TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

A. Humal

Kõrgema Matemaatika Loengud

III VIHIK

TALLINN

1959

A. Humal

KÕRGEMA MATEMAATIKA

LOENGUD

Tallinna Polütehnilise Instituudi
I semestri üliõpilastele

III vihik

Tallinn
1959

Arh.

14

TRÜ Rotaprint 1959. Tell. nr. 179. Tir. 400. MB 04812.

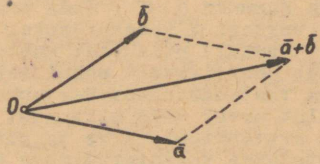
V. VEKTORARVUTUS JA RUUMI ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA

§ 19. Vektorarvutus.

1. Vektor, vektorite summa ja skaalarikordne vektor.

Vektoriteks nimetatakse sirglõike, mis algavad kõik ühest ja samast punktist ning millel on määratud pikkus ja suund. Nii on vektor antud selle ruumipunktiga, milleni ta ulatub. Ühtlasi on selge, et vektorite alguspunktist viib igasse ruumipunkti mingi vektor.*

Vektori $\bar{a}$ pikkust tähistatakse $|\bar{a}|$ või lihtsalt a. (Vektori tähistena on kasutatud ka gooti tähti, jämekirja tähti, kursiivtähti noolega ülal ja allakriipsutatud tähti; kirjutamise lihtsuse tõttu eelistatakse siin vektori tähisena kursiivtähti kriipsuga ülal.) Vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ summaks $\bar{a}+\bar{b}$ nimetatakse vektorit, mis esineb rööpküliku diagonaalina, kui rööpküliku



Joonis 60

kaks külge on $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ (joon.60). Järelikult asetseb vektor $\bar{a}+\bar{b}$ vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapinnal. Olgu tähendatud, et vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ liitmiseks ei tarvitse tervet rööpkülikut moodustada - piisab sellest, et võetakse vektori $\bar{a}$ lõpust abilõik, mis on paralleelne vektoriga $\bar{b}$ ning temaga ühepikkune ja ühesuunaline; abilõigu lõpp osutub siis selleks punktiks, milleni ulatub $\bar{a}+\bar{b}$. On ilmne, et kahe vektori summa ei olene liidetavate järjekorrast (liidetavad on kommutatiivsed): $\bar{b}+\bar{a}=\bar{a}+\bar{b}$, sest rööpkülik küljedega $\bar{b}$ ja $\bar{a}$ on ühtlasi ka rööpkülik külgedega $\bar{a}$ ja $\bar{b}$.

Samuti on kerge veenduda selles, et

$$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$$

(liidetavad on ka assotsiatiivsed). Nimelt osutub (joon.61) niihästi $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ kui ka $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$ rööptahuka ruumidiagonaaliks tipust O , kui sellest tipust väljuvad servad on $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$. Sama rööptahuka abil on ühtlasi ilmne, et

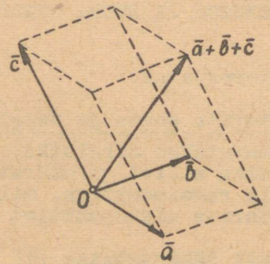
$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}+\bar{c}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}+\bar{c}=\bar{b}+\bar{c}+\bar{a}=\bar{c}+\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}+\bar{b}+\bar{a}$$

(mida võib järeldada ka liidetavate kommutatiivsusest ja assot-

---

* Vektor on ladinakeelne sõna ja tähendab: vedaja, kandja, viija.

siatiivsusest).



Joonis 61

Summa $\bar{a}+\bar{a}$ leidmiseks ei saa kasutada rööpkülikut, sest külgedega $\bar{a}$ ja $\bar{a}$ teda ei tekigi; kui aga summat $\bar{a}+\bar{a}$ leitakse sel teel, et vektori $\bar{a}$ lõpust võetakse abilõik mis on temaga ühesuunaline ja ühepikkune, siis abilõigu lõpuni ulatuvat vektorit tuleb lugeda summaks $\bar{a}+\bar{a}$. Seda vektorit tähistatakse $2\bar{a}$ ja nimetatakse vektori $\bar{a}$ kahekordseks. Üldse tähistatakse $k\bar{a}$ (mistahes arvu k puhul) niisugust vektorit, mille pikkus on $|k|a$ ja mis suundub positiivse k puhul vektori $\bar{a}$ suunas, negatiivse k puhul aga vastandsuunas. Seejuures võib k tähendada mitte ainult kindlat arvu, vaid niisugust suurust (parameet - rit), mis omandab arvväärtusi. Arve ja suurusi, mis omandavad arvväärtusi, nimetatakse vektorarvutuses skaalariteks. Vastavalt sellele on vektori $k\bar{a}$ nimetuseks - skaalari k kordne vektor $\bar{a}$. Skaalarikordsel vektoril on järgmised omadused:

$$k\bar{a}+l\bar{a}=(k+l)\bar{a}$$
$$k(l\bar{a})=(kl)\bar{a}$$
$$k\bar{a}+k\bar{b}=k(\bar{a}+\bar{b}).$$

Esimene ja teine seos on järeldused arvude k ja l liitmise ja korrutamise juhistest, kolmas aga selgub vektorite summa definitsioonist (ning asjaolust, et rööpkülik külgedega $k\bar{a}$ ja $k\bar{b}$ on sarnane rööpkülikuga, mille külgedeks on $\bar{a}$ ja $\bar{b}$).

Vektorit $-1\bar{a}$ nimetatakse vektori $\bar{a}$ vastandvektoriks ja tähistatakse $-\bar{a}$. Vektori $0\bar{a}$ pikkus on null (mistõttu tema suund osutub meelevaldseks), seepärast nimetatakse teda nullvektoriks ja tähistatakse $\bar{0}$. Kui $\bar{a}$ ei ole nullvektor, siis on tema pikkus a niisugune arv, millel on olemas pöördarv $\frac{1}{a}$; selle kordsena moodustatud $\frac{1}{a}\bar{a}$ on vektor pikkusega 1 vektori $\bar{a}$ suunas, seepärast nimetatakse teda vektori $\bar{a}$ suuna ühikvektoriks.

Kui kaks vektorit asetsevad ühel ja samal sirgel, siis nimetatakse neid teineteisega kolineaarseteks vektoriteks. Nii on mistahes k puhul $k\bar{a}$ kolineaarne vektoriga $\bar{a}$. Kui kaks vektorit ei ole teineteisega kolineaarsed ja kolmas vektor asetseb nende kahe vektori tasapinnal, siis nimetatakse teda nendega komplanaarseks. Näiteks $\bar{a}+\bar{b}$ on koplanaarne vektoritega $\bar{a}$ ja $\bar{b}$.

Vektorite summa definitsioonist ja skaalarikordse vektori definitsioonist järeldub, et vektor $\bar{a}+k\bar{b}$ on (mistahes k puhul) vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapinnal ja et tema lõpp asetseb sirgel, mis läbib vektori $\bar{a}$ lõppu ja on paralleelne vektoriga $\bar{b}$. Seda sirget esitab järelikult võrrand

$$\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$$

milles $\bar{r}$ on vektori üldtähis (kuhugi ruumipunkti viiv vektor üldse) ja t on parameeter. Üldse tähendab kahe vektori võrdumine seda, et nad viivad ühte ja samasse punkti.

Samuti järeldub, et kui $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ei ole kolineaarsed, on vektor $k\bar{b}+l\bar{c}$ (mistahes k ja l puhul) vektorite $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ tasapinnal; vektori $\bar{a}+k\bar{b}+l\bar{c}$ lõpp aga asetseb niisugusel tasapinnal, mis läbib vektori $\bar{a}$ lõppu ja on paralleelne vektoritega $\bar{b}$ ja $\bar{c}$. Järelikult esitab seda tasapinda võrrand

$$\bar{r} = \bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c},$$

milles s ja t on parameetrid.

2. Vektorarvutuse peateoreem ja vektori koordinaadid.

T e o r e e m. Kui vektorid $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ ei asetse ühel tasapinnal, siis on mistahes vektor $\bar{v}$ esitatav summana $k\bar{a}+l\bar{b}+m\bar{c}$, milles arvud k, l ja m on üheselt määratud.

Seda teoreemi võib nimetada vektorarvutuse peateoreemiks. Teda saab sõnastada ka lühemalt: iga vektor on lahutatav komponentideks antud kolme mittekoplanaarse vektori sihtidele. (Vektori $\bar{v}$ komponentideks vektorite $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ sihtidel nimetatakse niisuguseid vektoreid $k\bar{a}, l\bar{b}$ ja $m\bar{c}$, mille summa on $\bar{v}$.)

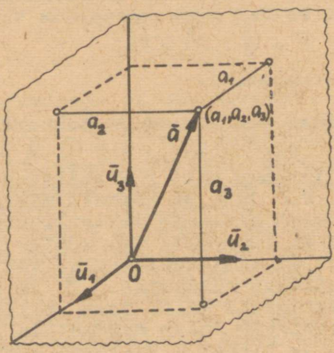
Teoreemi tõestamiseks tuleb moodustada rööptahukas, mille ruumidiagonaal on $\bar{v}$ ja tipust O väljuvad servad asetsevad vektorite $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ sirgetel. Selle rööptahuka servi saab leida järgmiselt: vektori $\bar{a}$ sirget lõigatakse tasapinnaga, mis läbib vektori $\bar{v}$ lõppu ja on paralleelne vektoritega $\bar{b}$ ja $\bar{c}$; saadud lõikepunkti viib vektor $k\bar{a}$. Lõikepunkti olemasolu on tagatud sellega, et vektor $\bar{a}$ ei asetse vektorite $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ tasapinnal. Rööptahuka teised servad, mis väljuvad tipust O, saab leida samal viisil: vektori $\bar{b}$ sirget lõigatakse tasapinnaga, mis läbib vektori $\bar{v}$ lõppu ja on paralleelne vektoritega $\bar{a}$ ja $\bar{c}$, ning vektori $\bar{c}$ sirget lõigatakse tasapinnaga, mis läbib vektori $\bar{v}$ lõppu ja on paralleelne vektoritega $\bar{a}$ ja $\bar{b}$.

Asjaolu, et vektorid $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ja $\bar{v}$ määravad üheainsa rööptahuka, mille kolm serva asetsevad vektorite $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ sirgetel ja mille ruumdiagonaaliks on vektor $\bar{v}$, ilmneb sellest, et rööptahuka kolme tahu tasapindadeks on vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapind, vektorite $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ tasapind ning vektorite $\bar{c}$ ja $\bar{a}$ tasapind, aga ülejäänud kolm tahku asetsevad eelmistega paraleelsetel tasapindadel, mis läbivad vektori $\bar{v}$ lõppu.

Tõestatud teoreemist selgub, et vektorarvutus on kolmemõõtmeline arvutus: iga vektorit on võimalik esitada valitud kolme mittekoplanaarse vektori $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ abil nii, et ta on täielikult määratud kolme arvuga – nende arvudega k, l ja m, mis esinevad tema avaldises $k\bar{a}+l\bar{b}+m\bar{c}$. On arusaadav, et niisugused kolm arvu määravad ühtlasi ruumipunkti, milleni vektor ulatub, ja osutuvad seega ruumipunkti koordinaatideks.

Loomulik on nõuda, et koordinaatidega oleks võimalikult lihtne opereerida; seepärast tuleb valida vektorid $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ otstarbekohaselt.

Kõige vastuvõetavam koordinaadistik ruumi analüütilises geomeetrias on niisugune, milles punkti kolm koordinaati tähendavad punkti kaugusi kolmest üksteisega risti olevast tasapinnast või kauguste vastandarve. Kolme üksteisega risti oleva tasapinna lõikejooned on teatavasti ka üksteisega risti. Nad võetakse koordinaattelgedeks, neile määratakse kindel jär-



Joonis 62

jekord (esimene, teine ja kolmas telg) ja nende suunad valitakse tavaliselt nõnda, et kui esimene telg suundub vaatleja poole ja teine telg suundub vaatleja suhtes vasakult paremale, siis suundub kolmas telg üles (joon.62). Niisugust teljestikku nimetatakse paremakäeliseks teljestikuks. (Kui temas muuta ühe telje suund vastupidiseks või kui kahe telje järjekorranumbrid vahetada teineteisega, siis muutub ta vasakukäeliseks teljestikuks.)

Esimene telg suundub teise ja kolmanda telje tasapinnast sellesse poolruumi, kus on punkti esimene koordinaat positiivne ja võrdub punkti kaugusega sellest tasapinnast, aga teisel pool tasapinda on punkti esimene koordinaat negatiivne, tasapinna ja punkti vahelise kauguse vastandarv. Samal viisil näitab teise telje suund, missuguses poolruumis on punkti teine koordinaat positiivne, ning kolmanda telje suund näitab, kus on kolmas koordinaat positiivne.

Punkti, mille koordinaadid on a_1, a_2 ja a_3, tähistatakse (a_1, a_2, a_3). Kui punkt $(0,0,0)$ võetakse vektorite alguspunktiks ja koordinaattelgede suundade ühikvektorid tähistatakse $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ ja $\bar{u}_3$, siis on punkti (a_1, a_2, a_3) ulatuv vektor (vektorarvutuse peateoreemi järgi) esitatav avaldisena

$$a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3$$

Arvusid a_1, a_2 ja a_3 nimetatakse selle vektori koordinaatideks. Järelikult vektor, mille koordinaadid on a_1, a_2 ja a_3, viib punkti (a_1, a_2, a_3).

Vektorarvutuse peateoreemi põhjal saab öelda, et kui kaks vektorit on teineteisega võrdsed, siis on nende koordinaadid vastavalt võrdsed. Olgu vektori $\bar{r}$ koordinaadid tähistatud x, y ja z, vektori $\bar{a}$ koordinaadid a_1, a_2 ja a_3 ning vektori $\bar{b}$ koordinaadid b_1, b_2 ja b_3; eelmise artikli lõpus saadud sirgjoone võrrand $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$ on siis kirjutatav järgmiselt:

$$x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2 + z\bar{u}_3 = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3 + t(b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2 + b_3\bar{u}_3)$$

ehk $x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2 + z\bar{u}_3 = (a_1 + tb_1)\bar{u}_1 + (a_2 + tb_2)\bar{u}_2 + (a_3 + tb_3)\bar{u}_3$.

Vektorvõrrand $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$ tähendab seega võrrandikolmikut

$$\begin{cases} x = a_1 + tb_1 \\ y = a_2 + tb_2 \\ z = a_3 + tb_3 \end{cases}$$

mida saab parameetri t elimineerimisel kirjutada ka järgmiselt:

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3}$$

3. Vektorite skalaarkorrutis.

Kahe vektori skalaarseks korrutiseks ehk skalaarkorrutiseks nimetatakse vektorite pikkuste ja vektoritevahelise nurga koosinuse korrutist. Vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ skalaarkorrutist tähistatakse $\bar{a}\cdot\bar{b}$; seega definitsiooni järgi

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos\bar{a}\bar{b},$$

milles a on vektori $\bar{a}$ pikkus, b on vektori $\bar{b}$ pikkus ja nurk $\bar{a}\bar{b}$ on mõõdetud vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapinnal vektori a suunast kuni vektori $\bar{b}$ suunani.

