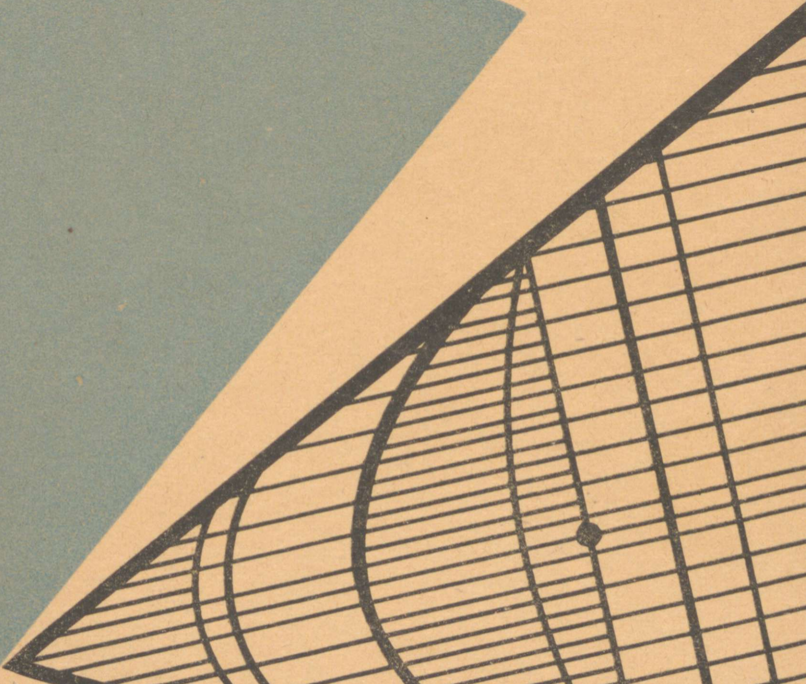
j. glagoleva
i. gelfand
e. šnol



funktsioonid ja graafikud

I. GELFAND, J. GLAGOLEVA, E. ŠNOL

FUNKTSIOONID JA GRAAFIKUD

(Põhilised võtted)

KIRJASTUS «VALGUS» TALLINN 1966

Originaali tiitel:

Математика
Библиотечка физико-математической школы
Выпуск 2
И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль
ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ
(основные приемы)
Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва 1965

Tõlkinud *Mati Kilp*
Kaanekujundus *Jüri Arrak*

Гельфанд Израиль Моисеевич, Глаголева Елена Георгиевна, Шноль Эммануил Эльевич.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ (основные приемы). На эстонском языке. Обложка Ю. Аррак. Издательство «Валгус». Таллин. Пярнуское шоссе, 10.

*

Toimetaja K. Kallaste. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja T. Linkvist. Korrektorid A. Kalberg ja H. Kull

Ladumisele antud 27. VII 1966. Trükkimisele antud 29. X 1966. Paber 54×84, $^1/_{16}$. Trükipoognaid 6,0. Tingtrükipoognaid 5,04. Arvestuspoognaid 4,32. Trükiarv 4000. Tellimise nr. 5994. Trükikoda «Kommunist», Tallinn, Pikk tn. 2. Trükipaber nr. 2 — Kohila Paberivabrik

Hind 11 kop.

6—7

Eessõna

«Füüsika ja matemaatika kooli raamatukogu» matemaatika seeria teine raamat koosneb kahest brošüürist ühise nimetuse all «Funktsioonid ja graafikud». Käesolev (esimene) brošüür käsitleb graafikute konstrueerimise põhilisi võtteid lihtsaimate funktsioonide näiteil. Teises brošüüris puudutatakse keerukamaid ja spetsiifilisemaid küsimusi. Raamat on mõeldud IX klassi õpilastele.

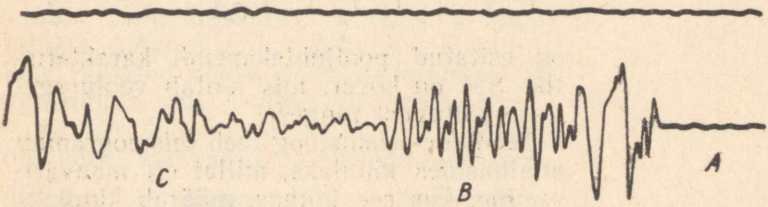
Õppida raamatu järgi graafikuid konstrueerima ei ole kerge: lugejal pole tahvlit, millele õpetaja tunni või loengu ajal joonestab järk-järgult graafiku. Seetõttu loobusid autorid joonistest, millel tavaliselt on antud ainult graafiku lõplik kuju, ning palusid väljaande kunstnikke V. Jankilevskit ja V. Smoljaninovit kujundada brošüüri lehekülgede ääred omamoodi tahvlina. Jälgides jooniseid äärtel, on teil kerge samm-sammult taastada graafiku konstrueerimise kogu protsessi.

Osa teoreetilist materjali on esitatud ülesannete kujul. Teksti mõistmiseks on vaja tähelepanelikult läbi lahendada kõik tekstis esinevad ülesanded ja näited.

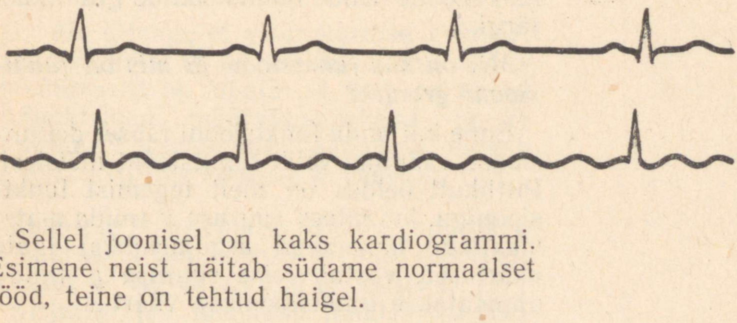
Raamatu kirjutamisel kasutasid autorid oma kolleegide V. Aleksejevi, V. Keilis-Boroki, A. Kirillovi, I. Sivašinski, S. Fomini ja M. Tsetlini abi ja nõuandeid. Autorid tänavad neid abi eest. Eriti on autorid tänu võlgu brošüüri toimetajale B. Šabatile, kelle töö tuli raamatule oluliselt kasuks.

AUTORID

SISUKORD

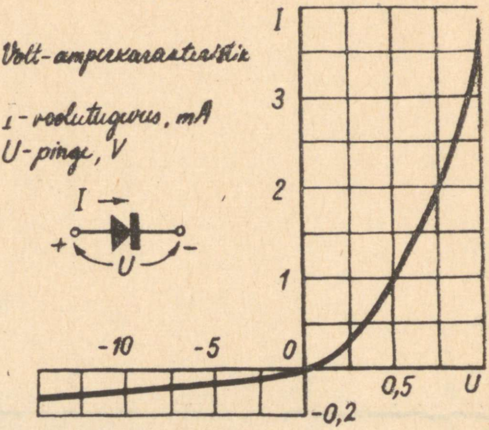


Sellel joonisel te näete kahte kõverat, mille on joonestanud seismograaf — riist, mis registreerib maakoore võnkumisi. Esimene kõver on saadud, kui maakoor on rahulikus seisundis, teisel on näha maavärisemise signaale.



Sellel joonisel on kaks kardiogrammi. Esimene neist näitab südame normaalset tööd, teine on tehtud haigel.

Aga siin



on esitatud pooljuhtelemendi karakteristik. See on kõver, mis näitab voolutugevuse sõltuvust pingest.

Teadlane-seismoloog teeb seismogrammi analüüsides kindlaks, millal oli maavärisemine, kus see toimus, määrab kindlaks tõugete tugevuse ja iseloomu. Arst, kes uurib haiget, võib kardiogrammi järgi otsustada häirete üle südame töös; kardiogrammi uurimine aitab haigust õieti diagnoosida. Insener-raadioelektroonik valib pooljuhtelemendile kõige sobivama töörežiimi vastavalt selle karakteristikule. Kõik need inimesed uurivad teatud funktsioone nende funktsioonide graafikute järgi.

Mis on siis funktsioon ja mis on funktsiooni graafik?

Enne kui anda funktsiooni täpset definitsiooni, räägime veidi funktsiooni mõistest. Piltlikult öeldes on meil tegemist funktsiooniga, kui mingi suuruse x (mida matemaatikud nimetavad argumendiks) igale väärtusele vastab teise suuruse y (mida nimetatakse funktsiooniks) väärtus.

Nii näiteks on maakoore nihkel maavärisemise igal ajamomendil teatud väärtus. Tähendab, nihke suurus on aja funktsioon. Voolutugevus pooljuhtelemendis on pinge funktsioon, kuna igale pinge väärtusele vastab teatud kindel voolutugevuse väärtus.

Selliseid näiteid võib tuua väga palju: kera ruumala on tema raadiuse funktsioon; kõrgus, milleni tõuseb vertikaalselt üles visatud kivi, on tema algkiiruse funktsioon jne.

Lähme nüüd üle täpsete definitsioonide juurde. Kui öeldakse, et suurus y on suuruse x funktsioon, siis näidatakse kõigepealt, millised väärtused võivad suurusel x olla. Neid argumendi x väärtusi nimetatakse *lubatud väärtusteks*, argumendi x kõigi lubatud väärtuste hulka nimetatakse aga funktsiooni y *määramispiirkonnaks*.

Näiteks, kui ütleme, et kera ruumala V on tema raadiuse R funktsioon, siis moodustavad funktsiooni $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ määramispiirkonna kõik nullist suuremad arvud, sest raadiuse R väärtuseks võib olla ainult positiivne arv.

Alati, kui antakse ette funktsioon, on tarvis ära näidata tema määramispiirkond.

Definitsioon I.

Me ütleme, et y on suuruse x *funktsioon*, kui: 1) on näidatud, millised x väärtused on lubatavad, s. t. on antud funktsiooni määramispiirkond, ja 2) igale x lubatavale väärtusele vastab parajasti üks suuruse y väärtus.

Lühidalt kirjutatakse sõnade «suurus y on suuruse x funktsioon» asemel: $y = f(x)$. (Loetakse: «igrek võrdub ef iksist».)

Kirjutis $f(a)$ tähendab funktsiooni $f(x)$

arvulist väärtust, mis vastab x väärtusele $x = a$. Näiteks, kui

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

siis

$$f(2) = \frac{1}{2^2 + 1} = \frac{1}{5},$$

$$f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2},$$

$$f(0) = \frac{1}{0^2 + 1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ jne.}$$

Reegel, mille abil x väärtuse järgi leitakse vastav y väärtus, võib olla esitatud mitmel erineval viisil ja mingeid kitsendusi selle reegli vormi kohta ei tehta. Kui teile öeldakse, et y on x funktsioon, siis peate ainult kontrollima, kas 1) teile on ette antud määramispiirkond, s. t. on näidatud, millised väärtused võivad suurusel x olla, ja 2) on antud reegel, mille järgi x igale lubatavale väärtusele võite vastavusse seada ühe y väärtuse.

Milline võib see reegel olla?

Toome mõned näited.

1. Olgu öeldud, et x on suvaline reaalarv ja et y leitakse valemi järgi

$$y = x^2.$$

Funktsioon $y = x^2$ on ette antud valemiga.

Reegel võib olla ka sõnaline.

2. Funktsioon y antakse ette järgmiselt: kui x on positiivne arv, siis y võrdub 1; kui x võrdub 0, siis y võrdub 0; kui x on negatiivne arv, siis y võrdub —1.

Toome veel ühe näite funktsioonist, mis antakse ette sõnalise reegliga.

3. Iga arvu x võib esitada kujul $x =$

$= y + \alpha$, kus α on ühest väiksem mittenegatiivne arv, y aga täisarv. On selge, et igale arvule x vastab üheselt määratud arv y, s. t. y on x funktsioon. Selle funktsiooni määramispiirkonnaks on kogu arvtelg. Seda funktsiooni nimetatakse «täisosa x-st» ja tähistatakse järgmiselt:

$$y = [x].$$

Näiteks,

$$[3{,}53] = 3, \quad [4] = 4, \quad [0{,}3] = 0,$$
$$[-0{,}3] = -1.$$

Edaspidi kasutame seda funktsiooni harjutustes.

4. Vaatleme funktsiooni $y = f(x)$, mis on ette antud valemiga

$$y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}.$$

Mida on mõistlik lugeda tema määramispiirkonnaks?

Kui funktsioon on ette antud valemiga, siis vaadeldakse tavaliselt tema niinimetatud *loomulikku* määramispiirkonda, s. o. kõigi arvude hulka, millega on võimalik sooritada tehted, mis on näidatud valemis. Tähendab, meie funktsiooni määramispiirkonda ei kuulu arv 5 (kuna $x = 5$ korral murru nimetaja muutub nulliks) ja x väärtused, mis on väiksemad kui -3 (kuna $x < -3$ puhul on juurealune avaldis negatiivne). Niisiis, funktsiooni $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$ määramispiirkonna moodustavad kõik arvud, mis rahuldavad seoseid:

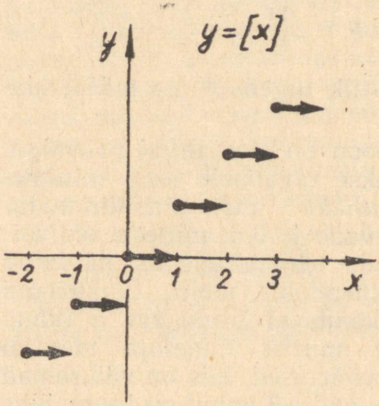
$$x \geqslant -3, \quad x \neq 5.$$

Funktsiooni võib kujutada geomeetriliselt graafiku abil. Et konstrueerida mingi funktsiooni graafikut, vaatleme suvalist lubatavat väärtust x ja temale vastavat väärtust y. Olgu näiteks x arv a, temale vastav y väärtus olgu arv $b = f(a)$. Kujutame arvude a ja b paari tasandil punktina. Selle punkti koordinaadid on (a, b). Kanname tasandile sellised punktid vastavalt kõikidele lubatavatele x väärtustele. Saadud punktide kogu ongi funktsiooni graafik.

Definitsioon II.

> *Funktsiooni graafik* on punktide hulk, mille abstsissideks on argumendi x lubatavad väärtused, ordinaatideks aga funktsiooni y vastavad väärtused.

Näiteks on siin

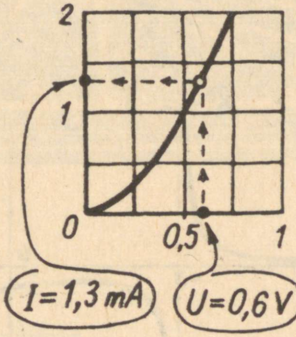


kujutatud funktsiooni

$$y = [x]$$

graafik. See koosneb lõpmatust hulgast horisontaalsetest lõikudest. Noolekesed tähendavad seda, et nende lõikude parempoolsed otspunktid ei kuulu graafikule (vasakpoolsed kuuluvad).

Graafik võib olla reegliks, millega funktsioon ette antakse. Näiteks võib pooljuhtelemendi karakteristiku järgi määrata, et kui argument U on 0,6 volti, siis funktsioon I on 1,3 milliamprit.



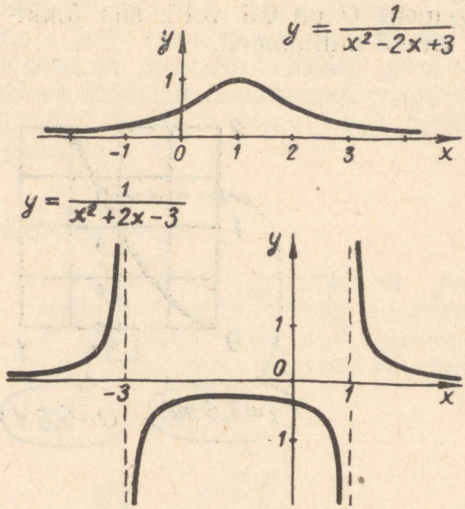
Funktsioone graafikutena kujutada on väga mugav, kuna, heitnud pilgu graafikutele, võib kohe eristada üht funktsiooni teisest.

Vaatame veel kord kõige esimest joonist. Sellelt graafikult näeb ka kõige kogenematum inimene kohe maavärisemise signaale (piirkonnad *B* ja *C*). Vaadeldes tähelepanelikumalt, märkab ta tingimata ka erinevust lainete iseloomus piirkondades *B* ja *C* (seismoloog võiks teile selgitada, et piirkonnas *B* on üles kirjutatud niinimetatud laine *P*, see on laine, mis levib maakoore sügavuses, aga piirkonnas *C* laine *S*, mis levib pinnal).

Proovige, kas teil õnnestub eraldada neid kahte piirkonda siin kõrval esitatud kahe tabeli järgi. (Me ei saanud siin esitada tabelit kogu kõvera jaoks, kuna see oleks enda alla võtnud terve lehekülje. Lehekülje äärel näete tabelit piirkondade *B* ja *C* väikese osa jaoks).

Laine *P* (samm 0,25 s)	Laine *S* (samm 0,4 s)
0,1	0,2
0,1	0,5
—1,6	2,5
—1,7	4,9
—2,4	7,1
—3,0	6,1
—4,5	3,8
—3,8	0,4
—2,9	0,2
—1,1	0,7
0,8	1,5
3,3	2,5
5,1	3,2
3,7	2,8
0,0	0,4
—2,0	—2,2
—4,4	—3,3
—5,8	—4,5
—3,8	—4,8
—1,6	—4,8
	—4,8
	—3,7
	—3,5
	—4,4
	—6,6

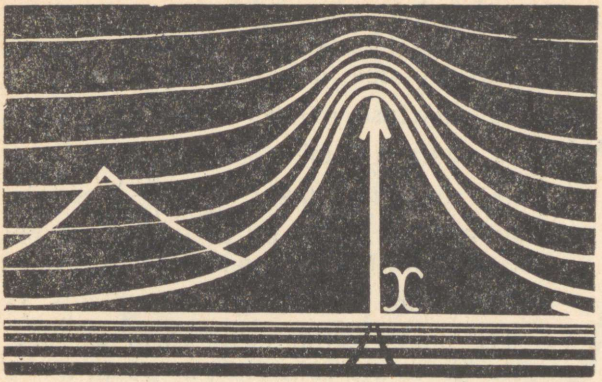
Sellel joonisel



on esitatud kahe funktsiooni graafikud, mis antakse ette väga sarnaste valemitega.

Nende kahe funktsiooni vahelist erinevust võib muidugi avastada ka valemite järgi. Kui aga vaadata vastavatele graafikutele, siis hakkab see erinevus kohe silma.

Alati, kui on tarvis välja selgitada funktsiooni käitumise üldist iseloomu, avastada tema iseärasusi, on graafik oma näitlikkuse tõttu asendamatu. Seetõttu võtab insener või teadlane, kes on saanud teada teda huvitava funktsiooni (valemi või tabeli kujul), tavaliselt pliiatsi, visandab graafiku kavandi ja vaatab, kuidas käitub funktsioon, kuidas ta «välja näeb».



§ 1. Mõningaid näiteid.

1. Kui definitsiooni täpselt järgida, siis tuleb mingi graafiku konstrueerimiseks leida kõik argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste paarid ning kanda tasandile kõik nende koordinaatidega punktid. Enamikul juhtumeil pole seda praktiliselt võimalik teha, kuna selliseid punkte on lõpmata palju. Seetõttu leitakse tavaliselt mõned punktid, mis graafikule kuuluvad, ja ühendatakse need sujuva kõveraga.

Proovime niiviisi konstrueerida funktsiooni

$$y = \frac{1}{1+x^2} \qquad (1)$$

graafiku.

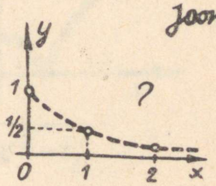
Valime mõned argumendi väärtused, leiame neile vastavad funktsiooni väärtused ja kirjutame need tabelisse (tabel 1). Saadud koordinaatide järgi kanname tasandile punktid ja ühendame need algul punktiirjoonega.

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

Tabel 1

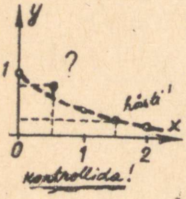
x	y
0	1
1	1/2
2	1/5
3	1/10

Joon 1

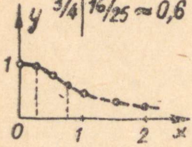


x	y
1½	4/13
½	4/5

Joon 2

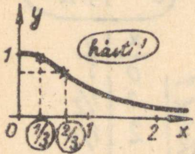


x	y
1/4	16/17 ≈ 1
3/4	16/25 ≈ 0,6



veel üks kontroll

x	y
1/3	9/10
2/3	9/13



Joon. 3

Kontrollime nüüd, kas me leitud punktide vahel joonestasime kõvera õigesti. Selleks võtame mingi vahepealse argumendi väärtuse, näiteks $x = 1\frac{1}{2}$, ja arvutame vastava funktsiooni väärtuse $y = \frac{4}{13}$. Saadud punkt $\left(1\frac{1}{2}, \frac{4}{13}\right)$ «satub» hästi meie kõverale, nii et tundub, et me joonestasime ta enam-vähem õigesti.

Ent võtame veel $x = \frac{1}{2}$. Siis $y = \frac{4}{5}$ ja vastav punkt satub meie kõverast ülespoole (joon. 2). Tähendab, $x = 0$ ja $x = 1$ vahel pole graafik selline, nagu me mõtlesime. Võtame selles «kahtlases» piirkonnas veel väärtused $x = \frac{1}{4}$ ja $x = \frac{3}{4}$. Ühendades kõik saadud punktid, saame täpsema kõvera, mis on kujutatud joonisel 3. Kontrolliks võetud punktid $\left(\frac{1}{3}, \frac{9}{10}\right)$ ja $\left(\frac{2}{3}, \frac{9}{13}\right)$ satuvad hästi sellele kõverale.

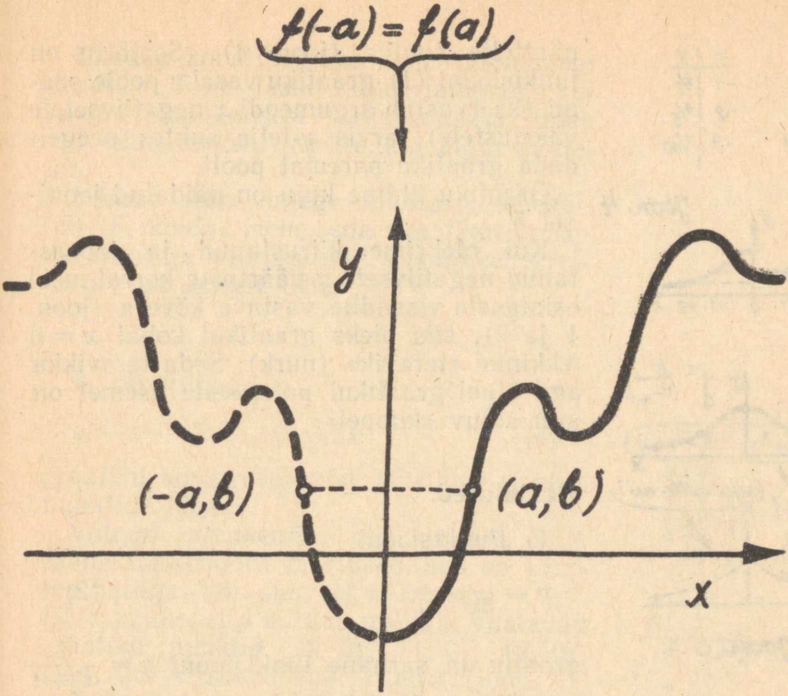
2. Et konstrueerida graafiku vasakut poolt, tuleb koostada veel üks tabel, nimelt argumendi negatiivsete väärtuste jaoks. Seda on lihtne teha. Näiteks,

$$\text{kui } x = 2, \text{ siis } y = \frac{1}{2^2 + 1} = \frac{1}{5},$$

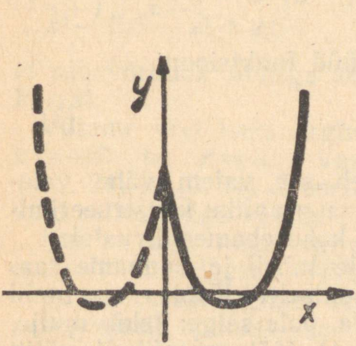
$$\text{kui } x = -2, \text{ siis } y = \frac{1}{(-2)^2 + 1} = \frac{1}{5}.$$

Tähendab, koos punktiga $\left(2, \frac{1}{5}\right)$ asetseb graafikul ka punkt $\left(-2; \frac{1}{5}\right)$, mis on esimese punktiga ordinaattelje suhtes sümmeetriline.

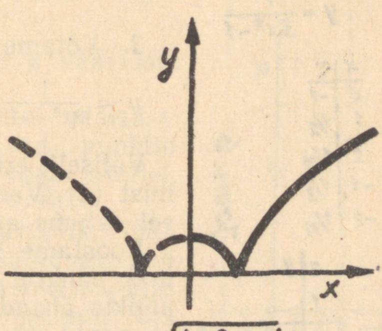
Üldiselt, kui punkt (a, b) asetseb meie graafiku paremal poolel, siis graafiku vasakul poolel asetseb punkt $(-a, b)$, mis on punktiga (a, b) sümmeetriline ordi-



Kui mingi funktsiooni väärtused, mis vastavad argumendi kahele suvalisele vastandväärtusele (s. t. väärtustele a ja —a), on võrdsed, siis nimetatakse seda funktsiooni paarisfunktsiooniks. Iga paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline ordinaattelje suhtes.



