E. ETVERK

GEOMEETRIA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI I KLASSILE

TARTU EESTI KIRJASTUS

E. ETVERK

GEOMEETRIA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI I KLASSILE

TARTU EESTI KIRJASTUS

MATEMAATIKA ÕPIKUD GÜMNAASIUMILE

PEATOIMETAJA: O. SILDE

A. Vihman: Algebra õpik gümnaasiumi I klassile.

E. Etverk: Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile.

A. Vihman: Algebra õpik gümnaasiumi II klassile.

E. Etverk: Geomeetria õpik gümnaasiumi II klassile.

K. Maasik: Algebra õpik gümnaasiumi III klassile.

K. Ratassepp: Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile.

K. Ratassepp: Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.

E. Etverk: Stereomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.

G. Rägo: Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile.

L. Ruumet: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu III ja IV klassile.

L. Ruumet: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu V klassile.

K. Ratassepp: Matemaatilised tabelid.

Korrektor M. Kindlam.

Majandus- ja Rahandusdirektooriumi trükikäitised.
End. nats. O./ü. K. Mattieseni trükikoda, Tartu, 1942.

SISUKORD.

		Lk.
Peatükk I.	**Sirgjoon**	5—18
§ 1.	Sissejuhatus	5
§ 2.	Sirglõik	6
§ 3.	Sirglõikude summa ja vahe	8
§ 4.	Sirglõigu mõõtmine	10
§ 5.	Kiir ja sirge	14
§ 6.	Aksioom ja teoreem	16
Peatükk II.	**Ringjoon ja nurk**	19—35
§ 7.	Ringjoon ja ring	19
§ 8.	Kaar ja selle mõõtmine	21
§ 9.	Nurk	22
§ 10.	Kesknurk	24
§ 11.	Konstruktsioonülesandeid	25
§ 12.	Nurkade liigitelu	27
§ 13.	Nurga mõõtmine	29
§ 14.	Kõrvunurgad ja tippnurgad	31
§ 15.	Definitsioon	33
§ 16.	Eeldus ja väide	34
Peatükk III.	**Kujundite teljeline sümmeetria**	36—50
§ 17.	Sümmeetria mõiste	36
§ 18.	Sümmeetriliselt asetsevad punktid	38
§ 19.	Ristsirge läbi väljaspool sirget asetseva punkti	42
§ 20.	Ristlõik ja kaldlõik	43
§ 21.	Kahe punkti sümmeetriatelg	44
§ 22.	Sirglõigu keskristsirge	46
§ 23.	Nurgapoolitaja	47
§ 24.	Ringjoone sümmeetria	49
Peatükk IV.	**Kolmnurk**	51—75
§ 25.	Kolmnurga elemendid ja nende tähistamine	51
§ 26.	Kolmnurkade liigitelu	52

Lk.
§ 27. Võrdhaarse kolmnurga omadusi 54
§ 28. Kolmnurga kahe külje summa ja vahe 56
§ 29. Kolmnurga suurem nurk ja tema vastaskülg . . . 57
§ 30. Kolmnurga ümber ja sisse joonestatud ringjoon . . 59
§ 31. Võrdsed kolmnurgad 61
§ 32. Kolmnurkade võrdsuse esimene tunnus 62
§ 33. Kolmnurkade võrdsuse teine tunnus 64
§ 34. Kolmnurkade võrdsuse kolmas tunnus 66
§ 35. Kolmnurkade võrdsuse neljas tunnus 68
§ 36. Pikkuse kaudne mõõtmine võrdsete kolmnurkade abil 72

Peatükk V. **Paralleelsed sirged** . . . . 76—91
§ 37. Paralleelide aksioom 76
§ 38. Paralleelide ühine ristsirge 77
§ 39. Kolm paralleelset sirget 79
§ 40. Kahe paralleelse sirge lõikamine kolmanda sirgega 80
§ 41. Kolmnurga nurkade omadusi 83
§ 42. Sirgete paralleelsuse tunnuseid 86
§ 43. Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad 88
§ 44. Vastavalt ristuvate haaradega nurgad 89

Peatükk VI. **Hulknurk** . . . . 92—115
§ 45. Hulknurkade liigitelu 92
§ 46. Hulknurga nurkade summa 94
§ 47. Trapets 96
§ 48. Võrdhaarne trapets 98
§ 49. Rööpkülik 100
§ 50. Rööpküliku omadusi 103
§ 51. Trapetsi kesklõik 106
§ 52. Romb 108
§ 53. Ristkülik 110
§ 54. Ruut 113

Peatükk VII. **Ringjoon** . . . . 115—128
§ 55. Ringjoone puutuja 115
§ 56. Puutuja läbi antud punkti 117
§ 57. Puutuja ja kõõlu vaheline nurk 119
§ 58. Piirdenurk 122
§ 59. Ringjoon ja korrapärane hulknurk 125

PLANIMEETRIA.

Peatükk I.

Sirgjoon.

§ 1. Sissejuhatus.

Oma ümbruses me näeme mitmesuguseid esemeid, nagu laudu, toole, raamatuid jpm.

Iga ese asetseb r u u m i s, mis ümbritseb meid kõikjal, viibime me toas või väljas. Meie eluase Maakera asetseb samuti ruumis — maailmaruumis, milles asetsevad ka Päike, planeedid ja kõik muud taevakehad.

Igal esemel on mitmesuguseid o m a d u s i; viimaste iseloomustamiseks kasutame erilisi sõnu, nagu: suur, raske, ümmargune jpm. Teatavaid esemete omadusi nimetatakse g e o m e e t r i l i s t e k s omadusteks. Need on:

1) omadused, mis iseloomustavad eseme k u j u, nagu sirge, kõver, ümmargune;

2) omadused, mis iseloomustavad eseme s u u r u s t, nagu kõrge, pikk, 100 meetri laiune;

3) omadused, mis iseloomustavad eseme a s e n d i t teiste esemete suhtes, nagu peal, rööbiti, 5 meetri kaugusel.

Eseme kuju, suurus ja asend teiste esemete suhtes on eseme geomeetrilised omadused.

Peale geomeetriliste omaduste on esemetel palju muid omadusi. Tegeldes esemete geomeetriliste omadustega, tuleb kõrvale jätta nende kõik muud omadused. Vaadeldes geomeetriliselt seisukohalt näiteks raamatut ja telliskivi, jätame kõrvale aine, millest need esemed on valmistatud, kaalu, värvuse jpm. ning pöörame tähelepanu ainult nende kujule ja suurusele. Niiviisi esemeid vaadeldes kaovad erinevused paljude esemete vahel, näiteks nii raamat kui ka telliskivi muutuvad risttahukaks, liivahunnik ja kartulikuhi asenduvad koonusega, kummipallist ja piljardimunast saab kera. Niiviisi tekivad uued „esemed" — risttahukas, koonus, ring, rööpkülik jne., mida nimetatakse geomeetrilisteks kujunditeks.

Geomeetria on teadus, mis uurib geomeetrilisi kujundeid ja nende omadusi.

Geomeetrilised kujundid liigitatakse tasapinnalisteks ja ruumilisteks. Tasapinnalised kujundid asetsevad oma kõigi punktidega ühel ja samal tasapinnal. Niisugused kujundid on näiteks ring, sirglõik, kolmnurk. Geomeetria osa, mis uurib tasapinnalisi kujundeid, nimetatakse tasapinnaliseks geomeetriaks ehk planimeetriaks. Kujundid, mis ei asetse kõigi oma punktidega ühel tasapinnal, on ruumilised. Nende uurimisega tegelev geomeetria osa on stereomeetria.

Sõnad geomeetria, planimeetria ja stereomeetria on kreekakeelsed ja tähendavad vastavalt maamõõtmist, tasapinnamõõtmist ja ruumimõõtmist.

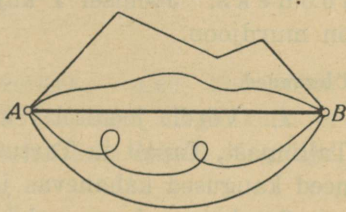
§ 2. Sirglõik.

Märgime tasasel pinnal, näiteks klassitahvli pinnal, kaks punkti A ja B ning ühendame need punktid teineteisega mitmesuguste joonte abil (joonis 1). Leiame nende joonte hulgast kõige lühema. Selle leidmiseks lähendame pinguletõmmatud niidi punktidele A ja B. Pinguletõmmatud niit nende punktide vahel kujutab *sirglõiku* AB. Punktid A ja B on sirglõigu *otspunktid*.

Sirglõik on kõige lühem joonlõik kahe punkti vahel.

Iga muu joonlõik, mis ühendab punkte A ja B, on pikem kui sirglõik AB. Meie kujutluse järgi

kaht antud punkti ühendab ainult üks sirglõik.

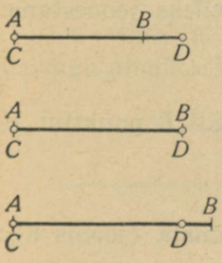


Joonis 1.

Nende kahe omaduse tõttu mõõdetakse kahe punkti vahelist kaugust sirglõiku mööda;

kahe punkti vaheliseks kauguseks nimetame neid punkte ühendava sirglõigu pikkust.

Joonestame nüüd kaks sirglõiku; olgu need AB ja CD. Võrdleme nende sirglõikude pikkusi. Selleks paigutame pinguletõmmatud niidi või sirkli abil ühe sirglõigu, näiteks AB, teise sirglõigu peale nii, et nende ühed otspunktid, näiteks A ja C, ühtivad. Vaatame, kuhu satub esimese sirglõigu teine otspunkt B (joonis 2).



Joonis 2.

Kui punkt B satub punktide C ja D vahele, siis ütleme, et sirglõik AB on *lühem* sirglõigust CD, ja kirjutame:

$$AB < CD;$$

kui punkt B ühtib punktiga C, siis ütleme, et sirglõigud AB ja CD on *võrdsed*, ja kirjutame:

$$AB = CD;$$

kui punkt B satub väljapoole sirglõiku CD, siis ütleme, et sirglõik AB on pikem sirglõigust CD, ja kirjutame:

$$AB > CD.$$

Sirglõike tähistame sageli ka ainult ühe väikese tähega, näiteks sirglõik a. Kus eksimust ei ole karta, seal nimetame sirglõiku lihtsalt lõiguks.

Joont, mis koosneb sirglõikudest, nimetatakse murdjooneks. Joonisel 1 kujutatud joontest kõige ülemine on murdjoon.

Ülesanded.

1. Võrdle joonisel 7 kujutatud kaardil Türi kaugust Tallinnast, Tapalt ja Tartust õhuteed mööda ning järjesta need kaugused kahanevas järjekorras.
2. Leia, missugused kaks Eesti linna asetsevad Pärnust õhuteed mööda võrdsetel kaugustel.

§ 3. Sirglõikude summa ja vahe.

Joonestame kaks sirglõiku a ja b. Et ehitada sirglõik, mis võrdub lõikude a ja b summaga, selleks joonestame sirglõigu

$$KL = a,$$

ja pikendame seda lõiku siis üle punkti L punktini M nii, et

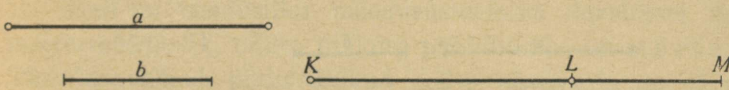
$$LM = b.$$

Nii saadud sirglõik on lõikude a ja b summa (joonis 3):

$$KM = a + b.$$

Kui lõigud a ja b on võrdsed, siis punkt L asetseb sirglõigu KM otspunktidest võrdsetel kaugustel ehk, teisiti, punkt L poolitab sirglõigu KM. Sel juhul punkt L on sirglõigu KM keskpunkt.

Ühe ja sama lõigu korduval liitmisel saame joonestada lõigu, mis on antud lõigu kordne; et lõigu a järgi joonestada näiteks lõiku $3a$, selleks joonestame esiteks lõigu $a + a$ ja liidame sellega veel kord lõigu a.



Joonis 3.

Kahe sirglõigu vahe leidmiseks tuleb üht lõiku lühendada teise võrra. Et leida antud sirglõikude m ja n vahet (joonis 4), selleks joonestame esiteks sirglõigu

$$AB = m,$$

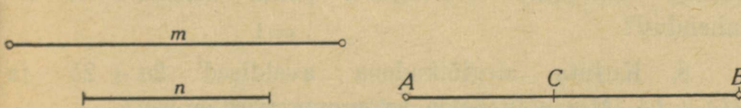
ja lühendame seda lõiku siis sirglõigu BC võrra, nii et

$$BC = n.$$

Nii saadud sirglõik

$$AC = m - n.$$

On selge, et ühest sirglõigust saab lahutada teise sirglõigu ainult sel juhul, kui teine lõik on esimesest lühem.



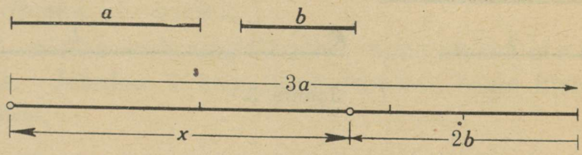
Joonis 4.

Osates sirglõike liita ja lahutada, võime mitmesuguseid algebralisi avaldisi kujutada sirglõikudena. Et kujutada sirglõiguna näiteks avaldist

$$3a - 2b,$$

võtame vabalt kaks sirglõiku a ja b, ehitame sirglõigu $3a$ ja lahutame sellest sirglõigu $2b$. Ülejääv sirglõik x kujutabki antud avaldist (joonis 5):

$$x = 3a - 2b.$$



Joonis 5.

Ülesanded.

3. Joonesta kahe vabalt võetud sirglõigu summa.

4. Joonesta kahe vabalt võetud sirglõigu vahe.

5. Joonesta kahe punkti vahele vabalt kaks murdjoont ja ehita sirglõigud, mis on nende murdjoontega ühepikkused. Kumb murdjoon on pikem ja kui palju?

6. Ehita sirglõik $4a$, kus a on vabalt võetud sirglõik.

7. Ehita sirglõik $x = 5a - 3b$, kus a ja b on vabalt võetud sirglõigud. Missugusel juhul ülesanne ei ole lahenduv?

8. Kujuta sirglõikudena avaldised $2a + 2b$ ja $2(a + b)$. Mis võib öelda tulemuste võrdlemisel?

§ 4. Sirglõigu mõõtmine.

Eespool võrdlesime sirglõikude pikkust nende üksteise peale paigutamise teel. Sedasama on võimalik teha ka sirglõikude mõõtmise ja saadud mõõtarvude võrdlemise teel.

Mõõtmiseks vajame mõõduühikuid. Mõõduühikud määratakse riigivõimu poolt seadustega, et oleks tagatud ühtlaste ühikute tarvitamine. Riigivõimu kontrollile alluvad ka tarvitatavad mõõduriistad.

Meil on seadusliku mõõdusüsteemina tarvitusel nn. meetermõõdustik, milles pikkuse põhiühikuks on m e e t e r. Tarvitatavamad pikkusühikud selles süsteemis on järgmised:

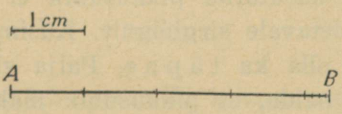
$$1\text{ m} = 10\text{ dm} = 100\text{ cm} = 1000\text{ mm};$$
$$1\text{ dm} = 10\text{ cm} = 100\text{ mm};$$
$$1\text{ cm} = 10\text{ mm};$$
$$1\text{ km} = 1000\text{ m}.$$

Meetermõõdustikku mittekuuluva ühikuna kasutatakse meresõidu alal ühikut

$$1\text{ meremiil} \approx 1{,}852\text{ km}.$$

Mõõta sirglõik tähendab leida, mitu korda pikkusühik mahub antud sirglõigule.

Olgu vaja mõõta sirglõik AB (joonis 6). Kasutades ühikuna sentimeetrit, mahutame selle mõõdetavale sirglõigule nii mitu korda kui ta mahub.



Joonis 6.

Joonisest näeme, et antud juhul 1 cm mahub mõõdetavale sirglõigule 4 korda, kusjuures jääb üle sirglõik, mis on väiksem kui 1 cm. Seega

$$4\text{ cm} < AB < 5\text{ cm}.$$

Selle põhjal ütleme, et sirglõigu AB pikkus on ligikaudu 4 cm või 5 cm. Kumma neist mõõtarvudest loeme sirglõigu pikkuseks, see sõltub sellest, kas me lepime kokku mõõta puudusega või liiaga. Nii ühel kui teisel juhul tekib mõõtmisel viga. Et mõõtmisvead oleksid võimalikult väikesed, selleks on kokku lepitud

mõõta puudusega, kui ülejääv lõik on väiksem kui pool ühikut, ja liiaga, kui ülejääv lõik on võrdne või suurem kui pool ühikut.

Antud sirglõigu täpsemaks mõõtmiseks kasutame ülejääva lõigu mõõtmiseks sentimeetrist väiksemat ühikut, s. o. millimeetrit. Kui 1 mm mahub ülejäävale lõigule ütleme enam kui 3, kuid vähem kui 4 korda, siis

$$4 \text{ cm } 3 \text{ mm} < AB < 4 \text{ cm } 4 \text{ mm}$$

ehk

$$4{,}3 \text{ cm} < AB < 4{,}4 \text{ cm}.$$

Eespool-toodud kokkuleppe kohaselt loeme AB pikkuseks selle mõõtarvu, mis on väiksema veaga. Kui selleks on 4,3 cm, siis

$$AB = 4{,}3 \text{ cm}.$$

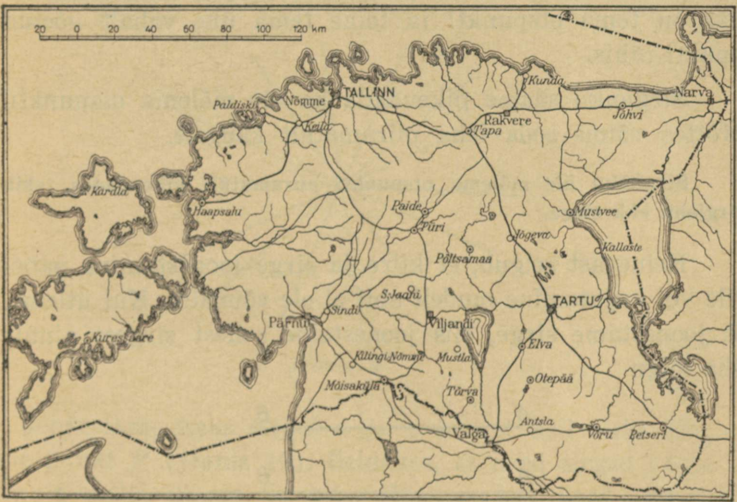
Vaadeldud juhul sirglõigu mõõtmine oli ligikaudne, sest kasutatud pikkusühik ei mahtunud täisarv kordi mõõdetavale sirglõigule. Küsime, kas sirglõigu mõõtmine võib olla ka täpne. Palja silmaga vaadates võib mõnikord näida, et pikkusühik mahub mõõdetavale sirglõigule täpselt täisarv kordi, kuid kontrollides seda luubi või mikroskoobi abil võib osutuda, et see ei ole nii. Et meil kunagi ei ole teada, kas täpsena näiv mõõtmine ka suurema suurenduse kasutamisel osutub täpseks või mitte, siis ütleme, et

sirglõigu mõõtmine on ikka ligikaudne.

Ülesanded.

9. Joonesta kinnine murdjoon, s. t. murdjoon, mille otspunktid ühtivad, ja leia mõõtmise teel selle murdjoone pikkus.

10. Leia alljärgneval kaardil antud mõõdu alusel, kui kaugel asetsevad üksteisest Rakvere ja Narva, Tapa ja Tartu, Türi ja Viljandi, Viljandi ja Tartu.



Joonis 7.

11. Avalda 3,5 meremiili kilomeetrites.

12. Avalda 20 km meremiilides.

13. Sirglõik on jaotatud kaheks mittevõrdseks lõiguks. Nende lõikude keskpunktid on teineteisest 5,3 cm kaugusel. Kui pikk on antud sirglõik?

14. 15 cm pikkune lõik on jaotatud kaheks mittevõrdseks lõiguks. Kui kaugel teineteisest asetsevad nende lõikude keskpunktid?

§ 5. Kiir ja sirge.

Sirglõikude liitmisel pikendasime sirglõiku üle ühe otspunkti. Mõttes võime seda teha piiramatult kaugele.

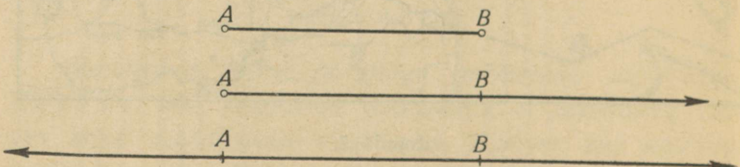
Sirglõiku üle ühe otspunkti piiramatult pikendades tekib kiir.

Kiirel on üks otspunkt (joonis 8). Kiirt tähistatakse kas ühe väikese tähega, või kahe suure tähega, milledest üks on tema otspunkti ja teine tema ühe vabalt võetud punkti tähis.

Sirglõiku saame pikendada ka üle mõlema otspunkti. Mõttes võime seda teha piiramatult kaugele.

Sirglõiku üle mõlema otspunkti piiramatult pikendades tekib sirgjoon ehk sirge.

Eelnevast selgub, et kiire ja sirge joonestamine paberile või kujutamine mudeli abil ei ole võimalik. Kui ütleme, et joonestame sirge, siis joonestame sellest sirgest ainult ühe lõigu.



Joonis 8.

Sirget tähistatakse kas selle sirge kahe punkti tähiste abil, näiteks sirge AB, või ühe väikese tähega tähestiku viimaste tähtede hulgast, näiteks sirge s.

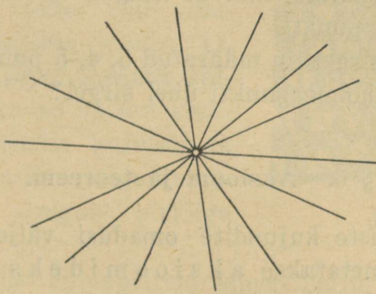
Joonestame kaks punkti A ja B. Neid punkte ühendavaid sirglõike on ainult üks. Selle lõigu pikendamisel üle mõlema otspunkti saame ühe ja ainult ühe sirge. Sellest selgub, et

kaht punkti läbib ainult üks sirgjoon.

Sedasama tõsiasja teisiti avaldab lause:

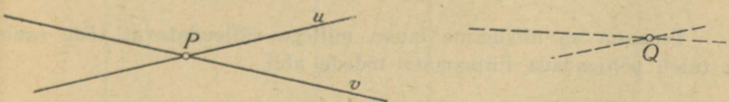
kahe punktiga on sirgjoon määratud.

Ühe punktiga ei ole sirge määratud, sest üht punkti läbib loendamatu hulk sirgeid (joonis 9).



Joonis 9.

Joonestame kaks sirget u ja v nii, et neil oleks üks ühine punkt P (joonis 10). Öeldakse, et need sirged lõikuvad selles ühises punktis. Küsime, kas need sirged lõikuvad veel mõnes teises punktis. Joonise piirkonnas ei



Joonis 10.

leidu teist lõikepunkti, kuid võib-olla leidub see kuski väga kaugel. Järele mõeldes selgub, et teist lõikepunkti sirgetel u ja v ei saa olla. Tõepoolest, kui sirgetel u ja v leiduks veel teine ühine punkt, ütleme Q (joonis 10), siis läbiks ju punkte P ja Q kaks eri sirget, mida olla ei saa. Sellest selgub, et

kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis.

Ülesanded.

15. Kuidas nimetatakse sirge osasid, milleks selle jaotavad kaks sirgel võetud punkti?

16. Joonesta kõik sirged, mis on määratud tasapinnal asetseva viie punktiga, millede hulgas ei leidu kolme ühel sirgel asetsevat punkti.

17. Mitu sirget on määratud 3, 4, 5 punktiga, millede hulgas ei leidu kolme punkti ühel sirgel?

§ 6. Aksioom ja teoreem.

Geomeetriliste kujundite omadusi väljendatakse lausetes, mida nimetatakse a k s i o o m i d e k s ja t e o r e e m i d e k s.

Aksioom ehk p õ h i l a u s e on niisugune lause, millega väljendatav tõde on niivõrra lihtne, et seda ei ole vaja või ei saagi põhjendada veel lihtsamate tõdede abil. Aksioomid on näiteks järgmised laused:

sirglõik on kõige lühem joonlõik kahe punkti vahel;

kaht punkti läbib ainult üks sirgjoon.

Teoreem on niisugune lause, millega väljendatavat tõde saab ja tuleb põhjendada lihtsamate tõdede abil.

Eespool-toodud lausetest on teoreem näiteks järgmine:

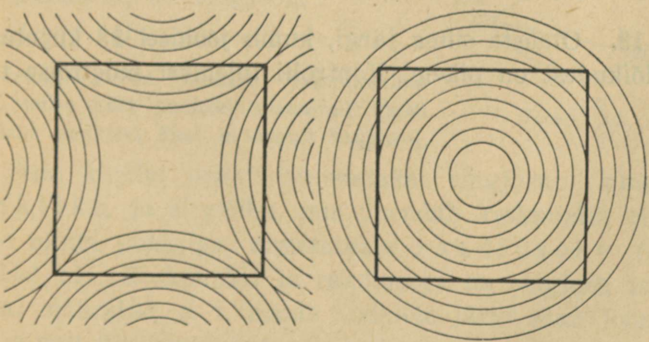
kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis.

Teoreemi põhjendamist teiste lausete abil nimetatakse teoreemi t õ e s t a m i s e k s. Teoreemi tõestamine toimub sel teel, et tuntud tõdedest (aksioomidest ja teoreemidest) järeldatakse järjest uusi tõdesid, kuni jõutakse selleni, mida soovitakse tõestada. Seega toimub teoreemi tõestamine mõtlemise teel, mitte aga vaatluse või mõõtmise abil.

Geomeetriliste kujundite omadusi õpitakse sageli tundma vaatluse ja mõõtmise teel. Sel teel leiutatud omadused ei tarvitse alati olla õiged ja vajavad seepärast tõestamist. Et vaatluse teel, s. t. silma kaudu saadud muljed võivad olla ekslikud, selles võib veenduda, kui vaadelda joonist 11. Igaüks näeb sellel joonisel spiraale, mis lähtuvad ühisest keskpunktist. Tõeliselt kujutab ta aga ühise keskpunktiga ringjooni, nagu selgub sirkliga kontrollides.

Joonis 11.