Skalaarkorrutise definitsioonis jääb määramata, kummal pool vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapinnast peab asetsema vaatleja, kes mõõdab nurka $\bar{a}\bar{b}$; kerge on veenduda, et kui tasapinnast ühel pool olles saab vaatleja nurga $\bar{a}\bar{b}$ mõõtmistulemuseks φ, siis tasapinnast teisel pool olles saaks ta sama nurga mõõtmistulemuseks $360^\circ - \varphi$. Et aga $\cos(360^\circ - \varphi) = \cos\varphi$, siis osutub $\bar{a}\cdot\bar{b}$ mõlemal juhul üheks ja samaks arvuks $ab\cos\bar{a}\bar{b}$.

Skalaarkorrutisel on järgmised, tema definitsioonist järelduvad omadused:

1) $\bar{b}\cdot\bar{a} = \bar{a}\cdot\bar{b}$ (tegurite kommutatiivsus); põhineb sellel, et nurkade $\bar{a}\bar{b}$ ja $\bar{b}\bar{a}$ summa on 360°, mistõttu $\cos\bar{b}\bar{a} = \cos\bar{a}\bar{b}$.

2) $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$, kui $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ on teineteisega risti (sest siis $\cos\bar{a}\bar{b} = 0$),

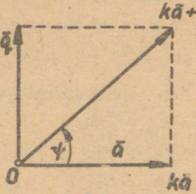
$\bar{a}\cdot\bar{b} > 0$, kui nurk $\bar{a}\bar{b}$ on parempoolsete veerandite nurk,

$\bar{a}\cdot\bar{b} < 0$, kui $\bar{a}\bar{b}$ on vasakpoolsete veerandite nurk (sest siis $\cos\bar{a}\bar{b} < 0$),

$\bar{a}\cdot\bar{0} = 0$, (sest nullvektori pikkus on null).

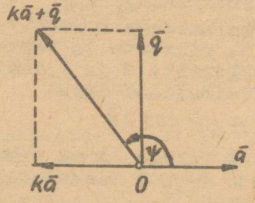
3) $\bar{a}\cdot k\bar{b} = k(\bar{a}\cdot\bar{b})$; põhineb sellel, et positiivse k puhul on vektori $k\bar{b}$ pikkus kb ning nurk vektorite $\bar{a}$ ja $k\bar{b}$ vahel on $\bar{a}\bar{b}$, aga negatiivse k puhul on vektori $k\bar{b}$ pikkus $-kb$ ning nurk $\bar{a}$ ja $k\bar{b}$ vahel erineb nurgast $\bar{a}\bar{b}$ sirgnurga võrra, mistõttu $\cos \bar{a}k\bar{b} = \cos \bar{a}\bar{b}$. Kommutatiivsuse põhjal järeldub, et samuti $k\bar{a}\cdot\bar{b} = k(\bar{a}\cdot\bar{b})$ ning seegaüldse $k\bar{a}\cdot l\bar{b} = kl(\bar{a}\cdot\bar{b})$. Arvesse võttes, et $\bar{a}\cdot\bar{a} = aa\cos 0 = a^2$, saadakse siit erijuhuna $k\bar{a}\cdot l\bar{a} = kla^2$.

4) $\bar{a}\cdot(k\bar{a}+\bar{q}) = ka^2$, kui $\bar{a}$ ja $\bar{q}$ on teineteisega risti. See järeldub asjaolust, et (definitsiooni järgi) $\bar{a}\cdot(k\bar{a}+\bar{q}) = a|k\bar{a}+\bar{q}|\cos\psi$, milles $|k\bar{a}+\bar{q}|$ on vektori $k\bar{a}+\bar{q}$ pikkus ja ψ on vektorite $\bar{a}$ ja $k\bar{a}+\bar{q}$ vaheline nurk, ning et vektorite $\bar{a}$ ja



Joonis 63

$\bar{q}$ ristseisu tõttu on $|k\bar{a}+\bar{q}|\cos\psi$ lihtsalt ka niihästi positiivse k puhul (joon.63) kui negatiivse k puhul (joon.64).



Joonis 64

5) $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ (skalaarkorrutise distributiivsus). Selle tõestamiseks võib vektorid $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ lahutada komponentideks nii, et üks komponent on vektori $\bar{a}$ sihil ja teine on sellega risti: $\bar{b} = k\bar{a}+\bar{p}$ ja $\bar{c} = l\bar{a}+\bar{q}$, milles $\bar{p}$ ja $\bar{q}$ on risti vektoriga $\bar{a}$. Seega $\bar{b}+\bar{c} = (k+l)\bar{a}+(\bar{p}+\bar{q})$ ning selles on samuti $\bar{p}+\bar{q}$ risti vektoriga $\bar{a}$, järelikult

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot[(k+l)\bar{a}+(\bar{p}+\bar{q})] = (k+l)a^2$$

eelmise (neljanda) omaduse tõttu. Kuid sama omaduse tõttu

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot(k\bar{a}+\bar{p}) = ka^2 \text{ ja } \bar{a}\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(l\bar{a}+\bar{q}) = la^2,$$

millest nähtub, et $\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c} = ka^2+la^2 = (k+l)a^2$.

Olgu tähendatud, et neljandast omadusest selgub järgmine, skalaarkorrutist iseloomustav nähtus: kahe vektori skalaarkorrutis ei muutu, kui üht neist vektoritest muudetakse teisega risti oleva vektori võrra. Seepärast osutub vektorite skalaarkorrutise moodustamine niisuguseks tehteks, millel pöördtehet (mingisuguse jagamise näol) ei ole: kui on teada kahe vektori skalaarkorrutis ja üks neist kahest vektorist, siis ei ole sellega veel teine määratud.

Viiendat omadust saab laiendada igasugusele liidetavate arvule, nimelt

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})=\bar{a}\cdot[\bar{b}+(\bar{c}+\bar{d})]=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot(\bar{c}+\bar{d})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{d}$$

ja üldse

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}+\ldots+\bar{h})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}+\ldots+\bar{a}\cdot\bar{h}.$$

Tegurite kommutatiivsuse tõttu laieneb distributiivsus samuti esimesele tegurile. Seega järeldub, et kui esimene tegur koosneb m liidetavast ja teine tegur n liidetavast, siis esineb skalaarkorrutis mn-liikmelise avaldisena.

Skalaarkorrutise omadustest saab teha veel mõned rakendusteks vajalikud järeldused.

J ä r e l d u s 1. Kui mistahes vektorit $\bar{v}$ on vaja lahutada kaheks komponendiks, milledest üks peab asetsema antud vektori $\bar{a}$ sihil ja teine olema sellega risti, siis on seosest $\bar{v}=k\bar{a}+\bar{q}$ võimalik avaldada selleks sobivat skaalarit k. Asjaolu, et $\bar{q}$ on vektoriga $\bar{a}$ risti, võimaldab neljanda omaduse põhjal saada

$$\bar{a}\cdot\bar{v}=ka^2, \qquad k=\frac{\bar{a}\cdot\bar{v}}{a^2}$$

Nii on selgunud, et mistahes vektor $\bar{v}$ lahutub kaheks teineteisega risti olevaks komponendiks, milledest üks on vektori $\bar{a}$ sihil, järgmiselt:

$$\bar{v}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{v}}{a^2}\bar{a}+\left(\bar{v}-\frac{\bar{a}\cdot\bar{v}}{a^2}\bar{a}\right).$$

J ä r e l d u s 2. Kui $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ ja $\bar{u}_3$ on ristkoordinaadistiku telgede ühikvektorid, siis $\bar{u}_1\cdot\bar{u}_1=1$, $\bar{u}_2\cdot\bar{u}_2=1$ ja $\bar{u}_3\cdot\bar{u}_3=1$, kuid $\bar{u}_1\cdot\bar{u}_2=\bar{u}_2\cdot\bar{u}_1=0$, $\bar{u}_1\cdot\bar{u}_3=\bar{u}_3\cdot\bar{u}_1=0$ ja $\bar{u}_2\cdot\bar{u}_3=\bar{u}_3\cdot\bar{u}_2=0$. Skalaarkorrutise distributiivsuse tõttu avaldub siis kahe vektori skalaarkorrutis nende vektorite koordinaatide abil järgmiselt:

$$\begin{aligned}\bar{a}\cdot\bar{b}&=(a_1\bar{u}_1+a_2\bar{u}_2+a_3\bar{u}_3)\cdot(b_1\bar{u}_1+b_2\bar{u}_2+b_3\bar{u}_3)=\\&=a_1b_1\bar{u}_1\cdot\bar{u}_1+a_1b_2\bar{u}_1\cdot\bar{u}_2+a_1b_3\bar{u}_1\cdot\bar{u}_3+\\&\quad+a_2b_1\bar{u}_2\cdot\bar{u}_1+a_2b_2\bar{u}_2\cdot\bar{u}_2+a_2b_3\bar{u}_2\cdot u_3+\\&\quad+a_3b_1\bar{u}_3\cdot\bar{u}_1+a_3b_2\bar{u}_3\cdot\bar{u}_2+a_3b_3\bar{u}_3\cdot\bar{u}_3\end{aligned}$$

ehk

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

J ä r e l d u s 3. Et $\bar{a}\cdot\bar{a}=a^2$, siis eelmise järelduse kohaselt $a^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$, millest $a=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ ehk, täielikumalt kirjutatuna

$$|a_1\bar{u}_1+a_2\bar{u}_2+a_3\bar{u}_3|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

J ä r e l d u s 4. Et $\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos\bar{a}\bar{b}$, siis avaldub $\cos\bar{a}\bar{b}$ vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ koordinaatide abil järgmiselt:

$$\cos\bar{a}\bar{b} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}$$

N ä i d e. Vektorite $4\bar{u}_1 - \bar{u}_2 + \bar{u}_3$ ja $5\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 + 4\bar{u}_3$ vaheline nurk ψ leitakse seose

$$\cos\psi = \frac{4\cdot5 - 1\cdot3 + 1\cdot4}{\sqrt{(16+1+1)(25+9+16)}} = \frac{21}{\sqrt{18\cdot50}} = 0{,}7$$

kaudu. Tabelist on näha, et $\psi = 45^\circ 34'$.

4. Vektoriaalkorrutis.

Vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vektoriaalkorrutiseks nimetatakse vektorit $(ab\sin\bar{a}\bar{b})\bar{n}$, milles $\bar{n}$ on vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapinna normaali ühikvektor ja nurk $\bar{a}\bar{b}$ on mõõdetud oma tasapinnast sealtpoolt, kuhu $\bar{n}$ väljub. Vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vektoriaalkorrutist tähistatakse $\bar{a}\times\bar{b}$. Vektoriaalkorrutise definitsioonis

$$\bar{a}\times\bar{b} = (ab\sin\bar{a}\bar{b})\bar{n}$$

jääb määramata, kummas suunas tuleb võtta vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapinna normaali ühikvektor $\bar{n}$, nõutakse ainult, et nurka $\bar{a}\bar{b}$ peab mõõtma sealtpoolt tasapinda, kuhu väljub $\bar{n}$. Kuid teatavasti kaks vaatlejat, kelledest üks on nurga $\bar{a}\bar{b}$ tasapinnast ühel pool ja teine teisel pool, saavad nurga $\bar{a}\bar{b}$ mõõtmisel erinevaid tulemusi - kui ühel on tulemus φ, siis teisel on $360^\circ - \varphi$. Et $\sin(360^\circ - \varphi) = -\sin\varphi$, siis saab kumbki vaatleja ka erineva skalaarse kordaja $ab\sin\bar{a}\bar{b}$ vektoriaalkorrutise moodustamisel - - ühel on see kordaja $ab\sin\varphi$ ja teisel $-ab\sin\varphi$; kuid ka vektorid $\bar{n}$, mida need vaatlejad kasutama peavad, on teineteise vastandvektorid, järelikult saadakse vektoriaalkorrutisena mõlemal juhul üks ja seesama vektor.

Siit on ühtlasi selge, et vektor $\bar{a}\times\bar{b}$ väljub vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapinnast sellesse poolruumi, kummast on nurk $\bar{a}\bar{b}$ nähtav ülemiste veerandite nurgana.

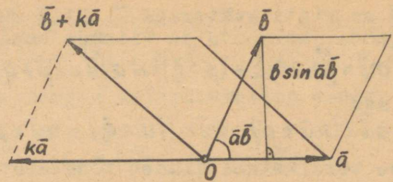
Definitsiooni põhjal on vektoriaalkorrutisel niisugused omadused:

1) $\bar{b}\times\bar{a} = -\bar{a}\times\bar{b}$; tuleneb asjaolust, et $\sin\bar{b}\bar{a} = -\sin\bar{a}\bar{b}$.

2) $\bar{a}\times k\bar{a} = \bar{0}$; nimelt on vektorite $\bar{a}$ ja $k\bar{a}$ vaheline nurk kas null või sirgnurk ning mõlemal juhul osutub nurga siinus nulliks. Ühtlasi selgub, et vektorid $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ teineteisega kolineaarsed ainult siis, kui $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{0}$; nullvektor aga osutub iga vektoriga kolineaarseks, sest alati $\bar{a}\times\bar{0} = \bar{0}$.

3) $\bar{a}\times k\bar{b} = k(\bar{a}\times\bar{b})$; põhineb sellel, et positiivse k puhul on vektori $k\bar{b}$ pikkus kb ning nurk vektorite $\bar{a}$ ja $k\bar{b}$ vahel on $\bar{a}\bar{b}$, kuid negatiivse k puhul on vektori $k\bar{b}$ pikkus $-kb$ ning nurk vektorite $\bar{a}$ ja $k\bar{b}$ vahel erineb nurgast $\bar{a}\bar{b}$ sirgnurga võrra, seega $\sin\bar{a}k\bar{b} = -\sin\bar{a}\bar{b}$. Samal viisil selgub ka, et $m\bar{a}\times\bar{b} = m(\bar{a}\times\bar{b})$.

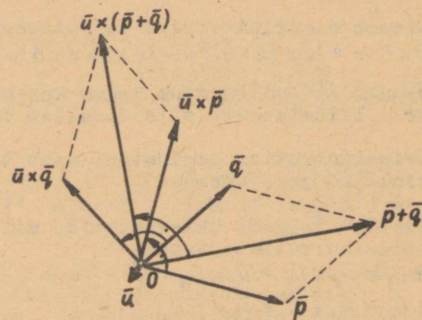
4) $\bar{a}\times(\bar{b} + k\bar{a}) = \bar{a}\times\bar{b}$; see selgub asjaolust, et vektori $\bar{a}\times\bar{b}$ pikkus võrdub vektoritest $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ moodustatud rööpküliku pindalaga ning et see rööpkülik on pindvõrdne vektoritest $\bar{a}$ ja $\bar{b} + k\bar{a}$ moodustatud ristkülikuga (joon.65), kusjuures nurk vek-



Joonis 65

torite $\bar a$ ja $\bar b + k\bar a$ vahel on nähtav ülemiste veerandite nurgana just sellest poolruumist, kuhu suundub $\bar a + \bar b$.

