

Lucie Schenberg.

Reitfaden

für den

Unterricht im Rechnen.

Bearbeitet

von

Johann Pahnsh,

Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasio zu Reval,
kaiserlich Russischem Collegienrathe, Ritter des Ordens der heiligen Anna dritter Klasse,
Inhaber des Ehrenzeichens für XXjährigen tabellosen Dienst
und der Kriegsmedaille von 1858.

Dritte verbesserte Auflage.

Reval.

Verlag von Franz Kluge.

1873.

Дозволено Цензурою.

Ревель, 23го Августа 1872.



6064

Inhalt.

	Seite
1. Einleitung	1
2. Erklärung des dekadischen Zahlensystems	2
3. Das Numeriren	7
4. Die Addition.	9
5. Die Subtraction.	13
6. Die Multiplication.	15
7. Die Division	20
8. Vom größten gemeinsamen Maaße zweier Zahlen. — Kennzeichen der Theilbarkeit einer Zahl durch 2, 4, 8, 5, 3, 9, 6, 11. — Vom kleinsten gemeinsamen Vielfachen mehrerer Zahlen	28
9. Von den Brüchen	33
10. Addition der Brüche	41
11. Subtraction der Brüche	42
12. Multiplication der Brüche	44
13. Division der Brüche	46
14. Von den Decimalbrüchen	50
15. Addition der Decimalbrüche	54
16. Subtraction der Decimalbrüche.	55
17. Multiplication der Decimalbrüche	55
18. Division der Decimalbrüche	56
19. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruchs in einen Decimalbruch	59
20. Verwandlung eines Decimalbruchs in einen gewöhnlichen Bruch	61
Die abgekürzte Multiplication und Division der Decimalbrüche.	
21. Von den benannten Zahlen; das Resolviren und Reduciren.	69
22. Addition benannter Zahlen	77

	Seite
23. Subtraction benannter Zahlen.	79
24. Die Zeitrechnung.	81
25. Multiplication benannter Zahlen	87
26. Division benannter Zahlen	91
27. Die Regelbetri	95
28. Regelbetri mit indirecten Verhältnissen	97
29. Die zusammengesetzte Regelbetri	99
30. Die Zinsrechnung	104
31. Die Gesellschafts- oder Repartitions-Rechnung.	123
32. Die Vermischungsrechnung	134
33. Die Kettenregel	142
34. Vom Quadriren und Ausziehen der Quadratwurzel	149
35. Vom Kubiren und Ausziehen der Kubikwurzel	158
36. Von den Verhältnissen und Proportionen	166
37. Anwendung der Verhältnisse auf benannte Zahlen	178
38. Die einfache Regelbetri, durch Proportion begründet	181
39. Die zusammengesetzte Regelbetri desgl.	183
40. Die Repartitionsrechnung desgl.	188
41. Kettenregel desgl.	189
42. Die Vermischungsrechnung desgl.	190

Einleitung.

§ 1. Betrachten wir einzelne Dinge nach gewissen Merkmalen, die sie mit einander gemein haben, so nennen wir sie gleichartig. Jedes einzelne Ding heißt die Einheit oder Eins, z. B. ein Stuhl; ein Mensch; ein Haus u. s. w.

§ 2. Wenn wir die Einheit blos als ein Etwas ansehen und alle Nebenvorstellungen der besondern Art des Gleichartigen entfernen, so nennen wir dieselbe abstract oder unbenannt. Für die abstracte Einheit bedienen wir uns des Zeichens

„1“.

§ 3. Wir können uns die Einheit fortwährend wiederholt denken, wodurch wir folgende Reihe

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1

erhalten, die bis ins Unendliche fortgeht. — Fassen wir nun nach jedesmaliger Wiederholung der Einheit die Menge derselben zu einem Ganzen zusammen, so entsteht folgende Reihe

1; (1, 1); (1, 1, 1); (1, 1, 1, 1); (1, 1, 1, 1, 1);

die ebenfalls bis ins Unendliche fortläuft. — Diese Reihe, die mit Eins beginnt und nach einander immer um eine Einheit wächst, nennt man

„Zahlenreihe“

und jedes Glied derselben

„Zahl.“

§ 4. Jede Zahl ist also der Inbegriff einer Menge von Einheiten.

Ebenso wie aus der unbenannten Einheit durch ihre mehrmalige Wiederholung eine beliebige unbenannte Zahl hervorgeht, so entstehen auch durch Wiederholung der benannten Einheit die benannten Zahlen.

Da die Zahlenreihe bis ins Unendliche fortläuft, so giebt es keine Zahl, die an und für sich die größte von allen wäre. — Die Größe einer Zahl hängt von der Menge Einheiten ab, die wir uns zu einem Ganzen vereinigt denken; demnach ist in der Zahlenreihe § 3 jede Zahl größer als die vorhergehende und kleiner als die darauf folgende. Jede gegebene oder gedachte Zahl muß sich in obiger Reihe § 3 vorfinden, weil diese Reihe alle Zahlen von 1 bis ins Unendliche umfaßt. Die zur Andeutung der Zahlen erforderlichen Zeichen werden Ziffern genannt.

§ 5. Diejenige Wissenschaft, die sich mit Untersuchungen über die Eigenschaften der Zahlen und über die Gesetze ihrer Verbindungen unter einander beschäftigt, wird die Arithmetik genannt. Aus bekannten Zahlen nach bestimmten Regeln und gegebenen Bedingungen gemäß andere, gesuchte Zahlen ableiten, heißt rechnen.

Jede Veränderung, die man mit den gegebenen Zahlen vornimmt, um die gesuchten neuen Zahlen herzuleiten, bildet eine arithmetische Operation. — Die einfachste Veränderung einer Zahl geschieht dadurch, daß man durch Hinzulegen von Gleichartigem dieselbe vergrößert und durch Wegnehmen von Gleichartigem dieselbe vermindert. — Auf diesen beiden Veränderungen beruhen die vier einfachen Grundrechnungen oder Species, nemlich die Addition, Subtraction, Multiplication und Division.

Das dekadische Zahlensystem.

§ 6. Wir lernen mit der Sprache zugleich auch Zählen, d. h. das Hersagen der Zahlenreihe (§ 3). — Das Zählen besteht darin, daß wir eine bestimmte Menge von Einheiten als eine neue Einheit betrachten, und auf gleichförmige Weise dieses Verfahren in's Unendliche wiederholen. Der Inbegriff aller Zahlen nach einer solchen Eintheilung in verschiedene Klassen heißt Zahlensystem. Das System, dessen wir uns bedienen, wird

das dekadische oder das Decimalsystem genannt, weil wir nur bis zehn zählen, und für zehn mal zehn, zehn mal zehn mal zehn u. s. w. die abkürzenden Benennungen — Hundert, Tausend u. s. w. gebrauchen. Die Zahl zehn nennt man die Grundzahl oder Basis des Decimalsystems.

Zehn Einer zusammengenommen machen einen Zehner, zehn Zehner einen Hunderter aus. Die Einer bilden die niedrigste oder nullte Ordnung, die Zehner die erste und die Hunderter die zweite Ordnung unseres Zahlensystems. Diese drei Ordnungen bilden die untere Abtheilung der ersten Hauptklasse.

Zehn Hunderter machen einen Tausender, zehn Tausender einen Zehntausender, zehn Zehntausender einen Hunderttausender aus. Die Tausender bilden die dritte, die Zehntausender die vierte und die Hunderttausender die fünfte Ordnung unseres Zahlensystems. Die drei letzten Ordnungen bilden die obere Abtheilung der ersten Hauptklasse. Demnach besteht die erste Hauptklasse aus sechs Ordnungen, nemlich aus Einern, Zehnern, Hunderten, Tausendern, Zehntausendern, Hunderttausendern.

Wegen dieser Einrichtung ist die nöthige Fertigkeit und Sicherheit, Zahlen zu bilden und richtig auszusprechen, die blos die Unterabtheilungen der ersten Hauptklasse enthalten, von großer Wichtigkeit, weil sich dann jede noch so große Zahl leicht übersehen und aussprechen läßt. Kommen Einer, Zehner und Hunderter der Oberabtheilung vor, so nennt man diese zuerst als wären sie Einheiten der Ordnungen der Unterabtheilung und fügt nur zur Bezeichnung, daß sie zur obern Abtheilung gehören, die Benennung — Tausend hinzu, — hierauf läßt man die Einheiten der Ordnungen der Unterabtheilung folgen.

Uebungsbeispiele.

- a) Für Zahlen, die blos aus Einheiten der Unterabtheilung der ersten Hauptklasse bestehen.
- 1) Drei Einheiten der ersten und sieben Einheiten der nullten Ordnung heißen? Antw.: Sieben und dreißig.
 - 2) Vier Einheiten der ersten und sieben Einheiten der zweiten Ordnung heißen? Antw.: Siebenhundert und vierzig.

- 3) Zwei Einheiten der zweiten, drei der ersten und sechs der nullten Ordnung heißen? Antw.: Zweihundert sechsunddreißig.
- b) Für Zahlen, die bloß aus Einheiten der Oberabtheilung der ersten Hauptklasse bestehen.
- 4) Zwei Einheiten der dritten und sechs der fünften Ordnung heißen? Antw.: Fünfhundert zwei — Tausend.
- 5) Neun Einheiten der dritten, acht der vierten und fünf der fünften Ordnung heißen? Antw.: Fünfhundert neunundachtzig Tausend.
- c) Für Zahlen, die beliebig aus den Ordnungen der ganzen ersten Hauptklasse zusammengesetzt sind.
- 6) Fünf Einheiten der dritten, zwei der zweiten, acht der ersten und sieben der nullten Ordnung heißen? Antw.: Fünf — Tausend zweihundert siebenundachtzig.
- 7) Sieben Einheiten der vierten, vier der dritten, zwei der zweiten und sechs der nullten Ordnung heißen? Antw.: Vierundsiebzig — Tausend zweihundert und sechs.
- 8) Zwei Einheiten der fünften, acht der vierten, sechs der dritten, vier der zweiten Ordnung heißen? Antw.: Zweihundert sechsundachtzig — Tausend, vierhundert.

Die zweite Hauptklasse beginnt mit der sechsten Ordnung, also mit der siebenten Stelle der Ziffern von der Rechten zur Linken, und heißt — Million. Sie enthält ebenfalls sechs Ordnungen, nemlich:

Eine Million	} Unterabtheilung der zweiten Hauptklasse
Zehn Millionen	
Hundert „	
Tausend Millionen	} Oberabtheilung der zweiten Hauptklasse.
Zehntausend „	
Hunderttausend „	

Eine Zahl, die aus Einheiten irgend welcher Ordnungen dieser Hauptklasse besteht, wird eben so ausgesprochen, als gehörten jene Ordnungen zur ersten Hauptklasse. Man giebt aber der zweiten ganzen Hauptklasse, die aus sechs Ziffern besteht, die Benennung Million. —

Jede folgende Hauptklasse besteht wieder aus sechs Ordnungen,

und daher auch aus sechs Ziffern, so daß dasselbe Verfahren bei dem Aussprechen jeder Hauptklasse beobachtet wird, aus wie viel Hauptklassen auch die gegebene Zahl bestehen mag.

§ 7. Die Namen der Klassen sind folgende:

Die erste Klasse hat keinen besondern Namen,	
„ zweite „	heißt — Million
„ dritte „	„ — Billion
„ vierte „	„ — Trillion
„ fünfte „	„ — Quadrillion
„ sechste „	„ — Quintillion
„ siebente „	„ — Sextillion
„ achte „	„ — Septillion
„ neunte „	„ — Octillion
„ zehnte „	„ — Nonillion u. s. w.

Uebungsbeispiele.

a) Wie werden Zahlen ausgesprochen, die bestehen aus:

- 1) Acht Einheiten der ersten und acht Einheiten der nullten Ordnung? Antw.: Achtunddreißig.
- 2) Fünf Einheiten der vierten, vier der dritten, sechs der ersten Ordnung? Antw.: Vierundfünfzig — Tausend und sechzig.
- 3) Zwei Einheiten der siebenten, acht der vierten, sechs der ersten Ordnung? Antw.: Zwanzig — Millionen, achtzig — Tausend und sechzig.

b) Aus wie viel Einheiten jeder Ordnung bestehen folgende Zahlen:

- 4) Achthundert dreiundvierzig? Antw.: Acht Einheiten der zweiten, vier der ersten und drei der nullten Ordnung.
- 5) Sieben — Tausend vierunddreißig? Antw.: Sieben Einheiten der dritten, drei der ersten und vier der nullten Ordnung.
- 6) Zwei Millionen, dreißig Tausend vierhundert? Antw.: Zwei Einheiten der sechsten, drei der vierten, vier der zweiten Ordnung.

§ 8. Um mit nur wenigen Ziffern, welche die schriftlichen Zeichen für die Zahlen sind, alle möglichen, noch so große Zahlen schreiben zu können, bedient man sich folgenden Kunstgriffes: Man wählt nehmlich für jede der ersten neun Zahlen ein eigenes

Zeichen, so daß jede Ziffer an und für sich blos Einer bezeichnet. Dagegen erhält in Verbindung mit andern Ziffern eine, um eine Stelle weiter links stehende Ziffer einen zehn mal größern Werth als derselben zukäme, wenn sie an dem Platze der zunächst rechts stehenden Ziffer sich befände. Man legt also jeder Ziffer zweierlei Werth zu, nemlich:

- 1) den absoluten Werth, der an die Form des Zeichens geknüpft ist und ohne Rücksicht auf die Stellung unter andern Ziffern die Anzahl Einer ausdrückt, welche die Ziffer an und für sich bezeichnet,
- 2) den relativen Werth, der durch die Stelle bedingt wird, welche die Ziffer in Verbindung mit andern einnimmt.

Die neun gebräuchlichen Ziffern sind folgende:

Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hierzu kommt noch ein Zeichen 0 (Null), um anzuzeigen, daß keine Einheiten vorhanden sind.

Nach obiger Feststellung bezeichnet also eine einzeln stehende Ziffer Einer. In der zweiten Stelle von der Rechten zur Linken Zehner; in der dritten Stelle Hunderter; in der vierten Stelle Tausender; in der fünften Stelle Zehntausender; in der sechsten Stelle Hunderttausender; in der siebenten Stelle Millionen; in der dreizehnten Stelle Billionen z. B. 5 sind Einer; 37 sind 3 Zehner und 7 Einer; 527 sind 5 Hunderter, 2 Zehner und 7 Einer; 4567 sind 4 Tausender, 5 Hunderter, 6 Zehner, 7 Einer, 12453 sind 1 Zehntausender, 2 Tausender, 4 Hunderter, 5 Zehner, 3 Einer u. s. w. Wenn in irgend einer Ordnung keine Einer vorhanden sind, so wird zur Bezeichnung dessen eine Null gesetzt, z. B. 40 sind 4 Zehner; 504 sind 5 Hunderter, 4 Einer.

§ 9. Die von uns gebrauchten Ziffern sind indischen Ursprungs; weil sie aber in Europa durch die Araber bekannt wurden, nennt man sie arabische.

Die Römer und Griechen bedienten sich ebenfalls des Decimalsystems, da sie aber die Zahlen selbst nicht so einfach wie wir bezeichneten, so blieb die Arithmetik bei ihnen auf einer sehr

niedrigen Stufe stehen. Die römischen Ziffern, deren man sich zuweilen bedient, sind folgende:

I;	II;	III;	IV;	V;	VI;	VII;	VIII;	IX;	X;	XI;	XII;
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
XIII;	XIV;	XV;	XVI;	XVII;	XVIII;	XIX;	XX;	XXX;	XL;		
13	14	15	16	17	18	19	20	30	40		
L;	LX;	LXX;	LXXX;	XC;	C;	CC;	CCC;	CD;	D;	DC;	
50	60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	
DCC;	DCCC;	CM;	M.								
700	800	900	1000.								

Das Numeriren.

§ 10. Gegebene Zahlen richtig schreiben, und geschriebene richtig lesen, heißt — numeriren. — Nach der oben gegebenen Erklärung der Einrichtung unseres Decimalsystems und des Gebrauchs der Ziffern hat es keine Schwierigkeit, jede gegebene Zahl mit Ziffern zu schreiben. — Wenn die zu schreibende Zahl blos aus Ordnungen der ersten, 6 Ziffern umfassenden Klasse besteht, so schreibt man zuerst die Einheiten der obern Abtheilung, also die drei Ordnungen der Tausender hin und reiht an dieselben die drei übrigen Ordnungen, also die der untern Abtheilung an.

Sechshundert drei und vierzig — Tausend, vier und dreißig wird geschrieben

643034;

Vier und zwanzig — Tausend, achthundert und sechs

24806.

Die Ordnungen der höheren Klassen werden ebenso ausgesprochen, wie die der ersten Klasse, mit dem bloßen Unterschiede, daß die Hauptbenennung der ganzen Klasse eine andere ist, nemlich Million, Billion, Trillion u. s. w. Aus diesem Grunde wird auch bei dem Schreiben der Zahlen für die höheren Klassen dasselbe Verfahren wie bei der ersten beobachtet. — Um aber die Stelle zu erkennen, wo jede Klasse beginnt, schreibt man zuerst Fächer von 6 Nullen hin, und setzt bei jedem Fache eine kleine Ziffer oben, um anzuzeigen, daß dort die nächst niedrigere Klasse anfange, z. B.

4te Klasse	3te Klasse	2te Klasse	1te Klasse
$4^{000,000}$	$3^{000,000}$	$2^{000,000}$	$1^{000,000}$

Hierauf werden diejenigen Stellen mit Ziffern ausgefüllt, deren Einheiten gegeben sind, z. B.

Vier und achtzig — Millionen, sieben Tausend, achthundert und funfzehn

$84^1 007815.$

Achthundert drei und vierzig — Billionen, sechshundert Tausend, zwei Millionen, vier und neunzig — Tausend, siebenhundert und sechs

$843^2 600002^1 094706$

In § 6 und 7 ist gezeigt worden, wie solche Zahlen, deren Einheiten in den verschiedenen Ordnungen gegeben sind, ausgesprochen werden; hiernach könnte man jede beliebige mit Ziffern geschriebene Zahl lesen, wenn man zuerst die in jeder Ordnung enthaltenen Einheiten angeben würde, z. B. in

78046

kommen vor: 7 Zehn — Tausender, 8 Tausender, 4 Zehner und 6 Einer (§ 8); demnach wird 78046 ausgesprochen:

Achtundsiebzig — Tausend sechsundvierzig.

Einfacher ist es aber, die gegebene Zahl von rechts nach links nach je 3 Stellen durch ein Komma abzuthellen und die einzelnen, aus je 6 Stellen bestehenden Klassen durch kleinere Ziffern zu bezeichnen. Hätten wir z. B. die Zahl

5678096038407396

so wird sie auf folgende Art abgetheilt

$5,678^2 096,038^1 407,396$

und alsdann ausgesprochen:

Fünf — Tausend sechshundert acht und siebenzig — Billionen, sechs und neunzig — Tausend acht und dreißig — Millionen, vierhundert sieben — Tausend dreihundert sechs und neunzig.

Die Zahl

16983000065003200700

theilt man ab

$16^9 983,000^2 065,003^1 200,700$

und spricht sie aus:

Hieraus folgt, daß die Reihenfolge, in welcher die Summanden addirt werden, ohne Einfluß auf die Größe der gesuchten Summe ist.

Bei großen Summanden aber wäre die Addition auf jene Art unausführbar, wenigstens sehr beschwerlich, man verfährt daher nach folgenden Regeln:

- 1) Man stellt die Summanden so unter einander, daß Einer unter Einern, Zehner unter Zehnern zu stehen kommen, und überhaupt die gleichnamigen Ordnungen eine Verticalreihe bilden;
- 2) man beginnt die Addition bei den Einern, addirt dann die Zehner, hierauf die Hunderter u. s. w.;
- 3) die Summe jeder Verticalreihe schreibt man unter die addirten Ziffern. Kommen in einer solchen Summe Einheiten der nächst höhern Ordnung vor, so werden diese zu der nächst folgenden Columne gezählt. Die Summe der letzten Verticalreihe wird vollständig hingeschrieben, z. B. $984 + 398 + 298 + 497$.

Anfang und Ausrechnung:	984	}	(Summanden)
	398		
	298		
	497		

2177 (Summe).

In der Columne der Einer erhalten wir $4 + 8 + 8 + 7 = 27$ Einer $= 7$ Einer $+ 2$ Zehner; setzen 7 unter die Einer und zählen 2 zu den Zehnern der Summanden. In der Columne der Zehner finden wir $8 + 9 + 9 + 9 + (2) = 37$ Zehner $= 7$ Zehner $+ 3$ Hunderter; setzen 7 unter die Zehner und zählen 3 zu den Hunderten der Summanden. Die dritte Reihe giebt endlich $9 + 3 + 2 + 4 + (3) = 21$ Hunderter. Diese werden ganz hingeschrieben, weil keine höhere Ordnung vorkommt. Wenn die gegebenen Summanden benannte Zahlen sind, also sämmtlich eine und dieselbe Art von Dingen bezeichnen, so erhält die Summe dieselbe Benennung, z. B. 7 Rubel $+ 19$ Rubel $+ 24$ Rubel $= 50$ Rubel.

Um die nöthige Geläufigkeit im Addiren zu erlangen, lerne

man zuerst das Einsundeins auswendig, d. h. die Summe von je zwei Einern, wie die folgende Tabelle dieselben darstellt.

Das Einsundeins.

2 + 2 = 4	5 + 5 = 10
3 + 2 = 5	6 + 5 = 11
4 + 2 = 6	7 + 5 = 12
5 + 2 = 7	8 + 5 = 13
6 + 2 = 8	9 + 5 = 14
7 + 2 = 9	
8 + 2 = 10	
9 + 2 = 11	6 + 6 = 12
	7 + 6 = 13
3 + 3 = 6	8 + 6 = 14
4 + 3 = 7	9 + 6 = 15
5 + 3 = 8	
6 + 3 = 9	
7 + 3 = 10	7 + 7 = 14
8 + 3 = 11	8 + 7 = 15
9 + 3 = 12	9 + 7 = 16
4 + 4 = 8	
5 + 4 = 9	8 + 8 = 16
6 + 4 = 10	9 + 8 = 17
7 + 4 = 11	
8 + 4 = 12	
9 + 4 = 13	9 + 9 = 18

Aus dieser Tabelle sind alle Verbindungen der 1 mit irgend einem Einer weggelassen, da eine solche Summe durch bloßes Zuzählen sogleich gefunden wird. Auch kommt eine Verbindung von zwei bestimmten Einern nur ein Mal vor, da es einerlei ist ob man sagt

$$3 + 4 = 7 \text{ oder } 4 + 3 = 7$$

Es versteht sich von selbst, daß das Einsundeins auch auf Zehner, Hunderter u. s. w. anzuwenden ist; denn

$$2 \text{ Zehner} + 3 \text{ Zehner} = 5 \text{ Zehner oder } 20 + 30 = 50$$

$$5 \text{ Hunderter} + 8 \text{ Hunderter} = 13 \text{ Hunderter oder } 500 + 800 = 1300 \text{ u. s. w.}$$

Eigentlich ist es gleichgültig, bei welcher Verticalcolumnne der unter einander gesetzten Summanden man zuerst zu addiren anfängt; — da aber die in der Summe einer Verticalreihe enthaltenen Zehner zur folgenden, nächst höhern Verticalreihe hinzuaddirt werden müssen, so beginnt man die Addition immer mit den Einern.

Um bei der Addition etwa begangene Fehler zu entdecken, ist die doppelte Berechnung eines Exempels anzurathen, so daß man erst von unten nach oben und dann von oben nach unten die Addition ausführt. — Eben so ist die Vorsicht zu empfehlen, beim Anordnen der Summanden, wenn sie nicht alle mit gleich viel Ziffern geschrieben werden, die fehlenden Ordnungen durch Punkte zu ergänzen, nach der Art folgenden Beispiels:

$13 + 349 + 7867 + 8698 + 7098 + 8 + 16$
gut geordnet

$$\begin{array}{r} \dots 13 \\ \dots 349 \\ \dots 7867 \\ \dots 8698 \\ \dots 7098 \\ \dots \dots 8 \\ \dots \dots 16 \\ \hline \end{array}$$

24049

Uebungsbeispiele.

- 1) $7 + 8 + 9 \neq 24$.
- 2) $16 + 87 + 124 + 50 \neq 277$.
- 3) $378 + 5694 + 7307 + 16 + 8 \neq 13403$.
- 4) Wie viel betragen: 8 Hunderter + 3 Zehner + 9 Zehner + 34 Hunderter + 19 Einer? Antw.: 4339.
- 5) Jemand ersparte im ersten Jahre 150 Rubel, im zweiten 175 Rubel und im dritten 250 Rubel; wieviel im Ganzen? Antw.: 575 Rubel.
- 6) In einer Kiste befinden sich 138 Apfelsinen; in der zweiten 50 Stück mehr. a) Wieviel enthält die zweite Kiste? b) Wieviel Beide zusammen? Antw. a) 188 Apfelsinen. d) 326 Apfelsinen.

Subtraction.

§ 12. Subtrahiren heißt eine Zahl finden, die angiebt, um wie viel Einheiten eine gegebene größere Zahl eine gegebene kleinere übertrifft. Die größere Zahl wird der Minuendus, die kleinere der Subtrahendus, die gesuchte Zahl der Unterschied (Differenz, Rest) genannt.

Das Zeichen der Subtraction ist ein horizontaler Strich (—) und wird minus ausgesprochen, z. B. $5 - 2$ bedeutet, daß von der Zahl 5 die Zahl 2 zu subtrahiren ist.

Für die Bequemlichkeit der Rechnung muß man, wie bei der Addition, das Exempel gut ordnen. Hierzu dienen folgende Regeln. Man schreibe:

- 1) unter den Minuendus den Subtrahendus so, daß die Zahlen einer und derselben Ordnung gerade über einander zu stehen kommen;
- 2) ziehe unter die so geordneten Zahlen einen Strich, um den Rest von den beiden gegebenen Zahlen zu trennen;
- 3) subtrahire, von den Einern anfangend, die Zahlen der gleichartigen Ordnungen von einander und schreibe die Reste genau in die Stelle der Ordnungen; z. B.

86954 — 13241 bekommt, gut geordnet, folgende Stellung.

$$\begin{array}{r} 86954 \text{ (Minuendus)} \\ 13241 \text{ (Subtrahendus)} \\ \hline 73713 \text{ (Rest).} \end{array}$$

Ausrechnung: $4 - 1 = 3$; $5 - 4 = 1$; $9 - 2 = 7$; $6 - 3 = 3$; $8 - 1 = 7$; d. h. 4 Einer — 1 Einer = 3 Einer; 5 Zehner — 4 Zehner = 1 Zehner; 9 Hunderter — 2 Hunderter = 7 Hunderter; 6 Tausender — 3 Tausender = 3 Tausender; 8 Zehntausender — 1 Zehntausender = 7 Zehntausender.

Häufig trifft es sich, daß in irgend einer Ordnung im Subtrahendus eine größere Zahl als im Minuendus vorkommt. Da nun eine Einheit irgend einer Ordnung zehn Einheiten der nächst niederen Ordnung beträgt, so vermindert man die Zahl in der benachbarten höhern Stelle um Eins, und zählt der Zahl in der niedrigeren Stelle Zehn zu, dann wird sich die Subtraction jederzeit verrichten lassen. Dieses Vermindern einer Zahl um

Ein und das Hinzuzählen der Eins als zehn Einheiten zur nächst niedrigeren Ordnung wird das Borgen genannt. — Daß bei einer Stelle geborgt worden, zeigt man gewöhnlich durch einen Punkt an, der neben die Zahl, von der geborgt worden, gesetzt wird. Im folgenden gut geordneten Beispiele kommt in der 2ten und 4ten Stelle dieser Fall vor:

$$\begin{array}{r}
 47846 \quad (\text{Minuendus}) \\
 29756 \quad (\text{Subtrahendus}) \\
 \hline
 18090 \quad (\text{Rest}).
 \end{array}$$

Ausrechnung: 6 Einer von 6 Einern geben zum Reste 0 Einer. — Da 5 Zehner größer als 4 Zehner, so borgt man einen Hunderter = 10 Zehner und zählt diese zu den schon vorhandenen 4 Zehnern; dann hat man $14 - 5 = 9$ Zehner. — Die 8 Hunderter des Minuendus sind jetzt 7 Hunderter geworden, deshalb $7 - 7 = 0$ Hunderter. Endlich borgt man bei den 4 Zehntausendern, und erhält $17 - 9 = 8$ Tausender; $3 - 2 = 1$ Zehntausender.

Kommt im Minuendus in irgend einer Stelle eine Null vor, so borgt man gleichfalls bei der nächstfolgenden Stelle und zählt der Null zehn zu. Wenn aber mehrere Nullen im Minuendus auf einander folgen, so kann erst bei der nächsten Stelle geborgt werden, die keine Null, sondern irgend eine geltende Ziffer enthält. Diese Eins in Einheiten der vorhergehenden Null aufgelöst, macht diese zu Zehn; weil aber von dieser Zehn für die ihr vorhergehende Null Eins geborgt wird, so verwandelt sie sich in 9; daher merke man, daß jede Null, bei der geborgt ist, bloß 9, bei der nicht geborgt worden, immer 10 gilt, z. B.

$$\begin{array}{r}
 99910 \\
 300005 \\
 193714 \\
 \hline
 106291
 \end{array}$$

Hier werden die Nullen in der 3ten, 4ten und 5ten Stelle 9, und die Null der 2ten Stelle bleibt 10.

Sollten benannte Zahlen von einander subtrahirt werden, so müssen sie gleichnamig sein; z. B. Jemand besitzt 240 Rubel und giebt davon 134 Rubel aus, wieviel hat er noch übrig?

$$\begin{array}{r}
 \text{Ausrechnung: } 240 \text{ Rubel (Minuendus)} \\
 134 \quad \text{'' (Subtrahendus)} \\
 \hline
 106 \text{ Rubel (Rest).}
 \end{array}$$

Um sich zu überzeugen, ob man richtig subtrahirt habe, addire man Subtrahendus und Rest, und sehe zu, ob deren Summe, wie es sein soll, dem Minuendus gleich wird, z. B.

$$\begin{array}{r}
 81309 \text{ (Minuendus)} \\
 17316 \text{ (Subtrahendus)} \\
 \hline
 + \left\{ \begin{array}{l} 63993 \text{ Rest} \\ 17316 \end{array} \right. \\
 \hline
 81309.
 \end{array}$$

Uebungsbeispiele.

- 1) $846209 - 398536 = 447673$.
- 2) Wieviel bleibt übrig, wenn man von 860 wegnimmt 576?
Antw.: 284.
- 3) A nahm in einem Jahre 368 Rubel ein; im zweiten Jahre 510 Rubel; — wie viel im letztern mehr als im erstern?
Antw.: 142 Rubel.
- 4) Wie viel muß man zu 364 hinzufügen, damit 1000 entstehe?
Antw.: 636.
- 5) Von einer Million werden weggenommen 789438; wie viel bleibt zurück? Antw.: 210562.

Multiplication.

§ 13. Multipliciren heißt, eine Zahl (den Multiplificandus) so viel mal nehmen, als eine zweite Zahl (der Multiplificator) Einheiten enthält; z. B. 7 multiplicirt mit 3 zeigt an, daß die Zahl 7 als Summand 3 mal zu nehmen ist, also die gesuchte Zahl den Werth von $7 + 7 + 7$ hat. Die Zahl, welche man durch die Multiplication erhält, wird das Product genannt. — Da der Multiplificator bloß anzeigt, wie viel gleiche Summanden vorkommen, so muß derselbe unter allen Umständen eine abstracte Zahl und das Product mit dem Multiplificandus gleichnamig sein. — Multiplificandus und Multiplificator haben den gemeinsamen Namen Factoren. Das Zeichen der Multiplication ist ein

liegendes Kreuz (\times) oder ein Punkt (\cdot), welche Zeichen zwischen beide Factoren gestellt werden, so daß durch 5×6 oder $5 \cdot 6$ die Multiplication der Zahlen 5 und 6 angedeutet wird.

Um zwei Zahlen rasch und mit Sicherheit zu multipliciren, muß man die Producte von je zwei Einern kennen. Diese, in eine Tabelle zusammengestellten Producte nennt man das Einmaleins.

2 mal 2 = 4	5 mal 5 = 25
2 " 3 = 6	5 " 6 = 30
2 " 4 = 8	5 " 7 = 35
2 " 5 = 10	5 " 8 = 40
2 " 6 = 12	5 " 9 = 45
2 " 7 = 14	
2 " 8 = 16	
2 " 9 = 18	
3 mal 3 = 9	6 mal 6 = 36
3 " 4 = 12	6 " 7 = 42
3 " 5 = 15	6 " 8 = 48
3 " 6 = 18	6 " 9 = 54
3 " 7 = 21	
3 " 8 = 24	7 mal 7 = 49
3 " 9 = 27	7 " 8 = 56
	7 " 9 = 63
4 mal 4 = 16	8 mal 8 = 64
4 " 5 = 20	8 " 9 = 72
4 " 6 = 24	
4 " 7 = 28	
4 " 8 = 32	
4 " 9 = 36	9 mal 9 = 81

Soll eine mehrzifferige Zahl mit einer einzifferigen multiplicirt werden, so setzt man die zweite als Multiplikator unter die erste, verrichtet die Multiplication, bei den Einern anfangend, mit jeder Stelle des Multiplicandus, und addire darauf die Partialproducte

$$\begin{array}{r} \text{Z. B.:} \\ 4357 \\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 = 7 \times 8 \\ 400 = 50 \times 8 \\ 2400 = 300 \times 8 \\ 32000 = 4000 \times 8 \\ \hline 34856 = 4357 \times 8. \end{array}$$

Die Rechnung wird dadurch abgekürzt, daß man die einzelnen Partialproducte nicht wirklich aufschreibt und dann addirt, sondern die Addition sogleich im Kopfe verrichtet. Man hat nämlich $(7 \text{ Einer}) \times 8 = 56 \text{ Einer} = 5 \text{ Zehner} + 6 \text{ Einer}$. Die Einer schreibt man unter den Strich in die Stelle der Einer, und behält die Zehner im Sinne. Ferner sind $(5 \text{ Zehner}) \times 8 = 40 \text{ Zehner}$, und hierzu die im Sinne behaltenen 5 Zehner geben $45 \text{ Zehner} = 4 \text{ Hunderter} + 5 \text{ Zehner}$. — Die 5 Zehner werden unter den Strich in die Stelle der Zehner geschrieben und die 4 Hunderter im Sinne behalten u. s. w. Auf diese Art erhält unser Exempel folgende Gestalt:

$$\begin{array}{r} 4357 \\ \quad 8 \\ \hline 34856. \end{array}$$

Wenn der Multiplicator eine mehrzifferige Zahl ist, so multiplicirt man den Multiplicandus mit jeder einzelnen Ziffer des Multiplicators nach der Reihe von der Rechten zur Linken, und addirt die einzelnen Partialproducte, z. B.

$$\begin{array}{r} 3459 \times 375 \\ \hline 17295 = 3459 \times 5 \\ 242130 = 3459 \times 70 \\ 1037700 = 3459 \times 300 \\ \hline 1297125 = 3459 \times 375 \end{array}$$

oder abgekürzt:

$$\begin{array}{r} 3459 \\ \quad 375 \\ \hline 17295 \quad \text{Product der Einer.} \\ 24213 \quad \text{— — Zehner von der 2ten Stelle an.} \\ 10377 \quad \text{— — Hunderter von der 3ten Stelle an.} \\ \hline 1297125. \end{array}$$

Ueber die Anordnung der Producte aus dem ganzen Multiplicandus und den verschiedenen Stellen des Multiplicators merke man sich Folgendes. Die erste Stelle des zweiten Products

wird unter die zweite des ersten, die erste Stelle des dritten Products unter die zweite des zweiten, d. h. unter die dritte des ersten, u. s. w. gesetzt, oder was dasselbe ist: man rückt jedes Product um so viel Stellen nach links, als durch die Ordnung, mit der multiplicirt worden, angezeigt wird, z. B. das Product der Hunderter beginnt bei der 3ten Stelle u. s. w.

Wenn der Multiplicator in einigen Stellen Nullen hat, so übergeht man diese; muß aber die Nullen mitzählen, um die aus der Multiplication der folgenden Ziffer mit dem Multiplicandus sich ergebende Zahl richtig unter die früheren Partialproducte stellen zu können. Z. B.

$$\begin{array}{r}
 457093 \\
 20079 \\
 \hline
 4113837 \\
 3199651 \\
 914186 \\
 \hline
 9177970347
 \end{array}$$

Haben beide Factoren oder nur einer der Factoren zur Rechten mehrere Nullen, so läßt man diese weg, multiplicirt die übrigbleibenden Zahlen, und hängt dem Producte zur Rechten so viel Nullen an, als beide Factoren zusammen Nullen enthalten.

Z. B.

$$\begin{array}{r}
 28400 \\
 21000 \\
 \hline
 284 \\
 568 \\
 \hline
 596400000
 \end{array}$$

Sind mehrere Zahlen mit einander zu multipliciren, so multiplicire man zuerst zwei der gegebenen Zahlen mit einander und alsdann das erhaltene Product mit der dritten, vierten u. s. w. — Denjenigen der Factoren, der die meisten Ziffern hat, wählt man am bequemsten zum ersten Multiplicandus.

Z. B. $34 \times 5847 \times 102.$

Ausrechnung:

5847

34

23388

17541

198798 = 34 × 5847

102

397596

1987980

20277396 = 34 × 5847 × 102.

Die Multiplication benannter Zahlen führt zuweilen auf Aufgaben, die scheinbar die Multiplication zweier benannter Zahlen miteinander verlangen. Durch Beurtheilung des Zusammenhanges solcher Aufgaben muß dann bestimmt werden, welche von den beiden benannten Zahlen erst durch eine unbenannte Zahl zu ersetzen ist, damit diese dann als Multiplikator genommen werden kann. Z. B. wenn 1 Pfund mit 3 Rubel bezahlt wird, wie theuer sind 5 Pfund?

Ausrechnung: Da 5 Pfund 5 mal mehr betragen als 1 Pfund, so ist klar, daß man 3 Rubel, d. h. den Werth eines Pfundes, 5 mal nehmen müsse; 5 Pfund gelten also (3 Rubel) $\times 5 = 15$ Rubel.

2) Ein Pferd braucht 3 Tschetwert Hafer; wie viel wird für 12 Pferde nöthig sein?

Ausrechnung. Da 12 Pferde 12 mal mehr bedürfen als 1 Pferd, so ist klar, daß für dieselben (3 Tschetwert) $\times 12 = 36$ Tschetwert erforderlich sein werden.

Uebungsbeispiele.

1) $753 \times 9 = 6777$.

2) $3064 \times 24 = 73536$.

3) $1765 \times 708 = 1248620$.

4) Wieviel erhält man, wenn 83, 84 und 85 mit einander multiplicirt werden? Antw.: 592620.

5) Um wie viel ist das Product von 75×18 größer als 35×24 ? Antw. 510.

- 6) $350 \times 12 + 16 \times 50 = 12000$.
 7) $234 \times 18 - 30 \times 63 = 2262$.
 8) Wie viel erhält man, wenn die Summe der Zahlen 65 und 38 mit 52 multiplicirt wird? Antw. 5356.
 9) Wie groß ist der 25fache Unterschied von 87 und 32? Antw. 1375.
 10) Ein Pfund kostet 4 Rubel; wie theuer sind 35 Pfund? Antw. 140 Rubel.
 11) Ein Vater will jedem von seinen 6 Kindern 8 Äpfel geben; — wie viel muß er kaufen? Antw. 48 Äpfel.
 12) Ein Arbeiter verdient täglich 18 Kopeken; wie viel ist zu zahlen für 3 Tage? Antw. 54 Kop.

Division.

§. 14. Dividiren heißt angeben, wie viel mal eine Zahl (der Divisor) in einer andern Zahl (Dividendus) enthalten sei, oder auch, eine Zahl (Dividendus) in so viel gleiche Theile zerlegen, als eine andere (Divisor) Einheiten enthält.

Das Erstere heißt messen, das Letztere theilen; z. B. wie oft ist 4 in 12 enthalten? — ist eine Aufgabe des Messens; dagegen: Wie groß ist der 4te Theil von 12? — ist eine Aufgabe des Theilens. Ob eine Aufgabe in dem erstern oder im letzteren Sinne zu nehmen sei, geht immer unzweideutig aus der Aufgabe selbst hervor und ist von der Form der Frage abhängig.

Die gesuchte Zahl wird Quotient genannt. Das Zeichen der Division ist ein Kolon (:) und wird so gesetzt, daß der Dividendus vor, der Divisor nach demselben steht.

Bei der Division im Sinne des Messens werden wir den Quotienten durch wiederholte Subtractionen des Divisors vom Dividendus finden, denn es ist klar, daß der Divisor so viel mal im Dividendus stecken muß, als er von demselben weggenommen werden kann. Für obiges Beispiel würde die Ausrechnung sein:

	Von 12	
das erste Mal	4	subtrahirt, giebt als
	Rest 8	
das zweite Mal	4	subtrahirt, giebt als
	Rest 4	
das dritte Mal	4	subtrahirt, giebt als
	Rest 0.	

Da der Divisor 4 von dem Dividendus 12 weggenommen werden kann 3 mal, so heißt der Quotient: 3 mal.

Im Sinne des Theilens müssen wir angeben, aus wie viel Einheiten jeder der gleichen Theile bestehe. Rechnen wir in obiger Aufgabe auf jeden Theil eine Einheit, so macht dieses für alle 4 Theile vier Einheiten aus. Diese subtrahiren wir von 12 und erhalten den Rest = 8. — Nehmen wir wiederum auf jeden Theil eine Einheit, so haben wir aufs Neue vier Einheiten abzuziehen, und jetzt kommen auf jeden Theil 2 Einheiten. Von dem neuen Reste = 4 können wir noch zu jedem Theile eine Einheit hinzuthun und dann bleibt nichts übrig; folglich enthält jeder Theil 3 Einheiten, d. h. der vierte Theil von 12 ist = 3.

Wir sehen aus dieser Auflösung, daß die Größe des Quotienten an und für sich unverändert bleibt und nur die Form der Antwort sich mit der Frage ändert. Hieraus folgt, daß wir die Frage vor der Operation verwechseln können, und ändern nachher die Antwort entsprechend um. Diese Veränderung der Frage ist deshalb zweckmäßig, weil wir das Verfahren beim Dividiren am leichtesten dadurch erklären können, daß wir die Aufgabe bloß als ein Theilen ansehen.

§. 15. In dem vorhin gegebenen Beispiele blieb nach wiederholter Subtraction kein Rest. Wenn aber 11 in 4 gleiche Theile getheilt werden sollte, so würden wir finden, daß die 4 2 mal subtrahirt werden kann, und daß noch ein Rest von 3 Einheiten des Dividendus übrig bleibt. — Im Sinne des Messens würde demnach die Antwort heißen: Der Divisor ist 2 mal im Dividendus enthalten und es bleibt ein Rest von 3 Einheiten;

im Sinne des Theilens dagegen: der vierte Theil von 11 besteht aus 2 Einheiten, und es bleiben noch ungetheilt 3 Einheiten. — Es versteht sich von selbst, daß der Divisor immer größer sein muß, als der Rest, indem man entgegengesetzten Falles noch ein Mal denselben hätte subtrahiren können.

§. 16. Der Quotient ist mit dem Dividendus immer gleichartig. Da nun der dritte Theil von 6 gleich 2 ist, so folgt, daß der dritte Theil von 6 Einheiten irgend einer Ordnung auch zwei Einheiten derselben Ordnung sein muß; also:

$$\begin{aligned} 6 : 3 &= 2 \\ 60 : 3 &= 20 \\ 600 : 3 &= 200 \\ 6000 : 3 &= 2000 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es kommt hier besonders darauf an, rasch und mit Sicherheit anzugeben, wie viel Mal ein einzifferiger Divisor in einem Produkte aus zwei einzifferigen Zahlen enthalten sei. Man bedient sich hierzu des umgekehrten Einmaleins; denn weiß man, daß $8 \times 9 = 72$ ist, so ist umgekehrt der 8te Theil von $72 = 9$, und der 9te Theil von $72 = 8$, d. h. $72 : 8 = 9$ und $72 : 9 = 8$. — Befindet sich im Einmaleins kein solches Product wie die vorliegende Zahl, so nimmt man das nächst kleinere Product; z. B. bei $42 : 5$ sieht man, da $5 \times 8 = 40$ und $5 \times 9 = 45$ ist, daß $5 \times 8 = 40$ zu nehmen ist.

§. 17. Die gebräuchlichste Art, die Zahlen bei der Division zu ordnen, ist folgende: Man schreibt Divisor, Dividendus und Quotient in eine horizontale Reihe und trennt sie durch verticale Striche. — Gewöhnlich wird die Division auf folgende Weise verrichtet:

1)	Divisor.	Dividendus.	Quotient.
	5	780	

Hier soll man zuerst 7 Hunderter in 5 gleiche Theile theilen, also kommt auf jeden Theil 1 Hunderter. — Jetzt sind 5 Hunderter vertheilt, und es bleiben 2 Hunderter übrig. Diese verwandeln wir in 20 Zehner, und zählen die im Dividendus vorkommenden 8 Zehner dazu. — Von 28 Zehnern kommen auf jeden Theil 5 Zehner, weil $5 \cdot (5 \text{ Zehner}) = 25 \text{ Zehner}$. Der

Rest von 3 Zehnern ist = 30 Einern, wozu nichts aus dem Dividendus zu setzen ist, da in demselben die Einer fehlen. — Der 5te Theil von 30 Einern ist = 6 Einern; daher der ganze Quotient = 1 Hunderter + 5 Zehner + 6 Einer.
 = 100 + 50 + 6 = 156.

Die Division auf die gebräuchliche Art geordnet, giebt folgendes Schema:

$$\begin{array}{r}
 5 \mid 780 \mid 156 \\
 5 \times 1 = 5 \quad . \quad . \\
 \hline
 28 \quad . \\
 5 \times 5 = 25 \quad . \\
 \hline
 30 \\
 5 \times 6 = 30.
 \end{array}$$

Zweites Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 7 \mid 2415 \mid 345 \\
 7 \times 3 = 21 \quad . \quad . \\
 \hline
 31 \quad . \\
 7 \times 4 = 28 \quad . \\
 \hline
 35 \\
 7 \times 5 = 35.
 \end{array}$$

Da von 2 Tausendern der 7te Theil keine ganze Einheit ist, so verwandelt man die Tausender sogleich in 20 Hunderter und sucht den 7ten Theil von 24 Hundertern. Dieser ist = 3 Hunderter; $7 \times (3 \text{ Hunderter}) = 21 \text{ Hunderter}$ lassen einen Rest = 3 Hunderter = 30 Zehner, wozu noch aus dem Dividendus 1 Zehner hinzukommt. Der 7te Theil von 31 Zehnern ist = 4 Zehner; $7 \times (4 \text{ Zehner}) = 28 \text{ Zehner}$, von 31 Zehnern subtrahirt, bleibt der Rest = 3 Zehner = 30 Einer. Zu diesen noch die Einer aus dem Dividendus genommen, machen 35 Einer, deren 7ter Theil = 5 Einer ist.

Ist in der Mitte oder am Ende der Rechnung die Zahl in welche man dividiren soll, kleiner als der Divisor, so muß man im Quotienten 0 setzen, und die folgende Stelle, wenn eine im Dividendus vorhanden sein sollte, herunterziehen. Zur Berdeutlichung des eben Gesagten diene folgendes Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 6 \mid 18638 \mid 3106 \\
 6 \times 3 = 18 \dots \\
 \quad \quad \quad 6 \dots \\
 6 \times 1 = 6 \dots \\
 \quad \quad \quad 3 \dots \\
 6 \times 0 = 0 \dots \\
 \quad \quad \quad 38 \\
 6 \times 6 = 36 \\
 \text{Rest} = 2.
 \end{array}$$

§. 18. Wenn der Divisor eine mehrzifferige Zahl ist, so wird die Division auf gleiche Weise verrichtet. Da aber in diesem Falle der ganze Divisor auf einmal in Betracht gezogen werden muß, so sucht man durch Probiren die höchste Ziffer des Quotienten so zu bestimmen, daß sie mit dem Divisor multiplicirt, ein möglichst großes Product giebt, welches sich aber immer noch von der höchsten oder einigen der höchsten Ziffern des Dividendus abziehen läßt; z. B.

$$\begin{array}{r}
 45 \mid 1710 \mid 38 \\
 45 \times 3 = 135. \\
 \quad \quad \quad 360 \\
 45 \times 8 = 360.
 \end{array}$$

Da 45 in 17 nicht dividirt werden kann, so nimmt man 45 in 171. Im Quotienten erhält man 3, und zieht das Product $45 \times 3 = 135$ von 171 ab. Der übrigbleibende Rest 36 ist kleiner als der Divisor, daher 3 der richtige Theil des Quotienten. Setzt man nun die 0 aus dem Dividendus zu 36 herunter, so giebt $360 : 45$ zum Quotienten 8, denn $45 \times 8 = 360$, daher auch kein Rest übrig bleibt.

Man kann das Probiren dadurch abkürzen, daß man mit der höchsten Ziffer des Divisor allein in die höchste oder in die beiden höchsten Ziffern des Dividendus oder des jedesmaligen Restes dividirt. — Findet es sich, daß das Product aus dem Divisor und dem gefundenen Theile des Quotienten zu groß ist, so verkleinert man den Quotienten um 1; ist dagegen nach gescheneher Subtraction der Rest größer als der Divisor, so hat man im

Quotienten zu wenig genommen, und muß den gefundenen Theil um 1 vergrößern, z. B.

$$\begin{array}{r}
 345 \mid 91425 \mid 265 \\
 345 \times 2 = 690 \dots \\
 \hline
 2242 \dots \\
 345 \times 6 = 2070 \dots \\
 \hline
 1725 \dots \\
 345 \times 5 = 1725.
 \end{array}$$

Man sagt statt 345 in 914 bloß 3 in 9 geht 3 mal; aber $345 \times 3 = 1035$ ist größer als 914, daher verkleinere man den Quotienten 3 um 1, wodurch $3 - 1 = 2$ erscheint. $345 \times 2 = 690$ abgezogen, giebt den Rest = 224, wozu die folgende Stelle aus dem Dividendus gesetzt wird; 3 in 22 geht 7 mal, aber $345 \times 7 = 2415$ ist zu groß, daher nehme man 6; jetzt $345 \times 6 = 2070$ abgezogen läßt den Rest = 172; hierzu die 5 aus dem Dividendus gesetzt; 3 in 17 geht 5 mal; $345 \times 5 = 1725$.

