

12 8 22 02

**Fresnel's**

# **Interferenzerscheinungen**

theoretisch und experimentell bearbeitet.

---

Eine zur Erreichung des Grades eines

**Magisters der Mathematik**

bei der physiko-mathematischen Facultät der Kaiserlichen Universität Dorpat

verfasste Abhandlung

von

**Hermann Struve**

Cand. math.

Ordentliche Opponenten:

Prof. Dr. Minding, Prof. Dr. Helmling, Prof. Dr. Arth. v. Oettingen.

**Dorpat.**

Druck von C. Mattiesen.

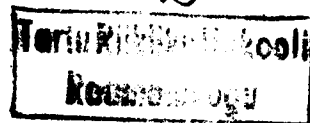
1881.

Gedruckt mit Genehmigung der physiko-mathematischen Facultät  
der K. Universität Dorpat.

Dorpat, den 8. April 1881.

Decan Dr. Arthur von Oettingen.

Nr 32.



## Einleitung.

Bis vor wenigen Jahren wurde allgemein angenommen, dass die *Fresnel'schen* Interferenzerscheinungen frei von allem Einflusse einer Beugung der Lichtstrahlen seien. Konnte dieser Satz auch nicht als streng bewiesen angesehen werden, so hielten die Physiker, gestützt auf *Fresnel's* eigene Messungen und deren Uebereinstimmung mit seiner Theorie, sich wenigstens zu der Annahme berechtigt, dass der Einfluss der Beugung ein verschwindend kleiner sei. Sie erblickten in diesem Umstande einen wesentlichen Vorzug des *Fresnel'schen* Experiments vor den Beugungserscheinungen und allen anderen Interferenzerscheinungen, bei denen die Beugung eine bedeutende Rolle spielt und unterliessen es deshalb jenes Experiment einer weiteren genauen Prüfung zu unterziehen.

Erst Ende 1878 machte Professor *H. Weber* in Zürich in der Abhandlung: „Wahre Theorie der *Fresnel'schen* Interferenzerscheinungen“ \*) darauf aufmerksam, dass die von *Fresnel* selbst gegebene und von vielen Beobachtern nach ihm als richtig anerkannte Beschreibung dieser Erscheinungen nicht vollkommen befriedigend sei und hob insbesondere hervor, dass die mit den gewöhnlichen *Fresnel'schen* Interferenzapparaten erzeugten Fransen im Gegensatz zu der *Fresnel'schen* Theorie erheblich verschiedene

\*) *Wiedemann's Ann* Bd. VIII. pg. 407.

Breiten und Helligkeiten besitzen. Ferner bemerkte er, dass die schmäleren Fransen schwächere und die breiteren stärkere Helligkeitsmaxima zeigen und dass bei Anwendung weissen Lichts die mittlere Zone der centralen Franse nie vollkommen weiss, sondern immer ein wenig gefärbt erscheint. Durch genaue theoretische Untersuchungen bewies darauf Professor *Weber*, dass die in solcher Weise sich kundgebenden Abweichungen von der *Fresnel*'schen Theorie durch den bisher vernachlässigten Einfluss der Diffraction erklärt werden können.

Es liegt daher in diesem Erkennen jener Abweichungen und ihrer Erklärung eine neue wichtige Stütze für die allgemeine Richtigkeit der Diffractionstheorie.

Es ist jedoch der von Professor *Weber* bei seiner theoretischen Untersuchung eingeschlagene Weg nicht der einfachste und sich am natürlichsten darbietende. Wie interessant nämlich auch in theoretischer Beziehung die Zurückführung der *Fresnel*'schen Integrale auf Transcendenten, die mit den *Bessel*'schen Functionen nahe verwandt sind, sein mag, praktisch bietet dieselbe nur wenig Nutzen und lässt im Gegentheil das an sich einfache Problem schwieriger erscheinen, als es thatsächlich ist.

Indem ich demgemäss mich bestrebte, die von *Weber* gefundenen interessanten Resultate auf einfacherem Wege abzuleiten, erkannte ich bald, dass der dabei in Frage kommende Intensitätsausdruck unmittelbar auf 2 Functionen führt, welche in nahem Zusammenhange mit der gewöhnlichen Form der *Fresnel*'schen Integrale stehen, sich aber vor denselben durch einige sehr bemerkenswerthe Eigenschaften auszeichnen. Auf diese Functionen, welche ich nach Professor *Kirchhoff* durch M und N bezeichnet habe, ist bereits von Herrn *Gilbert*\*) 1862 hingewiesen worden; es scheint jedoch, dass sie, ungeachtet ihrer vorzüglichen Eigen-

schaften, welche sie besonders geeignet erscheinen lassen als Normalform der *Fresnel*'schen Integrale zu dienen, bis jetzt noch sehr wenig Anwendung auf Probleme der Diffractionerscheinungen gefunden haben.

Durch Einführung der erwähnten Functionen, gelang es mir die *Weber*'schen Endformeln auf ebenso einfache Weise herzuleiten, wie das für die gewöhnlichen *Fresnel*'schen Diffractionsprobleme möglich ist. Zugleich ward ich in den Stand gesetzt, die *Weber*'sche Theorie dahin zu verallgemeinern, dass sie auch vollkommen den Erscheinungen genügt, wenn die Abstände der virtuellen Lichtpuncte von der beugenden Kante verschieden angenommen werden oder auch die Strahlen in verschiedener Phase an der beugenden Kante zusammentreffen. Es ergab sich dabei die bemerkenswerthe Folgerung, dass die Verschiedenheit der mittleren Fransen in Breite und Helligkeit sehr wesentlich durch die Phasendifferenz bedingt wird. Entspricht letztere einem ungeraden Vielfachen der halben Wellenlänge, so sind die Abstände und Helligkeiten sowohl der Minima, wie der Maxima sehr nahe einander gleich; bei einer Phasendifferenz, entsprechend einer ganzen Zahl von Wellenlängen, sind zwar auch die Abstände der Maxima und die Helligkeiten der Minima nahezu einander gleich, die Abstände der Minima dagegen und die Helligkeiten der Maxima beträchtlich von einander verschieden.

Natürlich musste es mein Wunsch sein, die Richtigkeit der theoretischen Ergebnisse durch das Experiment direct zu prüfen und zu dem Zweck möglichst genaue Messungen der Fransenbreiten unter verschiedenartiger Modification der *Fresnel*'schen Interferenzerscheinungen vorzunehmen. Zur Erfüllung dieses Wunsches bot sich eine ausnehmend günstige Gelegenheit während eines 3 monatlichen Aufenthalts in Graz, wo mir am vorzüglich ausgestatteten physikalischen Institute alle zu dem Zweck erforderlichen Hilfsmittel bereitwilligst zur Verfügung ge-

\*) Mém. cour. de l'Acad. de Brux. XXXI.

stellt wurden. Ich freue mich der mir hier gebotenen Gelegenheit, den Professoren *Boltzmann* und *v. Ettingshausen* meinen aufrichtigen Dank für ihre ebenso freundliche wie belehrende Unterstützung bei den von mir unternommenen Untersuchungen öffentlich auszusprechen.

Die nachfolgende Abhandlung habe ich in zwei Hauptabschnitte getheilt, von denen der erste die Theorie der Erscheinungen umfasst. Ausgehend von allgemeinen Formeln, auf welche die *Fresnel'schen* Interferenzerscheinungen führen, behandle ich zunächst den einfachsten Fall, wie ihn Professor *Weber* seinen Entwicklungen zu Grunde gelegt hat. Alsdann verallgemeinere ich die Formeln unter Annahme einer beliebigen Phasendifferenz für die an der beugenden Kante zusammentreffenden Strahlen und untersuche schliesslich den Einfluss, den eine Breite der beugenden Kante auf die Erscheinungen ausübt.

Dieser erste Abschnitt hätte vielleicht etwas mehr zusammengedrängt werden können, wenn ich die Aufgabe von vornherein in ihrer grössten Allgemeinheit behandelt hätte; aber für die Erläuterung der Methode erschien es mir zweckmässig, von den einfacheren zu den verwickelteren Problemen überzugehen und nicht gleich Anfangs die Formeln zu sehr zu compliciren. — In der Bezeichnungsweise bin ich von der von Professor *Weber* gebrauchten abgewichen und habe mich möglichst an diejenige gehalten, welche Professor *Kirchhoff* durch seine Vorträge über theoretische Optik in so weiten Kreisen eingebürgert hat.

Der zweite Abschnitt meiner Abhandlung enthält die Beschreibung und Zusammenstellung der mittelst eines Doppelspiegels und eines Doppelprismas in Graz angestellten Messungen, sowie die Vergleichung der Theorie mit den Ergebnissen der Beobachtung.

## Erster Abschnitt.

### § 1.

Um den Gang der späteren Entwicklungen nicht zu unterbrechen, will ich einige Sätze über die *Fresnel'schen* Integrale voranschicken, die uns im Folgenden von Nutzen sein werden.

Als Normalform der *Fresnel'schen* Integrale pflegt man meistens noch die Integrale:

$$\int_0^{\infty} \cos \left( \frac{\pi}{2} \xi^2 \right) d\xi \quad \int_0^{\infty} \sin \left( \frac{\pi}{2} \xi^2 \right) d\xi$$

anzuwenden, welche von *Fresnel* zuerst in die Analysis eingeführt und in Tafeln\*) gebracht sind. Für manche und namentlich für theoretische Untersuchungen ist jedoch diese Form durchaus nicht die geeignetste; denn es lässt sich nichts Allgemeineres über die Integrale:

$$\int_0^{\infty} \cos \left( \frac{\pi}{2} \xi^2 \right) d\xi \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \sin \left( \frac{\pi}{2} \xi^2 \right) d\xi$$

sagen, als dass sie positiv sind, für gleiche positive und negative Argumente dieselben Werthe besitzen, ferner dass sie periodisch sind und sich mit wachsendem  $\nu$  immer mehr dem Werthe  $\frac{1}{2}$  nähern. Gerade der Umstand aber, dass sie periodisch sind und sowohl für positive als für negative Argumente unendlich viele Maxima und Minima besitzen, erschwert in hohem Grade die analytische Rechnung mit diesen Functionen. Dazu kommt noch, dass die von *Fresnel* entworfenen Tafeln, welche in Intervallen von 0.1 fortschreiten,

\*) *Fresnel*, Oeuvres complètes. T. I. pg. 319.

wegen der beträchtlichen und sich rasch ändernden Differenzen, eine genaue Interpolation auf Zwischenwerthe so gut wie unmöglich machen und praktisch kaum zu verwerthen sind.

Nun machte schon *Cauchy*\*) darauf aufmerksam, dass die Integrale:  $\int_0^\infty \cos \xi^2 d\xi$  und  $\int_0^\infty \sin \xi^2 d\xi$  für positive  $\nu$  in der Form:

$$1) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \cos \xi^2 d\xi &= M \cdot \cos \nu^2 - N \cdot \sin \nu^2 \\ \int_0^\infty \sin \xi^2 d\xi &= M \cdot \sin \nu^2 + N \cdot \cos \nu^2 \end{aligned}$$

dargestellt werden könnten, wo  $M$  und  $N$  die semiconvergenten Reihen:

$$2) \quad \begin{aligned} M &= \frac{1}{4\nu^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4^2 \cdot \nu^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4^3 \cdot \nu^{11}} - \dots \\ N &= \frac{1}{2\nu} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot \nu^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4^2 \cdot \nu^9} - \dots \end{aligned}$$

bedeuten. Es liegt daher die Vermuthung nahe, dass nicht sowohl die Functionen  $\int_0^\infty \cos \xi^2 d\xi$  und  $\int_0^\infty \sin \xi^2 d\xi$  als vielmehr die den Reihen  $M$  und  $N$  unmittelbar zu Grunde liegenden Functionen gewisse allgemeine Eigenschaften besitzen, welche mit Vortheil verwerthet werden können. Bezeichnen wir diese Functionen, deren Werthe für positive  $\nu$  stets zwischen der Summe der  $n$  und  $n+1$  ersten Glieder der Reihen  $M$  resp.  $N$  liegen sollen, allgemein mit  $M(\nu)$  und  $N(\nu)$ , so erhalten wir aus 1) unmittelbar:

$$3) \quad \begin{aligned} M(\nu) &= \int_0^\infty \cos (\xi^2 - \nu^2) d\xi \\ N(\nu) &= \int_0^\infty \sin (\xi^2 - \nu^2) d\xi \end{aligned}$$

Aber in dieser Gestalt treten die ausgezeichneten Eigenschaften dieser Functionen noch nicht sofort zu Tage und

um sie sichtbar zu machen, ist eine kleine Transformation erforderlich.

Substituiren wir zu dem Zweck, unter der Einschränkung, dass  $\nu$  positiv ist,  $z = \xi^2 - \nu^2$  so erhalten wir:

$$\begin{aligned} M(\nu) &= \int_0^\infty \frac{\cos z}{2\sqrt{z+\nu^2}} \cdot dz \\ N(\nu) &= \int_0^\infty \frac{\sin z}{2\sqrt{z+\nu^2}} \cdot dz \end{aligned}$$

Einer bekannten Formel zufolge kann man aber setzen:

$$\frac{1}{2\sqrt{z+\nu^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2(\nu^2+z)} \cdot dx$$

und hat dann:

$$\begin{aligned} M(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\nu^2 x^2} dx \int_0^\infty e^{-zx^2} \cdot \cos z dz \\ N(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\nu^2 x^2} dx \int_0^\infty e^{-zx^2} \cdot \sin z dz \end{aligned}$$

oder wegen:

$$\int_0^\infty e^{-zx^2} \cos z dz = \frac{x^2}{1+x^4} \quad \int_0^\infty e^{-zx^2} \sin z dz = \frac{1}{1+x^4}$$

$$4) \quad \begin{aligned} M(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2 \cdot e^{-\nu^2 x^2}}{1+x^4} dx \\ N(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\nu^2 x^2}}{1+x^4} dx \end{aligned}$$

Wie aus der Herleitung folgt, verliert diese Transformation ihre Gültigkeit für negative  $\nu$ .

Die blosse Ansicht dieser Integrale führt uns nun zu folgenden wichtigen Sätzen:

1) Für positive Argumente  $\nu$  haben  $M(\nu)$  und  $N(\nu)$  stets positive Werthe; für  $\nu = 0$  wird  $M(\nu) = N(\nu) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ , für  $\nu = \infty$   $M(\nu) = N(\nu) = 0$

2) Mit wachsendem  $\nu$  nehmen  $M(\nu)$  und  $N(\nu)$  stetig ab, können also für positive Argumente keine relativen Maxima und Minima besitzen.

\*) *Cauchy*, Comptes Rendus. T. XV.

Daran reihen sich noch die folgenden Eigenschaften:  
Wegen:

$$\frac{dM(v)}{dv} = -1 + 2v \cdot N(v) \quad \frac{dN(v)}{dv} = -2v \cdot M(v)$$

nimmt  $M(v)$  mit wachsendem  $v$  Anfangs sehr viel rascher ab als  $N(v)$ . Es ist ferner stets:

$$M(v) < \int_0^x x^2 \cdot e^{-v^2 x^2} dx = \frac{1}{4v^3}$$

$$N(v) < \int_0^x e^{-v^2 x^2} dx = \frac{1}{2v}$$

und mit wachsendem  $v$  nähern sich  $M(v)$  und  $N(v)$  sehr rasch diesen Grenzwerten; in Folge dessen ist auch für grosse  $v$   $M(v)$  sehr viel kleiner als  $N(v)$ .

Setzt man in 4)  $\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - \dots$

und berücksichtigt, dass

$$\int_0^x x^{4n} e^{-v^2 x^2} dx = \frac{V\pi}{2} \cdot \frac{(4n)!}{4^{2n} (2n)! v^{4n+1}}$$

ist, so gelangt man unmittelbar zu den *Cauchy'schen* Reihen 2). —

Für negative Argumente hat man ferner:

$$\begin{aligned} M(-v) &= \int_{-v}^x \cos(\xi^2 - v^2) d\xi = \int_{-x}'' \cos(\xi^2 - v^2) d\xi \\ &= \int_{-x}^x \cos(\xi^2 - v^2) d\xi - M(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(-v) &= \int_{-v}^x \sin(\xi^2 - v^2) d\xi = \int_{-x}'' \sin(\xi^2 - v^2) d\xi \\ &= \int_{-x}^x \sin(\xi^2 - v^2) d\xi - N(v) \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} 5) \quad M(-v) &= V\pi \cdot \sin(v^2 + \frac{\pi}{4}) - M(v) \\ N(-v) &= V\pi \cdot \cos(v^2 + \frac{\pi}{4}) - N(v) \end{aligned}$$

und daraus folgt, dass die Functionen  $M$  und  $N$  für negative Argumente periodisch sind und für unendlich viele Werthe verschwinden können. Indem  $M(v)$  und  $N(v)$  sich mit wachsendem  $v$  der 0 nähern, nähern sich  $M(-v)$  und  $N(-v)$  immer mehr den Werthen

$$V\pi \sin(v^2 + \frac{\pi}{4}) \quad \text{resp.} \quad V\pi \cos(v^2 + \frac{\pi}{4}).$$

Aus diesen Gründen erscheint es zweckmässig, alle *Fresnel'schen* Integrale auf die Functionen  $M(v)$  und  $N(v)$  zurückzuführen und diese Functionen für positive Argumente in Tafeln zu bringen.

Zur Berechnung von  $M(v)$  und  $N(v)$  kann man sich der *Cauchy'schen* Reihen 2) sehr bequem bedienen, wenn  $v$  einen beträchtlichen Werth hat und wir werden es im Folgenden meistens mit so grossen Werthen zu thun haben, dass wir schon mit hinreichender Annäherung  $M(v) = 0$   $N(v) = \frac{1}{2v}$  setzen können. In den Fällen dagegen, wo  $v$  klein ist, verlieren die *Cauchy'schen* Reihen ihre Anwendbarkeit. Alsdann kann man  $M(v)$  und  $N(v)$  in Reihen entwickeln, die für jeden Werth von  $v$  convergiren. Zu denselben gelangt man leicht auf folgende Weise:

Es ist:

$$M(v) = \int_v^x \cos(\xi^2 - v^2) d\xi = \frac{V\pi}{2} \sin(v^2 + \frac{\pi}{4}) - P(v)$$

$$N(v) = \int_v^x \sin(\xi^2 - v^2) d\xi = \frac{V\pi}{2} \cos(v^2 + \frac{\pi}{4}) + Q(v)$$

wo:

$$P(v) = \int_0'' \cos(v^2 - \xi^2) d\xi = \int_0'' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (v^2 - \xi^2)^{2n} \cdot d\xi$$

$$Q(v) = \int_0'' \sin(v^2 - \xi^2) d\xi = \int_0'' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (v^2 - \xi^2)^{2n+1} \cdot d\xi$$

Setzt man hierin:  $\xi = v \cdot \sin \varphi$ , so wird:

$$P(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{v^{4n+1}}{v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi^{4n+1} \cdot d\varphi$$

$$Q(\nu) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \nu^{4n+3}}{(2n+1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi^{4n+3} \cdot d\varphi$$

und folglich, wegen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi^{4n+1} \cdot d\varphi = \frac{4n}{4n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi^{4n-1} \cdot d\varphi = \frac{2^{2n} \cdot (2n)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n+1)}$$

$$P(\nu) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n+1)} \cdot \nu^{4n+1}$$

6)

$$Q(\nu) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n+3)} \cdot \nu^{4n+3}$$

Man überzeugt sich sofort, dass diese Reihen für jeden Werth von  $\nu$  convergiren; für  $\nu < 1$  convergiren sie sogar sehr rasch; für grössere Werthe werden sie jedoch un-  
bequem, weil die Convergenz nicht gleich bei den ersten Gliedern eintritt. Um zum Beispiel für  $\nu = 2$  die Functionswerthe auf 4 Decimalen genau zu erhalten, sind 9 Glieder der Reihe mitzunehmen und für  $\nu = 3$  schon 16 Glieder.

Da es mir nicht bekannt ist, dass für die *Fresnel*-schen Integrale ausser der von *Fresnel* selbst entworfenen Tafel noch andere bequemere existiren, so erlaube ich mir hier eine solche für die Functionen  $M(\nu)$  und  $N(\nu)$  mitzutheilen, von deren weitaus grösseren Bequemlichkeit man sich leicht überzeugen kann.

Die Tafel liefert die Werthe von  $M$  und  $N$  für die Argumente  $\nu = 0$  bis  $\nu = 6$  in Intervallen von 0.1 auf 1—2 Einheiten der 5<sup>ten</sup> Decimale genau; sie auf noch grössere Argumente auszudehnen, hielt ich nicht für nöthig, da für solche schon bis auf 4 Stellen  $M(\nu) = \frac{1}{4\nu^3}$   $N(\nu) = \frac{1}{2\nu}$  wird und ausserdem in den seltensten Fällen noch grössere Argumente in der Anwendung vorkommen werden.

Die Berechnung wurde von  $\nu = 0$  bis  $\nu = 3$  mittelst der Reihen  $P(\nu)$  und  $Q(\nu)$  ausgeführt und weiterhin mit Hülfe der *Cauchy*'schen Reihen. Eine Vergleichung mit der von *Fresnel* für die Integrale

$$\int_0^{\nu} \cos \left( \frac{\pi}{2} \xi^2 \right) d\xi \quad \int_0^{\nu} \sin \left( \frac{\pi}{2} \xi^2 \right) d\xi$$

berechneten Tafel ergibt, dass die *Fresnel*'schen Werthe bis  $\nu = 2.0$  ungefähr, als exact angesehen werden können, weiterhin aber, auf 2 bis 4 Einheiten der 4<sup>ten</sup> Stelle unsicher werden.

Tafel für  $M(\nu)$  und  $N(\nu)$ . I.

$\nu$	$M(\nu)$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\nu$	$N(\nu)$	$\Delta_1$	$\Delta_2$
0.0	0.62666			0.0	0.62666		
0.1	0.53292	— 9374		0.1	0.62103	— 563	
0.2	0.45130	— 8162	+ 1212	0.2	0.60643	— 1460	— 891
0.3	0.38109	— 7021	+ 1141	0.3	0.58578	— 2065	— 605
0.4	0.32122	— 5987	+ 1034	0.4	0.56136	— 2442	— 377
0.5	0.27051	— 5071	+ 916	0.5	0.53488	— 2648	— 206
0.6	0.22781	— 4270	+ 801	0.6	0.50761	— 2727	— 79
0.7	0.19198	— 3583	+ 687	0.7	0.48045	— 2716	+ 11
0.8	0.16201	— 2997	+ 586	0.8	0.45402	— 2643	+ 73
0.9	0.13698	— 2503	+ 494	0.9	0.42871	— 2531	+ 112
1.0	0.11610	— 2088	+ 415	1.0	0.40476	— 2395	+ 136
1.1	0.09868	— 1742	+ 346	1.1	0.38229	— 2247	+ 148
1.2	0.08413	— 1455	+ 287	1.2	0.36135	— 2094	+ 153
1.3	0.07197	— 1216	+ 239	1.3	0.34190	— 1945	+ 149
1.4	0.06179	— 1018	+ 198	1.4	0.32390	— 1800	+ 145
1.5	0.05325	— 854	+ 164	1.5	0.30727	— 1663	+ 137
1.6	0.04607	— 718	+ 136	1.6	0.29192	— 1535	+ 128
1.7	0.04001	— 606	+ 112	1.7	0.27775	— 1417	+ 118
		— 513	+ 93			— 1308	+ 109

$\nu$	$M(\nu)$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\nu$	$N(\nu)$	$\Delta_1$	$\Delta_2$
1.8	0.03488	— 435	+ 78	1.8	0.26467	— 1207	+ 101
1.9	0.03053	— 371	+ 64	1.9	0.25260	— 1115	+ 92
2.0	0.02682	— 317	+ 54	2.0	0.24145	— 1032	+ 83
2.1	0.02365	— 272	+ 45	2.1	0.23113	— 957	+ 75
2.2	0.02093	— 233	+ 39	2.2	0.22156	— 889	+ 68
2.3	0.01860	— 202	+ 31	2.3	0.21267	— 825	+ 64
2.4	0.01658	— 176	+ 26	2.4	0.20442	— 767	+ 58
2.5	0.01482	— 153	+ 23	2.5	0.19675	— 716	+ 53
2.6	0.01329	— 132	+ 21	2.6	0.18959	— 669	+ 47
2.7	0.01197	— 116	+ 16	2.7	0.18290	— 627	+ 42
2.8	0.01081	— 102	+ 14	2.8	0.17663	— 587	+ 40
2.9	0.00979	— 90	+ 12	2.9	0.17076	— 551	+ 36
3.0	0.00889	— 79	+ 11	3.0	0.16525	— 517	+ 34

Tafel für  $M(\nu)$  und  $N(\nu)$ . II.