5) $\bar u \times (\bar p + \bar q) = \bar u \times \bar p + \bar u \times \bar q$, kui $\bar u$ on vektorite $\bar p$ ja $\bar q$ tasapinna normaali ühikvektor. Tõestamiseks võib vektorite ja tasapinna võtta joonisepinnaks nii, et $\bar u$ suundub vaatleja poole (joon.66). Teatavasti on $\bar u \times \bar p$ risti vektoriga $\bar u$ ja aset-



Joonis 66

seb seetõttu joonisepinnal; ühtlasi on $\bar u \times \bar p$ risti vektoriga $\bar p$ ja tema pikkus on $1\, p \sin 90^\circ$ ehk lihtsalt p (sest $\bar u$ pikkus on 1 ning vektorid $\bar u$ ja $\bar p$ on teineteisega risti). Järelikult saadakse $\bar u \times \bar p$ sel teel, et vektor $\bar p$ pööratakse joonisepinnal täisnurga võrra. Samuti tekib $\bar u \times \bar q$ vektorist $\bar q$ tema pööramisel täisnurga võrra mööda joonisepinda ning $\bar u \times (\bar p + \bar q)$ saadakse vektori $\bar p + \bar q$ pööramisega joonisepinnal täisnurga võrra. Nüüd ongi selge, et $\bar u \times (\bar p + \bar q)$ tõesti võrdub vektorite $\bar u \times \bar p$ ja $\bar u \times \bar q$ summaga, sest rööpküliku diagonaali pööramisel täisnurga võrra mööda rööpküliku tasapinda saadakse ilmselt sama vektor, mis tekib siis, kui rööpküliku küljed pööratakse täisnurga võrra samapidi samal tasapinnal, ehitatakse seejärel neist uuesti rööpkülik ja võetakse selle diagonaal.

6) $\bar a \times (\bar b + \bar c) = \bar a \times \bar b + \bar a \times \bar c$ (vektoriaalkorrutise distributiivsus). Tõestamiseks olgu vektori $\bar a$ suuna ühikvektor tähistatud $\bar u$ (seega $\bar a = a\bar u$) ning olgu vektorid $\bar b$ ja $\bar c$ lahutatud kumbki kaheks komponendiks nii, et ühed komponendid on vektori $\bar u$ sihil ja teised sellega risti: $\bar b = k\bar u + \bar p$ ja $\bar c = l\bar u + \bar q$;

milles $\bar{p}$ ja $\bar{q}$ on risti vektoriga $\bar{u}$. Siis $\bar{b}+\bar{c}=(k+l)\bar{u}+(\bar{p}+\bar{q})$, mistõttu (neljanda, kolmanda ja viienda omaduse põhjal)

$$\bar{a}\times(\bar{p}+\bar{q})=a\bar{u}\times[(k+l)\bar{u}+(\bar{p}+\bar{q})]=a[\bar{u}\times(\bar{p}+q)]=a\bar{u}\times\bar{p}+a\bar{u}\times\bar{q},$$

teiselt poolt aga

$$\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}=a\bar{u}\times(k\bar{u}+\bar{p})+a\bar{u}\times(l\bar{u}\times\bar{q})=a\bar{u}\times\bar{p}+a\bar{u}\times q.$$

Mõlema tulemuse võrdlemisel ilmneb tõestatava võrduse kehtivus.

Olgu tähendatud, et neljandat omadust võib ka nii sõnastada: kahe vektori vektoriaalkorrutis ei muutu, kui üht neist vektoritest muudetakse teisega kolineaarse vektori võrra. Sellest omadusest järeldub, et kui on teada kahe vektori vektoriaalkorrutis ja on antud üks neist kahest vektorist, siis ei ole sellega teine vektor veel määratud; seepärast ei ole ka vektoriaalsel korrutamisel pöördtehet.

Kuuendat omadust saab laiendada igasugusele liidetavate arvule:

$$\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c}+\ldots+\bar{h})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}+\ldots+\bar{a}\times\bar{h}.$$

Ühtlasi laieneb distributiivsus ka esimesele tegurile:

$$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=-[\bar{c}\times(\bar{a}+\bar{b})]=-(\bar{c}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{b})=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}.$$

Seega järeldub, et kui esimene tegur koosneb liidetavast ja teine tegur liidetavast, siis sisaldab vektoriaalkorrutis liiget.

Vektoriaalkorrutise omadustest saab teha veel mõned rakendusteks vajalikud järeldused.

J ä r e l d u s 1. Kui ja on paremakäelise ristkoordinaadistiku telgede ühikvektorid, siis kehtib neile järgmine vektoriaalkorrutiste tabel:

$$\bar{u}_1\times\bar{u}_1=\bar{u}_2\times\bar{u}_2=\bar{u}_3\times\bar{u}_3=\bar{0}$$
$$\bar{u}_1\times\bar{u}_2=\bar{u}_3,\quad \bar{u}_1\times\bar{u}_3=-\bar{u}_2$$
$$\bar{u}_2\times\bar{u}_1=-\bar{u}_3,\quad \bar{u}_2\times\bar{u}_3=\bar{u}_1$$
$$\bar{u}_3\times\bar{u}_1=\bar{u}_2,\quad \bar{u}_3\times\bar{u}_2=-\bar{u}_1.$$

(Meeldejätmist hõlbustab lihtne juhis: kui tegurite järjekord kuulub ringjärjestusse *123123*, siis osutub vektoriaalkorrutiseks ülejäänud ühikvektor ise; aga kui tegurite järjekord kuulub ringjärjestusse *321321*, siis on vektoriaalkorrutiseks ülejäänud ühikvektori vastandvektor.)

Vektoriaalkorrutise distributiivsuse tõttu saab kahe mistahes vektori vektoriaalkorrutist avaldada koordinaatide abil seega järgmiselt:

$$\begin{aligned}\bar{a}\times\bar{b}&=(a_1\bar{u}_1+a_2\bar{u}_2+a_3\bar{u}_3)\times(b_1\bar{u}_1+b_2\bar{u}_2+b_3\bar{u}_3)=\\&=a_1b_1\bar{u}_1\times\bar{u}_1+a_1b_2\bar{u}_1\times\bar{u}_2+a_1b_3\bar{u}_1\times\bar{u}_3+\\&\quad+a_2b_1\bar{u}_2\times\bar{u}_1+a_2b_2\bar{u}_2\times\bar{u}_2+a_2b_3\bar{u}_2\times\bar{u}_3+\\&\quad+a_3b_1\bar{u}_3\times\bar{u}_1+a_3b_2\bar{u}_3\times u_2+a_3b_3\bar{u}_3\times\bar{u}_3\end{aligned}$$

ehk

$$\bar{a}\times\bar{b} = a_1b_2\bar{u}_3 - a_1b_3\bar{u}_2 - a_2b_1\bar{u}_3 + a_2b_3\bar{u}_1 + a_3b_1\bar{u}_2 - a_3b_2\bar{u}_1 = = (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{u}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\bar{u}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{u}_3\,,$$

mida on kerge meeles pidada determinantide kaudu:

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\bar{u}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\bar{u}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\bar{u}_3 .$$

J ä r e l d u s 2. Avaldis $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ on vektorite $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ koordinaatide abil avaldatav (eelmise artikli järelduse 2 põhjal) seega nii:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\bar{u}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\bar{u}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\bar{u}_3\right)\cdot(c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + c_3\bar{u}_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Samuti selgub, et

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = (a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3)\cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\bar{u}_1 + \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}\bar{u}_2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\bar{u}_3\right) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Et seega $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$, siis võib mõlemat avaldist tähistada lihtsamini $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$. Niisugust avaldist - kahe vektori vektoriaalkorrutise ja kolmanda vektori skalaarkorrutist - - nimetatakse nende kolme vektori ruumkorrutiseks. On kerge veenduda selles, et kolme vektori ruumkorrutis võrdub neile vektoreile ehitatud rööptahuka ruumalaga või selle vastandarvuga: teatavasti $\bar{a}\times\bar{b} = (ab\sin\bar{a}\bar{b})\bar{n}$, milles $\bar{n}$ on vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapinna normaali ühikvektor, ning seega $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = (ab\sin\bar{a}\bar{b})c\cos\bar{n}\bar{c}$; kui $\bar{n}$ on võetud niisuguse suunaga, et $\sin\bar{a}\bar{b} > 0$, siis $ab\sin\bar{a}\bar{b}$ võrdub vektoritele $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ehitatud rööpküliku pindalaga; $c\cos\bar{n}\bar{c}$ on vektori $\bar{c}$ ristprojektsioon sama rööpküliku tasapinna normaalil, järelikult on $c\cos\bar{n}\bar{c}$ vektoritele $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ ehitatud rööptahuka kõrgus või kõrguse vastandarv (vastavalt sellele, kas $\bar{u}$ ja $\bar{c}$ väljuvad vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapinnast ühele ja samale poole või kumbki isepoole). Järelikult $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ võrdub vektoritele $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ ehitatud rööptahuka ruumalaga sel juhul, kui vektori $\bar{c}$ lõpust on nurk $\bar{a}\bar{b}$ nähtav ülemiste veerandite nurgana, vastupidisel juhul aga on $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ negatiivne ja võrdub selle rööptahuka ruumala vastandarvuga.

Kolme vektori ruumkorrutis, olles arvutatav determinandina vektorite koordinaatidest, allub järgmistele, determinandi omadustest tingitud juhistele:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a},$$

milledest kokkuvõtlikult järeldub, et ruumkorrutis ei muutu, kui tegurite järjekorra muutmisel jääb nende ringjärjestus endiseks, kuid tegurite ringjärjestuse muutmisel asendub ruumkorrutis oma vastandarvuga.

Lõpuks olgu tähendatud, et kolm vektorit on koplanaarsed (mahuvad ühele tasapinnale) ainult siis, kui nende ruumkorrutis võrdub nulliga.

J ä r e l d u s 3. Avaldis $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ on vektor, mis asetseb vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapinnal, sest ta on risti selle tasapinna normaali sihilise vektoriga $\bar{a}\times\bar{b}$; järelikult peab $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ avalduma summana $k\bar{a}+m\bar{b}$ sellekohaste skaalarite k ja m abil.

Ei ole raske kontrollida, et need skaalarid on $-\bar{b}\cdot\bar{c}$ ja $\bar{a}\cdot\bar{c}$ ning seega

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - (\bar{b}\cdot\bar{c})\bar{a}.$$

Kontrollimiseks on kohane võtta üksteisega ristiolevad ühikvektorid (ortogonaalne ühikvektorikolmik) $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ ja u_3 nõnda, et $\bar{u}_1$ asetseb vektori $\bar{a}$ sihil ja $\bar{u}_2$ on vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapinnal;

$$\bar{a} = a_1\bar{u}_1 + 0\bar{u}_2 + 0\bar{u}_3, \quad \bar{b} = b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2 + 0\bar{u}_3 \quad \text{ja} \quad \bar{c} = c\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + c_3\bar{u}_3,$$

mistõttu $\bar{a}\times\bar{b} = a_1\bar{u}_1\times(b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2) = a_1 b_2\bar{u}_3$ ning

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = a_1 b_2\bar{u}_3\times(c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + c_3\bar{u}_3) = a_1 b_2 c_1\bar{u}_2 - a_1 b_2 c_2\bar{u}_1.$$

Teiselt poolt aga $\bar{a}\cdot\bar{c} = a_1\bar{u}_1\cdot(c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + c_3\bar{u}_3) = a_1 c_1$ ning $\bar{b}\cdot\bar{c} = b_1 c_1 + b_2 c_2$, järelikult

$$(\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - (\bar{b}\cdot\bar{c})\bar{a} = a_1 c_1(b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2) - (b_1 c_1 + b_2 c_2)a_1\bar{u}_1 = a_1 c_1 b_2\bar{u}_2 - b_2 c_2 a_1\bar{u}_1$$

ja väidetud võrdus on osutunud õigeks.

Sama võrduse põhjal saadakse $\bar{e}\times(\bar{f}\times\bar{g}) = -(\bar{f}\times\bar{g})\times\bar{e} = -[(\bar{f}\cdot\bar{e})g - (\bar{g}\cdot\bar{e})\bar{f}]$ ehk

$$\bar{e}\times(\bar{f}\times\bar{g}) = (\bar{e}\cdot\bar{g})\bar{f} - (\bar{e}\cdot\bar{f})\bar{g}.$$

Valemeid korrutiste $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ ja $\bar{e}\times(f\times\bar{g})$ lihtustamiseks on võimalik kokku võtta ühiseks juhiseks: vektoriaalkorrutise ja mingi vektori vektoriaalsel korrutamisel saadakse otsmiste tegurite skalaarkorrutise kordne keskne tegur miinus keskne ja üksiku teguri skalaarkorrutise kordne ülejäänud tegur.

M ä r k u s. Eelnenust saab järeldada, et vektoriaalkorrutis on ainult üksikutel juhtudel assotsiatiivne, sest $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ asetseb vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ tasapinnal, aga $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ asetseb vektorite $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ tasapinnal. Et lähemalt selgitada, missugustel tingimustel on $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ ja $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ teineteisega võrdsed, selleks tuleb võrrelda nende avaldisi

$$(\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - (\bar{b}\cdot\bar{c})\bar{a} \quad \text{ja} \quad (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}.$$

Need saavad teineteisega võrduda ainult kahel juhul: 1) kui $\bar{b}\cdot\bar{c} = 0 = \bar{a}\cdot\bar{b}$, seega juhul, kui $\bar{b}$ on risti vektoritega $\bar{a}$ ja $\bar{b}$; 2) kui $\bar{a}$ ja $\bar{c}$ on kolineaarsed; sel juhul ei tule vektori $\bar{b}$

kohta mingisuguseid lisatingimusi seada, sest meelevaldse $\bar{b}$ ja mistahes $\bar{c} = k\bar{a}$ puhul $(\bar{b}\cdot\bar{c})\bar{a} = (\bar{b}\cdot k\bar{a})\bar{a} = k(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{a}$ ning samuti $(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c} = (\bar{a}\cdot\bar{b})k\bar{a} = k(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{a}$.

Lõpuks olgu märgitud, et vektorid moodustavad rühma ainult liitmise seisukohalt, kusjuures ühikelemendiks on nullvektor ja iga vektori pöördelemendiks on selle vastandvektor. Skalaarkorrutise ega vektoriaalkorrutise alusel aga vektorid rühma ei moodusta, sest kahe vektori skalaarkorrutis on arv, aga mitte vektor, ning vektoriaalkorrutise jaoks ei leidu ühikelemendi omadusega vektorit (ei ole niisugust vektorit $\bar{a}$, et mistahes $\bar{b}$ puhul $\bar{a}\times\bar{b}$ oleks $\bar{b}$).

Näide. Olgu nõutud arvutada vektoritele $2\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 - 7\bar{u}_3$ ja $3\bar{u}_1 - \bar{u}_1 + 5\bar{u}_3$ ehitatud rööpküliku pindala. Selleks tuleb teatavasti neist vektoritest moodustada vektoriaalkorrutis ja siis leida selle pikkus. Vektoriaalkorrutise koordinaate on kerge arvutada, kui kirjutada antud vektorite koordinaadid üksteise alla:

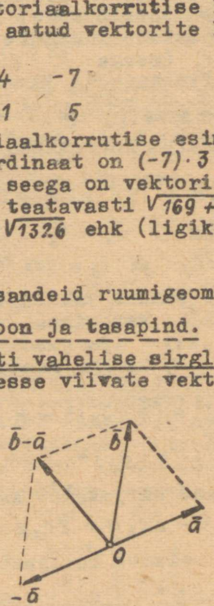
$$\begin{matrix} 2 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 5 \end{matrix}$$

Nüüd on näha, et vektoriaalkorrutise esimene koordinaat on $4\cdot 5 - (-7)\cdot(-1)$, teine koordinaat on $(-7)\cdot 3 - 2\cdot 5$ ja kolmas koordinaat $2\cdot(-1) - 4\cdot 3$; seega on vektoriaalkorrutis $13\bar{u}_1 - 31\bar{u}_2 - 14\bar{u}_3$. Tema pikkus on teatavasti $\sqrt{169 + 961 + 196}$ ehk $\sqrt{1326}$. Nõutud pindala on seega $\sqrt{1326}$ ehk (ligikaudu) $3{,}64$.