§. 19. Aus den vorhergehenden Paragraphen ergeben sich folgende Schlüsse:

1) das Product aus dem Divisor und dem gefundenen Theile des Quotienten muß sich immer abziehen lassen von den entsprechenden Stellen des Dividendus;

2) der Rest muß nach geschעהener Subtraction immer kleiner sein als der Divisor;

3) für jede Stelle des Dividendus, die herunter gesetzt wird, erhält der Quotient auch eine Stelle.

§. 20. Ob man richtig dividirt habe, läßt sich dadurch prüfen, daß man den Divisor mit dem Quotienten multiplicirt und zusieht, ob auch das Product dem Dividendus gleich wird. Ist bei der Division ein Rest geblieben, so zählt man denselben bei der anzustellenden Probe zum Producte aus dem Divisor und Quotienten in den entsprechenden Stellen hinzu. Z. B.

		Probe:
406	100903	248
	812..	406
	1970.	1488
	1624.	992
	3463	100688
	3248	215
	Rest = 215	100903.

§. 21. Bei der Division benannter Zahlen lassen sich die beiden Formen der Division sehr leicht unterscheiden.

1) Wie oft sind 3 Rubel in 24 Rubel enthalten?

Ausrechnung: (24 Rubel) : (3 Rubel) = 8 mal. Dieses ist eine Aufgabe des Messens.

2) Wie groß ist der 5te Theil von 35 Pfund?

Ausrechnung: (35 Pfund) : 5 = 7 Pfund. Dieses ist eine Aufgabe des Theilens.

Eben so verhält es sich mit Aufgaben, bei denen erst zu entscheiden ist, ob und mit welcher Zahl zu dividiren sei; z. B.

3) Wenn 5 Arbeiter 20 Rubel verdient haben, wieviel bekommt ein Arbeiter?

Ausrechnung: Offenbar bekommt 1 Arbeiter den 5ten Theil von dem ganzen Arbeitslohne, demnach hat 1 Arbeiter zu erhalten (20 Rubel) : 5 = 4 Rubel.

Uebungsbeispiele.

1) Wie oft ist 9 enthalten in 342? Antw. 38 mal.

2) Wie groß ist der 12te Theil von 384? Antw. 32.

3) $28470 : 365 = 78$.

4) $1474880 : 704 = 2095$.

5) Der Multiplicator war 5327, das Product ergab sich = 13658428; wie groß war der Multiplicandus? Antw. 2564.

6) Wie groß ist der 5te Theil von $6 \times 9 + 11$? Antw. 13.

7) $(28 + 3 \times 9 + 125) : 45 = 4$.

8) $510 : 17 + 285 : 5 + 460 : 4 = 202$.

9) Unter 4 Arbeiter werden 48 Rubel vertheilt; wie viel erhält jeder? Antw. 12 Rubel.

- 10) Wie groß ist der 3te Theil von 160 Federn? Antw. 20 Federn.
 11) Wie oft sind drei Tage enthalten in 24 Tagen? Antw. 8 mal.

Uebungsfragen:

- 1) Was sind gleichartige Dinge?
- 2) Wie nennt man eine Menge gleichartiger Dinge?
- 3) Was sind benannte und was unbenannte Zahlen?
- 4) Was heißt rechnen?
- 5) Was versteht man unter dem dekadischen Zahlensystem?
- 6) Was sind Ordnungen, was Klassen im Decimalsystem?
- 7) Aus wie viel Ordnungen besteht jede Klasse?
- 8) Was sind Ziffern?
- 9) Wie viel Ziffern giebt es?
- 10) Wie sind Zahlen, Zahlwörter und Ziffern von einander verschieden?
- 11) Warum werden die gebräuchlichen Ziffern arabische genannt?
- 12) Wodurch wird es möglich, mit den neun Ziffern und der Null alle Zahlen zu schreiben?
- 13) Was heißt numeriren?
- 14) Was versteht man unter Species oder Grundrechnungen?
- 15) Welche Zahlen nennt man Summanden, welche Factoren?
- 16) Welche Zahlen können addirt werden?
- 17) Bei welcher Ordnung fängt man an zu addiren?
- 18) Welche Benennung erhält die Summe, wenn die Summanden benannte Zahlen sind?
- 19) Was thut man, wenn die Summe der Ziffern einer Ordnung mehr als 9 beträgt?
- 20) Was versteht man unter dem sogenannten Einsundeins?
- 21) Was heißt subtrahiren?
- 22) Wieviel Zahlen sind zur Subtraction erforderlich?
- 23) Worin besteht die Probe der Subtraction?
- 24) Was versteht man bei der Subtraction unter — Vorgen?
- 25) Wie verfährt man, wenn bei einer Null geborgt werden muß?
- 26) Was wird aus den Nullen welchen eine Ziffer höherer Ordnung vorangeht, von welcher geborgt worden ist?
- 27) Was heißt multipliciren?
- 28) Worin besteht das Einmaleins?

- 29) Warum fängt man die Multiplication bei der niedrigsten und nicht bei der höchsten Stelle an?
- 30) Was giebt 0 mit jeder Zahl multiplicirt und wie viel erhält man, wenn irgend eine Zahl mit 0 multiplicirt wird?
- 31) Wie werden mehr als zwei Zahlen mit einander multiplicirt?
- 32) Kann der Multiplicator eine benannte Zahl sein?
- 33) Welche Benennung erhält das Product, wenn der Multiplicandus eine benannte Zahl ist?
- 34) Was heißt messen, was theilen?
- 35) Wie muß ein Divisionsrest der Größe nach im Vergleiche mit dem Divisor beschaffen sein?
- 36) Wie verfährt man, wenn der Divisionsrest mit der heruntergezogenen Ziffer des Dividendus kleiner ist, als der Divisor?
- 37) Welches ist die Probe der Division?

Vom größten gemeinsamen Maße zweier Zahlen.
 — Kennzeichen der Theilbarkeit einer Zahl durch
 2, 4, 8, 5, 3, 9, 6, 11. — Vom kleinsten gemeinsamen Vielfachen mehrerer Zahlen.

§. 22. Von jeder beliebigen Zahl können wir irgend ein Vielfaches nehmen; — jede Zahl kann also Factor sein. Umgekehrt ist aber jede Zahl nicht ein Product aus zwei oder mehreren Zahlen. Hiernach theilen wir die Zahlen ein in solche, die andere als Factoren enthalten, und in solche, die keine Factoren haben. Jene heißen zusammengesetzte, diese Grund- oder Primzahlen. — Haben zwei oder mehrere Zahlen keine anderen gemeinsamen Factoren als 1, so heißen sie relative Primzahlen oder Primzahlen unter sich.

§. 23. Eine Zahl, die in zwei andere Zahlen aufgeht, heißt ihr gemeinschaftlicher Theiler. Den größten gemeinsamen Theiler zweier Zahlen zu bestimmen, ist von besonderer Wichtigkeit beim Rechnen. Derselbe wird durch folgendes Verfahren gefunden:

Man dividire mit der kleineren Zahl in die größere; hierauf mit dem übrigbleibenden Reste in den vorigen Divisor u. s. w., bis man auf einen Rest = 0 kommt, d. h. bis die Division aufgeht. — Der letzte Divisor ist der gesuchte größte Theiler.

Am folgenden Beispiele übersieht man das zu beobachtende Verfahren:

$$\begin{array}{r}
 455 \mid 805 \mid 1 \\
 \underline{455} \\
 350 \mid 455 \mid 1 \\
 \underline{350} \\
 105 \mid 350 \mid 3 \\
 \underline{315} \\
 35 \mid 105 \mid 3 \\
 \underline{105} \\
 0.
 \end{array}$$

Also ist 35 der größte gemeinsame Theiler der beiden gegebenen Zahlen 455 und 805. Dieses Verfahren, den größten gemeinsamen Theiler zweier Zahlen zu finden, wird die Ketten-division genannt.

§. 24. Manche Zahlen geben, wenn sie mit anderen multiplicirt werden, den entstandenen Producten besondere Kennzeichen, aus welchen sich rückwärts schließen läßt, daß jene Zahlen als Factoren in den Producten enthalten sind.

1) Jede Zahl ist durch 2 theilbar, deren letzte Ziffer (die Einer) 0, 2 oder ein Vielfaches von 2 ist.

Anmerkung. Jede Zahl, welche 2 zum Theiler hat, nennt man eine gerade Zahl, jede andere eine ungerade. Die geraden Zahlen endigen daher mit 0, 2, 4, 6, 8 und die ungeraden mit 1, 3, 5, 7, 9.

2) Jede Zahl ist durch 5 theilbar, deren letzte Ziffer 0 oder 5 ist;

3. B. 25, 130, 275 u. s. w.

3) Durch 4 ist jede Zahl theilbar, deren zwei letzte Ziffern (die Zehner und Einer) entweder Nullen oder ein Vielfaches von 4 sind;

z. B. 212, 324, 1200, 1700 u. s. w.

4) Durch 8 ist jede Zahl theilbar, deren drei letzte Ziffern (die Hunderter, Zehner und Einer) entweder Nullen oder ein Vielfaches von 8 sind;

z. B. 784136, weil 136 durch 8 theilbar ist.

Erklärung. Die Summe der absoluten Werthe der Ziffern einer Zahl heißt die Quersumme; z. B. von 378946 ist die Quersumme $= 3 + 7 + 8 + 9 + 4 + 6 = 37$.

5) Durch 3 und 9 ist jede Zahl theilbar, wenn die Quersumme durch 3 oder 9 sich theilen läßt; z. B.

durch 3 die Zahl 723, weil $7 + 2 + 3 = 12$ durch 3, und durch 9 die Zahl 1845, weil $1 + 8 + 4 + 5 = 18$ durch 9 theilbar ist.

6) Weil $6 = 2 \times 3$, so muß 6 in jeder Zahl aufgehen, in welcher 2 und 3 zugleich aufgehen, d. h. jede gerade Zahl, die durch 3 theilbar ist, wird auch durch 6 theilbar sein.

7) Durch 11 ist jede Zahl theilbar, wenn der Unterschied der Quersumme aus den geraden und ungeraden Stellen der Zahl entweder $= 0$ oder ein Vielfaches von 11 ist; z. B.

a) 3267 ist durch 11 theilbar, denn es ist

die Quersumme der geraden Stellen $= 3 + 6 = 9$,

„ „ „ ungeraden „ $= 2 + 7 = 9$,

und $9 - 9 = 0$.

b) 3014809171 ist durch 11 theilbar, denn es ist

$3 + 1 + 8 + 9 + 7 = 28$ und $0 + 4 + 0 + 1 + 1 = 6$;

daher $28 - 6 = 22 = 2 \cdot 11$.

§. 25. Man findet den größten gemeinsamen Theiler zweier Zahlen auch dadurch, daß man beide Zahlen in ihre Primfactoren zerlegt und diejenigen heraushebt, welche sie mit einander gemein haben; — das Product der herausgehobenen Primfactoren ist der größte gemeinsame Theiler; z. B.

1) Den größten gemeinsamen Theiler von 78 und 104 zu bestimmen.

$$\text{Ausrechnung: } 78 = 2 \cdot 13 \cdot 3.$$

$$104 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13.$$

Beide Zahlen haben die Factoren 2 und 13 gemeinschaftlich, also ist der größte Theiler für beide Zahlen $= 2 \cdot 13 = 26$.

2) Den größten Theiler von 693 und 780 zu bestimmen.

$$\text{Ausrechnung: } 693 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11.$$

$$780 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13.$$

Beide Zahlen haben nur den Factor 3 gemeinschaftlich; also ist der größte Theiler $= 3$.

3) Den größten Theiler von 25 und 12 zu bestimmen.

$$\text{Ausrechnung: } 25 = 5 \cdot 5.$$

$$12 = 3 \cdot 4.$$

Beide sind Primzahlen unter sich, da sie keinen Factor gemein haben.

Dieses Verfahren wird: die Bestimmung des größten gemeinsamen Theilers zweier Zahlen durch Zerlegung in ihre Primfactoren genannt.

§. 26. Multiplicirt man mehrere Zahlen mit einander, so muß das Product durch jede dieser Zahlen theilbar sein; z. B. da $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330$, so ist 330 durch jeden seiner Factoren theilbar. Sollen wir nun eine Zahl bestimmen, in der mehrere gegebene Zahlen aufgehen, so haben wir nur nöthig, ihr Product zu nehmen. Dieses Product heißt das gemeinsame Vielfache der gegebenen Zahlen. Für manche Zahlen kann man aber ein gemeinsames Vielfaches finden, welches kleiner ist als das Product aus jenen Zahlen. Am zweckmäßigsten ist für das praktische Rechnen das kleinste gemeinsame Vielfache. Dieses findet man durch folgendes Verfahren:

1) Man lasse erst alle diejenigen Zahlen, die in den andern gegebenen Zahlen aufgehen, weg. — Kommt eine Zahl mehrere Mal vor, so hat man nur nöthig, sie ein einziges Mal zu nehmen.

2) Man dividire mit einer Primzahl, die in zwei oder mehreren der gegebenen Zahlen als Factor vorkommt, diese Zahlen; — bemerke sich den Divisor und die Quotienten; — dividire auf's Neue mit einer Primzahl, die noch als Factor in

den erhaltenen Quotienten und den anderen gegebenen Zahlen enthalten ist; bemerke diesen Divisor und setze die neuen Quotienten hin. — Auf diese Weise fährt man fort, bis die erhaltenen Quotienten keinen gemeinschaftlichen Factor mehr enthalten. Multiplicirt man jetzt die Quotienten und die gebrauchten Divisoren miteinander, so erhält man das gesuchte kleinste gemeinsame Vielfache der gegebenen Zahlen.

Erstes Beispiel: Es ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 4, 5, 12, 20, 15, 24, 30, 25, 40, 50, 75 zu suchen.

Ausrechnung:

	4, 5, 12, 20, 15, 24, 30, 25, 40, 50, 75
a) 2	12, 15, 20, 25, 75
b) 2	6, 15, 10, 25, 75
c) 2	3, 15, 5, 25, 75
d) 3	1, 5, 5, 25, 25
e) 5	1, 1, 1, 5, 5
	1, 1, 1, 1, 1

Zuerst wurden 4, 5, 12, 20, 15 und 25 als Factoren anderer vorkommenden Zahlen gestrichen; hierauf dividirte man mit der Primzahl 2 in 24, 30, 40 und 50, — setzte den Divisor an den Rand und die herauskommenden Quotienten unter die correspondirenden Zahlen; 75 wurde unverändert heruntergezogen, weil 2 in 75 nicht aufgeht. — Die Quotientenreihe (a) dividirte man noch einmal mit 2, — setzte den Divisor an den Rand, und die sich ergebenden Quotienten unter die correspondirenden Zahlen. — Der dritte Divisor für die Quotientenreihe (b) ist gleichfalls die Zahl 2, weil sie sich als Factor in den Zahlen 6 und 10 vorfindet. Da jetzt in keinem der vorkommenden Quotienten in der Reihe (c) die Primzahl 2 aufgeht, so wählen wir zum Divisor die nächst größere Primzahl, nemlich 3. — Die beiden darauf folgenden Divisoren sind 5. — Nun werden die Divisoren mit einander multiplicirt, und man hat zum kleinsten Vielfachen der gegebenen Zahlen

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 600.$$

Noch schneller kommt man zum Ziele, wenn in der Quo-

tientenreihe (a) die Zahlen 15 und 25 gestrichen werden, weil sie in 75 aufgehen, dann bleiben in der Reihe (b) bloß die Zahlen 6, 10 und 75, und wenn diese mit 2 dividirt werden, in der Reihe (c) nur die Zahlen 3, 5 und 75. — Streicht man hier ebenfalls 3 und 5 weg, weil sie in 75 aufgehen, so bleibt nur die Zahl 75 zurück. — Das kleinste gemeinsame Vielfache ist nun:
 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 75 = 600$.

Zweites Beispiel:

	3, 4, 7, 8, 12, 16, 21, 15, 32
2	6, 21, 15, 16
2	3, 21, 15, 8
3	7, 5, 8

Da 7, 5 und 8 relative Primzahlen sind, also keinen gemeinsamen Theiler haben, so ist das kleinste gemeinsame Vielfache
 $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 8 = 3360$

Von den Brüchen.

§ 27. Denken wir uns irgend eine beliebige Einheit in lauter gleiche Theile getheilt, so heißt jeder einzelne Theil ein Stammbruch oder eine Brucheinheit. — Man bezeichnet die Brucheinheiten, je nachdem das Ganze in 2, 3, 4, 5 u. s. w. gleiche Theile getheilt worden, durch:

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$ u. s. w.

Jedes Vielfache einer Brucheinheit heißt ein Bruch. Die Brüche entstehen also dadurch, daß man ein Ganzes in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilt, und einen oder mehrere dieser Theile nimmt.

Die Größe eines Bruches wird demnach durch zwei Zahlen bestimmt, von denen

a) die eine angiebt, in wie viel gleiche Theile die Einheit getheilt worden ist,

b) die andere dagegen angiebt, wieviel solcher Theile genommen sind.

Die erstere Zahl heißt der Nenner, die letztere — der Zähler des Bruches.

Zur Bezeichnung der Brüche bedient man sich zweier Ziffern, die, durch einen horizontalen Strich getrennt, über einander stehen. Die obere Zahl ist der Zähler, die untere der Nenner; z. B.

$$\frac{2}{3}; \frac{7}{8}; \frac{9}{10}; \frac{15}{22} \dots \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Es heißt demnach:

$$\frac{2}{3} = \text{zwei Drittel,}$$

$$\frac{7}{8} = \text{sieben Achtel,}$$

$$\frac{15}{22} = \text{fünfzehn Dreiundzwanzigstel u. f. w.}$$

§ 28. Aus der Erklärung der Brüche ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

1) Jeder Stammbruch wird erhalten, wenn man die Einheit durch den Nenner dividirt; z. B. $\frac{1}{2} = 1 : 2$; $\frac{1}{5} = 1 : 5$; $\frac{1}{9} = 1 : 9$ u. f. w.;

2) jeder andere Bruch kann als eine Summe so vieler Stammbrüche von gleichem Nenner betrachtet werden, als der Zähler angiebt, oder als ein Product, dessen Multiplicandus der Stammbruch, und dessen Multiplicator der Zähler vorstellt; z. B.

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = (\frac{1}{7}) \cdot 5.$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = (\frac{1}{4}) \cdot 3;$$

3) jeder beliebige Bruch kann als ein Quotient betrachtet werden, bei welchem der Zähler den Dividendus und der Nenner den Divisor vorstellt, denn

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = (1:5) + (1:5) + (1:5) = (1 + 1 + 1):5 = 3:5;$$

4) der Zähler eines Bruches (d. h. der Dividendus) wird erhalten, wenn man den Bruch (d. h. den Quotienten) mit seinem Nenner (d. h. Divisor) multiplicirt; denn

$$\begin{aligned} (\frac{3}{5}) \cdot 5 &= (\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}) \cdot 5 = (\frac{1}{5}) \cdot 5 + (\frac{1}{5}) \cdot 5 + (\frac{1}{5}) \cdot 5 \\ &= (1:5) \cdot 5 + (1:5) \cdot 5 + (1:5) \cdot 5 \\ &= 1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

§ 29. Lehrsaß. Brüche mit gleichen Nennern werden zu einander addirt, wenn man ihre Zähler addirt und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Da nemlich nur Gleichartiges mit einander addirt werden kann, und der Nenner eines Bruches die Art der Einheiten an-

giebt, diese aber alle einander gleich sind, so ergibt sich hieraus unmittelbar die Richtigkeit des obigen Satzes. Es ist

$$1 \text{ Siebentel} + 3 \text{ Siebentel} + 2 \text{ Siebentel} = (1 + 3 + 2) \text{ Siebentel}$$

$$\text{oder } \frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1+3+2}{7} = \frac{6}{7}.$$

§ 30. Ein Bruch heißt ächt, wenn sein Zähler kleiner ist, als der Nenner, — unächt, wenn sein Zähler entweder dem Nenner gleich oder größer ist als dieser.

Ächte Brüche sind: $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{1}{13}$; $\frac{5}{118}$ u. s. w.

Unächte „ „ $\frac{7}{7}$; $\frac{11}{11}$; $\frac{1^2}{1^2}$; $\frac{1^3}{1^3}$ u. s. w.

Jede ganze Zahl kann als ein unächtcr Bruch angesehen werden, dessen Zähler diese ganze Zahl und dessen Nenner die Einheit ist; z. B. $3 = \frac{3}{1}$; $7 = \frac{7}{1}$ u. s. w.

Jeder ächte Bruch ist kleiner als die Einheit, — jeder unächtcr Bruch, dessen Zähler und Nenner einander gleich, ist der Einheit gleich, — jeder unächtcr Bruch, dessen Zähler größer ist als sein Nenner, ist größer als die Einheit.

§ 31. Aufgabe. Eine gegebene Zahl in einen Bruch mit vorgeschriebenem Nenner zu verwandeln.

Auflösung. Man multiplicirt die Zahl mit dem Nenner des Bruches, und schreibt unter das Product den gegebenen Nenner als Nenner; z. B. 7 soll in 5tel verwandelt werden, so ist

$$7 = \frac{7 \cdot 5}{5} = \frac{35}{5}.$$

Beweis. Da 1 Ganzes = 5 Fünftel, so sind 7 Ganze 7 mal mehr, also

$$7 \text{ Ganze} = 7 \cdot (5 \text{ Fünftel}) = 7 \cdot 5 \text{ Fünftel} = 35 \text{ Fünftel} = \frac{35}{5}.$$

§ 32. Eine ganze Zahl, welcher ein Bruch angehängt ist, heißt eine gemischte Zahl; z. B. $3\frac{1}{2}$; $5\frac{7}{8}$; $2\frac{1}{3}$ u. s. w. Sie stellt eine Summe vor aus der ganzen Zahl und dem Bruche; es ist nemlich $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$; $7\frac{7}{8} = 7 + \frac{7}{8}$ u. s. w.

Eine gemischte Zahl einrichten, heißt dieselbe in einen unächtcrn Bruch verwandeln.

§ 33. Aufgabe. Man soll eine gemischte Zahl einrichten.

Auflösung. Man multiplicirt die ganze Zahl mit dem Nenner

des angehängten Bruches und zählt den Zähler zum Producte, unter welches man als Nenner den Nenner des Bruches setzt.

Beweis. Da $7\frac{5}{8} = 7 + \frac{5}{8}$ und 7 zu 8eln gemacht $= \frac{7 \cdot 8}{8} = \frac{56}{8}$ (§ 31), so ist

$$7\frac{5}{8} = \frac{56}{8} + \frac{5}{8} = \frac{56+5}{8} = \frac{61}{8} \quad (\S 29).$$

§ 34. Aufgabe. Einen gegebenen unächten Bruch als ganze oder als gemischte Zahl darzustellen.

Auflösung. Man dividire mit dem Nenner in den Zähler. Geht die Division auf, so ist der Quotient die dem Bruche gleiche ganze Zahl; geht die Division nicht auf, so hängt man an den Quotienten einen Bruch, dessen Zähler der Divisionsrest, und dessen Nenner der Divisor ist.

Beweis. Bei $\frac{37}{8}$ ist der Quotient $= 4$ und der Divisionsrest $= 5$; also $\frac{37}{8} = 4 + \frac{5}{8} = 4\frac{5}{8}$, denn $4\frac{5}{8}$ eingerichtet giebt $\frac{37}{8}$, wie es sein soll.

§ 35. Der Nenner eines Bruches giebt an, in wieviel einander gleiche Theile die Einheit getheilt worden ist, während der Zähler die Menge der genommenen Theile bezeichnet; daher ist von zwei Brüchen mit gleichen Nennern derjenige der größere, welcher den größern Zähler hat; z. B.

$\frac{7}{9}$ ist größer als $\frac{5}{9}$, oder durch Zeichen ausgedrückt:

$$\frac{7}{9} > \frac{5}{9};$$

ebenso $\frac{11}{17} > \frac{3}{17}$ u. f. w.

Je größer der Zähler eines Bruches bei unverändertem Nenner wird, desto größer wird auch sein Werth. — Multipliciren wir also den Zähler eines Bruches mit 2, 3, 4 u. f. w., so wird auch des Werth des Bruches resp. 2, 3, 4 mal so groß; hieraus folgt:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man den Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt, den Nenner aber unverändert läßt.

Durch Zeichen drücken wir diesen Satz aus:

$$\left(\frac{3}{4}\right) \times 5 = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4};$$

$$\left(\frac{11}{3}\right) \times 7 = \frac{11 \times 7}{3} = \frac{77}{3}.$$

Hieraus folgt umgekehrt, daß ein Bruch 2, 3, 4 mal kleiner werden muß, wenn man den Zähler resp. mit 2, 3, 4 dividirt und den Nenner unverändert läßt, d. h. ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Zähler durch die ganze Zahl dividirt, den Nenner aber unverändert läßt.

Durch Zeichen ausgedrückt:

$$\left(\frac{12}{7}\right) : 3 = \frac{12 : 3}{7} = \frac{4}{7}.$$

$$\left(\frac{135}{11}\right) : 9 = \frac{135 : 9}{11} = \frac{15}{11}.$$

§ 36. In je mehr gleiche Theile ein Ganzes getheilt wird, desto kleiner wird jeder einzelne Theil, d. h. von zwei Bruch-einheiten ist diejenige die größere, welche den kleinern Nenner hat; z. B.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}; \frac{1}{3} > \frac{1}{10}; \frac{1}{4} > \frac{1}{8} \text{ u. s. w.,}$$

Nehmen wir nun die größere Bruch-einheit ebenso oftmal als die kleinere, so müssen wir im erstern Falle mehr erhalten als im letztern; daher muß sein

$$9 \times \left(\frac{1}{3}\right) > 9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \text{ oder } \frac{9}{3} > \frac{9}{4};$$

$$11 \times \left(\frac{1}{3}\right) > 11 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \text{ oder } \frac{11}{3} > \frac{11}{10} \text{ u. s. w.}$$

d. h. von zwei Brüchen mit gleichen Zählern ist derjenige Bruch der größere, der den kleineren Nenner hat.

Dividiren wir also den Nenner eines Bruches mit 2, 3, 4 u. s. w. und lassen den Zähler unverändert, so wird sein Nenner 2, 3, 4 mal kleiner, deshalb aber sein Werth 2, 3, 4 mal größer werden.

Ein Bruch wird also mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man seinen Nenner mit dieser ganzen Zahl dividirt und den Zähler unverändert läßt.

Durch Zeichen wird dieser Satz ausgedrückt:

$$\left(\frac{11}{12}\right) \times 2 = \frac{11}{12:2} = \frac{11}{6};$$

$$\left(\frac{17}{18}\right) \times 9 = \frac{17}{18:9} = \frac{17}{2}.$$

Hieraus folgt umgekehrt, daß ein Bruch 2, 3, 4 mal kleiner werden muß, wenn man den Nenner resp. mit 2, 3, 4 . . . multiplicirt und den Zähler unverändert läßt.

Ein Bruch wird also durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Nenner mit dieser ganzen Zahl multiplicirt und den Zähler unverändert läßt; z. B.

$$\left(\frac{12}{7}\right) : 3 = \frac{12}{7 \times 3} = \frac{12}{21};$$

$$\left(\frac{135}{11}\right) : 9 = \frac{135}{11 \times 9} = \frac{135}{99}.$$

§ 37. Fassen wir beide Arten der Multiplication und Division eines Bruches durch ganze Zahlen zusammen, so haben wir durch Zeichen:

$$\left(\frac{5}{9}\right) \times 3 = \frac{5 \times 3}{9} \text{ (§ 35)} = \frac{5}{9:3} \text{ (§ 36)};$$

$$\left(\frac{12}{7}\right) : 4 = \frac{12:4}{7} \text{ (§ 35)} = \frac{12}{7 \times 4} \text{ (§ 36)}.$$

Hierbei ist nicht zu übersehen, daß die Division mit der ganzen Zahl nur dann ausführbar ist, wenn die zu dividirende Zahl keinen Rest übrig läßt.

§ 38. Lehrsatz. Ein Bruch behält seinen Werth, wenn man Zähler und Nenner desselben mit einer und derselben Zahl multiplicirt; z. B.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}.$$

Beweis. Multipliciren wir den Zähler mit 5, so ist $\frac{3 \times 5}{4}$ 5 mal größer geworden als $\frac{3}{4}$ (§ 35); multipliciren wir den Nenner des vergrößerten Bruchs $\frac{3 \cdot 5}{4}$ mit 5, so wird dessen Werth wieder 5 mal kleiner gemacht (§ 36), folglich ist

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}.$$

§ 39. Der vorhergehende Lehrsatz wird benutzt, um Brüche ohne Aenderung ihres Werthes durch andere Zahlen auszudrücken, oder mehrere Brüche gleichnamig zu machen, d. h. auf gleiche Nenner zu bringen; z. B.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = \frac{9}{21} = \frac{12}{28} = \frac{15}{35} = \frac{18}{42} \text{ u. s. w.}$$

Man bringt mehrere Brüche auf gleiche Nenner dadurch, daß man Zähler und Nenner jedes einzelnen Bruches mit dem Producte der Nenner aller übrigen Brüche multiplicirt; z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot (5 \cdot 8)}{3 \cdot (5 \cdot 8)} = \frac{2 \cdot 40}{3 \cdot 40} = \frac{80}{120};$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot (3 \cdot 8)}{5 \cdot (3 \cdot 8)} = \frac{3 \cdot 24}{5 \cdot 24} = \frac{72}{120};$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot (3 \cdot 5)}{8 \cdot (3 \cdot 5)} = \frac{7 \cdot 15}{8 \cdot 15} = \frac{105}{120}.$$

In besonderen Fällen läßt sich dieses Verfahren verkürzen. Sind nemlich die Nenner der einzelnen Brüche in anderen Nennern als Factoren enthalten, oder haben mehrere Nenner einen gemeinsamen Theiler, so sucht man für alle Nenner das kleinste gemeinsame Vielfache; dividirt mit dem Nenner jedes Bruches in dieses Vielfache und multiplicirt mit dem sich ergebenden Quotienten den Zähler und Nenner des Bruches; z. B. für $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache = 72. Dividirt man nun 72 mit jedem Nenner der gegebenen Brüche, so ist

$$72 : 4 = 18; 72 : 8 = 9; 72 : 3 = 24; 72 : 9 = 8.$$

und multiplicirt mit dem erhaltenen Quotienten den Zähler und Nenner des zugehörigen Bruches, so ergibt sich:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 18}{4 \cdot 18} = \frac{54}{72};$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{63}{72};$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 24}{3 \cdot 24} = \frac{48}{72};$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 8} = \frac{40}{72}.$$

Das Verfahren, Brüche ohne Aenderung ihres Werthes durch andere Zahlen auszudrücken, wird das Erweitern der Brüche genannt.

Da jede ganze Zahl in einen Bruch verwandelt, und dieser dann erweitert werden kann, so folgt, daß es für jede Zahl unendlich viele Ausdrücke in der Form eines Bruches giebt, die denselben Werth haben.

§ 40. Aus § 38 folgt umgekehrt, daß jeder Bruch seinen Werth behält, wenn man Zähler und Nenner desselben mit einer und derselben Zahl dividirt. Dieses Verfahren nennt man das Aufheben oder Verkürzen oder das Reduciren der Brüche. So oft ein Bruch aus einer Rechnung hervorgeht, reducirt man denselben entweder dadurch, daß man Zähler und Nenner mit dem größten gemeinsamen Theiler dividirt, oder man benutzt die Kennzeichen der Theilbarkeit dekadischer Zahlen, und vollzieht die Reduction durch aufeinander folgende Divisionen des Zählers und des Nenners durch ihre gemeinschaftlichen Divisoren. Es soll z. B. $\frac{168}{192}$ durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt werden. — Der größte Theiler für 168 und 192 ist = 24, daher

$$\frac{168}{192} = \frac{168 : 24}{192 : 24} = \frac{7}{8}.$$

oder:

2	2	6
168	84	42
192	96	48
		8.

Die Reduction durch das letztere Verfahren muß so lange fortgesetzt werden, bis der Zähler und Nenner des zuletzt gefundenen Bruches Primzahlen unter einander sind.

Uebungsfragen :

- 1) Was versteht man unter Brucheinheit?
- 2) Was sind Stammbrüche?
- 3) Wie entstehen die gebrochenen Zahlen oder Brüche?
- 4) Welches ist die Bedeutung des Zählers, welches die des Nenners?
- 5) Wie werden die Brüche geschrieben?
- 6) Welche Brüche nennt man ächte, welche unächte?

- 7) Was sind gemischte Zahlen?
 8) Wie verwandelt man eine ganze Zahl in einen Bruch mit vorgeschriebenem Nenner?
 9) Wie addirt man Brüche mit gleichen Nennern?
 10) Was heißt eine gemischte Zahl einrichten?
 11) Wie stellt man einen unächtten Bruch als ganze oder als gemischte Zahl dar?
 12) Welche Veränderung erleidet ein Bruch:
 1) wenn man seinen Zähler mit einer ganzen Zahl multiplicirt oder dividirt;
 2) wenn man seinen Nenner mit einer ganzen Zahl multiplicirt oder dividirt;
 3) wenn man seinen Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.
 13) Was versteht man unter Erweitern, was unter Heben der Brüche?
 14) Auf welche Weise kann ein Bruch gehoben oder reducirt werden?
 15) Wie bringt man Brüche unter gleiche Benennung?

Addition der Brüche.

§ 41. Wie gleichnamige Brüche addirt werden, haben wir § 29 gesehen. Sind die Brüche ungleichnamig, so bringt man sie auf gleiche Nenner (§ 39), addirt die Zähler der erhaltenen Brüche und setzt der Summe der Zähler den gemeinsamen Nenner, welcher der Generalnenner genannt wird, als Nenner darunter. — Es ist bequem für die Praxis, jede Addition von Brüchen folgendermaßen auszuführen:

Generalnenner = 72. Neue Zähler.

$\frac{3}{4}$	18	54
+ $\frac{5}{8}$	9	45
+ $\frac{1}{3}$	8	56
= $1\frac{55}{72}$ = $2\frac{1}{2}$.		

Man schreibt alle Summanden unter einander; sucht den gemeinsamen kleinsten Nenner (Generalnenner), hier = 72; —

dividirt denselben durch jeden einzelnen Nenner und schreibt den erhaltenen Quotienten neben den entsprechenden Bruch. Die erhaltenen Quotienten, hier 18, 9 und 8 sind Zahlen, mit denen Zähler und Nenner des vorliegenden Bruches zu multipliciren sind, damit alle gegebenen Brüche denselben gleichen Nenner erhalten. — Nun haben wir statt $\frac{3}{4}$ den Bruch $\frac{3 \cdot 18}{4 \cdot 18} = \frac{54}{72}$; für

$\frac{5}{8}$ den Bruch $\frac{5 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{45}{72}$; für $\frac{7}{9}$ den Bruch $\frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 8} = \frac{56}{72}$. —

Weil aber alle denselben Nenner = 72 haben, so schreibt man bloß die Zähler 54, 45, 56 hin. Man addirt diese Zähler und setzt unter ihre Summe als Nenner den Generalnenner.

Sind gemischte Zahlen zu addiren, so addire man zuerst die Brüche, nehme die Ganzen aus deren Summe, und addire diese zu den Ganzen der Summanden. Der etwa sich ergebende Bruch wird der Summe der Ganzen angehängt.

5100

$7\frac{3}{4}$	1020	3060
+ $8\frac{1}{2}$	425	4675
+ $9\frac{1}{7}$	300	3600
+ $11\frac{3}{4}$	1275	3825
+ $15\frac{7}{10}$	510	3570
+ $34\frac{7}{5}$	204	1428

$$84 \quad + \quad \frac{20158}{5100} = 84 + \frac{34858}{5100} = 87\frac{2428}{5100}.$$

40

$\frac{7}{8}$ Fuß	5	35
+ $\frac{3}{4}$ "	10	30
+ $\frac{7}{10}$ "	4	28
+ $\frac{3}{5}$ "	8	24
+ $\frac{1}{2}$ "	20	20

$$\frac{137}{40} \text{ Fuß} = 3\frac{17}{40} \text{ Fuß.}$$

Subtraction der Brüche.

§ 42. 1) Haben die Brüche gleiche Nenner, so subtrahirt man den Zähler des Subtrahendus vom Zähler des Minuendus

und setzt unter die Differenz als Nenner den gleichen Nenner der gegebenen Brüche; z. B. $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}$.

2) Bei ungleichen Nennern macht man die Brüche gleichnamig, und verfährt alsdann wie vorhin; z. B. $\frac{5}{7} - \frac{1}{4} = \frac{20}{28} - \frac{7}{28} = \frac{20-7}{28} = \frac{13}{28}$.

3) Bei gemischten Zahlen subtrahirt man zuerst die Brüche von einander, und dann die Ganzen; z. B. $7\frac{5}{8} - 3\frac{3}{4} = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} + 7 - 3 = \frac{35}{56} - \frac{24}{56} + 7 - 3 = \frac{11}{56} + 4 = 4\frac{11}{56}$.

Die gewöhnlichste Form des Ansatzes für die Praxis ist folgende:

$$\begin{array}{r} 56 \\ - \left\{ \begin{array}{l} 7\frac{5}{8} \\ 3\frac{3}{4} \end{array} \right. \begin{array}{l} 35 \\ 24 \end{array} \\ \hline 4 \quad \frac{11}{56} \end{array}$$

Ist der Bruch des Subtrahendus größer als der des Minuendus, so borgt man von den Ganzen des Minuendus eine Einheit, verwandelt diese in einen Bruch von gleichem Nenner mit dem angehängten Bruche, zählt den erstern Bruch zu dem letztern hinzu und subtrahirt jetzt den Bruch des Subtrahendus von dem des Minuendus. z. B.

$$\begin{array}{r} 24 \\ - \left\{ \begin{array}{l} 5\frac{7}{8} \\ 3\frac{1}{2} \end{array} \right. \begin{array}{l} 21 \\ 22 \end{array} \left. \right\} + \\ \hline 1 \quad \frac{23}{8} \end{array}$$

Da $\frac{7}{8} = \frac{3}{4}$ und $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, so borgt man von den Ganzen des Minuendus eine Einheit, verwandelt diese in $\frac{3}{4}$ und addirt sie zu $\frac{3}{4}$ hinzu, wodurch man $\frac{6}{4}$ erhält; nimmt davon $\frac{2}{4}$ hinweg, und hat zum Rest $\frac{4}{4}$. Bei den Ganzen sind jetzt statt $5 - 3$ bloß $4 - 3 = 1$, also ist der gesuchte Rest $= 1\frac{23}{8}$.

Der bessern Uebersicht wegen ist der Nenner bei den Brüchen überall weggelassen, und man hat zum Zähler des Minuendus

den gemeinsamen Nenner hinzugezählt, wodurch die unter dem Strich stehenden 45 (nehmlich $\frac{45}{4}$) entstanden.

Hat der Minuendus keinen Bruch, so borgt man eine Einheit, verwandelt diese in einen Bruch mit dem Nenner des Bruches im Subtrahendus und subtrahirt dann; z. B.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ 4. & 6 \\ 1\frac{5}{8} & 5 \\ \hline 2 & \frac{1}{8} \end{array}$$

Benannte Zahlen werden ebenso wie unbenannte subtrahirt, indem man nur dem Reste dieselbe Benennung giebt, welche die gegebenen Zahlen haben. Z. B.

$$1\frac{1}{2} \text{ Pfund} - \frac{7}{8} \text{ Pfund} = (1\frac{1}{2} - \frac{7}{8}) \text{ Pfund} = \left(\frac{22}{24} - \frac{21}{24} \right) \text{ Pfund} \\ = \frac{1}{24} \text{ Pfund.}$$

Multiplikation der Brüche.

§ 43. Wie ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, ist bereits in § 35 und § 36 gelehrt worden. Wenn aber der Multiplikator ein Bruch ist, so entsteht die Frage, welches der Sinn einer solchen Aufgabe ist, da alsdann der Multiplicandus nicht eine bestimmte Anzahl Mal wiederholt zu sich selbst addirt werden kann.

Betrachten wir zuerst den Fall, wenn der Multiplicandus eine beliebige Zahl $= a$, und der Multiplikator ein Stammbruch ist. — Soll a mit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. multiplicirt werden, so heißt es, man soll von der Zahl a die Hälfte, das Drittel, das Viertel u. s. w. nehmen, d. h. die Zahl a mit 2, 3, 4 u. s. w. dividiren. Multiplication einer Zahl a mit einem Stammbruche ist also Division derselben mit dem Nenner des Stammbruches.

$$[a] \times \frac{1}{5} = [a] : 5 = \frac{a}{5},$$

$$(7) \times \frac{1}{5} = (7) : 5 = \frac{7}{5},$$

$$\left(\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{5} = \left(\frac{3}{4}\right) : 5 = \frac{3}{20} \text{ (§ 36).}$$

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man den Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt und den Nenner unverändert lässt. $\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4}$.

Ist der Multiplicator ein beliebiger Bruch, z. B. $\frac{7}{8}$, so können wir denselben zerlegen in $7 \cdot (\frac{1}{8})$ und es wird daher sein:

$$(a) \cdot \frac{7}{8} = [(a) \cdot 7] \cdot \frac{1}{8} = [7a] \cdot \frac{1}{8} = (7a) : 8 = \frac{7a}{8}.$$

Multiplikation einer Zahl a mit einem beliebigen Bruche ist also Multiplikation derselben mit dem Zähler und Division mit dem Nenner des Multiplicators.

Wenn also $a = \frac{5}{6}$ wäre, so hätten wir

$$(\frac{5}{6}) \cdot (\frac{7}{8}) = [(\frac{5}{6}) \cdot 7] : 8 = (\frac{5 \cdot 7}{6}) : 8 \text{ (§35)} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8} \text{ (§36)} = \frac{35}{48}.$$

Brüche werden also multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt; demnach ist

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{9} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 9} = \frac{14}{27}.$$

Hat man gemischte Zahlen zu multipliciren, so richtet man beide Factoren ein, und verfährt dann wie mit gewöhnlichen Brüchen; z. B.

$$(7\frac{3}{4}) \times (5\frac{2}{3}) = (\frac{31}{4}) \times (\frac{17}{3}) = \frac{31 \cdot 17}{4 \cdot 3} = \frac{527}{3} = 43\frac{1}{3}.$$

Man kann aber auch die Multiplication dadurch verrichten, daß man die Ganzen und den Bruch des Multiplicandus zuerst mit der ganzen Zahl des Multiplicators und dann mit dem Bruche desselben, multiplicirt, und die hervorgehenden partiellen Producte zuletzt addirt, z. B.

$$\begin{aligned} (7\frac{3}{4}) \cdot (5\frac{2}{3}) &= (7 + \frac{3}{4}) \cdot (5 + \frac{2}{3}) = (7 + \frac{3}{4}) \cdot 5 + (7 + \frac{3}{4}) \cdot \frac{2}{3} \\ &= 35 + \frac{15}{4} + \frac{14}{3} + \frac{1}{2} \\ &= 43\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Da $(\frac{3}{4}) \cdot (\frac{5}{7}) = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}$ und $(\frac{5}{7}) \cdot (\frac{3}{4}) = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 4}$; aber $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ und $4 \cdot 7 = 7 \cdot 4$, so folgt, daß $(\frac{3}{4}) \cdot (\frac{5}{7}) = (\frac{5}{7}) \cdot (\frac{3}{4})$, d. h. das Product zweier Brüche ändert sich nicht, wenn man die Factoren vertauscht.

Durch Multiplication des Zählers wird der Bruch vergrößert; durch Multiplication des Nenners aber verkleinert.

Ist also der Multiplikator ein ächter Bruch, so muß das Product kleiner werden als der Multiplicandus, z. B. in $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$ ist $\frac{15}{56}$ kleiner als $\frac{5}{8}$, da aber $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{56}$, so muß $\frac{15}{56}$ auch kleiner sein als $\frac{3}{7}$, daher bei der Multiplication ächter Brüche das Product immer kleiner ist als jeder einzelne Factor.

Ist der Multiplicandus eine benannte Zahl, so erleidet das Verfahren keine Abänderung, nur muß man dem Producte dieselbe Benennung geben, welche der Multiplicandus hat. Z. B.

$$1) (4 \text{ Pud}) \times \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot (4 \text{ Pud})}{5} = \frac{12}{5} \text{ Pud} = 2\frac{2}{5} \text{ Pud};$$

$$2) (\frac{1}{2} \text{ Arschin}) \times \frac{5}{8} = (\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}) \text{ Arschin} = \frac{5}{16} \text{ Arschin};$$

$$3) (\frac{7}{8} \text{ Tschetwert}) \times 2\frac{1}{3} = (\frac{7}{8} \cdot \frac{7}{3}) \text{ Tschetwert} = \frac{49}{24} \text{ Tschetwert} \\ = 2\frac{1}{4} \text{ Tschetwert}.$$

Dasselbe gilt von Aufgaben, bei denen erst aus dem Zusammenhang bestimmt werden muß, welche von den vorkommenden Zahlen als Multiplikator zu nehmen ist; z. B.

$$4) \text{ Für 1 Tag zahlt man } \frac{1}{2} \text{ Rubel Arbeitslohn; wieviel für } \frac{3}{4} \text{ Tage?}$$

Ausrechnung. Für 1 Tag wird gezahlt $\frac{1}{2}$ Rubel; für $\frac{1}{4}$ Tag offenbar der vierte Theil davon, also $\frac{1}{4}$ Tag \dots ($\frac{1}{2}$ Rubel) $\cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ Rubel; für $\frac{3}{4}$ Tage muß man 3 mal mehr geben, daher $\frac{3}{4}$ Tage \dots ($\frac{1}{2}$ Rubel) $\times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ Rubel.

$$5) 1 \text{ Pfund kostet } 5\frac{1}{2} \text{ Kopfen; wie theuer sind } 3\frac{1}{4} \text{ Pfund?}$$

Ausrechnung. 1 Pfund \dots $\frac{1}{2}$ Kopfen,
demnach $3\frac{1}{4}$ Pfund $= 1\frac{3}{4}$ Pfund \dots ($\frac{1}{2}$ Kopfen) $\cdot 1\frac{3}{4}$
 $= 1\frac{3}{4}^3 \text{ Kopfen} = 17\frac{3}{8} \text{ Kopfen}.$

Division der Brüche.

§ 44. Bei der Division der Brüche sind ebenso wie bei der Division ganzer Zahlen zwei Fälle zu unterscheiden:

a) ob durch dieselbe ein Messen oder

b) ob ein Theilen

bezweckt wird.

Im erstern Fall müssen Divisor und Dividendus gleichartig sein. Beide Brüche sind daher gleichnamig zu machen

und dann mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Dividendus zu dividiren, die Nenner aber ganz wegzulassen, z. B.

$$1) \left(\frac{3}{5}\right) : \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 1}\right) : \left(\frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 2}\right) = (3 \cdot 2) \text{ Zehntel} : (5 \cdot 1)$$

$$\text{Zehntel} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} \text{ mal} = \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{2}{1}\right);$$

$$2) \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{11}{7}\right) = \left(\frac{5 \cdot 11}{6 \cdot 11}\right) : \left(\frac{7 \cdot 6}{6 \cdot 11}\right) = (5 \cdot 11) : (7 \cdot 6) =$$

$$\frac{5 \cdot 11}{6 \cdot 7} = \left(\frac{5}{6}\right) \times \left(\frac{11}{7}\right).$$

Der Quotient wird also gefunden, wenn wir den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor multipliciren.

Zu dieser Regel gelangen wir auch durch folgende Betrachtung. Gesezt, der Dividendus sei eine beliebige Größe (a) und der Divisor ein Stammbruch, so sehen wir sogleich, daß in der Einheit der Divisor $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. 2, 3, 4 mal enthalten sein muß; also

$$1 : \left(\frac{1}{2}\right) = 2; \text{ denn } \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 1$$

$$1 : \left(\frac{1}{3}\right) = 3; \text{ „ } \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 3 = 1$$

$$1 : \left(\frac{1}{4}\right) = 4; \text{ „ } \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 4 = 1, \text{ folglich}$$

$$a : \left(\frac{1}{2}\right) = 2a; \text{ denn } \left[\frac{1}{2}\right] \cdot 2a = \frac{2a}{2} = a.$$

Die Division einer Zahl (a) durch einen Stammbruch wird also verrichtet, wenn man dieselbe mit dem Nenner des Stammbruches multiplicirt.

Ist der Divisor ein beliebiger Bruch, z. B. $\frac{15}{17}$, so zerlegen wir denselben in $15 \cdot \left(\frac{1}{17}\right)$ und haben alsdann

$$a : \left(\frac{15}{17}\right) = a : [15 \cdot \left(\frac{1}{17}\right)] = [a : 15] : \frac{1}{17} = \left(\frac{a}{15}\right) : \frac{1}{17} \\ = \frac{a}{15} \cdot 17 = a \cdot \left(\frac{17}{15}\right)$$

Eine Zahl a wird also durch einen beliebigen Bruch dividirt, wenn man sie mit dem Nenner des Divisors multiplicirt und mit dem Zähler dividirt.

Wenn der Dividendus (a) selbst ein Bruch ist, z. B. $a = \frac{12}{4}$, so haben wir:

$$\left(\frac{13}{14}\right) : \left(\frac{17}{15}\right) = \left[\left(\frac{13}{14}\right) \times 17\right] : 15 = \left(\frac{13 \cdot 17}{14}\right) : 15 = \frac{13 \cdot 17}{14 \cdot 15} = \left(\frac{13}{14}\right) \cdot \left(\frac{17}{15}\right).$$

Auch durch folgende Betrachtung kann diese Regel hergeleitet werden. — Gesezt, der Dividendus sei $= \frac{15}{8}$ und der Divisor $= \frac{3}{4}$, so müssen wir einen noch unbekanntem Bruch $\frac{x}{y}$ finden, der mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt zum Producte $\frac{15}{8}$ giebt. — Also

$$\frac{15}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{y} = \frac{3 \cdot x}{4 \cdot y}$$

daher muß sein $3 \cdot x = 15$ und $4 \cdot y = 16$, folglich $x = 15 : 3$ und $y = 16 : 4$, woraus sich ergibt $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$;

$$\text{also } \left(\frac{15}{8}\right) : \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15 : 3}{16 : 4}.$$

Man dividirt also einen Bruch durch einen andern dadurch, daß man den Zähler des Dividendus durch den Zähler des Divisors und den Nenner des Dividendus durch den Nenner des Divisors dividirt.