$\nu$	$M(\nu)$	$\Delta_1$	$\nu$	$N(\nu)$	$\Delta_1$	$\Delta_2$
3.0	0.00889	— 79	3.0	0.16525	— 517	+ 34
3.1	0.00810	— 71	3.1	0.16008	— 487	+ 30
3.2	0.00739	— 63	3.2	0.15521	— 459	+ 28
3.3	0.00676	— 56	3.3	0.15062	— 434	+ 25
3.4	0.00620	— 50	3.4	0.14628	— 410	+ 24
3.5	0.00570	— 45	3.5	0.14218	— 388	+ 22
3.6	0.00525	— 40	3.6	0.13830	— 367	+ 19
3.7	0.00485	— 37	3.7	0.13463	— 350	+ 17

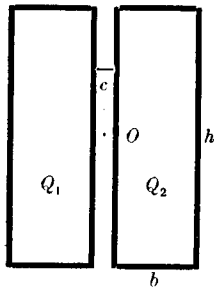
$\nu$	$M(\nu)$	$\Delta_1$	$\nu$	$N(\nu)$	$\Delta_1$	$\Delta_2$
3.8	0.00448	— 34	3.8	0.13113	— 333	+ 17
3.9	0.00414	— 30	3.9	0.12780	— 316	+ 17
4.0	0.00384	— 27	4.0	0.12464	— 300	+ 16
4.1	0.00357	— 24	4.1	0.12164	— 286	+ 14
4.2	0.00333	— 22	4.2	0.11878	— 274	+ 12
4.3	0.00311	— 20	4.3	0.11604	— 262	+ 12
4.4	0.00291	— 19	4.4	0.11342	— 250	+ 12
4.5	0.00272	— 17	4.5	0.11092	— 240	+ 10
4.6	0.00255	— 16	4.6	0.10852	— 230	+ 10
4.7	0.00239	— 15	4.7	0.10622	— 220	+ 10
4.8	0.00224	— 13	4.8	0.10402	— 211	+ 9
4.9	0.00211	— 12	4.9	0.10191	— 203	+ 8
5.0	0.00199	— 11	5.0	0.09988	— 195	+ 8
5.1	0.00188	— 11	5.1	0.09793	— 188	+ 7
5.2	0.00177	— 10	5.2	0.09605	— 180	+ 8
5.3	0.00167	— 9	5.3	0.09425	— 174	+ 6
5.4	0.00158	— 9	5.4	0.09251	— 167	+ 7
5.5	0.00149	— 8	5.5	0.09084	— 162	+ 5
5.6	0.00141	— 7	5.6	0.08922	— 156	+ 6
5.7	0.00134	— 6	5.7	0.08766	— 151	+ 5
5.8	0.00128	— 6	5.8	0.08615	— 146	+ 5
5.9	0.00122	— 6	5.9	0.08469	— 141	+ 5
6.0	0.00116	— 6	6.0	0.08328	— 136	+ 4



## § 2.

Die exacte theoretische Behandlung der *Fresnel'schen* Interferenzphänomene führt auf ein Problem der Diffractionstheorie, das ich an die Spitze der folgenden Untersuchungen stellen will. Dadurch werden wir zu allgemeinen Formeln gelangen, aus welchen sich die besonderen Fälle, die bei *Fresnel'schen* Interferenzerscheinungen stattfinden können, leicht ableiten lassen.

Fig 1.



Denken wir uns einen sich in's Unendliche erstreckenden ebenen Schirm; in demselben seien (Fig 1) 2 gleiche rechteckige Öffnungen  $Q_1$   $Q_2$  angebracht, die neben einander liegen, die Höhe  $h$  und die Breite  $b$  besitzen und durch einen kleinen Zwischenraum von einander getrennt sind, den wir die beugende Kante nennen wollen; ihr Mittelpunkt

sei  $O$  und ihre Breite  $c$ .

Es seien ferner 2 leuchtende Punkte  $L_1$   $L_2$  vorhanden, die gleichartige Schwingungen, aber von verschiedener Phase ausführen, deren Schwingungen also durch

$$\omega_1 = \sin(\vartheta_1 - t \cdot \frac{2\pi}{T}) \text{ resp. } \omega_2 = \sin(\vartheta_2 - t \cdot \frac{2\pi}{T})$$

dargestellt sein mögen. Durch einen zwischengeschobenen zweiten Schirm möge bewirkt sein, dass die von  $L_1$  kommenden Strahlen nur die Öffnung  $Q_1$ , die von  $L_2$  kommenden nur die Öffnung  $Q_2$  passieren können. Das Problem besteht dann darin: Die Intensität in irgend einem Punkte  $P$  hinter dem Schirm zu bestimmen und den Ort der Lichtmaxima und Minima in irgend einer Ebene anzugeben.

Ueber die Lage von  $L_1$  und  $L_2$  wollen wir nur die einschränkende Voraussetzung machen, dass die Geraden  $OL_1$  und  $OL_2$  sehr kleine Winkel mit der Normale des

Schirms einschliessen; unbeschadet der Allgemeinheit können wir dann ferner annehmen, dass auch die Gerade  $OP$  einen sehr kleinen Winkel mit der Normale bildet und dass die Abstände der Punkte  $P$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  von  $O$  sehr gross im Vergleich zu den Dimensionen der Öffnungen sind. Da nämlich der Einfluss der Beugung um so kleiner ist, je weiter die directen Strahlen von der beugenden Kante vorbeigehen, so würde die Aufgabe sich nur vereinfachen, wenn man andere Lagen für den Punkt  $P$  oder grössere Dimensionen für die Öffnungen annehmen wollte.

Das hier gestellte Problem ist offenbar eine sehr nahe liegende Verallgemeinerung der bekannten Aufgabe aus der Theorie der *Fresnel'schen* Beugungserscheinungen: die Intensität in einem Punkte  $P$  zu bestimmen, wenn die von einem Punkte  $L$  ausgehenden Lichtstrahlen durch eine rechteckige Öffnung gebeugt werden. Damit ist uns auch der Weg angezeigt, den wir zur Lösung unserer Aufgabe einzuschlagen haben.

Wir wollen den Mittelpunkt der beugenden Kante  $O$  zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems wählen; die Normale des Schirms in  $O$  möge die  $Z$ -Axe sein, positiv nach der Seite von  $P$  hin gerechnet; die  $X$ -Axe sei senkrecht zu der beugenden Kante und die  $Y$ -Axe parallel derselben.

Sind dann  $r_0$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  die Abstände eines Elements der Öffnung  $dx \cdot dy$  von  $P$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ;  $\lambda$  und  $T$  Wellenlänge und Schwingungsdauer des Lichts, so können wir dem *Huyghens'schen* Princip zufolge, die von  $L_1$  nach  $P$  gesandte Bewegung durch:

$$\omega_1 = K_1 \cdot \int_{Q_1} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (r_0 + r_1) + \vartheta_1 - \frac{t}{T} 2\pi \right\} \cdot dx \cdot dy$$

ausdrücken und analog die von  $L_2$  nach  $P$  gesandte Bewegung durch:

$\omega_2 = K_2 \cdot \int_{Q_2} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (r_0 + r_2) + \vartheta_2 - \frac{t}{T} 2\pi \right\} \cdot dx dy$   
 wo das erste Integral über alle Elemente von  $Q_1$ , das zweite über alle Elemente von  $Q_2$  zu erstrecken ist und wo  $K_1$  und  $K_2$  zwei von den Entfernungen  $OP$ ,  $OL_1$  resp.  $OP$ ,  $OL_2$  abhängige Grössen bedeuten.

Führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\left. \begin{aligned} C_i &= K_i \cdot \int_{Q_i} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} (r_0 + r_i) + \vartheta_i \right) \cdot dx dy \\ S_i &= K_i \cdot \int_{Q_i} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} (r_0 + r_i) + \vartheta_i \right) \cdot dx dy \end{aligned} \right\} i = 1, 2$$

so erhalten wir als resultierende Bewegung von  $P$ :

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 = (C_1 + C_2) \cdot \cos \left( \frac{t}{T} 2\pi \right) + (S_1 + S_2) \cdot \sin \left( \frac{t}{T} 2\pi \right)$$

und demnach für die Intensität von  $P$  den Ausdruck:

$$J = (C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2$$

Hierdurch ist das Problem auf die Ermittlung der Integrale  $S_i$  und  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) zurückgeführt.

Es seien:

$x_0, y_0, z_0$   $x_i, y_i, z_i$  die Coordinaten der Punkte  $P, L_i$   
 $\rho_0$   $\rho_i$  die Entfernungen der Punkte  $P, L_i$  von  $O$   
 $x, y$  die Coordinaten eines Elements  $dx dy$  der Oeffnung,

dann ist:

$$\begin{aligned} r_0^2 &= (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2 & \rho_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ r_i^2 &= (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z_i^2 & \rho_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \end{aligned}$$

und mithin:

$$\begin{aligned} r_0^2 &= \rho_0^2 - 2(xx_0 + yy_0) + x^2 + y^2 \\ r_i^2 &= \rho_i^2 - 2(xx_i + yy_i) + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Der gemachten Annahme gemäss sollen  $x, y, x_0, y_0, x_i, y_i$  sehr kleine Grössen im Vergleich zu  $\rho_0, \rho_i$  sein. Nehmen

wir noch präziser an, dass  $\frac{x^2}{\rho_i^2}, \frac{y^2}{\rho_i^2}$  etc. verschwindend klein gegen die Wellenlänge  $\lambda$  sind, so können wir schreiben:

$$\begin{aligned} r_0 &= \rho_0 - \frac{(xx_0 + yy_0) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{\rho_0} \\ r_i &= \rho_i - \frac{(xx_i + yy_i) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{\rho_i} \end{aligned}$$

und haben dann:

$$\begin{aligned} r_0 - r_i &= \rho_0 - \rho_i - x \left( \frac{x_0}{\rho_0} + \frac{x_i}{\rho_i} \right) - y \left( \frac{y_0}{\rho_0} + \frac{y_i}{\rho_i} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_i} \right) \end{aligned}$$

welcher Ausdruck in die Integrale  $C_i, S_i$  einzusetzen ist.

Durch geeignete Substitution lassen sich die in  $x$  und  $y$  multiplicirten Glieder fortschaffen. Setzen wir deshalb zur Abkürzung:

$$m_i = \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_i} \right)$$

$$u_i = \sqrt{m_i} \cdot \frac{x_0 \rho_i + x_i \rho_0}{\rho_0 + \rho_i} \quad v_i = \sqrt{m_i} \cdot \frac{y_0 \rho_i + y_i \rho_0}{\rho_0 + \rho_i}$$

und führen für  $x$  und  $y$  die neuen Veränderlichen:

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sqrt{m_i} \cdot x - u_i \\ \eta_i &= \sqrt{m_i} \cdot y - v_i \end{aligned}$$

ein, so erhalten wir:

$$\frac{2\pi}{\lambda} (r_0 + r_i) = \frac{2\pi}{\lambda} (\rho_0 + \rho_i) + (\xi_i^2 - u_i^2) + (\eta_i^2 - v_i^2)$$

und demnach:

$$1) \left\{ \begin{aligned} J &= (C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2 \\ C_i &= \frac{K_i}{m_i} \iint \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (\rho_0 + \rho_i) + \vartheta_i + (\xi_i^2 - u_i^2) + (\eta_i^2 - v_i^2) \right\} d\xi_i d\eta_i \\ S_i &= \frac{K_i}{m_i} \iint \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (\rho_0 + \rho_i) + \vartheta_i + (\xi_i^2 - u_i^2) + (\eta_i^2 - v_i^2) \right\} d\xi_i d\eta_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2$$

wo die Integrationen zu erstrecken sind:

$$\text{für } \xi_1 \text{ von } \sqrt{m_1} \cdot \frac{c}{2} - u_1 \text{ bis } \sqrt{m_1} \cdot (b + \frac{c}{2}) - u_1$$

für  $\eta_1$  von  $-\sqrt{m_1 \cdot \frac{h}{2}} - v_1$  bis  $\sqrt{m_1 \cdot \frac{h}{2}} - v_2$   
 für  $\xi_2$  von  $-\sqrt{m_2 \cdot (b + \frac{c}{2})} - u_2$  bis  $-\sqrt{m_2 \cdot \frac{c}{2}} - u_2$   
 für  $\eta_2$  von  $-\sqrt{m_2 \cdot \frac{h}{2}} - v_2$  bis  $\sqrt{m_2 \cdot \frac{h}{2}} - v_2$

Das in allen vier Integralen innerhalb der Klammer vorkommende constante Glied  $\frac{2\pi}{\lambda} \rho_0$  kann überall fortgelassen werden, da man eine beliebige positive oder negative Constante den Klammerausdrücken hinzufügen kann, ohne dass dadurch der Werth von  $J$  sich ändert; in der That würde das Hinzufügen einer solchen Constante nur bedeuten, dass man die Phase beider Lichtpunkte um gleich viel ändert, was auf die Intensität in  $P$  keinen Einfluss haben kann.

Eine wesentlich einfachere Gestalt erhalten die obigen Ausdrücke, wenn die Grössen  $\rho_1$  und  $\rho_2$ , sowie  $y_1$  und  $y_2$  nur wenig von einander verschieden sind, womit nicht gesagt ist, dass  $\rho_1 - \rho_2$  nicht noch eine beträchtliche Grösse gegen  $\lambda$  sein kann. Dieser Fall würde eintreten, wenn die leuchtenden Punkte nahezu in einer auf der beugenden Kante senkrechten Ebene liegen und nahezu gleiche Abstände von der beugenden Kante haben. Alsdann kann man:  $K_1 = K_2 = K$   $m_1 = m_2 = m$   $v_1 = v_2 = v$  und ferner  $\eta_1 = \eta_2 = (\eta)$  setzen, weil die Integrationsgrenzen hinsichtlich  $\eta_1$  und  $\eta_2$  dieselben werden. Führt man noch die folgenden Bezeichnungen ein:

$$A = \frac{K}{m} \int_{-\sqrt{m \cdot \frac{h}{2}} - v}^{+\sqrt{m \cdot \frac{h}{2}} - v} \cos \eta^2 \cdot d\eta \quad B = \frac{K}{m} \int_{-\sqrt{m \cdot \frac{h}{2}} - v}^{+\sqrt{m \cdot \frac{h}{2}} - v} \sin \eta^2 \cdot d\eta$$

$$C' = \int \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \rho_i + \vartheta_i + \xi_i^2 - u_i^2 \right) d\xi_i$$

$$S'_i = \int \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \rho_i + \vartheta_i + \xi_i^2 - u_i^2 \right) d\xi_i$$

so wird:

$$C_i = A \cdot C'_i - B \cdot S'_i$$

$$S_i = A \cdot S'_i + B \cdot C'_i$$

und folglich:

$$J = (A^2 + B^2) \cdot ((C'_i + C'_2) + (S'_i + S'_2)^2)$$

Unter den gemachten Voraussetzungen erscheint somit  $J$  als ein Product zweier Quadratsummen, von welchen die erste unabhängig ist von  $x_0$ , die zweite unabhängig von  $y_0$ . Die Bedeutung dieser Factoren ist sonach leicht zu erkennen: der erste Factor giebt die Variation der Intensität an, welche von der Beugung an den zur beugenden Kante senkrechten Begrenzungen der Oeffnungen herrührt, während der zweite die Wirkung der Beugung an den der beugenden Kante parallelen Begrenzungen in sich schliesst. Demgemäss liesse sich die Aufgabe in zwei Theile zerlegen, die getrennt behandelt werden könnten. Die weitere Untersuchung der Beugung an den senkrechten Begrenzungen hat jedoch für uns kein Interesse, weil sie ganz dieselbe ist wie in dem Fall, wo nur ein leuchtender Punct und eine rechteckige Oeffnung vorhanden sind. Setzt man aber ausserdem noch voraus, dass  $h$  hinreichend gross ist, wie wir es im Folgenden stets thun wollen und beschränkt die Untersuchung auf solche Lagen von  $P$ , für welche  $v$  erheblich kleiner ist als  $\sqrt{m \cdot \frac{h}{2}}$ , so kann man mit grosser Annäherung  $-\infty$  und  $+\infty$  als Integrationsgrenzen von  $A$  und  $B$  annehmen und hat alsdann:

$$A = \frac{K}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \eta^2 d\eta = B = \frac{K}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \eta^2 d\eta = \frac{K}{m} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

also  $A^2 + B^2 = \text{Const.}$

In einer zum Schirm parallelen Ebene wird folglich unter diesen Umständen die Intensität nur noch mit  $x_0$  variiren und man erhält daher als Ort derjenigen Puncte, in welchen die Intensität einen bestimmten Werth besitzt,

eine Schaar gerader Linien, welche der beugenden Kante parallel sind.

Beiläufig wollen wir noch erwähnen, wie die Erscheinung sich modificirt, wenn  $y_1$  nicht gleich  $y_2$  ist, im Uebrigen aber dieselben Bedingungen wie oben existiren. Alsdann wird:

$$J = \text{Const.} \cdot ((C_1' + C_2')^2 + (S_1' + S_2')^2)$$

$$C_i' = \int \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \rho_i + \theta_i - \nu_i^2 + \xi_i^2 - u_i^2 \right) \cdot d\xi_i$$

$$S_i' = \int \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \rho_i + \theta_i - \nu_i^2 + \xi_i^2 - u_i^2 \right) \cdot d\xi_i$$

Diese Integrale unterscheiden sich von den obigen nur darin, dass in der Klammer noch das Glied  $\nu_i^2$  vorkommt, welches oben wegen  $\nu_1^2 = \nu_2^2$  fortgelassen werden konnte. In Folge dieses Gliedes muss aber die Intensität in einer zum Schirm parallelen Ebene nicht nur mit  $x_0$  sondern auch mit  $y_0$  variiren; da nun

$$\nu_1^2 - \nu_2^2 = \frac{m}{(\rho_0 + \rho)^2} (\rho_0^2 (y_1^2 - y_2^2) + 2y_0 \rho_0 \rho \cdot (y_1 - y_2))$$

ist, so werden für irgend ein  $x_0$  die Integrale  $C_i'$ ,  $S_i'$  und damit auch  $J$  denselben Werth erlangen, wenn man

$$2y_0 (y_1 - y_2) \cdot \frac{m \cdot \rho_0 \rho}{(\rho_0 + \rho)^2} \text{ um } 2\pi, \text{ also } y_0 \text{ um } \frac{\lambda \cdot (\rho_0 + \rho)}{y_1 - y_2}$$

wachsen lässt. Denkt man sich daher die Ebene parallel der  $X$ -Axe in Zonen zerlegt, welche die Breite  $\frac{\lambda \cdot (\rho_0 + \rho)}{y_1 - y_2}$  besitzen, so haben die entsprechenden Punkte dieser Zonen die nämliche Intensität.

Eine weitere Vereinfachung erlangen die Formeln 1), wenn man die Breite  $b$  der beugenden Oeffnung so gross annimmt, dass man von der Beugung an den der beugenden Kante gegenüberliegenden Begrenzungen absehen kann. Diese Annahme ist gleichbedeutend damit: die Integrationsgrenzen:

$$\sqrt{m} \cdot \left( b + \frac{c}{2} \right) - u_1 \text{ und } -\sqrt{m} \cdot \left( b + \frac{c}{2} \right) - u_2$$

durch  $+\infty$  resp.  $-\infty$  zu ersetzen und man wird, in Folge der Eigenschaft der Funktionen  $M(\nu)$  und  $N(\nu)$  mit wachsendem  $\nu$  sich rasch der 0 zu nähern, schon bei mässigen Werthen von  $b$  zu dieser Annahme berechtigt sein.

Schreiben wir noch  $-u_1$  statt  $+u_1$  und lassen den von  $x$  unabhängigen Factor fort, so erhalten wir jetzt folgende Ausdrücke zur Bestimmung der Intensität:

$$2) \begin{cases} J = (C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2 \\ C_1 = \int_{\sqrt{m \cdot \frac{c}{2} + u_1}}^{\infty} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \rho_1 + \theta_1 + \xi^2 - u_1^2 \right) d\xi & S_1 = \int_{\sqrt{m \cdot \frac{c}{2} + u_1}}^{\infty} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \rho_1 + \theta_1 + \xi^2 - u_1^2 \right) d\xi \\ C_2 = \int_{\sqrt{m \cdot \frac{c}{2} + u_2}}^{\infty} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \rho_2 + \theta_2 + \xi^2 - u_2^2 \right) d\xi & S_2 = \int_{\sqrt{m \cdot \frac{c}{2} + u_2}}^{\infty} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \rho_2 + \theta_2 + \xi^2 - u_2^2 \right) d\xi \end{cases}$$

und darin haben  $m$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  die folgenden Bedeutungen:

$$m = \frac{\pi}{\lambda} \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho} \right)$$

$$u_1 = -\sqrt{m} \cdot \frac{x_0 \rho + x_1 \rho_0}{\rho_0 + \rho} \quad u_2 = +\sqrt{m} \cdot \frac{x_0 \rho + x_2 \rho_0}{\rho_0 + \rho}$$

Statt der zwei leuchtenden Punkte  $L_1$  und  $L_2$  können wir uns auch eine beliebige Anzahl von Paaren leuchtender Punkte denken, von denen je zwei einander entsprechen, in derselben Beziehung zu einander stehen wie  $L_1$  und  $L_2$  und dieselbe gegenseitige Lage haben. Liegen diese Paare auf zwei Geraden, welche der beugenden Kante parallel sind, so haben  $x_1$  und  $x_2$  für alle Paare die nämlichen Werthe und ausserdem kann man  $m$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\frac{2\pi}{\lambda} (\rho_1 - \rho_2)$  als constant für alle Paare ansehen.

In Folge dessen wird die durch das Zusammenwirken aller dieser Punktepaare resultirende Intensität durch eine einfache Summation erhalten werden, bei welcher  $(C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2$  als Factor heraustritt

und man gelangt damit zu einem Ausdruck für  $J$ , der sich von dem obigen nur durch einen von  $x$  unabhängigen Factor unterscheidet.

Dasselbe gilt endlich für zwei leuchtende Linien, welche der beugenden Kante parallel sind und deren Punkte paarweise in derselben Beziehung zu einander stehen, wie  $L_1$  und  $L_2$ ; dabei ist es nicht erforderlich, dass jede Linie in allen Punkten dieselbe Intensität hat; nur müssen die entsprechenden Punkte gleiche Intensität besitzen.

### § 3.

Wir wollen die im vorigen § erhaltenen Resultate zunächst auf den Fall anwenden, der von Professor *Weber* behandelt worden ist und annehmen, dass die Interferenzen durch ein Doppelpisma erzeugt werden. Die Durchschnittslinie der unter nahe  $180^\circ$  sich schneidenden Prismenflächen möge die Schneide und die Normale der gegenüberliegenden Fläche die Prismennormale heißen; wir setzen voraus, dass die Prismenflächen streng mathematische Ebenen sind; die brechenden Winkel des Prismas können verschieden sein.

Lässt man von einem leuchtenden Punkte  $L$  ein sehr schmales Strahlenbündel auf ein solches Prisma fallen, so werden die gebrochenen Strahlen, rückwärts verlängert, sich in zwei Punkten  $L_1 L_2$  schneiden, welche die virtuellen Lichtpunkte genannt werden. Um deren Lage anzugeben, wollen wir uns das Strahlenbündel senkrecht zur Schneide einfallend denken und den Fusspunkt  $O$  des von  $L$  auf die Schneide gefällten Perpendikels zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems wählen, dessen  $Z$ -Axe das Perpendikel, dessen  $Y$ -Axe die Schneide und dessen  $X$ -Axe senkrecht zur Schneide ist. Sind dann  $\alpha_1 \alpha_2$  die brechenden Winkel des Prismas,  $a$  die Dicke des Prismas an der Schneide,  $\mu$  der Winkel zwischen der Prismen-

normale und der  $Z$ -Axe,  $\rho$  die Entfernung  $LO$  und endlich  $n$  der Brechungsindex des Glases, so findet man folgende Ausdrücke für die Coordinaten von  $L_1$  und  $L_2$ :

Fig. 2.



