MÉLANGES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES
TIRÉS DU
BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
DE ST.-PÉTERSBOURG.
TOME V.

$\frac{13}{25}$ Septembre 1877.

Einige isoperimetrische Aufgaben. Von F. Minding.

Auf einer Kugel sei eine beliebige Curve AB gegeben und ein Punkt C. In den Raum zwischen der Curve AB und dem (einem grössten Kreise zugehörigen) Bogen AC soll ein biegsamer Faden von der Länge L so gelegt werden, dass er durch A und C geht und mit AC einen möglichst grossen Flächenraum $ABC = F$ einschliesst.

Wenn man sich durch A und C einen Kreisbogen von der Länge L gezogen denkt, so würde dieser der Aufgabe genügen, wenn er ganz innerhalb des gestatteten Raumes fiele. Es kommt aber hier allein die Annahme in Betracht, dass ein solcher Kreisbogen theilweise die Grenzcurve überschreitet und folglich der Aufgabe nicht genügt. Offenbar wird dann der Faden einen Theil der Curve AB bedecken, der freie Theil des Fadens aber wird einen oder auch nach Umständen mehrere Kreisbogen bilden.

Die Curve AB sei bestimmt durch eine Gleichung $\rho = F(\varphi)$ zwischen dem Leitstrahl $CN = \rho$ und dem Winkel $ACN = \varphi$ (Fig. 1); der Faden bedecke den Bogen AB und bilde denn den Kreisbogen BDC vom Halbmesser r mit dem Centriwinkel $BMC = 2\beta$; noch sei $\angle MBC = MCB = \gamma$, die Sehne $CB = 2l$. Wenn der Winkel β spitz ist, so liefert das sphärische Dreieck MBC folgende Gleichungen:

$$\sin r \sin\beta = \sin l,\ \cos l \sin\gamma = \cos\beta,\ \cos r tg\beta tg\gamma = 1$$

oder auch $\qquad \cos r \sin\beta = \cos l \cos\gamma.$

Ist dagegen $\beta > \frac{\pi}{2}$, so fällt den Mittelpunkt M innerhalb des Kreisabschnittes BDC und der Gegenwinkel der halben Sehne l ist nicht mehr β, sondern $\pi - \beta$, also

$$\cos l \sin\gamma = -\cos\beta,\ \cos r tg\beta tg\gamma = -1.$$

Die Gleichungen I. reichen aber auch für diesen Fall aus, wenn für γ der entsprechende negative Werth genommen wird.

Differentiirt man die dritte der Gleichungen I., so folgt:

$$d\gamma = -\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\beta\cos\beta}d\beta + tg r \sin\gamma\cos\gamma dr,$$

oder $d\gamma = -\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}\cdot\frac{\cos r}{\cos l}d\beta + tg l \sin\gamma\, dr$

$$= -\frac{\cos r}{\cos l^2}d\beta + tg l \sin\gamma dr,$$

also $\quad \cos\beta dr + d\gamma = -\cos r tg l^2 d\beta + tg l \sin\gamma dr \ldots$ **II.**

Die Fläche des Kreisabschnittes BDC ist $2\beta(1-\cos r) - (2\beta + 2\gamma - \pi) = \pi - 2\beta\cos r - 2\gamma = X$, der Kreisbogen $BDC = 2\beta\sin r = Y$; noch sei $-\sin\beta^2\sin r^2 = Z$.

Für den Punkt A ist $\varphi = 0$ und wächst von da mit wachsendem Bogen s der Grenzcurve; ich nehme an, dass dies bis zum Punkte B fortdauert, also dass $\frac{ds}{d\varphi}$ zwischen A und B überall positiv ist. Es darf auch angenommen werden dass $\rho < \pi$ ist; denn wäre für eine Strecke der Curve $\rho > \pi$, so brauchte man nur $\rho = \pi + \rho'$ zu setzen und die Rechnung mit den aus

dem Gegenpole (C') von C entspringenden Leitstrahlen fortzuführen. Noch sei bemerkt, dass auch der Anfangspunkt A nicht maassgebend ist, sondern auf der Curve beliebig gegen B hin verlegt werden kann; denn dadurch würden von der Fläche F und der Länge L nur constante Theile abgezogen, worauf nichts ankommt.

