	72
Lisa 7. Katteta ettemüügiga portfellide efektiivsuspiirid .....	73
Lisa 8. Aktsiaturgude tulumäärade juhuslikkuse testi tulemused .....	74
Lisa 9. Optimaalsete portfellide osakaalude jaotus arenenud ja arenevate turgude vahel .....	75
Summary .....	76

## SISSEJUHATUS

Riskist rääkides saadakse intuiitiivselt aru, mida selle all mõeldakse. Samal ajal aga ei ole üheselt defineeritud riski mõiste. Üldjuhul mõistetakse riski all kas võimalust, et realiseerub oodatavast erinev tulemus või siis võimalust, et realiseerub oodatavast halvem tulemus. Finantsvarade riski seostatakse eelkõige suurte kahjude saamise võimalusega. Kuigi finantsvarade riskide hindamise ja juhtimisega on tegeldud juba aastakümneid, on probleem tänaseni aktuaalne, kuna üheselt aktsepteeritavat kvantitatiivset riskimõõtu on väga raske välja töötada.

Teoreetilises finantsalases kirjanduses eristatakse otsustamist riski (*risk*) ja määramatuse (*uncertainty*) tingimustes. Esimese all mõeldakse olukorda, kus otsuseid tehakse võimalike tulevikutulemuste teadaoleva tõenäosusjaotuse põhjal. Kui aga võimalike alternatiivide toimumise tõepära ei ole teada (ei ole võimalik hinnata), on tegemist otsustamisega määramatuse tingimustes. Lisaks aga objektiivsele riskile, millega kirjeldatakse tulemuse võimalikkust realiseeruda oodatavast erinevana, mängib investori otsuste tegemisel suurt osa tema subjektiivne suhtumine riski.

Riski suurust on võimalik kirjeldada erinevate näitajatega. Klassikalise portfelliteooria kohaselt on riski näitajana käsitletud portfelli tulumäärade standardhälvet või dispersiooni. Dispersiooniga on juhusliku muutuja hajuvus (jaotus) kirjeldatud täielikult vaid normaaljaotuse korral, kus kõrgemat järku momendid (püstakus, asümmeetrilisus) ei anna lisainformatsiooni. Empiirilised finantsvarade tulumäärade jaotused ja eriti just aktsiaturgude vastavad andmed on aga niinimetatud „paksude sabadega”, mis tähendab, et äärmuslike vaatluste esinemissagedus on suurem kui normaaljaotuse korral. Seega, kui eeldatakse normaaljaotust, siis alahinnatakse suurte kahjude (ja ka kasude) esinemise võimalikkust. Riskijuhtimise seisukohalt kerkib dispersiooni kasutamisega ülesse kaks peamist probleemi. Esiteks ei anna dispersioon ettekujutust vähetõenäoliste

kahjude suurusest ja teiseks ei ole võimalik eristada, kas suur dispersioon tuleb suurte kahjude või suurte kasude võimalikkusest. Kuna finantsvarade korral seostatakse riski aga eelkõige kahjudega, siis siin võib adekvaatsema hinnangu riskile anda tulemuse kahjude varieeruvus (pooldispersioon). Sellele juhtis tähelepanu ka Markowitz oma 1959. aasta töös, mida peetakse finantsriskide ja portfelliteooria kaasaegase teooria lähtepunktiks (Markowitz 1991). Kuigi alates nimetatud tööst sai traditsiooniks kasutada finantsvarade riski mõõtmiseks standardhälvet (dispersiooni), on suur osa tööst tegelikult pühendatud katsele kirjeldada portfelli riski pooldispersiooni abil.

Käesolevas töös on vaatluse alla võetud kahjude jaotusel baseeruvad riskimõõdud  $VaR$  (*Value-at-Risk*) ja  $ES$  (*Expected Shortfall*, ka *Conditional Value-at-Risk*) ning nende kasutamine portfelli riski juhtimisel. Nimetatud riskimõõde on palju uuritud nende hindamise seisukohalt, kuid portfelli riskijuhtimise kriteeriumitena on neid käsitletud vähe.

$VaR_\alpha$  (*Value-at-Risk*) kindlaks määratud pikkusega ajaperioodil ja valitud usaldusnivoo  $1-\alpha$  korral kirjeldab portfelli tulumäära või väärtuse vähenemist, millest suuremaid kaotusi sellel ajaperioodil võib esineda  $\alpha$  protsendil juhtudel. Seejuures valitakse tõenäosus  $\alpha$  piisavalt väike, näiteks 0,05 või 0,01. Matemaatiliselt on  $VaR_\alpha$  määratud tulumäärade või väärtuse jaotusfunktsiooni  $\alpha$ -kvantiiliga.  $VaR_\alpha$  on intuiitiivselt hästi mõistetav riskimõõt, kuid see kirjeldab ainult tulemust, millest halvema saamine on väga väikese tõenäosusega, ning ei ütle midagi potentsiaalsete kahjude suuruse kohta. Siiski on  $VaR_\alpha$  laialdaselt kasutatav riskimõõt ja väga paljud uurimused keskenduvad  $VaR_\alpha$  hindamise probleemidele.  $VaR_\alpha$  hindamise lihtsustamiseks on pakutud lihtsustavaid arvutusalgoritme finantsteoorias laialdaselt levinud eeldustel. Tulumäärade normaaljaotuse eelduse korral on  $VaR_\alpha$  aga samaväärne traditsioonilise riskimõõduga (normaaljaotuse korral on  $VaR_\alpha$  standardhälbe lineaarne teisendus).  $VaR_\alpha$  edasiarendusena pakuti välja oodatava kahju mõõt  $ES_\alpha$  (*Expected Shortfall*), mis mõõdab oodatavat väärtust kahjudest, mis ületavad  $VaR_\alpha$  taset.  $ES_\alpha$  peaks eeldatavalt paremini kajastama ootamatult suuri kahjusid ning on analüütiliselt lihtsamini käsitletav kriteerium portfelli koostamiseks kui  $VaR_\alpha$ .

Käesoleva töö eesmärk on leida teatud kriteeriumite mõttes parim riskimõõt portfelli koostamiseks. Võrreldakse erinevate riskimõõtude (standardhälve,  $VaR_\alpha$ ,  $ES_\alpha$ ) kasutamist portfelli koostamise kriteeriumina. Kui kvantiilil baseeruvad riskimõõdud annavad eeldatavalt parema tulemuse suurte kahjude esinemise korral, siis käesolevas töös püütakse erinevalt varasematest uurimustest, leida vastust ka sellele, mis juhtub portfelli tulumäärade jaotusfunktsiooniga. Töö käigus püstitatakse hüpotees, et kuigi kvantiilil baseeruvatel riskimõõtudel saadud optimaalsetel portfellidel võivad olla vähemtõenäolised suured kahjud, siis võivad niiöelda keskmise suurusega kahjude esinemistõenäosused olla suuremad kui klassikalisel portfellil. Teine hüpotees kerkib ülesse seoses parima riskimõõdu otsimisega: iga riskimõõtu tuleb vaadata lähtuvalt investori subjektiivsest suhtumisest riski. Kui traditsioonilise kasulikkusteooria mõttes riskikartlikud (*risk-averse*) investorid pööravad peatähelepanu tulemuse varieeruvusele, siis hävingukartlikud (*ruin-averse*, ka *loss-averse*) investorid eelistavad portfelle, mis minimeerivad kahjude varieeruvust/suurust.

Käesolevas töös analüüsitakse erinevaid riskimõõte nii teoreetilisest kui ka praktilisest aspektist lähtuvalt. Teoreetilises osas selgitatakse, millistel tingimustel sobib portfelli koostamise kriteeriumiks üks või teine riskimõõt. Praktilises osas viiakse läbi reaalsetel ajaloolistel andmetel põhinev portfellianalüüs. Ajalooliste andmete kasutamisega tehakse tugev eeldus tuleviku tulumäärade käitumise kohta, kuid leidmaks vastuseid töös püstitatud küsimustele, tundub selline lähenemine olema vastuvõetav.

Töö koosneb kolmest osast. Esimeses osas käsitletakse edasises töös kasutatavaid kvantiilil baseeruvaid riskimõõtusid. Alguses tuuakse välja Artzner *et al.* (1998) poolt esitatud tingimused (aksioomid), mida peaks rahuldama iga mõistlik riskimõõt (oma töös viitavad nad ajaolule, et paljudes uurimustes tegeldakse erinevate riskide hindamisega seotud probleemidega, ilma et tehakse algul kindlaks, kas kasutatavad näitajad on üldse sobivad riskimõõduks). Edasi analüüsitakse kvantiilil baseeruvaid kriteeriume riskimõõduks sobivuse seisukohalt. Vähem tähelepanu on pööratud kriteeriumite hindamisega seotud probleemidele, kuna empiirilises osas kasutatakse riskikriteeriume vaid ajalooliste andmete põhjal.

Töö teises osas käsitletakse portfelli koostamist erinevate riskimõõtude alusel. Peatähelepanu on pööratud just portfelli koostamisele reaalsel andmel, kasutamata täiendavaid (lihtsustavaid) eeldusi varade tulumäärade jaotuse kohta. Tuuakse välja empiirilises osas kasutatavad arvutusalgoritmid.

Kolmandas osas püütakse leida reaalsele andmele tuginedes kinnitust töö teoreetilises osas esitatud hüpoteesidele. Empiirilises osas vaadeldakse kahte küsimuste ringi. Esiteks analüüsitakse erinevate riskimõõtude põhjal koostatud portfelle – võrreldakse võimalikke erinevusi portfelli koosseisudes ja püütakse leida seoseid erinevuste ja nende võimalike põhjuste vahel. Teiseks analüüsitakse erinevate riskimõõtude põhjal leitud portfelli käitumist ootamatute riskide realiseerumise korral ning püütakse anda erinevate riskikriteeriumite põhjal leitud portfelli eelistusjärjestus.

Erinevate hüpoteetiliste portfelli koostamiseks kasutatakse töös reaalse aktsiaturgude ajaloolisi andmeid. Valim koosneb MSCI (*Morgan Stanley Capital International*) poolt avaldatud maailma 50 riigi aktsiaindeksist ning vaatluse all on viimase viie aasta päevased tulumäärad. Kokku on kasutada 65200 ( $50 \times 1304$ ) kirjet. Selle valiku põhjuseks on kvaliteetsed, ühtse meetodika põhjal kogutud ja töödeldud andmed. Optimeerimisülesannete lahendamiseks kasutatakse matemaatiliste probleemide lahendamise programmi GAMS (*General Algebraic Modeling Systems*) *Distribution* 21.3. Töös kasutatavad olulisemad lühendid on esitatud töö lisa 1.

# 1. KVANTIILIL PÕHINEVAD RISKIMÕÕDUD

## 1.1. Koherentsed riskimõõdud

Majandusotsuse langetamisel on tulemuste täpse prognoosimatuse tõttu alati tegemist riskiga – riskiga saada kahju oodatust või arvestatust erineva, loodetust halvema või koguni vastuvõetamatult halva tulemuse tõttu. Riskide hindamisel osutub kriitiliseks asjaolu, et risk tuleneb tulevikust, mitte minevikust (“*risk lies ahead of us not in the past*”) (Dembo, Freeman 1998: 4). Paratamatult on aga minevik suurel või vähemal määral põhiline lähtepunkt tuleviku hindamiseks. Lisaks objektiivselt eksisteerivale tulemuse määramatusele tuleviku suhtes, kajastub riski hinnangus ka inimese subjektiivne suhtumine sellesse määramatusesse (Karma, Paas 2000: 15). Riskiga kaasnev subjektiivne pool muudab väga raskeks (kui mitte võimatuks) erinevate indiviidide käitumise kirjeldamise ühesuguse objektiivse riski tingimustes. Kuna aga riskide hindamisel on väga kriitiline osa inimese suhtumisel riski, siis tuleb riski mõju uurimiseks otsusele teha täiendavaid eeldusi inimese käitumise kohta riski suhtes.

Klassikalises portfelliteoorias on risk defineeritud kui portfelli tulemuse dispersioon (standardhälve) ja seega loetakse ühtemoodi halvaks nii oodatavast väärtusest suuremad kui väiksemad tulemused. Finantsvarade korral on aga risk seotud eelkõige kahjudega ja riski hindamise ning juhtimise eesmärk võiks olla suurte kahjude kirjeldamine ja vältimine. Ka traditsioonilise portfelliteooria autor Markowitz mõistis seda ja väitis, et analüüsid, mis põhinevad alla keskväärtust jäävate tulumäärade varieeruvusel, peaksid andma paremaid tulemusi kui need, mis põhinevad dispersioonil (Markowitz 1991: 194).

Mitte iga näitaja ei sobi riskantsete alternatiivide vahel valiku tegemiseks. Järgnevalt esitatud nõuded finantsriskide mõõtmiseks kasutatavatele näitajatele on välja pakkunud Artzner *et al.* (1998). Olgu  $x$  ja  $y$  mingisugused juhuslikud tulud või tulumäärad ning

$\rho(x)$  tulemusega  $x$  kaasneva riski suurust hindav riskimõõt. Riskimõõt  $\rho$  peaks rahuldama järgnevat tingimusi.

- a) Monotoonsus (*monotonicity*):  $x \leq y$  korral on  $\rho(x) \leq \rho(y)$  kõigi juhuslike tulemuste  $x$  ja  $y$  jaoks.
- b) Subaditiivsus (*subadditivity*):  $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$  kõigi juhuslike tulemuste  $x$  ja  $y$  korral.
- c) Positiivne homogeensus (*positive homogeneity*):  $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$  kõigi juhuslike tulemuste  $x$  ja positiivsete reaalarvude  $\lambda$  korral.
- d) Translatsiooni invariantsus (*translation invariance*):  $\rho(x+a) = \rho(x) - a$  kõigi juhuslike tulemuste  $x$  ja reaalarvude  $a$  korral.

Esimese tingimuse kohaselt on paremat tulemust võimalik saada ainult suurema riski aktsepteerimisega. Monotoonsuse tingimust ei rahulda näiteks näitajad kujul (*Ibid.*: 7):

$$(1.1) \quad \rho(x) = -E(x) + \lambda \sigma(x) \text{ ja } \rho(x) = -E(x) + \lambda \sigma[(x - E(x))^-],$$

kus  $\sigma$  – juhusliku suuruse  $x$  standardhälve.

Teine tingimus ütleb, et kahe eraldi portfelli risk ei saa olla väiksem kui nende mõlema varadest koosneva portfelli risk. Riskimõõt  $Var_a$  ei rahulda üldjuhul subaditiivsuse nõuet, küll aga täiendavate eelduste korral (näiteks tulumäärade normaaljaotus). Kaks esimest tingimust on majanduslikus mõttes loomulikud tingimused ja neid peaksid kõik riskimõõdnud rahuldama. Järgmised kaks tingimust ei ole võib-olla mitte alati aktsepteeritavad, kuid on kasulikud eeldused matemaatiliseks analüüsiks.

Positiivse homogeensuse tingimuse kohaselt on riskimõõt sõltumatu skaala valikust, milles juhuslike tulemusi mõõdetakse ehk riskantse vara positsiooni suurendamine portfellis toob võrdeliselt kaasa sama suure kasvu riskis. Kui investori otsustes mängib rolli ka tema algrikkus (mis üldjuhul nii ongi), siis tavaliselt kasvab tema jaoks risk kiiremini kui vastav positsioon portfellis (kasvab riskikartlikkus). Homogeensuse tingimus koos subaditiivsuse tingimusega määravad ära, et riskimõõt peab olema kumer funktsioon riskifaktorite suhtes. Kumerus tähendab sisuliselt, et portfelli diversifitseerimine ei suurenda riski. Kumeruse tingimuse täidetuse korral on portfelli riski optimeerimise ülesanne matemaatiliselt suhteliselt lihtsalt lahendatav.

Viimane esitatud tingimus ütleb, et vara lisamisel portfelli on portfelli riski vähenemise suurus võrdeline vara lisamise mõjuga tulemusele. Nii näiteks väheneb riskivaba vara lisamisega portfelli risk võrdeliselt riskivaba vara osakaaluga portfellis. Kui kaks esimest tingimust on alati aktsepteeritavad, siis viimased kaks tingimust on vastuvõetavad, kui riskimõõtu vaadeldakse kui objektiivset kriteeriumit. Sõltuvalt investori subjektiivsest suhtumisest riski ei pruugi viimased kaks tingimust alati olla vastuvõetavad.

Kõigi eelpool toodud tingimuste täidetuse korral nimetatakse riskimõõtu  $\rho$  koherentseks (kooskõlaliseks) riskimõõduks. On autoreid, näiteks Acerbi ja Tasche (2001), kes ei käsitle riskimõõtudena näitajaid, mis ei vasta eelpool toodud tingimustele.

Järgnevalt vaadeldakse edasises töös kasutatavaid oodatava tulemuse jaotuse kvantiilil baseeruvaid riskimõõte  $VaR_\alpha$  (*Value-at-Risk*) ja  $ES_\alpha$  (*Expected Shortfall*). Kuigi  $VaR_\alpha$  ei ole üldjuhul koherentne riskimõõt, on see praktikas laialdaselt kasutuses. Näiteks on Baseli Komitee otsusega  $VaR_\alpha$  rakendamine tururiski kajastamiseks rahvusvahelistes pankades kohustuslik (The Third Consultative ... 2003).

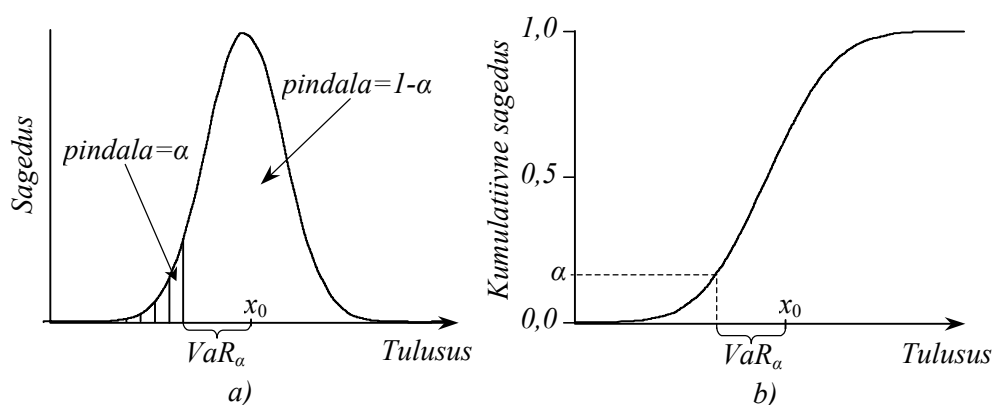
## **1.2. Value-at-Risk ja Expected Shortfall**

Käesolevas töös kasutatavatele riskimõõtudele *Value-at-Risk* ja *Expected Shortfall* ei ole eestikeelses erialakirjanduses väljakujunenud sobivaid eestikeelseid vasteid. Kasutatud on vastavalt mõisteid “riski all olev väärtus” ja “oodatav kahju”, kuid kuna selliste terminite kasutamine ei selgita nende sisu adekvaatselt, vaid pigem isegi eksitavad, siis on käesolevas töös jäädud ingliskeelsete terminite ja lühendite juurde.

Finantspraktikas on  $VaR_\alpha$  kujunenud laialt aktsepteeritavaks riski juhtimise ja kontrollimise kriteeriumiks. Esimesena pakkus  $VaR_\alpha$  kontseptisooni välja Baumol (1963). Niinimetatud „*safety first*” mudeleid analüüsisid aga teiste seas juba varem Roy (1952) ja Telser (1955). Hea ülevaate  $VaR_\alpha$ -st annavad näiteks nii Jorion (2001) kui ka Duffie ja Pan (1997).  $VaR_\alpha$  kui riskimõõdu laialdasemat kasutuselevõttu võib põhjendada 90-ndate alguses toimunud tulevikutehingutega seotud finantskrahhidega, kus pankrotistusid mitmed suured ja finantsiliselt tugevaks peetud ettevõtted. Sellised

sündmused said võimalikuks, kuna sellel hetkel kasutatud riskimõõdud ei toonud välja äärmuslike kahjude võimalikkust riskide realiseerumise korral. Algselt oligi  $VaR_\alpha$  eesmärgiks kirjeldada finantsriski, mis on seotud vähetõenäoliste aga suurte kahjudega. Loogilise jätkuna püüti hiljem  $VaR_\alpha$  abil ka juhtida portfelli riski.

$VaR_\alpha$  mõõdab kahju taset, millest suuremaid kahjusid etteantud ajahorisondil võib esineda vaid kindlaksmääratud väikese tõenäosusega  $\alpha$ . Formaalselt võrdub  $VaR_\alpha$  kahjude ülemise  $\alpha$ -kvantiiliga. Kui  $1-\alpha$  on valitud usaldusnivoo, siis  $VaR_\alpha$  tulumäärade tihedusfunktsioonil vastab  $\alpha$  alumisele „sabale” (*lower level tail*) (vt. joonis 1.1).



**Joonis 1.1.**  $VaR_\alpha$  usaldusnivoo  $1-\alpha$  korral a) tihedusfunktsioonil b) jaotusfunktsioonil (autori koostatud).

$VaR_\alpha$ -t selgitatakse mõnikord ebatäpselt ja eksitavalt kui maksimaalset võimalikku kaotust, mis võib juhtuda 100 $\alpha$  % halvimatel juhtudel. Õige on öelda, et  $VaR_\alpha$  on minimaalne võimalik kaotus, mis portfelliga võib juhtuda 100 $\alpha$  % halvimatel juhtudel (Acerbi *et al.* 2001: 4). Samaväärne on „poliitiliselt korrektsem” sõnastus, et  $VaR_\alpha$  on maksimaalne potentsiaalne kaotus, mis portfelliga võib juhtuda 100(1- $\alpha$ ) % parimatel juhtudel.

Eelnevalt sõnastati  $VaR_\alpha$  kui tulumäära jaotuse alumisele  $\alpha$ -kvantiilile vastav tulumäär. Kui olla täpsem, siis sõltub  $VaR_\alpha$  mitmetest parameetritest (vt. ka joonis 1.1):

$$(1.2) \quad VaR_{\alpha,\tau,x_0}(x) = VaR_{\alpha,\tau}(x) + x_0,$$

- kus  $1-\alpha$  – usaldusnivoo,
- $\tau$  – ajaperiood, mille kohta  $VaR_\alpha$  arvutatakse,
- $x$  – juhuslik muutuja, mille  $VaR_\alpha$  leitakse,

$x_0$  – muutuja  $x$  tase, mille suhtes kaotust vaadeldakse.

Taseme  $x_0$  kaks põhilist valikut on  $x_0=0$  ja  $x_0=E(x)$ . Kui  $x_0$  võrdne nulliga, siis kõneldakse null- $VaR$ -st (*zero-VaR*) ning kui  $x_0$  võrdub portfelli nõutava tulumääraga, siis nimetatakse seda keskväärtus- $VaR$ -ks (*mean-VaR*). Käesolevas töös käsitletakse edaspidi ainult null- $VaR$ -i ja tähistatakse seda lihtsustatult  $VaR_\alpha$ .

$VaR_\alpha$  hindamiseks on vaja teada tulevase tulumäära jaotust (vähemalt osaliselt). Kui meil on teada portfelli tulu iseloomustava näitaja  $x$  (tulu suuruse, tulumäära, lõpprikkuse) tihedusfunktsioon (*probability distribution functions – pdf*)  $f(x)$  või jaotusfunktsioon (*cumulative distribution function – cdf*)  $F(x)$  mingi kindla ajahorisondi kohta, siis saab  $VaR_\alpha$  leida järgnevast seosest (eeldusel, et see seos on  $-VaR_\alpha$  suhtes üheselt lahenduv):

$$(1.3) \quad \int_{-\infty}^{-VaR_\alpha} f(x)dx = F(-VaR_\alpha) = \alpha .$$

Üldiselt on  $\alpha$  tase valitud väikene ning seega on  $VaR_\alpha$  positiivne suurus ja  $VaR_\alpha$  tasemele vastav tulu negatiivne.  $VaR_\alpha$  praktilisel leidmisel valemi (1.3) põhjal võib tekkida raskusi, sest empiiriliste jaotusfunktsioonide korral võib äärmuslike vaatluste hulka sattuda liiga vähe vaatlusi ning liiga kõrge usaldusnivoo valikul ei pruugi  $VaR_\alpha$  olla (üheselt) määratud. Kui jaotusfunktsioon  $F(x)$  omandab väärtuse  $\alpha$  paljude  $x$  väärtuste korral, siis loetakse  $VaR_\alpha$  võrdseks võrrandi  $F(-VaR)=\alpha$  vähima lahendiga. Seega kui jaotusfunktsiooni „saba” sisaldab vähe statistikat, siis võivad saadud tulemused olla väheusaldusväärsed ning on vaja täiendavalt analüüsida tulemuste tundlikkust fikseeritud muutujate (usaldusnivoo, nõutav tulumäär, ajahorisont) suhtes. Näiteks on optiooni tulumäärade jaotus „astmeline” (lõigatud (*truncated*) tihedusfunktsioon) ja nii võib ka optioone sisaldava portfelli tulumäärade jaotusfunktsioon valitud usaldusnivoo  $1-\alpha$  korral olla määramata.

Finantspraktikas kasutatakse levinuima parameetrilise jaotusfunktsiooni eeldusena normaaljaotust. Kui tulu iseloomustav näitaja  $r$  on jaotunud normaaljaotusega, keskväärtusega  $\mu$  ja standardhälbega  $\sigma$ ,  $r \sim N(\mu, \sigma^2)$ , siis vastav standardiseeritud muutuja on jaotunud normaaljaotusega, keskväärtusega null ja standardhälbega üks,

$\frac{r - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ . Sellisel juhul kehtib, et  $\Pr(r \leq -VaR_\alpha) = \Pr\left(\frac{r - \mu}{\sigma} \leq \frac{-VaR_\alpha - \mu}{\sigma}\right)$ ,

mistõttu seosest (1.3) järeldub, et  $\frac{-VaR_\alpha - \mu}{\sigma} = z_\alpha$  ehk (vaata näiteks Gaivornonski,

Pflug 2002: 7-8):

$$(1.4) \quad VaR_\alpha(r) = -z_\alpha \sigma - \mu,$$

kus  $z_\alpha$  – standardiseeritud normaaljaotuse alumine  $\alpha$ -kvantiil ja  $z_\alpha < 0$ , kui  $0 \leq \alpha < 0,5$ .

Seega normaaljaotuse eelduse korral on  $VaR_\alpha$  lineaarne funktsioon standardhälbest ning sellise lihtsustava eelduse korral ei ole vahet, kas sama keskväärtusega tulude korral kasutatakse otsustuskriteeriumina  $VaR_\alpha$ -t või standardhälvet.