Sellelaadilisi silmapetteid esineb palju. Kaks neist on toodud joonisel 12. Jäägu lugeja ülesandeks selgusele jõuda, kas sellel joonisel kujutatud ruutude küljed on sirged või kõverad.



Joonis 12.

Nagu eespool selgus, peab teoreemi tõestamiseks oskama tuntud tõdedest teha õigeid järeldusi. Järelduse tegemiseks kasutatakse harilikult kaht tuntud tõde. Neid tõdesid, millest järeldusi tehakse, nimetame e e l d u s t e k s.

Joonis 13.

N ä i d e. Eeldame, et õpilase *N* kohta on teada järgmised asjaolud:

õpilane *N* sõitis laupäeval koju;
õpilase *N* kodu on Raplas.

Neist eeldustest võime järeldada, et

õpilane *N* sõitis laupäeval Raplasse.

Tuleb hoiduda ebaõigete järelduste tegemisest! Ülaltoodud eelduste puhul võib osutuda ebaõigeks näit. järgmine järeldus:

õpilane *N* oli pühapäeval Raplas.

Ülesanded.

18. Tee järeldused igast järgnevast eelduste paarist:

$a = b$	$a > b$	$x = a + b$	$x = a + b - c$	$s = a + b$
$b < c$	$b > c$	$x = a + c$	$a = c - b$	$a = b$

19. Otsusta silma järgi, kumb joonisel 13 kujutatud sirglõikudest on pikem. Kontrolli tulemust mõõtmise teel.

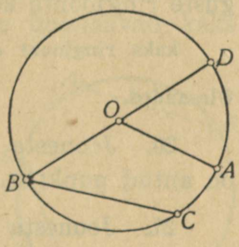
Peatükk II.

Ringjoon ja nurk.

§ 7. Ringjoon ja ring.

On tasapinnalisi ja ruumilisi jooni. Kui lennuk pärast aerodroomi kohal tiirude tegemist viimaks seal maandub, siis ta on kujundanud ruumilise kõverjoone.

Üks lihtsamaid tasapinnalisi jooni peale sirgjoone on ringjoon. See joon tekib, kui punkt liigub tasapinnal nii, et selle kaugus ühest kindlast punktist ei muutu: olgu O kindel punkt (joonis 14) ja liikugu punkt A selle ümber, jäädes sellest ikka ühele ja samale kaugusele; tee, mille kujundab punkt A, on ringjoon.



Joonis 14.

Seega võib öelda, et

ringjoon on kinnine tasapinnaline joon, mille kõik punktid asetsevad ühest kindlast punktist ühel ja samal kaugusel.

Seda kindlat punkti nimetatakse ringjoone k e s k p u n k t i k s, ja sirglõiku, mis ühendab keskpunkti ringjoone mingi punktiga, nimetatakse r a a d i u s e k s (OA joonisel 14). Keskpunkti ja raadiusega on ringjoon tasapinnal määratud, s. t. nende andmete järgi saab joonestada ainult ühe ringjoone. Samuti on ringjoon määratud keskpunkti ja ringjoonel antud ühe punktiga.

Ringjoon jaotab tasapinna punktid kolme rühma, nimelt ringjoone sees asetsevateks, ringjoonel asetsevateks ja väljaspool ringjoont asetsevateks punktideks. Tasapinna iga punkt kuulub ühesse neist kolmest rühmast; missugusesse, seda otsustame järgmise tunnuse abil:

punkt asetseb ringjoone sees, ringjoonel või väljaspool ringjoont vastavalt sellele, kas tema kaugus ringjoone keskpunktist on väiksem kui raadius, võrdne raadiusega või suurem kui raadius.

Sirglõiku, mis ühendab ringjoone kaht punkti, nimetatakse k õ õ l u k s (*BC* joonisel 14). Keskpunkti läbiv kõõl on d i a m e e t e r ehk l ä b i m õ õ t (*BD* joonisel 14). Läbimõõt on kaks korda pikem kui raadius.

Tasapinna tükki, mida piirab ringjoon, nimetatakse ringiks.

Kui kaks ringjoont on võrdsete raadiustega, siis saab neid teineteise peale paigutada nii, et nad ühtivad. Niisuguste ringjoonte kohta öeldakse, et nad on võrdsed; seega

kaks ringjoont on võrdsed, kui nende raadiused on võrdsed.

Ülesanded.

20. Joonesta joon, millel asetsevad kõik punktid, mis on antud punktist 2,5 cm kaugusel.

21. Joonesta sirglõik pikkusega 4 cm ja leia kaks punkti nii, et nad asetseksid selle sirglõigu kummastki otspunktist 3 cm kaugusel.

22. Antud on punkt, mis asetseb 12 cm kaugusel ringjoone keskpunktist. Kui kaugel sellest punktist asetseb ringjoone kõige lähem ja kui kaugel kõige kaugem punkt, kui raadius on 5 cm?

23. Leia ringjoonel punktid, mis asetsevad diameetri otspunktidest raadiuse kaugusel.

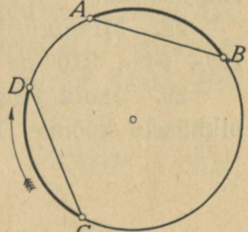
§ 8. Kaar ja selle mõõtmine.

Kaks ringjoonel võetud punkti A ja B jaotavad ringjoone kaheks kaareks. Kui võetud punktid ei ole ühe ja sama diameetri otspunktid, siis on üks kaartest väiksem kui pool ringjoonest. Kaare AB all mõistetakse harilikult väiksemat kaart, mille otspunktid on A ja B. Seda kaart tähistatakse sümboliga $\overset{\frown}{AB}$.

Ühe ja sama ringjoone kaari saab võrrelda nende suuruse poolest. Selleks pöörame üht kaart mööda ringjoont seni, kuni ta satub teise kaare peale nii, et nende ühed otspunktid ühtivad (joonis 15). Kui seejuures ühtivad ka nende teised otspunktid, siis ütleme, et võrreldavad kaared on võrdsed. Kahe kaare AB ja CD võrdsust märgitakse kirjas kujul

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}.$$

Ringjoone kaare otspunkte ühendab üks selle ringjoone kõõl, kuid iga kõõlu otspunkte ühendavad kaks kaart; kõõlu ja selle otspunkte ühendava väiksema kaare kohta öeldakse, et nad vastavad teineteisele: kõõlule AB joonisel 15 vastab kaar AB, mitte aga kaar ACB.



Joonis 15.

Olgu AB ja CD kaks võrdset kaart (joonis 15). Pöörame kaart CD mööda ringjoont seni, kuni tema otspunktid ühtivad kaare AB otspunktidega. Seejuures ühtivad ka neile kaartele vastavad kõõlud. Sellest järeldame, et

võrdsetele kaartele vastavad võrdsed kõõlud.

Edaspidi näeme, et ka, ümberpöördult,

võrdsetele kõõludele vastavad võrdsed kaared.

Kaare mõõtmisel tarvitatakse ühikuna kaarekraadi, kaareminutit ja kaaresekundit.

Üks kaarekraad (1^0) on $\frac{1}{360}$ ringjoonest;

üks kaareminut ($1'$) on $\frac{1}{60}$ kaarekraadist;

üks kaaresekund ($1''$) on $\frac{1}{60}$ kaareminutist.

Seega

$$1^0 = 60' = 3600'';$$
$$1' = 60''.$$

Ülesanded.

24. Ringjoone pikkus on 12 km. Mitu meetrit on selle ringjoone 1-minutise kaare pikkus?

25. Ringjoone 1^0-se kaare pikkus on 7,5 cm. Kui pikk on see ringjoon?

26. Maa ekvaatori pikkus on 40 070 km. Arvuta ekvaatori 1^0-se, $1'$-se ja $1''$-se kaare pikkus. Võrdle ekvaatori $1'$-se kaare pikkust eespool-toodud meremiiliga.

27. Mitu kraadi sisaldab kaar, mis on $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{8}$ ringjoonest?

28. Missuguse osa ringjoonest moodustab 10^0-, 20^0-, 18^0-, 54^0-, 210^0-ne kaar?

29. Jaota ringjoon kaarteks, mis toetuvad raadiuse pikkusele kõõlule. Kui suur on iga niisugune kaar?

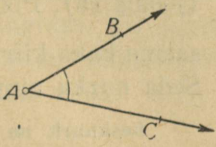
§ 9. Nurk.

Joonestame kaks kiirt AB ja AC, mis väljuvad ühest ja samast punktist A (joonis 16). Saadud kujundit nimetatakse nurgaks ja tähistatakse kas sümboliga $B\widehat{A}C$, $C\widehat{A}B$ või lihtsalt $\widehat{A}$. Seega

nurk on kujund, mille moodustavad kaks ühest ja samast punktist väljuvat kiirt.

Nurka moodustavaid kiiri nimetatakse nurga *haaradeks* ja nende ühist otspunkti — nurga *tipuks*.

Nurga haarad jaotavad tasapinna, millel see nurk asetseb, kaheks eraldatud piirkonnaks nii, et ühest piirkonnast ei ole võimalik mööda tasapinda teise piirkonda minna ilma nurga üht haara läbimata.



Joonis 16.

Tasapinna ühe piirkonna kohta öeldakse, et ta asetseb nurga *sees*, ja teise piirkonna kohta, et ta asetseb *väljaspool* nurka. Kumma piirkonna loeme nurga sees olevaks, see on kokkuleppe küsimus. Harilikult märgitakse nurga sees olev piirkond kaarekesega (joonis 16).

Kahe nurga suuruse võrdlemiseks paigutatakse üks nurk teise nurga peale ja nimelt nii, et nende tipud ja ühed haarad ühtivad. Olgu antud võrrelda $\widehat{NOP}$ ja $\widehat{KLM}$ (joonis 17). Paigutame nurga NOP nurga KLM peale nii, et tipp O ühtiks tipuga L ja et haar ON ühtiks haaraga LK. Haar OP võib seejuures sattuda kas nurga KLM sisse või selle nurga haarale LM või väljapoole nurka KLM. Esimesel juhul

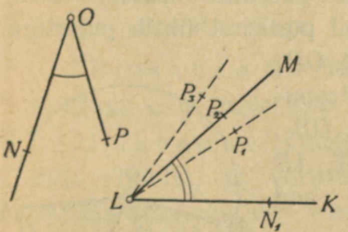
$$\widehat{NOP} < \widehat{KLM},$$

teisel juhul

$$\widehat{NOP} = \widehat{KLM}$$

ja kolmandal juhul

$$\widehat{NOP} > \widehat{KLM}.$$



Joonis 17.

Seega

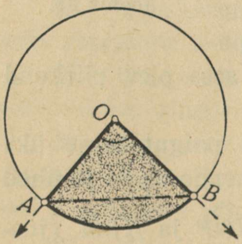
kaks nurka on võrdsed, kui neid saab teineteise peale paigutada nii, et nad ühtivad.

Nurki tähistatakse ka kreeka väikeste tähtedega, näiteks α, β, γ.

§ 10. Kesknurk.

Joonestame ringjoone ja selle kaks raadiust OA ja OB (joonis 18). Pikendades neid raadiusi väljapoole ringjoont, saame kaks kiirt OA ja OB, mis moodustavad nurga $\widehat{AOB}$. Seda nurka nimetatakse k e s k n u r g a k s. Seega

kesknurk on nurk, mille tipp asetseb ringjoone keskpunktis.



Joonis 18.

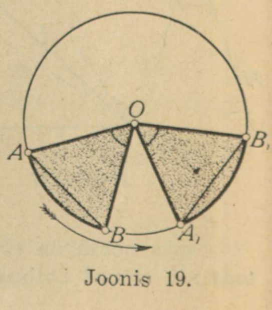
Kesknurga AOB kohta öeldakse, et ta t o e t u b kaarele AB või kõõlule AB.

Kesknurga sees asetsevat ringi osa nimetatakse s e k t o r i k s. Sektor on piiratud kahe raadiusega ja ühe kaarega.

Vaatleme ühes ja samas ringis kaht v õ r d s e t kesknurka AOB ja A_1OB_1 (joonis 19). Näitame, et

võrdsed kesknurgad toetuvad võrdsetele kaartele ja võrdsetele kõõludele.

Selle teoreemi tõestamiseks pöörame sektorit AOB tasapinnal ümber punkti O, kuni punkt A ühtib punktiga A_1. Et kesknurgad AOB ja A_1OB_1 on võrdsed, siis ühtib sellel pööramisel sektor AOB sektoriga A_1OB_1, kaar AB kaarega A_1B_1 ja kõõl AB kõõluga A_1B_1. Järelikult on nad võrdsed.



Joonis 19.

Eeldame nüüd, et joonisel 19 kaared AB ja A_1B_1 või kõõlud AB ja A_1B_1 on võrdsed. Pöörates sektorit

AOB ümber punkti O endisel viisil, jõuame otsusele, et ka kesknurgad AOB ja A_1OB_1 on võrdsed. Seega

võrdsetele kaartele või kõõludele toetuvad võrdsed kesknurgad.

Need kaks teoreemi kesknurkade kohta on õiged ka siis, kui need nurgad ei asetse ühes ja samas ringis, vaid erinevates, kuid võrdsete raadiustega ringides. Sel juhul paigutame ühe ringi teise peale nii, et nende keskpunktid ühtivad, ja jätkame siis tõestamist endisel viisil.

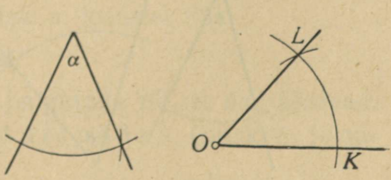
§ 11. Konstruktsioonülesandeid.

Geomeetrilise kujundi ehitamist selleks määratud joonestamisriistade abil nimetatakse konstruktsiooniks. Joonestamisriistadena kasutatakse seejuures peamiselt joonlauda ja sirklit, mõnikord ka kolmnurka ja malli. Kus see teisiti ei ole öeldud, seal eeldatakse käesolevas raamatus, et konstruktsioon toimub ainult joonlaua ja sirkli abil.

Konstruktsioonülesande lahendamisel ei ole lubatud arvutamine ega proovimine: otsitava punkti või joone leidmine peab toimuma ainult nende toimingutega, mida võimaldavad joonlaud ja sirkel, s. o. sirgete ja ringjoonte joonestamisega.

Ülesanne 1. Ehitada nurk, mis on võrdne antud nurgaga α ja mille tipp ning üks haar on antud.

Lahendus (joonis 20). Teades, et võrdsete raadiustega ringides võrdsetele kõõludele vastavad võrdsed kaared ja võrdsed kesknurgad, toimime järgmiselt:



Joonis 20.

1. Joonestame antud nurga tipu ja ehitatava nurga tipu O ümber võrdsete raadiustega kaared ja tähistame punkti O ümber joonestatud kaare ning antud kiire lõikepunkti näiteks tähega K;

2. joonestame punkti K ümber kaare, mille raadius võrdub antud nurgale kui kesknurgale vastava kõõluga, ja tähistame selle kaare lõikepunkti endise kaarega näiteks tähega L;

3. joonestame kiire, mis lähtub punktist O ja läbib punkti L.

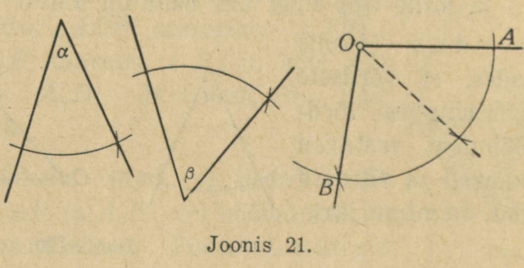
Nurk KOL on võrdne antud nurgaga α, sest neile nurkadele kui kesknurkadele vastavad kõõlud on võrdsed.

Ülesanne 2. Liita antud nurgad α ja β.

Lahendus (joonisel 21). Ehitame vabalt võetud punkti O juurde nurga, mis võrdub antud nurgaga α, ja suurendame seda nurga β võrra. Saadud nurk AOB kujutab nurkade α ja β summat:

$$\widehat{AOB} = \alpha + \beta.$$

Kui nurgad α ja β joonisel 21 on võrdsed, siis ütleme, et kumbki neist on pool nurgast AOB. Nende nurkade ühine haar on nurga AOB poolitaja.

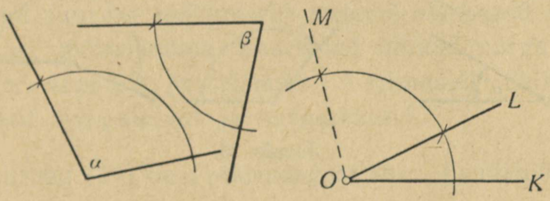


Joonis 21.

Ülesanne 3. Lahutada antud nurgast α antud nurk β.

Lahendus (joonis 22). Ehitame vabalt võetud punkti O juurde esiteks nurga KOM, mis võrdub antud nurgaga α, ja vähendame seda nurga β võrra. Ülejääv nurk KOL on nurkade α ja β vahe:

$$\widehat{KOL} = \alpha - \beta.$$



Joonis 22.

Ülesanded.

30. Joonesta kahe vabalt võetud nurga summa.

31. Joonesta nurk, mis on antud nurgast kolm korda suurem.

32. Joonesta kolmnurk ja ehita sirkli ja joonlaua abil selle nurkade summa.

33. Leia kahe vabalt võetud nurga vahe.

§ 12. Nurkade liigitelu.

Nurka, mille haarad moodustavad sirgjoone, nimetatakse sirgnurgaks (nurk α joonisel 23).

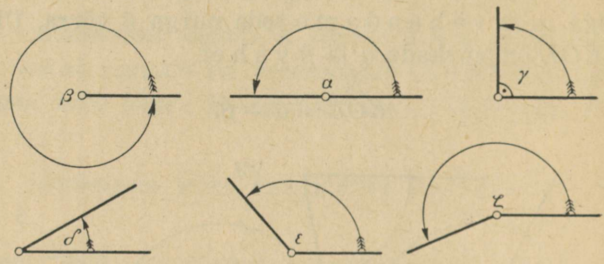
Kõik sirgnurgad on võrdsed,

sest neid saab üksteise peale paigutada nii, et nad ühtivad. Kahe sirgnurga summa on täispööre (nurk β joonisel 23). Seega

sirgnurk on pool täispöördest.

Nurka, mis on pool sirgnurgast, nimetatakse täisnurgaks (γ joonisel 23); seega

täisnurk on veerand täispöördest.



Joonis 23.

Et sirgnurgad on võrdsed, siis on seda ka nende pooled; seega

kõik täisnurgad on võrdsed.

Täisnurga haarade kohta öeldakse, et nad on teineteisega risti ehk nad ristuvad; seega kaks sirget ristuvad, kui nende lõikumisel tekib täisnurk. Joonisel märgitakse kahe sirge ristumist ja seega ka täisnurka kaarekese ja punktiga nurga sees, kuna kirjas tarvitatakse selleks tähist $\perp$.

Nurka, mis on väiksem täisnurgast, nimetatakse teravnurgaks (δ joonisel 23), ja nurka, mis on suurem täisnurgast, kuid väiksem sirgnurgast, nimetatakse nürinurgaks (ε joonisel 23). Sirgnurgast suuremat nurka nimetatakse kumernurgaks (ζ joonisel 23).

Ülesanded.

34. Leia vabalt võetud nürinurga ja teravnurga vahe.

35. Joonesta vabalt kumernurk ja teravnurk. Leia, mitu korda teravnurk mahub kumernurka.

36. Missuguse nurga võrra pöördub kella suur osuti 60, 30, 15 minutiga?

37. Joonesta vabalt kaks teravnurka ja ehita kolmas nurk nii, et nende summa oleks sirgnurk.

§ 13. Nurga mõõtmine.

Nurga suuruse mõõtmiseks vajame vastavaid mõõduühikuid ja mõõtmisriistu. Suuremad ühikud nurga mõõtmiseks on sirgnurk ja täisnurk. Väiksemad ühikud on nurgakraad, nurgaminut ja nurgasekund.

Nurgakraad (1^0) on $\frac{1}{90}$ täisnurgast ehk $\frac{1}{360}$ täispöördest.

Nurgaminut ($1'$) on $\frac{1}{60}$ nurgakraadist;

nurgasekund ($1''$) on $\frac{1}{60}$ nurgaminutist.

Seega

$$1 \text{ täisnurk} = 90^0 = 5400' = 324\,000'';$$
$$1^0 = 60' = 3\,600'';$$
$$1' = 60''.$$

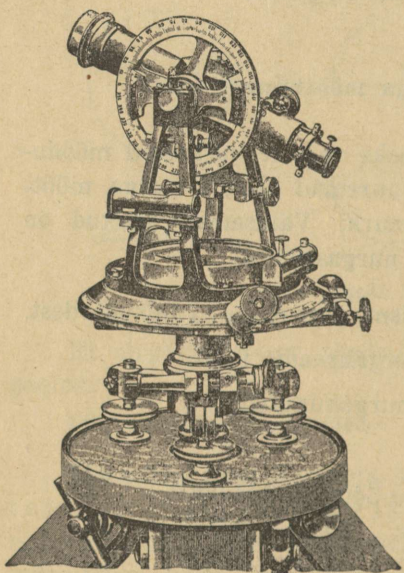
Et nurgaminut ja eriti nurgasekund on väga väikesed ühikud, siis tarvitatakse neid seal, kus on vajalikud väga täpsed mõõtmised, nagu maamõõtmisel ja astronoomias. Nende ühikute võrdlemiseks võiks näiteks öelda, et 10 meetri kauguselt vaadatuna paistab

inimese nägu (17,5 cm) ühekraadises nurgas,

õlekõrre läbimõõt (3 mm) üheminutises nurgas,

juuksekarva läbimõõt (0,05 mm) ühesekundises nurgas.

Paberil ja klassitahvlil joonestatud nurkade mõõtmiseks kasutatakse nurgamõõtmise riistana malli. Välistöödel kasutavad maamõõtjad nurgamõõtmise riistana teodoliiti (joonis 24).



Joonis 24.

Malli poolringi kaar on jaotatud kaarekraadideks ja nurga mõõtmisel leitakse, mitu kraadi sisaldab nurgale kui kesknurgale vastav kaar. Et ringjoon on jaotatud 360-ks kaarekraadiks ja täispööre samuti 360-ks nurgakraadiks, siis sisaldab iga kaar niisama palju kaarekraade, kui palju vastav kesknurk sisaldab nurgakraade.

Ülesanded.

38. Mitu kraadi ja minutit on $12{,}5^\circ$, $7{,}3^\circ$, $24\frac{1}{3}^\circ$, $87\frac{3}{5}^\circ$?

39. Mitu kraadi on $82^\circ 12'$, $15^\circ 54'$, $32^\circ 20'$, $30^\circ 30' 30''$?

40. Arvuta nurkade $\alpha = 81^\circ 45'$ ja $\beta = 28^\circ 38'$ summa ja vahe.

41. Arvuta nurkade $\alpha = 17^\circ 38' 15''$, $\beta = 43^\circ 25' 44''$ ja $\gamma = 46^\circ 54' 05''$ summa.

42. Kui suure nurga võrra pöördub kella minutiosuti 42 min. vältel?

43. Missuguse aja vältel pöördub kella tunniosuti 25°-se nurga võrra?

44. Mis saab järeldada eeldustest $\alpha = \beta$ ja $\alpha + \beta = 180^{\circ}$?

45. Kas $\hat{A}$ on terav- või nürinurk, kui $\hat{A} = 180^{\circ} - \hat{B}$ ja $\hat{B} < 90^{\circ}$?

46. Ehita malli abil nurgad 35°, 60°, 127°, 175°.

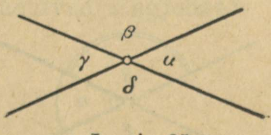
47. Jaota vabalt võetud nurk malli abil 2-ks, 4-ks võrdseks nurgaks.

48. Kui suur kesknurk toetub kaarele, mis on $\frac{5}{8}$ ringjoonest?

§ 14. Kõrvunurgad ja tippnurgad.

Kahe sirge lõikumisel tekib neli nurka (joonis 25). Nurki, mis asetsevad teineteise suhtes nagu α ja β või α ja δ, nimetatakse kõrvunurkadeks. Joonisel 26 on üks kõrvunurkade paar eraldi joonestatud. Sellest näeme, et

kõrvunurkadeks nimetatakse kaht nurka, millel on ühine tipp, üks ühine haar ja mille teised haarad moodustavad sirgjoone.

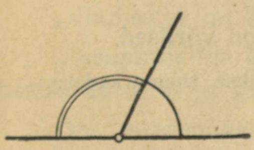


Joonis 25.

Sellest järeldame, et

kõrvunurkade summa võrdub kahe täisnurgaga.

Tõestuseks liidame kõrvunurgad, kõrvaldades nende ühise haara. Et ülejäänud haarad moodustavad sirgjoone, siis võrdub kõrvunurkade summa sirgnurgaga ehk kahe täisnurgaga.


Joonis 26.

Selle teoreemi põhjal võime arvutada antud nurga kõrvunurga. Olgu $\alpha = 48^{\circ}\,17'$; selle kõrvunurk

$$\beta = 180^{\circ} - 48^{\circ}\,17'$$

ehk

$$\beta = 131^{\circ}\,43'.$$

Järeldused:

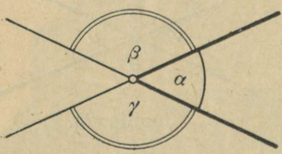
1. kui üks kõrvunurkadest on teravnurk, siis teine on nürinurk;

2. kui üks kõrvunurkadest on täisnurk, siis on teine ka täisnurk;

3. kui kõrvunurgad on võrdsed, siis nad on mõlemad täisnurgad.

Antud nurga kõrvunurga joonestamiseks tuleb pikendada selle nurga üht haara üle tipu. Et pikendada võib ükskõik kumba haara, siis on igal nurgal õieti kaks kõrvunurka.

Pikendades nurga α mõlemat haara üle tipu (joonis 27), saame nurga α kõrvunurgad β ja γ. Näitame, et need kaks nurka on võrdsed.



Joonis 27.

Et kõrvunurkade summa on sirgnurk, siis

$$\alpha + \beta = 180^0$$

ja

$$\alpha + \gamma = 180^0;$$

seega

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma.$$

Lahutades viimase võrduse mõlemast poolest nurga α saame

$$\beta = \gamma,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Seega ühe ja sama nurga kõrvunurgad on võrdsed.

Ühe ja sama nurga kõrvunurki nimetatakse tippnurkadeks.

Eespool tõestasime seega, et

tippnurgad on võrdsed.

Kahe sirge lõikumisel tekib alati kaks tippnurkade paari.

Ülesanded.