§ 20. Põhiülesandeid ruumigeomeetriast.

1. Sirglõik, sirgjoon ja tasapind.

1) Kahe antud punkti vahelise sirglõigu pikkus ja suund leitakse neisse punktidesse viivate vektorite vahe abil (joon. 67).



Joonis 67

Kui antud punktid on (a_1, a_2, a_3) ja (b_1, b_2, b_3) ning neisse viivad vektorid tähistatakse $\bar{a}$ ja $\bar{b}$, nimelt

$$\bar{a} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3, \quad \bar{b} = b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2 + b_3\bar{u}_3$$

siis on vektoril $\bar{b}-\bar{a}$ sama pikkus ja suund. Kui antud punktide vahelisel sirglõigul. (On arusaadav, et vahet $\bar{b}-\bar{a}$ saab moodustada kui vektorite $\bar{b}$ ja $-\bar{a}$ summat; lihtne on ka näha, et vektorite $\bar{b}-\bar{a}$ ja $\bar{a}$ summa on b.) Teatavasti $\bar{b}-\bar{a} = (b_1 - a_1)\bar{u}_1 + (b_2 - a_2)\bar{u}_2 + (b_3 - a_3)\bar{u}_3$, seega avaldub punktide (a_1, a_2, a_3)

ja (b_1, b_2, b_3) vaheline kauguse vektori $\bar{b}-\bar{a}$ pikkusena

$$\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}.$$

Esimesest antud punktist teise suunduval lõigul on vektori $\bar{b}-\bar{a}$ suund. Vektori suund väljendatakse tema suuna ühikvektori koordinaatide abil. Vektori $\bar{b}-\bar{a}$ suuna ühikvektor on teatavasti

$$\frac{(b_1-a_1)\bar{u}_1+(b_2-a_2)\bar{u}_2+(b_3-a_3)\bar{u}_3}{\sqrt{(b_1-a_1)\bar{u}_1+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}}$$

M ä r k u s 1. Suuna ühikvektori koordinaate on vahel nimetatud suunakoosinusteks. Nimetus vihjab sellele, et igaüks neist koordinaatidest osutub antud suuna ja vastava koordinaattelje suuna vahelise nurga koosinuseks. Tõepoolest, kui vektori $\bar{v}$ suuna ühikvektor $\frac{1}{v}\bar{v}$ tähistada lühidalt $\bar{l}$ ning tema koordinaadid vastavalt l_1, l_2 ja l_3 (seega $l_1^2+l_2^2+l_3^2=l^2=1$), siis skalaarkorrutise definitsiooni järgi saadakse

$$\bar{l}\cdot\bar{u}_1=1\cos\bar{l}\bar{u}_1, \quad \bar{l}\cdot\bar{u}_2=1\cos\bar{l}\bar{u}_2 \quad \text{ja} \quad \bar{l}\cdot\bar{u}_3=1\cos\bar{l}\bar{u}_3.$$

Kui nüüd avaldada need skalaarkorrutised koordinaatide abil, siis selgub, et

$$\bar{l}\cdot\bar{u}_1=(l_1\bar{u}_1+l_2\bar{u}_2+l_3\bar{u}_3)\cdot(1\bar{u}_1+0\bar{u}_2+0\bar{u}_3)=l_1$$

ning samuti $\bar{l}\cdot\bar{u}_2=l_2$ ja $\bar{l}\cdot\bar{u}_3=l_3$. Järelikult

$$l_1=\cos\bar{l}\bar{u}_1, \quad l_2=\cos\bar{l}\bar{u}_2 \quad \text{ja} \quad l_3=\cos\bar{l}\bar{u}_3.$$

M ä r k u s 2. Kahe punkti vahelise sirglõigu pikkuse avaldis võimaldab kirjutada kerapinna võrrandi, milles andmeteks on keskpunkt (c_1, c_2, c_3) ja raadius k. Nõue, et kerapinna mistahes punkti (x, y, z) kaugus keskpunktist oleks k, on teatavasti

$$\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2}=k$$

ehk

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2=k^2.$$

Arusaadavalt on see võrrand kirjutatav ka teisiti -

$$x^2+y^2+z^2-2c_1x-2c_2y+2c_3z+m=0,$$

milles ainult vabaliige oleneb raadiusest:

$$m=c_1^2+c_2^2+c_3^2-k^2$$

2) <u>Kaht antud punkti läbiv sirgjoon</u> on paralleelne neisse punktidesse viivate vektorite vahega. Sellest järeldub, et punkte (a_1, a_2, a_3) ja (b_1, b_2, b_3) läbiva sirgjoone võrrand on (§ 19 art.1 ja 2 põhjal) $\bar{r}=\bar{a}+t(\bar{b}-\bar{a})$, mis tähendab süsteemi

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1}=\frac{y-a_2}{b_2-a_2}=\frac{z-a_3}{b_3-a_3}$$

3) <u>Antud punkti läbiv tasapind, mis on risti antud vektoriga</u>, saadakse vektorite ristseisu tingimuse abil järgmiselt. Kui tasapind peab risti olema vektoriga $\bar{a}$ ning läbima punkti, milleni viib vektor $\bar{b}$, siis tasapinna mistahes punktini (x, y, z)

viiv vektor $\bar{r}$ on iseloomustatav sellega, et vektor $\bar{r}-\bar{b}$ peab olema risti vektoriga $\bar{a}$ (sest $\bar{r}-\bar{b}$ on paralleelne vektorite $\bar{b}$ ja $\bar{r}$ lõppe ühendava lõiguga, mis asetseb tasapinnal). See tingimus on teatavasti (§19 art.3 põhjal)

$$\bar{a}\cdot(\bar{r}-\bar{b})=0$$

ehk $a_1(x-b_1)+a_2(y-b_2)+a_3(z-b_3)=0$, mis osutub seega tasapinna võrrandiks. Siit nähtub ühtlasi, et iga lineaarvõrrand

$$a_1x+a_2y+a_3z+k=0$$

esitab tasapinda, mille normaalivektori koordinaadid on a_1, a_2 ja a_3. Niisuguse tulemusega on kooskõlas ka see lihtne asjaolu, et koordinaatpinnad $x=const$ on x-teljega risti, koordinaatpinnad $y=const$ on y-teljega risti ja koordinaatpinnad $z=const$ on z-teljega risti.

4) Antud punkti läbiv tasapind, mis on paralleelne kahe antud sihiga, leitakse vektorite koplanaarsuse tingimuse abil järgmiselt. Kui antud punkti viib vektor $\bar{a}$ ja kaks antud sihti on määratud vektoritega $\bar{b}$ ja $\bar{c}$, siis peab tasapinna mistahes punkti viiv vektor $\bar{r}$ täitma tingimust, et $\bar{r}-\bar{a}$ asetseb vektorite $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ tasapinnal (sest $\bar{r}-\bar{a}$ on paralleelne vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{r}$ lõppe ühendava lõiguga). See tingimus on teatavasti (§ 19 art.4 järeldus 2 põhjal)

$$(\bar{r}-\bar{a})\bar{b}\bar{c}=0 \quad \text{ehk} \quad \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

5) Tasapind, mis läbib antud sirget ja antud punkti, on samuti leitav koplanaarsuse tingimuse abil. Antud sirge olgu $\bar{r}=\bar{a}+t\bar{b}$ ja antud punktini viigu vektor $\bar{c}$. Seda sirget ja punkti läbiv tasapind läbib ühtlasi vektori $\bar{a}$ lõppu ning on paralleelne vektoritega $\bar{b}$ ja $\bar{c}-\bar{a}$ (sest vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{c}$ lõppe ühendav lõik asetseb tasapinnal endal). Järelikult tasapinna võrrand on $(\bar{r}-\bar{a})\bar{b}(\bar{c}-\bar{a})=0$ ehk

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0.$$

6) Kolme antud punkti läbiv tasapind leitakse koplanaarsuse tingimuse abil järgmiselt. Kui punktid on antud neisse viivate vektoritega $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ ning tasapinna mistahes punkti viib vektor $\bar{r}$, siis peavad ilmselt vektorite vahed $\bar{r}-\bar{a}$, $\bar{b}-\bar{a}$ ja $\bar{c}-\bar{a}$ olema ühel tasapinnal; järelikult peab $\bar{r}$ täitma tingimust

$$(\bar{r}-\bar{a})(\bar{b}-\bar{a})(\bar{c}-\bar{a})=0$$

ehk

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0.$$

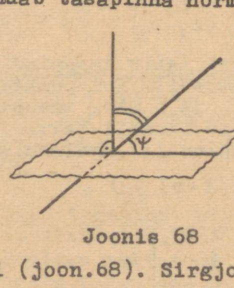
2. Sirgete ja tasapindade vahelised nurgad.

7) Nurk kahe antud sirge vahel defineeritakse ruumigeomeetrias teatavasti nurgana üht mistahes punkti läbivate sirgete vahel, mis on paralleelsed antud sirgetega. Antud sirgetega
$$\frac{x-a_1}{b_1}=\frac{y-a_2}{b_2}=\frac{z-a_3}{b_3} \quad ja \quad \frac{x-c_1}{d_1}=\frac{y-c_2}{d_2}=\frac{z-c_3}{d_3}$$
paralleelsed vektorid on $b_1\bar{u}_1+b_2\bar{u}_2+b_3\bar{u}_3$ ja $d_1\bar{u}_1+d_2\bar{u}_2+d_3\bar{u}_3$. Ruumigeomeetrias kasutatakse sirgetevahelise ψ nurgana tavaliselt esimese veerandi nurki; nii on ψ kas nurk $\widehat{\bar{b}\bar{d}}$ ise või tema kõrvunurk (või erineb neist sirgnurga võrra). Seega (§ 19 art.3 järelduse 4 põhjal)
$$\cos\psi=\frac{|b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3|}{\sqrt{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(d_1^2+d_2^2+d_3^2)}}$$
Sirgete ristseisu juhul on ψ täisnurk; siit ilmneb, et sirgete ristseisu tingimus on $b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3=0$.

Sirgete paralleelsuse puhul on sirgetesihilised vekrotid teineteisega kolineaarsed. Sirgete paralleelsuse tingimus on seega
$$\frac{b_1}{d_1}=\frac{b_2}{d_2}=\frac{b_3}{c_3}.$$

8) Nurk kahe tasapinna vahel leitakse nurgana tasapindade normaalide vahel. Tasapindade $a_1x+a_2y+a_3z+k=0$ ja $b_1x+b_2y+b_3z+l=0$ normaalivektorid on teatavasti $\bar{a}$ ja $\bar{b}$. Järelikult tasapindadevaheline nurk ψ (mida võetakse samuti nullist täisnurgani) on leitav järgmise valemi abil:
$$\cos\psi=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}}$$
Tasapinnad on teineteisega risti siis, kui nende normaalivektorid on teineteisega risti, ja tasapindade paralleelsuse juhul on nende normaalivektorid kolineaarsed. Tasapindade ristseisu tingimus on seega
$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$
ning paralleelsuse tingimus
$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

9) Nurk sirge ja tasapinna vahel ehk sirgjoone kaldenurk tasapinna suhtes täiendab tasapinna normaali ja sirgjoone vahelist nurka täisnurgani (joon.68). Sirgjoone



Joonis 68

$$\frac{x-a_1}{b_1}=\frac{y-a_2}{b_2}=\frac{z-a_3}{b_3}$$

ja tasapinna $c_1x+c_2y+c_3z+k=0$ vahelist nurka ψ saab leida nurga $\bar{b}\bar{c}$ kaudu, kasutades seost $\sin\psi=|\cos\bar{b}\bar{c}|$. Järelikult

$$\sin\psi=\frac{|b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3|}{\sqrt{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)}}$$

Sirgjoon on tasapinnaga risti, kui ta on tasapinna normaalivektoriga paralleelne; sirgjoon on tasapinnaga paralleelne (või asetseb tasapinnal), kui ta on tasapinna normaalivektoriga risti. Seega osutub sirgjoone ja tasapinna ristseisu tingimuseks

$$\frac{b_1}{c_1}=\frac{b_2}{c_2}=\frac{b_3}{c_3}$$

ja paralleelsuse tingimuseks

$$b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0.$$

M ä r k u s. Sirgjoone võrrandid

$$\frac{x-a_1}{b_1}=\frac{y-a_2}{b_2}=\frac{z-a_3}{b_3}$$

tähendavad ilmselt süsteemi kolmest lineaarvõrrandist

$$\begin{cases}\dfrac{x-a_1}{b_1}=\dfrac{y-a_2}{b_2}\\[2mm] \dfrac{x-a_1}{b_1}=\dfrac{z-a_3}{b_3}\\[2mm] \dfrac{y-a_2}{b_2}=\dfrac{z-a_3}{b_3}\end{cases}\quad\text{ehk}\quad\begin{cases}b_2(x-a_1)-b_1(y-a_2)=0\\ b_3(x-a_1)-b_1(z-a_3)=0\\ b_3(y-a_2)-b_2(z-a_3)=0\end{cases}$$

Need võrrandid esitavad kolme tasapinda, mis sirget läbivad; esimene neist tasapindadest on paralleelne z-teljega, teine on paralleelne y-teljega ja kolmas paralleelne x-teljega. Neist kolmest tasapinnast osutuvad kaks teineteisega ühtivateks sel juhul, kui sirge on ühe koordinaatteljega risti, sest siis võrdub üks arvudest b_1, b_2 ja b_3 nulliga. Kolme tasapinna hulgast langeb üks tasapind ära sel juhul, kui sirge on kahe koordinaatteljega risti (järelikult paralleelne ülejäänud teljega), sest siis on arvudest b_1, b_2 ja b_3 ainult üks nullist erinev.

Niisugustel juhtudel, kui üks arvudest b_1, b_2 ja b_3 on null või kui kaks neist on nullid, oleks mõttetu kirjutada

$$\frac{x-a_1}{b_1}=\frac{y-a_2}{b_2}=\frac{z-a_3}{b_3},$$

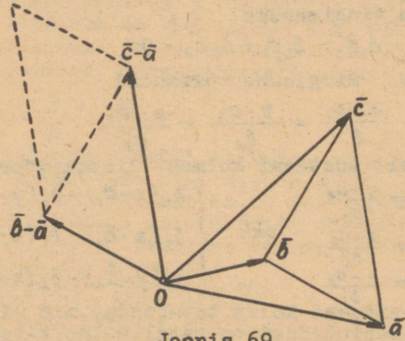
sest ühe või kahe nimetajana esineks null. Kuid ruumigeomeetria ülesannete lahendamisel võib niisugust mõttetust kirjutada ja kasutada, ilma et tulemused seetõttu kehtivust kaotaksid. Sest kui ruumigeomeetria ülesandeid lahendatakse vektorarvutuse abil, siis kasutatakse sirgjoone määramisandmetena vektorit $a_1\bar{u}_1+a_2\bar{u}_2+a_3\bar{u}_3$, mis viib sirgjoonel olevasse punkti, ja vektorit $b_1\bar{u}_1+b_2\bar{u}_2+b_3\bar{u}_3$, mis on sirgjoonega paralleelne, ega tehta mingisuguseid kitsendusi selle kohta, kuidas need vektorid koordinaattelgede suhtes asetsevad. Järelikult osutub ka ülalnimetatud mõttetu kirjutusviis kasutamiskõlbulikuks, võimaldades vajalike vektorite koordinaate õigesti arvesse võtta. Nii võib täiesti lubatavaks tunnistada seda, et ülesannete lahendamisel esineb x-telje võrranditena mõttetus

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$$

kuid lahendamistulemustes peab muidugi x-telge esitama kas võrrandipaar $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ või vektorvõrrand $\bar{r}=t\bar{u}_1$.