$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} x_1 &= \rho \cdot \alpha_1 \cdot \left( \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}}{\cos \mu} - 1 \right) - a \sin \mu \cdot \left( \frac{\cos \mu}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}} - 1 \right) \\ y_1 &= 0 \\ z_1 &= -\rho \cdot \left( 1 - 2\alpha_1 \tan \mu \cdot \frac{n^2 - 1}{\cos \mu \sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}} \right) + a \left( \cos \mu + \frac{\sin^2 \mu}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}} - \frac{n^2 \cos^2 \mu}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}^3} \right) \end{aligned} \right\} L_1 \\ & \left. \begin{aligned} x_2 &= -\rho \cdot \alpha_2 \cdot \left( \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}}{\cos \mu} - 1 \right) - a \sin \mu \cdot \left( \frac{\cos \mu}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}} - 1 \right) \\ y_2 &= 0 \\ z_2 &= -\rho \cdot \left( 1 + 2\alpha_2 \tan \mu \cdot \frac{n^2 - 1}{\cos \mu \sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}} \right) + a \left( \cos \mu + \frac{\sin^2 \mu}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}} - \frac{n^2 \cos^2 \mu}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}^3} \right) \end{aligned} \right\} L_2 \end{aligned}$$

und daraus:

$$\begin{aligned} 3) \quad x_1 - x_2 &= \rho \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \left( \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}}{\cos \mu} - 1 \right) \\ z_1 - z_2 &= 2\rho \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \tan \mu \cdot \frac{n^2 - 1}{\cos \mu \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \mu}} \end{aligned}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Winkel und die Dicke des Prismas so klein sind, dass bereits  $\rho \alpha_1^2, \rho \alpha_2^2, a \alpha_1, a \alpha_2$  vernachlässigt werden können und dass  $\mu$  von  $90^\circ$  erheblich verschieden ist.

Steht das Prisma nahezu senkrecht zur Richtung der Lichtstrahlen, ist also  $\mu$  sehr klein, so wird angenähert:

$$x_1 - x_2 = \rho \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot (n - 1)$$

$$z_1 = z_2 = -\rho + \frac{n-1}{n} a$$

Die Distanzen der virtuellen Lichtpunkte von  $O$ ,  $\rho_1$  und  $\rho_2$ , werden dann wegen der Kleinheit von  $x_1$  und  $x_2$  gegen  $\rho$  sehr nahe einander gleich und gleich  $\rho$ .

Um nun die Intensität eines Punctes  $P$  hinter dem Doppelprisma zu bestimmen, kann man sich das Prisma und den leuchtenden Punct ersetzt denken durch zwei leuchtende Puncte  $L_1$ ,  $L_2$ , die gleichartige Schwingungen ausführen und einen zwischen dieselben geschobenen dunkeln Schirm mit geradliniger Begrenzungskante  $O$ . Die Puncte  $L_1$ ,  $L_2$  und die Kante des Schirms müssen dieselbe Lage zu einander haben, wie die virtuellen leuchtenden Puncte und die Schneide des Prismas und die von  $L_1$  und  $L_2$  ausgehenden Schwingungen müssen mit gleicher Phase in der Kante  $O$  zusammentreffen. Diese Aufgabe ist offenbar nur ein specieller Fall des im vorigen § behandelten Problems und man kann die dort zur Bestimmung der Intensität gegebenen Ausdrücke sogleich hier anwenden, wenn man die Breite der beugenden Kante  $c = 0$  setzt und entsprechend der Phasendifferenz von  $L_1$  und  $L_2$ :

$$\theta_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} \rho_1 \quad \theta_2 = -\frac{2\pi}{\lambda} \rho_2 \text{ annimmt.}$$

Dadurch erhält man:

$$S_i = \int_{u_i}^x \cos(\xi^2 - u_i^2) d\xi = M(u_i)$$

$$S_i = \int_{u_i}^x \sin(\xi^2 - u_i^2) d\xi = N(u_i)$$

und demnach für die Intensität von  $P$ :

$$4) \quad J = (M(u_1) + M(u_2))^2 + (N(u_1) + N(u_2))^2$$

Die Lage der Helligkeitsmaxima und Minima ergibt sich ferner aus der Bedingung, dass für dieselben  $\frac{dJ}{dx_0} = 0$

sein muss. Mit Rücksicht darauf, dass  $\frac{du_1}{dx_0} = -\frac{du_2}{dx_0}$  ist, kann diese Bedingung auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{dJ}{du_1} - \frac{dJ}{du_2} = 0$$

$$\text{und da:} \quad \frac{dMu}{du} = -1 + 2u \cdot N(u)$$

$$\frac{dNu}{du} = -2u \cdot M(u)$$

so erhält man:

$$\frac{dJ}{du_1} - \frac{dJ}{du_2} = 4 (Mu_1 + Mu_2) \cdot (u_1 Nu_1 - u_2 Nu_2) - 4 (Nu_1 + Nu_2) \cdot (u_1 Mu_1 - u_2 Mu_2) \text{ und folglich zur Bestimmung der Lage der Maxima und Minima die Gleichung:}$$

$$5) \quad M(u_1) \cdot N(u_2) - M(u_2) \cdot N(u_1) = 0$$

Je nach der Lage des Punctes  $P$  haben wir jetzt verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Zunächst erkennt man, dass  $J$  constant wird, wenn  $x_0$  so gross ist, dass  $u_1$  und  $u_2$  erhebliche Werthe von entgegengesetztem Vorzeichen erlangen; denn der oben bewiesenen Eigenschaft der Funktionen  $M$  und  $N$  zufolge, ist dann sehr nahe, entweder:

$$M(u_1) = 0 \quad N(u_1) = 0 \quad M(u_2) = \sqrt{\pi} \cdot \sin(u_2^2 + \frac{\pi}{4})$$

$$N(u_2) = \sqrt{\pi} \cdot \cos(u_2^2 + \frac{\pi}{4}) \quad \text{oder:}$$

$$M(u_2) = 0 \quad N(u_2) = 0 \quad M(u_1) = \sqrt{\pi} \cdot \sin(u_1^2 + \frac{\pi}{4})$$

$$N(u_1) = \sqrt{\pi} \cdot \cos(u_1^2 + \frac{\pi}{4})$$

und daher in beiden Fällen:

$$J = \pi$$

Schreibt man  $u_1$  und  $u_2$  in der Form:

$$u_1 = -\sqrt{\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\rho_0 \rho}{\rho_0 + \rho}} \cdot \left( \frac{x_0 + x_1}{\rho_0 + \rho} \right) \quad u_2 = +\sqrt{\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\rho_0 \rho}{\rho_0 + \rho}} \cdot \left( \frac{x_0 + x_2}{\rho_0 + \rho} \right),$$

und berücksichtigt, dass  $x_1$  positiv,  $x_2$  negativ ist, so sieht man, dass  $u_1$  und  $u_2$  entgegengesetztes Vorzeichen haben, wenn entweder  $\frac{x_0}{\rho_0} + \frac{x_1}{\rho} < 0$  oder  $\frac{x_0}{\rho_0} + \frac{x_2}{\rho} > 0$  ist, wenn

also  $P$  ausserhalb des von den Ebenen  $OL_1$  und  $OL_2$  begrenzten Raumes liegt. Da ferner  $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\rho_0 \rho}{\rho_0 + \rho}}$  wegen der Kleinheit von  $\lambda$  selbst bei mässigen Entfernungen  $\rho_0$  und  $\rho$  sehr gross sein muss, so wird bei solcher Lage von  $P$  jedenfalls eine der Grössen  $u_1$  oder  $u_2$  einen beträchtlichen negativen Werth besitzen, nämlich  $u_1$ , wenn  $P$  jenseits der Ebene  $OL_2$  und  $u_2$ , wenn  $P$  jenseits  $OL_1$  liegt. Im ersteren Falle wird es daher erlaubt sein:

$$M(u_1) = \sqrt{\pi} \cdot \sin(u_1^2 + \frac{\pi}{4}) \quad N(u_1) = \sqrt{\pi} \cdot \cos(u_1^2 + \frac{\pi}{4})$$

zu setzen und damit erhält man:

$$J = \pi + 2 \sqrt{\pi} \{ M(u_2) \cdot \sin(u_1^2 + \frac{\pi}{4}) + N(u_2) \cdot \cos(u_1^2 + \frac{\pi}{4}) \} + M(u_2)^2 + N(u_2)^2$$

ferner zur Bestimmung der Lage der Maxima und Minima:

$$M(u_2) \cdot \cos(u_1^2 + \frac{\pi}{4}) - N(u_2) \cdot \sin(u_1^2 + \frac{\pi}{4}) = 0 \quad \text{oder:}$$

$$\operatorname{tng}(u_1^2 + \frac{\pi}{4}) = \frac{M(u_2)}{N(u_2)}$$

und endlich für die in den Maximis und Minimis auftretenden Helligkeiten:

$$J = \pi + \frac{2 \sqrt{\pi} \cdot N(u_2)}{\cos(u_1^2 + \frac{\pi}{4})} + M(u_2)^2 + N(u_2)^2 \\ = \pi \pm 2 \sqrt{\pi} \cdot N(u_2) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{M(u_2)}{N(u_2)}\right)^2} + M(u_2)^2 + N(u_2)^2$$

wo das obere Zeichen sich auf die Maxima, das untere auf die Minima bezieht.

Diese Gleichungen geben ein anschauliches Bild von der Lichtvertheilung jenseits der Ebene  $OL_2$ . In der Ebene  $OL_2$  selbst ist  $Mu_2 = Nu_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  und daher  $J = 5 \cdot \frac{\pi}{4} + \pi \cdot \cos u_1^2$ ; die Intensität schwankt demnach dort zwischen den Grenzen  $\frac{\pi}{4}$  und  $9 \cdot \frac{\pi}{4}$ . Je weiter man sich von  $OL_2$  entfernt, um so kleiner werden

$Mu_2$  und  $Nu_2$  und um so mehr nähert sich  $J$  dem constanten Grenzwerte  $\pi$ . Zugleich rücken die Maxima und Minima immer näher und näher an einander und da  $Mu_2$  mit wachsendem  $u_2$  sehr viel rascher abnimmt als  $Nu_2$ , so wird die Lage derselben schon in mässigen Entfernungen von  $OL_2$  durch  $u_1 = \sqrt{(n - \frac{1}{4})\pi}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  bestimmt sein. Analoges gilt für Punkte jenseits der Ebene  $OL_1$ .

Liegt andererseits  $P$  innerhalb des von den Ebenen  $OL_1$  und  $OL_2$  begrenzten Raumes, so haben  $u_1$  und  $u_2$  gleiche und zwar negative Vorzeichen. Bezeichnet man die absoluten Werthe dieser Grössen mit  $v_1$  und  $v_2$ , so hat man folglich:

$$M(u_i) = \sqrt{\pi} \cdot \sin(v_i^2 + \frac{\pi}{4}) - M(v_i)$$

$$N(u_i) = \sqrt{\pi} \cdot \cos(v_i^2 + \frac{\pi}{4}) - N(v_i)$$

und daher nach 4):

$$J = \left\{ \sqrt{\pi} \left( \sin(v_1^2 + \frac{\pi}{4}) + \sin(v_2^2 + \frac{\pi}{4}) \right) - (Mv_1 + Mv_2) \right\}^2 + \left\{ \sqrt{\pi} \left( \cos(v_1^2 + \frac{\pi}{4}) + \cos(v_2^2 + \frac{\pi}{4}) \right) - (Nv_1 + Nv_2) \right\}^2$$

oder in entwickelter Form:

$$6) \quad J = 4\pi \cdot \cos^2\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) + (Mv_1 + Mv_2)^2 + (Nv_1 + Nv_2)^2 \\ - 4\sqrt{\pi} (Mv_1 + Mv_2) \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ - 4\sqrt{\pi} (Nv_1 + Nv_2) \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

und nach 5) zur Bestimmung der Lage der Maxima und Minima:

$$7) \quad \frac{\sqrt{\pi} \sin(v_1^2 + \frac{\pi}{4}) - Mv_1}{\sqrt{\pi} \sin(v_2^2 + \frac{\pi}{4}) - Mv_2} = \frac{\sqrt{\pi} \cos(v_1^2 + \frac{\pi}{4}) - Nv_1}{\sqrt{\pi} \cos(v_2^2 + \frac{\pi}{4}) - Nv_2}$$

Im Fall nun  $P$  in der Nähe einer der Grenzebenen liegt, wird man näherungsweise wieder  $Mv_1$  oder  $Mv_2 = 0$  setzen können, wodurch die Formeln 6) und 7) sich ein

wenig vereinfachen; wir wollen uns jedoch hierbei nicht länger aufhalten und dafür den in practischer Beziehung wichtigsten Fall näher ins Auge fassen, dass  $P$  in der Nähe der Halbirungsebene des Winkels ( $L_1OL_2$ ) oder der Mittelebene des Interferenzraumes liegt. Alsdann erlangen  $v_1$  und  $v_2$  im Allgemeinen so grosse Werthe, dass umgekehrt  $Mv_1$  und  $Mv_2$  numerisch sehr klein werden.

Um dies an einem Beispiel zu zeigen, möge angenommen werden, dass die Summe der brechenden Prismenwinkel  $\alpha_1 + \alpha_2 = 30'$  beträgt und dass die Entfernung des leuchtenden Punkts von der Schneide  $\rho = 1$  Meter ist; alsdann ist die Distanz der virtuellen leuchtenden Punkte angenähert  $x_1 - x_2 = 4^{mm} 5$ . Für Punkte, die genau in der Mittelebene liegen, ist ferner:  $x_0 = -\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{\rho_0}{\rho}$  und daher  $v_1 = v_2 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\rho_0}{\rho(\rho_0 + \rho)} \cdot \frac{x_1 - x_2}{2}} = v$ . Nimmt man endlich  $\lambda$  zu  $0^{mm} 0006$  an, so erhält man folgende kleine Tabelle, welche die Werthe von  $v$ ,  $M(v)$ ,  $N(v)$  für verschiedene Distanzen des Punkts  $P$  von der Schneide angibt:

$\rho_0$ mm	$v$	$M(v)$	$N(v)$
200 — — —	2.102 — — —	0.0236 — — —	0.2309
400 — — —	2.752 — — —	0.0114 — — —	0.1796
600 — — —	3.153 — — —	0.0077 — — —	0.1574
800 — — —	3.434 — — —	0.0060 — — —	0.1449
1000 — — —	3.641 — — —	0.0051 — — —	0.1368
1500 — — —	3.988 — — —	0.0038 — — —	0.1243
2000 — — —	4.205 — — —	0.0033 — — —	0.1188
3000 — — —	4.459 — — —	0.0028 — — —	0.1118
$\infty$ — — —	5.148 — — —	0.0018 — — —	0.0971

Vergleicht man diese Werthe mit den übrigen in dem Ausdrücke für  $J$  vorkommenden Grössen, so sieht man, dass unter ähnlichen Umständen, wie den obigen, mit grosser Annäherung  $M(v) = 0$ ,  $N(v) = \frac{1}{2v}$  gesetzt werden darf. Für

Punkte, die in dem Abstände  $\xi_0$  von der Mittelebene liegen, ist ferner:

$$v_1 = \sqrt{m \cdot \frac{\frac{x_1 - x_2}{2} \rho_0 + \xi_0 \cdot \rho}{\rho_0 + \rho}} \quad v_2 = \sqrt{m \cdot \frac{\frac{x_1 - x_2}{2} \rho_0 - \xi_0 \rho}{\rho_0 + \rho}}$$

und daher  $v_1$  und  $v_2$  um  $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{\rho_0(\rho_0 + \rho)}} \cdot \xi_0$  grösser resp. kleiner als  $v$ . Daraus lässt sich in gegebenen Fällen leicht entscheiden, bei wie grossen Abständen von der Mittelebene es noch gestattet ist  $Mv_1 = Mv_2 = 0$ ,  $Nv_1 = \frac{1}{2v_1}$ ,  $Nv_2 = \frac{1}{2v_2}$  zu setzen; im Allgemeinen wird  $\xi_0$  um so grösser angenommen werden können, je grösser  $\frac{\rho_0}{\rho}$  und  $x_1 - x_2$  sind.

Der Intensitätsausdruck nimmt demnach für Punkte, die in der Nähe der Mittelebene liegen, folgende einfachere Form an:

$$8) J = 4\pi \cdot \cos^2\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) - 2 \sqrt{\pi} \left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}\right) \cdot \cos\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \cos\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}\right)^2$$

und die Lage der Maxima und Minima bestimmt sich aus der Gleichung:

$$9) \sin \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \cos \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \sin\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \cos\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Sind  $v_1$  und  $v_2$  so gross, dass bereits  $\frac{1}{v_1}$  und  $\frac{1}{v_2} = 0$  gesetzt werden können, so reducirt sich 8) auf das erste Glied:

$$J = 4\pi \cdot \cos^2\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) = 4\pi \cdot \cos^2\left(\frac{(x_1 - x_2) \cdot \pi \cdot \xi_0}{(\rho_0 + \rho) \cdot \lambda}\right)$$

Dies ist aber nichts anders als der von *Fresnel* gegebene Intensitätsausdruck, wie man ihn unmittelbar erhält, wenn man auf die Diffractionswirkung keine Rücksicht nimmt. In der That muss der Einfluss der Beugung um



so kleiner sein, je weiter die direkten Strahlen  $L_1P$  und  $L_2P$  an der beugenden Kante vorbeigehen; nun sind:

$$d_1 = \frac{\frac{x_1 - x_2}{2} \rho_0 + \xi_0 \rho}{\rho_0 + \rho} \quad d_2 = \frac{\frac{x_1 - x_2}{2} \rho_0 - \xi_0 \rho}{\rho_0 + \rho}$$

die Abstände der direkten Strahlen von der beugenden Kante und mithin  $\nu_1 = \sqrt{m} \cdot d_1$ ,  $\nu_2 = \sqrt{m} \cdot d_2$ ; je grösser also  $d_1$  und  $d_2$  sind, um so grösser sind auch  $\nu_1$  und  $\nu_2$  und folglich um so kleiner der Einfluss der Beugung.

Vernachlässigt man die jedenfalls sehr kleine Quantität  $\frac{1}{16\pi} \cdot \left( \frac{1}{\nu_1^2} - \frac{1}{\nu_2^2} \right)$ , so kann man die linke Seite der Gleichung 9), in 2 Faktoren zerlegen, welche einzeln  $= 0$  gesetzt, die Lage der Maxima und Minima bestimmen. Auf diese Weise gelangt man zu den Gleichungen:

$$10) \quad \cos \left( \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} \right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \cdot \cos \left( \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \left( \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} \right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \cdot \sin \left( \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

oder wenn man die Werthe von  $\nu_1$  und  $\nu_2$  linker Hand substituirt und zur Abkürzung die rechten Seiten mit  $A$  und  $B$  bezeichnet:

$$\cos \frac{(x_1 - x_2) \pi \cdot \xi_0}{(\rho_0 + \rho) \cdot \lambda} = A$$

$$\sin \frac{(x_1 - x_2) \pi \cdot \xi_0}{(\rho_0 + \rho) \cdot \lambda} = B$$

Da  $A$  und  $B$  der Annahme gemäss kleine Grössen sind, so werden je 2 aufeinanderfolgende Werthe von  $\xi_0$ , welche die erste Gleichung befriedigen, durch je 2 aufeinanderfolgende Werthe, die die zweite befriedigen, getrennt sein. Daraus folgt ohne Weiteres, mit Rücksicht auf 8), dass die erste dieser Gleichungen die Lage der Minima und die zweite die Lage der Maxima bestimmt. Man sieht ferner, dass in der Mittelebene stets ein Lichtmaximum liegen muss und dass die Maxima und Minima symmetrisch

um die Mittelebene gruppiert sind, indem für negative  $\xi_0$   $\nu_1$  und  $\nu_2$  einfach ihre Rollen vertauschen.

Es handelt sich jetzt darum die Wurzelwerthe obiger Gleichungen näherungsweise zu ermitteln. Setzt man zu dem Zweck in erster Annäherung  $A$  und  $B = 0$ , so erhält man die Gleichungen:

$$\cos \left( \frac{(x_1 - x_2) \pi \cdot \xi_0}{(\rho_0 + \rho) \cdot \lambda} \right) = 0, \quad \sin \left( \frac{(x_1 - x_2) \pi \cdot \xi_0}{(\rho_0 + \rho) \cdot \lambda} \right) = 0$$

welche die Lage der Maxima resp. Minima angeben würden, im Fall keine Beugung vorhanden wäre. Mit den sich hieraus ergebenden Werthen von  $\xi_0$  können  $\nu_1$  und  $\nu_2$ ,  $A$  und  $B$  berechnet und damit die genaueren Werthe von  $\xi_0$  abgeleitet werden u. s. f.

Wegen der Kleinheit der Grössen  $A$  und  $B$  und in Anbetracht dessen, dass die Gleichungen 10) überhaupt nur näherungsweise richtig sind, werden im Allgemeinen schon die zweiten Näherungswerthe als hinreichend genau angesehen werden können. Aus demselben Grunde wird es erlaubt sein,  $A$  und  $B$  durch  $\sin A$  und  $\sin B$  zu ersetzen. Bezeichnen wir demnach mit  $\xi_0^{(n)}$  die ersten, mit  $x_0^{(n)}$  die zweiten Näherungswerthe, und mit  $A_n$ ,  $B_n$  die durch die Substitution von  $\xi_0^{(n)}$  sich ergebenden Werthe von  $A$  und  $B$ , so haben wir für die Minima:

$$\xi_0^{(n)} = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\lambda(\rho_0 + \rho)}{x_1 - x_2} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$x_0^{(n)} = \xi_0^{(n)} + (-1)^n \cdot \frac{\lambda(\rho_0 + \rho)}{(x_1 - x_2) \pi} \cdot A_n$$

und für die Maxima:

$$\xi_0^{(n)} = n \cdot \frac{\lambda(\rho_0 + \rho)}{x_1 - x_2} \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

$$x_0^{(n)} = \xi_0^{(n)} + (-1)^n \cdot \frac{\lambda(\rho_0 + \rho)}{(x_1 - x_2) \pi} \cdot B_n$$

Bezeichnen wir ferner mit  $\zeta_0$  die von Professor Weber sogenannte ideale Fransenbreite, d. h. den Abstand zweier aufeinanderfolgender Minima resp. Maxima, im Fall

keine Beugung vorhanden wäre, und entsprechend mit  $f_0 f_1 f_2$  etc. die wirklichen Abstände zweier aufeinanderfolgender Minima resp. Maxima, anfangend von der Mittelfranse, so erhalten wir:

$$\varphi_0 = \frac{\lambda \cdot (\rho_0 + \rho)}{x_1 - x_2}$$

und daher für die Minima:

$$\begin{aligned} f_0 &= \varphi_0 - \frac{2A_1}{\pi} \cdot \varphi_0 && \text{(Breite der Mittelfranse)} \\ 11) \quad f_1 &= \varphi_0 + \frac{A_1 + A_2}{\pi} \cdot \varphi_0 && \text{,, ,, 1<sup>ten</sup> Seitenfranse)} \\ &\vdots && \vdots \\ f_n &= \varphi_0 - (-1)^n \cdot \frac{A_n + A_{n+1}}{\pi} \cdot \varphi_0 && \text{,, ,, n<sup>ten</sup> Seitenfranse)} \end{aligned}$$

und für die Maxima:

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_0 - \frac{B_1}{\pi} \cdot \varphi_0 \\ 12) \quad f_2 &= \varphi_0 + \frac{B_1 + B_2}{\pi} \cdot \varphi_0 \\ &\vdots \\ f_n &= \varphi_0 - (-1)^{n-1} \cdot \frac{B_{n-1} + B_n}{\pi} \cdot \varphi_0 \end{aligned}$$

Die numerischen Werthe von  $A_1 A_2 A_3 \dots B_1 B_2 B_3 \dots$  lassen sich mit Leichtigkeit aus den Formeln:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{4V\pi} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) & B_n &= \frac{1}{4V\pi} \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \cdot \sin\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ v_1 &= Vm \cdot \frac{\frac{x_1 - x_2}{2} \rho_0 + \xi_0^{(m)} \rho}{\rho_0 + \rho} & v_2 &= Vm \cdot \frac{\frac{x_1 - x_2}{2} \rho_0 - \xi_0^{(m)} \rho}{\rho_0 + \rho} \end{aligned}$$

berechnen. Für das Folgende ist aber noch die Bemerkung von Wichtigkeit, dass mittelst derselben Formeln auch mit grosser Annäherung unmittelbar die in den Ausdrücken für  $f_1, f_2$  etc. vorkommenden arithmetischen Mittel  $\frac{A_n + A_{n+1}}{2}, \frac{B_{n-1} + B_n}{2}$  gefunden werden können, wenn man

das Argument  $\xi_0^{(n)}$  durch das arithmetische Mittel  $\frac{\xi_0^{(n)} + \xi_0^{(n+1)}}{2}$  ersetzt, d. h. wenn man zur Ableitung des Abstandes zweier Minima die Abscisse des zwischenliegenden Maximums und zur Ableitung des Abstandes zweier Maxima die Abscisse des zwischenliegenden Minimums anwendet.