Dieses Verfahren ist aber nur dann ausführbar, wenn die Zahlen im Zähler und Nenner in einander aufgehen. Da aber durch die Division des Zählers beim Dividendus, der Dividendus selbst dividirt und durch die Division des Nenners, derselbe multiplicirt wird, so erreicht man dieses auch dadurch, daß man mit dem Zähler des Divisors den Nenner, und mit dem Nenner des Divisors den Zähler des Dividendus multiplicirt, d. h. mit dem umgekehrten Divisor den Dividendus multiplicirt. Also

$$\begin{aligned} \left(\frac{15}{19}\right) : \left(\frac{17}{18}\right) &= \frac{15 : 18}{19 : 17} = \left[\left(\frac{15}{19}\right) : 18\right] \cdot 17 = \left(\frac{15}{19 \cdot 18}\right) \cdot 17 \\ &= \frac{15 \cdot 17}{19 \cdot 18} = \left(\frac{15}{19}\right) \cdot \left(\frac{17}{18}\right). \end{aligned}$$

Bezwckt die Division ein Theilen, so hat dieses keinen Einfluß auf die Größe des Quotienten, weil wir immer eine Zahl finden, die mit dem Divisor multiplicirt, zum Producte den Dividendus giebt, daher gilt die gegebene Regel auch für diesen Fall.

Kommen gemischte Zahlen vor, so werden dieselben zuvor in unächte Brüche verwandelt. Z. B.

$$(3\frac{1}{2}) : \frac{7}{8} = \frac{7}{2} : \frac{7}{8} = \frac{7}{2} \times \frac{8}{7} = 4.$$

Bei der Division benannter Zahlen im Sinne des Messens ist der Quotient eine unbenannte, dagegen bei Aufgaben im Sinne des Theilens eine benannte Zahl. Z. B.

1) ($\frac{3}{4}$ Rubel) : ($\frac{1}{5}$ Rubel) = ($\frac{3}{4} : \frac{1}{5}$) mal = $1\frac{5}{4}$ mal;

2) ($\frac{7}{8}$ Pud) : ($\frac{4}{5}$ Pud) = ($\frac{7}{8}$) . ($\frac{5}{4}$) mal = $3\frac{5}{8}$ mal;

3) ($\frac{3}{4}$ Tage) : $\frac{2}{3}$ = ($\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$) Tage = $\frac{9}{8}$ Tage;

4) Wenn $\frac{3}{4}$ Pfund mit 2 Rubel bezahlt werden; wie theuer ist 1 Pfund?

Auflösung. $\frac{3}{4}$ Pfund kosten 2 Rubel

$\frac{1}{4}$ Pfund kostet $\frac{2}{3}$ Rubel,

also 1 Pfund kostet $\frac{2}{3} \cdot 4$ Rubel = $2\frac{2}{3}$ Rubel.

5) Für $2\frac{1}{2}$ Tage zahlt man $1\frac{3}{4}$ Rubel Arbeitslohn; wieviel für 1 Tag?

Auflösung. Für $\frac{5}{2}$ Tage zahlt man $\frac{7}{4}$ Rubel.

Für $\frac{1}{2}$ Tag zahlt man $\frac{7}{4 \cdot 5}$ Rubel.

Für 1 Tag zahlt man $\frac{2 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{7}{10}$ Rubel.

§ 45. Wird die Division der Brüche nicht ausgeführt, sondern nur angedeutet, so entstehen die Doppelbrüche oder Bruchbrüche. Z. B.

1) $7 : (\frac{3}{4}) = \frac{7}{(\frac{3}{4})}$;

2) $(1\frac{1}{2}) : (\frac{3}{4}) = \frac{(1\frac{1}{2})}{(\frac{3}{4})}$;

3) $(1\frac{1}{2}) : 9 = \frac{(1\frac{1}{2})}{9}$.

Wenn solche Doppelbrüche in der Rechnung vorkommen, so verwandelt man sie nach den Regeln der Division in einfache Brüche.

Übungsfragen:

1) Wie addirt man Brüche?

2) Wie werden gemischte Zahlen addirt?

3) Wie subtrahirt man Brüche von einander?

- 4) Wie werden gemischte Zahlen von einander subtrahirt?
- 5) Was heißt mit der Bruchseinheit multipliciren?
- 6) Wie multiplicirt man eine beliebige Zahl mit einem Bruche?
- 7) Wie multiplicirt man zwei Brüche mit einander?
- 8) Wie werden gemischte Zahlen multiplicirt?
- 9) Wie dividirt man eine beliebige Zahl mit der Bruchseinheit?
- 10) Wie verfährt man, wenn der Divisor ein beliebiger Bruch ist?
- 11) Wie dividirt man einen Bruch durch einen andern?
- 12) Wie werden gemischte Zahlen dividirt?
- 13) Wie entstehen Doppelbrüche?
- 14) Wie verwandelt man Doppelbrüche in einfache Brüche?
- 15) Warum ist das Product ächter Brüche kleiner als jeder einzelne Factor?

Von den Decimalbrüchen.

§ 46. Nach dem dekadischen Zahlensystem hat in einer ganzen Zahl jede Ziffer ihrem Stellenwerthe nach einen 10 mal kleineren Werth, als die ihr links vorher gehende Ziffer, so daß in der letzten Stelle rechts die Einer stehen; z. B. bei der Zahl 325 ist die erste Stelle von der Linken zur Rechten = 3 Hunderter
 " zweite " " " " " " = 2 Zehner
 " dritte " " " " " " = 5 Einer.

Lassen wir den Einern noch einige Stellen nach demselben Gesetze folgen, daß jede folgende Stelle zur Rechten zehnmal kleiner sein soll, so wird die erste Stelle rechts von den Einern Zehntel, die zweite Hundertstel, die dritte Tausendstel u. s. w. enthalten müssen. — Ueberhaupt werden diese Stellen Brüche anzeigen, deren Nenner aus einer Eins und aus einer oder mehreren Nullen bestehen. — Um die Stelle anzugeben, welche die Einer einnehmen, bedient man sich eines Komma, das den Einern rechts beigelegt wird; z. B. die Zahl

274,761

hat vor dem Komma drei Stellen, welche, von der Rechten zur Linken gelesen, 2 Hunderter, 7 Zehner 4 Einer bedeuten, — die

erste Stelle nach dem Komma heißt $\frac{7}{10}$, die zweite $\frac{6}{100}$, die dritte $\frac{1}{1000}$. — Folgen noch mehr Stellen, so erhalten wir Zehntausendstel, Hunderttausendstel u. s. w.

Solche Brüche, deren Nenner aus einer Eins mit einer oder mehreren nachfolgenden Nullen bestehen, heißen *Decimalbrüche*. Sie bilden eigentlich eine Ergänzung des Decimalsystems. Jeder Decimalbruch wird in Form einer ganzen Zahl dargestellt, ohne daß der Nenner besonders anzugeben wäre, weil das den Einern beigefügte Komma den Nenner vollständig bestimmt. — Es sei z. B. die Zahl 37,483 gegeben, so ist der Werth derselben:

$$1) 37 + \frac{4}{10} + \frac{8}{100} + \frac{3}{1000},$$

oder wenn man die drei Decimalbrüche auf dieselbe Benennung bringt,

$$2) 37 + \frac{400}{1000} + \frac{80}{1000} + \frac{3}{1000} = 37 + \frac{483}{1000},$$

oder endlich, wenn man die Decimalbrüche und die Ganzen zu einer Zahl vereinigt:

$$3) 37 + \frac{483}{1000} = \frac{37483}{1000}.$$

Bei einem ächten Decimalbrüche wird eine Null an die Stelle der Ganzen gesetzt und durch das Komma von den Decimalstellen getrennt; z. B.

$$0,432 = \frac{432}{1000}; 0,056 = \frac{56}{1000}; 0,003 = \frac{3}{1000} \text{ u. s. w.}$$

Aus dieser Darstellung folgt, daß das Lesen und Aussprechen der Decimalbrüche auf drei verschiedene Arten geschehen kann:

- A. indem man zuerst die Ganzen nennt, und hierauf die Werthe aller Stellen des Decimalbruches einzeln angiebt; z. B. 21,674 = 21 Ganze, 6 Zehntel, 7 Hundertstel, 4 Tausendstel;
- B. indem man zuerst die Ganzen und hierauf alle Stellen des Decimalbruches unter einer Benennung angiebt; z. B. 27,654 = 27 Ganze, 654 Tausendstel, 0,34 = 34 Hundertstel;
- C. indem man sowohl die Ganzen als auch alle Stellen des Decimalbruches unter einer Benennung auf einmal angiebt; z. B. 27,654 = 27654 Tausendstel.

Eine vierte Art des Aussprechens besteht darin, daß man

die verschiedenen Stellen des Decimalbruches der Reihe nach ohne weitere Benennung folgen läßt; z. B.

157,37062 = 157 Ganze (oder 157, Komma) 3, 7, 0, 6, 2.

Diese ist die bequemste und daher gebräuchlichste Lesart.

§ 47. Da $\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000}$ und $\frac{5}{10} = 0,5$; $\frac{50}{100} = 0,50$; $\frac{500}{1000} = 0,500$, so muß auch sein:

$$0,5 = 0,50 = 0,500.$$

Wenn man also einem Decimalbruch rechts Nullen anreicht, so behält er seinen früheren Werth, indem blos sein Nenner ein anderer wird.

Hierdurch haben wir ein bequemes Mittel, Decimalbrüche von verschiedener Benennung gleichnamig zu machen; z. B. 0,7; 0,843; 9,6502 verwandeln sich in:

$$0,7 = 0,7000$$

$$0,843 = 0,8430$$

$$9,6502 = 9,6502.$$

§ 48. Da $4,57 = \frac{457}{100}$ und $(\frac{457}{100}) \times 10 = \frac{457}{10} = 45,7$, so muß auch $(4,57) \times 10 = 45,7$ sein; d. h. ein Decimalbruch wird mit 10 multiplicirt, wenn man das Komma um eine Stelle zur Rechten weiter rückt.

Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß überhaupt ein Decimalbruch mit 100, 1000 u. s. w. multiplicirt wird, wenn man das Komma um so viele Stellen zur Rechten weiter rückt, als der Multiplikator Nullen hat. Demnach ist

$$5,478 \times 10 = 54,78$$

$$5,478 \times 100 = 547,8$$

$$5,478 \times 1000 = 5478,0$$

Hat der Multiplicandus weniger Stellen als im Multiplikator Nullen vorkommen, so werden die fehlenden Stellen durch Nullen ersetzt; z. B.

$$23,471 \times 10000 = 234710$$

$$1,06 \times 10000 = 10600$$

$$0,7 \times 10000 = 7000.$$

Hieraus folgt umgekehrt, daß ein Decimalbruch mit 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt wird, wenn man das

Komma um so viel Stellen zur Linken weiter rückt, als der Divisor Nullen hat; z. B.

$$478,3: 10 = 47,83$$

$$478,3: 100 = 4,783$$

$$478,3: 1000 = 0,4783$$

$$478,3: 10000 = 0,04783.$$

§ 49. Wenn man einige Stellen eines Decimalbruches wegläßt, so ändert sich der Werth des Decimalbruches. Häufig kommt der Fall vor, daß man weniger Decimalstellen benutzen will als vorhanden sind, weil der Grad der Genauigkeit des zu erzielenden Resultats nicht so viele Decimalstellen erforderlich macht. Hat man z. B. für einen bestimmten Fall die Zahl 37,76843 gefunden, und genügt eine Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$, so nimmt man statt 37,76843 bloß die Zahl 37,768, weil die verworfenen $0,00043 = \frac{43}{100000}$ weniger als $\frac{1}{1000}$ betragen.

Das Weglassen einer oder mehrerer Stellen eines Decimalbruches heißt das Verkürzen des Decimalbruches. -- Wird der Decimalbruch bei irgend einer Stelle verkürzt, und steht in der folgenden Stelle eine kleinere Zahl als 5, so beträgt der Werth aller weggelassenen Stellen weniger als die Hälfte einer Einheit der niedrigsten noch benutzten Stelle. Z. B. wir verkürzen den Decimalbruch 7,37923 bei der dritten Stelle, und setzen statt desselben bloß 7,379, so beträgt der Fehler $0,00023 = \frac{23}{100000}$. Eine Einheit der dritten Stelle ist aber $= \frac{1}{1000}$ daher die Hälfte davon $= \frac{1}{1000} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1000} \times \frac{5}{10} = \frac{5}{10000} = \frac{50}{100000}$; folglich $> \frac{23}{100000}$.

Wird ein Decimalbruch bei irgend einer Stelle verkürzt, und steht in der folgenden Stelle eine größere Zahl als 5 oder 5 selbst, so ist der Werth aller weggelassenen Stellen mehr oder wenigstens gerade so viel als die Hälfte von einer Einheit der niedrigsten noch benutzten Stelle. Z. B. wir verkürzen den Bruch 7,37984 bei der dritten Stelle, und setzen statt desselben bloß 7,379, so ist der Fehler $= 0,00084 = \frac{84}{100000}$. Oben haben wir für die Hälfte der Einheit der dritten Decimalstelle gerade $\frac{50}{100000}$ gefunden, daher $\frac{84}{100000} > \frac{50}{100000}$. Um nun den Fehler möglichst klein, und zwar kleiner als die Hälfte einer Einheit der niedrigsten benutzten Stelle zu machen, vergrößert man die letztere

um eine Einheit, wenn die nächste Stelle des weggeworfenen Theils entweder 5 oder größer als 5 ist. Setzen wir z. B. statt 5,38279 den Decimalbruch 5,383, so ist

$$5,383 - 5,38279 = \frac{5383}{10000} - \frac{538279}{100000} = \frac{538000 - 538279}{100000} = \frac{21}{100000},$$

daher $< \frac{50}{100000}$, d. h. $< \frac{1}{10000}$.

Wird diese Correctur angewandt bei der dritten Stelle, so haben wir zu setzen statt

750,68134 den Decimalbruch 750,681

109,74558 " " 109,746

10,84162 " " 0,842.

§ 50. Aufgabe. Decimalbrüche zu addiren.

Auflösung. Man macht sämmtliche Decimalbrüche gleichnamig, indem man jedem Abnehmenden durch angehängte Nullen so viele Decimalstellen giebt, als derjenige Bruch hat, in welchem die meisten Decimalstellen vorkommen; addirt hierauf wie bei ganzen Zahlen und giebt der Summe so viele Decimalstellen, als jeder der addirten Brüche hat; z. B.

$$5,7 + 16,894 + 3,00094 + 16,17 + 358,76.$$

Ausführung: 5,7000

+ 16,8940

+ 3,0094

+ 16,1700

+ 358,7600

400,5334.

Beweis. Aus der Auflösung geht hervor, daß man nur die Zähler sämmtlicher gleichnamiger Brüche addirt, und unter deren Summe den gemeinschaftlichen Nenner setzt. Die Division durch diesen, aus einer Eins und mehreren Nullen bestehenden Nenner geschieht (§ 48) dadurch, daß man von dem Zähler so viele Stellen abschneidet, als der gemeinsame Nenner Nullen, oder als jeder der addirten Decimalbrüche Stellen hat.

§ 51. Aufgabe. Decimalbrüche zu subtrahiren.

Auflösung. Man setze den Subtrahendus so unter den Minuendus, daß die gleichnamigen Stellen unter einander zu stehen kommen, und subtrahire die Decimalbrüche wie ganze Zahlen von einander. Das Komma im Reste stellt man unter die Kommata des Minuendus und Subtrahendus.

Beweis. 1) Haben Minuendus und Subtrahendus gleichviel Decimalstellen, z. B.

$$\begin{array}{r} 7,643 \text{ (Minuendus)} \\ 1,872 \text{ (Subtrahendus)} \\ \hline 5,771 \text{ (Rest),} \end{array}$$

so sind beide gleichnamig; der Rest ist der Unterschied der Zähler der beiden Decimalbrüche, und muß eben so viele Decimalstellen haben als jeder von ihnen.

2) Sind einige Decimalstellen im Minuendus weniger vorhanden als im Subtrahendus, oder umgekehrt in diesem weniger als in jenem, z. B.

$$\begin{array}{r} 13,4 \quad \text{oder} \quad 2,6874 \\ 7,863 \quad \quad \quad 1,95 \\ \hline 5,537 \quad \quad \quad 0,7374 \end{array}$$

so kann man sich die fehlenden Stellen durch Nullen ergänzt denken, so daß man alldann gleichnamige Decimalbrüche zu subtrahiren hat.

§ 52. Aufgabe. Decimalbrüche zu multipliciren.

Auflösung. Man multiplicire die beiden gegebenen Decimalbrüche ohne Rücksicht auf die Kommata, wie zwei ganze Zahlen und schneide von dem erhaltenen Producte so viel Decimalstellen ab, als beide Factore zusammen haben; z. B.

$$\begin{array}{r} 15,48 \\ 0,347 \\ \hline 10836 \\ 6192 \\ 4644 \\ \hline 5,37156. \end{array}$$

Beweis. Schreibt man beide Decimalbrüche in der Form gewöhnlicher Brüche, so sind die Zähler der letzteren ganze Zahlen und im Nenner jedes Bruches sind so viel Nullen der Eins angesetzt, als Decimalstellen in dem gegebenen Decimalbruch vorkommen, nämlich $15,48 = \frac{1548}{100}$ und $0,374 = \frac{374}{1000}$. Multipliciren wir nun beide Brüche, so ist der Zähler das Product der beiden Decimalbrüche ohne Rücksicht auf das Komma, und der Nenner enthält so viel Nullen, als die Nenner beider Factoren zusammen haben.

(Für unser Beispiel $\frac{1548}{100} \times \frac{374}{1000} = \frac{1548 \times 374}{100000} = \frac{587156}{100000}$.)

Dividiren wir nach § 48, so müssen wir vom Producte der beiden Zähler so viel Stellen abschneiden, als im Nenner Nullen, d. h. in beiden Factoren Decimalstellen vorkommen.

Sind im Producte weniger Decimalstellen als beide Factoren zusammen haben, so werden die fehlenden Stellen durch vorgesezte Nullen ergänzt; z. B.

$$0,07 \times 0,0085 = \frac{7}{100} \times \frac{85}{10000} = \frac{7 \times 85}{1000000} = \frac{595}{1000000} = 0,000595.$$

Kommen mehr als zwei Factoren vor, so multiplicirt man wie mit ganzen Zahlen, und schneidet vom Producte so viel Decimalstellen ab, als sämtliche Factoren zusammen haben; z. B.

$$3,07 \times 0,045 \times 0,003 = \frac{307 \times 45 \times 3}{100000000} = 0,00041445.$$

§ 53. Aufgabe. Decimalbrüche zu dividiren.

Auflösung. Man dividire mit dem Divisor in den Dividendus, ohne Rücksicht auf das Komma, als wären beide ganze Zahlen, und schneide vom Quotienten so viel Decimalstellen ab, als der Dividendus mehr hat als der Divisor; z. B.

$$2,3145704 : 0,345.$$

Ausführung: $0,345 \mid 2,3145705 \mid 67089$

2070

2445

2415

3070

2760

3105

3105.

malbruch nicht genau anzugeben ist. — Man dividirt in einem solchen Falle nach § 53, hängt dem Dividendus Nullen an, und setzt die Division fort; — bei irgend einer Decimalstelle stellt man die Division ein, betrachtet die Division als aufgegangen, indem man den Divisionsrest unberücksichtigt läßt, und bestimmt das Decimalkomma im Quotienten. Der auf diese Weise gefundene Quotient ist etwas zu klein; je mehr Decimalstellen aber man berechnet, desto kleiner wird der Fehler; z. B. $3,4689 : 10,7$.

Ausführung: $10,7 \mid 3,46890000 \mid 324196$

$$\begin{array}{r}
 321 \\
 \hline
 258 \\
 214 \\
 \hline
 449 \\
 428 \\
 \hline
 \text{1ster Rest} = 210 \\
 107 \\
 \hline
 \text{2ter Rest} = 1030 \\
 963 \\
 \hline
 \text{3ter Rest} = 670 \\
 642 \\
 \hline
 28.
 \end{array}$$

Also $3,4689 : 10,7 = 0,324196 \dots$

Hätte man die Division mit der dritten Stelle im Quotienten abgebrochen, so würde der Divisor (10,7) mit dem gefundenen Quotienten = 0,324 multiplicirt, noch nicht den ganzen Dividendus geben, weil ein Rest = 21 nachblieb. Also würde 0,324 zu klein, dagegen 0,325 zu groß sein. Da nun $0,325 - 0,324 = 0,001$, so würde der begangene Fehler kleiner sein als 0,001. — Setzt man dem Dividendus eine Null an, und fährt in der Division fort, so erhält man im Quotienten eine Stelle mehr, und hat statt des vorhergehenden Quotienten den neuen = 0,3241 mit einem Divisionsreste = 103. Dieser Quotient ist ebenfalls zu klein, dagegen 0,4242 zu groß. Da nun $0,3242 - 0,3241 = 0,0001$, so ist der Fehler kleiner als 0,0001. Setzt man die Division noch weiter fort, so kann man auf dieselbe Art zeigen,

daß der Fehler in dem Quotienten = 0,32419 kleiner als 0,00001 und beim Quotienten 0,324196 kleiner als 0,000001 geworden wäre.

Bei einer nicht aufgehenden Division von Decimalbrüchen wird immer angegeben, auf wie viel Decimalstellen der Quotient zu entwickeln ist, und dieses hängt davon ab, mit welchem Grade der Genauigkeit man den Quotienten in einem bestimmten Falle zu erhalten wünscht.

Daß ein Decimalbruch nicht ganz genau, sondern nur annähernd richtig ausgedrückt ist, pflegt man durch einige an seine Decimalstellen gereihte Punkte anzudeuten; z. B.

$$0,426 : 0,35 = 0,1217 \dots$$

§ 55. Aufgabe. Einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung und Beweis. Jeder gewöhnliche Bruch stellt eine nicht ausgeführte Division des Nenners in den Zähler vor. — Führt man diese Division aus, so erhält man den Werth des Quotienten als Decimalbruch und hat alsdann einen gewöhnlichen Bruch durch einen Decimalbruch ausgedrückt. — Sollte man z. B. $\frac{7}{16}$ in einen Decimalbruch verwandeln, so hängt man dem Zähler eine beliebige Menge Nullen an, die als Decimalstellen zu betrachten sind, und dividirt hierauf mit dem Nenner. Die Division wird so lange fortgesetzt, bis kein Rest übrig bleibt, oder bis man eine solche Menge von Decimalstellen entwickelt hat, daß der dem Quotienten immer noch anhaftende Fehler als verschwindend klein betrachtet werden kann. Um z. B. $\frac{7}{16}$ und $\frac{13}{19}$ in Decimalbrüche zu verwandeln, hat man

$$\begin{array}{r} 16 \mid 7,0000 \mid 4375 \\ \underline{64} \\ 60 \\ \underline{48} \\ 120 \\ \underline{112} \\ 80 \\ \underline{80} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \mid 13,0000 \mid 68421 \\ \underline{114} \\ 160 \\ \underline{152} \\ 80 \\ \underline{76} \\ 40 \\ \underline{38} \\ 20 \\ \underline{19} \\ 1 \end{array}$$

daher $\frac{7}{16} = 0,4375$,
 $\frac{13}{19} = 0,68421 \dots$ mit einem Fehler, der kleiner ist
als 0,00001.

Auf diese Art findet man:

- 1) $\frac{3}{5} = 0,6$
- 2) $\frac{11}{25} = 0,44$
- 3) $\frac{13}{64} = 0,2046875$
- 4) $\frac{13}{57} = 0,2280701 \dots$
- 5) $\frac{5}{47} = 0,1063808 \dots$
- 6) $\frac{2}{3} = 0,6666 \dots$ (Periode = 6)
- 7) $\frac{7}{11} = 0,636363 \dots$ (Periode = 63)
- 8) $\frac{12}{7} = 0,518518518 \dots$ (Periode = 518)
- 9) $\frac{7}{12} = 0,583333 \dots$ (Periode = 3)
- 10) $\frac{2}{88} = 0,306818181 \dots$ (Periode = 81).

§ 56. Aus den vorstehenden Beispielen geht hervor, daß bei Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche drei Formen von Decimalbrüchen sich ergeben können.

- 1) Sie sind entweder geschlossen oder vollständig, wie in den Beispielen 1, 2 und 3;
- 2) sie sind vollständig periodisch, d. h. eine Reihe von Ziffern wiederholt sich gleich nach dem Komma in derselben Ordnung ohne Ende, wie in den Beispielen 6, 7, 8;
- 3) sie sind unvollständig periodisch, d. h. es weichen die ersten Decimalstellen von den sich regelmäßig wiederholenden Ziffern ab, wie in den Beispielen 9 und 10.

Eine Periode, d. h. eine Reihe sich stets wiederholender Ziffern, muß immer erscheinen, wenn in der Division ein Rest bleibt, der schon einmal dagewesen. Hätten wir z. B. $\frac{5}{7}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln, so können nur folgende Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6 nachbleiben. Nach 6 Divisionen, die 6 Decimalstellen geben, muß bei der 7ten Division einer der Reste erscheinen, der schon einmal da war, und von diesem an müssen bei fortgesetzter Division die Ziffern im Quotienten sich wiederholen, die dann die Periode geben. Hieraus folgt der Satz: jede Periode muß wenigstens eine Stelle weniger haben als der Nenner des gegebenen Bruches Einheiten hat.

50/2
 $\frac{50}{10} = 5$
 $\frac{10}{2} = 5$
 $\frac{20}{2} = 10$
 $\frac{20}{2} = 10$

Ein gewöhnlicher Bruch wird durch einen geschlossenen Decimalbruch nur dann ausgedrückt werden können, wenn sein Nenner nur die Factoren 2 und 5 allein, oder 2 und 5 zugleich enthält.

§ 57. Aufgabe. Einen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Auflösung und Beweis. 1) Ist der Decimalbruch ein geschlossener, so giebt man ihm seinen zugehörigen Nenner und hebt den erhaltenen Bruch, wenn es angeht, auf; z. B.

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

$$0,035 = \frac{35}{1000} = \frac{7}{200}$$

2) Soll ein vollständig periodischer Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, so nimmt man die erste Periode als Zähler und setzt als Nenner eine Zahl mit soviel Nennern geschrieben, als die Periode Stellen enthält, und hebt den Bruch dann auf; z. B.

$$0,6666\dots = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$0,727272\dots = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$$

$$0,592592\dots = \frac{592}{999} = \frac{16}{27}$$

Denn man setze z. B.

$$0,345345\dots = x,$$

und multiplicire diese Gleichung mit 1000, nemlich mit einer solchen Ordnungseinheit, die so viel Nullen hat als die Periode Stellen; dann ist

$$345,345\dots = 1000 x.$$

Subtrahirt man hiervon die erste Gleichung, so ist

$$345 = 999 x,$$

$$\text{folglich } x = \frac{345}{999} = \frac{115}{333}.$$

3) Um einen unvollständig periodischen Decimalbruch in einen gewöhnlichen zu verwandeln, multiplicire man den Decimalbruch zuerst mit einer solchen Ordnungseinheit, die ihn zu einem vollständig periodischen macht. Es sei z. B. $0,1447272\dots$ in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln, so setze man

$$0,1447272\dots = x,$$

multiplicire mit 1000, weil drei Stellen der Periode vorangehen, und man erhält $144,7272\dots = 1000 \cdot x.$

Hierauf multiplicire man noch ein Mal mit einer solchen Ordnungseinheit, daß auch eine Periode vor dem Komma zu stehen kommt. Im vorliegenden Falle ist die Ordnungseinheit = 100, weil die Periode aus 2 Stellen besteht; dadurch erhält man

$$\begin{array}{r}
 14472,7272 \dots = 100000 \cdot x \\
 \text{Nun war } 144,7272 \dots = 1000 \cdot x \\
 \hline
 \text{Subtraction } 14328 \quad = 99000 \cdot h, \\
 \text{daher } h = \frac{14328}{99000} = \frac{199}{1375}.
 \end{array}$$

also durch

Hieraus entsteht folgende praktische Regel: Man nehme den nicht periodischen Theil und eine Periode; subtrahire davon den nicht periodischen Theil, und dividire die erhaltene Zahl mit einer Zahl, die aus soviel Neunen, als die Periode Stellen, und soviel Nullen besteht, als der nicht periodische Theil Stellen hat; z. B.

$$\begin{array}{l}
 0,16666 \dots = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}; \\
 0,068181 \dots = \frac{681-6}{9900} = \frac{675}{9900} = \frac{3}{44}; \\
 0,74326326 \dots = \frac{74326-74}{99900} = \frac{74252}{99900} = \frac{18563}{24975}.
 \end{array}$$

§ 57 b. Um ein Produkt oder einen Quotienten bloß in einer bestimmten Anzahl Decimalstellen genau zu erhalten, so daß die folgenden Decimalstellen ganz unberücksichtigt und zwar schon während der Operation selbst weggelassen werden, bedient man sich der abgekürzten Multiplications- und Divisions-Methode

Die abgekürzte Multiplication.

Ites Beispiel. Das Product von $15,3427 \times 7,8196$ auf vier Decimalstellen genau anzugeben.

Auf dem gewöhnlichen Wege erhalten wir, indem wir mit der höchsten Stelle des Multiplikators anfangen:

$$\begin{array}{r}
 15,3427 \\
 7,8196 \\
 \hline
 1073989 \\
 122741 \ 6 \\
 1534 \ 27 \\
 1380 \ 843 \\
 92 \ 0562 \\
 \hline
 119,9737 \ 7692
 \end{array}$$

Also vier Decimalstellen, d. h. die rechts von dem gezogenen Striche belegenen Theile der einzelnen Partialproducte, mehr als verlangt werden! — Diese überflüssigen Stellen können sogleich weggelassen werden, wenn wir bedenken, daß die Einer des Multiplikators mit den Zehntausendstel des Multiplicandus multiplicirt zum Producte, Zehntausendstel liefern; ebenso die Zehntel des Multiplikators mit den Tausendstel des Multiplicandus; — die Hundertstel des Multiplikators mit den Hundertstel des Multiplicandus u. s. w. — immer Zehntausendstel geben werden. Nach Weglassung aller Theile, die niedriger als Zehntausendstel sind, haben wir:

$$\begin{array}{r}
 15,3427 \\
 7,8196 \\
 \hline
 1073989 = 15,3427 \times 7 \\
 122736 = 15,342 \times 0,8 \\
 1534 = 15,34 \times 0,01 \\
 1377 = 15,3 \times 0,009 \\
 90 = 15 \times 0,0006 \\
 \hline
 119,9726
 \end{array}$$

Wir sehen, daß hier ein Unterschied = 0,0011 in beiden Producten vorkommt. Diese Abweichung wird dadurch vermindert, daß man die niedrigste Ziffer jedes einzelnen Theilproductes erhöht.

$$\begin{array}{r}
 15,3427 \\
 7,8196 \\
 \hline
 1703989 \\
 122742 \\
 1534 \\
 1381 \\
 92 \\
 \hline
 119,9738
 \end{array}$$

Da nemlich beim zweiten Theilproducte $7 \times 8 = 56$ Hunderttausendstel weggeworfen werden und diese 5 Zehntausendstel + 6 Hunderttausendstel betragen, so sehen wir, daß zur niedrigsten Stelle dieses Theilproductes nicht blos 5 Zehntausendstel, sondern, weil die weggefallenden 6 Hunderttausendstel mehr als 5 betragen, $5 + 1 = 6$ Zehn-

tausendstel hinzu zu fügen sind; demnach haben wir $2 \times 8 = 16 + 6 = 22$ Zehntausendstel.

Im dritten Theilproducte haben wir $1 \times 2 = 2$ Hunderttausendstel, also keine Correctur nöthig.

Im vierten Theilproducte ist $9 \times 4 = 36$ Hunderttausendstel, daher die Correctur $= 4$.

Im fünften Theilproducte endlich, weil $3 \times 6 = 18$ Hunderttausendstel, die Correctur $= 2$.

Das auf diese Art erzielte Product ist um 1 Einheit in der vierten Stelle größer als das durch die gewöhnliche Multiplication gefundene. Wenn wir aber dort das Product bei der vierten Stelle verkürzen, so muß wegen der wegfallenden 7, in der fünften Decimalstelle, die vierte Stelle um eine Einheit erhöht werden und wir hätten dann eben so die Zahl 119,9738 erhalten.

Zweites Beispiel. $35,786989 \times 2,30507$ auf 5 Stellen genau!

35,786919	Da nur 5 Stellen verlangt werden so haben wir bei der Multiplication mit den Einern des Multiplicators bei der 5ten Stelle des Multiplicandus anzufangen und die 6te Stelle blos zur Correctur zu benutzen.
2,30507	
7157398	
1073609	
17893	
250	
82,49150	
	1) $8 \times 2 = 16 + 2$ (2 als Correctur von $9 \times 2 = 18$) $= 18$
	2) $9 \times 3 = 27 + 2$ (2 als Correctur von $8 \times 3 = 24$) $= 29$
	3) $6 \times 0 = 0$
	4) $8 \times 5 = 40 + 3$ (3 als Correctur von $6 \times 5 = 30$) $= 43$
	5) $5 \times 7 = 35 + 5$ (5 als Correctur von $7 \times 7 = 49$)

Drittes Beispiel. $0,07896 \times 3,78645$ auf 4 Decimalstellen!

Ausrechnung:

0,07896	0,07896
3,78645	3,78645
2369	23688
552	55272
62	63168
4	47378
0,2987	31584
	39430
	0,2989780020

Viertes Beispiel. $0,284673 \times 0,007658$ auf 5 Decimalstellen!

Ausrechnung.

0,284673	Die fünfte Decimalstelle enthält 100000stel. Um 100000stel zu erhalten, müssen wir die vorkommende höchste Stelle des Multiplcators nehmlich die 1000stel mit den 100stel des Multiplicandus multipliciren, also bei der zweiten Decimalstelle anfangen und die dritte Stelle zur Correctur benutzen.
0,007658	
199	
17	
1	
0,00217	

Diese Aufgabe, auf die gewöhnliche Art berechnet, giebt 0,0021800253834 als Product.

Ungeachtet der angewendeten Correctur kann doch ein Unterschied von einer oder mehreren Einheiten in der letzten Stelle vorkommen. Daher berechnet man, um diese Abweichung zu vermeiden, bei der verkürzten Multiplication immer eine Stelle mehr als die verlangte Anzahl von Decimalstellen beträgt und verwirft wieder diese Stelle nach vorgenommener Correctur.

Die abgekürzte Divisionsmethode.

Erstes Beispiel. Den Quotienten $0,847654 : 3,28962$ auf 4 Decimalstellen genau anzugeben!

3,28962	0,847654	0,2577...	Da der Divisor in seiner höchsten Stelle Einer und der Dividendus Zehntel hat, so wird die höchste Stelle des Quotienten entweder Zehntel oder Hundertstel geben, je nachdem die Ziffer des Dividendus größer oder kleiner ist als die Ziffer des Divisors. Im vorliegenden Beispiele erhalten wir, weil $8 > 3$ ist, zur ersten Stelle des Quotienten —
	6579		
	1897		
	1644		
	253		
	230		
	23		
	21		
	2		

Auf gewöhnliche Art.

3,28962	0,847654	0,25767...	Zehntel. Hieraus schließen wir, da der Quotient 4 Stellen haben soll, daß wir im Ganzen vier Mal zu dividiren haben.
	6579	54	
	1897	300	
	1644	810	
	252	4900	
	230	2734	
	22	21660	
	19	73772	
	2	478880	
	2	302734	
	176146		

Die ersten Ziffern des Divisors und Dividendus unterscheiden über die einzelnen im Quotienten zu nehmenden Ziffern; es werden daher bei den vorzunehmenden 4 Partial-Divisionen auch nur die vier ersten Ziffern des Divisors und die vier ersten Ziffern des Dividendus in Betracht kommen. — Die fünfte Ziffer des Divisors berücksichtigen wir nur zur Correctur des abzuziehenden Products aus der ersten Quotientenziffer in den Divisor. Zu dem Reste = 1897 ziehen wir keine neue Ziffer herunter, sondern werfen die vierte Stelle des Divisors weg und dividiren mit 328 in 1897, wobei wir die durch die weggelassene 4te Ziffer des Divisors nöthige Correctur berücksichtigen. Bei der dritten Partialdivision lassen wir wieder eine Ziffer des Divisors weg und dividiren mit 32 in den Rest = 253 u. s. w.

In dem auf die gewöhnliche Weise gefundenen Quotienten ist die vierte Decimalstelle um eine Einheit kleiner. Verkürzen wir aber diesen Quotienten, so erhalten wir ebenso wie vorhin 0,2577 . . .

Auflösung.

$$\begin{array}{r|l}
 0,8\ddot{6}1945 & 0,0079843 \\
 \hline
 & 7757 \\
 \hline
 & 227 \\
 & 172 \\
 \hline
 & 55 \\
 & 52 \\
 \hline
 & 3
 \end{array} = 0,00926\dots$$

Wir nehmen hier 3 Ziffern des Divisors und 4 Ziffern des Dividendus. Denn die Zehntel des Divisors in die Tausendstel des Dividendus dividirt, geben als erste Quotientenziffer Hundertstel, und weil $8 > 7$ schon Tausendstel geben werden, so sind zur Bestimmung von 5 Quotientstellen nur drei Partialdivisionen erforderlich.

Viertes Beispiel.

$$\begin{array}{r|l}
 2,78964 & 7,89435 \\
 \hline
 & 5,57928 \\
 \hline
 & 231507 \\
 & 223171 \\
 \hline
 & 8336 \\
 & 5579 \\
 \hline
 & 2757 \\
 & 2510 \\
 \hline
 & 247 \\
 & 222 \\
 \hline
 & 25 \\
 & 24 \\
 \hline
 & 1
 \end{array} = 2,82989\dots$$

Uebungsfragen.

- 1) Wie entstehen Decimalbrüche?
- 2) Wie schreibt man Decimalbrüche?
- 3) Wie werden Decimalbrüche ausgesprochen?

- 4) Welchen Einfluß haben Nullen, die dem Decimalbruche zur Rechten angehängt werden?
- 5) Wie wird ein Decimalbruch durch eine Ordnungseinheit multiplicirt?
- 6) Wie dividirt man einen Decimalbruch durch eine Ordnungseinheit?
- 7) Was versteht man unter Correctur eines Decimalbruches?
- 8) Wie bringt man Decimalbrüche auf gleiche Benennung?
- 9) Wie addirt man Decimalbrüche?
- 10) Wie werden Decimalbrüche subtrahirt?
- 11) Wie multiplicirt man Decimalbrüche?
- 12) Wie zeigt man die Richtigkeit des Verfahrens bei der Multiplication der Decimalbrüche?
- 13) Welche Regel hat man für die Division der Decimalbrüche?
- 14) Wie verwandelt man einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch?
- 15) Wie viele Arten von Decimalbrüchen giebt es?
- 16) Was versteht man unter geschlossenen, periodischen und unvollständig periodischen Decimalbrüchen?
- 17) Wie viele Stellen kann eine Periode höchstens haben?
- 18) Welche gewöhnlichen Brüche geben geschlossene Decimalbrüche?
- 19) Wie verwandelt man in einen gewöhnlichen Bruch:
 - a) einen geschlossenen Decimalbruch?
 - b) einen vollständig periodischen Decimalbruch?
 - c) einen unvollständig periodischen Decimalbruch?
- 20) Worin besteht die abgekürzte Multiplication der Decimalbrüche?
- 21) Worin besteht die abgekürzte Division der Decimalbrüche?

Von den benannten Zahlen.

§ 58. Jede benannte Zahl ist ein vielfaches der benannten Einheit (§ 4). Der bequemern Uebersicht wegen hat man die Einheit einer höhern Sorte in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt, welche Einheiten der niedrigern Sorte heißen; z. B. 1 Pud ist gleich 40 Pfund; hier ist ein Pud die höhere, und 1 Pfund die niedrigere Sorte oder Benennung. Diejenige

Zahl, welche anzeigt, wieviel Einheiten der niedrigeren Sorte eine Einheit der höhern ausmachen, heißt Reduktionszahl.

Die verschiedenen Einheiten der benannten Zahlen beziehen sich auf Maaße, Münzen und Gewichte, — wozu noch die Zeitgrößen kommen.

Die Reduktionszahlen sind abhängig von gesetzlichen Bestimmungen oder von der Gewohnheit und dem üblichen Gebrauch des bürgerlichen Geschäftslebens, weshalb auch eine Verschiedenheit in verschiedenen Staaten in Maaßen und Gewichten entstehen mußte. — Die Gesamtheit aller Maaßsysteme eines Landes bildet das metrische System desselben.

Eine benannte Zahl besteht entweder aus einer oder aus mehreren Sorten; z. B. 7 Sackhen hat nur eine Sorte; die Zahl: 6 Sackhen 2 Arschinen 13 Werschok aber drei Sorten. Jene heißt eine einförtige, diese, eine mehrförtige benannte Zahl. Die mehrförtigen Zahlen, obgleich sie Einheiten verschiedener Unterabtheilungen enthalten, betrachtet man doch nur als eine Zahl, eben so wie eine unbenannte Zahl, die mehrere Ordnungen enthält, als eine einzige Zahl betrachtet wird. — Wir besitzen in jedem Maaßsystem eigentlich ein besonderes, kleines Zahlensystem für jede einzelne Gattung benannter Zahlen. Dieses ist aber deshalb sehr mangelhaft, weil die überall gleiche Eintheilungszahl fehlt, um von einer Sorte zur andern über zu gehen und weil bei derselben Größenart in verschiedenen Ländern weder die Haupteinheiten noch die ihnen untergeordneten Eintheilungen übereinstimmen.

Für mehrförtige benannte Zahlen gelten folgende allgemeine Bestimmungen:

- 1) Die jedesmaligen höhern Benennungen stehen zur Linken der nachfolgenden kleineren Sorten, z. B. 18 Tschetwert 5 Tschetwerik 4 Garnek.
- 2) Die Zahl bei irgend einer Benennung darf nie größer sein als die zugehörige Reduktionszahl. Z. B.: Man darf nicht sagen 5 Tschetwert 9 Tschetwerik, sondern muß dafür setzen 6 Tschetwert 1 Tschetwerik, weil $9 \text{ Tschetwerik} = 8 \text{ Tschetwerik} + 1 \text{ Tschetwerik}$ d. h. $= 1 \text{ Tschetwert} + 1 \text{ Tschetwerik}$ sind.

3) Brüche dürfen nur bei der kleinsten vorkommenden Benennung erscheinen z. B. 30 Webro $6\frac{1}{2}$ Kruschen.

Ehe wir zu den Species mit benannten Zahlen übergehen, müssen wir zwei Rechnungsarten vorausschicken, die sich auf die Namensänderung der Sorten beziehen. Es sind diese: das Resolviren und Reduciren.

Unter Resolviren versteht man das Verwandeln der höhern Sorten in niedrigere; — unter Reduciren das Zurückführen niedrigerer Sorten auf höhere. Ersteres wird durch Multiplication, letzteres durch Division bewerkstelligt. Die nöthigen Reductionszahlen findet man in eigends dazu entworfenen Tabellen.

A. Das Resolviren höherer Sorten in niedrigere.

1. Ganzer Zahlen.

Hier können folgende Fälle vorkommen:

a) Man verlangt die Verwandlung einer höheren Sorte in die nächst niedrigere z. B.

1) Wie viel Pfund sind 4 Pud?

Ausrechnung. 1 Pud = 40 Pfund

folglich 4 Pud = 4 (40 Pfund) = 160 Pfund.

2) Wie viel Tschetwerik sind 14 Tschetwert?

Ausrechnung. 1 Tschetwert = 8 Tschetwerik

daher 14 Tschetwert = 14 (8 Tschetwerik) = 112 Tschetwerik.

b) Man verlangt die Verwandlung einer höhern Sorte in eine entferntere niedrigere Sorte. Z. B.

3) 4 Pud sind wie viel Solotnik?

Ausrechnung. 1 Pud = 40 Pfund; 1 Pfund = 96 Solotnik

also 40 Pfund = 40 . 96 Solotnik.

folglich 4 Pud = 4 . 40 . 96 = 15360 Solotnik.

4) 3 Werst sind wie viel Fuß?

Ausrechnung. 1 Werst = 500 Sassen; 1 Sassen = 7 Fuß

also 500 Sassen = 500 . 7 Fuß

daher 3 Werst = 3 . 500 . 7 = 10500 Fuß.

Aus der Auflösung der Aufgaben unter (a) und (b) folgt die allgemeine Regel: man resolvirt dadurch, daß man die Reductionszahl mit der Anzahl der gegebenen höhern Sorte multiplicirt.

Da es auf die Größe des Products keinen Einfluß hat, wenn man die Factoren vertauscht, so kann man z. B. bei der Verwandlung von 354 Arschinen in Werschok die Reductionszahl, welche gleich 16 ist, zum Multiplicator und 354 zum Multiplicandus machen, also

$$\begin{array}{r}
 354 \text{ Arschinen} \\
 16 \\
 \hline
 2124 \\
 354 \\
 \hline
 5664 \text{ Werschok.}
 \end{array}$$

Dieses Verfahren fördert die Rechnung, weil in der Regel die Reductionszahlen klein sind.

Wie viel sind 35 Pud in Solotnik?

$$\begin{array}{r}
 40 \\
 1400 \text{ Pfund} \\
 96 \\
 \hline
 8400 \\
 126 \\
 \hline
 134400 \text{ Solotnik.}
 \end{array}$$

e) Man verlangt endlich die Verwandlung mehrsortiger benannter Zahlen in die niedrigste Benennung z. B.

5) Wieviel Solotnik sind

3 Berkowez 5 Pud 27 Pfund 48 Solotnik?

$$\begin{array}{r}
 10 \\
 \hline
 30 \text{ Pud } \left. \vphantom{\begin{array}{l} 10 \\ \hline 30 \text{ Pud} \end{array}} \right\} + \\
 5 \\
 \hline
 35 \text{ Pud} \\
 40 \\
 \hline
 1400 \text{ Pfund } \left. \vphantom{\begin{array}{l} 10 \\ \hline 30 \text{ Pud} \\ 5 \\ \hline 35 \text{ Pud} \\ 40 \\ \hline 1400 \text{ Pfund} \end{array}} \right\} + \\
 27 \\
 \hline
 1427 \text{ Pfund} \\
 96 \\
 \hline
 8562 \\
 12843 \\
 \hline
 136992 \text{ Solotnik } \left. \vphantom{\begin{array}{l} 10 \\ \hline 30 \text{ Pud} \\ 5 \\ \hline 35 \text{ Pud} \\ 40 \\ \hline 1400 \text{ Pfund} \\ 27 \\ \hline 1427 \text{ Pfund} \\ 96 \\ \hline 8562 \\ 12843 \\ \hline 136992 \text{ Solotnik} \end{array}} \right\} + \\
 48 \\
 \hline
 137040 \text{ Solotnik.}
 \end{array}$$

Man resolvirt zuerst die höchste vorkommende Sorte in die nächst niedrigere und addirt zu dem Producte die vorkommende Menge dieser niedrigeren Sorte. Dieses Verfahren wiederholt man bei allen Unterabtheilungen bis man auf die niedrigste Benennung gekommen ist.

6) Wieviel Bogen betragen:

$$4 \text{ Ballen } 7 \text{ Rieß } 12 \text{ Buch } 10 \text{ Bogen}$$

$$\underline{10}$$

$$47 \text{ Rieß} = (4 \times 10 + 7) \text{ Rieß}$$

$$\underline{20}$$

$$958 \text{ Buch} = (47 \times 20 + 18) \text{ Buch}$$

$$\underline{24}$$

$$\underline{3832}$$

$$1917$$

$$\underline{23002} \text{ Bogen} = (958 \times 24 + 10) \text{ Bogen.}$$

II. Bruchzahlen.

Eine höhere Sorte, welche durch einen Bruch ausgedrückt ist, wird resolvirt, indem man die Reductionszahl mit dem Bruche multiplicirt. Z. B.

1) Wieviel Kruschken sind $\frac{3}{5}$ Wedro?

Auflösung. $1 \text{ Wedro} = 10 \text{ Kruschken,}$

$$3 \text{ Wedro} = 3 \cdot 10 \text{ Kruschken,}$$

$$\frac{3}{5} \text{ Wedro} = \frac{3 \cdot 10}{5} = 6 \text{ Kruschken.}$$

2) Wieviel Werschok sind $\frac{3}{4}$ Arschin?

Auflösung. $1 \text{ Arschin} = 16 \text{ Werschok,}$

$$\frac{3}{4} \text{ Arschin} = \frac{3 \cdot 16}{4} = 12 \text{ Werschok.}$$

Beim Reduciren ist es vortheilhaft, die Multiplication der Reductionszahl mit dem Bruche erst bloß anzudeuten und dann den erhaltenen Bruch aufzuheben. Z. B.

a) Wieviel Pfund sind $1\frac{1}{3}$ Pud?

Auflösung. $1\frac{1}{3} \text{ Pud} = \frac{14 \cdot 40}{15} = \frac{14 \cdot 8}{3} = 37\frac{1}{3} \text{ Pfund.}$

b) Wieviel Tschetwerik sind $\frac{5}{16}$ Tschetwert?

$$\text{Auflösung } \frac{5}{16} \text{ Tschetwert} = \frac{5 \cdot 8}{16} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \text{ Tschetwerik.}$$

c) Wie viel Pud sind $2\frac{1}{4}$ Verkowetz?

$$\text{Auflösung. } \frac{9}{4} \text{ Verkowetz} = \frac{9 \cdot 10}{4} = \frac{9 \cdot 5}{2} = 22\frac{1}{2} \text{ Pud.}$$

Sollen Brüche höherer Sorten nicht allein in die nächst niedrigere Sorte verwandelt, sondern durch alle noch vorhandenen niedrigeren Sorten ausgedrückt werden, so resolvirt man zuerst den gegebenen Bruch in die nächst niedrigere Sorte und den bei dieser vorkommenden Bruch auf gleiche Weise in die folgende Sorte u. s. w. Z. B.