$y = x^2 - 3|x| + 2$

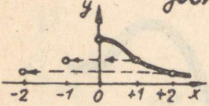


$y = \sqrt{|x^2 - 1|}$

x	y
1	$1/2$
2	$1/5$
3	$1/10$

x	y
-1	$1/2$
-2	$1/5$
-3	$1/10$

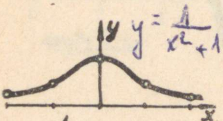
Joon 4



naattelje suhtes (joon. 4). Seetõttu on funktsiooni (1) graafiku vasaku poole saamiseks (vastab argumendi x negatiivsetele väärtustele) tarvis y-telje suhtes peegeldada graafiku paremat poolt.

Graafiku üldine kuju on näidatud joonisel 5.

Kui oleksime kiirustanud ja joonestanud negatiivsete x väärtuste korral meie esialgsele visandile vastava kõvera (joon. 1 ja 2), siis oleks graafikul kohal $x = 0$ tekkinud «teravik» (nurk). Seda teravikku aga õigel graafikul pole, selle asemel on siin sujuv «kuppel».



(nii), (aga mitte nii!)

Joon. 5

Harjutused.

1) Funktsiooni

$$y = \frac{1}{3x^2 + 1} \tag{2}$$

graafik on sarnane funktsiooni $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ graafikuga. Konstrueerige see graafik.

2) Missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid (vt. lk. 15):

a) $y = 1 - x^2$; b) $y = x^2 + x$;

c) $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$; d) $y = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}$?

3. Võtame nüüd funktsiooni

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}. \tag{3}$$

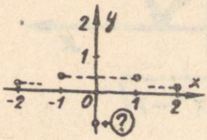
Väliselt erineb see valem vähe valemist (2). Vastava graafiku konstrueerimisel satume aga kohe ebameeldivustele.

Koostame jälle tabeli ja kanname saadud punktid joonisele. Kuidas aga neid punkte ühendada, pole selge: tekib mulje, et punkt (0, —1) jääb graafikult välja (joon. 6).

$y = \frac{1}{3x^2 - 1}$

x	y
0	-1
1	$1/2$
2	$1/11$
-1	$1/2$
-2	$1/11$

Joon. 6



Püüdke konstrueerida selle funktsiooni graafik. Ärge laske tujul langeda, kui kõvera kulgemisest arusaamiseks tuleb teil leida rohkem punkte, kui algul mõtlesite.

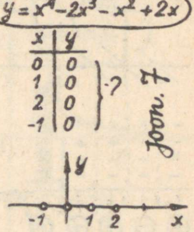
Pärast seda lugege kindlasti leheküljelt 18, kuidas meie seda graafikut konstrueerime ja missuguseid kasulikke järeldusi saab sellest teha.

4. Hulkliikme

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \qquad (4)$$

graafiku konstrueerimist alustame samuti punktide järgi.

Võtnud argumendi väärtusteks 0, 1, 2, saame funktsiooni väärtused, mis on võrdsed nulliga. Võtame veel väärtuse $x = -1$. Jälle saame, et y võrdub nulliga. Vastavad graafiku punktid (0, 0), (1, 0), (2, 0), (—1, 0) asetsevad kõik x-teljel (joon. 7).



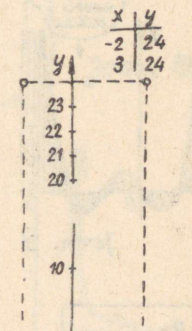
Joon. 7

Kui piirduda ainult nende nelja argumendi väärtusega, siis on «sujuvaks» kõveraks, mis saadud punktid ühendab, abstsisstelg. Ent on selge, et abstsisstelg pole meie funktsiooni graafikuks, kuna hulkliige

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

ei saa võrduda nulliga kõigi x väärtuste korral.

Võtame veel kaks argumendi väärtust: $x = -2$ ja $x = 3$. Vastavad punktid (—2, 24) ja (3, 24) ei asetse enam x-teljel, vaid sellest väga kaugel (joon. 8).



Joon 8

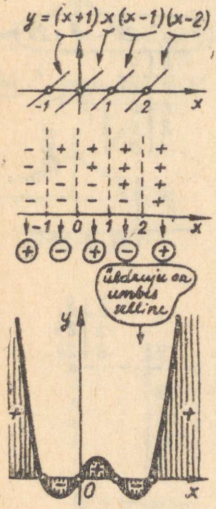
Kuidas aga näeb välja graafik, jääb endiselt ebaselgeks. Võib muidugi (nii nagu me varem tegime) leida küllalt palju vahepealseid punkte ja joonestada siis ligikaudne graafik, aga see moodus pole väga usaldusväärne.

Proovime toimida teisiti.

Selgitame, kus funktsioon on positiivne (s. t. graafik asetseb x-teljest ülevalpool) ja kus negatiivne (s. t. graafik asetseb x-teljest allpool).

Selleks lahutame hulkliikme, millega funktsioon on ette antud, tegureiks:

$$\begin{aligned}&x^4-2x^3-x^2+2x=\\&=x^3(x-2)-x(x-2)=\\&=(x^3-x)(x-2)=\\&=x(x^2-1)(x-2)=\\&=(x+1)x(x-1)(x-2).\end{aligned}$$

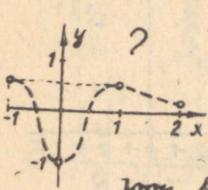


Joon. 9

Nüüd on näha, et antud funktsioon võrdub nulliga ainult neis neljas punktis, mis me juba graafikule kandsime. Punktist $x=-1$ vasakul on kõik neli tegurit negatiivsed, tähendab, funktsioon on positiivne. Punktide $x=-1$ ja $x=0$ vahel (s. o. vahemikus $-1<x<0$) muutub tegur $x+1$ positiivseks, ülejäänud tegurid aga jäävad negatiivseiks, tähendab, funktsioon on negatiivne. Piirkonnas $0<x<1$ on meil kaks negatiivset ja kaks positiivset tegurit, tähendab, funktsioon on positiivne. Järgmises piirkonnas on funktsioon jälle negatiivne. Lõpuks, punktist $x=2$ paremal saab viimane tegureist positiivseks, tähendab, ka funktsioon muutub positiivseks.

Nüüd kujutame funktsiooni graafikut endale ette umbes nii, nagu näha joonisel 9.

$\boxed{y=\frac{1}{3x^2-1}}$


Joon. 10

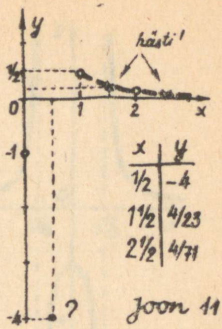
5. Järgmiseks konstrueerime funktsiooni

$$y=\frac{1}{3x^2-1}$$

(millest meil oli juba juttu) graafiku. Märgime joonisele graafiku punktid, mis vastavad x väärtustele -1, 0, 1, 2, ja ühendame need joonega. Tulemuseks on umbes selline pilt, nagu on näha joonisel 10.

Võtame nüüd $x = \frac{1}{2}$. Saame $y = -4$. Näeme, et punkt $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ asetseb graafikust tunduvalt allpool. Tähendab, $x = 0$ ja $x = 1$ vahel kulgeb graafik hoopis teisiti!

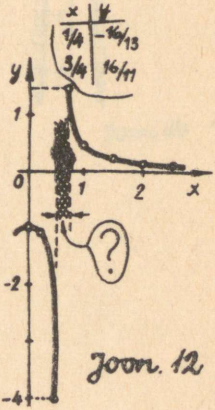
Graafiku täpsema kuju esitame joonisel 11. Võtame veel $x = 1\frac{1}{2}$ ja $x = 2\frac{1}{2}$. Vastavad punktid satuvad küllalt täpselt meie kõverale.



Joon 11

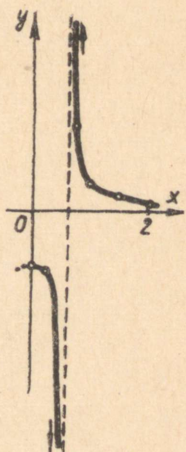
Aga kuidas siis kulgeb graafik punktide $x = 0$ ja $x = 1$ vahel?

Võtame $x = \frac{1}{4}$ ja $x = \frac{3}{4}$. Saame vastavalt $y = -\frac{16}{13} \approx -1\frac{1}{4}$ ja $y = \frac{16}{11} \approx 1\frac{1}{2}$. Missugune on graafiku kuju punktide $x = 0$ ja $x = \frac{1}{2}$ vahel, see sai meile veidi selgemaks (joon. 12), aga kuidas käitub funktsioon $x = \frac{1}{2}$ ja $x = \frac{3}{4}$ vahel, on endiselt ebaselge.



Joon. 12

Kui võtame veel mõned vahepealsed väärtused $x = \frac{1}{2}$ ja $x = \frac{3}{4}$ vahel, siis näeme, et vastavad graafiku punktid satuvad mitte ühele, vaid kahele sujuvale kõverale ning graafik omandab umbes selise kuju nagu joonisel 13.



Joon. 13

Te saate nüüd juba hästi aru, et graafiku koostamine punktide järgi on vaevanõudev töö, mis pealegi ei tarvitse alati viia õigete tulemusteni. Kui võtta vähe punkte, siis võib juhtuda, et saame funktsioonist täiesti väära ettekujutuse. Kui aga võtta punkte tihedamalt, siis teeme palju liigset tööd ning ikkagi jääb kahtlus, kas me mitte ei jätnud vahele midagi olulist. Kuidas siis toimida?

Tuletame meelde, et funktsiooni $y = \frac{1}{x^2+1}$ konstrueerimisel piirkondades $2 < x < 3$ ja $1 < x < 2$ polnud vaja võtta ühtegi lisapunkti, piirkonnas $0 < x < 1$ aga tuli leida veel 5 punkti. Samuti nõudis funktsiooni $y = \frac{1}{3x^2-1}$ graafiku konstrueerimisel kõige suuremat vaeva piirkond $0 < x < 1$, kus kõver jaguneb kahte harru.

Kas pole aga juba eelnevalt võimalik sellised «ohtlikud» piirkonnad eraldada?

6. Pöördume kolmandat korda tagasi funktsiooni

$$y = \frac{1}{3x^2-1}$$

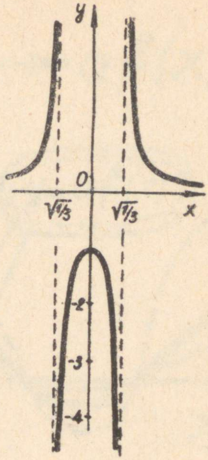
graafiku juurde.

Kui vaadelda antud funktsiooni avaldist, siis on kohe näha, et x kahe väärtuse puhul muutub selle avaldise nimetaja nulliks. Nendeks väärtusteks on $+\sqrt{\frac{1}{3}}$ ja $-\sqrt{\frac{1}{3}}$, s. o. umbes $\pm 0{,}58$. Üks neist asetseb piirkonnas $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$, s. t. just seal, kus funktsioon käitub ebatavaliselt ja graafik ei kulge sujuvalt. Nüüd on arusaadav, miks see nii on.

Tõepoolest, kui $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, pole funktsioon määratud (jagamine nulliga ei ole võimalik). Tähendab, graafikul ei saa olla punkte nende abstsissidega, järelikult ei lõiku graafik sirgetega $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ja $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$. Seetõttu jaguneb graafik kolme eraldi harru. Kui x läheneb ühele «keelatud» väärtustest, näiteks $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, siis murd $\frac{1}{3x^2-1}$ kasvab absoluutväärtuse poolest piiramatult, järelikult lähenevad graafiku kaks haru vertikaalsele sirgele $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Analoogiliselt käitub antud funktsioon (ta on paarisfunktsioon!) punkti $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ ümbruses.

Graafiku üldkuju on näidatud joonisel 14.



Joon. 14

Seega, *kui funktsioon on ette antud valemiga, mis kujutab endast murdu, on tarvis pöörata tähelepanu nendele argumendi väärtustele, mille puhul nimetaja muutub nulliks.*

7. Mis me võime eespool toodud näidete vaatlemisest edaspidiseks tallele panna? Funktsiooni käitumise uurimisel ja tema graafiku konstrueerimisel ei ole kõik argumendi väärtused ühesuguse tähtsusega. Funktsiooni

$$y=\frac{1}{3x^2-1}$$

puhul nägime, kui suur tähtsus on nendel «iseäralikel» punktidel, milles funktsioon pole määratud. Funktsiooni

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

graafiku iseloom sai meile selgeks siis, kui me leidsime graafiku lõikepunktid abstsissteljega, s. o. hulkliikme nullkohad.

Enamikul juhtumeil seisnebki põhiline töö graafikute konstrueerimisel just selles, et leida vastava funktsiooni jaoks olulised argumendi väärtused ja uurida funktsiooni käitumist nende väärtuste ümbruses. Pärast niisugust uurimist piisab graafiku täielikuks konstrueerimiseks vaid funktsiooni mõnede väärtuste leidmisest nende iseloomulike punktide vahel.

Harjutused.

1) Konstrueerige funktsiooni $y = \frac{1}{3x - 1}$ graafik. Millistes punktides lõikab graafik koordinaattelgi?

Kujutage endale ette, et me asetasime koordinaatide alguspunkti täpselt vihikulehe keskpunkti ja valisime mõõtkava ühikuks 1 cm (loeme vihikulehe ristkülikuks mõõtmetega 16 cm × 20 cm). Leidke nende punktide koordinaadid, milles graafik väljub vihikulehelt.

2) Konstrueerige hulkliikmete[1]

a) $y = x^3 - x^2 - 2x + 2$;
b) $y = x^3 - 2x^2 + x$ ⊕

graafikud (pöörake tähelepanu sellele, et juhul *b*) saame hulkliikme lahutamisel tegureiks kaks ühesugust tegurit).

8. Olles konstrueerinud mingi funktsiooni graafiku, võib mitmesuguste võtete abil kergesti konstrueerida ka mõningate «sugulasfunktsioonide» graafikud.[2] Üks lihtsamaid sellistest võtetest on nn. *venitamine y-telje sihis.*

Me konstrueerisime koos teiega funktsiooni

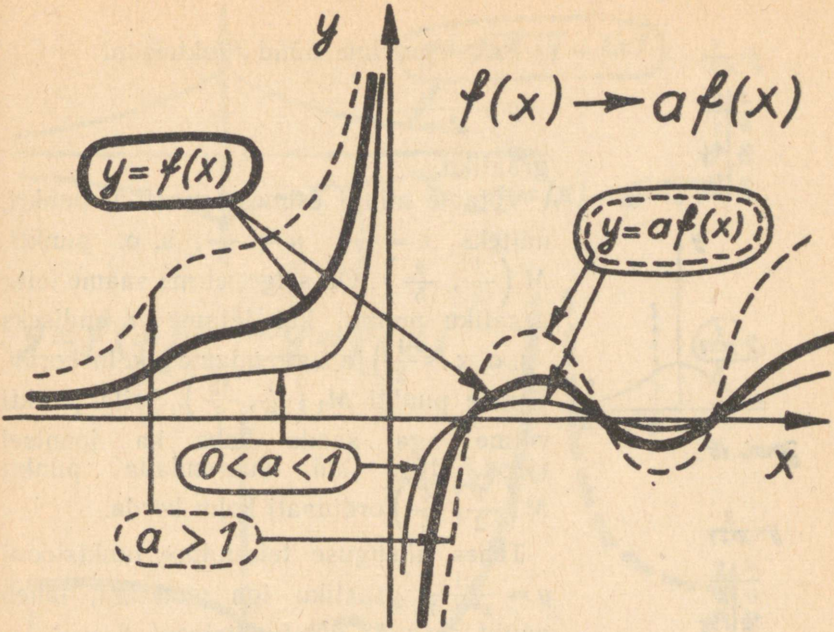
$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

graafiku (joon. 5, lk. 16).

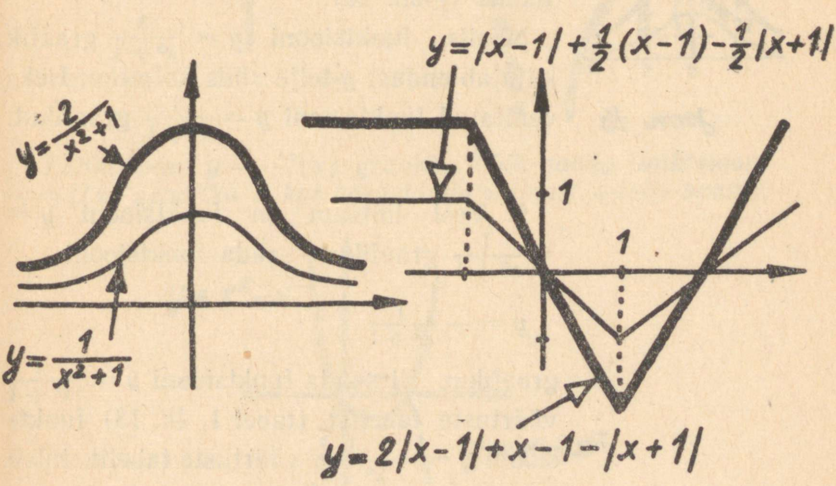
---

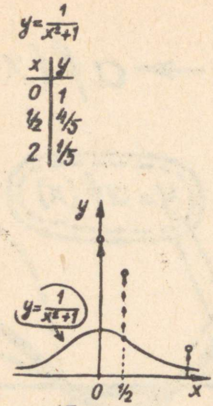
[1] Märk ⊕ tähistab neid ülesandeid ja harjutusi, mille vastused on antud raamatu lõpus.

[2] Seda liiki võtetega kohtusime juba leheküljel 16 graafiku $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ konstrueerimisel. Konstrueerinud selle graafiku positiivsete x väärtuste jaoks, saime kohe konstrueerida graafiku ka negatiivsete x väärtuste jaoks.



Funktsiooni $y = af(x)$ graafik saadakse funktsiooni $y = f(x)$ graafikust viimase venitamisel a korda y-telje sihis (juhul $|a| > 1$ on tegemist kokkusurumisega).





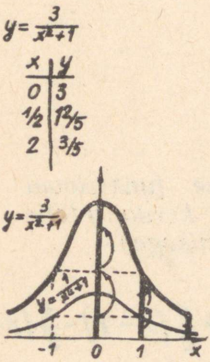
Joon. 15

Konstrueerime nüüd funktsiooni

$$y = \frac{3}{x^2+1}$$

graafiku.

Võtame mingi esimese graafiku punkti, näiteks $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{4}{5}$, s. o. punkti $M\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right)$. On selge, et me saame teise graafiku punkti, kui jätame x endiseks $\left(\text{s. o. } x = \frac{1}{2}\right)$ ja suurendame y kolm korda. Saame punkti $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{12}{5}\right)$. Selle punkti võime aga saada kohe ka joonisel (joon. 15), kui suurendada punkti $M\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right)$ ordinaati kolm korda.



Joon. 16

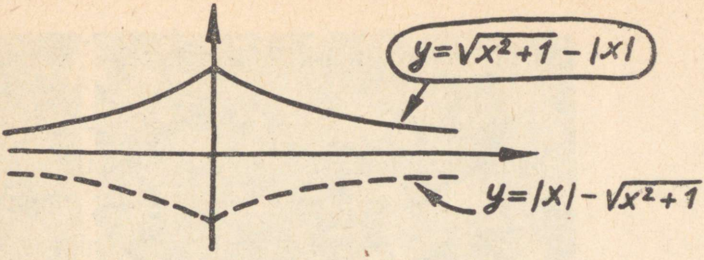
Tehes niisuguse teisenduse funktsiooni $y = \frac{1}{x^2+1}$ graafiku iga punktiga, läheb punkt $M(a, b)$ üle funktsiooni $y = \frac{3}{x^2+1}$ graafiku punktiks $M'(a, 3b)$. Kogu graafik aga, olles y-telje sihis kolmekordseks venitatud, muutub funktsiooni $y = \frac{3}{x^2+1}$ graafikuks (joon. 16).

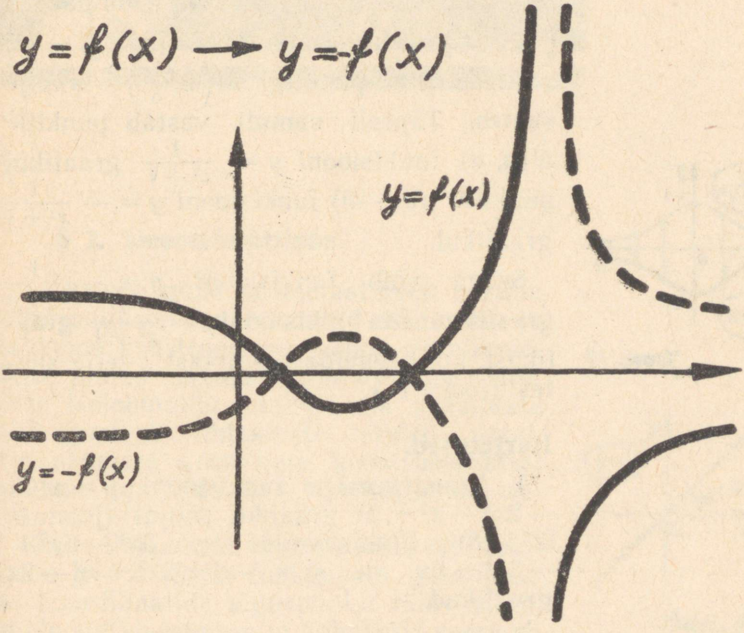
Niisiis, funktsiooni $y = \frac{3}{x^2+1}$ graafik kujutab endast y-telje sihis kolmekordseks venitatud funktsiooni $y = \frac{1}{x^2+1}$ graafikut.

9. Veel lihtsam on funktsiooni $y = \frac{1}{x^2+1}$ graafikust saada funktsiooni

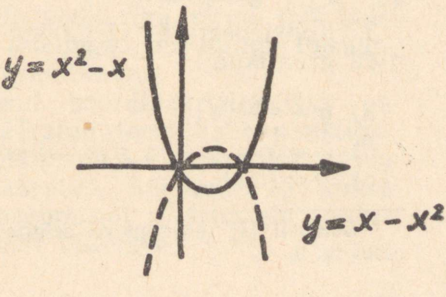
$$y = -\frac{1}{x^2+1}$$

graafikut. Et saada funktsiooni $y = \frac{1}{x^2+1}$ väärtuste tabelist (tabel 1, lk. 13) funktsiooni $y = -\frac{1}{x^2+1}$ väärtuste tabelit, tuleb



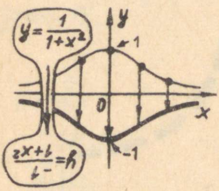


Funktsiooni $y = -f(x)$ graafiku võib saada funktsiooni $y = f(x)$ graafikust, kui peegeldada viimast x-telje suhtes.



vaid muuta märk kõikidel teise veeru arvudel.

Nii saame igast funktsiooni $y = \frac{1}{x^2+1}$ graafiku punktist, näiteks punktist M abstsissiga 2 ja ordinaadiga $\frac{1}{5}$, funktsiooni $y = -\frac{1}{x^2+1}$ graafiku punkti M' sellesama abstsissiga 2, kuid ordinaadiga $\left(-\frac{1}{5}\right)$. Ilmselt on punkt $M'\left(2, -\frac{1}{5}\right)$ sümmeetriline punktiga $M\left(2, \frac{1}{5}\right)$ x-telje suhtes. Täpselt samuti vastab punktile $N(a, b)$ funktsiooni $y = \frac{1}{x^2+1}$ graafikul punkt $N'(a, -b)$ funktsiooni $y = -\frac{1}{x^2+1}$ graafikul.



Joon. 17

Seega võib funktsiooni $y = -\frac{1}{x^2+1}$ graafiku saada funktsiooni $y = \frac{1}{x^2+1}$ graafikust, kui peegeldada viimast x-telje suhtes (joon. 17).

Harjutused.

1. Konstrueerige funktsiooni $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ graafiku põhjal (joon. 9, lk. 18) funktsioonide $y = 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 6x$ ja $y = -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x$ graafikud.

2. Konstrueerige funktsiooni $y = \frac{1}{2x^2+2}$ graafik, kasutades selleks funktsiooni $y = \frac{1}{x^2+1}$ graafikut.

3. Konstrueerige järgmiste funktsioonide graafikud[1]:

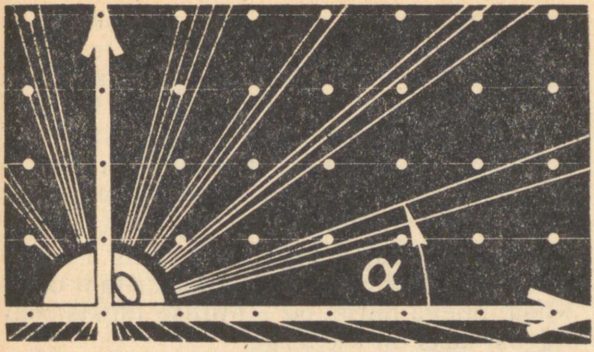
a) $y = \frac{1}{2}[x]$;

b) $y = x - [x]$ ja $y = -2(x - [x])$;

c) $y = [2x]$.