$VaR_\alpha$  annab hinnangu ainult ootamatute kahjude võimaliku realiseerumise tõenäosuse kohta. Seda, kui suured ja tõenäolised võivad olla  $VaR_\alpha$  taset ületavad potentsiaalsed kahjud, ei ole  $VaR_\alpha$ -st võimalik välja lugeda. Sellest puudusest tulenevalt on  $VaR_\alpha$  idee loogilise edasiarendusena välja pakutud näitaja *Expected Shortfall* –  $ES$ , mis on koherentne riskimõõt.  $ES_\alpha$  mõõdab oodatavat väärtust kahjudest, mis ületavad  $VaR_\alpha$  taset. Termin *Expected Shortfall* võtsid kasutusele Acerbi *et al.* (2001), kes soovitasid seda kasutada alternatiivina  $VaR_\alpha$ -le. Tulu pideva jaotuse korral langeb  $ES_\alpha$  kokku Rockafellari ja Uryasevi poolt varem välja pakutud tingimusliku  $VaR_\alpha$ -ga (*Conditional VaR* –  $CVaR_\alpha$ ) (Rockafellar, Uryasev 2000). Käesoleva töö autor leiab, et tingimusliku  $VaR_\alpha$  mõiste kasutamine võib olla antud kontekstis eksitav, kuna  $VaR_\alpha$  ise on tingimuslik suurus, ja seetõttu kasutatakse  $VaR_\alpha$ -t ületavate kahjude oodatava väärtuse kirjeldamiseks käesolevas töös mõistet *Expected Shortfall*.

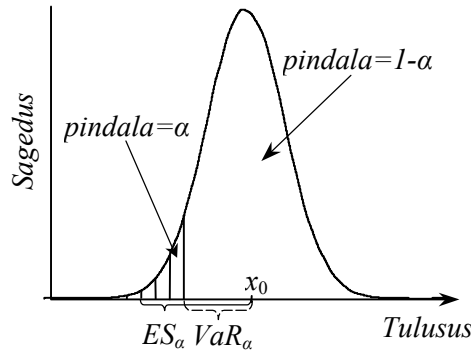
$ES_\alpha$  on oodatav väärtus portfelli kahjudest kindlaksmääratud ajaperioodi jooksul  $100\alpha$  % halvematel juhtudel (Acerbi, Tasche 2001: 5). Formaalselt võib  $ES_\alpha$  määrata järgnevast seosest:

$$(1.5) \quad ES_\alpha(x) = E[-x \mid -x \geq VaR_\alpha(x)] = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{-VaR_\alpha(x)} xf(x)dx.$$

Seejuures, kui  $-VaR_\alpha(x) \leq 0$ , siis  $\int_{-\infty}^{-VaR_\alpha(x)} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-VaR_\alpha(x)} F(x)dx$  ja seega:

$$(1.5') \quad ES_\alpha(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{-VaR_\alpha(x)} F(x) dx.$$

$ES_\alpha$  graafiline esitus ei ole enam nii otsene, kui seda oli  $VaR_\alpha$  graafiline esitus (vt. joonis 1.2). Kuna  $ES_\alpha$  mõõdab keskväärtust  $VaR_\alpha$  taset ületavatest tulumääradest, siis on  $ES_\alpha$  alati (absoluutväärtuselt) suurem kui  $VaR_\alpha$  sama usaldusnivoo  $1-\alpha$  korral.



**Joonis 1.2.**  $ES_\alpha$  usaldusnivoo  $1-\alpha$  korral (autori koostatud).

Analoogiliselt  $VaR_\alpha$ -ga on  $ES_\alpha$  üldiselt positiivne.  $ES_\alpha$  kui riskimõõt võtab arvesse ka oodatavad kahjud, mis ületavad  $VaR_\alpha$  väärtusi ja mis  $VaR_\alpha$  korral ei ole kajastatud. Samas tuleb rõhutada, et ükski statistiline suurus, kus informatsioon on surutud vaid ühte arvu, ei suuda kirjeldada ebaharilikke sündmusi täielikult.

Sarnaselt  $VaR_\alpha$ -ga on ka  $ES_\alpha$  hindamise lihtsustamiseks paljudes uurimustes kasutatud täiendavaid eeldusi. Enamlevinud parameetrilise jaotusfunktsiooni eeldusena kasutatava normaaljaotuse korral avaldub  $ES_\alpha$  järgmiselt (vt. näiteks De Giorgi 2002).

$$\begin{aligned}
 ES_\alpha(x) &= -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{z_\alpha \sigma + \mu} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx \\
 &= -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{z_\alpha} (\sigma u + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \\
 (1.6) \quad &= -\frac{1}{\alpha} \left[ \sigma \int_{-\infty}^{z_\alpha} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du + \mu \int_{-\infty}^{z_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \right] \\
 &= -\frac{1}{\alpha} (\sigma \gamma(\alpha) - \mu \alpha) = -\frac{\gamma(\alpha)}{\alpha} \sigma - \mu,
 \end{aligned}$$

kus  $-\frac{\gamma(\alpha)}{\alpha}$  on fikseeritud  $\alpha$  korral konstant.

Valemite (1.4) ja (1.6) põhjal on näha, et kuigi normaaljaotuse eeldus lihtsustab oluliselt  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  hindamist, muudab see riski juhtimise seisukohast need näitajad samaväärseteks riskimõõtudeks. Kuna  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  avalduvad normaaljaotuse korral standardhälbe ja oodatava tulumäära lineaarse kombinatsioonina, siis etteantud keskväärtuse korral taandub nende riskimõõtude minimeerimine standardhälbe minimeerimisele ja saadavad optimaalsed portfelliid on identsed traditsioonilise portfelli koostamise ülesande lahendiga. Normaaljaotuse eeldamise korral võidakse teha oluline viga, kui tegelikud jaotused on „paksusabalised“. Empiirilised uuringud on aga äärmuslike vaatluste suhteliselt suure esinemissageduse toonud välja just finantsaegridadele iseloomuliku karakteristikuna. Sellisel juhul alahinnatakse äärmuslike vaatluste esinemistõenäosusi ja saadud  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  tasemed alahindavad tegelikke suurusid.

Üldjuhul meil ei ole kasutada tõenäosuslikke jaotusfunktsioone, vaid on teada nende parameetriselised lähendid või empiirilised jaotusfunktsioonid, seega tuleb arvestada, et kõigi näitajate hinnangud sisaldavad endas alati teatud vigu. Kui portfelli tulumäärade jaotus on „paksusabaline“, siis suurte kahjude tõenäosus võib olla suhteliselt suur. Kuna  $ES_\alpha$  arvestab kaotuste suurust jaotuse sabas, siis  $ES_\alpha$  hinnanguid mõjutab see, kui suured kaotused kasutatavas valimis realiseeruvad.  $VaR_\alpha$  on sellest vähem mõjutatud, kuna eirab kaotusi, mis ületavad  $VaR_\alpha$  taset. Seega kui kaotuste jaotus on „paksusabaline“, on  $ES_\alpha$  hinnangud varieeruvad harvade suurte kahjude juhusliku realiseerumise tõttu ja nende hinnangute viga läheb suuremaks kui  $VaR_\alpha$  hinnangute viga. Hinnangu viga on võimalik vähendada valimi mahu suurendamisega (Yamai, Yoshida 2001, lk 4-5).

Kvantiilil põhinevate riskimõõtude kasutamisel on oluline parameetrite (usaldusnivoo ja ajaperiood) valik. Kui näiteks kvantiilil baseeruvaid kriteeriume kasutatakse riskide võrdlemiseks erinevatel turgudel, siis selleks, et oleks võimalik võrrelda erinevaid portfelle ja erinevaid ajahetki, on esmatähtis parameetrite valiku järjepidevus. Samuti peavad valitud parameetrid olema seotud portfelli iseloomuga. Kui  $VaR_\alpha$ -t kasutatakse aktsiakapitali riski mõõtmiseks, siis peaks valitud ajahorisont olema selline, mille

jooksul on võimalik ette võtta riski vähendavaid meetmeid. Näiteks finantsinstitutsioonid kasutavad riski hindamisel  $VaR_\alpha$ -t päevase perioodi kohta, kuna portfelli muutused on väga kiired. Usaldusnivoo aga peaks kajastama huvigrupi riskikartlikkust.

Käesoleva töö empiirilises analüüsis ei tehta täiendavaid parameetrilisi kitsendusi tulumäärade jaotuse kohta, vaid eeldatakse, et ajalooliste andmete põhjal saadud tulumäärade jaotus on piisavalt hea lähend tuleviku tulumäärade jaotuse kohta. Selline eeldus võib olla liiga tugev reaalsete rakenduste jaoks, kuid antud töö eesmärgist (võrrelda erinevate kriteeriumite põhjal koostatud portfelle) tulenevalt on see vastuvõetav.

Järgnevalt vaadeldakse eelnevalt käsitletud riskimõõtude kooskõllalisust investorite subjektiivse riskisuhtumisega. Riski subjektiivne pool on sisse toodud, kuna iga riskimõõt võimaldab anda eelistussuhte vaid kindla riskisuhtumise korral.

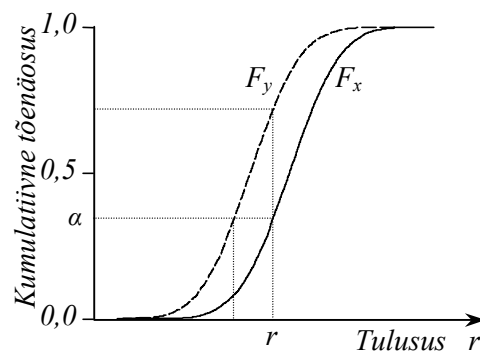
### **1.3. Subjektiivne suhtumine riski**

Kui võrrelda erinevate varade või portfelli  $VaR_\alpha$ -sid, siis vaadeldakse tegelikult ainult jaotusfunktsiooni ühte punkti – tulumäärade jaotusfunktsiooni alumist  $\alpha$ -kvantiili. Valitud usaldusnivoost sõltuvalt võidakse saada erinevaid tulemusi. Selleks, et anda ühene eelistussuhe, tuleks arvesse võtta tulumäärade jaotus kõigi usaldusnivoode (kvantiilide) korral ehk tuleks tegelikult võrrelda jaotusfunktsioone.

Riskantsete alternatiivide vahel valiku tegemine taandubki üldjuhul alternatiividega kaasnevate tulude jaotusfunktsioonide järjestamisele. Erinevad meetodid erinevad selle poolest, kui suurt osa olemasolevast informatsioonist võetakse arvesse eelistussuhte kujundamisel ja millisel kujul seda arvesse võetakse. Eelnevalt käsitletud riskimõõdud võtsid riskantsuse hindamisel arvesse vaid osa jaotusfunktsioonist – tulumäärade jaotust kuni kindlaksmääratud kvantiilini. Portfelli teooriast tuntud standardhälve (dispersioon) sisaldab (koos keskvärtusega) kogu informatsiooni jaotusfunktsiooni kohta ainult normaaljaotuse korral. Eelistussuhte kogu jaotusfunktsioonis sisalduva informatsiooni põhjal annavad stohhastilise domineerimise kriteeriumid.

Stohhastilise domineerimise kriteeriumid võtavad arvesse ka investori subjektiivset suhtumist riski ja on kooskõlas von Neumanni ja Morgensterni (1944) kasulikkusteooriaga, kuid samal ajal ei ole vaja teada indiviidi kasulikkusfunktsiooni konkreetset matemaatilist kuju. Stohhastilise domineerimise kriteeriumid annavad riskantsete varade eelistusjärjestuse kindla riski suhtumise korral. Esimest järku stohhastilise domineerimise korral peaksid kõik (ratsionaalsed) investorid valima domineeriva vara. Teist järku stohhastilise domineerimise korral peaksid domineerivat vara eelistama kõik riskikartlikud investorid ja kolmandat järku stohhastilise domineerimise korral kõik niinimetatud hävingukartlikud (*loss/ruin averse*) investorid. Samas ei ole stohhastilise domineerimise kriteeriumid praktikas sobivad, kuna nad ei järjesta kõiki jaotusfunktsioone ehk nad ei võimalda iga kahe jaotuse korral öelda, milline neist on parem.

Kõige üldisem (rangem) jaotusfunktsioonil põhinev kriteerium on esimest järku stohhastiline domineerimine (1. SD). Osutub, et esimest järku stohhastilise domineerimisega on tegemist parajasti siis, kui varade tulumäärade jaotused on erinevad ja kui ühe vara (portfelli) korral iga tulusus ületatakse mitte väiksema tõenäosusega kui teise korral<sup>1</sup> (vt. joonis 1.3) (Copeland, Weston 1996: 92).



**Joonis 1.3.** Esimest järku stohhastiline domineerimine ( $x \succ_{1.SD} y$ ) (autori koostatud).

<sup>1</sup> Samaväärne on öelda, et iga tõenäosuse korral saavutatakse sama tõenäosusega vähemalt sama hea tulusus.

Kui tähistada juhuslike suuruste  $x$  ja  $y$  jaotusfunktsioonid  $F_x(r)$  ja  $F_y(r)$ , siis võib öelda, et  $x$  domineerib  $y$ -i üle esimest järku stohhastilise domineerimise mõttes ( $x \succ_{1.SD} y$ ) parajasti siis, kui  $F_x(r) \neq F_y(r)$  ja:

$$(1.7) \quad F_x(r) \leq F_y(r) \text{ iga } r \text{ korral.}$$

Praktilistes arvutustes on stohhastilise domineerimise kriteeriumites kasulik minna tulumääradele vastavate jaotusfunktsiooni väärtuste võrdlemiselt üle kvantiilidele vastavate tulumäärade võrdlemisele ehk jaotusfunktsioonide  $F$  võrdlemiselt kvantiilfunktsioonide (pöördjaotusfunktsioonide)  $Q$  võrdlemisele (kvantiillähenedamine<sup>2</sup>).  $Q_x(\alpha)$  on selline  $r$  väärtus, mille korral  $F_x(r) = \alpha$  ehk teisisõnu  $Q_x(\alpha) = F_x^{-1}(\alpha)$ . Üldiselt võib  $F_x(r) = \alpha$  kehtida rohkem kui ühe  $r$  korral (mingisugune vahemik) ning sel juhul on  $Q_x(\alpha)$  defineeritud kui minimaalne  $r$  väärtus, mille korral  $F_x(r) = \alpha$  kehtib ehk  $Q_x(\alpha) = \min\{r \mid F_x(r) = \alpha\}$ . Kasutades pöördjaotusfunktsioone, võib öelda, et  $x$  domineerib  $y$ -i üle esimest järku stohhastilise domineerimise mõttes ( $x \succ_{1.SD} y$ ) parajasti siis, kui  $Q_x(\alpha) \neq Q_y(\alpha)$  ja kehtib (vt. ka joonis 1.3):

$$(1.8) \quad Q_x(\alpha) \geq Q_y(\alpha) \text{ iga } \alpha \text{ korral.}$$

Praktilistes arvutustes on seose (1.8) kontrollimisel vajalikud kvantiilid määratud aegridade võimalike väärtuste ning neile vastavate tõenäosustega.

Valemite (1.3) ja (1.7) põhjal on näha, et kui juhuslik muutuja  $x$  domineerib  $y$ -i üle esimest järku stohhastilise domineerimise mõttes ( $x \succ_{1.SD} y$ ), siis on  $x$  eelistatud  $y$ -le ka kriteeriumi  $VaR_\alpha$  põhjal (aga mitte vastupidi). Esimest järku stohhastiline domineerimine tähendab, et juhusliku muutuja  $x$   $VaR_\alpha$  on mitte suurem kui juhuslikul muutujal  $y$  iga  $\alpha$  korral:  $VaR_\alpha(x) \leq VaR_\alpha(y), \forall \alpha$ . Kui võrrelda  $VaR_\alpha$ -de põhjal kahte juhuslikku muutujat, mille vahel ei ole esimest järku stohhastilist domineerimist, siis võidakse sõltuvalt usaldusnivoo  $1-\alpha$  valikust saada erinevaid eelistusi. Analoogiline seos on ka esimest järku stohhastilise domineerimise ja  $ES_\alpha$  vahel: kui juhuslik muutuja  $x$  domineerib  $y$  üle, siis on  $x$  eelistatud  $y$ -le ka  $ES_\alpha$  põhjal:  $ES_\alpha(x) \leq ES_\alpha(y), \forall \alpha$ . Esimest

---

<sup>2</sup> Stohhastilise domineerimise kriteeriumite esitamist kvantiilide kaudu vaata näiteks Levy ja Kroll (1978).

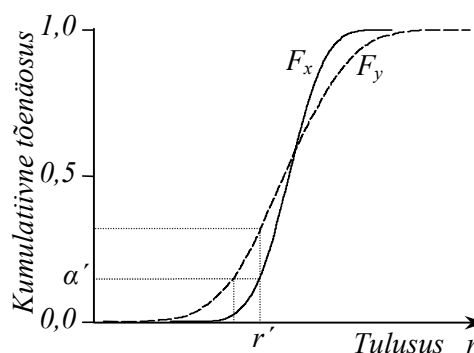
järku stohhastiline domineerimine on aga liiga range kriteerium, kuna juhusliku suuruse jaotusfunktsioon peab domineerima teise juhusliku suuruse jaotust igas jaotusfunktsiooni punktis ning seetõttu esineb esimest järku stohhastilist domineerimist väga harva.

Nõrgem kriteerium, mis annab eelistuse ainult kõigi riskikartlike investorite jaoks, on teist järku stohhastiline domineerimine (2. SD). Juhuslik muutuja on teist järku stohhastiliselt domineeriv, kui seda eelistavad kõik (ratsionaalsed) riskikartlikud invidiidid, sõltumata nende kasulikkusfunktsiooni kujust. Osutub, et juhuslik muutuja  $x$  domineerib  $y$ -i üle teist järku stohhastilise domineerimise mõttes ( $x \succ_{2.SD} y$ ) parajasti siis, kui  $F_x(r) \neq F_y(r)$  ja kehtib (Copeland, Weston 1992: 93):

$$(1.9) \quad \int_{-\infty}^r [F_y(r') - F_x(r')] dr' \geq 0 \text{ iga } r \text{ korral ehk}$$

$$(1.9') \quad \int_{-\infty}^r F_y(r') dr' \geq \int_{-\infty}^r F_x(r') dr', \forall r.$$

Kriteerium (1.9) ütleb, et  $x$  domineerib  $y$ -i üle parajasti siis, kui  $x$ -i korral on tulususest  $r'$  väiksemate tulususte keskväärts iga  $r'$  jaoks mitte halvem kui  $y$ -l. Stohhastilise domineerimise definitsioonidest on selge, et kui  $x \succ_{1.SD} y$ , siis sellest tuleneb ka  $x \succ_{2.SD} y$ , aga mitte tingimata vastupidi (vt. joonis 1.4).



**Joonis 1.4.** Näide teist järku stohhastilisest domineerimisest (autori koostatud).

Praktiliste arvutuste jaoks on kasulik esitada stohhastilise domineerimise kriteerium kvantiilide põhjal. Kvantiillähenedamise korral võib teist järku stohhastilise domineerimise kriteeriumi (1.9) kirja panna järgnevalt. Juhuslik muutuja  $x$  domineerib

$y$ -i üle teist järku stohhastilise domineerimise mõttes ( $x \succ_{2.SD} y$ ) parajasti siis, kui  $Q_x(\alpha) \neq Q_y(\alpha)$  ja kehtib:

$$(1.10) \quad \int_0^\alpha [Q_y(\alpha') - Q_x(\alpha')] d\alpha' \leq 0 \text{ iga } \alpha \text{ korral ehk}$$

$$(1.10') \quad \int_0^\alpha Q_y(\alpha') d\alpha' \leq \int_0^\alpha Q_x(\alpha') d\alpha', \forall \alpha.$$

Kui kahe juhusliku muutuja korral leiab aset teist järku stohhastiline domineerimine, siis sama eelistus kehtib ka  $ES_\alpha$  põhjal ning piisavalt suure usaldusnivoo  $1-\alpha'$  korral leidub  $\alpha < \alpha'$  nii, et sama eelistus kehtib ka  $VaR_\alpha$  põhjal. Praktikas kasutataksegi  $VaR_\alpha$ -t ja  $ES_\alpha$ -t suure usaldusnivoo korral. Kui iga  $\alpha$  korral  $VaR_\alpha$  järgi eelistatakse ühte juhuslikku muutujat teisele, siis kehtib ka teist järku stohhastiline domineerimine (kuna kehtib ka esimest järku stohhastiline domineerimine). Samasugune seos kehtib ka  $ES_\alpha$  puhul, kuid ei avaldu vahetult teist järku stohhastilise domineerimise kriteeriumist. Selleks on järgnevalt esitatud seos  $ES_\alpha$  ja teist järku stohhastilise domineerimise vahel.

Kuna  $VaR_\alpha$  kirjeldab sisuliselt  $\alpha$ -kvantiili ( $-VaR_\alpha(x) = -Q_\alpha(x)$ ), siis võib  $ES_\alpha$  kirja panna järgnevalt (Bertsimas *et al.* 2000):

$$(1.11) \quad ES_\alpha(r) = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{Q_x(\alpha)} rf(r) dr = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{Q_x(\alpha)} F(r) dr = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha Q_x(\alpha') d\alpha'.$$

Valemite (1.10') ja (1.11) põhjal on selgesti näha, et  $x \succeq_{2.SD} y \Rightarrow ES_\alpha(x) \leq ES_\alpha(y)$  kehtib alati, vastupidine seos aga vaid juhul, kui iga  $\alpha$  korral on  $ES_\alpha(x) \leq ES_\alpha(y)$ . Siit on näha, et kahe portfelli võrdlemisel on teist järku stohhastilise domineerimise kriteerium rangem kui  $ES_\alpha$ , kuna esimene arvestab kogu jaotusfunktsiooni, viimane aga ainult ühte integraali.

Lihtsustatult võib öelda, et esimest järku stohhastilise domineerimise korral eelistatakse portfelli, mis garanteerib iga usaldusnivoo korral suurema tulu (väiksema kahju), teist järku stohhastilise domineerimise korral aga portfelli, mis garanteerib iga usaldusnivoo juures keskmiselt väiksema kahju. Edasi tekib probleem, kuidas võrrelda erinevaid portfelle sellest seiskohast, mis on eelistatavam, kas ebaregulaarsed suured kahjud või

sagedased keskmise suurusega kahjud. Portfelli haldava fondi seisukohalt eelistatakse pigem sagedasi keskmisi kahjusid kui harvaesinevaid suuri kahjusid, mis võivad tähendada pankrotti minekut. Siin on analoogia olukorraga, et ka üksikisik on valmis vastu võtma pigem loterii, kus peaaegu kindla väikese kahju korral on väga väike võimalus saada suur võit, kui loterii, kus peaaegu kindla väikse võidu korral on olemas väike võimalus suureks kaotuseks. Sellist käitumist võib defineerida kui hävingukartlikkus (*ruin/loss aversion*) (Heyer 2002: 98). Hävingukartlikkust saab formaalselt hinnata kolmandat järku stohhastilise domineerimise (3. SD) abil. Vara  $x$  domineerib vara  $y$ -i üle kolmandat järku stohhastilise domineerimise mõttes, kui  $F_x(r) \neq F_y(r)$  ja kehtib (Whitmore 1970: 457-458):

$$(1.12) \quad \int_{-\infty}^r [\Phi_y(r') - \Phi_x(r')] dr' \geq 0 \quad \forall r,$$

$$\text{kus} \quad \Phi_{x,y}(r) = \int_{-\infty}^r F_{x,y}(r') dr',$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [F_x(r) - F_y(r)] dr \geq 0.$$

Praktiliste arvutuste jaoks võib kolmandat järku stohhastilise domineerimise kriteeriumi defineerida kvantiilide kaudu järgnevalt:

$$(1.13) \quad \int_0^{\alpha} [\Psi_x(\alpha') - \Psi_y(\alpha')] d\alpha' \geq 0 \quad \text{iga } \alpha \text{ korral,}$$

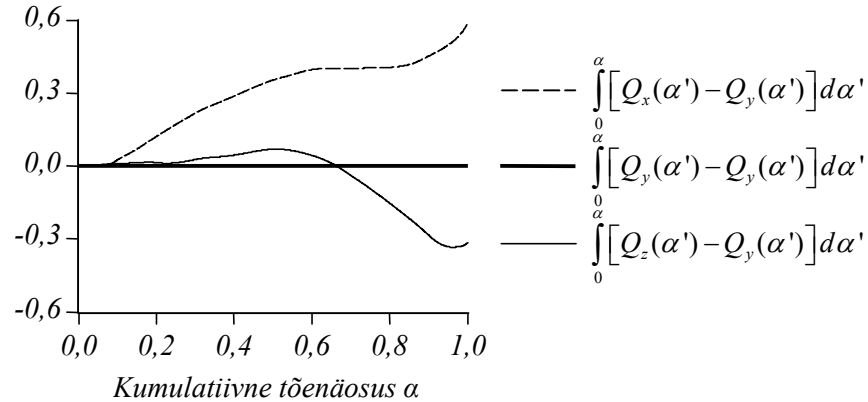
$$\text{kus} \quad \Psi_{x,y}(\alpha) = \int_0^{\alpha} Q_{x,y}(\alpha') d\alpha',$$

$$\int_0^1 [Q_x(\alpha) - Q_y(\alpha)] d\alpha \geq 0.$$

Kui kehtib kolmandat järku stohhastiline domineerimine, siis piisavalt suure usaldusnivoo (mis üldjuhul nii ongi)  $1-\alpha$ ' korral leidub  $\alpha < \alpha'$  nii, et sama eelistus kehtib ka kui võrrelda riskantsete aktive (portfellide)  $ES_{\alpha}$ -sid.

Empiirilise analüüsi jaoks on kasulik esitada stohhastilise domineerimise kriteeriumid graafiliselt. Käesolevas töös kasutatakse peamiselt kvantiillähenumist ning graafilise

esituse korral tuuakse välja vastavat järku stohhastilise domineerimise kriteeriumite (1.8), (1.10) ja (1.13) väärtused iga tõenäosuse taseme  $\alpha$  korral. Joonisel 1.5 on näitena esitatud graafiline abivahend teist järku stohhastilise domineerimise tuvastamiseks.



**Joonis 1.5.** Näide teist järku stohhastilise domineerimise kriteeriumi graafilisest esitusest (autori koostatud).

Joonisel on kajastatud kriteeriumi (1.10) väärtused iga tõenäosuse taseme  $\alpha$  korral. Kui kõik väärtused jäävad mittenegatiivsesse piirkonda, siis on tegemist teist järku stohhastilise domineerimisega. Joonisel 1.5 on esitatud teist järku stohhastiline domineerimine juhusliku suuruse  $y$  suhtes ning selle põhjal saab väita, et ainult juhusliku suuruse  $x$  jaotus domineerib juhusliku suuruse  $y$  jaotust. Kuna juhusliku suuruse  $z$  korral on osade  $\alpha$  väärtuste korral kriteeriumi (1.10) väärtused negatiivsed, siis ei ole võimalik järjestada juhuslikke suurusi  $z$  ja  $y$  teist järku stohhastilise domineerimise põhjal. Selliselt esitatud tulemuste põhjal on kiiresti võimalik visuaalse kontrolli järgi kindlaks teha, kas juhuslikke suurusi on võimalik järjestada (nii esimest, teist kui kolmandat järku) stohhastilise domineerimise kriteeriumite põhjal. Täpsema analüüsi jaoks võrreldakse kriteeriumite (1.8), (1.10) ja (1.13) väärtusi vahetult iga  $\alpha$  väärtuse korral.