Bezeichnet nun θ den Winkel zwischen der Richtung des Leitstrahls NC und der in der Richtung des wachsenden Bogens $s = AN$ in N gezogenen Tangente, so ist immer $ds\cos\theta = -d\rho$, $ds\sin\theta = \sin\rho d\varphi$. Denn wenn $\theta (= CNN')$ ein spitzer Winkel ist, während ds, $d\varphi$ und $\sin\rho$ nach der Voraussetzung positiv sind, so nimmt ρ mit wachsendem φ ab, also ist $ds\cdot\cos\theta = -d\rho$; ist aber θ stumpf, so wächst ρ mit wachsendem φ und man hat wiederum $ds\cos\theta = -d\rho$. Es ist daher $ds = \frac{\sin\rho}{\sin\theta}d\varphi$ und $\cot g\theta = -\frac{d\rho}{\sin\rho d\varphi}$.

Die Fläche ACB ist $= \int_0^\varphi (1-\cos\rho)d\varphi$.

Es ergeben sich also die folgenden Gleichungen der Aufgabe:

$$\int_0^\varphi (1-\cos\rho)d\varphi + X = F$$
$$\int_0^\varphi \frac{\sin\rho}{\sin\theta}d\varphi + Y = L$$
$$\sin l^2 + Z = 0.$$

Soll nun bei gegebenem L, F ein Maximum sein, so hat man $dF = 0$, $dL = 0$. Da für die Grenze φ der vorstehenden Integrale $\rho = 2l$ wird, so ergeben sich folgende Bedingungen:

$$(1-\cos 2l)d\varphi + \frac{dX}{d\beta}d\beta + \frac{dX}{dr}dr = 0$$
$$\frac{\sin 2l}{\sin\theta}d\varphi + \frac{dY}{d\beta}d\beta + \frac{dY}{dr}dr = 0 \ldots \textbf{III.}$$
$$2\sin l\cos l\frac{dl}{d\varphi}d\varphi + \frac{dZ}{d\beta}d\beta + \frac{dZ}{dr}dr = 0.$$

Es ist aber $dX = -2d\beta\cos r - 2d\gamma + 2\beta\sin r dr$, daher wegen II. $dX = 2\cos r \operatorname{tg} l^2 d\beta + 2(\beta\sin r - \operatorname{tg} l \sin\gamma) dr$,

und
$$\frac{dX}{d\beta} = 2\cos r \operatorname{tg} l^2 = \frac{2\cos\gamma}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin l^2}{\cos l}$$
$$\frac{dY}{d\beta} = 2\sin r \quad = \frac{2\sin l}{\sin\beta}$$
$$\frac{dZ}{d\beta} = -2\sin r^2 \sin\beta\cos\beta = -\frac{2\sin l^2}{\sin\beta}\cos l \sin\gamma,$$

woraus ersichtlich folgt:

$$\frac{dX}{d\beta}\cos\gamma\cos l^2 - \frac{dY}{d\beta}\sin l\cos l - \frac{dZ}{d\beta}\sin\gamma = 0.$$

Ferner ist

$$\frac{dX}{dr} = 2(\beta\sin r - tg l\sin\gamma) = 2\sin l\left(\frac{\beta}{\sin\beta} - \frac{\sin\gamma}{\cos l}\right)$$
$$\frac{dY}{dr} = \quad 2\beta\cos r \quad = 2\beta\frac{\cos l\cos\gamma}{\sin\beta}$$
$$\frac{dZ}{dr} = -2\sin l\sin\beta\cos r \quad = -2\sin l\cos l\cos\gamma,$$

daher wieder mit denselben Multiplicatoren

$$\frac{dX}{dr}\cos\gamma\cos l^2 - \frac{dY}{dr}\sin l\cos l - \frac{dZ}{dr}\sin\gamma = 0.$$

Die Bedingungen III. erfordern also nur noch folgende Relation

$$(1 - \cos 2l)\cos\gamma\cos l^2 - \frac{\sin 2l}{\sin\theta}\sin l\cos l$$
$$- 2\sin l\cos l\sin\gamma\frac{dl}{d\varphi} = 0.$$