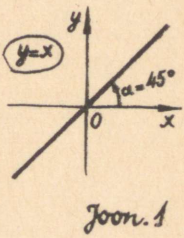
---

[1] Sümboli $[x]$ tähendus on selgitatud sissejuhatuses lk. 9.



§ 2. Lineaarfunktsioon.

1. Asume nüüd süstemaatiliselt uurima mitmesuguste funktsioonide käitumist ja hakkame konstrueerima nende graafikuid. Selle juures tutvume funktsioonide käitumise iseloomulike tunnuste ja graafikute iseärasustega lihtsamate näidete varal. Keerukamate graafikute konstrueerimisel püüame aga leida neis juba tuttavaid elemente.



Joon. 1

Kõige lihtsamaks funktsiooniks on funktsioon $y = x$. Selle funktsiooni graafikuks on koordinaatide alguspunkti läbiv sirge, mis poolitab esimese ja kolmanda veerandi nurga (joon. 1).

Üldiselt, nagu te teate, on iga lineaarfunktsiooni $y = kx + b$ graafikuks mingi sirge. Teiselt poolt, iga sirge, mis pole paralleelne y-teljega, on mingi lineaarfunktsiooni graafikuks.

Sirge asend koordinaatteljestikus on täielikult määratud tema kahe punktiga. Vastavalt sellele on ka lineaarfunktsioon täielikult määratud, kui on ette antud tema kahe argumendi väärtustele vastavad funktsiooni väärtused.

Harjutused.

1. Lineaarfunktsiooni $y = kx + b$ väärtus $x = -10$ puhul on $y = 41$, $x = 6$ puhul aga $y = 9$. Leidke see funktsioon.

2. Sirge läbib punktid $A(0, 0)$ ja $B(a, c)$. Leidke lineaarfunktsioon, mille graafikuks on see sirge.

3. Joonestage sirge, mis läbib koordinaatide alguspunkti ja moodustab ordinaatteljega nurga 60°. Millise funktsiooni graafikuks on see sirge?

4. a) Lineaarfunktsiooni väärtuste tabelis

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	3	1	2	-3

on kaks funktsiooni väärtust valed. Leidke need ja asendage õigete väärtustega.

b) Sama küsimus tabeli

x	-15	-10	0	10	15
y	-33	-13	7	17	27

korral.

2. Lineaarfunktsiooni iseloomulikuks omaduseks on see, et kui x suureneb ühtlaselt, s. t. ühe ja sama arvu võrra, siis ka y muutub ühtlaselt. Võtame näiteks funktsiooni $y = 3x - 2$. Omandagu x väärtused

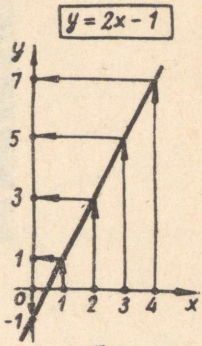
$$1, 3, 5, 7, \ldots,$$

millest iga järgmine on eelmisest suurem ühe ja sama arvu 2 võrra. Vastavateks y väärtusteks on:

$$1, 7, 13, 19, \ldots .$$

Te näete, et iga järgnev y väärtus on eelnevast suurem ühe ja sama arvu 6 võrra.

Arvude jada, mis saadakse mingist arvust sellele ühe ja sama arvu lisamisel, nimetatakse *aritmeetiliseks progressiooniks*. Seega võib lineaarfunktsioonile iseloomulikku omadust, millest oli juba eespool juttu, sõnastada järgmiselt: lineaarfunktsioon teisendab ühe aritmeetilise progressiooni teiseks aritmeetiliseks progressiooniks (joon. 2). Meie näites teisendab funktsioon $y = 3x - 2$ aritmeetilise progressiooni 1, 3, 5, 7, ... aritmeetiliseks progressiooniks 1, 7, 13, 19 .... Joonisel 2 on näidatud, kuidas funktsioon $y = 2x - 1$ teisendab aritmeetilise progressiooni 0, 1, 2, 3, ... aritmeetiliseks progressiooniks —1, 1, 3, 5, 7, ...



Joon. 2

Harjutused.

1. Leidke lineaarfunktsioon, mis teisendaks aritmeetilise progressiooni —3, —1, 1, 3, ... aritmeetiliseks progressiooniks —2, —12, —22, ...

Milline lineaarfunktsioon teisendab teise progressiooni esimeseks?

2. Olgu antud kaks aritmeetilist progressiooni:

$$a,\ a + h,\ a + 2h, \ldots \text{ ja } c,\ c + l,\ c, + 2l, \ldots .$$

Kas alati on võimalik leida lineaarfunktsiooni $y = kx + b$, mis teisendab esimese progressiooni teiseks?

3. a) Sirge $y = \frac{7}{15}x + \frac{1}{3}$ läbib kaks täisarvuliste koordinaatidega punkti: $A(10, 5)$ ja $B(-20, -9)$. Kas sellel sirgel on veel «täisarvulisi punkte» (s. o. täisarvuliste koordinaatidega punkte?

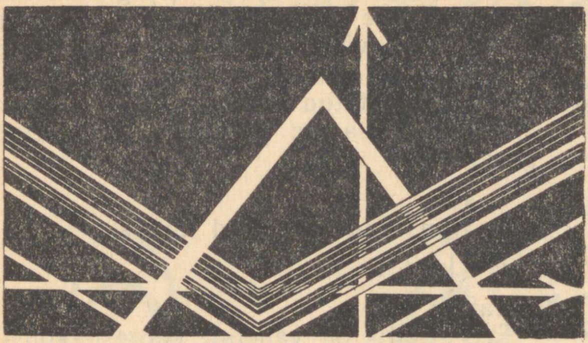
b) On teada, et sirge $y = kx + b$ läbib kaks täisarvulist punkti. Kas sellel sirgel on veel täisarvulisi punkte?

c) Kerge on joonestada sirget, mis ei

läbi ühtegi täisarvulist punkti. Näiteks $y = x + \frac{1}{2}$.

Kas mingi sirge $y = kx + b$ võib läbida ainult üht täisarvulist punkti?[1]

[1] Mõelge selle küsimuse üle järele, kui te ei suuda vastust leida, vaadake ülesannet 4 leheküljel 84.



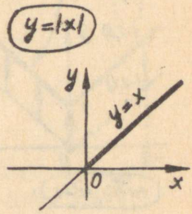
§ 3. Funktsioon $y = |x|$.

1. Vaatleme nüüd funktsiooni

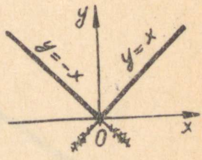
$$y = |x|,$$

kus x tähendab arvu x absoluutväärtust[1] ehk moodulit.

Konstrueerime selle funktsiooni graafiku, pidades silmas absoluutväärtuse definitsiooni. Positiivsete x korral on $|x| = x$, s. t. $y = |x|$ graafik ühtib $y = x$ graafikuga, milleks on kiir, mis läbib koordinaatide alguspunkti ja moodustab abstsissteljega nurga 45° (joon. 1). $x < 0$ korral on $|x| = -x$. Tähendab, negatiivsete x puhul ühtib funktsiooni $y = |x|$ graafik teise veerandi nurgapoolitajaga (joon. 2).



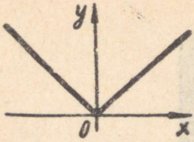
Joon. 1



Joon. 2

Muuseas, graafiku teise poole (negatiivsete x jaoks) võib kergesti saada esimesest, kui tähele panna, et funktsioon $y = |x|$ on paarisfunktsioon, sest $|-a| = |a|$ (vt. paarisfunktsiooni definitsiooni lk. 15).

[1] Tuletame meelde: positiivse arvu absoluutväärtus on võrdne arvu endaga (kui $x > 0$, siis $|x| = x$); negatiivse arvu absoluutväärtus on võrdne selle arvu vastandarvuga (kui $x < 0$, siis $|x| = -x$), nulli absoluutväärtus on võrdne nulliga ($|0| = 0$).



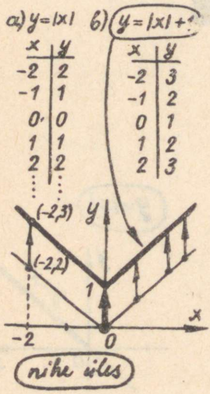
Joon. 3

Tähendab, funktsiooni $y = |x|$ graafik on sümmeetriline y-telje suhtes ning tema teise poole võib saada, kui peegeldada ordinaattelje suhtes graafiku osa, mis on välja joonestatud positiivsete x jaoks. Tulemuseks saame joonisel 3 kujutatud graafiku.

2. Konstrueerime nüüd funktsiooni

$$y = |x| + 1$$

graafiku.



Joon. 4

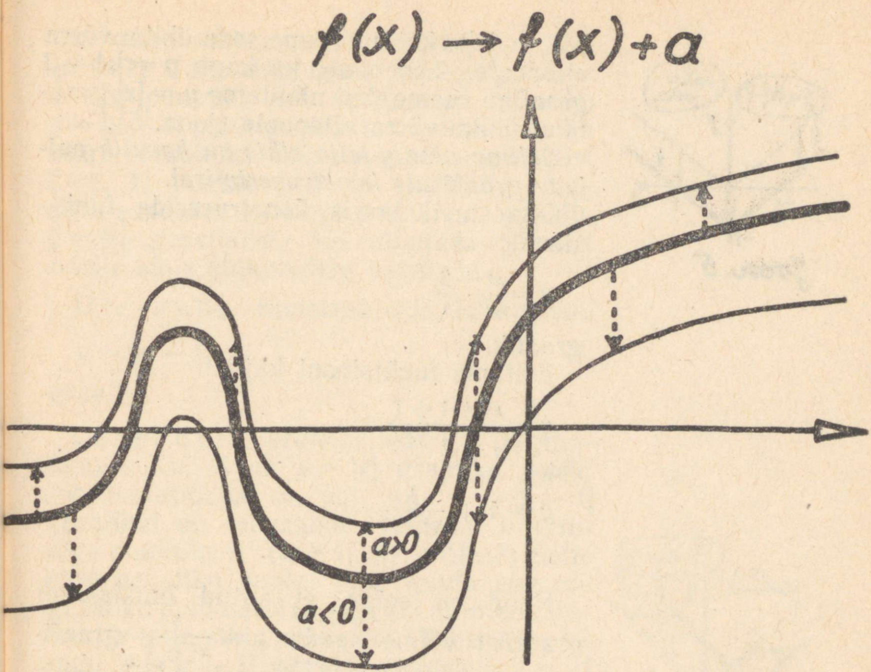
See graafik on vahetult kergesti konstrueeritav. Meie aga saame ta funktsiooni $y = |x|$ graafikust. Koostame funktsiooni $y = |x| + 1$ väärtuste tabeli ning võrdleme siis seda funktsiooni $y = |x|$ väärtuste tabeliga, kirjutades need tabelid teineteise kõrvale (joon. 4, tabelid *a*, *b*). On selge, et igast esimese funktsiooni $y = |x|$ graafiku punktist võib saada teise funktsiooni $y = |x| + 1$ graafiku punkti, kui suurendada y ühiku võrra. (Näiteks graafiku $y = |x|$ punkt (—2, 2) läheb üle graafiku $y = |x| + 1$ punktiks (—2, 3), mis asetseb esimesest ühiku võrra kõrgemal, vt. joon. 4.) Tähendab, selleks et saada teise graafiku punkte, tuleb esimese graafiku iga punkti nihutada ühiku võrra ülespoole, s. t. kogu teine graafik saadakse esimesest, kui nihutada esimest graafikut ühiku võrra kõrgemale.

Ü l e s a n n e. Konstrueerige funktsiooni

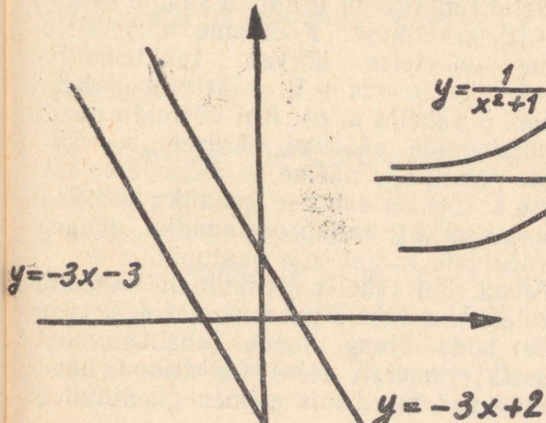
$$y = |x| - 1$$

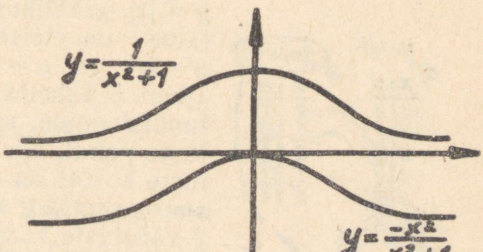
graafik.

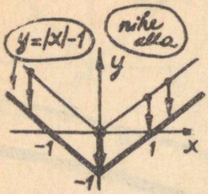
L a h e n d u s. Võrdleme $y = |x| - 1$ graafikut $y = |x|$ graafikuga. Kui $x = a, y = |a|$ on esimese graafiku punkt, siis punkt $x = a, y = |a| - 1$ asetseb teisel graafikul. Seega võime teise graafiku iga punkti $(a, |a| - 1)$ saada esimese graafiku punk-



Funktsiooni $y = f(x) + a$ graafik saadakse funktsiooni $y = f(x)$ graafikust, nihutades viimast a võrra y-telje sihis. Nihke siht määratakse vastavalt arvu a märgile (s. t. $a > 0$ korral nihutatakse graafikut üles, $a < 0$ korral aga alla).







Joon. 5

tist $(a, |a|)$, kui nihutame seda ühiku võrra allapoole. Tähendab, ka kogu $y = |x| - 1$ graafiku saame, kui nihutame $y = |x|$ graafikut ühiku võrra allapoole (joon. 5).

Selline nihe y-telje sihis on kasulik paljude graafikute konstrueerimisel.

Olgu meil tarvis konstrueerida funktsiooni

$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

graafik.

Esitame funktsiooni kujul

$$y = \frac{x^2 + 1 + 1}{x^2 + 1}$$

ehk

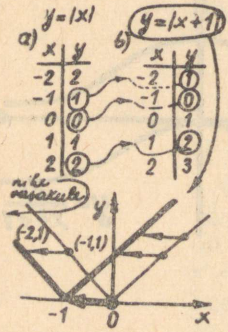
$$y = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Nüüd on selge, et antud funktsiooni graafiku võime saada $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ graafikust, kui nihutame viimast y-telje sihis ühiku võrra ülespoole.

3. Võtame nüüd funktsiooni

$$y = |x + 1|.$$

Selle funktsiooni graafiku saame samuti $y = |x|$ graafikust. Koostame ning kirjutame teineteise kõrvale funktsioonide $y = |x|$ ja $y = |x + 1|$ väärtuste tabelid (joon. 6, tabelid *a*, *b*). Kui võrrelda nende funktsioonide väärtusi võrdsete x väärtuste puhul, siis näeme, et mõnede x väärtuste korral on esimese graafiku ordinaat suurem teise graafiku ordinaadist, mõnede x väärtuste korral aga vastupidi.



Joon. 6

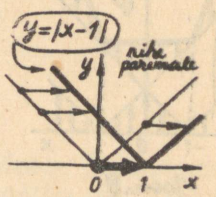
Siiski, kui tähelepanelikumalt vaadelda nende kahe tabeli parempoolseid veerge, võib leida seose nende tabelite vahel. Nimelt omandab teine funktsioon needsamad väärtused mis esimenegi, ainult et ühe võrra väiksemate x väärtuste puhul. (Miks?) Tähendab, igast esimese graafiku $y = |x|$ punktist võib saada teise graafiku $y = |x + 1|$ punkti, kui nihutada seda ühiku võrra vasakule. Näiteks saame punktist $(-1, 1)$ punkti $(-2, 1)$ (joon. 6.). Seetõttu saadakse ka kogu $y = |x + 1|$ graafik $y = |x|$ graafikust, kui nihutada viimast x-telje sihis ühiku võrra vasakule.

Ülesanne. Konstrueerida funktsiooni

$$y = |x - 1|$$

graafik.

Lahendus. Võrdleme teda $y = |x|$ graafikuga. Kui A on $y = |x|$ graafiku punkt koordinaatidega $(a, |a|)$, siis $y = |x - 1|$ graafikul on sellesama ordinaadi väärtusega punktiks A' $(a + 1, |a|)$. (Miks?) Selle teise graafiku punkti võib saada esimese graafiku punktist A $(a, |a|)$, kui nihutada viimast x-telje sihis paremale. Tähendab, ka kogu $y = |x - 1|$ graafik saadakse $y = |x|$ graafikust nihke teel x-telje sihis paremale (joon. 7). Võime öelda, et funktsioon $y = |x - 1|$ omandab samad väärtused mis funktsioon $y = |x|$, aga ainult mõninga hilinemisega (nimelt 1 võrra).



Joon. 7

Selline nihe x-telje sihis on kasulik paljude graafikute konstrueerimisel.

Harjutused.

1. Konstrueerige funktsiooni

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

graafik. (Näpunäide. Esitage murru $\frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ nimetaja kujul $(x - 1)^2 + 1$.)

2. Sõnastage reeglid, mille järgi võib funktsiooni $y = f(x)$ graafikust saada funktsioonide $y = f(x + 5)$ ja $y = f(x - 3)$ graafikud.

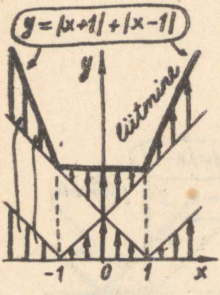
3. Konstrueerige funktsioonide $y = |x| + 3$ ja $y = |x + 3|$ graafikud.

4. Ülesanne. Konstrueerida funktsiooni

$$y = |x + 1| + |x - 1|$$

graafik.

Lahendus. Konstrueerime algul ühel ja samal joonisel mõlema liidetava $y = |x + 1|$ ja $y = |x - 1|$ graafikud. Otsitava graafiku mingi punkti ordinaat y saadakse konstrueeritud graafikute ordinaatide liitmise teel samas punktis. Nii näiteks on $x = 3$ puhul esimese graafiku ordinaat $y_1 = 4$ ja teise graafiku ordinaat $y_2 = 2$, graafiku $y = |x + 1| + |x - 1|$ ordinaat y on aga 6.



Joon. 8

Püüame joonestada otsitava graafiku, liites igas punktis (s. t. iga x puhul) mõlema graafiku ordinaadid. Tulemusena saame graafiku, mis on esitatud joonisel 8.

Näeme, et funktsiooni $y = |x + 1| + |x - 1|$ graafikuks on murdjoon, mis koosneb kolme sirge osadest. Tähendab, igal neist kolmest osast muutub funktsioon lineaarselt.

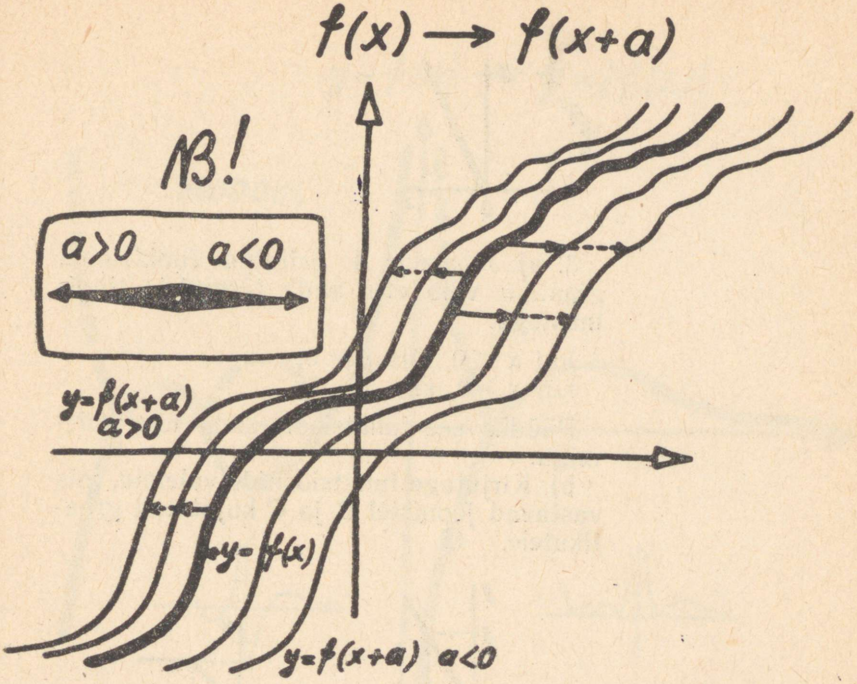
Harjutused.

1. Kirjutage murdjoone

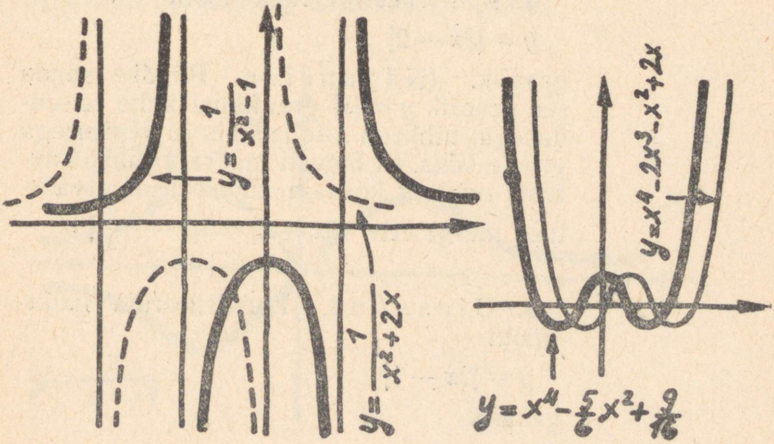
$$y = |x + 1| + |x - 1|$$

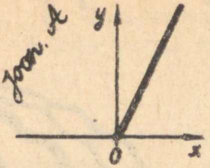
iga lüli võrrandid. (Vastus. Kui $x \leqslant -1$, siis $y = \ldots x + \ldots$;
kui $-1 \leqslant x \leqslant 1$, siis $y = \ldots$;
kui $x \geqslant 1$, siis $y = \ldots$).

2. Millistes punktides on funktsiooni $y = |x| + |x + 1| + |x + 2|$ graafikuks oleva murdjoone tipud? Leidke murdjoone kõikide lülide võrrandid.



Funktsiooni $y = f(x + a)$ *graafik saadakse funktsiooni* $y = f(x)$ *graafikust nihke abil* $-a$ *võrra x-telje sihis. Märk «miinus» tähendab seda, et kui a on positiivne, nihutatakse graafikut vasakule, kui aga a on negatiivne, siis paremale.*



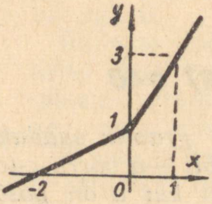


3. a) Joonisel *A* esitatud funktsiooni graafiku võib ette anda järgmiste tingimustega:

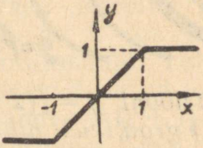
kui $x < 0$, siis $y = 0$,
kui $x \geqslant 0$, siis $y = 2x$.

Püüdke see funktsioon anda ühe valemiga.

b) Kirjutage funktsioonide valemid, mis vastavad joonistel *B* ja *C* kujutatud graafikutele. ⊕



Joon. B



Joon. C

4. Konstrueerige funktsiooni

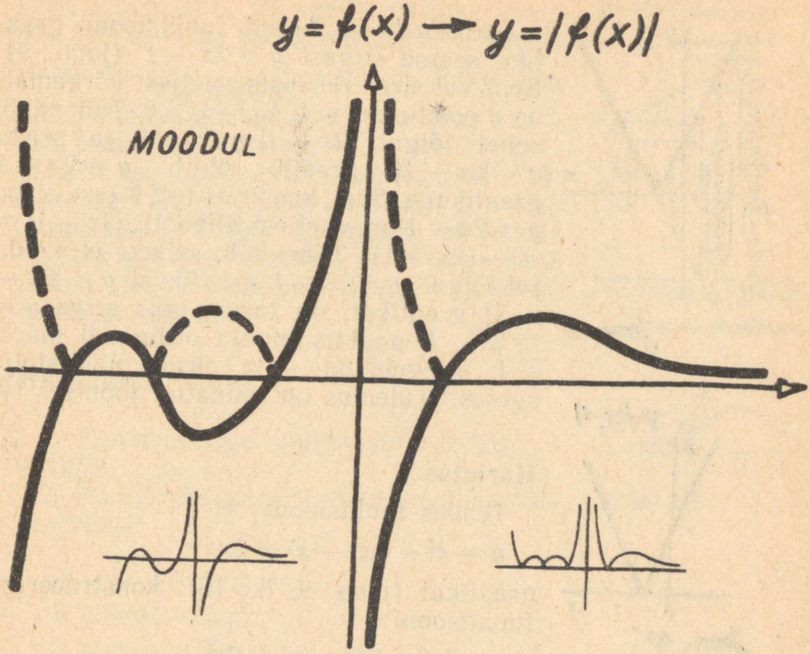
$$y = |3x - 2|$$

graafik. (N ä p u n ä i d e. Püüdke saada see graafik $y = |x|$ graafikust kahe teisendusega: nihkega x-telje sihis ja venitusega y-telje sihis. Et õigesti määrata nihke suurust, tuleb x kordaja tuua absoluutväärtuse märgi ette: $|3x - 2| = 3\left|x - \frac{2}{3}\right|$.)