Stohhastilise domineerimise kriteeriumid on kooskõlas kasulikkusteooriaga, kuna annavad järjestuse kindla subjektiivse riskisuhtumise korral. Millise kujuga jaotust kindla subjektiivse riskisuhtumisega investorid eelistavad, avaldub paremini läbi kasulikkusfunktsiooni arenduse Tayloriga oodatava tulususe korral:

$$(1.14) \quad U(r) = U(E(r)) + U'(E(r))(r - E(r)) + \frac{U''(E(r))}{2!}(r - E(r))^2 + \frac{U'''(E(r))}{3!}(r - E(r))^3 + \dots$$

Eeldusel, et kasulikkusfunktsioon on vähemalt kolmandat järku diferentseeritav, saab lähtuvalt tuletiste märkidest kirjeldada teatud tüüpi suhtumist riski. Esimest järku stohhastiline domineerimine kirjeldab investorite käitumist, kelle kasulikkusfunktsiooni esimene tuletis on positiivne ja kõrgemat järku tuletised nullid ehk eelistusjärjestus kujuneb vaid riskantse vara oodatava tulususe põhjal (riskineutraalsed investorid), Teist järku stohhastiline domineerimine kirjeldab tulu soovivaid investoreid ( $U' > 0$ ), kelle kasulikkusfunktsiooni teine tuletis on negatiivne ehk tegemist on riskikartlike investoritega. Kui lisaks riskikartlikkuse eeldustele on kolmas tuletis positiivne ja kõrgemat järku tuletised nullid, siis on tegemist niinimetatud hävingukartliku investoriga, mida on võimalik kirjeldada läbi kolmandat järku stohhastilise domineerimise.

Valemist (1.14) on näha, et riskineutraalse investori jaoks on ainus otsustuskriteerium riskantsete alternatiivide järjestamiseks oodatav tulumäär. Riskikartlik investor teeb oma eelistused lähtuvalt oodatava tulumäära ja sellega kaasneva dispersiooni järgi ehk sama oodatava tulemus juures eelistab riskikartlik investor väiksemat volatiilsust (dispersiooni). Hävingukartliku investori jaoks on lisaks oodatavale tulumäärale ja dispersioonile oluline jaotuse asümmeetrilisus. Hävingukartlik investor eelistab sellist oodatava tulu jaotust, mille äärmuslike kahjude esinemisulatus/-tõenäosus on suhteliselt väike ning on valmis aktsepteerima suhteliselt sagedasemalt esinevaid keskmise suurusega kahjusid. Iga funktsiooni  $U(x)$  korral, mis rahuldab tingimusi  $U'(x) > 0$ ,  $U''(x) < 0$  ja  $U'''(x) > 0$  on asümmeetrilisuse koefitsient positiivne (Booth, Smith 1987: 78). Juhul, kui jaotusfunktsioon on määratud lõpliku arvu parameetritega  $\theta_1, \dots, \theta_m$ , on võimalik anda samasugune eelistusjärjestus jaotusfunktsiooni parameetrite järgi kui kasulikkusfunktsioonigagi.

Kuigi kasulikkusfunktsiooni ja jaotusfunktsiooni parameetritega võib anda sama eelistusjärjestuse, siis analoogiline seos ei kehti alati jaotusfunktsiooni parameetrite ja stohhastilise domineerimise kriteeriumite korral. Küll aga kehtivad järgmised seosed (Fishburn 1980). Kui juhuslik muutuja  $x$  domineerib juhuslikku muutujat  $y$  esimest

järku stohhastilise domineerimise mõttes, siis alati on domineeriva vara keskvärtus suurem domineeritava vara keskvärtusest ( $\mu_x > \mu_y$ ). Kuna esimest järku stohhastilisest domineerimisest järeldub teist (ja kõrgemat) järku stohhastiline domineerimine, siis on teist (ja kõrgemat) järku stohhastilise domineerimise mõttes domineeriva vara tulumäärade jaotuse keskvärtus suurem või võrdne domineeritava vara tulumäärade keskvärtusega ning juhul kui keskvärtused on võrdsed, peab domineeriva vara jaotuse standardhälve olema väiksem kui domineeritaval juhuslikul suurusel ( $\mu_x = \mu_y$  ja  $\sigma_x < \sigma_y$ ). Kuna madalamat järku stohhastilisest domineerimisest tuleneb automaatselt kõrgemat järku domineerimine, siis kolmandat järku stohhastilise domineerimise korral kehtivad eelnevalt nimetatud tingimused ning juhul kui nii keskvärtused kui standardhälbed on juhuslikel muutujatel samad, peab domineerival varal tulumäärade jaotuse asümmeetrilisuse koefitsient  $\kappa$  olema suurem ( $\mu_x = \mu_y$  ja  $\sigma_x = \sigma_y$  ja  $\kappa_x > \kappa_y$ ). Alati aga ei kehti vastupidised seosed ehk ei ole võimalik anda ühest juhuslike suuruste järjestust ainult nende jaotuse karakteristikute põhjal nii, et järjestus langeks kokku stohhastilise domineerimise kriteeriumitega.

Eelnevast on näha, et esimest ja teist järku stohhastiline domineerimine on teatud mõttes vastavalt  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  täpsustav lähenemine.  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  võivad osutada väheusaldusväärsseteks, kuna vaatlevad jaotusest väga väikest osa, ning samas on stohhastilise domineerimise kriteeriumid liiga ranged, et anda eelistussuhet praktilistes arvutustes. Sellest tulenevalt on välja pakutud vahepealne lähenemine. Esimest ja teist järku stohhastilise domineerimise võib eelneva põhjal kirja panna ka  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  põhjal. Kui vähemalt ühe  $\alpha$  korral  $VaR_\alpha(x) \neq VaR_\alpha(y)$  ja  $ES_\alpha(x) \neq ES_\alpha(y)$ , siis kehtivad järgmised seosed:

$$(1.15) \quad VaR_\alpha(x) \leq VaR_\alpha(y) \forall \alpha \Rightarrow x \underset{1.SD}{>} y,$$

$$(1.16) \quad ES_\alpha(x) \leq ES_\alpha(y) \forall \alpha \Rightarrow x \underset{2.SD}{>} y.$$

Kuna esitatud kriteeriumid on liiga ranged (peavad kehtima iga  $\alpha$  korral), siis vahepealse variandi korral on nõutud stohhastilise domineerimise kriteeriumite „kehtimine iga  $\alpha \leq \alpha^*$  korral”. Täpsemalt käsitletakse teist järku stohhastilise domineerimise kriteeriumil põhinevat vahepealset varianti. Majanduslikus mõttes kirjeldab selline kriteerium investori riskisuhtumist, kes eelistussuhte kujundamisel

arvestab ainult  $\alpha^*$  % kõige halvemate tulemuste realiseerumise võimalusega ja sellega kaasnevate kahjude keskväertusega. Formaalset on modifitseeritud teist järku stohhastilise domineerimise kriteerium esitatud järgnevalt. Juhusliku suuruse  $x$  jaotuse kahjude osa  $\alpha^*$ -ni domineerib vastavat juhusliku suuruse  $y$  kahjude osa, kui  $Q_x(\alpha) \neq Q_y(\alpha)$   $\alpha \leq \alpha^*$  korral ning:

$$(1.17) \int_0^{\alpha} [Q_y(\alpha') - Q_x(\alpha')] d\alpha' \leq 0 \text{ iga } \alpha \leq \alpha^* \text{ korral ehk}$$

$$(1.17') \int_0^{\alpha} Q_y(\alpha') d\alpha' \leq \int_0^{\alpha} Q_x(\alpha') d\alpha', \forall \alpha \leq \alpha^*.$$

Valemite (1.11) ja (1.17') põhjal on näha, et juhusliku suuruse  $x$  jaotus domineerib vastavat  $y$ -i jaotust vahepealse teist järku stohhastilise domineerimise mõttes parajasti siis, kui  $ES_{\alpha}(x) \neq ES_{\alpha}(y)$  ning  $ES_{\alpha}(x) \leq ES_{\alpha}(y)$  iga  $\alpha \leq \alpha^*$  korral.

Kuna niinimetatud vahepealne kriteerium põhineb kvantiillähenedel, siis saab seda kriteeriumit vahetult rakendada varade kahjude jaotuste võrdlemisel. Kahe riskantse vara (portfelli) jaotuste võrdlemisel kasutatakse mõlema vara korral tulumäärade jaotuste alumist „saba“ kuni  $\alpha^*$ -kvantiilini ja seega ei ole vajadust nende jaotuste eelnevaks normeerimiseks. Kui sellist vahepealset kriteeriumit rakendada jaotusfunktsioonide põhiste stohhastilise domineerimise kriteeriumitele, siis on vaja ette anda mingisugune kahju tase, millest suuremate kahjude jaotusi võrreldakse. Enne võrdlemist on aga vaja mõlemad jaotused etteantud kahju tasemini vaja normeerida (näiteks vahemikku null ja üks).

Praktilistes arvutustes leitakse riskantsete varade võrdlemiseks tõenäosuse tase  $\alpha^*$ , mille korral kriteerium (1.17) võrdub nulliga ning iga  $\alpha \leq \alpha^*$  korral on kriteeriumi väärtus mittenegatiivne. Sellisel juhul on tõenäosuse  $\alpha^*$  korral investori jaoks tulumäära jaotuse alumine „saba“ samaväärne, kuid vahetult väiksema  $\alpha^*$  korral saab anda eelistuse ühe või teise vara (portfelli) suhtes. Nii näiteks on joonisel 1.5 (lk. 22) kirjeldatud olukord, kus riskantne vara  $z$  domineerib modifitseeritud teist järku stohhastilise domineerimise mõttes vara  $y$  kuni tõenäosuseni  $\alpha^* = 0,65$ . Teatud mõttes kirjeldab  $\alpha^*$  tase stohhastilise domineerimise „tugevust“. Kuigi stohhastiline domineerimine kas on või ei ole, siis on sellise vahepealse püstituse korral selge, et kui  $\alpha^*$  läheneb ühele (või võrdub ühega

diskreetse jaotusfunktsiooni korral), siis domineerib juhuslik suurus  $x$  juhuslikku suurust  $y$  „kogu jaotusfunktsiooni ulatuses” ehk kõik riskikartlikud investorid peaksid eelistama riskantset vara  $x$ .

Põhimõtteliselt võib sellist lähenemist „laiendada” kõigi stohhastilise domineerimise kriteeriumitele, kuid kuna tegemist on küllaltki abstraktse püstitusega, siis vajab see edaspidist täiendavat ja põhjalikumat teoreetilist analüüsi.

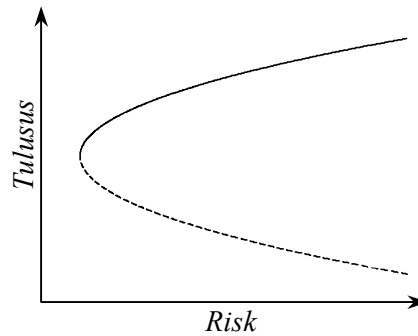
## 2. ERINEVATE RISKIMÕÖTUDE PÕHJAL PORTFELLI KOOSTAMINE

### 2.1. Üldine püstitus

Portfelli koostamise eesmärk on vähendada nõutava tuluga kaasnevat riski või alternatiivselt suurendada oodatavat tulu etteantud riskitaseme korral. Subadiitiivsuse tingimuse kohaselt on seda võimalik teha, kui portfelli koostatakse paljudest erinevate karakteristikutega varadest. Traditsiooniline portfelliteooria võtab portfelli koostamisel riskimõõdu aluseks portfelli tulu varieeruvuse. Standardhälbe kasutamisega tehakse aga ebareaalne eeldus, et investorite jaoks on sama kaaluga negatiivsete ja positiivsete tulususte esinemise tõenäosused ehk nad suhtuvad sarnaselt kaotuse riski (*downside risk*) ja võidu potentsiaali (*upward potential*) (Huisman *et al.* 2001: 1790). Sellele puudusele juhtis tähelepanu ka Markowitz oma 1959. aastal ilmunud raamatus ja käsitles samas töös riskikriteeriumina ka niinimetatud pooldispersiooni, mis mõõdab nõutavast tulususest väiksemate tulumäärade varieeruvust. Käesolevas töös võetakse portfelli optimeerimisel riski näitajatena vaatluse alla oodatava tulususe kahjudel põhinevad riskimõõdud, täpsemalt kvantiilil baseeruvad riskimõõdud  $Var_\alpha$  (*Value-at-Risk*) ja  $ES_\alpha$  (*Expected Shortfall*).

Käesolevas töös käsitletakse portfelli valikut riski-tulu (*risk-reward*) ruumis, kus tulu kirjeldatakse portfelli keskväärtusega ja riskikriteeriumina  $\rho$  kasutatakse  $Var_\alpha$ -t või  $ES_\alpha$ -t erinevate usaldusnivoode  $1-\alpha$  korral. Joonisel 2.1 on kujutatud optimeerimisprobleemi lahendipaaride graafiline esitus. Pideva joonega on esitatud riski-tulu efektiivsuspiir. Öeldakse, et portfelli  $\mathbf{x}$  on riski-tulu efektiivne ehk kuulub riski-tulu efektiivsuspiirile, kui ei eksisteeri ühtegi portfelli  $\mathbf{x}'$ , mille korral on täidetud tingimused  $E(r') \geq E(r)$  ja  $\rho(\alpha, \mathbf{x}') \leq \rho(\alpha, \mathbf{x})$  ja seejuures vähemalt üks neist on range võrratus ehk efektiivsuspiiril asuvad portfelliid, mille tulu ei ole võimalik suurendada ilma et suureneks portfelli risk või mille riski ei ole võimalik vähendada ilma nõutava tulu vähenemiseta. Millise

portfelli valib konkreetne agent nimetatud efektiivsuspiiril (või kombinatsiooni portfelist efektiivsuspiiril ja riskivabast aktivast), sõltub juba tema subjektiivsest suhtumisest riski. Käesoleva uurimistö eempiirilises analüüsis kasutatakse optimaalsete portfelliide koostamisel ainult riskantseid aktiivaid, riskivaba aktiivat ei ole käsitletud.



**Joonis 2.1.** Võimalike riski-tulu lahendipaaride hulk ja efektiivsuspiir (autori koostatud).

Käesolevas töös kasutatakse eempiirilises osas diskreetseid tulumäärasid. Sel juhul portfelli tulumäär  $r_p$  avaldub kujul:

$$(2.1) \quad r_p = \sum_{i=1}^n x_i r_i,$$

kus  $r_p$  – portfelli tulumäär,  
 $r_i$  – individuaalse vara tulumäär,  
 $x_i$  – portfelli kuuluva individuaalse vara osakaal.

Järgnevalt on esitatud portfelli koostamise ülesande üldine püstitus. Olgu  $\rho$  mingi riskimõõt, nagu näiteks  $VaR_\alpha$ ,  $ES_\alpha$ , standardhälve või pooldispersioon, siis etteantud nõutava portfelli tulususe  $\mu^*$  korral on vaja leida osakaalud  $\mathbf{x}$  nii, et:

$$(2.2) \quad \min_{\mathbf{x}} \rho(r_p),$$

$$\text{tingimustel } E(r_p) = \mu^*, \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Ülesande (2.2) lahendid kõikvõimalike  $\mu^*$ -de korral moodustavad joonisel 2.1 riski-tulu rajaportfelliid (nii pidev- kui katkendjoon). Alternatiivne ülesanne (leiab ainult riski-tulu efektiivsuspiiri) on leida portfelli kuuluvate varade osakaalud  $\mathbf{x}$  etteantud riski  $\rho^*$  korral nii, et:

$$(2.3) \quad \max_x E(r_p),$$

$$\text{tingimustel } \rho(r_p) = \rho^*, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Edaspidises töös kasutatakse riskimõõt-portfelli mõistet ( $\sigma$ -portfell,  $VaR_\alpha$ -portfell,  $ES_\alpha$ -portfell) kui vastava riskimõõdu järgi püstitatud portfelli optimeerimisülesande lahendit.

Erinevate portfelli võrdlemiseks on üldjuhul vaja teha eeldusi investori subjektiivse riski suhtumise kohta. Käesolevas töös kasutatakse erinevate riskikriteeriumite põhjal leitud portfelli võrdlemisel peamiselt eelmises peatükis 1.3 käsitletud stohhastilise domineerimise kriteeriume.

Käesolevas töös vaadeldakse niinimetatud *benchmark* portfelli klassikalise Markowitzi portfelli. Traditsioonilises portfelliteoorias käsitletakse riskina oodatava tulu varieeruvuse näitajat standardhälvet. Standardhälve sobib riskimõõduks portfelli riski juhtimise seisukohast vaid teatud täiendavate eelduste korral. Standardhälve on siis sobiv riskimõõt, kui see kirjeldab tegelikku tulumäärade jaotust (on selle jaotuse parameeter). Nii on näiteks normaaljaotus kirjeldatav kahe parameetri (keskväärtus, standardhälve) abil. Samuti on standardhälve sobivaks riskikriteeriumiks neil investoritel, kelle kasulikkusfunktsioon on esitatav ruutfunktsioonina. Ruutfunktsiooni korral on kasulikkusfunktsioon võimalik avaldada juhusliku suuruse jaotuse keskväärtuse ja dispersiooni kaudu (vt. näiteks Liu 2004: 5), millega on üheselt määratud eelistussuhe.

Traditsioonilise portfelliteooria alternatiivina vaadeldakse oodatavaid kahjusid minimeerivaid portfelle. Finantspraktikas laialt levinud riskimõõt  $VaR_\alpha$  baseerub küll jaotuse kahjudel, kuid võtab sellest arvesse vaid ühe kvantiili. Kuigi  $VaR_\alpha$  on finantspraktikas laialdaselt kasutatav ja aktsepteeritav riski kirjeldav suurus, on sellel mitmeid puudusi portfelli juhtimise seisukohalt (Szegö 2002: 1261). Kuna  $VaR_\alpha$  võtab arvesse vaid ühe kvantiili jaotusfunktsioonil, siis on tegemist peamiselt tõenäosusliku riskimõõduga.  $VaR_\alpha$  annab hinnangu, kui tõenäolised on  $VaR_\alpha$  taset ületavad kahjud, kuid ei anna hinnangut sellele, kui suureks võivad osutada äärmuslikud kahjud riskide realiseerumise korral. Kui  $VaR_\alpha$ -t kasutatakse portfelli riskikriteeriumina, siis eelnevast

tulenevalt ei pruugi  $VaR_\alpha$  minimeerimine tuua kaasa äärmuslike kahjude vähenemist. Portfelli koostamise seisukohast võib subadditiivsuse mittekehtivuse korral erinevate karakteristikutega varade portfelli lisamine viia portfelli riski suurenemisele. Sellisel juhul ei ole portfelli  $VaR_\alpha$  enam kumer funktsioon portfelli kuuluvate varade suhtes ja võib osutada väga raskeks leida ühest optimaalset lahendit. Mittekumeruse korral võib  $VaR_\alpha$ -efektiivsuspiir olla mittekumer ning väikeste muutuste korral algandmetes võib lõplik probleemi lahend osutada oluliselt erinevaks esialgselt.

Peamine  $VaR_\alpha$ -riskijuhtimise puudus tuleb sellest, et tähelepanu pööratakse kahjude tõenäosuse kontrollimisele, mitte aga kahjude suurustele. Ideaaljuhul, et kontrollida kahjude suurust/ulatust, tuleb kontrollida kõiki kahju jaotusfunktsiooni momente. Basak ja Shapiro (2001) uurisid oma töös  $VaR_\alpha$ -riskijuhtimise mõjusid ja leidsid, et kui suured kahjud juhtuvad, siis  $VaR_\alpha$ -riskijuhtimise korral realiseerusid äärmuslikud kahjud suuremaks võrreldes traditsioonilise portfelliga.

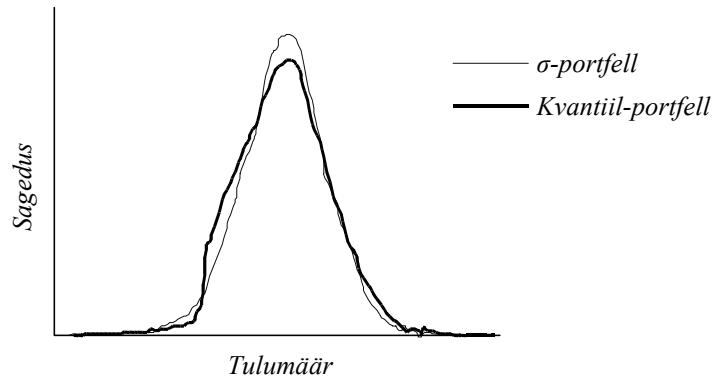
$VaR_\alpha$  puudustest tulenevalt on loogilise edasiarendusena välja pakutud riskimõõt, mis lisaks  $VaR_\alpha$ -le võtab arvesse ka kahjud, mis ületavad  $VaR_\alpha$  taset – *Expected Shortfall*. Erinevalt  $VaR_\alpha$ -st on  $ES_\alpha$  koherentne riskimõõt, mis annab portfelli optimeerimisel ühese lahendi ilma täiendavate eelduste tegemiseta.

Paljudes rakendustes on  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  riskimõõtude arvutamise ja juhtimise lihtsustamiseks tehtud eeldusi oodatavate tulumäärade jaotuse suhtes. Enamlevinud eeldus jaotusfunktsiooni osas on tulumäärade normaaljaotuse eeldus. Valemitest (1.4) ja (1.6) on näha, et normaaljaotuse eelduse ja  $\alpha < 0,5$  korral taanduvad  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  kujule  $b\sigma - \mu$ , kus  $b$  on mingi nullist suurem konstant. Seega annavad portfelli minimeerimine standardhälbe,  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  korral sama optimaalse portfelli (sama nõutava tulumäära tingimuse korral) ning  $VaR_\alpha$ - ja  $ES_\alpha$ -portfellide efektiivsuspiirid moodustavad keskväärtus-standardhälbe ruumis Markowitzi portfelli alamhulgad (De Giorgi 2002, Embrechts *et al.* 1999). Normaaljaotuse korral usaldusnivoo  $1-\alpha$  suurenedes konvergeeruvad miinimum  $VaR_\alpha$ - ja  $ES_\alpha$ -portfellid miinimum dispersiooniga portfelliiks ja efektiivsuspiirid keskväärtus-standardhälbe efektiivsuspiiriks (Alexander, Baptista 2002: 1186-1187).

Normaaljaotuse eeldust toetab tsentraalne piirteoreem, mille kohaselt (vabas ja veidi ebatäpses sõnastuses) suvaliste sõltumatute jaotustega juhuslike muutujate lineaarse kombinatsiooni jaotus läheneb muutujate arvu kasvamisel normaaljaotusele. Finantspraktikas ei käitu aga varade tulusused sõltumatult (kujuures varade jaotused on enamikul juhtudel paksusabalised ja optioonide korral lõigatud jaotusega), mistõttu ka suure arvu erinevatest varadest koosneva portfelli tulumäärade jaotus ei pruugi olla piisavalt hea lähend normaaljaotusele. Mitmed (kaasa arvatud käesoleva töö autori) uurimused finantsaegridade kohta on näidanud, et kui arenenud turgude aktsiaturgude tulumäärade käitumist võib lugeda täiesti juhuslikeks (*white noise*) protsessideks, siis arenevate riikide aktsiaturgude tulususte aegread näitavad olulist nullist erinevat vähemalt esimest järku autokorrelatsiooni. Peamine põhjus aga tsentraalse piirteoreemi mittekehtivusele võib olla finantsaegridade omavaheline sõltuvus. Autori varasemas uurimuses (Lambing 2001) käsitleti aktsiaturgude koosliikumist kointegratsiooniseostena ja leiti olulised aktsiaturgude vahelised seosed ning šokkide ülekandumised ühelt turult teisele. Sellest tulenevalt käsitletakse käesolevas töös portfelli optimeerimist ilma täiendavate eeldusteta portfelli tulumäärade jaotusfunktsioonide kohta.

Varasemate uurimuste põhjal on täheldatud, et  $VaR_\alpha$ -portfellide kaotuste „saba” võib riskikriteeriumi minimeerimisel pikaks venida. Samas on  $ES_\alpha$  minimeerimisel standardhälvet vähendav mõju, kuna aga  $ES_\alpha$ - ja ka  $VaR_\alpha$ -portfelli standardhälve ei saa olla väiksem kui traditsioonilisel  $\sigma$ -portfelli, siis peavad portfelli tulumäärade empiirilises tihedusfunktsioonis (jaotusfunktsioonis) toimuma mingisugused muutused. Võimalikud muutused portfelli tulumäärade tihedusfunktsioonis on näiteks järgmised (vt. joonis 2.2):

- 1) kasvab tulumäärade osa, mis ületavad portfelli nõutavat tulumäära,
- 2) kasvab tulumäärade osa, mis jäävad alumise  $\alpha$ -kvantiili ja nõutava tulumäära vahele.



**Joonis 2.2.** Portfelli tulumäärade hüpoteetilised tihedusfunktsioonid erinevate riskikriteeriumite korral (autori koostatud).

Esimese võimaluse korral toimuks üheaegselt suurte kahjude tõenäosuste vähenemine ja kasude (üle oodatava väärtuse) suurenemine, mida eelistaksid kõik ratsionaalsed investorid. Teise variandi korral toimuks suurte kahjude vähenemise arvel väiksemate kahjude osakaalu suurenemine, mida võivad eelistada vähemalt hävingukartlikud investorid. Tegelikuses realiseerub mõlema võimaluse kombinatsioon. Selle hüpoteesi testimiseks kasutakse lihtsat graafilist meetodit ning stohhastilise domineerimise kriteeriume. Praktilised arvutused käesolevas töös peavad näitama, kas kriteeriumi  $ES_\alpha$  korral oodatavate kahjude ulatus väheneb piisavalt, selleks et vähemalt hävingukartlikud investorid eelistaksid sama oodatava tulumäära korral  $ES_\alpha$ -portfelle  $VaR_\alpha$ -portfellidele.

Teine hüpotees on seotud kvantiiliriski usaldusnivoo  $1-\alpha$  valikuga  $ES_\alpha$  kriteeriumi korral. Mida suurem on valitud usaldusnivoo  $1-\alpha$ , seda väiksemaks muutuvad äärmuslikud kahjud ehk  $\alpha$  vähenedes optimaalse portfelli tulususe jaotuses muutub äärmuslike kahjude “saba” lühemaks. Hüpotees on seotud sellega, et  $\alpha$  vähenedes äärmuslike vaatluste suhteline kaal suureneb optimeerimiskriteeriumis.

Kolmas hüpotees on seotud valikuvõimaluste hulgaga. Mida vähemkitsendatud on portfelli optimeerimise ülesanne (näiteks katteta ettemüügi lubamine), seda tugevamini avalduvad eelmises kahes hüpoteesis esitatud tulemused. Põhjuseks on see, et vähemkitsendatud portfelli korral on rohkem võimalusi jaotusfunktsioonis sisalduva informatsiooni ära kasutamiseks.