Nach dem Vorigen ist

$\frac{2\,dl}{\sin 2l.d\varphi} = -\, cotg\theta\ (= -\, cotg CBB^1)$; daher verwandelt sich vorstehende Gleichung in folgende:

$$\sin l^2\cos l^2\cos\gamma - \frac{\sin l^2\cos l^2}{\sin\theta} + \frac{\sin l^2\cos l^2\sin\gamma\cos\theta}{\sin\theta} = 0$$

d. i. $\qquad \sin\theta\cos\gamma - 1 + \sin\gamma\cos\theta = 0$

oder $\qquad \sin(\theta + \gamma) = 1$

und $\qquad \theta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. . . . . IV.

Es ist aber $\theta + \gamma (= B'BC + CBM)$ der Winkel, welchen der Halbmesser BM mit der Tangente der Grenzcurve in B einschliesst; daher sagt die vorstehende Gleichung, dass bei dem Maximum von F der Kreisbogen die Grenzcurve berühren muss.

Je nachdem der Winkel θ in B spitz oder stumpf ist, ist γ positiv oder negativ, immer aber spitz.

Wenn neben AB noch eine zweite Grenzcurve A^1B^1 gegeben ist und ein von A ausgehender, in A' endigender Faden innerhalb des Zwischenraums beider Curven bei gegebener Länge ein Maximum von Fläche einschliessen soll, so folgt aus vorstehendem Satze sogleich, dass der die Curven verbindende Kreisbogen sich an beiden Enden tangential an jene anschliessen muss. Wie für die erste Curve $\theta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, so ist für die zweite $\theta' + \gamma = \frac{\pi}{2}$, also $\theta = \theta'$, d. h. die Sehne $2l$ schneidet beide Curven unter gleichen Winkeln.

Wenn in der gegebenen Curve φ bei wachsendem Bogen s abwechselnd zu- und abnimmt, so wird für das Maximum von Fläche die Einschaltung mehrerer Kreisbogen nöthig sein, wie es beispielsweise die Figur 2. versinnlicht, wo $ABDEFH$ die Grenzcurve ist, BE und FGC aber tangential in sie eingreifende Kreisbogen sind, von welchen der zweite durch den voraus bestimmten Punkt C geht oder auch eine zweite Grenzcurve berührt.

Würde verlangt, innerhalb eines sphärischen Dreiecks einen geschlossenen Faden, dessen Länge kleiner wäre als der Umfang des Dreiecks, aber grösser als der Umfang des eingeschriebenen Kreises, so zu legen, dass er den grösstmöglichen Flächenraum einschlösse, so würde eine aus sphärisch geraden Strecken und tangential in sie eingreifenden Kreisbogen mehr oder weniger gemischte Figur entstehen, möglicherweise wie *abcdefa* (Fig 3). Eben so bei mehrseitigen Polygonen.

Um die unbekannten Grössen der Aufgabe zu finden, wenn nur eine Curve und ein Punkt C gegeben ist, bemerke man, dass nach Obigem θ und l bekannte Functionen von φ sind, nämlich $cotg\theta = -\frac{d\rho}{\sin\rho d\varphi}$ für $\rho = 2l = f(\varphi)$; daher ist $\int_0^\varphi ds + \frac{2\beta \sin l}{\sin\beta} = L$ eine Gleichung zwischen φ und β und weil $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$, so hat man noch $\cos l \cos\theta = \cos\beta$ als zweite Gleichung zwischen φ und β.

Sind aber zwei Grenzcurven gegeben, so denke man sich beide auf ein gemeinschaftliches sphärisches Axensystem u, v bezogen; es sei für die erste Curve (Fig. 4) $ab = u$, $bB = v = f(u)$, für die zweite $ab^1 = u^1$, $b^1B^1 = v' = f_1(u')$; auch sei P der Pol des grössten Kreises ab. Das sphärische Dreieck PBB^1 hat die Seiten $PB = \frac{\pi}{2} - v$, $PB' = \frac{\pi}{2} - v'$, $BB' = 2l$, mit den Gegenwinkeln $PB'B = \lambda$, $PBB' = \pi - \eta$, $BPB' = \varepsilon = u' - u$. Der Mittelpunkt des Kreisbogens BDB' sei M, der Halbmesser $MB = MB' = r$, $< BMD = DMB' = \beta$, $MBB' = MB'B = \gamma$ wie früher; auch sei