3) $\frac{7}{9}$ Verkowetz, wieviel Pud, Pfund und Solotnik?

$$\text{Ausrechnung: } \frac{7}{9} \text{ Verkowetz} = \frac{10 \cdot 7 \text{ Pud}}{9} = \frac{70 \text{ Pud}}{9} = 7\frac{7}{9} \text{ Pud}$$

$$= 7 \text{ Pud} + \frac{40 \cdot 7 \text{ Pfund}}{9}; \text{ aber } \frac{40 \cdot 7}{9} \text{ Pfund} = 31\frac{7}{9} \text{ Pfund,}$$

$$\text{daher } \frac{7}{9} \text{ Verkowetz} = 7 \text{ Pud } 31\frac{7}{9} \text{ Pfund; da nun } \frac{7}{9} \text{ Pfund}$$

$$= \frac{96 \cdot \text{Solotnik}}{9} = 10\frac{2}{3} \text{ Solotnik, so ist}$$

$$\frac{7}{9} \text{ Verkowetz} = 7 \text{ Pud } 31 \text{ Pfund } 10\frac{2}{3} \text{ Solotnik.}$$

Zuweilen wird die höhere Sorte durch einen Decimalbruch ausgedrückt. Z. B.

4) 0,485 Rubel, wieviel Kopeken?

$$\text{Ausrechnung: } 0,485 \text{ Rubel} = 0,485 \cdot (100 \text{ Kopeken}) = 48,5 \text{ Kop.}$$

5) 0,78 Pud, wieviel Pfund?

$$\text{Ausrechnung: } 0,78 \text{ Pud}$$

40

31,20 Pfund.

6) 0,654 Pud, wieviel Solotnik?

$$\text{Ausrechnung: } 0,654 \text{ Pud}$$

40

26,16 Pfund

96

15696

23544

2511,36 Solotnik.

7) Wieviel Pfund und Solotnik sind 0,654 Pud?

Ausrechnung: 0,654 Pud

40

$$\frac{0,654}{40} = 26,16 \text{ Pfund} = 26 \text{ Pfund} + 0,16 \text{ Pfund}$$

96

96

144

15,36 Solotnik.

Also 0,654 Pud = 26 Pfund 15,36 Solotnik.

B. Das Reduciren niedriger Sorten in höhere.

I. Die gegebenen Zahlen sind ein sortig.

Um niedrigere Sorten auf höhere zurückzuführen, dividire man mit der Reducionszahl in die gegebene Zahl und schreibe zum Quotienten den Namen der höheren Benennung. Z. B.

1) 64 Werschok, wieviel Arschin?

Ausrechnung: 16 Werschok = 1 Arschin,

also 1 Werschok = $\frac{1}{16}$ Arschin,

64 Werschok = $\frac{64}{16} = 4$ Arschin.

2) 288 Garnet, wieviel Tschetwerik?

Ausrechnung: 8 Garnet = 1 Tschetwerik

1 Garnet = $\frac{1}{8}$ Tschetwerik

288 Garnet = $288 \cdot \frac{1}{8} = 36$ Tschetwerik.

3) 25 Kopfen, wieviel Rubel?

Ausrechnung: 100 Kopfen = 1 Rubel

1 Kopel = $\frac{1}{100}$ Rubel

25 Kopfen = $25 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{4}$ Rubel.

4) 1320 Pfund, wieviel Pud?

Ausrechnung. 40 Pfund | 1320 Pfund | 33 Pud

120

120

120.

Der Quotient 33 zeigt eigentlich an, daß 40 Pfund in 1320 Pfund, 33 mal enthalten sind; da aber 40 Pfund einem Pude gleich sind, so ist $33 \cdot (40 \text{ Pfund}) = 33 \cdot (1 \text{ Pud}) = 33 \text{ Pud}$.

Bleibt bei der Division mit der Reductionszahl ein Rest, so giebt der Quotient die Menge der Einheiten der höhern Sorte an und der Rest hat die Benennung der niedrigern Sorte, welche zur Reduction gegeben war. Dieser Rest kann als Bruch der höhern Sorte angereicht werden. Z. B.

5) 1534 Pfund, sind wieviel Fud?

$$\text{Ausrechnung: } 40 \text{ Pfund} \left| \begin{array}{r} 1534 \\ 120 \\ \hline 314 \\ 320 \end{array} \right| = 38 \text{ Fud}$$

14 Pfund.

Da aber 14 Pfund = $\frac{14}{40}$ Fud = $\frac{7}{20}$ Fud, so können wir schreiben:

$$1534 \text{ Pfund} = 38 \text{ Fud } 14 \text{ Pfund} = 38\frac{7}{20} \text{ Fud.}$$

6) 620 $\frac{7}{8}$ Arschinen, wieviel Sassen?

Ausrechnung. Auf den Bruch $\frac{7}{8}$, brauchen wir bei der Division gar keine Rücksicht zu nehmen, sondern hängen ihn wieder dem übrigbleibenden Reste unverändert an, also

$$3 \text{ Arschinen} \left| \begin{array}{r} 620 \text{ Arschinen} \\ 6 \\ \hline 20 \\ 18 \end{array} \right| = 206 \text{ Sassen}$$

2 Arschinen = $\frac{7}{8}$ Arschinen.

Mithin 620 $\frac{7}{8}$ Arschinen = 206 Sassen 2 $\frac{7}{8}$ Arschinen = 206 $\frac{3}{4}$ Sassen.

Sehr gewöhnlich ist es, den Bruch, welcher der höhern Sorte angehängt ist, in einen Decimalbruch zu verwandeln. Z. B.

7) 3746 Secunden, wieviel Minuten?

$$\text{Ausrechnung: } (3746 \text{ Secunden}) : (60 \text{ Sec.}) = 62\frac{2}{3}\% \text{ Minuten} \\ = 62,4833 \dots \text{ Minuten.}$$

Verlangt man eine einförmige Zahl nicht blos in die nächst höhere Benennung, sondern in allen entferntern höhern Sorten auszudrücken, so hat man den jedesmaligen Quotienten mit der Reductionszahl der nächst höhern Sorte zu dividiren. Z. B.

8) Wieviel Tschetwert und Tschetwerik sind 3450 Garnet?

Ausrechnung:

$$3450 \text{ Garnet} = \frac{3450}{8} = 431 \text{ Tschetwerik } 2 \text{ Garnet}$$

$$431 \text{ Tschetwerik} = \frac{431}{8} = 53 \text{ Tschetwert } 7 \text{ Tschetwerik.}$$

$$\text{also } 3450 \text{ Garnet} = 53 \text{ Tschetwert } 7 \text{ Tschetwerik } 2 \text{ Garnet.}$$

II. Die gegebenen Zahlen sind mehrsortig.

Die Reduction einer mehrsortigen Zahl kann auf drei verschiedene Arten gemacht werden.

a) Man verwandelt die niedrigste Sorte in die zunächst folgende höhere, addirt hierzu die Einheiten dieser gleichartigen höhern Sorte und wiederholt dasselbe Verfahren so oft, als es nöthig ist, um zur höchsten Sorte zu gelangen.

b) Man resolvirt den ganzen Ausdruck auf die niedrigste Sorte und dividirt dann mit dem Producte sämmtlicher vorkommenden Reductionszahlen bis zur höchsten Benennung.

c) Man reducirt jede Sorte für sich auf die verlangte höchste Sorte und addirt die einzelnen Resultate Z. B.

9) Wieviel Saschen betragen 1 Arschin $3\frac{1}{2}$ Werschok?

Ausrechnung. a) $\frac{1}{5}^6$ Werschok = $\frac{1}{5}^6 : 16 = \frac{1}{80}$ Arschin;

$$1\frac{1}{2} \text{ Arschin} = \frac{6}{5} \text{ Arschin} = \frac{6}{5} : 3 = \frac{2}{5} \text{ Saschen.}$$

b) $1 \text{ Arschin } 3\frac{1}{2} \text{ Werschok} = 19\frac{1}{2} = \frac{39}{2} \text{ Werschok.}$

Da 1 Saschen = 48 Werschok, so ist

$$\frac{39}{2} \text{ Werschok} = \frac{39}{2} : 48 = \frac{13}{32} \text{ Saschen.}$$

c) $1 \text{ Arschin} = \frac{1}{80} \text{ Saschen,}$

$$\frac{1}{5}^6 \text{ Werschok} = \frac{1}{5}^6 : 48 = \frac{1}{240} \text{ Saschen,}$$

$$\text{also erhält man } \frac{1}{80} \text{ Saschen} + \frac{1}{240} \text{ Saschen} = \frac{1}{60} \text{ Saschen.}$$

Addition benannter Zahlen.

§ 59. Da nur Gleichartiges mit einander addirt werden kann, so stellt man die Summanden so unter einander, daß die gleichen Sorten Verticalreihen bilden. Hierauf addirt man die

niedrigste Sorte, reducirt diese in die höhere, fügt das erhaltene Resultat zu den Summanden der höhern Sorte und setzt die übrigbleibenden Einheiten unter die addirten Summanden. Dieses Verfahren wird bei jeder Verticalreihe wiederholt. 3. B.

3 Berkowez 7 Pud 28 Pfund 91 Solotnik + 15 Berkowez
8 Pud 37 Pfund 87 Solotnik + 7 Berkowez 6 Pud 27 Pfund
60 Solotnik + 17 Berkowez 5 Pud 29 Pfund 78 Solotnik.

Ausrechnung.

3 Berkowez	7 Pud	28 Pfund	91 Solotnik
15 "	8 "	37 "	87 "
7 "	6 "	27 "	60 "
17 "	5 "	29 "	78 "
$\underline{\quad 2}$	$\underline{\quad 3}$	$\underline{\quad 3}$	

44 Berk.	10	29	2	40	124	3	96	316	3
		20			120			288	

9 Pud 4 Pfund 28 Solotnik.

Die Summe der Solotnik beträgt 316, und diese geben 3 Pfund 28 Solotnik. Es werden also 3 Pfund zu den Pfunden addirt und die übrigbleibenden Solotnik unter den Solotnik bemerkt. Ferner ist die Summe bei den Pfunden mit Einschluß der von den Solotnik herübergenommenen 3 Pfund = 124 Pfund = 3 Pud 4 Pfund. — Es werden die 4 Pfund unter der Columne der Pfunde bemerkt, und der Quotient 3 zu den Pudenz gezählt. — Die Summe der Pude ist = 29 Pfund = 2 Berkowez 9 Pud. — Zählen wir die 2 Berkowez zu den Berkowez der Summanden, so ist die Totalsumme

44 Berkowez 9 Pud 4 Pfund 28 Solotnik.

Kommen bei der niedrigsten Sorte Brüche vor, so fängt man die Addition bei diesen an; 3. B.

1) 8 Saschen 2 Arschin $3\frac{1}{2}$ Werschof + 7 Saschen 1 Arschin $15\frac{1}{4}$ Werschof + 17 Saschen 2 Arschin $14\frac{3}{8}$ Werschof + 16 Saschen 1 Arschin $12\frac{1}{8}$ Werschof.

Ausrechnung.

			16
8 Sackchen	2 Arschin	$3\frac{1}{2}$ Werschok	8
7 " "	1 " "	$15\frac{3}{4}$ "	12
17 " "	2 " "	$14\frac{5}{8}$ "	10
16 " "	1 " "	$12\frac{1}{16}$ "	15
$\underline{\quad 2}$	$\underline{\quad 2}$	$\underline{\quad 2}$	

$$50 \text{ Sackchen} \quad 3 \mid 8 \mid 2 \quad 16 \mid 46 \mid 2 \quad \frac{45}{16} = 2\frac{9}{16}.$$

$$\qquad \qquad \qquad \underline{\quad 6} \qquad \qquad \qquad \underline{\quad 32}$$

2 Arschin $14\frac{1}{16}$ Werschok.

Die Addition der Brüche giebt $2\frac{9}{16}$ Werschok; also sind im Ganzen $46\frac{1}{16}$ Werschok. Man reducirt jetzt 46 Werschok und fügt zum Reste 14 den Bruch $\frac{1}{16}$ hinzu. Auf gleiche Weise verfährt man bei den folgenden höheren Sorten.

2) 8 Stunden 30 Minuten 15,06 Secunden + 18 Stunden 45 Minuten 47,98 Secunden + 21 Stunden 27 Minuten 38,65 Secunden + 18 Stunden 14 Minuten 54,8 Secunden.

Ausrechnung.	8 Stunden	30 Minuten	15,06 Secunden
	18 "	45 "	47,98 "
	21 "	27 "	38,65 "
	18 "	14 "	54,8 "
	65	116	156,49
	"	"	"

Totalsumme = 66 Stunden 58 Minuten 36,49 Secunden.

Subtraction benannter Zahlen.

§ 60. Die hier vorkommenden Fälle sind folgende:

a) Jede Sorte des Minuendus ist größer als die entsprechende des Subtrahendus; z. B.

(Minuendus) 7 Tschetwert 5 Tschetwert 7 Garnez

(Subtrahendus) 3 " 2 " 6 "

(Rest) 4 Tschetwert 3 Tschetwert 1 Garnez.

b) Einige oder alle Sorten des Subtrahendus, ausgenommen die höchste Sorte, sind größer als die entsprechenden des

Minuendus; z. B. 18 Berkowez 2 Pud 30 Pfund 15 Solotnik
 — (7 Berkowez 8 Pud 18 Pfund 90 Solotnik).

Man setzt dafür:

17 Berkowez	12 Pud	29 Pfund	111 Solotnik
7 " "	8 " "	18 " "	90 " "
Rest 10 Berkowez	4 Pud	11 Pfund	21 Solotnik.

Da 90 Solotnik von 15 Solotnik nicht zu subtrahiren sind, so borgt man bei der nächst höhern Sorte, d. h. bei den Pfunden — eine Einheit, und zählt, weil 1 Pfund = 96 Solotnik, diese 96 Solotnik zu den schon vorhandenen 15 Solotnik, wodurch sich ergibt $(96 + 15)$ Solotnik = 111 Solotnik, und hat jetzt zum Reste $(111 - 90)$ Solotnik = 21 Solotnik. — Bei den Pfunden war 1 Pfund geborgt, daher haben wir $(29 - 18)$ Pfund = 11 Pfund. — Ferner borgt man 1 Berkowez = 10 Pud, und hat dann $12 - 8 = 4$ Pud u. s. w.

c) Es fehlen im Minuendus einige niedere Sorten, z. B. 5 Werst — Saschen — Arschin 11 Werschok — (1 Werst 374 Saschen 2 Arschin 14 Werschok).

Man hat hier

4 Werst	499 Saschen	2 Arschin	27 Werschok
1 " "	375 " "	2 " "	14 " "
3 Werst	125 Saschen		13 Werschok.

Da 14 Werschok von 11 Werschok nicht zu subtrahiren sind, so geht man, weil Arschin und Saschen fehlen, sogleich zu den Wersten, resolvirt eine Werst in die nächst niedrigere Sorte, d. h. in 500 Saschen; nimmt von diesen eine Saschen weg, und resolvirt diese zu 3 Arschin; — endlich borgt man von diesen 1 Arschin, — die in 16 Werschok resolvirt und zu den schon vorhandenen 11 Werschok hinzu addirt werden, dann erhalten wir im Rest: $(27 - 14)$ Werschok = 13 Werschok; $(2 - 2)$ Arschin = 0 Arschin; $(499 - 374)$ Saschen = 125 Saschen; $(4 - 1)$ Werst = 3 Werst.

Kommen Brüche oder Decimalbrüche vor, so subtrahirt man diese zuerst, und dann die verschiedenen Sorten. z. B.

1)	3 Werst	150 Saschen		$10\frac{1}{4}$ Werschok
	1 "	375 "	1 Arschin	$14\frac{7}{8}$ "
<hr/>				
	1 Werst	274 Saschen	1 Arschin	$11\frac{3}{8}$ Werschok.
2)	18 Tschetwert	5 Tschetwerik	3,47	Garnez
	6 "	7 "	4,19	"
<hr/>				
	11 Tschetwert	5 Tschetwerik	7,28	Garnez.

Die Zeitrechnung.

§ 61. Das Messen der Zeiträume oder Zeitgrößen heißt die Zeitrechnung, und die dabei verwendete Einheit die Zeiteinheit oder das Zeitmaaß. — Wir messen die Zeit durch Zeiträume, welche durch gewisse Erscheinungen am Himmel begrenzt sind, namentlich durch die regelmäßige Bewegung des Mondes und der Sonne.

Der einmalige Umschwung der Erde um ihre Achse giebt einen Zeitraum von stets gleicher Dauer. Diesen Zeitraum nennt man im gemeinen Leben Tag und Nacht. Er ist das Grundmaaß der Zeit, und aus ihm werden die andern Maaße hergeleitet. Man theilt ihn ein in 24 Stunden, jede Stunde in 60 Minuten und eine Minute in 60 Secunden. Der Auf- und Untergang der Sonne theilt diesen Zeitraum in zwei Theile von nicht immer gleicher Dauer, und hieraus entstehen die vier Tageszeiten, Morgen, Mittag, Abend und Mitternacht.

Der Anfang eines Tages wird auf Mitternacht gesetzt, und von da an werden bis zum Mittage 12 Stunden gezählt; ebenso wieder vom Mittage bis zur Mitternacht 12 Stunden.

Die Zeit, in welcher die Erde ihren Lauf um die Sonne vollendet, wird ein Jahr genannt. Die Bestimmung der Länge eines Jahres war in den ältesten Zeiten ungenau, indem man diesen Zeitraum = 365 Tagen setzte. — Julius Cäsar verbesserte im Jahre 45 vor Christi Geburt diese Zeitrechnung dahin, daß er das Jahr = $365\frac{1}{4}$ Tage setzte. Weil aber die bürgerlichen Verhältnisse es nothwendig machen, daß der Anfang eines Jahres immer mit dem Anfange eines Tages zusammenfalle, so bestimmte

er, daß drei aufeinander folgende Jahre 365 Tage, und das vierte ein Schaltjahr 366 Tage haben sollte. Auf diese Art glaubte er das astronomische Jahr mit dem bürgerlichen in Uebereinstimmung zu bringen.

Das Jahr wird in zwölf Monate getheilt, die aber eine ungleiche Anzahl Tage haben, bald 30, bald 31, und im Monate Februar 28 oder 29 Tage, je nachdem das zugehörige Jahr ein gemeines von 365 Tagen oder ein Schaltjahr von 366 Tagen ist. — Die auf einander folgenden Monate mit ihrer Tagezahl sind folgende: Januar (31), Februar (28), März (31), April (30), Mai (31), Juni (30), Juli (31), August (31), September (30), October (31), November (30), December (31).

Alle christlichen Völker zählen die Jahre von der Geburt Jesu Christi, und beziehen eine Thatsache auf diesen Zeitpunkt durch die Angabe, wieviel Jahre, Monate, Tage vor oder nach Christi Geburt vorkommen. Diese Angabe in Jahren, Monaten und Tagen nennt man das Datum der Begebenheit.

Ein Verzeichniß aller einzelnen in Wochen und Monaten an einander gereihten Tage eines Jahres heißt der Calendar.

Dem in Rußland gebräuchlichen julianischen Calendar liegt die Annahme zu Grunde, daß das Jahr genau $365\frac{1}{4}$ Tage enthalte. Die eigentliche Jahreslänge beläuft sich auf 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 47,8 Secunden; mithin rechnet man beim Einschalten eines Tages in jedem 4ten Jahre statt 5 Stunden 48 Minuten 47,8 Secunden, — 6 volle Stunden, — also jedes Mal 11 Minuten 12,2 Secunden zu viel. — Wegen dieses Fehlers stimmte die bürgerliche Zeitrechnung nicht genau mit den Erscheinungen am Himmel überein.

Im Jahre 1582 nach Chr. betrug der Fehler bereits 10 Tage; deshalb ordnete Papst Gregor XIII. an, die zu viel gerechneten Tage wegzulassen und nach Donnerstag den 4. October, ohne Unterbrechung im Laufe der Wochentage, sogleich Freitag, den 15. October zu schreiben, und setzte fest, daß

- 1) jedes vierte Jahr ein Schaltjahr sein, daß aber
- 2) das letzte oder hundertste Jahr eines Jahrhunderts, dessen Jahreszahl nicht durch 400 theilbar ist, ein gemeines Jahr von 365 Tagen bleiben sollte.

Jedes Jahr, dessen Jahreszahl durch 4 ohne Rest theilbar ist, ist ein Schaltjahr.

Nach der zweiten Bestimmung werden in 4 Jahrhunderten nach dem gregorianischen Kalender 3 Tage weniger eingeschaltet, als es nach dem julianischen geschieht. Freilich ist auch der gregorianische Kalender nicht absolut genau, aber ein Fehlen von einem ganzen Tage kann erst nach Verlauf von ungefähr 3450 Jahren eintreten. — Diesemnach waren seit Einführung des gregorianischen Kalenders die Jahre 1700, 1800 gemeine Jahre, und es differirt die julianische Zeitrechnung vom 1sten März 1700 an mit der gregorianischen Zeitrechnung um 11 Tage, und vom 1sten März 1800 an um 12 Tage.

Der julianische Kalender wird auch der alte, und der gregorianische der neue Styl genannt.

Das Datum bestimmt nicht die von Christi Geburt an verflossene Zeit, sondern giebt bloß an, in welchem Monate und Tage eines gewissen Jahres eine Begebenheit sich zugetragen hat oder zutragen wird.

Diese Kalender-Angabe müssen wir in die wirklich verflossene Zeit umsetzen; z. B. wieviel Jahre, Monate und Tage waren verflossen, als man schrieb den 15. April 1846?

Auflösung. Man lebte im Jahre 1846, also waren verflossen 1845 Jahre; der April ist der vierte Monat des 1845sten Jahres, also waren verflossen 3 Monate; — der 15te Tag des April zeigt, daß 14 Tage verflossen waren. Die wirklich verflossene Zeit ist demnach:

1845 Jahre 3 Monate 14 Tage.

Die wirklich verflossene Zeit erhält man also in Jahren, Monaten und Tagen ausgedrückt, wenn man von jedem dieser Zeiträume, wie sie das Datum anführt, 1 subtrahirt.

Rückwärts wird aus der verflossenen Zeit das Datum in Jahren, Monaten und Tagen ausgedrückt, wenn man jedem dieser Zeiträume 1 hinzu addirt, und dann den Namen des Monats statt der für denselben erhaltenen Ordinalzahl setzt; z. B. als 1784 Jahre 4 Monate und 16 Tage

verfloßen waren, schrieb man das Datum: im Jahre 1785 den 17ten Tag des 5ten Monats. — Der 5te Monat heißt aber Mai, daher

im Jahre 1785 den 17ten Mai.

Die kleinere Zeitabtheilung, als: Stunden, Minuten und Secunden werden als verfloßene Zeiten im Datum angegeben, wobei die Stunden von Mitternacht eines jeden Tages gezählt werden. Wenn es z. B. heißt: um 10 Uhr 18 Minuten 50 Secunden Vormittags, so sind an dem laufenden Tage wirklich 10 Stunden 18 Minuten 50 Secunden verfloßen.

Bei der Zeitrechnung haben wir drei Aufgaben zu lösen:

- I. Es ist gegeben: der Anfang und das Ende, man sucht die Dauer,
- II. " " " das Ende " die Dauer, " " den Anfang,
- III. " " " die Dauer " der Anfang, " " das Ende.

Die Aufgaben (I) und (II) werden durch Subtraction und die Aufgabe (III) durch Addition aufgelöst.

I. Berechnung der Dauer.

a) Jemand war geboren im Jahre 1765 den 23ten December um 6 Uhr 15 Minuten Abends, und starb 1824 den 15ten November um 8 Uhr 20 Minuten Morgens; wie alt war er?

Ausrechnung.

1823 Jahre	10 Monate	14 Tage	8 Stunden	20 Minuten	
1764	" 11	" 22	" 18	" 15	"

58 Jahre 10 Monate 22 Tage 14 Stunden 5 Minuten.

Erklärung. Zuerst werden die beiden Data in die wirklich verfloßene Zeit umgesetzt. Die Subtraction der Minuten und Stunden geschieht ganz gewöhnlich. Bei den Tagen muß man einen Monat borgen, d. h. den 10ten des laufenden Jahres, also den

Monat October, der 31 Tage hat, folglich haben wir da $(31 + 13)$ Tage = 44 Tage; — $(44 - 22)$ Tage = 22 Tage.

b) Jemand starb im Jahre 1840 den 15. März um 5 Uhr Abends, und war geboren den 16ten September 1802 um 4 Uhr 15 Minuten Morgens; in welchem Alter?

Ausrechnung.

1839	Jahre	2	Monate	14	Tage	17	Stunden	
1801	"	8	"	15	"	4	"	15 Minuten
37	"	5	"	28	"	12	"	45 "

Hier muß ein Monat zu Tagen gemacht werden. Da es der zweite Monat des laufenden 1840sten Jahres, also eines Schaltjahres, ist, so zählen wir 29 Tage zu den schon vorhandenen 14 Tagen hinzu. Die Subtraction der übrigen Zeitabtheilungen erfolgt nach bekannten Regeln.

c) Wer am 1sten März 1827 um 5 Uhr Abends starb und am 31sten October 1785 um 3 Uhr Morgens geboren war, hatte ein wie hohes Alter erreicht?

Ausrechnung.

1826	Jahre	2	Monate	17	Stunden	
1784	"	9	"	30	Tage	3 "
41	"	3	"	28	"	14 "

Bei den Monaten ist zu borgen. — Da man aber den 2ten Monat des 1827sten Jahres borgt, und dieser nur 28 Tage hat, so kann die Subtraction nicht vollzogen werden, und wir müssen den Januar noch hinzunehmen, dann sind aber $(28 + 31) = 59$ Tage im Minuendus; mithin ist der Rest = $(59 - 30) = 29$ Tage. Bei den Monaten finden wir $(12 - 9)$ Monate = 3 Monate, weil die 2 Monate des Minuendus geborgt und in Tage resolvirt sind.

II. Berechnung des Anfanges.

Im Jahre 1846 den 15ten April um 5 Uhr Abends hatte Jemand ein Alter von 48 Jahren 9 Monaten 27 Tagen 18 Stunden erreicht, wann war er geboren?

Ausrechnung.

1845	Jahre	3	Monate	14	Tage	17	Stunden
48	"	9	"	27	"	18	"
<hr/>							
1796	"	5	"	17	"	23	"

Man schreibt die bis zum angegebenen Moment verflossene Zeit hin und subtrahirt davon das gegebene Alter. Beim Vorgehen der Monate hat man sich nach der unter (I) gegebenen Anweisung zu richten. Die Antwort heißt nun: bei der Geburt waren seit Christi Geburt verflossen 1796 Jahre 5 Monate 17 Tage 23 Stunden, demnach fiel die Geburt

auf den 18ten Juni 1797 um 11 Uhr Mitternacht.

III. Berechnung des Endes.

a) Jemand war geboren 1808 den 6ten December um 10 Uhr Abends; wann wird er 65 Jahre 9 Monate 28 Tage 16 Stunden alt sein?

Ausrechnung.

1807	Jahre	11	Monate	5	Tage	22	Stunden
65	"	9	"	28	"	16	"
<hr/>							
1872	"	20	"	34	"	38	"
also 1873	"	9	"	4	"	14	"

Die Stunden reducirt man sogleich. — Die Summe der Tage, = 34 Tage, kann erst dann reducirt werden, wenn man weiß, welcher Monat des laufenden Jahres zu den Monaten hinzuzufügen ist, deshalb reduciren wir zuerst die Monate. Aus dem zurückbleibenden Reste = 8 Monate sehen wir, daß der 9te Monat, d. h. der September von 30 Tagen, hinzukommen muß; deshalb nehmen wir diese 30 Tage weg. Es sind also verflossen 1873 Jahre 9 Monate 4 Tage 14 Stunden, daher das gesuchte Datum heißt

1874 den 5ten October, 2 Uhr Nachmittags.

b) Jemand war geboren im Jahre 1811 den 30sten April um 5 Uhr Morgens; wann war er 20 Jahre 10 Monate 30 Tage 22 Stunden alt?

Ausrechnung.

	1810	Jahre	3	Monate	29	Tage	5	Stunden
	20	"	10	"	30	"	22	"
	1830	"	13	"	59	"	27	"
also	1831	"	3	"	—	"	3	"

Die Summe der Stunden und der Monate kann ohne Weiteres reducirt werden. Es sind 59 Tage 27 Stunden = 60 Tage 3 Stunden. — Die 60 Tage gehören dem 1832sten Jahre an. Da nun 1 Monat in diesem Jahre verflossen, und dasselbe ein Schaltjahr ist, so nehmen wir von 60 Tagen zuerst die Tagezahl des Februar-Monats, d. h. 29 Tage, weg. — Die dann übrigbleibenden 31 Tage geben den Monat März, also bleiben 0 Tage zurück, und es kommen zu den Monaten des 1832sten Jahres noch der 2te und 3te Monat hinzu; folglich ist das gesuchte Datum

1832 den 1sten April um 3 Uhr Morgens.

Multiplication benannter Zahlen.

§ 62. Bei einem einfortigen Multiplicandus reduciren wir das erhaltene Product auf die nächst höhere Sorte oder auf alle vorhandenen höhern Sorten; z. B.

1) Wieviel sind 95 Solotnik 138 mal?

Ausrechnung. $95 \text{ Solotnik} \times 138 = 13110 \text{ Solotnik}$
 $= 136 \text{ Pfund } 54 \text{ Solotnik}$
 $= 3 \text{ Pud } 16 \text{ Pfund } 54 \text{ Solotnik.}$

2) Wieviel sind $18\frac{3}{4}$ Werschok $\times 125$?

Ausrechnung.
 $18\frac{3}{4} \text{ Werschok} \times 125 = 2343\frac{3}{4} \text{ Werschok;}$
 $= 146 \text{ Arschin } 7\frac{3}{4} \text{ Werschok}$
 $= 48 \text{ Sakschen } 2 \text{ Arschin } 7\frac{3}{4} \text{ Werschok.}$

3) Wieviel sind (75,25 Minuten) $\times 53$?

Ausrechnung.
 $75,25 \text{ Minuten} \times 53 = 3988,25 \text{ Minuten}$
 $= 66 \text{ Stunden } 28,25 \text{ Minuten}$
 $= 2 \text{ Tage } 18 \text{ Stunden } 28,25 \text{ Minuten.}$

Ist der Multiplicandus mehrsortig, so resolvirt man ihn auf die niedrigste Sorte, multiplicirt mit dem gegebenen Multiplicator, und reducirt dann wieder auf alle höhern Sorten; z. B.

$$(4 \text{ Pud } 39 \text{ Pfund } 92 \text{ Solotnik}) \times 4$$

Ausrechnung. $4 \text{ Pud } 39 \text{ Pfund } 92 \text{ Solotnik} = 19196 \text{ Solotnik};$
 $19196 \text{ Solotnik} \times 4 = 76784 \text{ Solotnik} = 19 \text{ Pud}$
 $39 \text{ Pfund } 80 \text{ Solotnik. —}$

Im Allgemeinen ist dieses Verfahren umständlich; ein anderes, meist einfacheres Verfahren besteht in der Multiplication jeder einzelnen Sorte mit dem Multiplicator, nehmlich:

4 Pud	39 Pfund	92 Solotnik
4	4	4
-----	-----	-----
16 Pud	156 Pfund	368 Solotnik.

Wenn man jetzt reducirt, so geben 368 Solotnik überhaupt 3 Pfund 80 Solotnik. Addiren wir die 3 Pfund zu den schon vorhandenen 156 Pfund, so erhalten wir 159 Pfund = 3 Pud 39 Pfund, und endlich die 3 Pud zu den 16 Pud hinzugesetzt, geben 19 Pud, also das gesuchte Product

$$= 19 \text{ Pud } 39 \text{ Pfund } 80 \text{ Solotnik.}$$

Ist gegeben: (5 Werst 370 Saschen 2 Arschin $15\frac{1}{2}$ Werschok) $\times 14$, so erhält man zunächst

80 Werschok 5180 Saschen 28 Arschinen $220\frac{1}{2}$ Werschok;
 also nach ausgeführter Reduction

$$80 \text{ Werschok } 193 \text{ Saschen } 2 \text{ Arschinen } 12\frac{1}{2} \text{ Werschok.}$$

Ist gegeben: (1 Grad 54 Minuten 56,31 Secunden) $\times 49$, so giebt die Multiplication der einzelnen Sorten zuerst

$$49 \text{ Grad } 2646 \text{ Minuten } 2759,19 \text{ Secunden.}$$

Hieraus erhält man durch Reduction

$$93 \text{ Grad } 51 \text{ Minuten } 59,19 \text{ Secunden.}$$

Ist der Multiplicator ein Bruch, eine gemischte Zahl oder ein Decimalbruch, so können wir dasselbe Verfahren anwenden; wir werden aber in den meisten Fällen für jede Sorte eine ganze Zahl und einen Bruch bekommen. Diese Brüche sind dann durch Resolviren in die niedrigern Sorten wegzuschaffen; z. B. wieviel erhält man, wenn 17 Tage 18 Stunden 41 Minuten $1\frac{1}{3}$ mal genommen werden?

Ausrechnung. Die Multiplication mit 15 giebt
255 Tage 270 Stunden 615 Minuten.

Dieses durch 8 dividirt, giebt
 $31\frac{7}{8}$ Tage $33\frac{3}{4}$ Stunden $76\frac{7}{8}$ Minuten.

Da nun $\frac{7}{8}$ Tage = $24\frac{7}{8}$ Stunden = 21 Stunden, und
 $\frac{3}{4}$ Stunden = $60\cdot\frac{3}{4}$ Min. = 45 Min. sind, so haben wir eigentlich:
31 Tage 54 Stunden $121\frac{7}{8}$ Minuten.

Nun sind $121\frac{7}{8}$ Minuten = 2 Stunden $1\frac{7}{8}$ Minuten; —
die 2 Stunden zu 54 Stunden addirt und hierauf reducirt, geben
2 Tage 8 Stunden; — endlich werden die 2 Tage zu 31 Tagen
addirt, und wir haben

33 Tage 8 Stunden $1\frac{7}{8}$ Minuten.

Einfacher wird die Rechnung im vorliegenden Fall, wenn
man den ganzen Multiplicandus erst auf Minuten resolvirt, mit
 $\frac{15}{8}$ multiplicirt und dann reducirt,nehmlich:

17 Tage 18 Stunden 41 Minuten

24

86

34

426 Stb.

60

25601 Minuten

15

128005

25601

8 | 384015 Minuten | 48001 $\frac{7}{8}$ Minuten | $\frac{60}{800}$ Stunden | $\frac{24}{33}$ Tage.

Rest = 7

Rest = $1\frac{7}{8}$ Min.

Rest = 8 Stb.

Also ist das Product = 33 Tage 8 Stunden $1\frac{7}{8}$ Minuten.

§ 63. Die Aufgabe, aus dem Werthe der Einheit den
Werth einer bestimmten Menge gleichnamiger Dinge durch Mul-
tiplication zu finden, erweitern wir jetzt dahin, aus dem Werthe
der Einheit den Werth einer beliebigen Zahl gleichartiger,
aber nicht gleichnamiger Dinge zu finden. Z. B. wenn 1 So-
lotnik 2 Ropelen kostet, wie theuer sind 3 Pfund 58 Solotnik?

Diese Aufgabe wird auf die frühere zurückgeführt, wenn
wir die Zahl, deren Werth gesucht wird, auf ein Viel-

faches der Einheit bringen, deren Werth gegeben ist. Da nun 3 Pfund 58 Solotnik = 346 Solotnik, so haben wir:

1 Solotnik kostet 2 Kopfen, also

346 Solotnik kosten 346 · 2 Kopfen = 6 Rubel 92 Kop.

Wir bemerken, daß aus einer solchen Aufgabe 2 Gleichungen sich bilden lassen. Die erste drückt den Werth der Einheit aus, und die zweite den Werth eines Vielfachen derselben Einheit; z. B. wenn 1 Arschin mit 2 Rubel 45 Kopfen bezahlt wird; wie theuer sind 5 Arschin?

1 Arschin..... 2 Rubel 45 Kop.; 5 Arschin..... x Kop.?

Diesen Ansatz lesen wir: 1 Arschin hat den Werth von 2 Rubel 45 Kopfen; welchen Werth haben 5 Arschin? — Offenbar muß der gesuchte Werth von 5 Arschin 5 mal größer sein, also

$$x = (2 \text{ Rubel } 45 \text{ Kopfen}) \times 5 = 12 \text{ Rubel } 25 \text{ Kopfen.}$$

Aus nachfolgenden Beispielen wird das übliche Verfahren hinlänglich erhellen.

1) 1 Garnetz kostet $12\frac{1}{2}$ Kopfen; wie theuer 8 Tschetwert 4 Tschetwerik 2 Garnetz?

Ausrechnung.

Es sind 8 Tschetwert 4 Tschetwerik 2 Garnetz = 546 Garnetz.

Da 1 Garnetz kostet $\frac{2}{2}^5$ Kopfen, so müssen

$$\begin{aligned} 546 \text{ Garnetz kosten } \frac{2}{2}^5 \times 546 &= 6825 \text{ Kopfen} \\ &= 68 \text{ Rubel } 25 \text{ Kopfen.} \end{aligned}$$

2) Für 1 Rubel erhält man 2 Arschin $15\frac{1}{2}$ Werschof: wieviel für $5\frac{3}{4}$ Rubel?

Ausrechnung.

Es sind 2 Arschin $15\frac{1}{2}$ Werschof = $\frac{2}{2}^5$ Werschof

Für 1 Rubel kauft man $\frac{2}{2}^5$ Werschof,

$$\begin{aligned} \text{Für } 5 \text{ Rubel kauft man } \frac{2}{2}^5 \times 5\frac{3}{4} &= 273\frac{1}{4} \text{ Werschof} \\ &= 17 \text{ Arschin } 1\frac{1}{4} \text{ Werschof.} \end{aligned}$$

3) Für 1 Tag zahlt man an Arbeitslohn 1 Rubel 40,5 Kopfen; wieviel für 3 Wochen 5,75 Tage?

Ausrechnung.

Es sind 3 Wochen 5,75 Tage = 23,75 Tage.

Für einen Tag zahlt man 140,5 Kopelen, also

für 23,75 Tage zahlt man $140,5 \times 23,75$ Kopelen = 33 Rubel
36,875 Kopelen.

Das Verfahren, aus dem Werthe der Einheit den Werth des
Vielfachen zu bestimmen, heißt die Multiplications-Regel =
detri.

Division benannter Zahlen.

§ 64. Die Division bezweckt ein Theilen oder ein Messen (§ 14). — Bei benannten Zahlen wird die Aufgabe durch die Beschaffenheit des Divisors näher bestimmt. Ist der Divisor eine unbenannte Zahl, so muß der Quotient mit dem Dividendus gleichnamig werden; ein benannter Divisor giebt zum Quotienten eine abstracte Zahl.

Divisionsaufgaben im Sinne des Theilens.

1) Wie groß ist der 4te Theil von 8 Rubel 28 Kopelen?

Ausrechnung. Der 4te Theil von 8 Rubel ist $= (8 \text{ Rubel}) : 4$
 $= 2 \text{ Rubel}$, und der 4te Theil von 28 Kopelen $= (28 \text{ Kop.}) : 4$
 $= 7 \text{ Kopelen}$, daher zusammen 2 Rubel 7 Kopelen.

2) Wie groß ist der 5te Theil von 40 Pud 30 Pfund 25 Solotnik?

Ausrechnung.

$$40 \text{ Pud} : 5 = 8 \text{ Pud}$$

$$30 \text{ Pfund} : 5 = 6 \text{ Pfund}$$

$$25 \text{ Solotnik} : 5 = 5 \text{ Solotnik}$$

daher $(40 \text{ Pud } 30 \text{ Pfund } 25 \text{ Solotnik}) : 5 = 8 \text{ Pud } 6 \text{ Pfund}$
 5 Solotnik.

Wir dividiren jede einzelne Sorte mit dem Divisor, und verbinden die einzelnen Quotienten zu einer mehrsortigen benannten Zahl.

Geht der Divisor in einer Sorte des Dividendus nicht auf, so muß der übrigbleibende Rest in die nächst niedrigere Sorte resolvirt, — hierzu die im Dividendus vorkommende gleichnamige Sorte addirt, und dann mit dem Divisor weiter dividirt werden; z. B.

3) 44 Fud 15 Pfund 20 Solotnik durch 5 zu dividiren.

Ausrechnung. $44 \text{ Fud} : 5 = 8 \text{ Fud}$ mit einem Reste = 4 Fud. — Diese 4 Fud geben 4 . (40 Fud) = 160 Pfund, und hierzu die 15 Pfund gezählt, 175 Pfund. — Nun ist $(175 \text{ Pfund}) : 5 = 35 \text{ Pfund}$ und endlich $(20 \text{ Solotnik}) : 5 = 4 \text{ Solotnik}$; daher der gesuchte Quotient = 8 Fud 35 Pfund 4 Solotnik.

Für die Division mehrfortiger benannter Zahlen haben wir daher folgende Regel:

Man theile die höchste Benennung zuerst; bleibt ein Rest, so resolvire man ihn in die nächst niedrigere Sorte; zähle hierzu die Zahl derselben Benennung aus dem Dividendus und fahre mit dem Theilen so fort, bis alle Sorten dividirt sind; z. B.

[38 Tage 17 Stunden 29 Minuten 40 Secunden] : 13.

Ausrechnung. $\frac{38}{13}$ Tage = 2 Tage nebst Rest 12 Tage;
 12 Tage = 288 Stunden; 288 Stunden + 17 Stunden =

305 Stunden. $\frac{305 \text{ Stunden}}{13} = 23 \text{ Stunden}$ nebst Rest 6 St.;

6 Stunden = 360 Minuten; 360 Minuten + 29 Minuten =

389 Min. $\frac{389 \text{ Minuten}}{13} = 29 \text{ Min.}$ nebst Rest 12 Min.;

12 Min. = 720 Secunden; 720 Sec. + 40 Sec. = 760 Sec.

$\frac{760 \text{ Secunden}}{13} = 58\frac{6}{13} \text{ Sec.}$

Der gesuchte Quotient ist also gleich

2 Tage 23 Stunden 29 Minuten $58\frac{6}{13}$ Secunden.

Ist der Divisor ein Bruch oder eine gemischte Zahl, so können wir die Aufgabe als aus zwei Theilen bestehend ansehen, nemlich einer Multiplication mit dem Nenner und einer Division durch den Zähler; z. B.

(21 Pud 14 Pfund $24\frac{1}{2}$ Solotnik) : $\frac{5}{8}$ = (21 Pud 14 Pfund $24\frac{1}{2}$ Solotnik) $\times \frac{8}{5}$.

Multiplirciren wir zuerst mit 8 so erhalten wir

168 Pud 112 Pfund $193\frac{3}{5}$ Solotnik

oder 170 Pud 34 Pfund $1\frac{3}{5}$ Solotnik.

Dividiren wir dieses durch 5, so erhalten wir

34 Pud 6 Pfund $77\frac{3}{5}$ Solotnik.

Divisionsaufgaben im Sinne des Messens.

Die Regel für diese Aufgaben heißt: Bringe Divisor und Dividendus zuerst auf die in einer von ihnen vorkommende niedrigste Sorte, und dividire wie mit unbenannten Zahlen; z. B.

1) Wie oft sind 3 Arschinen enthalten in 18 Saschen $3\frac{1}{2}$ Werschok?

Ausrechnung.

Es sind 3 Arschin = $3 \cdot 16 = 48$ Werschok; 18 Saschen $3\frac{1}{2}$ Werschok = $867\frac{1}{2}$ Werschok,

also $867\frac{1}{2}$ Werschok : 48 Werschok = $18\frac{7}{8}$ mal.

2) Wie oft sind 0,44 Minuten enthalten in 18 Stunden 13 Minuten 12,4 Secunden?

Ausrechnung.

Es sind 0,44 Minuten = 26,4 Secunden; 18 Stunden 13 Min. 12,4 Secunden = 65592,4 Secunden,

daher $\frac{65592,4 \text{ Sec.}}{26,4 \text{ Sec.}} = 2484,5\dots$ mal.

§ 65. Die Anwendung der Division in benannten Zahlen auf Aufgaben in dem gemeinen Leben findet statt, wenn wir aus dem Werthe einer bestimmten Anzahl von Dingen den Werth der Einheit zu berechnen haben. Das Verfahren heißt die Divisions-Regelbetri; z. B.

1) Wenn 8 Pfund mit 3 Rubel 50 Kopeken bezahlt werden; wie theuer ist 1 Pfund?

Hier ist der Werth von 8 Pfund gegeben, und man hat den Werth eines Pfundes zu ermitteln. Offenbar wird dieser 8 mal

kleiner sein, und dadurch gefunden werden; daß wir den 8ten Theil von 3 Rubel 50 Kopeken nehmen.

Wenn 8 Pfund kosten 350 Kopeken so wird 1 Pfund kosten $\frac{350}{8} = 43\frac{3}{4}$ Kopeken.

2) Wenn 5 Arschin 2 Werschof mit 14 Rubel $16\frac{1}{2}$ Kopeken bezahlt werden; wie theuer ist 1 Werschof?

Ausrechnung.

Es sind 5 Arschin 2 Werschof = 82 Werschof: 82 Werschof kosten $\frac{2833}{2}$ Kopeken,

also 1 Werschof kostet $\frac{2833}{2 \cdot 82} = 17\frac{45}{164}$ Kopeken.

3) Ein Arbeiter verdient in 7 Wochen $6\frac{1}{2}$ Tagen 26 Rubel $6\frac{2}{3}$ Kopeken; wieviel in 1 Tage?

Ausrechnung.

7 Wochen $6\frac{1}{2}$ Tagen = $\frac{9}{2}$ Tagen

26 Rubel $6\frac{2}{3}$ Kopeken = $\frac{20855}{1000}$ Kopeken.

also $x = \frac{20855}{1000} : \frac{9}{2} = 53\frac{2}{3}$ Kopeken.

Übungsfragen.

- 1) Was ist eine benannte Zahl?
- 2) Was sind einförmige und was mehrförmige benannte Zahlen?
- 3) Was sind gleichartige und was ungleichartige benannte Zahlen?
- 4) Was heißt Resolviren?
- 5) Wie resolvirt man eine ganze Zahl, — einen Bruch, — einen Decimalbruch?
- 6) Wie resolvirt man mehrförmige benannte Zahlen?
- 7) Was heißt Reduciren?
- 8) Wie reducirt man eine ganze Zahl; einen Bruch; — einen Decimalbruch?
- 9) Wie addirt man benannte Zahlen?
- 10) Wie subtrahirt man benannte Zahlen?
- 11) Welches ist der Gegenstand der Zeitrechnung?
- 12) Wie zählt der christliche Calendar die Jahre, Monate und Tage? Wie die Stunden, Minuten und Secunden?
- 13) Was versteht man unter dem alten und dem neuen Styl?
- 14) Wie viele verschiedene Aufgaben können bei der Zeitrechnung vorkommen?

- 15) Wie wird eine mehrsortige benannte Zahl multiplicirt, wenn der Multiplicator a) eine ganze Zahl? b) ein Bruch? c) ein Decimalbruch?
- 16) Was versteht man unter der Multiplications-Regeldetri?
- 17) Wie dividirt man benannte Zahlen, wenn der Divisor a) eine ganze Zahl? b) ein Bruch? c) ein Decimalbruch?
- 18) Wann erscheint die Division als ein Messen, wann als ein Theilen?
- 19) Wie dividirt man, wenn der Divisor eine benannte Zahl?
- 20) Was versteht man unter der Divisions-Regeldetri?

Regeldetri.

§ 66. Durch die Multiplication wird aus dem Werthe der Einheit der Werth eines Vielfachen derselben, durch die Division aus dem Werthe des Vielfachen der Werth der Einheit gefunden. Durch Verbindung beider Rechnungsarten wird aus dem Werthe des Vielfachen der Werth eines andern Vielfachen der Einheit gefunden.

Die Auflösung dieser Aufgabe besteht offenbar aus zwei Theilen. — Wir werden mittelst der Division aus dem Werthe des Vielfachen den Werth der Einheit bestimmen, und durch die Multiplication den gesuchten Werth der gegebenen Menge herleiten.

Derjenige Theil der Aufgabe, aus dem wir den Werth der Einheit zu bestimmen haben, heißt die Angabe oder Bedingung; der andere Theil die Frage. — In beiden Theilen sind überhaupt 3 Glieder bekannt, aus welchen das 4te Glied gesucht wird.

Die praktische Regel, nach der man das vierte Glied zu berechnen hat, heißt Regeldetri. — Zur Erläuterung des Gesagten diene folgende Aufgabe: „3 Pfund kosten 8 Rubel, wie theuer sind 7 Pfund?“ — Setzen wir den Werth von 7 Pfund gleich x Rubel, so haben wir:

(Angabe) 3 Pfund 8 Rubel; (Frage) 7 Pfund x Rubel?

Es darf nicht übersehen werden, daß die Anordnung der einzelnen Glieder in beiden Gleichungen in der Art geschehen müsse, daß das erste mit dem dritten und das zweite mit dem vierten Gliede gleiche Benennung habe. Der Werth der Einheit wird gefunden, wenn wir den ganzen Werth mit der Menge der Einheiten dividiren, nemlich

$$\begin{array}{r} 3 \text{ Pfund} \dots\dots\dots 8 \text{ Rubel} \\ \hline \text{so ist } 1 \text{ Pfund} \dots\dots\dots \frac{8 \text{ Rubel}}{3}. \end{array}$$

Dieser Werth der Einheit muß nun mit der Menge, deren Werth man sucht, d. h. mit dem dritten Gliede unseres Aussages, multiplicirt werden, also

$$x = \frac{8}{3} \text{ Rubel} \times 7 = 18\frac{2}{3} \text{ Rubel.}$$

Beispiele.

1) 8 Pfund kosten 16 Rubel 24 Kopfen; wie theuer sind 2 Pfund 24 Solotnik.

Ausrechnung.

Angabe. 8 Pfund oder 768 Solotnik kosten 1624 Kopfen;

Frage. 216 Solotnik kosten x Kopfen

$$\text{also } x = \frac{1624 \times 216}{768} = 4 \text{ Rubel } 56\frac{2}{3} \text{ Kopfen.}$$

Erklärung. Wir machen erst alle drei Glieder einseitig. — Das erste Glied muß in Solotnik resolvirt werden, weil das dritte Solotnik enthält. Darauf multipliciren wir das zweite Glied, nemlich 1624 Kopfen mit dem dritten Gliede, d. h. mit 216, und dividiren das Product durch das erste Glied, d. h. durch 768.

Vor Ausführung der Rechnung $\frac{1624 \times 216}{768}$ kann man mit 8 die Zahlen 1624 und 768 und hierauf mit 24 die Zahlen 96 und 216 aufheben.

2) $\frac{3}{4}$ Garnet kosten 12 $\frac{3}{4}$ Kop; wie theuer sind 4 Tschetwerik?

Ausrechnung.