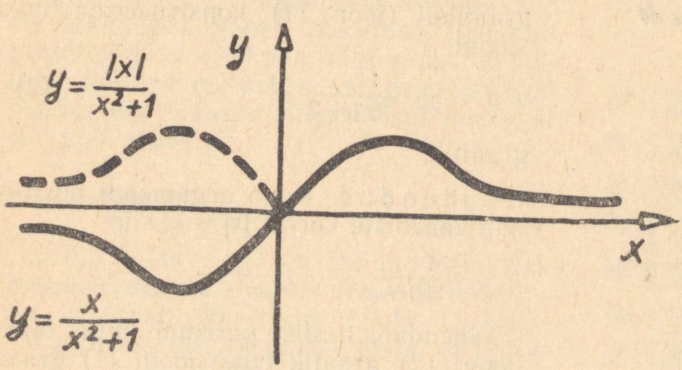
5. Ü l e s a n n e. Konstrueerida funktsiooni

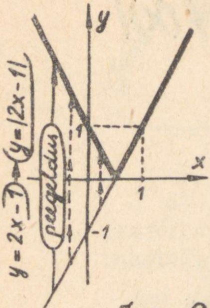
$$y = |2x - 1|$$

graafik.

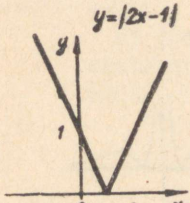


Et saada $y=f(x)$ graafikust $y=|f(x)|$ graafikut, tuleb $y=f(x)$ graafiku need osad, mis asuvad abstsissteljest kõrgemal, jätta muutmata, abstsissteljest allpool asuvad osad aga peegeldada abstsisstelje suhtes.

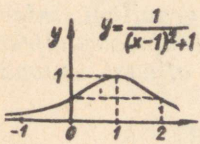




Joon. 9



Joon. 10



Joon. 11

Lahendus. Antud funktsiooni graafiku saame sirgest $y = 2x - 1$ (joon. 9). Seal, kus sirge on abstsissteljest kõrgemal, on y positiivne, s. t. $2x - 1 > 0$. Tähendab, sellel lõigul $|2x - 1| = 2x - 1$ ja seega $y = |2x - 1|$ graafik ühtib $y = 2x - 1$ graafikuga. Seal, kus $2x - 1 < 0$ (s. t. sirge $y = 2x - 1$ on x-teljest allpool), $|2x - 1| = -(2x - 1)$. Tähendab, selleks et saada sel lõigul $y = 2x - 1$ graafikust $y = |2x - 1|$ graafikut, on tarvis igas sirge $y = 2x - 1$ punktis muuta ordinaadi märk, s. t. peegeldada seda sirget absisstelje suhtes. Tulemus on näidatud joonisel 10.

Harjutus.

Teades funktsiooni

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

graafikut (joon. 9, lk. 18), konstrueerige funktsiooni

$$y = |x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x|$$

graafik.

6. Ülesanne. Teades funktsiooni

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \qquad (1)$$

graafikut (joon. 11), konstrueerida funktsiooni

$$y = \frac{1}{x^2 - 2|x| + 2} \qquad (2)$$

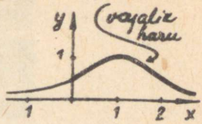
graafik.

Lahendus. Kuna argumendi positiivsete väärtuste korral $|x| = x$, siis

$$\frac{1}{x^2 - 2|x| + 2} = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

Tähendab, nullist paremal ühtib funktsiooni (2) graafik funktsiooni (1) graafikuga (joon. 12). Et saada otsitava graafiku (2) vasakut poolt, märgime, et funktsioon $y = \frac{1}{x^2 - 2|x| + 2}$ on paarisfunktsioon. Tähendab, funktsiooni (2) graafiku vasak pool saadakse tema paremast poolest peegelduse teel ordinaattelje suhtes (joon. 13). Niisamuti ka üldjuhul: et saada $y = f(x)$ graafikust $y = f(|x|)$ graafikut, on tarvis esimese graafiku paremat poolt (mis asub ordinaatteljest paremal) peegeldada ordinaattelje suhtes.

kui $x>0$, siis $|x|=x$



Joon. 12

$\frac{1}{(-x)^2-2|-x|+2} = \frac{1}{x^2-2|x|+2}$

paarisfunktsioon!

Harjutused.

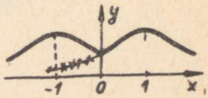
1. Konstrueerige funktsiooni $y = 2|x| - 1$ graafik.
2. Konstrueerige järgmiste funktsioonide graafikud:

a) $y = 4 - 2x$;
b) $y = |4 - 2x|$;
c) $y = 4 - 2|x|$;
d) $y = |4 - 2|x||$.

3. Leidke funktsiooni

$y = |x - 2| + |x| + |x + 2| + |x + 4|$

vähim väärtus. ⊕

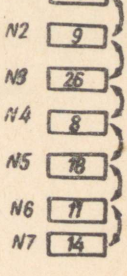


Joon. 13

Selle paragrahvi lõpetuseks esitame teile lahendamiseks mõned ülesanded. Esimesel pilgul näib, et need pole sugugi seotud sellega, millega me selles paragrahvis tegelesime, ent asjasse süvenemisel leiate, et see pole siiski nii.

Ülesandeid.

1. Seitse tikutoosi on pandud ritta. Esimeses toosis on 19 tikku, teises 9, järgmistes vastavalt 26, 8, 18, 11 ja 14 tikku. Tikud on tarvis nii ümber tõsta, et igasse

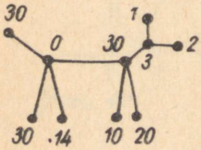


toosi saaks tikke võrdselt, kusjuures tikke võib tõsta vaid ükskõik kumba naabertoosi. Kuidas seda teha nii, et ümber tõstetaks võimalikult vähe tikke?

Lahendus. Kõikides toosides kokku on 105 tikku. Tähendab, kui toosides oleks tikke võrdselt, siis oleks igas toosis 15 tikku. Antud tooside paigutuse korral on ülesandel ainult üks lahendus. Nimelt tuleb kuuendast toosist panna 1 tikk seitsmendasse, viiendast 5 tikku kuuendasse jne.

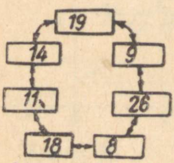
Järgmised kaks ülesannet on veidi keerulisemad.

2. Nii nagu ennegi on 7 tikutoosi pandud ühte ritta, tikkude arv toosides on aga erinev. Nimelt on esimeses toosis 1 tikk, teises 2, järgmistes vastavalt 3, 72, 32, 20, 10 tikku.

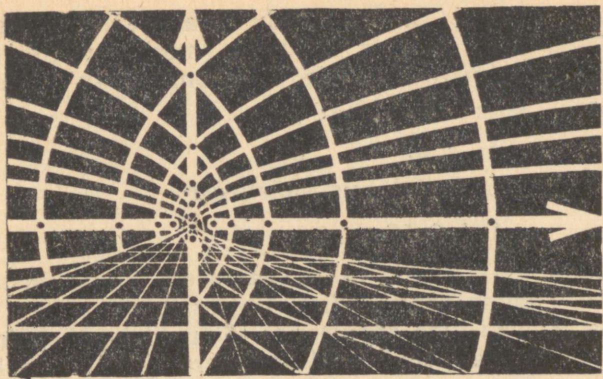


3. Tikutoosid on paigutatud nii, nagu näidatud kõrvalasuval joonisel. Tikke võib ümber tõsta vaid mööda jooni, mis toose ühendavad.

Järgmise ülesande puhul on juba kasulik kasutada graafikuid.



4. Ringjoonele on asetatud 7 tikutoosi. Esimeses neist on 19 tikku, teises 9, järgmistes vastavalt 26, 8, 18, 11, 14 tikku (vt. joonist). Tikud on tarvis nii ümber tõsta, et igasse toosi saaks tikke võrdselt, kusjuures tikke võib tõsta vaid ükskõik kumba naabertoosi. Kuidas seda teha nii, et ümber tõstetaks võimalikult vähe tikke? ⊕



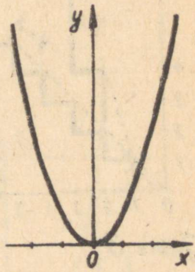
§ 4. Ruutkolmliige.

1. Vaatleme nüüd funktsiooni

$$y = x^2.$$

Te olete muidugi selle funktsiooni graafikut konstrueerinud ja teate, et vastavat kõverat nimetatakse *parabooliks*. Funktsioonide $y = ax^2$ graafikud saadakse $y = x^2$ graafikust venitamise teel ja ka neid nimetatakse paraboolideks[1].

Harjutus.



Joon. 1

Joonisel 1 on kujutatud parabool. a) On teada, et see parabool on funktsiooni $y = x^2$ graafik. Määrake mõõtkava. (Mõõtkava on ühesugune mõlemal teljel.) b) Missugune mõõtkava ühik tuleks telgedel võtta, et seesama kõver joonisel 1 oleks funktsiooni $y = 5x^2$ graafikuks?

2. Vaatame, kuidas muutuvad funktsiooni $y = x^2$ väärtused, kui argumendi väärtused muutuvad ühe ja sama suuruse

---

[1] On huvitav, et kõik paraboolid on üksteisega sarnased (vt. lk. 87).

võrra, s. t. moodustavad aritmeetilise progressiooni. Lihtsuse mõttes vaatleme x positiivseid väärtusi. Omandagu x näiteks väärtused:

$$1, 2, 3, 4, \ldots \text{ jne.}$$

y omandab siis väärtused

$$1, 4, 9, 16, \ldots \text{ jne.}$$

Te näete, et y väärtused ei moodusta enam aritmeetilist progressiooni.

Lisame argumendi ja funktsiooni väärtuste tabelile veel ühe veeru (joon. 2). Sellesse veergu märgime, kui palju muutub y väärtus, kui argument x omandab oma järgneva väärtuse. Muutugu näiteks argument väärtusest $x = 2$ väärtuseni $x = 3$. Funktsioon muutub siis väärtusest $y = 4$ väärtuseni $y = 9$. Funktsiooni muut[1] (öeldakse ka: funktsiooni *kasv*) on võrdne funktsiooni uue ja vana väärtuse vahega, s. o. $9 - 4 = 5$.

Niisiis, tabeli kolmandasse veergu kirjutame funktsiooni $y = x^2$ muudud. Nüüd on selgelt näha, et funktsioon $y = x^2$ muutub nii, et x suurenemisel ei suurene mitte üksnes funktsioon ise, vaid ka tema muudud. Ka graafikult on see hästi näha: kõver $y = x^2$ läheb järjest järsemalt ülespoole, samal ajal kui lineaarfunktsiooni (muutub ühtlaselt) graafik moodustab x-teljega kogu aeg ühe ja sama nurga (joon. 3).

Huvitav on märkida, et funktsiooni $y = x^2$ muudud moodustavad aritmeetilise progressiooni. Püüdke tõestada see fakt üldjuhul: kui argumendi x väärtused moodustavad aritmeetilise progressiooni

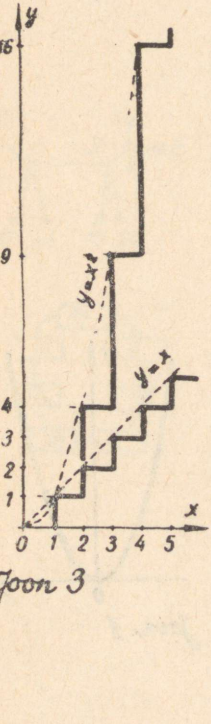
$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + nd, \ldots,$$

siis moodustavad ka ruutfunktsiooni $y = x^2$

x	y	kasv
1	1	
		$4-1=3$
2	4	
		$9-4=5$
3	9	
		$16-9=7$
4	16	
		$25-16=9$
5	25	
:	:	

kasvu kasv $= 2$
(konstantne!)

Joon. 2



Joon 3

[1] Funktsiooni $y = f(x)$ muutu tähistatakse tavaliselt kreeka tähega Δ (delta): Δy ehk $\Delta f(x)$.

vastavad muudud aritmeetilise progressiooni.

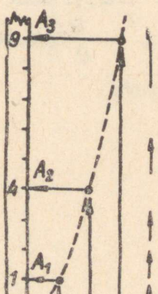
Kui argument t on aeg ja funktsioon S läbitud tee pikkus (muudame tähistused: x asendame tähega t ja y tähega S vastavalt füüsikas tavaks saanud tähistusele), siis sõltuvus $S = t^2$ vastab ühtlaselt kiirenevale liikumisele (kiirendusega 2), valem $S = kt + b$ aga ühtlasele liikumisele kiirusega k. Ühtlasel liikumisel läbib keha võrdsetes ajavahemikes võrdsed teeosad, s. t. argumendi võrdsetele muutudele vastavad funktsiooni võrdsed muudud (lineaarfunktsioon teisendab iga aritmeetilise progressiooni aritmeetiliseks progressiooniks). Ühtlaselt kiirenevał liikumisel aga võrdsetes ajavahemikes läbitavad teeosad suurenevad ühtlaselt. Vastavalt sellele vastavad ruutfunktsiooni puhul (muuseas, mitte ainult funktsiooni $y = x^2$, vaid ka suvalise funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ puhul) argumendi võrdsetele muutudele ühtlaselt suurenevad funktsiooni muudud.

Harjutused.

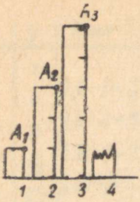
1. Koostage kolmeveeruline (argumendi väärtused, funktsiooni väärtused, funktsiooni muutude väärtused) tabel kolmliikme $y = x^2 + x - 3$ jaoks, võttes x väärtusteks 1, 0, —1, —2, —3. Lisage tabelile veel üks veerg. Sellesse veergu kandke kahe teineteisele järgneva muudu vahed.

Võtke nüüd teine kolmliige: $x^2 + 3x + 5$. Koostage ka selle jaoks samasugune tabel. Võrrelge nende kahe tabeli viimaseid veerge. Mis me aga saame, kui võtame kolmliikme $y = 2x^2 + 3x + 5$?

2. Joonisel A on näha, et kui võtta abstsisstelje positiivsel poolel võrdsete jaotustega skaala, siis $y = x^2$ graafik teisendab selle ordinaattelje skaalaks O, A_1, A_2, A_3 jne., mille jaotused pole enam võrdsed. See skaala jaotab ordinaattelje lõikudeks OA_1, A_1A_2, A_2A_3 jne. Kujutage nüüd endale ette, et te lõikasite ordinaattelje nendeks lõikudeks ja asetasite siis need lõigud vertikaalselt üksteise kõrvale piki x-telge võrdsete vahemaade järel (aluspunktidega punktidesse 1, 2, 3 jne.)



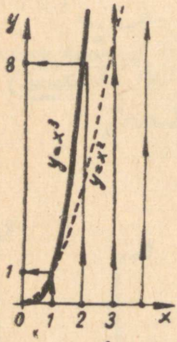
Joon. A



Joon. B

(joon. B). Kuidas asetuvad nende lõikude otspunktid? Selgitage tulemust.

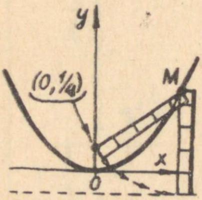
3. Vaatleme $y = x^3$ graafikut positiivsete x väärtuste korral (joon. C). Tehke ka siin läbi kõik see, mis $y = x^2$ graafikuga harjutuses 2. Joonestage, kuidas paiknevad lõikude otspunktid sel juhul. Veidi keerulisem küsimus: kas te suudate leida kõvera võrrandit, millel asetsevad lõikude otspunktid?



Joon. C

Harjutus.

Konstrueerige $y = x^2$ graafik. Mõõtkava võtke suurem: $1 = 2$ cm (4 ruutu). Märkige y-teljel punkt $F\left(O, \frac{1}{4}\right)$. Mõõtke paberiribaga punkti F ja parabooli mingi punkti M vaheline kaugus. Seejärel kinnitage pabeririba punktis M ja pöörake siis teda ümber punkti M nii, et riba asetseks vertikaalselt. Pabeririba ots ulatub x-teljest veidi üle. Märkige paberiribal, kui palju ulatub ta üle abstsisstelje (joon. D). Võtke nüüd paraboolil mingi teine punkt ja korrake mõõtmist veel üks kord. Kui palju ulatub pabeririba ots nüüd abstsissteljest üle? Tulemuse võime teile ette öelda: ükskõik millise punkti te ka paraboolil $y = x^2$ ei võtaks, kaugus sellest punktist punktini $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ on suurem kaugusest sellest punktist abstsissteljeni alati ühe ja sama arvu $\frac{1}{4}$ võrra.



Joon. D

Võib öelda ka teisiti: kaugus parabooli suvalisest punktist punktini $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ võrdub kaugusega samast parabooli punktist x-teljega paralleelse sirgeni $y = -\frac{1}{4}$.

Seda huvitava omadusega punkti $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ nimetatakse parabooli $y = x^2$ fookuseks, sirget $y = -\frac{1}{4}$ aga selle parabooli juhtsirgeks.

Juhtsirge ja fookus on igal paraboolil.

3. Vaatleme ruutkolmliikmete

$$y = x^2 + px + q$$

graafikuid. Näitame, et need ei erine oma kuju poolest sugugi paraboolist $y = x^2$, olles ainult teises asendis koordinaattelgede suhtes.

Vaatleme algul arvulist näidet. Võtame kolmliikme

$$y = x^2 + 2x + 3.$$

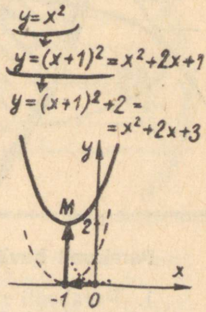
Et saada selle kolmliikme graafikut, esitame ta kujul

$$y = (x + 1)^2 + 2,$$

olles eraldanud täisruudu.

$y = (x + 1)^2$ graafik saadakse paraboolist $y = x^2$ viimase nihutamisel piki x-telge. (Selgitage, miks kõver $y = (x + 1)^2$ saadakse parabooli $y = x^2$ nihutamisel vasakule.) $y = (x + 1)^2$ graafikust saadakse $y = (x + 1)^2 + 2$ graafik päris lihtsalt (joon. 4).

Niisiis, kolmliikme $y = (x + 1)^2 + 2 = x^2 + 2x + 3$ graafik saadakse parabooli $y = x^2$ nihutamisel 1 ühiku võrra vasakule ja 2 ühiku võrra üles. Sellise teisenduse tagajärjel läheb parabooli tipp koordinaatide alguspunktist (0, 0) punkti M koordinaatidega (—1, 2).



Joon 4

Harjutused.

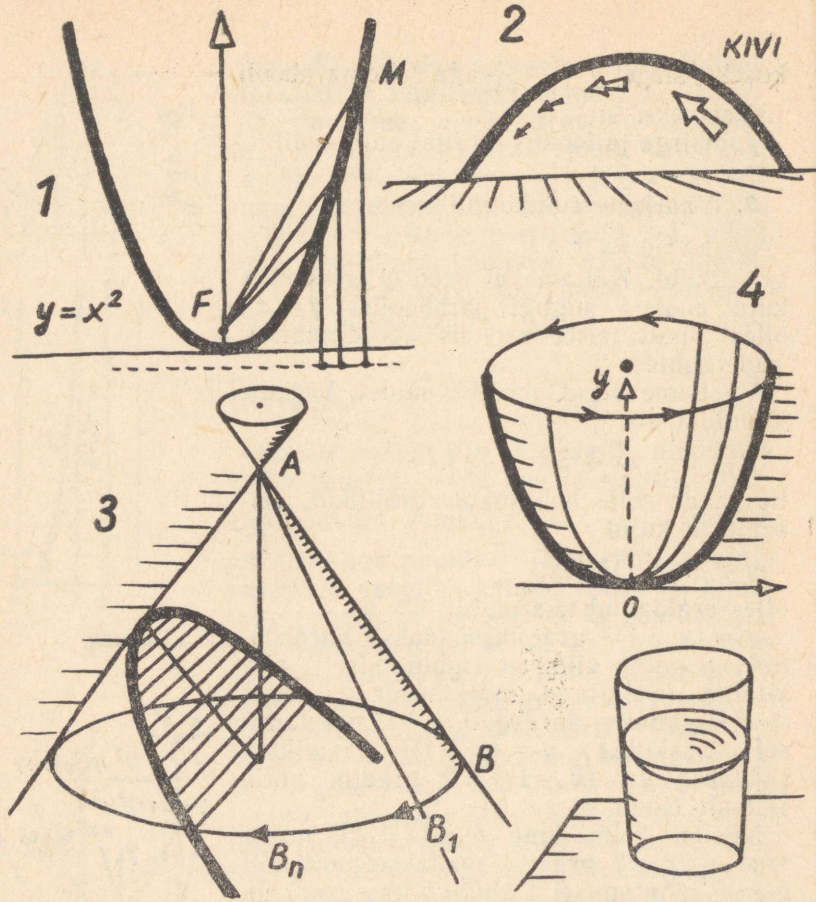
1. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud:

a) $y = (x + 2)^2 + 3$;

b) $y = (x + 2)^2 - 3$;

c) $y = (x - 2)^2 + 3$;

d) $y = (x - 2)^2 - 3$.



Parabooli huvitavaid omadusi.

1. Parabooli suvalise punkti kaugus teatud punktini, mida nimetatakse parabooli fookuseks, on võrdne selle suvalise punkti kaugusega teatud sirgeni, mida nimetatakse parabooli juhtsirgeks.

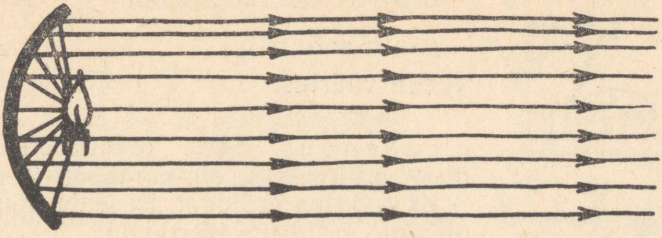
2. Kui tühjuses visata kivi mingi nurga all horisontaalsuunaga, siis lendab ta mööda parabooli.

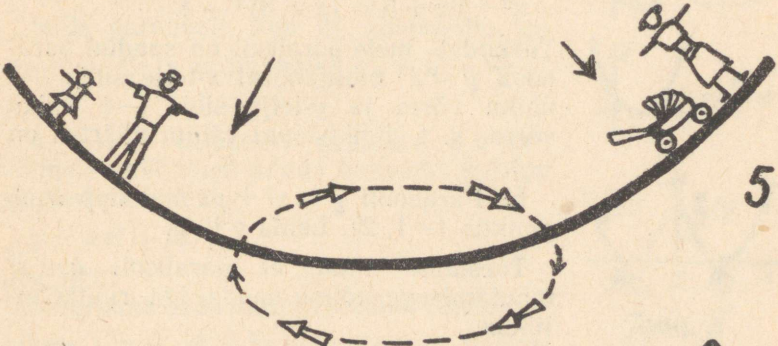
3. Kui lõigata koonuse pinda tasandiga, mis on paralleelne mingi tema moodustajaga, siis lõikejooneks on parabool.

4. Kui parabool panna pöörlema ümber oma sümmeetriatelje (näiteks parabool $y = x^2$ ümber y-telje), siis saame väga huvitava pinna, mida nimetatakse pöördparaboloidiks.

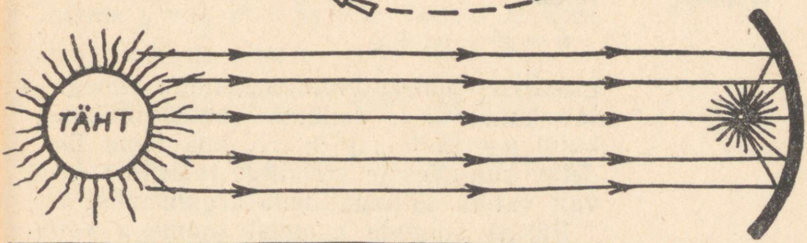
Pöörlevas anumas on vedeliku pinnal pöördparaboloidi kuju. Te võite pinda näha, kui poolikus teeklaasis lusikat kiiresti ringi liigutate ning sealt siis lusika välja võtate.