Aus den obigen Formeln lassen sich nunmehr folgende Schlüsse ziehen:

1) Die Abstände der Minima, die wir im Folgenden kurz Fransenbreiten nennen wollen, sind im Allgemeinen verschieden von einander und zwar oscilliren  $f_0 f_1 f_2 \dots$  um den Mittelwerth  $\varphi_0$ .

2) Da der Werth von  $\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}$  sich von einer Franse zur andern nur sehr langsam ändert, so ist die Grösse dieser Oscillationen für benachbarte Fransen nahezu dieselbe. Sie wächst mit der Entfernung der Fransen von der Mittelebene.

3) Ob  $f_n$  grösser, gleich oder kleiner ist als  $\varphi_0$ , hängt von dem Bogen  $\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}$  ab. Für zwei benachbarte mittlere Fransen ist dieser Bogen nahezu derselbe und folglich das Mittel aus deren Breiten angenähert gleich der idealen Fransenbreite  $\varphi_0$ . In der Mitte der Interferenzbilder müssen sich daher die schmalen und die breiten Fransen abwechseln.

4) Fassen wir eine bestimmte Franse für verschiedene Entfernungen  $\rho_0$  in's Auge, so sehen wir, dass ihr Breite  $f_n$  ebenfalls um  $\varphi_0$  herum oscillirt. Die Amplitude dieser Oscillationen ist proportional dem Ausdrücke:

$$\varphi_0 \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} = \frac{\rho^{\frac{3}{2}} \cdot (\lambda \rho_0 (\rho_0 + \rho))^{\frac{3}{2}}}{V\pi \cdot \left( \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \rho_0 \right)^2 - (n \cdot \varphi_0 \cdot \rho)^2 \right)}$$

sie nimmt also mit wachsendem  $\rho_0$  zu, jedoch in geringerem Masse als die Fransenbreiten; sie wächst ferner sehr rasch, wenn man den Abstand der virtuellen Lichtpunkte verkleinert und ist etwas grösser für die weni-

ger brechbaren Strahlen. Die Oscillationsphase hängt von dem Bogen:

$$\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi \left[ \frac{\left( \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \cdot \rho_0 \right)^2 + (n \varphi_0 \rho)^2}{\lambda \rho_0 \cdot (\rho_0 + \rho)} + \frac{1}{4} \right]$$

ab, der sich um so rascher mit  $\rho_0$  ändert, je kleiner  $\rho_0$  ist. Vergrössert man demnach die Entfernung  $\rho_0$ , so werden die Maxima und Minima von  $f_n$  immer langsamer auf einander folgen.

5) Die Abstände der Maxima oscilliren ebenfalls um den Mittelwerth  $\rho_0$ ; während aber bei den Abständen der Minima die Amplitude dieser Oscillationen bei allen Fransen nahezu dieselbe bleibt, ändert sie sich hier sehr rasch von einer Franse zur andern; bei den mittleren Fransen ist sie sehr klein und wächst proportional der Entfernung der Franse von der Mitte. In Folge dessen müssen die mittleren Maxima nahezu in gleichen Distanzen von einander liegen.

Hinsichtlich der Oscillation des Abstandes zweier bestimmter Maxima bei wachsendem  $\rho_0$  gilt hier im Allgemeinen dasselbe, wie bei den Abständen der Minima; nur dass die Amplitude hier noch langsamer mit wachsendem  $\rho_0$  zunimmt.

Diese Sätze lassen sich noch durch die Bestimmung der in den Maximis und Minimis auftretenden Helligkeiten vervollständigen.

Substituirt man  $\cos\left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2}\right) = A_n$  in den für  $J$  gefundenen Ausdruck, so erhält man für die Helligkeitsminima:

$$J = 4\pi A^2 - 2\sqrt{\pi} \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2} A_n \cos\left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2}\right)^2$$

oder einacher

$$J = \frac{1}{4} \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

und in derselben Weise findet man für die Helligkeit des in der  $n^{\text{ten}}$  Franse liegenden Maximums:

$$J_n = 4\pi - (-1)^n \cdot 2\sqrt{\pi} \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \cos\left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2}\right)^2$$

Daraus folgt, dass die Minima nur dann absolute Dunkelheit zeigen, wenn  $\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} = n \cdot \pi$  und dass ihre Werthe im Uebrigen zwischen 0 und  $\frac{1}{4} \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2}\right)^2$  hin und her schwanken.

Noch bedeutender sind die Schwankungen der Maxima, welche zwischen den Grenzen:

$$4\pi \left(1 - \frac{1}{4V\pi} \cdot \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2}\right)^2 \quad \text{und} \quad 4\pi \left(1 + \frac{1}{4V\pi} \cdot \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2}\right)^2$$

oscilliren. Der Betrag dieser Schwankungen nimmt zu, je weiter man sich von der Mittelebene entfernt und nimmt ab, je grösser  $\rho_0$  wird.

Schreibt man ferner  $J_n$  in der Form:

$$J_n = 4\pi \left(1 - (-1)^n \cdot (A_n + A_{n+1})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2}\right)^2$$

und vergleicht diesen Ausdruck mit dem für die Breite derselben Franse gefundenen Werthe:

$$f_n = \varphi_0 \left(1 - (-1)^n \cdot \frac{A_n + A_{n+1}}{\pi}\right)$$

so sieht man: dass die breiteren Fransen stärkere Maxima und die schmäleren schwächere Maxima besitzen müssen.

Es lässt sich deshalb erwarten, dass auch die durchschnittliche, auf die Flächeneinheit kommende Helligkeit der breiteren Fransen eine grössere ist. Dieselbe lässt sich durch das Integral:

$$I_n = \frac{1}{f_n} \int_{x_0^{(n)}}^{x_0^{(n+1)}} J \cdot d\xi_0$$

darstellen, wo  $x_0^{(n)} = \frac{2n-1}{2} \varphi_0 + (-1)^n \frac{\varphi_0}{\pi} A_n$  und unter  $J$  der Intensitätsausdruck 8) zu verstehen ist. Führt man

die Integration näherungsweise aus, indem man  $\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2}$  sowie  $\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2}$  innerhalb der Integrationsgrenzen als constant ansieht, was wenigstens für die mittelsten Fransen nahezu richtig ist, so erhält man:

$$I_n = 2\pi - (-1)^n \cdot \frac{3}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \cdot \cos\left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

und damit ist das Behauptete bewiesen.

Um sich eine Vorstellung von der Grösse der Schwankungen, um die es sich hier handelt, zu machen, mögen noch zum Schluss für einen bestimmten Fall die numerischen Beträge derselben angegeben werden. Wir wollen deshalb mit  $a$ ,  $b$  und  $c$  die grösstmöglichen Abweichungen der Breite, der maximalen und der auf die Flächeneinheit kommenden Helligkeit der Mittelfranse, von der idealen Breite und den entsprechenden idealen Helligkeiten, ausgedrückt in Procenten dieser letzteren, bezeichnen; dann ist:

$$a = \frac{100}{\pi \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{200}{\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda \frac{\rho}{\rho_0} (\rho_0 + \rho)}}{x_1 - x_2}, \quad b = \pi \cdot a, \quad c = 3 \dots$$

Für das oben gewählte Beispiel, wo  $\rho = 1^m$ ,  $x_1 - x_2 = 4^{mm} \cdot 5$ ,  $\lambda = 0^{mm} \cdot 0006$  war, erhält man somit:

für $\rho_0 =$	$a$	$b$	$c$
200 <sup>mm</sup>	8.5	26.8	25.5
400	6.5	20.5	19.5
600	5.7	17.9	17.1
800	5.2	16.4	15.6
1000	4.9	15.5	14.7
1500	4.5	14.2	13.5
2000	4.3	13.4	12.9
3000	4.0	12.7	12.0
$\infty$	3.5	11.0	10.5

Unter ähnlichen Umständen, wie die obigen, müssen folglich die Unterschiede in der Breite und Helligkeit der

mittleren Fransen, welche das Doppelte von  $a$  und  $b$  betragen können, scharf ausgeprägt erscheinen, um so mehr, als die breiteren Fransen zugleich eine grössere Helligkeit besitzen und die breiteren und schmäleren Fransen sich abwechseln.

## § 4.

Bei den obigen Entwicklungen waren wir von der Annahme ausgegangen, dass die Interferenzerscheinung durch ein Doppelprisma erzeugt wird. Dieselben lassen sich jedoch auch unmittelbar auf Interferenzen, mit einem Doppelspiegel erhalten, übertragen, wenn der Doppelspiegel so beschaffen ist, dass die zusammenstossenden Ränder der beiden Spiegel mit der mathematischen Durchschnittslinie der beiden Spiegelebenen zusammenfallen. Unter dieser Voraussetzung sind nämlich die Abstände der virtuellen Lichtpunkte von der Spiegelkante einander genau gleich, also  $\rho_1 = \rho_2$ ; ferner ist  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $c = 0$  und somit erhält man aus 2) wieder den nämlichen Ausdruck für die Intensität, wie in 4), wobei alle Grössen ihre Bedeutung beibehalten. Der einzige Unterschied liegt eigentlich nur in der Berechnung der Distanz der virtuellen Lichtpunkte, welche hier mittelst der Formel  $x_1 - x_2 = 2 \cdot \rho \cdot \alpha$  auszuführen ist, wenn  $180^\circ - \alpha$  den von den beiden Spiegelebenen eingeschlossenen Winkel bedeutet.

Die Voraussetzung, dass die zusammenstossenden Ränder der beiden Spiegel mit der mathematischen Durchschnittslinie der Spiegelebenen zusammenfallen, ist jedoch niemals in aller Strenge erfüllt; und selbst wenn es denkbar wäre, die Spiegelränder so genau zu schleifen, dass die von den Spiegeln reflectirten Lichtbündel vollkommen an einander grenzten, so würde es doch nicht möglich sein, die Stellung der Spiegel gleichzeitig derart zu berichtigen, dass nicht der eine vor dem andern in der

Kante um eine Quantität vorsteht, welche von derselben Ordnung ist, wie die Wellenlänge des Lichts. Wenn dies aber der Fall ist, so werden die von den virtuellen Lichtpunkten ausgehenden Strahlen mit einer Phasendifferenz  $\frac{2\pi}{\lambda}(\rho_1 - \rho_2)$  in der beugenden Kante zusammentreffen und daher die im vorigen § gegebenen Entwicklungen nicht mehr ohne Weiteres anwendbar sein. Ebenso bedarf es einer genaueren Untersuchung der Frage, wie die Erscheinungen sich modificiren, wenn die Spiegel durch einen kleinen Zwischenraum von einander getrennt sind, wenn also die beugende Kante eine gewisse Breite besitzt. Die Beantwortung derselben will ich jedoch auf den folgenden § verschieben und hier zunächst die Theorie für den Fall entwickeln, dass  $c = 0$ ,  $\theta_1 = \theta_2$ , und  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (\rho_1 - \rho_2)$  von 0 verschieden ist.

Die unter (2) gefundenen Integrale nehmen alsdann folgende Gestalt an:

$$C_i = \int_{u_i}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\rho_i + \xi^2 - u_i^2\right) d\xi = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\rho_i\right) M(u_i) - \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\rho_i\right) N(u_i)$$

$$S_i = \int_{u_i}^{\infty} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\rho_i + \xi^2 - u_i^2\right) d\xi = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\rho_i\right) M(u_i) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\rho_i\right) N(u_i)$$

und damit erhält man für die Intensität:

$$13) \quad J = (C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2$$

$$= M_1^2 + M_2^2 + N_1^2 + N_2^2 + 2 \sin \beta \cdot (M_1 N_2 - M_2 N_1)$$

$$+ 2 \cos \beta \cdot (M_1 M_2 + N_1 N_2)$$

oder wenn zur Abkürzung:

$$R = M_1^2 + M_2^2 + N_1^2 + N_2^2$$

$$P = M_1 N_2 - M_2 N_1 \quad Q = M_1 M_2 + N_1 N_2$$

gesetzt wird:

$$J = R + 2(P \cdot \sin \beta + Q \cdot \cos \beta)$$

Durch Differentiation erhält man ferner:

$$\frac{dR}{du_1} - \frac{dR}{du_2} = -2 \cdot (M_1 - M_2)$$

$$\frac{dP}{du_1} - \frac{dP}{du_2} = 2(u_1 + u_2) \cdot Q - (N_1 + N_2)$$

$$\frac{dQ}{du_1} - \frac{dQ}{du_2} = -2(u_1 + u_2) \cdot P + (M_1 - M_2)$$

und demnach zur Bestimmung der Lage der Maxima und Minima:

$$14) \quad \frac{1}{4} \left( \frac{dJ}{du_2} - \frac{dJ}{du_1} \right) = (u_1 + u_2) \cdot (P \cos \beta - Q \sin \beta)$$

$$+ \sin \frac{\beta}{2} \left( (M_1 - M_2) \sin \frac{\beta}{2} + (N_1 + N_2) \cos \frac{\beta}{2} \right) = 0$$

Diese Gleichungen gelten, wo auch immer der Punkt  $P$  liegen mag. Für Punkte, welche innerhalb des von den Ebenen  $OL_1$  und  $OL_2$  begrenzten Raumes und in der Nähe der Mittelebene liegen, haben aber, wie vorhin gezeigt wurde,  $u_1$  und  $u_2$  im Allgemeinen beträchtliche negative Werthe. Unter dieser Einschränkung kann man wieder

$$v_i = -u_i \quad M_i = V\pi \cdot \sin(v_i^2 + \frac{\pi}{4})$$

$$N_i = V\pi \cdot \cos(v_i^2 + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2v_i}$$

setzen und erhält alsdann:

$$R = 2\pi - V\pi \cdot \left( \frac{1}{v_1} \cos(v_1^2 + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{v_2} \cos(v_2^2 + \frac{\pi}{4}) \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1^2 v_2^2} \right)$$

$$P \sin \beta + Q \cos \beta = \pi \cdot \cos(v_1^2 - v_2^2 - \beta)$$

$$- \frac{V\pi}{2} \left( \frac{1}{v_2} \cos(v_1^2 + \frac{\pi}{4} - \beta) + \frac{1}{v_1} \cos(v_2^2 + \frac{\pi}{4} + \beta) \right) + \frac{\cos \beta}{4 v_1 v_2}$$

$$P \cos \beta - Q \sin \beta = \pi \cdot \sin(v_1^2 - v_2^2 - \beta)$$

$$- \frac{V\pi}{2} \left( \frac{1}{v_2} \sin(v_1^2 + \frac{\pi}{4} - \beta) - \frac{1}{v_1} \sin(v_2^2 + \frac{\pi}{4} + \beta) \right) - \frac{\sin \beta}{4 v_1 v_2}$$

$$(M_1 - M_2) \sin \frac{\beta}{2} + (N_1 + N_2) \cos \frac{\beta}{2}$$

$$= V\pi \left( \cos(v_1^2 + \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}) + \cos(v_2^2 + \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}) \right) - \frac{1}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}$$

wodurch 13) übergeht in:

$$J = 4\pi \cdot \cos^2 \left( \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2 - \beta}{2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \right)^2 - \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\nu_1 \nu_2} \\ - 2\sqrt{\pi} \left\{ \frac{1}{\nu_1} \cos \left( \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) + \frac{1}{\nu_2} \cos \left( \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) \right\} \times \\ \cos \left( \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2 - \beta}{2} \right)$$

und 14) in:

$$2\sqrt{\pi} \cdot \sin(\nu_1^2 - \nu_2^2 - \beta) + \frac{1}{\nu_1} \sin(\nu_1^2 + \frac{\pi}{4} + \beta) - \frac{1}{\nu_2} \sin(\nu_1^2 + \frac{\pi}{4} - \beta) \\ - \frac{4 \sin \frac{\beta}{2}}{\nu_1 + \nu_2} \cdot \cos \left( \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left( \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2 - \beta}{2} \right) = 0$$

Setzt man schliesslich zur Abkürzung:

$$\alpha = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \quad 2\gamma = \nu_1^2 - \nu_2^2 - \beta$$

so ergibt sich für die Intensität:

$$15) \quad J = 4\pi \cos^2 \gamma - 2\sqrt{\pi} \left( \frac{1}{\nu_1} \cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) + \frac{1}{\nu_2} \cos(\alpha - \frac{\beta}{2}) \right) \cos \gamma \\ + \frac{1}{4} \left( \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \right)^2 - \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\nu_1 \nu_2}$$

und nach einigen leicht auszuführenden Transformationen, als Bestimmungsgleichung der Maxima und Minima:

$$16) \quad 4\sqrt{\pi} \sin \gamma \cos \gamma - \sin \gamma \left( \frac{1}{\nu_1} \cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) + \frac{1}{\nu_2} \cos(\alpha - \frac{\beta}{2}) \right) \\ + \cos \gamma \left( \frac{1}{\nu_1} \sin(\alpha + \frac{\beta}{2}) - \frac{1}{\nu_2} \sin(\alpha - \frac{\beta}{2}) - \frac{4 \sin \frac{\beta}{2} \cos \alpha}{\nu_1 + \nu_2} \right) = 0$$

Mit Vernachlässigung von Grössen 2<sup>ter</sup> Ordnung können wir diese Gleichung mit:

$$(\cos \gamma - A)(\sin \gamma - B) = \sin \gamma \cos \gamma - A \cdot \sin \gamma - B \cos \gamma + AB = 0$$

identificiren und erhalten alsdann:

$$A = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\nu_1} \cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) + \frac{1}{\nu_2} \cos(\alpha - \frac{\beta}{2}) \right)$$

$$B = - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\nu_1} \sin(\alpha + \frac{\beta}{2}) - \frac{1}{\nu_2} \sin(\alpha - \frac{\beta}{2}) - \frac{4 \sin \frac{\beta}{2} \cos \alpha}{\nu_1 + \nu_2} \right)$$

Das hierbei vernachlässigte Glied 2<sup>ter</sup> Ordnung kann in die Form:

$$A \cdot B = \frac{1}{32\pi} \left\{ \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{\nu_1^2 \nu_2^2} \sin 2\alpha \cos \beta + \left( \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \right)^2 \cos 2\alpha \sin \beta \right. \\ \left. + \frac{4(\nu_1 - \nu_2)}{\nu_1 \nu_2 (\nu_1 + \nu_2)} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin 2\alpha \right\}$$

gebracht werden und ist jedenfalls sehr klein, da  $\nu_1$  und  $\nu_2$  nur wenig von einander verschieden sein sollen. Es liesse sich indess auch noch berücksichtigen, wenn man (16) mit:

$$(\cos \gamma - A(1 + B \sin \gamma)) \cdot (\sin \gamma - B(1 + A \cos \gamma)) = 0$$

identificirt; die in diesem Fall vernachlässigten Glieder  $AB^2$  und  $A^2B$  wären nur sehr kleine Grössen von der 3<sup>ten</sup> Ordnung.

Somit erhält man schliesslich zur Bestimmung der Lage der Maxima und Minima, die Gleichungen:

$$\cos \gamma = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\nu_1} \cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) + \frac{1}{\nu_2} \cos(\alpha - \frac{\beta}{2}) \right) \\ 17) \quad \sin \gamma = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( -\frac{1}{\nu_1} \sin(\alpha + \frac{\beta}{2}) + \frac{1}{\nu_2} \sin(\alpha - \frac{\beta}{2}) + \frac{4 \sin \frac{\beta}{2} \cos \alpha}{\nu_1 + \nu_2} \right)$$

von denen die erste die Minima und die zweite die Maxima liefert, wie unmittelbar aus 15) folgt.

Für  $\beta = 0$  oder allgemein  $\beta = 2n\pi$  müssen sich hieraus die im vorigen § gefundenen Endgleichungen ergeben und in der That erhält man:

$$\cos \left( \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} \right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{für die Minima} \\ \sin \left( \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} \right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{für die Maxima}$$

Für  $\beta = (2n + 1)\pi$  ergibt sich dagegen:

$$\sin \left( \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} \right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \right) \cdot \sin \left( \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{für die Minima} \\ 18) \quad \cos \left( \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} \right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{(\nu_1 - \nu_2)^2}{\nu_1 \nu_2 (\nu_1 + \nu_2)} \cdot \cos \left( \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{für die Maxima}$$

und damit gelangen wir mit Rücksicht auf die früheren Auseinandersetzungen und die Bedeutung von  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}(\rho_1 - \rho_2)$  zu folgenden interessanten Resultaten:

1) Die Fransenbreiten sind bedeutenden Schwankungen unterworfen, wenn die Phasendifferenz der in der beugenden Kante zusammentreffenden Lichtstrahlen 0 oder ein gerades Vielfaches von  $\pi$  beträgt; sie sind dagegen nahezu gleich und gleich der idealen Fransenbreite  $\rho_0$ , wenn diese Phasendifferenz ein ungerades Vielfaches von  $\pi$  ist.

2) Die Abstände der Maxima variiren in beiden Fällen nur sehr wenig und ihre Lage ist im ersten Fall dieselbe, wie die Lage der Minima im zweiten Fall. Im ersten Fall liegt in der Mittelebene stets ein Maximum und folglich im zweiten Fall stets ein Minimum.

3) Die Helligkeit der Maxima ist im zweiten Fall, bis auf sehr kleine Grössen 2<sup>ter</sup> Ordnung, durch die Formel:

$$J_n = 4\pi - (-1)^n 2V\pi \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right) \sin \left( \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

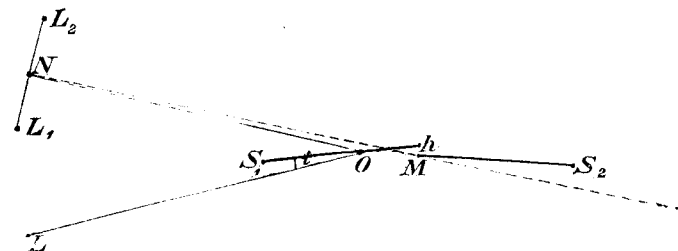
ausgedrückt und ist daher ebenfalls viel geringeren Schwankungen ausgesetzt, als im ersten Fall. Dasselbe gilt bezüglich der durchschnittlichen Helligkeiten.

Aus alledem können wir den Schluss ziehen, dass der Einfluss der Beugung bei den *Fresnel'schen* Interferenzerscheinungen sich am deutlichsten in der Ungleichheit der Fransen manifestiren muss, wenn die Phasendifferenz der in der beugenden Kante zusammentreffenden Lichtstrahlen ein gerades Vielfaches von  $\pi$  beträgt, und dass umgekehrt die *Fresnel'sche* Theorie der Wahrheit am nächsten kommt, wenn diese Phasendifferenz ein ungerades Vielfaches von  $\pi$  ist. Dieses theoretisch gewonnene Resultat wird durch die Erscheinungen vollkommen bestätigt und die unten angeführten Messungen werden den Beleg dafür liefern.

Es erübrigt noch auf den einfachen Zusammenhang hinzuweisen, welcher zwischen der Phasendifferenz  $\beta$ , dem

Einfallswinkel  $i^*$ ) der Strahlen auf den Spiegel und der Grösse  $h$  besteht, um welche der eine Spiegel gegen den andern in der gemeinschaftlichen oder beugenden Kante zurücksteht.

Fig. 3.



In Fig. 3 mögen  $S_1$   $S_2$  die beiden Spiegelebenen,  $O$  ihre mathematische Durchschnittslinie und  $M$  die beugende Kante darstellen; ferner seien  $L$   $L_1$   $L_2$  der leuchtende Punkt und seine virtuellen Bilder;  $N$  der Mittelpunkt von  $\overline{L_1 L_2}$  und mithin  $\overline{MN}$  die Mittelebene.

Bezeichnet man dann mit  $r$  und  $q$  die Abstände der beugenden Kante  $M$  von  $O$  resp. der Ebene  $\overline{ON}$ , so hat man:

$$ML_1 - ML_2 = \rho_1 - \rho_2 = \frac{(x_1 - x_2) \cdot q}{\rho} = 2\alpha \cdot q$$

$$h = r \cdot \alpha \quad q = r \cdot \sin i$$

und folglich:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}(\rho_1 - \rho_2) = \frac{4\pi}{\lambda} h \sin i$$

Ist demnach  $h > \frac{\lambda}{4}$ , so kann man durch Aenderung des Einfallswinkels, z. B. durch eine Drehung des Spiegels, es bewirken, dass die Phasendifferenz  $\beta$  alle möglichen

\*) Unter „Einfallswinkel  $i^*$ “ sei im Folgenden überall das Complement des Winkels zwischen dem einfallenden Strahl und der Spiegelnormale verstanden.