49. Kui suur on nurga $141^{0}\,57'$ kõrvunurk?

50. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 18^{0} võrra suurem?

51. Kui suur on nurk, mis on $\frac{7}{8}$ oma kõrvunurgast?

52. Näita, et kahe võrdse nurga kõrvunurgad on võrdsed.

53. Kahe tippnurga summa on $105^{0}\,38'$. Kui suur kõrvunurk on neil tippnurkadel?

54. Ühel pool sirget CD asetseb punkt A ja teisel pool punkt B. Leia sirgel CD punkt P nii, et $A\hat{P}C = B\hat{P}D$. Kas ülesanne on alati lahenduv?

55. Nurk kahe diameetri vahel on $35^{0}\,20'$. Kui suur on iga kaar, milleks need diameetrid jaotavad ringjoone?

§ 15. Definitsioon.

Peale aksioomide ja teoreemide on veel üks eriline liik matemaatilisi lauseid; need on definitsioonid, s. t. niisugused laused, millega antakse sisu mingile uuele mõistele. Lause „kõõluks nimetatakse sirglõiku, mis ühendab ringjoone kaht punkti“ on definitsioon, sest selle lausega öeldakse, mis tähendab sõna „kõõl“. Samuti on definitsioonid järgmised laused:

„diameeter on kõõl, mis läbib keskpunkti“;

„tasapinnaline kujund on kujund, mille kõik punktid asetsevad ühel ja samal tasapinnal“.

On iseloomustav, et definitsioonides saab sõna „on“ asendada sõnaga „nimetatakse“, mida aksioomides ja teoreemides teha ei saa.

Geomeetrias püütakse võimalikult kõigile mõistetele, mida seal tarvitatakse, anda definitsioonid. Mõistet, mida kasutatakse ilma definitsioonita, nimetatakse a l g m õ i s - t e k s. Niisugused mõisted on mõisted, mis on arusaadavad ilma definitsioonita ja mis on niivõrra lihtsad, et neid ei saagi defineerida; algmõisteina tarvitatakse näiteks mõisteid „punkt", „pikkus", „suurus", „sirglõik", „ruum".

Ülesanded.

56. Missuguste mõistete abil defineeritakse nurga mõistet?

57. Anna järgmiste mõistete definitsioonid: sirgnurk, teravnurk, kaarekraad, ring, sirglõigu keskpunkt.

58. Leia eespool jämedalt trükitud lausete hulgast definitsioone, aksioome ja teoreeme.

§ 16. Eeldus ja väide.

Igas geomeetrilise sisuga teoreemis saab eristada kaht osa; ühes neist öeldakse, missugustest kujunditest on jutt, ja teises väidetakse mingit tõsiasja nendest kujunditest. Esimest osa nimetatakse e e l d u s e k s ja teist v ä i t e k s. Näiteks teoreemis

tippnurgad on võrdsed

on eelduseks asjaolu, et kõnesolevad nurgad on t i p p - n u r g a d, ja väiteks asjaolu, et need nurgad on v õ r d - s e d.

Eelduse ja väite paremaks eraldamiseks antakse teoreem sageli niisuguses sõnastuses, et eeldus algab sõnaga k u i ja väide sõnaga s i i s. Ülaltoodud teoreemi tippnurkade kohta võime niiviisi sõnastada järgmiselt:

kui kaks nurka on tippnurgad, siis nad on võrdsed.

Kui teoreemis vahetada eeldus ja väide, s. t. eeldus teha väiteks ja väide eelduseks, siis saame uue teoreemi, mida nimetatakse endise p ö ö r d t e o r e e m i k s. Ülaltoodud teoreemi pöördteoreem on järgmine:

kui kaks nurka on võrdsed, siis nad on tippnurgad.

Kuid see teoreem ei ole õige: mistahes kaks võrdset nurka ei tarvitse olla tippnurgad. Sellest selgub, et mitte iga teoreemi pöördteoreem ei ole õige, ja seepärast tuleb ka pöördteoreeme tõestada.

Ülesanded.

59. Sõnasta teoreemid §-s 10 nii, et neis esineksid sõnad „kui“ ja „siis“.

60. Moodusta järgmise teoreemi pöördteoreem ja otsusta, kas see on õige: „Kui kaks nurka on eraldi võrdsed kolmandaga, siis on nad teineteisega võrdsed.“

61. Joonesta kolm k o n t s e n t r i l i s t, s. o. ühise keskpunktiga ringjoont ja neis malli abil ühine kesknurk 45^{0}. Mitu kraadi sisaldab iga kaar, mis on kesknurga sees?

62. Malli kasutades joonesta sektor, mille nurk on 60^{0} ja raadius on 5 cm.

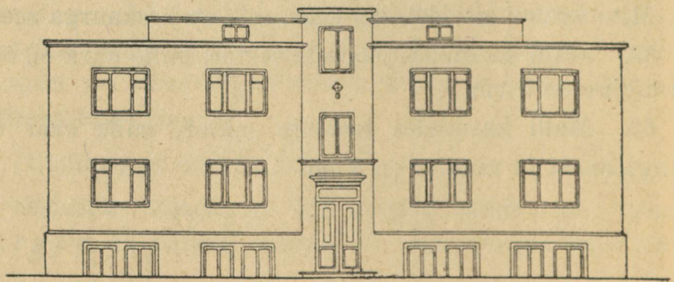
63. Malli kasutades joonesta sektor, mille kaar on $\frac{2}{5}$ ringjoonest ja raadius on 4 cm.

Peatükk III.

Kujundite teljeline sümmeetria.

§ 17. Sümmeetria mõiste.

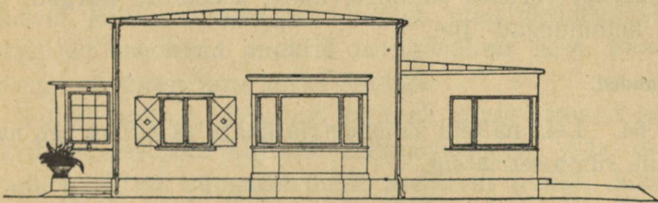
Paljude tarbeesemete ja loodusvormide iseloomustavaks omaduseks on nende sümmeetria. Selle mõistega tutvumiseks vaatleme joonisel 28 kujutatud maja: selle üksikosad, näiteks aknad, asetsevad ühteviisi maja esikülge poolitava püstsirge suhtes. Kui maja joonis seda sirget mööda kahekorra murda, siis ühtib joonise üks pool teisega.



Joonis 28

Seda joonise 28 omadust nimetataksegi sümmeetriaks ja joonist ennast sümmeetriliseks. Joonisel 29 kujutatud majal puudub sümmeetria.

Sümmeetrilise joonise poolte kohta, mis joonise kahekorra murdmisel ühtivad, öeldakse, et nad asetsevad sümmeetriliselt ehk — nad on sümmeetrilises asendis.



Joonis 29.

Kui sirge kohale, mille suhtes joonis on sümmeetriline, paigutada peegel risti joonise tasapinnaga, siis peegeldub selles joonise üks pool niisugusena, nagu on teine pool. Sellest nähtub, et

pilt ja peegelpilt on sümmeetrilises asendis.

Kui paberile teha tindiga mingi joonis ja paberileht kokku murda enne, kui tint on kuivanud, siis lehe uuesti avamisel võib näha tehtud joonise kõrval uut joonist, mis asetseb endisega sümmeetriliselt.

Neist näiteist selgub, et

kaks tasapinnalist kujundit asetsevad sümmeetriliselt, kui mõnda sirget mööda saab tasapinda kahekorra murda nii, et üks kujund teisega ühtib.

Sirget, mida mööda kokkumurdmine toimub, nimetatakse kujundite sümmeetriateljeks. Need punktid, sirglõigud või nurgad, mis sel kokkumurdmisel ühtivad, asetsevad sümmeetriliselt sirge suhtes, mida mööda toimus tasapinna kahekorra murdmine.

Sümmeetriliselt asetsevad sirglõigud ühtivad joonise kokkumurdmisel selle sümmeetriatelge mööda; seetõttu

sümmeetriliselt asetsevad sirglõigud on võrdsed.

Samuti on võrdsed sümmeetriliselt asetsevad nurgad, ringid, kolmnurgad jne.

Ülesanded.

64. Leia näiteid sümmeetria kohta ja määra iga näite puhul sümmeetriatelg.

65. Valmista mõned sümmeetrilised joonised.

66. Missugune punkt asetseb sümmeetriliselt sümmeetriatelje punktiga?

§ 18. Sümmeetriliselt asetsevad punktid.

Tasapinna kahekorra murdmisel mingit sirget t mööda tasapinna iga punkt meie kujutluse järgi ühtib sama tasapinna ühe ja ainult ühe punktiga. Teisiti:

iga punkt on antud telje suhtes sümmeetrilises asendis ainult ühe punktiga.

Sellest saab järeldada, et üldiselt

iga kujund on antud telje suhtes sümmeetrilises asendis ainult ühe kujundiga.

Tõepoolest, kui mingi kujund, näiteks sirglõik, oleks antud telje suhtes sümmeetrilises asendis enam kui ühe sirglõiguga, siis antud sirglõigu mõni punkt peaks olema sümmeetrilises asendis enam kui ühe punktiga. Et seda olla ei saa, siis antud sirglõik on sümmeetrilises asendis ainult ühe sirglõiguga.

Et antud kujundi järgi ehitada temaga sümmeetriliselt asetsevat kujundit, selleks võtame antud kujundil punktid, millega ta on määratud, ja leiame nendega sümmeetriliselt asetsevad punktid. Viimastega määratud kujund on antud kujundiga sümmeetrilises asendis.

N ä i d e. Et ehitada antud lõiguga sümmeetriliselt asetsevat lõiku, ehitame antud lõigu otspunktidega sümmeetriliselt asetsevad punktid ja ühendame need. Saadud lõik ongi sümmeetriline antud lõiguga.

Sellest nähtub, et mingi kujundi järgi temaga sümmeetriliselt asetseva kujundi ehitamiseks on vaja osata ehitada punktiga sümmeetriliselt asetsevat punkti. Kuidas seda teha, see selgub sümmeetriliselt asetsevate punktide omaduste tundmaõppimisel.

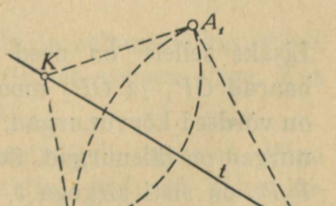
Olgu A_1 ja A_2 sirge t suhtes sümmeetriliselt asetsevad punktid (joonis 30). Võtame sirgel t mingi punkti K ning joonestame sirglõigud A_1K ja A_2K. Need sirglõigud asetsevad sümmeetriliselt sirge t suhtes, mistõttu

$$A_1K = A_2K.$$

Seega

sümmeetriliselt asetsevad punktid on sümmeetriatelje punktist võrdsetel kaugustel.

Kõik ühest ja samast punktist võrdsetel kaugustel olevad punktid asetsevad ühel ja samal ringjoonel; seetõttu sümmeetriatelje mingi punkti, näiteks punkti K ümber joonestatud ringjoon, mis läbib punkti A_1, läbib ka punkti A_2 (joonis 30).



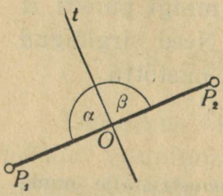
Joonis 30.

Seda teades võime ainuüksi sirkli abil ehitada antud punktiga A_1 antud telje t suhtes sümmeetriliselt asetseva punkti. Selleks joonestame kaks ringjoont läbi antud punkti A_1, võttes nende ringjoonte keskpunktideks kaks sümmeetriatelje punkti, näiteks K ja L (joonis 30). Punktiga A_1 sümmeetriliselt asetsev punkt peab asetsema nii esimesel kui ka teisel ringjoonel, järelikult ta asetseb nende lõikepunktis. Nagu joonisest näha, lõikuvad need ringjooned peale punkti A_1 veel ühes teises punktis A_2; see ongi punktiga A_1 sirge t suhtes sümmeetriliselt asetsev punkt.

Teine sümmeetriliselt asetsevate punktide tähtis omadus on järgmine:

sümmeetriliselt asetsevaid punkte läbiv sirge on risti sümmeetriateljega.

Eeldame, et punktid P_1 ja P_2 asetsevad sümmeetriliselt sirge t suhtes (joonis 31). Joonestame sirge P_1P_2 ja näitame, et P_1P_2 on risti sirgega t. Selleks vaatleme nurki α ja β, mis sirge P_1P_2 moodustab sümmeetriateljega (joonis 31).



Joonis 31.

Et nurga α haar OP_1 asetseb sümmeetriliselt nurga β haaraga OP_2, siis on need nurgad sümmeetrilises asendis; seetõttu

$$\alpha = \beta.$$

Lisaks sellele on need nurgad kõrvunurgad, sest nende haarad OP_1 ja OP_2 moodustavad sirgjoone. Seega α ja β on võrdsed kõrvunurgad. Varem leidsime, et võrdsed kõrvunurgad on täisnurgad. Seega ka α ja β on täisnurgad ning P_1P_2 on risti sirgega t, mida oligi vaja tõestada.

Eespool nägime, et sümmeetriliselt asetsevad punktid on sümmeetriatelje punktist võrdsetel kaugustel. Seetõttu punkt O poolitab lõigu P_1P_2. Et lõik P_1P_2 on seejuures risti sümmeetriateljega, siis

sümmeetriatelg poolitab sümmeetriliselt asetsevate punktide ühenduslõigu ja on sellega risti.

Näitame nüüd, et igal sirgel, mis on risti sümmeetriateljega, leidub sümmeetriliselt asetsevaid punkte.

Eeldame, et sirge P_1P_2 joonisel 31 on risti sümmeetriateljega t ja seejuures

$$OP_1 = OP_2.$$

Kui joonis 31 mööda sirget t kahekorra murda, siis kiir OP_1 satub kiirele OP_2, sest nurgad, mis need kiired moodustavad sirgega t, on võrdsed. Kuid siis nende kiirte punktid P_1 ja P_2 ühtivad, sest lõigud OP_1 ja OP_2 on eelduse järgi võrdsed. Seega punktid P_1 ja P_2 on sümmeetrilises asendis sirge t suhtes. Nii oleme tõestanud, et

sümmeetriateljega ristuva sirge kaks punkti asetsevad sümmeetriliselt, kui nad teljest on võrdsetel kaugustel.

Ülesanded.

67. On antud sümmeetriatelg ja väljaspool seda üks punkt. Leia antud punktiga sümmeetriliselt asetsev punkt.

68. On antud sümmeetriatelg ja väljaspool seda üks sirglõik. Joonesta antud sirglõiguga sümmeetriliselt asetsev lõik.

69. On antud sümmeetriatelg ja sellega lõikuv sirge. Joonesta antud sirgega sümmeetriliselt asetsev sirge. Kus asetseb nende sirgete lõikepunkt?

70. Näita, et kahe sümmeetriliselt asetseva lõigu pikendused lõikuvad sümmeetriateljel, kui nad üldse lõikuvad.

71. Joonesta antud kolmnurgaga antud telje suhtes sümmeetriliselt asetsev kolmnurk.

72. Joonesta ringjoon, mille keskpunkt asetseb väljaspool sümmeetriatelge, ja ehita sellega sümmeetriliselt asetsev ringjoon.

§ 19. Ristsirge läbi väljaspool sirget asetseva punkti.

Sümmeetriliselt asetsevate punktide omadusi kasutades lahendame sirkli ja joonlaua abil järgmise ülesande:

joonestada antud sirgega ristuv sirge läbi punkti, mis on väljaspool antud sirget.

L a h e n d u s. Leiame antud punktiga antud sirge suhtes sümmeetriliselt asetseva punkti ja joonestame sirge, mis läbib neid kaht punkti. See sirge on risti antud sirgega, sest sümmeetriliselt asetsevaid punkte läbiv sirge on risti sümmeetriateljega.

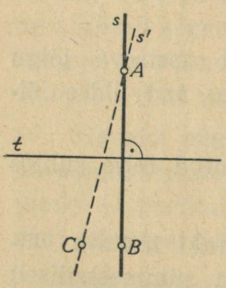
Et peale selle ristsirge joonestamise võtte on veel teisi võtteid, siis tekib küsimus, kas nii ehitatud sirge on ainus, mis läbib antud punkti ja on risti antud sirgega. Tõestame, et

läbi punkti väljaspool sirget läheb ainult üks sirge, mis on risti antud sirgega.

E e l d u s: sirge s läbib punkti A ja on risti sirgega t.

V ä i d e: ükski teine punkti A läbiv sirge ei ole risti sirgega t.

T õ e s t u s. Kui läbi punkti A läheks peale sirge s veel üks sirge, mis oleks risti sirgega t, näiteks sirge s', siis punkt A peaks olema sümmeetrilises asendis kahe punktiga. Tõepoolest, üks neist, ütleme punkt B, leidub sirgel s ja teine, punkt C, sirgel s' (joonis 32). Et iga punkt on antud telje suhtes sümmeetrilises asendis ainult ühe punktiga, siis on ainult üks sirge, mis läbib punkti A ja on risti sirgega t.



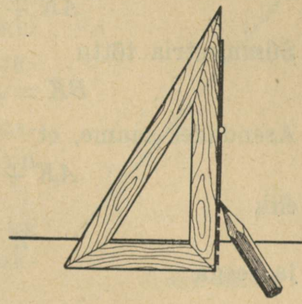
Joonis 32.

Et kõnesolevaid sirgeid on ainult üks, siis on ükskõik, missugust võtet kasutame ristsirge ehitamisel. Kõige lihtsam on ristsirget ehitada joonestamiskolmnurga abil (joonis 33).

Ülesanded.

73. Joonesta antud sirgega ristuv sirge läbi punkti, mis on väljaspool antud sirget.

74. Antud on sirglõik ja selle ühe otspunktiga antud telje suhtes sümmeetriliselt asetsev punkt. Ehita ainult joonestamiskolmnurka kasutades (ilma mõõtmiseta) selle sirglõiguga sümmeetriliselt asetsev sirglõik.

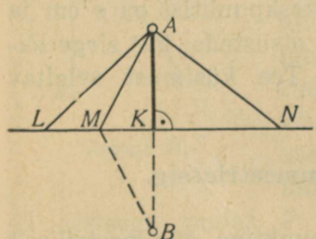


Joonis 33.

§ 20. Ristlõik ja kaldlõik.

Olgu antud sirge t ja väljaspool seda punkt A. Joonestame punkti A läbiva ristsirge lõigu sellest punktist kuni antud sirgeni, s. o. lõigu AK (joonis 34). Selle lõigu pikkust nimetatakse punkti A kauguseks sirgest t.

Punkti kaugus sirgest on punktist sirgeni mineva ristlõigu pikkus.



Joonis 34.

Kõiki teisi sirglõike, näiteks lõike AL, AM, AN joonisel 34, mis ühendavad antud punkti sirgega, nimetatakse kaldlõikudeks. Tõestame, et

ristlõik on lühem kui ükski samast punktist lähtuv kaldlõik.

Selle tõestamiseks ühendame punktiga A sümmeetriliselt asetseva punkti B punktidega K ja M. Et AKB on sirglõik, siis on ta kõige lühem joonlõik punktide A ja B vahel. Seepärast

$$AK + BK < AM + BM.$$

Sümmeetria tõttu

$$BK = AK \text{ ja } BM = AM.$$

Asendades saame, et

$$AK + AK < AM + AM$$

ehk

$$2 \cdot AK < 2 \cdot AM$$

ja seega

$$AK < AM,$$

mida oligi vaja tõestada.

Ülesanded.

75. Mõõda vabalt võetud punkti kaugus sirgest.

76. Joonesta vabalt kolmnurk ja mõõda selle iga tipu kaugus vastasküljest või selle pikendusest.

77. Joonesta ringjoon ja seda lõikav sirge. Tõesta, et selle sirge kaugus ringjoone keskpunktist on väiksem kui ringjoone raadius.

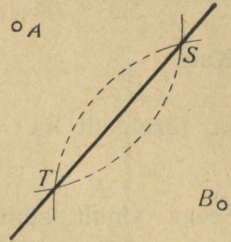
78. Sirge kaugus ringjoone keskpunktist on s cm ja ringjoone raadius on r cm. Kuidas otsustada, kas sirge lõikab ringjoont või ei lõika seda? Tee küsimust selgitav joonis.

§ 21. Kahe punkti sümmeetriatelg.

Eespool lahendasime antud punktiga sümmeetriliselt asetseva punkti joonestamise ülesande. Lahendame nüüd ümberpöördud ülesande:

antud on kaks punkti; leida sirkli ja joonlaua abil sirge, mille suhtes need punktid on sümmeetrilises asendis.

Sümmeetriatelje nagu iga sirge joonestamiseks on vaja leida selle kaks punkti. Nende leidmiseks kasutame tõsiasja, et sümmeetriliselt asetsevad punktid on telje punktist võrdsetel kaugustel. Seepärast toimime järgmiselt (joonis 35):



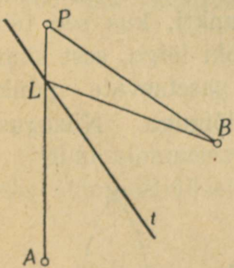
Joonis 35.

joonestame vabalt võetud raadiusega kaare, mille keskpunktiks on punkt A;

joonestame n i i s a m a s u u r e raadiusega teise kaare, mille keskpunktiks on punkt B;

kui need kaks kaart lõikuvad, siis lõikuvad nad kahes punktis; neid punkte läbiv sirge ongi otsitav sümmeetriatelg.

Kui need kaared ei peaks lõikuma, siis joonestame uued kaared suurema raadiusega.



Joonis 36.

P õ h j e n d u s. Ülalkirjeldatud viisil leitud punktid S ja T (joonis 35) on kahest sümmeetriliselt asetsevast punktist A ja B võrdsetel kaugustel, mistõttu need võivad olla ainult sümmeetriatelje punktid. Sest iga punkti kohta, mis ei ole sümmeetriateljel, saame näidata, et ta ei ole võrdsetel kaugustel sümmeetriliselt asetsevaist punktidest. Olgu A ja B kaks sümmeetriliselt asetsevat punkti ja asetsegu punkt P väljaspool sümmeetriatelge (joonis 36). Ühendame punkti P punktidega A ja B; siis üks neist ühenduslõikudest (joonisel PA) lõikab telge, ütleme punktis L, nii, et

$$AL = BL.$$

Seega

$$AP = AL + LP$$

ehk

$$AP = BL + LP.$$

Kuid

$$BL + LP > BP$$

ja järelikult ka

$$AP > BP.$$

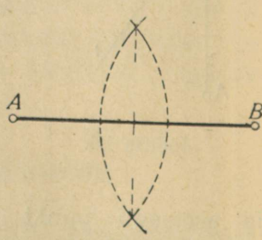
Seega ainult sümmeetriatelje punkt on sümmeetriliselt asetsevaist punktidest võrdsetel kaugustel.

Kaht niisugust punkti läbiv sirge on antud punktide A ja B sümmeetriatelg.

§ 22. Sirglõigu keskristsirge.

Lahendame sirkli ja joonlaua abil sirglõigu poolitamise ülesande (joonis 37). Selleks ehitame lõigu otspunktide sümmeetriatelje ja leiame punkti, kus see telg lõikab antud lõiku. See punkt poolitabki lõigu, sest sümmeetriatelg poolitab sümmeetriliselt asetsevate punktide ühenduslõigu ja on risti selle lõiguga. Niisugust sirget nimetatakse lõigu keskristsirgeks. Seega

sirglõigu keskristsirge on sirge, mis poolitab sirglõigu ja on sellega risti.



Joonis 37.

Et lõigu keskristsirge on lõigu otspunktide sümmeetriatelg, siis

lõigu keskristsirge iga punkt on võrdsetel kaugustel selle lõigu otspunktidest.

Joonestame nüüd ringjoone ja selle mingile kõõlule keskristsirge (joonis 38). Et ainult selle sirge punktid on kõõlu otspunktidest võrdsetel kaugustel ja et ka keskpunkt asetseb kõõlu otspunktidest võrdsetel kaugustel, siis

kõõlu keskristsirge läbib ringjoone keskpunkti.

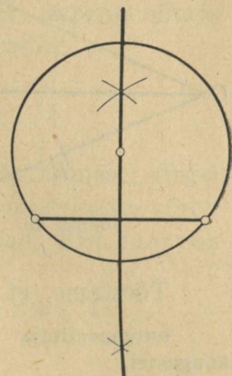
Ülesanded.

79. Poolita vabalt võetud sirglõik.

80. Leia vabalt võetud kolmnurga iga külje keskpunkt ja ühenda see vastasoleva tipuga. Mis võib öelda nende lõikude kohta?

81. Joonesta ringjoon, milles 4 cm pikkune kõõl on 3 cm kaugusel keskpunktist.

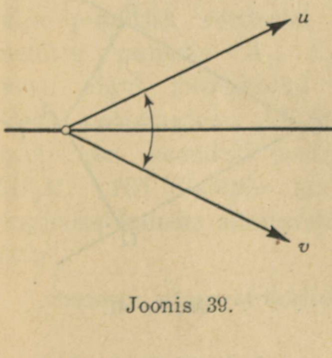
82. Joonesta ringjoon ja selle kahe vabalt võetud kõõlu keskristsirged. Kus lõikuvad need sirged?



Joonis 38.

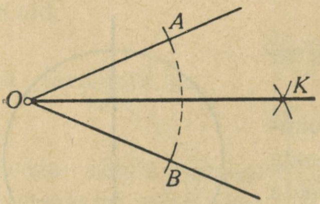
§ 23. Nurgapoolitaja.

Olgu sümmeetriatelje *t* mingist punktist joonestatud kaks sümmeetriliselt asetsevat kiirt *u* ja *v* (joonis 39). Nurgad nende kiirte ja sümmeetriatelje vahel on sümmeetrilises asendis ja seega võrdsed. Seetõttu sümmeetriatelg *t* on kiirte *u* ja *v* vahelise **n u r g a p o o l i t a j a.**



Joonis 39.

Kasutame seda sümmeetriatelje omadust selleks, et sirkli ja joonlaua abil poolitada antud nurk O (joonis 40). Ülesande lahendamiseks märgime nurga haaradel kaks sümmeetriliselt asetsevat, s. o. nurga tipust ühekaugusel olevat punkti A ja B ning leiame nende punktide sümmeetriatelje OK (joonis 40). Et nurga haarad on sirge OK suhtes sümmeetrilises asendis, siis



Joonis 40.

$$\widehat{AOK} = \widehat{BOK}.$$

Seega OK on nurga AOB poolitaja.