6





5



7

5. Puhkeparkides võib mõnikord näha naljakat atraktsiooni «imede paraboloidi». Igaühele, kes seisab pöörlevas paraboloidis, tundub, et tema seisab põrandal, teised inimesed aga püsivad mingil imeväel seinte küljes.[1]

6. Prožektori peegel tehakse tavaliselt paraboloidikujuline. Kui asetada valgusallikas paraboloidi fookusesse, siis moodustavad peeglilt peegelduvad kiired paralleelsete kiirte kimbu.

7. Paraboloidikujulisi peegleid kasutatakse ka peegelteleskoopides: kauge tähe valgus, langedes paralleelse kiirtekimbuna teleskoobi peeglile, koondub fookuses.

---

[1] Punktides 4 ja 5 kirjeldatud katsed põhinevad ühel ja samal paraboloidi omadusel: kui panna paraboloid sobiva kiirusega ümber vertikaaltelje pöörlema, siis on tsentrifugaal- ja raskusjõu resultandi suund pinnaga risti.

2. a) Leidke funktsiooni

$$y = x^2 + 6x + 5$$

vähim väärtus.

L a h e n d u s. Selle funktsiooni vähimaks väärtuseks on parabooli $y = x^2 + 6x + 5$ tipu ordinaat. Et leida tipu koordinaate, eraldame täisruudu:

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4.$$

Tähendab, meie parabool on saadud parabooli $y = x^2$ nihutamisel x-telje sihis —3 ühiku võrra ja y-telje sihis —4 ühiku võrra, s. t. funktsiooni vähim väärtus on —4.

b) Parabooli $y = x^2 + px + q$ tipp asub punktis (—1, 2). Leida p ja q.

Tõestame nüüd, et parabooli $y = x^2$ nihutamisega võime saada iga ruutkolmliikme

$$y = x^2 + px + q$$

graafiku. Selleks eraldame, nagu ennegi, täisruudu, s. t. esitame ruutkolmliikme kujul $y = (x + \ldots)^2 + \ldots$, kus teine liidetav sulgudes ja vabaliige tulevad sobivalt valida sõltumatutena argumendist x. Pärast sulgude avamist saame x esimese astmega liikme ainult kahekordses korrutises ja kuna see liige peab olema px, siis tuleb sulgudes teiseks liidetavaks võtta $\frac{p}{2}$. Niisiis, saame

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \ldots =$$

$$= x^2 + px + \frac{p^2}{4} + \ldots .$$

Kuna kolmliikme vabaliige peab olema q, siis kolme punkti asemele tuleb kirjutada

$$q - \frac{p^2}{4}.$$

Niisiis, kolmliikme $y = x^2 + px + q$ võib esitada kujul

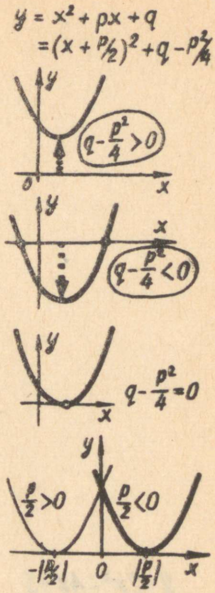
$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Näeme (joon. 5), et *ruutkolmliikme*

$$y = x^2 + px + q$$

graafik kujutab endast parabooli $y = x^2$, mis on nihutatud[1] $-\frac{p}{2}$ *võrra x-telje sihis ja* $q - \frac{p^2}{4}$ *võrra y-telje sihis.*

Selle parabooli tipu M abstsissiks on $x_m = -\frac{p}{2}$ ja ordinaadiks $y_m = q - \frac{p^2}{4}$.



Joon. 5

4. Võttes «aluseks» graafiku $y = ax^2$, võime samal viisil saada üldisema kujuga ruutkolmliikme

$$y = ax^2 + bx + c$$

graafiku.

Selgitame seda näitel. Võtame ruutkolmliikme $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$. Toome x^2 kordaja sulgude ette:

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 6 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 12).$$

Eraldame sulgudes olevas avaldises täisruudu:

$$\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 12) =$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 - 2 \cdot 3x + 9 + 3) =$$
$$= \frac{1}{2}[(x - 3)^2 + 3].$$

Niisiis,

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + \frac{3}{2}.$$

---

[1] Nihe $-\frac{p}{2}$ võrra x-telje sihis tähendab nihet paremale, kui $-\frac{p}{2} > 0$, ning vasakule, kui $-\frac{p}{2} < 0$.

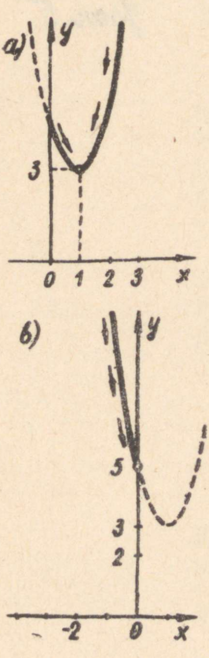
Näeme, et $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + \frac{3}{2}$ graafiku saame, kui nihutame parabooli $y = \frac{1}{2}x^2$ x-telje sihis 3 ühiku võrra paremale ja y-telje sihis $\frac{3}{2}$ ühiku võrra üles.

Ülesandeid.

1. Nihutada parabooli ax^2 x-telje ja y-telje sihis nii, et saaksime kolmliikme $y = ax^2 + bx + c$ graafiku.

(V a s t u s. Parabool $y = ax^2 + bx + c$ saadakse paraboolist $y = ax^2$, kui nihutada viimast abstsisstelje sihis $-\frac{b}{2a}$ ühiku võrra ja ordinaattelje sihis $\frac{4ac - b^2}{4ac}$ ühiku võrra.)

$y = 2x^2 - 4x + 5$



2. Leida funktsiooni $y = 2x^2 - 4x + 5$ vähimad väärtused lõikudel:

a) $x = 0$ kuni $x = 5$ $(0 \leqslant x \leqslant 5)$,
b) $x = -5$ kuni $x = 0$ $(-5 \leqslant x \leqslant 0)$.

L a h e n d u s. Kasutame eelmise ülesande tulemusi ja konstrueerime funktsiooni $y = 2x^2 - 4x + 5$ graafiku (joon. *a*, *b*).
Jooniselt on näha, et x muutudes väärtusest $x = 0$ väärtuseni $x = 5$ funktsioon $y = 2x^2 - 4x + 5$ algul kahaneb (kuni väärtuseni $x = 1$), seejärel kasvab. Niisiis, funktsiooni $y = 2x^2 - 4x + 5$ vähimaks väärtuseks lõigul a) on tema väärtus $x = 1$ puhul (joon. *a*). x muutudes -5-st kuni 0-ni funktsioon $y = 2x^2 - 4x + 5$ kogu aeg kahaneb. Tähendab, funktsiooni vähimaks väärtuseks lõigul b) on tema väärtus $x = 0$ puhul.

(V a s t u s. Vähim väärtus lõigul a) on 3, lõigul b) aga 5.)

Harjutused.

1. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud, iga parabooli tipu täpsed koordinaadid ja graafikute ning koordinaattelgede lõikepunktide koordinaadid:

a) $y = x - x^2 - 1$;

b) $y = -3x^2 - 2x + 1$;

c) $y = 10x^2 - 10x + 3$;

d) $y = 0{,}125x^2 + x + 2$.

2. Millise funktsiooni graafiku me saame, kui venitame algul parabooli $y = x^2$ ordinaattelje sihis kahekordseks, seejärel aga nihutame sama telje sihis 3 ühiku võrra allapoole? Millise funktsiooni graafiku me saame, kui need kaks teisendust teha vastupidises järjekorras: algul nihutada parabooli $y = x^2$ kolme ühiku võrra allapoole, seejärel aga venitada teda y-telje sihis kahekordseks?

3. Kui palju on tarvis nihutada parabooli $y = x^2 - 3x + 2$ x-telje sihis ja y-telje sihis, et saada parabool $y = x^2 + x + 1$?

4. Nihutage parabooli $y = x^2$ x-telje sihis nii, et ta läbiks punkti (3, 2). Millise funktsiooni graafiku te saate?

5. Vaatame nüüd, mida võib funktsiooni $y = x^2 + px + q$ graafiku põhjal öelda ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendamise kohta. Selle võrrandi lahenditeks on need x väärtused, mille puhul funktsiooni $y = x^2 + px + q$ väärtused on võrdsed nulliga. Graafikul on nende punktide ordinaadid nullid, s. t. asuvad abstsissteljel.

Ruutkolmliikme $y = x^2 + px + q$ graafikult on kohe näha, et ruutvõrrandil on kaks reaalset lahendit, kui $\frac{p^2}{4} - q > 0$, ning pole ühtegi lahendit, kui $\frac{p^2}{4} - q < 0$. (Tuletagem meelde, et parabooli $y = x^2$ nihutatakse allapoole, kui $q - \frac{p^2}{4} < 0$, ja ülespoole, kui $q - \frac{p^2}{4} > 0$; vt. joon. 5, lk. 51.)

Kui $\frac{p^2}{4} - q = 0$, siis on ruutvõrrandil $x^2 + px + q = 0$ kuju $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$. See juhtum on eriti huvitav. Vaatleme seda üksikasjalisemalt.

Võrrandil $x - 2 = 0$ on üks lahend $x = 2$. Võrrandi $(x - 2)^2 = 0$ lahendiks on samuti $x = 2$ — ükski teine arv ju seda võrrandit ei rahulda.

Sellele vaatamata räägime esimesel juhul, et võrrand $x - 2 = 0$ on üks lahend, teisel juhul aga ütleme, et võrrandil $(x - - 2)^2 = 0$ on kordne lahend ehk kaks võrdset lahendit: $x_1 = 2$ ja $x_2 = 2$.

Kuidas seda erinevust selgitada?

Selleks on mitu võimalust. Me esitame neist ühe. Muudame veidi esimest võrrandit: asendame nimelt nulli paremal pool mingi väikese arvuga. Lahend muidugi muutub, aga ta jääb endiselt ainsaks: võrrandit rahuldab ikka ainult üks arv. Näiteks

$$x - 2 = 0{,}01, \quad x = 2{,}01.$$

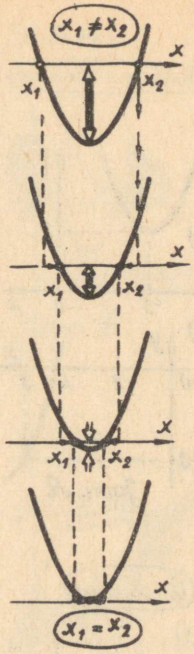
Muudame nüüd samal viisil teist võrrandit:

$$(x - 2)^2 = 0{,}01, \quad x^2 - 4x + 3{,}99 = 0.$$

Saadud võrrandil on nüüd kaks lahendit: $x_1 \approx 2{,}1$ ja $x_2 \approx 1{,}9$. Muudame nüüd jälle võrrandi $(x - 2)^2 = 0{,}01$ paremat poolt, asendades ta üha väiksemate arvudega. Seni kui parem pool pole võrdne nulliga, on võrrandil kaks erinevat lahendit. Parema poole vähenedes lahendid «lähenevad» teineteisele, nii et nende väärtused erinevad teineteisest üha väiksema suuruse võrra. Lõpuks, kui parem pool saab võrdseks nulliga, «sulavad» need kaks lahendit ühte, s. t. lahendid saavad teineteisega võrdseks. Seetõttu öeldakse, et võrrandil $(x-2)^2 = 0$ on kaks võrdset lahendit.

Geomeetriliselt vastab liitunud lahendite juhtum sellele, et parabool $y = (x-2)^2$ puudutab x-telge.

Ruutkolmliikme $y = x^2 + px + q$ üldjuhu arutame läbi geomeetriliselt. Olgu esiteks vabaliige q väiksem kui $\frac{p^2}{4}$ $\left(\text{s. t. } q - \frac{p^2}{4} < 0\right)$; sel korral lõikab parabool $y = x^2 + px + q$ abstsisstelge kahes punktis (joon. 6). Kui hakkame vabaliiget suurendama, siis parabool, liikudes ülespoole, lõikab algul x-telge ikka kahes punktis (võrrandil $x^2 + px + q$ on sel korral kaks erinevat lahendit). Seejärel need lõikepunktid, lähenedes üha teineteisele, teatud momendil $\left(\text{kui } q - \frac{p^2}{4} = 0\right)$ kattuvad. Sel momendil puudutab parabool $y = x^2 + px^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ x-telge, võrrandil $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = 0$ on aga üks kahekordne lahend. Vabaliikme edasisel suurenemisel parabool eemaldub x-teljest ning seega võrrandil $x^2 + px^2 + q = 0$ pole reaalseid lahendeid.



Joon. 6

Harjutused.

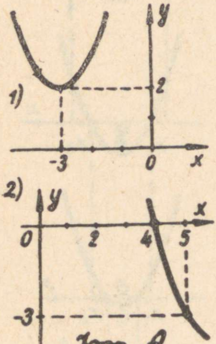
1. Leida parabool $y = ax^2 + bx + c$, mis lõikab abstsisstelge punktides $x = 3$ ja $x = -5$, y-telge aga punktis $y = 30$.

L a h e n d u s. Ruutkolmliikmel, millega see parabool ette antakse, on kuju

$$a(x-3)(x+5).$$

Lõikepunkti y-teljega saame, kui $x=0$. Tähendab, $x=0$ puhul peab meie funktsioon võrduma 30-ga. Saame $a(-3)(+5)=$ $=30$, kust $a=-2$.

(V a s t u s. Otsitav parabool on $y=$ $=-2x^2-4x+30$.)



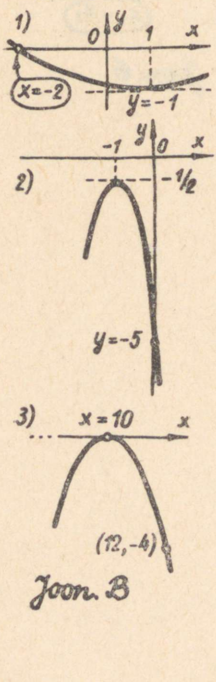
Joon. A

2. a) Leida ruutkolmliige x^2+px+q, kui tema graafik lõikab abstsisstelge punktides $x=2$ ja $x=5$.

b) Leida kolmanda astme hulkliige $y=x^3+px^2+qx+r$, kui on teada, et tema graafik lõikab x-telge punktides $x=1$, $x=2$ ja $x=3$.

c) Püüdke leida hulkliige, mille graafik lõikaks x-telge 101 punktis: $x_1=-50$, $x_2=-49$, $x_3=-48$, ..., $x_{101}=50$. Missugune on selliste hulkliikmete väikseim aste?

Ülesanded



Joon. B

3. Kolmliikmel $-x^2+6x-9$ on kaks võrdset juurt.

a) Muutke 0,01 võrra vabaliiget, nii et saadud kolmliikmel oleks kaks erinevat juurt.

b) Kas on võimalik jõuda sama tulemuseni, muutes 0,01 võrra ainult x kordajat?

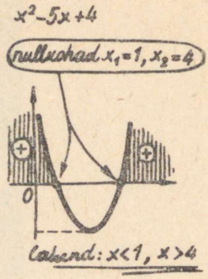
4. Joonisel A 1) ja 2) on kujutatud ruutkolmliikmete $y=x^2+px+q$ graafikud. Leidke p ja q. Joonestage graafik 2), valides sobivama mõõtkava ja telgede asendi.

5. Joonisel B 1), 2) ja 3) on kujutatud ruutkolmliikmete $y=ax^2+bx+c$ graafikud. Leidke a, b ja c.

6. a) Lahendage võrratus

$$x^2-5x+4>0.$$

Lahendus. Jooniselt 7 on näha, et funktsioon $y = x^2 - 5x + 4$ on positiivne kahes vahemikus: x puhul, mis on väiksemad kui 1, ja x puhul, mis on suuremad kui 4. (Vastus. $x < 1$ ja $x > 4$.)



Joon. 7

b) Lahendage võrratus

$$x - 1 < |x^2 - 5x + 4|.$$

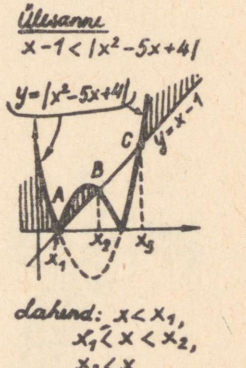
Lahendus. Joonestame ühele ja samale joonisele nii võrratuse paremal kui ka vasakul poolel asuvate funktsioonide graafikud. Joonisel 8 on näha, et sirgel $y = x - 1$ on $y = |x^2 - 5x + 4|$ graafikuga kolm ühist punkti: $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$ ja $C\ (x_3, y_3)$. Tingimus $x - 1 < |x^2 - 5x + 4|$ on täidetud kolmes vahemikus: $x < x_1$, $x_1 < x < x_2$, $x > x_3$. x_1 ja x_3 väärtused leitakse võrrandist

$$x - 1 = x^2 - 5x + 4,$$

x_2 väärtus leitakse võrrandist

$$x - 1 = -(x^2 - 5x + 4).$$

(Vastus. $x < 1$, $1 < x < 3$ ja $x > 5$, s. t. kõik x väärtused, välja arvatud $x = 1$ ja $3 \leqslant x \leqslant 5$.)



Joon. 8

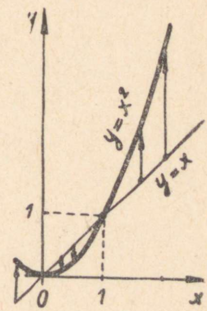
c) Lahendage võrratused

$$x - 1 > |x^2 - 5x + 4|,$$
$$x - 1 \geqslant |x^2 - 5x + 4|.$$

7. Leidke funktsiooni

$$y = x^2 - 5|x| + 4$$

suurim väärtus lõigul -2 kuni 2.

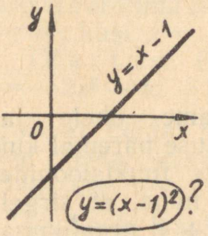


Joon. 9

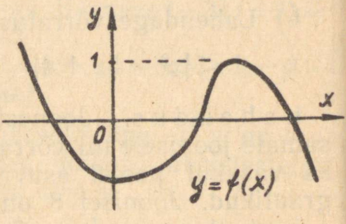
6. Me võime $y = x^2$ graafiku saada ka nii, et «tõstame ruutu» $y = x$ graafiku, s. t. tõstame mõttes ruutu iga ordinaadi väärtuse (joon. 9).

Harjutused.

1. Joonisel A on kujutatud $y = x - 1$ graafik. Joonestage samal joonisel $y = (x - 1)^2$ graafik.



Joon. A



Joon. B

2. Joonisel B on kujutatud $y = f(x)$ graafik. Joonestage samal joonisel $y = (f(x))^2$ graafik.

3. Kasutades $y = x(x+1)(x-1)(x-2)$ graafikut (§ 1), joonestage

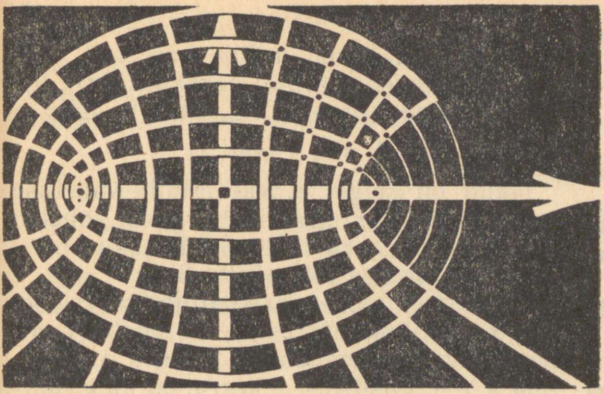
$$y = x^2 (x+1)^2 (x-1)^2 (x-2)^2$$

graafik.

4. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud:

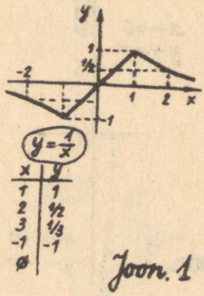
a) $y = [x]^2$,

b) $y = (x - [x])^2$.



§ 5. Murdlineaarne funktsioon.

1. Joonisel 1 on kujutatud funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ «graafik» nii, nagu teda tihti teevad inimesed, kellel pole küllaldasi kogemusi graafikute konstrueerimisel. Nad arutlevad nii: «Kui $x = 1$, siis $y = 1$. Kui $x = 2$, siis $y = \frac{1}{2}$. Kui $x = 3$, siis $y = \frac{1}{3}$. Kui $x = -1$, siis $y = -1$. Kui $x = 0$, siis ...? Mnjaa... Mida tähendab $\frac{1}{0}$, ei ole teada, seetõttu jätame $x = 0$ vahele...»



Joon. 1

Eespool esitatust on teile selge, et nii graafikuid joonestada ei tohi. Õige ettekujutuse saamiseks märgime algul, et $x = 0$ puhul pole funktsioon määratud. Sellistel juhtumeil on huvitav vaadata, kuidas funktsioon käitub selle punkti ümbruses. Kui x läheneb absoluutväärtuselt vähenedes nullile, siis muutub y absoluutväärtuselt kuitahes suureks.

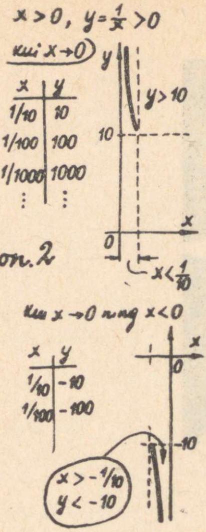
Sealjuures, kui x läheneb nullile paremalt $(x > 0)$, on ka $y = \frac{1}{x}$ positiivne.

Seega tõuseb funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ graafik üles, kui x läheneb nullile paremalt. Kui aga x läheneb nullile vasakult ($x < 0$), siis on y negatiivne ning seetõttu langeb $y = \frac{1}{x}$ graafik alla (joon. 2).

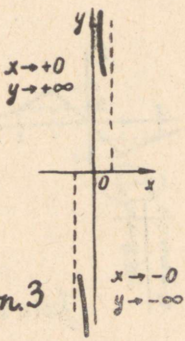
Nüüd on selge, et «keelatud» väärtuse $x = 0$ läheduses graafik hargneb kaheks: parempoolne haru läheb y-telje sihis üles, vasakpoolne aga alla (joon. 3).

Vaatame nüüd, kuidas käitub funktsioon, kui x absoluutväärtuselt suureneb. Vaatleme algul parempoolset haru, s. o. väärtusi $x > 0$. Positiivse x korral on ka y väärtused positiivsed. Tähendab, kogu parempoolne haru asub abstsissteljest kõrgemal. x suurenedes murd $\frac{1}{x}$ väheneb. Seetõttu nullist paremale liikudes laskub kõver $y = \frac{1}{x}$ üha madalamale ja madalamale, kusjuures ta võib läheneda x-teljele kuitahes lähedale. $x < 0$ jaoks saame analoogilise pildi (joon. 4, *a* ja *b*).

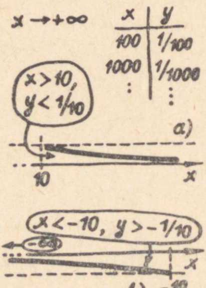
Seega, kui x absoluutväärtuselt piiramatult suureneb, siis funktsioon $y = \frac{1}{x}$ absoluutväärtuselt piiramatult väheneb ning graafiku mõlemad harud lähenevad abstsissteljele: parempoolne ülalt, vasakpoolne alt (joon. 5).



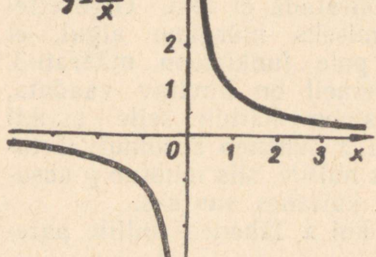
Joon. 2



Joon. 3

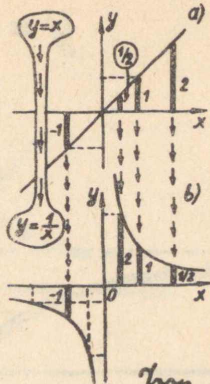


Joon. 4



Joon. 5

Kõverat, mis on funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ graafikuks, nimetatakse *hüperbooliks*. Sirgeid, millele lähenevad hüperbooli harud, nimetatakse tema *asümptootideks*.



Joon. 6

2. Funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ graafiku võib koostada ka veidi teisiti.

Joonestame funktsiooni $y = x$ graafiku (joon. 6, a). Asendame kõik ordinaadid nende pöördväärtustega ja kanname vastavad punktid joonisele 6, b. Saame graafiku $y = \frac{1}{x}$.

Jooniselt on piltlikult näha, kuidas esimese graafiku väiksed ordinaadid teisenduvad teise graafiku suurteks ordinaatideks ja, vastupidi, esimese suured ordinaadid teise väikesteks ordinaatideks.

Selline graafikute «jagamise» võte on kasulik alati siis, kui me oskame konstrueerida funktsiooni $y = f(x)$ graafikut ja meil on tarvis konstrueerida funktsiooni $y = \frac{1}{f(x)}$ graafik (vt. lk. 62, 63).

Harjutused.