3. Pindala ja ruumala.

10) Antud tippudega kolmnurga pindala leitakse vektoriaalkorrutise abil. Kui antud tippudesse viivad vektorid $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$, siis osutub vektoritele $\bar{b}-\bar{a}$ ja $\bar{c}-\bar{a}$ ehitatud rööpküliku pindala kaks korda suuremaks kui kolmnurga pindala (joon.69).



Joonis 69

Seega (§ 19 art.4 põhjal) on kolmnurga pindala $\frac{1}{2}|(\bar{b}-a)\times(\bar{c}-\bar{a})|$ ehk

$$\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_3-a_3 & b_1-a_1 \\ c_3-a_3 & c_1-a_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix}^2}$$

11) Antud tippudega nelitahu ruumala leitakse vektorite ruumikorrutise abil. Kui tippudesse viivad vektorid $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ja $\bar{d}$, siis osutub vektoritele $\bar{b}-\bar{a}$, $\bar{c}-\bar{a}$ ja $\bar{d}-\bar{a}$ ehitatud rööptahuka ruumala kuus korda suuremaks antud nelitahu ruumalast, sest nelitahk on kolmnurkne püramiid, mille põhja pindala on pool rööptahuka põhja pindalast ning kõrgus on võrdne rööptahuka kõrgusega. (Teatavasti on püramiidi ruumala tema põhja pindala ja kolmandiku kõrguse korrutis, rööptahuka ruumala aga on kaks korda suurema põhja ja terve kõrguse korrutis, seega tõepoolest 6 korda suurem.) Järelikult (§ 19 art.4 järelduse 2 põhjal) on nelitahu ruumala $\frac{1}{6}|(\bar{b}-\bar{a})(\bar{c}-\bar{a})(\bar{d}-\bar{a})|$ ehk

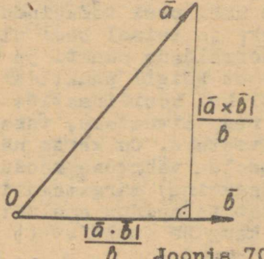
$$\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}\right|.$$

Et iga tasapinnalist hulknurka saab tükeldada kolmnurkadeks ja iga hulktahku saab tükeldada nelitahkudeks, siis on kolmnurkade pindala ja hulktahkude ruumala võimalik arvutada kolmnurksete ja nelitahksete osade viisi.

4. Kaugused.

Ülesanded kauguse kohta ruumis lahenduvad kergesti, kui on teada vastused järgmistele küsimustele kahe antud vektori kohta: 1) kui pikk on vektori $\bar{a}$ ristprojektsioon vektori $\bar{b}$ sirgel ja 2) kui kaugel vektori $\bar{b}$ sirgest asetseb vektori $\bar{a}$ lõpp ? Esimesele küsimusele saab lihtsa vastuse vektorite skalaarkorrutise abil ja teisele küsimusele vektoriaalkorrutise abil.

Vektori $\bar{a}$ ristprojektsioon vektori $\bar{b}$ sirgel (joon.70) on teatavasti $a \cos \bar{a}\bar{b}$, selle pikkus on järelikult $a|\cos \bar{a}\bar{b}|$. Et



Joonis 70

$\bar{a}\cdot\bar{b} = ab \cos \bar{a}\bar{b}$, siis $ab|\cos \bar{a}\bar{b}| = |\bar{a}\cdot\bar{b}|$. Nii osutub küsitud pikkuseks lihtsalt

$$\frac{|\bar{a}\cdot\bar{b}|}{b} \quad ehk \quad \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Vektori $\bar{a}$ lõpp asetseb vektori $\bar{b}$ sirgest (joon.70) kaugusel $b|\sin \bar{a}\bar{b}|$. Et $\bar{a}\times\bar{b}$ on vektor, mille pikkus $|\bar{a}\times\bar{b}|$ on teatavasti $ab|\sin \bar{a}\bar{b}|$, siis asetseb vektori $\bar{a}$ lõpp vektori $\bar{b}$ sirgest kaugusel*

$$\frac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{b} \quad ehk \quad \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

12) Punkti kaugus tasapinnast leitakse sel teel, et punktist võetakse tasapinnani mingi sirglõik ja vaadatakse, kui pikk on selle sirglõigu ristprojektsioon tasapinna normaalil.

Antud punkti viiv vektor olgu $\bar{a}$ ja antud tasapinna võrrand olgu $\bar{b}\cdot\bar{r} + k = 0$. Kui sellel tasapinnal võetakse vabalt mingi punkt, sellesse viigu vektor $\bar{c}$, siis rahuldab tasapinna võrrandit, seega $\bar{b}\cdot\bar{c} + k = 0$,millest $k = -\bar{b}\cdot\bar{c}$. Vektorite $\bar{c}$ ja

---

* Seda arutelu võib meelde jätta ka geomeetriliselt: rööpküliku kõrguse leidmiseks tuleb rööpküliku pindala jagada aluse pikkusega.

$\bar{a}$ lõppe ühendav lõik aga ulatub antud punktist antud tasapinnani, selle lõigu ristprojektsioon tasapinna normaalil on järelikult niisama pikk kui vektori $\bar{a}-\bar{c}$ ristprojektsioon tasapinna normaalivektori $\bar{b}$ sirgel. See pikkus on (artikli alguses saadud tulemuse põhjal)

$$\frac{|(\bar{a}-\bar{c})\cdot\bar{b}|}{b} \quad \text{ehk} \quad \frac{|\bar{a}\cdot\bar{b}-\bar{c}\cdot\bar{b}|}{b}, \text{ seega lihtsalt } \frac{|\bar{b}\cdot\bar{a}+k|}{b}.$$

Järelikult asetseb punkt (a_1, a_2, a_3) tasapinnast $b_1x+b_2y+b_3z+k=0$ kaugusel

$$\frac{|b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3+k|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Avaldis $b_1x+b_2y+b_3z+k$, mis esineb tasapinna võrrandi vasaku poolena, osutub ühel pool tasapinda olevate punktide (x, y, z) puhul positiivseks ja teisel pool olevate puhul negatiivseks. See võimaldab korraldada punkti ja tasapinna vahelise kauguse arvutamist nõnda, et kõigil punktidel, mis asetsevad antud tasapinnast samal pool kui koordinaatide alguspunkt, osutuvad kaugused tasapinnast negatiivseteks, tasapinna taga olevatel punktidel aga positiivseteks. On kerge näha, et selleks on vaja kauguse avaldises absoluutväärtuse moodustamise asemel sooritada korrutamine (või jagamine) märgiteguriga $-sg\,k$. Nii saadakse tulemus, mis meenutab tasapinna analüütilises geomeetrias punkti ja sirge vahelise kauguse avaldist (§ 8 art.1), nimelt:

punkti (X, Y, Z) kaugus tasapinnast $b_1x+b_2y+b_3z+k=0$

on $\dfrac{b_1X+b_2Y+b_3Z+k}{-(sg\,k)\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ ning see osutub siis negatiivseks,

kui punkt (X, Y, Z) on tasapinnast samal pool kui koordinaatide alguspunkt.

(Kui $k=0$, siis jääb tegur $-sg\,k$ ära ning võib vabalt valida, kummale poole lugeda kaugusi positiivseteks.)

13) Punkti kaugus sirgest leitakse rööpküliku kõrgusena tema pindala ja aluse järgi. Antud sirge olgu $\bar{r}=\bar{a}+t\bar{b}$ ja antud punkti viigu vektor $\bar{c}$; siis võrdub punkti ja sirge vaheline kaugus vektori $\bar{c}-\bar{a}$ lõpu kaugusega vektori $\bar{b}$ sirgest, olles teatavasti $\dfrac{|(\bar{c}-\bar{a})\times\bar{b}|}{b}$.

Siit nähtub, et punkti (c_1, c_2, c_3) kaugus sirgest $\dfrac{x-a_1}{b_1}=\dfrac{y-a_2}{b_2}=\dfrac{z-a_3}{b_3}$ on

$$\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} c_3-a_3 & c_1-a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} c_1-a_1 & c_2-a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

14) Sirgetevaheline kaugus leitakse sel teel, et kummalgi sirgel võetakse mingi punkt ja tehakse kindlaks, kui pikk on nende punktide vahelise sirglõigu ristprojektsioon mõlema sirgega risti oleval sihil. Antud sirged olgu

$$\frac{x-a_1}{b_1}=\frac{y-a_2}{b_2}=\frac{z-a_3}{b_3} \quad \text{ja} \quad \frac{x-c_1}{d_1}=\frac{y-c_2}{d_2}=\frac{z-c_3}{d_3}.$$

Punkt (a_1, a_2, a_3) asetseb ühel sirgel ja punkt (c_1, c_2, c_3) teisel sirgel; et üks sirge on paralleelne vektoriga $\bar{b}$ ja teine vektoriga $\bar{d}$, siis on $\bar{b}\times\bar{d}$ mõlema sirgega risti. Sirgetevahelise kauguse leidmiseks tuleb seega moodustada punktide (a_1, a_2, a_3) ja (c_1, c_2, c_3) vahelise lõigu ristprojektsioon vektori $\bar{b}\times\bar{d}$ sihil ning arvutada selle pikkus. Niisama pikk on teatavasti vektori $\bar{c}-\bar{a}$ ristprojektsioon vektori $\bar{b}\times\bar{d}$ sirgel. Antud sirgete vaheline kaugus on järelikult

$$\frac{|(\bar{c}-\bar{a})\cdot(\bar{b}\times\bar{d})|}{|\bar{b}\times\bar{d}|} \text{ ehk } \frac{|(\bar{c}-\bar{a})\bar{b}\bar{d}|}{|\bar{b}\times\bar{d}|} \text{ ehk } \frac{\left\|\begin{matrix} c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ d_3 & d_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Miks võib sirgetevahelise kauguse leidmiseks kasutada mistahes punkte kummaltki sirgelt ja miks niisuguste punktide vahelise sirglõigu ristprojektsioon mõlema sirgega risti oleval sihil alati esitab oma pikkusega sirgetevahelist kaugust – neid küsimusi võib selgitada järgmiselt. Läbi ühe sirge saab võtta tasapinna, mis on paralleelne teise sirgega, ja läbi teise sirge saab võtta tasapinna, mis on paralleelne esimese sirgega : need tasapinnad on teineteisega paralleelsed ja lõigates oma normaali eraldavad sellest lõigu, mille pikkus võrdub sirgetevahelise kaugusega. Niisuguse lõigu üks otspunkt osutub ühe sirge kõigi punktide ristprojektsioonike sellel normaalil, teine otspunkt aga teise sirge kõigi punktide ristprojektsioonike samal normaalil.

Antud sirged lõikuvad tingimusel, et $(\bar{c}-\bar{a})\bar{b}\bar{d}=0$ ja $\bar{b}\times\bar{d}\neq\bar{0}$; nimelt siis osutub nendevaheline kaugus nulliks. Sirgete paralleelsuse juhul on vektorid $\bar{b}$ ja $\bar{d}$ teineteisega kolineaarsed, seega $\bar{b}\times\bar{d}=\bar{0}$ ja ühtlasi $(\bar{c}-\bar{a})\bar{b}\bar{d}=0$; sirgetevaheline kaugus leitakse sel juhul ühe sirgjoone mistahes punkti kaugusena teisest sirgest.

5. Lõikumisülesandeid.

15) Sirgjoone ja tasapinna lõikepunkt leitakse niisuguse punktina, mille koordinaadikolmik rahuldab sirgjoone ja tasapinna võrrandit. Olgu sirgjoone võrrand $\bar{r}=\bar{a}+t\bar{b}$ ja tasapinna võrrand on $\bar{c}\cdot\bar{r}+k=0$; lõikepunktile vastav parameetri t väärtus saadakse mõlema võrrandi järeldusest $\bar{c}\cdot(\bar{a}+t\bar{b})+k=0$ ehk $\bar{c}\cdot\bar{a}+(\bar{c}\cdot\bar{b})t+k=0$, nimelt

$$t=-\frac{\bar{c}\cdot\bar{a}+k}{\bar{c}\cdot\bar{b}};$$

lõikepunkti viiv vektor on seega

$$\bar{a}-\frac{\bar{c}\cdot\bar{a}+k}{\bar{c}\cdot\bar{b}}\bar{b}.$$

Tulemust saab kirjutada ilma vektorite tähisteta:

sirgjoone $\frac{x-a_1}{b_1}=\frac{y-a_2}{b_2}=\frac{z-a_3}{b_3}$ ja tasapinna $c_1x+c_2y+c_3z+k=0$ lõikepunkt on

$$\left(a_1 - \frac{c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3+k}{c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3}b_1,\ a_2-\frac{c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3+k}{c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3}b_2,\ a_3-\frac{c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3+k}{c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3}b_3\right).$$

Sirgjoon ei lõika tasapinda, kui $\bar{c}\cdot\bar{b}=0$, sest sel juhul on ta tasapinna normaalivektoriga risti, asetsedes kas tasapinnal või tasapinnaga paralleelselt. Kumma variandiga on tegemist, seda saab otsustada sirgjoone punkti (a_1, a_2, a_3) abil: kui sirge asetseb tasapinnal, siis on ka see punkt tasapinnal, mistõttu $\bar{c}\cdot\bar{a}+k=0$; kui sirge on tasapinnaga paralleelne, siis see punkt ei asetse tasapinnal, seega $\bar{c}\cdot\bar{a}+k\neq 0$.

16) <u>Punkti ristprojektsioon sirgjoonel</u> leitakse punktina, kus sirge lõikab oma risttasapinda, mis läbib antud punkti. Olgu antud punkt (a_1, a_2, a_3) ja antud sirgjoon $\bar{r}=\bar{b}+t\bar{c}$; sirgjoone risttasapind, mis läbib antud punkti, on seega $\bar{c}\cdot(\bar{r}-\bar{a})=0$. Nii saadakse parameetri t väärtuse leidmiseks tingimus $\bar{c}\cdot(\bar{b}+t\bar{c}-\bar{a})=0$ ehk $c^2t=\bar{c}\cdot(\bar{a}-\bar{b})$, millest $t=\frac{\bar{c}\cdot(\bar{a}-\bar{b})}{c^2}$. Punkti (a_1, a_2, a_3) ristprojektsioonini sirgel $\bar{r}=\bar{b}+t\bar{c}$ viib järelikult vektor

$$\bar{b}+\frac{\bar{c}\cdot(\bar{a}-\bar{b})}{c^2}\bar{c}.$$

17) <u>Kolme tasapinna lõikepunkt</u> leitakse tasapindade võranditest koosneva võrrandisüsteemi lahendamise teel ja lahendiks on lõikepunkti koordinaadikolmik.