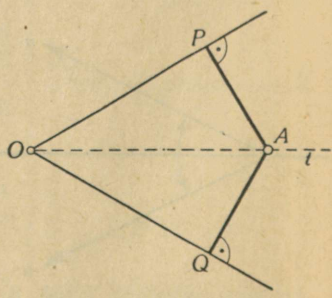
Tõestame, et

nurgapoolitaja iga punkt asetseb nurga haaradest võrdsetel kaugustel.

Eeldame, et sirge t on nurga O poolitaja ja A on selle üks punkt (joonis 41). Joonestame punktist A nurga haaradele ristlõigud AP ja AQ ning tõestame, et

$$AP = AQ.$$

Tõestuseks näitame, et lõigud AP ja AQ on sümmeetrilises asendis sirge t suhtes. Nurga kahekorra murdmisel mööda sirget t ühtivad haarad OQ ja OP, sest sirge t on nurga poolitaja. Seejuures punkt A jääb endisele kohale ja ristlõik AQ läheb mööda ristlõiku AP, sest vastasel juhul oleks punktist A joonestatud sirgele OP kaks ristsirget, nimelt AP ja AQ, mis on võimatu. Et punkt Q nurga kahekorra murdmisel peab sattuma nii sir-



Joonis 41.

gele OP kui ka sirgele AP, siis ta võib sattuda ainult nende sirgete lõikepunkti, s. o. punkti P. Kuid siis on AP ja AQ sümmeetriliselt asetsevad sirglõigud ja seega võrdsed.

Edaspidi saame tõestada, et ainult nurgapoolitaja punkt on võrdsetel kaugustel nurga haaradest.

Ülesanded.

83. Poolita vabalt võetud nürinurk.

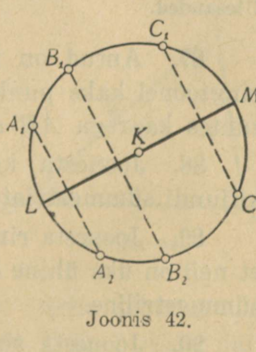
84. Joonesta sirgega ristuv sirge läbi esimesel sirgel antud punkti. Näpunäide: rakenda nurga poolitamise võtet.

85. Joonesta kõrvunurkade poolitajad. Kui suur on nurk nende nurgapoolitajate vahel?

86. Joonesta sirkli ja joonlaua abil nurk 45^0.

§ 24. Ringjoone sümmeetria.

Joonestame ringjoone ja selle mingi läbimõõdu, näiteks läbimõõdu LM (joonis 42). Võtame sel ringjoonel punktid A_1, $B_1, \ldots$ ja leiame nendega läbimõõdu LM suhtes sümmeetriliselt asetsevad punktid A_2, $B_2, \ldots$ Kaks sümmeetriliselt asetsevat punkti peavad olema punktist K kui sümmeetriatelje punktist võrdsetel kaugustel; seetõttu punktid A_2, $B_2, \ldots$ asetsevad algul joonestatud ringjoonel. Seega poolringjoon LB_1M on sümmeetrilises asendis poolringjoonega LB_2M. Nii jaotab iga läbimõõt ringjoone kaheks sümmeetriliselt asetsevaks kaareks, mistõttu

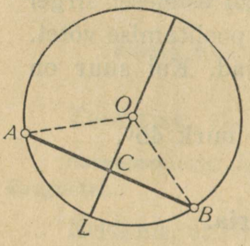


Joonis 42.

ringjoone sümmeetriateljeks on tema läbimõõt.

Läbimõõdu LM suhtes sümmeetriliselt asetsevate punktide leidmiseks joonestame kõõlu, mis on risti läbimõõduga LM. Niisuguse kõõlu otspunktid on sümmeetrilises asendis.

Olgu nüüd antud ringjoon ja selle üks kõõl, näiteks AB (joonis 43). Leiame selle kujundi sümmeetriatelje. Selleks peab olema üks läbimõõt ja nimelt see, mis antud kõõluga on risti, sest ainult selle läbimõõdu suhtes on punktid A ja B sümmeetrilises asendis. Samasuguses asendis selle läbimõõdu suhtes on raadiused AO ja BO, samuti kaared AL ja BL. Sümmeetria tõttu



Joonis 43.

$$AC = BC, \quad \widehat{AOL} = \widehat{BOL} \text{ ja } \overset{\frown}{AL} = \overset{\frown}{BL}.$$

Seega

kõõluga ristuv läbimõõt poolitab kõõlu, sellele vastava kesknurga ja kaare.

Ülesanded.

87. Antud on ringjoon ja selle üks läbimõõt. Võta ringjoonel kaks punkti A ja B ning leia antud läbimõõdu suhtes kaarega AB sümmeetriliselt asetsev kaar.

88. Joonesta kaks lõikuvat ringjoont ja leia selle kujundi sümmeetriatelg.

89. Joonesta ringjoon ja selles kaks võrdset kõõlu nii, et neil on üks ühine otspunkt. Näita, et saadud kujund on sümmeetriline.

90. Joonesta ringjoon, millele antud sirglõik on kõõluks ja mille raadius on antud.

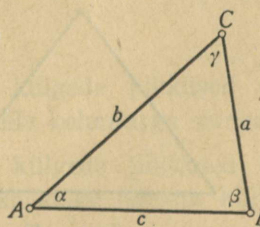
Peatükk IV.

Kolmnurk.

§ 25. Kolmnurga elemendid ja nende tähistamine.

Kolmnurk on kujund, mis tekib kolme mitte ühel sirgel asetseva punkti ühendamisel sirglõikudega.

Need punktid on kolmnurga t i p u d ja neid ühendavad sirglõigud on kolmnurga k ü l j e d. Iga kahe külje vahel on kolmnurga üks n u r k. Kolmnurga nurki ja külgi nimetatakse kolmnurga e l e m e n t i d e k s.

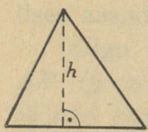


Joonis 44.

Harilikult tähistatakse kolmnurga tippe ladina suurte tähtedega, nurki vastavate väikeste kreeka tähtedega ja külgi vastavate väikeste ladina tähtedega; seejuures peab tipu A vastas asetsema külg a, tipu B vastas külg b ja tipu C vastas külg c (joonis 44). Selle tähistusviisi juures saab kolmnurga nurka nimetada kolmel viisil, näiteks nurk α või $\widehat{A}$ või $\widehat{CAB}$.

Kolmnurga tipust vastasküljele või selle pikendusele joonestatud ristlõiku nimetatakse kolmnurga k õ r g u-

seks. Ka kõrgus on üks kolmnurga element. Kõrgust tähistatakse harilikult tähega h (joonised 45 ja 49). Kolmnurga külge, millele on joonestatud kõrgus, nimetatakse kolmnurga *aluseks.*



Joonis 45.

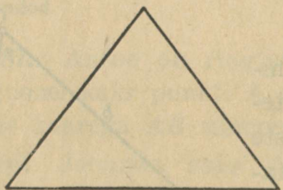
Sirglõiku, mis ühendab kolmnurga tippu selle vastaskülje keskpunktiga, nimetatakse kolmnurga *küljepoolitajaks* ehk *mediaaniks.*

Kolmnurga sümbolina kasutatakse sümbolit $\triangle$.

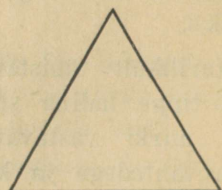
§ 26. Kolmnurkade liigitelu.

Kolmnurki liigitatakse külgede ja nurkade järgi.

Külgede järgi kolmnurk on kas *iseküIgne*, *võrdhaarne* või *võrdkülgne.* Kolmnurka nimetame iseküIgseks, kui tal ei ole võrdseid külgi (joonis 44), võrdhaarseks, kui tal on kaks võrdset külge (joonis 46), ja võrdkülgseks, kui tal on kolm võrdset külge (joonis 47).



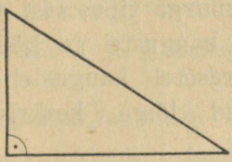
Joonis 46.



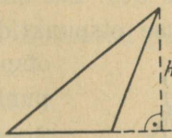
Joonis 47.

Võrdhaarse kolmnurga kaht võrdset külge nimetatakse *haaradeks* ja kolmandat külge *aluseks.* Selle kolmnurga aluse vastasnurka nimetatakse *tipunurgaks* ja aluse lähisnurki *alusnurkadeks.* Ristlõik aluse vastastipust alusele on võrdhaarse kolmnurga *kõrgus.*

Edaspidi näeme, et kui kolmnurgal on üks nurk täisnurk või üks nurk nürinurk, siis teised nurgad on teravnurgad. Sellest sõltuvalt on kolmnurk nurkade järgi kas t e r a v n u r k n e, t ä i s n u r k n e või n ü r i n u r k n e. Kolmnurka nimetame teravnurkseks, kui tal on kõik nurgad teravnurgad (joonis 44), täisnurkseks, kui tal on üks nurk täisnurk (joonis 48), ja nürinurkseks, kui tal on üks nurk nürinurk (joonis 49).



Joonis 48.



Joonis 49.

Täisnurkse kolmnurga külge, mis asetseb täisnurga vastas, nimetatakse h ü p o t e n u u s i k s; kolmnurga külgi, mis moodustavad täisnurga, nimetatakse k a a t e t i t e k s.

Ülesanded.

91. Joonesta kolmnurk, mille külgede pikkused on 5,8 cm, 3,9 cm ja 6,7 cm. Mõõda selle kolmnurga nurgad.

92. Joonesta kolmnurk, mille külgede pikkused on 3 cm, 4 cm ja 6 cm. Võttes aluseks kõige lühema külje, joonesta kolmnurga kõrgus.

93. Joonesta võrdhaarne kolmnurk, mille alus on 5 cm ja haar 4 cm. Mõõda selle kolmnurga kõrgus.

94. Võrdhaarse kolmnurga alus on 4,5 m ja haar on alusest 0,75 m võrra pikem. Arvuta kolmnurga ümbermõõt, s. o. külgede summa.

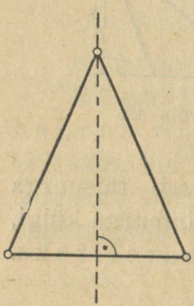
95. Joonesta võrdkülgne kolmnurk küljega 4,2 cm.

96. Joonesta täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 2,9 cm ja 4,3 cm.

97. Joonesta täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on 6 cm ja üks kaatet on 4,8 cm.

§ 27. Võrdhaarse kolmnurga omadusi.

Joonestame võrdhaarse kolmnurga aluse keskristsirge (joonis 50). See sirge läbib kolmnurga tipu, sest viimane on aluse otspunktidest võrdsetel kaugustel ja kõik lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel olevad punktid asetsevad lõigu keskristsirgel. Seega



Joonis 50.

võrdhaarse kolmnurga aluse keskristsirge on selle kolmnurga sümmeetriateljeks.

Sellest järeldame, et

võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed,

sest nad on aluse keskristsirge suhtes sümmeetriliselt asetsevad nurgad. Et tipust saab alusele joonestada ainult ühe ristlõigu, milleks on aluse keskristsirge lõik, siis võrdhaarse kolmnurga kõrgus asetseb aluse keskristsirgel, s. o. kolmnurga sümmeetriateljel. Sellest järeldame, et

võrdhaarse kolmnurga kõrgus poolitab aluse ja tipunurga.

Võrdkülgset kolmnurka võime vaadelda kui võrdhaarset, mille aluseks on ükskõik missugune külg. Seepärast

võrdkülgse kolmnurga iga külje keskristsirge on selle kolmnurga sümmeetriateljeks.

Vaatleme nüüd kolmnurka, mille kaks nurka on võrdsed. Saab tõestada, et nende nurkade vastasküljed on võrdsed, ja seega

kahe võrdse nurgaga kolmnurk on võrdhaarne.

Eeldus: $\alpha = \beta$ (joonis 51).

Väide: $AC = BC$.

Tõestus. Ehitame külje AB keskristsirge t ja kujutleme, et joonis on seda sirget mööda kahekorra murtud. Siis ühtivad

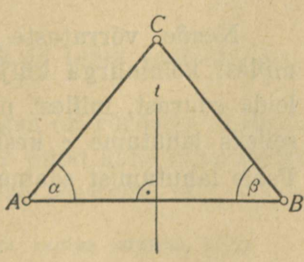
punktid A ja B kui sümmeetriliselt asetsevad punktid

ning

nurgad α ja β kui võrdsed nurgad.

Seega nurkade α ja β haarad AC ja BC on sümmeetrilises asendis sirge t suhtes, mistõttu nende lõikepunkt C asetseb sirgel t. Kuid siis lõigud AC ja BC on sümmeetrilises asendis sirge t suhtes ja seega

$$AC = BC.$$



Joonis 51.

Ühendades viimatitõestatud teoreemi teoreemiga võrdhaarse kolmnurga nurkade kohta, saame järgmise teoreemi:

kolmnurgas on võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed ja võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad.

Ülesanded.

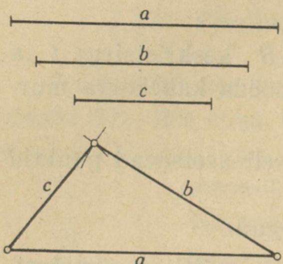
98. Joonesta kolmnurk, mille üks külg on 5,5 cm ja selle külje lähisnurgad on 40^{0}.

99. Joonesta võrdhaarne täisnurkne kolmnurk.

100. Joonesta võrdhaarne kolmnurk, mille alus ja kõrgus on võrdsed.

§ 28. Kolmnurga kahe külje summa ja vahe.

Kui võtta vabalt kolm sirglõiku ja hakata neist ehitama kolmnurka, siis võib juhtuda, et see osutub võimatuks. Vaatleme, missuguseid tingimusi peavad täitma kolm lõiku a, b ja c, et neist saaks ehitada kolmnurga (joonis 52).



Joonis 52.

Et sirglõik on kõige lühem joonlõik kahe punkti vahel, siis peab kolmnurga kahe külje summa olema suurem kui kolmas külg. Seega

$$b+c>a, \qquad a+c>b \qquad \text{ja}$$
$$a+b>c.$$

Nende võrratuste vasakpoolsed avaldised näitavad, millest kolmnurga küljed peavad olema väiksemad. Et leida suurust, millest näiteks külg a peab olema suurem, selleks lahutame c keskmise võrratuse mõlemast poolest. Peale lahutamist saame, et

$$a>b-c.$$

Seega külg a peab olema väiksem kui $b+c$ ja suurem kui $b-c$; seda kirjutame lühidalt järgmiselt:

$$b+c>a>b-c.$$

Samalaadiliselt leiame, et

$$a+c>b>a-c \qquad \text{ja} \qquad a+b>c>a-b.$$

Seega oleme tõestanud, et

kolmnurga kahe külje summa on suurem ja vahe on väiksem kui kolmas külg.

Näide. Kui kolmnurgas külg $a = 9$ cm ja külg $b = 7$ cm, siis külg c peab olema lühem kui $9 + 7$ ehk 16 cm ja pikem kui 9—7 ehk 2 cm:

$$16 \text{ cm} > c > 2 \text{ cm}.$$

Ülesanded.

101. Proovi joonestada kolmnurka külgedega 7,9 cm, 4,3 cm ja 3,1 cm. Miks seda teha ei saa?

102. Kolmnurga kahe lühema külje pikkused on 23 cm ja 18 cm. Missuguste pikkuste vahel asetseb kolmanda külje pikkus?

103. Kolmnurgas on külg $c = 8{,}5$ cm ja külg $a = 11{,}5$ cm. Missuguste pikkuste vahel asetseb külje b pikkus?

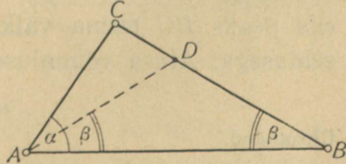
§ 29. Kolmnurga suurem nurk ja tema vastaskülg.

Varemini nägime, et kolmnurgas on võrdsete nurkade vastas ka võrdsed küljed. Vaatleme nüüd kahe mittevõrdse nurga vastas asetsevaid külgi. Saab tõestada, et

kolmnurgas asetseb suurema nurga vastas suurem külg.

Eeldus: $\alpha > \beta$ (joonis 53).

Väide: $BC > AC$.



Joonis 53.

Tõestus. Ehitame punkti A juurde nurga β, nagu näidatud joonisel 53. Siis on kolmnurgas ABD kaks võrdset nurka ja seetõttu

$$AD = BD.$$

Kuna kolmnurga kahe külje summa on suurem kui kolmas külg, siis kolmnurgas ADC

$$AD + DC > AC.$$

Asendades selle võrratuse vasakpoolses avaldises AD temaga võrdse suurusega BD, saame

$$BD + DC > AC.$$

Et BD ja DC summa on joonise järgi BC, siis

$$BC > AC,$$

mida oligi vaja tõestada.

Tõestame, et on õige ka eelmise pöördteoreem, nimelt:

kolmnurgas asetseb suurema külje vastas suurem nurk.

Eeldus: $BC > AC$ (joonis 53).

Väide: $\alpha > \beta$.

Tõestus. Nurkade α ja β kohta on õige üks kolmest väitest: kas

$$\alpha = \beta \quad \text{või} \quad \alpha < \beta \quad \text{või} \quad \alpha > \beta.$$

Neist esimene väide ei ole õige, sest siis peaksid olema võrdsed nende nurkade vastasküljed BC ja AC, kuid eelduse järgi $BC > AC$. Ka teine väide ei saa olla õige, sest siis peaks BC olema väiksem kui AC, mis on vastuolus eeldusega. Ainsa võimalusena jääb püsima väide

$$\alpha > \beta.$$

Ülesanded.

104. Kolmnurgas $a < c$ ja $\beta > \gamma$. Järjesta kolmnurga nurgad nende suuruse järgi.

105. Missugune on täisnurkse kolmnurga kõige pikem külg?

106. Missugune on nürinurkse kolmnurga kõige pikem külg?

107. Mis võib öelda võrdkülgse kolmnurga nurkade kohta?

§ 30. Kolmnurga ümber ja sisse joonestatud ringjoon.

Joonestame kolmnurga ABC külgede AB ja BC keskristsirged ja tähistame nende lõikepunkti tähega K (joonis 54). Et see punkt asetseb nii esimesel kui ka teisel keskristsirgel, siis

$$AK = BK$$

ja

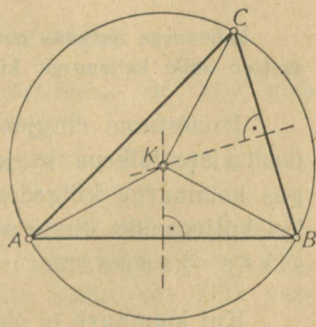
$$BK = CK,$$

seega

$$AK = CK.$$

Viimasest võrdusest on näha, et punkt K asetseb ka külje AC keskristsirgel, sest ainult keskristsirge punkt võib olla võrdsetel kaugustel lõigu otspunktidest. Seega

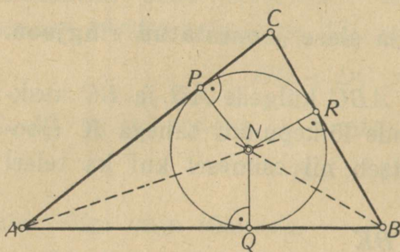
kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad kõik ühes punktis, mis asetseb selle kolmnurga tippudest võrdsetel kaugustel.



Joonis 54.

Joonestame ringjoone, mille keskpunktiks on külgede keskristsirgete lõikepunkt ja raadiuseks on selle punkti kaugus tippudest. See ringjoon läbib kolmnurga iga tippu. Ringjoont, mis läbib kolmnurga iga tippu, nimetatakse kolmnurga *ümber joonestatud ringjooneks.*

Joonestame kolmnurga ABC nurkade A ja B poolitajad ja tähistame nende lõikepunkti tähega N (joonis 55). Et nurgapoolitaja punkt on nurga haaradest võrdsetel kaugustel ja punkt N asetseb nii nurga A kui ka nurga B poolitajal, siis



Joonis 55.

$$NP = NQ$$

ja

$$NR = NQ,$$

seega

$$NP = NR.$$

Viimasest võrdusest on näha, et punkt N asetseb ka nurga C poolitajal, sest ainult nurgapoolitaja punkt võib olla nurga haaradest võrdsetel kaugustel. Seega

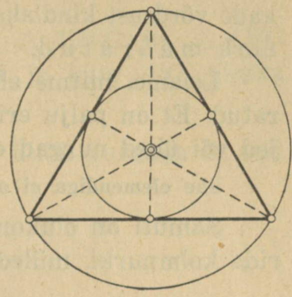
kolmnurga nurkade poolitajad lõikuvad kõik ühes punktis, mis asetseb selle kolmnurga külgedest võrdsetel kaugustel.

Joonestame ringjoone, mille keskpunktiks on nurgapoolitajate lõikepunkt ja raadiuseks on selle punkti kaugus kolmnurga külgedest. Sellel ringjoonel on kolmnurga iga küljega üks ühine punkt; teda nimetatakse kolmnurga s i s s e   j o o n e s t a t u d   r i n g j o o n e k s.

Kui kolmnurk ei ole võrdkülgne, siis tema ümber joonestatud ringjoone keskpunkt ja sisse joonestatud ringjoone keskpunkt ei ühti. Võrdkülgse kolmnurga külgede keskristsirged on ühtlasi ka nurkade poolitajad ja seepärast

võrdkülgse kolmnurga ümber joonestatud ringjoone keskpunkt on ühtlasi ka tema sisse joonestatud ringjoone keskpunktiks.

Seda punkti nimetatakse **võrdkülgse kolmnurga keskpunktiks** (joonis 56). See punkt asetseb võrdsetel kaugustel tippudest ja võrdsetel kaugustel külgedest.



Joonis 56.

Ülesanded.

108. Joonesta täisnurkne kolmnurk ja ehita selle ümber joonestatud ringjoon.

109. Joonesta nürinurkne kolmnurk ja ehita selle sisse ja ümber joonestatud ringjoon.

110. Joonesta ringjoon läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel.

111. Joonesta võrdkülgne kolmnurk küljega 5 cm ja leia selle keskpunkt.

§ 31. Võrdsed kolmnurgad.

Kaht kolmnurka nimetatakse võrdseteks, kui neid saab teineteise peale paigutada nii, et nad ühtivad.

Võrdseid kolmnurki nimetatakse ka **kongruentseteks** kolmnurkadeks.

Võrdsete kolmnurkade neid elemente, mis pealepaigutamisel ühtivad, nimetatakse **vastavateks elementideks**. On selge, et kahe võrdse kolmnurga kõik vastavad elemendid on võrdsed.

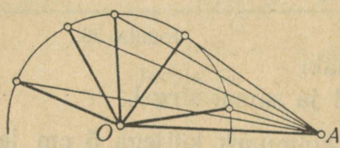
Võrdsete kolmnurkade vastavaid tippe tähistame ühe ja sama tähega, lisades märgi ′ teise kolmnurga vastava tipu tähise juurde. Niiviisi tähistades on vastavad tipud A ja A', B ja B' jne.

Nagu järgnevad teoreemid näitavad, on kolmnurkade võrdsust võimalik kindlaks teha nende mõne elemendi võrdlemisega, ilma et tarvitseks kolmnurki teineteise peale paigutada. Elementide kohta, mis võimaldavad kolmnurkade võrdsust kindlaks teha, öeldakse, et nendega on kolmnurk määratud.

Leiame, mitme elemendiga võiks kolmnurk olla määratud. Et on palju erinevaid kolmnurki, millede ühed küljed või ühed nurgad on võrdsed, siis

ühe elemendiga ei ole kolmnurk määratud.

Samuti on olukord kahe elemendiga: joonisel 57 on rida kolmnurki, milledel on ühine külg OA ja milledel teiseks küljeks on ühe ja sama ringi raadiused; seega on neil kaks võrdset elementi, kuid kolmnurgad ei ole võrdsed:



Joonis 57.

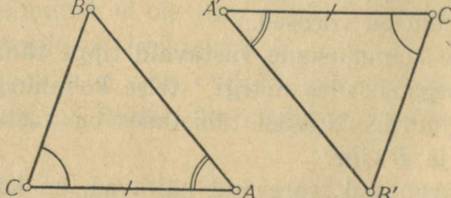
kahe elemendiga ei ole kolmnurk määratud.

Teisiti on olukord kolme elemendiga: kolmnurkade võrdsuse tunnused näitavad, et

kolme sobivalt valitud elemendiga on kolmnurk määratud.

§ 32. Kolmnurkade võrdsuse esimene tunnus.

Kaks kolmnurka on võrdsed, kui ühe kolmnurga külg ja selle lähisnurgad on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.



Joonis 58.

Eeldus: $AC = A'C'$; $\hat{A} = \hat{A'}$; $\hat{C} = \hat{C'}$.

Väide: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (joonis 58).

Tõestus. Paigutame mõttes $\triangle A'B'C'$ nii $\triangle ABC$ peale, et tipp A' ühtiks tipuga A ja külg $A'C'$ ühtiks temaga võrdse küljega AC.

Sellel pealepaigutamisel nurk A' ühtib nurgaga A, sest

$$\hat{A} = \hat{A'},$$

nurk C' ühtib nurgaga C, sest

$$\hat{C} = \hat{C'}$$

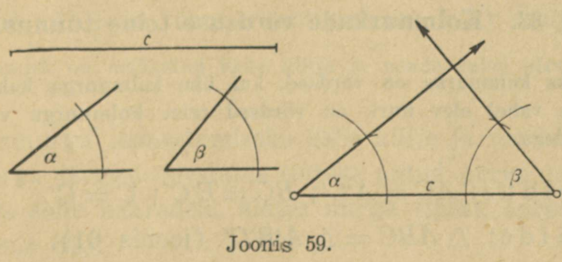
ja tipp B' ühtib tipuga B, sest ühtinud nurkade A ja A' ning C ja C' teised haarad võivad lõikuda ainult ühes punktis, s. o. punktis B. Seega on võimalik $\triangle A'B'C'$ nii paigutada $\triangle ABC$ peale, et nad ühtivad, ja järelikult

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

Kolmnurkade võrdsuse esimene tunnus (ehk tunnus nkn) näitab, et

kolmnurk on määratud ühe külje ja selle kahe lähisnurgaga.

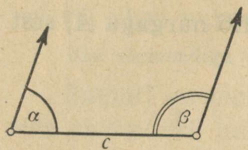
Kolmnurga joonestamiseks antud külje ja selle lähisnurkade järgi joonestame esmalt antud külje ja siis selle otspunktide juurde antud nurgad (joonis 59). Nende nur-



Joonis 59.

kade teiste haarade lõikepunkt on kolmnurga kolmandaks tipuks.