Varasemates uurimustes on  $VaR_\alpha$  loetud mitesobivaks riskimõõduks koherentsuse tingimuste mittetäitmise tõttu ning seetõttu, et  $VaR_\alpha$  ei arvesta kui suured võivad olla kahjud, mis ületavad  $VaR_\alpha$  taset. Nendel põhjustel on pakutud parema alternatiivina välja riskikriteeriumiks  $ES_\alpha$ . Käesolevas uurimistöös püütakse näidata, et  $ES_\alpha$  peaks olema eelistatud  $VaR_\alpha$ -le ka portfelli koostamise seisukohast. Selle näitamiseks kasutatakse stohhastilise domineerimise kriteeriume ning püstitatud on hüpotees, et  $ES_\alpha$ -portfellid on vähemalt kolmandat järku stohhastiliselt domineerivad  $VaR_\alpha$ -portfellide üle sama nõutava tulususe korral. Järgnevalt vaadeldakse detailsemalt üldisele optimeerimisülesande püstitusele vastavaid arvutusalgoritme konkreetsete riskikriteeriumite korral. Esitatud algoritmid leiavad kasutust portfelli optimeerimisel ja hindamisel empiiriliste andmete põhjal.

## 2.2. Portfellide koostamine $\sigma$ , $VaR_\alpha$ ja $ES_\alpha$ põhjal

Eelmises punktis püstitud portfelli optimeerimise ülesande rakendamine standardhälbe korral taandub järgmise probleemi lahendamisele:

$$(2.4) \quad \min_x \sigma_p$$

$$\text{tingimustel } E(r_p) = \mu^*, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1,$$

$$\text{kus } \sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \text{ – portfelli dispersioon,}$$

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(r_i, r_j) \text{ – varade } i \text{ ja } j \text{ tulumäärade vaheline kovariatsioon.}$$

Tegemist on ruutfunktsiooni minimeerimisega võrdustena esitatud lineaarsete kitsenduste korral, mis on matemaatiliselt suhteliselt lihtsalt lahendatav ülesanne. Eelnevaga analoogiliselt ei ole aga  $VaR_\alpha$ -t võimalik vahetult rakendada portfelli optimeerimise ülesandesse. Reaalsete andmete korral muutub  $VaR_\alpha$  leidmine täisarvulise muutujaga probleemi (*mixed integer programming*) lahendamiseks. Larsen *et al.* (2002) pakkusid välja lähendi, mis baseerub  $ES_\alpha$  minimeerimise probleemil.  $ES_\alpha$ -portfelli optimeerimise probleem on püstitud järgneval kujul:

$$(2.5) \quad \min_x ES_\alpha(r_p)$$

$$\text{tingimustel } E(r_p) = \mu^*, \sum_{i=1}^n x_i = 1, \alpha = \alpha^*.$$

Rockafeller ja Uryasev (2000) näitasid, et  $ES_\alpha$ -portfelli optimeerimine kujul (2.5) on samaväärne, kui optimeerida järgnevat funktsiooni:

$$(2.6) \quad ES'_\alpha(\mathbf{x}, VaR_\alpha) = VaR_\alpha + \alpha^{-1} \int_{r_p}^{\infty} [-r_p - VaR_\alpha]^+ f(r_p) r_p,$$

$$\text{tingimustel } E(r_p) = \mu^*, \sum_{i=1}^n x_i = 1, \alpha = \alpha^*.$$

Funktsiooni (2.6) optimeerimise eelis on selles, et ei ole vaja eelnevalt leida  $VaR_\alpha$  taset, vaid piisab olulisusenivoo  $1-\alpha$  fikseerimisest, ning  $VaR_\alpha$  saadakse optimeerimisülesande lisalahendina. Tulumäärade jaotust teadmata, võib empiirilistes arvutustes kasutada  $ES_\alpha$  funktsiooni järgnevat lähendust:

$$(2.7) \quad ES'_\alpha(\mathbf{x}, VaR_\alpha) = VaR_\alpha + \frac{1}{m\alpha} \sum_{k=1}^m [-r_p - VaR_\alpha]^+,$$

kus  $m$  on andmetest võetud valimi suurus.

$VaR_\alpha$ -portfelli leidmiseks kasutatakse Larsen *et al.* (2002) poolt esitatud lahendusalgoritmi. Järgnevalt on esitatud selle algoritmi mitteformaalne kirjeldus (täpsemalt vaata lisa 2 ja *Ibid.*: 135-139). Idee seisneb iteratiivses  $ES_\alpha$  minimeerimise ülesannete (2.5) lahendamises, millega leitakse  $VaR_\alpha$ -le ülemised piirid ning mida süstemaatiliselt vähendatakse. Esimese  $VaR_\alpha$  ülemiseks piiriks võetakse  $ES_\alpha$ -portfelli  $ES_\alpha$ . Järgnevalt „visatakse välja”  $VaR_\alpha$  taset ületavatest kahjudest fikseeritud osa kõige äärmuslikematest vaatlustest, mis järgneva  $ES_\alpha$  optimeerimisprobleemi lahendamise seisukohast on „mitteaktiivsed”. Edasi leitakse uus tõenäosuse tase  $\alpha_1$ , nii et  $ES_{\alpha_1}$  on esialgse probleemi  $VaR_\alpha$  ülemine piir.  $ES_{\alpha_1}$  on keskvärtus „aktiivsetest” kahjudest, mis ületavad  $VaR_\alpha$  taset ning mida omakorda minimeeritakse. Seda protsessi jätkatakse seni kuni „aktiivseid” tulumäärasid esineb. Viimase  $ES_{\alpha_n}$  minimeerimise probleemi lahendamise saadaksegi otsitav  $VaR_\alpha$  tase.

Erinevate riskikriteeriumite minimeerimise tulemusel saadavad portfellid on eeldatavalt oma koosseisult erinevad. Selleks, et võrrelda erinevaid portfelle ja analüüsida portfelli

riski kujunemist portfelli kuuluvatest varadest lähtuvalt, käsitletakse järgnevalt portfelli riski tundlikkust portfelli kuuluvate varade osakaalude suhtes.

Portfelli koosseisu võib analüüsida lähtuvalt portfelli kuuluvate varade osakaaludest, kuid parema ettekujutuse portfelli koosseisust saab, kui analüüsida portfelli riski kujunemist üksikute varade suhtes. Selleks leitakse iga individuaalse vara panus portfelli koguriski. Üldkujul võib portfelli riski lahti kirjutada portfelli kuuluvate varade osakaalude ja vastavate tulumäärade kaudu järgnevalt:

$$(2.8) \quad \rho(\mathbf{x}) = \rho\left(\sum_{i=1}^n x_i r_{ti}\right).$$

Juhul kui riskimõõt  $\rho$  on diferentseeritav portfelli kuuluvate varade osakaalude järgi, siis on Tache (1999) pakkunud välja, et  $x_i \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial x_i}$  on sobiv riski panuse mõõt. Avaldises on portfelli riski osatuletis individuaalse vara osakaalu järgi edaspidi tähistatud  $\rho_i$ , mis mõõdab niinimetatud piirmõju (*marginal impact*) ning piirmõju ( $i$ -nda vara väikese koguse lisamise mõju portfelli riskile, arvatud vara muutumise ühiku kohta) ja osakaalu korrutisega  $x_i \rho_i$  on defineeritud  $x_i r_{ti}$ -i panus kogu portfelli riski.

Standardhälvet (dispersiooni) minimeeriva portfelli riski tundlikkuse portfelli koosseisu suhtes võib lihtsalt kirjeldada standardhälbe osatuletise osakaalu järgi. Selleks leiame algul portfelli dispersiooni osatuletise portfelli kuuluva vara osakaalu järgi:

$$(2.9) \quad \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x_i} = 2x_i \sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1, j \neq i}^n x_j \sigma_{ij} = 2 \text{cov}(r_i, x_i r_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n x_j r_j) = 2 \text{cov}(r_i, r_p).$$

Kuna  $\partial \sigma_p^2 = 2\sigma_p \partial \sigma_p$ , siis avaldub individuaalse vara piirrisk järgnevalt:

$$(2.10) \quad \frac{\partial \sigma_p}{\partial x_i} = \frac{2 \text{cov}(r_i, r_p)}{2\sigma_p} = \beta_i \sigma_p,$$

$$\text{kus } \beta_i = \frac{\text{cov}(r_i, r_p)}{\sigma_p^2}.$$

Piirriski mõõt annab hinnangu individuaalse vara tundlikkusele, paremini iseloomustab portfelli riski aga individuaalsete varade panus koguriski. Et kehtib järgnev seos:

$$(2.11) \quad \sum_{i=1}^n x_i \beta_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \text{cov}(r_i, r_p)}{\sigma_p^2} = \frac{\text{cov}(r_p, r_p)}{\sigma_p^2} = 1,$$

siis võib portfelli standardhälbe panna kirja  $\sigma_p = \sigma_p \sum_{i=1}^n x_i \beta_i$  ja suurust  $\bar{\sigma}_i = x_i \beta_i \sigma_p$

võib tõlgendada kui  $i$ -nda vara panust portfelli riski ja suurust  $\frac{\bar{\sigma}_i}{\sigma_p} = x_i \beta_i$  kui  $i$ -nda vara

suhtelist panust portfelli riski. Suurust  $\bar{\sigma}_i$  nimetatakse ka komponent-standardhälbeks ja see näitab ligikaudu, kui palju muutuks portfelli risk, kui  $i$ -s vara võetakse portfelist välja.

Analoogiliselt on defineeritud portfelli riski tundlikkuse näitajad portfelli koosseisu suhtes ka teiste riskinäitajate korral. Riskimõõdu  $VaR_\alpha$  korral mõõdab osatuletis osakaalu järgi ehk  $M-VaR_i$  (*marginal VaR*) muutust portfelli  $VaR_\alpha$ -s kui muuta  $i$ -nda vara osakaalu ühe ühiku võrra (Tasche 2000: 19):

$$(2.12) \quad M-VaR_i = \frac{\partial VaR_\alpha}{\partial x_i} = E[-r_i | -r_p = VaR_\alpha].$$

Kuna portfelli tulumäär on lineaarne kombinatsioon individuaalsetest tulumääradest, siis ka  $VaR_\alpha$ -le vastav tulumäär on lineaarne kombinatsioon individuaalsete varade tulumääradest ja portfelli  $VaR_\alpha$  võib lahti kirjutada järgnevalt:

$$(2.13) \quad VaR_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial VaR_\alpha}{\partial x_i} \cdot x_i = \sum_{i=1}^n E[-r_i | -r_p = VaR_\alpha] \cdot x_i.$$

Siit on defineeritud riskifaktori  $i$  panus portfelli  $VaR_\alpha$ -le (komponent- $VaR$ ):

$$(2.14) \quad \bar{VaR}_i = \frac{\partial VaR_\alpha}{\partial x_i} \cdot x_i = E[-r_i | -r_p = VaR_\alpha] \cdot x_i.$$

Esitatud kujul (2.14) on tingimuslikku ootust empiiriliste jaotusfunktsioonide korral keeruline leida. Hallerbach (1999) hindas oma töös erinevaid meetodeid tingimusliku ootuse ligilähedaseks leidmiseks. Töö tulemusena pakuti välja, et suhteliselt hea lähendi komponent- $VaR$  hinnangule saab, kui valida järjestatud tulumäärade jaotusest portfelli

$VaR_\alpha$  taseme ümbruses andmete vahemik ning siis leida sellele vahemikule vastavate individuaalsete varade tulumäärade keskvärtus.

$ES_\alpha$  jaoks on analoogiliselt defineeritud tundlikkuse näitaja järgnevalt:

$$(2.15) \quad M - ES_i = \frac{\partial ES_\alpha}{\partial x_i} = E[-r_{ii} \mid -r_p \geq VaR_\alpha].$$

Kuna portfelli tulumäär on lineaarne kombinatsioon üksikute varade tulumääradest ja portfelli  $ES_\alpha$  on integraal tulumääradest, siis ka  $ES_\alpha$  on lineaarne kombinatsioon üksikute varade tulumääradest ja portfelli  $ES_\alpha$  võib avaldada kujul:

$$(2.16) \quad ES_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial ES_\alpha}{\partial x_i} \cdot x_i = \sum_{i=1}^n E[-r_i \mid -r_p \geq VaR_\alpha] \cdot x_i.$$

Siit on analoogiliselt eelnevaga defineeritud komponent- $ES$ :

$$(2.17) \quad \overline{ES}_i = \frac{\partial ES_\alpha}{\partial x_i} \cdot x_i = E[-r_i \mid -r_p \geq VaR_\alpha] \cdot x_i.$$

Järgnevalt viiakse läbi reaalsete ajalooliste andmete põhjal koostatud hüpoteetiliste portfelli analüüs ning püütakse leida vastuseid töö teoreetilises osas kerkinud küsimustele.

## 3. PORTFELLIDE EMPIIRILINE ANALÜÜS

### 3.1. Kasutatavad andmed ja tarkvara

Käesoleva töö empiiriline analüüs põhineb optimeerimisprobleemi (2.2) lahendamisel erinevate riskikriteeriumite korral. Peatähelepanu on kvantiilil baseeruvate riskimõõtude  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  minimeerimisel saadud portfelli omavahelisel võrdlemisel, aga ka nende võrdlemisel standardhälvet ja pooldispersiooni minimeerivate portfelliidega. Vaadeldakse nii portfelle, kus katteta ettemüük on lubatud (portfelli kuuluvate varade osakaalud on kitsendamata), kui ka portfelle, kus see pole lubatud (portfelli kuuluvate varade osakaalud on kõik mittenegatiivsed). Optimeerimisülesande lahendamiseks kasutatakse matemaatiliste probleemide lahendamise tarkvara GAMS (*General Algebraic Modeling System*) *Distribution* 21.3 mittelineaarsete ülesannete lahendamise algoritme (*solvers*) MINOS (Murtagh *et al.* 2004) ja CONOPT (Drud 2004). Erinevate tulumäärade korral on optimeerimisülesanded pandud kirja ühe tsükliks, mis võimaldab töös rakendatud tarkvaral tsükli eelnevatel etappidel saadud informatsiooni kasutada tsükli järgnevatel etappidel.

Töö eesmärgist tulenevalt on andmete valiku esmane kriteerium nende kvaliteet ja võrreldavus. Empiirilise analüüsi läbiviimiseks kasutatakse käesolevas uurimistöös MSCI (*Morgan Stanley Capital International*) koduleheküljel avaldatavaid ametlikke 50 maailma riigi aktsiaindekseid. Valimisse sattunud aktsiaturud ning nende tähised ja järjekorra numbrid on toodud lisa 3. Kasutatakse ühtse meetodika järgi kogutud ja töödeldud aegridu. Kõik aktsiaindeksid on avaldatud viiepäevaste nädalatena ja viidud ühele ja samale baasvaluutale (USA dollar). Samuti on andmekoguja poolt võetud arvesse aktsiaturul toimunud dividendimaksud ning aegridu on vastavalt korrigeeritud. Kui aegreas puuduvad mõned nädalasisesed väärtused, siis on need asendatud eelmise kauplemispäeva väärtusega. Aktsiaturgude korral on puuduvad väärtused tekkinud peamiselt seoses pühadega, kui kauplemist turul ei toimu. Uurimistöös kasutatakse

MSCI poolt avaldatud aegridu päevaste indeksite kohta alates 19.02.1999 kuni 18.02.2004. Nende põhjal on arvutatud diskreetsed päevased tulumäärad  $r_{it}$  kujul:

$$(3.1) \quad r_{it} = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}},$$

kus  $P_{it}, P_{it-1}$  – indeksi  $i$  väärtused vastavalt ajahetkedel  $t$  ja  $t-1$ .

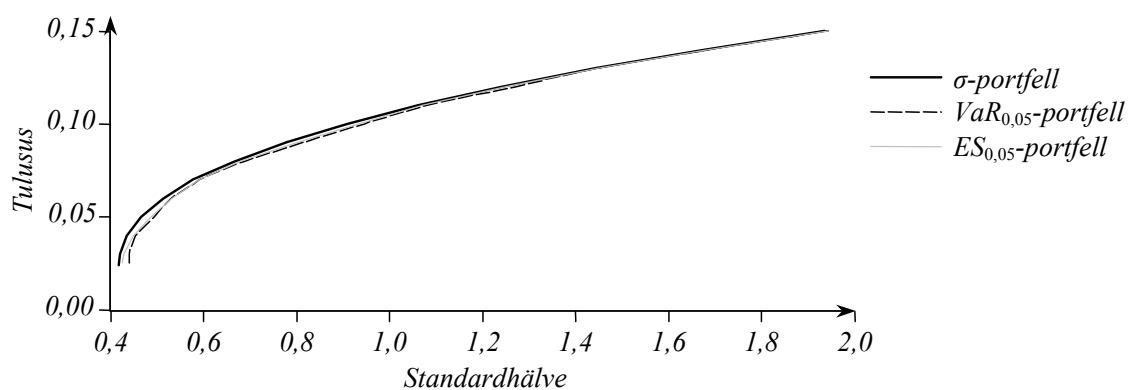
Kuna  $r_{it}$  väärtus on nullilähedane, siis see väärtus on parema ülevaate saamiseks läbi korrutatud sajaga ehk kõiki tulumäärasid käsitletakse protsentsuurustena. Kokku on kasutada 65200 (50x1304) andmekirjet. Hüpooteetiliste portfelli koostamisel kasutatakse kõiki indekseid. Tihtipeale on analüüsis raske anda põhjendusi lähtuvalt individuaalsete varade karakteristikutest. Selleks on portfelli koostamise ülesandes kasutatavate varade arv liiga suur. Samas on võimalik analüüsis kasutatavaid aktsiaindeksid grupeerida lihtsalt kaheks suureks grupiks – arenenud ja arenevad turud – ning analüüsida erinevaid portfelle nendest lähtuvalt. Lähtuvalt MSCI liigitusest on valimis 23 arenenud ja 27 areneva aktsiaturu indeksit. Arenenud aktsiaturgid iseloomustab (vt. lisa 4) suhteliselt tagasihoidlik tulusus ning väike varieeruvus analüüsi all oleva perioodi jooksul. Arenevate turgude (vt. lisa 5) keskmine tulumäär on suurem, kuid ka tulususte jaotuste varieeruvuse karakteristikud on oluliselt suuremad. Samas on arenevatel turgudel tulususte jaotuste asümmeetrilisuse kordajad erinevalt arenenud turgudest enamike aktsiaturgude korral positiivsed, mis tähendab, et suur varieeruvus tuleb pigem positiivsete tulumäärade suhteliselt sagedamast esinemisest või suurematest äärmuslikest positiivsetest tulumääradest. Valimisse sattunud arenevatel aktsiaturgudel on asümmeetrilisuse koefitsient positiivne üle kahe kolmandiku juhtudest, samas arenenud turgudel vaid veerandil valimisse sattunud aktsiaturgudel.

Käesolevas töös kasutatakse hüpooteetiliste portfelli koostamisel ajaloolisi andmeid. Ajalooliste andmete valikuks on mitmeid põhjuseid. Esiteks nende kasutamise lihtsus, olemasolu ning kättesaadavus avalikest andmebaasidest. Ajalooliste aktsiaturgude andmete vahetul kasutamisel ei ole vaja teha täiendavaid eeldusi tulumäärade jaotusfunktsioonide kohta. Samuti räägib ajalooliste andmete kasuks see, et nii kajastub andmetes niinimetatud aktsiaturgude koosliikumine. Ajalooliste andmete kasutamisega tehakse tugev eeldus, et mineviku tulumäärad ja nende jaotus on piisavalt hea lähend

tuleviku tulumäärade kirjeldamiseks. Reaalses elus ei pruugi finantsaegridade jaotus (eriti just äärmuslike vaatluste osas) jääda aja muutudes stabiilseks, kuid töö eesmärgist lähtuvalt võimaldab sellise eelduse püstitamine saada adekvaatsemaid tulemusi erinevate riskikriteeriumite omaduste kohta. Alternatiivjuhul võiks kasutada mitmesuguseid aegridade genereerimise algoritme, kuid kõik need suuremal või vähemal määral ei suuda piisavalt tõepäraselt kirjeldada finantsturgude omavahelisi seoseid.

### 3.2. Portfellide efektiivsuspiirid

Esmalt leitakse kõigi riskikriteeriumite korral optimaalsete portfellide efektiivsuspiirid riski-tulu ruumis, kui riski mõõdetakse standardhälbega. Efektiivsuspiiri leidmiseks lahendatakse kõigepealt portfelli riski minimeerimise ülesanne ilma nõutava tulumäära kitsendusest ning saadud globaalse miinimumriskiga portfellile vastavast tulumäärast alates suurendatakse nõutava tulumäära kitsendust sammuga 0,01%. Järgneval joonisel 3.1 on esitatud katteta ettemüügita portfellide efektiivsuspiirid keskväärtus-standardhälbe tasandil. Korrektselt öeldes esitatakse standardhälvet minimeeriva portfelli efektiivsuspiir ja teiste riskikriteeriumite põhjal leitud optimaalsetele portfellidele vastavad keskväärtus-standardhälvete lahendite paarid.



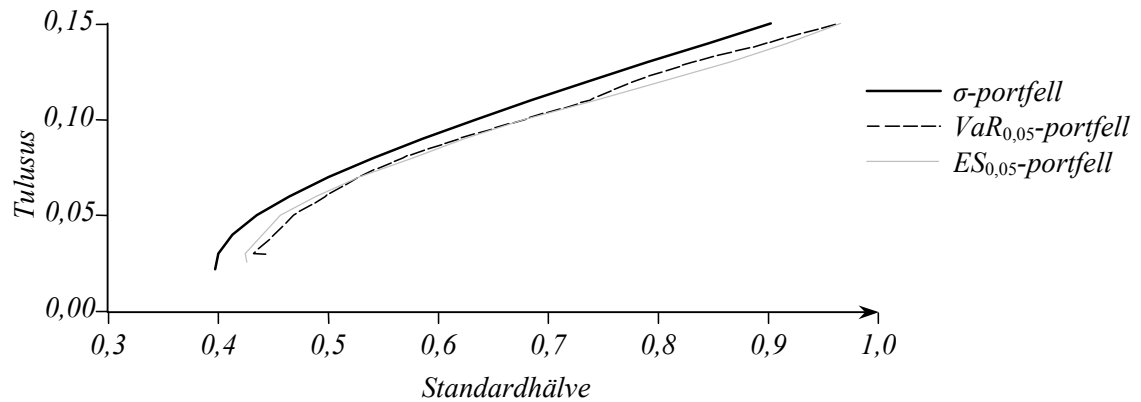
**Joonis 3.1.** Keskväärtus-standardhälbe lahendite paarid (efektiivsuspiir) erinevate riskikriteeriumite korral katteta ettemüügita portfellides (autori koostatud).

Suure valimi mahu tõttu on tulemused oodatavad ning efektiivsuspiirid langevad suurel määral kokku. Põhjuseks ei ole arvatavasti portfelli tulumäärade jaotuse lähenemine normaaljaotusele, vaid pigem portfellidesse kuuluvate varade sümmeetrilised (või samal

suurel määral nihkes) jaotusfunktsioonid. Sarnaselt võib esitada efektiivsuspiirid ka teiste riskikriteeriumite korral keskväärtus-riski tasandil. Lisas 6 on võrdluseks toodud katteta ettemüügita portfelli efektiivsuspiirid nii standardhälbe,  $Var_{0,05}$  kui  $ES_{0,05}$  ja tulususe tasandil. Joonise 3.1 põhjal on näha, et erinevate kriteeriumite põhjal leitud optimaalsete portfelli karakteristikud (risk ja tulusus) on sarnased ning seega on keskväärtus-riskimõõdu lahendid lähedased ka teiste riskikriteeriumite korral. Selliselt esitatud graafikud täidavad ka kontrollifunktsiooni, näidates välja, kas optimeerimisülesandes ei ole tehtud arvutusvigu. Iga riskimõõdu korral peab optimaalne portfelli alati (iga tulumäära või riskitaseme juures) keskväärtuse ja selle riskimõõdu tasandil olema parem teiste riskikriteeriumite põhjal koostatud lahenditest.

Järgnevalt analüüsitakse optimaalsete portfelli efektiivsuspiire juhul, kui katteta ettemüük on lubatud. Katteta ettemüük annab investorile suuremad võimalused portfelli kujundamiseks ning seega saab kasutada paremini ära erinevate varade tulumäärade jaotuste erinevusi. Katteta ettemüügita portfelli koostamisel on investori jaoks varade koosliikumise suund ette antud, muuta saab vaid erinevate varade koosliikumise panust (osatähtsust) koguriski kujunemisel. Lubades portfelli koostamisel teostada katteta ettemüüki, avaneb võimalus muuta erinevate varade koosvarieeruvuse suunda.

Katteta ettemüügiga portfelli on eelnevalt püstitatud ülesandega võrreldes vähemkitsendatud ülesanne ja seega moodustavad lubatavad lahendipaariid suurema hulga. Katteta ettemüügiga optimaalsetest portfelliidest koostatud efektiivsuspiirid annavad alati parema tulemuse sama riskitaseme korral kui vastavad katteta ettemüügita portfelliid. Järgneval joonisel 3.2 on esitatud keskväärtuse ja standardhälbe tasandil traditsioonilise portfelli efektiivsuspiir ja kvantiilil põhinevate kriteeriumite põhjal leitud optimaalsete portfelliid keskväärtus-standardhälbe lahendite paariid.



**Joonis 3.2.** Keskväärtus-standardhälbe lahendite paarid erinevate riskikriteeriumite korral katteta ettemüügiga portfelliges (autori koostatud).

Jooniselt 3.2 on näha, et katteta ettemüügi korral on investoril suuremad võimalused moodustada optimaalne portfelli ja seetõttu on keskväärtus-standardhälbe optimaalsed portfelligid paremad kui teiste kriteeriumite põhjal optimeeritud portfelligid. Lisas 7 on esitatud optimaalsete portfelligide efektiivsuspiirid nii standardhälbe,  $VaR_{0,05}$ ,  $ES_{0,05}$  ja tulususe tasandil. Suhteliselt suure arvu erinevate varade tõttu võis ka siin eeldada erinevate riskikriteeriumite põhjal optimeeritud portfelligide keskväärtuse ja standardhälbe suurt lähedust. Hoolimata suhteliselt suurest portfelli mahust, ei lähene valitud andmete põhjal koostatud portfelligide tulumäärade jaotusfunktsioonid normaaljaotusele ning erinevate riskikriteeriumite põhjal optimeeritud portfelligide lahendipaarid ei lange kokku. Saadud tulemus ei ole tingitud liiga väikesest andmemahust tsentraalse piirteoreemi mõttes. Peamine põhjus võib olla selles, et aktsiaturud on omavahel seotud ja kalduvad sarnaselt liikuma. Tugevalt korreleeruvate „paksusabaliste” jaotuste korral ei pruugi portfelli tulumäärade jaotus lähendada normaaljaotusele ka väga suure arvu varade korral. Peale selle ei ole kasutatud finantsaegread (kõik) täiesti juhuslikud suurused. Lisas 8 on toodud käesolevas töös kasutatavate aegridade lihtsa juhuslikkuse testi<sup>3</sup> tulemused, mille põhjal võib vähemalt arenevate turgude aktsiaindeksite tulususte kohta öelda, et tegemist ei ole täiesti juhuslike (*white noise*) protsessidega.