Werthe zwischen 0 und  $\pi$  erlangt und ist  $h$  erheblich grösser als  $\lambda$ , so wird schon eine kleine Aenderung von  $i$  genügen, um  $\beta$  um  $\pi$  wachsen zu lassen; ändert man  $i$  continuirlich, so wird  $\beta$  abwechselnd bald  $2n\pi$ , bald  $(2n+1)\pi$  werden und demgemäss müssen sich die Mittelfransen bald sehr verschieden in Helligkeit und Breite, bald nahezu gleich in ihrem Aussehen erweisen. — Aus den obigen Formeln erkennt man ferner die Möglichkeit, die Grössen  $h$  und  $r$ , sowie die Ordnungszahl der Mittelfranse für einen gegebenen Einfallswinkel, auf indirektem Wege abzuleiten, wofür wir weiter unten Beispiele geben werden.

Hier möge nur noch eine Aufgabe behandelt werden, welche zwar nicht in die Theorie der *Fresnel'schen* Interferenzerscheinungen im eigentlichen Sinne gehört, aber doch in nahem Zusammenhange mit den oben ausgeführten Entwicklungen steht und gewissermassen als Grenzfall dieser Erscheinungen angesehen werden kann.

Werden nämlich die Ebenen eines Doppelspiegels genau parallel gestellt, aber so, dass sie nicht genau in einer Ebene liegen, sondern dass die eine dem leuchtenden Punkt etwas näher liegt, als die andere, so werden sich im Allgemeinen auch Interferenzerscheinungen zeigen, deren Theorie aus den in diesem § gegebenen Formeln (13) und (14) unmittelbar abgeleitet werden kann.

In diesem Fall brauchen wir nur die Distanz der virtuellen Lichtpunkte gleich 0 zu setzen, wodurch:

$$-u_1 = +u_2 = v = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{\rho_0(\rho_0 + \rho)}} \cdot x_0$$

$$M(u_1) = \sqrt{\pi} \cdot \sin(v^2 + \frac{\pi}{4}) - M(v) \quad N(u_1) = \sqrt{\pi} \cos(v^2 + \frac{\pi}{4}) - N(v)$$

$$M(u_2) = M(v) \quad N(u_2) = N(v) \quad \text{wird.}$$

Damit erhält man aus (13) für die Intensität den Ausdruck:

$$J = \pi - 4 \sqrt{\pi} \sin \frac{\beta}{2} \left( M \cdot \cos(v^2 + \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}) - N \cdot \sin(v^2 + \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}) \right) + 4 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot (M^2 + N^2)$$

und zur Bestimmung des Orts der Maxima und Minima aus (14):

$$\sqrt{\pi} \cdot \cos(v^2 + \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}) = 2M \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

Die Intensität ist folglich constant, wenn  $\beta = 2n\pi$  ist, variirt aber bedeutend, wenn  $\beta = (2n+1)\pi$  ist. Verändert man demnach den Einfallswinkel durch continuirliche Drehung des Spiegels, so müssen im Gesichtsfelde abwechselnd Interferenzfransen deutlich hervortreten, schwächer werden und bei gewissen Stellungen gänzlich verschwinden.

Für  $\beta = (2n+1)\pi$  ist insbesondere:

$$J = \pi - 4 \sqrt{\pi} \left( M \cdot \sin(v^2 + \frac{\pi}{4}) + N \cos(v^2 + \frac{\pi}{4}) \right) + 4(M^2 + N^2)$$

und die Lage der Maxima und Minima durch:

$$\sqrt{\pi} \cdot \sin(v^2 + \frac{\pi}{4}) = 2M$$

bestimmt. Die Intensität oscillirt folglich innerhalb der Grenzen:

$\pi - 4 \sqrt{\pi} \cdot N + 4(N^2 - M^2)$  und  $\pi + 4 \sqrt{\pi} N + 4(N^2 - M^2)$  die sich mit wachsendem  $v$  immer mehr und mehr einengen. Da ferner  $M$  sehr rasch mit wachsendem  $v$  abnimmt, so müssen die Wurzeln obiger Gleichung, die erste  $v=0$  ausgenommen, sehr nahe den Werthen  $v = \sqrt{\frac{4n-1}{4}} \cdot \pi$  liegen, und um so näher, je grösser  $n$  ist.

Daraus folgt, dass die Intensitätsschwankungen mit der Entfernung von der Mittelebene rasch abnehmen und die Maxima und Minima gleichzeitig immer näher an einander rücken.



Vergleicht man diese Formeln mit denjenigen, welche sich für die Beugungserscheinung an der geradlinigen Kante eines sich ins Unendliche erstreckenden Schirms ergeben, nämlich:

$$J = \pi - 2V\pi \left( M \sin \left( \nu^2 + \frac{\pi}{4} \right) + N \cos \left( \nu^2 + \frac{\pi}{4} \right) \right) + (M^2 + N^2)$$

und  $V\pi \cdot \sin \left( \nu^2 + \frac{\pi}{4} \right) = M$

— wobei vorausgesetzt ist, dass alle Grössen die analoge Bedeutung haben, wie oben, und  $x_0$  in dem nicht beschatteten Theile positiv gerechnet wird — so überrascht auf den ersten Blick die merkwürdige Analogie, welche diese Formeln und die obigen in ihrem Bau zeigen und die um so auffallender ist, als diese beiden Erscheinungen auf verschiedenen Ursachen beruhen und sonst wenig Aehnlichkeit mit einander besitzen. Es gehen nämlich die für die ersten Erscheinungen geltenden Formeln aus den letzteren einfach dadurch hervor, dass man an Stelle von  $M(\nu)$  und  $N(\nu)$ :  $2 \cdot M(\nu)$  resp.  $2 \cdot N(\nu)$  setzt. Untersucht man jedoch die Formeln etwas näher, so erweist sich, dass die Erscheinungen nur nach einer Richtung hin und zwar für grössere positive Werthe von  $x_0$  ähnliche Gesetze befolgen: die Lage der Maxima und Minima ist dann in beiden Fällen dieselbe, nämlich:

$$x_0 = \sqrt{\frac{4n-1}{4} \cdot \frac{\lambda \rho_0 (\rho_0 + \rho)}{\rho}}$$

und die Intensitätsschwankungen sind im zweiten Fall nahezu halb so gross, wie im ersten. Dahingegen liegt ein sehr wesentlicher Unterschied schon darin, dass bei den ersteren Erscheinungen die Mittelebene  $x_0 = 0$  eine Symmetrieebene ist, während bei den letzteren die Intensität nur für positive  $x_0$  periodisch variiert, für negative  $x_0$  dagegen (d. h. im Schatten) stetig und zwar sehr rasch bis 0 abnimmt. Aber auch für positive  $x_0$  zeigen die Erscheinungen erhebliche Unterschiede in der Nähe der Mittelebene  $x_0 = 0$ , also gerade dort, wo die Erscheinungen am schärfsten ausgeprägt sind, und haupt-

sächlich hierin liegt der Grund, dass die Erscheinungen, obwohl sie in theoretischer Hinsicht viel Analoges haben, in Wirklichkeit ein sehr verschiedenes Aussehen darbieten.

Dies wird noch anschaulicher durch folgende Zusammenstellung der den Maximis und Minimis entsprechenden Werthe von  $\nu$  und  $J$  für beide Arten von Beugungserscheinungen:

1 <sup>ter</sup> Fall		2 <sup>ter</sup> Fall	
(Beugung in Folge der Phasendifferenz).		(Beugung am Rande des Schirms).	
Absol. Min. . . $\nu = 0$	$J = 0$	für $\nu = 0$	$J = 0.7854$
1 <sup>tes</sup> Max. . . . $\nu = 1.5158$	$J = 5.6593$	— — — $\nu = 1.5255$	$J = 4.3055$
1 <sup>tes</sup> Min. . . . . $\nu = 2.3490$	$\nu = 1.8360$	— — — $\nu = 2.3469$	$\nu = 2.4450$
2 <sup>tes</sup> Max. . . . . $\nu = 2.9375$	$\nu = 4.4506$	— — — $\nu = 2.9384$	$\nu = 3.7676$
2 <sup>tes</sup> Min. . . . . $\nu = 3.4334$	$\nu = 2.1982$	— — — $\nu = 3.4328$	$\nu = 2.6489$
3 <sup>tes</sup> Max. . . . . $\nu = 3.8624$	$\nu = 4.1239$	— — — $\nu = 3.8627$	$\nu = 3.6156$
3 <sup>tes</sup> Min. . . . . $\nu = 4.2506$	$\nu = 2.3645$	— — — $\nu = 4.2504$	$\nu = 2.7393$
4 <sup>tes</sup> Max. . . . . $\nu = 4.6046$	$\nu = 3.9572$	— — — $\nu = 4.6047$	$\nu = 3.5377$

Die Berechnung dieser Werthe geschieht am einfachsten mit Hilfe der Tafeln für  $M$  und  $N$  nach den Näherungsformeln:

für den ersten Fall:

$$\nu = \nu_0 + (-1)^n \cdot \frac{M(\nu_0)}{\nu_0 \sqrt{\pi}} \quad \nu_0 = \sqrt{\frac{4n-1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$J = \pi + 4(N^2 - M^2) - (-1)^n 4V\pi N + (-1)^n \cdot \frac{8N \cdot M^2}{V\pi}$$

für den zweiten Fall:

$$\nu = \nu_0 + (-1)^n \cdot \frac{M(\nu_0)}{2\nu_0 \cdot \sqrt{\pi}} \quad \nu_0 = \sqrt{\frac{4n-1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$J = \pi + (N^2 - M^2) - (-1)^n 2V\pi N + (-1)^n \cdot \frac{N \cdot M^2}{V\pi}$$

welche die Werthe von  $\nu$  und  $J$  unmittelbar bis auf eine Einheit der 4<sup>ten</sup> Decimale genau liefern. Die von *Fresnel*\*) für den zweiten Fall berechneten Werthe von  $J$  sind um circa 5 Einheiten der 4<sup>ten</sup> Decimale zu gross.

Die hier erwähnten Erscheinungen lassen sich ausser mit dem Doppelspiegel auch noch auf andere Weise er-

\*) *Fresnel*, Oeuvr. compl. T. I pg. 322.

halten und gehören in die Klasse der sogenannten lamellaren Beugungserscheinungen, welche von *Quincke* \*) einer eingehenden Untersuchung unterzogen worden sind und deren vollständige Theorie später *Jochmann* \*\*) gegeben hat.

Die Ausführung des Versuchs mittelst eines Doppelspiegels bereitet einige Schwierigkeiten, weil die Bedingung die Spiegelebenen genau parallel zu stellen, sehr schwer zu erfüllen ist und die Erscheinung in eine *Fresnel'sche* Interferenzerscheinung übergeht, sobald die Spiegel einen kleinen Winkel mit einander bilden. In der That lässt sich aus den Formeln 13) und 14) schliessen, dass bei einer Neigung der Spiegel von nur wenigen Secunden, die Vertheilung der Intensität eine ganz andere werden muss. — Mit grösserer Vollkommenheit kann die Erscheinung mittelst dünner auf Glas gezogener Lamellen einer durchsichtigen Substanz erhalten werden.

## § 5.

Es bleibt uns jetzt noch zu untersuchen, wie die Erscheinung sich ändert, wenn die Spiegelränder nicht vollkommen aneinandergrenzen, wenn also die beugende Kante eine im Vergleich zu  $\lambda$  nicht zu vernachlässigende Breite  $c$  besitzt. Die Berücksichtigung dieses Umstandes ist nothwendig, wenn man Messungen an den mit einem Doppelspiegel hervorgerufenen Interferenzerscheinungen mit der Theorie vergleichen will und wir werden im Folgenden sehen, dass sich dessen Einfluss in einer sehr einfachen Weise geltend macht.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass dem Spiegel eine solche Stellung gegeben ist, wo die Fransen am ungleichsten sind, dass also  $\beta = 2n\pi$  ist.

\*) *Quincke*, Opt. Exper.-Unters. Pogg. Ann. Bd. 132.

\*\*) *Jochmann*, Pogg. Ann. Bd. 136.

Mit Rücksicht auf 2) und in Anbetracht, dass wieder  $\theta_1 = \theta_2$  ist, haben wir dann:

$$C_i = \int_{u_i + Vm \cdot \frac{c}{2}}^{\infty} \cos(\xi^2 - u_i^2) \cdot d\xi$$

$$S_i = \int_{u_i + Vm \cdot \frac{c}{2}}^{\infty} \sin(\xi^2 - u_i^2) \cdot d\xi$$

oder:

$$C_i = \cos\left((u_i + Vm \cdot \frac{c}{2})^2 - u_i^2\right) \cdot M(u_i + Vm \cdot \frac{c}{2}) \\ - \sin\left((u_i + Vm \cdot \frac{c}{2})^2 - u_i^2\right) \cdot N(u_i + Vm \cdot \frac{c}{2})$$

$$S_i = \sin\left((u_i + Vm \cdot \frac{c}{2})^2 - u_i^2\right) \cdot M(u_i + Vm \cdot \frac{c}{2}) \\ + \cos\left((u_i + Vm \cdot \frac{c}{2})^2 - u_i^2\right) \cdot N(u_i + Vm \cdot \frac{c}{2})$$

und folglich:

$$J = M^2(u_1 + \delta) + M^2(u_2 + \delta) + N^2(u_1 + \delta) + N^2(u_2 + \delta) \\ + 2 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot (M(u_1 + \delta) \cdot M(u_2 + \delta) + N(u_1 + \delta) \cdot N(u_2 + \delta)) \\ + 2 \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot (M(u_1 + \delta) \cdot N(u_2 + \delta) - M(u_2 + \delta) \cdot N(u_1 + \delta))$$

wo zur Abkürzung:

$$\delta = Vm \cdot \frac{c}{2} \quad \varepsilon_1 = 2\delta u_1 + \delta^2 \quad \varepsilon_2 = 2\delta u_2 + \delta^2$$

gesetzt ist. Für die weitere Entwicklung wollen wir uns die vereinfachende Annahme erlauben, dass die Breite der beugenden Kante sehr klein im Vergleich zu den Abständen der direkten Strahlen  $L_1P$  und  $L_2P$  von der Mitte der beugenden Kante ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass  $\delta$  sehr klein gegenüber  $u_1$  und  $u_2$  ist. Ersetzen wir unter dieser Voraussetzung  $u_1$  und  $u_2$  durch ihre absoluten Werthe  $v_1$  und  $v_2$ , so wird für Punkte in der Nähe der Mittelebene:

$$\varepsilon_i = 2\delta \cdot v_i$$

$$M(u_i + \delta) = V\pi \cdot \sin\left((v_i - \delta)^2 + \frac{\pi}{4}\right) = V\pi \cdot \sin\left(v_i^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_i\right)$$

$$N(u_i + \delta) = V\pi \cdot \cos\left((v_i - \delta)^2 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2v_i} V\pi \cdot \cos\left(v_i^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_i\right) - \frac{1}{2v_i}$$

und demnach:

$$J = 4\pi \cdot \cos^2\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}\right) - \frac{V\pi}{\nu_1} \left( \cos\left(\nu_1^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1\right) + \cos\left(\nu_2^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1\right) \right) \\ - \frac{V\pi}{\nu_2} \left( \cos\left(\nu_1^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_2\right) + \cos\left(\nu_2^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_2\right) \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \right)$$

Durch Differentiation erhält man ferner:

$$\frac{dJ}{d\nu_1} = -4\pi \nu_1 \sin(\nu_1^2 - \nu_2^2) + 2V\pi \cdot \sin\left(\nu_1^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1\right) + 2V\pi \cdot \frac{\nu_1}{\nu_2} \sin\left(\nu_1^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_2\right) \\ \frac{dJ}{d\nu_2} = +4\pi \nu_2 \sin(\nu_1^2 - \nu_2^2) + 2V\pi \cdot \sin\left(\nu_2^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1\right) + 2V\pi \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1} \sin\left(\nu_2^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_2\right)$$

und damit zur Bestimmung der Lage der Maxima und Minima:

$$2V\pi \cdot (\nu_1 + \nu_2) \sin(\nu_1^2 - \nu_2^2) + \frac{\nu_2}{\nu_1} \sin\left(\nu_2^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1\right) - \frac{\nu_1}{\nu_2} \sin\left(\nu_1^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_2\right) \\ + \sin\left(\nu_2^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_2\right) - \sin\left(\nu_1^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1\right) =$$

oder:

$$2V\pi \cdot \sin(\nu_1^2 - \nu_2^2) + \frac{1}{\nu_1} \sin\left(\nu_2^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1\right) - \frac{1}{\nu_2} \sin\left(\nu_1^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_2\right) + \frac{R}{\nu_1 + \nu_2} =$$

wo:

$$R = \sin\left(\nu_2^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_2\right) - \sin\left(\nu_2^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1\right) + \sin\left(\nu_1^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_2\right) - \sin\left(\nu_1^2 + \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1\right) \\ = 4 \cdot \sin\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right)$$

oder:

$$2V\pi \cdot \sin(\nu_1^2 - \nu_2^2) - \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right) \\ + \left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right) \\ + \frac{R}{\nu_1 + \nu_2} = 0$$

und wenn man hierin  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -2\delta \cdot (\nu_1 + \nu_2)$  setzt und die linke Seite wieder in zwei Faktoren zerlegt, bis auf kleine Grössen 2<sup>ter</sup> Ordnung genau:

$$19) \quad \cos\left(\frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2}\right) = \frac{1}{4V\pi} \cdot \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} - \delta(\nu_1 + \nu_2)\right) \text{ für die Minima} \\ \sin\left(\frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2}\right) = \frac{1}{4V\pi} \cdot \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 \nu_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} - \delta(\nu_1 + \nu_2)\right) \text{ für die Maxima}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den früher für den Fall  $c = 0$  gefundenen 10) nur dadurch, dass hier der Bogen  $\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}$  um die Grösse  $\delta \cdot (\nu_1 + \nu_2)$  kleiner ist; da aber:

$$\delta(\nu_1 + \nu_2) = m \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{(x_1 - x_2) \cdot \rho_0}{\rho_0 + \rho} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot c \cdot \alpha$$

eine von  $\rho_0$  und  $\xi_0$  unabhängige Grösse ist, so behalten alle in § 3 aufgestellten Sätze auch hier ihre Gültigkeit. Auch sieht man leicht ein, dass die in § 4 gegebenen Sätze gültig bleiben und dass für  $\beta = (2n + 1)\pi$  die zweite der Gleichungen 19) die Lage der Minima bestimmt.

Der von der Breite der beugenden Kante herrührende Einfluss äussert sich demnach nur darin, dass die Oscillationsphase der Fransenbreiten und Helligkeiten überall um gleich viel geändert wird.

Beachtet man ferner, dass  $c = d \cdot \sin i$  ist, wenn  $d$  den Abstand der beiden aneinander grenzenden Spiegelkanten und  $i$  wieder den Einfallswinkel bedeutet, so erkennt man die Möglichkeit, die Oscillationsphase durch Drehung des Spiegels um  $\pi$  zu ändern. Eine jede Franse, welche anfänglich heller und breiter war, als die ideale Franse, muss dann um ebenso viel dunkler und schmaler werden, als diese, und umgekehrt; das ganze Interferenzbild muss in gewissem Sinne entgegengesetzt sein zu dem anfänglichen.

Man könnte glauben, dass die Breite der beugenden Kante dieselbe Wirkung auf die Erscheinungen ausüben müsse, wie eine Verschiebung derselben um die Grösse

$d\rho = \frac{\rho \cdot c}{x_1 - x_2}$  in der Richtung zum Bilde hin, oder mit andern Worten, dass die beugende Kante von der Breite  $c$ , ersetzt werden könne durch eine beugende Kante von der Breite 0, in welcher die Randstrahlen der ersteren sich schneiden. Dies ist jedoch nicht der Fall: denn untersucht man die Aenderungen, welche  $\nu_1$  und  $\nu_2$  durch eine Verschiebung der Kante um  $d\rho$  erleiden, so findet man angenähert:

$$d\nu_1 = d\nu_2 = -V m \cdot \frac{c_1 - c_2}{2(\rho_0 + \rho)} d\rho = -V m \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{\rho'}{\rho_0 + \rho} = -\delta \cdot \frac{\rho}{\rho_0 + \rho}$$

ferner:

$$d\left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2}\right) = 0 \quad d\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\rho_1 \rho_2}\right) = 0 \quad d\left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2}\right) = -\delta \cdot \frac{\rho}{\rho_0 + \rho} \cdot (\nu_1 + \nu_2)$$

und folglich ändern sich in Folge der Verschiebung die Gleichungen für die Maxima und Minima in der Weise, dass der Bogen  $\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}$  um  $\delta \cdot \frac{\rho}{\rho_0 + \rho} (\nu_1 + \nu_2)$  verkleinert wird, während die beugende Kante von der Breite  $c$  denselben Bogen um  $\delta(\nu_1 + \nu_2)$  verkleinert.

In der That würde, wenn die obige Annahme richtig wäre, die Erscheinung ungeändert bleiben müssen, wenn man die beugende Kante um ein Geringes verschiebt und ihre Breite gleichzeitig derart ändert, dass die geometrische Schattengrenze dieselbe bleibt. Das Gleiche müsste dann aber auch bei den einfacheren *Fresnel'schen* Beugungserscheinungen stattfinden, was bekanntlich nicht der Fall ist.

Noch auf einen andern Punkt muss hier aufmerksam gemacht werden: die obigen Formeln sind nämlich eigentlich nur dann in aller Strenge richtig, wenn die Strahlen normal auf den Spiegel fallen, also die Breite der beugenden Kante  $c$  gleich dem Abstand  $d$  der Spiegelränder ist. Wenn hingegen  $i$  von  $90^\circ$  verschieden ist, so wäre es streng genommen nicht erlaubt einfach  $c = d \cdot \sin i$  anzunehmen, weil dies voraussetzen würde, dass man die

beugende Kante auch beliebig ohne Einfluss auf die Erscheinungen drehen kann, wenn man gleichzeitig ihre Breite so ändert, dass die geometrische Schattengrenze dieselbe bleibt. Der bei dieser Annahme gemachte Fehler ist jedoch sehr klein, wenn die Entfernung der virtuellen Lichtpunkte  $x_1 - x_2$  erheblich grösser ist, als der Abstand  $d$  der Spiegelränder und wird selbst dann vernachlässigt werden können, wenn  $i$  nur wenige Grade beträgt.

## Zweiter Abschnitt.

Wiewohl schon Professor *Weber* gezeigt hat, dass die von ihm bei den *Fresnel'schen* Interferenzerscheinungen, bemerkten Unterschiede in der Breite und Helligkeit der Fransen, sich durch die von ihm entwickelte Theorie im Allgemeinen erklären lassen, so schien mir damit diese Frage doch noch nicht endgültig erledigt zu sein und die Uebereinstimmung der Erscheinungen mit der Theorie noch eines genaueren Nachweises durch Messungen zu bedürfen. Ein solcher Nachweis war um so wünschenswerther, als seit *Fresnel's* Tagen überhaupt keine genauen Messungen mehr an diesen Interferenzerscheinungen angestellt zu sein scheinen und auch die *Fresnel'schen* Messungen auf keine grosse Genauigkeit Anspruch machen können.

Es bieten sich für Interferenzerscheinungen zwei Mittel zur Vergleichung mit der Theorie dar; davon ist aber das eine, nämlich die photometrische Bestimmung der Helligkeitsmaxima und Minima mit sehr grossen praktischen Schwierigkeiten verbunden, während das andere, welches auf der Beobachtung der Lage der Maxima und Minima beruht, verhältnissmässig einfach realisirt werden kann und bisher auch das einzige in Anwendung gekommene Mittel ist. Es wäre gewiss sehr zu wünschen, dass die Bestimmung der Intensitäten nicht ganz ausser Acht gelassen wird und ich glaube, dass man hierbei die photographische Aufnahme des Interferenzbildes mit Erfolg anwenden könnte; leider fehlte es mir aber selbst in Graz an Zeit, um in dieser Richtung Versuche anzustellen und ich habe mich daher ebenfalls bei

der genaueren Untersuchung ausschliesslich der zweiten Methode bedient. Dabei beschränkte ich mich auch nur auf die Bestimmung der Lage der Minima unter verschiedenen Bedingungen, weil einerseits diese Bestimmungen einer grösseren Schärfe fähig sind, als die Bestimmung der Lage der Maxima und andererseits, weil die in diesem Fall in Betracht kommenden Unterschiede viel bedeutender sind.