Võib juhtuda, et need haarad pikendamisel üldse ei lõiku (joonis 60). Antud nurgad sel juhul ei või olla kolmnurga nurkadeks. Edaspidi näeme, missugust tingimust peavad täitma kaks nurka, et nad võiksid olla kolmnurga nurkadeks.



Joonis 60.

Antud külje ja selle kahe lähisnurga järgi kolmnurka joonestades (joon. 59) võime antud nurgad paigutada kas ülespoole külge või allapoole seda, võime nurga α paigutada kas külje vasakpoolse tipu juurde või parempoolse tipu juurde. Nii võime saada neli eri kolmnurka. Esimese võrdsuse tunnuse järgi on kõik need kolmnurgad võrdsed.

Ülesanded.

112. Näita, et kaks täisnurkset kolmnurka on võrdsed, kui ühe kolmnurga kaatet ja selle juures olev teravnurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

113. Joonesta neli kolmnurka, millede üks külg on 3,5 cm ja selle lähisnurgad on 30^0 ning 70^0, paigutades need kolmnurgad sümmeetrilistesse asenditesse kahe ristuva sirge suhtes.

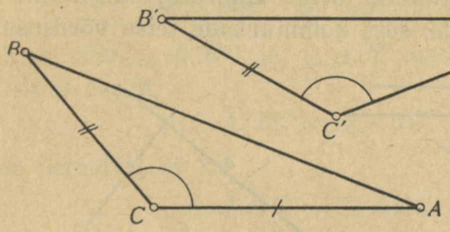
§ 33. Kolmnurkade võrdsuse teine tunnus.

Kaks kolmnurka on võrdsed, kui ühe kolmnurga kaks külge ja nende vahel olev nurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

Eeldus: $AC = A'C'$; $BC = B'C'$; $\hat{C} = \hat{C'}$.

Väide: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (joonis 61).

Tõestus. Paigutame mõttes $\triangle A'B'C'$ nii $\triangle ABC$ peale, et tipp C' ühtib tipuga C ja külg $A'C'$ ühtib temaga



Joonis 61.

võrdse küljega AC. Niiviisi peale paigutades külg $C'B'$ satub küljele CB, sest

$$\hat{C'} = \hat{C},$$

tipp B' ühtib tipuga B, sest

$$B'C' = BC$$

ja külg $A'B'$ ühtib küljega AB, sest nende vastavad otspunktid ühtisid.

Sellest selgub, et $\triangle A'B'C'$ ja $\triangle ABC$ pealepaigutamisel ühtivad; järelikult

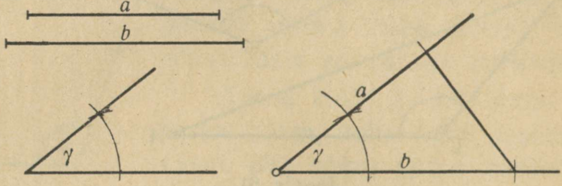
$$\triangle A'B'C' = \triangle ABC.$$

Teine võrdsuse tunnus (ehk tunnus knk) näitab, et **kolmnurk on määratud kahe külje ja nende vahel oleva nurgaga.**

Kolmnurga joonestamiseks kahe külje ja nende vahel oleva nurga järgi joonestame esiteks antud nurga ja kanname siis selle haaradele, alates nurga tipust, antud küljed (joonis 62).

Nende otspunktide ühendamisel saame antud elementidega kolmnurga.

On ükskõik, kumma antud külgedest paigutame kummale nurga haarale, sest kolmnurkade teise võrdsuse tunnuse järgi on võrdsed kõik kolmnurgad, millede kaks külge ja nende vahel olevad nurgad on vastavalt võrdsed.



Joonis 62.

Ülesanded.

114. Kasutades kolmnurkade võrdsust näita, et võrdsete raadiustega ringides võrdsed kesknurgad toetuvad võrdsetele kõõludele.

115. Joonesta kaks kolmnurka nii, et neil on ühine nurk 35^0 ning selle lähisküljed on 3 cm ja 6 cm. Leia selle kujundi sümmeetriatelg.

§ 34. Kolmnurkade võrdsuse kolmas tunnus.

Kaks kolmnurka on võrdsed, kui ühe kolmnurga kolm külge on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

Eeldus: $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $CA = C'A'$.

Väide: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (joonis 63).

Tõestus. Viime mõttes $\triangle A'B'C'$ asendisse $A''BC$, kus tipp B' ühtib tipuga B ja külg $B'C'$ ühtib temaga võrdse küljega BC (joonis 63). Niiviisi asetatult on punktid A ja A'' sümmeetrilises asendis BC suhtes, sest nad on sirge BC kahest punktist võrdsetel kaugustel:

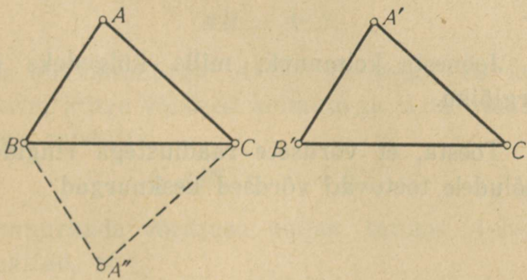
$$BA = BA'' \text{ ja } CA = CA''.$$

Kuid siis $\triangle A''BC$ ja $\triangle ABC$ asetsevad sümmeetriliselt ning seega

$$\triangle A''BC = \triangle ABC,$$

millest järeldub, et ka

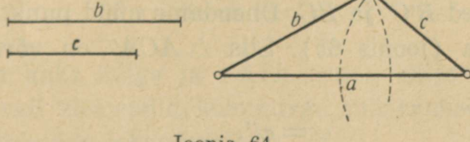
$$\triangle A'B'C' = \triangle ABC.$$



Joonis 63.

Kolmas võrdsuse tunnus (ehk tunnus kkk) näitab, et **kolmnurk on määratud kolme küljega.**

Kolmnurga joonestamiseks kolme külje järgi joonestame esmalt ühe külje ja siis selle ühe otspunkti ümber kaare, mille raadiuseks on teine antud külg, ning teise otspunkti ümber kaare, mille raadiuseks on kolmas antud külg (joonis 64). Kui antud küljed täidavad nõudeid, mis



Joonis 64.

on kehtivad kolmnurga külgede kohta, siis lõikuvad need kaared kahes punktis. Kui ühe neist lõikepunktidest ühendame esimese külje otspunktidega, siis saame antud elementidega kolmnurga.

On ükskõik, missuguses järjekorras antud külgi kasutame kolmnurga ehitamiseks, sest kolmnurkade kolmanda võrdsuse tunnuse järgi on võrdsed kõik kolmnurgad, millede küljed on vastavalt võrdsed.

Ülesanded.

116. Joonesta kolmnurk, mille külgedeks on kolm antud sirglõiku.

117. Tõesta, et võrdsete raadiustega ringides võrdsetele kõõludele toetuvad võrdsed kesknurgad.

§ 35. Kolmnurkade võrdsuse neljas tunnus.

Kaks kolmnurka on võrdsed, kui ühe kolmnurga kaks külge ja suurema külje vastasnurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

Eeldus: $BC=B'C'$; $AC=A'C'$; $BC>AC$; $\hat{A}=\hat{A}'$.

Väide: $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$ (joonis 65).

Tõestus. Viime kolmnurga $A'B'C'$ asendisse $A''BC$, kus ühtivad tipud B' ja B ning suuremate nurkade vastasküljed $B'C'$ ja BC. Ühendame nüüd punktid A ja A'' sirglõiguga (joonis 65). Siis $\triangle ACA''$ on võrdhaarne ja järelikult

$$\varphi=\varphi''.$$

Lahutades need nurgad vastavalt nurkadest

$$\widehat{A} = \widehat{A}''$$

jääb

$$\widehat{A} - \varphi = \widehat{A}'' - \varphi''$$

ehk

$$\psi = \psi''.$$

Nende nurkade vastas on kolmnurgas ABA'' võrdsed küljed:

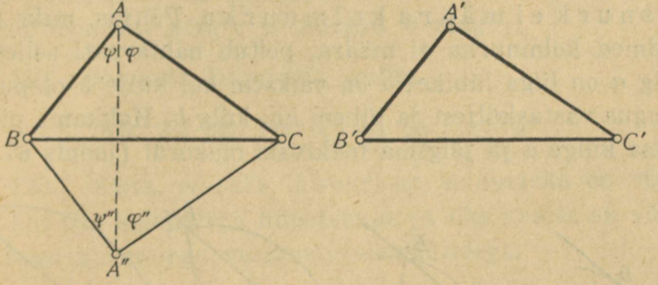
$$AB = A''B.$$

Kuid siis on kolmnurga $A''BC$ ja seega ka kolmnurga $A'B'C'$ kolm külge võrdsed kolmnurga ABC vastavate elementidega, mistõttu

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

Kolmnurkade võrdsuse neljas tunnus (ehk tunnus KkN) näitab, et

kolmnurk on määratud kahe külje ja suurema külje vastasnurgaga.

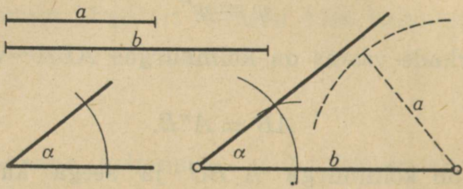


Joonis 65.

See, et kaks külge ja väiksema külje vastasnurk ei ole sobivad elemendid kolmnurga määramiseks, selgub järgneva ülesande lahendamisel.

Ülesanne. Joonestada kolmnurk, millest on antud kaks külge ja ühe külje vastasnurk.

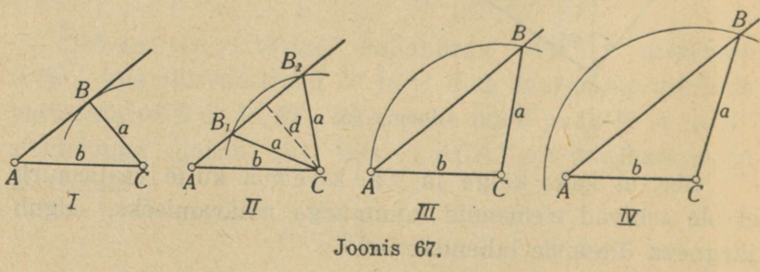
Lahendus. Olgu antud elemendid a, b ja α (joonis 66). Et nurk α on külje b lähisnurk, siis joonestame külje b ja ehitame selle ühe otspunkti juurde nurga α. Edasi joonestame külje b teise otspunkti ümber kaare



Joonis 66.

raadiusega a ja leiame selle kaare lõikepunkti vastasküljega. Kui selle lõikepunkti ühendame külje b teise otspunktiga, siis tekib kolmnurk, milles nurga α vastasküljeks on a.

Joonisel 66 antud elementidega ülesannet lahendades selgub, et kaar raadiusega a ei lõikagi vastaskülge; tähendab, siin *antud kaks külge ja ühe külje vastasnurk ei määra kolmnurka*. Põhjus, miks need andmed kolmnurka ei määra, peitub nähtavasti selles, et külg a on liiga lühike: a on väiksem kui külje b otspunkti kaugus vastasküljest ja lühem kui külg b. Hakkame pikendama külge a ja jälgima tekkivaid olukordi (joonis 67):



Joonis 67.

I juhul $a = d$, kus d on punkti C kaugus nurga α teisest haarast; tekib täisnurkne kolmnurk;

II juhul $a > d$, kuid $a < b$; tekib kaks kolmnurka: $\triangle AB_1C$ ja $\triangle AB_2C$;

III juhul $a = b$; tekib üks võrdhaarne kolmnurk;

IV juhul $a > b$; tekib üks kolmnurk.

Kui jätta kõrvale I ja III juht, mis on erijuhud, siis võib öelda, et ainult neljandal juhul, s. o. kahe külje ja suurema külje vastasnurga järgi saab joonestada ühe kolmnurga. Kahe külje ja väiksema külje vastasnurgaga on määratud kaks mittevõrdset kolmnurka või üks täisnurkne kolmnurk või ei ole määratud ühtki kolmnurka.

Ülesanded.

118. Joonesta kolmnurk, milles

$$a = 3{,}5 \text{ cm}, \; b = 5{,}5 \text{ cm ja } \alpha = 30^0.$$

Mitu kolmnurka on määratud nende andmetega? Mõõda tehtud joonisest külg c ja nurgad β ning γ.

119. Joonesta kolmnurk, milles

$$a = 4{,}2 \text{ cm}, \; b = 6{,}5 \text{ cm ja } \beta = 75^0.$$

120. Näita, et kaks täisnurkset kolmnurka on võrdsed, kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja üks kaatet on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

121. Tõesta, et ühes ja samas ringis võrdsed kõõlud asetsevad keskpunktist võrdsetel kaugustel.

122. Tõesta, et iga punkt, mis nurga haaradest on võrdsetel kaugustel, asetseb selle nurga poolitajal.

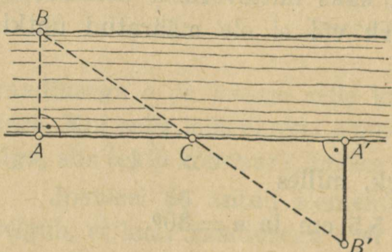
§ 36. Pikkuse kaudne mõõtmine võrdsete kolmnurkade abil.

Juhtudel, kus kauguste ja kõrguste otsene mõõtmine vahelolevate takistuste tõttu või mõnel muul põhjusel ei ole teostatav, tuleb mõõta kaudselt. Paljudel juhtudel on see kergesti teostatav võrdsete kolmnurkade abil. Mõnda niisugust võimalust selgitavad järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Mõõta kanali laius, kui selle ühele kaldale on võimalik juurde pääseda.

Lahendus. Tähistame kanali kaldal punkti A, mille vastas risti üle kanali asetseb mingi hästi nähtav punkt B. Edasi tähistame kaldal kaks punkti C ja A' nii, et

$$AC = A'C.$$



Joonis 68.

Nüüd läheme punktist A' risti kanaliga nii kaugele kaldast, et meie asukoht B' oleks punktidega B ja C ühel sirgel, ja mõõdame punkti B' kauguse kaldast. See kaugus võrdub kanali laiusega (joonis 68).

Põhjendus. Kolmnurkadel ABC ja $A'B'C$ on järgmised elemendid võrdsed:

$$AC = A'C,$$

$$\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^0$$

ja

$$\widehat{ACB} = \widehat{A'CB'}.$$

Seega tunnuse nkn järgi

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C.$$

Järelikult on võrdsed nende kolmnurkade vastavad küljed AB ja $A'B'$.

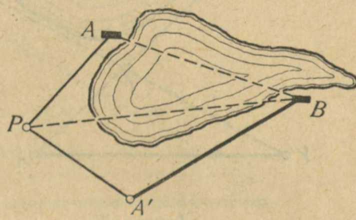
Ülesanne 2. Mõõta järve kaldal asetseva kahe talu kaugus teineteisest „otsejoones“.

Lahendus. Valime oma asukohaks niisuguse punkti P, millest on näha mõlemad talud ja mille kaugust ühest talust saab mõõta (joonis 69). Ehitame nüüd punkti P juurde nurga $A'PB$ nii, et

$$\widehat{A'PB} = \widehat{APB},$$

ja märgime selle haaral punkti A' nii, et

$$PA' = PA.$$



Joonis 69.

Otsitava kauguse saame, kui mõõdame punkti A' kauguse talust B.

Põhjendus. Kolmnurkadel APB ja $A'PB$ on järgmised elemendid võrdsed:

$$PB = PB,$$

$$\widehat{APB} = \widehat{A'PB}$$

ja

$$AP = A'P.$$

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse knk järgi siis

$$\triangle APB = \triangle A'PB,$$

millest järeldub, et

$$AB = A'B.$$

Ülesanne 3. Mõõta kahe punkti X ja Y vaheline kaugus, kui neile punktidele on võimalik juurde pääseda.

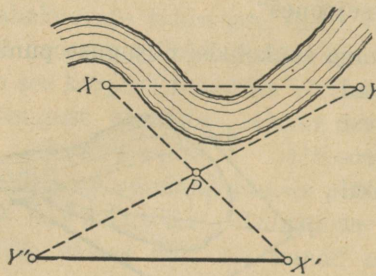
L a h e n d u s. Valime oma asukoha P nii, et saaks mõõta selle kaugust punktidest X ja Y (joonis 70); tähistame sirgel PX punkti X' nii, et

$$PX' = PX,$$

ja sirgel PY punkti Y' nii, et

$$PY' = PY.$$

Nüüd mõõdame lõigu $X'Y'$, millega leiamegi otsitava kauguse.



Joonis 70.

P õ h j e n d u s. Kolmnurkadel PXY ja $PX'Y'$ on järgmised elemendid võrdsed:

$$PX = PX',$$
$$PY = PY'$$

ja

$$X\widehat{P}Y = X'\widehat{P}Y'.$$

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse knk järgi siis

$$\triangle PXY = \triangle PX'Y',$$

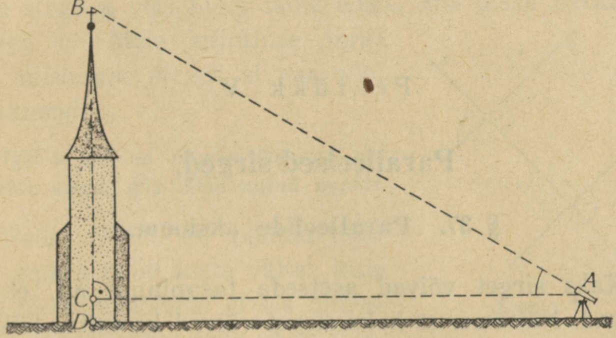
millest järeldub, et

$$XY = X'Y'.$$

Ü l e s a n n e 4. Mõõta torni kõrgus, kui tornile on võimalik juurde pääseda.

L a h e n d u s. Mõõdame mingi nurgamõõtmise riista, näiteks teodoliidi abil nurga A, mis sellest punktist torni tippu suunatud vaatekiir moodustab rõhtsirgega AC (joonis 71). Edasi mõõdame punkti A kauguse tornist ja samuti punkti C kauguse maapinnast. Nurk C kolmnurgas

ABC on täisnurk. Nüüd ehitame maapinnal külje AC ja nurkade A ning C järgi kolmnurgaga ABC võrdse kolm-



Joonis 71.

nurga ja mõõdame selle külje BC. Torni kõrgus on

$$BC + CD.$$

Ülesanded.

123. Kuidas maapinnal tähistada sirget läbi kahe antud punkti? Kuidas maapinnal ehitada täisnurka?

124. Torni kõrgus paistab 50 m kauguselt nurgas 62°. Leia vähendatud joonise abil torni kõrgus.

125. Mererannal asetseva kahe vaatluspunkti A ja B vaheline kaugus (ehk baas) on 7,5 km. Merel olev laev paistab punktist A suunas, mis moodustab baasiga AB nurga 34°, ja punktist B suunas, mis moodustab baasiga AB nurga 71°. Leia vähendatud joonise abil laeva kaugus kummastki vaatluspunktist.

Peatükk V.

Paralleelsed sirged.

§ 37. Paralleelide aksioom.

Kaks sirget võivad asetseda tasapinnal nii, et nad lõikuvad. Näitame, et kaks sirget võivad ka mitte lõikuda, kuigi nad asetsevad ühel ja samal tasapinnal. Selleks võtame vabalt sirge v ja väljaspool seda ühe punkti P (joonis 72). Kui läbi punkti P joonestada ristsirge s sirgele v ja sirgele s ristsirge u, siis saame kaks sirget u ja v, mis ei või lõikuda. Tõepoolest, kui nad lõikuksid, siis oleks nende lõikepunktist sirgele s joonestatud kaks ristsirget, mis on võimatu.

Sirgeid u ja v nimetatakse paralleelseteks ehk rööbikuteks sirgeteks, ehk lihtsalt paralleelideks. Niisiis

paralleelsed sirged on ühel ja samal tasapinnal asetsevad sirged, mis ei lõiku.

Sirgete paralleelsust märgitakse sümboliga $\|$. Paralleelsete sirgjoonte lõike nimetatakse paralleelseteks lõikudeks.

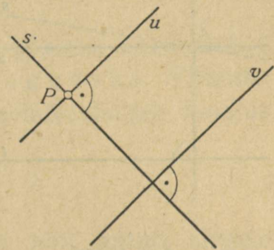
Eespool näitasime, et sirged u ja v joonisel 72 ei või lõikuda. Seega

tasapinnal ühe ja sama sirge ristsirged on paralleelsed.

See teoreem võimaldab antud sirgele v ehitada rööpsirget läbi antud punkti P.

Küsime nüüd, kas läbi antud punkti P võiks minna peale sirge u veel mõni teine sirge, mis oleks paralleelne sirgega v. Meie kujutluse järgi teist niisugust sirget ei saa olla, see tähendab,

igal sirgel on olemas üksainus paralleelne sirge, mis läbib antud punkti.



Joonis 72.

Seda väidet on püütud tõestada umbes 2000 aasta vältel, kuid need tõestamiskatsed ei ole õnnestunud. Veel enam: selle väite tõestamisvõimaluste uurimisel on selgunud, et seda väidet ei saagi tõestada ilma mõne uue aksioomi tarvitamiseta. Et meie kujutluse järgi see väide on siiski õige, siis kasutame seda aksioomina ja nimetame selle p a r a l l e e l i d e a k s i o o m i k s.

Sellest aksioomist järeldub, et peale ühe kõik sirged, mis läbivad punkti P, lõikuvad sirgega v (joonis 72).

§ 38. Paralleelide ühine ristsirge.

Paralleelide aksioom võimaldab tõestada järgmist teoreemi:

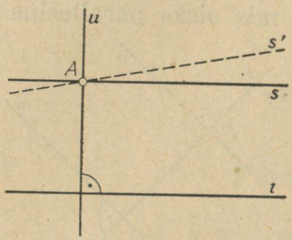
kui sirge on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, siis ta on risti ka teisega.

E e l d u s: $s \parallel t$; $u \perp t$ (joonis 73).

V ä i d e: $u \perp s$.

T õ e s t u s. Kui sirged u ja s ei ristuks punktis A, siis saaksime läbi punkti A ehitada sirge s', mis oleks risti sirgega u; see uus sirge s' peaks olema paralleelne sirgega

t, sest nad mõlemad ristuvad sirgega u. Kuid siis läbiksid punkti A kaks sirget, mis on paralleelsed sirgega t; et seda paralleelide aksioomi järgi ei saa olla, siis peavad sirged u ja s ristuma.



Joonis 73.

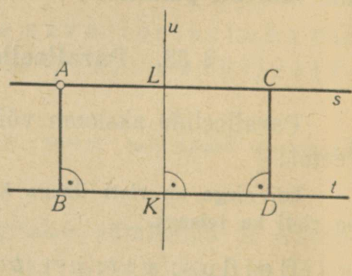
Seega paralleelidel on ristsirge ühine. Selle ühise ristsirge lõiku paralleelide vahel nimetatakse paralleelidevaheliseks ristlõiguks. Tõestame, et

kahe paralleeli vahelised ristlõigud on võrdsed.

Eeldus: $s \parallel t$, $AB \perp t$, $CD \perp t$.

Väide: $AB = CD$ (joonis 74).

Tõestus. Joonestame lõigu BD keskristsirge u. Et paralleelidel ristsirged on ühised, siis sirge u on risti ka sirgega s, millest järeldub, et kogu joonis on sümmeetriline sirge u suhtes. Tõepoolest, kiired LA ja KB on sümmeetrilises asendis vastavalt kiirtega LC ja KD, sest sirge u on risti nii sirgega s kui ka sirgega t; punkt B on sümmeetrilises asendis punktiga D, sest sirge u on lõigu BD keskristsirge; sirge BA on sümmeetrilises asendis sirgega DC, sest nurgad B ja D on võrdsed; ja lõpuks punkt A on sümmeetrilises asendis punktiga C, sest sirgete BA ja LA lõikepunktiga A sümmeetriliselt asetsev punkt peab



Joonis 74.

olema nende sirgetega sümmeetriliselt asetsevate sirgete DC ja LC ühine punkt, s. o. punkt C. Kuid siis

$$AB = CD$$

kui sümmeetriliselt asetsevad lõigud.

Kahe paralleeli vahelise ristlõigu pikkust nimetatakse p a r a l l e e l i d e v a h e l i s e k s k a u g u s e k s. Viimati-tõestatud teoreemi järgi on paralleelidevaheline kaugus igal pool ühesugune.

Ülesanded.

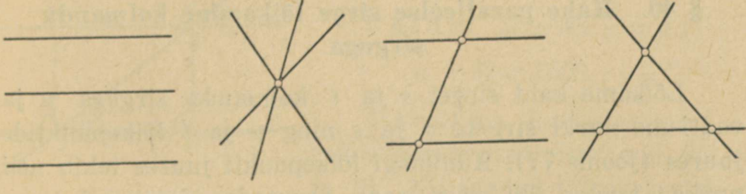
126. Joonesta sirkli ja joonlaua abil antud sirgele rööpsirge läbi antud punkti.

127. Mõõda kahe paralleelse sirge vaheline kaugus.

128. Joonesta ringis kaks paralleelset kõõlu ja tõesta, et nende vahelised kaared on võrdsed. Näpunäide: leia kujundi sümmeetriatelg.

§ 39. Kolm paralleelset sirget.

Kolm sirget võivad tasapinnal asetseda nii, et neil kas ei ole ühtki lõikepunkti või on üks lõikepunkt või kaks lõikepunkti või kolm lõikepunkti (joonis 75).

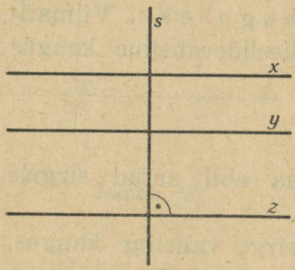


Joonis 75.

Esimesel juhul on tegemist kolme paralleelse sirgega ja kolmandal juhul — kahe paralleelse sirgega, mis on lõigatud kolmanda sirgega. Esimese juhu tekkimise võimalust näitab järgmine teoreem:

kui kaks sirget on paralleelsed kolmanda sirgega, siis on nad paralleelsed ka teineteisega.

Eeldus: $x \parallel z$; $y \parallel z$ (joonis 76).



Joonis 76.

Väide: $x \parallel y$.

Tõestus. Joonestame sirge s risti sirgega z. Et sirge, mis on risti ühega kahest paralleelist, on risti ka teisega, siis

$$s \perp x;$$

samal põhjusel ka

$$s \perp y.$$

Seega on sirged x ja y ühe ja sama sirge s ristsirged ja järelikult

$$x \parallel y,$$

mida oligi vaja tõestada.