$$\frac{dv}{\cos v du} = tg\psi, \quad \frac{dv^1}{\cos v^1 du^1} = tg\psi^1,$$

so ist $\frac{\pi}{2} - \psi$ der Winkel, den die in B an die Grenzcurve BA und die sphärische Ordinate Bb gelegten Tangenten mit einander bilden, und den ich zur Abkürzung des Ausdrucks mit ABb bezeichnen will; der entsprechende Winkel an der zweiten Grenzcurve ist $A'B'b' = \frac{\pi}{2} - \psi'$.

Der Winkel MBA ist $= \frac{\pi}{2} - \psi + \eta + \gamma$ und muss ein rechter sein, eben so $< MB'A' = \frac{\pi}{2} + \psi' - \lambda + \gamma = \frac{\pi}{2}$; also hat man für das Maximum von F:

$$\eta = \psi - \gamma, \quad \lambda = \psi' + \gamma.$$

Im Dreiecke PBB' ist aber $\sin\eta \cos v = \sin\lambda \cos v'$ oder $\sin(\psi - \gamma)\cos v = \sin(\psi' + \gamma)\cos v'$, daher wenn gesetzt wird

$$\cos v \cos\psi + \cos v' \cos\psi' = A, \cos v \sin\psi - \cos v' \sin\psi' = A',$$

so ist
$$A tg\gamma = A' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{V.}$$

Ferner ist

$$\sin v = \cos 2l \sin v' + \sin 2l \cos v' \cos\psi' + \gamma$$
$$\sin v' = \cos 2l \sin v - \sin 2l \cos v \cos\psi - \gamma,$$

daher $(A\cos\gamma + A'\sin\gamma) \operatorname{tg} l = \sin v - \sin v'$

oder auch
$$tgl = \frac{(\sin v - \sin v')\cos\gamma}{A} \ldots\ldots\ldots \textbf{VI.}$$

Durch V. und VI. werden γ und l bekannt, wenn u und u' es sind; denn v und ψ sind durch u, v' und ψ' durch u' ausgedrückt.

Um endlich u und u' zu finden, hat man noch

$$\cos 2l = \sin v \sin v' + \cos v \cos v' \cos(u' - u)$$
$$\int_{u^0}^{u} \frac{\cos u}{\cos\psi} du + \int_{u^0}^{u} \frac{\cos u'}{\cos\psi'} du' + \frac{2\beta \sin l}{\sin\beta} = L,$$

da auch $\cos\beta = -\cos l \sin\gamma$ eine bekannte Function von u und u' ist.

Wie das Vorstehende von der Kugel auf die Ebene zu übertragen ist, bedarf keiner Erklärung. In Hinsicht auf das Maximum habe ich einen einfachen Fall in der Ebene näher untersucht, wobei etwas zu verweilen nicht unpassend sein wird.

Es sei der Winkelraum zwischen zwei Geraden gegeben, nämlich (Fig. 5) $< BAB' = 2\alpha$, $MAB = MAB' = \alpha$, $AB = AB' = s$. Für das Maximum der Fläche hat man $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $s \sin\alpha = l$, $s \operatorname{tg}\alpha = r$. Die Formeln $\frac{1}{2}L = s + r\beta$, $F = s^2 \sin\alpha\cos\alpha + r^2(\beta - \sin\beta\cos\beta)$ geben hiernach

$$\tfrac{1}{2}L = s\left(1 + \left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}\alpha\right),\ F = s^2 tg\alpha\left(1 + \left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha\right)tg\alpha\right)$$

$= \frac{1}{2}Lstg\alpha$, also die grösste Fläche $F = \dfrac{\frac{1}{4}L^2}{\frac{\pi}{2} + \alpha + \operatorname{cotg}\alpha}$.

Es versteht sich, dass α nur ein spitzer Winkel sein darf.