In wie weit es mir gelungen ist, auf diesem Wege die Theorie zu bestätigen, wird die weiter unten folgende Zusammenstellung der aus den Messungen und aus der Theorie sich ergebenden Werthe für die Fransenbreiten zeigen. Zum Verständniss derselben ist es aber nöthig, eine Beschreibung der Interferenzapparate und der Art und Weise, wie die Messungen ausgeführt worden sind, voranzuschicken.

Um eine intensive, homogene und möglichst schmale Lichtlinie zu erhalten, bediente ich mich in den meisten Fällen des Sonnenlichts, welches mittelst eines Heliostaten durch einen verticalen Spalt in ein dunkles Zimmer geworfen und durch ein starkes Dispersionsprisma in seine Spectralfarben zerlegt wurde. Gleich hinter dem Prisma befand sich eine achromatische Sammellinse, die in geeigneter Entfernung ein Spectrum entwarf, in welchem die Hauptlinien mit grosser Schärfe zu sehen waren. In der Ebene dieses Spectrums war ein Schirm mit einem sehr feinen leicht regulirbaren Spalt aufgestellt, welcher durch passende Vorrichtungen mit einer bestimmten Spectrallinie in genaue Coincidenz gebracht werden konnte.

Auf diese Weise erhielt ich eine verticale Lichtlinie von circa 2<sup>cm</sup> Länge, deren Breite auf wenige hundertstel Millimeter reducirt werden konnte und deren Wellenlänge sich mit einer Genauigkeit von 1 bis 2 Einheiten der sechsten Decimale angeben liess. Von der Intensität dieser Lichtlinie kann man sich daraus eine Vorstellung machen, dass

die Interferenzstreifen noch bei intensivem Tageslichte mit einem Mikroskop von 90 maliger Vergrößerung gut zu sehen waren und dass dieselben im Dunkeln noch scharf gemessen werden konnten, wenn das Licht durch zwei Heliostate in das Dunkelzimmer geworfen wurde, wie es des Nachmittags in Folge des Sonnenstandes erforderlich war.

Um ferner den von der Lichtlinie ausgehenden Strahlen eine grössere Divergenz zu verleihen, war an dem Heliostaten eine Cylinderlinse von kurzer Brennweite angebracht, in deren Brennpunkt sich der erste schmale Spalt befand. Die durch diesen Spalt gehenden Strahlen beschienen in Folge dessen das ganze Dispersionsprisma, wodurch erreicht wurde, dass das von der Lichtlinie ausgehende Strahlenbündel in einer Entfernung von einem Meter eine Breite von ungefähr 20<sup>mm</sup> besass. Ausserdem war noch gleich hinter der Sammellinse ein Reflexionsprisma in den Weg der Lichtstrahlen eingeschaltet, welches ermöglichte, den Strahlen eine solche Richtung zu geben, dass der Interferenz- und Messapparat eine solide Unterlage auf einem Steinpfeiler erhalten konnte.

In einigen wenigen Fällen habe ich mich auch künstlichen Lichts zur Erzeugung der Lichtlinie bedient. Die Versuche scheiterten aber meist daran, dass das Licht nicht hinreichend intensiv erhalten werden konnte. Kochsalzperlen, in einen *Bunsen'schen* Brenner gebracht, lieferten eine so schwache Flamme, dass man die Interferenzlinien mit einem Mikroskop von 45 maliger Vergrößerung kaum wahrnehmen konnte. Ebensowenig nützte es, mehrere Flammen hinter einander aufzustellen, weil eine das Licht der andern absorbierte. Auf den Rath von Professor *Boltzmann* stellte ich deshalb den Versuch mit einem Knallgasgebläse an, indem ich von Wasser befreites Kochsalz, das in einen Platinlöffel eingeschmolzen war, in das Gebläse brachte. Dadurch erhielt ich in der That eine schöne blendend gelbe Flamme, von hinreichender Inten-

sität um die Interferenzlinien noch mit 45 maliger Vergrößerung messen zu können. Um aber das Platin nicht selbst zum Schmelzen zu bringen, musste darauf geachtet werden, dass der Löffel nicht länger als etwa eine Minute im Gebläse blieb und dieser Umstand erschwerte bedeutend die Beobachtung. Ausserdem zeigten sich leicht bei unvollständiger Verbrennung ausser der *D*-Linie noch andere Linien des Spectrums und bewirkten eine Undeutlichkeit der Interferenzerscheinung.

Der von mir benutzte Interferenzspiegel war aus zwei Glasspiegeln, von 55<sup>mm</sup> Länge und Breite und 7<sup>mm</sup> Dicke, zusammengesetzt, welche aus der optischen Werkstatt von *Steinheil* bezogen waren. Von der vollkommenen Planheit derselben überzeugte ich mich durch Beobachtung reflectirter Bilder, nach einem Verfahren, das dem von *Oertling*\*) beschrieben ganz analog ist. — An den Kanten waren die Spiegel ein wenig schräg abgestumpft und es war daher nicht möglich, die Spiegelränder in vollkommene Berührung mit einander zu bringen. Wie indess in § 5 gezeigt wurde, lässt sich dieser Umstand bei der Rechnung leicht berücksichtigen und fällt jedenfalls viel weniger in's Gewicht, als mögliche Unebenheiten der Spiegel in der Nähe der Kante, welche durch die Art des Schleifens bedingt sind und wohl nie ganz zu vermeiden sein werden. Aus demselben Grunde halte ich das von *Nörremberg*\*\*) vorgeschlagene Verfahren zur Herstellung von Doppelspiegeln, welches auf der Durchbiegung einer grösseren Spiegelglasplatte beruht, bei derartigen Versuchen, wo es vor Allem auf eine vollkommene Planheit der Spiegel in der Nähe der Kante ankommt, nicht für geeignet.

Die hinteren, matt geschliffenen Flächen der Spiegel wurden mit Oelfarbe geschwärzt, um die Reflexion von

\*) *Oertling*, Pogg. Ann. Bd. 59.

\*\*) *Quincke*, Pogg. Ann. Bd. 132.

diesen Flächen vollständig zu zerstören und die Spiegel in eine Fassung gebracht, welche ich mir von einem Mechaniker in Graz anfertigen liess. Im Princip war diese Fassung dieselbe, wie sie meist bei Doppelspiegeln angewandt wird. Um etwaige Durchbiegungen zu verhüten, wurden die Spiegel zunächst in Rahmen von Eisenblech fest eingekittet, welche nur an der Seite offen waren, wo die Spiegel an einander stossen sollten. Der eine Rahmen wurde auf einer Korkunterlage an einer dicken eisernen Platte durch Klammern befestigt, während der andere auf drei durch diese Platte gehenden Stellschrauben zu ruhen kam und durch Stahlspiralen gegen diese Schrauben fest angezogen wurde; zur Verhütung seitlicher Verschiebungen dienten Federn, welche den einen Spiegel gegen den andern anpressten; ausserdem waren an der Platte seitliche Ansätze angebracht, um den Apparat solide aufstellen zu können. Hierdurch war den hauptsächlichsten Anforderungen genügt, wiewohl in der Ausführung noch viele kleinere Mängel übrig blieben, welche ein geschickter Mechaniker leicht hätte beseitigen können. So z. B. waren die Stellschrauben zu roh gearbeitet, besaßen eine viel zu grosse Ganghöhe; die Federn waren nicht stark genug und ausserdem fehlte eine Parallelverschiebung des einen Spiegels gegen den andern, welche die Justirung des Apparats um vieles erleichtert haben würde.

An Stelle von Glasspiegeln könnte man auch Metallspiegel anwenden und diese würden jedenfalls den Vorzug haben, dass man nicht, wie bei jenen, nur auf Beobachtungen bei kleinen Einfallswinkeln (*i*) angewiesen wäre; andererseits dürften Metallspiegel leichteren Verbiegungen ausgesetzt sein und sich schwerlich mit derselben Vollkommenheit herstellen lassen, wie Glasspiegel. Die Versilberung der Glasspiegel vermied ich aber aus dem Grunde, weil bei der Reflexion an solchen Spiegeln — wie aus den

Versuchen von *Quincke*\*) hervorgeht — leicht verschiedene Phasenänderungen eintreten können, sobald die Silberüberzüge nicht vollkommen gleich und homogen sind. In Folge dessen würde  $\delta_1 - \delta_2$  eine a priori nicht angebbare Grösse sein.

Die genaue Justirung des Apparats wurde an einem *Starke*'schen Goniometer ausgeführt, nachdem die Spiegel zuvor durch Tatonnement und nach Augenmaass angenähert richtig gestellt worden waren und die gewünschte Neigung erhalten hatten. Zu dem Behuf wurde in das Collimatorfernrohr des Goniometers ein verticales Axenkreuz eingesetzt, während in dem Ocular des Beobachtungsfernrohrs ein Andreaskreuz sich befand, dessen Mittelpunkt bei einer Drehung des Beobachtungsfernrohrs auf dem horizontalen Faden des andern Axenkreuzes fortlaufen musste. Auf das mittlere Tischchen des Goniometers wurde nun der Apparat so aufgesetzt, dass die auf der gemeinschaftlichen (beugenden) Kante senkrechten Begrenzungslinien der Spiegel möglichst genau horizontal waren und das Tischchen mittelst der Stellschrauben so lange geneigt, bis die reflectirten Bilder des verticalen Axenkreuzes in der Mitte des Gesichtsfeldes des Beobachtungsfernrohrs erschienen. Waren dann die beiden Bilder der horizontalen Axe nicht in Coincidenz mit einander, so wurde an den am Spiegel-Apparat befindlichen Stellschrauben so lange corrigirt, bis die Coincidenz in der Mitte des Gesichtsfeldes eine vollkommene war. Schliesslich wurde untersucht, ob diese Coincidenz bei allen möglichen Einfallswinkeln stattfand, und wenn dies der Fall war, hörte ich auf zu corrigiren. Damit war zunächst erreicht, dass die mathematische Durchschnittslinie der beiden Spiegelebenen den verticalen Kanten der Spiegel parallel stand; es konnte aber die eine Spiegelebene noch um eine im Vergleich zu  $\lambda$  erheb-

\*) *Quincke*, Pogg. Ann. Bd. 142.

liche Grösse  $h$  gegen die andere in der gemeinschaftlichen Kante zurückstehen. Um diese Grösse möglichst klein zu machen, könnte man die Interferenzerscheinung zunächst mit weissem Licht erzeugen und den Spiegel so lange corrigiren, bis die centrale Franse weiss erscheint. Für meine Zwecke war es jedoch ausreichend, wenn  $h$  so klein war, dass ich durch Befühlen mit der Hand kein Vorspringen der einen Spiegelkante vor der andern wahrnehmen konnte, was ich weiter unten noch näher begründen werde.

Die Neigung der Spiegelebenen wurde an demselben Goniometer bestimmt, dessen Theilkreis mit doppelter Mikroskopablesung versehen war und sehr genaue Winkelmessungen gestattete. Dazu wurde der Mittelpunkt des Andreaskreuzes successive auf die beiden Bilder der verticalen Axe des im Collimator befindlichen Axenkreuzes eingestellt, indem entweder das Tischchen mit dem Spiegel bei fester Stellung des Beobachtungsfernrohrs oder das Beobachtungsfernrohr, bei fester Stellung des Spiegels, gedreht wurde. Diese Bestimmungen wurden allemal sowohl vor als nach einer vollständigen Messungsreihe der Interferenzlinien gemacht, welche ungefähr 4 Stunden in Anspruch nahm. Es zeigte sich dann in den meisten Fällen, dass die Neigung der Spiegel in der Zwischenzeit sich um eine merkliche Quantität geändert hatte, welche den wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Bestimmung beträchtlich übertraf. Dies lag zum Theil an den Unvollkommenheiten des Apparats, welche eine kleine Neigungsänderung beim Hinübertragen desselben aus dem Zimmer, in welchem der Goniometer stand, in das optische Zimmer, selbst bei der grössten Vorsicht nicht ausschloss; zum Theil war es eine Folge der bedeutenden Temperaturdifferenz in den beiden Zimmern. Die Aenderungen gingen ein paar Mal sogar bis auf 25", während der wahrscheinliche Fehler einer Bestimmung aus mehreren Einstellungen

im Mittel nur 0".7 betrug. In solchen Fällen blieb mir nichts anderes übrig, als die Messungsreihe zu verwerfen; in anderen Fällen, wo die Unterschiede der Bestimmungen vor und nach der Messungsreihe nur zwischen 3" und 10" schwankten, wurde als definitiver Winkelwerth das Mittel aus beiden Bestimmungen angesehen.

Die Entfernung der Ränder der Spiegel an der gemeinschaftlichen Kante wurde mit einem Fadenmikrometer zu  $d = 0^m 85$  bestimmt.

Zur Erzeugung und Messung der Interferenzstreifen hatte ich mir eine Art von Diffractionsbank in folgender einfachen Weise hergestellt. Auf einem steinernen Pfeiler wurden zwei starke Holzstative neben einander gestellt und durch ein plan und glatt gehobeltes Brett, von etwas über 1 Meter Länge, das horizontal auf dieselben gelegt wurde, mittelst Schraubstöcken fest mit einander verbunden. An dem zur leuchtenden Linie gewandten Ende des Brettes, in etwa 1 Meter Entfernung von der Lichtlinie, befand sich ein *Meyerstein'sches* Spectrometer, das nur dazu bestimmt war, dem Interferenzapparat eine möglichst solide und zugleich leicht regulirbare Aufstellung zu geben und den Einfallswinkel der Strahlen zu bestimmen. Auf demselben Brett wurde in geeigneten Abständen der Messapparat aufgestellt. Als solchen benutzte ich ein Mikroskop von 45 maliger Vergrösserung, welches zur Ablesung des Vertikalkreises eines Theodoliten gehörte und mit einem Fadenmikrometer versehen war. Der festeren und bequemerer Aufstellung halber wurde das Mikroskop in seiner Fassung am Theodoliten belassen, nachdem der Vertikalkreis und alle andern unnöthigen Theile des Instruments entfernt waren.

Den Trommelwerth der Mikrometerschraube bestimmte ich zu wiederholten Malen aus Messungen an einem fein getheilten Glasmikrometer und es ergab sich im Mittel:



$$1 \text{ Trommeltheil} = 1'' = 0^{\text{m}}002784$$

mit einem wahrsch. Fehler von  $0^{\text{m}}000004$ .

Die periodischen und zufälligen Fehler der Schraube waren so gering, dass sie vernachlässigt werden konnten.

Nachdem die Neigung der Spiegelebenen bestimmt worden war, wurde der Interferenzspiegel auf das Tischchen des Spectrometers aufgesetzt und in eine solche Lage gebracht, dass die Spiegel voll beschienen wurden und die beugende Kante nahezu parallel der leuchtenden Linie war. Den Einfallswinkel  $i$  wählte ich meist zwischen  $5^\circ$  und  $10^\circ$ , sodass die Breite der reflectirten Strahlenbündel beim Spiegel im Minimum  $b = 55^{\text{mm}} \sin(5^\circ)$  gleich  $5^{\text{mm}}$  ungefähr betrug, eine Breite, bei welcher die an den äusseren Spiegelrändern stattfindende Beugung keinen merklichen Einfluss auf die centralen Fransen ausüben konnte.

An den Stellschrauben des Tischchens wurde dann die Neigung des Interferenzspiegels so lange berichtigt, bis die Interferenzstreifen im Mikroskop scharf zu sehen waren; indess erwies sich in der Folge diese Berichtigung als unzureichend. Es zeigte sich nämlich öfters, dass die Interferenzstreifen sich während der Messung allmählig parallel und immer nach derselben Richtung verschoben, wenn der Heliostat unverändert gelassen wurde und dieser Umstand beeinträchtigte in hohem Grade die Genauigkeit der Messungen.

Um den Grund dieser etwas auffälligen Erscheinung einzusehen, muss man beachten, dass durch den veränderlichen Sonnenstand bei ungeändert gelassener Stellung des Heliostaten, die Richtung der von der Lichtlinie ausgehenden Strahlen sich während der Messung ein wenig gegen die Horizontale änderte. In Folge dessen mussten aber die Interferenzstreifen sich in einer zur Durchschnittslinie der Spiegelebenen (resp. zur beugenden Kante) parallelen Richtung verschieben und gleichzeitig stets der leuchtenden Linie

selbst parallel bleiben. Falls demnach beugende Kante und leuchtende Linie — oder vielmehr die Projektionen dieser Linien auf eine zur Strahlenrichtung senkrechte Ebene — einen kleinen Winkel mit einander bildeten, musste nothwendigerweise eine seitliche Verschiebung aller Streifen eintreten.

Mit der Erklärung dieser störenden Erscheinung war zugleich das Mittel an die Hand gegeben, dieselbe zu beseitigen und die beugende Kante der Lichtlinie genau parallel zu stellen. Dazu wurde das Mikroskop in eine möglichst grosse Entfernung von dem Spiegel gebracht, wo die betreffenden Verschiebungen am grössten waren, und der Mikrometerfaden genau auf einen Interferenzstreifen eingestellt. Bewegte man alsdann den Heliostaten in der Weise, dass die Höhenrichtung der Strahlen sich änderte, so sah man, wie der Streifen sich gegen den Faden verrückte, und diese Verrückung vergrösserte oder verkleinerte sich, je nachdem man die beugende Spiegelkante in der einen oder anderen Richtung gegen die leuchtende Linie neigte. Durch allmähliges Neigen mittelst der Stellschrauben am Tischchen konnte nun bewirkt werden, dass die Verschiebung ganz aufhörte und darnach war man sicher, dass die Projectionen der Kante und Lichtlinie parallel waren. Um sie selbst einander parallel zu stellen, brauchte dasselbe Verfahren nur unter einem andern Einfallswinkel wiederholt zu werden.

Änderte man nur die Horizontalrichtung der Strahlen durch Drehung des Heliostaten, so war gar keine Verschiebung der Streifen wahrzunehmen; in diesem Falle wurde nur die Wellenlänge des Lichts um eine ganz unmerkliche Quantität geändert.

Die Höhe und Neigung des Mikroskops wurden derart berichtigt, dass bei allen Stellungen desselben auf dem Brette stets die Mitte der Interferenzstreifen im Gesichtsfelde war. Darauf wurde das Mikroskop in eine Ent-

fernung von etwa  $20^{\text{cm}}$  an den Spiegel herangerückt, um die Mitte des Interferenzbildes scharf in's Auge fassen zu können. Es zeigte sich dann für gewöhnlich, dass das Interferenzbild unsymmetrisch war und dass in der Mitte desselben sich weder ein Maximum noch ein Minimum befand. Veränderte man nun durch mikrometrische Bewegung am Horizontalkreise des Spectrometers den Einfallswinkel der Lichtstrahlen, indem man gleichzeitig mit dem Mikroskop stets die Mitte des Interferenzbildes im Auge behielt, so nahm man eine allmälige Verrückung der Interferenzstreifen gegen diese Mitte wahr. Es kamen dadurch abwechselnd bald Maxima, bald Minima in die Mitte des Bildes und sobald das erstere der Fall war, zeigten sich die centralen Fransen im Allgemeinen sehr verschieden in Helligkeit und Breite, sobald dagegen das letztere eintrat, waren sie nahezu gleich. Damit war der in § 4 ausgesprochene Satz 1) schon näherungsweise bestätigt; denn wenn ein Maximum in die Mitte des Interferenzbildes gelangte, so musste die Phasendifferenz der in der beugenden Kante zusammentreffenden Strahlen nothwendigerweise ein gerades Vielfaches von  $\pi$  betragen, (entsprechend einer Wegedifferenz von einer ganzen Zahl von Wellenlängen), im andern Falle dagegen ein ungerades Vielfaches von  $\pi$ .

Aus der Grösse des Einfallswinkels  $i$  und der Aenderung  $di$ , die erforderlich ist, um ein Maximum resp. Minimum durch das nächstfolgende höherer oder niederer Ordnung zu ersetzen, liess sich angenähert die Grösse  $h$ , um welche der eine Spiegel gegen den andern in der beugenden Kante zurückstand, sowie die Ordnungszahl der Mittelfranse berechnen. Um hierfür ein Beispiel zu geben und zugleich zu zeigen, mit welcher Genauigkeit ein Maximum resp. Minimum in die Mitte des Interferenzbildes gebracht werden konnte, mögen zwei an verschiedenen Tagen gemachte Bestimmungen angeführt werden; die Einfallswinkel wurden hierbei nur angenähert an dem Horizontalkreise des Spectrometers abgelesen.

Es ergab sich:

Sept. 30.				Oct. 1.			
	$i$	$di$		$i$	$di$	$i$	$di$
1tes Min.	7.4	"		7.8	"	1tes Max.	8.25
2tes Min.	8.2	0.8		8.75	0.95	2tes Max.	9.25
3tes Min.	8.9	0.7		10.0	1.25	3tes Max.	10.5
4tes Min.	9.8	0.9		11.15	1.15	4tes Max.	11.65
		$\lambda = 0.589$			$\lambda = 0.589$		
		$\alpha = 9.0$			$\alpha = 8.95$		

Aus diesen Daten erhält man mittelst der in § 4 abgeleiteten Formeln:

$$\beta = \frac{4\pi}{\lambda} h \cdot \sin i = \begin{cases} 2n\pi & \text{für die Maxima} \\ (2n-1)\pi & \text{für die Minima} \end{cases} \text{ und } r = \frac{h}{\alpha}$$

(wo  $\alpha$  den Winkel zwischen den Spiegelebenen und  $r$  den Abstand der Durchschnittslinie der Spiegelebenen von der beugenden Kante bedeutet), im Mittel:

für Sept. 30	für Oct. 1
$h = 0.0213$	$h = 0.0152$
$r = 8.14$	$r = 5.85$

Ferner ergibt sich für das erste Minimum Sept. 30:  $n = 9.83$ , für das erste Minimum Oct. 1:  $n = 7.56$  und für das erste Maximum Oct. 1:  $n = 7.37$ ; woraus zu folgern ist, dass die Ordnungszahl des ersten Minimums Sept. 30: 10 und die Ordnungszahl des ersten Minimums und Maximums Oct. 1: 7 oder 8 war.

Es versteht sich von selbst, dass diese Bestimmungen keinen grossen Anspruch auf Genauigkeit machen können; sie geben aber wenigstens einen Begriff von der Grösse, welche  $h$  und  $r$  bei meinen Messungen besaßen; in den meisten Fällen war  $di$  sehr viel grösser und demnach  $h$  sehr viel kleiner, wie es hier angegeben ist, wo absichtlich

der eine Spiegel gegen den andern ein wenig zurückgestellt worden war. Es ist in der That zu verwundern, dass das Vorspringen der einen Spiegelkante vor der andern durch Tatonnement bis auf so geringe Quantitäten erkannt werden konnte.

Für die Messungen der Fransenbreiten wurde ein Maximum oder Minimum so genau als möglich in die Mitte des Interferenzbildes gebracht und dieselben dann in der Weise ausgeführt, dass bei verschiedenen Abständen des Mikroskops von dem Spiegel die Breiten der mittleren Fransen durch Einstellung des Mikrometerfadens auf die Minima bestimmt wurden. Die Zahl der gemessenen Fransen hing natürlich von der Zahl der überhaupt vorhandenen ab; in den meisten Fällen habe ich bei  $\rho_0 < 15^{\text{cm}}$  nur auf 4 resp. 5 Streifen, bei  $\rho_0 > 15^{\text{cm}}$  und  $< 30^{\text{cm}}$  auf 6 resp. 7 und bei  $\rho_0 > 30^{\text{cm}}$  auf 8 resp. 9, mitunter auch auf mehr Streifen eingestellt. Die Entfernung  $\rho$  variirte bei meinen Messungen zwischen  $90^{\text{cm}}$  und  $110^{\text{cm}}$  und der Abstand der virtuellen Lichtpunkte  $x_1 - x_2$  zwischen  $5^{\text{mm}}3$  und  $7^{\text{mm}}2$ ; unter solchen Umständen erwies sich die Annäherung  $M_{\nu_1} = M_{\nu_2} = 0$   $N_{\nu_1} = \frac{1}{2\nu_1}$   $N_{\nu_2} = \frac{1}{2\nu_2}$  noch als ausreichend.