Kolme sirge x, y ja z paralleelsust märgime kujul

$$x \parallel y \parallel z.$$

§ 40. Kahe paralleelse sirge lõikamine kolmanda sirgega.

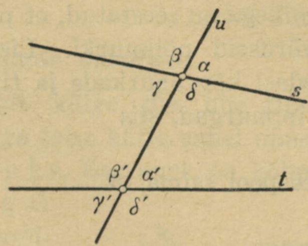
Lõikame kaht sirget s ja t kolmanda sirgega u ja vaatleme nurki sirgete u ja s ning u ja t lõikepunktide juures (joonis 77). Kummagi lõikepunkti juures tekib neli nurka; teades üht neist saab arvutada ülejäänud kolm nurka, sest iga ülejäänud nurk on antud nurga suhtes kas kõrvunurk või tippnurk. Kui on antud näiteks nurk α, siis

$$\beta = 180^0 - \alpha, \quad \gamma = \alpha \quad \text{ja} \quad \delta = 180^0 - \alpha.$$

Et võrrelda nurki ühe lõikepunkti juurest nurkadega teise lõikepunkti juurest, selleks anname järgmistele nurgapaaridele nimetused:

1. nimetame vastavateks nurkadeks kaks nurka, mis asetsevad ühel pool sirget u ja ühel pool sirgeid s ja t, nagu nurgad α ja α' või γ ja γ';

2. nimetame põiknurkadeks kaks nurka, mis asetsevad üks ühel ja teine teisel pool sirget u kui ka sirgeid s ja t, nagu α ja γ' või δ ja β';

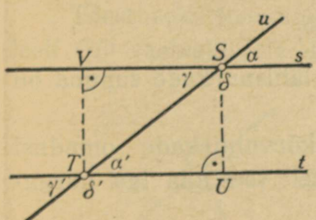


Joonis 77.

3. nimetame lähisnurkadeks kaks nurka, mis asetsevad ühel pool sirget u, kuid üks ühel, teine teisel pool sirgeid s ja t, nagu nurgad α ja δ' või γ ja β'.

Juhul, kui lõigatavad sirged s ja t on paralleelsed, on ülalmainitud nurkade kohta kehtiv järgmine teoreem:

kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekivad võrdsed vastavad nurgad, võrdsed põiknurgad ja niisugused lähisnurgad, millede summa on sirgnurk.



Joonis 78.

Eeldus: $s \parallel t$ (joonis 78).

Väide: $\alpha = \alpha'$; $\gamma = \alpha'$;

$\alpha + \delta' = 180^0$.

Tõestus. Joonestame paralleelidevahelised ristlõigud SU ja TV. Nii saadud täisnurksetes kolmnurkades SUT ja TVS on järgmised elemendid võrdsed:

$$ST = ST, \quad SU = TV \text{ ja } \widehat{U} = \widehat{V}.$$

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse KkN järgi

$$\triangle SUT = \triangle TVS.$$

Et võrdsete kolmnurkade vastavad elemendid on võrdsed, siis

$$\alpha' = \gamma,$$

millega on tõestatud, et punktide S ja T juures on üks paar võrdseid põiknurki. Lisaks sellele tõsiasjale kasutame edasi kõrvunurkade ja tippnurkade omadusi. Et α ja γ on tippnurgad, siis

$$\alpha = \gamma;$$

eespool saime, et

$$\alpha' = \gamma;$$

seega

$$\alpha' = \alpha.$$

millega on tõestatud, et üks paar vastavaid nurki on võrdsed. Väite tõestamiseks lähisnurkade α ja δ' kohta paneme tähele, et α' ja δ' on kõrvunurgad; seepärast

$$\alpha' + \delta' = 180^0;$$

eespool saime, et

$$\alpha = \alpha';$$

seega

$$\alpha + \delta' = 180^0,$$

millega on tõestatud, et ühe paari lähisnurkade summa on sirgnurk.

Kasutades tippnurkade ja kõrvunurkade omadusi saame teoreemi väidet samalaadiliselt tõestada iga nurgapaari kohta.

Ülesanded.

129. Arvuta nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui joonisel 77 nurk $\delta = 127^0$ ja $\beta' + \gamma = 234^0$.

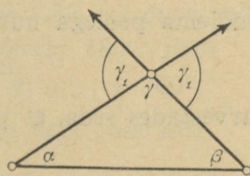
130. Tõesta, kasutades kõrvunurkade ja tippnurkade omadusi, et joonisel 77 nurk $\alpha = \gamma'$, kui $\beta = \beta'$.

131. Tõesta samal viisil kui eelmises ülesandes, et $\delta + \alpha' = 180^0$, kui $\beta = \beta'$.

132. Tõesta, et alusega paralleelne sirge, mis lõikab võrdhaarset kolmnurka, eraldab sellest kolmnurga, mis on võrdhaarne.

§ 41. Kolmnurga nurkade omadusi.

Pikendame kolmnurga mingit külge üle ühe tipu. Nurka selle pikenduse ja kolmnurga teise külje vahel nimetatakse kolmnurga välisnurgaks. See nurk on kolmnurga nurga (ehk sisenurga) kõrvunurk. Mõlema külje pikendamisel üle ühe ja sama tipu saaksime kaks võrdset nurka (joonis 79). Seepärast ütleme, et iga tipu juures on üks välisnurk. Kolmnurga välisnurki tähistame sümbolitega α_1, β_1 ja γ_1.

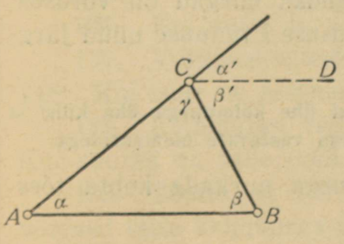


Joonis 79.

Tõestame, et

kolmnurga välisnurk võrdub temaga mitte kõrvu asetsevate sisenurkade summaga.

Tõestuseks joonestame läbi ühe tipu, näiteks C, paralleeli CD vastasküljele AB. See sirge jaotab välisnurga γ_1 kaheks nu aks α' ja β' (joonis 80). Et kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekivad võrdsed vastavad nurgad ja võrdsed põiknurgad, siis



Joonis 80.

$$\alpha = \alpha'$$

ja

$$\beta = \beta'.$$

Nende võrduste vastavate poolte liitmisel saame, et

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$$

ehk

$$\alpha + \beta = \gamma_1.$$

Samuti võime tõestada teoreemi teiste välisnurkade kohta.

Sellest kolmnurga välisnurga omadusest järeldub kergesti, et

kolmnurga sisenurkade summa võrdub sirgnurgaga.

Tõestuseks liidame eespool-leitud võrduse

$$\alpha + \beta = \gamma_1$$

mõlema poolega nurga γ. Siis saame, et

$$\alpha + \beta + \gamma = \gamma_1 + \gamma;$$

arvestades seda, et γ_1 ja γ on kõrvunurgad, saame

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ},$$

mida oligi vaja tõestada.

Sellest teoreemist järeldub, et kolmnurgas ei või olla enam kui üks nurk täisnurk või nürinurk, sest vastasel juhul ei saaks sisenurkade summa olla 180°.

Edasi järeldub sellest teoreemist, et kui ühe kolmnurga kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga vastavate nurkadega, siis ka nende kolmandad nurgad on võrdsed. Seetõttu võime kolmnurkade võrdsuse I tunnuse nüüd järgmiselt üldistada:

kaks kolmnurka on võrdsed, kui ühe kolmnurga üks külg ja kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

Viimase teoreemina kolmnurga nurkade kohta tõestame, et

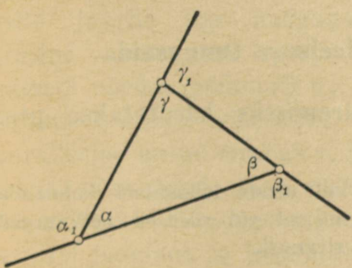
kolmnurga välisnurkade summa on täispööre.

Selle tõestamiseks lähtume asjaolust, et kolmnurga iga tipu juures oleva sisenurga ja välisnurga summa on 180^0 (joonis 81). Seega

$$\alpha + \alpha_1 = 180^0,$$
$$\beta + \beta_1 = 180^0$$
ja
$$\gamma + \gamma_1 = 180^0.$$

Nende võrduste vastavate poolte liitmisel leiame, et

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 3 \cdot 180^0.$$



Joonis 81.

Et esimese kolme liidetava summa on 180^0, siis

$$180^0 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 540^0.$$

Lahutades selle võrduse mõlemast poolest 180^0, jääb

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^0,$$

mida oligi vaja tõestada.

Ülesanded.

133. Kui suur on täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa?

134. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on tipunurgast 14^0 võrra suurem. Arvuta nurkade suurused.

135. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on $52^0\,10'$. Kui suured on selle kolmnurga välisnurgad?

136. Kui suur on võrdkülgse kolmnurga nurk?

137. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga kõrvunurk on 148^0. Kui suur on alusnurk?

138. Kolmnurga välisnurk $\alpha_1 = 81^0$ ja $\gamma_1 = 117^0\,40'$. Kui suured on selle kolmnurga sisenurgad?

139. Tõesta, et kui ühe kolmnurga kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga, siis on võrdsed ka nende kolmnurkade kolmandad nurgad.

140. Mis liiki on kolmnurk, mille üks nurk on $34^0\,15'$ ja teine nurk on $55^0\,45'$?

141. Kolmnurga nurkadest $\alpha = 66^0\,40'$ ja $\beta = 48^0\,30'$. Järjesta selle kolmnurga küljed nende pikkuse järgi.

142. Võrdhaarse kolmnurga aluse juures olev välisnurk on 132^0. Mis on sellel kolmnurgal pikem, kas alus või haar?

143. Täisnurkse kolmnurga teravnurk $\alpha = 38^0$ on poolitatud. Kui suured on sellel poolitamisel tekkiva nürinurkse kolmnurga nurgad?

§ 42. Sirgete paralleelsuse tunnuseid.

Sirgete paralleelsuse määramiseks kasutatakse peamiselt järgmist teoreemi:

kaks sirget on paralleelsed, kui nende lõikamisel kolmanda sirgega tekivad võrdsed vastavad nurgad või võrdsed põiknurgad või lähisnurgad, millede summa on sirgnurk.

Eeldus: $\alpha = \alpha'$ või $\alpha = \gamma'$ või $\alpha + \delta' = 180^0$.

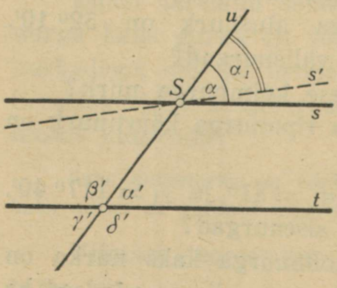
Väide: $s \parallel t$ (joonis 82).

Tõestus. Sirged s ja t võivad kas lõikuda või olla paralleelsed. Oletame, et nad ei ole paralleelsed, ja joonestame läbi sirge s ja lõikaja u ühise punkti S sirge s' nii, et $s' \parallel t$. Nende sirgete paralleelsuse tõttu on siis

$$\alpha_1 = \alpha', \qquad \alpha_1 = \gamma' \text{ ja } \alpha_1 + \delta' = 180^0.$$

Kuid eelduse järgi

$$\alpha = \alpha', \qquad \alpha = \gamma' \text{ või } \alpha + \delta' = 180^0.$$



Joonis 82.

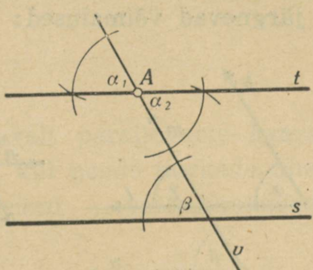
Kõigil kolmel juhul järeldub neist võrduspaaridest, et

$$\alpha_1 = \alpha.$$

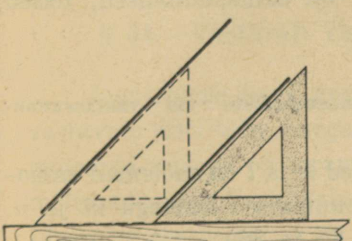
Joonisest näeme, et see võrdus on õige a i n u l t sel juhul, kui sirge s' ja s ühtivad. Et $s' \parallel t$, siis ka $s \parallel t$, mida oligi vaja tõestada.

Viimane teoreem annab uusi võimalusi sirgele rööpsirge ehitamiseks läbi antud punkti.

Kui joonestada läbi punkti A (joonis 83) mingi antud sirget s lõikav sirge u ja ehitada selle juurde kas nurgaga β võrdne vastav nurk α_1 või nurgaga β võrdne põiknurk α_2, siis ehitatava nurga teine haar t on paralleelne antud sirgega s. Esimene võte leiab väga sagedat rakendamist rööpsirgete joonestamisel joonlaua ja joonestamiskolmnurga abil: kolmnurga nihutamisel piki paigalolevat joonlauda jääb kolmnurga külg ikka paralleelseks oma endise asendiga. Niisugust nihutamist nimetatakse r ö ö p - l ü k k e k s (joonis 84).



Joonis 83.


Joonis 84.

Ülesanded.

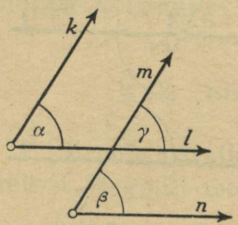
144. Joonesta võrdhaarse kolmnurga tipu juures oleva välisnurga poolitaja ja tõesta, et see on alusega paralleelne.

145. Punktis O lõikuvad kaks sirget. Ühel sirgel on võetud punktid A ja C nii, et $AO = CO$, ja teisel sirgel punktid B ja D nii, et $BO = DO$. Tee joonis ja tõesta, et $AB \parallel DC$.

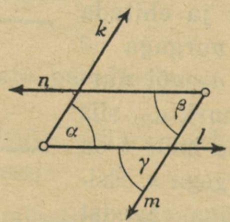
§ 43. Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad.

Vaatleme kaht nurka, milledest ühe haarad on vastavalt paralleelsed teise haaradega.

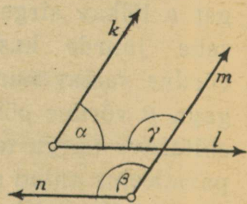
Kaks paralleelset kiirt on kas samasuunalised, nagu kiired k ja m joonisel 85, või vastassuunalised, nagu kiired k ja m joonisel 86. Vastavalt paralleelsete haaradega nurkade juures võivad seepärast esineda järgnevad võimalused:



Joonis 85.



Joonis 86.



Joonis 87.

1. Nurkade haarad on samasuunalised (joonis 85).
2. Nurkade haarad on vastassuunalised (joonis 86).
3. Nurkade ühed haarad on samasuunalised, teised vastassuunalised (joonis 87).

Tõestame, et

vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste või vastassuunaliste haaradega nurgad on võrdsed.

Eeldus: $k \parallel m$, $l \parallel n$, kiired k ja l on mõlemad samasuunalised või mõlemad vastassuunalised kiirtega m ja n.

Väide: $\alpha = \beta$ (joonised 85 ja 86).

Tõestus. Kui nurga β kumbki haar ei lõika nurga α üht haara, siis pikendame üht neist nii, et nad lõikuksid. Siis on β ja γ (joonised 85 ja 86) vastavad nurgad paralleelsete sirgete n ja l juures ja seega

$$\beta = \gamma.$$

Et nurgad α ja γ on vastavad nurgad (joonis 85) või põiknurgad (joonis 86) paralleelsete sirgete k ja m juures, siis

$$\alpha = \gamma.$$

Neist võrdusist järeldub, et

$$\alpha = \beta,$$

mida oligi vaja tõestada.

Ülesanded.

146. Tõesta, et kahe vastavalt paralleelsete haaradega nurga summa on sirgnurk, kui nende nurkade ühed haarad on samasuunalised ja teised — vastassuunalised (joonis 87).

147. Joonesta kaks vastavalt paralleelsete ja vastassuunaliste haaradega nurka nii, et nende nurgapoolitajad on ühel ja samal sirgel. Uuri selle kujundi sümmeetriat.

§ 44. Vastavalt ristuvate haaradega nurgad.

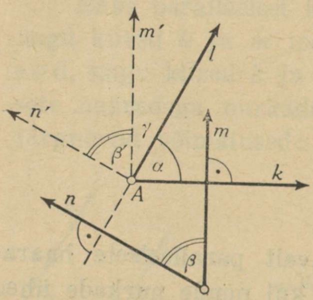
Joonestame kaks nurka nii, et ühe nurga haarad on vastavalt risti teise nurga haaradega. Vaatleme juhtu, kui mõlemad nurgad on teravnurgad (joonis 88), ja juhtu, kui mõlemad nurgad on nürinurgad (joonis 89), ning tõestame järgmise teoreemi:

vastavalt ristiseisvate haaradega nurgad on võrdsed, kui mõlemad nurgad on teravnurgad või mõlemad nurgad on nürinurgad.

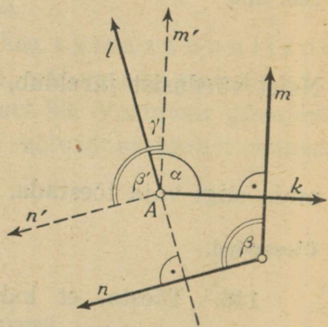
Eeldus: $m \perp k$; $n \perp l$; α ja β on mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad.

Väide: $\alpha = \beta$ (joonis 88 ja joonis 89).

Tõestus. Joonestame läbi punkti A kaks kiirt m'



Joonis 88.



Joonis 89.

ja n' paralleelselt ja samasuunaliselt nurga β haaradega:

$$m' \parallel m \quad \text{ja} \quad n' \parallel n.$$

Nende kiirte vaheline nurk

$$\beta' = \beta.$$

Et eelduse järgi $m \perp k$ ja $n \perp l$, siis ka $m' \perp k$ ja $n' \perp l$. Seetõttu

	joonisel 88	joonisel 89
	$\alpha + \gamma = 90^0$	$\alpha - \gamma = 90^0$
ja		
	$\beta' + \gamma = 90^0$	$\beta' - \gamma = 90^0$.
Järelikult		
	$\alpha + \gamma = \beta' + \gamma$	$\alpha - \gamma = \beta' - \gamma$.

Lahutades γ esimese võrduse mõlemast poolest ja liites γ teise võrduse mõlema poolega, saame nii ühel kui ka teisel juhul, et

$$\alpha = \beta'.$$

Kuna varemini leidsime, et

$$\beta = \beta',$$

siis

$$\alpha = \beta,$$

mida oligi vaja tõestada.

Ülesanded.

148. Joonesta võrdhaarse kolmnurga aluse ühest otspunktist ristsirge vastasolevale haarale. Tõesta, et nurk selle ristsirge ja aluse vahel on pool tipunurgast.

149. Tõesta, et kahe vastavalt ristuvate haaradega nurga summa on sirgnurk, kui üks nurk on teravnurk ja teine on nürinurk.

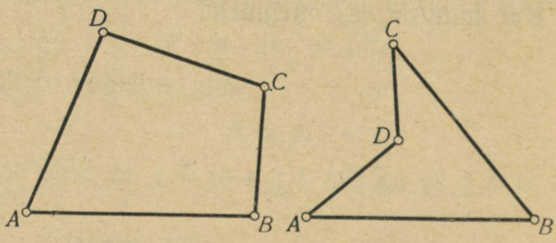
150. Nürinurga tipust on joonestatud selle nurga haaradega ristuvad sirged. Nende sirgete vaheline nurk on 42°. Kui suur on see nürinurk?

Peatükk VI.

Hulknurk.

§ 45. Hulknurkade liigitelu.

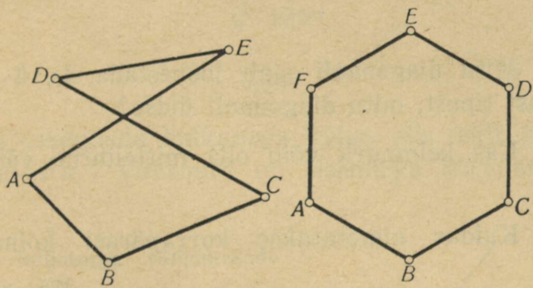
Kui neli tasapinnal asetsevat punkti A, B, C ja D, mille hulgas ei leidu kolme ühel sirgel asetsevat punkti, järjestikku ühendada sirglõikudega, siis tekib kujund, mida nimetatakse nelinurgaks (joonis 90). Samal



Joonis 90.

viisil tekib viie punkti ühendamisel viisnurk, kuue punkti ühendamisel kuusnurk jne. (joonis 91). Kolmnurki, nelinurki, viisnurki jne. nimetatakse üldiselt hulknurkadeks.

Antud punkte A, B, C,.. nimetatakse hulknurga tippudeks ja neid ühendavaid sirglõike hulknurga külgedeks. Hulknurga külgede summa on tema ümbermõõt. Kõiki teisi sirglõike, mis ühendavad hulknurga mistahes kaht tippu, nimetatakse hulknurga diagonaalideks. Hulknurga iga tipu juures on hulk-



Joonis 91.

nurga üks sisenurk. Hulknurga küljed, nurgad ja diagonaalid on tema elemendid.

Hulknurgad liigitatakse

a) lihtsateks ja mittelihtsateks,

b) kumerateks ja mittekumerateks,

c) korrapärasteks ja mittekorrapärasteks (korrapäratuteks).

Hulknurka nimetatakse lihtsaks, kui selle külgedel ei ole ühiseid punkte peale tippude.

Joonisel 91 kujutatud hulknurkadest on esimene mittelihtne viisnurk.

Hulknurka nimetatakse kumeraks, kui selle iga sisenurk on väiksem kui sirgnurk.

Joonisel 90 kujutatud nelinurkadest on teine mittekumer nelinurk.

Hulknurka nimetatakse korrapäraseks, kui selle kõik küljed on võrdsed ja kõik sisenurgad on võrdsed.

Joonisel 91 kujutatud hulknurkadest on teine korrapärane kuusnurk.

Et käesolevas raamatus edaspidi ei tegelda mittelihtsate ja mittekumerate hulknurkadega, siis sõna „hulknurk" tähendab edaspidi ikka lihtsat ja kumerat hulknurka.

Ülesanded.

151. Mitu diagonaali saab joonestada 4-, 5-, 6-, n-nurga igast tipust, mitu diagonaali üldse?

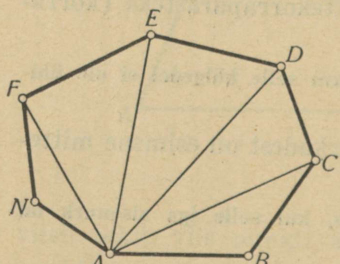
152. Kas kolmnurk võib olla mittelihtne või mittekumer?

153. Kuidas nimetatakse korrapärast kolmnurka?

§ 46. Hulknurga nurkade summa.

Hulknurga sisenurkade summa võrdub kahe võrra vähendatud tippude arv korda 180°.

Tõestus. Joonestame diagonaalid hulknurga ühest tipust. Kui hulknurgal on n tippu, siis need diagonaalid tükeldavad hulknurga $n-2$ kolmnurgaks (joonis 92). Nende kolmnurkade sisenurkade summa võrdub hulknurga sisenurkade summaga, sest nende kolmnurkade kõik nurgad on kas hulknurga nurgad või nende osad. Et iga kolmnurga sisenurkade summa on 180°, siis on $n-2$ kolmnurga sisenurkade summa ja seega ka hulknurga sisenurkade summa



Joonis 92.

$$(n-2)\cdot 180^{\circ},$$

m. o. t. t.

N ä i d e. Nelinurga sisenurkade summa on

$$(4-2)\cdot 180^{\circ}$$

ehk

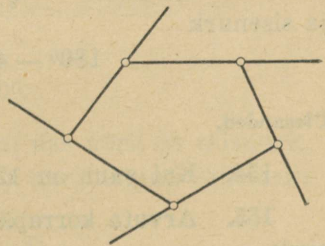
$$2\cdot 180^{\circ}$$

ehk

$$360^{\circ}.$$

Kui pikendada hulknurga külge, siis tekib hulknurga v ä l i s n u r k. Välisnurk on sisenurga kõrvunurk (joonis 93).

Iga hulknurga välisnurkade summa on 360°.



Joonis 93.

T õ e s t u s. Hulknurga iga tipu juures on üks sisenurk ja üks välisnurk; nende summa on 180°, sest nad on kõrvunurgad. Olgu hulknurgal n tippu; et ühe tipu juures oleva sisenurga ja välisnurga summa on 180°, siis n tipu juures olevate sise- ja välisnurkade summa on

$$n\cdot 180^{\circ};$$

et sisenurkade summa on

$$(n-2)\cdot 180^{\circ},$$

siis välisnurkade summa on

$$n\cdot 180^{\circ}-(n-2)\cdot 180^{\circ}$$

ehk

$$n\cdot 180^{\circ}-n\cdot 180^{\circ}+360^{\circ}$$

ehk

$$360^{\circ}.$$

J ä r e l d u s. Et korrapärase hulknurga sisenurgad on võrdsed, siis on võrdsed ka välisnurgad; seepärast on korrapärase n-nurga iga välisnurk

$$\frac{360^0}{n},$$

ja iga sisenurk

$$180^0 - \frac{360^0}{n}.$$

N ä i d e. Korrapärase 9-nurga välisnurk on

$$\frac{360^0}{9} \text{ ehk } 40^0$$

ja sisenurk

$$180^0 - 40^0 \text{ ehk } 140^0.$$

Ülesanded.

154. Kui suur on 12-nurga sisenurkade summa?

155. Arvuta korrapärase 16-nurga sisenurk ja välisnurk.

156. Missuguse korrapärase hulknurga välisnurk on 15^0?

157. Missuguse korrapärase hulknurga sisenurk on 135^0?

§ 47. Trapets.

Trapets on nelinurk, mille üks paar vastasküljgi on paralleelsed.

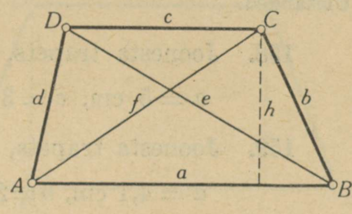
Selle definitsiooni järgi joonisel 94 kujutatud nelinurk on trapets, kui $AB \parallel DC$. Trapetsi paralleelseid külgi nimetatakse a l u s t e k s ja teisi külgi h a a r a d e k s. Aluste vaheline ristlõik on trapetsi k õ r g u s. Trapetsi elemente tähistatakse sageli ainult ühe tähega, kasutades selleks joonisel 94 antud tähiseid.

Trapetsi aluste paralleelsusest järeldub, et

trapetsi haara lähisnurkade summa on 180°.