1. Teades $y = x^2$ graafikut, konstrueerige $y = \frac{1}{x^2}$ graafik. (Lahendus on joonisel 7.)

2. Konstrueerige järgmiste funktsioonide graafikud:

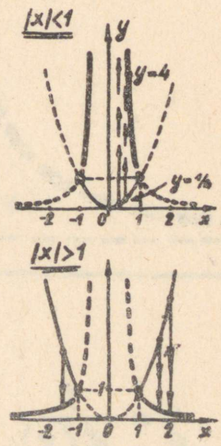
a) $y = \frac{1}{x^2 - 3x - 2}$; b) $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$.

(Te näete, et need kaks graafikut on oma kujult täiesti erinevad.)

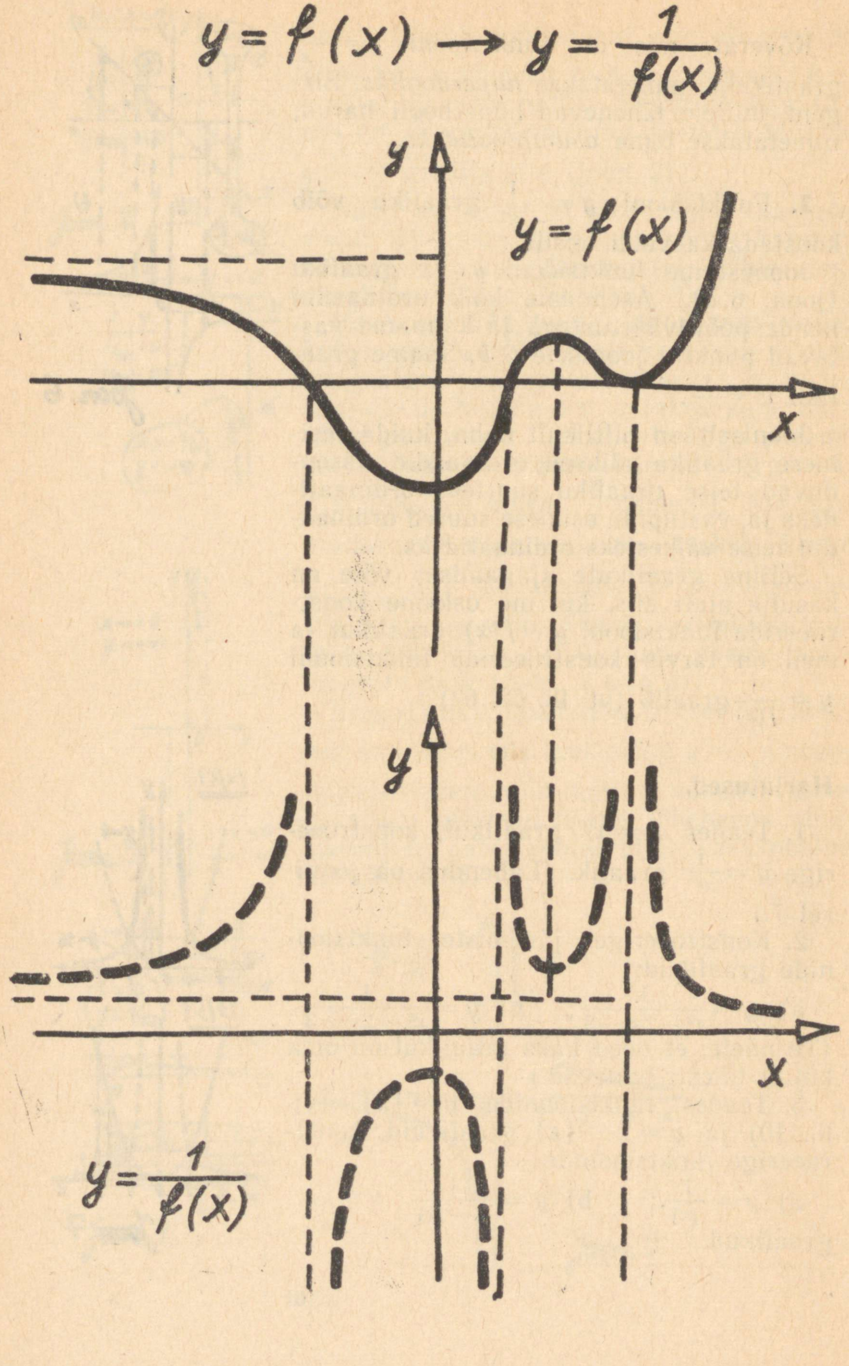
3. Teades funktsioonide $y = [x]$ (vt. lk. 10) ja $y = x - [x]$ graafikuid, konstrueerige funktsioonide

a) $y = \frac{1}{[x]}$; b) $y = \frac{1}{x - [x]}$

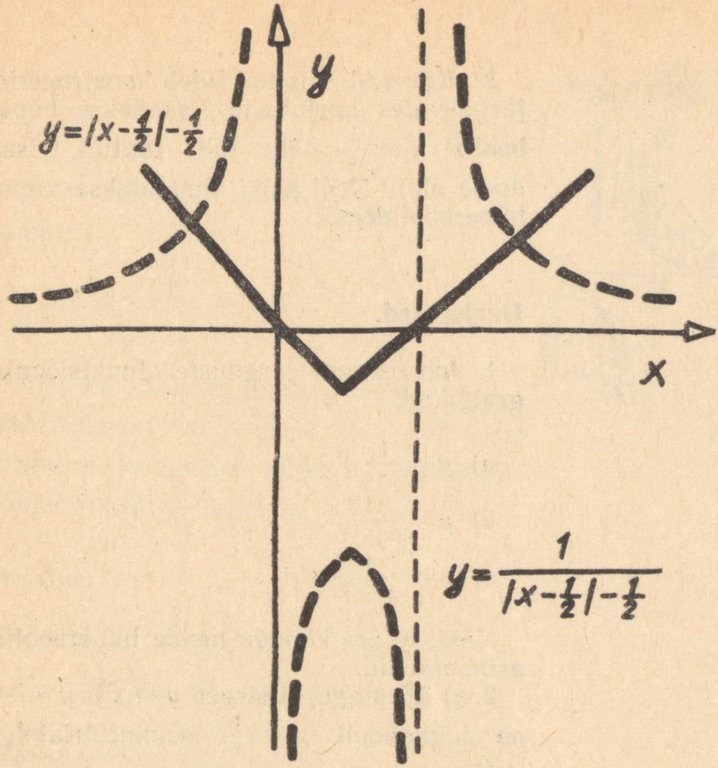
graafikud.



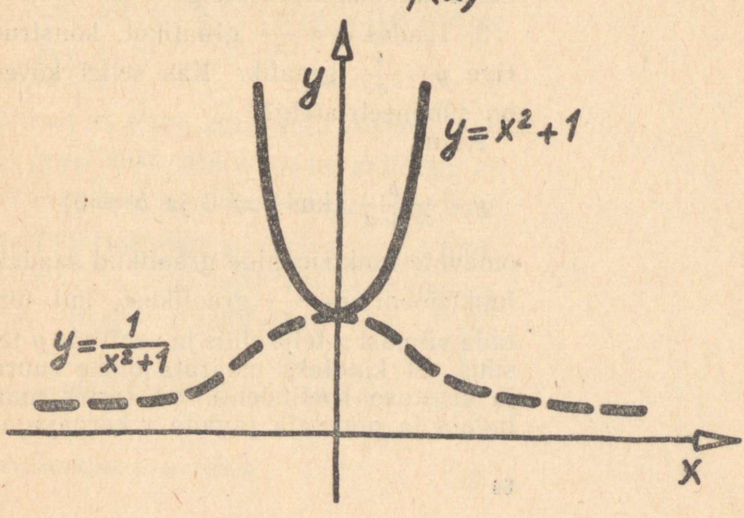
Joon. 7



y = f (x) → y = 1/f(x)
y
y = f (x)
x
y
x
y = 1/f(x)



$$y = f(x) \longrightarrow y = \frac{1}{f(x)}$$



3. Kõverad, mis teil tuleb konstrueerida järgnevates harjutustes, saadakse hüperboolist $y = \frac{1}{x}$ teile juba tuntud teisenduste abil. Neid kõiki nimetatakse samuti hüperboolideks.

Harjutused.

1. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud:

a) $y = \frac{1}{x} + 1$,

b) $y = \frac{1}{x+1}$,

c) $y = \frac{1}{x-2} + 1$.

Näidake ära kõikide nende hüperboolide asümptoodid.

2. a) Tõestage, et sirged $y = x$ ja $y = -x$ on hüperbooli $y = \frac{1}{x}$ sümmeetriatelgedeks.

b) Kas graafiku $y = \frac{1}{x^2}$ parempoolsel harul on sümmeetriatelg? ⊕

3. Teades $y = \frac{1}{x}$ graafikut, konstrueerige $y = \frac{4}{x}$ graafik. Kas sellel kõveral on sümmeetriatelg?

Kuju

$$y = \frac{b}{cx+d} \quad (\text{kus } c \neq 0 \text{ ja } b \neq 0)$$

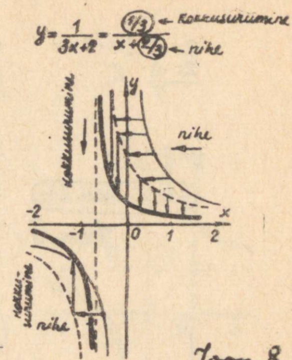
omavate funktsioonide graafikud saadakse funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ graafikust, kui nihutada viimast x-telje sihis ja venitada y-telje sihis. Et kindlaks määrata nihke suurust ja venituse koefitsienti, on tarvis murru lugeja ja nimetaja jagada x kordajaga c:

$$\frac{b}{cx+d}=\frac{\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Teeme selle läbi näitel $y=\frac{1}{3x+2}$.

Saame:

$$\frac{1}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}}{x+\frac{2}{3}}.$$



Joon. 8

Nüüd on näha, et funktsiooni $y=\frac{1}{3x+2}$ graafikuks on x-telje sihis $\left(-\frac{2}{3}\right)$ võrra[1] nihutatud ja y-telje sihis kolmekordselt kokkusurutud $\frac{1}{x}$ graafik.

Harjutus.

Joonestage $y=\frac{1}{2-x}+1$ graafik.

(Näpunäide. Teisendage murdu $\frac{1}{2-x}$ nii, nagu on eespool öeldud: jagage lugeja ja nimetaja läbi x kordajaga, s. o. (—1)-ga. Tulemuseks saate $y=\frac{-1}{x-2}+1$.)

4. Murdlineaarsete funktsioonide

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

graafikud ei erine oma kuju poolest $y=\frac{1}{x}$ graafikust. Me eeldame muidugi, et $c\neq 0$ (vastasel korral oleks meil tegemist lineaarfunktsiooniga $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$) ning et $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$, s. t. et lugeja ei ole nimetaja kordne (nagu funktsiooni $y=\frac{4x+6}{2x+3}$

[1] Aga mitte (—2) võrra, nagu tihti arvavad õpilased!

$2x+1 \mid x-3$
$2x-6 \quad 2$
7

$y=2+\frac{7}{x-3}$

nihe 2 võrra üles

Joon. 9

puhul), sest vastasel korral on funktsioon konstantne.

Tõestame väite. Vaatleme algul näidet $y=\frac{2x+1}{x-2}$. Eraldame murru «täisosa», jagades lugeja nimetajaga (joon. 9). Saame $\frac{2x+1}{x-3}=2+\frac{7}{x-3}$.

Nüüd on näha, et selle funktsiooni graafiku võib saada $y=\frac{1}{x}$ graafikust järgmiste teisenduste teel: nihe 3 ühiku võrra paremale, venitus 7 korda y-telje sihis ja nihe 2 ühiku võrra üles.

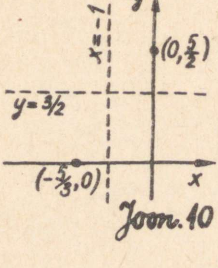
Analoogiliselt võib esitada iga suvalise murru $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, eraldades tema «täisosa». Järelikult on kõikide murdlineaarsete funktsioonide $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ graafikuteks hüperboolid (mis on erinevatel viisidel nihutatud koordinaattelgede suhtes ja venitatud y-telje sihis).

M ä r k u s. Et konstrueerida mingi murdlineaarse funktsiooni graafikut, pole sugugi tarvis teisendada murdu, mis selle funktsiooni ette annab. Kuna me teame, et graafikuks on hüperbool, siis on küllaldane leida sirged, millele hüperbooli harud lähenevad (hüperbooli asümptoodid) ja veel mõned punktid.

N ä i d e. Konstrueerime funktsiooni

$$y=\frac{3x+5}{2x+2}$$

graafiku.



Joon. 10

Leiame algul selle hüperbooli asümptoodid. Funktsioon ei ole määratud, kui $2x+2=0$, s. t. $x=-1$ puhul (joon. 10). Tähendab, vertikaalasümptoodiks on sirge $x=-1$.

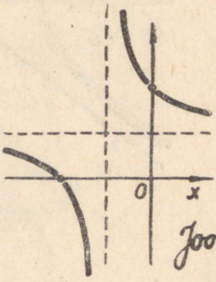
Et leida horisontaalasümptooti, vaatame, millele lähenevad funktsiooni väärtused, kui argument absoluutväärtuselt suureneb. Absoluutväärtuselt suurte x väärtuste puhul

$$y=\frac{3x+5}{2x+2}\approx\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

Tähendab, horisontaalasümptoodiks on sirge $y=\frac{3}{2}$.

Määrame hüperbooli ja koordinaattelgede lõikepunktid. $x=0$ korral $y=\frac{5}{2}$. Funktsioon võrdub nulliga, kui $3x+5=0$, s. t. kui $x=-\frac{5}{3}$.

Märkinud joonisele punktid $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ ja $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, joonestame graafiku (joon. 11).



Joon. 11

Harjutused.

1. Konstrueerige järgmiste funktsioonide graafikud:

a) $y=\frac{1}{1-2x}$, b) $y=\frac{3+x}{3-x}$,

c) $y=\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|$.

2. Joonisel 12, a on kujutatud murdlineaarsete funktsioonide $y=\frac{px+q}{x+r}$ graafikud. Leidke need funktsioonid (s. t. määrake p, q ja r).

3. a) Mitu lahendit on võrrandil

$$\frac{x}{1-x}=x^2+4x+2?$$

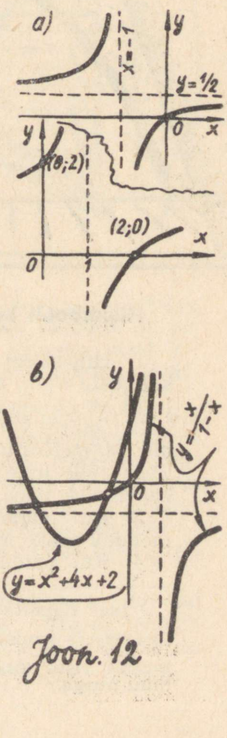
L a h e n d u s. Konstrueerime ühel ja samal joonisel funktsioonide

$$y=\frac{x}{1-x} \text{ ja } y=x^2+4x+2$$

graafikud.

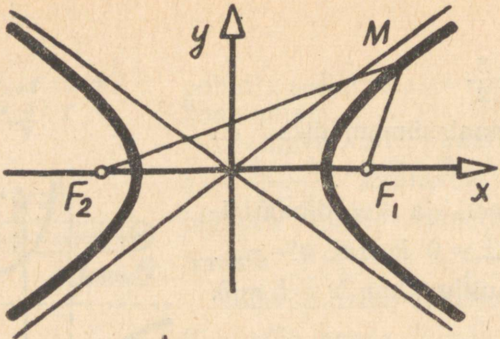
Joonisel 12, b on näha nende graafikute kaks lõikepunkti. On aga selge, et on olemas ka kolmas lõikepunkt, kuna parabool lõikab hüperbooli asümptooti. Graafikute lõikepunktide abstsissid ongi võrrandi lahenditeks.

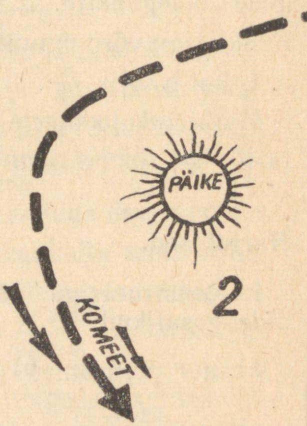
(V a s t u s. Kolm lahendit.)



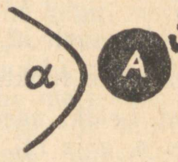
Joon. 12

1

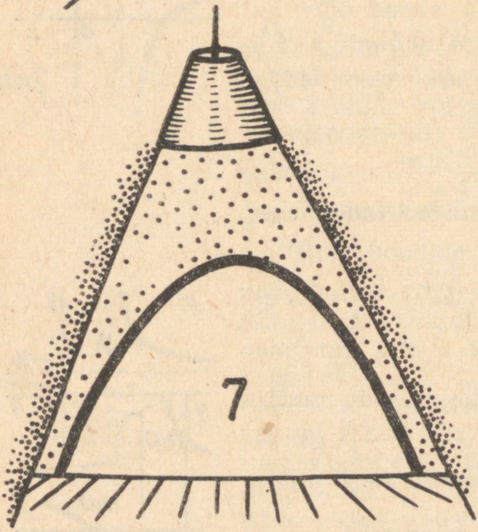




2



3



7

Hüperbooli huvitavaid omadusi.

1. Hüperbool on nende punktide M geomeetriliseks kohaks, mille kauguste vahe antud punktideni F_1 ja F_2 (mida nimetatakse fookusteks) on absoluutväärtuselt võrdne mingi etteantud arvuga.

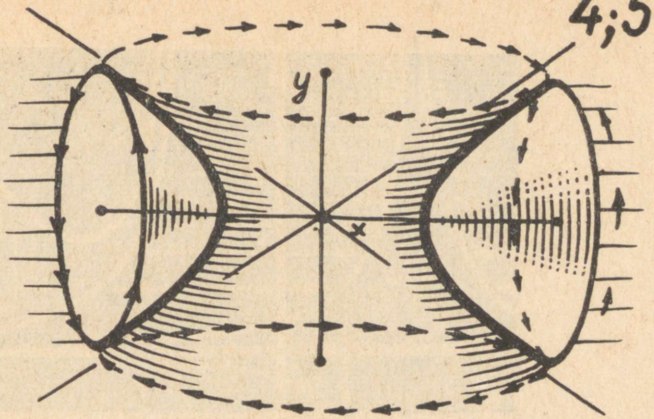
2. Suurte kauguste tagant meie päikesesüsteemi lendavad komeedid ja meteoriidid liiguvad mööda hüperbooli haru, kusjuures Päike asub selle hüperbooli fookuses. Üks asümptootidest[1] määrab komeedi saabumise, teine lahkumise suuna.

3. Kui pommitada aatomituuma α-osakestega, siis liigub tuumast mööduv osake mööda hüperbooli.

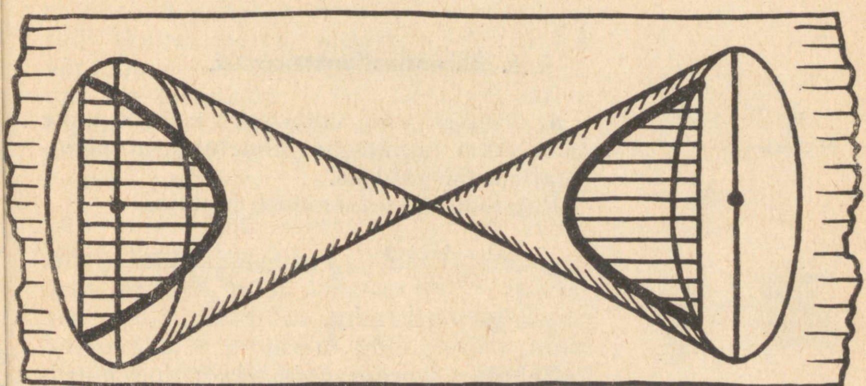
4. Kui panna hüperbool pöörlema ümber tema sümmeetriatelje,

[1] Igal hüperboolil on kaks asümptooti. Hüperboolidel, mis on murdlineaarsete funktsioonide $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ graafikuteks, on asümptoodid teineteisega risti. Teiste hüperboolide puhul moodustavad asümptoodid mingi muu nurga.

4;5



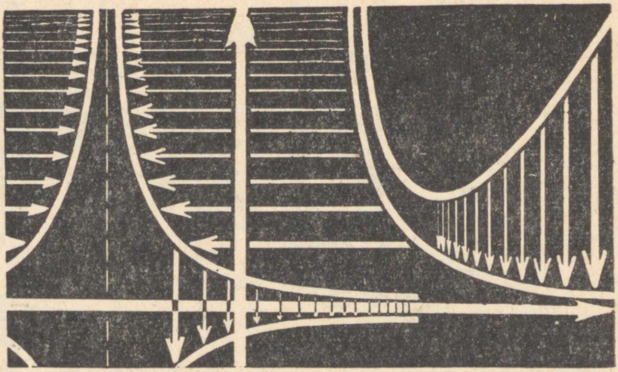
6



mis ei lõika hüperbooli harusid, siis saame pinna, mida nimetatakse üheleheliseks hüperboloidiks. Sellel pinnal on huvitav omadus: ta on «kootud» sirgjoontest. Moskva televisioonikeskuse ažuurne mast on monteeritud just selliste hüperboloidide (valmistatud sirgetest terasvarbadest) «tükkidest».

5. Kui panna hüperbool pöörlema ümber teise sümmeetriatelje, siis saame pinna, mis koosneb kahest «tükist». Seda pinda nimetatakse kaheleheliseks hüperboloidiks. Just seda kujundit pidas silmas A. Tolstoi oma romaanis «Insener Garini hüperboloid». Muide, insener Garinile vaja olnud omadus — koondada kiired paralleelsesse kimpu — on tegelikult mitte hüperboloidil, vaid paraboloidil. Nii et sellele raamatule oleks paremini sobinud pealkirjaks «Insener Garini paraboloid».

6—7. Kui sobivalt lõigata lõpmatut koonust tasandiga, siis on lõikejooneks hüperbool. Kui teil on koonusekujulise varjuga elektrilamp, võite te selles veenduda: lambi poolt valgustatud seinaosa on piiratud hüperbooli osaga.



§ 6. Ratsionaalfunktsioonid.

1. Funktsioone, mida saab esitada kahe hulkliikme jagatisena, nimetatakse ratsionaalfunktsioonideks.

Ratsionaalfunktsioonide näiteid:

$$y = \frac{x^3 - 5x + 3}{x^6 + 1}, \quad y = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2+3},$$

$$y = x^2 + 3 - \frac{1}{x-1}.$$ [1]

Eelmises paragrahvis vaadeldud murdlineaarne funktsioon $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ on ratsionaalfunktsioon. Ta kujutab endast kahe lineaarfunktsiooni (esimese astme hulkliikme) jagatist.

Kui funktsioon $y = f(x)$ kujutab endast kõrgemate kui esimese astme hulkliikmete jagatist, siis on tema graafik üldreeglina

---

[1] Ka $y = x^2 + 3 - \frac{1}{x-1}$ on ratsionaalfunktsioon, kuna teda saab kirjutada kahe hulkliikme jagatisena järgmiselt: $x^2 + 3 - \frac{1}{x-1} = \frac{(x^2+3)(x-1)-1}{x-1}$.

palju keerulisem ning teda päris täpselt, kõiki detaile arvestades, on vahel väga raske konstrueerida. Sellele vaatamata on aga sageli küllaldane kasutada võtteid, mis on analoogilised nendega, millega me oleme juba tutvunud.

2. Vaatleme mõningaid näiteid. Konstrueerime funktsiooni

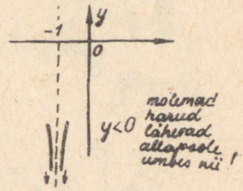
$$y = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$$

graafiku.

Pöörame kõigepealt tähelepanu sellele, et $x = -1$ puhul ei ole funktsioon määratud (kuna murru nimetaja x^2+2x+1 võrdub $x = -1$ puhul nulliga). x-ide puhul, mis on lähedased -1-le, muutub murru lugeja $x-1$ võrdseks ligikaudu -2-ga, nimetaja $(x+1)^2$ on aga nende x väärtuste puhul positiivne ja absoluutväärtuselt väike. Tähendab, murd $\frac{x-1}{(x+1)^2}$ on negatiivne ning absoluutväärtuselt suur (ja seda suurem, mida lähemal on x väärtused -1-le). Järeldus: graafik jaotub kahte harru (kuna graafikul pole punkti, mille abstsiss on võrdne -1-ga); mõlemad harud suunduvad x lähenemisel -1-le allapoole (joon. 1).

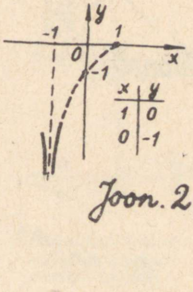
$$y = \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

Kui $x=-1$, siis nimetaja $=0$



Joon 1

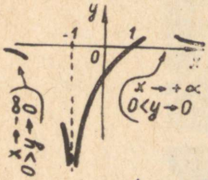
Vaatleme murru lugejat. Lugeja muutub nulliks $x = 1$ puhul. Tähendab, punktis $x = 1$ lõikab graafik abstsisstelge. Joonestades veel lõikepunkti y-teljega ($x = 0$ puhul on $y = -1$), võime endale graafiku kuju tema keskmises osas enam-vähem ette kujutada (joon. 2).