Um die Lage der gemessenen Fransen gegen die Mitte des Bildes angeben zu können, wurden die ersten Messungen jedesmal bei kleinen  $\rho_0$  ausgeführt, wo die Mittelfranse mit Sicherheit erkannt werden konnte und dann durch allmähliges langsames Fortrücken des Mikroskops zu grösseren  $\rho_0$  fortgeschritten, indem dabei die Mittelfranse stets im Auge behalten wurde. Uebrigens war die Erscheinung, wenn ein Maximum sich in der Mitte des Interferenzbildes befand, im Allgemeinen so scharf ausgeprägt, dass noch bei  $\rho_0 = 60^{\text{cm}}$  mit ziemlicher Sicherheit aus der Symmetrie auf die Mittelfranse geschlossen werden konnte; war dagegen ein Minimum in der Mitte,

so liess sich der mittlere Streifen nicht mehr angeben, sobald  $\rho_0 > 30^{\text{cm}}$  war.

Die Abstände des Mikroskops von dem Spiegel wurden meistens so gewählt, dass die mittleren Fransen möglichst ungleich erschienen. Ihre Grösse mass ich mit einem Massstab bis auf  $1-2^{\text{mm}}$  genau; mit derselben Genauigkeit wurde die Entfernung  $\rho$  der Spiegelkante von der leuchtenden Linie bestimmt.

Die Einstellungen wurden immer bei unveränderter Stellung des Heliostaten gemacht, indem der Mikrometerfaden successive mit allen zu bestimmenden Minimis in Coincidenz gebracht wurde. Erwies es sich als nothwendig, den Heliostaten in der Zwischenzeit zu bewegen, so wurde nochmals auf den Streifen eingestellt, der zuletzt beobachtet war, um noch etwa übriggebliebene kleine Verschiebungen des Interferenzbildes dadurch unschädlich zu machen. Aus demselben Grunde wurde immer in beiden Drehungsrichtungen der Schraube gemessen und zwar für gewöhnlich bei jedem  $\rho_0$  zweimal in der einen und zweimal in der entgegengesetzten Richtung.

Den wahrscheinlichen Fehler einer einmal gemessenen Fransenbreite habe ich aus einer grösseren Zahl von Messungen zu  $0.5$  oder  $0^{\text{mm}}0014$  abgeleitet, dem zufolge der wahrscheinliche Fehler des Mittels aus zwei Messungen in jeder Richtung ungefähr  $0^{\text{mm}}0007$  betrug. Er war etwas kleiner bei kleineren  $\rho_0$ , wo die Minima sich schärfer begrenzt zeigten.

Als Beispiel möge hier zunächst eine vollständige Reihe von Messungen dem Beobachtungsjournal entnommen werden, welche in ununterbrochener Folge bei verschiedenen  $\rho_0$ , aber constanten  $\rho$   $\lambda$   $\alpha$   $i$  angestellt wurden und bei denen ein Maximum in der Mitte des Bildes war. Die Fransenbreiten sind in Trommeltheilen ausgedrückt, wie sie sich unmittelbar aus der Differenz zweier aufeinanderfolgender Einstellungen ergaben.  $f_0$  bedeutet wie oben die

Breite der Mittelfranse,  $f_{1r}$   $f_{2r}$  etc.,  $f_{1l}$   $f_{2l}$  etc. die Breiten der ersten, zweiten etc. Seitenfransen, rechts resp. links von der Mittelfranse; die Buchstaben  $\alpha$  und  $z$  bezeichnen die Drehungsrichtung der Trommel.

Sept. 26.

$$\rho = 1085^{\text{mm}} \quad \lambda = 0.589^{\text{mm}} \quad \alpha = 8.92 \quad \gamma = 6.3$$

$$\rho_0 = 194^{\text{mm}}$$

	$\alpha$	$z$	$\alpha$	$z$	$M$
$f_{2r}$	—	—	—	—	—
$f_{1r}$	52.1	51.6	52.0	51.0	51.7
$f_0$	44.0	45.4	44.1	45.4	44.7
$f_{1l}$	51.4	51.0	51.1	51.5	51.25
$f_{2l}$	—	—	—	—	—

$$\rho_0 = 516^{\text{mm}}$$

	$\alpha$	$z$	$\alpha$	$z$	$M$
$f_{3r}$	61.2	60.9	—	—	61.05
$f_{2r}$	57.8	56.0	57.7	57.3	57.2
$f_{1r}$	61.7	64.2	63.3	62.7	63.0
$f_0$	56.7	55.3	58.8	58.4	57.55
$f_{1l}$	61.6	63.1	63.2	64.5	63.1
$f_{2l}$	56.7	56.8	56.8	55.0	56.3
$f_{3l}$	60.2	59.6	—	—	59.9

$$\rho_0 = 723^{\text{mm}}$$

	$\alpha$	$z$	$\alpha$	$z$	$M$
$f_{4r}$	—	—	—	—	—
$f_{3r}$	67.8	66.0	—	—	66.9
$f_{2r}$	69.3	71.3	70.2	71.5	70.6
$f_1$	66.8	66.2	68.0	66.0	66.75
$f_0$	71.9	71.0	70.0	68.8	70.4
$f_{1l}$	63.1	66.0	64.3	65.8	64.8
$f_{2l}$	69.3	69.9	71.9	70.9	70.5
$f_{3l}$	66.0	66.0	—	—	66.0
$f_{4l}$	—	—	—	—	—

Der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Bestimmung ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned} \text{für } \rho_0 = & 194^{\text{mm}} \quad 355^{\text{mm}} \quad 516^{\text{mm}} \quad 647^{\text{mm}} \quad 723^{\text{mm}} \quad 889^{\text{mm}} \\ \text{w. F.} = & 0.33 \quad 0.45 \quad 0.56 \quad 0.42 \quad 0.65 \quad 0.58 \\ \text{und des Mittels aus 4 Bestimmungen:} \\ \text{w. F.} = & 0.16 \quad 0.22 \quad 0.28 \quad 0.21 \quad 0.32 \quad 0.29 \end{aligned}$$

Die in ein und derselben Drehungsrichtung der Schraube gemachten Bestimmungen stimmen durchschnittlich etwas besser unter einander, was seinen Grund zum Theil in den Unvollkommenheiten der Schraube, zum Theil auch in einer noch übrig gebliebenen Parallelverschiebung des Bildes während der Messung haben kann.

Vergleicht man ferner die für die entsprechenden Seitenfransen rechts und links erhaltenen Mittel, so zeigt sich eine im Allgemeinen befriedigende Uebereinstimmung, ein Beweis, dass es sehr nahe gelungen war, die Erscheinung symmetrisch zu machen. Die grösseren Unterschiede, die ein paar Mal auftreten, finden ihre genügende Erklärung in den Unregelmässigkeiten der Schraube und in geringen Neigungen der optischen Axe des Mikroskops gegen die mittlere Richtung der reflectirten Lichtstrahlen. Die aus dem letzteren Umstande entspringenden Fehler äussern sich immer darin, dass sämtliche Franssen auf der einen Seite grösser gemessen werden, als die correspondirenden Franssen auf der andern Seite und zwar können dieselben bei Anwendung einer starken Vergrösserung recht bedeutend werden. Es musste daher vor Beginn einer jeden Messungsreihe besonders darauf geachtet werden, dass die optische Axe des Mikroskops mit der mittleren Richtung der reflectirten Lichtstrahlen coincidirte und dies liess sich dadurch erreichen, dass eine Lupe an das Ocular des Mikroskops angesetzt und das Mikroskop so lange im Azimut gedreht wurde, bis die Mitte des Interferenzbildes mit der Mitte des Oculars coincidirte, während gleichzeitig die centrale Franse im Mikroskop in der Mitte des Gesichtsfeldes erschien.

Im Folgenden gebe ich nun eine Zusammenstellung der durch Beobachtung ( $B$ ) und durch Rechnung ( $R$ ) erlangten Resultate, nebst allen für die Rechnung erforderlichen Daten. Die beobachteten Werthe sind die Mittel der entsprechenden Franssenbreiten rechts und links. Der

Rechnung haben die in § 3 bis § 5 begründeten Formeln zu Grunde gelegen, nämlich:

für  $\beta = 2m \cdot \pi$

$$f_0 = \varphi_0 - \frac{2A_1}{\pi} \cdot \varphi_0$$

$$f_n = \varphi_0 - (-1)^n \cdot \frac{A_n + A_{n+1}}{\pi} \cdot \varphi_0$$

$$A_n = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \left( \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \right) \cdot \cos \left\{ \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi \alpha \cdot d \sin i}{\lambda} \right\}$$

für  $\beta = (2m+1) \cdot \pi$

$$f_1 = \varphi_0 - \frac{B_1}{\pi} \cdot \varphi_0$$

$$f_n = \varphi_0 - (-1)^{n-1} \cdot \frac{B_{n-1} + B_n}{\pi} \cdot \varphi_0$$

$$B_n = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \left( \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 \nu_2} \right) \cdot \sin \left\{ \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi \alpha \cdot d \sin i}{\lambda} \right\}$$

Die Fransenbreiten sind überall in Trommeltheilen ausgedrückt:

$$1^\tau = 0^{\text{mm}}002784$$

Der Abstand der Spiegelränder blieb während der ganzen Zeit ungeändert:  $d = 0^{\text{mm}}85$ .

Einige Mal habe ich die Breiten äusserer Fransen gegen gemessene mehr centrale geschätzt. Für diese Schätzungen ist ihre Abweichung von der Rechnung in Klammern eingefasst und bei den Mittelwerthen nicht berücksichtigt.

Sept. 17. Maximum in der Mitte.  $\beta = 2m \cdot \pi$  Linie D.

$$\rho = 936.5^{\text{mm}} \quad \lambda = 0.589^{\text{mm}} \quad \alpha = 13'.10 \quad i = 4.65^\circ$$

$\rho_0 = 158^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 207^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 279^{\text{mm}}$			
	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$
$f_0$	34.1	34.1	0.0	33.1	32.2	+0.9	37.4	37.55	-0.15
$f_1$	31.25	31.05	+0.2	34.5	35.5	-1.0	34.6	34.65	-0.05
$f_2$	32.85	32.7	+0.15	33.2	32.8	+0.4	36.55	36.95	-0.40
$f_3$	—	—	—	$= \frac{f_1 + f_2}{2}$	33.8	(+0.05)	36.0	36.2	-0.20

	$\rho_0 = 345^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 421^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 528^{\text{mm}}$		
	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$
$f_0$	36.8	36.4	+0.4	40.95	41.8	-0.85	42.6	42.05	+0.55
$f_1$	39.05	39.55	-0.5	39.2	38.7	+0.50	44.65	44.7	-0.05
$f_2$	36.7	36.7	0.0	41.7	41.7	0.0	41.9	42.4	-0.50
$f_3$	38.4	38.5	-0.1	37.9	39.3	-1.4	43.95	43.85	+0.10
$f_4$	$=f_3$	38.8	(-0.4)	$=f_0$	40.1	(+0.85)	$=f_3$	43.95	(0.0)

$\rho_0 = 632^{\text{mm}}$				$\rho_0 = 732^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 837^{\text{mm}}$		
	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$
$f_0$	47.3	48.0	-0.7	47.6	47.9	-0.3	52.6	53.5	-0.9
$f_1$	45.55	45.05	+0.5	51.45	51.1	+0.35	51.5	51.55	-0.05
$f_2$	46.7	47.7	-1.0	48.0	47.9	+0.1	53.55	53.9	-0.35
$f_3$	45.95	45.8	+0.15	51.6	50.9	+0.7	51.05	51.05	0.0
$f_4$	$=f_2$	46.3	(+0.4)	$=f_2$	48.7	(-0.7)	—	—	—
$f_5$	$=f_3$	47.6	(-0.9)	$=f_2$	49.2	(-1.2)	—	—	—
$f_6$	—	—	—	$=f_1$	50.8	(+0.65)	—	—	—

Summe der positiven Diff. =  $\Sigma (+\Delta) = 5.^\tau 00$

Summe der negativen Diff. =  $\Sigma (-\Delta) = 8.^\tau 50$

$\Delta$  im Mittel =  $\pm 0.^\tau 40$

Sept. 19. Maximum in der Mitte.  $\beta = 2m \cdot \pi$  Linie D

$$\rho = 936.5^{\text{mm}} \quad \lambda = 0.590^{\text{mm}} \quad \alpha = 12'.20 \quad i = 7.35^\circ$$

	$\rho_0 = 160^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 168^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 232^{\text{mm}}$		
	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$
$f_0$	34.6	35.15	-0.55	35.8	36.2	-0.4	37.0	36.9	+0.1
$f_1$	33.8	34.25	-0.45	33.15	33.85	-0.7	37.95	38.1	-0.15
$f_2$	—	—	—	37.4	37.25	+0.15	35.75	35.6	+0.15
$f_3$	—	—	—	—	—	—	$=f_1$	38.8	(-0.85)
$f_4$	—	—	—	—	—	—	$=f_1$	37.8	(+0.15)

$\rho_0 = 322^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 445^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 533^{\text{mm}}$			
	<i>B</i>	<i>R</i>	$\Delta$	<i>B</i>	<i>R</i>	$\Delta$	<i>B</i>	<i>R</i>	$\Delta$
$f_0$	41.8	41.3	+0.5	41.6	42.3	-0.7	48.2	48.45	-0.25
$f_1$	38.3	38.8	-0.5	46.45	45.8	+0.65	45.6	45.2	+0.4
$f_2$	41.7	41.85	-0.15	41.9	42.65	-0.75	47.7	48.6	-0.9
$f_3$	—	—	—	44.5	44.6	-0.1	44.6	45.35	-0.75
$f_4$	—	—	—	$=f_1$	45.0	(+1.45)	$=f_0$	47.4	(+0.8)

$\rho_0 = 649^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 833^{\text{mm}}$			
	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$
$f_0$	47.5	49.15	-1.65	57.2	58.25	-1.05
$f_1$	52.5	52.1	+0.4	54.5	54.55	-0.05
$f_2$	48.85	48.85	0.0	57.55	58.15	-0.6
$f_3$	50.75	52.3	-1.55	55.0	55.1	-0.1
$f_4$	$>f_2$	49.6		$\frac{f_2+f_3}{2}$	56.75	(-0.5)
$f_5$	$<f_3$			$=f_0$	57.4	(-0.2)

Summe der positiven Diff. =  $\Sigma (+\Delta) = 2^{\circ} 35$

Summe der negativen Diff. =  $\Sigma (-\Delta) = 11^{\circ} 35$

$\Delta$  im Mittel =  $\pm 0^{\circ} 51$

Das Ueberwiegen der negativen Differenzen deutet darauf hin, dass entweder  $\lambda$  zu gross oder  $\alpha$  zu klein bestimmt worden war. Man braucht  $\alpha$  nur um  $2''$  zu ändern, d. h.  $\alpha = 12' 23$  anzunehmen, so wird angenähert:

$\Sigma (+\Delta) = \Sigma (-\Delta)$ .

Sept. 22. Maximum in der Mitte.  $\beta = 2m . \pi$ . Linie F.

$\rho = 1085^{\text{mm}}$   $\lambda = 0.487^{\text{mm}}$   $\alpha = 8' 45$   $i = 6' 85$

$\rho_0 = 163^{\text{mm}}$				$\rho_0 = 187^{\text{mm}} *$				$\rho_0 = 337^{\text{mm}}$			
	$B$	$R$	$\Delta$		$B$	$R$	$\Delta$		$B$	$R$	$\Delta$
$f_0$	40.2	40.6	-0.4	37.8	39.55	-1.75		49.5	49.25	+0.25	
$f_1$	43.45	42.7	+0.75	46.3	44.55	+1.75		44.1	43.95	+0.15	
$f_2$	—	—	—	—	—	—		48.15	48.45	-0.30	

$\rho_0 = 499^{\text{mm}}$				$\rho_2 = 682^{\text{mm}}$				$\rho_0 = 883^{\text{mm}}$			
	$B$	$R$	$\Delta$		$B$	$R$	$\Delta$		$B$	$R$	$\Delta$
$f_0$	49.7	49.35	+0.35	60.7	60.5	+0.2		64.1	62.5	+1.6	
$f_1$	54.65	54.5	+0.15	55.45	55.35	+0.1		66.8	66.8	0.0	
$f_2$	50.6	50.1	+0.5	60.3	60.3	0.0		62.55	61.9	+0.65	
$f_3$	51.85	51.7	+0.15	56.5	56.95	-0.45		67.5	66.85	+0.65	
$f_4$	—	—	—	$=f_3$	56.4	(+0.1)		64.2	(-0.1)		
$f_5$	—	—	—	$=f_2$	60.1	(+0.2)		$=f_0$	162.3	(+1.8)	

Summe der positiven Diff. =  $\Sigma (+\Delta) = 7^{\circ} 25$

Summe der negativen Diff. =  $\Sigma (-\Delta) = 2^{\circ} 90$

$\Delta$  im Mittel =  $\pm 0^{\circ} 53$

\*) Die Messungsreihe für  $\rho_0 = 187^{\text{mm}}$  war die letzte an diesem Tage und vielleicht wegen Ermüdung weniger sorgfältig ausgeführt.

Sept. 26. Maximum in der Mitte.  $\beta = 2m . \pi$ . Linie D.

$\rho = 1085^{\text{mm}}$   $\lambda = 0.589^{\text{mm}}$   $\alpha = 8' 92$   $i = 6' 3$

	$\rho_0 = 194^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 355^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 516^{\text{mm}}$		
	B	R	$\Delta$	B	R	$\Delta$	B	R	$\Delta$
$f_0$	44.7	45.4	-0.7	57.8	57.1	+0.7	57.55	57.35	+0.2
$f_1$	51.5	51.45	+0.05	50.2	50.9	-0.7	63.05	63.1	-0.05
$f_2$	—	—	—	56.0	56.2	-0.2	56.75	57.3	-0.55
$f_3$	—	—	—	—	—	—	60.5	60.8	-0.3
$f_4$	—	—	—	—	—	—	$=f_1$	62.9	(+0.15)

	$\rho_0 = 647^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 723^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 889^{\text{mm}}$		
	<i>B</i>	<i>R</i>	$\Delta$	<i>B</i>	<i>R</i>	$\Delta$	<i>B</i>	<i>R</i>	$\Delta$
$f_0$	64.65	64.9	-0.25	70.4	70.5	-0.1	74.45	74.7	-0.25
$f_1$	65.75	64.6	+1.15	65.75	65.05	+0.7	74.4	74.0	+0.4
$f_2$	66.0	66.9	-0.9	70.55	70.95	-0.4	73.6	72.95	+0.65
$f_3$	62.6	62.05	+0.55	66.45	65.95	+0.5	76.95	76.95	0.0
$f_4$	—	—	—	$>f_3$	66.7		71.4	71.4	0.0
$f_5$	—	—	—	$<f_2$					
				$=f_0$	70.7	(-0.3)	—	—	—

Summe der positiven Diff. =  $\Sigma (+\Delta) = 4^{\circ} 90$

Summe der negativen Diff. =  $\Sigma (-\Delta) = 4^{\circ} 40$

$\Delta$  im Mittel =  $\pm 0^{\circ} 42$

Oct. 1. Minimum in der Mitte.  $\beta = (2m + 1) . \pi$ . Linie D.

$\rho = 1080^{\text{mm}}$   $\lambda = 0.589^{\text{mm}}$   $\alpha = 8' 95$   $i = 7' 8$

$\rho_0 = 180^{\text{mm}}$				$\rho_0 = 252^{\text{mm}}$				$\rho_0 = 350^{\text{mm}}$			
	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$		$B$	$R$	$\Delta$	
$f_1$	48.1	47.9	+0.2	48.9	49.9	-1.0		52.95	53.7	-0.75	
$f_2$	47.65	47.3	+0.35	51.6	51.2	+0.4		52.75	53.7	-0.95	
$f_3$	—	—	—	—	—	—		$>f_1$	55.0		

$\rho_0 = 495^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 612^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 734^{\text{mm}}$			$\rho_0 = 894^{\text{mm}}$			
	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$
$f_1$	59.2	59.4	-0.2	63.7	63.5	+0.2	68.4	68.2	+0.2	74.65	74.4	+0.25
$f_2$	58.65	58.95	-0.3	63.55	64.1	-0.55	67.45	68.3	-0.85	72.55	73.8	-1.25
$f_3$	58.2	58.9	-0.7	62.6	62.9	-0.3	68.35	68.5	-0.15	75.0	74.9	+0.1
$f_4$	$>f_1$	60.45	—	$=f_1$	63.7	0.0	—	—	—	—	—	—
$f_5$	—	—	—	$>f_1$	65.1	—	—	—	—	—	—	—

Summe der positiven Diff. =  $\Sigma (+\Delta) = 1^{\circ} 70$

Summe der negativen Diff. =  $\Sigma (-\Delta) = 7^{\circ} 00$

$\Delta$  im Mittel =  $\pm 0^{\circ} 48$

Oct. 3. Minimum in der Mitte.  $\beta = (2m + 1)\pi$ . Linie  $F$ .

$$\rho = 1075^{\text{mm}} \quad \lambda = 0.486^{\text{mm}} \quad \alpha = 9.0 \quad i = 7.2$$

	$\rho_o = 195^{\text{mm}}$			$\rho_o = 309^{\text{mm}}$			$\rho_o = 394^{\text{mm}}$			$\rho_o = 514^{\text{mm}}$	
	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$
$f_1$	39.1	39.25	-0.15	42.55	42.95	-0.4	45.40	45.6	-0.2	50.0	49.15 +0
$f_2$	40.2	40.15	+0.05	42.5	42.4	+0.1	45.6	45.4	+0.2	48.8	49.5 -0
$f_3$	—	—	—	43.75	43.8	-0.05	45.1	45.1	0.0	50.0	49.15 +0
$f_4$	—	—	—	—	—	—	> $f_1$	46.5	—	—	—

Summe der positiven Diff. =  $\Sigma (+\Delta) = 2.705$

Summe der negativen Diff. =  $\Sigma (-\Delta) = 1.75$

$\Delta$  im Mittel =  $\pm 0.732$

Bei einer jeden Messungsreihe war ausserdem die Reihenfolge der Fransen in Bezug auf ihre Helligkeiten geschätzt worden. Eine Vergleichung dieser Schätzungen mit den Breiten der Fransen, der Grösse nach geordnet, zeigte mit wenigen Ausnahmen eine so gute Uebereinstimmung, dass ich es für überflüssig gehalten habe, diese Schätzungen in die obige Zusammenstellung mit aufzunehmen. Drei vollständige Messungsreihen musste ich verwerfen; eine, weil ich nicht sicher war bei grösseren  $\rho_o$  die Mittelfranse richtig angenommen zu haben und die beiden andern, weil die Neigung der Spiegel sich während der Messungen um 20" resp. 25" geändert hatte.

Sieht man die durch Rechnung gefundenen Werthe der Fransenbreiten als exact an und berechnet damit den wahrscheinlichen Fehler einer gemessenen Fransenbreite, so erhält man:

für Sept. 17	w. F. = 0.736
„ „ 19	= 0.44
„ „ 22	= 0.52 (resp. 0.37, mit Fortlassung von
„ „ 26	= 0.36 $\rho_o = 187^{\text{mm}}$ )
„ Oct. 1	= 0.41
„ „ 3	= 0.32

Andererseits betrug der aus der Vergleichung der Messungen unter einander abgeleitete wahrscheinliche Fehler einer Bestimmung im Mittel:

$$w. F. = 0.725$$

Beachtet man nun, dass die der Rechnung zu Grunde liegenden Constanten, im Ganzen 7 an der Zahl, mit Fehlern behaftet sind, dass kleine Unebenheiten der Spiegel-ebenen, in der Nähe der beugenden Kante, die Erscheinung erheblich modificiren können, und endlich dass constante Fehler in der Auffassung der Minima nicht nur möglich, sondern sogar sehr wahrscheinlich sind, weil die Minima von Maximis ungleicher Helligkeit begrenzt werden, so gelangt man zu dem Schluss, dass die Unterschiede zwischen der Theorie und den Messungen durchweg innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen. Ich halte mich daher für berechtigt, die Uebereinstimmung der Theorie mit den Erscheinungen als eine vollkommen befriedigende bezeichnen zu dürfen.

Auch den in § 5 ausgesprochenen Satz über die Aenderung der Oscillationsphase der Fransen in Breite und Helligkeit mit dem Einfallswinkel  $i$ , habe ich, soweit es überhaupt mit Glasspiegeln, bei denen man sich auf kleine Einfallswinkel beschränken muss, möglich ist, durch Drehung des Spiegels bestätigt gefunden. Beispielsweise erhielt ich

$$\text{Oct. 1. } \rho = 1080^{\text{mm}} \quad \lambda = 0.589^{\text{mm}} \quad \rho_o = 210^{\text{mm}} \quad \alpha = 8.95$$

für  $i = 8.25$   $f_1 = f_2$  breiter und heller als  $f_o$ .