Teatavasti avaldub võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z=g \\ b_1x+b_2y+b_3z=h \\ c_1x+c_2y+c_3z=k \end{cases}$$

lahend Crameri reegli järgi:*

$$\begin{cases} x=\dfrac{g\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix}+h\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ a_2 & a_3\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3\end{vmatrix}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \\[2ex] y=\dfrac{g\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1\end{vmatrix}+h\begin{vmatrix} c_3 & c_1 \\ a_3 & a_1\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1\end{vmatrix}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \\[2ex] z=\dfrac{g\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix}+h\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \end{cases}.$$

Neist avaldistest on näha, et tasapindade lõikepunkti viib vektor

$$\frac{g}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\,\bar{b}\times\bar{c}+\frac{h}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\,\bar{c}\times\bar{a}+\frac{k}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\,\bar{a}\times\bar{b}.$$

Samale tulemusele võib jõuda otse vektorarvutuse võtetega,

---

* Võrrandisüsteemi kordajaist koosnev determinant on (§ 19 art. 4 järelduse 2 põhjal) tasapindade normaalivektorite ruumkorrutis

lahendades niisuguse ülesande: lahutada vektor $\bar{r}$ komponentideks vektorite $\bar{a}\times\bar{b}$, $\bar{b}\times\bar{c}$ ja $\bar{c}\times\bar{a}$ sihtidele. Nii nõutakse leida skaalarid l, m ja n, mis vastaksid tingimusele

$$\bar{r} = l(\bar{a}\times\bar{b}) + m(\bar{b}\times c) + n(\bar{c}\times\bar{a}).$$

Skaalar l on siit leitav sel teel, et võrduse mõlemat poolt korrutatakse skalaarselt vektoriga $\bar{c}$; saadakse $\bar{c}\cdot\bar{r} = l(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ ja selle järelduseks

$$l = \frac{\bar{c}\cdot\bar{r}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}.$$

Samast tingimusest selgub (kui korrutada skalaarselt kord vektoriga $\bar{a}$, kord vektoriga $\bar{b}$), et

$$m = \frac{\bar{a}\cdot\bar{r}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \quad \text{ja} \quad n = \frac{\bar{b}\cdot\bar{r}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}.$$

Järelikult avaldub $\bar{r}$ nõutud komponentideks lahutatuna nii:

$$\bar{r} = \frac{\bar{c}\cdot\bar{r}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\,\bar{a}\times\bar{b} + \frac{\bar{a}\cdot\bar{r}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\,\bar{b}\times\bar{c} + \frac{\bar{b}\cdot\bar{r}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\,\bar{c}\times\bar{a}.$$

Siit on näha, et kui otsitavast vektorist $\bar{r}$ on teada kolme skalaarkorrutise väärtused:

$$\bar{a}\cdot\bar{r} = g, \qquad \bar{b}\cdot\bar{r} = h \qquad \text{ja} \qquad \bar{c}\cdot\bar{r} = k,$$

ning seejuures vektorid $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ ei ole koplanaarsed, siis saab otsitavat $\bar{r}$ avaldada, nimelt

$$\bar{r} = \frac{g}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\,\bar{b}\times\bar{c} + \frac{h}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\,\bar{c}\times\bar{a} + \frac{k}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\,\bar{a}\times\bar{b}.$$

Nii osutub kolme tasapinna lõikepunkti leidmise ülesanne lahendatuks.

Olgu lõpuks märgitud, et kui $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$, aga $\bar{a}\times\bar{b}\neq\bar{0}$, siis tasapinnad $\bar{a}\cdot\bar{r}=g$ ja $\bar{b}\cdot\bar{r}=h$ lõikuvad, kuid nende lõikejoon ei lõika tasapinda $\bar{c}\cdot\bar{r}=k$. Kui seevastu $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$ ja ka $\bar{b}\times c=\bar{0}$ siis on vektorid $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$ üksteisega kolineaarsed, järelikult tasapinnad on üksteisega paralleelsed (erijuhul võivad aga ühtida kas kaks neist või kõik kolm).

18) Kahe tasapinna lõikejoon on risti tasapindade normaalidega. Peale sihi on vaja lõikejoone määramiseks üht punkti. Konkreetsetel juhtudel on kohane võtta see punkt ühel koordinaatpinnal (kas pinnal $x=0$ või pinnal $y=0$ või $z=0$). Kuid ülesande täiesti üldisel teoreetilisel lahendamisel nii toimida ei või, sest antud kahe tasapinna lõikejoon saab erijuhul osutuda ühtede või isegi kahtede koordinaatpindadega paralleelseks. Alati aga lõikab antud tasapindade lõikejoon oma risttasapinda, mis läbib koordinaatide alguspunkti; seda asjaolu saab kasutada ülesande lahendamisel tema üldkujus.

Olgu antud tasapinnad $\bar{a}\cdot\bar{r}+l=0$ ja $\bar{b}\cdot\bar{r}+m=0$. Tasapindade lõikejoone sihi määrab $\bar{a}\times\bar{b}$; lõikejoone üks punkt leitakse tasapindade $\bar{a}\cdot\bar{r}+l=0$, $\bar{b}\cdot\bar{r}+m=0$ ja $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{r}=0$ lõikepunktina – sinna viib teatavasti (eelmise ülesande tulemuste põhjal) vektor

$$\frac{-l}{\bar a\bar b(\bar a\times\bar b)}\,\bar b\times(\bar a\times\bar b)+\frac{-m}{\bar a\bar b(\bar a\times\bar b)}(\bar a\times\bar b)\times\bar a \quad \text{ehk} \quad \frac{(m\bar a-l\bar b)\times(\bar a\times\bar b)}{(\bar a\times\bar b)\cdot(\bar a\times\bar b)}.$$

Järelikult esitab antud tasapindade lõikejoont võrrand

$$\bar r=\frac{(m\bar a-l\bar b)\times(\bar a\times\bar b)}{|\bar a\times\bar b|^2}+t(\bar a\times\bar b).$$

19) Sirgjoone ristprojektsioon tasapinnal tekib tasapinna lõikumisel tema risttasapinnaga, mis läbib sirget. Kui sirgjoone võrrand on $\bar r=\bar a+t\bar b$ ja tasapinna võrrand $\bar c\cdot\bar r+k=0$, siis risttasapind, mis läbib sirget, on (neljanda ülesande järgi) $\bar b\bar c(\bar r-\bar a)=0$, tema normaalivektor on seega $\bar b\times\bar c$. Tasapindade lõikejoon teatavasti on tasapindade normaalidega risti, järelikult paralleelne vektoriga $(\bar b\times\bar c)\times\bar c$. Peale sihi on vaja teada lõikejoonest üht punkti; eriti sobib niisuguseks punktiks vektori $\bar a$ lõpu ristprojektsioon antud tasapinnal. Vektori $\bar a$ lõppu läbib antud tasapinna normaal $\bar r=\bar a+t\bar c$ ja see lõikab tasapinda seal, kuhu viib (15. ülesande järgi) vektor

$$\bar a-\frac{\bar c\cdot\bar a+k}{c^2}\,\bar c.$$

Nii esitab sirgjoone $\bar r=\bar a+t\bar b$ ristprojektsiooni tasapinnal $\bar c\cdot\bar r+k=0$ võrrand

$$\bar r=\bar a-\frac{\bar c\cdot\bar a+k}{c^2}\,\bar c+t(\bar b\times\bar c)\times\bar c.$$

Kui sirge on tasapinnaga risti, siis $\bar b\times\bar c=\bar 0$ ja sirgjoone ristprojektsiooniks tasapinnal osutub üksainus punkt – ilmselt see, millesse viib vektor

$$\bar a-\frac{\bar c\cdot\bar a+k}{c^2}\,\bar c.$$

20) Sirgjoon, mis on kahe antud sirgega risti ja lõikab mõlemat, (kiivsirgete ristlõikaja) leitakse järgmiselt. Antud sirgete $\bar r=\bar a+t\bar b$ ja $\bar r=\bar c+t\bar d$ ühine ristsirge on teatavasti paralleelne vektoriga $\bar b\times\bar d$. Et leida otsitaval ristlõikajal üks punkt, võetakse läbi ühe antud sirgjoone abitasapind, mis on paralleelne vektoriga $\bar b\times\bar d$ ning seetõttu sisaldab otsitavat sirget), ja lõigatakse seda abitasapind teise antud sirgega. Abitasapinna võrrand on (neljanda ülesande järgi) $\bar b(\bar b\times\bar d)(\bar r-\bar a)=0$; lõikumist sirgega $\bar r=\bar c+t\bar d$ määrab niisugune parameetri t väärtus, mis rahuldab tingimust $\bar b(\bar b\times\bar d)(\bar c+t\bar d-\bar a)=0$ ehk $[\bar b(\bar b\times\bar d)\bar d]t+\bar b(\bar b\times\bar d)(\bar c-\bar a)=0$. Siit

$$t=\frac{\bar b(\bar b\times\bar d)(\bar c-\bar a)}{-\bar b(\bar b\times\bar d)\bar d}=\frac{\bar b(\bar b\times\bar d)(\bar c-\bar a)}{(\bar b\times\bar d)\cdot(\bar b\times\bar d)},$$

järelikult viib abitasapinna ja teise antud sirgjoone lõikepunktini vektor

$$\bar{c} + \frac{\bar{b}(\bar{b}\times\bar{d})(\bar{c}-\bar{a})}{|\bar{b}\times\bar{d}|^2}\,\bar{d}$$

ning antud sirgete ristlõikajat esitab võrrand

$$\bar{r} = \bar{c} + \frac{\bar{b}(\bar{b}\times\bar{d})(\bar{c}-\bar{a})}{|\bar{b}\times\bar{d}|^2}\,\bar{d} + t(\bar{b}\times\bar{d}).$$

§ 21. Pöördpinnad ja teist järku pinnad.

1. Pöördpinna saamine telje ja meridiaani abil.

Kui ruumipunkt $(0, g, h)$ pannakse tiirlema ümber z-telje nii, et tema kaugus z-teljest on püsivalt g ja kaugus xy-tasapinnast (või kauguse vastandarv) on püsivalt h, siis moodustab punkt oma liikumisel ringjoone, mis asetseb tasapinnal $z = h$ Selle ringjoone jooksev punkt (x, y, h) allub arusaadavalt tingimusele $x^2 + y^2 = g^2$. Tekkivat ringjoont esitab seega võrrandipaar

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = g^2 \\ z = h. \end{cases}$$

Võrrand $x^2 + y^2 = g^2$ üksinda esitaks ruumis silinderpinda, mille teljeks on z-telg ja raadiuseks on g. Silinderpinna ja tasapinna $z = h$ lõikejoonena esinebki käsitletud ringjoon.

Olgu yz-tasapinnal antud mingi joon oma võrrandiga $\mathcal{F}(y, z) = 0$, mille vasakuks pooleks on mingi avaldis $\mathcal{F}$ selle joone jooksva punkti $(0, y, z)$ koordinaatidest y ja z. Kui antud joone tasapind pannakse pöörlema ümber z-telje, siis tekitab joon pöördpinna, olles talle meridiaaniks. Joone mingi punkt $(0, g, h)$ moodustab liikumisel ringjoone

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = g^2 \\ z = h \end{cases}$$

mis on pöördpinna üks paralleelringjoon. Pöördpind koosneb aga kõigist oma paralleelringjoontest, järelikult tuleb suurustele g ja h vaadata kui abisuurustele, mille kõik võimalikud väärtused peab kasutamisele võtma. Teatavasti omandavad g ja h kõik niisugused väärtused, mis rahuldavad võrrandit $\mathcal{F}(g, h) = 0$. Seega esitab pöördpinda parameetriline võrrandikolmik

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = g^2 \\ z = h \\ \mathcal{F}(g, h) = 0, \end{cases}$$

millest järeldub parameetrite elimineerimisel (seetõttu, et $g = \sqrt{x^2 + y^2}$) pöördpinna võrrand

$$\mathcal{F}(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

Tulemus on sõnastatav lihtsa juhisena: yz-tasapinnal antud joon, pööreldes ümber z-telje, tekitab pöördpinna, mille võrrandi saamiseks tuleb antud joone võrrandisse $F(y,z)=0$ kirjutada koordinaadi y asemele avaldis $\sqrt{x^2+y^2}$.

N ä i d e. Pöördpinna meridiaaniks yz-tasapinnal olgu sirgjoon $ly+mz=0$ (tema teine võrrand on teatavasti $x=0$). Antud sirgjoone pöörlemisel ümber z-telje tekib koonuspind, mille võrrand on

$$l\sqrt{x^2+y^2}+mz=0$$

Seda võrrandit saab teha juurevabaks:

$$l\sqrt{x^2+y^2}=-mz, \qquad l^2(x^2+y^2)=m^2z^2.$$

Seega esitab võrrand

$$l^2x^2+l^2y^2-m^2z^2=0$$

koonilist pöördpinda, mille teljeks on z-telg ja tipuks koordinaatide alguspunkt.

Saadud koonuspind lõikab oma teljega risti olevaid tasapindu $z=h$ ning lõikejoontena esinevad paralleeljooned

$$\begin{cases} l^2x^2+l^2y^2=m^2h^2 \\ z=h \end{cases}$$

Pöördkoonuselt võib üle minna üldisele teist järku koonusele sel teel, et niisugused ringjooned lõiked asendatakse ellipsitega; selleks tuleb võrrandisse kirjutada ruutliikmetele teineteisest erinevad kordajad. Üldise teist järku koonuse võrrand on järelikult

$$k^2x^2+l^2y^2-m^2z^2=0.$$

2. Teist järku pindade kanoonilised võrrandid.

Peale teist järku koonuse ja silindrite - paraboolse silindri $y^2-2px=0$, elliptilise silindri $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ja hüperboolse silindri $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (kõigil neil silindritel on moodustajate sihiks võetud z-telje siht) - on veel viit liiki kõverpindu, millede võrrandid on teiseastmelised. Igast niisugusest võrrandist tuleneb see pinna oluline omadus, et sirgjoon saab pinda lõigata mitte rohkem kui kahes punktis.

1) Ellipsoid. See pind saab olla kujult pöördpind, tekkides ellipsi pöörlemisel ümber telje. (Ellipsi pöörlemisel ümber fokaaltelje tekib piklik pöördellipsoid ja pöörlemisel ümber kaartelje tekib lapik pöördellipsoid.) Kui yz-tasapinnal olev ellips

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (x=0)$$

lastakse pöörelda ümber z-telje, siis on tekkiva pöördpinna võrrand teatavasti

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \quad ehk \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

(milles $a^2<b^2$ pikliku pöördellipsoidi juhul ja $a^2>b^2$ lapiku juhul).

Saadud pöördellipsoidi võrrandit on lihtne muuta üldiseks ellipsoidi kanooniliseks võrrandiks - tarvitseb ainult kõrvaldada pöördpinna tunnus, et x^2 ja y^2 esinevad võrdsete kordajatega. Ellipsoidi* kanooniline võrrand on seega

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Olgu tähendatud, et ellipsoidide hulka kuulub ka kerapind (juhtum $a = b = c$).

2) Ühekatteline hüperboloid. Saab esineda ka pöördpinna kujul, tekkides hüperbooli pöörlemisel ümber kaartelje. Kui yz-tasapinnal olev hüperbool

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (x = 0)$$

pöörleb ümber z-telje, siis on tekkiva ühekattelise pöördhüperboloidi võrrand

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Pöördpinna tunnuse kõrvaldamisega saadakse sellest ühekattelise hüperboloidi kanooniline võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Võrrandist nähtub, et pind lõikab x telge ja y-telge – vastavad lõikepunktid on $(a,0,0)$, $(-a,0,0)$, $(0,b,0)$ ja $(0,-b,0)$; -telge aga pind ei lõika, sest $-\frac{z^2}{c^2}$ ei saa olla.