Erinevas mõttes optimaalsete portfelli analüüsimisel pakub huvi ka minimaalse riskiga portfelli analüüs, kuna see võib aidata erinevate riskikriteeriumite olemust paremini mõista. Järgnevas tabelis 3.1 on esitatud erinevate riskikriteeriumite kasutamisel katteta ettemüügi korral leitud miinimumriskiga portfelli põhikarakteristikud.

**Tabel 3.1.** Minimaalse riskiga katteta ettemüügi portfelli karakteristikud.

Portfelli karakteristikud	Portfelli optimeerimise riskikriteeriumid					
	Standardhälve	Pooldispersioon	$VaR_{0,05}$	$ES_{0,05}$	$VaR_{0,1}$	$ES_{0,1}$
Keskväärus	0,022	0,024	0,030	0,026	0,029	0,025
Mediaan	0,027	0,014	0,027	0,023	0,015	0,025
Maksimum	1,878	2,001	2,343	1,857	2,275	2,158
Miinimum	-3,181	-3,092	-3,602	-3,194	-3,885	-3,242
Püstakus	7,032	6,544	7,577	5,915	9,947	6,863
Asümmeetrilisus	-0,447	-0,233	-0,230	-0,127	-0,576	-0,215
Standardhälve	0,397	0,404	0,443	0,426	0,429	0,414
Poolstandardhälve	0,412	0,399	0,440	0,423	0,429	0,414
$VaR_{0,05}$	0,608	0,607	0,547	0,594	0,589	0,561
$ES_{0,05}$	0,872	0,849	0,864	0,806	0,936	0,847
$VaR_{0,1}$	0,442	0,446	0,511	0,524	0,366	0,449
$ES_{0,1}$	0,692	0,680	0,698	0,688	0,699	0,663

Allikas: MSCI, autori arvutused.

Tabelist 3.1 on näha, et nii kvantiilil baseeruvate riskimõõtude kui pooldispersiooni suhtes optimeeritud portfelli oodatav tulu on suurem kui minimaalse standardhälbe portfelli.  $VaR_\alpha$ -t minimeerivatest portfelli on näha, et kuigi  $VaR_\alpha$  kui riskimõõt on väiksem kui teistel portfelli, siis ei too see endaga kaasa ootamatute suurte kahjude vähenemist (vt. miinimumväärtused ja  $ES_\alpha$  väärtused tabelis). Mitmetes uurimustes viidatud asjaolu, et  $VaR_\alpha$  minimeerimine võib viia kahjude jaotuse saba venimisele, realiseerus kõigi nõutavate tulumäärade tasemete korral ka käesolevas töös. Kuigi kõigis minimaalse riskiga portfelli on tulumäärade jaotuste asümmeetrilisuse koefitsiendid negatiivsed, siis on näha, et  $ES_\alpha$ -portfelli asümmeetrilisuse koefitsient on võrreldes teiste portfelli suurem, mis viitab  $ES_\alpha$ -portfelli tulumäärade

<sup>3</sup> Teststatistik kujul:  $Q^* = T(T+2) \sum_{k=1}^p (T-k)^{-1} \gamma^2(k)$ , kus  $\gamma(k)$  on autokorrelatsioonifunktsiooni väärtus viitaja  $k$  juures,  $T$  – valimi maht (vt. näiteks Harvey 1993: 44-45).

suhteliselt väiksemale varieeruvusele kahjude osas (või suhteliselt suuremale varieeruvusele keskvaärtust ületavate tulususte osas).

Kuigi  $ES_\alpha$ -portfellid minimeerivad  $VaR_\alpha$ -t ületavate kahjude keskvaärtus, siis ei pruugi sellega alati kaasneda kõige äärmuslikemate vaatluste suuruse vähenemine. Võrreldes optimaalseid portfelle ka teiste tulumäärade korral, siis üldjuhul peab paika, et  $ES_\alpha$ -portfellide tulususte miinimumväärtused on absoluutväärtuses väiksemad kui teistel optimaalsetel portfellidel. Samas on täheldatav asjaolu, et suurema tõenäosuse  $\alpha$  korral võivad ka  $ES_\alpha$ -portfellide kahjude „sabad” venida pikemaks kui väiksema  $\alpha$  korral leitud  $ES_\alpha$ -portfellide tulumäärade kahjude jaotus. Mida suurem on valitud tõenäosus  $\alpha$ , seda suhteliselt väiksem kaal antakse kõige äärmuslikemaile kahjudele ja nii võibki ka  $ES_\alpha$ -portfellide tulumäärade saba venida kaotuste osas pikemaks.

Nagu oli oodata, on  $ES_\alpha$ -portfellide asümmeetrilisuse kordaja kõigi valitud nõutava tulumäära tasemete korral suurem kui standardhälvet ja ka pooldispersiooni minimeerivatel portfellidel.  $VaR_\alpha$ -portfellide tulumäärade jaotuse asümmeetrilisuse koefitsient on aga tihtipeale negatiivne, mis viitab kriteeriumi puudusele riskijuhtimise seisukohast –  $VaR_\alpha$  võtab arvesse vaid etteantud tõenäosusele vastava kahju suuruse ning ei kajasta endas  $VaR_\alpha$  taset ületavaid kahjusid. Kuna  $ES_\alpha$  võtab sarnaselt standardhälbele arvesse jaotuse varieeruvust (kuigi ainult osa sellest), siis on  $ES_\alpha$ -portfellide tulususte standardhälve enamikel juhtudel väiksem kui sama tulumäära korral leitud  $VaR_\alpha$ -portfellidel. Millised muutused toimuvad riskikriteeriumi muutmisel jaotusfunktsioonis, vaadeldakse täpsemalt alapunktis 3.4.

### **3.3. Optimaalsete portfellide koosis ja riski kujunemine**

Portfellide koostamisel kasutatakse kõiki 50 aktsiaturu indeksit ja parema ülevaate saamiseks erinevas mõttes optimaalsete portfellide struktuurist esitatakse varade osakaalude jaotused kahe suure grupina – arenenud ja arenevad turud. Lisas 9 on esitatud erinevate riskikriteeriumite mõttes optimaalsetesse portfellidesse kuuluvate varade osatähtsuste jaotused arenenud ja arenevate turgude vahel nii katteta ettemüügi mittelubamisel kui katteta ettemüügi korral. Portfelli varade struktuuri järgi eelistatakse kõigi vaadeldud riskikriteeriumite korral investeerimist peamiselt arenevatele turgudele.

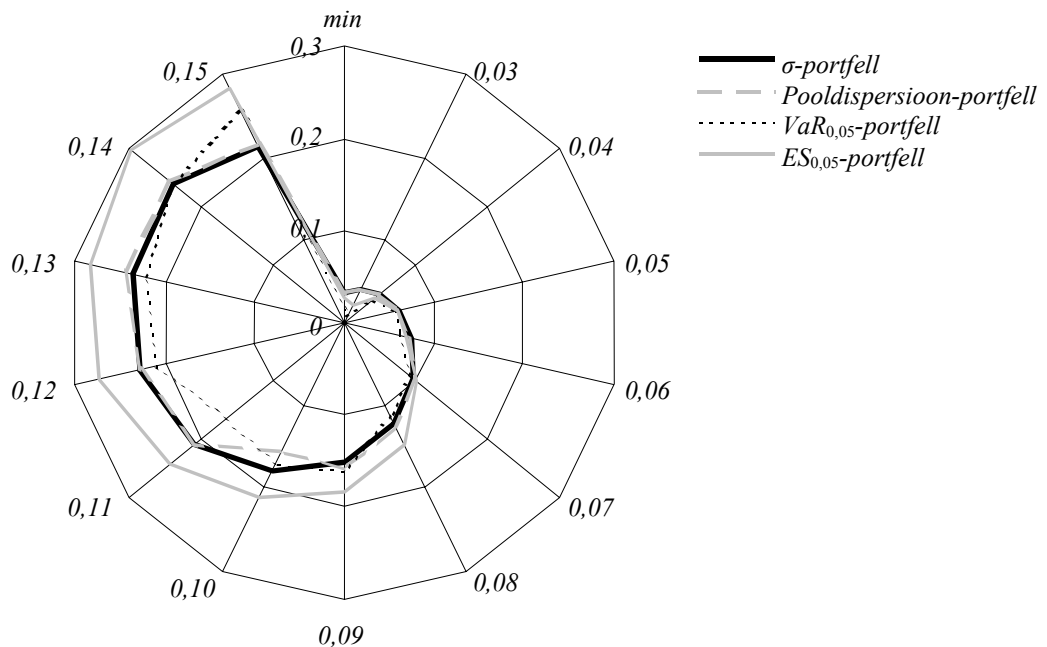
Kuigi tulemused katteta ettemüügita portfelliges ei ole oluliselt erinevad, on näha, et  $ES_\alpha$ -portfelliges on suhteliselt suurem osakaal arenevatel turgudel, mille suhteliselt suurem varieeruvus kompenseeritakse oluliselt suurema oodatava tulususega.

Katteta ettemüügi puhul on arenevad turud keskmiselt suurema positiivse kaaluga ja arenenud turud keskmiselt suurema (absoluutväärtuses) negatiivse kaaluga ehk katteta ettemüügi korral on suhteliselt suur arenenud turgude lühikeseks müügis, millele viitas suhteliselt väike arenenud turgude osakaal eelnevalt leitud katteta ettemüügita portfelliges koosseisus. Kui traditsioonilises portfelliges on lühikeseks müük seotud erinevate varade koosvarieeruvusega, siis kvantiilil baseeruvad riskimõõdud võtavad arvesse vaid äärmuslike (katteta ettemüügi lubamise korral nii positiivsete kui negatiivsete) tulumäärade jaotuse. Nii on kvantiilil baseeruvate riskimõõtude minimeerimisel koostatud portfelliges lühikeseks müüdud sellised varad, mille oodatav väärtus on suhteliselt madal ning mille jaotuses esineb sagedasi ja/või suuri äärmuslikke kahjusid. Arenenud turgude aktsiatulususte jaotused on käesoleva töö valimis ja valitud ajaperioodil üldiselt negatiivse asümmeetrilisuse koefitsiendiga ja arenevate turgude tulususte jaotused üldiselt positiivse asümmeetrilisuse koefitsiendiga.

Kvantiilil baseeruvate riskikriteeriumite minimeerimine toob kaasa suurema finantsvõimenduse kasutamise, mis kajastub keskmiselt suuremas katteta ettemüügis võrreldes traditsioonilise portfelliga. Lisa 9 tulemuste põhjal on näha, et mida suurem on valitud tõenäosuse tase  $\alpha$ , seda sarnasemad on traditsioonilise ja kvantiilil baseeruvate riskimõõtude põhjal leitud portfelliges koosseisud. Allpool käsitletavas tundlikkuse analüüsis saab täpsema vastuse sellele, kas suurem vara osakaal toob tingimata kaasa suurema panuse portfelli koguriski ning kuivõrd tundlik on portfelli kogurisk üksiku vara osakaalu muutumise suhtes.

Uurides erinevate kriteeriumite põhjal optimeeritud katteta ettemüügita portfelliges koosseisusid, tuleb välja, et kvantiilil baseeruvate riskimõõtude põhjal optimeeritud portfelliges varade koosseis muutub sarnaselt traditsioonilise portfelli koosseisuga nõutava tulumäära muutmise korral, küll aga on kvantiilil baseeruvate riskimõõtusid minimeerivate portfelliges varade osakaalud süstemaatiliselt nihkes võrreldes traditsioonilisega. Järgmisel joonisel 3.3 on näitena esitatud katteta ettemüügita

standardhälbe-, pooldispersiooni-,  $VaR_{0,05}$ - ja  $ES_{0,05}$ -portfelli ühe konkreetse vara (49) osakaalu muutus nõutava tulumäära muutmise korral. Esitatud on vara osakaal portfellis erinevate nõutava tulumäära tasemete korral minimaalse riskiga portfellile vastavast nõutava tulumäära tasemest (joonisel tähistatud *min*) alates.



**Joonis 3.3.** Vara osakaalu muutus portfellis nõutava tulumäära muutmisel erinevate portfellide korral (autori koostatud).

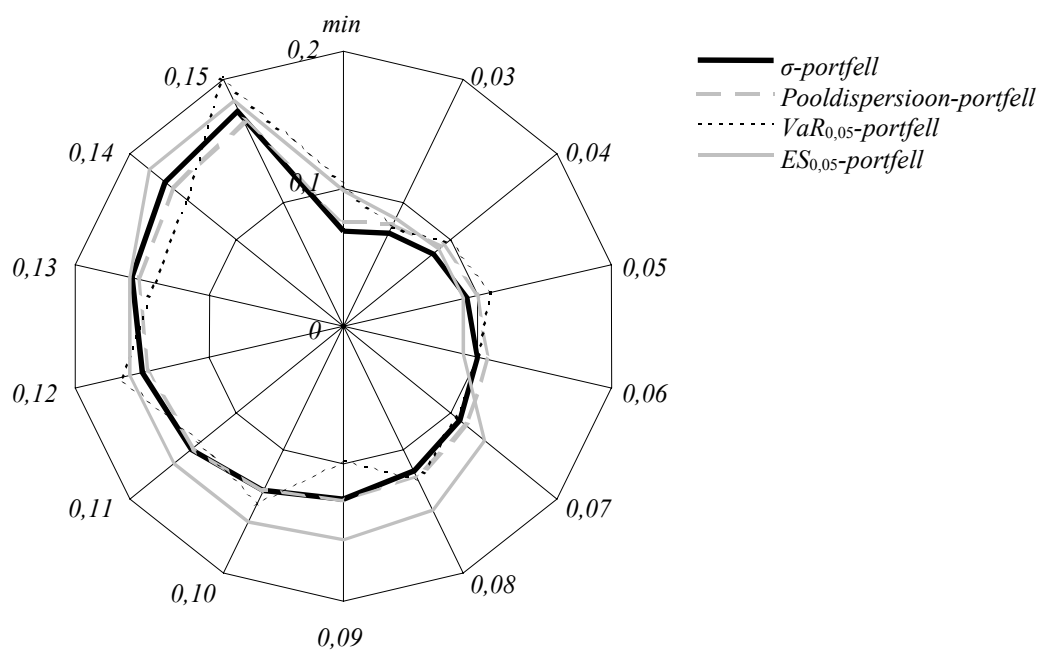
Sarnane varade osakaalude süstemaatiline erinevus tuleb erinevate riskimõõtude omapärast. Erinevad riskikriteeriumid võtavad arvesse erinevat informatsiooni varade jaotusfunktsioonist ehk annavad erineva kaalu jaotusfunktsioonis sisalduvale spetsiifilisele informatsioonile. Nii on standardhälvet minimeerivas portfellis suhteliselt suurem osatähtsus neil varadel, mille standardhälve on väiksem (*ceteris paribus*). Teine suurem mõjur varade struktuuri kujunemisel on nende omavaheline kovariatsioon.

Sarnaselt katteta ettemüügita optimaalsetele portfellidele on ka katteta ettemüügi korral erinevate kriteeriumite alusel optimeeritud portfellide varade jaotus sarnane ning erinevate varade osakaalude märgid ja suurusjärgud langevad suurel määral kokku. Erinevate riskikriteeriumite põhjal koostatud portfellide erinevus tuleb aga üksiku vara osakaalu sõltuvusest oodatavast tulumäärast. Standardhälvet minimeerivas katteta ettemüügiga optimaalses portfellis on vara osakaal lineaarselt seotud oodatava tulumäära muutumisega (vt. näiteks Merton 1972). Klassikalise portfelliteooria eelduste

korral kehtib niinimetatud kahe fondi eraldatuse teoreem (*two-fund separation theorem*), mille korral on iga efektiivsuspiiril asuv portfelli koosseisuga  $\mathbf{x}_r$  esitatav kahe suvalise efektiivsuspiiril asuva portfelli  $\mathbf{x}_{r'}$  ja  $\mathbf{x}_{r''}$  koosseisude lineaarse kombinatsioonina kujul  $\mathbf{x}_r = \lambda \mathbf{x}_{r'} + (1-\lambda) \mathbf{x}_{r''}$ , kus  $0 < \lambda < 1$  ning portfelli oodatav tulu  $r = \lambda r' + (1-\lambda)r''$ . Seega avaldub iga (katteta ettemüügiga)  $\sigma$ -portfelli koosseis  $\mathbf{x}_r$  (või vara osakaal) lineaarselt portfelli oodatava tulumäära  $r$  kaudu järgnevalt:

$$(3.2) \quad \mathbf{x}_r = \frac{\mathbf{x}_{r'} - \mathbf{x}_{r''}}{r' - r''} r + \frac{r' \mathbf{x}_{r'} - r'' \mathbf{x}_{r''}}{r' - r''}.$$

Kvantiilil baseeruva optimaalse portfelli varade osakaalude seos oodatava tulumääraga ei ole enam nii selge. Erinevate kriteeriumite põhjal optimeeritud portfelli osakaalude lihtsal uurimisel paistab välja kvantiilil põhinevat riskikriteeriumit minimeerivas portfellis varade osakaalude hüppeline muutus tulumäära mõnede tasemete juures. Järgneval joonisel 3.4 on esitatud näitena ühe konkreetse vara (26) osakaalu seos portfelli oodatava tulumääraga erinevate portfelli korral. Näitena valitud vara korral toimuvad  $ES_{\alpha}$ -portfellis olulised nihked vara osakaalus tulumäärade muutmisel 0,06%-lt 0,07%-le ja 0,13%-lt 0,14%-le.



**Joonis 3.4.** Vara osakaalu muutus portfellis nõutava tulumäärade muutmisel erinevate portfelli korral (autori koostatud).

Analoogiline seos avaneb ka portfelli kuuluvate teiste varade korral, kuid mitte alati samade tulumäära tasemetel korral. Samas ei paista välja (ei ole võimalik leida) ühest seost, mis tulumäärast alates ja kui suures ulatuses toimub nihe vara osakaalu suuruses. Selline osakaalu käitumine portfelli oodatava tulumäära muutmise suhtes võib tulla kvantiilil baseeruvate riskimõõtude omapärast, et need riskimõõdud võtavad arvesse vaid osa jaotusfunktsioonist. Lähemal uurimisel selgub, et varade osakaalude hüppeline muutus leiab aset enamikel juhtudel siis, kui mingi vara osakaal muutub negatiivsest positiivseks või vastupidi. Tabelis 3.2 on näitena toodud  $ES_{0,05}$ -portfelli koosseisud kahe lähedase nõutava tulumäära korral.

**Tabel 3.2.**  $ES_{0,05}$ -portfelli varade  $i$  osakaalud tulumäära 0,06% ja 0,07% juures.

$i$	$x_i(0,06)$	$x_i(0,07)$	$i$	$x_i(0,06)$	$x_i(0,07)$	$i$	$x_i(0,06)$	$x_i(0,07)$	$i$	$x_i(0,06)$	$x_i(0,07)$	$i$	$x_i(0,06)$	$x_i(0,07)$
1	10,0%	11,4%	11	-0,2%	1,5%	21	4,3%	5,6%	31	2,2%	2,7%	41	-1,7%	0,0%
2	7,3%	5,1%	12	0,6%	1,2%	22	0,0%	-0,1%	32	-3,2%	-4,7%	42	9,7%	11,5%
3	4,1%	-1,6%	13	2,8%	3,5%	23	-3,9%	-3,6%	33	1,1%	1,1%	43	-0,5%	-2,4%
4	-2,8%	-2,8%	14	-4,0%	-4,2%	24	2,2%	2,9%	34	0,7%	1,3%	44	8,6%	9,9%
5	-3,4%	-7,3%	15	-0,8%	-2,6%	25	-0,1%	-0,3%	35	9,1%	8,7%	45	-2,2%	-2,0%
6	-3,4%	-3,4%	16	-5,3%	-5,3%	26	9,0%	13,3%	36	-0,3%	-0,5%	46	3,6%	4,5%
7	3,0%	2,8%	17	0,0%	0,0%	27	4,9%	5,5%	37	11,4%	11,2%	47	21,9%	21,7%
8	9,9%	9,9%	18	3,8%	0,7%	28	3,0%	3,0%	38	-1,0%	-0,3%	48	0,7%	2,4%
9	-6,5%	-6,5%	19	-10,4%	-10,4%	29	7,8%	8,2%	39	-3,9%	-4,9%	49	4,7%	5,4%
10	3,4%	4,1%	20	3,5%	3,5%	30	2,4%	2,7%	40	0,0%	0,0%	50	-2,4%	-2,4%

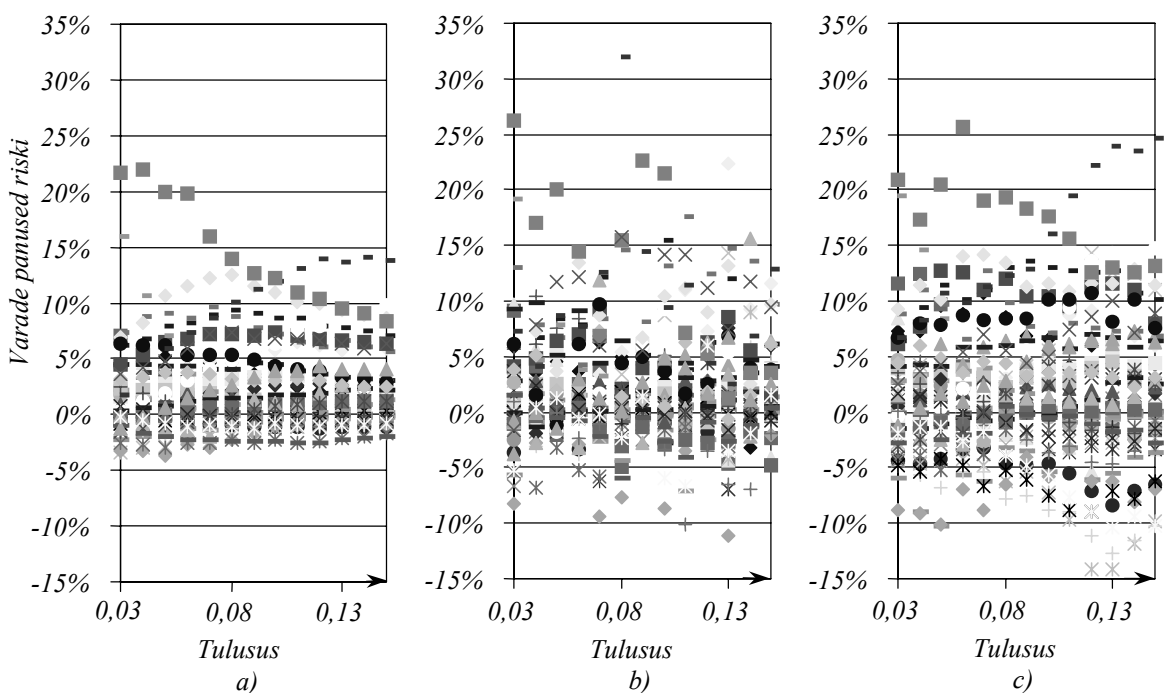
Allikas: MSCI, autori arvutused.

Portfelli juhtimise seisukohast on selline omadus väga ebasoovitav. Praktikas tähendaks see seda, et portfelli nõutava tulumäära väikeseks muutmiseks võib vaja olla portfelli koosseisu oluliselt muuta. Standardhälbe minimeerimise korral on riskikriteeriumis kajastatud kogu tulumäärade jaotuse varieeruvus ja koosvarieeruvus sõltumata portfelli kuuluvate varade osakaalude märkidest, kvantiilil baseeruva riskimõõdu minimeerimise korral aga muutub ühe vara osakaalu märgi muutumisega oluliselt riskikriteeriumisse kaasatud informatsioon. Nii on näiteks mingisuguse positiivse osakaaluga vara korral portfelli riskikriteeriumis võetud arvesse selle vara äärmuslike kahjude jaotus, kuid osakaalu negatiivseks muutumisel muutub riskikriteeriumi jaoks oluliseks vaid äärmuslike positiivsete tulumäärade jaotus. Sellist omapärast seost võivad veelgi võimendada portfelli kuuluvate varade tulumäärade empiiriliste jaotusfunktsioonide iseärasused. Kuna varade tulumäärade empiirilised jaotusfunktsioonid ei ole siledad (vaid on trepikujulised), siis võib osakaalude hüppeline

muutus mingisuguse tulumäära juures olla põhjustatud individuaalsete varade astmelistest jaotusfunktsioonidest. Asemelisust võimendab veelgi see, et kasutatakse jaotusfunktsiooni ekstreemsete tulumäärade osa, mis sisaldab endas suhteliselt vähe ning ebaregulaarset statistikat.

Eelnevalt vaadeldi portfelli koosseisu tundlikkust oodatava tulumäära muutumise suhtes. Lisaks portfelli tundlikkusele oodatava tulumäära suhtes, pakub huvi portfelli koguriski kujunemine individuaalsete varadega seotud riskidest. Selle selgitamiseks kasutatakse peatükis 2.2 käsitletud portfelli tundlikkuse kriteeriume. Katteta ettemüügi mittelubamisel on individuaalsete varade panus riski erinevate riskikriteeriumite korral jaotunud suhteliselt sarnaselt. Tulemus ei ole üllatav, kuna eelnevalt tuli välja katteta ettemüügita optimaalsete portfelli koosseisude sarnasus. Küll aga on  $VarR_\alpha$ -portfellidel suhteliselt suurem panus üksikul varal portfelli koguriski kujunemisel.