Es sind 4 Tschetwerik = 32 Garnet, daher

$$x = (\frac{63}{5} \text{ Kop.} \times 32) : \frac{3}{4} = 9 \text{ Rubel } 40\frac{4}{5} \text{ Kopfen.}$$

Regelbetri mit indirecten Verhältnissen.

§ 67. Wenn in einer Werthgleichung die Abhängigkeit der einen Zahl von der andern von der Art ist, daß bei der Verdoppelung der einen Zahl eine Verdoppelung der andern folgen muß, so sagt man, „beide Zahlen stehen im directen Verhältnisse“; z. B. wir hätten die Werthgleichung

5 Pfund 12 Rubel,

so sehen wir, daß 2 mal 5 Pfund auch 2 mal 12 Rubel gelten müssen, oder

10 Pfund 24 Rubel.

Ist die Abhängigkeit beider Zahlen aber von der Art, daß mit der Verdoppelung der einen Zahl die andere um die Hälfte kleiner werden muß, so sagt man, „beide Zahlen stehen im indirecten oder umgekehrten Verhältnisse“; z. B. wenn 8 Arbeiter in 10 Tagen eine Arbeit vollenden, so ist klar, daß die doppelte Anzahl Arbeiter, also 16 Arbeiter, in der halben Zeit, d. h. in 5 Tagen dieselbe Arbeit ausführen können.

Da vor der Rechnung durch Beurtheilung des Zusammenhanges entschieden werden muß, ob man mit directen oder indirecten Verhältnissen zu thun habe, so gehören bei Auflösung solcher Aufgaben einige Kenntnisse des bürgerlichen Lebens.

Das Verfahren zu zwei Werthgleichungen mit indirecten Verhältnissen das vierte Glied zu finden, heißt die umgekehrte Regelbetri; z. B. wenn 7 Menschen einen gewissen Vorrath von Lebensmitteln in 8 Tagen verzehren; wie lange reichen 14 Menschen damit aus?

Auflösung. Zuerst haben wir die Werthgleichung

(Angabe) 7 Menschen 8 Tage.

Um auf den Werth der Einheit zu kommen, schließen wir: je weniger Menschen von dem Vorrathe zehren, desto längere Zeit werden sie auskommen, d. h. desto mehr Tage; daher

1 Mensch 7 . (8 Tage).

Da nun 14 Menschen 14 mal mehr verbrauchen als 1 Mensch, so können 14 Menschen nur

$$\frac{7 \cdot (8 \text{ Tage})}{14} = 4 \text{ Tage}$$

mit demselben Vorrathe ausreichen.

Setzen wir die beiden Theile der Aufgabe hin, nemlich
(Angabe) 7 Menschen 8 Tage; (Frage) 14 Menschen x Tage?
so sehen wir, da

$$x = \frac{7 \cdot (8 \text{ Tage})}{14}$$

daß die unbekannte Zahl gefunden wird, wenn wir bei indirecten Verhältnissen „das Product der beiden ersten Glieder mit dem dritten Gliede dividiren.“

Als Anwendung des Gesagten mögen hier einige vollständig ausgerechnete Beispiele folgen.

1) 16 Personen haben zu einer Arbeit $19\frac{5}{8}$ Tage nöthig; wieviel Personen werden dieselbe Arbeit in 31 Tagen ausführen?

Ausrechnung. $19\frac{5}{8}$ Tage oder $\frac{155}{8}$ Tage brauchen 16 Personen.

Je weniger Tage, desto mehr Personen sind nöthig, um dasselbe zu leisten, also

$$1 \text{ Tag brauchen } \frac{155}{8} \times 16 \text{ Personen,}$$

folglich 31 Tage brauchen $\left(\frac{155}{8} \times 16\right) : 31 = 10$ Personen.

2) Zur Bekleidung einer Wand braucht man 180 Arschin Tapeten, wenn sie eine Breite von 0,75 Arschinen haben; wieviel sind nöthig, wenn die Tapeten 1 Arschin 3,75 Werschok breit sind.

Ausrechnung.

$$1 \text{ Arschin } 3,75 \text{ Werschok} = 19,75 \text{ Werschok.}$$

$$0,75 \text{ Arschin} = 12 \text{ Werschok.}$$

Bei 12 Werschok Breite sind erforderlich 180 Arschin. Je weniger breit die Tapete ist, desto mehr Arschinen Länge sind erforderlich, also bei

1 Werschof Breite sind erforderlich 180×12 Arschin,
folglich bei 19,75 Werschof Breite sind erforderlich

$$\frac{180 \times 12}{19,75} = 109,3 \dots \text{ Arschin Länge.}$$

Uebungsfragen.

- 1) Was ist die sogenannte Regelbetri?
- 2) Woraus besteht jede Regelbetri-Aufgabe und wie löst man dieselbe auf?
- 3) Was versteht man unter directen und indirecten Verhältnissen?
- 4) Worin weicht das Verfahren bei indirecten Verhältnissen von dem für directe Verhältnisse ab?

Zusammengesetzte Regelbetri.

A. Mit directen Verhältnissen.

§ 68. Es giebt Aufgaben, zu deren Lösung mehr als ein Regelbetri-Exempel nöthig wird, weil das Gesuchte von mehreren Zahlen abhängig ist, die in verschiedener Beziehung zu einander stehen. — Solche Aufgaben lassen sich durch eine einzige Rechnung auflösen, die man zusammengesetzte Regelbetri nennt. Jede hierher gehörige Aufgabe besteht, wie die einfache Regelbetri, aus zwei Theilen. In der Angabe kommen mehrere Dinge verschiedener Art und in der Frage eben solche Dinge, worunter sich aber die unbekannte Zahl findet, vor. Z. B.

1) Wenn 1 Arbeiter in einem Tage 45 Kopfen Lohn erhält; wieviel werden 10 Arbeiter in 18 Tagen bekommen?

Ausrechnung.

(Angabe) 1 Arbeiter in 1 Tage 45 Kopfen;

(Frage) 10 " " 18 Tagen x Kopfen?

Hier haben wir offenbar zwei Regelbetri-Aufgaben. Zuerst bekommen wir den täglichen Lohn von 10 Arbeitern, und dann den Lohn derselben für 18 Tage. Also

a) $\frac{1 \text{ Arbeiter} \dots 45 \text{ Kopfen}}{10 \text{ Arbeiter} \dots 10 \cdot (45 \text{ Kop.}) = 450 \text{ Kop. (für 1 Tag.)}$

Nun schließen wir

b) 1 Tag 450 Kopfen

$$\frac{18 \text{ Tage} \dots 18 \cdot (450 \text{ Kop.}) = 8100 \text{ Kop.} = 81 \text{ Rubel.}}{}$$

Oder wir bestimmen zuerst den Lohn von einem Arbeiter für 18 Tage und darauf den Lohn der 10 Arbeiter für 18 Tage. Hiernach stellt sich die Rechnung folgendermaßen:

a) 1 Tag 45 Kopfen

$$\frac{18 \text{ Tage} \dots 18 \cdot (45 \text{ Kop.}) = 810 \text{ Kop. (für 1 Arbeiter),}}{}$$

b) 1 Arbeiter 810 Kopfen

$$\frac{10 \text{ Arbeiter} \dots 10 \cdot (810 \text{ Kop.}) = 81 \text{ Rubel.}}{}$$

In dieser Aufgabe war der Werth für die Einheit jeder in der Angabe vorkommenden Zahl gegeben, und wir fanden das gesuchte x dadurch, daß wir diesen Werth mit dem Vielfachen jeder vorkommenden Zahlengröße in der Frage multiplicirten.

Umgekehrt werden wir, wenn in der Angabe der Werth der Vielfachen und in der Frage die Einheiten derselben Zahlen vorkommen, das gesuchte x dadurch finden, daß wir den Werth aus der Angabe durch die Vielfachen dividiren; z. B.

2) Es verzehren 16 Personen in 14 Tagen $268\frac{1}{2}$ Rubel; wieviel kommt auf 1 Person in 1 Tage?

(Angabe) 16 Personen in 14 Tagen $268\frac{1}{2}$ Rubel;

(Frage) 1 Person „ 1 Tage x Rubel?

Ausrechnung. 1 Person braucht 16 mal weniger als 16 Personen, und für 1 Tag zahlt man 14 mal weniger als für 14 Tage; folglich

$$x = \frac{268\frac{1}{2} \text{ Rubel}}{16 \cdot 14} = \frac{1344 \text{ Rubel}}{16 \cdot 14 \cdot 5} = \frac{1}{5} \text{ Rubel.}$$

Endlich kommt der Fall vor, daß wir aus dem Werthe mehrerer Vielfachen den Werth anderer Vielfachen zu bestimmen haben; z. B.

3) Es verdienen 10 Personen in 8 Monaten 2400 Rubel; wieviel werden 12 Personen in 16 Monaten an Lohn erhalten?

(Angabe) 10 Personen in 8 Monaten 2400 Rubel;

(Frage) 12 „ „ 16 „ x Rubel?

Ausrechnung.

1 Person verdient in 8 Monaten 240 Rubel,

1 Person verdient in 1 Monate $\frac{240}{8}$ Rubel,

12 Personen verdienen in 1 Monate $\frac{240 \cdot 12}{8}$ Rubel,

12 Personen verdienen in 16 Monaten $\frac{240 \cdot 12 \cdot 16}{8}$ Rubel

= 5760 Rubel.

Wir sehen hieraus, daß die gesuchte Zahl x gefunden wird, wenn wir den Werth aus der Angabe mit den in der Angabe noch sonst vorkommenden Größen dividiren, und den Quotienten mit den in der Frage enthaltenen Zahlen multipliciren.

Am Vortheilhaftesten stellt sich die Rechnung, wenn wir den gesuchten Werth von x (wie bereits oben gesehen) durch einen Bruch darstellen, dessen Zähler den Werth nebst den Multiplicatoren aus der Frage, und dessen Nenner die Divisoren aus der Angabe enthält.

B. Mit directen und indirecten Verhältnissen.

Kommen in der Aufgabe indirecte Beziehungen vor, so erhalten wir den Werth für die Einheit nicht durch Division, sondern durch Multiplication mit dem gegebenen Vielfachen, und haben daraus den gesuchten Werth des Vielfachen, nicht durch Multiplication, sondern durch Division abzuleiten. Wir werden daher jede Zahl der Angabe einer Beurtheilung unterwerfen, und je nachdem sie in indirecter oder directer Beziehung zur gesuchten Zahl steht, an den entsprechenden Platz im Zähler oder Nenner des Bruches, der den gesuchten Werth ausdrücken soll, setzen. Finden wir bei dieser Beurtheilung, daß sie in indirecter Beziehung steht, so ist das Vielfache in der Angabe ein Multiplikator, und das gleichnamige Vielfache in der Frage ein Divisor; ergiebt sich eine directe Beziehung, so ist das Vielfache in der Angabe ein Divisor, und das gleichnamige Vielfache in der Frage ein Multiplikator; z. B. 8 Arbeiter vollenden eine

Arbeit in 12 Tagen, wenn sie täglich 9 Stunden arbeiten; wieviel Tage werden 6 Arbeiter brauchen, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten sollen?

(Angabe) 8 Arbeiter bei 9 Stunden täglich 12 Tage;

(Frage) 6 " " 10 " " x Tage?

Beurtheilung. Je mehr Arbeiter sind, desto weniger Tage brauchen dieselben; also stehen Arbeiter und Tage in indirecter Beziehung, folglich ist 8 ein Multiplikator und 6 ein Divisor.

Je mehr Stunden täglich gearbeitet wird, desto weniger Tage sind nöthig, also ebenfalls indirect, weshalb 9 ein Multiplikator, und 10 ein Divisor.

Es wird hiernach gefunden:

$$x = \frac{12 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 10} = 14\frac{2}{3} \text{ Tage.}$$

Wünscht man durch auf einander folgende Schlüsse das gesuchte Resultat herzuleiten, so wird das Verfahren folgendes sein:

8 Arbeiter bei 9 Stunden brauchen 12 — — Tage,

1 " " 9 " " 12 . 8 — "

1 " " 1 " " 12 . 8 . 9 "

6 " " 1 " " $\frac{12 \cdot 8 \cdot 9}{6}$ "

6 " " 10 " " $\frac{12 \cdot 8 \cdot 9}{6 \cdot 10} = 14\frac{2}{3}$ Tage.

Kommen mehr als drei von einander abhängige Zahlengrößen vor, so macht es in der Rechnung keinen Unterschied. In diesem Falle wird die Auflösung durch auf einander folgende Schlüsse zu weitläufig, weshalb der Ausdruck von x in der Bruchform vorzuziehen ist; z. B.

Wenn 4 Arbeiter täglich 8 Stunden arbeiten, so können sie in 10 Wochen einen Graben von 180 Saſchen Länge 8 Fuß Breite auswerfen; wie lange werden 12 Arbeiter bei 9 Stunden täglich an einem Graben von 240 Saſchen Länge 14 Fuß Breite zu thun haben?

(Angabe) 4 Arbeiter 8 Std. tägl. 180 S. L., 8 Fuß Br. 10 Wochen,

(Frage) 12 " 8 " " 240 " 14 " x Wochen?

Beurtheilung. Je mehr Arbeiter, desto weniger Wochen sind nöthig; also indirect, deshalb 4 ein Multiplikator und 12 ein Divisor.

Je mehr Stunden täglich gearbeitet wird, desto weniger Wochen; also ebenfalls indirect.

Je mehr Saefchen Länge zu graben sind, desto mehr Wochen wird man brauchen, also direct; deshalb 180 ein Divisor und 240 ein Multiplikator.

Je mehr Fuß Breite der Graben hat, desto mehr Wochen sind nöthig; also direct.

Hiernach wird sein

$$x = \frac{10 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 240 \cdot 14}{12 \cdot 9 \cdot 180 \cdot 8} 6\frac{7}{8} \text{ Wochen.}$$

Statt der Bruchform, die wir für den Ausdruck des Werthes von x gewählt haben, wird auch der Säulensatz angewendet, der nach seinem Erfinder die Basedow'sche Regel heißt. — Man zieht nehmlich einen Verticalstrich, setzt links die Fragezahl x und nebenan rechts die mit ihr gleichnamige; — hierauf werden die durch Beurtheilung sich ergebenden Multiplikatoren auf die rechte Seite und die Divisoren auf die linke Seite des Striches geschrieben. — Nach dieser Anordnung hebt man die Zahlen auf der Seite der Multiplikatoren durch zweckmäßige Theiler gegen die Zahlen auf der Seite der Divisoren; zuletzt dividirt man das Product der Multiplikatoren mit dem Producte der Divisoren. Obiges Exempel wäre hiernach:

x Wochen	10 Wochen
12 Arbeiter	4 Arbeiter
9 Stunden	8 Stunden
180 Saefchen	240 Saefchen (Länge)
8 Fuß	14 Fuß (Breite)

Es muß nicht übersehen werden, daß die in der Angabe vorkommenden mit den in der Frage correspondirenden Zahlen stets gleichnamig sein müssen. Wo solches nicht stattfindet, muß man dieselben vor der Rechnung erst gleichnamig machen.

Die Zinsrechnung.

§ 69. Leihet Jemand Geld von einem Andern, und verwendet es zu seinem Vortheil, so entrichtet er dem Besitzer des geliehenen Geldes eine Entschädigung. Man nennt den das Geld Hergebenden Gläubiger oder Creditor; den, der das Geld für sich aufnimmt, Schuldner oder Debitor. Die geliehene Geldsumme wird Kapital und die zu zahlende Vergütung Zins oder Interesse genannt. — Der Zins hängt ab von der Größe des Kapitals und von der Länge der Zeit, während welcher das Kapital benutzt wird. Die Zinsen eines Kapitals von 100 Geldeinheiten (z. B. Rubel) für 1 Jahr nennt man Procente, und die jährlichen Zinsen für ein Kapital gleich einer Geldeinheit den Zinsfuß. In Rußland ist das Maximum der gesetzlichen Zinsen = 6 Procent.

Gewöhnlich werden die Interessen in jedem Jahre abgetragen. Die Berechnung derselben sowie die Lösung anderer damit zusammenhängender Fragen bilden Gegenstand der einfachen Zinsenrechnung. Trägt man die Zinsen aber nicht ab, sondern werden dieselben am Schlusse des Jahres zum Kapitale geschlagen und wieder verzinst, so spricht man von Zins auf Zins, welcher Gegenstand der zusammengesetzten Zinsrechnung oder Zinseszinsrechnung ist. Ist die Zeit in Monaten gegeben, so wird gewöhnlich der Monat zu 30 Tagen, oder das Jahr zu 360 Tagen gerechnet; in besondern Fällen aber, wenn bloße einzelne Tage vorkommen, die mit der Zeiteinheit, d. h. einem Jahre, verglichen werden, rechnet man das Jahr zu 365 Tagen.

Wir werden im Nachstehenden nur die einfache Zinsrechnung erklären, weil zur Beantwortung der meisten Fragen, die bei der Zinseszinsrechnung vorkommen können, algebraische Kenntnisse erforderlich sind.

§ 70. Die bei der Zinsrechnung vorkommenden von einander abhängigen Größen sind: Kapital, Procente, Zinsen und Zeitdauer. Aus je drei gegebenen kann die vierte Größe hergeleitet werden. Wir haben demnach folgende Aufgaben zu lösen:

- 1) die Interessen zu finden aus Procenten, Kapital und Zeit;
- 2) die Procente " " " Kapital, Zeit und Zinsen;
- 3) das Kapital " " " Zeit, Zinsen und Procenten;
- 4) die Zeit " " " Zinsen, Procenten und Kapital.

I. Berechnung der Zinsen aus Kapital, Procenten und Zeit.

1) Wieviel betragen die Zinsen von 600 Rubeln Kapital bei 5 % in einem Jahre?

1te Auflösung. Da man von 100 Rubel an Zinsen 5 Rubel erhält, so wird 1 Rubel 100 mal weniger, d. h. $\frac{5}{100}$ Rubel oder $\frac{1}{20}$ Rubel geben; folglich 600 Rubel Kapital 600 mal mehr, d. h. $600 \cdot (\frac{1}{20} \text{ Rubel}) = 30 \text{ Rubel}$.

2te Auflösung. Da 100 Rubel an Zinsen 5 Rubel geben, so muß man für 600 Rubel 6 mal mehr, d. h. $6 \cdot (5 \text{ Rubel}) = 30 \text{ Rubel}$ erhalten.

3te Auflösung. Als einfaches Regelbetr.-Exempel.

100 Rubel Kapital . . . 5 Rubel Zinsen,
600 Rubel Kapital . . . x Rubel Zinsen.

Je größer das Kapital, desto mehr Zinsen, folglich stehen Kapital und Zinsen in directem Verhältnisse;

$$\text{also } x = \frac{600 \times 5}{100} = 30 \text{ Rbl. Zinsen.}$$

2) Wieviel Zinsen tragen 300 Rubel Kapital bei $4\frac{3}{4}$ % in 5 Jahren?

Auflösung. Aus der vorhergehenden Aufgabe geht hervor, daß wir die jährlichen Zinsen finden, wenn wir das Kapital mit den Procenten multipliciren und das Product mit 100 dividiren. Für unsern vorliegenden Fall hätten wir demnach:

$$\text{jährliche Zinsen} = \frac{300 \times 4\frac{3}{4}}{100} = 5\frac{7}{4} \text{ Rubel.}$$

Also für 5 Jahre 5 mal mehr; daher

$$\text{Zinsen} = 5 \cdot (5\frac{7}{4}) \text{ Rubel} = 71\frac{1}{4} \text{ Rubel.}$$

Oder nach der zusammengesetzten Regelbetri:

(Angabe) 100 Rubel Kapital in 1 Jahre ... $4\frac{3}{4}$ Rbl. Zinsen;

(Frage) 300 " " " 5 Jahren ... x Rbl. Zinsen?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto mehr Zinsen, und je länger ein Kapital aussteht, desto mehr Zinsen wird man haben; also stehen beide in directem Verhältnisse, deshalb

$$x = \frac{4\frac{3}{4} \times 300 \times 5}{100 \times 1} = 71\frac{1}{4} \text{ Rubel.}$$

Aus diesem Ausdrucke für x abstrahiren wir uns folgende Regel für alle ähnlichen Fälle: Die Zinsen werden gefunden, wenn man Procente, Kapital und Zeit mit einander multiplicirt und das Product durch 100 dividirt.

Hierbei ist die Bedingung, daß die Zeit in Jahren ausgedrückt worden. — Wäre die Zeit in Monaten oder Tagen gegeben, so müßte man vorher die Zeit auf Jahre reduciren; z. B.

3) Wieviel betragen die Zinsen von 75 Rubeln bei 5 % in 9 Monaten?

Auflösung. Da 9 Monate = $\frac{9}{12}$ Jahr = $\frac{3}{4}$ Jahr, so haben wir:

$$x = \frac{75 \times 5 \times \frac{3}{4}}{100} = 21\frac{3}{8} \text{ Rubel.}$$

Nach dieser Formel können die Zinsen in allen den Fällen berechnet werden, wo Kapital, Procente und Zeit gegeben sind. Zuweilen ist aber eine dieser 3 Größen versteckt, und es sind z. B. gegeben: die Zinsen für einen bestimmten Zeitraum bei gewissen Procenten; man will wissen, wieviel Zinsen dasselbe Kapital tragen würde, wenn Zeit und Zinsfuß sich ändern. Hier geschieht die Ausrechnung nach der zusammengesetzten Regelbetri; z. B.

4) In 3 Jahren erhielt man von einem gewissen Kapitale bei 5 % 800 Rubel Zinsen; wieviel wird man in 9 Jahren bei 6 % von demselben Kapitale erhalten?

(Angabe) In 3 Jahren bei 5 % 800 Rubel Zinsen;

(Frage) " 9 " " 6 % x Rubel Zinsen?

Beurtheilung. Je mehr Jahre ein Kapital aussteht, desto mehr Zinsen wird man erhalten; also Zeit und Zinsen in directem Verhältnisse.

Je höhere Procente genommen werden, d. h. je mehr für jedes Hundert, das im Kapitale steckt, gezahlt wird, desto mehr Zinsen wird man haben; also stehen Procente und Zinsen ebenfalls in directem Verhältnisse; daher

$$x = \frac{800 \times 9 \times 6}{3 \times 5} = 2880 \text{ Rubel.}$$

5) Ein Kapital von 3000 Rubeln gab in 5 Jahren 775 Rubel Zinsen; wieviel wird man bei gleichen Procenten von 4500 Rubeln Kapital in 9 Jahren erhalten?

(Angabe) 3000 Rubl. Kapital in 5 Jahren 775 Rubl. Zinsen;

(Frage) 4500 " " " 9 " x Rubl. Zinsen?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto mehr Zinsen wird man in derselben Zeit bei gleichem Zinsfuße erhalten; daher Kapital und Zinsen in directem Verhältnisse.

Je länger ein Kapital aussteht, desto mehr Zinsen wird man haben, deshalb Zeit und Zinsen in directem Verhältnisse; also

$$x = \frac{775 \times 9 \times 4500}{5 \times 300} = 2092\frac{1}{2} \text{ Rubel.}$$

6) Ein Kapital von 600 Rubeln trug bei 5 $\frac{1}{2}$ 180 Rubel Zinsen; wieviel Zinsen wird man in derselben Zeit von 800 Rubel Kapital bei 6 $\frac{1}{2}$ erhalten?

(Angabe) 600 Rubel Kapital bei 5 $\frac{1}{2}$ 180 Rubel Zinsen;

(Frage) 800 " " " 6 $\frac{1}{2}$ x Rubel Zinsen?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto mehr Zinsen wird man in derselben Zeit und bei demselben Zinsfuße erhalten; daher Kapital und Zinsen in directem Verhältnisse.

Je höhere Procente man nimmt, desto mehr Zinsen wird man in derselben Zeit von demselben Kapital ziehen; also Procente und Zinsen in directem Verhältnisse; daher

$$x = \frac{180 \times 6 \times 800}{600 \times 5} = 288 \text{ Rubl.}$$

Aus den drei letzten Beispielen ergibt sich:

- Zinsen und Kapital stehen in directem Verhältnisse, wenn Zeit und Zinsfuß sich nicht ändern;
 - Zinsen und Zeit stehen in directem Verhältnisse, wenn Procente und Kapital sich nicht ändern;
 - Zinsen und Procente stehen in directem Verhältnisse, wenn Kapital und Zeit sich nicht ändern.
- Exempel Nr. 1965—Nr. 1975.

II. Berechnung der Procente aus Kapital, Zeit und Zinsen.

1) Wenn 500 Rubel Kapital jährlich 20 Rubel Zinsen geben; zu wieviel Procent ist dieses Geld ausgeliehen?

Auflösung:

500 Rubel geben 20 Rubel Zinsen

1 Rubel giebt $\frac{20}{500}$ Rubel

100 Rubel geben $\frac{20 \cdot 100}{500} = 4$ Rubel,

also ist $x = 4$ Procent.

Oder durch Regelbetri:

(Angabe) 500 Rubel geben 20 Rubel Zinsen;

(Frage) 100 Rubel geben x Rubel Zinsen?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto mehr Zinsen wird es tragen; folglich stehen Kapital und Zinsen in directem Verhältnisse, also

$$x = \frac{100 \cdot 20}{500} = 4 \text{ Rubel, also } 4 \text{ Procent.}$$

2) Jemand nimmt von 600 Rubeln Kapital in 3 Jahren 108 Rubel Zinsen ein; zu wieviel Procent war dieses Kapital ausgeliehen?

Auflösung. Wenn man in 3 Jahren 108 Rubel Zinsen bekommt, so fallen auf 1 Jahr 3 mal weniger; daher sind die jährlichen Zinsen $= \frac{108}{3}$ Rubel $= 36$ Rubel. Nun haben wir:

600 Rubel Kapital 36 Rubel Zinsen (in 1 Jahre)

1 Rubel Kapital $\frac{36}{600}$ Rubel Zinsen

folglich 100 Rubel $\frac{100 \times 36}{600} = 6$ Rubel, d. h. 6 Procent.

Oder durch die zusammengesetzte Regelbetri:

(Angabe) 600 Rubel Kapital in 3 Jahren 108 Rubl. Zinsen;

(Frage) 100 " " " 1 " x Rubl. Zinsen?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto mehr Zinsen, und je länger es aussteht, desto mehr Zinsen wird man haben, deshalb beide Verhältnisse direct; also

$$x = \frac{108 \times 100}{600 \times 3} = 6 \text{ Rubel, d. h. 6 Procent.}$$

Wir können uns eine Formel zur Berechnung der Procente, wenn Zeit, Kapital und Zinsen gegeben sind, leicht entwickeln aus der schon bekannten Relation, daß

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Kapital} \times \text{Zeit} \times \text{Procente}}{100},$$

denn es muß alsdann sein, wenn wir mit 100 multipliciren,

$$\text{Kapital} \times \text{Zeit} \times \text{Procente} = 100 \times \text{Zinsen},$$

d. h., die hundertfachen Zinsen sind gleich einem Producte aus Kapital, Zeit und Procenten. Dividiren wir jetzt mit dem Producte aus Kapital und Zeit, so erhalten wir

$$\text{Procente} = \frac{100 \cdot \text{Zinsen}}{\text{Kapital} \times \text{Zeit}}; \text{ z. B.}$$

3) Zu wieviel Procent müssen 800 Rubel Kapital ausgeliehen werden, wenn man in $3\frac{1}{3}$ Jahren 150 Rubel Zinsen haben will?

$$x = \frac{100 \cdot 150}{800 \times 3\frac{1}{3}} = 5\frac{5}{8} \text{ Procent.}$$

Natürlich ist bei Benutzung dieser Formel die Zeit immer in Jahren auszudrücken. Die Formel findet aber nur dann Anwendung, wenn von den bei der Zinsrechnung vorkommenden vier Größen drei wirklich gegeben sind, nehmlich Kapital, Zeit und Zinsen. Man muß jederzeit zu der zusammengesetzten Regelbetri zurückkehren, wenn eine dieser 3 Größen in der Aufgabe versteckt vorkommt; z. B.

4) Von einem gewissen Kapitale, das zu 5% ausgeliehen war, erhielt man in 3 Jahren 420 Rubel Zinsen; zu wieviel

Procent muß dasſelbe Kapital ausgeliehen werden, um in 4 Jahren 480 Rubel Zinſen zu haben?

(Angabe) 420 Rubel Zinſen in 3 Jahren $x \%$;

(Frage) 480 " " " 4 " 5% ?

Beurtheilung. Je mehr Zinſen von einem Kapitale in derſelben Zeit gezahlt werden, deſto höhere Procente ſind genommen; daher Zinſen und Procente in directem Verhältniſſe.

Je länger ein Kapital ausſteht, deſto kleinere Procente muß man nehmen, um dieſelben Zinſen zu erhalten, daher Zeit und Procente in indirectem Verhältniſſe; folglich

$$x = \frac{5\% \times 480 \times 3}{420 \times 4} = 4\frac{1}{2}\%.$$

5) In einer gewiſſen Zeit erhielt man von 2000 Rubeln Kapital bei 4% 600 Rubel Zinſen; zu wieviel Procent muß man 1500 Rubel ausleihen, um in derſelben Zeit 700 Rubel Zinſen zu haben?

(Angabe) 2000 Rubel Kapital 600 Rubel Zinſen 4% ;

(Frage) 1500 " " 700 " " $x \%$?

Beurtheilung. Je mehr Zinſen (von demſelben Kapitale in derſelben Zeit) verlangt werden, deſto höhere Procente muß man nehmen; deſhalb Zinſen und Procente in directem Verhältniſſe.

Je größer das Kapital, deſto kleinere Procente braucht man zu nehmen (um in derſelben Zeit dieſelben Zinſen zu haben); deſhalb Kapital und Procente in indirectem Verhältniſſe; alſo

$$x = \frac{4\% \times 700 \times 2000}{600 \times 1500} = 6\frac{2}{3}\%.$$

6) Von 1000 Rubeln Kapital erhielt man in 4 Jahren bei 5% eine gewiſſe Summe Zinſen; zu wieviel Procent muß man 3200 Rubel Kapital ausleihen, um in 2 Jahren ebenſoviel Zinſen zu haben?

(Angabe) 1000 Rubel Kapital in 4 Jahren 5% ;

(Frage) 3200 " " " 2 " $x \%$?

Je größer das Kapital iſt, deſto kleinere Procente braucht man zu nehmen (um in derſelben Zeit dieſelben

Zinsen zu haben); deshalb Kapital und Procente in indirectem Verhältnisse.

Je länger ein Kapital aussteht, desto kleinere Procente sind zu nehmen (um von demselben Kapitale dieselben Zinsen zu haben); deshalb Zeit und Procente in indirectem Verhältnisse; also

$$x = \frac{5\% \times 4 \times 1000}{2 \times 3200} = 3\frac{1}{8}\%.$$

Aus den drei letzten Aufgaben folgt:

- Procente und Zinsen (bei gleichen Zeiten und gleichen Kapitalien) stehen in indirectem Verhältnisse.
- Procente und Zeit (bei gleichen Zinsen und gleichen Kapitalien) stehen in indirectem Verhältnisse.
- Procente und Kapital (bei gleichen Zinsen und gleichen Zeiten) stehen in indirectem Verhältnisse.

III. Berechnung des Kapitals aus Zeit, Zinsen und Procenten.

1) Welches Kapital bringt zu 4% in einem Jahre 80 Rubel Zinsen?

1te Auflösung. Wenn 4 Rubel die Zinsen von 100 Rubel Kapital sind; so müssen 80 Rubel Zinsen von soviel mal (100 Rubel Kapital) sein, als 4 Rubel in 80 Rubel enthaltend sind. Nun ist $(80 \text{ Rubel}) : (4 \text{ Rubel}) = 20$ mal; demnach das gesuchte Kapital = $20 \cdot (100 \text{ Rubel}) = 2000 \text{ Rubel}$.

2te Auflösung.

4 Rubel erhält man von 100 Rbl.,
 1 " " " " $\frac{100}{4}$ "
 80 " " " " $\frac{100}{4} \times 80 = 2000 \text{ Rubel}$.

3te Auflösung durch Regeldetri:

(Angabe) 4 Rubel Zinsen von 100 Rubel Kapital;
 (Frage) 80 " " " " x " " ?

Je mehr Zinsen, desto größer muß das Kapital sein; demnach Zinsen und Kapital in directem Verhältnisse; also

$$x = \frac{(100 \text{ Rubel Kapital}) \times 80}{4} = 2000 \text{ Rubel.}$$

2) Wie groß ist ein Kapital, dessen 4jährige Zinsen zu $3\frac{3}{4}\%$ 450 Rubel betragen?

Auflösung. 100 Rubel Kapital geben in einem Jahre $3\frac{3}{4}$ Rubel Zinsen, also in 4 Jahren 4 mal mehr, demnach $4 \cdot (3\frac{3}{4} \text{ Rubel}) = 15 \text{ Rubel.}$

15 Rubel erhält man von 100 Rubel,

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \frac{100}{15} & \text{''} \\ 450 & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \frac{100}{15} & \times 450 = 3000 \text{ Rubel.} \end{array}$$

Oder nach der zusammengesetzten Regelverri:

(Angabe) 1 Jahr $3\frac{3}{4}$ Rubel Zinsen ... 100 Rubel Kapital;

(Frage) 4 Jahre 450 " " x Rubel Kapital?

Beurtheilung. Je längere Zeit, desto weniger Kapital wird man brauchen, um dieselben Zinsen zu erhalten; daher Zeit und Kapital in indirectem Verhältnisse.

Je mehr Zinsen, desto mehr Kapital ist nöthig; also Zinsen und Kapital in directem Verhältnisse, mithin

$$x = \frac{(100 \text{ Rubel Kapital}) \times 1 \times 450}{4 \times (3\frac{3}{4})} = 3000 \text{ Rubel.}$$

Für alle ähnlichen Fälle erhalten wir zur Berechnung des Kapitals eine Formel aus der bekannten Relation

$$\text{Kapital} \times \text{Zeit} \times \text{Procent} = 100 \times \text{Zinsen}$$

dadurch, daß wir die 100fachen Zinsen mit dem Producte aus Zeit und Procenten dividiren, daher

$$\text{Kapital} = \frac{100 \times \text{Zinsen}}{\text{Zeit} \times \text{Procente}}; \text{ s. B.}$$

3) Welches Kapital giebt bei 4% in 7 Jahren 980 Rubel Zinsen?

$$x = \frac{100 \times 980}{7 \times 4} \text{ Rbl. Kapital} = 3500 \text{ Rbl. Kapital.}$$

Diese Formel wird mit Vortheil angewandt, wenn man das Kapital aus Zeit, Procenten und Zinsen zu berechnen hat; da-

gegen wird man immer nach der zusammengesetzten Regelbetri rechnen, wenn eine dieser 3 Größen nicht direct gegeben ist, sondern in der Aufgabe sich versteckt vorfindet; z. B. in nachfolgenden 3 Aufgaben.

4) Welches Kapital trägt bei 4% in 5 Jahren eben soviel Zinsen als 7800 Rubel in 5 Jahren bei 3%?

(Angabe) 2 Jahre 3% ... 7800 Rubel Kapital;

(Frage) 5 " 4% ... x Rubel Kapital?

Beurtheilung. Je länger ein Kapital aussteht, desto kleiner braucht es zu sein (um bei gleichen Procenten dieselben Zinsen zu tragen); also Zeit und Kapital in indirectem Verhältnisse.

Je höhere Procente, ein desto kleineres Kapital wird nöthig sein (um in derselben Zeit dieselben Zinsen abzuwerfen); deshalb Procente und Kapital in indirectem Verhältnisse; also

$$x = \frac{7800 \text{ Rubel Kapital} \times 3 \times 2}{5 \times 4} = 2340 \text{ Rubel.}$$

5) Welches Kapital trägt in 3 Jahren 450 Rubel Zinsen, wenn man bei denselben Procenten von 780 Rubel Kapital in 6 Jahren 210 Rubel Zinsen erhält?

(Angabe) 6 Jahre 210 Rubel Zinsen ... 780 Rubel Kapital;

(Frage) 3 " 450 " " ... x Rubel Kapital?

Beurtheilung. Je längere Zeit, desto kleineres Kapital ist nöthig (um bei demselben Zinsfuß gleiche Zinsen zu erhalten); deswegen Zeit und Kapital in indirectem Verhältnisse.

Je mehr Zinsen, desto mehr Kapital ist nöthig (wenn Zinsfuß und Zeit sich nicht ändern); daher Zinsen und Kapital in directem Verhältnisse; also

$$x = \frac{780 \text{ Rubel Kapital} \times 450 \times 6}{210 \times 3} = 3342\frac{2}{3} \text{ Rubel.}$$

6) Welches Kapital trägt bei 4% 520 Rubel Zinsen, wenn man in einer gewissen Zeit von 1000 Rubel Kapital bei 5% 70 Rubel Zinsen erhält?

(Angabe) 5%, 70 Rubel Zinsen ... 1000 Rubel Kapital;

(Frage) 4%, 520 " " ... x " " ?

Beurtheilung. Je mehr Zinsen, desto größer muß das Kapital sein (wenn Zeit und Procente dieselben bleiben); deshalb Zinsen und Kapital in directem Verhältnisse.

Je höhere Procente, desto kleineres Kapital wird in derselben Zeit dieselben Zinsen tragen; daher Procente und Kapital in indirectem Verhältnisse; also

$$x = \frac{1000 \text{ Rubel Kapital} \times 520 \times 5}{70 \times 4} = 9285\frac{1}{2} \text{ Rubel.}$$

Aus den drei letzten Aufgaben sehen wir, daß

- die Größe des Kapitals und die Größe der Zinsen in directem Verhältnisse stehen, wenn Procente und Zeiten gleich sind;
- die Größe des Kapitals und die Länge der Zeit in indirectem Verhältnisse bei gleichen Procenten und gleichen Zeiten;
- die Größe des Kapitals und die Größe der Procente in indirectem Verhältnisse bei gleichen Zinsen in gleichen Zeiten;

IV. Berechnung der Zeit aus Procenten, Zinsen und Kapital.

1) Wie lange müssen 400 Rubel Kapital ausstehen, um bei 5 $\frac{1}{2}$ 80 Rubel Zinsen zu tragen?

Auflösung. Da 100 Rubel Kapital 5 Rubel Zinsen geben, so sind die jährlichen Zinsen von 400 Rubeln Kapital $4 \times (5 \text{ Rubel}) = 20 \text{ Rubel}$. Wir haben also

20 Rubel Zinsen ... 1 Jahr

1 Rubel Zinsen ... $\frac{1}{20}$ Jahr

daher 80 Rubel Zinsen ... $80 (\frac{1}{20} \text{ Jahr}) = 4 \text{ Jahr}$.

Oder nach der zusammengesetzten Regelbetri:

(Angabe) 100 Rubel Kapital, 5 Rubel Zinsen ... 1 Jahr;

(Frage) 400 " " 80 " " ... x " ?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, in desto kürzerer Zeit wird es dieselben Zinsen geben; deshalb Kapital und Zeit in indirectem Verhältnisse.

Je mehr Zinsen von einem Kapitale verlangt werden, je länger muß es ausstehen; also Zinsen und Zeit in directem Verhältnisse; daher

$$x = \frac{(1 \text{ Jahr}) \times 100 \times 80}{400 \times 5} = 4 \text{ Jahr.}$$

Aus der Gleichung

$$\text{Zeit} \times \text{Kapital} \times \text{Procente} = 100 \times \text{Zinsen}$$

leiten wir uns eine Formel zur Berechnung aller ähnlichen Aufgaben her. Dividiren wir nehmlich die 100fachen Zinsen mit dem Producte aus Kapital und Procenten, so haben wir für die Zeit (in Jahren ausgedrückt)

$$\text{Zeit} = \frac{100 \times \text{Zinsen}}{\text{Kapital} \times \text{Procente.}}$$

3. B. 2) Wie lange müssen 3000 Rubel bei 6% ausstehen, um 330 Rubel Zinsen zu tragen?

$$x = \frac{100 \times 330}{3000 \times 6} \text{ Jahr} = 1\frac{1}{2} \text{ Jahr.}$$

Ist eine dieser vier Größen versteckt gegeben, so können wir uns dieser Formel nicht bedienen, und müssen die Auflösung der Aufgabe nach der zusammengesetzten Regelbetri machen, 3. B.

3) Wie lange muß ein Kapital von 500 Rubel bei 6% ausstehen, um eben so viel Zinsen zu tragen, als 1200 Rubel bei 4% in 7 Jahren?

(Angabe) 1200 Rubel Kapital bei 4% 6 Jahre;

(Frage) 500 " " " 5% x " ?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto weniger Zeit ist nöthig, um bei demselben Zinsfusse dieselben Zinsen zu erhalten; also Kapital und Zeit in indirectem Verhältnisse.

Je höhere Procente man nimmt, in desto kürzerer Zeit wird man von demselben Kapitale dieselben Zinsen bekommen; daher Procente und Zeit in indirectem Verhältnisse; also

$$x = \frac{(6 \text{ Jahre}) \times 4 \times 1200}{6 \times 500} = 9\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

4) In welcher Zeit tragen 1000 Rubel Kapital 450 Rubel Zinsen, wenn man in 5 Jahren bei demselben Zinsfuße von 800 Rubel Kapital 180 Rubel Zinsen erhalten hat?

(Angabe) 800 Rubel Kapital 180 Rubel Zinsen ... 5 Jahre;

(Frage) 1000 " " 450 " " ... x " ?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto weniger Zeit ist nöthig, um bei gleichem Zinsfuße dieselben Zinsen zu haben; daher Kapital und Zinsen in indirectem Verhältnisse.

Je mehr Zinsen, desto mehr Jahre sind nöthig für dasselbe Kapital und denselben Zinsfuß; demnach stehen Zinsen und Zeit in indirectem Verhältnisse; also

$$x = \frac{(5 \text{ Jahre}) \times 800 \times 450}{1000 \times 180} = 10 \text{ Jahre.}$$

5) In 3 Jahren erhielt man 160 Rubel Zinsen bei 4%; in welcher Zeit trägt dasselbe Kapital 300 Rubel Zinsen bei 6%?

(Angabe) 160 Rubel Zinsen 4% ... 3 Jahre;

(Frage) 300 " " 6% ... x " ?

Beurtheilung. Je mehr Zinsen, desto länger muß das Kapital ausstehen; deshalb Zinsen und Zeit in directem Verhältnisse.

Je höhere Procente, in desto weniger Jahren wird man von demselben Kapital dieselben Zinsen erhalten; also Procente und Zeit in indirectem Verhältnisse; deshalb

$$x = \frac{(3 \text{ Jahre}) \times 300 \times 4}{160 \times 6} = 3\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

Aus den drei letzten Aufgaben ersehen wir, daß

- Zeit und Zinsen (bei gleichem Kapitale und demselben Zinsfuße) in directem Verhältnisse,
- Zeit und Procente (bei gleichem Kapitale und denselben Zinsen) in indirectem Verhältnisse,
- Zeit und Kapital (bei gleichen Zinsen und demselben Zinsfuße) in indirectem Verhältnisse, stehen.

§ 71. In dem vorhergehenden § haben wir zur Berechnung einer Größe, wenn die drei andern bei der Zinsrechnung vorkommenden gegeben waren, folgende Formeln gefunden:

$$I. \text{ Zinsen} = \frac{\text{Kapital} \times \text{Procente} \times \text{Zeit}}{100}$$

$$II. \text{ Procente} = \frac{100 \times \text{Zinsen}}{\text{Kapital} \times \text{Zeit}}$$

$$III. \text{ Kapital} = \frac{100 \times \text{Zinsen}}{\text{Procente} \times \text{Zeit}}$$

$$IV. \text{ Zeit} = \frac{100 \times \text{Zinsen}}{\text{Procente} \times \text{Kapital}}$$

Zugleich machten wir die Bemerkung, daß die Anwendung dieser Formeln nur eine beschränkte sei. Zu dieser Bemerkung wurden wir dadurch veranlaßt, daß wir nicht sogleich zeigen konnten, wie man die in der Aufgabe versteckt gegebene Größe herzuleiten habe. Jetzt wollen wir die Anwendbarkeit der Formeln in allen Fällen nachweisen.

1) Von einem gewissen Kapitale erhält man in 3 Jahren bei 5% 150 Rubel Zinsen; wieviel wird man in 7 Jahren bei 4% von demselben Kapitale erhalten?

(Angabe) 8 Jahre 5% 150 Rubel Zinsen;

(Frage) 7 „ 4% x „ „ ?

Die Angabe ist eigentlich eine Aufgabe für sich, und lautet: Welches Kapital giebt in 3 Jahren 150 Rubel Zinsen bei 5%?

Nach Formel (III) haben wir:

$$\text{Kapital} = \frac{100 \times 150}{3 \times 5} \text{ Rubel} = 1000 \text{ Rubel.}$$

Jetzt verwandelt sich die Frage in eine zweite Aufgabe, nemlich: Wieviel Zinsen bringt ein Kapital von 1000 Rubeln bis 4% in 7 Jahren?

Nach Formel (I) sind

$$\text{Zinsen} = \frac{1000 \times 4 \times 7}{100} \text{ Rubel} = 280 \text{ Rubel.}$$

2) Zu wieviel Procent muß ein Kapital von 720 Rubeln ausgeliehen werden, um in 3 Jahren an Zinsen ebensoviel zu tragen, als 1200 Rubel in 2 Jahren bei 4%?

(Angabe) 1200 Rbl. Kapital 2 Jahre ... 4% (zu suchen die Zinsen)

(Frage) 720 " " 3 " ... x%?

Aus der Angabe haben wir nach Formel (I)

$$\text{Zinsen} = \frac{1200 \times 2 \times 4}{100} \text{ Rubel} = 96 \text{ Rubel}$$

und jetzt aus der Frage, nach Formel (II)

$$\text{Procente} = \frac{100 \times 96}{720 \times 3} \% = 4\frac{2}{3}\%$$

3) In welcher Zeit erhält man von 420 Rubeln Kapital bei 4% eben so viel Zinsen, als von 1600 Rubeln Kapital in 5 Jahren bei 3%?

(Angabe) 1600 Rubel Kapital 3% 5 Jahre (zu suchen die Zinsen).

(Frage) 4200 " " 4% x " ?

Aus der Angabe folgt nach Formel (I)

$$\text{Zinsen} = \frac{1600 \times 5 \times 3}{100} \text{ Rubel} = 240 \text{ Rubel}$$

und aus der Frage nach Formel (III)

$$\text{Zeit} = \frac{100 \times 240}{4200 \times 4} \text{ Jahre} = 1\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

4) Von 1500 Rubeln Kapital erhält man bei gewissen Procenten in 5 Jahren 180 Rubel Zinsen; in welcher Zeit wird man bei demselben Zinsfuße von 3500 Rubeln Kapital 400 Rubel Zinsen erhalten?

(Angabe) 1500 R. Kapital 180 R. Zinsen ... 5 Jahre (zu suchen

(Frage) 3500 " " 400 " " ... x " ? Procente).

Aus der Angabe folgt nach Formel (II)

$$\text{Procente} = \frac{100 \times 180}{1500 \times 5} = 1\frac{2}{5} \text{ Procente.}$$

Aus der Frage nach Formel (IV)

$$\text{Zeit} = \frac{100 \times 400}{3500 \times (1\frac{2}{5})} \text{ Jahr} = 4\frac{1}{2} \text{ Jahr.}$$

§ 72. Bei der einfachen Zinsrechnung können noch folgende Fälle vorkommen:

- A. Die Zinsen zu finden, wenn mehrere Kapitale zu gleichem Zinsfuße und auf gleiche Zeit ausgegeben werden.
- B. Die Zinsen zu berechnen, wenn mehrere Kapitale zu gleichem Zinsfuße, aber auf verschiedene Zeiten, oder zu verschiedenem Zinsfuße und auf gleiche Zeit ausgegeben werden.
- C. Die Zinsen zu berechnen, wenn mehrere Kapitale zu verschiedenem Zinsfuße und auf verschiedene Zeiten ausgegeben werden.

Das Verfahren und die Begründung desselben für jeden einzelnen Fall ersieht man aus folgenden vollständig ausgerechneten Beispielen:

- A. Wie groß sind die Zinsen von a) 1500 Rubeln, b) 2500 Rubeln, c) 3000 Rubeln nach 3 Jahren bei 5 %?

Die Zinsen von 1500 Rbl. bei 5% in 3 Jahren sind	225 Rbl.	}	+
" " " 2500 " " 5% " 3 " "	375 " "		
" " " 3000 " " 5% " 3 " "	450 " "		
Zusammen		1050 Rubel	

Oder: die Zinsen von [1500 Rbl. + 2500 Rbl. + 3000 Rbl.] = 7000 Rubel bei 5% in 3 Jahren betragen

$$\frac{7000 \times 5 \times 3}{100} \text{ Rubel} = 1050 \text{ Rubel.}$$

Man berechnet entweder die Zinsen jedes einzelnen Kapitals und addirt dieselben, oder man addirt zuerst die Kapitale und berechnet von der Summe derselben die Zinsen.

- B. a) Wieviel Zinsen geben 300 Rubel in 5 Jahren, 800 Rubel in 4 Jahren, 700 Rubel in 3 Jahren, wenn alle zu 4 % ausstehen?

Auflösung. Es tragen ebensoviel Zinsen

300 Rubel in 5 Jahren als	300 . 5	Rubel in 1 Jahr
800 " " 4 " " 800 . 4 " " 1		
700 " " 3 " " 700 . 5 " " 1		

Die Zinsen für alle Kapitale werden gleich sein den Zinsen von der Summe [1500 Rubel + 3200 Rubel + 2100 Rubel] = 6800 Rubel in 1 Jahre. — Bei 4% sind dieselben

$$= \frac{6800 \times 4 \times 1}{100} \text{ Rubel} = 272 \text{ Rubel.}$$

Man multiplicirt jedes Kapital mit der Zeit und nimmt von der Summe der erhaltenen Producte die Zinsen eines Jahres bei dem gegebenen Zinsfuße.

b) Wieviel Zinsen erhält man in 5 Jahren von 1200 Rubeln à 4% , 720 Rubeln à 3% , 600 Rubeln à 5% ?

Auflösung:

1200 R. à 4%	geben	ebensviel	als	1200 R. $\times 4$	=	4800 R. à 1%	}	+
720 „ à 3%	„	„	„	720 „ $\times 3$	=	2160 „ à 1%		
600 „ à 5%	„	„	„	600 „ $\times 5$	=	3000 „ à 1%		

Alle zusammen ebensoviele als 9960 R. à 1% .