Soll für β ein anderer Werth eingeführt werden, so ist zu bemerken, dass die Aufgabe β grösser als $\frac{\pi}{2} + \alpha$ anzunehmen nicht erlaubt. Denn es sei (Fig. 6) $BMD = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $BMH = BMH' = \delta$, $HMD = \frac{\pi}{2} + \alpha - \delta$, $H'MD = \frac{\pi}{2} + \alpha + \delta$, so ist klar, dass der Bogen $H'H$ ausserhalb des gestatteten Winkelraumes liegt und also der Kreisbogen nicht von H', sondern nur von H anfangen darf. Setzt man also $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha - \delta$, so darf δ nur positive Werthe erhalten.

Aus dieser Annahme folgt $s \sin\alpha = r\cos(\alpha - \delta)$,

$$\tfrac{1}{2}L = s + r\left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha - \delta\right),\ F$$

$$= s^2 \sin\alpha\cos\alpha + r^2\left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha - \delta + \sin\alpha - \delta . \cos\alpha - \delta\right)$$

$$\text{oder } F\sin\alpha = r^2\left\{\frac{1 + \cos(2\alpha - 2\delta)}{2}\cos a\right.$$

$$\left. + \left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha - \delta\right)\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\sin(2\alpha - 2\delta)\sin\alpha\right\},$$

oder passend geordnet:

$$F\sin\alpha = r^2\left\{\left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin\alpha + \cos\alpha\right.$$

$$\left. + \frac{\cos(\alpha - 2\delta) - \cos\alpha - 2\delta\sin\alpha}{2}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}L\sin\alpha = r\left\{\left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin\alpha + \cos\alpha\right.$$

$$\left. + \cos(\alpha - \delta) - \cos\alpha - \delta\sin\alpha\right\}.$$

Sei $\cos(\alpha - \delta) - \cos\alpha - \delta\sin\alpha = \varphi(\delta)$ und $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin\alpha + \cos\alpha = A$, so wird $\frac{1}{2}L\sin\alpha = r\left(A + \varphi(\delta)\right)$, $F = r^2\left(A + \frac{1}{2}\varphi(2\delta)\right)$.

Da $\varphi(\delta) = -\frac{\delta^2\cos\alpha}{2} - \frac{\delta^3\sin\alpha}{6} + \frac{\delta^4\cos\alpha}{24} + \ldots.$, so ersieht man sogleich, dass für $\delta = o$, r ein Minimum und der Quotient $\frac{F}{r^2}$ ein Maximum wird. Der Werth von F, auf den es hier allein ankommt, wird folgender:

$$F = \frac{\frac{1}{4}L^2\sin\alpha}{A}\left\{\frac{1 + \frac{1}{2}\dfrac{\varphi(2\delta)}{A}}{\left(1 + \dfrac{\varphi(\delta)}{A}\right)^2}\right\}.$$

Die Entwickelung nach Potenzen von δ giebt:

$$F = \frac{1}{4}\frac{L^2\sin\alpha}{A}\left\{1 - \frac{1}{3}\frac{\delta^3\sin\alpha}{A} + \frac{\delta^4\cos\alpha}{4A}\left(1 - \frac{\cos\alpha}{A}\right) + \ldots.\right\}.$$

Hiernach ist für die Änderung von F in der Nähe des Maximums die dritte Potenz von δ entscheidend; es würde also für $\delta = 0$ weder ein Maximum noch ein Minimnm, sondern nur ein Stillstand von F eintreten, wenn δ beliebig positiv oder negativ sein könnte. Da aber die vorgeschriebene Begrenzung nur einen positiven Werth von δ gestattet, auch $\frac{\sin\alpha}{A}$ positiv ist, so zeigt die Formel, dass für $\delta = 0$ F in der That den grössten mit den Bedingungen der Aufgabe verträglichen Werth erhält.

Für den Winkelraum zwischen zwei grössten Kreisen auf der Kugel kommt die Rechnung darauf zurück, aus den Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}L = s + \frac{\beta \sin s \sin\alpha}{\sin\beta}, \ \cos\beta = -\sin\alpha \sin s$$

die Unbekannten $AB = s$, $< BMD = \beta$ zu finden. (Fig. 5.)