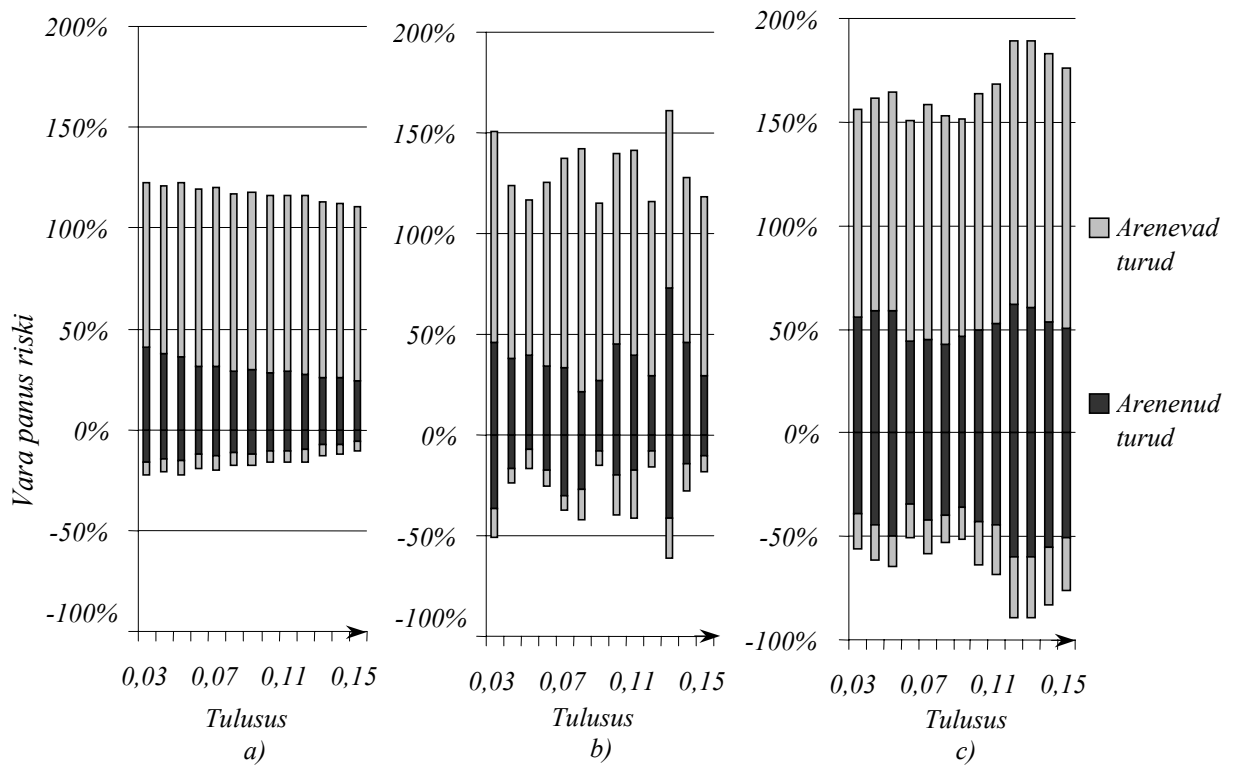
Järgneval joonisel 3.5 on kajastatud erinevas mõttes optimaalsetes portfellides koguriski kujunemine individuaalsete varade kaudu katteta ettemüügiga portfellides.



**Joonis 3.5.** Individuaalsete varade riskipanused katteta ettemüügiga a) standardhälbe- b)  $VarR_{0,05}$ - c)  $ES_{0,05}$ -portfellides erinevate tulumäära tasemete korral (autori koostatud).

Riski panuste näitajate võrdlemiseks on riski panused läbi jagatud portfelli koguriskiga. Saadud näitaja kirjeldab, kui suurt suhtelist (protsentuaalset) osa mängib individuaalne vara portfelli koguriski kujunemisel. Joonise 3.5 põhjal on näha, et  $\sigma$ -portfellides on portfelli risk erinevate varade vahel suhteliselt ühtlaselt jaotunud pea kõigi nõutava tulumäära tasemete korral. Kvantiilil baseeruvate portfellide korral on aga suhtelised riskipanused hajutunud suuremasse vahemikku.  $VaR_{0,05}$ -portfellides on suhteline riskipanuste varieeruvus oluliselt suurem ja ebaühtlasem kui klassikalises ja ka  $ES_{0,05}$ -portfellides.  $ES_{0,05}$ -portfellides on suhteliselt suur osa negatiivsetel panustel.  $VaR_{0,05}$ - ja  $ES_{0,05}$ -portfellides on riskipanused rohkem juhuslikumat laadi ning riskipanused varieeruvad suuremas ulatuses kui klassikalises portfellis. Selline tulemus tuleneb osaliselt eelnevas analüüsis kirjeldatud portfelli varade osakaalude ja nõutava tulumäära muutmise vahelistest seostest (kuna riskipanuse üks tegur on individuaalse vara osakaal). Tundlikkuse analüüs viitab sellele, et kvantiilil baseeruvate optimaalsete portfellide tulemus on rohkem mõjutatud väikestest muutustest portfelli koosseisu või oodatava tulumäära muutumise suhtes kui seda on klassikalise portfelli tulemused.

Parema ülevaate saamiseks on joonisel 3.6 esitatud erinevate turgude riskipanused erinevate kriteeriumite põhjal optimeeritud portfellides. Klassikalise  $\sigma$ -portfelli korral on näha, et kuigi osakaalude varieeruvus oodatava tulumäära kasvades suureneb, siis riskipanused on küllaltki stabiilsed ning arenenud turgude korral isegi vähenevad. See viitab asjaolule, et turgudel olevad varad liiguvad suure osas sarnaselt ning raske on leida vara, mis oleks portfelli käitumisele oluliselt vastupidise liikumisega. Oluline erinevus teistest kriteeriumitest on ka selles, et negatiivse panuse suurus on väga väike võrreldes positiivse panusega.



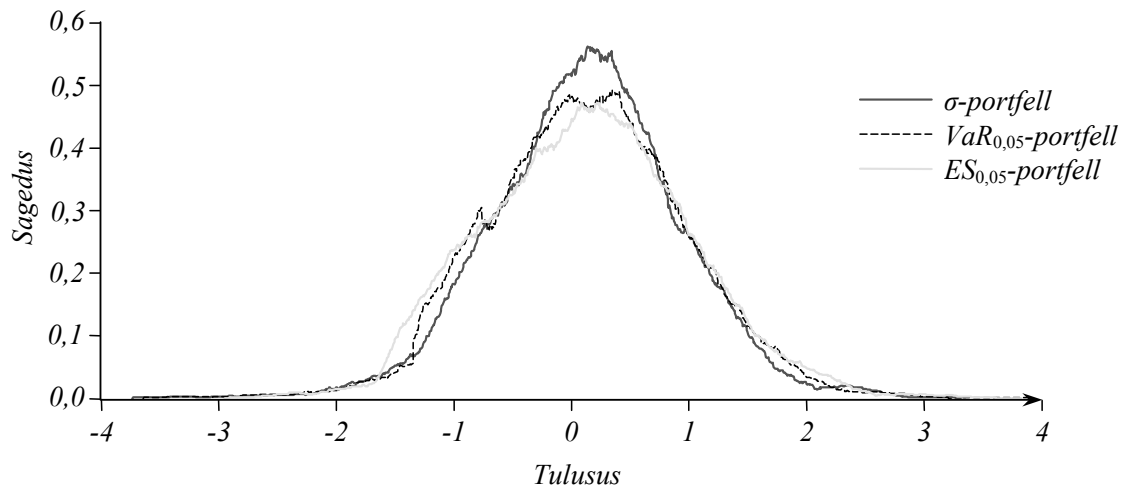
**Joonis 3.6.** Riski panused katteta ettemüügiga a) standardhälbe-, b)  $VaR_{0,05}$ -, c)  $ES_{0,05}$ -portfellides erinevate tulumäära tasemete korral (autori koostatud).

Kvantiilil baseeruvate riskimõõtude mõttes optimaalsetes portfellides on arenenud turgude riskipanus suuremad kui klassikalises portfellis, kuid näiteks  $ES_{0,05}$ -portfelli kuuluvate arenenud turgude summaarne panus riski on väike. Järgnevalt analüüsitakse eelnevalt kirjeldatud portfelle investori eelistuse seisukohast. Selleks uuritakse täpsemalt erinevas mõttes optimaalsete portfellide tulumäärade jaotusfunktsioone.

### 3.4. Portfellide eelistus jaotusfunktsioonide põhjal

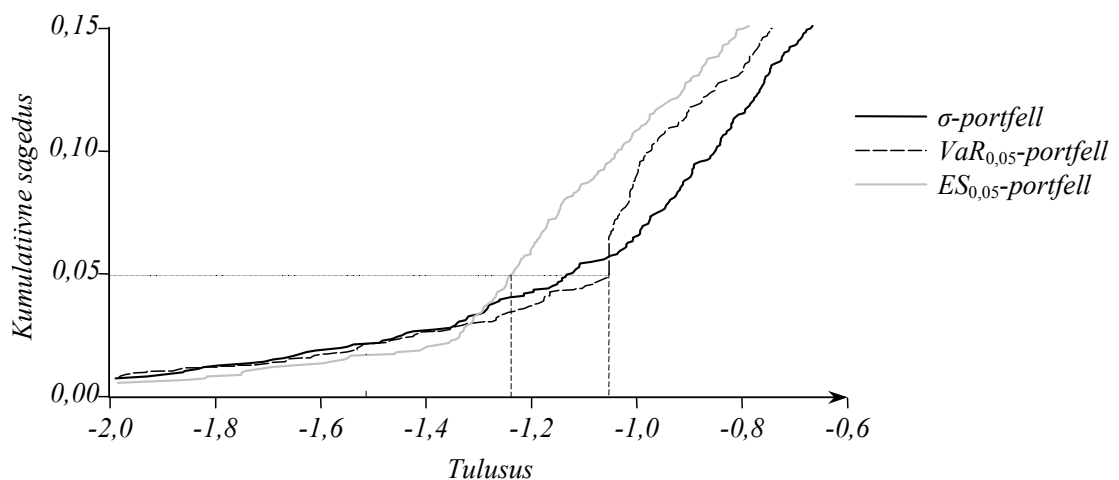
Järgnevalt püütakse lihtsa graafilise analüüsi abil leida kinnitust alapunktis 2.2 sõnastatud hüpoteesile, et kvantiilil baseeruvate riskimõõtude minimeerimine võib viia sellistele portfelli tulumäärade jaotusfunktsioonidele, kus  $VaR_\alpha$  taset ületavad oodatavad kahjud on väiksemad, kuid samas suurenevad  $VaR_\alpha$  tasemest väiksemate kahjude ja oodatavast tulumäärast väiksemate tulususte tõenäosused. Kuigi katteta ettemüügita portfellide korral olid erinevate kriteeriumite põhjal leitud portfellide struktuur ja tundlikkus sarnane, siis tulumäärade jaotusfunktsioonide visuaalse hindamise põhjal on

näha, et püstitatud hüpotees leiab kinnitust. Paremini joonistub situatsioon välja katteta ettemüügi korral. Järgneval joonisel 3.7 on esitatud standardhälbe-,  $VaR_{0,05}$ - ja  $ES_{0,05}$ -portfellide tihedusfunktsioonid katteta ettemüügi lubamisel (nõutav päevane tulumäär 0,13%).



**Joonis 3.7.** Erinevate portfellide tulumäärade tihedusfunktsioonid (autori koostatud).

Jooniselt on näha, et mingisuguste tulumäärade korral toimuvad kvantiilil baseeruvate riskimõõtude suhtes optimaalsete portfellide tulumäära tihedusfunktsioonides olulised nihked. Paremini kirjeldab situatsiooni kumulatiivsete jaotusfunktsioonide graafik. Joonisel 3.8 on esitatud kolme leitud optimaalse portfelli tulumäärade kumulatiivsed jaotusfunktsioonid kuni tõenäosuse tasemeni 0,15 ning nende portfellide  $VaR_{0,05}$  tasemed.



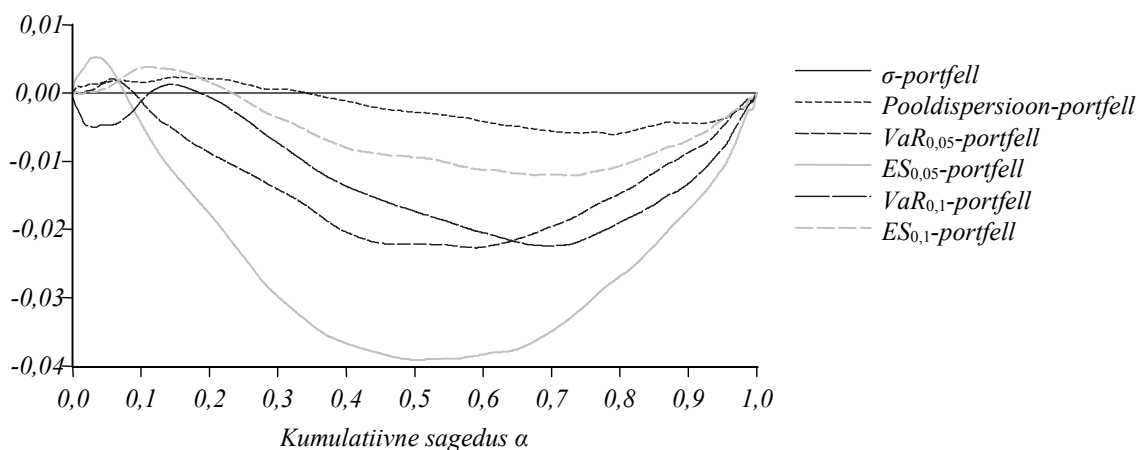
**Joonis 3.8.** Erinevate portfellide tulumäärade jaotusfunktsioonid (autori koostatud).

Joonisel 3.8 on punktiirjoontega esitatud  $\alpha=0,05$  kvantiilid  $VaR_{0,05}$ - ja  $ES_{0,05}$ -portfelli tulumäärade jaotusfunktsioonil. Nimetatud portfelli  $VaR_\alpha$  väärtustele vastavad joonisel tulumäärad -1,05 ja -1,24.  $VaR_\alpha$ -portfelli korral peab paika peatükis 2.1 sõnastatud hüpotees, et kvantiilil baseeruva riskimõõdu optimeerimine võib viia nende kahjude suhtelise sageduse kasvule, mis on absoluutväärtuselt väiksemad kui  $VaR_\alpha$ .  $ES_\alpha$ -portfelli on vähenenud väga suurte kahjude ulatus ja sarnaselt  $VaR_\alpha$ -portfelli on kasvanud  $VaR_\alpha$  taset ületavate tulumäärade suhteline sagedus. Samas on joonisel 3.8 näha, et  $ES_\alpha$ -portfelli tulumäärade kumulatiivne jaotusfunktsioon hakkab suhteliselt kiiremini kasvama juba enne  $VaR_\alpha$  taset. Selle põhjus tuleneb  $ES_\alpha$  kriteeriumist. Peatükis 2.2 (lk. 34) esitatud  $ES_\alpha$  kriteeriumi valemi (2.7) põhjal on selge, et  $VaR_\alpha$  tasemest vahetult suuremad kahjud mõjutavad  $ES_\alpha$  kriteeriumit suhteliselt vähe *ceteris paribus* ning seega on võimalik nende suhteliselt suurem sagedus  $ES_\alpha$ -portfellis.

Eelnev analüüs käsitles erinevate riskikriteeriumite põhjal optimeeritud portfelli jaotusi ja nende karakteristikuid objektiivses plaanis. Selleks, et anda erinevate riskikriteeriumite põhjal koostatud portfelli eelistusjärjestus, kasutatakse käesolevas töös stohhastilise domineerimise kriteeriume. Stohhastilise domineerimise kriteeriumid võtavad arvesse tulumäärade jaotuste iga kvantiili/tõenäosuse. Teoreetilises osas peatükis 1.3 selgitatud stohhastilise domineerimise kriteeriumid annavad järjestuse kindla riski suhtumise korral. Esimest järku stohhastilise domineerimise korral eelistavad kõik (ratsionaalsed) investorid domineeriva jaotusega vara, teist järku domineerimise korral eelistavad seda riskikartlikud ning kolmandat järku stohhastilise domineerimise korral kõik hävingukartlikud investorid. Kriteeriumite põhjal on aga selge, et stohhastilise domineerimise kriteeriumid on liiga ranged, et anda alati ühest vastust kahe suvalise jaotusega varade eelistussuhte.

Esmalt vaadeldakse portfelli eelistusi traditsioonilise portfelli suhtes. Eeldatavalt ei leidu käsitletud riskimõõtude hulgas ühtegi, mille põhjal koostatud portfelli tulumäärade jaotus domineeriks traditsioonilise portfelli tulumäärade jaotust. Selleks, et anda hinnangut domineerimise „tugevusele” tuuakse iga jaotuse võrdluse korral välja tõenäosuse tase milleni üks vara teist domineerib. Täpsemalt on sellisest modifitseeritud stohhastilise domineerimise kriteeriumist räägitud peatükis 1.3.

Parema ülevaatlikkuse huvides esitatakse tulemused graafiliselt. Selleks esitatakse teoreetilises osas väljatoodud stohhastilise domineerimise algoritmide väärtused iga kvantiili tõenäosuse korral nii, et domineerimise korral langevad algoritmide väärtused positiivsesse vahemikku. Esimest järku stohhastiline domineerimine on kõige rangem kriteerium ja ootustele vastavalt ei domineeri ühegi meetodiga leitud optimaalne portfelli teist sama nõutava tulumäära (ja osakaalude kitsendustega) portfelli. Teist järku stohhastilise domineerimise graafiliselt esituselt (vt. joonis 3.9) on selgesti näha, et äärmuslike kaotuste jaotuse osa minimeerivates  $ES_\alpha$ -portfellides jäävad äärmuslikud kahjud väiksemaks kui traditsioonilisel portfelligil.  $VaR_\alpha$ -portfellid aga ei pruugi anda paremat tulemust isegi äärmuslike negatiivsete tulumäärade korral. Selline tulemus on seotud eelnevalt uuritud portfelli tulumäärade jaotustega, millest tuli välja, et portfelli  $VaR_\alpha$  minimeerimisega võib vastupidiselt oodatule kaasneda äärmuslike negatiivsete tulumäärade ulatuse kasv.



**Joonis 3.9.** Teist järku stohhastiline domineerimine katteta ettemüügiga nõutava tulumääraga 0,13% portfelli korral (autori koostatud).

Katteta ettemüügita portfelli tulemused ei erine oodatult üksteisest, kuna eelneva analüüsi põhjal olid nende portfelli koosseisud suhteliselt sarnased. Kokkuvõtlikult on teist järku stohhastilise domineerimise tulemused traditsioonilise portfelli suhtes esitatud tabelis 3.3. Välja on toodud kvantiilile vastava tõenäosuse tase, mille korral niinimetatud vahepealse teist järku stohhastilise domineerimise algoritmi (1.17) väärtus jõuab  $\alpha$  kasvades esmakordselt nullini ehk graafikul esitatult lähevad väärtused positiivsest tsoonist üle negatiivseks (või vastupidi).

**Tabel 3.3.** Portfellide modifitseerud teist järku stohhastiline domineerimine traditsioonilise portfelli suhtes.

Tulumäär (%)	Katteta ettemüügita portfellid					Katteta ettemüügiga portfellid				
	Pool-dispersioon	$Var_{0,05}$	$ES_{0,05}$	$Var_{0,1}$	$ES_{0,1}$	Pool-dispersioon	$Var_{0,05}$	$ES_{0,05}$	$Var_{0,1}$	$ES_{0,1}$
0,03	0,39	(1,00)	0,09	(0,11)	0,43	0,28	(0,04)	0,10	(0,09)	0,18
0,04	0,41	(0,06)	0,08	(0,11)	0,30	0,32	(0,04)	0,11	(0,12)	0,18
0,05	0,50	(1,00)	0,09	(1,00)	0,40	0,34	(0,05)	0,12	(0,12)	0,18
0,06	0,49	(0,05)	0,10	(1,00)	0,36	0,35	(0,04)	0,11	(0,14)	0,18
0,07	0,50	(0,04)	0,11	(1,00)	0,20	0,36	(0,05)	0,09	(0,16)	0,16
0,08	0,36	(1,00)	0,09	(1,00)	0,18	0,37	(0,07)	0,09	(0,15)	0,15
0,09	0,12	(1,00)	0,07	(1,00)	0,15	0,35	(1,00)	0,09	(1,00)	0,16
0,10	0,01	(1,00)	0,07	(1,00)	0,18	0,33	(0,04)	0,08	(1,00)	0,20
0,11	0,08	(1,00)	0,07	(1,00)	0,02	0,32	(1,00)	0,08	(1,00)	0,20
0,12	(0,02)	(1,00)	0,06	(1,00)	0,00	0,33	(0,04)	0,08	(0,12)	0,21
0,13	0,04	(1,00)	0,08	(1,00)	0,00	0,34	(0,02)	0,08	(0,11)	0,23
0,14	0,00	(1,00)	0,08	(1,00)	0,11	0,35	(0,04)	0,08	(0,15)	0,21
0,15	0,02	(1,00)	0,09	(1,00)	0,14	0,34	(1,00)	0,08	(0,10)	0,22

Allikas: MSCI, autori arvutused.

Sulgudes esitatud väärtused kirjeldavad situatsiooni, kus klassikaline portfell domineerib vastava riskikriteeriumi järgi leitud portfelli modifitseeritud teist järku stohhastilise domineerimise mõttes. Kuna teist järku stohhastilise domineerimise tarvilik tingimus diskreetsete tulumäärade jaotuse korral on, et domineeriva jaotuse minimaalne tulumäär peab olema suurem domineeritava vara tulumäära jaotuse minimaalsest tulumäärast, siis tabeli põhjal on näha, et  $Var_{\alpha}$ -portfellide äärmuslikud kahjud on suuremad kui vastaval traditsioonilisel portfellil kõigi nõutava tulumäära tasemetel korral.

Katteta ettemüügita portfellide korral on tabeli 3.3 põhjal näha, et enamus nõutavate tulumäärade korral domineerib klassikaline portfell  $Var_{\alpha}$ -portfelle teist järku stohhastilise domineerimise mõttes (tabelis väärtus (1,00)) ning seega peaksid kõik riskikartlikud investorid eelistama katteta ettemüügi mittelubamisel klassikalist portfelli. Klassikalise portfelli tulumäära jaotused “domineerivad vasaku saba osas” kõikide valitud tulumäärade ning usaldusnivoode korral  $Var_{\alpha}$ -portfellide jaotusi ja seega ei täida  $Var_{\alpha}$  kui riskikriteerium oma ülesannet vähendada äärmuslike kahjude ulatust. Katteta ettemüügiga portfellide tulumäärade jaotused domineerivad klassikalist portfelli pooldispersiooni kriteeriumi korral kuni tõenäosuseni 0,37 ning  $ES_{\alpha}$ -portfellid tõenäosuseni 0,12 ja 0,23 vastavalt usaldusnivoode 95% ja 90% korral. Siiski ei ole

need tulemused piisavad, et eelnimetatud kriteeriumite põhjal optimeeritud portfelli võiksid domineerida traditsioonilist portfelli kolmandat järku stohhastilise domineerimise mõttes.

Järgnevalt on uuritud  $ES_\alpha$ - ja  $VaR_\alpha$ -portfelli omavahelist eelistussuhet. Peatükis 2.1 on sõnastatud hüpotees, et  $ES_\alpha$ -portfelli jaotus domineerib vähemalt kolmandat järku stohhastilise domineerimise mõttes vastavaid  $VaR_\alpha$ -portfelle. Tabelis 3.4 on esitatud  $VaR_\alpha$ - ja  $ES_\alpha$ -portfelli eelistus stohhastilise domineerimise kriteeriumite järgi. Tõenäosuse taseme 5% korral ei saa väita kasutatud andmete korral ühest eelnimetatud eelistussuhet. Vaid teatud nõutavate tulumäära tasemete korral domineerivad  $ES_\alpha$ -portfelli tulumäärade jaotused vastavaid  $VaR_\alpha$ -portfelli jaotusi. Viies sama analüüsi läbi väiksema usaldusnivoo korral ( $\alpha=0,1$ ), kus kriteeriumisse on haaratud suurem osa äärmuslikest kahjust, leidis püstitatud hüpotees kinnitust. Kõikide nõutavate tulumäära tasemete korral domineerivad  $ES_\alpha$ -portfelli vastavaid  $VaR_\alpha$ -portfelle vähemalt kolmandat järku stohhastilise domineerimise mõttes ehk kõik niinimetatud hävingukartlikud investorid peaksid eelistama sama oodatava tulumäära korral  $ES_\alpha$ -portfelle.

**Tabel 3.4.**  $ES_\alpha$ - ja  $VaR_\alpha$ -portfelli eelistus stohhastilise domineerimise põhjal.

Tulumäär (%)	$ES_{0,05}$ võrreldes $VaR_{0,05}$		$ES_{0,1}$ võrreldes $VaR_{0,1}$	
	katteta ettemüügiga	katteta ettemüügiga	katteta ettemüügiga	katteta ettemüügiga
0,03	2. SD	3. SD	2. SD	2. SD
0,04		2. SD	2. SD	2. SD
0,05	3. SD	2. SD	2. SD	3. SD
0,06		2. SD	2. SD	3. SD
0,07	3. SD		2. SD	3. SD
0,08	2. SD		2. SD	3. SD
0,09	2. SD		2. SD	2. SD
0,10	2. SD		2. SD	2. SD
0,11	3. SD		2. SD	2. SD
0,12	2. SD		2. SD	2. SD
0,13			2. SD	2. SD
0,14			2. SD	2. SD
0,15			2. SD	2. SD

Allikas: MSCI, autori arvutused.

Võrreldes analüüsi tulemusi erinevate usaldusnivoode korra, võivad erinevad tulemused tulla mitmetest asjaoludest. Kuigi kasutatavate andmete maht on suhteliselt suur, satub kvantiilil baseeruvate riskimõõtude kriteeriumisse sõltuvalt usaldusnivoo valikust

suhteliselt vähe andmeid. Mida suurem on valitud usaldusnivoo  $1-\alpha$ , seda vähem andmeid kriteeriumisse satub. Nii vastab  $\alpha=0,05$  65 ja  $\alpha=0,1$  130 vaatlust. Samas võivad saadud tulemused viidata ka sellele, et liiga suure usaldusnivoo korral on äärmuslikest kahjudest haaratud liiga väike osa optimeerimise kriteeriumisse. Teist järku stohhastilise domineerimise analüüs näitas, et üldjuhul on  $ES_\alpha$ -portfellide äärmuslike kahjude ulatus väiksem kui vastavatel teiste kriteeriumite põhjal leitud portfellidel, kuid mis ei osutunud piisavaks, et kompenseerida vahetult  $VaR_\alpha$  tasemest väiksemate kahjude tõenäosuse kasvu. Olukord muutus paremaks, kui kasutati väiksemat usaldusnivood.

Käesoleva töö analüüsi põhjal võib öelda, et  $ES_\alpha$ -portfellid tulevad parem, kui etteantud tõenäosuse tase  $\alpha$  on suhteliselt suur. Sellega on haaratud rohkem informatsiooni kahjudest. Samas tuli välja, et tõenäosuse taseme suurendamine võib viia äärmuslike kahjude ulatuse suurenemisele.  $ES_\alpha$  kriteeriumi mõningas mõttes nõrk kohta on see, et erinevalt pooldispersiooni kriteeriumist ei minimeerita otseselt äärmuslike kahjude varieeruvust. Siit kerkib ülesse idee, et parema tulemuse võiks anda kvantiilil baseeruv riskikriteerium, mis minimeerib varieeruvust teatud kvantiilist alates.  $ES_\alpha$  kriteeriumi analoogia korral võib modifitseeritud kriteeriumi (näiteks *Expected Shortfall Deviation - ESD*) esitada järgneval kujul:

$$(1.5) \quad ESD_\alpha(x) = VaR_\alpha + \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{-VaR_\alpha(x)} (-x - VaR_\alpha)^2 f(x) dx .$$

Erinevalt allahälvete (*downside deviation*) kriteeriumitest ei anta ette tulumäära taset, vaid usaldusnivoo  $1-\alpha$ , millele tulumäärade jaotuses vastab mingisugune tulumäära tase. Sellise püstituse korral oleks iga negatiivse tulumäära kaal riskimõõdus seda suurem, mida kaugemal ollakse etteantud tõenäosusele vastavast kahju tasemest, kuna minimeeritakse  $VaR_\alpha$  tasemest hälvimise ruutusid. Väljapakutud riskimõõd vajab aga edaspidist põhjalikumat analüüsi portfellijuhtimise seisukohast, kuna ruuthälvete kasutamise antakse äärmuslikele vaatlustele suhteliselt suurem kaal ning  $VaR_\alpha$  ja nõutava tulumäära vahele jäävate tulumäärade sageduse kasv võib osutada veelgi suuremaks kui  $ES_\alpha$  minimeerimise korral.