3) Kahekatteline hüperboloid. Ka see pind on erijuhul pöördpind, nimelt tekib kahekatteline hüperboloid hüperbooli pöörlemisel oma fokaaltelje ümber. Olgu meridiaaniks hüperbool

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (x = 0)$$

ja pöörelgu see ümber z-telje, siis saadakse tuntud viisil pöördpind

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1.$$

Kui võrrandist kõrvaldada pöördpinna tunnus (pinna võib ka nii asetada, et ta lõikab -telge), siis saadakse kahekattelise hüperboloidi kanooniline võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

4) Elliptiline paraboloid. Selle erikuju, pöördparaboloid, tekib parabooli pöörlemisel oma telje ümber. Pöördpind, mille teljeks on z-telg ja meridiaaniks yz-tasapinnal asetsev

---

* Kui tahetakse rõhutada, et antud ellipsoid ei ole pöördellipsoid, siis nimetatakse seda kolmeteljeliseks ellipsoidiks.

parabool $y^2 - 2pz = 0\ (x=0)$, on (tuntud juhise järgi kirjutatuna) $x^2+y^2-2pz=0$ ehk $\frac{x^2+y^2}{2p}=z$. Kui siin kõrvaldada pöördpinna tunnus, siis saadakse elliptilise paraboloidi võrrand

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

(nimetajateks kirjutatakse a^2 ja b^2 selleks, et näidata nende positiivsust). Võrrandist selgub, et pind lõikab tasapindu $z=const>0$ mööda ellipseid; yz-tasapinda ja zx-tasapinda, samuti kõiki z-telge läbivaid tasapindu aga lõikab ta mööda paraboole.

5) <u>Hüperboolne paraboloid.</u> See pind ei saa esineda pöördpinna kujul. Tema võrrand kirjutatakse elliptilise paraboloidi võrrandi järgi nõnda, et z-teljega risti olevatel tasapindadel muudetakse ellipsikujulised lõiked hüperbolikujulisteks. Nii osutub hüperboolse paraboloidi kanooniliseks võrrandiks

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z.$$

Siit on näha, et pind lõikab tasapindu $z=const$ mööda hüperboole; yz-tasapinda ja zx-tasapinda aga lõikab ta mööda paraboole, milledest esimene avaneb allapoole ja teine ülespoole. Seega osutub hüperboolne paraboloid koordinaatide alguspunkti juures sadulakujuliseks.

M ä r k u s 1. Kui yz-tasapinnal olev parabool $z^2-2py=0$ $(x=0)$ lastakse pöörelda ümber z-telje, siis tekib niisugune pöördpind, mis ei kuulu teist järku pindade hulka. Pöördpinna võrrandiks osutub siis $z^2-2p\sqrt{x^2+y^2}=0$ ehk (juurevabal kujul) $z^4=4p^2(x^2+y^2)$, mis on neljandaastmeline. On lihtne veenduda, et see pind saab lõigata sirget neljas punktis: näiteks lõikab ta yz-tasapinnal olevat sirget $y-5z+12p=0$, $x=0$ punktides $(0,18p,6p)$, $(0,8p,4p)$, $(0,-2p,2p)$ ja $(0,-72p,12p)$.

M ä r k u s 2. Kui teist järku pind asetatakse koordinaatide teljestiku suhtes juhuslikku kohta ja mistahes asendisse, siis esitab seda pinda üldine teiseastmeline võrrand

$$gx^2+2hxy+ky^2+2lxz+2myz+nz^2+2px+2qy+2rz+s=0.$$

3. <u>Ühekattelise hüperboloidi ja hüperboolse paraboloidi moodustajad.</u>

Silinderpinnad ja koonuspinnad koosnevad sirgetest, mida nimetatakse nende pindade moodustajateks. Peale teist järku silindrite ja teist järku koonuse leidub teist järku pindade hulgas veel kaks liiki sirgjoontest koosnevaid pindu.

1) Kui ühekattelise hüperboloidi võrrandis liikmed sellekohaselt rühmitada -

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

siis on näha, et sel pinnal asetseb sirgjoon

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = q\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ q\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}, \end{cases}$$

mille võrrandites on q mistahes arv.* Igal erineval q väärtusel saadakse siin eri sirge ja kõigist niisugustest sirgetest kokku kujuneb üks parv pinna moodustajaid; q on selle parve parameeter. Samuti on näha, et ühekattelisel hüperboloidil on veel teine parv moodustajaid, nende võrrandipaar on

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = q\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ q\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}, \end{cases}$$

milles q on parve parameeter.

2) Hüperboolse paraboloidi võrrandist $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z$ on näha, et ka sel pinnal on kaks parve moodustajaid (parve parameeter olgu):

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = q \\ q\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = q \\ q\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z . \end{cases}$$

§ 22. Silinderkoordinaadid ja sfäärkoordinaadid.

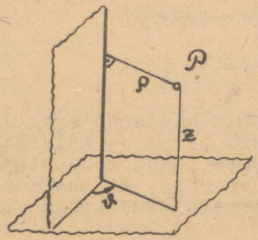
1. Silinderkoordinaadistik.

Ruumipunkti koordinaadid on teatavasti niisugused arvud, mis määravad asukohta kindlate paigalseisvate kujundite suhtes. Kui nendeks kujunditeks on kolm üksteisega risti olevat tasapinda ja koordinaatideks võetakse kaugused neist tasapindadest (igast tasapinnast ühele poole positiivsetena ja teisele poole negatiivsetena), siis on koordinaadisüsteem Cartesiuse koordinaadistik. Kuid koordinaatide saamiseks võib kasutada ka muid paigalseisvaid kujundeid kui tasapindu (näiteks sirgjooni, punkte) ja koordinaadid ise võivad tähendada muud kui kaugusi (näiteks nurki).

Silinderkoordinaadistikus on ruumipunkti kaks koordinaati kaugused ja üks koordinaat on nurk: p on punkti $\mathcal{P}$ kaugus kindlast sirgest, mida nimetatakse silinderkoordinaadistiku teljeks, z on kaugus teljega risti olevast kindlast tasapinnast (kaugus loetakse tasapinnast ühele poole positiivseks ja teisele poole negatiivseks) ning ϑ on nurk telge läbivate tasa-

*Tõepoolest, kui see võrrandipaar on rahuldatud, siis on ka ühekattelise hüperboloidi võrrand rahuldatud.

pindade vahel, milledest üks on võetud püsivaks ja teine juhi-

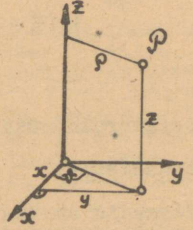


Joonis 71

takse läbi ruumipunkti $\mathcal{P}$ (joon.71).

Silinderkoordinaadistiku nimetus on võetud sellest, et koordinaatpinnad $\rho = const$ on silindrilised pöördpinnad. Teised koordinaatpinnad, $z = const$, on telje risttasapinnad; kolmandad pinnad, $\vartheta = const$, on teljest väljuvad pooltasapinnad ehk lehed (sest kaugusi ρ loetakse kõigile väljaspool telge olevatele punktidele positiivseteks).

Üleminek silinderkoordinaadistikust Cartesiuse koordinaa-



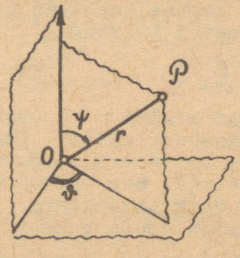
Joonis 72

distikus üheks teljeks (z-teljeks) ning pindade $\vartheta = 0$ ja $z = 0$ lõikejoon teiseks teljeks (joon.72). Nimelt kehtib siis valemikolmik

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z. \end{cases}$$

2. Sfäärkoordinaadistik.

Asukohta ruumis saab määrata ka ühe kauguse ja kahe nurga abil: r on punkti $\mathcal{P}$ kaugus kindlast punktist O, mida nimetatakse koordinaadistiku alguspunktiks, ψ on nurk lõigu $O\mathcal{P}$ ja alguspunktist väljuva kindla kiire (telje) vahel ning ϑ on nurk teljest väljuvate pooltasapindade vahel, milledest üks on võe-

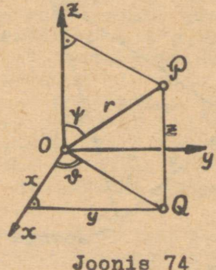


Joonis 73

tud püsivaks ja teine juhitakse läbi punkti $\mathcal{P}$ (joon.73).

Kirjeldatud koordinaadisüsteemi nimetus - sfäärkoordinaadistik - märgib seda, et koordinaatpinnad $r = const$ on kerapinnad ehk sfäärid (keskpunktiga O). Teised koordinaatpinnad, $\psi = const$, on koonilised pöördpinnad, aga pinnad $\vartheta = const$ on teljest väljuvad pooltasapinnad.

Üleminek sfäärkoordinaadistikust Cartesiuse koordinaadistikku, milles z-teljeks on sfäärkoordinaadistiku telg ning x-teljeks koordinaatpindade $\vartheta = 0$ ja $\psi = 90°$ lõikejoon, toimub



Joonis 74

(joon.74 järgi, kus $OQ = r \sin \psi$) valemikolmikuga

$$\begin{cases} x = r \sin \psi \cos \vartheta \\ y = r \sin \psi \sin \vartheta \\ z = r \cos \psi . \end{cases}$$

Neist valemeist järeldub, et sfäärkoordinaate saab Cartesiuse koordinaatidest arvutada valemite

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \psi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{ja } \tan \vartheta = \frac{y}{x} \text{ abil.}$$

Sfäärkoordinaadistiku kasutamist käsitlevad järgmised kaks ülesannet.

1) Nurk kahe antud suuna vahel leitakse valemi abil, mille tuletamiseks on kohane kasutada nende suundade ühikvektoreid. Suunad olgu antud kiirtega

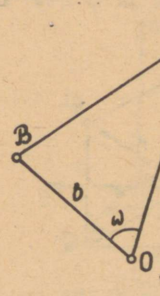
$$\begin{cases}\psi = \alpha\\ \vartheta = A\end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases}\psi = \beta\\ \vartheta = B\end{cases};$$

need kiired lõikavad sfääri $r=1$ (ühiksfääri) niisugustes punktides, mis on üleminekuvalemite põhjal punktid ($\sin\alpha\cos A$, $\sin\alpha\sin A$, $\cos\alpha$) ja ($\sin\beta\cos B$, $\sin\beta\sin B$, $\cos\beta$) Cartesiuse koordinaadistikus. Vektorid, mis viivad neisse punktidesse, osutuvad antud suundade ühikvektoriteks, järelikult võib suundade-vahelise nurga ω leida nende vektorite skalaarkorrutise kaudu:

$$\cos\omega = \sin\alpha\cos A\sin\beta\cos B + \sin\alpha\sin A\sin\beta\sin B + \cos\alpha\cos\beta =$$
$$= \sin\alpha\sin\beta(\cos A\cos B + \sin A\sin B) + \cos\alpha\cos\beta$$

ehk $\cos\omega = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos(B-A)$.

2) Kaugus kahe antud punkti vahel leitakse (eelmise ülesande tulemuse kasutamisega) lihtsalt koosinuseteoreemi abil. Olgu punkti A koordinaatide r, ψ ja ϑ väärtused a, α ja A ning punkti B koordinaadid vastavalt b, β ja B. Koordinaatide alguspunktist O punktidesse A ja B suunduvate kiirte vaheline nurk olgu tähistatud ω. Kolmnurgast OAB nähtub (joon.75), et



Joonis 75

$AB = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}$ ehk (eelmise ülesande põhjal)

$$AB = \sqrt{a^2+b^2-2ab\,[\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos(B-A)]}$$

§ 23. Ruumi liikumisteisendus.

1. Lüke.

Keha on võimalik viia senisest asukohast uude asukohta ja uude seisu nõnda, et esmalt viiakse keha üks valitud punkt tema uude kohta, kusjuures keha kõik punktid liiguvad üksteisega paralleelseid teid mööda ühe ja sama pikkuse võrra (nii jääb keha endisesse seisu) ning seejärel pööratakse keha sama valitud punkti ümber uude seisu. Esimest toimingut nimetatakse lükkeks ehk paralleelseks ümberpaigutamiseks ja teist nimetatakse pööramiseks punkti ümber.

Lükke puhul on punkte nende teisenditega ühendavad sirglõigud üksteisega paralleelsed ja pikkuselt võrdsed. Kui ruumipunkti (x, y, z) viiv vektor on $\bar{r}$ ja sama ruumipunkti teisendisse $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ viiv vektor on $\bar{R}$, siis osutub lükkeks teisendus $\bar{R} = \bar{r} + \bar{a}$, mis tähendab teatavasti (§ 19, art.2 järgi) valemikolmikut

$$\begin{cases} \mathcal{X} = x + a_1 \\ \mathcal{Y} = y + a_2 \\ \mathcal{Z} = z + a_3, \end{cases}$$

Vektor $\bar{a}$ määrab lükke, teda võib nimetada lükkevektoriks. Lükke valemitest nähtub, et lüke kuulub afiivsete teisenduste hulka (sest valemid on lineaarsed) ja et tema kordajaist koosneva determinandi väärtus on . Lükke pöördteisendus $\bar{r} = \bar{R} - \bar{a}$ on jälle lüke, kuid lükkevektoriga $-\bar{a}$.

2. Pööramine ümber koordinaatide alguspunkti.

Keha seisu muutumine ruumis ei ole veel täielikult määratud sellega, kui peale paigalejääva punkti on teada mingi teise punkti asukoht enne ja pärast pööramist; keha seisu määramiseks ei piisa keha kahe punkti asukohtadest, sest keha saab pöörelda neid kaht punkti läbiva sirgjoone ümber. Järelikult on vaja veel arvesse võtta üks keha punkt väljaspool seda sirget.

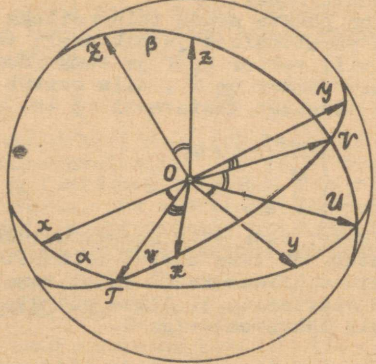
Keha seisu muutumist on kõige parem jälgida sel viisil, et punkt, mille ümber keha pööratakse, võetakse koordinaatide alguspunktiks, kuid läbi selle punkti pannakse kahed teljed: ühed on paigalejäävad teljed, neid kasutatakse keha punktide koordinaatide kindlakstegemiseks nii enne kui ka pärast pööramist, teised teljed aga on keha külge kinnitatud ja pöörduvad koos temaga. Kehaga kaasapöörduv teljekolmik võetakse nimelt nii, et ta enne pööramist ühtib paigalseisva teljekolmikuga. Järelikult jäävad keha punktide koordinaadid kaasapöörduvas teljestikus samaks, mis nad on paigalseisva teljestiku suhtes enne keha pööramist.