Soll ein geschlossener Faden innerhalb einer Kugelzone zwischen zwei parallelen Ebenen so angebracht werden, dass er den möglich grössten Raum umfasse, so geben die obigen Formeln in diesem Falle $\psi = \psi' = 0$, $\operatorname{tg}\lambda = 0$, $tgl = \frac{\sin v - \sin v'}{\cos v + \cos v'}$ oder $l = \frac{v - v_{\prime}}{2} = r$, $u = u'$; um u zu finden, hat man $\frac{1}{2}L = (\cos v + \cos v')u + \pi \sin \frac{v - v'}{2}$, wobei vorausgesetzt ist, dass L grösser ist als der Umfang des beide Grenzkreise berührenden Kreises, also $L > \pi \sin\frac{v-v'}{2}$. Die Curve des Fadens besteht demnach aus zwei auseinander geschobenen Halbkreisen und den dazwischen befindlichen Bogen der beiden Grenzkreise.

Es ist hier der Ort, über die Curven kürzesten

Umrings auf Umdrehungsflächen einige Bemerkungen einzuschalten, wobei ich mich auf eine darüber im 21. Bande dieser akademischen Schriften erschienene Abhandlung beziehe. Unterwirft man diese Curven auf ähnliche Weise, wie so eben bei der Kugel geschehen ist, der Bedingung die Grenzkreise einer Zone nicht zu überschreiten, so erhält man bei hinreichend grossem L zwei gleiche und symmetrisch auf beiden Seiten einer Axe liegende Bogen, welche ich zur Unterscheidung einstweilen Halbrunde nennen will und welche sich an die Grenzkreise tangential anschliessen. Die zwischen beiden Halbrunden liegenden Bogen der Grenzkreise (ich nenne sie Ergänzungsbogen) gehören auf der Kugel zu gleichen Drehungswinkeln und verschwinden beide zugleich, so dass für $u = o$ (s. oben) ein voller Kreis entsteht; hingegen auf einer beliebigen Umdrehungsfläche sind diese Drehungswinkel ungleich, so dass, wenn die beiden Halbrunde auf der Seite des kleineren Drehungswinkels, von der Axe aus gerechnet, an einanander geschoben werden, auf der anderen Seite die Curve sich nicht schliesst, sondern, wenn eine geschlossene Curve verlangt wird, noch ein Ergänzungsbogen hinzugenommen werden muss.

Einige anderweitige Bemerkungen über die Curven kürzesten Umrings möchte ich bei dieser Gelegenheit noch hinzufügen, obgleich sie mit dem Vorstehenden nicht in naher Beziehung stehen. In der vorhin genannten Abhandlung bin ich von dem allgemeinen Ausdrucke für den Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve ausgegangen, nachdem ich die grosse Vereinfachung bemerkt hatte, welche dieser Ausdruck

Fig. 1.

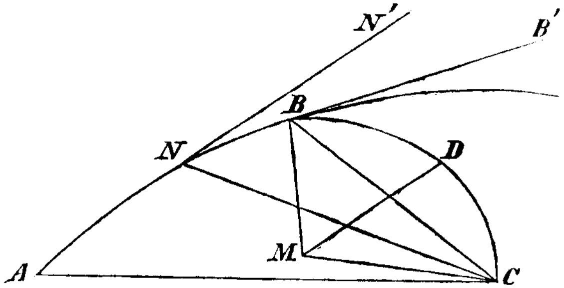


Fig. 2.

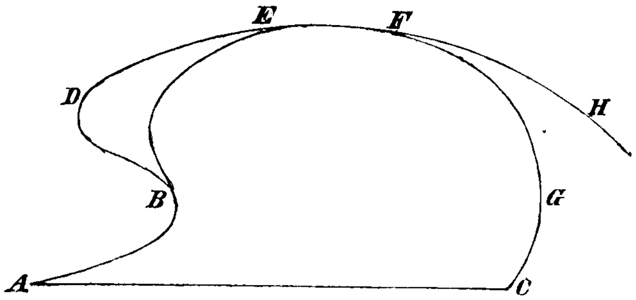


Fig. 5.