## KOKKUVÕTE

Majanduses mõeldakse tavaliselt riski all võimalust, et tulemus realiseerub oodatavast erinevana või võimalust, et tulemus realiseerub oodatust halvemana. Finantsteoorias on risk peamiselt seotud võimalike kahjude realiseerumisega. Kuigi klassikalisele portfelliteooriale aluse pannud Markowitzi 1959. aasta töös on pühendatud suur tähelepanu riskile kui kahjude varieeruvusele, sai sellest tööst alates laialt aktsepteeritavaks riskimõõduks standardhälve (dispersioon), mis mõõdab kogu portfelli tulude varieeruvust. Käesolevas uurimistöös käsitleti portfelli koostamist erinevate riskikriteeriumite põhjal, mis põhinevad oodatava tulemuse võimalikel kahjudel. Vaatluse all olid portfelli tulu jaotuse kvantiilil põhinevad riskimõõdud  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$ .

Töö teoreetilises osas käsitleti üldisi nõudeid, mida iga sobiv (kooskõlaline, koherentne) riskimõõt peaks rahuldama. Kuigi nende aksioomide täidetuse korral lihtsustab oluliselt portfelli optimeerimise ülesannete lahendamine, ei ole need kõik alati päris aktsepteeritavad ning vajavad iga püstitatud probleemi korral täpsemat analüüsi. Kuidas iga individuaalne investor käitub ühesuguse objektiivse riski tingimustes, sõltub tema subjektiivsest sõltuvusest riski. Sellest tulenevalt on töös sisse toodud stohhastilise domineerimise kriteeriumid, mis on kooskõlas von Neumanni ja Morgentserni kasulikkusteooriaga. Stohhastilise domineerimise kriteeriumite abil on võimalik anda riskantsele varadele eelistusjärjestus kindlat tüüpi riskisuhtumise korral ilma et eeldataks mingisugust kindlat kasulikkusfunktsiooni matemaatilist kuju.

Uurimistöe teoreetilises osas on toodud paralleele stohhastilise domineerimise kriteeriumite ja kvantiilil põhinevate riskimõõdudega  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$ . Kui stohhastilise domineerimise kriteeriumid kasutavad eelistusjärjestuse andmiseks kõiki jaotuse kvantiile, siis  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  on analoogilised kriteeriumid vastavalt esimest ja teist järku stohhastilistele kriteeriumitele, kuid võtavad vaatluse alla vaid ühe kindlaksmääratud

usaldusnivoole  $1-\alpha$  vastava kvantiili. Sellest tulenevalt võidakse erinevate usaldusnivoode korral  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  põhjal saada erinevaid riskantsete alternatiivide eelistusjärjestusi. Välja on pakutud niinimetatud vahepealne variant, mis võtaks arvesse kõik kvantiilid kuni etteantud usaldusnivooni.

Edasi käsitleti portfelli koostamist erinevate riskikriteeriumite korral. Vaadeldi portfelli koostamist ilma täiendavate kitsendusteta portfelli tulude jaotusfunktsioonile. Finantspraktikas laialdaselt levinud normaaljaotuse eelduse korral on riskimõõdud  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  esitatavad standardhälbe lineaarse kombinatsioonina. Portfelli juhtimise seisukohalt taanduvad sellise eelduse korral  $VaR_\alpha$  ja  $ES_\alpha$  kui riskimõõtude minimeerimine standardhälbe minimeerimisele sama oodatava tulu korral ehk saadud optimaalsed portfellid langevad kokku klassikalise Markowitzi portfelliga. Kuigi normaaljaotuse eeldamine lihtsustab oluliselt mitmete finantsprobleemide lahendamist, ei ole see eeldus tsentraalse piirteoreemi kohaselt rakendatav, kui portfelli kuuluvad varad on omavahel seotud (mida finantsaegread aga tihtipeale ongi).

Kvantiilil põhinevate riskimõõtude kasutamisega portfelli optimeerimise kriteeriumina kerkisid uurimistöös ülesse järgnevad hüpoteesid.

- $VaR_\alpha$ - ja  $ES_\alpha$ -portfelli tulumäärade jaotuses võib kasvada oluliselt nende tulumäärade esinemissagedus, mis jäävad vahetult  $VaR_\alpha$  taseme ja nõutava tulususe vahele.
- Eelnevate hüpoteeside tulemused avalduvad selgemini katteta ettemüügi korral.
- $ES_\alpha$  on parem alternatiiv  $VaR_\alpha$ -le portfelli juhtimise seisukohalt.

Varasemad uurimused on  $VaR_\alpha$  lugenud mitesobivaks riskikriteeriumiks kuna  $VaR_\alpha$  minimeerimine võib vastupidiselt oodatule kaasa tuua äärmuslike kahjude ulatuse suurenemise. Lisaks sellele, et rahulda  $VaR_\alpha$  üldjuhul subadiitiivsuse nõuet ehk kahe eraldi vara (portfelli) risk võib olla väiksem kui samadest varadest koosneval portfelliga. Samas ei ole tehtud väga palju uurimusi, mis kasutaksid  $VaR_\alpha$  kriteeriumi vahetult portfelli optimeerimise kriteeriumina. Enamus juhtudel on  $VaR_\alpha$ -t käsitletud koos täiendavate eeldustega portfelli tulumäära (parameetrilise) jaotusfunktsiooni suhtes. Käesolevas töös kasutati hüpoteetiliste portfelli koostamiseks ajaloolisi andmeid, mis võib olla liiga tugev eeldus praktilisteks rakendusteks, kuid mis on vastuvõetav eeldus

lähtuvalt püstitatud uurimistöö eesmärgist. Ajalooliste andmete kasutamist toetab see, et nii on võimalik kasutada kogu informatsiooni varade jaotusfunktsioonist. Väga oluline on ka see, et ajalooliste andmete kasutamisega on haaratud finantsturgude koosliikumine, mida on väga raske adekvaatselt kirjeldada mingisuguste parameetriliste mudelitega.

Empiirilise analüüsi tulemusena võib öelda, et kuigi  $VaR_\alpha$  kriteerium põhineb äärmuslike kahjude jaotusel, siis  $VaR_\alpha$ -portfellide äärmuslikud kahjud võivad olla suuremad kui alternatiivsete riskikriteeriumite põhjal optimeeritud portfellidel. Samuti leidis kinnitust hüpotees, et  $VaR_\alpha$ - ja  $ES_\alpha$ -portfellidel kasvab oluliselt keskmiste kahjude esinemise võimalikkus. Kui  $VaR_\alpha$ -portfellide tulude jaotuses toimub oluline tihedusfunktsiooni nihe ülesse vahetult  $VaR_\alpha$  tasemest väiksemate kahjude osas, siis  $ES_\alpha$  portfellidel hakkab keskmise suurusega kahjude esinemissagedus kasvama kiiremini juba suurematest kui  $VaR_\alpha$  tasemele vastavatest kahjudest. Samas võtab  $ES_\alpha$  kriteerium arvesse kõik kahjud, mis ületavad  $VaR_\alpha$  taset, ja seetõttu on  $ES_\alpha$ -portfellidel väiksemad äärmuslikud kahjud. Võrreldes erinevaid portfelle stohhastilise domineerimise kriteeriumite abil, võib öelda, et  $ES_\alpha$  võib olla parem riskikriteerium kui  $VaR_\alpha$ . Usaldusnivoo 90% korral osutusid kõikide valitud nõutavate tulumäärade korral  $ES_\alpha$ -portfellid eelistatuks vähemalt kolmandat järku stohhastilise domineerimise mõttes ehk kõik niinimetatud hävingukartlikud investorid peaksid kasutama portfelli koostamisel  $VaR_\alpha$  asemel  $ES_\alpha$  kriteeriumi. Samas vajab see tulemus edaspidist põhjalikumat analüüsi, kuna selline tugev eelistus avaldus vaid väiksema valitud usaldusnivoo korral. Võrreldes erinevaid portfelle, milles on lubatud katteta ettemüük, ainult mittenegatiivsete osakaaludega portfellidega, avalduvad eelnimetatud tulemused selgemini katteta ettemüügiga portfellides. Lubades teostada varade katteta ettemüüki, on investoril suuremad võimalused portfelli koostamiseks ning kasutada paremini ära varade äärmuslike tulemuste (nii kasude kui kahjude) jaotust.

Portfellide jaotusi uurides tuleb välja, et ka  $ES_\alpha$  ei pruugi alati olla sobilik riskimõõt. Kui portfelli koostamisel on valitud usaldusnivoo  $1-\alpha$  suhteliselt suur, siis on riskikriteeriumisse haaratud väga väike osa äärmuslikest kahjudest ning nende minimeerimine ei pruugi olla piisav, et kompenseerida keskmise suurusega kahjude esinemissageduse kasvu. Usaldusnivoo  $1-\alpha$  vähendamiseaga vähendatakse kõige

äärmuslikemate kahjudes suhtelist kaalu ning sellisel juhul võib kasvada äärmuslike kahjude osa portfelli tulumäärade jaotuses. Selline käitumine tuleb riskikriteeriumi  $ES_\alpha$  olemusest, mis põhineb kahjude keskväärtuse minimeerimisel. Samas on aga eesmärk pigem kahjude varieeruvuse minimeerimises ning välja on pakutud riskikriteerium, kus minimeeritakse keskmist kahjude ruuthälvet  $Var_\alpha$  tasemest alates. Edaspidistes uurimustes võiks töös väljapakutud riskimõõt olla üks alternatiividest, mida uurida portfelli koostamise seisukohast.

Käesoleva uurimistöö tulemusena on paremini mõistetav erinevate riskikriteeriumite kasutamise mõju portfelli koostamisele. Analüüsi põhjal võib väita, et kvantiilil baseeruvate riskimõõtude kasutamise tulemusena võivad suureneda keskmise suurusega kahjude esinemisetõenäosused ja seega on vajalik iga konkreetse juhu korral selgeks teha, kas äärmuslike kahjude vähenemine kompenseerib nimetatud muutused tulumäärade jaotuses. Töö põhjal võib väita, et  $ES_\alpha$  on parem alternatiiv  $Var_\alpha$ -le nii riskide hindamise kui ka portfelli juhtimise seisukohast. Samas vajab edasist uurimist teiste kahjudel põhinevate riskimõõtude kasutamise võimalused portfelli koostamiseks.

## KASUTATUD KIRJANDUS

1. **Acerbi, C., Nordio, C., Sirtori, C.** Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management. 2001, 10 p. [<http://www.gloriamundi.org/download.asp?ResouceUrl=ncs.pdf>]. 20.12.2002.
2. **Acerbi, C., Tasche, D.** Expected Shortfall: a Natural Coherent Alternative to Value at Risk. 2001, 9 p. [<http://www.gloriamundi.org/download.asp?ResouceUrl=expshortfall.pdf>]. 27.11.2002.
3. **Acerbi, C., Tasche, D.** On the Coherence of Expected Shortfall. – Journal of Banking & Finance, 2002, Vol. 26, pp. 1487-1503.
4. **Alexander, G. J., Baptista, A. M.** Economic Implications of Using a Mean-VaR Model for Portfolio Selection: A Comparison with Mean-Variance Analysis. – Journal of Economic Dynamics & Control, 2002, Vol. 26, pp. 1159-1193.
5. **Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J-M., Heath, D.** Coherent Measures of Risk. 1998, 24 p. [<http://www.math.ethz.ch/~delbaen/ftp/preprints/CoherentMF.pdf>]. 11.04.2002.
6. **Basak, S., Shapiro, A.** Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices. – Review of Financial Studies, 2001, Vol. 14, No. 2, pp. 371-405.
7. **Baumol, W. J.** An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection. – Management Science, 1963, Vol. 10, pp. 174-182.
8. **Bertsimas, D., Lauprete, G. J., Samarov, A.** Shortfall as a Risk Measure: Properties, Optimization and Applications. Preprint, October 2000, viidatud: Yoshida T., Yamai, Y. Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-

Risk: Expected Utility Maximization and Tail Risk. – IMES Discussion Paper Series, 2001-E-14, 2001: 21 vahendusel.

9. **Booth, J. R., Smith, R. L.** An Examination of the Small Firm Effect on the Basis of Skewness Preference. – Journal of Financial Research, 1987, Vol. 10, pp. 77-86.
10. **Copeland, T. E., Weston, J. F.** Financial Theory and Corporate Policy. 3<sup>rd</sup> edition, 1992, Addison-Wesley Publishing Company, 946 p.
11. **Danielsson, J., Embrechts, P., Goodhart, C., Keating, C., Muennich, F., Renault, O., Shin, H.-S.** An Academic Response to Basel II. – Special Paper No. 130, FMG and ESRC, London, May, 2001. [<http://www.riskresearch.org/files/JD-01-6-19-992957996-8.pdf>]. 11.11.2002.
12. **De Giorgi, E.** A Note On Portfolio Selection Under Various Risk Measures. 2002, 22 p. [<http://www.gloriamundi.org/download.asp?ResouceUrl=ed.pdf>]. 12.11.2003.
13. **Dembo, R. S., Freeman, A.** Seeing Tomorrow. Rewriting the Rules of Risk. John Wiley & Sons, Inc., 1998, 260 p.
14. **Drud, A.** CONOPT, 44 p. [<http://www.gams.com/dd/docs/solvers/conopt.pdf>]. 12.02.2004.
15. **Duffie, D., Pan, J.** An Overview of Value-at-Risk. – The Journal of Derivatives, Spring 1997, pp. 7-49.
16. **Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D.** Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. 1999, p. 37. [<http://www.gloriamundi.org/download.asp?ResouceUrl=peamds.pdf>]. 17.01.2002.
17. **Fishburn, P. C.** Stochastic Dominance and Moments of Distributions. – Mathematics of Operations Research, 1980, Vol. 5, pp. 94-100.
18. **Gaivornonski, A. A., Pflug, G.** Properties and computation of Value at Risk efficient portfolios based on historical data. 31 p. [<http://www.gloriamundi.org/download.asp?ResouceUrl=gpa.pdf>]. 14.02.2002.

19. **Hallerbach, W. G.** Decomposing Portfolio Value-at-Risk: A General Analysis. – Tinbergen Institute Discussion Paper, TI 99-034/2, 1999, 31 p. [<http://www.few.eur.nl/few/people/hallerbach/publ/vardecomp-dec99.pdf>]. 17.11.2002.
20. **Harvey, A. C.** Time Series Models. 2<sup>nd</sup> edition, Great Britain: Harvester Wheatsheaf, 1993, 308 p.
21. **Heyer, D. D.** Stochastic Dominance: A Tool for Evaluating Reinsurance Alternatives. 24 p. [<http://www.casact.org/pubs/forum/01sforum/01sf095.pdf>]. 15.01.2003.
22. **Huisman, R., Koedijk, G. K., Pownall, R. A. J.** Asset Allocation in a Value-at-Risk Framework. – Journal of Banking & Finance, 2001, Vol. 25, No. 9, pp. 1789-1804.
23. **Jorion, P.** Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk. 2<sup>nd</sup> edition, McGraw-Hill, 2001, 543 p.
24. **Karma, O., Paas, T.** Riski mõiste ja majandusriskid. – Riskid Eesti majanduses. Tartu: Tartu Ülikooli kirjastus, 2000, lk. 15-61.
25. **Lambing, M.** Lihtaktsiatega seonduva riski hindamine arenevatel väärtpaberiturgudel. TÜ äriahanduse ja investeringute õppetool, 2001, 59 lk. (bakalaureusetöö)
26. **Larsen, N., Mausser H., S. Uryasev.** Algorithms for Optimization of Value-at-Risk. – Financial Engineering, E-commerce and Supply Chain, Kluwer Academic Publishers, 2002, pp. 129-157.
27. **Levy, H., Kroll, Y.** Ordering Uncertain Options with Borrowing and Lending. – The Journal of Finance, 1978, Vol. 33, No. 2, pp. 553-574.
28. **Liu, L.** A New Foundation for the Mean-Variance Analysis. – European Journal of Operational Research, 2004, Vol. 158, No. 1, pp. 229-242.

29. **Markowitz, H. M.** Portfolio Selection: Efficient Diversification of investments. 2<sup>nd</sup> edition, Basil Blackwell, Inc., 1991, 384 p.
30. **Merton, R. C.** An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. – The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1972, Vol. 7, No. 4, pp. 1851-1872.
31. Morgan Stanley Capital International (MSCI®) Equity Indices. [<http://www.msci.com/equity/index.html>]. 18.02.2004.
32. **Murtagh, B. A., Saunders, M. A., Gill, P. E., Raman, R.** MINOS: A Solver for Large-Scale Nonlinear Optimization Problems, 31 p. [<http://www.gams.com/dd/docs/solvers/minos.pdf>]. 12.02.2004.
33. **Rockafellar, R., T., Uryasev, S.** Optimization of Conditional Value-at-Risk. – The Journal of Risk, 2000, Vol. 2, No. 3, pp. 21-41.
34. **Roy, A. D.** Safety First and the Holding of Assets. – Econometrica, 1952, Vol. 20, No. 3, pp. 431-449.
35. **Szegö, G.** Measures of risk. – Journal of Banking & Finance, 2002, Vol. 26, No. 7, pp. 1253-1272.
36. **Tasche, D.** Risk contributions and performance measurement. – Working Paper, Munich University of Technology, 2000, 26 p. [<http://www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/pers/tasche/riskcon.pdf>]. 24.11.2002.
37. **Telser, L. G.** Safety First and Hedging. – Review of Economic Studies, 1955, Vol. 23, pp. 1-16.
38. The Third Consultative Paper of the New Basel Capital Accord, April 2003. [<http://www.bis.org/bcbs/bcbscp3.htm>]. 28.11.2003.
39. **Whitmore, G.** Third-Order Stochastic Dominance. – American Economic Review, 1970, Vol. 60, No. 3, pp. 457-459.
40. **von Neumann, J., Morgenstern, O.** Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton University Press, 1944, 684 p.

41. **Yamai, Y., Yoshiba, T.** Comparative Analyses of Expected Shortfall and VaR: their Estimation Error, Decomposition, and Optimization. – IMES Discussion Paper Series, 2001-E-12, 2001, 43 p. [<http://www.imes.boj.or.jp/english/publication/mes/2002/me20-2-4.pdf>]. 04.05.2002.
42. **Yoshiba T., Yamai, Y.** Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Expected Utility Maximization and Tail Risk. – IMES Discussion Paper Series 2001-E-14, 2001, 29 p. [<http://www.imes.boj.or.jp/english/publication/mes/2002/me20-1-4.pdf>]. 04.05.2002.

**Töös kasutatavad olulisemad lühendid**

$F_x$  – juhusliku muutuja  $x$  jaotusfunktsioon,

$Q_x$  – juhusliku muutuja  $x$  kvantiilfunktsioon ehk pöördjaotusfunktsioon  $F_x^{-1}$ ,

$r_p$  – portfelli tulumäär,

$r_i$  –  $i$ -nda vara tulumäär,

$x_i$  – individuaalse vara  $i$  osakaal portfellis,

$\mathbf{x}$  – portfelli osakaalude vektor ( $\dots, x_i, \dots$ )

$\rho$  – riskimõõt üldkujul,

$U$  – kasulikkusfunktsioon,

$1-\alpha$  – usaldusnivoo,

$VaR_\alpha$  – *Value-at-Risk* usaldusnivool  $1-\alpha$ ,

$ES_\alpha$  – oodatav väärtus tulumääradest, mis ületavad  $VaR_\alpha$  taset usaldusnivool  $1-\alpha$ ,

$E(x)$  – juhusliku muutuja  $x$  oodatav väärtus,

$\sigma, \sigma^2$  – juhusliku muutuja standardhälve, dispersioon,

$\sigma_{ij}$  – juhuslike muutujate  $i$  ja  $j$  vaheline kovariatsioon,

1. SD – esimest järku stohhastiline domineerimine,

2. SD – teist järku stohhastiline domineerimine,

3. SD – kolmandat järku stohhastiline domineerimine,

**$VaR_\alpha$ -portfelli optimeerimise algoritm**

0. etapp. Algväärtuste andmine:

- a)  $\alpha_0 = \alpha, j=0, H_0 = \{k : k=1, \dots, m\}$ ,
- b) kiiruse konstant  $\zeta, 0 < \zeta < 1$ .

1. etapp. Optimeerimise alamprobleem:

$$a) \min VaR + \frac{1}{m\alpha_j} \sum_{k=1}^m [-r_p - VaR]^+,$$

kus  $k$  kuulub hulka  $H_j$  ja optimaalne portfelli on  $\mathbf{x}^*$ ,

- b) järjestada portfelli tulumäärad  $k=1, \dots, m$  kasvavasse järjekorda ja järjestatud tulumäärad tähistada  $k_l, l=1, \dots, m$ .

2. etapp. Portfelli  $VaR_\alpha$  arvutamine:

$$VaR_{\alpha_j} = -r_{p(l(\alpha))}, \text{ kus } l(\alpha) = \min(l : l/m \geq \alpha).$$

3. etapp. Algoritmi lõpetamise tingimus:

kui  $H_j = H_{j-1}$ , siis algoritm peatatakse ja optimaalne portfelli on  $\mathbf{x}^*$  ning optimaalne  $VaR_\alpha$  on  $VaR_j$ .

4. etapp. Uued algväärtused:

- a)  $j=j+1$
- b)  $b_j = (1-\alpha) + \alpha(1-\zeta)^j$  ja  $1-\alpha_j = (1-\alpha)/b_j$
- c)  $H_j = \{k_l \text{ kuuluvad } H_{j-1} : l/m \leq b_j\}$
- d) Jätka etapist 1.

Allikas: Larsen *et al.* 2002: 135-139

## Analüüsitavad aegread

<i>i</i>	Tähis	Riigi nimi	<i>i</i>	Tähis	Riigi nimi
1	CHE	Šveits	26	COL	Kolumbia
2	GBR	Suurbritannia	27	LKA	Sri Lanka
3	USA	Ameerika Ühendriigid	28	MEX	Mehhiko
4	GRC	Kreeka	29	PER	Peruu
5	PRT	Portugal	30	VEN	Venetsueela
6	SGP	Singapur	31	ISR	Iisrael
7	AUS	Austraalia	32	ZAF	Lõuna-Aafrika vabariik
8	AUT	Austria	33	RUS	Venemaa
9	BEL	Belgia	34	EGY	Egiptus
10	CAN	Kanada	35	MAR	Maroko
11	DNK	Taani	36	IDN	Indoneesia
12	FIN	Soome	37	MYS	Malaisia
13	FRA	Prantsusmaa	38	THA	Tai
14	DEU	Saksamaa	39	PHL	Filipiinid
15	HON	Hongkong	40	ARG	Argentiina
16	IRL	Iirimaa	41	BRA	Brasiilia
17	ITA	Itaalia	42	CHL	Tšiili
18	JPN	Jaapan	43	TWN	Taiwan
19	NLD	Holland	44	CZE	Tšehhi Vabariik
20	NZL	Uus-Meremaa	45	HUN	Ungari
21	NOR	Norra	46	IND	India
22	ESP	Hispaania	47	JOR	Jordania
23	SWE	Rootsi	48	KOR	Korea
24	CHN	Hiina	49	PAK	Pakistan
25	TUR	Türgi	50	POL	Poola

## Arenenud aktsiaturgude tulususte karakteristikud

Aktsiaturg	$i$	Keskvärtus	Mediaan	Maksimum	Miinumum	Püstakus	Asümmeetrilisus	Standardhälve	Poolstandardhälve	$Var_{0,05}$	$ES_{0,05}$	$Var_{0,1}$	$ES_{0,1}$
CHE	1	0,010	0,000	6,770	-6,851	6,313	0,059	1,242	1,227	1,935	2,778	1,403	2,208
GBR	2	-0,002	0,000	5,397	-5,138	4,736	-0,087	1,249	1,271	1,957	2,846	1,476	2,274
USA	3	0,000	0,000	5,772	-5,976	4,613	0,178	1,308	1,305	2,115	2,795	1,624	2,306
GRC	4	-0,012	0,000	7,867	-9,380	5,694	0,073	1,808	1,800	2,788	4,072	2,084	3,222
PRT	5	-0,007	0,000	4,192	-4,900	3,856	-0,134	1,168	1,197	1,998	2,677	1,400	2,172
SGP	6	0,034	0,031	5,863	-7,525	4,868	-0,054	1,396	1,391	2,210	2,980	1,619	2,419
AUS	7	0,032	0,023	4,406	-6,818	5,529	-0,316	1,095	1,114	1,715	2,375	1,254	1,903
AUT	8	0,036	0,018	3,978	-4,618	4,294	-0,228	1,086	1,095	1,720	2,512	1,206	1,970
BEL	9	-0,010	0,000	9,122	-6,186	6,920	0,375	1,446	1,436	2,401	3,280	1,666	2,634
CAN	10	0,046	0,094	5,199	-9,262	6,878	-0,376	1,331	1,391	2,046	3,018	1,506	2,376
DNK	11	0,038	0,039	5,719	-6,061	4,743	-0,206	1,279	1,306	2,043	2,902	1,523	2,321
FIN	12	0,062	0,007	17,250	-18,182	6,613	-0,131	2,952	2,946	4,517	6,466	3,388	5,182
FRA	13	0,018	0,072	6,138	-6,139	4,436	-0,040	1,518	1,551	2,471	3,434	1,827	2,779
DEU	14	0,008	0,001	7,132	-7,482	4,479	0,033	1,735	1,724	2,954	3,905	1,974	3,145
HON	15	0,036	0,000	6,009	-9,210	5,614	-0,192	1,491	1,448	2,339	3,225	1,742	2,613
IRL	16	-0,012	0,000	6,138	-7,461	5,606	-0,269	1,288	1,340	2,154	2,963	1,546	2,388
ITA	17	0,007	0,015	6,891	-5,984	4,671	-0,110	1,343	1,365	2,183	2,988	1,601	2,431
JPN	18	0,013	0,000	5,941	-6,908	3,999	-0,006	1,470	1,451	2,441	3,154	1,801	2,618
NLD	19	0,001	0,000	6,792	-8,124	5,674	-0,048	1,535	1,523	2,436	3,579	1,691	2,784
NZL	20	0,026	0,074	5,882	-7,628	5,370	-0,273	1,362	1,433	2,230	3,139	1,669	2,515
NOR	21	0,039	0,029	4,939	-7,111	5,302	-0,387	1,248	1,282	1,933	2,854	1,449	2,253
ESP	22	0,018	0,005	6,547	-5,395	4,147	0,143	1,494	1,473	2,430	3,188	1,877	2,659
SWE	23	0,034	0,021	8,660	-9,218	4,740	0,056	1,990	1,976	3,360	4,424	2,295	3,568

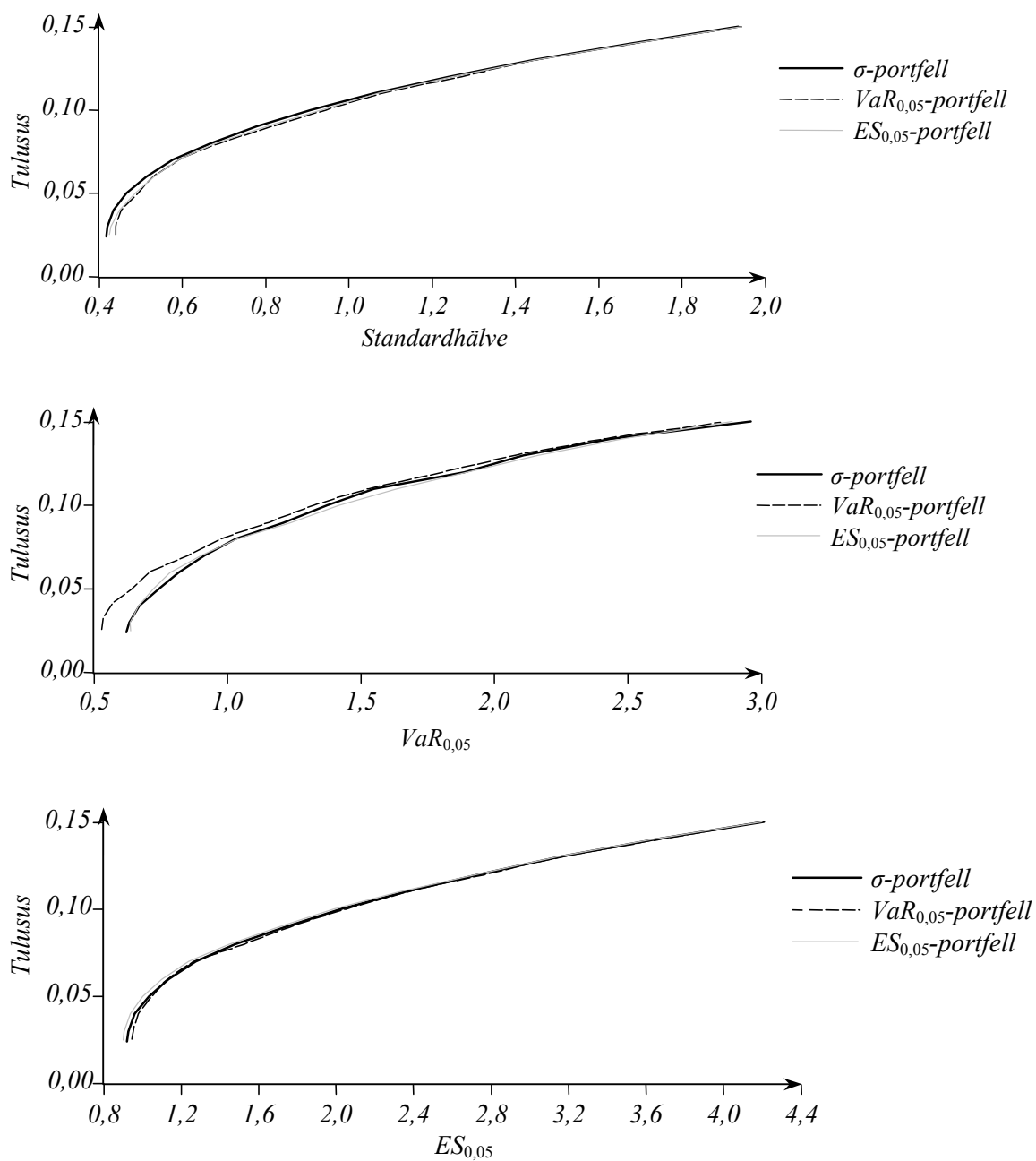
Allikas: MSCI, autori arvutused.