= 18.6  $f_o$  etwas breiter und heller als  $f_1$ .

= 23.9  $f_1 = f_2$  merklich schmaler und dunkler als  $f_o$ .

Diejenigen Fransen, welche bei dem Einfallswinkel  $i = 8.25$  breiter und heller waren, zeigten sich demnach bei  $i = 23.9$  schmaler und dunkler; die Interferenzbilder

waren also gewissermassen einander entgegengesetzt und die Oscillationsphase musste sich daher um nahezu  $\pi$  geändert haben. Durch Rechnung ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} \text{für } i &= 8.25^\circ \quad \frac{\pi \cdot a \cdot d \sin i}{\lambda} = 1.69 \\ &= 18.6^\circ \quad = 3.76 \\ &= 23.9^\circ \quad = 4.78 \end{aligned}$$

also die Aenderung der Oscillationsphase von  $i = 8.25^\circ$  bis  $i = 23.9^\circ$  gleich 3.09 d. h. sehr nahe gleich  $\pi$ .

Schliesslich sei noch mit einigen Worten der Versuche und Messungen erwähnt, welche ich mit einem Doppelprisma angestellt habe und die zu einem weniger günstigen Resultate geführt haben, als die obigen Messungen mit dem Doppelspiegel. Wenngleich sie auch in keiner Weise die Richtigkeit der Theorie in Frage stellen, so zeigen sie doch sehr auffällige Unterschiede zwischen der Theorie und den Erscheinungen, welche aufzuklären mir nicht vollständig gelungen ist.

Das Doppelprisma war das nämliche, welches *Toepler* und *Boltzmann* \*) bei ihren Versuchen über Luftschwingungen angewandt hatten und besass bei einer Höhe von 35<sup>mm</sup>, eine Breite von 25<sup>mm</sup> und eine Dicke von 3<sup>mm</sup>.

Die Untersuchung des Prismas wurde an dem *Starke*-schen Goniometer ausgeführt. Es zeigte sich, dass die eine Seitenfläche und die Schneide schwach gekrümmt und dass die brechenden Kanten nicht vollkommen parallel waren; jedoch schienen diese Fehler sehr unbedeutend zu sein.

Die brechenden Winkel, welche bei diesem Prisma sehr verschieden waren, bestimmte ich zu wiederholten Malen an

demselben Goniometer und zwar sowohl für den oberen als für den unteren Theil des Prismas; dabei wurde der Spalt (resp. das Kreuz) im Collimator mit einer Kochsalzflamme erleuchtet. Durch unmittelbare Beobachtung erhielt ich für den oberen Theil:

$$\begin{array}{ccc} (n-1) \cdot \alpha_1 & (n-1) \cdot \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 18' 47'' & 2' 50'' & 42' 4'' \end{array}$$

für den unteren Theil:

$$\begin{array}{ccc} 18' 35'' & 2' 52'' & 41' 57'' \end{array}$$

und daher im Mittel:

$$\begin{array}{ccc} 18' 41'' & 2' 51'' & 42' 0.5'' \end{array}$$

woraus:  $\alpha_1 = 36' 27''$   $\alpha_2 = 5' 34''$  und für die *D* Linie:  $n = 1.513$  folgt; für die *F* Linie nahm ich  $n = 1.519$  an.

Zur Erzeugung und Messung der Interferenzstreifen benutzte ich ganz dieselbe Anordnung, wie beim Doppelspiegel; die Senkrechtstellung des Prismas zur mittleren Richtung der Strahlen wurde am Spectrometer bis auf einen halben Grad genau ausgeführt und die Schneide in derselben Weise, wie die gemeinschaftliche Kante des Doppelspiegels, zur leuchtenden Linie parallel gestellt.

Die Schärfe des Interferenzbildes, und demgemäss auch die Genauigkeit der Einstellung, war ungefähr dieselbe, wie beim Doppelspiegel, eine Abhängigkeit der Fransenbreiten von der Höhe, in welcher sie gemessen wurden, kaum wahrzunehmen; dahingegen zeigte sich gleich auf den ersten Blick, dass die Erscheinung in Bezug auf die Mitte des Bildes nicht ganz symmetrisch war und dass die Fransen auf der einen Seite durchschnittlich etwas heller und breiter waren, als die correspondirenden Fransen auf der andern Seite. Beispielsweise ergab sich Sept. 1 die folgende Messungsreihe (jede Angabe das Mittel aus 4 Einstellungen):

\*) *Toepler* und *Boltzmann*. Pogg. Ann. Bd. 141.



	$\rho = 852^{\text{mm}}$			$\lambda = 0.589^{\text{mmm}}$		
$\rho_0$	195 <sup>mm</sup>	264 <sup>mm</sup>	349 <sup>mm</sup>	436 <sup>mm</sup>	565 <sup>mm</sup>	817 <sup>mm</sup>
$f_{3r}$	—	—	—	57.0	57.3	74.4
$f_{2r}$	—	52.2	50.0	56.8	63.2	64.3
$f_{1r}$	51.2	45.4	48.8	58.3	56.0	72.8
$f_0$	38.4	49.1	53.2	48.4	61.0	65.6
$f_{1l}$	49.3	43.3	48.6	58.4	55.9	71.6
$f_{2l}$	—	52.4	49.0	51.0	63.1	63.6
$f_{3l}$	—	—	—	55.0	55.2	71.8

Bei der Berechnung stellte sich ferner heraus, dass alle Fransen um eine im Vergleich zur Genauigkeit der Messungen sehr erhebliche Quantität stets breiter gemessen waren, als es die Theorie verlangt. Da ich keine grösseren Unregelmässigkeiten am Prisma bemerken konnte, so glaubte ich Anfangs den Grund dieser Unterschiede in andern Ursachen suchen zu müssen, bis ich durch Vielfältigung der Messungen und durch die später angeordneten Versuche mit dem Doppelspiegel die Gewissheit erlangte, dass dieselben nur in Fehlern des Prismas begründet sein können.

Ich beschränke mich deshalb im Folgenden darauf, einige dieser Messungen anzuführen und die nach der *Fresnel'schen* Formel berechnete ideale Fransenbreite  $\varphi_0$  mit den gemessenen zusammenzustellen:

	Aug. 18—21.			$\rho = 721^{\text{mm}}$			$\lambda = 0.589^{\text{mmm}}$		
$\rho_0$	199 <sup>mm</sup>	242 <sup>mm</sup>	290 <sup>mm</sup>	369 <sup>mm</sup>	430 <sup>mm</sup>	520 <sup>mm</sup>	603 <sup>mm</sup>	667 <sup>mm</sup>	719 <sup>mm</sup>
$f_0$	42.2	46.9	53.4	58.3	55.4	58.4	65.6	73.9	76.1
$f_1$	51.5	49.6	47.8	52.5	60.7	66.8	65.6	65.2	66.1
$f_2$	49.1	53.2	54.7	53.5	52.9	59.7	68.9	76.5	76.9
$f_3$	—	—	—	59.5	61.0	—	60.5	65.5	68.8
$\varphi_0$	43.1	45.1	47.4	51.1	53.9	58.2	62.1	65.1	67.5

	Aug. 31.		$\rho = 710^{\text{mm}}$		$\lambda = 0.486^{\text{mmm}}$	
$\rho_0$	238 <sup>mm</sup>	298 <sup>mm</sup>	346 <sup>mm</sup>	491 <sup>mm</sup>	591 <sup>mm</sup>	684 <sup>mm</sup>
$f_0$	42.8	43.9	40.9	51.5	54.9	55.0
$f_1$	37.3	41.0	48.6	47.3	52.8	60.5
$f_2$	42.2	41.6	39.3	53.0	52.8	51.3
$f_3$	—	45.0	47.5	47.3	57.3	61.3
$\varphi_0$	36.8	39.1	41.0	46.6	50.5	54.0

	Sept. 1.		$\rho = 852^{\text{mm}}$	$\lambda = 0.589^{\text{mmm}}$		
$\rho_0$	195 <sup>mm</sup>	264 <sup>mm</sup>	349 <sup>mm</sup>	436 <sup>mm</sup>	565 <sup>mm</sup>	817 <sup>mm</sup>
$f_0$	38.4	49.1	53.2	48.4	61.0	65.6
$f_1$	50.3	44.4	48.7	58.4	56.0	72.2
$f_2$	—	52.3	49.5	50.9	63.2	64.0
$f_3$	—	—	—	56.0	56.2	73.1
$\varphi_0$	41.5	44.3	47.6	51.1	56.2	66.2

	Sept. 2.		$\rho = 953^{\text{mm}}$	$\lambda = 0.589^{\text{mmm}}$	
$\rho_0$	162 <sup>mm</sup>	270 <sup>mm</sup>	398 <sup>mm</sup>	540 <sup>mm</sup>	781 <sup>mm</sup>
$f_0$	37.5	51.9	48.7	59.7	60.5
$f_1$	50.4	41.8	53.8	51.6	67.4
$f_2$	—	49.5	47.1	59.8	61.8
$f_3$	—	—	—	51.7	64.8
$\varphi_0$	39.5	43.4	47.9	52.9	61.5

	Sept. 2.		$\rho = 950^{\text{mm}}$		$\lambda = 0.486^{\text{mmm}}$		
$\rho_0$	160 <sup>mm</sup>	234 <sup>mm</sup>	307 <sup>mm</sup>	411 <sup>mm</sup>	535 <sup>mm</sup>	661 <sup>mm</sup>	819 <sup>mm</sup>
$f_0$	32.3	41.0	36.5	43.0	44.2	52.4	53.2
$f_1$	36.8	34.8	42.1	40.2	48.6	47.4	54.8
$f_2$	—	37.3	37.1	44.4	41.8	50.8	51.3
$f_3$	—	—	39.5	39.3	47.2	47.9	56.0
$\varphi_0$	32.1	34.3	36.4	39.4	43.1	46.7	51.3

	Sept. 3.		$\rho = 1094^{\text{mm}}$		$\lambda = 0.589^{\text{mmm}}$	
$\rho_0$	155 <sup>mm</sup>	270 <sup>mm</sup>	379 <sup>mm</sup>	518 <sup>mm</sup>	686 <sup>mm</sup>	835 <sup>mm</sup>
$f_0$	38.2	47.8	45.3	54.7	54.5	60.3
$f_1$	46.9	40.9	51.5	49.5	60.5	63.5
$f_2$	—	—	44.8	54.8	54.4	58.1
$f_3$	—	—	—	—	58.8	64.1
$\varphi_0$	38.6	42.1	45.5	49.8	55.0	59.6

	Sept. 5.		$\rho = 1094^{\text{mm}}$		$\lambda = 0.486^{\text{mmm}}$		
$\rho_0$	155 <sup>mm</sup>	246 <sup>mm</sup>	317 <sup>mm</sup>	417 <sup>mm</sup>	521 <sup>mm</sup>	621 <sup>mm</sup>	744 <sup>mm</sup>
$f_0$	30.6	36.8	36.7	42.1	39.8	47.4	46.4
$f_1$	37.4	33.4	39.9	37.7	46.1	43.5	50.6
$f_2$	—	36.1	37.6	42.0	39.8	47.4	46.2
$f_3$	—	—	—	—	—	—	50.2
$\varphi_0$	31.4	33.8	35.5	38.0	40.7	43.2	46.2

Man ersieht aus dieser Zusammenstellung, dass die ideale Fransenbreite  $\varphi_0$  fast überall der kleinsten gemessenen Breite am nächsten kommt, während sie der Theorie nach angenähert gleich dem Mittel aller Fransenbreiten hätte sein müssen. Es liegt nun die Vermuthung am nächsten, dass diese Unterschiede von der schon am Goniometer bemerkten kleinen Krümmung der einen Seitenfläche des Prismas herrühren. Vorausgesetzt, dass dies der Fall und die Krümmung eine derartige ist, dass nur die Lage der einen virtuellen Linie um eine von  $\rho$  abhängige Quantität geändert wird (wie dies z. B. bei einer Cylinderfläche der Fall wäre), so wird auch die ideale Fransenbreite ein wenig geändert werden. Bezeichnet man nämlich mit  $d\rho$ , und  $dx$ , die Aenderungen der Coordinaten von  $L_1$  und mit  $d\varphi_0$  die dadurch bewirkte Aenderung von  $\varphi_0$ , so erhält man durch eine leichte Rechnung:

$$d\varphi_0 = -\varphi_0 \left\{ \frac{dx_1}{x_1 - x_2} + \frac{d\rho_1 \left( \frac{\rho_0}{\rho} (x_1 + x_2) + 2x_1 - \xi_0 \right)}{2(\rho_0 + \rho)(x_1 - x_2)} \right\}$$

worin  $\xi_0$  die nämliche Bedeutung hat, wie oben. Unter anderm würde aus dieser Formel folgen, dass die correspondirenden Fransen rechts und links eine etwas verschiedene Breite besitzen müssen.

Nehmen wir jetzt insbesondere an, dass  $dx$ , verschwindend klein gegenüber  $\frac{d\rho_1}{\rho_0 + \rho}$  ist, so lässt sich näherungsweise berechnen, wie gross  $d\rho$ , angenommen werden müsste, um die obigen Unterschiede zu erklären.

Für  $\rho = 721^{\text{mm}}$   $\rho_0 = 520^{\text{mm}}$   $\lambda = 0.589^{\text{mm}}$  ergibt sich beispielsweise:

$$x_1 = 3.918^{\text{mm}} \quad x_2 = -0.598^{\text{mm}} \quad \varphi_0 = 58.2$$

und demnach:  $\varphi_0 \frac{\left( \frac{\rho_0}{\rho} (x_1 + x_2) + 2x_1 \right)}{2(\rho_0 + \rho)(x_1 - x_2)} = 0.053$

$$\text{Für } \rho = 1094^{\text{mm}} \quad \rho_0 = 518^{\text{mm}} \quad \lambda = 0.589^{\text{mm}}$$

$$x_1 = 5.941^{\text{mm}} \quad x_2 = -0.908^{\text{mm}} \quad \varphi_0 = 49.8$$

und demnach:  $\varphi_0 \frac{\left( \frac{\rho_0}{\rho} (x_1 + x_2) + 2x_1 \right)}{2(\rho_0 + \rho)(x_1 - x_2)} = 0.032$

Damit nun die ideale Fransenbreite angenähert gleich dem Mittel aus der grössten und kleinsten gemessenen Breite wird, müsste im ersten Fall  $d\varphi_0 = +4.2$ , im zweiten  $d\varphi_0 = +2.3$  sein, woraus im ersten Fall  $d\rho_1 = -79^{\text{mm}}$ , im zweiten  $d\rho_1 = -71^{\text{mm}}$  folgen würde. Es müsste demnach der Abstand der virtuellen Lichtlinie  $L_1$  von der Schneide, für  $\rho = 1$  Meter, um ungefähr  $75^{\text{mm}}$  verkleinert werden, was eine sehr beträchtliche Krümmung der einen Prismenfläche voraussetzen würde.

Um die Zulässigkeit dieser Annahme zu prüfen, wurde das Fernrohr eines Kathetometers in einer Entfernung von einem Meter auf einen fein getheilten Maasstab scharf eingestellt und darauf das Doppelprisma vor das Objectiv gebracht und seine Schneide den Theilstrichen des Maasstabs parallel gestellt. Wenn dann die Entfernungen  $OL_1$  und  $OL_2$  verschieden gewesen wären, so hätten die durch das Prisma gesehenen zwei Bilder des Maasstabs eine verschiedene Deutlichkeit zeigen müssen. Indess war ihre Schärfe nahezu dieselbe, wie diejenige des directen Bildes und durch eine Verrückung des Maasstabs um  $10^{\text{mm}}$  wurden beide merklich undeutlicher, ein Beweis, dass die obige Annahme einer einfachen Ortsveränderung von  $L_1$ , in der Richtung der Z-Axe, unzulässig ist.

Auch die Distanz der Bilder des Maasstabs konnte mit dem Kathetometer direct gemessen werden und es ergab sich, dass die aus den Winkeln des Prismas berechneten Distanzen in befriedigender Uebereinstimmung mit

diesen direct gemessenen Distanzen waren. So erhielt ich z. B.:

$$\text{für } \rho = 845^{\text{mm}}$$

$$\text{für } \rho = 1153^{\text{mm}}$$

mit dem Kathetometer:

$$x_1 - x_2 = 5^{\text{mm}}317$$

$$x_1 - x_2 = 7^{\text{mm}}260$$

während die nach der Formel:  $x_1 - x_2 = (n-1) \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \rho$  berechneten Distanzen:

$$x_1 - x_2 = 5^{\text{mm}}290$$

$$x_1 - x_2 = 7^{\text{mm}}218$$

ergaben.

Zur Erklärung jener Unterschiede scheint mir demnach nur noch die eine Annahme übrig zu bleiben, dass die Seitenflächen des Prismas nur in allernächster Nähe der Schneide gekrümmt, in weiterer Entfernung aber plan waren. Eine derartige Krümmung brauchte mit dem Goniometer oder auf die eben erwähnte Weise mit dem Kathetometer gar nicht wahrgenommen zu werden, während sie immerhin die Phase der in der Nähe der Schneide vorbeigehenden Lichtstrahlen erheblich ändern konnte. Darauf deutet auch der Umstand hin, dass das Interferenzbild an seinen Rändern weniger symmetrisch war und grössere Unregelmässigkeiten zeigte, als in der Mitte. Ferner wird diese Annahme noch dadurch sehr wahrscheinlich gemacht, dass beim Auflegen eines Planglases auf die Seitenflächen des Prismas, die eine Fläche in der Nähe der Schneide Spuren der *Newton'schen* Farbenstreifen erkennen liess, während dieselben in grösserer Entfernung von der Schneide gänzlich verschwanden und auch bei den andern Flächen nicht zu bemerken waren. Zur Gewissheit hätte man in diesem Punkte aber nur dann gelangen können, wenn man die Messungen auch unter erheblich grösseren Entfernungen  $\rho$  und  $\rho_0$  angestellt hätte, wozu es mir im Laboratorium an Raum fehlte. — Es ist demnach nicht möglich, aus den

mit dem Prisma angestellten Messungen auf eine quantitative Uebereinstimmung der Theorie mit den Erscheinungen zu schliessen und ich möchte fast bezweifeln, dass es möglich ist, Doppelprismen mit der für diesen Zweck nothwendigen Genauigkeit herzustellen\*). Dass aber andererseits diese Messungen in keiner Weise der Theorie widerstreiten und sie sogar in gewissem Grade bestätigen, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Messungen auf die in § 3 aufgestellten Sätze hin prüft.

Bei der Grösse der Unterschiede in der Helligkeit und Breite der Fransen und bei der Gesetzmässigkeit, welche dieselben befolgen und die sich kurz dahin aussprechen lässt, dass die breiteren Fransen zugleich heller sind und in der Mitte des Interferenzbildes die breiteren und schmäleren Fransen sich abwechseln, ist es gewiss zu verwundern, dass man nicht schon früher auf diese Unterschiede aufmerksam wurde. Zum Theil mag dies seinen Grund darin haben, dass nach *Fresnel* keine genaueren Messungen mehr an solchen Interferenzerscheinungen angestellt worden sind und dieselben meist nur für andere Zwecke und mit weissem Licht hervorgerufen wurden; immerhin ist es auffallend, dass die Abweichungen von der *Fresnel'schen* Theorie nicht von denjenigen Beobachtern bemerkt worden sind, welche diese Erscheinungen zum Gegenstande eines besonderen Studiums gemacht haben. *Quincke* erwähnt zwar an einer Stelle, dass unter Umständen in Folge der Beugung Unregelmässigkeiten im Interferenzbilde entstehen können, scheint aber die Gesetzmässigkeit in diesen Abweichungen

\*) Zwei andere Prismen, mit denen ich noch Versuche angestellt habe, erwiesen sich von vornherein als ganz unbrauchbar für meinen Zweck, wiewohl sie die Interferenzerscheinungen gleichfalls sehr scharf zeigten. Aehnliche Erfahrungen hat auch *Quincke* mit Doppelprismen gemacht. cf. Pogg. Ann. Bd. 132. pg. 41.

nicht erkannt zu haben und bestätigt an anderer Stelle ausdrücklich die Richtigkeit der *Fresnel'schen* Beschreibung.

Ebenso könnte es auch auffallen, dass nicht schon *Fresnel* selbst durch seine Messungen auf die Abweichungen von seiner Theorie aufmerksam wurde. Berücksichtigt man jedoch die Bedingungen, unter denen er die Erscheinungen erzeugte und die Art und Weise, wie er seine Messungen anstellte, so findet man hierfür eine genügende Erklärung.

Von den drei Messungen, welche *Fresnel* zur Bestätigung seiner Theorie bekannt gemacht hat \*), beziehen sich zwei auf den Doppelspiegel und eine auf das Doppelprisma; nach seinen Angaben war:

bei der ersten Messung, mit dem Doppelspiegel:

$$\rho = 2323^{\text{mm}} \quad \rho_0 = 4693^{\text{mm}} \quad x_1 - x_2 = 12.16^{\text{mm}} \quad \lambda = 0.638^{\text{mmm}}$$

bei der zweiten Messung, mit dem Doppelspiegel:

$$\rho = 2321^{\text{mm}} \quad \rho_0 = 4638^{\text{mm}} \quad x_1 - x_2 = 14.65^{\text{mm}} \quad \lambda = 0.638^{\text{mmm}}$$

bei der dritten Messung, mit dem Doppelprisma:

$$\rho_0 + \rho = 7142^{\text{mm}} \quad x_1 - x_2 = 21.65^{\text{mm}} \quad \lambda = 0.638^{\text{mmm}}$$

(bei dieser letzten Messung ist die Distanz  $\rho$  nicht angegeben; es ist aber wahrscheinlich, dass sie nahezu dieselbe war, wie bei den ersten Messungen und ich nehme daher  $\rho = 2322^{\text{mm}}$   $\rho_0 = 4820^{\text{mm}}$  an).

Berechnet man nun mit diesen Daten die ideale Fransenbreite  $\varphi_0$  und die Abweichungen der Fransenbreiten und Helligkeiten,  $a$  und  $b$ , in derselben Weise, wie es oben pg. 36 geschehen ist, so erhält man:

für die erste Messung	$a = 2.48$	$b = 7.80$	$\varphi_0 = 0.368^{\text{mm}}$
„ „ zweite „	$= 2.06$	$= 6.48$	$= 0.303^{\text{mm}}$
„ „ dritte „	$= 1.39$	$= 4.36$	$= 0.211^{\text{mm}}$

Man sieht also zunächst, dass *Fresnel* die Erscheinungen unter solchen Bedingungen herstellte, bei welchen die Beugung thatsächlich nur einen geringen Einfluss auf die Fransenbreiten ausübt. Zu seinen Messungen benutzte er ferner ein Fadenmikrometer mit geringer Vergrößerung, welches die Abstände der Streifen nur bis auf  $0.01^{\text{mm}}$  zu bestimmen erlaubte, während die Unterschiede in den Fransenbreiten im Maximum  $0.02^{\text{mm}}$  betrugen. Endlich mass er auch nicht die Abstände aufeinanderfolgender Minima, sondern die Abstände entfernter Minima von einander und erhielt deshalb für die Fransenbreite einen Mittelwerth, der sehr nahe der idealen Fransenbreite  $\varphi_0$  gleichkommen musste.

\*) *Fresnel*, Oeuvr. compl. T. 1 pg. 329.

## Thesen.

1. Die Gültigkeit des *Huyghens'schen* Principis ist nur für sehr dünne Strahlenbündel erwiesen.
2. Die Frage, ob durch die Bewegung einer Lichtquelle Schwingungsdauer und Wellenlänge geändert werden, lässt sich gegenwärtig nicht beantworten.
3. Eine Verschiebung der Spectrallinien in Folge der relativen Bewegung der Lichtquelle gegen den Beobachter ist experimentell nicht nachgewiesen.
4. Die *Neumann'sche* Annahme, nach welcher das Licht in der Polarisations-Ebene schwingt, besitzt eine grössere Wahrscheinlichkeit als die entgegenstehende *Fresnel'sche*.
5. Die Elasticität des einen Körper frei durchdringenden Aethers wird durch Bewegung des Körpers geändert.
6. Die Raumcurven dritter Ordnung oder räumlichen Kegelschnitte besitzen im Allgemeinen keine den Kegelschnitten analogen Focaleigenschaften.
7. Jede ganze Zahl  $m$  lässt sich auf so viele verschiedene Arten in die Summe von drei ganzen Zahlen zerlegen, als die dem Quotienten  $\frac{m^2}{12}$  nächstliegende ganze Zahl angiebt.