Daher sind für 5 Jahre die gesuchten Zinsen

$$= \frac{9960 \times 5 \times 1}{100} \text{ Rubel} = 498 \text{ Rubel.}$$

Man multiplicirt jedes einzelne Kapital mit seinem Zinsfuße und nimmt von der Summe der Producte die Zinsen für 5 Jahre à 1% .

c. Wieviel betragen die Zinsen von 350 Rubeln à 3% in 5 Jahren, 150 Rubeln à 4% in 6 Jahren und 200 Rubeln à 6% in 2 Jahren zusammen?

Auflösung. 350 Rubel à 3% tragen ebensoviele Zinsen als 350 Rubel $\times 3$ = 1050 Rubel à 1% ; in 5 Jahren 1050 Rubel $\times 5$ = 5250 Rubel in 1 Jahre à 1% ; wir haben daher zu setzen:

für 350 R. à 3%	in 5 J.	350 R. $\times 3 \times 5$	=	5250 R. à 1%	in 1 J.
„ 150 „ à 4%	„ 6 „	150 „ $\times 4 \times 6$	=	3600 „ à 1%	„ 1 „
„ 200 „ à 6%	„ 2 „	200 „ $\times 6 \times 2$	=	2400 „ à 1%	„ 1 „

Statt d. Zinsen sämtlicher Kapitale d. Zinsen v. 11250 R. à 1% in 1 J.

Diese sind = $\frac{11250 \text{ Rubel} \times 1 \times 1}{100} = 112\frac{1}{2} \text{ Rubel.}$

Man multiplicirt jedes einzelne Kapital mit seinem Zinsfuße und mit der Zeit, addirt hierauf sämtliche Kapitale und nimmt davon die Zinsen für 1 Jahr à 1 %.

§ 73. In der Zinsrechnung kommt eine Reihe von Aufgaben vor, in welchen die Zinsen mit dem Kapital zusammen als eine einzige Größe gegeben und dann wieder mit andern Größen verbunden werden.

1) Wieviel betragen Zinsen und Kapital nach 4 Jahren, wenn 800 Rubel zu $3\frac{1}{2}$ % ausstehen?

Auflösung. Die vierjährigen Zinsen sind

$$= \frac{800 \text{ Rubel} \times 4 \times 7}{100 \times 2} = 112 \text{ Rubel};$$

daher Kapital + Zinsen = 800 Rbl. + 112 Rbl. = 912 Rbl.

2) Welches Kapital beträgt bei 5 % mit seinen Zinsen zusammen nach einem Jahre 4200 Rubel Kapital?

Auflösung. 100 Rubel Kapital sind bei 5 % nach einem Jahre mit den Zinsen zusammen = 105 Rubel; also können wir schließen:

105 Rubel entstehen aus 100 Rubel

1 " entsteht " $1\frac{5}{100}$ "

4200 " entstehen " $1\frac{5}{100}$ " . 4200 = 4000 Rbl.

Von der Richtigkeit überzeugt man sich leicht durch eine Probe. — Es sind die Zinsen von 4000 für 1 Jahr bei 5 %

$$= \frac{4000 \text{ Rbl.} \times 5}{100} = 200 \text{ Rubel};$$

daher Kapital + Zinsen = 4200 Rubel.

3) Welches Kapital beträgt bei $3\frac{1}{2}$ % mit seinen 6jährigen Zinsen zusammen 6500 Rubel?

Auflösung. Die Zinsen von 100 Rbl. für 1 Jahr sind = $1\frac{6}{100}$ Rbl.; daher für 6 Jahre 6 mal mehr, d. h. = $19\frac{1}{2}$ Rubel. Es entstehen also nach 6 Jahren

119 $\frac{1}{2}$ Rubel aus 100 Rubel,

$$1 \text{ Rubel aus } \frac{100}{119\frac{1}{2}} = \frac{500}{596} \text{ Rubel,}$$

$$6500 \text{ Rubel aus } \frac{500}{596} \times 6500 = 5453 \frac{3}{149} \text{ Rubel.}$$

4) Jemand hat 350 Rubel ausgeliehen, und erhält nach einem Jahre mit den Zinsen zusammen $367\frac{1}{2}$ Rubel zurückgezahlt; wieviel Procente waren genommen?

Auflösung. Da $367\frac{1}{2}$ Rubel = Kapital + Zinsen = 350 Rubel + Zinsen, so müssen die Zinsen $367\frac{1}{2} - 350 = 17\frac{1}{2}$ Rubel betragen.

Nun schließen wir weiter:

350 Rubel Kapital geben $17\frac{1}{2}$ Rubel Zinsen;

folglich 1 Rubel Kapital giebt $\frac{35}{2 \cdot 350}$ Rubel Zinsen = $\frac{1}{20}$ Rubel;

also 100 Rubel Kapital geben $100 (\frac{1}{20} \text{ R.})$ Zinsen = 5 Rubel,
d. h. die gesuchte Zahl = 5 %.

5) Jemand hatte ausgeliehen 250 Rubel, und erhielt nach 8 Jahren nebst den Zinsen zurückgezahlt 340 Rubel; wieviel Procent waren gerechnet?

In 8 Jahren betragen die Zinsen $340 - 250 = 90$ Rubel,
also in 1 Jahre $\frac{90}{8} = 11\frac{1}{4}$ Rubel.

250 Rubel geben also $11\frac{1}{4}$ Rubel Zinsen,

1 Rubel giebt $\frac{45}{4 \cdot 250}$ Rubel Zinsen,

100 Rubel geben $\frac{45 \cdot 100}{4 \cdot 250} = 4\frac{1}{2}$ Rubel Zinsen, d. h.

$4\frac{1}{2}$ Procent,

6) Wie lange müssen 480 Rubel ausstehen, zu 4 %, damit sie mit den Zinsen zusammen 520 Rubel betragen?

Auflösung. Die Zinsen für die gesuchte Zeit betragen $520 - 480 = 40$ Rubel. In einem Jahr geben 480 Rubel an Zinsen

$$\frac{480 \times 4}{100} = 19\frac{1}{5} \text{ Rubel.}$$

Wir schließen also:

Die Zinsen betragen $19\frac{1}{2}$ Rubel in 1 Jahre,

1 Rubel in $\frac{5}{96}$ Jahr,

40 Rubel in $\frac{40 \cdot 5}{96} = 2\frac{1}{2}$ Jahre.

Uebungsfragen.

- 1) Was versteht man unter zusammengesetzter Regelbetri?
- 2) Auf welchem Wege findet man den Werth der gesuchten Zahl?
- 3) Worin besteht die sogenannte Bajedowsche Regel?
- 4) Was versteht man unter Kapital, Zinsen, Procenten?
- 5) Welches ist der Gegenstand der einfachen und welches der, der zusammengesetzten Zinsrechnung?
- 6) Durch welchen Ausdruck findet man die Zinsen, wenn Kapital, Zeit und Procente gegeben sind?
- 7) Durch welchen Ausdruck findet man die Procente, wenn Kapital, Zeit und Zinsen gegeben sind?
- 8) Durch welchen Ausdruck findet man das Kapital, wenn Zinsen, Zeit und Procente gegeben sind?
- 9) Durch welchen Ausdruck findet man die Zeit, wenn Zinsen Procente und Kapital gegeben sind?
- 10) Wie berechnet man die Zinsen von mehreren Kapitalien, die zu gleichen Zeiten und zu gleichem Zinsfuße ausgeliehen sind?
- 11) Wie findet man die Zinsen von mehreren Kapitalien, die zu gleichen Zeiten aber verschiedenem Zinsfuße und die zu verschiedenen Zeiten aber gleichem Zinsfuße ausgeliehen sind?
- 12) Wie findet man die Zinsen mehrerer Kapitale bei verschiedenen Zeiten und verschiedenem Zinsfuße?

Gesellschafts- oder Repartitions-Rechnung.

§ 74. Die Gesellschafts- oder Repartitions-Rechnung umfaßt solche Aufgaben, welche ein gegebenes Ganze in ungleiche Theile nach einer gegebenen Bedingung zu zerlegen verlangen.

Die Bedingung, nach der die Theilung geschehen soll, wird der Theilungsfuß genannt. Dieser ist entweder einfach, oder, wenn er aus den Bedingungen der Aufgabe durch Multiplication zweier oder mehrerer Zahlen mit einander hergeleitet werden muß, zusammengesetzt; daher man auch die einfache und die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung unterscheidet.

Es giebt eine unendliche Menge von Fällen, wo eine Theilung in ungleiche Theile erforderlich wird. Wird z. B. durch ein gemeinsames Unternehmen ein Totalgewinn erzielt oder ein Verlust herbeigeführt, so fordert die Billigkeit, daß demjenigen der Theilnehmer mehr zufalle, der bei dem Unternehmen durch einen größern Einsatz sich betheiligte, und daß er mehr verliere, wenn bei dem Unternehmen ein Verlust sich ergibt.

Diese Rechnung wird nicht allein im Handel, sondern auch bei Erbschaften, Repartitionen der Steuern, Inquartierungen u. s. w. angewendet.

a) Einfache Gesellschafts-Rechnung.

1) A und B handeln in Gemeinschaft und verdienen 2000 Rbl. A hat 1500 Rubel, B 2500 Rubel zum Geschäfte hergegeben; wieviel erhält jeder?

Ausrechnung. A hat gegeben 1500 Rubel

B " " 2500 "

Beide zusammen 4000 Rubel.

Mit 4000 Rubel sind gewonnen 2000 Rubel.

also mit 1 " " " $\frac{2000}{4000} = \frac{1}{2}$ Rubel

folgl. mit 1500 " " " $1500 \times \frac{1}{2}$ Rbl. = 750 R.

mit 2500 " " " $2500 \times \frac{1}{2}$ Rbl. = 1250 R.

Es erhielt also A 750 Rubel, B 1250 Rubel.

2) Zu einem Unternehmen geben A 350 Rubel, B 240 Rubel, C 210 Rubel, D 200 Rubel. Sie gewinnen 800 Rubel. Wieviel erhält jeder?

Ausrechnung.

A = 350 Rubel

B = 240 "

C = 210 "

D = 200 "

Alle zusammen = 1000 Rubel.

Also 1000 Rubel Einlage geben 800 Rubel Gewinn;

folglich 1 Rubel Einlage giebt $\frac{800}{1000}$ Rubel Gewinn = $\frac{4}{5}$ Rbl.	
Mithin erhält:	A 350 . ($\frac{4}{5}$ Rubel) = 280 Rubel
	B 240 . ($\frac{4}{5}$ " = 192 "
	C 210 . ($\frac{4}{5}$ " = 168 "
	D 200 . ($\frac{4}{5}$ " = 160 "
Ganzer Gewinn = 800 Rubel.	

Hieraus ergibt sich folgende Regel: Man addire sämtliche Einlagen; dividire mit der Summe in den Totalgewinn und multiplicire mit dem Quotienten die Einlage jedes einzelnen Theilhabers.

3) A, B und C geben gleich viel Kapital zu einem Geschäft: A auf 5 Monate, B auf 9 Monate und C auf 11 Monate. Ihr Gewinn beträgt 320 Rubel. Was erhält jeder?

Ausrechnung.	A 5 Monate
	B 9 " "
	C 11 " "
25 Monate.	

Für 1 Monat ist der Gewinn = $\frac{320}{25}$ Rubel = $6\frac{4}{5}$ Rubel;	
daher erhält:	A 5 . ($6\frac{4}{5}$ Rubel) = 64 Rubel,
	B 9 . ($6\frac{4}{5}$ ") = 115 $\frac{1}{5}$ "
	C 11 . ($6\frac{4}{5}$ ") = 140 $\frac{4}{5}$ "
Ganzer Gewinn = 320 Rubel.	

4) Mit 3200 Rubeln wurde so viel gewonnen, daß erhalten konnte A 280 Rubel, B 420 Rubel, C 500 Rubel; wieviel hatte jeder eingelegt?

Ausrechnung.	Gewinn des A = 280 Rubel	}	+
	" " B = 420 "		
	" " C = 500 "		
Totalgewinn = 1200 Rubel.			

Nun schließen wir:

1200 Rubel sind gewonnen durch 3200 Rubel,

$$1 \text{ Rubel ist gewonnen durch } \frac{3200}{1200} = \frac{8}{3} \text{ Rubel.}$$

Also hat A eingelegt:	280 . ($\frac{2}{3}$ Rbl.)	=	746 $\frac{2}{3}$ Rubel	}
" " B	420 . ($\frac{2}{3}$ ")	=	1120 " "	
" " C	" " 500 . ($\frac{2}{3}$ ")	=	1333 $\frac{1}{3}$ " "	
Totaleinlage = 3200 Rubel.				

5) Ein Geschäft brachte einen Gewinn, von welchem A 150 Rubel, B 250 Rubel, C 340 Rubel, D 160 Rubel erhielt. A hatte eingelegt 1000 Rubel. Wie groß ist die Einlage des B, C, D?

Ausrechnung.

150 R. Gewinn gab eine Einlage von 1000 R.;

folglich 1 " " " " " " $\frac{1000}{150}$ R. = 6 $\frac{2}{3}$ Rubel.

Demnach ist die Einlage des A = 1000 R.

" " " B = 250 . ($\frac{2}{3}$ R.) = 1666 $\frac{2}{3}$ "

" " " C = 340 . ($\frac{2}{3}$ ") = 2266 $\frac{2}{3}$ "

" " " D = 160 . ($\frac{2}{3}$ ") = 1066 $\frac{2}{3}$ "

Ueberhaupt = 6000 R.

Zuweilen wird der Antheil des Einen nach dem Antheile des Andern bestimmt, z. B.

6) A, B, C und D sollen sich in 440 Rubel so theilen, daß B $\frac{2}{3}$ von A, C $\frac{1}{2}$ von B, und D soviel als B und C zusammen erhalte. Wieviel bekommt jeder?

Ausrechnung.

Antheil des A = 1 Theil; deshalb ist

" " B = $\frac{2}{3}$ " (1 Theil \times $\frac{2}{3}$)

" " C = $\frac{1}{2}$ " (1 Theil \times $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$)

" " D = $\frac{3}{2}$ " ($\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = B + C$)

Zusammen = 2 $\frac{1}{2}$ Theile.

Es kommen also auf $\frac{1}{2}$ Theile ... 440 Rubel;

folglich " 1 Theil ... 44 $\frac{0}{1}$ Rbl. \times 5 = 200 Rbl. für A

" " $\frac{2}{3}$ Theile ... (200 ") \times $\frac{2}{3}$ = 80 " " B

" " $\frac{1}{2}$ Theil ... (200 ") \times $\frac{1}{2}$ = 40 " " C

" " $\frac{3}{2}$ Theile ... (200 ") \times $\frac{3}{2}$ = 120 " " D

Summe = 440 Rubel.

Häufig giebt man blos relativ an, in welcher Beziehung die einzelnen Theile des zu theilenden Ganzen zu einander stehen sollen, z. B.

7) Man soll 50 in zwei Theile theilen, die sich zu einander verhalten, wie 2 zu 3, d. h., so oft auf den ersten Theil 2 fallen, soll der zweite 3 bekommen. Durch Zeichen wird dieser Theilungsfuß folgendermaßen ausgedrückt:

$$A : B = 2 : 3.$$

Ausrechnung. Da A 2 erhält, wenn B 3 nimmt, so nehmen beide auf einmal 5. So oft also 5 in der zu theilenden Zahl enthalten ist, eben so oft kann A 2 und B 3 erhalten.

Nun ist $50 : 5 = 10$, folglich der eine Theil $A = (10) \times 2 = 20$, und der andere Theil $B = (10) \times 3 = 30$.

8) 780 Rubel sollen unter A, B, C so getheilt werden, daß sich ihre Anthteile verhalten wie 3 : 4 : 5. Wie groß ist jeder Theil?

Ausrechnung. Summe der Verhältnißzahlen $= 3 + 4 + 5 = 12$; daher 12 Theile $= 780$ R.; folglich 1 Theil $= \frac{780}{12}$ R. $= 65$ R.;

mithin erhält A 3 . (65 Rubel) $= 195$ Rubel

B 4 . (65 „) $= 260$ „

C 5 . (65 „) $= 325$ „

Summe $= 780$ Rubel.

§ 75. Zwei Brüche von gleichen Nennern verhalten sich wie ihre Zähler; denn

$$\left(\frac{5}{12}\right) : \left(\frac{7}{12}\right) = \frac{5}{12} \times \frac{12}{7} = \frac{5}{7} = 5 : 7.$$

Sind nun Verhältnißzahlen durch Brüche gegeben, so bringt man sie auf gleiche Benennung, und dann drücken ihre Zähler dasselbe Verhältniß aus. Wenn daher sein soll:

$$A : B : C : D = \frac{2}{3} : \frac{5}{6} : \frac{8}{9} : \frac{1}{12},$$

so erhält man durch Multiplication mit dem Generalnenner 36

$$\begin{aligned} A : B : C : D &= \frac{24}{36} : \frac{30}{36} : \frac{32}{36} : \frac{3}{36} \\ &= 24 : 30 : 32 : 3. \end{aligned}$$

9) A, B, C sollen sich in 115 Rubel so theilen, daß sich die Antheile verhalten wie $(\frac{1}{2}) : (\frac{2}{3}) : (\frac{3}{4})$; wie groß ist jeder Theil?

Ausrechnung. $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{6}{12} : \frac{8}{12} : \frac{9}{12} = 6 : 8 : 9$, daher
 $6 + 8 + 9 = 23$ Theile = 115 Rubel, mithin 1 Theil
 = $\frac{115}{23}$ Rubel; also erhält

A	6 .	(5 Rubel)	=	30 Rubel
B	8 .	(5 „)	=	40 „
C	9 ,	(5 „)	=	45 „

Summe = 115 Rubel.

§ 76. Zuweilen tritt der Fall ein, daß in einer Aufgabe nicht ein gleiches Verhältniß für alle Theile, sondern verschiedene Verhältnisse gegeben sind. Hier müssen die verschiedenen Verhältnisse zuvor auf ein gleiches Verhältniß gebracht werden, bevor die Theilung nach den früheren Regeln ausgeführt wird.

10) Von 450 Rubeln soll, so oft A 3 Rubel erhält, B 5 Rubel bekommen; so oft aber B 4 Rubel nimmt, sollen dem C 7 Rubel zufallen. Was erhält jeder?

Ausrechnung. Wir haben hier:

$$A : B = 3 : 5$$

$$B : C = 4 : 7$$

Um ein gleiches Verhältniß zwischen A, B und C herzustellen, schließen wir:

So oft B 4 Rubel, — erhält C 7 Rubel.

So oft B 1 Rubel, — erhält C $\frac{7}{4}$ Rubel.

So oft B 5 Rubel, — erhält C 5 . ($\frac{7}{4}$ Rubel), d. h. $\frac{35}{4}$ Rbl.

Also $A : B : C = 3 : 5 : \frac{35}{4}$; oder mit 4 multiplicirt
 = 12 : 20 : 35.

Man kann auch folgende Schlußfolge anwenden:

So oft B 5 Rubel, — erhält A 3 Rubel.

So oft B 1 Rubel, — erhält A $\frac{3}{5}$ Rubel,

So oft B 4 Rubel, — erhält A 4 . ($\frac{3}{5}$ Rubel), d. h. $\frac{12}{5}$ Rbl.

$$\text{Also } A : B : C = 1\frac{2}{5} : 4 : 7; \text{ oder mit 5 multipliziert} \\ = 12 : 20 : 35.$$

Nun haben wir $12 + 20 + 35 = 67$ Theile = 450 Rubel.

$$1 \text{ Theil} = \frac{450 \text{ Rubel.}}{67}$$

67

$$\text{Also A bekommt } 12 \cdot \left(\frac{450}{67}\right) \text{ Rubel} = 80\frac{40}{67} \text{ Rubel}$$

$$B \quad " \quad 20 \cdot \left(\frac{450}{67}\right) \quad " = 134\frac{20}{67} \quad "$$

$$D \quad " \quad 35 \cdot \left(\frac{450}{67}\right) \quad " = 235\frac{5}{67} \quad "$$

$$\text{Summe} = 450 \text{ Rubel.}$$

11) Es soll eine Zahl so unter A, B, C und D getheilt werden, daß sich der Antheil des A zu dem Antheile des B wie 3 : 4; des B : C = 5 : 9; des C : D = 6 : 11 verhalte. Welches ist das gemeinsame Verhältniß der vier Antheile?

$$\text{Auflösung. Wir haben } A : B = 3 : 4$$

$$B : C = 5 : 9$$

$$C : D = 6 : 11$$

und können auf 8 Wegen die zwei fehlenden Verhältnißzahlen bestimmen.

a) Da sein soll $A : B = 3 : 4$ und $B : C = 5 : 9$, so schließen wir:

$$\text{So oft B 5, erhält C } \dots 9$$

$$\text{So oft B 1, erhält C } \dots \frac{9}{5}$$

$$\text{So oft B 4, erhält C } \dots 4 \cdot \left(\frac{9}{5}\right) = \frac{36}{5}$$

Also $A : B : C = 3 : 4 : \frac{36}{5}$. — Da ferner sein soll $C : D = 6 : 11$, so schließen wir:

$$\text{So oft C 6, erhält D } \dots 11$$

$$\text{So oft C 1, erhält D } \dots \frac{11}{6}$$

$$\text{So oft C } \frac{36}{5}, \text{ erhält D } \dots \left(\frac{36}{5}\right) \cdot \frac{11}{6} = \frac{66}{5}$$

$$\text{daher } A : B : C : D = 3 : 4 : \frac{36}{5} : \frac{66}{5}$$

$$= 15 : 20 : 36 : 66.$$

b) Da wir haben sollen $A : B = 3 : 4$ und $B : C = 5 : 9$, so schließen wir:

So oft B 4, erhält A . . . 3

So oft B 1, erhält A . . . $\frac{3}{4}$

So oft B 5, erhält A . . . $5 \cdot (\frac{3}{4}) = \frac{15}{4}$.

Also $A : B : C = \frac{15}{4} : 5 : 9$; — da ferner $C : D = 6 : 11$ sein soll, so haben wir:

So oft C 6, erhält D . . . 11

So oft C 1, erhält D . . . $\frac{11}{6}$

So oft C 9, erhält D . . . $9 \cdot (\frac{11}{6}) = \frac{33}{2}$,

dennach $A : B : C : D = \frac{15}{4} : 5 : 9 : \frac{33}{2}$, und multiplicirt mit 4
 $= 15 : 20 : 36 : 66$.

c) Aus $B : C = 5 : 9$ und $C : D = 6 : 11$ folgt:

So oft C 9, erhält B . . . 5

So oft C 1, erhält B . . . $\frac{5}{9}$

So oft C 6, erhält B . . . $6 \cdot (\frac{5}{9}) = \frac{10}{3}$.

Also $B : C : D = \frac{10}{3} : 6 : 11$; da nun sein soll $A : B = 3 : 4$,
 so schließen wir:

So oft B 4, erhält A . . . 3

So oft B 1, erhält A . . . $\frac{3}{4}$

So oft B $\frac{10}{3}$ erhält A . . . $(\frac{10}{3}) \cdot (\frac{3}{4}) = \frac{5}{2}$,

folglich $A : B : C : D = \frac{5}{2} : \frac{10}{3} : 6 : 11$ und mit 6 multiplicirt
 $= 15 : 20 : 36 : 66$.

Dieses Verfahren ist weilkäufig, und wird bei Aufgaben, die mehr als 4 Theile enthalten, äußerst umständlich; deshalb merke man sich folgende praktische Regel zur Herstellung eines gleichen Verhältnisses für alle Theile aus den gegebenen Verhältnissen der einzelnen Theile.

12) Es sei z. B. gegeben: $A : B = 2 : 3$

$B : C = 5 : 7$

$C : D = 8 : 9$

$D : E = 10 : 11,$

dann setze man: $A = 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10,$

und leite hieraus die Werthe für B, C, D und E dadurch her,

daß man den vorkommenden Factor mit dem daneben stehenden Divisor vertauscht; also wird sein

$$B = 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10$$

$$C = 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10$$

$$D = 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10$$

$$E = 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11.$$

Von der Richtigkeit der erhaltenen Zahlen überzeugt man sich leicht; denn es ist:

$$\frac{A}{B} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{2}{3} = 2 : 3$$

$$\frac{B}{C} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{5}{7} = 5 : 7$$

$$\frac{C}{D} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{8}{9} = 8 : 9$$

$$\frac{D}{E} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} = \frac{10}{11} = 10 : 11.$$

Durch dieses Verfahren erhält man oft für die Glieder der Verhältnisse solche Zahlen, die gemeinsame Factoren enthalten. Letztere müssen dann immer entfernt werden.

§ 77. Es giebt Aufgaben, die neben den Verhältnißzahlen noch andere Zahlen enthalten, die mit den Verhältnißzahlen durch Addition oder Subtraction verbunden sind. Die Auflösung solcher Aufgaben macht man dadurch, daß man die Summe der Verhältnißzahlen erst von den hinzu addirten oder davon subtrahirten Zahlen trennt, und das Suchen der Theile auf die gewöhnliche Weise ausführt; z. B.

13) Drei Personen theilen sich in 1600 Rubel dergestalt, daß B 60 Rubel mehr als A und C 40 Rubel mehr als A erhalten soll; wieviel bekommt jeder?

Ausrechnung. A = 1 Theil

B = 1 Theil + 60 Rubel

C = 1 Theil + 40 Rubel

Zusammen 3 Theile + 100 Rubel.

Da A keinen Antheil davon hat, was B und C zum voraus bekommen, so müssen wir die 100 Rubel von der zu theilenden Summe = 1600 Rubel zuvor wegnehmen; also 1600 Rubel — 100 Rubel = 1500 Rubel = 3 Theile setzen, woraus sich ergibt:

$$1 \text{ Theil} = \frac{1500 \text{ Rubel}}{3} = 500 \text{ Rubel};$$

Also erhält A 500 Rubel,

B 500 + 60 = 560 "

C 500 + 40 = 540 "

Im Ganzen 1600 Rubel.

14) Drei Personen theilen sich in 110 Rubel so, daß B 20 Rubel weniger als A und C 30 Rubel weniger als B bekommen soll; wieviel erhält jeder?

Ausrechnung:

A = 1 Theil

B = 1 Theil — 20 Rubel

C = 1 Theil — 50 R. (nehmlich 1 Theil — 20 R. — 30 R.)

Zusammen 3 Theile — 70 Rubel.

3 Theile — 70 Rubel sind gleich der zu theilenden Summe. Da man von 3 Theilen erst 70 Rubel wegnehmen muß, um die zu vertheilende Summe zu erhalten, so müssen 3 Theile um 70 Rubel zu groß sein. Addiren wir demnach 70 Rubel zu der Hauptsumme, so wird sich ergeben:

$$3 \text{ Theile} = 110 \text{ Rubel} + 70 \text{ Rubel} = 180 \text{ Rubel}$$

$$1 \text{ Theil} = \frac{180 \text{ Rubel}}{3} = 60 \text{ Rubel},$$

folglich erhielt A 60 Rubel

B 60 — 20 = 40 "

C 60 — 50 = 10 "

Zusammen 110 Rubel.

Aus den beiden letzten Beispielen leiten wir uns folgende Regel ab: Was zu den Theilen addirt ist, wird von der Hauptsumme abgezogen, und was von den Theilen subtrahirt ist, wird zu der Hauptsumme addirt.

b) Zusammengesetzte Gesellschafts-Rechnung.

§ 78. Der Theilungsfuß ist zusammengesetzt, wenn die Verhältnißzahl jedes einzelnen Theiles nicht unmittelbar gegeben ist, sondern dadurch, daß man zwei oder mehrere Zahlen mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt, erst abgeleitet werden muß; z. B. die Theilung eines Gewinnes nach Maßgabe des eingelegten Kapitals und der Zeit, oder des eingelegten Kapitals und der Procente, die jedem Theilnehmer nach gemeinsamer Uebereinkunft zugestanden werden. — Stehen die Bedingungs- zahlen in directem Verhältnisse, so werden sie mit einander multiplicirt; stehen sie aber in indirectem Verhältnisse, so findet eine Division derselben durch einander statt. Z. B.

15) Drei Personen treten zu einem gemeinschaftlichen Ge- schäfte zusammen. A giebt 200 Rubel auf 5 Monate, B 100 Rubel auf 8 Monate, C 320 Rubel auf $3\frac{1}{2}$ Monate. Sie ge- winnen 584 Rubel; wieviel erhält jeder?

Auflösung. Hier hängt der Antheil jedes Einzelnen von dem eingelegten Kapitale und der Zeit, die es im Geschäfte stand, ab; deshalb schließen wir:

200 Rubel Kapital tragen in 5 Monaten ebensoviel Zinsen als $(200 \text{ Rubel}) \times 5 = 1000$ Rubel in 1 Monate. Die ein- fachen gemeinsamen Verhältnißzahlen sind daher:

$$A \dots (200 \text{ Rubel}) \times 5 = 1000 \text{ Rubel}$$

$$B \dots (100 \text{ „}) \times 8 = 800 \text{ „}$$

$$C \dots (320 \text{ „}) \times \frac{7}{2} = 1120 \text{ „}$$

$$\text{Zusammen} = 2920 \text{ Rubel.}$$

2920 Rubel Einlage 584 Rubel Gewinn

1 Rubel Einlage $\frac{584}{2920}$ Rubel Gewinn = $\frac{1}{5}$ Rubel Gewinn,
folglich erhält A $1000 \cdot (\frac{1}{5} \text{ Rubel}) = 200 \text{ Rubel}$

$$B \dots 800 \cdot (\frac{1}{5} \text{ „}) = 160 \text{ „}$$

$$C \dots 1120 \cdot (\frac{1}{5} \text{ „}) = 224 \text{ „}$$

$$\text{Summe} = 584 \text{ Rubel.}$$

16) Bei einem Bau sind beschäftigt in dem ersten Zeitraume 5 Arbeiter, in dem zweiten 12 Arbeiter. Der Arbeitslohn für den ersten Zeitraum beträgt 30 Kubel, für den zweiten 60 Kubel. — Der ganze Bau währte 22 Tage und der Tagelohn für jeden Arbeiter war derselbe. Aus wieviel Tagen bestand jeder Zeitraum.

Ausrechnung.

Die Zahlungen an Lohn während der beiden Zeiträume verhalten sich wie 30 : 60 oder wie 1 : 2; die Arbeiter stehen ihrer Anzahl nach in dem Verhältnisse 5 : 12.

Nun steht die Zahl der Arbeitstage mit dem Arbeitslohne in directem, mit der Zahl der Arbeiter in indirectem Verhältnisse; folglich werden wir das Verhältniß der Arbeitstage erhalten, wenn wir mit den Verhältnißzahlen der Arbeiter in die Verhältnißzahlen des Arbeitslohnes dividiren.

Es verhalten sich also die Arbeitstage der beiden Zeiträume wie $\frac{1}{2} : \frac{5}{12} = 6 : 5$.

$$\text{Nun ist } 6 + 5 = 11 \text{ Theile} = 22 \text{ Tage}$$

$$1 \text{ Theil} = 2 \text{ Tage;}$$

folglich bestand der erste Zeitraum aus $6 \cdot (2 \text{ Tagen}) = 12 \text{ Tagen}$
und der zweite „ „ $5 \cdot (2 \text{ Tagen}) = 10 \text{ Tagen}$.

Vermischungsrechnung.

§ 79. Verbinden sich zwei Stoffe so mit einander, daß eine gleichartige Masse entsteht, und ist man nicht im Stande, die einzelnen Theilchen nach geschehener Verbindung von einander zu unterscheiden, so nennt man dieses eine Mischung. Können aber in der Verbindung die einzelnen Theile der verschiedenartigen mit einander verbundenen Stoffe noch von einander unterschieden werden, so nennt man es ein Gemenge. Eine Mischung erhalten wir z. B., wenn Wein und Wasser zusammengegossen, und zwei Metalle zusammengeschmolzen werden; ein Gemenge, wenn wir zwei Getreidearten zusammenschütten.

Der Werth einer Mischung oder eines Gemenges ist von dem Werthe der Bestandtheile abhängig. — Wir setzen voraus, daß die Quantität der Mischung immer gleich bleibt der Summe der Quantitäten der Theile; z. B. wenn 5 Maß Spiritus mit 3 Maß Wasser gemischt werden, so nehmen wir an, daß das Gemisch aus $(5 + 3)$ Maß = 8 Maß bestehe. — Die Erfahrung bestätigt diese Annahme nicht, indessen ist der Unterschied so gering, daß wir ohne bedeutenden Irrthum bei unserer Voraussetzung bleiben können.

Außer der Menge (Quantität) haben wir die Güte (Qualität) der mit einander verbundenen Stoffe zu berücksichtigen. — Die Menge wird durch die entsprechenden Maße, — die Güte meist durch den Preis bestimmt. — Bei der Mischung der Metalle befolgt man ein eigenthümliches Verfahren, den Gehalt an edlen Metallen, die in der Mischung vorkommen, anzugeben. Sind z. B. in ein 1 Pfund = 96 Solotnik 84 Solotnik reines Silber und 12 Solotnik Zusatz enthalten, so sagt man, die Mischung sei von der vierundachtziger Probe, und umgekehrt, eine Mischung von der 60ger Probe enthält 60 Solotnik edles Metall und $(96 - 60)$ Solotnik = 36 Solotnik Zusatz.

In Deutschland ist das Grundgewicht für Gold und Silber eine kölnische Mark, welche entweder in 16 Loth oder in 24 Mark getheilt wird. — Beim Golde giebt man an, wieviel Karat reines Gold in einer kölnischen Mark vorkommen, und nennt dann die Mischung karatig; z. B. 18karatiges Gold enthält auf 1 Mark = 24 Karat 18 Karat reines Gold und 6 Karat Zusatz; beim Silber wird angegeben, wieviel Loth reines Silber in einer Mark vorkommt, und nennt dann die Mischung löthig; z. B. 14löthiges Silber enthält auf einer Mark = 16 Loth 14 Loth feines Silber und 2 Loth Zusatz.

Ist das Silber und Gold ganz rein, ohne Zusatz, so nennt man es fein; mit einem Zusatz dagegen rauh. — Weil man das Zusammenschmelzen der Metalle legiren nennt, und die Vermischungsrechnung sich vorzüglich mit Aufgaben beschäftigt, die sich darauf beziehen, so nennt man diese Rechnungsart auch Alligationes-Regel.

Es können hauptsächlich folgende Fälle vorkommen:

I. Man soll aus der gegebenen Quantität und Qualität eines jeden der mit einander zu verbindenden Theile die Qualität der Mischung bestimmen.

Die Qualität wird gewöhnlich durch den Preis der Einheit bestimmt, und die Quantität giebt die Menge der Einheiten an, daher wird das Product der Quantität und Qualität den Werth des Ganzen angeben; z. B.

a) Von 10 Maß Wein, wovon jedes Maß $1\frac{1}{2}$ Rubl. kostet, ist 10 Maß die Quantität und $1\frac{1}{2}$ Rubel die Qualität; daher $10 \cdot (1\frac{1}{2} \text{ Rubel}) = 15 \text{ Rubel}$ der Werth des ganzen Weins.

b) Dieser Satz findet auch seine Anwendung, wenn die Qualität den Preis nur mittelbar angiebt; z. B. bei 5 Pfund Silber von der 84ger Probe ist 5 Pfund die Quantität und 84ger Probe die Qualität, so daß $5 \cdot (84 \text{ Solotnik}) = 420 \text{ Solotnik}$ angiebt, wieviel feines Silber in 5 Pfund enthalten ist. — Wenn man nun den Preis von 1 Solotnik feines Silber kennt, so ist dadurch der Werth der ganzen Mischung angegeben.

1) Es werden gemischt 15 Maß Wein à 80 Kopfen; 20 Maß à 120 Kopfen; 25 Maß à 140 Kopfen. — Wie hoch kommt jedes Maß der Mischung?

Ausrechnung.

$$15 \text{ Maß zu } 80 \text{ Kop.} = 1200 \text{ Kop.}$$

$$20 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 120 \quad \text{,,} = 2400 \quad \text{,,}$$

$$25 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 140 \quad \text{,,} = 3500 \quad \text{,,}$$

$$60 \text{ Maß zusammen} = 7100 \text{ Kop.}$$

also 1 Maß kostet $118\frac{1}{3}$ Kop.

2) Es werden zusammengeschmolzen 15 Pfund Silber von der 84ger Probe, 12 Pfund von der 60ger und 13 Pfund von der 48ger Probe. Welchen Gehalt hat die Mischung?

Ausrechnung.

15 Pfund der 84ger Probe enthalten 1260 Sol. fein,

12 " " 60ger " " 720 " "

13 " " 48ger " " 624 " "

40 Pfund enthalten also 2604 Sol. fein,

1 Pfund enthält folglich $65\frac{1}{10}$ Sol., d. h. das Gemisch hat die $65\frac{1}{10}$ Probe.

Die Regel für die Auflösung ähnlicher Aufgaben ist daher: Man multiplicirt die Quantität mit der Qualität, und dividirt mit der Summe der Bestandtheile in die Summe der Producte.

II. Man soll bei einer Mischung, die aus zwei Theilen besteht, die Quantität und Qualität des einen Bestandtheils finden, wenn die Quantität und Qualität sowohl des Ganzen, als des andern Bestandtheils gegeben ist; z. B.

3) Jemand braucht 150 Kruschken Spiritus, wovon jede Kruschke 35 Ropcken kostet, und will dazu 70 Kruschken à 40 Ropcken nehmen; wie hoch kommt jede Kruschke einer schlechtern Sorte, die er hinzuthun muß?

Ausrechnung.

150 Kruschken zu 35 Kop. kosten 5250 Kop.

70 " " 40 " " 2800 "

Die fehlenden 80 Kruschf. kosten also 2450 Ropcken, also 1 Kruschke kostet $30\frac{1}{2}$ Kop.

4) Von welchem Gehalt muß das Silber sein, wenn man es mit $2\frac{1}{2}$ Pfund von der 60ger Probe mischen soll, um 7 Pfund von der 72ger Probe zu erhalten?

Ausrechnung.

7 Pfund von der 72ger Probe enthalten 504 Solotnik fein,

$2\frac{1}{2}$ " " " 60ger " " 150 " "

$4\frac{1}{2}$ Pfund von der x Probe enthalten 354 Solotnik fein,

$$\text{also } x = \frac{354 \text{ Solotnik}}{4\frac{1}{2}} = 78\frac{2}{3} \text{ Solotnik;}$$

daher ist der andere Bestandtheil von der $78\frac{2}{3}$ Probe.

Besteht die Mischung, deren Quantität und Qualität gegeben ist, aus mehr als zwei Bestandtheilen, und man kennt von jedem dieser Bestandtheile, mit Ausnahme eines einzigen, die Quantität und Qualität, so ist das Fehlende auf dieselbe Weise zu finden; z. B.

5) Eine Composition wiegt 120 Pfund, und es kostet jedes Pfund 25 Ropcken; in derselben kommen vier Substanzen vor:

die erste Substanz wiegt 25 Pfund à 30 Kopfen; die zweite wiegt 30 Pfund à 20 Kopfen; die dritte wiegt 15 Pfund à 15 Kopfen; wie hoch kommt jedes Pfund der vierten Substanz?

Ausrechnung.

25 Pfund zu 30 Kopfen	= 750 Kopfen
50 " " 20 "	= 600 "
15 " " 15 "	= 225 "
70 Pfund kosten also 1575 Kopfen.	
120 Pfund zu 25 Kop. kosten 3000 Kopfen.	

Es fehlen 50 Pfd. und diese kosten 1435 Kopfen, also kostet 1 Pfund der vierten Substanz $28\frac{1}{2}$ Kopfen.

Die Regel zur Ausrechnung ähnlicher Aufgaben heißt: Man multiplicirt Quantität und Qualität und dividirt mit dem Unterschiede der Quantitäten in den Unterschied der Producte.

III. In einer Mischung, die aus zwei Stoffen besteht, kennt man die Quantität und Qualität der Mischung, und außerdem die Qualität jedes einzelnen Bestandtheils; man soll die Quantitäten dieser Bestandtheile ermitteln; z. B.

6) Aus 22karatigem und 14karatigem Golde soll eine Mittelsorte hergestellt werden, die 20karatig ist.

Ausrechnung. Nimmt man zur Mischung eine Mark von 22karatigem Golde, so erleidet man einen Verlust von 2 Karat = $(22-20)$ Karat; wird von der schlechtern Sorte 1 Mark genommen, so bringt das einen Vortheil von 6 Karat = $(20-14)$ Karat zu Wege. Es entsteht jetzt die Frage: „Wieviel muß man von der schlechtern Sorte zu einer Mark der bessern hinzufügen, damit Schaden und Vortheil sich ausgleichen, d. h. einander gleich werden?“ — Wir schließen:

6 Karat Vortheil geben 1 Mark der schlechtern Sorte	
daher 1 Karat Vortheil	$\frac{1}{6}$ Mark der schlechtern Sorte
folglich 2 Karate Vortheil	$\frac{2}{6}$ Mark der schlechtern Sorte
= $\frac{1}{3}$ Mark.	

Wenn wir also 1 Mark von 22karatigem und $\frac{1}{3}$ Mark von

14karatigem Golde nehmen, so erhalten wir $11\frac{1}{3}$ Mark von 20karatigem Golde.

Probe. 1 Mark 22karatiges Gold enthält 22 Karat fein
 $\frac{1}{3}$ " 14karatiges " " $4\frac{2}{3}$ " "

Beide zusammen $26\frac{2}{3}$ Karat fein.

In der Mischung von $1\frac{1}{3}$ Mark sind enthalten $26\frac{2}{3}$ Karat fein, folglich kommen auf 1 Mark $\frac{26\frac{2}{3}}{1\frac{1}{3}}$ Karat = 20 Karat, wie die Aufgabe es verlangt.

Wir sehen hieraus, daß der Zusatz von der schlechtern Sorte zu einer Einheit der bessern Sorte gefunden wird, wenn wir mit dem Unterschiede zwischen der Mittel- und schlechtern Sorte in den Unterschied der bessern und Mittelsorte dividiren; nemlich:

Bessere Sorte	22	(22—20) = 2
Mittelsorte	20	
Schlechtere Sorte ...	14	(20—14) = 6.

Setzt man also 1 von der bessern Sorte, so muß man $\frac{2}{3}$ von der schlechtern Sorte nehmen. Es verhält sich demnach die Menge der bessern Sorte zu der Menge der schlechtern Sorte wie 1 : $\frac{2}{3}$, oder wie 6 : 2.

Die Quantitäten der mit einander zu verbindenden Theile müssen sich also umgekehrt zu einander verhalten, wie der Unterschied ihrer Qualitäten von der Qualität der zu bildenden Verbindung.

Soll eine bestimmte Quantität der Verbindung hervorgebracht werden, so hat man nur nöthig, nach der Gesellschafts-Regel in dem gefundenen Verhältnisse der Quantitäten beider Theile zu rechnen; z. B.

7) Wieviel muß man von 14löthigem und 8löthigem Silber nehmen, um 14 Mark 10löthiges Silber zu erhalten?

Ausrechnung.

Die bessere Sorte enthält 14 Loth auf 1 Mark
 " Mittelsorte " 10 " " 1 "

Also ist der Schaden = 4 Loth auf 1 Mark.

Die Mittelsorte enthält 10 Loth auf 1 Mark
 „ schlechtere Sorte „ 8 „ „ 1 „

Also ist der Vortheil = 2 Loth auf 1 Mark.

Mithin muß sich verhalten: Quantität der bessern Sorte zur Quantität der schlechtern, wie 2 : 4.

Es soll die Mischung 14 Mark enthalten, daher haben wir diese Zahl in zwei Theile zu theilen, die sich verhalten wie 2 : 4. Da nun $2 + 4 = 6$, so ist zu nehmen:

von der bessern Sorte: $2 \left(\frac{14 \text{ Mark}}{6} \right) = 4\frac{2}{3} \text{ Mark}$

„ „ schlechtern „ : $4 \left(\frac{14 \text{ Mark}}{6} \right) = 9\frac{1}{3} \text{ „}$

Zusammen = 14 Mark.

Probe.

14 Mark 10löthiges Silber enthalten 14. (10 Loth = 140 Loth fein ;
 aber

$$\left. \begin{array}{l} 4\frac{2}{3} \text{ Mark 14löth. Silber enthalten } 4\frac{2}{3} \cdot (14 \text{ Loth}) = 65\frac{1}{3} \text{ Loth fein} \\ 9\frac{1}{3} \text{ „ 8löth. „ „ } 9\frac{1}{3} \cdot (8 \text{ Loth}) = 74\frac{2}{3} \text{ „ „} \end{array} \right\} +$$

Beide zusammen 140 Loth fein, wie die Mittelsorte allein.

8) Wieviel Kupfer muß man zu Silber von der 74ger Probe hinzuthun, damit man 16 Pfund von der 60ger Probe erhalte?

Ausrechnung.

Bessere Sorte	74	}	16 Pfund
Mittelsorte	60		
Schlechtere Sorte	0		
		74.	

Nun ist $\frac{16 \text{ Pfund}}{74} = \frac{8}{37} \text{ Pfund}$; daher ist zu nehmen:

von der bessern Sorte $60 \cdot \left(\frac{8}{37} \text{ Pfund} \right) = 12\frac{24}{37} \text{ Pfund}$
 vom Kupfer $14 \cdot \left(\frac{8}{37} \text{ Pfund} \right) = 3\frac{1}{37} \text{ „}$

Zusammen = 16 Pfund.

Probe.

$12\frac{2}{3}$ Pfd. der 74ger Probe enth. $12\frac{2}{3} \times 74 = 960$ Sol.

$3\frac{1}{7}$ Pfd. Kupfer enthalten 0 Sol.

Zusammen 960 Sol.

Da nun 16 Pfund von der 60ger Probe ebenfalls 960 Sol. enthalten, so ist die Mischung richtig.

IV. Man kennt die Qualität der Verbindung sowohl, als auch die Qualitäten der beiden Bestandtheile, und es ist außerdem die Quantität eines der Theile gegeben; man soll hieraus die Quantität des andern Theils, sowie die Quantität der Mischung bestimmen.

Auflösung. Durch die gegebenen Qualitäten der Bestandtheile ist das Verhältniß ihrer Quantitäten bekannt (III). Da außerdem die Quantität des einen Bestandtheils als bekannt vorausgesetzt wird, so haben wir die Quantität des andern Bestandtheils nach einem einfachen Regelbetri-Satz herzuleiten. — Die Quantität der Mischung ist gleich der Summe der Quantitäten der Bestandtheile; z. B.

9) Es sollen 40 Pfund einer Masse, von welcher jedes Pfund 18 Kopelen kostet, mit einer andern Masse, von der 1 Pfund auf 9 Kopelen zu stehen kommt, zusammengesmolzen werden, so daß jedes Pfund der Mischung 13 Kopelen werth sei. — Wieviel Pfund sind von der zweiten Masse zu nehmen?

Ausrechnung.

Bessere Sorte 18 5 = (18-13)

Mittelsorte 13

Schlechtere Sorte 18 4 = (13-9).

Nun verhält sich die Quantität der bessern Sorte zur Quantität der schlechtern Sorte, wie 4 : 5, d. h.

auf 4 Pfd. der bessern Sorte kommen 5 Pfd. der schlechtern
deshalb auf 1 Pfd. der bessern Sorte kommen $\frac{5}{4}$ Pfd. der schlechtern

daher auf 40 Pfd. der bessern Sorte kommen $40 \cdot (\frac{5}{4}$ Pfd.) der schlechtern = 50 Pfund,

deshalb besteht die ganze Mischung aus 40 Pfd. + 50 Pfd. = 90 Pf.

Probe.

40 Pfund à 18 Kopelen 720 Kopelen

50 „ à 9 „ 450 „

Kosten zusammen 1170 Kopelen.

Die Mischung von 90 Pfund à 13 Kopelen giebt ebenfalls einen Werth von 90 . (13 Kop.) = 1170 Kop., wie es sein soll.

Die Kettenregel.

§ 80. Beim Resolviren und Reduciren lernten wir ein Verfahren kennen, wie man eine benannte Zahl in eine andere Benennung verwandeln kann. Diese zweite Benennung gehörte aber zu demselben Maßsysteme, so daß durch einfache Multiplication oder Division mit der entsprechenden Reductionszahl das Verlangte gefunden wurde. Wenn aber für zwei Maßeinheiten die Reductionszahlen nicht unmittelbar gegeben sind, sondern erst aus mehreren Zwischenverhältnissen abgeleitet werden müssen, so bedient man sich zur Auflösung der Aufgaben des sogenannten Kettensatzes. Die einfache Kettenregel zeigt, wie die Maße, Münzen und Gewichte verschiedener Länder aus gegebenen Zwischenverhältnissen in einander zu verwandeln sind, weshalb sie eigentlich Reducionsrechnung heißen sollte. Der Name Ketten-
satz rührt von der Form des Ansatzes beim Ausrechnen einer solchen Aufgabe. — Verbindet man mit der Verwandlung der Einheiten verschiedener metrischen Systeme noch eine oder mehrere Aufgaben der Regeldetri, so entsteht die zusammengesetzte Kettenregel.

a) Der einfache Kettenatz.

Die Kette besteht aus lauter Gleichungen, welche so mit einander verbunden werden, daß jede nachfolgende Gleichung mit derselben Benennung anfängt, mit welcher die vorhergehende schließt. Allgemein wird der Kettenatz nach folgender Regel gebildet:

„Man beginnt den Ansatz mit der gesuchten Zahl
 „(x) und verbindet mit dem Gleichheitszeichen die-
 „jenige Zahl, welche mit x gleichen Werth haben soll.

„Unter diese setzt man eine zweite Gleichung, deren
 „erster Theil links mit dem vorhergehenden zweiten
 „Theil rechts gleichnamig ist; unter diese eine dritte
 „Gleichung, deren erster Theil gleichnamig ist mit dem
 „zweiten Theil der vorhergehenden Gleichung u. s. w.,
 „bis man zu einer Gleichung gelangt, deren zweiter
 „Theil gleichnamig ist mit dem ersten Theile der ersten
 „Gleichung, d. h. mit x. Z. B.

1) Wieviel württembergische Gulden betragen 400 Rubel,
 wenn 14 Rubel = 5 Dukaten; 6 Dukaten = 17 sächsische
 Thaler; 20 sächsische Thaler = 21 preussische Thaler; 4 preu-
 sische Thaler = 7 württembergische Gulden sind?

(1te Gleichung)	x württembergische Gulden	= 400 Rubel
(2te Gleichung)	14 Rubel	= 5 Dukaten
(3te Gleichung)	6 Dukaten	= 17 sächsische Thaler
(4te Gleichung)	20 sächsische Thaler	= 21 preussische Thaler
(5te Gleichung)	4 preussische Thaler	= 7 württembergische Gulden.