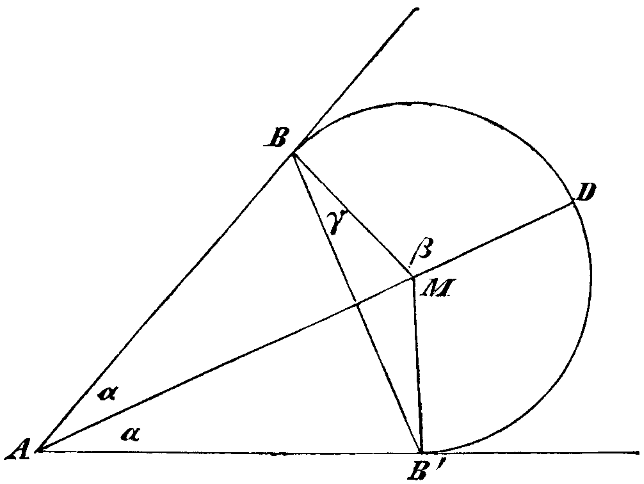


Fig 3.

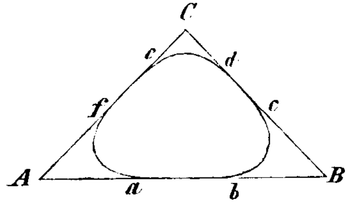


Fig. 4.

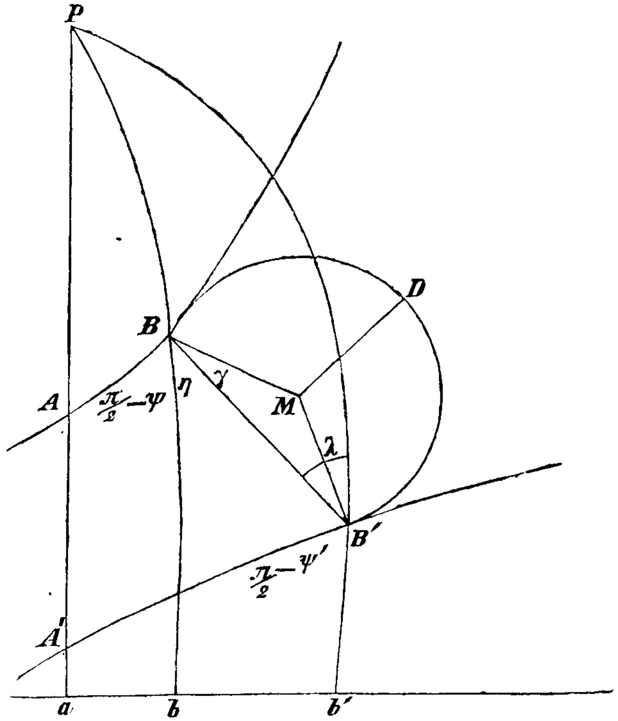
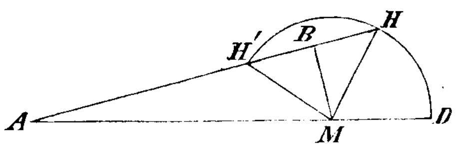


Fig. 6.



durch die Annahme $F = 0$ und $E = G$ erhält. Wenn es aber darauf ankommt, möglichst leicht zu der einfachsten Form der Differentialgleichung dieser Curven zu gelangen, so geschieht dies durch die Variation des Ausdrucks

$$\iint Edpdq + h\int \sqrt{E\,(dp^2 + dq^2)},$$

welche sofort die gesuchte Gleichung ergiebt, nämlich:

$$\frac{Edp}{h} = d(\sqrt{E}\sin\theta) - \frac{d\sqrt{E}}{dq}\, d\sigma$$

wo $d\sigma \cos\theta = dp$, $d\sigma \sin\theta = dq$ gesetzt ist.

Zu derselben Art von Curven führt auch folgende mechanische Aufgabe:

Auf einer krummen Fläche werde ein Faden von bestimmter Länge, etwa zwischen zwei festen Endpuncten, durch eine überall in der Berührungsebene wirkende auf den Faden senkrechte Kraft von der Intensität P gespannt.