Joon. 2

Jääb ainult veel üle uurida, mis toimub funktsiooniga absoluutväärtuselt suurte x väärtuste puhul.

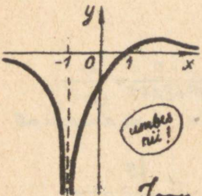
Kui x on positiivne ja kogu aeg suureneb, siis suurenevad ka murru lugeja ja nimetaja. Et aga lugejas on x esimeses astmes, nimetajas teises astmes, siis suureneb nimetaja suurte x puhul palju kiiremini kui lugeja. Seetõttu läheneb funktsioon $y = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$ x tõkestamatul suurenemisel üha enam nullile. Niisiis, graafiku parempoolne haru tõuseb punktist $x = 1$ paremal veidi abstsissteljest kõrgemale (joon. 3), seejärel aga langeb uuesti alla ning läheneb x-teljele.



Joon 3

Analoogiline mõttekäik näitab, et kõvera vasak pool läheneb x suurenemisel absoluutväärtuselt abstsissteljele, ainult et mitte ülalt-, vaid altpoolt (joon. 3). Hiljem me näitame (vt. lk. 76), kuidas saab täpselt leida selle punkti asukoha, milles graafiku parempoolne haru tõuseb kõige kõrgemale.

Tehtud analüüsi põhjal saab skitseerida funktsiooni graafiku (joon. 4).



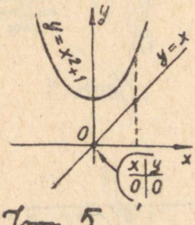
Joon 4

3. Konstrueerime funktsiooni

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

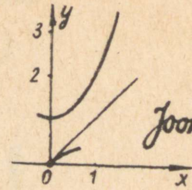
graafiku.

Joonestame kõigepealt lugeja $y = x$ ja nimetaja $y = x^2 + 1$ graafikud (joon. 5). Et konstrueerida antud funktsiooni graafikut, on tarvis lugeja väärtused jagada nimetaja vastavate väärtustega.



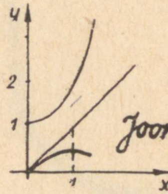
Joon. 5

$x = 0$ puhul on lugeja võrdne nulliga. Tähendab, graafik läbib koordinaatide alguspunkti. Liigume koordinaatide alguspunktist paremale (s. t. vaatleme argumendi positiivseid väärtusi). Kuna x^2 on väga väikeste x puhul palju väiksem x-st, siis nimetaja jääb alguspunktist paremale poole minnes mõneks ajaks enam-vähem võrdseks ühega (veidi suuremaks kui üks); seetõttu on kogu funktsioon enam-vähem võrdne lugejaga x (lugejast veidi väiksem). Tähendab, graafik kulgeb kõrvuti sirgega $y = x$, järk-järgult temast eemaldudes (joon. 6).



Joon. 6

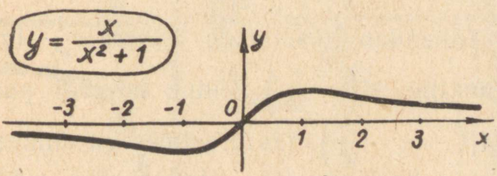
Varsti aga hakkab $x^2 + 1$ kasvama kiiremini kui x, nimetaja jõuab lugejale järele, murd hakkab vähenema ja graafik pöördub alla (joon. 7).



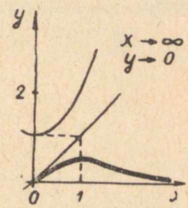
Joon. 7

Kuna lugejas on x esimeses astmes, nimetajas on aga x^2-ga liige, siis x suurte väärtuste puhul kasvab nimetaja kiiremini kui lugeja. Seetõttu muutub murd x suurenedes üha väiksemaks ning graafik läheneb abstsissteljele (joon. 8).

Graafiku vasaku poole võib saada analoogilise mõttekäigu põhjal. Graafiku üldkuju on näidatud joonisel 9.



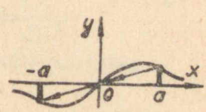
Joon. 9



Joon. 8

4. Funktsiooni $y = \frac{x}{x^2+1}$ graafiku vasaku poole võib saada tema paremast poolest, kasutades sümmeetriat, mis, tõsi küll, erineb eespool vaadeldud sümmeetriatest. Võtame graafiku paremal poolel mingi punkti M. Kui a on selle punkti abstsiss, siis tema ordinaat $b = \frac{a}{a^2+1}$ $\left(b = f(a) = \frac{a}{a^2+1}\right)$. Leiame nüüd graafiku punkti, mis vastab abstsissi vastandväärtusele $x = -a$. Selle punkti ordinaat on $\frac{-a}{(-a)^2+1}$, s. o. $-\frac{a}{a^2+1}$, s. t. $-b$. Niisiis, iga punkti $M(a, b)$ korral graafiku paremal poolel leidub punkt $M'(-a, -b)$ tema vasakul poolel. Ilmselt (vt. joon. 10) on punkt M' sümmeetriline punktiga M koordinaatide

$f(-a) = \frac{-a}{(-a)^2+1} = -f(a)$



! Peegeldus koordinaatide alguspunkti suhtes

Joon. 10

alguspunkti suhtes. Tähendab, graafiku vasaku poole võib saada paremast poolest peegelduse teel koordinaatide alguspunkti suhtes.

Harjutused.

1. Tõestage, et funktsiooni $y = \frac{1}{x^3}$ graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

Lahendus. Vaatleme kõvera $y = \frac{1}{x^3}$ kahte punkti, mille abstsissid on $x = a$ ja $x = -a$. Esimese ordinaadiks on $\frac{1}{a^3}$, teise ordinaadiks aga $\frac{1}{(-a)^3} = -\frac{1}{a^3}$.

Tähendab, vastavalt kõvera $\frac{1}{x^3}$ igale punktile $M\left(a, \frac{1}{a^3}\right)$ leidub kõveral punkt $M_1\left(-a, -\frac{1}{a^3}\right)$, mis on esimesega sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes. Järelikult on kogu kõver $y = \frac{1}{x^3}$ sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

2. Millised järgmistest funktsioonidest on paaris- ja millised paaritud funktsioonid[1]:

$$y = x^3|x|; \quad y = |x^3| + x; \quad y = \frac{x}{|x|};$$

$$y = |x - x^2|; \quad y = (2x + 1)^4 + (2x - 1)^4;$$

$$y = \frac{1}{|2x - x^2|} - \frac{1}{|2x + x^2|};$$

$$y = (x^3 + 1)^2; \quad y = (x^2 + 1)^3;$$

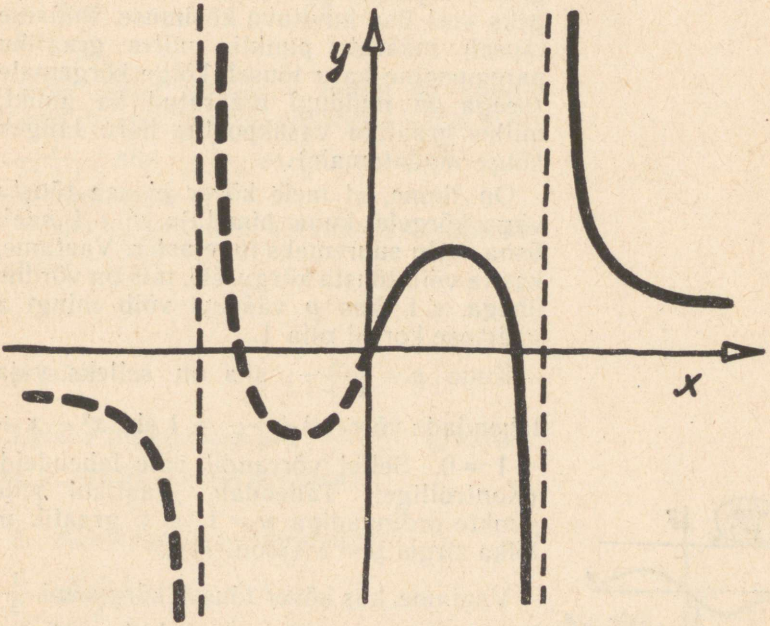
$$y = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x}}}; \quad y = (3 - x)^5 - (3 + x)^5?$$

---

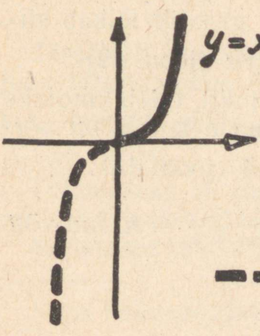
[1] Paarisfunktsiooni definitsioon on leheküljel 15, paaritu funktsiooni definitsioon aga leheküljel 75.

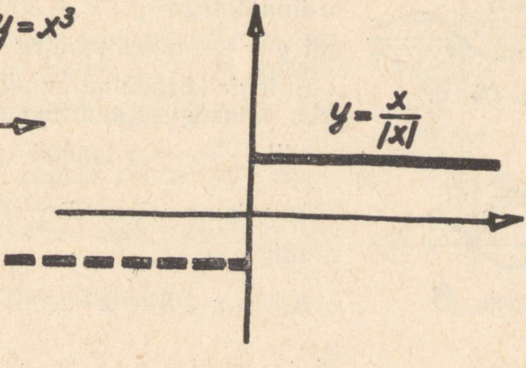
PAARITUD FUNKTSIOONID

$$f(-a) = -f(a)$$



Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse paarituks funktsiooniks, kui suvalise arvu a korral kehtib võrdus $f(-a) = -f(a)$. Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.





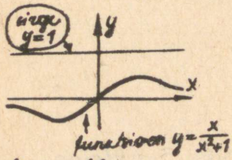
5. Pöördume veel kord tagasi funktsiooni

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

graafiku juurde ja teeme sellel näitel selgeks veel ühe huvitava küsimuse. Püüame täpselt määrata punkti, milles graafiku parempoolne haru tõuseb kõige kõrgemale (seega on muidugi määratud ka punkt, milles graafiku vasakpoolne haru langeb kõige madalamale).

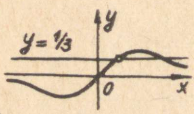
On ilmne, et meie kõver ei saa tõusta väga kõrgele, kuna nimetaja $x^2 + 1$ saab üsna ruttu suuremaks lugejast x. Vaatame, kas ta võib tõusta kõrgusele, mis on võrdne ühega, s. t. kas y väärtus võib mingi x väärtuse korral olla 1.

Kuna $y = \frac{x}{x^2+1}$, siis on selleks vaja lahendada võrrand $\frac{x}{x^2+1} = 1$ ehk $x^2 - x + 1 = 0$. Sellel võrrandil pole lahendeid. (Kontrollige!) Tähendab, graafikul pole punkte ordinaadiga $y = 1$, s. t. graafik ei lõika sirget $y = 1$ (joon. 11).



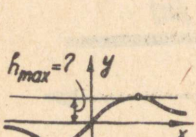
Joon. 11

Vaatame, kas kõver tõuseb kõrguseni $\frac{1}{3}$. Selleks on tarvis, et kehtiks võrdus $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$ ehk $x^2 - 3x + 1 = 0$. Sellel võrrandil on kaks lahendit (kontrollige!) ning seega meie graafikul on kaks punkti ordinaatidega $\frac{1}{3}$, s. t. graafik lõikab sirget $y = \frac{1}{3}$ kahes punktis (joon. 12).



Joon. 12

Et leida kõrgeimat punkti, tuleb kindlaks teha, missuguse suurima h korral on võrrandil $\frac{x}{x^2+1} = h$ lahend (joon. 13).



Joon. 13

Asendame võrrandi $\frac{x}{x^2+1} = h$ ruutvõrrandiga

$$hx^2 - x + h = 0.$$

Sellel võrrandil on lahend, kui

$1 - 4h^2 \geqslant 0.$

Siit saame suurima kõrguse, milleni võib graafik tõusta:

$h = \frac{1}{2}.$

Leiame nüüd, millise x puhul on funktsioonil y see suurim väärtus. Kuna $y = \frac{x}{x^2+1}$, siis $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, $x^2 - 2x + 1 = 0$,[1] millest $x = 1$.

Niisiis on graafiku kõrgeimaks punktiks punkt $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Harjutus.

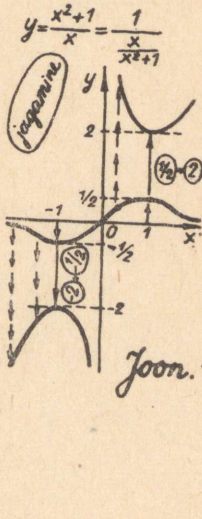
Leidke funktsiooni $y = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ graafiku (vt. punkt 2) suurim ordinaat.

6. Konstrueerime funktsiooni

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

graafiku. Selle graafiku üldkuju on lihtne joonestada, kui tähele panna, et

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{\frac{x}{x^2+1}}.$$



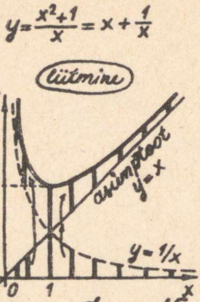
Joon. 14

Järelikult jõudsime ülesandeni, mille me juba lahendasime: teades $y = f(x)$ graafikut, konstrueerida $y = \frac{1}{f(x)}$ graafik (vt. lk. 62 ja 63).

Tulemuseks on umbes selline pilt, nagu on näha joonisel 14.

Konstrueerime nüüd selle graafiku tei-

[1] Kas täisruudu saime juhuslikult?



Joon. 15

siti. Sealjuures selgub veel üks tema huvitav iseärasus.

Jagame lugeja läbi nimetajaga:

$$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \cdot$$

Konstrueerime nüüd graafiku $y = x + \frac{1}{x}$, «liites» meile tuntud funktsioonide $y = x$ ja $y = \frac{1}{x}$ graafikud (joon. 15).

Me nägime, et graafikul $y = \frac{x^2+1}{x}$ on olemas vertikaalasümptoot — y-telg, millele graafik läheneb, kui x absoluutväärtuselt väheneb. Nüüd näeme, et sellel graafikul on veel ka kaldasümptoot — sirge $y = x$ (sellele sirgele läheneb graafik siis, kui x piiramatult suureneb).

Harjutused.

1. Kontrollige, et $y = \frac{x^2+1}{x}$ graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

2. Leidke funktsiooni

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

graafiku parempoolse haru madalaima punkti koordinaadid.

Teise harjutuse vastuse saame kergesti antud funktsiooni graafiku konstrueerimise esimesest meetodist (vt. joon. 14): $y = \frac{x^2+1}{x}$ graafiku madalaim punkt on sellel x väärtusel, mille korral on $y = \frac{x}{x^2+1}$ graafikul kõrgeim punkt, s. t. $x = 1$ puhul. Funktsiooni $y = \frac{x^2+1}{x}$ graafiku ordinaadi vähim väärtus on niisiis 2.

Me saime huvitava võrratuse: *positiivsete x väärtuste korral* (vaatlesime graafiku paremat poolt) *on alati*

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2.$$

Ülesandeid.

1. Tõestage vahetult võrratus

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2, \text{ kui } x>0. \qquad (1)$$

2. Tõestage võrratus

$$\frac{a+b}{2}\geqslant \sqrt{ab}. \qquad (2)$$

Viimase võrratuse võib sõnastada järgmiselt: «Kahe positiivse arvu a ja b aritmeetiline keskmine on kas suurem nende arvude geomeetrilisest keskmisest või sellega võrdne».

Võrratus (1) on võrratuse (2) erijuhtumiks. Missuguste a ja b puhul?

3. Võrratust $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ kasutatakse nn. «ausa kaupmehe» ülesande lahendamisel. Üks aus kaupmees teadis, et kaalud, millega ta kaupa kaalub, pole õiged, sest üks kaalukang oli pikem teisest (tol ajal kasutati veel kahe kausiga kaalusid, vt. joon. 16). Mida teha? Ostjaid kaaluga petta on patt, endale liiga teha ka ei taha. Kaupmees otsustas, et igale ostjale kaalub ta poole kaubast ühel kaalukausil, teise poole aga teisel kaalukausil.

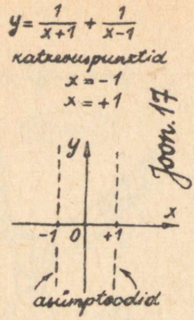
Küsitakse, missugune oli tulemus: kas kaupmees sai kasu või kahju?

Joon. 16

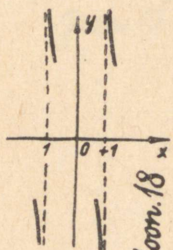
7. Järgmise näitena vaatleme funktsiooni

$$y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

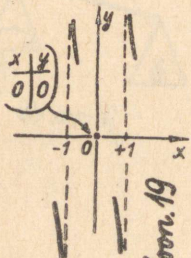
See funktsioon on juba esitatud kahe funktsiooni summana ning tema graafiku võib muidugi konstrueerida funktsioonide



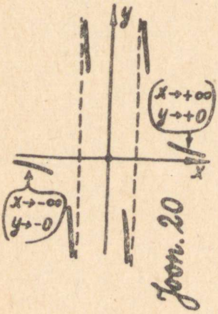
Joon. 17



Joon. 18



Joon. 19



Joon. 20

$y = \frac{1}{x+1}$ ja $y = \frac{1}{x-1}$ graafikute liitmise teel. Siin aga võib graafiku üldkuju ka kohe ette kujutada, lähtudes järgmistest kaalutlustest:

a) funktsioon pole määratud $x = 1$ ja $x = -1$ korral, tähendab, kõver jaotub kolme harru (joon. 17);

b) argumendi lähenemisel väärtusele $x = 1$ kasvab teine liidetav absoluutväärtuse poolest tõkestamatult ning seega ka kogu funktsioon. Tähendab, graafiku harud kaugenevad abstsissteljest, lähenedes sirgele $x = 1$. Sealjuures sirgest $x = 1$ paremal suundub kõver üles, vasakul aga alla (joon. 18).

Analoogiline pilt on ka sirge $x = -1$ läheduses;

c) kui $x = 0$, siis $y = 0$, tähendab, kõver läbib koordinaatide alguspunkti (joon. 19);

d) absoluutväärtuselt suurte x väärtuste korral on mõlemad liidetavad absoluutväärtuselt väikesed, tähendab, graafiku mõlemad äärmised harud lähenevad abstsissteljele: parempoolne ülalt, vasakpoolne alt (joon. 20).

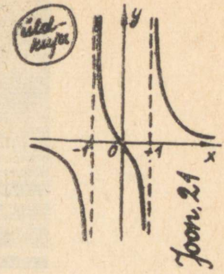
Arvestades kõiki neid andmeid, saame graafiku üldkuju (joon. 21, lk. 81).

Harjutus.

Näidake, et vaadeldud graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

8. Läbiarutatud näidetest selgub, et isegi ühe ja sama graafiku konstrueerimisel võib kasutada mitmesuguseid üksteisest erinevaid võtteid. Seetõttu esitame veel mõned ülesanded graafikute konstrueerimiseks, kusjuures te võite ise valida sobivad võtted.

Harjutused.



Joon. 21

1. Konstrueerige funktsiooni

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

graafik. Mitmest osast see graafik koosneb?

2. a) Konstrueerige funktsiooni

$$y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x}$$

graafik.

b) Konstrueerige funktsiooni

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$$

graafik. Leidke selle kõvera sümmeetriatelg.

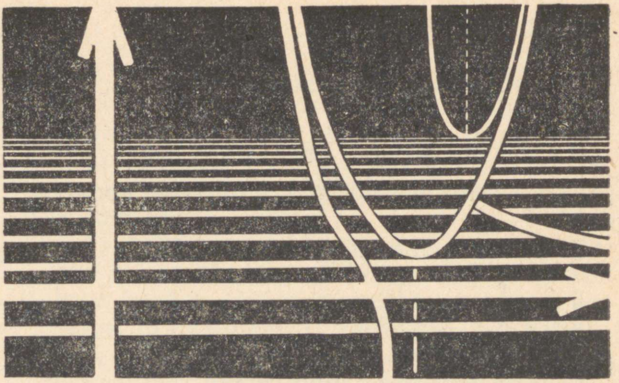
3. Konstrueerige järgmiste funktsioonide graafikud:

a) $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$;

b) $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x+1)}$.

(Nõuanne. Konstrueerige algul funktsiooni $y = (x-1)(x-2)(x+1)$ graafik (vt. § 2, p. 4). Võib muide vaadelda ka vahetult funktsiooni käitumist punktide $x = 1$, $x = 2$, $x = -1$ ümbruses ja absoluutväärtuselt suurte x väärtuste korral.)

c) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.



§ 7. Ülesandeid.

1. Konstrueerige järgmiste funktsioonide graafikud:

a) $y = x(1 - x) - 2;$

b) $y = x(1 - x)(x - 2);$

c) $y = \frac{4 - x}{x^3 - 4x};$

d) $y = \frac{2|x| - 3}{3|x| - 2};$

e) $y = \frac{1}{4x^2 - 8x - 5};$

f) $y = \frac{1}{x^3 - 5x};$

g) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x - 1};$

h) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3};$

i) $y = (2x^2 + x - 1)^2;$

j) $y = |x| + \frac{1}{1 + x^2};$

k) $y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 3};$

l) $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + x - 2}$;

m) $y = (x - 3)\,|x + 1|$;

n) $y = |x - 2| + 2|x| + |x + 2|$;

o) $y = \left[\frac{1}{x}\right]$;

p) $y = \frac{|x + 1| - x}{|x - 2| + 3}$;

q) $y = \frac{x}{[x]}$;

r) Konstrueerige $y = \frac{3x + a}{2x + 2}$ -kujuliste murdlineaarsete funktsioonide graafikud erinevate a väärtuste korral.

2. Funktsioon $y = f(x)$ on ette antud järgmise eeskirjaga:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

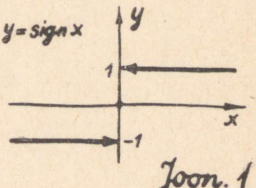
Et see funktsioon esineb sageli, siis on tema jaoks võetud kasutusele eriline tähistus

$$y = \operatorname{sign} x$$

(loetakse «signum iks»; ladina keeles *signum* — märk).

Selle funktsiooni graafik on kujutatud joonisel 1. Funktsiooni sign x võib $x \neq 0$ puhul[1] ette anda valemiga

$$y = \frac{x}{|x|}.$$



Joon. 1

Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud:

$y = \operatorname{sign}^2 x$; $y = (x - 1) \operatorname{sign} x$;

$y = x^2 \operatorname{sign} x$.

---

[1] Miks ainult $x \neq 0$ puhul?

3. Funktsiooni

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$$

(mis kujutab endast kahe ruutkolmliikme jagatist) graafiku üldkuju sõltub sellest, mitu ja millised lahendid on lugejal ja nimetajal.

a) Konstrueerige järgmiste funktsioonide graafikud:

$$y = \frac{4x^2 - 8x + 3}{x - x^2}, \qquad y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2},$$

$$y = \frac{9x^2 - 10x + 3}{x^2 - x - 6}.$$

b) Missugune kuju on funktsiooni

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$$

graafikul, kui lugeja mõlemad nullkohad on suuremad nimetaja nullkohtadest? ⊕

c) Arutage läbi $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$-kujuliste funktsioonide kõik võimalikud juhud ja joonestage nende graafikute võimalikud tüübid.

Püüdke mitte ühtegi tüüpi silmapaari vahele jätta ning tooge iga tüübi kohta näide.

4. Konstrueerige funktsiooni $y = \sqrt{3}\,x$ graafik.

a) Tõestage, et see graafik ei läbi ühtegi punkti, mille koordinaatideks on täisarvud, välja arvatud punkt (0, 0).

Kui võtate mõõtkava ühikuks ruudulise paberilehe ühe ruudu külje pikkuse, siis on sellisteks «täisarvulisteks» punktideks ruutude tipud. Võtke koordinaatide alguspunkt lehekülje vasakpoolse alumise nurga lähedale ning joonestage sirge $y = \sqrt{3}\,x$. (Missuguse nurga moodustab see sirge x-teljega?) Mõned täisarvulistest punktidest osutuvad sellele sirgele väga lähedasteks. Seda kasutades leidke $\sqrt{3}$ ligikaudsed väärtused harilike murdude kujul. Võrrelge saadud väärtusi tabeliväärtusega: $\sqrt{3} \approx \approx 1{,}7321$.

b) Keerulisem ülesanne: tõestage, et leidub täisarvuline punkt, mille kaugus sirgest $y = \sqrt{3}\,x$ on väiksem kui[1] $\frac{1}{1000}$.

Ülesannete 5—9 lahendamisel kasutage sobivalt valitud funktsioonide graafikuid.

5. Mitu lahendit on võrranditel:

a) $-x^2 + x - 1 = |x|$;

b) $|3x^2 + 12x + 9| + x = 0$;

c) $\frac{1}{x^2 - x + 1} = x$;

d) $|x - 1| + |x - 2| + |x + 1| + |x + 2| = 6$;

e) $x(x + 1)(x + 2) = 0{,}01$;

f) $|x + 3| = |x + 2|(x^2 - 1)$;

g) $[x] = x$ vahemikus $|x| < 3$;

h) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 100$?