Die Ausrechnung geschieht dadurch, daß man das Product
 aller rechts stehenden Zahlen durch das Product aller links stehen-
 den dividirt, und dem Quotienten die bei x stehende Benennung
 giebt. Hiernach wäre also

$$x = \frac{400 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 21 \cdot 7}{14 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 4} \text{ württembergische Gulden.}$$

Die Richtigkeit des Ansatzes und der Ausrechnung läßt sich
 folgendermaßen begründen:

Es sind 14 Rubel = 5 Duc., also 400 Rubel = $\frac{4005}{14}$ Duc.

Da 6 Ducaten = 17 sächsische Thaler, so sind

$$\frac{400 \cdot 5}{14} \text{ Ducaten} = \frac{400 \cdot 5 \cdot 17}{14 \cdot 6} \text{ sächsische Thaler.}$$

Da 20 sächsische Thaler = 21 preussische Thaler, so sind

$$\frac{400 \cdot 5 \cdot 17}{14 \cdot 6} \text{ sächs. Thlr.} = \frac{400 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 21}{14 \cdot 6 \cdot 20} \text{ preuß. Thlr.}$$

Da 4 preussische Thlr = 7 württembergische Gulden, so sind

$$\frac{400 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 21}{14 \cdot 6 \cdot 20} \text{ preuß. Thlr.} = \frac{400 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 21 \cdot 7}{14 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 4} \text{ württem. Gld.}$$

$$= 400 \text{ Rubel} = x.$$

2) In England gilt 1 Pfund Sterling = 10 Schilling und 1 Schilling = 12 Pence; wieviel betragen 450 Pfund Sterling in Silber-Rubeln, wenn 1 Pence = $2\frac{1}{2}$ Kopfen gesetzt wird?

Ansatz und Ausrechnung.

x Rubel	=	450 Pfund Sterling
1 Pfund St.	=	20 Schilling
1 Schilling	=	12 Pence
1 Pence	=	$(2\frac{1}{2})$ Kopfen
100 Kopfen	=	1 Rubel

$$\text{Also } x = \frac{450 \cdot 20 \cdot 12 \cdot (2\frac{1}{2})}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 100} \text{ Rubel.}$$

Zu den Vortheilen, welche der Kettenatz bietet, gehört das Aufheben der Zahlen aus beiden Kolonnen gegen einander. Dieses kann entweder sogleich geschehen, oder erst dann, wenn der Ausdruck für die gesuchte Zahl in Bruchform hingeschrieben; z. B.

3) Wieviel Ellen sind 28 Yards, wenn man weiß, daß 4 Ellen = 3 Arschinen, und 9 Arschinen = 7 Yards betragen?

Ansatz und Ausrechnung.

x Ellen	=	28 Yards
7 Yards	=	9 Arschinen
3 Arschinen	=	4 Ellen

7 geht in 28 auf, deshalb schreibt man statt 28 auf der rechten Seite den Quotienten 4; 3 geht in 9 auf, deshalb kommt auf der rechten Seite der Quotient 3. Nach dieser Vereinfachung wird sein:

$$x = \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1} \text{ Ellen} = 48 \text{ Ellen.}$$

Erscheint in der Multiplikatoren-Kolumne ein Bruch, so ist der Nenner desselben ein *Divisor*, und kann als solcher zu den andern Divisoren, d. h. auf die linke Seite gesetzt werden. — Kommt ein Bruch unter den Divisoren vor, so müssen wir ihn bei der wirklichen Division umkehren, also den Nenner zum Multiplikator machen; daher wird derselbe ohne Weiteres auf die andere Seite zu den Multiplikatoren gesetzt. Durch die-

ses Verfahren fördert man das Aufheben der einzelnen Zahlen gegen einander. — Es darf nicht übersehen werden, daß der Kettenatz in den einzelnen Gleichungen durchaus einförtige benannte Zahlen verlangt. Sollten in der Aufgabe mehrförtige Zahlen erscheinen, so sind diese vor der Rechnung in einförtige umzuwandeln; z. B.

4) Wenn 1 Mark Banco in Hamburg 47 Kopelen, und 1 preußischer Thaler $92\frac{1}{2}$ Kopelen gerechnet ist, wieviel Mark Banco betragen 50 preußische Thaler 10 Silbergrofchen?

Anatz und Ausrechnung.

$$x \text{ Mark Banco?} = 50\frac{1}{2} \text{ (10 Sgr.} = \frac{1}{2} \text{ Thaler)}$$

$$1 \text{ preuß. Thaler} = 92\frac{1}{2} \text{ Kopelen}$$

$$47 \text{ Kopelen} = 1 \text{ Mark Banco.}$$

Oder nach gehöriger Einrichtung der Brüche:

$$3 \quad x \text{ Mark Banco?} = 151 \text{ preußische Thaler}$$

$$2 \quad 1 \text{ preuß. Thaler} = 185 \text{ Kopelen}$$

$$47 \text{ Kopelen} = 1 \text{ Mark Banco.}$$

$$x = \frac{151 \cdot 185}{3 \cdot 2 \cdot 47} \text{ Mark Banco} = 99\frac{77}{82} \text{ Mark Banco.}$$

b) Die zusammengesetzte Kettenregel.

Wir betrachten zuvor einige Aufgaben der einfachen Regelbetri, um zu zeigen, auf welche dieser Aufgaben die zusammengesetzte Regelbetri Anwendung findet und auf welche sie nicht anwendbar ist.

5) Wieviel kosten 18 Pud, wenn $\frac{3}{4}$ Pfund mit 15 Kopelen bezahlt werden?

Ausrechnung nach der Regelbetri:

(Angabe) $\frac{3}{4}$ Pfund 15 Kopelen; (Frage) 18 Pud x Rubel?

Je mehr Waare, desto mehr hat man zu zahlen, folglich eine directe Beziehung.

Da 18 Pud = 18 . 40 Pfund = 720 Pfund, so ist

$$x = \frac{720 \cdot 15 \cdot 4}{3} = 14400 \text{ Kopelen} = 144 \text{ Rubel.}$$

Nach der Kettenregel:

x Rubel?	... 18 Pud
1 Pud	= 40 Pfund
3 Pfund	... 15 Kopfen 4
100 Kopfen	= 1 Rubel
<hr/>	
$x = \frac{18 \cdot 40 \cdot 15 \cdot 4}{3 \cdot 100}$	Rubel = 144 Rubel.

6) 5 Arbeiter brauchen 8 Wochen; in welcher Zeit werden 12 Arbeiter dasselbe leisten?

Ausrechnung. Nach der Regelbetri:

(Angabe) 5 Arbeiter ... 8 Wochen; (Frage) 12 Arbeiter ... x Wochen?

Je mehr Arbeiter sind, desto weniger Wochen brauchen sie; daher eine indirecte Beziehung, folglich:

$$x = \frac{5 \cdot 8}{12} \text{ Wochen} = 3\frac{1}{3} \text{ Wochen.}$$

Nach dem Kettenfatz:

x Wochen? 12 Arbeiter

5 Arbeiter 8 Wochen

$$x = \frac{12 \cdot 8}{5} \text{ Wochen} = 19\frac{1}{5} \text{ Wochen.}$$

Dieses Resultat ist aber mit dem vorhin gefundenen nicht übereinstimmend, woraus wir sehen, daß der Kettenfatz „bei Aufgaben in indirecten Verhältnissen keine Anwendung findet.“ — Man könnte zwar die Zahlen so umstellen, daß sie ein richtiges Resultat liefern, dadurch würde aber der Kettenfatz seine Einfachheit verlieren und in der Praxis nicht mehr brauchbar sein.

7) Für 119 Yards Tuch bezahlte man 82 Pfund Sterling; wieviel Arschin hätte man für 32 Rubel gekauft, wenn der Cours 1 Rubel = $38\frac{7}{16}$ Pence war, und 7 Yards = 9 Arschin betragen?

Ausrechnung.

x Arschin	= 32 Rubel,
1 Rubel	= $6\frac{15}{16}$ Pence,
12 Pence	= 1 Schilling,
20 Schilling	= 1 Pfund Sterling,
82 Pfd. Sterling	= 119 Yards,
7 Yards	= 9 Arschin.

Hebt man die Zahlen auf der linken und rechten Seite gegen einander, so findet man:

$$x = \frac{17 \cdot 9}{4 \cdot 2 \cdot 2} = 9\frac{9}{8} \text{ Arschin.}$$

Soll der Kettenatz auf Procentrechnungen angewandt werden, so müssen wir Einkaufs- und Verkaufspreis unterscheiden. Hat man z. B. 12 Procent gewonnen, so sind 100 Rubel im Einkaufe = $(100 + 12)$ Rubel = 112 Rubel im Verkaufe, und 8 Procent Verlust würde man ausdrücken: 100 Rubel im Einkaufe = $(100 - 8)$ Rubel = 92 Rubel im Verkaufe. Geht die Frage auf Ermittlung der Procente, so können wir nicht setzen:

x Procent? der gegebenen Summe,

sondern wir müssen bestimmen, wieviel man für 100 Rubel im Einkaufe beim Verkaufe erhalten habe; demnach

$$x \text{ Rubel Verkauf?} = 100 \text{ Rubel Einkauf.}$$

An diesen ersten Satz knüpfen sich dann die übrigen Gleichungen. — Findet man bei dieser Gattung von Aufgaben für x mehr als 100, so ist der Ueberschuß der Gewinn in Procenten, ergiebt sich für x weniger als 100, so ist das daran Fehlende der Verlust in Procenten; z. B.

8) Jemand kaufte Waaren für 500 Rubel und verkaufte dieselben nach einiger Zeit für 580 Rubel; wieviel Procent wurden gewonnen?

Ausrechnung:

$$\begin{array}{l} x \text{ Rubel Verkauf} = 100 \text{ Rubel Einkauf,} \\ 500 \text{ Rubel Einkauf} = 580 \text{ Rubel Verkauf.} \end{array}$$

$$x = \frac{580}{5} = 116 \text{ Rubel,}$$

folglich wurden $116 - 100 = 16$ Procente gewonnen.

9) Jemand kaufte Waaren, und zahlte für $2\frac{1}{2}$ Pfund 45 Kopeken; wie theuer muß er 12 Pfund verkaufen, um 20% zu gewinnen?

Ansatz und Ausrechnung.

$$\begin{array}{l} x \text{ Rubel Verkauf?} \dots 12 \text{ Pud} \\ 1 \text{ Pud} \qquad \qquad \qquad = 40 \text{ Pfund} \\ 5 \text{ Pfund} \qquad \qquad \dots 45 \text{ Kopeken (Einkauf)} \\ 100 \text{ Kopeken Einkauf} = 120 \text{ Kopeken Verkauf} \\ 100 \text{ Kopeken Verkauf} = 1 \text{ Rubel Verkauf} \end{array}$$

$$x = 103\frac{1}{2} \text{ Rubel.}$$

Werden neben dem Einkaufspreise noch etwaige Unkosten in Procenten angegeben, und man will ermitteln, wie theuer die Waare verkauft werden könne, um gewisse Procente zu gewinnen, so müssen wir Einkauf nebst Unkosten als den wahren Einkaufspreis ansehen, und daran die Gleichung zwischen Einkauf und Verkauf mit Zuschlag der zu gewinnenden Procente anschließen.

3. B.

10) Jemand kauft für 120 Rubel Waaren; die Unkosten an Zoll und Transport betragen 40%; für wieviel muß er diese Waare verkaufen, um 20% zu gewinnen?

Ansatz und Ausrechnung.

x Rubel Verkauf?	=	120 Rubel Einkauf
100 Rubel Einkauf	=	140 Rubel Einkauf (wegen Unkosten)
100 Rubel Einkauf	=	120 Rubel Verkauf

$$x = 201\frac{2}{3} \text{ Rubel.}$$

11) Jemand kauft in England 5 Stücke Tuch à 40 Yards und bezahlt dafür 145 Pfund Sterling; die Unkosten betragen 30%; wie theuer muß er eine Arschin verkaufen, um 20% zu gewinnen, wenn 7 Yards = 9 Arschinen sind und der Cours 1 Rubel = 36 $\frac{1}{4}$ Pence steht?

Ansatz und Ausrechnung.

x Rubel Verkauf?	...	1 Arschin
9 Arschinen	=	7 Yards
40 Yards	=	1 Stück
5 Stücke	...	145 Pfund Sterling (Einkauf)
1 Pfund Sterling	=	20 Schilling
1 Schilling	=	12 Pence
100 Pence	=	130 Pence Einkauf (wegen Unkosten)
100 Pence Einkauf	=	120 Pence Verkauf
145 Pence Verkauf	=	1 Rubel Verkauf 4

$$x = 5 \frac{103}{105} \text{ Rubel} = 5 \text{ Rubel, } 98\frac{2}{5} \text{ Kopfen.}$$

Uebungsfragen.

- 1) Worin besteht die Gesellschafts- oder Repartitions-Rechnung?
- 2) Was versteht man unter dem einfachen und zusammengesetzten Theilungsfuß?

- 3) Welche allgemeine Regel gilt für die Ausrechnung der zur Gesellschaftsregel gehörigen Aufgaben?
- 4) Wie verfährt man, wenn bloß relativ die Beziehung der einzelnen Theile zu einander angegeben ist?
- 5) Was versteht man unter dem Verhältnisse zweier Zahlen?
- 6) Wie verwandelt man das Verhältniß zweier Brüche in ein gleiches Verhältniß ganzer Zahlen?
- 7) Wie bildet man ein gleiches Verhältniß für alle Theile einer zu theilenden Zahl?
- 8) Wie verfährt man, wenn neben den Verhältnißzahlen noch andere Zahlen durch Addition und Subtraction gegeben sind?
- 9) Was versteht man unter zusammengesetzter Gesellschaftsrechnung?
- 10) Wie unterscheidet man Gemisch und Menge von einander?
- 11) Wie wird die Quantität und Qualität eines Gemisches bestimmt?
- 12) Welches sind die 4 Hauptfälle bei der Vermischungsrechnung?
- 13) Welches ist die Aufgabe der Kettenregel?

Vom Erheben ins Quadrat und vom Ausziehen der Quadratwurzel.

§ 81. Ein Product aus zwei gleichen Factoren heißt das Quadrat des Factors, und umgekehrt der Factor die Quadratwurzel des Products.

Daß eine Zahl ins Quadrat zu erheben ist, wird durch eine kleine Zwei angedeutet, die man oben rechts an die Zahl setzt; z. B. 5^2 bedeutet $5 \times 5 = 25$. Diesen Ausdruck ließt man: 5 zum Quadrat erhoben, giebt 25.

Aus einer Zahl die Quadratwurzel ausziehen, heißt, die Zahl in zwei gleiche Factoren zerlegen. Das Zeichen für die Quadratwurzel ist ein verzogenes r (radix). Demnach zeigt $\sqrt{49}$ an, daß aus 49 die Quadratwurzel ausgezogen werden soll.

§ 82. Die Quadrate der Einer findet man im Einmal-eins, oder stellt sie sich in dem sogenannten Quadratwurzelkästchen zusammen.

Quadrat- wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate.	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Aus dieser Tafel sehen wir, daß $6^2 = 36$, also umgekehrt $\sqrt{36} = 6$, und ebenso $8^2 = 64$, daher $\sqrt{64} = 8$ sein muß.

§ 83. Um aus solchen Zahlen, welche durch die Multiplication einer mehrzifferigen Zahl mit sich selbst entstanden sind, die Quadratwurzel auszuziehen, müssen wir ein eigenes Verfahren anwenden, um eine Zahl zum Quadrate zu erheben, woraus rückwärts das Verfahren für das Ausziehen der Quadratwurzel sich ableiten läßt.

Zerlegen wir eine zweistellige Zahl in zwei Summanden, von denen der erste die Zehner, der zweite die Einer vorstellt, so haben wir z. B.

$$\begin{aligned}
 45^2 &= (40 + 5)^2 = (40 + 5) \cdot (40 + 5) \\
 &= (40 + 5) \cdot 40 + (40 + 5) \cdot 5 \\
 &= 40^2 + 40 \cdot 5 + 40 \cdot 5 + 5^2 \\
 &= 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 5 + 5^2,
 \end{aligned}$$

d. h. das Quadrat einer zweistelligen Zahl besteht:

- 1) aus dem Quadrate des ersten Theils (40^2),
- 2) aus dem doppelten Producte beider Theile ($2 \cdot 40 \cdot 5$),
- 3) aus dem Quadrate des zweiten Theiles (5^2).

Bezeichnen wir mit a die Zehner und mit b die Einer, so daß $a + b$ eine zweistellige Zahl vorstellt, so ist

$$a^2 + 2 ab + b^2$$

der Ausdruck ihres Quadrates.

Anwendung.

$$19^2 = (10 + 9)^2 = (a + b)^2$$

$$\text{Da nun} \quad a^2 = 10^2 = 100$$

$$2 ab = 2 \cdot 10 \cdot 9 = 180$$

$$b^2 = 9^2 = 81$$

$$\text{so ist} \quad a^2 + 2 ab + b^2 = 361 = 19^2.$$

Wir können hieraus leicht folgende Bemerkungen ableiten:

- A. daß das Quadrat einer zweistelligen Zahl nie weniger als 3 und nicht mehr als 4 Stellen haben kann, weil das Quadrat der kleinsten zweistelligen Zahl, nemlich $10^2 = 100$, und das Quadrat der kleinsten dreistelligen Zahl, nemlich $100^2 = 10000$ ist;
- B. daß in dem Quadrate einer zweistelligen Zahl das Quadrat der Zehner der dazu gehörigen Wurzel (a^2) in den Tausendern und Hundertern zu suchen ist;
- C. daß der zweite Theil des Quadrats einer zweistelligen Zahl Tausender, Hunderter und Zehner, nie aber Einer enthalten kann;
- D. daß das Quadrat der Einer (b^2) immer unter 100 sein muß.

§ 84. Soll nun rückwärts die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierstelligen Zahl gezogen werden, so müssen wir die 3 Theile, aus denen das Quadrat zusammengesetzt ist, von der vorliegenden Zahl abziehen.

Aus § 83, B, wissen wir, daß das Quadrat der Zehner (a^2), d. h. des ersten Theiles (a) der Wurzel in den Hundertern (bei einem dreistelligen Quadrate) und in den Tausendern und Hundertern (bei einem vierstelligen Quadrate) zu suchen ist; die beiden übrigen Ordnungen enthalten vorzugsweise die zwei andern abzuziehenden Theile $2ab + b^2$. Scheiden wir diese beiden letzten Ordnungen von dem vorliegenden Quadrate ab, so findet sich in den höhern Ordnungen das Quadrat des Zehners; z. B.

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 \sqrt{576} = 20 + 4 \\
 a^2 = 400 \\
 \hline
 2a = 40 \quad 176 \\
 2a \cdot b = 40 \cdot 4 = 160 \quad \} \\
 b^2 = 4^2 = 16 \quad \} \\
 \hline
 \text{also } 2ab + b^2 = 176 \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

Suchen wir im obigen Täfelchen, § 82, dasjenige Quadrat, welches 5 am nächsten kommt, so finden wir $a^2 = 4$ Hunderter, also $a = 2$ Zehner. — a^2 abgezogen, giebt den Rest $= 176 = 2ab + b^2$. Um den unbekanntten zweiten Theil der

Wurzel (b) zu finden, verdoppeln wir a und dividiren mit $2a = 2 \cdot 20 = 40$ in 176 , wodurch der Quotient $= 4 = b$ sich ergibt. Hierauf erhalten wir:

$$2 \cdot a \cdot b = 160$$

$$b^2 = 16$$

$$\text{folglich } 2ab + b^2 = 176.$$

$$\text{Diesem nach ist } \sqrt{576} = 24.$$

Zweites Beispiel:

$$a + b$$

$$a^2 = \begin{array}{r} \sqrt{3969} = 60 + 3 = 63 \\ 36 \overline{) 00} \\ \underline{3 \ 69} \end{array}$$

$$2a = 120$$

$$\left. \begin{array}{r} 2ab = 360 \\ b^2 = 9 \end{array} \right\} +$$

$$2ab + b^2 = 369$$

0.

§ 85. Um eine dreistellige Zahl ins Quadrat zu erheben, betrachtet man die Hunderter und Zehner als den ersten und die Einer als den zweiten Theil. Man erhält z. B.

$$524^2 = (520 + 4)^2 = 520^2 + 2 \cdot 520 \cdot 4 + 4^2,$$

oder allgemein, wenn man mit a die Hunderter, mit b die Zehner und mit c die Einer bezeichnet:

$$[(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2 \cdot (a + b) \cdot c + c^2.$$

Da aber $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$, so ergibt sich, wenn wir diesen Ausdruck einführen, für das Quadrat einer dreistelligen Zahl

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2.$$

Anwendung.

$$a + b + c$$

$$1) 249^2 = (200 + 40 + 9)^2$$

$$a^2 = 200^2 = 40000$$

$$2ab = 2 \cdot 200 \cdot 40 = 16000$$

$$b^2 = 40^2 = 1600$$

$$2(a + b)c = 2 \cdot 240 \cdot 9 = 4320$$

$$c^2 = 9^2 = 81$$

$$\underline{\hspace{1.5cm}} (a + b + c)^2 = 62001.$$

$$\begin{array}{r}
 a + b + c \\
 2) 983^2 = (900 + 80 + 3)^2 \\
 \quad a^2 = 900^2 = 810000 \\
 \quad 2 ab = 2 \cdot 900 \cdot 80 = 144000 \\
 \quad b^2 = 80^2 = 6400 \\
 \quad 2(a+b)c = 2 \cdot 980 \cdot 3 = 5880 \\
 \quad c^2 = 3^2 = 9
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \right\} +$$

$$(a + b + c)^2 = 966289.$$

Wir sehen hieraus, daß das Quadrat einer dreistelligen Zahl nicht weniger als 5, aber nicht mehr als 6 Stellen haben kann. Die Quadrate aller dreistelligen Zahlen werden demnach nur 5 oder 6 Stellen haben können.

§ 86. Ueberhaupt können wir aus der Anzahl der Stellen des vorliegenden Quadrats auf die Menge der Stellen, die der Wurzel zukommen, schließen. Das Quadrat besteht entweder aus noch ein Mal so viel Stellen, als die Wurzel hat, oder noch ein Mal so viel weniger einer Stelle. Der Grund liegt darin, daß

$$\begin{array}{l}
 10^2 = 100 \\
 100^2 = 10000 \\
 1000^2 = 1000000 \\
 10000^2 = 100000000 \text{ u. f. w.}
 \end{array}$$

Es werden daher die Quadrate zweistelliger Wurzeln zwischen 100 und 10000, d. h. zwischen 10^2 und 100^2 ; die Quadrate dreistelliger Wurzel zwischen 10000 und 1000000, d. h. zwischen 100^2 und 1000^2 u. f. w. sich befinden.

Theilen wir demnach die vorliegende Zahl von der Rechten zur Linken in Fächer zu 2 Stellen ab, so wird die Menge der Fächer die Anzahl der Stellen der Wurzel angeben. Das letzte Fach zur Linken wird auch eine einzige Stelle haben können. Nach dieser Regel sind die Quadratwurzeln von 6 | 89 und 50 | 41 zweistellig, die Quadratwurzeln von 1 | 51 | 29 und 82 | 62 | 81 dreistellig u. f. w.

§ 87. Vergleichen wir ferner die Formeln

$$\begin{array}{l}
 1) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \\
 2) (a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2,
 \end{array}$$

so sehen wir, daß das in der ersten Formel ausgesprochene Gesetz auch durch die zweite Formel ausgedrückt wird. Die drei ersten Theile sind in beiden vollkommen gleich. Der vierte Theil von 2 ist ein doppeltes Product, ebenso wie der zweite Theil in 1, nur mit dem Unterschiede, daß statt a in 1, $a + b$ in 2, und b in 1, c in 2 tritt. Der letzte Theil in 2 ist das Quadrat des letzten Theils der Wurzel, wie der dritte Theil in 1.

Sollen wir jetzt aus einer Zahl, deren Wurzel aus 3 Stellen besteht, die Quadratwurzel wirklich ausziehen, so theilen wir erst von der Rechten zur Linken die vorgelegte Zahl in Fächer zu 2 Stellen ab (§ 86). — Darauf suchen wir die Theile $a^2 + 2ab + b^2$, und ziehen diese vollständig ab, d. h. wir subtrahiren $(a + b)^2$; betrachten jetzt die zwei gefundenen Theile der Wurzel $a + b$ als a , und setzen die Rechnung fort, indem wir von $2ab$ weiter rechnen.

$$\begin{array}{r}
 a + b + c \\
 \sqrt{213444} = 462 \\
 a^2 = 160000 \\
 \hline
 53444 \\
 2a = 800 \\
 2ab = 800 \cdot 60 = 48000 \\
 b^2 = 60^2 = 3600 \quad \left. \vphantom{2ab} \right\} + \\
 \hline
 2ab + b^2 = 51600 \quad \left. \vphantom{2ab} \right\} + \\
 \hline
 51600 \\
 \hline
 1844 \\
 2(a + b) = 2 \cdot 460 = 920 \\
 2(a + b) \cdot c = 920 \cdot 2 = 1840 \quad \left. \vphantom{2(a+b)} \right\} + \\
 c^2 = 2^2 = 4 \quad \left. \vphantom{2(a+b)} \right\} + \\
 \hline
 2(a + b)c + c^2 = 1844 \quad \left. \vphantom{2(a+b)} \right\} + \\
 \hline
 1844 \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

Eine Abkürzung des Verfahrens erhalten wir durch die Betrachtung, daß

$$2ab + b^2 = (2a + b) \cdot b$$

$$2(a + b) \cdot c + c^2 = [2(a + b) + c] \cdot c.$$

Man bestimmt durch Division mit dem doppelten gefundenen Theile der Wurzel den folgenden Theil, hängt diesen Theil dem

Divisor an und multiplicirt die so entstehende Zahl mit diesem Theile, wodurch man auf ein Mal das zu Subtrahirende erhält. Bei diesem Verfahren zieht man auf ein Mal ein ganzes Fach von 2 Stellen zu dem jedesmaligen Reste herunter, und läßt die Nullen ganz weg. Obiges Exempel wäre demnach folgendermaßen zu rechnen:

$$\begin{array}{r} \sqrt{21\ 34\ 44} = 462 \\ a^2 = 16 \quad | \quad 34\ 44 \\ \hline 2a = 8 \quad | \quad 5\ 34 \\ 2a + b = 8(6) \quad | \quad 5\ 34 \\ (2a + b)b = \dots \quad | \quad 5\ 16 \\ \hline \quad \quad \quad | \quad 18\ 44 \\ 2(a + b) = 92 \quad | \quad 18\ 44 \\ 2(a + b) + c = 92(2) \quad | \quad 18\ 44 \\ [2(a + b) + c]c = \dots \quad | \quad 18\ 44 \\ \hline \quad \quad \quad | \quad 0 \end{array}$$

Auf dieselbe Weise findet man $\sqrt{26\ 83\ 24} = 518$

$$\begin{array}{r} \sqrt{26\ 83\ 24} = 518 \\ a^2 = 25 \quad | \quad 83\ 24 \\ \hline 2a = 10 \quad | \quad 1\ 83 \\ 2a + b = 10(1) \quad | \quad 1\ 83 \\ (2a + b)b = \dots \quad | \quad 1\ 01 \\ \hline \quad \quad \quad | \quad 82\ 24 \\ 2a = 102 \quad | \quad 82\ 24 \\ 2a + b = 102(8) \quad | \quad 82\ 24 \\ (2a + b)b = \dots \quad | \quad 82\ 24 \\ \hline \quad \quad \quad | \quad 0 \end{array}$$

§ 88. Nach der Formel $a^2 + 2ab + b^2$ können wir auch mehr als dreistellige Quadratwurzeln ausziehen, denn bei einer vierstelligen Wurzel betrachten wir die drei ersten Stellen als den ersten und die 4te Stelle als den zweiten Theil derselben. — Das Quadrat einer vierstelligen Wurzel wird sein:

$$\begin{aligned} [(a+b+c)+d]^2 &= (a+b+c)^2 + 2(a+b+c) \cdot d + d^2 \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b) \cdot c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2. \end{aligned}$$

Anwendung. $a^2 = \dots 49$ $2a = 14$ $2a + b = 14 \quad (2)$ $(2a + b)b = \dots 284$ $2(a+b) = 2a = 144$ $2(a+b)+c = 2a+b = 144 \quad (5)$ $[2(a+b)+c]c = (2a+bb) = \dots$ $2(a+b+c) = 2a = 1450$ $2(a+b+c)+d = 2a+b = 1450 \quad (7)$ $[2(a+b+c)+d]d = (2a+bb)b = \dots$	$\sqrt{52664049} = 7257$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> 3 66 <hr style="border: 0.5px solid black;"/> 2 84 <hr style="border: 0.5px solid black;"/> 82 40 <hr style="border: 0.5px solid black;"/> 72 25 <hr style="border: 0.5px solid black;"/> 10 15 49 <hr style="border: 0.5px solid black;"/> 10 15 49
--	--

§ 89. Ist die gegebene Zahl kein vollkommenes Quadrat, so kann die Wurzel weder durch gewöhnliche noch durch Decimalbrüche genau ausgedrückt werden, obschon man sich dem wahren Werthe derselben mit beliebiger Genauigkeit nähern kann. Eine solche, nie vollkommen genau angebbare Wurzel nennt man irrational.

§ 90. Da $(\frac{7}{8}) \times (\frac{7}{8}) = \frac{7 \times 7}{8 \times 8} = \frac{7^2}{8^2} = \frac{49}{64}$, so muß umgekehrt $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$ sein, d. h. die Quadratwurzel aus einem Bruche wird gefunden, wenn man die Quadratwurzel aus Zähler und Nenner nimmt und erstere durch letztere dividirt.

Wenden wir diesen Satz auf Decimalbrüche an, und bedenken wir, daß die Quadratwurzel nur aus solchen Ordnungseinheiten gezogen werden kann, die eine gerade Anzahl Nullen haben, nehmlich aus

$$10^2 = 100$$

$$100^2 = 10000$$

$$1000^2 = 1000000 \text{ u. s. w.}$$

so können wir durch Anhängen von Nullen den Nenner des Decimalbruches jedes Mal zu einem vollen Quadrate machen; z. B.

$0,5 = 0,50 = \frac{50}{100}$
 $2,347 = 2,3470 \frac{23470}{10000}$ u. f. w.
 woraus folgt, daß

$$\sqrt{0,5} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{50}}{10}$$

$$\sqrt{2,347} = \sqrt{\frac{23470}{10000}} = \frac{\sqrt{23470}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{23470}}{100}$$

Nach Anreihung der Nullen wird also die Quadratwurzel ohne Rücksicht auf das Decimalkomma ausgezogen und durch die Wurzel des Nenners dividirt.

§ 91. Bei ganzen Zahlen, deren Wurzel irrational, wird es auf die Genauigkeit ankommen, die man erreichen soll. Soll z. B. $\sqrt{17}$ bis auf die dritte Decimalstelle genau gefunden werden, so verwandle man 17 in einen unächtten Bruch, dessen Nenner 3 Nullen-Paare enthält, also

$$17 = \frac{17000000}{1000000} \text{ oder } 17 = 17,000000,$$

d. h. man hänge der gegebenen Zahl so viel Paare Nullen an, als in der Wurzel Stellen verlangt werden; ziehe aus dieser Zahl die Quadratwurzel,

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{17\,00\,00\,00} = 4123 & \\ \hline 16 & \\ \hline 8\ (1) & 100 \\ & \underline{81} \\ & 1900 \\ \hline 82\ (2) & 1644 \\ & \underline{25600} \\ & 24729 \\ \hline & 871 \end{array}$$

werfe den Rest (871) weg und schneide von der gefundenen Wurzel so viel Stellen ab, als Nullen-Paare angehängt sind. Also

$$\sqrt{17} = 4,123 \dots$$

§ 92. Besteht die vorliegende Zahl aus Ganzen und einem Decimalbruche, so erfolgt das Abtheilen in Fächer zu 2 Stellen vom Komma aus, — bei den Ganzen nach links und beim Decimalbruche nach rechts.

Die Stelle des Decimalkommas in der Wurzel wird bestimmt durch die Anzahl der zweizifferigen Klassen, welche der Decimalbruch enthält. z. B.

$$\sqrt{153,478} = \sqrt{153|4780} = 12,38\dots$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 1 \\ \hline 2 \end{array} \begin{array}{r} 2 \\ \hline 24 \end{array} \begin{array}{r} 53 \\ \hline 729 \end{array} \\ \hline 44 \\ \hline 947 \\ \hline 21880 \\ \hline 19744 \\ \hline 2136. \end{array}$$

§ 93. Ist endlich die Quadratwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche zu ziehen, dessen Nenner kein volles Quadrat ist, so verwandelt man denselben vorher in einen Decimalbruch, und verfährt, wie vorhin gezeigt worden.

Vom Erheben zum Kubus und vom Ausziehen der Kubikwurzel.

§ 94. Ein Product aus drei gleichen Factoren heißt der Kubus des Factors, und umgekehrt der Factor die Kubikwurzel des Products. Daß eine Zahl zum Kubus erhoben oder kubirt werden soll, wird durch eine kleine 3 angedeutet, die man oben rechts an die Zahl setzt; z. B. 6^3 bedeutet $6 \times 6 \times 6 = 216$. Diesen Ausdruck liest man: 6 zum Kubus erhoben, giebt 216.

Die Kubikwurzel aus einer Zahl ausziehen, heißt, die Zahl in drei gleiche Factoren zerlegen. Das Zeichen für die Kubikwurzel ist $\sqrt[3]{\quad}$ so daß z. B. $\sqrt[3]{125}$ anzeigt, daß aus 125 die dritte Wurzel auszugehien sei.

§ 95. Für die Kuben der Einer steckt man sich das sogenannte Kubikwurzeltäfelchen zusammen.

Kubikwurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kuben	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Aus dieser Tafel sehen wir, daß z. B. $5^3 = 125$, also $\sqrt[3]{125} = 5$, $7^3 = 343$ also $\sqrt[3]{343} = 7$ sein muß.

§ 96. Das Kubiren kann durch einfache Multiplication verrichtet werden; — um aber eine Einsicht für das umgekehrte Verfahren, d. h. für das Ausziehen der Kubikwurzel zu gewinnen, müssen wir die vorliegende Zahl in zwei Theile zerlegen, und uns eine Formel wie beim Quadriren § 83 zu verschaffen suchen. — Wenn $a+b$ eine zweistellige Zahl vorstellt, so ist ihr Quadrat dargestellt durch $a^2+2ab+b^2$. Da nun

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \\ &= (a+b^2) \cdot (a+b) \\ &= (a^2+2ab+b^2) \cdot (a+b) \\ &= (a^2+2ab+b^2) \cdot a + (a^2+2ab+b^2) \cdot b \\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \end{aligned}$$

so sehen wir, daß der Kubus einer zweistelligen Zahl besteht

- 1) aus dem Kubus des ersten Theils (a^3);
- 2) aus dem dreifachen Quadrate des ersten Theils in den zweiten ($3a^2 \cdot b$);
- 3) aus dem dreifachen Quadrate des zweiten Theils in den ersten ($3ab^2$);
- 4) aus dem Kubus des zweiten Theils (b^3).

Anwendung.

$$\begin{array}{rcll} 1) & 35^3 & = (30+5)^3 & = (a+b)^3 \\ & a^3 = 30^3 & = 30 \cdot 30 \cdot 30 & = 27000 \\ & 3a^2b = 3 \cdot 30^2 \cdot 5 & = 3 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 5 & = 13500 \\ & 3ab^2 = 3 \cdot 30 \cdot 5^2 & = 3 \cdot 30 \cdot 5 \cdot 5 & = 2250 \\ & b^3 = 5^3 & = 5 \cdot 5 \cdot 5 & = 125 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcll} 1) & 35^3 & = (30+5)^3 & = (a+b)^3 \end{array}} \right\} +$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 42875 = 35^3.$$

$$\begin{array}{rcll} 2) & 98^3 & = (90+8)^3 & = (a+b)^3 \\ & a^3 = 90^3 & = 90 \cdot 90 \cdot 90 & = 729000 \\ & 3ab = 3 \cdot 90^2 \cdot 8 & = 3 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 8 & = 194400 \\ & 3ab^2 = 3 \cdot 90 \cdot 8^2 & = 3 \cdot 90 \cdot 8 \cdot 8 & = 17280 \\ & b^3 = 8^3 & = 8 \cdot 8 \cdot 8 & = 512 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcll} 2) & 98^3 & = (90+8)^3 & = (a+b)^3 \end{array}} \right\} +$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 941192 = 98^3.$$

§ 97. Aus dem Kubikwurzelstäfelchen § 95 ersehen wir, daß eine einstellige Wurzel einen Kubus von einer Stelle, nemlich $1^3 = 1$ und $2^3 = 8$, — von zwei Stellen, nemlich $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, und von drei Stellen, nemlich $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ und $9^3 = 729$ haben kann.

Der kleinste Zehner ist 10 und der kleinste Hunderter ist 100. Da nun $10^3 = 1000$ und $100^3 = 1000000$, so folgt, daß die Kuben aller zweistelligen Zahlen mehr als 3, aber weniger als 7 Stellen haben müssen; mithin werden sie entweder aus 4 oder 5 oder aus 6 Stellen bestehen. Hieraus folgt weiter, daß bei dem Kubus einer zweistelligen Wurzel der Kubus der Zehner (a^3) nie in den drei letzten Ordnungen vorkommen kann, und diese vorzugsweise die andern Theile der Formel $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ enthalten.

§ 98. Soll aus dem Kubus einer zweistelligen Wurzel die Kubikwurzel ausgezogen werden, so theilen wir die vorliegende Zahl von rechts nach links fortschreitend in Fächer zu 3 Stellen ab; z. B.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{97\,507} = 40 + 3 = 43 \\ a^3 = 64 \\ \hline 15507 \\ 3a^2 = 4800 \\ 3a^2b = \dots 14400 \\ \hline 1107 \\ 3ab^2 = 1080 \\ \hline 27 \\ b^3 = 27 \\ \hline 0. \end{array}$$

Aus dem ersten Fach zur Linken zieht man die Kubikwurzel, indem man in dem Täfelchen § 95 den größten Kubus auffucht, der sich abziehen läßt. Bei uns ist $a^3 = 64$ Zehner, daher $a = 4$ Zehner = 40. Zu dem Reste = 15 nimmt man das zweite Fach herunter. Um den zweiten Theil der Wurzel zu finden, dividire man mit $3a^2 = 3 \cdot 40^2 = 4800$ in die Zahl 15507. Man findet $b = 3$. — Jetzt ist abzuziehen $3a^2b = 14400$ von 15507. — Von dem Reste = 1107 ist noch zu

subtrahiren $2ab^2 = 3 \cdot 40 \cdot 3 \cdot 3 = 1080$ und endlich von dem Reste $= 27$ der letzte Theil der Formel $b^3 = 27$; also $\sqrt[3]{79507} = 43$.

Statt der auf einander folgenden Subtractionen kann man auch die einzelnen Theile $3a^2b$, $3ab^2$, b^3 zuerst addiren und dann $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ auf ein Mal subtrahiren. Hiernach hätten wir:

$$1) \quad \begin{array}{r} \sqrt[3]{79507} = 43 \\ a^3 = 64 \quad | \\ \hline 15507 \end{array}$$

$$3a^2 = 4800$$

$$3a^2b = 14400$$

$$3ab^2 = 1080 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3a^2b \\ 3ab^2 \end{array}} \right\} +$$

$$b^3 = 27$$

$$\hline 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 15507$$

0.

a + b

$$2) \quad \begin{array}{r} \sqrt[3]{474552} = 70 + 8 = 78 \\ a^3 = 343 \quad | \\ \hline 131552 \end{array}$$

$$3a^2 = 14700$$

$$3a^2b = 117600$$

$$3ab^2 = 13440 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3a^2b \\ 3ab^2 \end{array}} \right\} +$$

$$b^3 = 512$$

$$\hline 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 131552$$

0.

§ 99. Um eine dreistellige Zahl zu kubiren, betrachtet man die Hunderter und Zehner als den ersten und die Einer als den zweiten Theil. Man erhält z. B.

$(235)^3 = (230+5)^3 = 230^3 + 2 \cdot 230^2 \cdot 5 + 3 \cdot 230 \cdot 5^2 + 5^3$,
oder allgemein, wenn man die Hunderter mit a , die Zehner mit b und die Einer mit c bezeichnet:

$$[(a+b) + c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$

Da aber $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (§ 83), so ergibt sich, wenn wir diesen Ausdruck einführen, für den Kubus einer dreistelligen Zahl die Formel:

$$[(a + b) + c]^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3.$$

Anwendung.

a + b + c

$$a^3 = 200^3 = 200 \cdot 200 \cdot 200 = 8000000$$

$$3a^2b = 3 \cdot 200^2 \cdot 40 = 3 \cdot 200 \cdot 200 \cdot 40 = 4800000$$

$$3ab^2 = 3 \cdot 200 \cdot 40^2 = 3 \cdot 200 \cdot 40 \cdot 40 = 960000$$

$$b^3 = 40^3 = 40 \cdot 40 \cdot 40 = 64000$$

$$3(a+b)^2c = 3 \cdot 240^2 \cdot 5 = 3 \cdot 240 \cdot 240 \cdot 5 = 864000$$

$$3(a+b)c^2 = 3 \cdot 240 \cdot 5^2 = 3 \cdot 240 \cdot 5 \cdot 5 = 18000$$

$$c^3 = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$$(a+b+c)^3 = \dots 14706125 = 245^3.$$

§ 100. Da $100^3 = 1000000$

$$1000^3 = 1000000000,$$

so müssen die Kuben aller dreistelligen Zahl mehr als 7, aber weniger als 10 Stellen haben. Eine gleiche Betrachtung, wie § 86 für die Quadrate, zeigt uns, daß wir aus der Anzahl der Stellen des Kubus auf die Anzahl der Stellen für die Wurzel schließen können. — Theilen wir die vorliegende Zahl von der Rechten zur Linken in Fächer zu 3 Stellen, so wird die Menge der Fächer die Anzahl der Stellen der Wurzel angeben. Nach dieser Regel sind die Kubikwurzeln von 6|859, 59|304, 117|649 zweistellig; — die Kubikwurzeln von 1|860|867, 28|094|464, 156|590|819 dreistellig u. s.

§ 101. Hat man eine mehr als zweistellige Kubikwurzel auszuziehen, so zieht man zuerst die vier Theile der Formel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ ab, und fängt dann vom zweiten Theile derselben ($3a^2b$) wieder an, indem man die zwei bereits gefundenen Theile der Kubikwurzel als a betrachtet. Den Grund für dieses Verfahren findet man durch dieselbe Betrachtung, die wir bei der Quadratwurzel § 87 anstellten, daß die Formel

$$1) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

vollständig die Formel

$$2) [(a+b)+c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\ = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$

repräsentirt, wenn wir (in 2) nach Abzug der 4 ersten Theile, d. h. des Kubus von (a+b), die gefundenen zwei ersten Theile der Kubikwurzel a + b für a setzen. Hiernach haben wir:

	$a + b + c$
	$\sqrt[3]{78\,402\,752} = 400 + 20 + 8 = 420$
	64 000 000
$3a^2 = 480000$	14 402 752
$3a^2b = 9600000$	
$3ab^2 = 480000$	
$b^3 = 8000$	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \dots$	10 088 000
$3(a+b)^2 = 3 \cdot (420)^2 = 529200$	4 314 752
$3(a+b)^2 \cdot c = 4233600$	
$3(a+b) \cdot c^2 = 80640$	
$c^3 = 512$	
$3(a+b^2 \cdot c + 3(a+b) \cdot c^2 + c^3 =$	4 314 742
	0.

Ebenso verfährt man, wenn die Kubikwurzel aus einer beliebigen Anzahl Stellen besteht. Man betrachtet nehmlich die bereits gefundenen Theile der Kubikwurzel als den ersten Theil, und rechnet mit dem hinzutretenden Theil, als wäre die Wurzel bloß zweitheilig; z. B.

	a	b	c	d
	$\sqrt[3]{45\,729\,086\,976} = 3000 + 500 + 70 + 7$			
	= 3576			
$a^2 = 27$	18720			
$3a^2b = 135$				
$3ab^2 = 225$				
$b^3 = 125$				
$15875 \dots 15875$	2854086			
$3(a+b)^2 = 3a^2 = 3675$				
$3(a+b)^2c = 3a^2b = 25725$				
$3(a+b)c^2 = 3a \cdot b^2 = 5145$				
$c^3 = b^3 = 342$				
$2624203 \dots 2624293$	229793976			
$3(a+b+c)^2 = 3a^2 = 382347$				
$3(a+b+c)^2 \cdot d = 3a^2 \cdot b = 2294082$				
$2(a+b+c) \cdot d^2 = 3a \cdot b^2 = 38556$				
$d^3 = b^3 = 216$				
$229793976 \dots 229893976$	0.			

§ 102. 1) Aus einem Bruche wird die Kubikwurzel gefunden, wenn man die Kubikwurzel aus dem Zähler durch die Kubikwurzel aus dem Nenner dividirt. Z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$$

2) Bei einem Decimalbruch muß die Anzahl der Decimalstellen durch 3 theilbar sein.

3) Bei ganzen Zahlen, deren Kubikwurzeln irrational sind, hängt man so viele Fächer von drei Nullen an, als Stellen in der Kubikwurzel verlangt werden.

Man soll $\sqrt[3]{15}$ auf 3 Stellen ausziehen.

Ausrechnung.

	$\sqrt[3]{18'000'000'000} = 2,466 \dots$
$a^3 =$	<u>8</u>
	7000
$3a^2 =$	12
$3a^2b =$	48
$3ab^2 =$	96
$b^3 =$	64
	5824 5824
	<u>1176000</u>
$3a^2 =$	1728
$3a^2b =$	10368
$3ab^2 =$	2592
$b^3 =$	216
	1062936 1062936
	<u>113064000</u>
$3a^2 =$	181548
$3a^2b =$	1089288
$3ab^2 =$	26568
$b^3 =$	216
	109194696 109194696
	<u>3 869304</u>

4) Das Abtheilen einer Zahl, welche Ganze und Decimalziffern enthält, in Klassen zu drei Stellen, erfolgt vom Komma aus. Die Zahl der Klassen links am Komma giebt die Menge

der Stellen für die Ganzen und die Zahl der Klassen zur Rechten am Komma die Menge der Decimalstellen in der Wurzel, z. B.

$$\sqrt[3]{17523,0678254} \text{ wird geben } \sqrt[3]{17|523,|067|825|400}$$

2 Ganze und 3 Decimalstellen in der Kubikwurzel.

5) Um aus einem Bruche, dessen Nenner eine irrationale Kubikwurzel hat, dieselbe auszuziehen, verwandelt man ihn in einen Decimalbruch.

Uebungsfragen.

- 1) Woraus besteht das Quadrat einer zweitheiligen Größe?
- 2) Woraus besteht das Quadrat einer Zahl, die beliebig viele Addenden hat?
- 3) Aus wieviel Ziffern besteht das Quadrat einer n ziffrigen Zahl?
- 4) Woran erkennt man, aus wieviel Ziffern die Wurzel einer vollkommenen Quadrat- oder Kubikzahl bestehen werde?
- 5) Welches sind die Regeln für das Ausziehen der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl?
- 6) Wie zieht man die Quadratwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche?
- 7) Wie zieht man die Quadratwurzel aus einer Zahl, die kein volles Quadrat ist?
- 8) Wie zieht man die Quadratwurzel aus einem Decimalbruche?
- 9) Woraus besteht der Kubus einer zweitheiligen Zahl?
- 10) Durch welche Formel wird der Kubus einer mehrtheiligen Zahl ausgedrückt.
- 11) Aus wieviel Ziffern besteht der Kubus einer n ziffrigen Zahl?
- 12) Woran erkennt man, wieviel Ziffern die Kubikwurzel einer gegebenen Zahl haben werde?
- 13) Welches sind die Regeln für das Ausziehen der Kubikwurzel?

- 14) Wie zieht man die Kubikwurzel aus einer Zahl, die kein voller Kubus?
- 15) Wie zieht man die Kubikwurzel aus einem Decimalbruche und wie aus einem gewöhnlichen Bruche aus?

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§ 103. Werden zwei Zahlen a und b in Rücksicht auf ihre Größe verglichen, so kann man fragen:

- 1) Um wieviel Einheiten ist a größer als b ?
- 2) Wieviel mal ist a größer als b ?

Die erste Frage wird durch die Subtraction, die zweite durch die Division beantwortet. Im ersten Falle wird die Beziehung, in der wir uns die beiden Zahlen zu einander denken, ein arithmetisches, im zweiten ein geometrisches Verhältniß genannt.

Die beiden Zahlen, welche verglichen werden, nennt man die beiden Glieder des Verhältnisses, und zwar heißt die erste Zahl a das Vorder-, und die zweite b das Hinterglied.

104. Diejenige Zahl, um welche bei einem arithmetischen Verhältnisse das Vorderglied größer ist als das Hinterglied, nennt man die Differenz dieses Verhältnisses; z. B. in $9 - 5 = 4$ ist 4 die Differenz, 9 das Vorder- und 5 das Hinterglied.

Diejenige Zahl, welche bei einem geometrischen Verhältnisse angiebt, wieviel mal das Vorderglied größer ist als das Hinterglied, heißt der Quotient oder Exponent dieses Verhältnisses; z. B. in $16 : 2 = 8$ ist 8 der Exponent, 16 das Vorder- und 2 das Hinterglied.

§ 105. Die Glieder eines Verhältnisses müssen gleichartige Größen sein. Beim arithmetischen Verhältnisse ist die Differenz gleichnamig mit den Gliedern desselben; beim geometrischen Verhältnisse wird, weil die Division ein Messen ist, der Exponent eine abstracte Zahl, z. B.

14 Werschof — 2 Werschof = 12 Werschof,
 und $(14 \text{ Werschof}) : (2 \text{ Werschof}) = 7 \text{ mal}$,
 also die Differenz = 12 Werschof und der Exponent
 = 7.

Die arithmetischen Verhältnisse und die daraus hervor-
 gehenden arithmetischen Proportionen sind für die Arithmetik von
 keinem Nutzen, deshalb übergehen wir diese ganz und werden
 uns nur mit den geometrischen Verhältnissen beschäftigen. Ueber-
 haupt soll überall, wenn von Verhältnissen die Rede ist, nur das
 geometrische Verhältniß verstanden werden.