T õ e s t u s. Kui $AB \parallel DC$, siis nurgad A ja D on lähisnurgad paralleelsete sirgete AB ja DC lõikaja AD juures; seepärast

$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ.$$



Joonis 94.

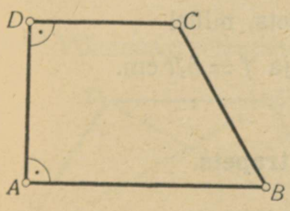
Samal põhjusel on lõikaja BC juures

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ.$$

Sellest järeldub, et kui trapetsi üks nurk on täisnurk, siis on teine sama haara juures olev nurk samuti täisnurk; kui näiteks

$$\hat{A} = 90^\circ, \quad \text{siis ka} \quad \hat{D} = 90^\circ.$$

Niisugust trapetsit nimetatakse t ä i s n u r k s e k s (joonis 95).



Joonis 95.

Diagonaal tükeldab nelinurga kaheks kolmnurgaks, milledel on üks külg ühine. Seetõttu nelinurk üldiselt on määratud oma viie elemendiga. Et trapetsi haara ühe lähisnurgaga teine lähisnurk on määratud, siis trapetsi määramiseks on küllalt neljast elemendist. Nende hulgas ei või esineda muidugi niisuguseid elemente, mis üksteisest olenevad, näiteks kolm nurka. Viimaste hulgas on ainult kaks o l e n e m a t u t elementi. Kui näiteks on antud kaks alust, üks haar ja selle üks lähisnurk, siis trapets on määratud ja tema joonestamine on võimalik.

Ülesanded.

158. Joonesta trapets, millel

$a = 5$ cm, $c = 3{,}2$ cm, $d = 2{,}5$ cm ja $\alpha = 70^0$.

159. Joonesta trapets, millel

$a = 4{,}1$ cm, $b = 2{,}2$ cm, $e = 3{,}9$ cm ja $f = 4{,}8$ cm.

160. Joonesta trapets, millel

$a = 5{,}3$ cm, $\alpha = 55^0$, $h = 2{,}4$ cm ja $c = 3{,}1$ cm.

161. Trapetsi ühe aluse lähisnurgad on $74^0\,10'$ ja $62^0\,30'$. Arvuta teised nurgad.

162. Joonesta täisnurkne trapets, millel

$a = 5{,}5$ cm, $b = 3{,}9$ cm ja $d = 3{,}3$ cm.

163. Joonesta täisnurkne trapets, millel

$a = 4{,}2$ cm, $c = 2{,}3$ cm ja $h = 2{,}6$ cm.

164. Joonesta täisnurkne trapets, millel

$a = 5{,}2$ cm, $e = 3{,}4$ cm ja $f = 5{,}7$ cm.

§ 48. Võrdhaarne trapets.

Kui trapetsi haarad on võrdsed, siis nimetatakse teda v õ r d h a a r s e k s trapetsiks (joonis 96). Tõestame, et

võrdhaarse trapetsi aluse lähisnurgad on võrdsed.

E e l d u s: $AB \parallel DC$ ja $AD = BC$.

V ä i d e: $\widehat{A} = \widehat{B}$ ja $\widehat{D} = \widehat{C}$.

T õ e s t u s. Joonestame ühe aluse, näiteks DC otspunktidest ristlõigud DK ja CL teisele alusele (joonis 96). Et paralleelidevahelised ristlõigud on võrdsed, siis

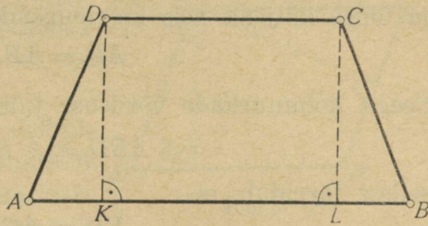
$$DK = CL.$$

Eelduse järgi

$$AD = BC$$

ja joonise järgi

$$\hat{K} = \hat{L}.$$



Joonis 96.

Rakendades kolmnurkade võrdsuse tunnust KkN saame, et

$$\triangle ADK = \triangle BCL.$$

Kuid siis on võrdsed nende kolmnurkade kõik vastavad elemendid, seega ka

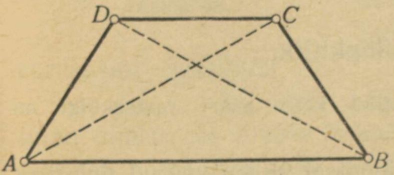
$$\hat{A} = \hat{B}.$$

Sellest on kerge järeldada, et

$$\hat{D} = \hat{C}.$$

Võrdhaarse trapetsi järgmise omadusena tõestame, et

võrdhaarse trapetsi diagonaalid on võrdsed.



Joonis 97.

E e l d u s: $AB \parallel DC$ ja $AD = BC$.

V ä i d e: $BD = AC$ (joonis 97).

T õ e s t u s. Kolmnurkades ABD ja ABC eelduse järgi

$$AD = BC,$$

eelmise teoreemi järgi

$$\hat{A} = \hat{B}$$

ja ühise küljena neis kolmnurkades

$$AB = AB.$$

Seega kolmnurkade võrdsuse tunnuse knk järgi

$$\triangle ABD = \triangle BAC;$$

sellest järeldub, et

$$BD = AC,$$

m. o. t. t.

Ülesanded.

165. Joonesta võrdhaarne trapets, millel

$a = 6$ cm, $\alpha = 60^0$ ja $b = 3$ cm.

166. Joonesta võrdhaarne trapets, millel

$a = 3{,}9$ cm, $e = 5{,}2$ cm ja $b = 2{,}5$ cm.

167. Tõesta, et võrdhaarne trapets on sümmeetriline kujund.

168. Tõesta, et võrdhaarsest kolmnurgast eraldub võrdhaarne trapets, kui kolmnurgas joonestada alusega paralleelne lõik.

§ 49. Rööpkülik.

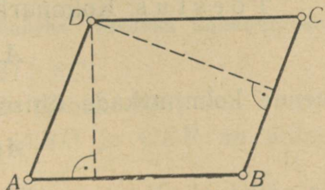
Rööpkülik on nelinurk, millel kaks paari vastasküljgi on paralleelsed.

Selle definitsiooni järgi joonisel 98 kujutatud nelinurk on rööpkülik, kui

$$AB \parallel DC \quad \text{ja} \quad AD \parallel BC.$$

Ühe tähega tähistatakse rööpküliku elemente niisamuti nagu trapetsi juures.

Rööpkülikut nimetatakse ka parallelogrammiks. Rööpküliku kahe vastaskülje vahelist ristlõiku nimetatakse rööpküliku kõrguseks. Et vastaskülgi rööpkülikul on kaks paari, siis on tal kaks kõrgust.



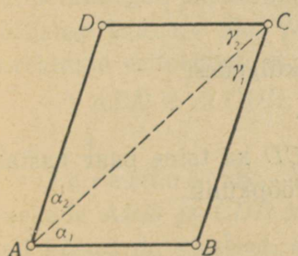
Joonis 98.

Peale eespool-antud definitsiooni on veel mitmeid tunnuseid, millede alusel saab otsustada, kas antud nelinurk on rööpkülik. Üheks niisuguseks tunnuseks on järgmine teoreem:

nelinurk, mille vastasküljed on võrdsed, on rööpkülik.

Eeldus: $AB = DC$ ja $AD = BC$ (joonis 99).

Väide: $ABCD$ on rööpkülik.



Joonis 99.

Tõestus. Joonestame nelinurga ühe diagonaali, näiteks diagonaali AC. Siis

$$\triangle ABC = \triangle ACD,$$

sest ühe kolmnurga kolm külge on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega. Kuid siis

$$\alpha_1 = \gamma_2 \quad \text{ja} \quad \gamma_1 = \alpha_2$$

kui vastavad nurgad neis kolmnurkades. Nende nurkade võrdsusest järeldub, et

$$AB \parallel DC \quad \text{ja} \quad AD \parallel BC,$$

kuna nimetatud sirgete lõikamisel sirgega AC on tekkinud võrdsed põiknurgad. Et nelinurga $ABCD$ vastasküljed on paralleelsed, siis ta on rööpkülik.

Teine teoreem, mis võimaldab otsustada, kas antud nelinurk on rööpkülik, on järgmine:

nelinurk, millel on üks paar võrdseid ja paralleelseid vastaskülgi, on rööpkülik.

Eeldus: $AD = BC$ ja $AD \parallel BC$ (joonis 99).

Väide: $ABCD$ on rööpkülik.

Tõestus. Kolmnurkades ADC ja ABC eelduse järgi

$$AD = BC,$$

nende kolmnurkade ühise küljena

$$AC = AC$$

ja põiknurkadena paralleelsete sirgete AD ja BC juures

$$\alpha_2 = \gamma_1.$$

Seega kolmnurkade võrdsuse tunnuse knk järgi

$$\triangle ADC = \triangle ABC.$$

Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et

$$\alpha_1 = \gamma_2$$

ja seega nelinurga $ABCD$ vastaskülgedest

$$AB \parallel DC.$$

Et eelduse järgi nelinurgal $ABCD$ ka teine paar vastasküIgi on paralleelsed, siis ta on rööpkülik.

Ülesanded.

169. Joonesta rööpkülik, millel $a = 3{,}9$ cm, $b = 2{,}9$ cm ja $e = 5{,}8$ cm.

170. Joonesta rööpkülik, millel $a = 4{,}5$ cm, $\alpha = 48^0$ ja $f = 4{,}2$ cm.

171. Joonesta rööpkülik, millel $a = 5{,}5$ cm, $\beta = 130^0$ ja $b = 4{,}1$ cm.

172. Tõesta, et nelinurk, mille diagonaalid poolitavad teineteist, on rööpkülik.

173. Eelmises ülesandes tõestatud lauset kasutades ehita rööpkülik, millel $a = 5{,}7$ cm, $e = 7{,}2$ cm ja $f = 5{,}2$ cm.

§ 50. Rööpküliku omadusi.

Tõestame kõigepealt, et

diagonaal tükeldab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks.

Eeldus: $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$.

Väide: $\triangle ABD = \triangle CDB$ (joonis 100).

Tõestus. Kolmnurkades ABD ja CDB on ühine külg, seega

$$BD = BD;$$

selle külje lähisnurkadest

$$\beta_1 = \delta_2$$

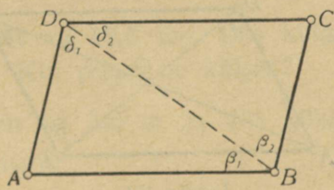
kui põiknurgad paralleelide AB ja DC juures ning

$$\delta_1 = \beta_2$$

kui põiknurgad paralleelide AD ja BC juures. Kolmnurkade võrdsuse tunnuse nkn põhjal järeldame eeltoodust, et

$$\triangle ABD = \triangle CDB,$$

m. o. t. t.



Joonis 100.

Järeldus. Et kolmnurkade ABD ja CDB vastavad küljed on võrdsed, siis

$$AB = DC \text{ ja } AD = BC.$$

Seega

rööpküliku vastasküljed on võrdsed.

Samuti ka

$$\hat{A} = \hat{C} \qquad \text{ja} \qquad \hat{B} = \hat{D},$$

sest nad on vastavateks nurkadeks kolmnurkades, milledeks rööpküliku jaotab diagonaal BD või diagonaal AC. Seega

rööpküliku vastasnurgad on võrdsed.

Tõestame edasi, et

rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist.

Eeldus: $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$.

Väide: $AO = CO$ ja $BO = DO$ (joonis 101).

Tõestus. Kolmnurkade AOD ja BOC külgedest

$$AD = BC,$$

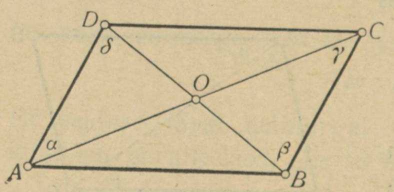
sest nad on rööpküliku vastasküljed,

$$\alpha = \gamma$$

kui põiknurgad rööpsirgete AD ja BC lõikaja AC juures,

$$\delta = \beta$$

kui põiknurgad samade rööpsirgete lõikaja BD juures.



Joonis 101.

Seega kolmnurkade võrdsuse tunnuse nkn järgi

$$\triangle AOD = \triangle BOC.$$

Sellest järeldub, et

$$AO = CO \text{ ja } BO = DO,$$

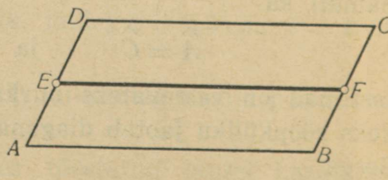
sest nad on võrdsete kolmnurkade vastavad elemendid.

Kui rööpküliku kahe vastaskülje keskpunktid ühendame sirglõigu abil, siis saame rööpküliku kesklõigu. Tõestame, et

rööpküliku kesklõik on kahe küljega paralleelne ja võrdne.

Eeldus: $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$;

$$AE = DE \text{ ja } BF = CF.$$



Joonis 102.

Väide: $EF \parallel AB \parallel DC$ ja $EF = AB = DC$ (joonis 102).

Tõestus. Et rööpküliku vastasküljed on paralleelsed ja võrdsed, siis on seda ka nende poolitamisel saadud lõigud; seetõttu

$$AE \parallel BF \quad \text{ja} \quad AE = BF.$$

Nelinurk $ABFE$ on seega rööpkülik. Sellest järeldub, et

$$EF \parallel AB \quad \text{ja} \quad EF = AB.$$

Rööpküliku omaduste tõttu

$$AB \parallel DC \quad \text{ja} \quad AB = DC.$$

Kokkuvõttes seega

$$EF \parallel AB \parallel DC \quad \text{ja} \quad EF = AB = DC.$$

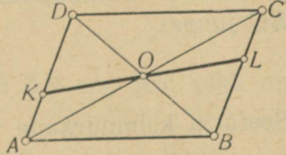
Ülesanded.

174. Rööpküliku ümbermõõt on 18,6 dm. Üks külg on teisest 1,8 dm võrra pikem. Kui pikad on küljed?

175. Rööpküliku ümbermõõt on 5,5 m ja üks külg on $\frac{5}{6}$ teisest. Kui pikad on küljed?

176. Rööpküliku üks nurk on $57^0\,15'$. Kui suured on teised nurgad?

177. Tõesta, et rööpküliku ühe külje lähisnurkade poolitajad on risti.



Joonis 103.

178. Tõesta, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paralleelsed.

179. Tõesta, et joonisel 103 lõigud KO ja LO on võrdsed, kui $ABCD$ on rööpkülik.

§ 51. Trapetsi kesklõik.

Leiame trapetsi haarade keskpunktid ja ühendame need sirglõiguga. See lõik on **t r a p e t s i   k e s k l õ i k.** Rakendades rööpküliku omadusi tõestame, et

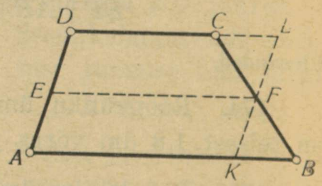
trapetsi kesklõik on alustega paralleelne ja tema pikkus on aluste pikkuste poolsumma.

E e l d u s: $AB \parallel DC$, $AE = DE$, $BF = CF$ (joonis 104).

V ä i d e: $EF \parallel AB \parallel DC$ ja $EF = \frac{AB + DC}{2}$.

T õ e s t u s. Joonestame läbi punkti F sirge paralleelselt sirgega AD. Olgu K ja L selle sirge lõikepunktid ühe aluse ja teise aluse pikendusega. Kolmnurkades BKF ja CLF eelduse järgi

$$BF = CF,$$



Joonis 104.

tippnurkadena neis

$$\widehat{BFK} = \widehat{CFL}$$

ja põiknurkadena paralleelsete sirgete AB ja DC lõikaja BC juures

$$\widehat{KBF} = \widehat{LCF}.$$

Seetõttu kolmnurkade võrdsuse tunnuse nkn järgi

$$\triangle BKF = \triangle CLF.$$

Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub, et

$$KF = LF.$$

Seega punkt F on lõigu KL keskpunkt. Et nelinurgal $AKLD$ üks paar vastakülgi on paralleelsed eelduse järgi ja teine paar joonise järgi, siis see nelinurk on rööpkülik. Rööpküliku $AKLD$ kesklõiguna EF on paralleelne külgedega AK ja DL ning seega

$$EF \parallel AB \parallel DC.$$

Jääb tõestada veel, et lõik EF võrdub trapetsi aluste poolsummaga. Et rööpküliku kesklõik võrdub temaga paralleelse küljega, siis

$$EF = \frac{AK + DL}{2}$$

ehk

$$EF = \frac{AB - BK + DC + CL}{2}.$$

Kolmnurkade BKF ja CLF võrdsusest järeldub, et

$$BK = CL.$$

Seetõttu ülalsaadud murru lugeja lihtsustub, millega saame, et

$$EF = \frac{AB + DC}{2},$$

m. o. t. t.

Samal viisil saab tõestada, et

kolmnurga kahe külje keskpunkte ühendav lõik on paralleelne kolmanda küljega ja võrdub poolega sellest küljest.

Ülesanded.

180. Trapetsi alused on 8,7 ja 5,9 cm. Kui pikk on kesklõik?

181. Trapetsi üks alus on 16 cm ja kesklõik on 12 cm. Kui pikk on teine alus?

182. Trapetsi üks alus on 4,8 cm ja kesklõik on 6,4 cm. Kui pikk on teine alus?

183. Tõesta, et trapetsi kesklõik poolitab trapetsi kõrguse.

184. Tõesta trapetsi kesklõigu kohta antud tõestuse eeskujul, et kolmnurga kahe külje keskpunkte ühendav lõik on paralleelne kolmanda küljega ja võrdub poolega sellest küljest.

§ 52. Romb.

Romb on nelinurk, mille küljed on võrdsed.

Selle definitsiooni järgi joonisel 105 kujutatud nelinurk on romb, kui

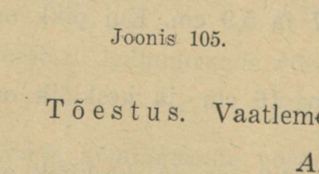
$$AB = BC = CD = AD.$$

Et rombi vastasküljed on kindlasti võrdsed, siis saame rombi defineerida ka järgmiselt:

romb on rööpkülik, mille ühe tipu lähisküljed on võrdsed.

Sellest definitsioonist järeldub siis juba kõikide külgede võrdsus.

Et romb on rööpkülik, siis on tal kõik rööpküliku omadused. Lisaks neile on rombil veel eriomadusi. Tähtsaim neist on see, et



Joonis 105.

rombi diagonaalid ristuvad.

Eeldus: $AB = BC = CD = AD$.

Väide: $AC \perp BD$ (joonis 105).

Tõestus. Vaatleme kolmnurka ACD. Eelduse järgi

$$AD = CD$$

ja seega kolmnurk ACD on võrdhaarne. Et rombi kui rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis

$$AO = CO$$

ja seega punkt O on kolmnurga aluse AC keskpunkt. Võrdhaarse kolmnurga aluse keskpunkti ja kolmnurga tippu ühendav lõik on ühtlasi kolmnurga kõrgus. Seetõttu

$$DO \perp AC$$

ehk, teisiti,

$$AC \perp BD,$$

m. o. t. t.

Võrdhaarse kolmnurga kõrgus on ühtlasi tipunurga poolitaja. Seepärast

$$A\hat{D}O = C\hat{D}O,$$

millest näeme, et

rombi diagonaal poolitab rombi nurga.

Nende rombi diagonaali kahe omaduse tõttu

rombi diagonaal on rombi sümmeetriateljeks.

Et diagonaale rombil on kaks, siis ka sümmeetriatelgi on kaks. Tõestame, et

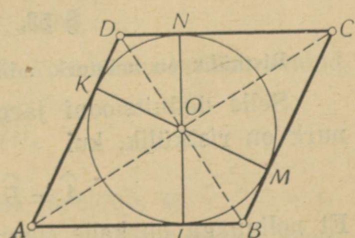
rombi diagonaalide lõikepunkt asetseb rombi külgedest võrdsetel kaugustel.

Eeldus: nelinurk $ABCD$ on romb;

$OK \perp AD$; $OL \perp AB$; $OM \perp BC$; $ON \perp CD$.

Väide: $OK = OL = OM = ON$ (joonis 106).

Tõestus. Eestpoolt teame, et nurgapoolitaja iga punkt asetseb võrdsetel kaugustel nurga haaradest. Et diagonaal AC on rombi nurkade A ja C poolitaja, siis on punkt O võrdsetel kaugustel nurga



Joonis 106.

A haaradest ja nurga C haaradest, seega

$$OK = OL \quad \text{ja} \quad OM = ON.$$

Seesama punkt O kui diagonaali BD punkt asetseb võrdsetel kaugustel nurga B haaradest ja seega

$$OL = OM.$$

Ühendades need kolm võrdust saame

$$OK = OL = OM = ON,$$

m. o. t. t.

Ringjoon, mille keskpunktiks on punkt O ja raadiuseks on lõik OK, läbib punkte K, L, M ja N. Seda ringjoont nimetatakse rombi sisse joonestatud ringjooneks.

Ülesanded.

185. Joonesta romb, mille külg on 5 cm ja diagonaal on 8 cm.

186. Joonesta romb, mille külg on 6,5 cm ja üks nurk on 45^0.

187. Joonesta romb, mille diagonaalide pikkused on antud.

188. Tõesta, et rombi kõrgused on võrdsed.

189. Tõesta, et ristuvate diagonaalidega rööpkülik on romb.

190. Joonesta romb, mille külg võrdub ühe diagonaaliga, ja ehita selle sisse joonestatud ringjoon.

§ 53. Ristkülik.

Ristkülik on nelinurk, mille nurgad on võrdsed.

Selle definitsiooni järgi joonisel 107 kujutatud nelinurk on ristkülik, kui

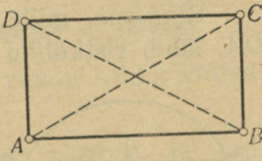
$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}.$$

Et nelinurga nurkade summa on 360^0, siis ristküliku iga nurk on $360^0 : 4$ ehk 90^0. Seega ristkülik on täisnurkne nelinurk. Et ristküliku iga nurk on täisnurk, siis tema vastasküljed on paralleelsed, sest nad on risti ühe ja sama sirgega. Seega ristkülik on rööpkülik ja teda saab defineerida veel järgmiselt:

ristkülik on rööpkülik, mille üks nurk on täisnurk.

Sellest järeldub rööpküliku omaduste alusel, et ristküliku kõik nurgad on täisnurgad.

Et ristkülik on rööpkülik, siis on tal kõik rööpküliku omadused. Ristküliku üheks eriomaduseks on see, et



Joonis 107.

ristküliku diagonaalid on võrdsed.

Eeldus: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$.

Väide: $AC = BD$ (joonis 107).

Tõestus. Vaatleme kolmnurki ABD ja ABC. Neis on ühise küljena

$$AB = AB,$$

eelduse järgi

$$\hat{A} = \hat{B}$$

ja rööpküliku vastaskülgedena

$$AD = BC.$$

Seega kolmnurkade võrdsuse tunnuse knk järgi

$$\triangle ABD = \triangle ABC.$$

Kuid siis on võrdsed ka nende kolmnurkade kolmandad küljed, nimelt

$$AC = BD,$$

m. o. t. t.

Sellest ristküliku omadusest järeldub, et

ristküliku diagonaalide lõikepunkt asetseb ristküliku tippudest võrdsetel kaugustel.

Eeldus: $ABCD$ on ristkülik.

Väide: $AO = BO = CO = DO$ (joonis 108).

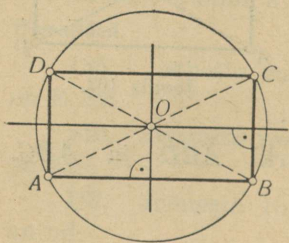
Tõestus. Et ristkülik on rööpkülik, siis tema diagonaalid poolitavad teineteist; seega

$$AO = CO \quad \text{ja} \quad BO = DO.$$

Et ristküliku diagonaalid on võrdsed, siis on võrdsed ka nende pooled; seega

$$AO = BO = CO = DO.$$

Ringjoon, mille keskpunktiks on O ja raadiuseks on OA, läbib ristküliku tippe A, B, C ja D. Seda ringjoont nimetatakse ristküliku **ümber joonestatud ringjooneks.**



Joonis 108.

Kui ristküliku diagonaalide lõikepunktist O (joonis 108) joonestada ristsirge ühele küljele, siis see sirge on risti ka vastasküljega, sest paralleelidel on ristsirged ühised. Ühtlasi poolitab ta ristküliku kaks külge, sest punktist O näiteks küljele AB joonestatud ristsirge kui võrdhaarse kolmnurga ABO kõrgus poolitab kolmnurga aluse AB. Sellest selgub, et

diagonaalide lõikepunktist ristküliku küljele joonestatud ristsirge on ristküliku sümmeetriatelg.

Neid telgi on ristkülikul kaks.

Ülesanded.

191. Joonesta ristkülik, mille ühe tipu lähisküljed on 4,8 cm ja 7,5 cm.

192. Joonesta ristkülik, mille üks külg ja diagonaal on antud.

193. Joonesta ristkülik, mille ümber joonestatud ringjoone raadius on 3,5 cm ja nurk diagonaalide vahel 35^0.

194. Tõesta, et ristküliku külgede keskpunktide ühendamisel sirglõikude abil tekib romb.

195. Tõesta, et rombi külgede keskpunktide ühendamisel sirglõikude abil tekib ristkülik.

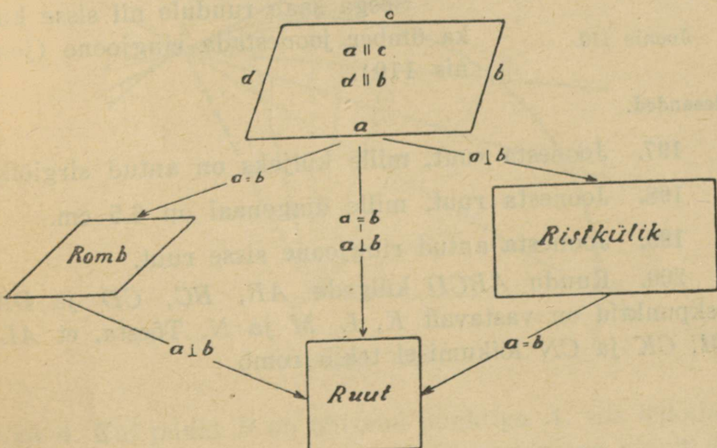
196. Tõesta, et võrdsete diagonaalidega rööpkülik on ristkülik.

§ 54. Ruut.