Olgu paigalseisvas teljestikus (joon.76) teljed tähistatud x, y ja z ning olgu keha pöördunud ümber punkti O nõnda, et kehale kinnistatud teljestik on võtnud seisu, milles teljed on tähistatud $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ ja $\mathcal{Z}$. Sellesse seisu on keha võimalik viia kolme lihtsama pööramisega:

1) ümber z-telje pööratakse keha niisuguse nurga α võrra, et x-telg jõuab xy-tasapinna ja $\mathcal{XY}$-tasapinna lõikejoonele; see lõikejoon, osutudes üheks abiteljeks, olgu tähistatud $\mathcal{T}$; teine abitelg (see näitab y-telje uut seisu) olgu tähistatud $\mathcal{U}$;

2) ümber $\mathcal{T}$-telje pööratakse keha niisuguse nurga β võrra, et z-telg pöördub $\mathcal{Z}$-teljeks; seejuures jõuab $\mathcal{U}$-telg $\mathcal{XY}$-tasapinnale ja esineb siin abiteljena, mis olgu tähistatud $\mathcal{V}$;

3) ümber $\mathcal{Z}$-telje pööratakse keha niisuguse nurga γ võrra, et $\mathcal{T}$-telg pöördub $\mathcal{X}$-teljeks (siis pöördub ka $\mathcal{V}$-telg $\mathcal{Y}$-teljeks).



Joonis 76

Niisuguste pööramiste valemeid on võimalik tasapinna pööramise käsitlusest (§ 17 art.2) saada:

$$\begin{cases} x = \mathcal{T}\cos\alpha - \mathcal{U}\sin\alpha \\ y = \mathcal{T}\sin\alpha + \mathcal{U}\cos\alpha \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{T} = \mathcal{T} \\ \mathcal{U} = \mathcal{V}\cos - \mathcal{Z}\sin\beta \\ z = \mathcal{V}\sin + \mathcal{Z}\cos\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{T} = \mathcal{X}\cos\gamma - \mathcal{Y}\sin\gamma \\ \mathcal{V} = \mathcal{X}\sin\gamma + \mathcal{Y}\cos\gamma \\ \mathcal{Z} = \mathcal{Z} \end{cases}$$

milles x, y ja z on punkti teisendi koordinaadid, kuna $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ ja $\mathcal{Z}$ on punkti enda koordinaadid (sest need on jäänud kaasa - pöörduvas teljestikus muutumatuks).

Ruumi pööramine ümber koordinaatide alguspunkti osutub seega kolme lihtsama pööramise korrutiseks (mis saadakse abisuuruste $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ ja $\mathcal{V}$ elimineerimise teel):

$$\begin{aligned} x &= (\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma)\mathcal{X} + (-\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\,\mathrm{coc}\beta\cos\gamma)\mathcal{Y} + (\sin\alpha\sin\beta)\mathcal{Z} \\ y &= (\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma)\mathcal{X} + (-\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\mathcal{Y} + (-\cos\alpha\sin\beta)\mathcal{Z} \\ z &= (\sin\beta\sin\gamma)\mathcal{X} + (\sin\beta\cos\gamma)\mathcal{Y} + (\cos\beta)\mathcal{Z}. \end{aligned}$$

Neid valemeid nimetatakse Euleri valemiteks*. Teisenduste korrutise omaduste põhjal (§ 17 art.1) osutub Euleri valemisüsteemi kordajatest koosneva determinandi väärtuseks 1.

Ruumi pööramine ümber alguspunkti on määratud kolme andmega - nurkadega α, β ja γ; ruumi lüke on samuti määratud kolme andmega - lükkevektori koordinaatidega a_1, a_2 ja a_3. Järelikult on ruumi üldine liikumisteisendus (kui lükke ja pööramise korrutis) määratud kuue andmega; seepärast nimetatakse jäiga keha liikumist ruumis kuue vabadusastmega liikumiseks.

---

* Leonard Euler (1707 - 1783) oli kaheksateistkümnenda sajandi mitmekülgsemaid ja produktiivsemaid matemaatikuid, töötas Peterburi Teaduste Akadeemias aastail 1727 - 1741 ja 1766 - 1783.

M ä r k u s. Et Euleri valemid on lineaarsed, samuti kui lükke valemid, siis kuulub üldine ruumi liikumisteisendus afiinsete teisenduste hulka. Kui liikumisteisendust tõlgitsetakse üleminekuna uude koordinaadistikku (keha paigalejäämisel), siis see uus koordinaadistik on samuti Cartesiuse koordinaadistik sama pikkusühikuga.

Seevastu üldine ruumi afiinne teisendus

$$\begin{cases} \mathcal{X} = ax + by + cz + d \\ \mathcal{Y} = gx + hy + kz + l \\ \mathcal{Z} = mx + ny + pz + q \end{cases}$$

(mis on määratud 12 andmega: $a, b, c, d, g, h, k, l, m, n, p$ ja q) tähendab üleminekut kaldkoordinaadistikku, sest koordinaatpindade parved $\mathcal{X} = const$, $\mathcal{Y} = const$ ja $\mathcal{Z} = const$ tükeldavad ruumi rööptahukalisteks osadeks.

§ 24. Ruumnurk.

1. Ruumnurga väärtus.

Ruumi osa, mida eraldab ülejäävast ruumist mingi kooniline pind (erijuhul püramiidi külgpind), nimetatakse ruumnurgaks. Ruumnurga suurust mõõdetakse kerapinna abil, mille keskpunktiks on ruumnurga tipp. Arusaadavalt jaguneb niisugune kerapind kaheks osaks - ruumnurgas olevaks ja väljaspool ruumnurka olevaks osaks; teatavasti osutub ruumnurgas oleva osa pindala võrdeliseks kera raadiuse ruuduga. Seepärast kasutatakse ruumnurga väärtusena selle osa pindala ja raadiuse ruudu jagatist. Raadiuseks võib aga võtta pikkusühiku (kerapind on siis ühiksfäär) ning defineerida ruumnurga väärtust järgmiselt:

ruumnurga väärtus võrdub ühiksfääri selle osa pindalaga, mis asetseb ruumnurgas, kui sfääri keskpunktiks on ruumnurga tipp.

Vastavalt definitsioonile saab ruumnurga väärtus olla nullist kuni arvuni 4π (viimasel juhul haarab ruumnurk endasse kogu ruumi). Ruumnurka, mille väärtus on 1, nimetatakse steradiaaniks (ruumradiaaniks)*.

Pöördkoonilise ruumnurga väärtust on lihtne avaldada telje ja moodustaja vahelise nurga ψ abil (joon.77). Koonuspind lõikab ühiksfäärist segmendi, mille kõrgus on $1 - \cos\psi$; segmendi pindala on teatavasti sfääri ümbermõõdu ja segmendi kõrguse korrutis. Järelikult on pöördkoonilise ruumnurga väärtus

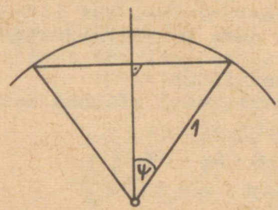
$$2\pi(1 - \cos\psi),$$

kui ruumnurga telje ja moodustaja vaheline nurk on ψ.

Kolmetahulise ruumnurga väärtuse leidmiseks peab oskama arvutada sfääri kolmnurga pindala. Sfääri kolmnurgaks nimetatakse sfääri osa, mida piiravad kolme suurringjoone kaared.

---

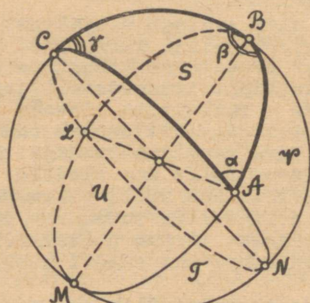
*Ruumnurga mõõtmisel kasutatakse ka (eeskätt astronoomias) ruutkraade; ruutkraadiks nimetatakse ruumnurka, milles väärtus on $\left(\frac{\pi}{180}\right)^2$ ehk $0{,}000304617$.



Joonis 77

Sfääri kolmnurga pindala avaldist saab tuletada sfääri kaksnurkade pindalade abil.

Sfääri kaksnurk on sfääri osa, mida piiravad kahe suur-



Joonis 78

ringjoone kaared (näiteks joonisel 78 kaared ABL ja ACL). Kui suurringjoonte tasapindade vaheline nurk on α ja sfääri raadius on r, siis leitakse sfääri kaksnurga pindala järgmiste kaalutluste põhjal: sfääri kaksnurga pindala Q on ilmselt võrdeline nurgaga α ning nende võrdetegur saadakse tingimusest, et kui α võrdub sirgnurgaga, siis Q on pool sfääri pindalast. Seega $Q=k\alpha$, kusjuures $k\pi=2\pi r^2$ ehk $k=2r^2$. Järelikult $Q=2r^2\alpha$.

Sfäärikolmnurga ABC pindala saab nüüd leida järgmiselt. Asetsegu külg BC joonisepinnal (joon. 78). Siis poolitab joonisepind sfääri ja nähtav poolsfäär jaguneb neljaks sfäärikolmnurgaks; kolmnurga ABC pindala olgu tähistatud S ning kolmnurkade AMN, ACM ja ANB pindalad vastavalt T, U ja V. Et kolmnurk AMN on sfääri keskpunkti suhtes sümmeetriline kolmnurgaga LBC, siis on need kolmnurgad pindvõrdsed; seega on kolmnurga LBC pindala samuti T. Kolmnurgad ABC ja LBC koos moodustavad kaksnurga, mille pindala on $2r^2\alpha$; niisiis $S+T=2r^2\alpha$.

Ka on näha, et kolmnurgad ABC ja ACM koos moodustavad kaksnurga, mille pindala on $2r^2\beta$, kolmnurgad ABC ja ANB aga moodustavad kaksnurga, mille pindala on $2r^2\gamma$. Seega $S+\mathcal{U}=2r^2\beta$ ja $S+\mathcal{V}=2r^2\gamma$.

Saadud võrdustest järeldub, et

$$(S+\mathcal{T})+(S+\mathcal{U})+(S+\mathcal{V})=2r^2\alpha+2r^2\beta+2r^2\gamma.$$

Kuid joonisepinna ees olev poolsfäär koosneb neljast kolmnurgast, millede pindalad on $S, \mathcal{T}, \mathcal{U}$ ja $\mathcal{V}$ järelikult

$$S+\mathcal{T}+\mathcal{U}+\mathcal{V}=2\pi r^2$$

See võimaldab eelmisest võrdusest kõrvaldada $\mathcal{T}, \mathcal{U}$ ja $\mathcal{V}$, seega

$$2S+2\pi r^2=2r^2\alpha+2r^2\beta+2r^2\gamma,$$

millest

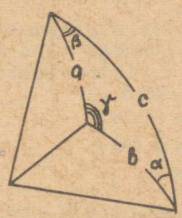
$$S=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)r^2.$$

Olgu märgitud, et selles valemis esinevat tegurit $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ nimetatakse sfäärikolmnurga ekstsessiks.*

Ruumnurga väärtuse definitsiooni järgi on kolmetahulise nurga väärtuseks sfäärikolmnurga pindala ja sfääri raadiuse ruudu jagatis. Nii saab sfäärikolmnurga pindala valemist järeldada, et kolmetahulise nurga väärtus on $\alpha+\beta+\gamma-\pi$, kui tahkudevaheliste nurkade väärtused on α, β ja γ.

2. Seoseid kolmetahulise nurga elementide vahel.

Kolmetahulisel ruumnurgal on kolm serva, mis asetsevad paariviisi tema tehkudel (joon.79). Kui servadevahelised nurgad (a, b ja c) on teada, siis on kolmetahuline nurk kahtlemata määratud (sest seega on tema pinnalaotus teada ja pinnalaotuse järgi saab teda koostada). Andmetega a, b ja c on järelikult määratud ka tahkudevahelised nurgad (α, β ja γ). Seoseid kolmetahulise ruumnurga servadevaheliste nurkade ja tahkudevaheliste nurkade vahel nimetatakse sfääritrigonomeetria teoreemideks. Nimelt kui kolmetahulist nurka lõigatakse ühik-



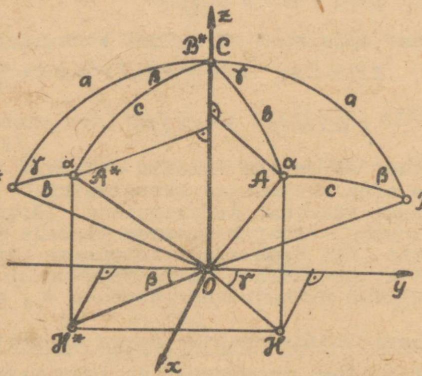
Joonis 79

---

*Sõna pärineb ladina keelest ja tähendab: üleastumine, ületamine. Ekstsess on suurus, mille võrra sfäärikolmnurga sisenurkade summa ületab sirgnurka.

sfääriga, mille keskpunktiks on ruumnurga tipp, siis tekib lõikekujundina sfäärikolmnurk, tema külgede pikkusteks on kolmetahulise nurga servadevaheliste nurkade väärtused ja sisenurkadeks on tahkudevahelised nurgad. Nii on sfäärikolmnurk eriti sobiv abikujund kolmetahulise ruumnurga omaduste väljaselgitamiseks.

Kolmetahulise nurga elementide vahel kehtivate seoste tuletamiseks olgu ruumnurga tahk OBC asetatud yz-tasapinnale nii,



Joonis 80

et tipp O on koordinaatide alguspunkt ja serv OC asetseb z-teljel (joon.80). Sfäärikolmnurga tipu A koordinaadid saab andmete abil avaldada (tipu A ristprojektsioon xy-tasapinnal olgu tähistatud H, seega $OH = \sin b$):

$$x = \sin b \sin \gamma$$
$$y = \sin b \cos \gamma$$
$$z = \cos b.$$

Kui nüüd ruumnurk pöörata x-telje ümber nii, et serv OB jõuab z-teljele, siis satub sfäärikolmnurga tipp A uude asukohta A^*, mille koordinaadid saab samuti avaldada (arvesse võttes, et $OH^* = \sin c$):

$$\mathcal{X} = \sin c \sin \beta$$
$$\mathcal{Y} = -\sin c \cos \beta$$
$$\mathcal{Z} = \cos c.$$

On näha, et ruumnurk on endisest seisust pööratud nurga võrra x-telje ümber; järelikult kehtivad punktide A ja A^* koordinaatide vahel pööramisvalemid

$$\begin{cases} \mathcal{X} = x \\ \mathcal{Y} = y \cos a - z \sin a \\ \mathcal{Z} = y \sin a + z \cos a \end{cases}$$

Kui neis valemites võtta arvesse punktide A ja A^* koordinaatide avaldised, mis on eespool saadud, siis kujunevad need kolm valemit järgmisteks seosteks:

$$\sin c \sin \beta = \sin b \sin \gamma \qquad (I)$$

$$-\sin c \cos \beta = \cos a \sin b \cos \gamma - \sin a \cos b \qquad (II)$$

$$\cos c = \sin a \sin b \cos \gamma + \cos a \cos b \qquad (III)$$

Esimest seost nimetatakse sfääri siinuseteoreemiks ja kirjutatakse tavaliselt võrdena

$$\frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \quad \left(= \frac{\sin \alpha}{\sin a}\right).$$

Kolmandat nimetatakse sfääri koosinuseteoreemiks ja kirjutatakse järgmiselt:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

(erinevas tähistuses on see teoreem juba esinenud § 22 art. 2 esimese ülesande tulemusena). Teine seos on kasutatav peamiselt abiteoreemina mõningate, rakendamiseks sobivamate teoreemide tuletamisel; teda nimetatakse sfäärigeomeetrias projektsiooniteoreemiks.

Tasuta.