6. Lahendage võrrandid:

a) $2x^2 - x - 1 = |x|$;

b) $|2x^2 - x - 1| - x = 0$;

c) $|x| = |x - 1| + |x - 2|$.

7. a) Tehke kindlaks, mitu lahendit võib olla võrrandil

$$||1 - |x|| = a$$

a mitmesuguste väärtuste korral.

b) Sama küsimus võrrandi[2]

---

[1] Arvu $\frac{1}{1000}$ võib asendada ka ükskõik millise teise arvuga. Seejärel tõestame, et ükskõik kui väikese arvu me ka ei võtaks, alati leidub täisarvuliste koordinaatidega punkt, mille kaugus sirgest $y = \sqrt{3}\,x$ on väiksem sellest arvust.

[2] a väärtus, mis eraldab erinevaid juhtumeid, leidke ligikaudselt graafiku järgi.

$$x^2 + \frac{1}{x} = a$$

kohta.

8. Lahendage võrratused:

a) $\frac{2-x}{x^2+6x+5} > 0$;

b) $x \leqslant |x^2 - x|$;

c) $|x| + 2|x+1| > 3$.

9. Leidke funktsiooni suurim väärtus ja tehke kindlaks, milliste x väärtuste puhul see väärtus saavutatakse:

a) $y = x(a-x)$;

b) $y = |x|(a-|x|)$;

c) $y = x^2(a-x^2)$;

d) $y = \frac{x^2+4}{x^2+x+1}$;

e) $y = 1 - \sqrt{2}\,x$ lõigul $|x| \leqslant \sqrt{2}$;

f) $y = -x^2 + 2x - 2$ lõigul $-5 \leqslant x \leqslant 0$;

g) $y = \frac{x+3}{x-1}$ poollõigul $x \geqslant 2$.

10. Kaks teed lõikuvad täisnurki. Teeristi suunas liiguvad kaks autot: üks mööda esimest teed kiirusega $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, teine mööda teist teed kiirusega $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kell 12 olid mõlemad autod teeristist 10 km kaugusel.
Millisel hetkel on autodevaheline kaugus kõige väiksem? Kus asuvad autod sel hetkel?

11. Leida kõikide ümbermõõtu p omavate täisnurksete kolmnurkade hulgast see, mille pindala on suurim.

12. Olgu $y = f(x)$ paarisfunktsioon, $y = g(x)$ aga paaritu funktsioon. Missugused järgmistest funktsioonidest on paaris- ja missugused paaritud funktsioonid:

$$y = f(x) + q(x); \qquad y = f(x) \cdot g(x);$$

$y = |g(x)|$; $y = f(x) - g(x)$;
$y = f(|x|) - g(x)$; $y = f(x) - g(|x|)$?

13. Leidke kõik paaris- ja paaritud funktsioonid:

a) $y = kx + b$;

b) $y = \frac{px + q}{x + r}$;

c) $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$.

14. Funktsioon $y = x^4 - x$ pole ei paaris- ega paaritu funktsioon. Siiski on seda funktsiooni lihtne esitada paarisfunktsiooni $y = x^4$ ja paaritu funktsiooni $y = -x$ summana.

a) Esitage funktsioon $y = \frac{1}{x^4 - x}$ paaris- ja paaritu funktsiooni summana.

b) Tõestage, et iga suvalise funktsiooni $f(x)$ võib esitada paaris- ja paaritu funktsiooni summana. ⊕

15. Iga kahte erinevate abstsissidega punkti läbib sirge — lineaarfunktsiooni $y = kx + b$ graafik. Analoogiliselt, läbi iga kolme punkti, mis ei asu ühel sirgel, saab joonestada parabooli — funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafiku.

Leidke ruutkolmliikme $ax^2 + bx + c$ kordajad, kui on teada, et tema graafik läbib punktid:

a) $(-1, 0)$; $(0, 2)$; $(1, 0)$;
b) $(1, 0)$; $(4, 0)$; $(5, 6)$;
c) $(-6, 7)$; $(-4, -1)$; $(-2, 7)$;
d) $(0, -4)$; $(1, -3)$; $(2, -1)$;
e) $(-1, 9)$; $(3, 1)$; $(6, 16)$.

16. a) Tehke parabooli $y = x^2$ sarnasusteisendus, valides sarnasuskeskpunktiks koordinaatide alguspunkti, sarnasusteguriks aga 2. Millise kõvera te saate?

b) Milline sarnasusteisendus teisendab kõvera $y = x^2$ kõveraks $y = 5x^2$?

c) Kasutades ülesande 16b tulemust, leidke parabooli $y = 4x^2$ fookus ja juhtsirge. (Fookuse ja juhtsirge definitsioonid on antud lk. 48.)

d) Tõestage, et kõik paraboolid $y = ax^2 + bx + c$ on sarnased.

17. Tõestage, et punkt $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ on parabooli $y = x^2$ fookuseks ja sirge $y = -\frac{1}{4}$ tema juhtsirgeks, s. t. et kaugused igast parabooli punktist punktini $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ja sirgeni $y = -\frac{1}{4}$ on võrdsed.

Näpunäide. Võtke paraboolil mingi punkt M koordinaatidega (a, a^2). Avaldage punktide M ja $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ vaheline kaugus vastava valemi põhjal[1]. Seejärel kirjutage välja kaugus punktist M (a, a^2) sirgeni[2] $y = -\frac{1}{4}$.

Tõestage, et saadud avaldised on võrdsed.

18. Tõestage, et punktid $F_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ja $F_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ on hüperbooli $y = \frac{1}{x}$ fookusteks, s. t. et kauguste vahe selle hüperbooli suvalisest punktist punktideni F_1 ja F_2 on absoluutväärtuselt konstantne suurus.

Näpunäide. Võtke hüperboolil $y = \frac{1}{x}$ suvaline punkt $M\left(a, \frac{1}{a}\right)$. Avaldage a kaudu punkti M ja punktide $F_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ning $F_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ vahelised kau-

---

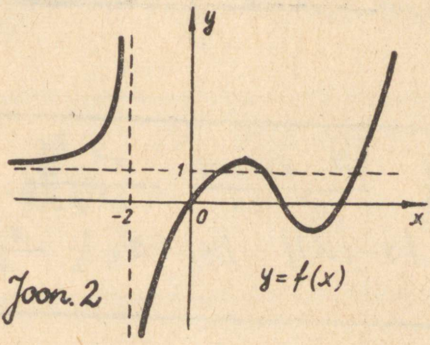
[1] Kahe punkti $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ vaheline kaugus avaldub järgmise valemiga $q(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

[2] Kaugus punktist $A(x_1, y_1)$ sirgeni $y = c$ on $|y_1 - c|$.

gused. Leidke nende kauguste vahe. Näidake, et selle vahe absoluutväärtus on ühesugune kõikide a väärtuste puhul (ning järelikult ei sõltu punkti valikust hüperboolil).

19. Lehekülgedel 90 ja 91 on esitatud 17 graafikut ja niisama palju valemeid. Teie ülesandeks on kindlaks teha, milline valem millise graafiku juurde kuulub. Nende graafikute hulgast leiate ka vastuseid harjutustele.

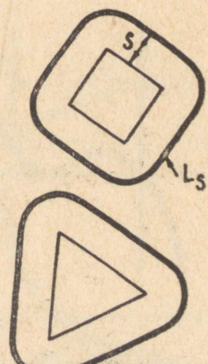
20. Joonisel 2 on kujutatud funktsiooni $y = f(x)$ graafik.



Joon. 2

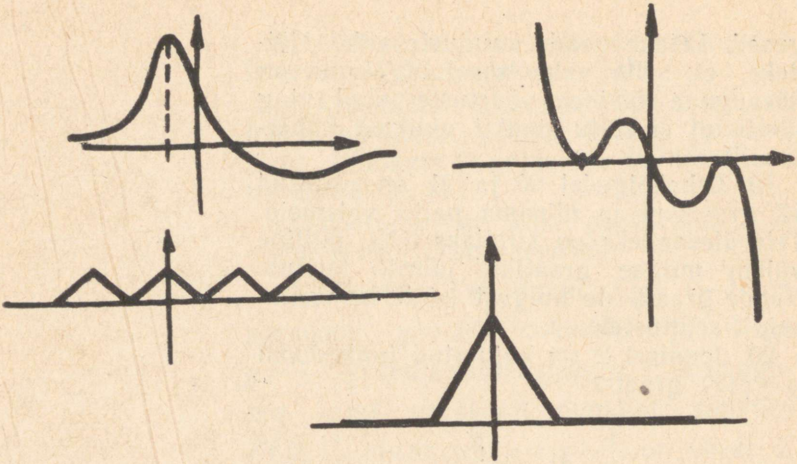
Joonestage järgmiste funktsioonide graafikute visandid:

a) $y = f(x) - 2$;
b) $y = f(x+2)$;
c) $y = |f(x)|$;
d) $y = f(|x|)$;
e) $y = -3f(x)$;
f) $y = \frac{1}{f(x)}$;
g) $y = (f(x))^2$;
h) $y = f(-x)$;
i) $y = x + f(x)$;
j) $y = \frac{f(x)}{x}$.



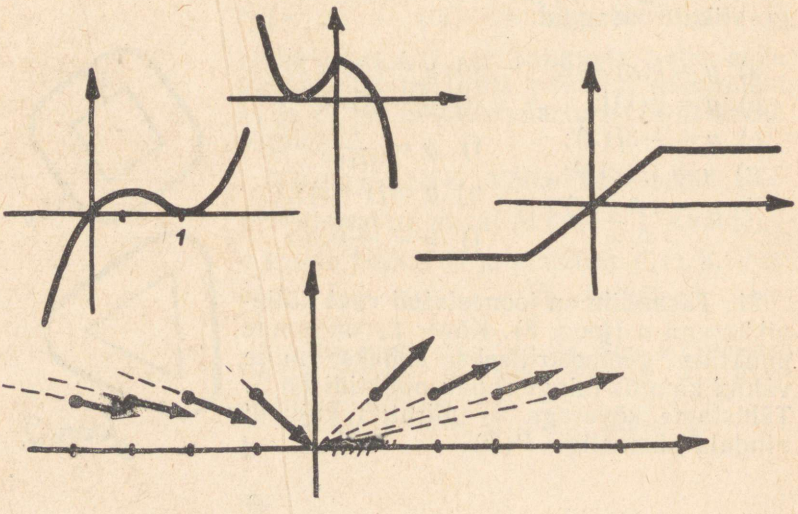
Joon. 3

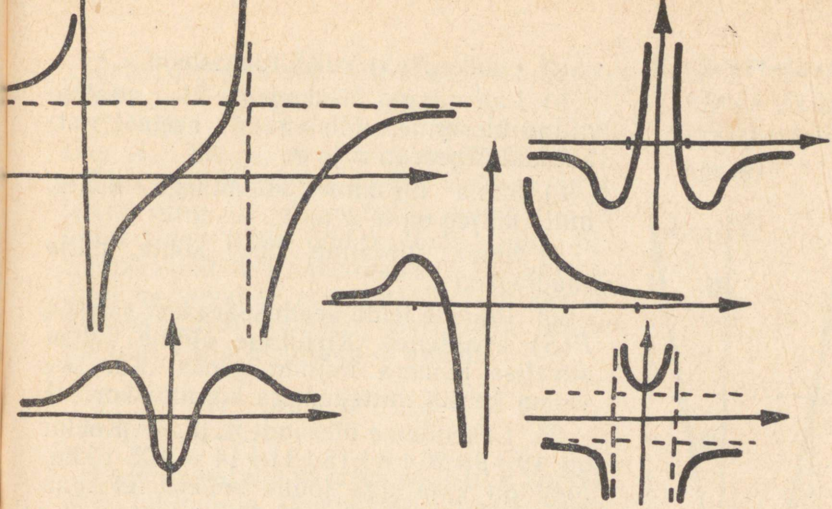
21. Tasandile on joonestatud ruut küljepikkusega a (joon. 3). Kõver L_s on nende punktide geomeetriliseks kohaks, mille vähim kaugus mingi ruudu punktini on S. Tähistame kõveraga L_s piiratud kujundi pindala sümboliga $P(S)$.



$$\left|\frac{x}{x+1}\right| \qquad \frac{2-x}{x-1} \qquad \frac{x^2+1}{1-x^2} \qquad \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x} \qquad -\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x^2+x^4}$$

$$-\frac{1-x^2}{1+x^4} \qquad \frac{3-4x}{x^2+1} \qquad |1-|x||-|x|+1 \qquad \frac{x+1}{x^3}$$

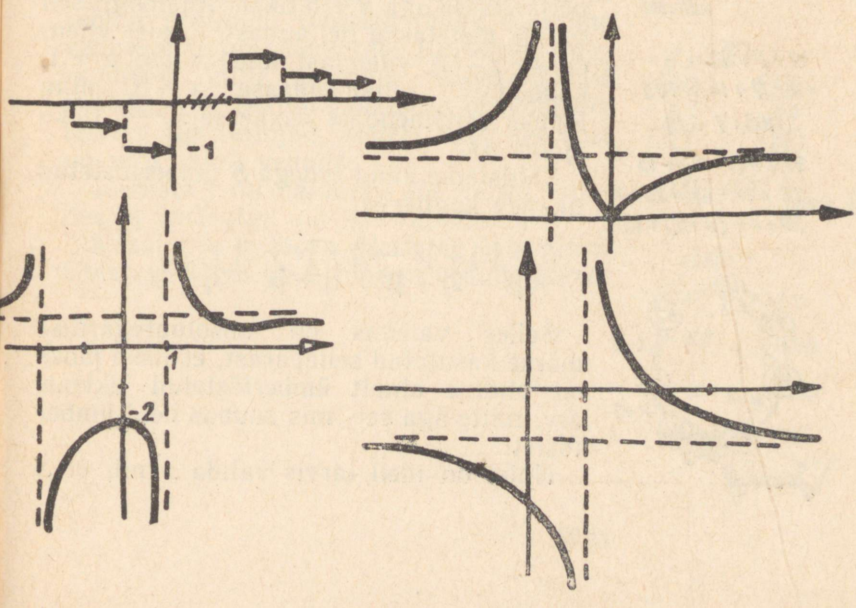




$-x^5+2x^3-x$ $\qquad |x-[x]-\frac{1}{2}| \qquad x^3-2x^2+x$

$(1+x)(1-|x|) \qquad \frac{1}{[x]} \qquad \frac{x^2-2x+4}{x^2+x-2} \qquad \frac{x}{[x]}$

$\frac{1}{2}|x+1|-\frac{1}{2}|x-1|$



a) Leidke $P(S)$ kui S funktsioon.

b) Lahendage ülesandega 21a analoogiline ülesanne, võttes ruudu asemel ristküliku külgedega a ja b.

c) Sama ülesanne kolmnurga kohta, mille küljed on a, b ja c.

d) Sama ülesanne ringi kohta, mille raadius on r.

22. Püüdke leida seaduspärasust saadud $P(S)$ avaldistes. Kirjutage üldine valem suvalise kumera kujundi jaoks. Kas see valem kehtib mittekumera kujundi korral?

23. Lahendame ülesande 4, lk. 42. Kokku on $19+9+26+8+18+11+14 = 105$ tikku. Meil on vaja aga jõuda selleni, et igas toosis oleks $105 : 7 = 15$ tikku.

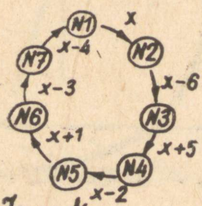
Tähistame tähega x tikkude arvu, mis on tarvis esimesest toosist tõsta ümber teise. (Võib muidugi juhtuda, et tikke tuleb ümber tõsta teisest toosist esimesse, siis on x negatiivne.) Pärast seda, kui oleme esimesest toosist teise tõstnud x tikku, on teises toosis $x + 9$ tikku.

Tähendab, teisest toosist tuleb kolmandasse ümber tõsta $x - 6$ tikku, kolmandast neljandasse aga $x + 5$ tikku. Analoogiliselt sellele tõstetakse neljandast toosist viiendasse $x - 2$, viiendast kuuendasse $x + 1$, kuuendast seitsmendasse $x - 3$ ning lõpuks seitsmendast esimesse $x - 4$ tikku (joon. 4).

$19+9+26+8+$
$+18+11+14=105$
$105:7=15$
$9+x-(x-6)=15$
$26+(x-6)=20+x$
$20+x-(x+5)=15$

Tähistame nüüd tähega S ümbertõstetud tikkude koguarvu:

$$S = |x| + |x - 6| + |x + 5| + \\ + |x - 2| + |x + 1| + |x - 3| + |x - 4|.$$



Joon. 4

Selles valemis on absoluutväärtuse märke kasutatud sellepärast, et meie jaoks on oluline ainult ümbertõstetud tikkude arv, mitte aga see, mis suunas neid ümber tõsteti.

Nüüd on meil tarvis valida x nii, et S

väärtus oleks vähim. Siin aitab meid funktsiooni $S = f(x)$ graafik (joon. 5).

Graafiku madalaimaks punktiks on tipp A_4. Seega on funktsioonil $S = f(x)$ vähim väärtus $x = 2$ korral. Sellega on x leitud ning me võime öelda, kui palju ja kuhu tuleb tikke ümber tõsta (joon. 6). Samal viisil võib lahendada ülesande muidugi ka suvalise arvu (n) tooside korral. Selleks tuleb samuti nagu meie näite puhulgi välja kirjutada S avaldis:

$$S = |x| + |x - a_1| + |x - a_2| + \ldots +$$
$$+ |x - a_{n-1}|.$$

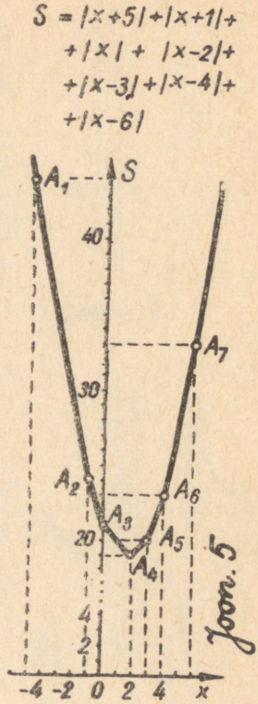
Et leida vajalik väärtus paaritu n korral, võib juhinduda järgmisest lihtsast reeglist: arvud 0, a_1, $a_2, \ldots, a_{n-1}$ tuleb välja kirjutada suurenemise järjekorras. Pärast seda võetakse x võrdseks arvuga, mis asetseb täpselt selle jada keskkohas (kui n on paaritu, siis leidub selline arv alati). Mõelge, kuidas näeks graafik välja paarisarvulise n korral.

Püüdke seejärel sõnastada reegel x leidmiseks sel juhul.

Selle mängule sarnaneva ülesandega on seotud praktilist tähtsust omav ülesanne vedudest ringmarsruutidel. Kujutlege ringraudteed, mille jaamade vahekaugused on võrdsed. Teatud jaamades on söelaod, teistes aga tarbijad, kellele kogu see süsi on vaja laiali vedada.

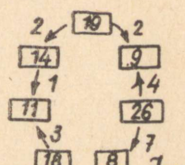
Joonisel 7 on näidatud söe varud ladudes ja (märgiga —) söe vajadused.

Kasutades eelneva ülesande lahendust, koostage kõige ökonoomsem vedude plaan.

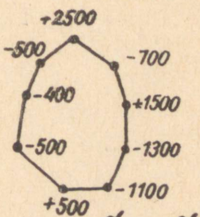


Joon. 5

Vastus



Joon. 6



Joon 7

Märgiga ⊕ tähistatud ülesannete ja harjutuste vastused ning näpunäiteid nende lahendamiseks.

Harj. 2b, lk. 22. Vastust otsige lk. 90 ja 91 esitatud graafikute hulgast.

Harj. 3b, lk. 38, graafik joon. *C*. Vastust otsige lk. 90 ja 91 esitatud graafikute hulgast.

Harj. 3, lk. 41. Näpunäide. See funktsioon saavutab oma vähima väärtuse tervel lõigul.

Ülesanne lk. 42. Lahendust vt. ülesandes 23, lk. 92.

Harj. 2b, lk. 64. Ei ole. Selle fakti range tõestus ei ole lihtne ning meie seda siin ei esita. Kuna x- ja y-telg on selle kõvera asümptootideks, siis on selge, et sümmeetriateljeks võiks olla ainult sirge $y = x$. Seda aga, et see sirge pole sümmeetriatelg, on kerge kontrollida.

Ülesanded 1h, lk. 82, ja 1q, lk. 83. Vastust otsige lk. 90 ja 91 esitatud graafikute hulgast.

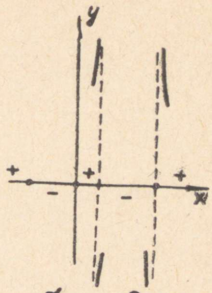
Ülesanne 3b, lk. 84.

Võtame arvulise näite. Olgu lugeja nullkohtadeks —5 ja 0, nimetaja nullkohtadeks aga +2 ja +7. Siis on meie funktsioonil kuju $y = \frac{ax\,(x+5)}{(x-2)\,(x-4)}$. Valime mingi konkreetse väärtuse a, näiteks $a = 2$. Funktsioon $y = \frac{2x\,(x+5)}{(x-2)\,(x-4)}$ pole $x = 2$ ja $x = 4$ puhul määratud. x lähenemisel nendele väärtustele nimetaja väheneb. lähenedes nullile. Järelikult kasvab funktsioon absoluutväärtuselt piiramatult. Seega on sirged $x = 2$ ja $x = 4$ graafiku vertikaalsümptootideks.

$x = 0$ ja $x = -5$ puhul on funktsioon võrdne nulliga. Märgime x-teljele graafiku punktid (0, 0) ja (—5, 0).

Argumendi neli «iseäralikku» väärtust

$x = -5, 0, 2, 4$ jagavad x-telje 5 lõiguks. Mistahes lõigu otspunkti ületamisel muudab funktsioon märki (muutudes nulliks või «minnes lõpmatusse») (joon. 8).



Joon. 8

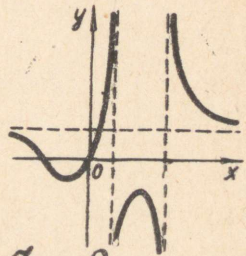
On jäänud veel selgitada, kuidas käitub funktsioon, kui argument kasvab absoluutväärtuselt piiramatult. Asendame x suurte arvudega (näiteks $x = 10\,000$, $x = 1\,000\,000$ jne.). Kuna $2x^2$ on palju suurem kui $10x$ ja x^2 palju suurem kui $-6x + 8$, siis on murd

$$\frac{2x(x+5)}{(x-2)(x-4)} = \frac{2x^2+10x}{x^2-6x+8}$$

ligikaudne võrdne lugeja ja nimetaja pealiikme suhtega

$$y = \frac{2x^2+10x}{x^2-6x+8} \approx \frac{2x^2}{x^2} = 2,$$

kusjuures seda täpsemalt, mida suurem on $|x|$. Tähendab, koordinaatide alguspunktist kaugenemisel läheneb graafik horisontaalsirgele $y = 2$.



Joon. 9

Graafiku üldkuju on esitatud joonisel 9. Kõigil juhtumeil, mil nimetaja mõlemad nullkohad on suuremad lugeja nullkohtadest, on graafik enam-vähem sellise kujuga.

Ülesanne 14, lk. 87. Nagu matemaatikas sageli juhtub, on ülesannet üldkujul kergem lahendada kui konkreetse funktsiooni korral. Seetõttu lahendame esialgu ülesande b), ülesande a) lahenduse aga saame kui erijuhu.

Niisiis, olgu antud mingi funktsioon $f(x)$. Oletame, et ülesanne on lahendatud, s. t. et $f(x)$ on esitatud paarisfunktsiooni $g(x)$ ja paaritu funktsiooni $h(x)$ summana

$$f(x) = g(x) + h(x). \qquad (*)$$

Kuna see võrdus kehtib kõikide x väärtuste korral, siis võib temas x asendada $-x$-ga ning me saame

$$f(-x) = g(-x) + h(-x). \qquad (**)$$

Kuna $g(x)$ on paarisfunktsioon, $h(x)$ aga paaritu funktsioon, siis $g(-x) = g(x)$ ja $h(-x) = -h(x)$. Seda ära kasutades liidame (x) ja (xx), seejärel aga lahutame ühe teisest. Saame

$$f(x) + f(-x) = 2g(x),$$
$$f(x) - f(-x) = 2h(x).$$

Siit leiame funktsioonid $g(x)$ ja $h(x)$ ning saame otsitava funktsiooni $f(x)$ avaldise paaris- ja paaritu funktsiooni summana:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \quad (1)$$

Pange tähele, et saadud tulemuse formaalne tõestus on veelgi lihtsam: kirjutage kohe välja avaldis (1), kontrollige, et ta kehtib samaselt kõikide x korral ning et parema poole esimene liidetav on paaris-, teine aga paaritu funktsioon.

Ülesande a) lahendus saadakse vahetult valemist (1):

$$\frac{1}{x^4 - x} = \frac{x^2}{x^6 - 1} + \frac{1}{x^7 - x}.$$

11 kop.