§ 106. Da jedes geometrische Verhältniß ein Bruch ist,
 dessen Zähler den Dividendus und dessen Nenner den Divisor,
 dessen Exponent aber den Quotienten vorstellt, so wird das Vor-
 derglied gleich sein dem Producte aus dem Hintergliede und dem
 Exponenten. Wenn also

$$a : b = \left(\frac{a}{b}\right) = c,$$

so muß sein: $a = b \cdot c$.

Zusatz. Ein Verhältniß bleibt unverändert, wenn man
 Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multiplicirt oder
 dividirt; also

$$a : b = \frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad (\S 38) = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$

$$a : b = \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n} \quad (\S 40) = (a : n) : (b : n).$$

Hieran läßt sich jedes Verhältniß gebrochener
 oder gemischter Zahlen durch Multiplication in ein
 gleich großes Verhältniß ganzer Zahlen umformen;

z. B. Statt $\frac{3}{8} : 5\frac{1}{4}$ kann man setzen

$$\frac{3}{8} : \frac{21}{4} \text{ also } \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4} : \frac{21 \cdot 5}{4 \cdot 5}$$

$$\text{oder } \frac{12}{8} : \frac{105}{4} \text{ oder } 12 : 105.$$

Ebenso:

$$2) \left(7\frac{1}{8}\right) : \left(3\frac{1}{8}\right) = \frac{57}{8} : \frac{16}{8} = \left(\frac{57}{8}\right) \cdot 40 \cdot \left(\frac{16}{8}\right) = 285 : 128.$$

$$3) 0,32 : 0,047 = \frac{32}{100} : \frac{47}{1000} = 320 : 47.$$

$$4) (0,333\dots) : (0,616161\dots) = \frac{1}{3} : \frac{61}{100} = 33 : 61.$$

Durch Division beider Glieder wird jedes Verhältniß auf seine einfachste Form gebracht; z. B.

Z. B. Statt $48 : 28$ erhält man durch Division beider Zahlen durch 4 das Verhältniß $12 : 7$.

Zusatz. Verhältnisse mit gleichen Exponenten sind einander gleich; wenn also

$$16 : 8 = 2 \text{ und } 24 : 12 = 2; \text{ so muß sein:}$$

$$16 : 8 = 24 : 12.$$

Oder allgemein, wenn $a : b = e$; $c : d = e$; $m : n = e$; $p : q = e$, so muß sein:

$$a : b = c : d = m : n = p : q.$$

§ 107. Zwei gleiche, durch das Gleichheitszeichen mit einander verbundene Verhältnisse bilden eine Proportion. Wenn also $a : b = e$ und $c : d = e$, so ist $a : b = c : d$ eine Proportion. — In jeder Proportion kommen vier Zahlen vor, die Glieder der Proportion heißen. Das erste und dritte Glied einer Proportion werden (als Vorderglieder) und das zweite und vierte Glied (als Hinterglieder beider Verhältnisse) gleichnamige oder homologe Glieder genannt. Das erste und vierte Glied heißen äußere, das zweite und dritte Glied innere Glieder der Proportion.

Sind alle vier Glieder ungleich, so wird die Proportion unterbrochen oder diskret genannt; sind dagegen die mittlern oder äußern Glieder einander gleich, so heißt die Proportion stetig. — Diskret sind folgende Proportionen:

$$1) a : b = m : n;$$

$$2) 3 : 4 = 9 : 12;$$

stetig dagegen folgende:

$$3) a : p = p : d, \text{ oder } 4) n : a = a : n;$$

$$5) 9 : 6 = 6 : 4; \quad 6) 12 : 18 = 18 : 12.$$

In einer diskreten Proportion heißt jedes Glied die vierte Proportionale zu den drei andern Gliedern; z. B. in $a : b = c : d$

ist a die vierte Proportionale zu b , c und d ,

„ b „ „ „ „ „ a , c „ d ,

„ c „ „ „ „ „ a , b „ d ,

„ d „ „ „ „ „ a , b „ c .

In einer stetigen Proportion heißt das mittlere Glied (wenn das 2te und 3te einander gleich), und das äußere Glied (wenn das 1ste und 4te einander gleich sind) — die mittlere Proportionale; 3. B.

in $a : b = b : c$ ist b die mittlere Proportionale zu a und c ,

„ $m : n = p : m$ „ m „ „ „ „ n „ p .

Die ungleichen Glieder einer stetigen Proportion werden dritte Proportionale genannt; 3. B.

in $a : b = b : c$ heißen a und c die dritte Proportionale.

§ 108. Lehrsatz. In jeder Proportion sind die Producte der innern und äußern Glieder einander gleich.

Beweis. Wenn $a : b = c : d$

so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Multipliciren wir mit dem Product der beiden Nenner, nehmlich mit $b \cdot d$, so ergibt sich

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b \cdot d = \left\{\frac{c}{d}\right\} \cdot b \cdot d \text{ also ist } a d = c b.$$

Diesen wichtigen Lehrsatz kann man auch folgendermaßen beweisen:

Da $a : b = e$ und $c : d = e$, so muß sein:

$$a = b \cdot e$$

$$d \cdot e = c$$

folglich: $a \cdot (d \cdot e) = (b \cdot e) \cdot c$.

Dividiren wir auf beiden Seiten mit e , so ist

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

§ 109. Lehrsatz. Aus zwei gleichen Producten läßt sich immer eine Proportion dadurch bilden, daß man die Factoren des einen Productes zu mittlern und die des andern zu äußern Gliedern macht. Wenn also $a \cdot n = b \cdot p$, so ist immer $a : b = p : n$.

Beweis. Es ist $a n = b p$. Dividiren wir auf beiden Seiten durch bn , so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{n} \text{ oder } a : b = p : n.$$

Anmerkung. Die beiden vorhergehenden Sätze sind sehr bequem zur Prüfung für die Richtigkeit einer Zahlen-Proportion.

§ 110. Aufgabe. Zu drei gegebenen Gliedern einer Proportion die vierte Proportionszahl zu finden.

Anlösung und Beweis. Die gesuchte vierte Proportionszahl sei $= x$, so kann sie entweder eins der beiden äußern Glieder oder eins der beiden innern Glieder vorstellen. Im ersten Falle haben wir:

$$a : b = c : x$$

$$\text{oder } x : b = c : a.$$

Aus beiden Proportionen folgt: $b \cdot c = a \cdot x$. Also mit a dividirt:

$$x = \frac{b \cdot c}{a},$$

d. h. man findet das fehlende äußere Glied, wenn man das Product der Mittelglieder durch das bekannte äußere Glied dividirt.

Im zweiten Falle muß sein:

$$a : x = c : b$$

$$\text{oder } a : c = x : b.$$

Aus beiden Proportionen folgt: $a \cdot b = c \cdot x$. Also mit c dividirt

$$x = \frac{a \cdot b}{c},$$

d. h. man findet das fehlende mittlere Glied, wenn man das Product der äußern Glieder durch das bekannte mittlere Glied dividirt.

Anwendung auf Zahlenbeispiele:

$$1) \left(\frac{3}{4}\right) : \left(\frac{2}{3}\right) = 8 : x$$

$$x = \left(\frac{2}{3} \times 8\right) : \frac{3}{4} = 7\frac{1}{3}.$$

$$2) 0,75 : 5,5 = 3,6 : x$$

$$x = \frac{5,5 \cdot 3,6}{0,75} = \frac{19,8}{0,75} = 26,4.$$

$$3) 8 : x = 13 : 5$$

$$x = \frac{5 \times 8}{13} = \frac{40}{13} = 3\frac{1}{13}.$$

$$4) \quad x : 6 = 5,25 : 1,5$$

$$x = \frac{6 \cdot 5,25}{1,5} = \frac{31,5}{1,5} = 21.$$

$$5) \quad 7\frac{1}{2} : 4\frac{1}{3} = x : 0,45$$

$$x = \frac{(7\frac{1}{2}) \cdot (0,45)}{(4\frac{1}{3})} = \frac{15 \cdot 0,45 \cdot 3}{2 \cdot 13} = 0,778\dots$$

§ 111, Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen a und b die dritte Proportionszahl zu finden.

Auflösung und Beweis. Die gesuchte dritte Proportionalzahl sei = x, so haben wir:

$$a : b = b : x$$

$$\text{also } a \cdot x = b \cdot b = b^2. \quad \text{Mit a dividirt}$$

$$x = \frac{b^2}{a},$$

d. h. man findet zu zwei gegebenen Zahlen die dritte Proportionszahl, wenn man das Quadrat der zweiten durch die erste dividirt.

§ 112. Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Zahlen a und b die mittlere Proportionale zu finden.

Auflösung und Beweis. Es sei x die gesuchte mittlere Proportionszahl, so muß sein

$$a : x = x : b$$

$$\text{folglich } x^2 = a \cdot b$$

und daher, wenn wir auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausziehen:

$$x = \sqrt{a \cdot b},$$

d. h. die mittlere Proportionale ist die Quadratwurzel aus dem Producte der beiden gegebenen Zahlen.

Anwendung auf Zahlenbeispiele.

$$1) \quad 6 : x = x : 54$$

$$\text{also } x = \sqrt{6 \cdot 54} = \sqrt{324} = 18.$$

$$2) \quad 5 : x = x : 3$$

$$\text{folglich } x = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15} = 3,8729\dots$$

$$3) \quad 4,25 : x = x \cdot 0,04$$

$$\text{daher } x = \sqrt{4,25 \cdot 0,04} = \sqrt{0,17} = 0,41231 \dots$$

$$4) \quad 3\frac{1}{2} : x = x : \frac{3}{4}$$

$$x = \sqrt{\left(3\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{21}{8}} = \sqrt{2,625} = 1,620 \dots$$

§ 113. **Lehrsatz.** Jede Proportion bleibt richtig, wenn man

A) die Mitglieder unter einander

B) die Außenglieder unter einander,

C) die Mittelglieder mit den Außengliedern vertauscht.

Wenn also $a : b = c : d$ ist, so muß auch sein:

$$1) \quad a : c = b : d$$

$$2) \quad b : a = d : c$$

$$3) \quad b : d = a : c$$

$$4) \quad c : a = d : b$$

$$5) \quad c : d = a : b$$

$$6) \quad d : b = c : a$$

$$7) \quad d : c = b : a$$

Beweis. Aus der gegebenen Proportion $a : b = c : d$ folgt: $a \cdot d = b \cdot c$. Dieselben Producte erhält man aber, wenn man in jeder der 7 andern Proportionen die Außenglieder mit den Außengliedern und die Mittelglieder mit den Mittelgliedern multiplicirt; folglich sind alle diese Proportionen richtig.

§ 114. **Lehrsatz.** Jede Proportion bleibt richtig, wenn man die Glieder der einzelnen Verhältnisse mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

$$1) \quad am : bm = cn : dn,$$

$$2) \quad \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}.$$

Beweis. Da nach der Voraussetzung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

so ist auch $\frac{am}{bm} = \frac{cn}{dn}$ und ebenso

$\frac{a : m}{b : m} = \frac{c : n}{d : n}$, folglich sind die abgeleiteten Proportionen richtig.

§ 116. Wenn beliebig viele Verhältnisse gleiche Exponenten haben und einander gleichgesetzt werden, so entsteht eine fortlaufende Proportion; z. B.

$$a : b = a' : b' = a'' : b'' = a''' : b''' \text{ u. f. w.}$$

Man schreibt eine fortlaufende Proportion auch folgendermaßen:

$$(a : a' : a'' : \dots) = (b : b' : b'' : b''' : \dots)$$

§ 117. Lehrsatz. In jeder fortlaufenden Proportion verhält sich die Summe sämtlicher Vorderglieder zur Summe sämtlicher Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede. Wenn also $a : b = a' : b' = a'' : b'' = a''' : b'''$ u. f. w., so soll sein:

$$\begin{aligned} (a + a' + a'' + a''' + \dots) : (b + b' + b'' + b''' + \dots) &= a : b \\ &= a' : b' \\ &= a'' : b'' \\ &= a''' : b''' \\ &\text{u. f. w.} \end{aligned}$$

Beweis. Aus $a : b = a' : b'$

folgt $(a + a') : (b + b') = a : b$ (§ 116, Zusatz)

Nun ist $a : b = a'' : b''$ nach der Voraussetzung,
also $(a + a') : (b + b') = a'' : b''$

folglich $(a + a' + a'') : (b + b' + b'') = a'' : b''$ (§ 116, Zusatz).

Aber $a'' : b'' = a''' : b'''$ (Voraussetzung)

daher $(a + a' + a'') : (b + b' + b'') = a''' : b'''$

mithin $(a + a' + a'' + a''') : (b + b' + b'' + b''') = a''' : b'''$.

Anwendung. $2 : 3 = 10 : 15 = 8 : 12 = 6 : 9$

$$\text{gibt: } \frac{(2+10+8+6) : (3+15+12+9)}{26 : 39} = 2 : 3$$

$$\text{d. h. } 26 : 39 = 2 : 3$$

Anmerkung. Für den Fall, daß die fortlaufende Proportion nach der zweiten Art geschrieben wäre, nehmlich:

$$(a : a' : a'' : a''' \dots) = (b : b' : b'' : b''' \dots)$$

würde unser Lehrsatz heißen: Die Summe sämtlicher Glieder auf der einen Seite des Gleichheitszeichens verhält sich zur Summe der

Glieder auf der andern Seite, wie irgend ein Glied auf der linken Seite zum gleichstelligen Gliede auf der rechten Seite.

§ 118. Lehrsatz. Aus zwei gegebenen Proportionen erhält man wieder eine richtige Proportion, wenn man die gleichstelligen Glieder mit einander multiplicirt. Wenn also

$$1) a : b = c : d$$

$$2) a' : b' = c' : d',$$

so muß sein $aa' : bb' = cc' : dd'$.

Beweis. Aus 1 folgt: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

und aus 2 folgt: $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$

$$\text{daher } \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right) = \left(\frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{c'}{d'}\right)$$

$$\text{d. h. } \frac{a \cdot a'}{b \cdot b'} = \frac{c \cdot c'}{d \cdot d'}$$

Also: $aa' : bb' = cc' : dd'$.

Zusatz 1. Setzen wir $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ und $d' = d$, so verwandelt sich die vorstehende Proportion in $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$, d. h. aus einer Proportion $a : b = c : d$ erhält man wieder eine richtige Proportion, indem man jedes Glied quadriert.

Zusatz 2. Umgekehrt muß aus $a : b = c : d$

folgen $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$,

d. h. aus einer richtigen Proportion erhält man eine neue Proportion, wenn man aus allen vier Gliedern die Quadratwurzel auszieht.

§ 119. Lehrsatz. Sind mehre Proportionen in beliebiger Anzahl gegeben, so erhält man immer eine richtige Proportion, wenn man alle gleichstelligen Glieder der gegebenen Proportionen mit einander multiplicirt. Wenn also

$$1) a : b = c : d$$

$$2) a' : b' = c' : d'$$

3) $a'' : b'' = c'' : d''$ u. f. w.,
 so ist $aa'a'' : bb'b'' = cc'c'' : dd'd''$.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}, \quad \frac{a''}{b''} = \frac{c''}{d''} \text{ u. f. w.}$$

daher durch Multiplication:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right) \cdot \left(\frac{a''}{b''}\right) = \left(\frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{c'}{d'}\right) \cdot \left(\frac{c''}{d''}\right)$$

$$\text{oder } \frac{aa'a''}{bb'b''} = \frac{cc'c''}{dd'd''}, \text{ d. h.}$$

$$aa'a'' : bb'b'' = cc'c'' : dd'd''.$$

§ 120. Werden Proportionen dadurch hergeleitet, daß man in den gegebenen Proportionen die gleichstelligen Glieder multiplicirt, so nennt man es Zusammensetzung der Proportionen.

§ 121. Wenn bei mehreren gegebenen Verhältnissen das Vorderglied jedes folgenden dem Hintergliede des vorhergehenden Verhältnisses gleich ist, so heißen dieselben aneinanderhängende Verhältnisse.

§ 122. Lehrsatz. Wenn bei mehreren gegebenen Proportionen auf der einen Seite des Gleichheitszeichens lauter aneinanderhängende Verhältnisse sich befinden, so ist das Verhältniß des ersten Vordergliedes dieser Verhältnisse zum letzten Hintergliede, dem Verhältnisse der Producte aller auf der andern Seite stehenden Glieder gleich, d. h. wenn

$$a : b = a' : b'$$

$$c : d = b' : c'$$

$$e : f = c' : d'$$

$$k : l = d' : e'$$

$$\text{so ist } (a \cdot c \cdot e \cdot k) : (b \cdot d \cdot f \cdot l) = a' : e'$$

Beweis. Nach § 119 muß sein:

$$(a \cdot c \cdot e \cdot k) : (b \cdot d \cdot f \cdot l) = (a' \cdot b' \cdot c' \cdot d') : (b' \cdot c' \cdot d' \cdot e'),$$

dividiren wir die beiden Glieder rechts mit $b' \cdot c' \cdot d'$,

so folgt:

$$(a \cdot c \cdot e \cdot k) : (b \cdot d \cdot f \cdot l) = a' : e'.$$

Uebungsfragen.

- 1) Was ist ein arithmetisches, was ein geometrisches Verhältniß?
- 2) Wie heißen die Glieder eines Verhältnisses?
- 3) Was versteht man unter Differenz, was unter Exponenten eines Verhältnisses?
- 4) Wie drückt man ein Verhältniß durch andere Zahlen aus ohne seinen Werth zu ändern?
- 5) Wie bringt man das Verhältniß zweier Brüche auf ganze Zahlen?
- 6) Was ist eine Proportion?
- 7) Was versteht man unter discreten, — was unter stetigen Proportionen?
- 8) Was sind gleichnamige oder homologe Glieder?
- 9) Was versteht man unter der vierten, dritten und mittlern Proportionale?
- 10) Durch welche Sätze prüft man die Richtigkeit einer Proportion?
- 11) Wie berechnet man die vierte Proportionale?
- 12) Wie findet man die dritte Proportionale?
- 13) Wie berechnet man die mittlere Proportionale?
- 14) Wie viel neue Proportionen lassen sich aus einer gegebenen Proportion berechnen?
- 15) Welche Veränderungen können durch Multiplication und Division einzelner Glieder gemacht werden, ohne die Richtigkeit der Proportion zu stören?
- 16) Wie leitet man durch Addition und Subtraction gewisser Glieder aus einer Proportion andere her?
- 17) Was versteht man unter fortlaufender Proportion?
- 18) Welchen Satz haben wir für fortlaufende Proportionen?
- 19) Was versteht man unter Zusammensetzung der Proportionen?
- 20) Welche Sätze leitet man durch Zusammensetzung der Proportionen her?
- 21) Was sind zusammenhängende Verhältnisse?
- 22) Welchen Satz erhält man aus Proportionen mit zusammenhängenden Verhältnissen?

- 23) Wie müssen die Glieder eines Verhältnisses bei benannten Zahlen beschaffen sein?
 24) Wie bildet man aus benannten Zahlen eine Proportion?
 25) Wie drückt man allgemein directe und indirecte Verhältnisse aus?
 26) Wie bildet man eine richtige Proportion bei directen, — wie bei indirecten Verhältnissen?

Anwendung der Verhältnisse auf benannte Zahlen.

§ 123. Ein geometrisches Verhältniß entsteht aus der Division des ersten Gliedes durch das zweite. Wenn zwei benannte Zahlen ein Verhältniß bilden sollen, so müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

1) Nur gleichartige benannte Zahlen können Glieder eines und desselben Verhältnisses sein; z. B. Längenmaße und Längenmaße, Münzen und Münzen, Gewichte und Gewichte, Zeitgrößen und Zeitgrößen u. s. w., aber nicht Münzen und Zeitgrößen, Gewichte und Münzen u. s. w.

2) Beide Glieder des Verhältnisses müssen einseitig und von gleicher Benennung sein.

Sind die gegebenen Glieder zwar gleichartig, aber nicht gleichnamig, und bestehen sie aus mehreren Unterordnungen, so muß man sie durch Reduciren oder Resolviren gleichnamig machen; z. B.

1) Es ist das Verhältniß von 3 Fub und 5 Pfund zu ermitteln.

Auflösung.

$$3 \text{ Fub} = (40 \text{ Pfd.}) \cdot 3 = 120 \text{ Pfd.}$$

$$\text{also : } (3 \text{ Fub}) : (5 \text{ Pfd.}) = (120 \text{ Pfd.}) : (5 \text{ Pfd.}) = 24 \text{ mal.}$$

2) Man soll das Verhältniß von 3 Arschin 12 Werschok und 2 Arschin bestimmen.

Auflösung.

$$\text{a) } 3 \text{ Arschin } 12 \text{ Werschok} = 3 \cdot (16 \text{ Werschok}) + 12 \text{ Werschok} \\ = 60 \text{ Werschok,}$$

da nun 2 Arschin = 32 Werschof, so muß sein:
 $(3 \text{ Arschin } 12 \text{ Werschof}) : (2 \text{ Arschin}) = (60 \text{ Werschof}) : (32 \text{ Werschof}) = 1\frac{3}{4} \text{ mal.}$

§ 124. Jede benannte Zahl müssen wir als ein Product ansehen, dessen Multiplicandus die benannte Einheit, und dessen Multiplicator die davor stehende Ziffer ist; z. B. 7 Pfd. = 7 . (1 Pfund); 5 Rubel = 5 . (1 Rubel) u. s. w. Die vor der Benennung stehende Ziffer heißt Coefficient.

§ 125. Lehrsatz. Das Verhältniß zweier einsortigen benannten Zahlen $(a \cdot Z) : (b \cdot Z)$ ist dem Verhältnisse der Coefficienten gleich.

Beweis. Der Exponent von $(a \cdot Z) : (b \cdot Z) = \frac{a \cdot Z}{b \cdot Z}$ ist $= \frac{a}{b}$; der Exponent von $a : b$ ist ebenfalls $= \frac{a}{b}$, folglich

$$(aZ) : (bZ) = a : b.$$

Zusatz. Bezeichnen M und N zwei beliebige Maßeinheiten, a, b, c und d aber abstracte Zahlen, so daß $a : b = c : d$, so muß auch:

$$(aM) : (bM) = (cN) : (dN),$$

d. h. jede Proportion giebt eine richtige Proportion in benannten Zahlen, wenn man beide Glieder in jedem Verhältnisse auf dieselbe Maßeinheit bezieht; z. B. aus $5 : 8 = 15 : 24$ können wir bilden:

$$1) 5 \text{ Rubel} : 8 \text{ Rubel} = 15 \text{ Pfund} : 24 \text{ Pfund.}$$

$$2) 5 \text{ Tage} : 8 \text{ Tage} = 15 \text{ Rubel} : 24 \text{ Rubel.}$$

$$3) 5 \text{ Arschin} : 8 \text{ Arschin} = 15 \text{ Solotnik} : 24 \text{ Solotn. u.}$$

Umgekehrt können wir bei einer Proportion in benannten Zahlen die Benennung des einen Verhältnisses allein, oder bei beiden Verhältnissen zugleich weglassen; z. B. aus $(7 \text{ Pfd.}) : (13 \text{ Pfd.}) = (21 \text{ Rubel}) : (39 \text{ Rubel})$ können wir herleiten:

$$7 : 13 = 21 \text{ Rubel} : 39 \text{ Rubel}$$

$$7 \text{ Pfund} : 13 \text{ Pfund} = 21 : 39$$

$$7 : 13 = 21 : 39.$$

§ 126. Lehrsatz. Wenn Vielfache von benannten Zahlen einander gleich sind, so stehen die benannten Einheiten im umgekehrten Verhältnisse ihrer Coefficienten. Wenn also $(a \cdot M) = (b \cdot N)$, so muß sein:

$$1 M : 1 N = b : a$$

Beweis. Die Richtigkeit des Lehrsatzes folgt unmittelbar aus § 109.

Anwendung.

$$1) \underline{7 \text{ Darbs} = 9 \text{ Arschin}}$$

$$\text{giebt: } 1 \text{ Darbs} : 1 \text{ Arschin} = 9 : 7.$$

$$2) \underline{100 \text{ Thaler} = 92 \text{ Rubel}}$$

$$\underline{1 \text{ Rubel} : 1 \text{ Thaler} = 100 : 92.}$$

§ 127. Die Abhängigkeit zweier ungleichartiger Dinge haben wir eine Werthgleichung genannt (§ 67). Dabei lernten wir zwei Beziehungen kennen, die wir directe und indirecte Verhältnisse nannten. — Allgemein werden wir diese folgendermaßen ausdrücken. Es sei

$$A \dots\dots\dots B$$

die gegebene Werthgleichung; dann haben wir, wenn A und B in directem Verhältnisse stehen,

$$nA \dots\dots\dots nB,$$

d. h. wenn A zu nA ansteigt, so muß B zu nB ansteigen. Wir haben also hier zwischen zwei beliebigen Quantitäten A und nA und zwei anderen Quantitäten B und nB dasselbe geometrische Verhältniß, so daß

$$A : (nA) = B : nB = 1 : n;$$

z. B. die Werthgleichung sei:

$$4 \text{ Pfund} \dots\dots\dots 7 \text{ Rubel,}$$

so ist klar, daß das Doppelte, Dreifache . . . nfache von 4 Pfd. zwei, drei . . . n mal so viel gelten wird, daher muß sein:

$$2 \cdot (4 \text{ Pfund}) \dots\dots 2 \cdot (7 \text{ Rubel})$$

$$3 \cdot (4 \text{ Pfund}) \dots\dots 3 \cdot (7 \text{ Rubel})$$

$$\text{Allgemein } n \cdot (4 \text{ Pfund}) \dots\dots n \cdot (7 \text{ Rubel})$$

mithin:

$$(4 \text{ Pfd.}) : n (4 \text{ Pfd.}) = (7 \text{ Rubel}) : n (7 \text{ Rubel}) = 1 : . n$$

Stehen aber A und B in indirectem Verhältnisse; stellt z. B. A die Zahl der Arbeiter und B die Zeit vor, in welcher eine gewisse Arbeit geleistet wird, so werden wir bekommen:

$$n \cdot A \dots \dots \frac{B}{n},$$

d. h. wenn A zu nA ansteigt, so vermindert sich B zu $\frac{B}{n}$.

Hier findet zwischen den beiden Quantitäten der ersten Größe und den beiden Quantitäten der andern nur dann ein richtiges geometrisches Verhältniß statt, wenn wir das eine Paar in umgekehrter Ordnung nehmen; also

$$A : nA = \left(\frac{B}{n} \right) : B;$$

z. B. die Werthgleichung sei:

$$5 \text{ Arbeiter} \dots \dots 8 \text{ Tage.}$$

Nun wird offenbar die doppelte, dreifache . . . nfache Anzahl der Arbeiter, in der halben, dritten . . . ntel Zeit dasselbe leisten; es muß also sein:

$$2 \cdot (5 \text{ Arbeiter}) \dots \dots \frac{8 \text{ Tage}}{2}$$

$$3 \cdot (5 \text{ Arbeiter}) \dots \dots \frac{8 \text{ Tage}}{3}$$

$$\text{überhaupt } n \cdot (5 \text{ Arbeiter}) \dots \dots \frac{8 \text{ Tage}}{n}$$

folglich:

$$(5 \text{ Arbeiter}) : n \cdot (5 \text{ Arbeiter}) = \frac{8 \text{ Tage}}{n} : 8 \text{ Tagen} = 1 : n.$$

Die einfache Regelbetri.

§ 128. Die einfache Regelbetri ist die Vorschrift, nach der man aus einer in Worte gekleideten Aufgabe eine Proportion zu bilden und ein darin fehlendes Glied zu berechnen hat.

Jede Aufgabe, in der zwei Werthgleichungen vorkommen, gehört zur Regelbetri. Die erste Werthgleichung heißt die Angabe und besteht aus zwei bekannten, von einander abhängigen Größen; die zweite Werthgleichung wird die Frage genannt, in welcher eben solche Größen vorkommen, wie in der Angabe, von denen aber eine unbekannt ist. Die gleichnamigen Größen aus der Angabe und Frage geben die Glieder der beiden Verhältnisse in der zu bildenden Proportion. Wir wollen an bestimmten Zahlenbeispielen das zu beobachtende Verfahren erläutern.

1) Wenn 5 Pfd. mit 15 Rubeln bezahlt werden; wie theuer sind 12 Pfund?

Ausrechnung. Hier ist

(die Angabe) 5 Pfund 15 Rubel,

(die Frage) 12 Pfund x Rubel?

Gelten 5 Pfund 15 Rubel, so muß offenbar das Doppelte, Dreifache n fache von 5 Pfund zwei, drei n mal so viel gelten, daher stehen die Mengen der Waare und die Größe des Preises in directem Verhältnisse. Hiervon schließen wir: so oft 12 Pfund in 5 Pfund enthalten sind, eben so oft müssen x Rubel in 15 Rub. stecken, woraus sich ergibt:

$$5 \text{ Pfund} : 12 \text{ Pfund} = 15 \text{ Rubel} : x \text{ Rubel?}$$

Sind nach diesem Ansatz die beiden ersten Glieder bereits gleichnamig, so läßt man sogleich die Benennung weg (§ 125); sind diese Glieder von verschiedener Benennung oder mehrsortig, so bringt man sie erst auf gleiche Benennung und läßt dann die Benennung weg. Hiernach haben wir:

$$5 : 12 = 15 \text{ Rubel} : x \text{ Rubeln?}$$

Woraus folgt:

$$x = \frac{12 \cdot (15 \text{ Rubel})}{5} = 36 \text{ Rubel.}$$

2) 8 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit 19 Tage; in welcher Zeit wird diese Arbeit ausgeführt von 10 Arbeitern?

Auflösung:

(Angabe) 8 Arbeiter 19 Tage

(Frage) 10 Arbeiter x Tage?

Wenn 8 Arbeiter 19 Tage brauchen, so werden 2 mal, 3 mal . . . n mal so viel Arbeiter die Hälfte, den dritten . . . den nten Theil von 19 Tagen nöthig haben; folglich steht die Menge der Arbeiter mit der Zahl der Tage in indirectem Verhältnisse. Wir haben demnach

$$10 \text{ Arbeiter} : 8 \text{ Arbeitern} = 19 \text{ Tage} : x \text{ Tagen?}$$

Mithin, nach Weglassung der Benennung in den beiden ersten Gliedern,

$$10 : 8 = 19 \text{ Tage} : x \text{ Tagen?}$$

Also:

$$x = \frac{8 \cdot (19 \text{ Tage})}{10} = 15\frac{1}{2} \text{ Tage.}$$

Anmerkung. Im Vorliegenden sind die wesentlichen Regeln zur Behandlung der Aufgaben für directe und indirecte Verhältnisse enthalten. Mancherlei Kunstgriffe zur Förderung der Ausrechnung, als das Wegschaffen der Brüche, das Heben gemeinsamer Factoren aus dem ersten Gliede und den Mittelgliedern der Proportion beruhen auf den Sätzen § 106 und 113, A.

Die zusammengesetzte Regeldetri.

§ 129. Bei der einfachen Regeldetri waren drei Zahlengrößen gegeben; — man suchte aus ihnen eine Proportion zu bilden, und bestimmte das fehlende vierte Glied derselben. Auf ähnliche Art kann man zu 5, 7, 9 u. s. w. gegebenen Größen die 6te, 8te, 10te u. s. w. zu bestimmen verlangen. Natürlich müssen die gegebenen Größen von der Art sein, daß sich daraus mehre Proportionen bilden lassen, die man nachher mit einander verbindet. Die ältern Rechenmeister hatten nach der Anzahl der gegebenen Größen verschiedene Benennungen für die Ausrechnung solcher Aufgaben. Sie unterschieden eine Regula quinque, Regula septem u. s. w., je nachdem 5, 7 u. s. w. Größen als bekannt vorausgesetzt wurden. Gegenwärtig fassen wir alle diese Aufgaben unter den gemeinsamen Namen: zusammengesetzte Propor-

tionsrechnung oder zusammengesetzte Regeldetri zusammen. Jede hierher gehörige Aufgabe besteht, wie die einfache Regeldetri-Aufgabe, aus 2 Theilen, nemlich aus der Angabe und aus der Frage. In der Angabe kommen lauter bekannte Zahlen vor, die aber von einander abhängen, d. h. eine Änderung der einen bedingt nothwendig eine Änderung der andern. In der Frage müssen dieselben Benennungen vorkommen, wie in der Angabe, und alle bis auf eine bekannt sein. Wie solche Aufgaben durch aufeinanderfolgende Schlüsse aufzulösen sind, haben wir bereits nachgewiesen in § 67 bis § 68; hier haben wir die Methode zu erläutern, wie solche Aufgaben mit Hülfe der Proportionen zu behandeln sind. Wir werden an bestimmten Zahlenbeispielen das Verfahren in einer solchen Weise zu erläutern suchen, daß daraus die Allgemeinheit der Methode hervorgeht.

1) Wenn 7 Arbeiter in 8 Tagen 60 Rubel verdienen; wieviel werden 10 Arbeiter in 14 Tagen erhalten?

Auflösung. Es ist im vorliegenden Fall:

(die Angabe) 7 Arbeiter in 8 Tagen . . . 60 Rubel;

(die Frage) 10 " " 14 " . . . x " ?

Wir denken uns jetzt folgende Zwischengrößen:

7 Arbeiter in 8 Tagen . . . 60 Rubel;

10 " " 8 " . . . u " ?

10 " " 14 " . . . x " ?

Es ist nemlich die Aufgabe zu lösen:

7 Arbeiter verdienen 60 Rubel (in 8 Tagen)

also 10 " " u " (ebenfalls in 8 Tagen).

Nach der Regeldetri haben wir:

(7 Arbeiter) : (10 Arbeitern) = 60 Rubel : u Rubeln?

Da nun bei der Beurtheilung sich ergibt, daß die Zahl der Arbeiter mit ihrem Arbeitslohne in directem Verhältnisse steht, so muß sein

$$I. \quad 7 : 10 = 60 : u ?$$

$$\text{Also} \quad u = \frac{10 \cdot 60}{7}.$$

Jetzt ist u eine bekannte Zahl, und wir haben für die zweite Aufgabe:

In 8 Tagen zahlt man . . u Rubel (an 10 Arbeiter)
also, in 14 " " " " . . x " ? (ebenfalls an 10 Arbtr.)

Hieraus ergibt sich die neue Proportion:

$$8 \text{ Tage} : 14 \text{ Tagen} = u \text{ Rubel} : x \text{ Rubeln?}$$

Da die Beurtheilung zeigt, daß die Anzahl der Tage mit dem Arbeitslohne in directem Verhältnisse steht, so muß sein:

$$\text{II. } 8 : 14 = u : x.$$

Also

$$x = \frac{14 \cdot u}{8}.$$

Setzen wir nun statt u seinen aus I gezogenen Werth (nehmlich $u = \frac{10 \cdot 60}{7}$), so ergibt sich:

$$x = \frac{14 \cdot 10 \cdot 60}{8 \cdot 7} = 150.$$

Wenn wir die beiden Proportionen (I) und (II) unter einander schreiben, nehmlich:

$$7 : 10 = 60 : u$$

$$8 : 14 = u : x,$$

so haben wir rechts zusammenhängende Verhältnisse, daher

$$(7 \cdot 8) : (10 \cdot 14) = 60 : x,$$

woraus sich ergibt:

$$x = \frac{(10 \cdot 14) \cdot 60}{7 \cdot 8} = 150,$$

wie vorhin.

Wir haben nur jetzt die gefundene Zahl 150 auf dieselbe Benennung zu beziehen, die x ursprünglich hatte, und enthalten
x Rubel = 150 Rubel.

2) In 5 Tagen beendigen 10 Arbeiter, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten, einen Graben von 160 Saefchen Länge; wie viel Tage brauchen 15 Arbeiter auf 384 Saefchen Länge bei 8 Stunden täglich?

Auflösung.

(Angabe) 10 Arbtr., 10 Stund. tägl., 160 Saefchen Länge .. 5 Tage
(Frage) 15 " " 8 " " " 384 " " " .. x " ?

Wir denken uns jetzt folgende unbekannte Zwischengrößen:

10 Arbeiter,	10 Stunden täglich,	160 Sackchen Länge	...	5 Tage
15 " 10	" " "	160 " "	" " "	t "
15 " 8	" " "	160 " "	" " "	u "
15 " 8	" " "	384 " "	" " "	x "

Wir sollen nehmlich berechnen:

- 1) wieviel Tage (t) 15 Arbtr. bei 10 St. tägl. und 160 Sackch. Länge
 - 2) " " (u) 15 " " 8 " " 160 " "
 - 3) " " (x) 15 " " 8 " " 384 " "
- brauchen werden.

Überhaupt geht man mit der Einführung der Zwischengrößen so lange fort, bis man auf die Frage selbst d. h. auf die eigentlich gesuchte Zahl x kommt.

Für die erste Zwischengröße haben wir die Proportion:

$$(10 \text{ Arbeiter}) : (15 \text{ Arbeitern}) = (5 \text{ Tage}) : (t \text{ Tagen}).$$

Je mehr Arbeiter sind, desto weniger Tage werden nöthig sein; daher die Zahl der Arbeiter und die Zahl der Tage in indirectem Verhältnisse; folglich die zur Berechnung von t richtige Proportion:

$$I) 15 : 10 = 5 : t$$

Für die zweite Zwischengröße haben wir die Proportion:

$$(10 \text{ Stunden täglich}) : (8 \text{ St. täglich}) = (t \text{ Tage}) : (u \text{ Tagen})?$$

Je mehr Stunden täglich gearbeitet wird, desto weniger Tage sind nöthig, deshalb ein indirectes Verhältniß; folglich die zur Berechnung von u richtige Proportion:

$$II) 8 : 10 = (t) : u.$$

Für die letzte Größe x haben wir endlich:

$$(160 \text{ Sackch. Länge}) : (384 \text{ Sackch. Länge}) = (u \text{ Tage}) : (x \text{ Tagen})?$$

Je mehr Sackchen Länge sind, desto mehr Tage wird man brauchen; deshalb die zur Berechnung von x richtige Proportion:

$$III) 160 : 384 = u : x.$$

Stellen wir die drei Proportionen unter einander.

$$15 : 10 = 5 : (t)$$

$$8 : 10 = (t) : (u)$$

$$160 : 384 = (u) : x,$$

so muß sein:

$$(15 \cdot 8 \cdot 160) : (10 \cdot 10 \cdot 384) = 5 : x \text{ (§ 122).}$$

$$\text{Also } x = \frac{(10 \cdot 10 \cdot 384) \cdot 5}{(15 \cdot 8 \cdot 160)} = 10 \text{ Tage.}$$

Da die Zwischengrößen t und u gar nicht berechnet zu werden brauchen, weil sie bei der Zusammensetzung der Proportionen herausfallen, so schreibt man sogleich aus der Angabe und Frage:

(10 Arbeiter) : (15 Arbeitern)

(10 Stund. täglich) : (8 Stund. täglich) } = 5 Tage : x Tagen?

(160 Sack. Länge) : (384 Sack. Länge) }

und nennt dieses den vorläufigen Ansatz.

Hierauf untersucht man, ob die Zahlen der ersten Reihe (bei uns 10 Arbeiter, 10 Stunden täglich, 160 Sackchen Länge) mit dem dritten Gliede (d. h. 5 Tage) in directem oder in indirectem Verhältnisse stehen. Wir haben oben gesehen, daß die beiden ersten Zahlen in indirectem und die dritte Zahl in directem Verhältnisse zu 5 Tagen stehen, deshalb lehren wir die beiden ersten Verhältnisse um, — lassen die Benennungen der Verhältnißglieder weg, und haben dann als richtigen Ansatz:

$$\left. \begin{array}{l} 15 : 10 \\ 8 : 10 \\ 160 \cdot 384 \end{array} \right\} = 5 \text{ Tage} : x \text{ Tagen?}$$

Hierauf multipliciren wir die mittlern Zahlen und dividiren mit dem Producte der Zahlen im ersten Gliede, so daß

$$x = \frac{10 \cdot 10 \cdot 384 \cdot (5 \text{ Tage})}{15 \cdot 8 \cdot 160} = 10 \text{ Tage}$$

gefunden wird.

Daß es in dem Verfahren keinen Unterschied machen kann, wenn mehr als drei Proportionen nöthig werden, ist klar.

Die Repartitionsrechnung.

§ 130. Bei den Aufgaben der Gesellschafts- oder Repartitionsrechnung soll die Theilung einer Zahl P dergestalt geschehen, daß sich die einzelnen Theile wie gegebene Zahlen a, b, c, d verhalten.

Setzen wir nun, die Theile seien u, x, y, z so haben wir:

$$a : b : c : d = u : x : y : z;$$

also

$$(a + b + c + d) : (u + x + y + z) = a : u = b : x = c : y = d : z.$$

Nun ist $u + x + y + z = P$; folglich

$$(a + b + c + d) : P = a : u = b : x = c : y = d : z,$$

woraus sich sogleich ergibt:

$$u = \left(\frac{P}{a + b + c + d} \right) \cdot a,$$

d. h. man erhält jeden zu suchenden Theil, wenn man den Quotienten aus der Summe aller Verhältnißzahlen in die zu theilende Zahl mit der, jedem Theile entsprechenden Verhältnißzahl multiplicirt.

Setzen wir die Summe der Theilungszahlen $a + b + c + d = S$, so muß sein:

$$u = \left(\frac{P}{S} \right) \cdot a$$

$$x = \left(\frac{P}{S} \right) \cdot b$$

$$y = \left(\frac{P}{S} \right) \cdot c$$

$$z = \left(\frac{P}{S} \right) \cdot d$$

Wmithin

$$u + x + y + z = \left(\frac{P}{S} \right) a + \left(\frac{P}{S} \right) b + \left(\frac{P}{S} \right) c + \left(\frac{P}{S} \right) d$$

$$= \left(\frac{P}{S} \right) [a + b + c + d]$$

$$= \left(\frac{P}{S} \right) \cdot S = P.$$

Ferner haben wir:

$$u : x = \left(\frac{P}{S}\right) \cdot a : \left(\frac{P}{S}\right) \cdot b = a : b$$

$$x : y = \left(\frac{P}{S}\right) \cdot b : \left(\frac{P}{S}\right) \cdot c = b : c$$

$$y : z = \left(\frac{P}{S}\right) \cdot c : \left(\frac{P}{S}\right) \cdot d = c : d$$

Also verhalten sich die gefundenen Theile wie die gegebenen Größen und ihre Summe ist = P, wie es sein soll.

Gehört die Aufgabe zur zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung, so ist eine doppelte Reihe von Verhältniszahlen gegeben. Man verschafft sich durch Multiplication oder Division derselben, je nachdem sie directe oder indirecte Beziehungen ausdrücken, eine einfache Reihe und verfährt wie vorhin.

Die Kettenregel

§ 131. In der einfachen Kettenregel haben wir aus gegebenen Zwischenverhältnissen die Größen verschiedener metrischen Systeme durch einander auszudrücken (§ 80). Setzen wir, daß a Einheiten einer gewissen Gattung = b Einheiten einer andern Gattung; a_1 Einheiten dieser zweiten Gattung = b_1 Einheiten einer dritten Gattung; a_2 Einheiten dieser dritten Gattung = b_2 Einheiten einer vierten Gattung seien, so daß, wenn wir die Einheiten dieser 4 Gattungen mit B; B_1 ; B_2 ; B_3 bezeichnen, es darauf ankommt, die Einheiten der ersten Sorte B durch die Einheiten der vierten Sorte B_3 ausdrücken; dann haben wir nach der Voraussetzung:

$$1) \quad a \cdot B = b \cdot B_1$$

$$2) \quad a_1 \cdot B_1 = b_1 \cdot B_2$$

$$3) \quad a_2 \cdot B_2 = b_2 \cdot B_3$$

Aus diesen Gleichungen folgt nach § 126:

$$1 \cdot B : 1 \cdot B_1 = b : a$$

$$1 \cdot B_1 : 1 \cdot B_2 = b_1 : a_1$$

$$1 \cdot B_2 : 1 \cdot B_3 = b_2 : a_2$$

daher $1 \cdot B : 1 \cdot B_3 = b \cdot b_1 \cdot b_2 : a \cdot a_1 \cdot a_2$ (§ 122),

$$\text{also } 1 \cdot B = \frac{b \cdot b_1 \cdot b_2}{a \cdot a_1 \cdot a_2} \cdot B_3.$$

Wären nun m Einheiten der Gattung B durch B_3 auszudrücken, so hätten wir

$$m B = \frac{m \cdot b \cdot b_1 \cdot b_2}{a \cdot a_1 \cdot a_2} \cdot B_3.$$

Setzen wir nun:

$$x B_3 = m B$$

$$a B = b B_1$$

$$a_1 B_1 = b_1 B_2$$

$$a_2 B_2 = b_2 B_3$$

$$\text{so folgt: } x = \left(\frac{m \cdot b \cdot b_1 \cdot b_2}{a \cdot a_1 \cdot a_2} \right) B_3 \quad (\S 80).$$

Daß mehrere Gleichungen in dem Verfahren keinen Unterschied machen können, überfieht man leicht, ebenso, daß das Verfahren sich gleich bleiben muß, wenn außer den Reductionen noch eine Werthgleichung hinzukommt, wodurch man nur eine Proportion mehr erhält und die Aufgabe der zusammengesetzten Kettenregel angehört.

Die Alligations-Rechnung.

§ 132. Bezeichnet a die Menge der Einheiten (Quantität) und q den Werth jeder Einheit derselben (Qualität), so wird durch $a \cdot q$ der Werth des Ganzen ausgedrückt (§ 79); z. B. Wie theuer sind a Pfund einer Waare, wenn 1 Pfund mit b Ropfen bezahlt wird?

Auflösung. Offenbar werden a Pfund a mal so viel als 1 Pfund gelten, deshalb ihr Werth $a \cdot q$ Ropfen sein.

Gesetzt nun, man wollte mischen:

1) a Einheiten, von denen jede q Rubel kostet

b " " = " q' "

c " " = " q'' "

und verlangt zu wissen, wie theuer 1 Pfund der ganzen Mischung; so haben wir:

a Einheiten kosten $a \cdot q$ Rubel

b " " $b \cdot q'$ "

c " " $c \cdot q''$ "

folglich $(a + b + c)$ Einheiten $(aq + b \cdot q' + cq'')$ Rubel

daher (1 Einheit) : $(a + b + c)$ Einheiten = x Rubl. : $(aq + bq' + cq'')$ R.

$$\text{also } x = \frac{aq + bq' + cq''}{a + b + c} \text{ Rubel } (\S 110),$$

b. h. man dividirt die Summe der Producte aus Quantität und Qualität jedes Bestandtheiles mit der Summe der Quantitäten der Bestandtheile (§ 79).

2) Jemand braucht P Pfund einer Waare à Q Kopeken und hat vorrätzig p Pfund von derselben Sorte à q Kopeken; wie hoch kommt 1 Pfund einer schlechtern Sorte, die er mit der letztern Waare mischen will?

Auflösung.

P Pfund à Q Kopeken haben einen Werth . . . P . Q Kopeken
 P „ à q „ „ „ „ „ . . . P . q „

Es fehlen $(P-p)$ Pfd. à x Kop.; diese kosten . . $(Pq-pq)$ Kopek.;
 folglich:

1 Pfund : $(P-p)$ Pfund = x Kopeken : $(PQ-pq)$ Kopeken

$$\text{daher } x = \frac{PQ - pq}{P - p} \text{ Kopeken (§ 110),}$$

wie wir gefunden im § 79.

3) Man hat zwei Sorten einer Waare, — die Einheit der bessern zum Preise a, die der schlechtern zum Preise b; wieviel muß man von jeder Sorte nehmen, um P Einheiten einer Mittel-sorten zu bekommen, von denen jede den Preis m habe?

Auflösung. Gesezt, es seien von der bessern Sorte x Einheiten genommen, — dann kommen nothwendig von der schlechtern $(P-x)$ Einheiten dazu.

Der Werth der bessern Sorte ist a x

„ „ „ schlechtern „ „ b (p - x)

also der Werth von beiden $ax + b(p - x) = ax + bp - bx$.

Da die Mischung p Einheiten erhalten soll, von denen jede den Preis m hat, so wird der ganze Werth der Mischung ausgedrückt durch p . m.

Wir haben jetzt zwei Werthe für die Mischung, die einander gleich sein müssen, daher

$$ax + bP - bx = Pm.$$

Nun ist $bp = bp$. Subtrahiren wir, so muß

$$\text{sein } ax - bx = pm - bp.$$

Oder $(a - b) . x = (m - b) . P,$

folglich $x = \frac{(m-b)p}{a-b}$ = der Menge der Einheiten der bessern Sorte.

Die Quantität der schlechtern Sorte ergibt sich dadurch, daß wir x von P subtrahiren. Dieses giebt:

$$\begin{aligned} p-x &= p - \frac{p(m-b)}{a-b}. \text{ Auf gleiche Nenner gebracht, haben wir:} \\ &= \frac{p(a-b) - p(m-b)}{a-b}. \text{ Die Klammern im Zähler aufgelöst:} \\ &= \frac{pa - pb - pm + pb}{a-b} \\ &= \frac{pa - pm}{a-b} = \frac{p(a-m)}{a-b}. \end{aligned}$$

Es verhält sich also die Quantität der bessern Sorte zur Quantität der schlechtern Sorte wie

$$\frac{p(m-b)}{a-b} : \frac{p(a-m)}{a-b}, \text{ oder wie} \\ (m-b) : (a-m).$$

d. h. die Quantitäten der mit einander zu verbindenden Theile verhalten sich umgekehrt wie die Unterschiede ihrer Qualitäten von der Qualität der zu bildenden Verbindung (§ 79, III.)

4) Man hat zwei Sorten Waare, — die Einheit der bessern zum Preise a , die der schlechtern zum Preise b ; ferner weiß man, daß die Mischung den Preis m haben soll, und daß sich k Einheiten der bessern Sorte darin befinden; wieviel Einheiten kommen von dem andern Bestandtheile dazu?

Auflösung. Gesezt, es seien vom 2ten Bestandtheile x Einheiten nöthig, so haben wir

$$k : x = (m - b) : (a - m)$$

$$\text{also } x = \frac{k \cdot (a - m)}{m - b}.$$

Die Menge der Mischung ist gleich der Summe der beiden Bestandtheile, also:

$$\begin{aligned} = k + x &= k + \frac{k(a-m)}{m-b} \\ &= \frac{k(m-b) + k(a-m)}{m-b} = \frac{km - kb + ka - km}{m-b} \\ &= \frac{ka - kb}{m-b} = \frac{k(a-b)}{m-b}. \end{aligned}$$