Ruut on ristkülik, mille ühe tipu lähisküljed on võrdsed.

Sellest definitsioonist järeldub, et ruudu k õ i k küljed on võrdsed; tõepoolest:

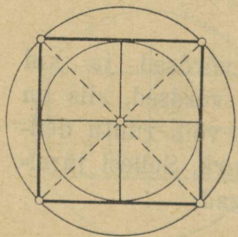
ristkülikul on vastasküljed ikka võrdsed ja kui lisaks sellele ka ühe tipu lähisküljed on võrdsed, siis on kõik küljed võrdsed. Selle omaduse tõttu võib ruutu defineerida rombina, mille üks nurk on täisnurk. Sellest järeldub siis, et ka teised nurgad on täisnurgad.



Joonis 109.

Nagu eespool nägime, saab rombi ja ristkülikut defineerida rööpküliku abil. Ka ruutu võime vaadelda rööpkülikuna, nimelt niisuguse rööpkülikuna, mille ühe tipu lähisküljed on võrdsed ja risti. Seega on romb, ristkülik ja ruut erikujulised rööpkülikud (joonis 109).

Et ruut on nii ristkülik kui ka romb, siis on ruudul kõik rombi ja kõik ristküliku omadused. Kui ristkülikul on ruudul kõik nurgad võrdsed ja kui rombil — kõik küljed võrdsed. Seega ruut on korrapärane nelinurk. Sümmeetriatelgedeks on ruudul nii rombi kui ka ristküliku sümmeetriateljed. Seega on ruudul neli sümmeetriatelge. Punkti, milles lõikuvad need neli sümmeetriatelge, nimetatakse ruudu keskpunktiks (joonis 110).



Joonis 110.

Ruudu keskpunkt asetseb võrdsetel kaugustel ruudu külgedest ja võrdsetel kaugustel ruudu tippudest.

Seega saab ruudule nii sisse kui ka ümber joonestada ringjoone (joonis 110).

Ülesanded.

197. Joonesta ruut, mille küljeks on antud sirglõik.

198. Joonesta ruut, mille diagonaal on 6,5 cm.

199. Joonesta antud ringjoone sisse ruut.

200. Ruudu *ABCD* külgede *AB*, *BC*, *CD* ja *DA* keskpunktid on vastavalt *K*, *L*, *M* ja *N*. Tõesta, et *AL*, *AM*, *CK* ja *CN* lõikumisel tekib romb.

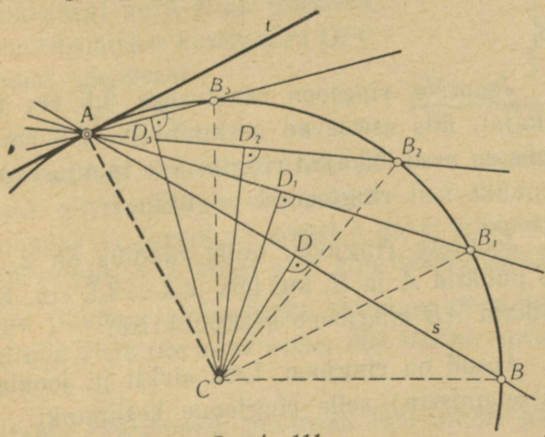
Peatükk VII.

Ringjoon.

§ 55. Ringjoone puutuja.

Võtame ringjoonel kaks punkti A ja B. Sirge s, mis läbib neid punkte, on ringjoone lõikaja (joonis 111).

Pöörame lõikajat s ümber lõikepunkti A nii, et teine lõikepunkt B läheneb esimesele. Seejuures punkt B omandab asendi B_1, B_2, $B_3, \ldots$, kuni ta viimaks ühtib punk-



Joonis 111.

tiga A. Kui punkt B on ühtinud punktiga A, siis lõikaja s on jõudnud asendisse t, kus tal on ringjoonega ainult üks ühine punkt (joonis 111).

Sirget, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt, nimetatakse selle ringjoone puutujaks.

Nende joonte ühist punkti nimetatakse puutepunktiks.

Ehitame ringjoone keskpunktist C lõikajale s ristsirge CD. Lõikaja pöördumisel ümber ühe lõikepunkti pöördub ka lõikajale ehitatud ristsirge, omandades asendid CD_1, CD_2 jne; seejuures jääb see ristlõik ikka raadiuste CA ja CB vahele. Kui punkt B ühtib punktiga A, siis raadius CB ja ristlõik CD ühtivad raadiusega CA. Seega on raadius CA risti puutujaga punktis A ehk, üldiselt,

ringjoone puutuja on risti puutepunktist lähtuva raadiusega.

Sellest järeldub, et

puutuja kaugus ringi keskpunktist võrdub ringi raadiusega.

Ülesanded.

201. Joonesta ringjoon raadiusega 3,5 cm ja selles kolm lõikajat, mis asetsevad keskpunktist 2,5 cm kaugusel. Milleks on need lõikajad ringjoonele raadiusega 2,5 cm, kui keskpunkt neil ringjoontel on ühine?

202. Joonesta ringjoon, mille raadius on 2,7 cm ja mis läbib punktid A ja B, kui lõik $AB = 4{,}2$ cm. Kui kaugel on lõikaja AB ringjoone keskpunktist?

203. Antud on ringjoon. Leia sirkli ja joonlaua abil (ilma katsetamiseta) selle ringjoone keskpunkt.

204. Antud on sirge ja väljaspool seda kaks punkti. Joonesta ringjoon, mis läbib antud punktid ja mille keskpunkt asetseb antud sirgel. Millal see ülesanne ei ole lahenduv?

§ 56. Puutuja läbi antud punkti.

Vaatleme esiteks puutuja ehitamist juhul, kui puutepunkt on antud. Selle ehitamist võimaldab järgmine teoreem:

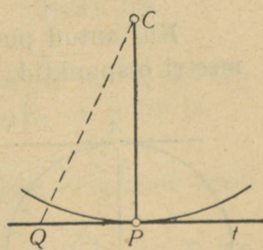
sirge, mis on risti diameetriga selle otspunktis, on ringjoone puutuja.

Eeldus: $t \perp PC$ (joonis 112).

Väide: sirge t on ringjoone puutuja.

Tõestus. Sirge on ringjoone puutuja, kui tal on selle ringjoonega ainult üks ühine punkt. Kui sirgel t oleks peale punkti P ringjoonega veel mingi teine ühine punkt Q, siis

$$QC = PC = r.$$



Joonis 112.

Et eelduse järgi nurk P on täisnurk, siis QC on täisnurkse kolmnurga QPC hüpotenuus; seepärast

$$QC > PC.$$

Et QC ei saa olla suurem kui PC ja samal ajal võrdne PC-ga, siis punkti Q pole olemas ja järelikult sirgel t on ringjoonega ainult üks ühine punkt, s. t. sirge t on ringjoone puutuja.

Seega puutuja ehitamiseks antud puutepunkti korral tuleb ehitada ristsirge raadiusele, mis lähtub antud puutepunktist.

Ehitame ringjoonele puutujad läbi antud puutepunktide A ja B (joonis 113). Need kaks puutujat kas lõikuvad kuski punktis D või on paralleelsed. Eeldame, et nad lõikuvad, ja tõestame järgmise teoreemi:

puutujate lõikepunkt on puutepunktidest võrdsetel kaugustel.

Eeldus: sirged AD ja BD on puutujad.

Väide: $AD = BD$ (joonis 113).

Tõestus. Ühendame punktid C ja D; siis tunnuse KkN järgi

$$\triangle ADC = \triangle BDC,$$

sest

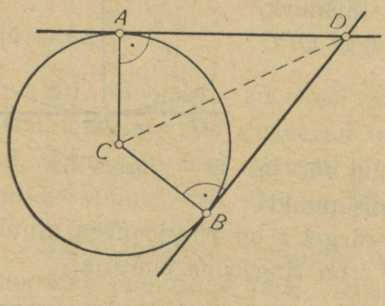
$$\hat{A} = \hat{B}, \quad AC = BC \quad \text{ja} \quad CD = CD.$$

Järelikult

$$AD = BD$$

kui võrdsete kolmnurkade vastavad küljed.

Kui antud puutepunktid A ja B on ühe ja sama diameetri otspunktid, siis neid läbivad puutujad on paralleelsed, sest nad on risti ühe ja sama sirgega ACB.



Joonis 113.

Vaatleme nüüd puutuja ehitamist juhul, kui puutepunkt ei ole antud.

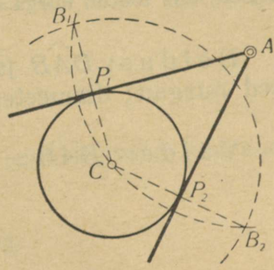
Ülesanne. Ehitada ringjoonele puutuja läbi väljaspool ringjoont asetseva punkti.

Lahendus (joonis 114). Joonestame ümber antud ringjoone keskpunkti C uue ringjoone raadiusega, mis võrdub antud ringjoone diameetriga, ja ümber antud punkti A ringjoone, mis läbib keskpunkti C. Lõikugu need kaks uut ringjoont punktides B_1 ja B_2. Joonestame sirglõigud B_1C ja B_2C ning leiame punktid P_1 ja P_2, kus need sirglõigud lõikuvad antud ringjoonega. Nii sirge P_1A kui ka sirge P_2A on puutuja läbi punkti A.

P õ h j e n d u s. Ühendades punkti A punktidega B_1 ja C, tekib kolmnurk AB_1C, mis on võrdhaarne, sest

$$AC = AB_1$$

kui ühe ja sama ringjoone raadiused. Konstruktsiooni järgi on punkt P_1 selle kolmnurga aluse keskpunkt; et võrdhaarse kolmnurga tippu ja aluse keskpunkti ühendav lõik on kolmnurga kõrgus, siis



Joonis 114.

$$AP_1 \perp B_1C.$$

Seega sirge AP_1 on risti raadiusega P_1C, mistõttu AP_1 on puutuja. Samuti saame näidata, et AP_2 on puutuja.

Ülesanded.

205. Joonesta puutuja, kui on antud ringjoone keskpunkt ja puutepunkt.

206. Joonesta ringjoonele, mille raadius on 3 cm, puutujad läbi punkti, mis asetseb 5 cm kaugusel ringjoone keskpunktist.

207. Joonesta kaks ristuvat puutujat ringjoonele, mille raadius on 2,5 cm.

208. Ringjoone kaks paralleelset puutujat lõikuvad kolmanda puutujaga punktides A ja B. Tõesta, et $\triangle ABO$ on täisnurkne, kui punkt O on ringjoone keskpunkt.

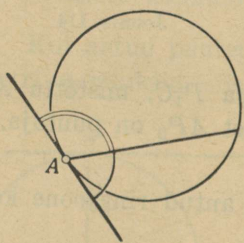
§ 57. Puutuja ja kõõlu vaheline nurk.

Joonestame ringjoonele punktis A puutuja ja kõõlu (joonis 115). Puutuja ja kõõlu vahel on kaks nurka, milledest üks on teravnurk ja teine on nürinurk. Kummagi nurga sees on üks selle ringjoone kaar. Tõestame nende nurkade kohta järgmise teoreemi:

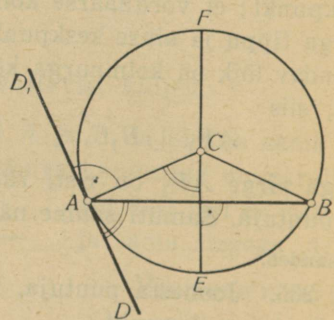
puutuja ja kõõlu vaheline nurk on niisama suur kui pool kesknurgast, mis toetub nurga sees olevale kaarele.

Eeldus: $\widehat{DAB}$ ja $D_1\widehat{AB}$ on puutuja ja kõõlu vahelised nurgad; diameeter EF poolitab kesknurga ACB.

Väide: $\widehat{DAB} = \widehat{ACE}$; $D_1\widehat{AB} = \widehat{ACF}$ (joonis 116).



Joonis 115.



Joonis 116.

Tõestus. Kui diameeter EF poolitab kesknurga ACB, siis EF on risti kõõluga AB, sest ainult kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu ja selle vastava kesknurga. Nüüd selgub, et $\widehat{DAB}$ ja $\widehat{ACE}$ on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad, sest

$$DA \perp AC$$

kui puutuja ja puutepunktist lähtuv raadius,

$$AB \perp CE,$$

nagu tõestusest selgus,

$$\widehat{ACE} < 90^0$$

kui täisnurkse kolmnurga teravnurk ja

$$\widehat{DAB} < 90^0,$$

nagu nähtub joonisest.

Et vaadeldavad nurgad on ristiseisvate haaradega teravnurgad, siis

$$\widehat{DAB} = \widehat{ACE}.$$

Niisamuti ka

$$D_1\widehat{AB} = \widehat{ADF},$$

m. o. t. t.

Ülesanded.

209. Kui suur on nurk puutuja ja kõõlu vahel, kui kõõl läbib ringjoone keskpunkti?

210. Puutepunktist lähtuva raadiuse ja kõõlu vaheline nurk on 18^0. Kui suured on nurgad puutuja ja kõõlu vahel?

211. Puutepunktist lähtuv kõõl jaotab ringjoone kaheks kaareks, milledest üks on $\frac{2}{5}$ ringjoonest. Kui suured on nurgad puutuja ja kõõlu vahel?

212. Puutuja ja kõõlu vahelise nurga sees olev kaar on $79^0\,16'$. Kui suured nurgad moodustab puutuja kõõluga?

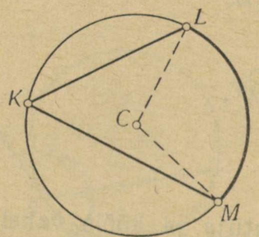
213. Kahe raadiuse otspunktidest on joonestatud puutujad. Kui suur on nurk puutujate vahel, kui raadiused moodustavad nurga 140^0?

§ 58. Piirdenurk.

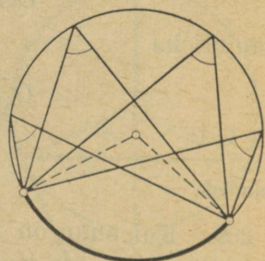
Joonestame ringjoones kaks ühise otspunktiga kõõlu KL ja KM (joonis 117). Need kõõlud moodustavad nurga LKM, mille tipp asetseb ringjoonel; seda nurka nimetatakse piirdenurgaks.

Piirdenurk on nurk kahe kõõlu vahel, milledel on ühine otspunkt.

Iga piirdenurk toetub kaarele, millele toetub ka üks kesknurk: piirdenurk LKM toetub kaarele LM, millele toe-



Joonis 117.


Joonis 118.

tub ka kesknurk LCM. Kuid ühele ja samale kaarele toetub loendamatu hulk piirdenurki (joonis 118), sest piirdenurga tipuks võime valida mistahes punkti selle ringjoone ülejäänud kaarel.

Saab tõestada, et kõik piirdenurgad, mis toetuvad ühele ja samale kaarele (joonis 118), on võrdsed. Selleks tõestame enne, et

piirdenurk võrdub samale kaarele toetuva kesknurga poolega.

Eeldus: α on piirdenurk ja α_1 on kesknurk, mis toetuvad ühele ja samale kaarele.

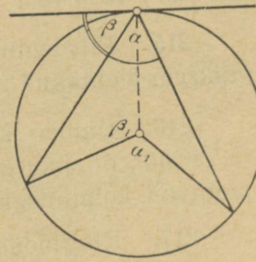
Väide: $\alpha = \frac{1}{2}\alpha_1$.

T õ e s t u s. Joonestame puutuja läbi piirdenurga α tipu (joonis 119). Eelmise teoreemi järgi puutuja ja kõõlu vaheline nurk

$$\beta = \tfrac{1}{2}\beta_1,$$

sest kesknurk β_1 toetub kaarele, mis on nurga β sees. Samuti puutuja ja kõõlu vaheline nurk

$$\alpha + \beta = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1),$$



Joonis 119.

sest kesknurk $\alpha_1 + \beta_1$ toetub kaarele, mis on nurga $\alpha + \beta$ sees. Avades sulud teise võrduse paremal poolel saame

$$\alpha + \beta = \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\beta_1;$$

lahutades sellest võrduse

$$\beta = \tfrac{1}{2}\beta_1$$

vastavad pooled jääb

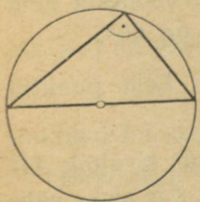
$$\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha_1,$$

m. o. t. t.

J ä r e l d u s e d.

1. **Ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed,** sest igaüks neist võrdub poolega ühest ja samast kesknurgast.

2. **Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk,** sest vastav kesknurk on kaks täisnurka.



Joonis 120.

Viimast järeldust, mida nimetakse Thales'e teoreemiks, saab kasutada täisnurkse kolmnurga ehitamiseks hüpotenuusi ja kaateti järgi. Selleks joonestame (joonis 120) ringjoone, mille diameetriks on hüpotenuus, ja mõõdame diameetri otspunktist kõõlu, mis võrdub antud kaatetiga. Selle kõõlu otspunkti ühendamisel diameetri otspunktiga saame täisnurkse kolmnurga, sest diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

Ülesanded.

214. Kui suur piirdenurk toetub kaarele 40^0, 75^0, $118^0 20'$, $131^0 48'$?

215. Piirdenurk toetub kaarele, mis on 76^0 võrra väiksem ülejäänud ringjoone osast. Kui suur on piirdenurk?

216. Ümber kolmnurga, mille $\hat{A} = 58^0 40'$ ja $\hat{B} = 72^0 30'$, on joonestatud ringjoon. Kui suurteks kaarteks jaotavad kolmnurga tipud selle ringjoone?

217. Ringjoonel asetsevad järjestikku punktid A, B, C ja D nii, et $\overset{\frown}{AB}$ on $\frac{1}{5}$ ringjoonest, $\overset{\frown}{BC}$ on $\frac{1}{6}$ ringjoonest ja $\overset{\frown}{CD}$ on $\frac{3}{10}$ ringjoonest. Kui suured nurgad on nelinurgal $ABCD$?

218. Kaks ringjoont lõikuvad punktides A ja B. Punktist A on joonestatud mõlema ringjoone diameetrid AC ja AD. Tõesta, et punktid B, C ja D asetsevad ühel ja samal sirgel.

219. Ringjoonel on tähistatud võrdsed kaared AB ja CD. Tõesta, et AC ja BD on kas võrdsed või paralleelsed sirglõigud.

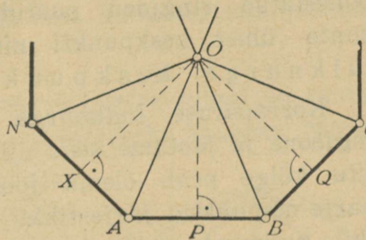
220. Antud on sirglõik $AB = 3{,}5$ cm. Joonesta ringjoon, milles kõõlule AB toetuv piirdenurk on 60^0.

221. Antud on sirglõik $AB = 4$ cm. Leia punktid, milledest sirglõik AB paistab täisnurgas.

222. Antud on sirge s ja väljaspool seda sirglõik AB. Leia, kas sirgel s on punkte, millest sirglõik AB oleks näha nurgas 60^0.

§ 59. Ringjoon ja korrapärane hulknurk.

Olgu $ABC\ldots N$ mingi korrapärane hulknurk (joonis 121). Poolitame selle nurgad A ja B ning tähistame nende nurgapoolitajate lõikepunkti tähega O. Nii saadud $\triangle ABO$ on võrdhaarne, sest tema nurgad OAB ja OBA on võrdsed kui korrapärase hulknurga nurkade A ja B pooled. Ühendame nüüd punkti O punktiga C. Saadud uus kolmnurk BCO on võrdne kolmnurgaga ABO, sest



Joonis 121.

$$AB = BC,\ \widehat{ABO} = \widehat{CBO} \text{ ja } BO = BO.$$

Seetõttu ka $\triangle BCO$ on võrdhaarne ning selles

$$\widehat{OCB} = \widehat{OBC}.$$

Kuid siis $\widehat{OCB}$ on pool korrapärase hulknurga nurgast ja OC on nurga C poolitaja. Ühendades punkti O hulknurga ülejäänud tippudega, saame samal viisil tõestada, et need ühenduslõigud poolitavad ka hulknurga ülejäänud nurgad. Seega kõik hulknurga $ABC\ldots N$ nurgapoolitajad lõikuvad punktis O. Seejuures

$$OA = OB = OC = \ldots = ON,$$

sest nad on võrdsete võrdhaarsete kolmnurkade haarad, ja

$$OP = OQ = \ldots = OX,$$

sest nad on samade kolmnurkade kõrgused. Seega:

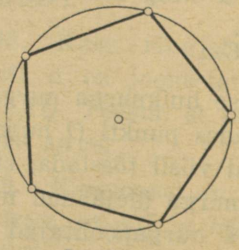
korrapärase hulknurga nurgapoolitajad lõikuvad kõik ühes ja samas punktis; see punkt asetseb võrdsetel kaugustel hulknurga tippudest ja võrdsetel kaugustel hulknurga külgedest.

Sellest järeldub, et

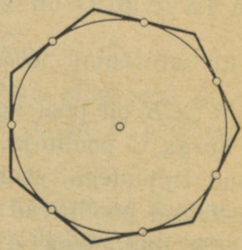
iga korrapärase hulknurga ümber ja sisse saab joonestada ringjoone.

Ümberjoonestatud ringjoon läbib kõiki tippe ja sissejoonestatud ringjoon puutub kõiki külgi. Nende ringjoonte ühist keskpunkti nimetatakse k o r r a p ä r a s e h u l k n u r g a k e s k p u n k t i k s.

Korrapärase hulknurga joonestamiseks joonestame ringjoone ja jaotame selle nii mitmeks võrdseks kaareks, mitu külge peab olema joonestataval hulknurgal. Kui kaarte otspunktid järjestikku ühendada sirglõikudega, siis tekib hulknurk, mille küljed on võrdsed, sest neile kui kõõludele vastavad kaared on võrdsed. Ka on võrdsed selle hulknurga nurgad, sest nad on piirdenurgad, mis toetuvad võrdsetele kaartele (joonis 122). Järelikult on see hulknurk korrapärane. Seda hulknurka nimetatakse k o r r a p ä r a s e k s s i s s e j o o n e s t a t u d h u l k n u r g a k s ehk k o r r a p ä r a s e k s k õ õ l h u l k n u r g a k s.



Joonis 122.

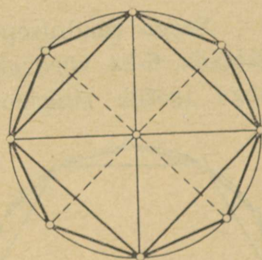


Joonis 123.

Korrapärase hulknurga saab ka siis, nagu kerge on veenduda, kui ringjoone jaotuspunktidest joonestada puutujad (joonis 123). Seda hulknurka nimetatakse k o r r a p ä r a s e k s ü m b e r j o o n e s t a t u d h u l k n u r g a k s ehk k o r r a p ä r a s e k s p u u t u j a h u l k n u r g a k s.

Ringjoone võib jaotada võrdseteks kaarteks kas sirkli ja joonlaua või malli abil. Ringjoone jaotamine sirkli ja joonlaua abil ilma k a t s e t a m i s e t a ei ole teostatav igasuguse kaarte arvu juures; pole võimalik näiteks ringjoont sirkli ja joonlaua abil ilma katsetamiseta jaotada seitsmeks võrdseks kaareks.

Kõige lihtsamad ringjoone jaotamise juhud on jaotamine 4-ks, 8-ks, 16-ks, 32-ks jne. võrdseks kaareks. Nende jaotamiste teostamiseks joonestame kaks ristuvat diameetrit, millega on ringjoon jaotatud 4-ks võrdseks kaareks; saadud täisnurkade poolitamisega jaotame ringjoone 8-ks võrdseks kaareks jne. (joonis 124).

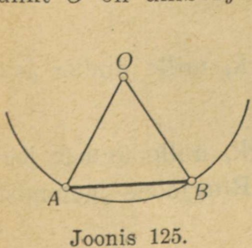


Joonis 124.

Ringjoone jaotamine 3-ks, 6-ks, 12-ks jne. võrdseks kaareks on võimalik lähtudes ringjoone jaotamisest kuueks võrdseks kaareks. Viimane on teostatav sirkli abil, sest

korrapärase kuusnurga külg võrdub ümberjoonestatud ringjoone raadiusega.

E e l d u s: AB on korrapärase kuusnurga külg ja punkt O on ümberjoonestatud ringjoone keskpunkt.



Joonis 125.

V ä i d e: $AB = AO$ (joonis 125).

T õ e s t u s. $\triangle AOB$ on võrdhaarne, sest $AO = BO$; järelikult

$$\hat{A} = \hat{B}.$$

Selle kolmnurga tipunurk O võrdub

$360^0 : 6$ ehk 60^0. Sama kolmnurga alusnurgad A ja B on seega

$$(180^0 - 60^0) : 2$$

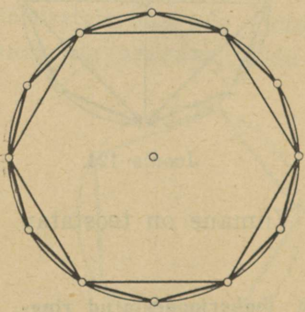
ehk

$$60^0.$$

Seega kolmnurga AOB nurgad on võrdsed; kuid siis on võrdsed ka tema küljed ja seega

$$AB = AO = BO.$$

Seega raadiusepikkuste kõõlude abil saame ringjoone jaotada 6-ks võrdseks kaareks. Nende kaarte poolitamisega jaotub ringjoon 12-ks võrdseks kaareks, viimaste poolitamisega 24-ks võrdseks kaareks jne. Nende kaarte otspunkte järjestikku ühendades saame korrapärase 6-nurga, 12-nurga, 24-nurga jne. (joonis 126).



Joonis 126.

Ülesanded.

223. Joonesta korrapärane 6-nurk küljega 2 cm.

224. Joonesta korrapärane 12-nurk, mille ümber joonestatud ringjoone raadius on 2,5 cm.

225. Joonesta korrapärane 3-nurk, mille ümber joonestatud ringjoone raadius on 3 cm.

226. Joonesta korrapärane 7-nurk, mille ümber joonestatud ringjoone raadius on 3 cm. Ringjoone jaotamist toimeta sirkli abil katsetades.

Hind Rmk. 1.70

Hind Rmk. 1.70

E. ETVERK — GEOMEETRIA ÕPIK GÜMNAASIUMI I KLASSILE

E. ETVERK

GEOMEETRIA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI I KLASSILE

TARTU EESTI KIRJASTUS