## Arenevate aktsiaturgude tulususte karakteristikud

Aktsiaturg	$i$	Keskvärtus	Mediaan	Maksimum	Minimum	Püstakus	Asümmeetrilisus	Standardhälve	Poolstandardhälve	$Var_{0,05}$	$ES_{0,05}$	$Var_{0,1}$	$ES_{0,1}$
CHN	24	0,032	0,000	11,650	-9,450	5,224	0,280	2,020	1,902	3,171	4,321	2,343	3,520
TUR	25	0,106	-0,005	24,627	-23,981	8,806	0,409	3,885	3,580	5,675	8,473	3,949	6,576
COL	26	0,055	0,000	7,378	-6,296	5,968	0,241	1,318	1,250	2,015	2,935	1,486	2,313
LKA	27	0,047	0,000	31,760	-15,167	54,289	2,981	2,039	1,703	2,613	4,142	1,790	3,144
MEX	28	0,067	0,043	7,650	-7,554	5,047	0,138	1,737	1,697	2,706	3,725	1,982	3,022
PER	29	0,068	0,013	11,235	-8,915	11,250	0,346	1,315	1,236	1,807	2,826	1,343	2,193
VEN	30	0,064	-0,005	21,167	-37,350	40,707	-1,201	2,632	2,473	3,359	5,596	2,403	4,210
ISR	31	0,053	0,027	8,637	-9,329	5,822	-0,087	1,848	1,838	2,882	4,239	2,013	3,352
ZAF	32	0,053	0,042	5,359	-8,815	4,931	-0,241	1,421	1,436	2,142	3,191	1,621	2,530
RUS	33	0,183	0,117	20,871	-18,359	7,888	0,189	2,928	2,859	4,405	6,413	3,045	5,052
EGY	34	-0,001	0,000	9,731	-8,610	6,168	0,293	1,753	1,852	2,886	3,985	2,045	3,209
MAR	35	-0,021	-0,070	6,450	-4,705	9,150	0,671	0,867	0,798	1,242	1,828	0,984	1,460
IDN	36	0,076	0,000	15,047	-18,084	8,518	0,155	2,510	2,400	3,865	5,550	2,646	4,358
MYS	37	0,079	0,000	19,681	-6,735	43,390	3,183	1,482	1,190	1,810	2,831	1,256	2,153
THA	38	0,075	0,006	17,665	-7,852	10,277	0,835	2,066	1,911	3,066	4,306	2,293	3,480
PHL	39	-0,047	-0,046	24,573	-7,828	48,033	3,439	1,686	1,452	2,329	3,358	1,680	2,622
ARG	40	0,018	0,000	17,751	-28,572	21,285	-0,852	2,684	2,650	3,598	6,061	2,541	4,537
BRA	41	0,066	0,035	14,082	-9,275	5,888	0,225	2,128	2,085	3,262	4,583	2,414	3,698
CHL	42	0,038	0,000	4,341	-5,851	4,228	-0,073	1,106	1,090	1,780	2,403	1,328	1,958
TWN	43	0,028	-0,027	7,664	-10,364	4,566	0,182	1,966	1,825	2,983	4,128	2,257	3,365
CZE	44	0,101	0,088	6,992	-7,126	4,365	-0,013	1,625	1,612	2,552	3,507	1,856	2,813
HUN	45	0,040	0,071	9,018	-8,865	5,494	0,119	1,663	1,654	2,600	3,555	1,940	2,888
IND	46	0,064	0,060	9,269	-7,063	5,529	-0,101	1,707	1,738	2,709	4,097	1,838	3,149
JOR	47	0,034	0,000	5,488	-6,803	12,083	-0,219	0,864	0,769	1,186	2,033	0,800	1,495
KOR	48	0,101	0,021	9,609	-11,456	4,728	0,001	2,493	2,434	3,899	5,436	2,947	4,411
PAK	49	0,095	0,040	10,674	-8,342	6,303	0,108	1,950	1,915	3,102	4,479	2,248	3,543
POL	50	0,032	0,000	6,021	-9,079	4,017	0,072	1,821	1,773	2,849	3,811	2,130	3,117

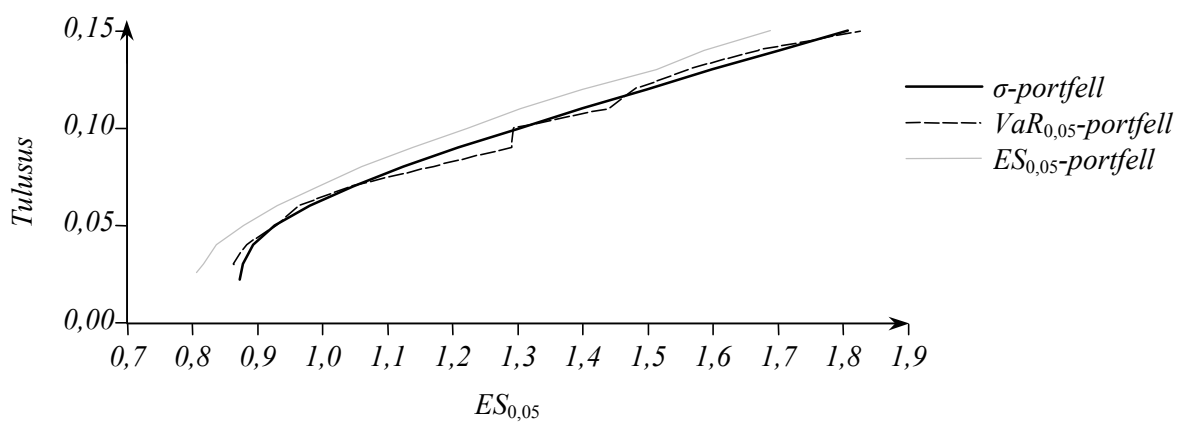
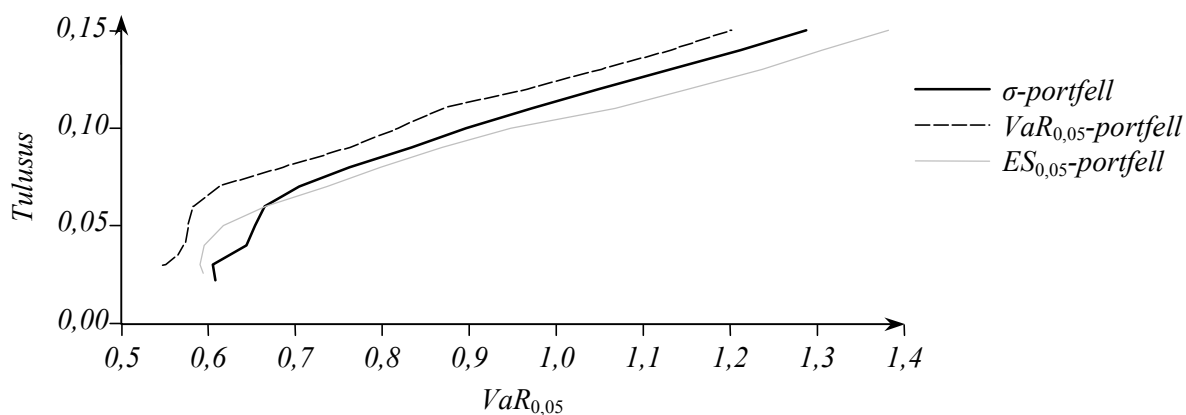
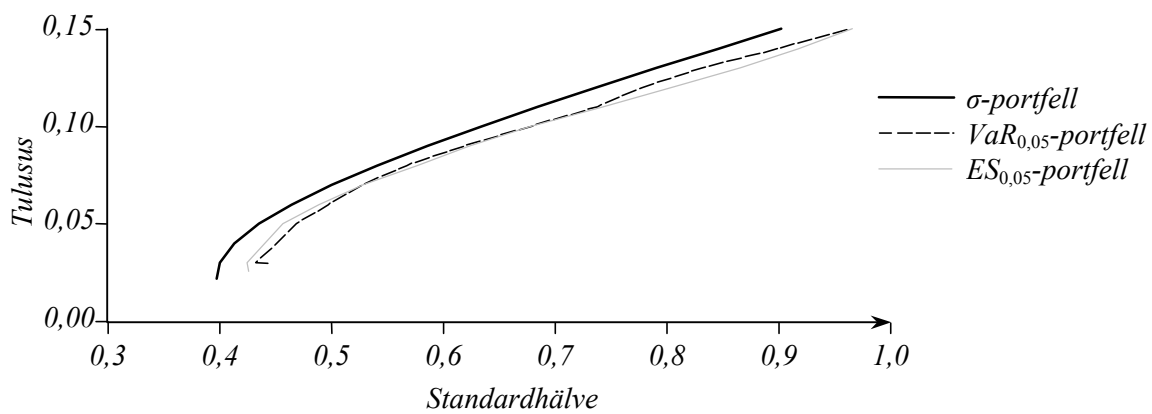
Allikas: MSCI, autori arvutused.

### Katteta ettemüügita portfellide efektiivsuspiirid



Allikas: MSCI, autori koostatud.

### Katteta ettemüügiga portfellide efektiivsuspiirid



Allikas: MSCI, autori koostatud.

## Aktsiaturgude tulumäärade juhuslikkuse testi tulemused

	AC	PAC	Q-statistik	Pr		AC	PAC	Q-statistik	Pr
CHE	0,062	0,062	5,041	0,025	COL	0,270	0,270	95,062	0,000
GBR	-0,010	-0,010	0,122	0,727	LKA	0,168	0,168	36,786	0,000
USA	-0,021	-0,021	0,558	0,455	MEX	0,108	0,108	15,160	0,000
GRC	0,128	0,128	21,334	0,000	PER	0,079	0,079	8,114	0,004
PRT	0,132	0,132	22,752	0,000	VEN	0,061	0,061	4,853	0,028
SGP	0,070	0,070	6,479	0,011	ISR	0,037	0,037	1,753	0,185
AUS	0,022	0,022	0,633	0,426	ZAF	0,095	0,095	11,906	0,001
AUT	0,043	0,043	2,423	0,120	RUS	0,046	0,046	2,711	0,100
BEL	0,144	0,144	27,260	0,000	EGY	0,028	0,028	0,993	0,319
CAN	0,056	0,056	4,035	0,045	MAR	0,149	0,149	29,010	0,000
DNK	0,041	0,041	2,175	0,140	IDN	0,139	0,139	25,220	0,000
FIN	0,002	0,002	0,006	0,938	MYS	0,104	0,104	14,122	0,000
FRA	0,026	0,026	0,874	0,350	THA	0,148	0,148	28,489	0,000
DEU	-0,002	-0,002	0,004	0,951	PHL	0,129	0,129	21,765	0,000
HON	0,045	0,045	2,621	0,105	ARG	0,001	0,001	0,001	0,979
IRL	0,113	0,113	16,615	0,000	BRA	0,160	0,160	33,493	0,000
ITA	-0,004	-0,004	0,023	0,881	CHL	0,231	0,231	70,042	0,000
JPN	0,002	0,002	0,006	0,937	TWN	0,033	0,033	1,437	0,231
NLD	0,003	0,003	0,011	0,916	CZE	0,055	0,055	4,022	0,045
NZL	0,024	0,024	0,781	0,377	HUN	0,086	0,086	9,642	0,002
NOR	0,042	0,042	2,300	0,129	IND	0,091	0,091	10,855	0,001
ESP	0,005	0,005	0,029	0,866	JOR	0,015	0,015	0,295	0,587
SWE	0,058	0,058	4,350	0,037	KOR	0,025	0,025	0,789	0,374
CHN	0,092	0,092	11,111	0,001	PAK	0,029	0,029	1,090	0,297
TUR	0,018	0,018	0,430	0,512	POL	0,066	0,066	5,666	0,017

AC – autokorrelatsioonifunktsiooni väärtus viitaja üks korral,

PAC – osalise autokorrelatsioonifunktsiooni väärtus viitaja üks korral,

Q-statistik – juhuslikkuse testi kriteeriumi väärtus,

Pr – maksimaalne tõenäosuse tase, mille korral saab jääda nullhüpoteesi juurde (et ühe viitajaline autokorrelatsioon võrdub nulliga)

Allikas: MSCI, autori arvutused.

**Optimaalsete portfelli osakaalude jaotus arenenud ja arenevate turgude vahel**

(%)	Standardhälve		Pooldispers		$VaR_{0,05}$		$ES_{0,05}$		$VaR_{0,1}$		$ES_{0,1}$	
$R_p$	A-nud	A-vad	A-nud	A-vad	A-nud	A-vad	A-nud	A-vad	A-nud	A-vad	A-nud	A-vad
0,03	20,8	79,2	17,7	82,3	23,8	76,2	15,7	84,3	19,8	80,2	19,0	81,0
0,04	17,6	82,4	15,4	84,6	22,0	78,0	16,2	83,8	19,1	80,9	17,4	82,6
0,05	14,6	85,4	13,3	86,7	7,1	92,9	12,5	87,5	14,9	85,1	11,8	88,2
0,06	13,1	86,9	12,0	88,0	10,1	89,9	9,7	90,3	11,3	88,7	7,4	92,6
0,07	8,1	91,9	5,0	95,0	4,9	95,1	0,8	99,2	2,3	97,7	0,0	100,0
0,08	0,6	99,4	0,0	100,0	0,9	99,1	0,0	100,0	0,5	99,5	0,0	100,0
0,09	0,0	100,0	0,0	100,0	0,1	99,9	0,0	100,0	0,7	99,3	0,0	100,0
0,10	0,0	100,0	0,0	100,0	0,7	99,3	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0
0,11	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,1	99,9	0,0	100,0
0,12	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,8	99,2	0,0	100,0
0,13	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0
0,14	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0
0,15	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0	0,0	100,0
	Standardhälve				Pooldispersioon				$VaR_{0,05}$			
$R_p$	Arenenud		Arenevad		Arenenud		Arenevad		Arenenud		Arenevad	
0,03	-19,3	46,9	-6,1	78,5	-21,3	45,4	-6,6	82,5	-33,0	53,2	-11,6	91,4
0,04	-21,2	46,0	-6,9	82,2	-24,8	46,8	-8,2	86,1	-34,8	57,4	-8,9	86,3
0,05	-24,5	46,5	-9,1	87,2	-29,7	49,8	-10,5	90,4	-42,1	58,6	-8,9	92,4
0,06	-29,2	48,3	-11,6	92,5	-35,0	52,9	-12,6	94,7	-41,5	48,8	-10,8	103,6
0,07	-34,1	50,3	-14,3	98,1	-40,0	55,8	-15,2	99,4	-39,6	50,9	-15,9	104,5
0,08	-39,8	53,2	-17,1	103,7	-45,8	59,4	-18,3	104,8	-43,1	55,8	-22,8	110,1
0,09	-48,1	58,7	-20,3	109,7	-53,8	64,8	-21,5	110,5	-49,0	61,6	-27,6	114,9
0,10	-57,1	64,8	-24,7	117,0	-63,4	71,8	-27,0	118,6	-66,6	77,9	-33,2	121,9
0,11	-66,1	71,0	-31,0	126,2	-73,2	78,7	-32,5	127,0	-81,3	98,4	-34,7	117,6
0,12	-75,4	77,4	-37,3	135,3	-82,9	85,4	-38,5	136,0	-84,9	92,0	-44,6	137,4
0,13	-84,6	83,8	-43,6	144,4	-92,7	92,2	-44,5	144,9	-98,0	100,4	-48,6	146,1
0,14	-93,8	90,2	-49,9	153,6	-102,4	99,1	-50,6	153,9	-107,1	114,5	-56,8	149,3
0,15	-103,1	96,5	-56,2	162,7	-112,2	106,0	-56,7	162,8	-112,9	115,4	-65,1	162,6
	$ES_{0,05}$				$VaR_{0,1}$				$ES_{0,1}$			
$R_p$	Arenenud		Arenevad		Arenenud		Arenevad		Arenenud		Arenevad	
0,03	-31,1	55,3	-13,6	89,4	-22,5	45,5	-5,3	82,3	-22,6	43,5	-8,5	87,5
0,04	-36,5	56,8	-12,6	92,3	-24,1	46,1	-11,2	89,2	-29,7	47,3	-8,9	91,3
0,05	-37,5	51,6	-11,4	97,3	-27,9	50,6	-9,4	86,7	-34,8	49,8	-11,2	96,1
0,06	-40,7	52,8	-15,3	103,2	-32,8	53,7	-19,0	98,1	-40,2	50,0	-10,3	100,4
0,07	-47,7	49,5	-17,6	115,8	-38,9	59,8	-20,4	99,5	-42,3	51,5	-14,8	105,5
0,08	-56,3	53,0	-17,7	121,0	-44,1	60,8	-24,0	107,3	-46,3	53,9	-18,8	111,2
0,09	-63,8	60,1	-23,3	127,1	-57,0	74,5	-34,9	117,3	-52,3	63,7	-23,4	111,9
0,10	-67,7	62,2	-30,6	136,1	-52,8	67,2	-33,5	119,1	-57,6	65,7	-29,5	121,4
0,11	-83,9	76,8	-36,4	143,5	-66,4	78,7	-44,0	131,8	-72,5	80,5	-34,8	126,7
0,12	-92,0	81,0	-43,6	154,6	-73,4	87,2	-48,1	134,4	-80,6	84,8	-40,3	136,1
0,13	-98,8	85,9	-51,4	164,3	-81,9	98,9	-60,1	143,0	-87,5	90,5	-47,6	144,6
0,14	-103,6	87,9	-59,8	175,5	-91,1	96,9	-62,7	156,9	-101,1	102,4	-54,9	153,6
0,15	-115,3	94,7	-64,7	185,3	-94,3	103,9	-67,3	157,7	-103,7	105,3	-65,6	164,0

Allikas: MSCI, autori arvutused.

# QUANTILE BASED PORTFOLIO RISK MANAGEMENT

Marek Lambing

## Summary

When someone talks about risk, it is intuitively understood by everyone, but its (quantitative) measure is not unanimously defined to everyone. In general, risk is the probability of outcome to be different than expected or worse than expected. Risk with financial assets is usually associated with losses. Although the risk management of financial assets has been studied for decades now it is still topical subject.

In financial theory it is distinguished decisions under risk and decisions under uncertainty. The former describes decision process based on known probability distribution of future outcomes. When the future outcomes are not entirely represented then we have a decision process under uncertainty. The most critical factor in decision process though will be investor's subjective behavior towards risk.

The risk can be described in variety of ways. Modern portfolio theory uses standard deviation (variance) of portfolio's returns as a risk measure. The variance encompass all relevant information of distribution of stochastic variable only in case of normal distribution. When returns are normally distributed then there is no need for higher moments (skewness, kurtosis) to describe the distribution. Stylized facts of empirical financial time series bring out so-called fat-tailed distributions, meaning the extreme losses and gains are expected to realize more frequently than would be under normal distribution. If there is still assumed normality, then the extreme outcomes will be underestimated. Using variance as a risk measure brings up two major problems concerning risk management. Variance does not give an idea of range of extreme losses and it does not distinguish whether high variance is due to high gains or losses. While

risk is usually stemmed with losses, the variance of losses (semi-variance) would be better risk measure. This was actually important point made in Markowitz's work in 1959, but from that on the simple variance became as standard in risk measurement.

Current research studies quantile based risk measures Value-at-Risk ( $VaR$ ) and Expected Shortfall ( $ES$ ) and their impact on portfolio optimization. Previous studies have mainly stressed the estimation problems of those risk measures, while their use as optimization criteria has been less exploited.

Value-at-Risk with confidence level  $1-\alpha$  describes a loss level, where bigger losses can happen in  $\alpha$  percentage in a time. Value-at-Risk is intuitively accepted risk measure, but it only gives us the probability of excess losses and says nothing of the range of extreme losses. Still it is widely used risk measure in practice and interesting subject in research field. To simplify the estimation of  $VaR_\alpha$  it is widely used under normality assumption, but in respect to portfolio risk management it will become as good (bad) as variance while under normality the  $VaR_\alpha$  (and also Expected Shortfall) becomes just a linear function of standard deviation. To look beyond  $VaR_\alpha$  the Expected Shortfall measure has been introduced. Expected Shortfall is presumably better risk measure than  $VaR_\alpha$  while it encompasses the losses exceeding  $VaR_\alpha$  and is easier to apply in practice.

The aim of this study is to find the best risk measure (respect to some criteria) for portfolio optimization. While quantile based risk measures are expected to give better result when the extreme losses are occurred, this study tries to find out how the overall distribution of portfolio returns will change. The hypotheses emerges that while optimization of quantile based risk measures will result with lower extreme losses there will be at the same time rise of probability in medium-sized losses. It is studies whether these reduction of extreme losses are enough to compensate the rise in medium sized losses. When studying different risk measures it has always born in mind that every risk measure corresponds to some subjective behavior towards risk. While risk averse investors are concerned about the variance of outcome, then loss or ruin averse investors prefer portfolios minimizing losses.

The different risk measures are analyzed in theoretical and practical aspects. The theoretical part explains the conditions which should be satisfied by any coherent risk

measure and how different risk measures can be applied to portfolio optimization. Empirical analyses is based on hypothetical portfolios with real historical stock market data. Using historical data is not quite acceptable on practice, but is acceptable considering the aim of this study.

The outline of the research is following. The first part of research deals with quantile based risk measures. The coherent risk measure is explained using axioms presented by Artzner *et al.* (1998). Second part of the work analyses the portfolio optimization problem with different risk measures. The last part is based on the analysis of hypothetical portfolios with different objective risk criteria.

Hypothetical portfolios are composed of real historical data. The sample consist of 50 stock market indices from MSCI (Morgan Stanley Capital International) database. The used data gives as total of 65200 (50x1304) records. Portfolio optimization problem is solved by GAMS (General Algebraic Modeling Systems) program Distribution 21.3.

The following hypothesis are studied.

- $VaR_\alpha$  as optimization criteria might lead to higher losses than otherwise.
- While minimizing extreme losses with  $VaR_\alpha$  and  $ES_\alpha$  the medium sized losses may become more apparent.
- Previous results are more evident with short-sales allowed.
- $ES_\alpha$  is a better criteria for portfolio optimization than  $VaR_\alpha$  in regard with stochastic dominance criteria.

Earlier studies have judged the  $VaR_\alpha$  as inappropriate risk measure while it in general does not satisfy subadditivity condition, meaning the sum of the risks of individual assets (portfolios) will be smaller than the risk of portfolio consisting both assets. It is showed that  $ES_\alpha$  might be a better alternative  $VaR_\alpha$  while on certain conditions the former portfolios are preferred over latter ones at least by loss averse investors according to stochastic dominance criteria.

Although  $ES_\alpha$  might be preferable over  $VaR_\alpha$  as a risk criteria in portfolio optimization, it still has some shortcomings. If the chosen confidence level  $1-\alpha$  is relatively big, then it encompasses only the most extreme losses and their minimization might not be

enough to compensate the rise of medium sized losses. The reduction of confidence level reduces the relative weigh of extreme losses and this might result in rise of the most extreme losses. This kind of behavior is due to the  $ES_\alpha$  criteria, which minimizes expected value of extreme losses and not their variance. Further studies should take more look at the hybrid version risk measure of semi-variance and  $VaR_\alpha$ , variance of losses exceeding  $VaR_\alpha$  level at given confidence level  $1-\alpha$ .