Es sei N die Normale der Fläche, T die Tangente, R der Krümmungshalbmesser in einem Punkte der Curve. Da die Kraft Pds senkrecht auf N und T steht, so sind N, T, P drei rechtwinklige Axen, deren Richtungszahlen (cosinus) folgende Tafel anzeigt:

	x	y	z
N	n_1	n_2	n_3
T	t_1	t_2	t_3
P	p_1	p_2	p_3

.

Es bestehen also die bekannten Relationen $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, $n_1 t_1 + n_2 t_2 + n_3 t_3 = o$, u. s. w.

Da die Kraft Pds und der normale Druck λds überall senkrecht auf dem Faden stehen, so ist die Spannung θ constant. Nennt man noch r_1, r_2, r_3 die Richtungszahlen von R, und i die Neigung von R gegen P, so ist

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 = \cos i$$
$$n_1 r_1 + n_2 r_2 + n_3 r_3 = \sin i$$
$$n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = o.$$

Für das Gleichgewicht des Fadens gelten nun folgende Gleichungen:

$$\theta dt_i = Pp_i ds + \lambda n_i ds \quad (i = 1,\ 2,\ 3.)$$

oder weil bekanntlich, wenn $ds = Rd\sigma$ gesetzt wird, $dt_i = r_i d\sigma$, also $r_i ds = Rdt_i$ ist, so hat man:

$$\theta r_i = R\,(Pp_i + \lambda n_i),$$

daher durch Multiplication mit p_i und Summation für $i = 1,\ 2,\ 3$

$$\theta \cos i = RP.$$

Wenn also P constant ist, so folgt die bekannte Gleichung der Curve, nämlich

$$\frac{\cos i}{R} = \frac{P}{\theta} = \text{const.}$$

Für den Druck λ erhält man

$$\theta \sin i = R\lambda \text{ oder } \lambda = Ptgi.$$

Nach der oben erwähnten Abhandlung gilt für die Curve auf einer Umdrehungsfläche folgende, ihre Haupteigenschaft ausdrückende Gleichung:

$$2\pi r \sin\theta = \frac{2\pi\,(Fs' - Fs)}{h} \doteq \frac{Z}{h};$$

Z ist der Flächeninhalt der Zone zwischen den zu s und s' gehörigen Querschnitten. Um diese Eigenschaft in einer möglichst anschaulichen Weise auszusprechen, werde in einem Punkte s der Curve die Berührungsebene an die Fläche gelegt, der Umfang des entsprechenden Querschnitts $2\pi r$ auf diese Ebene, vom Punkte s ausgehend, abgewickelt und auf die durch s gelegte Tangente der Curve projicirt, so ist diese Projection ($= 2\pi r \sin\theta$) der Zone Z proportional.

(Tiré du Bulletn, T. XXIV, pag. 398 — 409.)

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Novembre 1877. C. Vessélovski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

MÉLANGES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES
TIRÉS DU
BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
DE ST.-PÉTERSBOURG.
TOME V.

$\frac{5}{17}$ Septembre 1878.

Eine Anwendung der Differenzen-Rechnung. Von Ferd. Minding. (Lu le 5 septembre 1878.)

Es sei m eine positive ganze Zahl, a eine beliebige Constante, x ein ächter Bruch und

$$S_m = a^m + (a+1)^m x + (a+2)^m x^2 + \ldots$$
$$+ (a+\mu)^m x^\mu + \ldots \text{ in inf.}$$

Obgleich es nicht an Mitteln fehlt um diese convergente Reihe zu summiren, da man z. B. mit Hülfe der Relation $\frac{d\,(x^a S_m)}{x^{a-1}dx} = S_{m+1}$ allmälich zu immer höheren Potenzen aufsteigen kann, so ist es doch vielleicht nicht überflüssig das einfachste und zugleich wirksamste dieser Mittel bosonders hervorzuheben; es besteht darin, S_m mit $(1-x)^{m+1}$ zu multipliciren. Schreibt man

$$(1-x)^{m+1} = 1 - (m+1)_1 x + (m+1)_2 x^2 \ldots$$
$$+ (-1)^\lambda (m+1)_\lambda x^\lambda + \ldots$$

und setzt man

$$(1-x)^{m+1} S_m = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_\mu x^\mu + \ldots$$